Sílvia Cristina Matos Lopes

Licenciada em Matemática

Relatório de Estágio

O jogo como promotor da aprendizagem matemática

Um estudo sobre a influência do jogo na aprendizagem de alunos do 10.º ano do Ensino Secundário

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em Ensino de Matemática no 3º Ciclo do Ensino Básico e no Secundário

Orientadora: Professora Doutora Helena Rocha, Professora Auxiliar, Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa

Co-orientadora: Licenciada Maria do Rosário Lopes, Professora, Agrupamento de Escolas António Gedeão

Júri:

Presidente: Prof. Doutora Maria Helena Coutinho Gomes de Almeida Santos
Arguente: Prof. Doutor António Manuel Dias Domingos
Vogais: Prof. Doutora Helena Cristina Oitavem Fonseca da Rocha
Prof. Maria do Rosário Dias Gaiteiro Lopes

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Julho de 2016

Sílvia Cristina Matos Lopes

Licenciada em Matemática

Relatório de Estágio
O jogo como promotor da aprendizagem matemática
Um estudo sobre a influência do jogo na aprendizagem de alunos do 10.º ano do Ensino Secundário

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em Ensino de Matemática no 3º Ciclo do Ensino Básico e no Secundário

Orientadora: Professora Doutora Helena Rocha, Professora Auxiliar, Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa

Co-orientadora: Licenciada Maria do Rosário Lopes, Professora, Agrupamento de Escolas António Gedeão

Júri:

Presidente:	Prof. Doutora Maria Helena Coutinho Gomes de Almeida Santos
Arguente:	Prof. Doutor António Manuel Dias Domingos
Vogais:	Prof. Doutora Helena Cristina Oitavem Fonseca da Rocha
	Prof. Maria do Rosário Dias Gaiteiro Lopes

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Julho de 2016

O jogo como promotor da aprendizagem matemática

Um estudo sobre a influência do jogo na aprendizagem de alunos do 10.º ano do Ensino Secundário

Agradecimentos

A gratidão é a memória do coração.

À Professora Doutora Helena Rocha que me mostrou o caminho a seguir, potenciou a minha criatividade, abriu-me o mundo da investigação e me deu muita força ao longo deste percurso.

À Professora Rosário Lopes por todo o apoio prestado, pela disponibilidade que sempre demonstrou, pelas constantes palavras de incentivo e por tudo o que me ensinou.

À Professora Doutora Maria Helena Santos pelos conselhos que me deu e que me ajudaram a refletir de outra forma sobre a minha prática enquanto futura professora.

Ao Professor Narciso Marnoto que permitiu que o acompanhasse em todas as tarefas da direção de turma e que me mostrou, com toda a sua humanidade e experiência, como ser um excelente diretor de turma.

À Carolina Moreira por partilhar comigo esta experiência e me acompanhar em todas as aventuras deste estágio.

Aos alunos que integraram as turmas que acompanhei, em especial aos que voluntariamente participaram no estudo.

Aos amigos que compreenderam as minhas ausências e que a distância não fez com que os sentisse longe.

Ao Manuel João que me apoiou naqueles momentos em que me senti mais frágil e desamparada, me mostrou sempre o lado positivo de cada situação e foi o fruto da minha inspiração.

À minha família, o maior agradecimento. Aos meus queridos pais, por serem modelos de coragem, pelo seu apoio incondicional, pelas suas palavras doces e reconfortantes e por toda a ajuda na superação dos meus obstáculos. Aos meus queridos avós, por acreditarem sempre em mim e me fazerem sentir especial.

Resumo

A presente dissertação divide-se em duas partes, a primeira dedicada ao relatório relativo ao estágio pedagógico e a segunda ao trabalho de investigação na prática pedagógica.

O relatório de estágio traduz o trabalho desenvolvido no âmbito da prática pedagógica supervisionada, incluindo uma breve caraterização do contexto escolar bem como uma reflexão crítica acerca dos aspetos considerados mais relevantes na prática pedagógica.

No trabalho de investigação procurou-se compreender a influência da prática e construção de jogos, com conteúdos pertencentes ao programa, na aprendizagem e no desenvolvimento de capacidades matemáticas dos alunos do 10.º ano do Ensino Secundário. Mais concretamente pretendeu-se responder às seguintes questões:

1. Qual o contributo da prática do jogo na aprendizagem e no desenvolvimento de capacidades matemáticas?

2. Qual o comportamento dos alunos em relação à cooperação e à competição durante a prática do jogo e em que medida este comportamento promove a aprendizagem matemática?

3. Quais os momentos do jogo onde os alunos manifestam maiores dificuldades?

4. Em que medida a construção de jogos favorece o aprofundamento de conceitos matemáticos?

O estudo segue uma metodologia qualitativa de índole interpretativa desenvolvida em quatro estudos de caso. Foram utilizadas técnicas de recolha de dados baseadas na aplicação de um questionário, na observação de alunos, na realização de entrevistas e na recolha documental.

As conclusões alcançadas sugerem que o jogo pode constituir uma ferramenta útil no processo de ensino aprendizagem da matemática de alunos do 10.º ano do Ensino Secundário. Através da prática de jogos, as alunas participantes no estudo trabalharam os conteúdos já lecionados, necessitando de desenvolver o seu conhecimento e algumas capacidades matemáticas para poderem jogar. Quanto à vertente competitiva inerente a qualquer jogo, esta foi promotora do desejo de querer aprender para aumentar as possibilidades de vencer. Por outro lado, as alunas mostraram espírito de cooperação na superação dos obstáculos nos diferentes momentos de jogo. Foi necessário definir, tendo por base modelos de outros autores, um quadro que sintetizasse os momentos da prática dos jogos usados. Em relação às dificuldades evidenciadas, no momento designado debate foi possível evidenciar constrangimentos, principalmente no uso de uma linguagem matemática rigorosa. O estudo sugere ainda que a tarefa de construção de um jogo, na maioria das alunas, resultou na mobilização dos seus conhecimentos e no desenvolvimento de capacidades essenciais à aprendizagem da disciplina de matemática.

Palavras-chave: estágio pedagógico; jogo; aprendizagem; ensino secundário; matemática.

Abstract

This dissertation is organised in two parts: the first part assigned to the teaching training activities and the second part associated to the teaching practice research.
The teaching training embodies the activities developed under the supervised teaching practice scope, including a brief characterisation of the academic environment, as well as a critical reflexion on the most relevant issues that have arisen during the teaching practice.
Over the research part, we aimed to understand the influence of the practice and construction of games, according to the topics integrated in the 10^{th} grade math syllabus. Furthermore, we aim to provide outcomes on the following research questions:

1. Which is the contribution of the games' practice in learning and in the development of mathematical skills?

2. Which is the students' behaviour in relation to the cooperation and competition over the game's practice and in which way that behaviour promotes the mathematical learning?

3. Which are the moments of the game where students have shown more difficulties?

4. How does the game's construction can promote the concepts assimilation?

This research follows an interpretive qualitative approach, developed over four case studies. The methods of data collection were based on inquiry by questionnaire and interview, on direct observation, and also based on content analysis.
The conclusions achieved suggest that the game can act as a useful tool in the math learning process for the 10^{th} grade secondary training level. Through the games' practice, students involved have managed the contents previously thought, however requiring some knowledge developments and other complimentary skills towards that practice implementation. Relating the competitive approach associated to those games, it has also increased the forthcoming wish to win. Furthermore, those students have shown their cooperation abilities in overcoming all the obstacles over the game's steps. Based on some theoretical models, the critical moments of practice were synthetized in an adequate scoreboard. Regarding the most noted weaknesses, it was possible to identify some constraints, in particular in the use of a mathematical feasible language. This study also suggests that the game's construction, in most cases, has increased the knowledge application and the development of basic skills towards the maths learning process.

Keywords: teaching training, game, learning, undergraduate secondary school, maths.

Índice

PARTE I 1
1. A Escola e o Concelho de Almada 3
1.1. Almada 3
1.2. Agrupamento de Escolas António Gedeão 4
1.3. Escola Secundária António Gedeão 5
1.4. O Patrono 7
2. Caracterização da Turma do 10.º ano 9
3. Prática Pedagógica Supervisionada 14
3.1. Aulas lecionadas 14
3.2. Planos de Aula 15
3.3. A turma do 10.º ano 17
3.3.1. Primeiro Período 17
3.3.1.1. Avaliação e Classificação 17
3.3.1.2. Aulas lecionadas 19
3.3.1.2.1. Primeira Aula – Lógica e Teoria dos Conjuntos (LTC 10) 19
3.3.1.2.2. Segunda Aula – Álgebra (ALG 10) 21
3.3.1.2.3. Terceira Aula - Álgebra (ALG 10) 22
3.3.2. Segundo Período 23
3.3.2.1. Avaliação 23
3.3.2.2. Aulas lecionadas 24
3.3.2.2.1. Quarta Aula – Geometria Analítica (GA 10) 24
3.3.2.2.2. Quinta Aula – Geometria Analítica (GA 10) 25
3.3.3. Terceiro Período 27
3.3.3.1. Avaliação 27
3.3.3.2. Aulas lecionadas 28
3.3.3.2.1. Sexta Aula – Funções Reais de Variável Real (FRVR 10) 28
3.3.4. O Programa do 10.º ano de Matemática A e o Manual Adotado 29
3.4. A turma do 9º ano 32
3.4.1. Aulas lecionadas 32
3.4.1.1. Primeira Aula – Álgebra (ALG 9) 32
3.4.1.2. Segunda Aula – Geometria (GM 9) 33
3.4.2. Oferta Complementar 35
3.4.3. Direção de Turma 35
3.5. Componente não letiva 37
3.5.1. Aulas de Apoio 37
3.5.2. Concursos matemáticos 37
3.5.3. Reuniões assistidas 38

3.6. Reflexão Crítica sobre a Prática Pedagógica 40
PARTE II 45
1. Introdução 47
1.1. Motivação e pertinência do estudo 47
1.2. Objetivos e organização do estudo 49
2. O jogo no ensino da matemática 51
2.1. O jogo no contexto educacional 51
2.2. Classificação de jogos 52
2.3. Jogar em grupo 55
2.4. Jogo no ensino-aprendizagem da Matemática 57
2.5. O papel do professor 61
2.6. Os momentos de jogo 63
2.7. O jogo no currículo de Matemática 65
2.8. Estudos efetuados 66
3. Metodologia 69
3.1. Investigação qualitativa 69
3.2. Estudo de caso 71
3.3. Técnicas de recolha de dados 73
3.3.1. Observação participante e não participante 73
3.3.2. Entrevista 74
3.3.3. Questionário 75
3.4. Seleção dos participantes 76
3.5. Procedimentos metodológicos adotados 76
3.5.1. Critérios de escolha dos alunos e formação dos grupos 78
3.5.2. Técnicas e instrumentos de recolha de dados 79
3.5.2.1. Observação participante e não participante 79
3.5.2.2. Questionário 80
3.5.2.3. Entrevista semiestruturada 80
3.5.2.4. Recolha documental 81
3.5.3. Sessões de Trabalho 81
3.6. Os jogos aplicados 82
3.6.1. Polygame 82
3.6.2. Qual é Qual? 83
4. Apresentação e análise de dados 85
4.1. Leonor 85
4.1.1. Caraterização de Leonor 85
4.1.2. Jogo 1 – Polygame 85
4.1.3. Jogo 2 – Qual é Qual? 89
4.1.4. Construção do jogo 93

4.1.5. Considerações finais 95
4.2. Maria 97
4.2.1. Caraterização de Maria 97
4.2.2. Jogo 1 – Polygame 97
4.2.3. Jogo 2 – Qual é Qual? 101
4.2.4. Construção do jogo 105
4.2.5. Considerações finais 109
4.3. Vitória 110
4.3.1. Caraterização de Vitória 110
4.3.2. Jogo 1 – Polygame 111
4.3.3. Jogo 2 – Qual é Qual? 114
4.3.4. Construção do jogo 119
4.3.5. Considerações finais 123
4.4. Simone 125
4.4.1. Caraterização de Simone 125
4.4.2. Jogo 1 – Polygame 125
4.4.3. Jogo 2 – Qual é Qual? 129
4.4.4. Construção do jogo 134
4.4.5. Considerações finais 135
5. Conclusão 137
Referências Bibliográficas 147
Anexos 151

Índice de Tabelas

Tabela 1.1.: Caraterização da escola……………………………………….........…………...7
Tabela 2.1.: Caraterização das classificações da turma ao longo dos períodos letivos ………10
Tabela 3.1.: Aulas lecionadas ao longo do ano letivo…………………………………….......14
Tabela 3.2.: Horário de matemática A na turma do 10.º ano………………………………… 17
Tabela 3.3.: Instrumentos de avaliação aplicados no 1.º Período…………………………… 18
Tabela 3.4.: Instrumentos de Avaliação aplicados no 2.º período…………………….……... 23
Tabela 3.5.: Instrumentos de Avaliação aplicados no 3.º período…………………………… 27
Tabela 3.6.: Tempos letivos atribuídos a cada Domínio…………………………………….. 31
Tabela 1: Momentos de jogo propostos por Grando (2004)…….…………………………… 64
Tabela 2: Momentos de jogo propostos por Sá e Zenhas (2004)………………………….…. 65
Tabela 3: Composição dos grupos……………………………………………………….... 78
Tabela 4: Classificação dos alunos nos testes e na participação em aula do 1.º período……..79
Tabela 5: Momentos dos jogos aplicados…………………………………………………141

Índice de Figuras

Figura 1.1.: Mapa da cidade de Almada……………………………………………….……… 3
Figura 1.2.: Rómulo de Carvalho na primeira visita à escola…………………………….………8
Figura 2.1.: Distribuição das idades dos alunos da turma do 10.º ano…………..…………… 9
Figura 2.2.: Classificação no final do 9.º ano e no EN do 3.º Ciclo a matemática…………... 10
Figura 2.3.: Evolução da média das classificações da turma ao longo do 10.º ano…...……... 11
Figura 2.4.: Classificações atribuídas ao trabalho de casa em cada período………………… 11
Figura 2.5.: Modelos de calculadoras usadas pelos alunos...................…..…………………12
Figura 2.6.: Habilitações dos encarregados de educação….……….................…………….. 12
Figura 2.7.: União de freguesias onde se situa a residência dos alunos …........…………… 13
Figura 3.1.: Manual adotado para o 10º ano………………………………………………… 31
Figura 3.2.: Cartaz do projeto………………………………………………………....... 37
Figura 1: Carta do tabuleiro e carta mistério………………………………………………… 83
Figura 2: Disposição das cartas no tabuleiro de Leonor no último jogo……………….......... 92
Figura 3: Perguntas formuladas por Leonor………………………………………………… 92
Figura 4: Perguntas formuladas por Maria…………………………………….………… 104
Figura 5: Disposição das cartas no tabuleiro de Maria no último jogo…………………….. 105
Figura 6: Esboço de Maria……………………………………………………………….. 107
Figura 7: Esboço do Domizzle……………………………………………........................108
Figura 8: Jogo Domizzle…………………………………………………………….........108
Figura 9: Disposição das cartas no tabuleiro de Vitória no último jogo……………….........117
Figura 10: Perguntas formuladas por Vitória……………………………………….........118
Figura 11: Folha de rascunho onde o grupo esboça as ideias para o jogo………...……... 121
Figura 12: Vitória a trabalhar na folha de rascunho do seu grupo……………....………...122
Figura 13: O Resgate Naval…………………………………………………...………… 123
Figura 14: Combinação de dois polinómios em simultâneo………………...………........128
Figura 15: Perguntas formuladas por Simone……………………………………............134

PARTE I

Relatório de Estágio

1. A Escola e o Concelho de Almada

1.1. Almada

Almada, elevada à categoria de cidade em 1973, pertence ao Distrito de Setúbal e à área metropolitana de Lisboa, sendo sede de um município com cerca de 71 Km² de área e 175 000 habitantes subdividido em 5 freguesias (ver fig. 1.1.). O município é limitado pelo Seixal a leste, por Sesimbra a sul, pelo Oceano Atlântico a oeste, abrindo-se a norte e nordeste para o Estuário do Tejo, frente aos concelhos de Lisboa e Oeiras.

Na educação, o concelho, tal como o País, progrediu muito nas últimas décadas. Segundo os Censos de 2011, a proporção da população com ensino superior é de 14,5%, quando em 2001 era 9,1%. Paralelamente, de 2001 a 2011, a taxa de analfabetismo passou de 6,06% para 3,27%. Atualmente no município existem 129 escolas, onde 61 são estatais, o que corresponde a cerca de 35 mil alunos na rede pública (desde o 1.º ciclo ao ensino superior).

Figura 1.1.: Mapa da cidade de Almada.

1.2. Agrupamento de Escolas António Gedeão

O Agrupamento de Escolas António Gedeão foi constituído a 26 de Abril de 2013 por determinação governamental e está situado na União das Freguesias Laranjeiro – Feijó e na União das Freguesias da Cova da Piedade, Almada, Pragal e Cacilhas, no concelho de Almada. O Agrupamento é frequentado por cerca de 2300 alunos, distribuídos por seis estabelecimentos de educação e ensino com níveis de escolaridade repartidos entre o pré-escolar e o Secundário:

- Escola Secundária António Gedeão;
- Escola Básica Comandante Conceição e Silva;
- Escola Básica do Alfeite, Laranjeiro;
- Escola Básica nº 1 da Cova da Piedade;
- Escola Básica nº 2 da Cova da Piedade;
- Escola Básica nº 3 do Laranjeiro.

No presente ano letivo foi aprovado o Projeto Educativo 2016-2019 deste Agrupamento. Segundo a legislação em vigor, o Projeto Educativo (PE) constitui-se como um dos instrumentos do exercício da autonomia dos agrupamentos de escolas e escolas não agrupadas. No caso do PE do Agrupamento, este alicerça-se segundo valores como a inclusão, solidariedade, equidade, cooperação, liberdade, ética, responsabilidade ambiental e respeito e assenta nos seguintes princípios orientadores:

Princípio pedagógico – a dimensão pedagógica é a prioridade educativa que se sobrepõe às outras dimensões;

Princípio da responsabilidade social – a inserção na comunidade é uma obrigação e um benefício que deve ser encarado diariamente, sobrepondo-se o "bem comum" ao interesse pessoal;

Princípio humanista – cada elemento do Agrupamento ou a este ligado (alunos, professores, assistentes operacionais, famílias...) é primeiro uma pessoa e tratado como tal e não apenas como "recurso", "agente" ou "ator". Cada um tem um papel específico na ação educativa, que deve ser valorizado;

Princípio da inovação – ser capaz de educar, de formar e de construir com criatividade e recorrendo a novas técnicas e tecnologias;

Princípio das lideranças partilhadas – a nível das estruturas intermédias estabelecem-se diferentes níveis de responsabilidade e participação nas decisões;

Princípio da equidade e justiça – estará sempre presente nos documentos orientadores do Agrupamento e na atuação de todos os elementos da comunidade educativa.

Nesta base, o Agrupamento tem por missão a formação integral dos alunos que o frequentam, tornando-os cidadãos de excelência, conscientes, críticos e preparados para os desafios do futuro.

Sendo o estágio realizado na Escola Secundária António Gedeão, procede-se em particular à descrição desta escola na secção seguinte.

1.3. Escola Secundária António Gedeão

A Escola Secundária António Gedeão, sede de Agrupamento, está localizada na Alameda Guerra Junqueiro, na periferia norte da união de freguesias Laranjeiro e Feijó e ocupa uma área de aproximadamente 6000 m^2. Encontra-se edificada numa zona urbana, essencialmente residencial e próxima dos principais pontos de passagem dos mais variados transportes que servem o Concelho de Almada.

Inaugurada por Sua Ex.ª o Senhor Ministro da Educação, José Augusto Seabra, em 6 de Outubro de 1983, a escola iniciou o seu funcionamento no ano letivo de 83/84 com o 3º Ciclo do Ensino Básico em cinco Pavilhões de alvenaria (Pavilhões H, E, R, D e L). Em Agosto de 1985, foi alargada com a construção de um Pavilhão pré-fabricado, denominado pavilhão A, que entrou em funcionamento em Fevereiro de 1986. Este Pavilhão surgiu da necessidade de dar resposta ao elevado número de alunos excedentes, oriundos dos concelhos de Almada, Seixal e Sesimbra. No ano letivo de 1990/1991 passou a funcionar com o Ensino Secundário.

A escola conta com 36 salas, das quais 25 são para aulas teóricas e 11 são salas específicas (laboratórios de Física, Química, Matemática, Ciências Naturais e Geologia, sala de Educação Visual, sala de Informática, sala de Educação Tecnológica e sala de Teatro). Todas as salas estão equipadas com computador com acesso à internet e vídeo projetor. Algumas salas dispõem também de televisão e quadro interativo.

O pavilhão H não possui salas de aula e é o edifício onde funcionam a biblioteca/centro de recursos, sala de estudo, reprografia, sala e bar dos professores, sala de diretores de turma, gabinete de primeiros socorros, serviços administrativos, gabinete da chefe de assistentes operacionais e sala da direção. O pavilhão E, além de salas de aula comuns, usufrui do gabinete de EMRC, gabinete de apoio à matemática/educação para a saúde, laboratório de matemática, uma sala equipada com computadores, uma sala de

Informática, uma sala de Ciências Naturais e Geologia. No pavilhão R funciona o refeitório, o bar e a sala de convívio dos alunos.

O pavilhão D é constituído por salas de aula, gabinete de Psicologia e Orientação escolar, por laboratórios de Física, de Biologia e de Química e pelo gabinete do Conselho Geral. No Pavilhão L estão as salas de Teatro, Educação Tecnológica, Cerâmica, associação de estudantes e uma papelaria.

Além dos pavilhões anteriormente mencionados, a escola também dispõem de instalações desportivas constituídas por um pavilhão desportivo com um espaço polidesportivo e outro gímnico, adequadas às necessidades existentes.

Em relação à oferta educativa desta escola, para além do ensino regular, funcionaram, no 3º ciclo, dois Cursos Vocacionais: Tecnologias e Ofícios (1 ano) e Artes e Tecnologias (2 anos). No Ensino Secundário, o Agrupamento disponibiliza os Cursos Científico-Humanísticos de Ciências e Tecnologias, Ciências Socioeconómicas e Línguas e Humanidades, onde a oferta opcional de disciplinas é atualizada anualmente em conformidade com a procura dos alunos e a legislação em vigor. O Agrupamento oferece também os cursos Profissionais de Técnico de Turismo, Técnico de Animação Sociocultural e Técnico de Apoio à Infância, todos de nível III, dando equivalência ao 12.º ano.

Uma das medidas da escola para prevenir o abandono escolar e reduzir o absentismo dos alunos passa por promover a integração socioeducativa dos alunos, nomeadamente reforçando a importância da orientação vocacional. Neste sentido, a escola promove atividades de esclarecimento, orientação e apoio aos alunos do 9.º ano, que assim o desejarem, com o professor conselheiro de orientação, docente destacado para fazer orientação vocacional.

No presente ano letivo, frequentam a escola 842 alunos – 470 o ensino básico, dos quais 47 em cursos de educação e formação, e 372 o ensino secundário (300 nos cursos científico-humanísticos e 72 nos cursos profissionais). Na tabela 1.1., encontra-se a caraterização da escola em função do número de alunos, turmas por ano de escolaridade e sexo.

O corpo docente é constituído por 90 profissionais, com a faixa etária mais representativa situada entre os 40 e os 50 anos. Da totalidade dos docentes, 83 (92,2 %) pertencem ao Quadro de Escola, 3 (3,3 %) ao Quadro de Zona Pedagógica e 4 (4,4%) são contratados. Permanecem na Escola há mais de 5 anos 83 docentes (92,2%). O pessoal não docente é representado por um total de 25 trabalhadores.

Tabela 1.1.: Caraterização da escola.

Ano de escolaridade	**N.º de turmas**	**N.º de rapazes**	**N.º de raparigas**	**Total por ano de escolaridade**
7.º	7	100	72	172
8.º	6	66	60	126
9.º	7 (2 CEF)	95	77	172
10.º	5 (1 Profissional)	66	61	127
11.º	6 (2 Profissional)	51	72	123
12.º	5 (1 Profissional)	50	72	122

1.4. O Patrono

Rómulo Vasco da Gama de Carvalho (1906-1997) nasceu a 24 de novembro em Lisboa e era filho de uma dona de casa e de um funcionário dos correios e telégrafos. Ao concluir os estudos liceais, Rómulo de Carvalho sentia-se preparado e interessado de igual forma para as ciências e para as letras. Optou pelas primeiras por razões de ordem económica, de saídas profissionais, acreditando, além disso, que poderia continuar a escrever poesia enquanto frequentasse um curso de Físico-químicas cujas atividades experimentais o fascinavam. Licenciou-se em Ciências Físico-químicas, na Faculdade de Ciências da Universidade do Porto. Foi na juventude que pressentiu o ensino como sua opção de vida, lecionando Química e Física no Liceu D. João III, em Coimbra, no Liceu Camões e no Liceu Pedro Nunes, em Lisboa.

O seu nome literário, António Gedeão, surgiu com a publicação de “Movimento Perpétuo”, já Rómulo de Carvalho tinha cinquenta anos de idade, e constituiu-se, desde então, como uma personalidade autónoma com uma existência paralela à do professor de Física e Química, historiador e divulgador da Ciência. Em 1963, a peça RTX 78/24 é a primeira incursão do autor no teatro. Mais tarde, escreveu História Breve da Lua, para crianças. Publicou várias obras científicas e literárias e participou em vários projetos de divulgação da ciência como, Gazeta de Física, Ciência para Gente Nova, Física para o Povo e, dedicou-se também à elaboração de compêndios escolares.

Em 1992 a, até então, Escola Secundária da Cova de Piedade é batizada com o nome de António Gedeão através de um processo de votação aberto a toda a comunidade escolar.

A 25 de Maio de 1993, Rómulo de Carvalho visitou a Escola Secundária António Gedeão, sendo esse dia a partir daí considerado o dia do patrono, o dia da escola (ver fig. 1.2.).

À semelhança de Rómulo de Carvalho, o Agrupamento de Escolas António Gedeão compromete-se a responder cabalmente às exigências humanísticas, científicas, culturais e artísticas, daqueles que pretendem uma educação e uma formação de excelência.

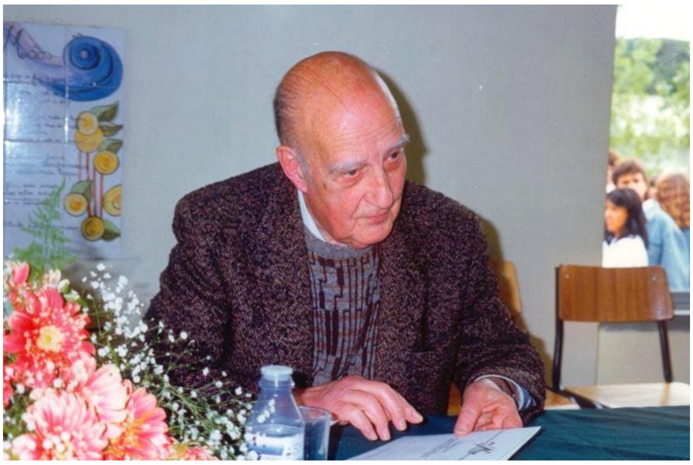


Figura 1.2.: Rómulo de Carvalho na primeira visita à escola.

2. Caracterização da Turma do 10.º ano

No ano letivo 2015/2016, a Professora Orientadora Rosário Lopes, lecionou cinco turmas, duas do 9.º ano na disciplina de Oferta Complementar, duas do 10.º ano de Matemática A do Curso de Ciências e Tecnologias e uma de 11.º ano de MACS do Curso de Línguas e Humanidades. A caracterização que se segue diz respeito à turma de 10.º ano de Matemática A, onde foi desenvolvido maioritariamente o trabalho no âmbito do estágio pedagógico. Os dados apresentados foram recolhidos através da análise dos processos dos alunos e da informação obtida em aula.

No início do ano letivo, a turma do 10.º ano era constituída por trinta e quatro alunos, dos quais trinta e três estavam inscritos na disciplina de Matemática A. Foram transferidos para outras turmas dez alunos, tendo a turma terminado o ano letivo com vinte e quatro alunos inscritos à disciplina, dezasseis do sexo feminino e apenas oito do sexo masculino. A turma era constituída maioritariamente por alunos que já se conheciam anteriormente, uns por terem frequentado a mesma turma desde o 7.º ano, outros por estabelecerem relações de amizade fora da escola, sendo por isso uma turma bastante unida. Dos 24 alunos, apenas 5 não estudaram nesta escola no 9.º ano. Globalmente, os alunos da turma eram trabalhadores e responsáveis, contudo existia um pequeno grupo de alunos que para além de ter fracos resultados à disciplina, tinha uma postura inadequada para a sala de aula, não tirando apontamentos, não participando nas tarefas propostas e muitas vezes envolvendo-se em algumas conversas paralelas durante as aulas.

As idades dos vinte e quatro alunos, no início do ano letivo, situavam-se entre os 14 e os 17 anos como se pode verificar no gráfico da figura 2.1.. Observa-se ainda que a maioria dos alunos tinha 15 anos. De notar que os 3 alunos com 14 anos fizeram 15 anos ainda durante o primeiro período.

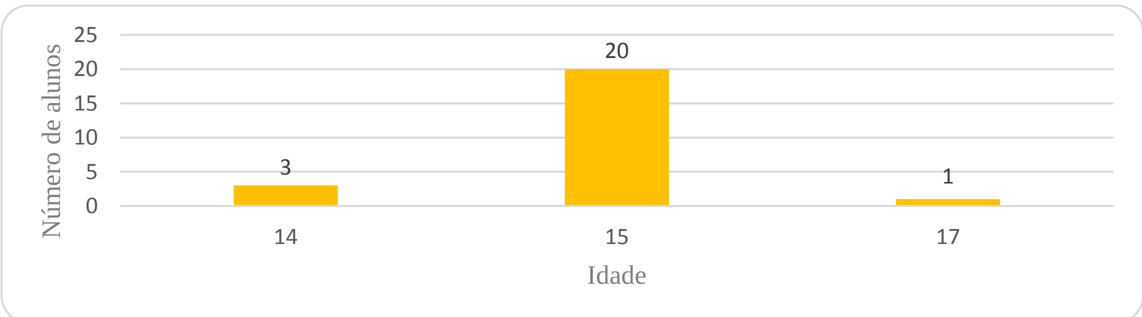


Figura 2.1.: Distribuição das idades dos alunos da turma do 10.º ano.

Quanto ao número de retenções em anos anteriores verificaram-se três casos sendo que um dos alunos está a repetir o 10.º ano. Ao nível do desempenho a matemática no 3.º ciclo, e em particular no 9.º ano, apresenta-se o gráfico da figura 2.2., onde se encontra a distribuição das classificações no Exame Nacional do 3.º ciclo do Ensino Básico e no final do 3.º período do 9.º ano dos 23 alunos que estão a frequentar o 10.º ano pela primeira vez.

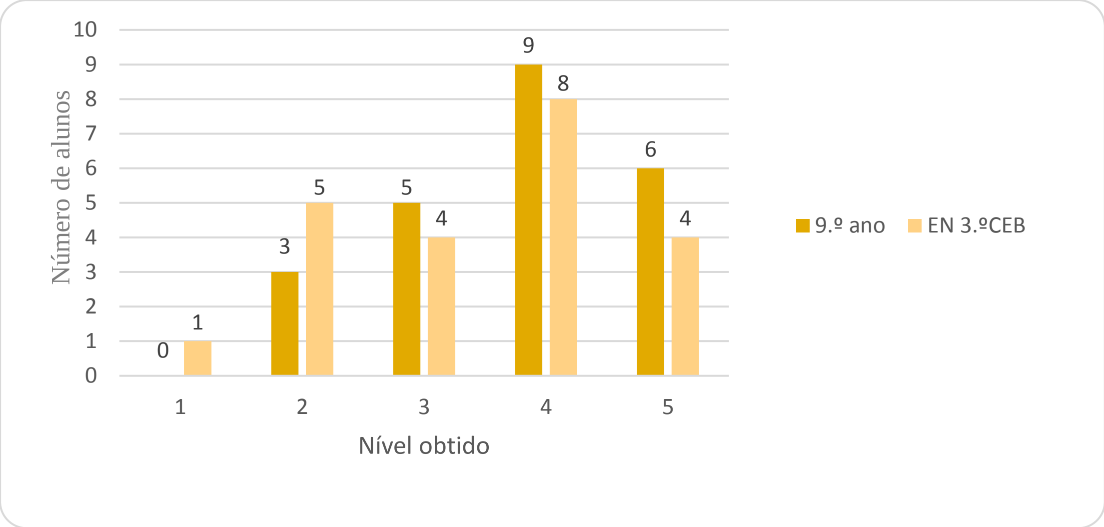


Figura 2.2.: Classificação no final do 9.º ano e no Exame Nacional do 3.º Ciclo a Matemática.

No 10.º ano, a turma apresentou elevada heterogenia no que diz respeito às suas classificações finais em cada período, existindo dois grandes grupos com classificações próximas de ambos os extremos (ver tabela 2.1.). No primeiro período, dos alunos com melhor desempenho, dois obtiveram 18 valores na classificação final, no segundo subiu para quatro o número de alunos com esta classificação e no terceiro período um aluno obteve 19 valores e dois 18 valores.

Tabela 2.1.: Caraterização das classificações da turma ao longo dos períodos letivos.

	1.º Período	**2.º Período**	**3.º Período**
Média	12	11,7	11,4
Nota mais baixa	3	2	2
Nota mais elevada	18	18	19
N.º de Negativas	8	8	8

De notar que sendo a avaliação contínua, por isso cumulativa, e refletindo o trabalho dos alunos ao longo do ano letivo, as notas finais dos 2.º e 3.º períodos tiveram em consideração de igual modo todas as avaliações realizadas. No gráfico da figura 2.3. é possível analisar a evolução da turma em relação à média das notas finais de cada período.

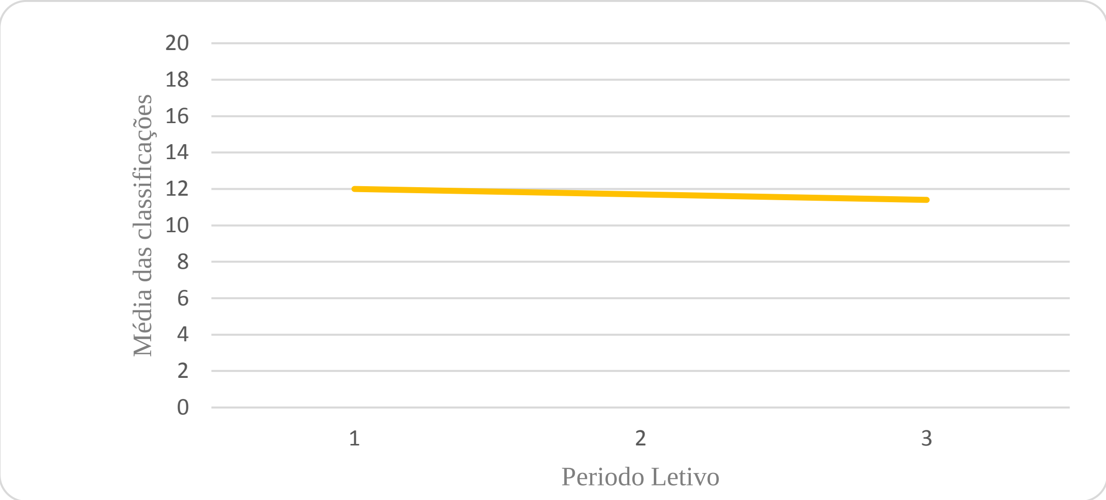


Figura 2.3.: Evolução da média das classificações da turma ao longo do 10.º ano.

De realçar que em relação ao trabalho extra aula e em particular no que se refere aos trabalhos de casa, apenas quatro alunos os realizaram sempre. No entanto, o número de alunos com classificações entre 18 e 20 valores neste parâmetro de avaliação subiu ao longo do ano letivo, existindo no 3.º período 14 alunos neste intervalo. A maioria dos alunos fez os trabalhos de casa quase sempre, existindo dois alunos com negativas em todos os períodos. Estes elementos encontram-se sintetizados no gráfico da figura 2.4.:

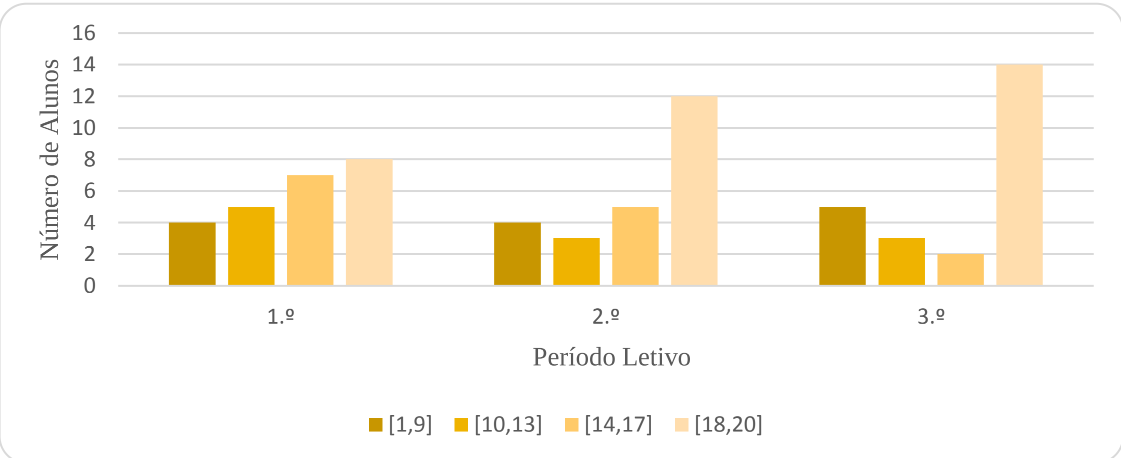


Figura 2.4.: Classificações atribuídas ao trabalho de casa em cada período.

Todos os alunos da turma possuíam computador e internet em casa, o que facilitou o acesso aos diversos recursos disponibilizados pela Professora Rosário Lopes através da plataforma Moodle. No que se refere à calculadora gráfica, como se pode verificar através do gráfico da figura 2.5., apenas 3 alunos não tinham calculadora, sendo o modelo N-Spire da Texas a mais comum entre os alunos.

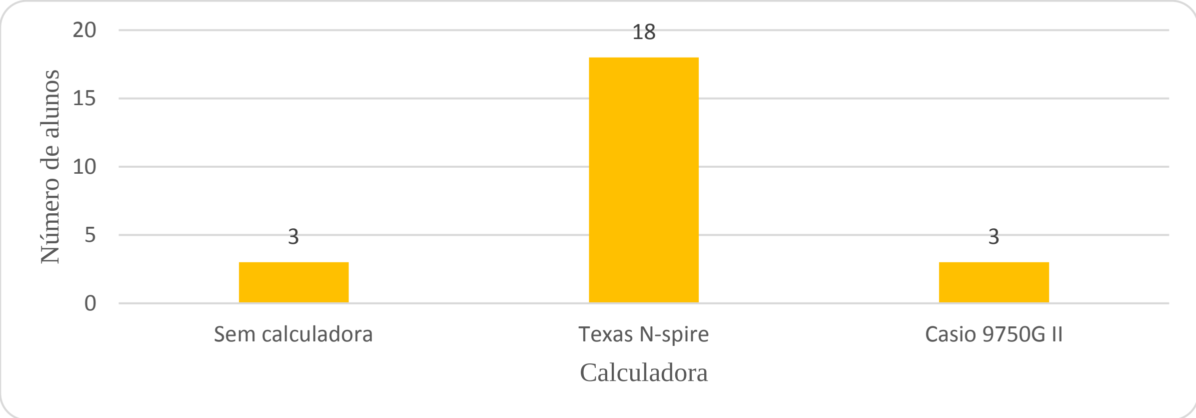


Figura 2.5.: Modelos de calculadoras usadas pelos alunos.

Na turma todos os alunos tinham como encarregado de educação a mãe ou o pai. A função de encarregado de educação era principalmente desempenhada pela mãe e apenas 30% (aproximadamente) dos alunos tinha o pai como encarregado de educação. Em relação às habilitações literárias, mais de metade dos encarregados de educação completaram o ensino secundário, sendo que desses, cerca de 60% possui habilitação de nível superior (ver fig. 2.6.).

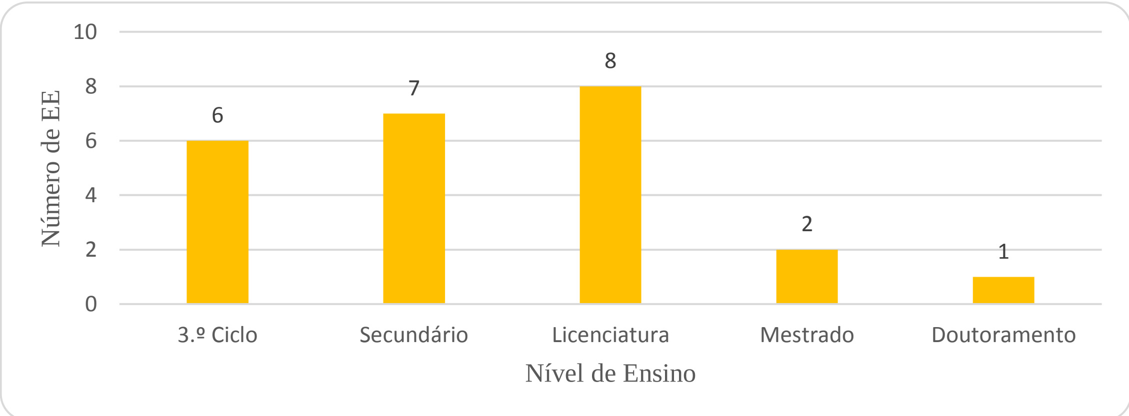


Figura 2.6.: Habilitações dos encarregados de educação.

Cerca de 40 % da turma vive na União de Freguesias do Laranjeiro e Feijó, região onde se localiza a escola, e cerca de 30% na União de Freguesias de Almada, Cova da Piedade, Pragal e Cacilhas (ver fig. 2.7.). De notar que um dos alunos reside a 35 Km (aproximadamente) da escola, despendendo cerca de duas horas e meia no percurso de casa-escola, recorrendo para isso a transportes públicos.

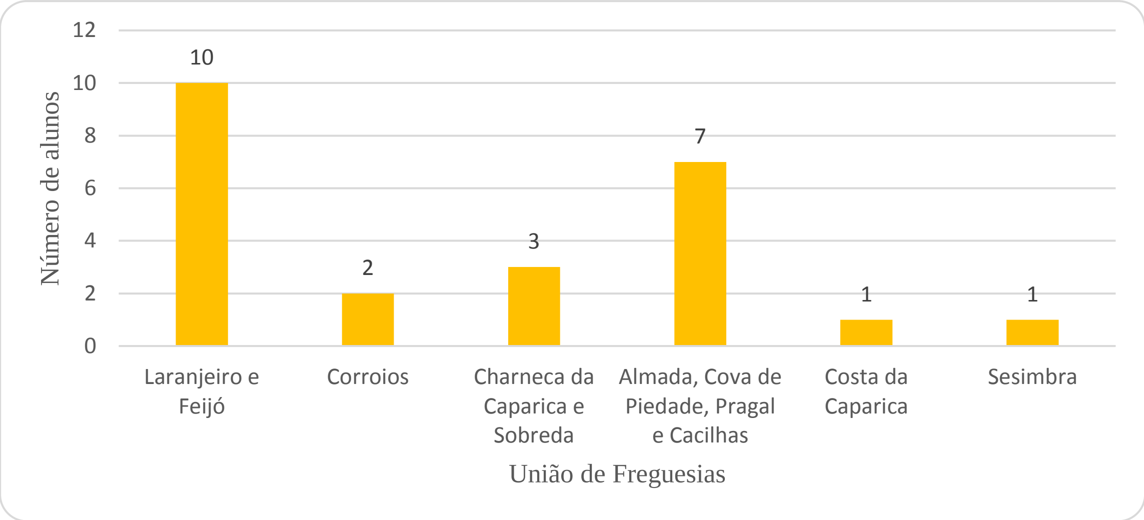


Figura 2.7.: União de freguesias onde se situa a residência dos alunos.

3. Prática Pedagógica Supervisionada

A prática pedagógica supervisionada realizada pela professora estagiária centrou-se maioritariamente na turma do 10º ano, caracterizada no capítulo anterior. Com o objetivo de diversificar a experiência pedagógica foram também lecionadas algumas aulas numa turma do 9.º ano do Ensino Básico.

No âmbito do trabalho de estágio, a professora estagiária assistiu a todas as aulas de Matemática A da turma do 10.º ano e a todas as aulas da disciplina de Oferta Complementar de duas turmas do 9.º ano, lecionadas pela Professora Rosário Lopes. Como complemento à sua formação, durante o primeiro período a professora estagiária acompanhou uma turma do 11.º ano na disciplina de Matemática Aplicada às Ciências Sociais, tendo assistido também a todas as aulas de outra turma do 10.º durante os 1.º e 2.º períodos. É de realçar que, durante a assistência às aulas do 9.º e 10.º anos, a professora estagiária participou ativamente em todos os momentos práticos das aulas, circulando e esclarecendo dúvidas sempre que os alunos o solicitaram.

3.1. Aulas lecionadas

Ao longo do ano letivo foram lecionadas 2 aulas ao 9.º ano e 6 aulas ao 10.º ano. Todas as aulas lecionadas foram assistidas pela Professora Rosário Lopes, das quais 1 aula do 9.º ano e 5 do 10.º ano foram assistidas também pela Professora Doutora Maria Helena Santos - Coordenadora do Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º ciclo do Ensino Básico e no Secundário da FCT – Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa. Na tabela 3.1. abaixo apresentada sintetiza-se a informação relativa às aulas lecionadas no decorrer do ano letivo pela professora estagiária.

Tabela 1.1.: Aulas lecionadas ao longo do ano letivo.

Ano	Data	Tempo	Conteúdos	Supervisão
10.º	15/10/2015	50’	Domínio: Lógica e Teoria de Conjuntos Subdomínio: Condições e Conjuntos	Prof. Rosário Lopes
10.º	05/11/2015	100’	Domínio: Álgebra Subdomínio: Racionalização de denominadores.	Prof. Rosário Lopes
10.º	12/11/2015	50’	Domínio: Álgebra Subdomínio: Polinómios	Prof. Rosário Lopes Prof. Dra. Maria Helena Santos
9.º	26/11/2015	50’	Domínio: Álgebra Subdomínio: Equações do 2º grau	Prof. Rosário Lopes
10.º	18/02/2015	50’	Domínio: Geometria	Prof. Rosário Lopes

			Subdomínio: Cálculo Vetorial no Plano	Prof. Dra. Maria Helena Santos
10.º	22/02/2015	100’	Domínio: Geometria Subdomínio: Cálculo Vetorial no Plano	Prof. Rosário Lopes Prof. Dra. Maria Helena Santos
9.º	14/04/2015	50’	Domínio: Geometria Subdomínio: Propriedades de ângulos, cordas e arcos definidos numa circunferência.	Prof. Rosário Lopes Prof. Dra. Maria Helena Santos
10.º	16/05/2016	50’	Domínio: Funções Reais de Variável Real Subdomínio: Estudo elementar das funções quadráticas, raiz quadrada, raiz cubica e módulo e de funções definidas por ramos.	Prof. Rosário Lopes Prof. Dra. Maria Helena Santos

3.2. Planos de Aula

Os planos de aula elaborados ao longo do ano letivo mantiveram a mesma estrutura e referiram-se a tempos letivos de 50 minutos. Na primeira página de cada planificação foram explicitadas informações gerais acerca da aula, como o sumário, os objetivos gerais, as metas curriculares, os pré-requisitos, os recursos e a avaliação. Nas restantes páginas descreveu-se detalhadamente a metodologia de aula adotada pela professora estagiária. Para além dos conteúdos e estratégias à abordagem dos mesmos, aqui incluíram-se o tempo estimado e as metas curriculares a serem alcançadas em cada fase da aula. Os planos de aula encontram-se disponíveis no Dossier de Estágio.

Para a elaboração de planificações coerentes e que se revelassem eficazes na sua aplicação foram tidos em consideração aspetos como as caraterísticas gerais da turma, os recursos disponíveis nas salas de aula e a viabilidade de utilização desses recursos.

A ordem pela qual foram organizados os conteúdos em cada aula nem sempre seguiu a ordem do manual adotado. Para a elaboração de cada plano existiu uma pesquisa profunda noutros manuais e livros técnicos e foram ponderadas a estrutura da aula e a forma como seriam explicitados os conteúdos.

Após cada conceito ou bloco de conceitos relacionados, foram apresentados um ou mais exemplos que permitissem aos alunos compreender os conteúdos e a sua relevância. Na planificação das aulas lecionadas, optou-se pela utilização de exemplos diferentes dos apresentados no manual adotado. Esta estratégia teve a vantagem dos alunos poderem acompanhar o seu estudo com diferentes exemplos, o que pode contribuir para uma melhor compreensão dos conteúdos.

Em todas as aulas planificadas foram criados momentos para resolução de exercícios, onde os alunos puderam aplicar os conhecimentos adquiridos. Os exercícios incluídos nos planos foram criteriosamente selecionados segundo:

a) o tempo e extensão da resolução

O tempo exigido para a resolução de alguns exercícios influenciou a decisão relativamente à sua aplicação no período da aula ou à sua resolução como trabalho de casa;

b) o nível de dificuldade

Aquando da escolha da sequência dos exercícios preferiu-se segmentá-los com um nível de dificuldade gradual e que à partida motivasse os alunos com maiores dificuldades e ao mesmo tempo desafiasse os alunos com melhores níveis de desempenho.

c) os conteúdos envolvidos

Por se tratarem de aulas que envolveram essencialmente a abordagem a novos conteúdos, teve-se em atenção a escolha de exercícios que fossem de aplicação direta dos conceitos, que não necessitassem de pré-requisitos ou que representassem exercícios-tipo.

d) os recursos

Os exercícios para resolução em aula provieram do manual adotado, caderno de apoio às metas, outros manuais ou foram elaborados pela professora estagiária. Nos últimos três casos, os enunciados foram expostos no quadro ou foram projetados com recurso a materiais audiovisuais. Os exercícios para resolução em casa pertenciam maioritariamente ao manual adotado, embora em alguns casos tenham sido disponibilizados através da plataforma Moodle.

Apesar de não constar no plano formal de aula, a professora estagiária elaborou ainda um plano suplementar da organização dos conteúdos no quadro de forma a que estes se tornassem mais claros e estruturados, e permitisse que os alunos conseguissem interligar visualmente diferentes conceitos e os respetivos exemplos.

Uma das estratégias adotadas e planificadas para a lecionação dos conteúdos passou pela promoção da participação dos alunos da turma. Esta estratégia teve como objetivo motivar os diferentes alunos da turma, promovendo a sua participação ativa na aula. A heterogeneidade que a turma apresentava, tanto ao nível dos resultados na disciplina como ao nível da participação oral nas aulas suscitou desde logo uma preocupação. Neste sentido, a solicitação dos alunos para a construção de exemplos, completar espaços ou responder a questões dos seus colegas foram algumas das formas encontradas para envolver a turma no processo de aprendizagem.

A avaliação dos alunos explicitada nas planificações integrou genericamente o interesse e participação demonstrados, a aplicação de conteúdos matemáticos anteriormente lecionados, uso de terminologia e simbologia adequadas e o respeito pelas normas de trabalho e convivência.

3.3. A turma do 10.º ano

A carga letiva atribuída à disciplina de Matemática A na turma do 10º ano de escolaridade foi de 6 tempos letivos semanais de 50 minutos, distribuídos semanalmente segundo a tabela 3.2.:

Tabela 3.2.: Horário de Matemática A na turma do 10.º ano.

Horas\Dias	2.ª feira	3.ª feira	4.ª feira	5.ª feira	6.ª feira
08:15-09:05				Mat. A	
09:15-10:05	Mat. A			Mat. A	
10:20-11:10	Mat. A		Mat. A		
11:20-12:10			Mat. A		

Quanto aos critérios de avaliação aplicados ao 10.º ano do Agrupamento de Escolas António Gedeão, estes foram definidos da seguinte forma:

- Os testes de avaliação tiveram um peso de 80% na classificação final;
- As fichas de avaliação tiveram um peso de 10% na classificação final;
- O trabalho de aula teve um peso de 5% na classificação final;
- O trabalho de casa teve um peso de 5% na classificação final.

3.3.1. Primeiro Período

No primeiro período foram lecionados setenta e oito tempos letivos de cinquenta minutos dedicados ao Domínio Lógica e Teoria dos Conjuntos (LTC 10) e ao Domínio Álgebra (ALG 10).

3.3.1.1. Avaliação e Classificação

Neste período existiram quatro momentos de avaliação que corresponderam a um teste de diagnóstico inicial, uma ficha de avaliação e dois testes. Na tabela 3.3. apresentada abaixo encontram-se sistematizados os momentos de avaliação realizados no 1º período.

Tabela 3.3.: Instrumentos de avaliação aplicados no 1.º Período.

Data	Instrumento de avaliação	Conteúdos avaliados
21/09/2015	Teste Diagnóstico	Pré-requisitos
19/10/2015	Ficha de Avaliação	Domínio: LTC
29/10/2015	Teste de Avaliação	Domínio: LTC Subdomínio: Radicais
03/12/2015	Teste de Avaliação	Domínios: LTC, ALG

O teste diagnóstico foi realizado na primeira aula, a 21 de setembro, e serviu para os alunos recordarem alguns dos conteúdos abordados no 3º ciclo, assim como para perceber quais as maiores dificuldades da turma ao nível dos pré-requisitos essenciais à aprendizagem no presente ano letivo.

A ficha de avaliação realizou-se a 19 de outubro, onde se incluíram oito questões, sendo quatro de escolha múltipla, sobre todos os conteúdos do primeiro Domínio. Esta ficha reuniu alguns dos conteúdos relevantes para o terceiro momento de avaliação efetuado a 29 de Outubro sob a forma de teste de avaliação. O primeiro teste de avaliação incidiu sobre todo o domínio Lógica e Teoria de Conjuntos e sobre o subdomínio Radicais pertencente ao domínio Álgebra.

O segundo teste, quarto momento de avaliação, realizou-se a 3 de dezembro e versou sobre toda a matéria lecionada neste período.

Durante o primeiro período, para além da lecionação de aulas, a professora estagiária participou também na correção e classificação das fichas e testes de avaliação referentes aos últimos três momentos de avaliação de alguns alunos da turma. Para o efeito, foram fotocopiados as fichas e testes do mesmo grupo de alunos e classificados simultaneamente pela Professora Orientadora e pela professora estagiária.

Além da correção da ficha de avaliação, a estagiária procedeu, em conjunto com a sua colega de estágio, à atribuição de cotação das subquestões e à elaboração dos critérios de avaliação de cada item de desenvolvimento. Esta ficha de avaliação foi composta por três questões de escolha múltipla e quatro questões de desenvolvimento. Após a correção das fichas de avaliação, o núcleo de estágio reuniu para comparar e discutir as opções tomadas na elaboração e aplicação dos critérios.

Para o primeiro teste de avaliação foram utilizados os critérios elaborados pela Professora Orientadora que, em reunião com o núcleo de estágio, apresentou e justificou os critérios de classificação adotados e respetivas cotações. Esta correção individual permitiu à professora estagiária tomar contacto com a correção deste tipo de instrumento de avaliação. Permitiu também compreender o processo inerente à elaboração dos critérios de correção e como a maior ou menor explicitação do que se pretende avaliar nos enunciados das questões pode condicionar este processo. Após a classificação, foram comparadas e discutidas as classificações atribuídas a cada um dos itens que constituíam o teste de avaliação. A observação das causas que levaram a pequenos desvios de classificação e sua posterior discussão permitiram que a professora estagiária percebesse que o nível de pormenor e objetividade dos critérios de avaliação e sua posterior aplicação pode comprometer a coerência das classificações das questões dos diferentes alunos.

No segundo teste de avaliação, os critérios de classificação foram elaborados e discutidos em conjunto pelo núcleo de estágio. Foram debatidos aspetos como o peso dos conteúdos anteriormente avaliados, a cotação das etapas de resolução de cada item ou como classificar resoluções alternativas apresentadas pelos alunos. Estas discussões contribuíram para melhorar o nível de conhecimento da professora estagiária relativamente às questões inerentes ao processo de avaliação e para o reconhecimento da importância da construção dos critérios de correção no processo de elaboração de um instrumento de avaliação. De notar que os desvios entre as classificações atribuídas pela professora estagiária e pela Professora Orientadora tanto na ficha como nos testes de avaliação não excederam um valor em vinte em cada um dos instrumentos classificados.

3.3.1.2. Aulas lecionadas

Durante o primeiro período, a professora estagiária lecionou quatro blocos de cinquenta minutos assistidos pela Professora Orientadora Rosário Lopes, professora titular da turma, sendo que o último bloco foi simultaneamente assistido pela Professora Doutora Maria Helena Santos. Nos pontos seguintes são descritas resumidamente cada uma dessas aulas.

3.3.1.2.1. Primeira Aula – Lógica e Teoria dos Conjuntos (LTC 10)

A primeira aula lecionada pela professora estagiária coincidiu com a lição nº 23 e realizou-se a 15 de outubro de 2015. Os conteúdos desta aula pertenceram ao domínio Lógica e Teoria dos Conjuntos, em particular ao subdomínio Condições e Conjuntos e envolveram a negação de uma implicação universal e a demonstração por contrarreciproco.

A aula iniciou-se com a resolução de um exercício em que os alunos, individualmente, deduziram a proposição que define a negação de uma implicação universal. A correção do exercício proposto foi realizada no quadro por um aluno da turma escolhido pela professora estagiária. A escolha do aluno foi resultado da circulação pela sala aquando da realização do exercício pelos alunos. Assim, a escolha recaiu no aluno que demonstrou dificuldades na resolução da tarefa e onde a partilha das suas dúvidas com a turma constituiu uma estratégia para que cada aluno pudesse refletir acerca das dificuldades do colega e sobre as suas próprias dificuldades. Por outro lado, os restantes alunos puderam colaborar oralmente, completando e corrigindo o que ia sendo escrito no quadro. Ainda como incentivo à discussão pela turma, a professora colocou algumas questões sobre os valores lógicos das proposições envolvidas no exercício.

Na conclusão da correção do exercício, a professora estagiária deu destaque à generalização da negação da implicação universal, formalizando-a.

Na segunda parte da aula, foi abordada a demonstração de uma implicação por contrarrecíproco. Como introdução a este tipo de demonstração, a professora estagiária começou por recordar alguns conceitos lecionados no Ensino Básico, tais como teorema, hipótese, tese e demonstração. Seguidamente, chamou a atenção para as propriedades das proposições abordadas nas aulas anteriores e demonstrou o resultado de implicação contrarrecíproca. Por fim, explicou o processo de demonstração por contrarrecíproco e apresentou no quadro branco alguns exemplos da sua aplicação.

No final da aula, a professora estagiária reuniu com a Professora Rosário Lopes para analisar e discutir o que correu bem na aula e os pontos a melhorar nas aulas seguintes. A Professora Orientadora constatou que no geral a aula correu bem e apenas apontou que foi pouco frisada a importância dos conteúdos abordados, ficando-se com a sensação que os alunos não perceberam a sua utilidade. A professora estagiária autoavaliou-se, refletindo sobre a sua prática, e indicou como pontos a melhorar a organização do quadro e a ausência de comunicação com os alunos enquanto escrevia no mesmo. A professora estagiária considerou que se ditasse alguns dos conceitos enquanto os escrevia no quadro os alunos seriam mais céleres a construir os seus apontamentos. A professora estagiária ainda concluiu que os exemplos que apresentou serviram também de base para o esclarecimento de dúvidas sobre conteúdos já abordados e que a sua solicitação a alunos com mais dificuldades criou um ambiente de participação ativa e com significado para todos os alunos.

3.3.1.2.2. Segunda Aula – Álgebra (ALG 10)

A segunda aula lecionada pela professora estagiária coincidiu com as lições nº 41 e 42 e realizou-se a 5 de novembro de 2015 em dois blocos de cinquenta minutos. Os conteúdos desta aula incluem-se no subdomínio Radicais, pertencente ao domínio Álgebra. Os conteúdos abordados nesta aula envolveram a Racionalização de denominadores.

A professora estagiária começou a aula por rever, com o recurso a exemplos, o conceito de fração e posteriormente de frações equivalentes. Os alunos mostraram dominar em pleno estes pré-requisitos.

Esta revisão serviu de introdução para a racionalização de denominadores, aproveitando-se para explicar que a racionalização de denominadores consiste em obter-se uma fração equivalente com denominador racional e que para isso realiza-se algumas operações que permitem eliminar o número irracional do denominador. Desta forma, a professora estagiária deixou claro o objetivo e pertinência deste tópico.

Seguidamente analisaram-se os três casos de denominadores-tipo. Para esta análise, começou-se por apresentar exemplos concretos de frações em que o denominador se enquadrava em cada caso, e com a colaboração dos alunos deduziram-se estratégias para determinar frações equivalentes com denominador inteiro.

Com a colaboração da turma, construiu-se e formalizou-se a generalização em cada um dos casos tratados. Solicitou-se ainda aos alunos que analisassem os dois primeiros casos de denominadores apresentados, questionando sobre a sua relação. Após breves momentos de reflexão, alguns alunos responderam, por outras palavras, que o segundo caso se tratava de um caso particular do primeiro, justificando corretamente a sua afirmação.

Para consolidar os conteúdos trabalhados, propôs-se que os alunos realizassem em casa alguns exercícios de aplicação.

Após a aula, a estagiária reuniu novamente com a Professora Rosário Lopes para analisar e discutir a aula lecionada. A Professora orientadora constatou que no geral a aula correu bem, que ao contrário da primeira aula, os alunos perceberam qual o fundamento dos conteúdos que se estavam a trabalhar. Durante a aula, a Professora Rosário Lopes solicitou à professora estagiária que apresentasse um maior número de exemplos para cada caso para que a turma compreendesse efetivamente quais os procedimentos que conduzem à racionalização de denominadores. A professora estagiária apenas havia planificado um exemplo para cada caso, o que se verificou insuficiente. De notar que aquando da apresentação dos novos exemplos, a estagiária convidou diferentes alunos para participar na sua resolução. Desta forma, progressivamente avaliou-se o nível de compreensão dos conceitos pela turma e a necessidade de apresentar um maior número de exemplos. Com a apresentação dos exemplos suplementares, o tempo de aula foi insuficiente para a realização de todos os exercícios de aplicação constantes no plano, tendo estes sido enviados para realização em casa. A autoavaliação realizada pela professora estagiária coincidiu com a avaliação que a Professora Orientadora fez da sua aula.

3.3.1.2.3. Terceira Aula - Álgebra (ALG 10)

A terceira aula lecionada pela professora estagiária foi assistida pela Professora Rosário Lopes e pela Professora Doutora Maria Helena Santos, coincidiu com a lição nº 48 e realizou-se a 12 de novembro de 2015. Os conteúdos desta aula incluíram-se no subdomínio Polinómios, pertencente ao domínio Álgebra. Os conteúdos abordados nesta aula envolveram a definição e as operações com polinómios, incluindo a divisão euclidiana de polinómios.

A professora estagiária iniciou a aula com uma breve revisão dos conceitos de monómio e polinómio. Para esta revisão optou-se por colocar questões à turma sobre diferentes exemplos explicitados no quadro branco. Seguidamente abordou-se a noção de grau de um polinómio, já conhecida dos alunos, pedindo-se exemplos de polinómios de grau 0, 1 e 2. Os alunos não revelaram dificuldades na criação destes exemplos, passando-se para a formalização da definição de polinómio de grau n na variável x. A professora estagiária teve especial atenção na explicação desta definição pelo seu caráter genérico e pelo facto de envolver muita linguagem simbólica relativamente à qual os alunos manifestam grande dificuldade na sua compreensão. Desta forma, em detrimento do cumprimento do plano de aula, apresentaram-se vários exemplos aos alunos e deu-se tempo para discutirem e superarem as suas dificuldades.

Para terminar a aula, iniciou-se a revisão da soma e subtração de polinómios também com o recurso a exemplos. Foi ainda solicitado aos alunos que retirassem conclusões acerca do grau do polinómio soma.

Após a aula, a Professora Doutora Maria Helena Santos e a Professora Rosário Lopes observaram os aspetos positivos e indicaram alguns aspetos a melhorar nas aulas seguintes. O facto de não se terem cometido erros científicos e a forma original como se introduziu a definição de polinómio de grau n na variável x, foram alguns dos aspetos positivos realçados. No entanto, a Professora Doutora Maria Helena Santos salientou alguns pontos que a estagiária deveria melhorar, entre eles a necessidade de ter maior cuidado relativamente à linguagem utilizada.

A professora estagiária sentiu-se confiante perante a turma, tendo-lhe sido fácil ajustar o plano às necessidades dos alunos. Além disso, evitou que a aula se tornasse meramente expositiva, apelando frequentemente à interação com e entre os alunos. No início da aula alguns alunos estavam retraídos, no entanto com o decorrer da aula a maioria dos alunos participou ativamente e colaborou de forma voluntária. No final ficou a perceção de que a maioria dos alunos compreendeu os conteúdos abordados, o que se veio a constatar nas aulas seguintes.

3.3.2. Segundo Período

No segundo período foram lecionados sessenta e dois tempos letivos de cinquenta minutos dedicados ao Domínio Geometria Analítica (GA 10) e introduzindo-se ainda conteúdos pertencentes ao Domínio Funções Reais de Variável Real (FRVR 10).

3.3.2.1. Avaliação

Neste período existiram cinco momentos de avaliação que corresponderam a três questões-aula e a dois testes de avaliação.

Tal como o Programa e as Metas Curriculares referem, a disciplina de Matemática possui uma estrutura cumulativa, apoiando-se os novos conhecimentos em outros previamente estudados e adquiridos. Assim, os testes de avaliação realizados ao longo do ano letivo tiveram sempre um caráter global, ou seja, avaliaram sempre todos os conteúdos abordados até ao momento da avaliação. Na tabela 3.4. apresentada abaixo encontram-se sistematizados os momentos de avaliação realizados no 2.º período. No caso dos testes de avaliação, a terceira coluna diz respeito aos conteúdos avaliados em maior proporção.

Tabela 3.4.: Instrumentos de Avaliação aplicados no 2.º período.

Data	Instrumento de avaliação	Conteúdos avaliados
14/01/2016	Questão-Aula	Domínio: GA Subdomínio: Geometria analítica no plano
04/02/2016	Teste de Avaliação	Domínio: GA Subdomínio: Geometria analítica no plano
29/02/2016	Questão-Aula	Domínio: GA Subdomínio: Geometria analítica no plano

07/03/2016	Teste de Avaliação	Domínio: GA
14/03/2016	Questão-Aula	Domínio: GA Subdomínio: Geometria analítica no espaço

As questões-aula tiveram a duração de cerca de quinze minutos sendo constituídas por um número reduzido de questões que visavam avaliar apenas os conteúdos lecionados nas aulas anteriores ao momento de avaliação. Este instrumento de avaliação não possuiu uma estrutura fixa, variando no número de questões de desenvolvimento e questões de escolha múltipla. Quanto ao primeiro e segundo testes de avaliação, a sua estrutura dividiu-se entre cinco questões de escolha múltipla e três e cinco grupos de questões de desenvolvimento, respetivamente.

3.3.2.2. Aulas lecionadas

Durante o segundo período, a professora estagiária lecionou três blocos de cinquenta minutos, correspondentes a duas aulas consecutivas, assistidos pela Professora Orientadora Rosário Lopes e pela Professora Doutora Maria Helena Santos. Nos pontos seguintes são descritas resumidamente cada uma dessas aulas.

3.3.2.2.1. Quarta Aula – Geometria Analítica (GA 10)

A quarta aula lecionada pela professora estagiária coincidiu com a lição nº 114 e realizou-se a 18 de fevereiro de 2016. Os conteúdos lecionados nesta aula enquadraram-se no domínio Geometria Analítica (GA 10), no subdomínio Cálculo Vetorial no Plano. Esta aula incidiu em particular sobre os conteúdos que envolvem os conceitos de vetor diretor e declive de uma reta.

A aula iniciou-se com a noção de vetor diretor de uma reta. Para clarificar o conceito, compararam-se a direção de uma reta com a de diversos vetores. Esta comparação foi acompanhada pela apresentação de diversos exemplos, onde se promoveu a participação dos alunos, questionando-os quanto à validade das suas intervenções. Em seguida, apresentou-se a definição formal de vetor diretor de uma reta e, em ambiente de discussão com a turma, realizaram-se algumas observações acerca deste conceito.

Seguidamente, foi pedido um exemplo de uma reta não vertical e em conjunto com os alunos verificou-se a relação entre as coordenadas do vetor diretor de uma reta e o valor do seu declive. A exposição de conteúdos culminou com a generalização desta relação e posterior demonstração. Para finalizar a aula, foram propostos aos alunos alguns exercícios para aplicação de conteúdos.

Na reunião posterior com o núcleo de estágio, a Professora Doutora Maria Helena Santos e a Professora Rosário Lopes teceram alguns comentários à aula lecionada. A organização dada aos exemplos expostos no quadro no início da aula e o facto da demonstração realizada requerer um resultado ainda não abordado foram apontados como dois fatores que deviam ter sido tomados em consideração. As professoras foram unânimes em considerar que tinha sido uma boa aula quer ao nível da exploração dos conteúdos quer no que se refere à sua gestão.

Da reflexão pessoal realizada após a aula, destacam-se alguns aspetos:

- Os conteúdos foram expostos de uma forma muito densa, recorrendo demasiado ao uso do quadro e com alguns alunos a não conseguir acompanhar o ritmo da aula. Isto deve-se também ao facto da maioria dos alunos da turma ter sérias dificuldades em elaborar os seus apontamentos, copiando sem critério tudo o que se escreve no quadro e não refletindo sobre a sua produção;
- O facto de a professora estagiária desejar completar os conteúdos que constavam no plano de aula, fez com que prolongasse a aula por mais cinco minutos, o que não se revelou produtivo.
- Ao longo da aula a turma foi participando e correspondendo às solicitações da professora, o que se tornou muito útil, originando diferentes momentos de diálogo professora-aluno e aluno-aluno.
- A demonstração por dupla implicação realizada no final da aula permitiu que os alunos tomassem contacto e se envolvessem com esta técnica de demonstração, o que se converteu numa experiência enriquecedora e bastante útil para os alunos no seu percurso na disciplina de Matemática A. A demonstração do resultado requerido numa das etapas desta demonstração foi realizada na aula seguinte.

3.3.2.2.2. Quinta Aula – Geometria Analítica (GA 10)

A quinta aula lecionada pela professora estagiária coincidiu com as lições nº 115 e 116 e realizou-se a 22 de fevereiro de 2016. A quarta e quinta aulas lecionadas foram consecutivas, tendo esta última sido dada em dois blocos de cinquenta minutos.

Os conteúdos desta aula enquadram-se no domínio Geometria Analítica (GA 10), no subdomínio Cálculo vetorial no plano. No seguimento da aula anterior, esta aula incidiu em especial sobre a equação vetorial, cartesiana e equações paramétricas de uma reta.

A aula iniciou-se com a resolução de alguns exercícios que tinham sido enviados para trabalho de casa. Como introdução à definição de equação vetorial da reta, a professora estagiária propôs aos alunos que resolvessem uma tarefa e corrigiu a mesma com recurso ao PowerPoint e ao Geogebra. Posteriormente, a professora estagiária demonstrou que os pontos da forma $A + \lambda\vec{v}, \lambda\epsilon\mathbb{R}$, pertencem à que reta que passa em A e tem a direção do vetor $\vec{v}$. Chamou-se ainda à atenção para o facto da demonstração realizada na aula anterior usar este resultado e que em rigor dever-se-ia tê-lo demonstrado primeiro.

Para finalizar os primeiros cinquenta minutos de aula a professora estagiária escreveu formalmente a definição de equação vetorial da reta, complementando com algumas notas importantes para a compreensão da mesma.

Como o plano de aula não foi concluído no primeiro tempo, a professora estagiária teve a oportunidade de lecionar os cinquenta minutos seguintes, concluindo o plano.

Esta aula envolveu uma maior dinâmica quando comparada com a aula anterior. A utilização do software Geogebra permitiu que os alunos intuíssem autonomamente que os pontos da forma $A + \lambda\vec{v}, \lambda\epsilon\mathbb{R}$, pertencem à mesma reta que passa em A e tem a direção $\vec{v}$. Por outro lado, foi dada maior atenção ao ritmo de trabalho dos alunos, indo ao encontro das suas dificuldades e tornando a aula mais prática. A Professora Doutora Maria Helena Santos e a Professora Rosário Lopes fizeram uma apreciação bastante positiva da aula, sublinhando o encadeamento dado entre as duas aulas lecionadas que favoreceu a compreensão dos alunos sobre os conteúdos lecionados. Como fatores a ter em atenção foi apontada alguma falta de rigor na demonstração realizada e a necessidade de ter um maior cuidado com a linguagem.

A professora estagiária reconheceu que a grande maioria dos alunos não mostrou dificuldade na resolução dos exercícios que foram sendo propostos oralmente ao longo da aula, tendo como é hábito participado ativamente e envolvendo-se nas discussões que foram surgindo.

A professora estagiária considerou interessante incluir nesta sequência de aulas duas demonstrações, que apesar de não serem exigidas pelo programa, têm um nível de exigência adequado ao perfil da turma. Tal como na aula anterior, a forma como foi apresentada a demonstração não foi a mais indicada. As demonstrações que se incluíram no plano de aula foram retiradas de manuais atualmente em vigor e os conteúdos destes manuais seguiam a mesma ordem pela qual foram dados nestas aulas. Este facto permitiu à professora estagiária refletir e tomar consciência da necessidade de ter um maior sentido crítico na elaboração dos seus planos de aula, não tomando como viáveis e adequados todos os recursos encontrados nos manuais, e sobretudo deve ser muito exigente e rigorosa na forma como aborda os conteúdos.

3.3.3. Terceiro Período

No terceiro período foram lecionados cinquenta e seis tempos letivos de cinquenta minutos dedicados ao Domínio Funções Reais de Variável Real (FRVR 10).

3.3.3.1. Avaliação

Neste período existiram quatro momentos de avaliação que corresponderam a uma ficha de avaliação com a duração de cinquenta minutos, dois testes de avaliação e a apresentação de uma das demonstrações contempladas no programa.
A estrutura da ficha e dos testes de avaliação é idêntica à usada nos períodos anteriores. A apresentação de uma demonstração foi facultativa, sendo da responsabilidade dos alunos interessados a sua escolha e preparação. Esta avaliação teve um peso de 0,5 valores na nota final, o que potenciou a elevada adesão por parte dos alunos, tendo esta tarefa um importante papel no desenvolvimento de algumas técnicas elementares de demonstração. Na tabela 3.5. apresentada abaixo encontram-se sistematizados os momentos de avaliação realizados no 3.º período. No caso da apresentação, os conteúdos avaliados dependem da demonstração escolhida por cada aluno.

Tabela 3.5.: Instrumentos de Avaliação aplicados no 3.º período.

Data	Instrumento de avaliação	Conteúdos avaliados
21/04/2016	Ficha de Avaliação	Domínio: GA
05/05/2016	Teste de Avaliação	Domínio: FRVR
30/05/2016	Teste de Avaliação	Domínio: FRVR
01/06/2016-09/06/2016	Apresentação oral e escrita	-

3.3.3.2. Aulas lecionadas

Durante o terceiro período, a professora estagiária lecionou um bloco de cinquenta minutos ao 10.º ano, assistido pela Professora Orientadora Rosário Lopes e pela Professora Doutora Maria Helena Santos.

3.3.3.2.1. Sexta Aula – Funções Reais de Variável Real (FRVR 10)

A sexta aula lecionada pela professora estagiária coincidiu com a lição nº 176, realizou-se a 16 de maio de 2016 e foi assistida pela Professora Rosário Lopes e pela Professora Doutora Maria Helena Santos. Os conteúdos desta aula enquadraram-se no domínio Funções Reais de Variável Real (FRVR 10), no subdomínio Estudo elementar das funções quadráticas, raiz quadrada, raiz cúbica e de funções definidas por ramos. Esta aula incidiu em particular no estudo da função definida por ramos.

A aula iniciou-se com a resolução de um problema que serviu de introdução à noção de função definida por ramos. Este problema remetia para uma situação da vida real, o que permitiu aos alunos identificarem-se e interessarem-se pela resolução do mesmo. A professora estagiária optou por escrever o enunciado e a resolução do problema no quadro por considerar que desta forma conseguia impor um maior ritmo de trabalho na turma, dando o tempo necessário para tirarem apontamentos. A resolução do problema foi sendo construída no quadro com a colaboração oral dos alunos. Após a resolução do problema, foi dado mais um exemplo e apresentando a representação gráfica de uma função definida por ramos, propôs-se à turma defini-la analiticamente.

Por fim, apresentou-se a definição formal de função definida por ramos e solicitou-se a colaboração de um aluno para explicar o que entendeu da sua leitura. A professora estagiária fez ainda o paralelo entre o exemplo anterior e a definição de forma a clarificar o papel de cada parâmetro.

A Professora Doutora Maria Helena Santos e a Professora Rosário Lopes indicaram alguns aspetos a ter em consideração em aulas futuras. O facto de estarmos nas últimas semanas de aulas aliado ao fraco desempenho e elevado desinteresse pelos conteúdos revelado por alguns alunos, culminou em alguns focos de indisciplina ao longo da aula. A estagiária chamou a atenção dos alunos por diversas vezes, embora não atuando através de sanções disciplinares, o que possivelmente teria sido mais eficaz na tarefa de gestão da turma. Ao nível das intervenções dos alunos, as professoras consideraram que a estagiária poderia ter explorado melhor as ideias da turma, sendo este aspeto mais uma vez reflexo da inexperiência da mesma. No geral a aula correu bem, tendo o problema proposto constituído uma estratégia importante para que a turma compreendesse a pertinência e utilidade da função definida por ramos num contexto real.

3.3.4. O Programa do 10.º ano de Matemática A e o Manual Adotado

O programa curricular do 10.º ano de Matemática A entrou em vigor pela primeira vez no presente ano letivo 2015/2016 e encontra-se num documento que inclui os programas dos três anos referentes ao ensino secundário. Este documento, além do programa de Matemática A para o ensino secundário, integra um conjunto de metas curriculares:

> "As Metas Curriculares, que com o Programa formam um documento único, elencam, para cada domínio e em consonância com os conteúdos, os objetivos gerais a atingir em cada ano de escolaridade. Cada um deles encontra-se definido de forma precisa por um conjunto de descritores que apontam para desempenhos específicos e avaliáveis que os alunos deverão evidenciar para que esses objetivos se considerem cumpridos." (ME, 2014)

Como complemento ao documento Metas Curriculares de Matemática do Ensino Secundário - Matemática A foi elaborado o Caderno de Apoio. Este documento apresenta exercícios e problemas como sugestões para o cumprimento dos objetivos específicos estabelecidos nas metas. Embora algumas destas tarefas requeiram procedimentos que devem ser trabalhados por todos os alunos, o documento permite ao professor decidir o grau de desenvolvimento com que aborda situações mais complexas. Neste sentido, o documento distingue três níveis de desempenho, diferenciando o nível de desempenho regular dos níveis que correspondem a níveis de desempenho progressivamente mais avançados. Além disso, o Caderno de Apoio contempla comentários relativos a algumas opções tomadas no programa e informações complementares para os professores.

O programa confere autonomia às escolas e professores para decidirem quais as metodologias e os recursos mais adequados para auxiliar os alunos a alcançar os desempenhos definidos nas metas curriculares, tendo em consideração as circunstâncias de ensino e em particular as caraterísticas das turmas e dos alunos.

O programa de Matemática A para o 10º ano de escolaridade ficou assim organizado em cinco domínios de conteúdos:

1. Lógica e Teoria dos Conjuntos (LTC10)
2. Álgebra (ALG10)
3. Geometria Analítica (GA)

4. Funções Reais de Variável Real (FRVR)

5. Estatística (EST)

O primeiro domínio, Lógica e Teoria dos Conjuntos, é considerado pelos autores do programa como central, fundamental e transversal ao Ensino Secundário. Ao contrário do que acontecia com o programa anterior, em que as noções deste tema eram introduzidas à medida que iam sendo necessárias, este programa reúne num bloco inicial todos os conteúdos referentes à Lógica e Teoria dos Conjuntos. O domínio divide-se em dois subdomínios: Proposições; Condições e conjuntos.

O segundo domínio, Álgebra, incorpora o subdomínio Radicais. Os autores do programa referem que a forma sistemática como se completa este domínio permite estender adequadamente a noção e respetivas propriedades de potência a expoentes racionais. Neste domínio ainda se prossegue o estudo iniciado no 3º ciclo acerca do anel dos polinómios de coeficientes reais. Desta forma, o domínio organiza-se em três subdomínios: Radicais; Potências de expoente natural; Polinómios.

No terceiro domínio, Geometria Analítica, desenvolve-se o estudo iniciado no Ensino Básico com a introdução dos referenciais cartesianos no plano, o estudo das equações cartesianas das retas e do cálculo vetorial. Neste domínio também é realizada uma primeira abordagem aos referenciais cartesianos do espaço, generalizando-se algumas das noções estudadas no plano. O domínio organiza-se em quatro subdomínios: Geometria analítica no plano; Cálculo vetorial no plano; Geometria analítica no espaço; Cálculo vetorial no espaço.

O quarto domínio, Funções Reais de Variável Real, inicia-se com alguns conceitos gerais sobre funções. Neste domínio, o estudo da injetividade, sobrejetividade, bijetividade de uma função, assim como da função inversa, função composta e funções irracionais constavam no programa anterior, no 11.º ano. O estudo do sentido da concavidade do gráfico de uma função real de variável real era lecionado no 12º ano. O domínio está organizado em cinco subdomínios: Generalidades acerca de funções; Generalidades acerca de funções reais de variável real; Monotonia, extremos e concavidades; Estudo elementar das funções quadráticas, raiz quadrada, raiz cúbica e módulo e de funções definidas por ramos; Resolução de problemas.

O quinto e último domínio, Estatística, inicia-se com a introdução do sinal de somatório e algumas das suas regras operatórias, úteis nesta disciplina ao longo do Ensino Secundário. O domínio organiza-se em apenas um subdomínio: Caraterísticas amostrais, onde para além das definições de variável estatística, amostra, média, variância, desviopadrão e percentil, analisam-se as propriedades básicas destes conceitos e as respetivas interpretações através de exemplos concretos.

As aulas foram lecionadas seguindo a ordem pela qual os domínios foram apresentados. Na tabela 3.6. pode-se analisar o número de tempos letivos (50 minutos) que foram dedicados a cada domínio e comparar com o número de tempos letivos (45 minutos) sugeridos pelo programa, onde se incluem as aulas dedicadas à avaliação.

Tabela 3.6.: Tempos letivos atribuídos a cada Domínio.

Domínio	**Período**	**Nº de aulas lecionadas**	**Nº de aulas propostas**
LTC10	1º	28	18
ALG10	1º	50	30
GA	2º	56	54
FRVR	2º/3º	62	58
EST	3º	0	18

Como se pode constatar pela tabela 3.6. não houve tempo para a lecionação dos conteúdos referentes ao domínio Estatística por existir a necessidade de dedicar mais tempos letivos do que os estimados pelo programa para cada um dos restantes domínios.

O manual adotado para o 10.º ano pelo Agrupamento de Escolas António Gedeão foi o Novo Ípsilon da autoria de Carlos Andrade, Paula Pinto Pereira e Pedro Pimenta sob a consultoria científica de Jorge Buescu. Este manual é composto por três volumes e caderno de atividades (ver fig. 3.1.).

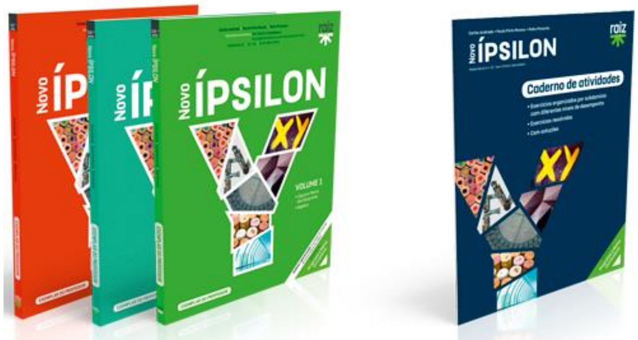


Figura 3.1.: Manual adotado para o 10º ano.

3.4. A turma do 9º ano

A turma do 9.º ano teve ao longo do ano letivo 27 alunos, com idades compreendidas entre os 14 e os 16 anos. Os alunos, na sua maioria, integram esta turma desde o seu 7.º ano e muitos dos seus professores mantiveram-se nos três anos de escolaridade. Segundo o diretor de turma, foi uma turma que ao longo do 3.º ciclo manteve um bom aproveitamento mas com menor responsabilidade e empenho neste último ano. Também foi evidente no presente ano letivo o aumento do espirito de coesão de grupo-turma em defesa dos seus interesses e atividades.

3.4.1. Aulas lecionadas

Na turma do 9º ano foram lecionadas duas aulas na disciplina de Matemática. A primeira aula foi lecionada no primeiro período e a segunda no terceiro período. As duas aulas foram assistidas pela professora titular da turma e pela Professora Rosário Lopes, tendo a segunda sido assistida também pela Professora Doutora Maria Helena Santos.

3.4.1.1. Primeira Aula – Álgebra (ALG 9)

A primeira aula lecionada pela professora estagiária ao 9º ano realizou-se a 26 de novembro de 2015. Os conteúdos desta aula incluem-se no subdomínio Equações do 2º grau, pertencente ao domínio Álgebra. Os conteúdos planificados para esta aula envolveram as equações do 2º grau completas e incompletas e a lei do anulamento do produto.

A aula iniciou-se com a revisão dos casos notáveis seguindo-se a exploração de uma tarefa envolvendo a resolução de dois problemas. Estes problemas requeriam a interpretação do enunciado e respetiva tradução de cada um deles por uma equação. No primeiro caso tratava-se de uma equação incompleta e no segundo de uma equação completa. A tarefa foi realizada a pares e os alunos dispuseram de tempo limitado para a sua realização. Seguidamente, a professora estagiária chamou um aluno ao quadro para corrigir a tarefa. Para concluir a aula, procedeu-se à revisão do conceito de equação do 2º grau, completa e incompleta e à sua escrita na forma canónica.

No final da aula, ao analisá-la com o núcleo de estágio, a professora estagiária revelou sentir um grande à vontade com a turma, reconhecendo que se trata de uma turma bastante participativa e interessada. No início da aula a estagiária optou por insistir na revisão dos casos notáveis da multiplicação de polinómios por ter diagnosticado algumas dificuldades em alguns alunos. Esta opção justificou-se pelo facto dos casos notáveis serem prérequisito indispensável e fundamental não só para este tema do 9º ano, mas para muitos outros conteúdos do programa da disciplina de Matemática A do Ensino Secundário. O tempo despendido com esta revisão sacrificou a execução integral do plano de aula. A Professora Rosário Lopes referiu que, de uma maneira geral, a aula correu bem e que a professora estagiária conseguiu envolver toda a turma. Como aspeto a melhorar apontou a necessidade de maior rigor no uso de linguagem específica, referiu no entanto que algumas ocorrências refletem a inexperiência da professora estagiária.

3.4.1.2. Segunda Aula – Geometria (GM 9)

A segunda aula lecionada ao 9º ano realizou-se a 14 de abril de 2016. Os conteúdos desta aula incluíram-se no subdomínio Propriedades de ângulos, cordas e arcos definidos numa circunferência, pertencente ao domínio Geometria. Os conteúdos abordados nesta aula envolveram a soma das amplitudes dos ângulos internos e externos de um polígono convexo.

Por se tratar de uma aula que implica a representação de várias figuras geométricas, a professora estagiária optou por recorrer ao PowerPoint para a exposição dos conteúdos.

A aula começou com uma revisão acerca de polígonos, onde foram relembrados os conceitos de ângulo interno e externo de um polígono, polígono convexo, concavo, regular e não regular, ângulo interno e externo, ângulos complementares e suplementares. A turma revelou ter estes conceitos bastante presentes. A título de curiosidade, explicou-se aos alunos a origem da palavra polígono.

Seguidamente, a estagiária propôs uma tarefa onde os alunos tinham que determinar a soma das medidas das amplitudes dos ângulos internos de diferentes polígonos convexos de acordo com duas decomposições distintas em triângulos. As decomposições em triângulos foram apresentadas para cada polígono segundo as diagonais dos polígonos e segundo os segmentos de reta que uniam um qualquer ponto interior aos vértices do polígono. A estagiária solicitou que cada metade da turma realizasse a tarefa seguindo apenas um dos tipos de decomposições. Os alunos que realizaram a tarefa com o segundo tipo de decomposição revelaram algumas dificuldades iniciais na escolha da estratégia para somar os ângulos internos dos polígonos apresentados. De forma a colmatar essas dificuldades, a professora estagiária pediu aos alunos que se centrassem num único polígono - quadrilátero - e que expressassem a estratégia que estavam a seguir para obterem a soma dos ângulos internos do mesmo. Na partilha de perspetivas, os alunos concluíram que além de somarem 180º por cada triângulo, quatro no caso do quadrilátero, teriam de subtrair 360º correspondente à soma das medidas das amplitudes dos ângulos dos triângulos cujo vértice era o ponto interior ao polígono. A professora, em conjunto com os alunos, inferiu a fórmula da soma das medidas das amplitudes dos ângulos internos de um polígono convexo com n lados. Os alunos, depois de realizarem a tarefa, não mostraram dificuldade na generalização desta soma a qualquer polígono.

Após a correção da tarefa e retiradas as conclusões da mesma, a estagiária apresentou um exemplo de um hexágono regular e questionou a turma sobre a medida da amplitude de qualquer um dos ângulos internos deste polígono. Fazendo o paralelo com o caso concreto, a estagiária deduziu a fórmula para qualquer polígono regular com n lados.

Concluída a abordagem aos ângulos internos de polígonos convexos, foi dado um exemplo de outro polígono e calculada a soma das medidas das amplitudes dos seus ângulos externos. Foi perguntado aos alunos se para qualquer polígono esta soma seria sempre 360º e a maioria respondeu que não. Demonstrou-se que a soma das medidas das amplitudes dos ângulos externos de qualquer polígono convexo era, contrariamente ao que os alunos pensavam, 360º independentemente do seu número de lados.

Novamente partindo de um exemplo concreto calculou-se a medida da amplitude de um ângulo externo de um polígono regular, tendo-se estendido o raciocínio para qualquer polígono regular.

Para finalizar a aula, a professora estagiária apresentou uma síntese com todos os resultados deduzidos na aula e propôs aos alunos que resolvessem alguns exercícios do manual.

Após a aula, a estagiária sentiu que a aula tinha sido muito dinâmica, não tendo os alunos apresentado dificuldades na realização dos exercícios propostos. Existiu também um cuidado especial com a explicação da notação usada ao longo da aula. Apesar disso, o facto de se ter recorrido ao PowerPoint para a exposição dos conteúdos, contribuiu para que fosse avançando a aula sem dar tempo suficiente aos alunos para retirarem apontamentos.

A Professora Doutora Helena Santos e a Professora Rosário Lopes teceram algumas críticas à lecionação da aula, destacando como aspetos a melhorar pequenas falhas com a linguagem, o insuficiente número de exemplos antes da generalização de alguns resultados e a falta de clareza na explicação em situações que envolviam a implicação de resultados, podendo ser potencialmente dúbio para os alunos a distinção entre os conceitos de hipótese e tese. Como pontos fortes desta aula foram apontados a boa gestão da turma, a estratégia de divisão da turma para se discutir as diferentes estratégias na tarefa apresentada e a ausência de erros científicos.

3.4.2. Oferta Complementar

De modo a conhecer a turma do 9.º ano no contexto da sua dinâmica em aula, a estagiária acompanhou a disciplina de Oferta Complementar, definida na escola como reforço para as aprendizagens da disciplina de Matemática. Esta disciplina foi lecionada quinzenalmente num tempo letivo de 50 minutos pela Professora Rosário Lopes.

Ao longo do ano letivo os alunos realizaram diferentes exercícios com vista à sua preparação para o Exame Nacional do 9º ano. No primeiro período, a estagiária em colaboração com a sua colega de estágio elaborou quatro fichas onde se reuniram exercícios de exame organizados por temas. A turma foi divida em grupos de quatro alunos que conjuntamente realizaram as tarefas propostas. Nesta turma, a realização destas fichas foi bastante eficaz na medida em que a discussão em grupo mostrou-se benéfica para a revisão dos conteúdos. No segundo período, a turma esteve envolvida na realização das provas dos concursos Alea e Pangea. Nas restantes aulas deste período, a Professora Rosário Lopes fez a revisão dos conteúdos que a turma revelou ter maior dificuldade. No terceiro período, os alunos resolveram os exames dos anos anteriores, tomando contacto com a estrutura dos mesmos.

A avaliação da disciplina foi realizada com base no trabalho desenvolvido e nas atitudes demonstradas pelos alunos, tendo sido recolhidas ao longo das aulas algumas resoluções de exercícios para classificação.

3.4.3. Direção de Turma

Ao longo do ano letivo, a professora estagiária apoiou o Diretor de Turma do 9.º ano, Professor de Geografia Narciso Marnoto, na realização de todas as tarefas inerentes ao cargo. As funções de direção de turma foram exercidas em dois tempos letivos de cinquenta minutos por semana.

No que respeita à função de professor enquanto diretor de turma, Boavista e Sousa (2013) reconhecem-no como um elemento determinante na mediação de conflitos, não só no recinto escolar, mas na ramificação da comunidade escolar. Este constitui uma peça fundamental na relação interna entre a turma e os professores, bem como na relação externa que estabelece com os encarregados de educação. O docente acumula ainda diversas funções burocráticas, desenvolvendo, através de técnicas especificas, capacidades para o exercício de todas as tarefas de coordenação. Assim, os autores definem o Diretor de Turma como sendo um professor posicionado numa estrutura pedagógica de gestão intermédia da escola, centrado nos alunos e na gestão dos mesmos, especializado na organização de um trabalho cooperativo entre os professores da turma, sempre em benefício do desenvolvimento intelectual e pessoal dos discentes.

Neste sentido e com o objetivo de tomar contacto com as diferentes funções de um Diretor de Turma, a professora estagiária desempenhou ao longo do ano as seguintes tarefas:

- Organização do dossier da turma;
- Elaboração do plano de turma;
- Organização e atualização dos processos individuais de cada aluno;
- Lançamento das faltas de presença e respetivas justificações no sistema informático adotado pela escola;
- Registo das faltas de material/atraso e arquivo dos documentos comprovativos das justificações de faltas no dossier da turma;
- Redação conjunta com o diretor de turma de algumas atas dos Conselhos de Turma e das reuniões com os Encarregados de Educação;
- Direção com o acompanhamento do Diretor de Turma e de forma autónoma de reuniões individuais com os encarregados de educação na hora de atendimento estipulada para o efeito;
- Atendimento telefónico aos Encarregados de Educação na respetiva hora de atendimento;
- Colaboração na resolução de situações específicas da turma quer coletivas quer individuais;
- Participação nas reuniões de diretores de turma para preparação dos vários conselhos de turma;
- Preparação e participação ativa em todas as reuniões sejam de Encarregados de Educação, de Avaliação e Intercalares;
- Lançamento das notas finais de cada período no sistema informático adotado pela escola e preenchimento de documentação relacionada com a turma para efeitos estatísticos do estabelecimento de ensino.

3.5. Componente não letiva

3.5.1. Aulas de Apoio

A professora estagiária esteve presente nas aulas de apoio aos alunos do 9.º e 10.º anos. Estas aulas funcionaram às quintas-feiras em dois blocos de cinquenta minutos e serviram de complemento à sala de aula. Nestas aulas, a professora estagiária, a sua colega de estágio e a Professora Orientadora esclareceram dúvidas aos alunos e em alguns casos, orientaram o seu estudo propondo exercícios. Esta tarefa permitiu que a professora estagiária tivesse um contacto mais próximo com alguns alunos, especialmente da turma do 10.º ano que acompanhou, e diagnosticasse as suas principais dificuldades, tanto ao nível da aprendizagem como da metodologia de estudo.

3.5.2. Concursos matemáticos

Descobre se és capaz – Versão Secundário, foi um projeto organizado no presente ano letivo pelo núcleo de estágio de matemática e que visou dar continuidade a um trabalho já existente na escola apenas para o 3.º ciclo. Os objetivos deste projeto passaram por realçar o aspeto lúdico da disciplina, desenvolver o raciocínio e o sentido crítico dos alunos e promover o diálogo familiar em torno dos desafios propostos. Quinzenalmente foram lançados três desafios com níveis de dificuldade distintos, onde cada aluno podia entregar a resolução correspondente a um dos níveis, estando associado a cada nível uma pontuação diferente.

Figura 3.2.: Cartaz do projeto.

Como forma de divulgação do projeto, o núcleo de estágio foi presencialmente às salas de todas as turmas do ensino secundário dar a conhecer os desafios, afixou cartazes por todos os pavilhões e sala dos professores e disponibilizou o regulamento e os enunciados no site da escola (ver fig. 3.2.).

No total, foram lançados trinta e três desafios durante onze semanas. Os desafios propostos não envolveram conteúdos específicos dos programas de Matemática, sendo por isso possível a qualquer aluno do ensino secundário a sua resolução, quer autonomamente quer com ajuda. No entanto, houve uma reduzida participação dos alunos, potencialmente justificada pelo caráter voluntário da atividade e pelo facto de no ensino secundário os alunos serem confrontados com um nível de trabalho mais exigente, quando comparado com o 3.º ciclo.

Durante o ano letivo, todos os alunos da escola tiveram a oportunidade de participar em diferentes concursos matemáticos. Pela primeira vez na escola, alguns alunos participaram na edição 2015/2016 do Concurso internacional de Matemática Pangea, destinado a alunos do 3.º ao 10.º ano de escolaridade. Este concurso consiste na realização de um teste individual com 20 perguntas de escolha múltipla. O nível de dificuldade do teste é crescente e os conteúdos envolvidos pertencem ao programa de Matemática do respetivo ano de escolaridade. No sentido de enaltecer o empenho dos alunos, foram afixados na escola os nomes dos alunos com melhor desempenho na prova. Além deste concurso, houve também a participação nos concursos ALEA e Canguru Matemático sem Fronteiras.

Para a professora estagiária foi bastante interessante o contacto com os diferentes concursos matemáticos, pois permitiu abrir o leque de opções para atividades extracurriculares que pode propor aos seus alunos no futuro.

3.5.3. Reuniões assistidas

O Grupo Disciplinar de Matemática ou o Departamento de Matemática e Ciências Experimentais reuniram-se durante o ano letivo às quintas-feiras à tarde. A professora estagiária teve a possibilidade de estar presente em algumas destas reuniões e compreender o trabalho desenvolvido por estes dois órgãos. Nas reuniões do Grupo Disciplinar de Matemática foram discutidos e tratados diversos assuntos, entre os quais os critérios específicos de avaliação em alguns anos escolares, as atividades realizadas no dia do patrono e a avaliação e escolha de manuais escolares. As reuniões de Departamento visaram a divulgação de algumas informações, como foi o caso da contratação de um novo informático e a entrada em vigor do correio eletrónico institucional. Além disso, também se procedeu à votação de várias propostas em discussão no Agrupamento, em virtude de diferentes assuntos.

A professora estagiária foi presença assídua em todos os concelhos de turma respetivos às turmas do 9.º e do 10.º ano que acompanhou, o que lhe permitiu ter uma visão abrangente do desempenho das turmas em todas as disciplinas.

3.6. Reflexão Crítica sobre a Prática Pedagógica

Os professores que refletem sobre a ação estão envolvidos num processo de investigação, não só tentando compreender-se a si próprios melhor como professores, mas também procurando melhorar o seu ensino (Oliveira & Serrazina, 2002).

O estágio pedagógico proporcionou o contacto com a realidade exigida a um professor de matemática em Portugal, o que permitiu à professora estagiária exercer diferentes tarefas no exercício da profissão e em simultâneo construir variadas perspetivas sobre a atividade docente.

A observação das aulas lecionadas pela Professora Orientadora tornou mais rica a experiência pedagógica da professora estagiária. Quando o professor está perante a turma torna-se difícil aceder a certos pormenores da personalidade de cada aluno, dando-se mais atenção à turma enquanto bloco. A possibilidade de estar sentada do lado dos alunos permitiu avaliar o seu comportamento de forma individualizada e por outro lado acompanhar de perto alguns alunos que possuíam maiores dificuldades de aprendizagem. Com o decorrer do ano letivo, a turma deixou de acusar a presença da professora estagiária como um elemento de autoridade e extra no seu grupo, contribuindo para conhecer autenticamente a sua dinâmica. Desta forma, identificar algumas caraterísticas comportamentais da turma revelou-se importante também para contornar alguma inexperiência da estagiária na gestão da turma durante as aulas lecionadas.

O registo dos trabalhos de casa, a colaboração nos momentos de resolução de exercícios e todas as conversas com a Professora Orientadora onde se discutiram por exemplo as melhores estratégias para lecionar certos conteúdos ou o diagnóstico das dificuldades dos alunos permitiram à professora estagiária estar sempre a par da evolução da turma em diferentes parâmetros e usufruir da experiência e vasto conhecimento da orientadora.

Uma particularidade que foi encontrada na maioria dos alunos e sobre a qual a estagiária não tinha essa perceção na sua experiência enquanto aluna, reside na dificuldade em ultrapassar as dificuldades encontradas. A maioria dos alunos ao não conseguir realizar os exercícios propostos, imediatamente solicitava a ajuda da professora. Não havia o hábito de consultar o manual, ler e compreender a base teórica que o exercício envolvia, retirar informações do enunciado, ponderar alguns minutos sobre os problemas ou até voltar ao mesmo exercício dias mais tarde. Na perspetiva da estagiária esta mudança comportamental na atual geração de alunos pode estar potencialmente ligada à facilidade que estes têm em encontrar qualquer informação na internet, sem ter que por exemplo abrir uma enciclopédia, um dicionário ou livro técnico. O contexto atual da sociedade fornece-lhes rapidamente toda a informação através de um simples *smartphone*, e quando assim não o é, torna-se algo moroso, fatigante e por isso difícil.

A frequência nas aulas das duas turmas de 10.º ano possibilitou comparar as metodologias usadas pela Professora Orientadora em turmas muito díspares e ainda, conhecer algumas estratégias utilizadas com o objetivo claro de facilitar a assimilação de alguns conceitos por parte dos alunos. A turma acompanhada pela estagiária solicitava com maior frequência a resolução dos exercícios propostos para trabalho de casa e expunha mais as suas dúvidas, sendo uma turma no geral mais comunicativa. As caraterísticas desta turma exigiram que a Professora Rosário Lopes dispensasse mais tempo na componente prática da disciplina o que obrigou a uma gestão rigorosa da exposição dos conteúdos para que ambas as turmas ficassem equiparadas no cumprimento do programa. Ainda assim, foi possível verificar que o facto de alguns alunos desta turma exporem as suas dúvidas perante os colegas contribuiu para que surgissem situações de aprendizagem relevantes para toda a turma.

Outro aspeto analisado através da observação das aulas foi a atuação da Professora Orientadora em alguns momentos de indisciplina da turma, conseguindo evitar sanções disciplinares e eficazmente corrigir tais comportamentos através de estratégias como mudanças de lugar, chamadas de atenção ou convidando os alunos a participar na aula. Em contrapartida, o empenho e preocupação da Professora Orientadora para que todos os alunos compreendessem os conteúdos em conformidade com a exigência que impunha sobre as aprendizagens faziam com que a grande maioria dos alunos estivesse ativa, interessada e curiosa. Um ensino pautado pelo rigor científico, onde o limite para aprender é medido pela curiosidade dos alunos tornou-se assim uma referência para a futura prática pedagógica da estagiária.

O processo de lecionação de aulas pela professora estagiária socorreu-se de quatro etapas: Planificar, lecionar, refletir e autorregular.

Com o decorrer das aulas lecionadas, a professora estagiária ficou consciente que a planificação é um sistema de intenções, não tem um carácter rígido e que o seu cumprimento não deve ser considerado obrigatório, devendo ser equilibrado com o ritmo de aprendizagem dos alunos. Do seu ponto de vista, ao elaborar os planos de aula foi importante estar atenta às necessidades, interesses e capacidades dos alunos, e estes foram suscetíveis de sofrer reajustes de acordo com o feedback recebido no decorrer das aulas.

Ensinar foi das tarefas mais desafiantes encontradas no decorrer do ano letivo. Não se tratou apenas de expor os conteúdos ou de pôr em prática um plano de aula. Consistiu na tentativa de envolver os alunos com os conteúdos, fazê-los pensar, expressar as suas ideias e contribuir para que se sentissem agentes ativos e importantes no desenvolvimento de cada aula. Neste sentido, a transformação do saber científico em saber ensinar por parte da professora estagiária mostrou ser um processo que teve de ser bastante ponderado e que foi importante para tornar a experiência de aprendizagem dos alunos o mais significativa possível. O facto das aulas lecionadas terem sido assistidas e constituírem um momento de avaliação, reforçaram o sentido de reflexão e desenvolveram a exigência e sentido critico tanto ao nível didático como cientifico. As críticas tecidas à prática pedagógica pela Professora Doutora Maria Helena Santos e pela Professora Rosário Lopes foram fundamentais para identificar, corrigir ou aperfeiçoar o desempenho em sala de aula. Aula após aula, os comentários das professoras em consonância com a autoavaliação da professora estagiária contribuíram em grande parte para o processo de autorregulação da aprendizagem sobre a sua prática letiva, culminado num aumento de confiança no seu trabalho. Foi possível compreender que nem sempre a intenção dada à aula, chega aos alunos da forma como se pensou e que é complexo ter uma perspetiva realista da forma como decorreu a aula, pois a inexperiência no ensino dificulta o descortinar da aprendizagem efetiva de cada aluno. Contudo, sentir a esplendorosa sensação de cada vez que os olhos dos alunos se abriram de espanto e alegria perante a compreensão de um conceito ou construção de um raciocínio, transmitindo que tudo fazia sentido naquele momento, fez a professora estagiária aumentar a sua paixão por esta maravilhosa profissão e consolidar a sua decisão sobre esta opção profissional.

Importa também refletir sobre o trabalho desenvolvido no âmbito da direção de turma do 9.º ano. Numa primeira fase, o professor Narciso Marnoto deu a conhecer todas as funções inerentes ao seu papel como diretor de turma e permitiu que a professora estagiária o acompanhasse em todas as tarefas. Em particular, considerou-se muito útil para o futuro exercício da profissão a aprendizagem sobre a utilização do sistema informático adotado pela escola para o lançamento e justificação de faltas, mas também a tomada de contacto com alguma legislação usada em torno dos problemas inerentes à direção de turma. Adquirido o conhecimento necessário sobre os procedimentos a adotar no acompanhamento anual de uma turma, foi incutida a responsabilidade de autonomamente, entre outras tarefas, dirigir as reuniões individuais presenciais e contactar telefonicamente os encarregados de educação na respetiva hora de atendimento. Para estas reuniões e sob supervisão do professor Narciso Marnoto, a professora estagiária reuniu antecipadamente toda a informação relativa aos problemas gerais da turma e à situação atual de cada aluno. Para além disso, à semelhança do que foi observando da prática do professor Narciso Marnoto, durante as reuniões existiu a preocupação de manter uma boa comunicação, uma linguagem clara, simples e acessível e algum tato e bom senso. Ao contrário do inicialmente esperado, esta foi uma atividade pela qual a estagiária se interessou bastante pois permitiu ter acesso à realidade familiar de alguns alunos que muitas vezes o professor desconhece e que ajuda a explicar alguns dos comportamentos evidenciados em aula. O acesso a uma realidade que tantas vezes consciencializa o professor da falta de equidade educativa associada à diversidade dos alunos que tantas vezes são tratados por igual.

Por último, a frequência da sala de professores culminou no estabelecimento de vários diálogos com professores de diferentes disciplinas. A partilha de situações sobre, por exemplo, experiências com turmas com diferentes problemas disciplinares, o estatuto da profissão de professor, os concursos para docentes ou enquadramentos familiares complexos e as suas repercussões no percurso escolar dos alunos, contribuíram para que a professora estagiária ficasse consciente de algumas problemáticas inerentes à profissão de professor.

O estágio pedagógico constituiu assim uma etapa fundamental no processo de evolução da estagiária enquanto futura professora. Este permitiu aplicar os conhecimentos científicos e pedagógicos adquiridos durante a formação académica, mas principalmente contribuiu para descobrir o significado de se ser professor. No entanto, considera-se que ainda existe um longo caminho a percorrer para o domínio sólido da atividade docente que advirá com os anos de experiência.

PARTE II

O jogo como promotor da aprendizagem matemática

Um estudo sobre a influência do jogo na aprendizagem de alunos do 10.º ano do Ensino Secundário

1. Introdução

A presente investigação integra o estágio pedagógico realizado numa escola da Grande Lisboa e realiza-se numa turma do 10.º ano na disciplina de Matemática A.

1.1. Motivação e pertinência do estudo

A Matemática segundo Corbalán (2002) constitui a única disciplina que marca presença em todos os níveis de ensino de todos os países do mundo e se supõe um pilar básico do ensino em todos eles. À semelhança da Matemática, o jogo é uma atividade que normalmente está presente de diferentes formas na vida de qualquer jovem e sobre o qual é conhecido o seu potencial para o processo de ensino aprendizagem em muitas áreas do conhecimento. No meu caso, sempre houve uma grande ligação com o ato de jogar, tornando-se uma atividade que em família ou entre amigos era recorrente. Lembro-me do prazer que eu e os meus colegas sentíamos quando nos últimos dias de cada período os professores propunham um jogo como tarefa para a aula. Para nós, independentemente do jogo em questão, esta prática quebrava a rotina das tradicionais aulas a que fomos habituados e, por serem diferentes, faziam-nos estar mais despertos. No que respeita à disciplina de Matemática, a dinâmica que os jogos impunham, o entendimento das regras e o querer alcançar um objetivo sempre me guiaram na minha relação com esta ciência. Por me rever a jogar enquanto resolvia problemas de Matemática, a minha paixão por esta disciplina foi aumentando e a cada ano que passava, o desafio imposto pelo jogo foi maior mas também mais entusiasmante.

No primeiro ano do Mestrado em Ensino da Matemática, nas unidades curriculares de Pedagogia e Didática da Matemática I e II, surgiu a ideia da construção de jogos que abordassem explicitamente os conteúdos presentes no currículo de Matemática. Fundir o jogo e a Matemática num recurso que pode alterar a forma como os alunos encaram a disciplina, provocou desde logo o meu interesse em investigar este tema. Subjacente à prática desta tipologia de jogo está a idealização que, além de constituir uma forma mais afetiva e intimista dos alunos fazerem matemática, pode tornar-se um meio promissor para a sua aprendizagem nesta disciplina.

Como futura professora acredito que a diversificação das ferramentas metodológicas no ensino da Matemática enriquece o trabalho do professor. Nesta perspetiva, parece-me importante avaliar a potencialidade do uso do jogo como uma alternativa capaz de constituir um meio facilitador e motivador da aprendizagem matemática: por um lado, recuperando o gosto por esta disciplina naqueles alunos que não se identificam com a mesma e, por outro lado, como um meio desafiador para os que se encontram num patamar de conhecimento mais avançado.

Este foi o ponto de partida para o interesse pela análise de estudos já efetuados neste campo, tanto ao nível nacional como internacional. Foi identificada alguma investigação já realizada nesta área, embora na maioria dos casos o público-alvo fossem alunos do ensino básico e o tipo de jogos envolvidos não compreendesse de forma direta os conteúdos presentes no currículo.

Smole, Diniz, Pessoa e Ishihara (2008) e Corbalán (2002) partilham da opinião que um dos níveis escolares que menos utiliza jogos, como recurso didático, é o ensino secundário. O sistema educativo, de um modo geral, oferece resistência a este recurso devido à crença de que a Matemática se trata de uma disciplina séria, enquanto a utilização de jogos pressupõe introduzir nas aulas uma componente lúdica, o que compromete tal seriedade. Smole, Diniz, Pessoa e Ishihara (2008) acrescentam que o jogo, visto através de uma perspetiva escolar, foi muitas vezes negligenciado por ser encarado como um passatempo. Embora este possa ser um aspeto a ter em conta, não é no fator lúdico que assenta a proposta do uso deste recurso em contexto educacional. Corbalán (2002) sublinha a existência de uma grande dificuldade em fazer entender a todos os implicados no processo a relevância de considerar o jogo na Educação Matemática. Entre os implicados estão os próprios alunos, parte dos quais, em determinados casos e tendo por base a sua experiência anterior, tendem a dar mais importância aos aspetos que, para eles, são mais "matemáticos", como fórmulas e cálculos, em detrimento do raciocínio matemático. Compreende-se assim que também a posição e disponibilidade dos alunos para usar o jogo como veículo para a sua aprendizagem devem ser consideradas, numa fase em que a Matemática surge no seu percurso académico como uma disciplina central e de extrema importância para o seu futuro.

O tema deste estudo surge assim das dúvidas sobre as vantagens da utilização deste tipo de jogos como estratégia didática capaz de satisfazer o desenvolvimento de competências e a compreensão dos conceitos matemáticos exigidos a alunos no ensino secundário. Mais relevante que estudar as caraterísticas que devem ser consideradas na construção de cada jogo, é perceber de que forma este pode efetivamente constituir uma ferramenta realmente útil, alternativa e capaz de corresponder aos desafios propostos à disciplina de Matemática neste nível de ensino.

1.2. Objetivos e organização do estudo

Perante os aspetos apontados na secção anterior, é natural questionar a influência que o jogo efetivamente pode ter no processo de ensino aprendizagem da Matemática no ensino secundário, tanto na aprendizagem dos conteúdos da disciplina como no desenvolvimento das capacidades transversais essenciais ao trabalho matemático. Desta forma, este estudo pretende analisar e compreender o impacto da prática e construção de jogos sobre a aprendizagem matemática de alunos do 10.º ano de escolaridade. Nomeadamente pretende-se perceber:

1. Qual o contributo da prática do jogo na aprendizagem e no desenvolvimento de capacidades matemáticas?
2. Qual o comportamento dos alunos em relação à cooperação e à competição durante a prática do jogo e em que medida este comportamento promove a aprendizagem matemática?
3. Quais os momentos do jogo onde os alunos manifestam maiores dificuldades?
4. Em que medida a construção de jogos favorece o aprofundamento de conceitos matemáticos?

Quanto à estrutura, este trabalho está dividido em cinco capítulos: introdução, revisão de literatura, metodologia, apresentação e análise de dados e conclusões.

O segundo capítulo centra-se na fundamentação teórica e serve de referencial para a análise dos resultados da nossa investigação. Parte-se dos estudos de vários autores para definir, caraterizar e classificar o jogo. Para além disso, realça-se o papel do jogo no desenvolvimento das capacidades e da aprendizagem da Matemática, reforçando os benefícios que pode trazer como metodologia e os cuidados que o professor tem de ter na implementação da mesma. Por fim, mostra-se de que forma os jogos estiveram e estão presentes no currículo e alguns resultados de estudos acerca do tema.

O terceiro capítulo prende-se com os procedimentos metodológicos e está divido em duas partes. Na primeira parte recorre-se a vários autores para definir o tipo de metodologia usada e na segunda engloba-se as questões de investigação e os objetivos que nortearam este trabalho, especificando as técnicas e os instrumentos utilizados tanto na recolha como na análise dos dados.

No quarto capítulo é realizada a apresentação e análise dos dados obtidos em cada estudo de caso, sendo estes: Leonor, Maria, Vitória e Simone.

O quinto capítulo apresenta algumas conclusões gerais obtidas através da implementação das tarefas propostas, assim como algumas ideias sobre o trabalho futuro a ser desenvolvido nesta área.

2. O jogo no ensino da Matemática

Neste capítulo fazemos uma abordagem teórica sobre o tema em análise, partindo da definição do nosso objeto de estudo e posteriormente focando-nos em pontos que consideramos pertinentes e relevantes para sustentar a nossa investigação.

2.1. O jogo no contexto educacional

Smole, Diniz, Pessoa e Ishihara (2008) referem que definir o que é um jogo é algo que não é tarefa fácil, em virtude da versatilidade da própria palavra. Sá (1995) apoia-se nas ideias de Bright, Harvey e Wheeler (1985) para a sua definição de jogo em contexto educacional, denominado jogo educativo. Para o autor, o jogo educativo é em si mesmo uma tarefa para a qual são definidos pelos educadores um conjunto de objetivos educacionais, cognitivos ou afetivos e que se baseiam em princípios claros. Neste sentido, o jogo: pressupõe participação livre; é um desafio perante uma tarefa (solitário) ou um oponente; é regulado por um conjunto definido de regras que definem todos os procedimentos para jogar, incluindo objetivos a alcançar, e que impedem que um jogador altere a sua decisão depois de ter acabado a sua vez de jogar; representa uma situação arbitrária claramente delimitada no espaço e no tempo a partir da atividade da vida real; socialmente, os acontecimentos que ocorrem durante o jogo são considerados, em si mesmo, de importância mínima; as situações exatas que se alcançam são desconhecidas antes de se iniciar o jogo; termina após um número finito de jogadas.

Na perspetiva de Smole, Diniz, Pessoa e Ishihara. (2008), um jogo em contexto educacional deve: ser para dois ou mais jogadores, constituindo portanto, uma atividade realizada em conjunto; ter um objetivo a ser alcançado pelos jogadores, ou seja, no final haverá um vencedor; permitir que os alunos assumam papéis interdependentes, opostos e cooperativos e para isso os jogadores devem perceber a importância de cada um na realização dos objetivos do jogo, na execução das jogadas, e observar que um jogo não se realiza a menos que cada jogador concorde com as regras estabelecidas; ter regras preestabelecidas que não podem ser modificadas no decorrer de uma jogada, onde cada jogador compreende que as regras são um compromisso aceite pelo grupo e que a sua violação representa uma falta; ser discutido com todo o grupo no caso de existir o desejo de se fazer alterações e, se todos concordarem, estas alterações podem ser impostas ao jogo daí por diante; abrir a possibilidade de serem usadas estratégias, estabelecer planos, executar jogadas e avaliar a eficácia desses elementos nos resultados obtidos, ou seja, a prática do jogo não deve constituir uma atividade mecânica e sem significado para os jogadores.

Smole, Diniz e Cândido (2007), caraterizam o uso do jogo em contexto educacional como uma atividade diferenciada, porque atribui ao aluno e ao professor outras posições na relação com o saber. Smole, Diniz, Pessoa e Ishihara (2008) enumeram outras caraterísticas que o jogo deve compreender, entre elas, que deve trazer situações interessantes e desafiadoras, permitindo que os jogadores se autoavaliem e participem ativamente no jogo, percebendo os efeitos das suas ações, dos riscos que podem correr ao optar pelos diversos caminhos, analisando as suas jogadas e a dos seus oponentes.

Na perspetiva de Muñoz (2013), o jogo enquanto recurso didático destaca-se por obrigar o aluno a pensar, a argumentar perante as várias situações de ação, a desenvolver raciocínios lógicos para investigar a melhor forma de atuar e a estabelecer e justificar conjeturas.

Os parâmetros sugeridos anteriormente para a definição de jogo educativo enquadram-se na descrição de jogo matemático realizada por Heras (2014) e Selva e Camargo (2009). Heras (2014) refere que através deste tipo de jogos se pretende alcançar objetivos didáticos relacionados com a aprendizagem da Matemática. Selva e Camargo (2009) reforçam esta ideia, concluindo que o jogo matemático envolve um processo, no qual o aluno necessita de conhecimentos prévios, de ter capacidade de interpretar regras e usar raciocínio matemático. Os autores colocam assim o jogo matemático na base de constantes desafios em que, a cada nova jogada, são abertos espaços para a elaboração de novas estratégias que desencadeiam situações-problema e que, ao serem resolvidas, permitem a evolução do pensamento abstrato para o conhecimento efetivo, construído durante a atividade desenvolvida.

2.2. Classificação de jogos

Da mesma forma que não existe uma definição única para jogo, também a sua classificação não é consensual na literatura revista. A classificação ou categorização dos tipos de jogos é, segundo Smole, Diniz, Pessoa e Ishihara (2008), tão ou mais diversa do que os sentidos da palavra jogo. Nesta secção apresentamos algumas classificações existentes que permitem dividir os diferentes jogos segundo algumas das suas caraterísticas.

Segundo Escolano, Marcén e Morales (2009), os jogos podem considerar-se como jogos de estratégia ou jogos de conhecimento. Contudo, os autores frisam que tal não consiste verdadeiramente numa classificação, mas sim numa qualificação, pois existem jogos que podem ser considerados de ambos os tipos.

Os jogos de conhecimento são aqueles cujos conteúdos são tópicos presentes nos currículos de Matemática e por isso são os mais utilizados pelos professores. O grau de aleatoriedade é um fator presente e que deve ser considerado na aplicação destes jogos, e portanto quanto maior for o seu nível, maiores são as hipóteses de qualquer aluno ser vencedor, sem depender exclusivamente das suas capacidades. (Escolano, Marcén & Morales, 2009). A este respeito, Corbalán (2002) refere que os jogos que têm integrado o fator sorte permitem que os alunos considerados com menos rendimento na disciplina de Matemática possam ganhar algumas partidas àqueles alunos que normalmente se destacam. O prazer e a autoestima que uma situação assim proporciona renovam as expectativas de todos os alunos que experimentam estes jogos e permite que os alunos com maiores dificuldades à disciplina sintam uma nova ligação com a Matemática.

Em relação ao ensino secundário, Smole, Diniz, Pessoa e Ishihara (2008) afirmam que os jogos de conhecimento constituem um recurso para um ensino e uma aprendizagem mais rica, ativa, criativa e participativa. Tornam-se assim um ótimo veículo para que os alunos construam, adquiram e aprofundem, de modo mais desafiador, os conceitos e procedimentos a serem desenvolvidos na aprendizagem da Matemática.

Corbalán (2002) sustenta que através deste tipo de jogos pretende-se atingir, consolidar ou rever certos conceitos matemáticos ou procedimentos de uma forma mais atrativa. Assim, Corbalán (2002) e Heras (2014) distinguem três níveis de aplicação baseados no modelo de Gairín (1990): o pré-instrucional, o co-instrucional e o pós-instrucional. No nível pré-instrucional, é através do jogo que o aluno descobre o conceito ou desenvolve a justificação dum algoritmo. Deste modo, o jogo é o único veículo para a aprendizagem. No nível co-instrucional o jogo é uma entre as diferentes tarefas que o professor utiliza para o ensino. Assim, neste caso o jogo acompanha os outros recursos de aprendizagem. No nível pós-instrucional, os alunos já realizaram uma série de aprendizagens e o jogo é um meio para reforçar os conhecimentos já adquiridos. Ou seja, neste caso o jogo serve para consolidar a aprendizagem.

Os jogos de estratégia, segundo Escolano, Marcén e Morales (2009), também chamados de “jogos de pensar”, requerem técnicas heurísticas semelhantes às utilizadas na resolução de problemas, existindo assim uma analogia entre as distintas formas de encontrar uma estratégia vencedora neste tipo de jogos e as técnicas heurísticas da resolução de problemas. Smole, Diniz, Pessoa e Ishihara (2008) reforçam esta ideia, referindo que estes jogos também são importantes no contexto educacional, por permitirem simular com os alunos processos de investigação matemática, estratégias de resolução de problemas, levantamento, comprovação ou refutação de hipóteses. Escolano, Marcén e Morales (2009) referem ainda que estas são tarefas fundamentais do trabalho matemático com as quais os alunos devem ter contacto e que se estruturam em três níveis de trabalho distintos: resolver casos particulares, generalizar e demonstrar.

Smole, Diniz, Pessoa e Ishihara (2008) distinguem estes dois tipos de jogos em função do fator sorte. Nos jogos de conhecimento, os alunos dependem de resultados sorteados em cartas ou dados; já nos jogos de estratégia, o fator sorte tem pouca ou nenhuma interferência, uma vez que, para conseguir vencer, o jogador depende exclusivamente das escolhas e decisões que realiza durante o jogo, ficando livre para escolher qualquer opção nos limites das regras.

Outro tipo de classificação é feita através do número de participantes em jogo. Castro (2008) define o jogo coletivo como sendo executado por várias pessoas em simultâneo e onde a competição é um estímulo. Heras (2014) apoiando-se no trabalho de Edo e Deulofeu (2006), refere ainda que o jogo coletivo permite que os alunos participantes sejam corrigidos pelos seus oponentes ou pelos jogadores da sua própria equipa. Desta forma, o facto de o jogo exigir um número plural de alunos, evita que o professor esteja continuamente a realizar correções, o que favorece o nível de motivação dos próprios alunos. Por outro lado, o autor também descreve este tipo de jogo como potenciador do desenvolvimento da autonomia, incentivando os alunos a rever as ações dos companheiros e a realizar correções se for necessário. Tudo isto leva a uma retroalimentação entre os participantes do jogo, que por sua vez conduz à autorregulação de cada aluno. Quanto aos jogos individuais, Heras (2014), descreve-os como sendo assegurados por um único jogador que trata de alcançar individualmente o objetivo do jogo.

Corbalán (2002) apresenta uma classificação para os jogos segundo os materiais que se utilizam na sua prática (cartas, tabuleiros, dados, etc.). O autor refere que este tipo de classificação não oferece grande interesse ao nível pedagógico, mas é relevante pelo facto do professor reconhecer a partir dos diferentes setores de classificação os recursos necessários para a construção de cada jogo e, além disso, a possibilidade de maximizar os jogos disponíveis, visto que com os mesmos elementos se podem obter muitos jogos.

Dentro desta classificação, é importante também distinguir entre os jogos que já existem fabricados e aqueles que são elaborados pelo professor ou pelos alunos. Tem que se ter em consideração que não é suficiente ter um exemplar de cada jogo, devendo existir pelo menos os suficientes para que todos os alunos de uma turma possam jogar simultaneamente quando as circunstâncias o requeiram, sem que as limitações dos recursos dificultem a planificação teórica sobre a adequação de um determinado jogo.

Outra das classificações propostas por este autor e que tem um grande interesse para o planeamento da prática educativa considera o tempo exigido por cada jogo. Este autor não especifica claramente quais as subdivisões que realiza segundo este critério, mas salienta-o como um fator que deve ser tido em consideração aquando da planificação de cada jogo. O tempo que dura uma partida realizada pelos alunos é diferente do tempo quando realizado por um professor, e nem sempre maior. É necessário incluir no tempo dedicado ao jogo, a fase inicial em que os alunos se dedicam à exploração e à familiarização com o mesmo, sendo este período tanto maior quanto menor a idade dos alunos e dependendo ainda do hábito que estes tenham no uso de outros jogos.

Embora muitos autores se tenham debruçado sobre as características e classificações dos jogos e tenham tentado enunciá-las, é evidente que não existe consenso a respeito de como devem ser consideradas essas características essenciais. Isto sugere que as características dos jogos são tão variadas e difusas como as tentativas de os categorizar.

2.3. Jogar em grupo

De acordo com Smole, Diniz, Pessoa e Ishihara (2008), um dos pressupostos do jogo no contexto educacional é a interação entre os alunos de cada grupo. A discussão entre os pares desenvolve no aluno o seu potencial de participação, cooperação e respeito mútuo e promove situações que o levam a pensar criticamente sobre as suas ideias e relacioná-las com os demais. Os autores fornecem algumas indicações que devem ser tidas em consideração na formação dos grupos de jogo. A escolha dos grupos pode variar entre uma livre escolha dos alunos, que se organizam para jogar com quem desejarem e a decisão do professor em função das necessidades de cada grupo. Uma das opções sugeridas pelos autores passa por inicialmente existir uma disposição livre por parte dos alunos e, após a observação do professor sobre os grupos formados, estes serem reorganizados em função das necessidades surgidas. Um exemplo deste tipo de intervenção é o caso de existir um grupo em que o vencedor do jogo seja sempre o mesmo aluno. Neste caso, os autores sugerem que o professor reorganize os grupos de forma a propiciar outras possibilidades de resultados para que não exista prepotência por parte de uns e sentimento de fracasso por parte de outros.

Quando a decisão parte inicialmente do professor, este pode ter diferentes critérios para a constituição de cada grupo. O professor pode organizar a turma de modo que os alunos com mais facilidade em jogar fiquem no mesmo grupo com outros que precisem de ajuda para avançar. Pode também formar grupos de alunos de compreensão semelhante do jogo ou da matemática nele envolvida, permitindo que alguns grupos joguem autonomamente e acompanhando aqueles que necessitam de maior intervenção.

Em relação à combinação entre cooperação e competição dentro do grupo de jogo, Smole, Diniz, Pessoa e Ishihara (2008) defendem que as regras são parâmetros de decisão que equilibram este suposto antagonismo, uma vez que ao iniciar uma partida, ao aceitar jogar, cada um dos jogadores concorda com as regras que passam a valer para todos, como um acordo, um propósito que é da sua responsabilidade. Ainda que haja um vencedor e que o jogo envolva competição, as caraterísticas do jogo estimulam simultaneamente a cooperação entre os jogadores pelo facto de não haver sentido em ganhar a qualquer custo.

Fernandes (1997), seguindo as ideias de Davidson (1990), argumenta que o trabalho cooperativo, em si, promove a dimensão social da aprendizagem da Matemática e um ambiente onde há pouco espaço para a competição e muito para a interação entre os alunos. O autor diz também que através do trabalho cooperativo, o aluno pode mostrar aos outros a lógica dos seus argumentos. O trabalho cooperativo oferece ainda a possibilidade de discussão dos méritos das diferentes maneiras de resolver um mesmo problema, e pode facilitar a aprendizagem de diferentes estratégias para a resolução de alguns problemas. Quando os alunos trabalham cooperativamente podem ajudar os outros a perceber os conceitos mais básicos e isto muitas vezes acontece num contexto bastante diferente do habitual, como é o caso do jogo. O autor refere que os alunos aprendem falando, ouvindo, expondo e pensando uns com os outros e neste sentido, a comunicação matemática é um dos aspetos a ser trabalhado nas aulas de Matemática e o trabalho cooperativo é uma oportunidade excelente para desenvolver esta capacidade. Por outro lado a Matemática proporciona muitas oportunidades para desenvolver o pensamento criativo, para fazer e testar conjeturas. Trabalhando cooperativamente os alunos lidam com problemas que podem estar para além das possibilidades de cada um dos alunos trabalhando individualmente.

No contexto diretamente do jogo, Lara (2004) diz que a competição pode trazer efeitos negativos se não se souber lidar com a mesma de maneira positiva, sendo dever do professor mostrar aos alunos que o objetivo de qualquer jogo é atingir um nível superior de aprendizagem e desenvolver o interesse pelo trabalho proposto. No entanto, Grando (2004) acrescenta que a competição inerente aos jogos garante-lhes o dinamismo, o movimento, propiciando um interesse e envolvimento naturais do aluno e contribuindo para seu desenvolvimento social, intelectual e afetivo e incentiva os jogadores a conhecerem os seus limites e possibilidades de superação na busca pela vitória.

No que diz respeito à dimensão dos grupos, Abrantes (1994) considera que quando se trata de uma aprendizagem cooperativa, como pode ser o caso dos jogos, deve-se formar pequenos grupos constituídos por quatro ou cinco alunos. O autor aponta como razões principais para esta opção a facilidade de concretizar, uma vez que na maioria das salas os alunos estão já organizados aos pares ou em mesas individuais. Cabril (1990, citado por Abrantes, 1994) acrescenta ainda que num grupo de quatro alunos, todos se integram facilmente e há seis possibilidades de diálogo entre dois alunos, enquanto no caso dos grupos serem constituídos por um número ímpar de alunos existe o risco de um aluno poder ficar fora de algumas discussões. Noutra perspetiva, Abrantes (1994) mostra-nos a opinião de outro autor acerca da dimensão dos grupos. Johnson e Johnson (1990) propõem grupos pequenos de dois a quatro alunos, afirmando que a dimensão dos grupos deverá ser tanto menor quanto mais inexperientes forem os alunos no trabalho de grupo e menos tempo houver disponível.

2.4. Jogo no ensino-aprendizagem da Matemática

Segundo Swan e Marshall (2009), muitas vezes os jogos usados no contexto do ensino da Matemática, não são vistos com objetivos específicos para a aprendizagem, mas sim como uma pausa da normal rotina da aula, uma recompensa pelos alunos terem terminado uma tarefa mais cedo ou simplesmente como um fator de motivação (Burnett, 1992; Bright, Harvey & Wheeler, 1985; Ernest, 1986). Os autores também afirmam que raramente são usados como forma de enriquecimento, para desenvolver o pensamento ou as capacidades de resolução de problemas (Krulik & Rudnick, 1983), ou como uma ferramenta de diagnóstico (Booker, 2000). No entanto, o uso do jogo no ensino da Matemática é considerado uma das melhores práticas, sendo reconhecido pelos alunos como matemática com mais significado (Cody, Rule & Forsyth, 2005; Moore, 2012; Miller, 2009).

Peralta, Zalaveta e Aguilar (2014) baseiam-se no trabalho de Ernest (1986) para propor quatro grandes eixos que permitem categorizar a utilidade da incorporação dos jogos no ensino: motivação, comportamento e atitudes do aluno; desenvolvimento de estratégias de resolução de problemas; reforço de competências; e por último a construção de conhecimentos. A respeito do primeiro eixo apresentado, a literatura indica que o uso do jogo provoca um aumento na motivação dos alunos e uma melhoria nas suas atitudes (Ernest, 1986; Oldfield, 1991a), além de reduzir a ansiedade (Nisbet & Williams, 2009) e ampliar o período de tempo que o aluno se foca no desenvolvimento da tarefa (Bragg, 2012). Ao nível do desenvolvimento de estratégias de resolução de problemas, Peralta, Zalaveta e Aguilar (2014) justificam que a prática do jogo permite, por exemplo, propor e provar hipóteses, fazer deduções, tentativa-erro e procurar padrões. Em relação ao reforço de competências, o jogo facilita o desenvolvimento de competências de socialização, comunicação, argumentação e raciocínio lógico (Vankúš, 2008; Oldfield, 1991b), além de possibilitar o desenvolvimento de técnicas de demonstração (Gairín, 2003). A construção de conhecimentos através da prática do jogo é defendida por Butler (1988) quando diz que o progresso dos alunos é, pelo menos, igual ao conseguido por aqueles que não utilizam jogos e os conteúdos são aprendidos mais depressa que com outras metodologias. Bright, Harvey e Wheeler (1985) acrescentam que o jogo possibilita que o nível de conhecimentos do aluno ascenda a níveis taxonómicos mais avançados.

O jogo incentiva o pensamento lógico-matemático (Kamii & Rummelsburg, 2008), facilitando o desenvolvimento do conhecimento matemático ao ter uma influência positiva sobre a componente afetiva em situações de aprendizagem (Booker, 2000). Nesta perspetiva, Avellar (2010) explica que o aluno desenvolve o pensamento lógico-matemático pois enquanto joga tem de defender as suas ideias, o que concorre para o desenvolvimento da sua capacidade de argumentar e de relacionar conceitos matemáticos. Além disso, a interpretação das regras do jogo, das ideias dos outros, dos conceitos implícitos e as tentativas de explicar aos adversários as suas ideias também contribuem para o desenvolvimento da comunicação matemática e para a apropriação progressiva da linguagem matemática.

Oldfield (1991a), apesar de concordar com o papel motivacional do jogo e destacar a emoção, participação e atitudes positivas, indica que os jogos são valiosos por fomentarem capacidades sociais e estimularem a discussão matemática que consequentemente desenvolvem a aprendizagem de conceitos e reforçam capacidades. Costa (2011), apoiado nas ideias de Macedo (2000), defende que a discussão desencadeada a partir de uma situação de jogo, mediada por um professor vai além da experiência e "possibilita a transposição das aquisições para outros contextos" (p.9). Para o autor, isto significa considerar que "as atitudes adquiridas no contexto de jogo tendem a tornar-se propriedade do aluno, podendo ser generalizadas para outros âmbitos, em especial, para as situações em sala de aula" (p.9).

Muñiz-Rodríguez e Rodríguez-Muñiz (2014) dão outra razão para utilizar o jogo como recurso didático em aula. Os autores afirmam que a utilização do jogo no ensino se destaca pela sua versatilidade no que diz respeito à diversidade de alunos. Na aula de Matemática, Contreras (2004) assinala o jogo "como recurso motivador para os alunos com maiores dificuldades, e também como origem de possíveis investigações para alunos que se destaquem" (p.1). O jogo desempenha um papel importante na superação das dificuldades dos alunos, pois permite ao professor atuar de forma adequada, respeitando o ritmo de cada um, e ajudando-os a encarar o erro de forma mais positiva e natural (Lopes et al., 1996). Neste sentido, Gaspar (2015) reconhece que o aluno não adquire conhecimento através da mera manipulação do jogo. Ao invés, o aluno desenvolve as suas competências matemáticas através da reflexão sobre o ato de jogar. Neste sentido, o estudo de Silva e Kodama (2004) conclui que a análise das ações praticadas em cada jogada permite que o sujeito enriqueça as suas estruturas mentais e rompa com o sistema cognitivo que determinou os meios inadequados ou insuficientes para a produção de determinado resultado.

Remmele, Seeber, Krämer e Schmette (2009) reforçam as ideias anteriores mas defendem que uma das maiores razões para se usar o jogo como potencial metodologia de ensino passa pelo facto de o ato de jogar ser uma transferência de competências. Ou seja, possibilita passar de um quadro de referência para outro, de dentro do jogo para a realidade. Além disso, o jogo que utiliza níveis de dificuldade progressiva, ou seja, à medida que se joga o desafio é maior, permite que o aluno ganhe familiaridade e construa gradualmente capacidades em complexos ou novos ambientes de aprendizagem. Além disso, o jogo com esta tipologia é caraterizado pelo aumento da confiança dos jogadores durante os primeiros níveis, importante para o desenvolver das mais complexas tarefas que terão de realizar nos níveis seguintes (Garris, Ahlers & Driskell, 2002).

Ainda assim, Gaspar (2015) refere que o jogo no ensino da Matemática pode apresentar alguns inconvenientes que têm de ser considerados antes do professor optar pela sua utilização. Grando (2004) apresenta três riscos associados ao seu uso: a perda da voluntariedade e do caráter lúdico do jogo provocadas pela interferência constante do professor; a utilização desadequada do jogo quando os alunos desconhecem as aprendizagens em causa e jogam de forma aleatória sem saber porque jogam; a incorreta gestão do tempo despendido nestas atividades, sacrificando a aprendizagem de outros conteúdos. Muniz (2010) acrescenta outras desvantagens ao uso deste recurso como: a utilização do jogo para abordar conteúdos que são mais facilmente adquiridos através de outras estratégias; o facto de, no caso dos jogos de estratégia, a descoberta da estratégia vencedora levar à determinação por antecipação do vencedor; o aspeto "jogo" poder ser por vezes tão atraente para os jovens, a tal ponto de desviar os alunos do objetivo visado pelo professor. Para contornar estes problemas, Muñoz (2013) refere que é importante que o professor conheça as características que um bom jogo deve ter. Quando os jogos se incorporam nas aulas, pretende-se que não se desvirtuem, ou seja, têm que estar estabelecidas as características que os definem. Chamoso et al. (2004) apresentam quatro propriedades que um bom jogo para a aula deve ter:

-Lúdico e improdutivo: no momento da sua apresentação, enquanto os alunos se familiarizam com os materiais, têm que considera-lo um divertimento e utilizá-lo exclusivamente para jogar;

-Livre: se não se consegue despertar nos alunos o desejo de jogar, este perde o seu sentido e converte-se simplesmente num exercício rotineiro;

-Com regras próprias, limitado espacialmente e temporalmente: as aulas têm um limite de tempo, pelo que se se quer tirar o máximo proveito do jogo, convém que este tenha poucas regras e que seja de fácil compreensão;

-De resultado incerto: se o jogo é muito previsível, os alunos cansam-se rapidamente.

Com uma perspetiva semelhante, Sanchez e Casas (1998) apresentam as caraterísticas que consideram essenciais para a construção de um bom jogo para a aula de Matemática:

-Ter regras fáceis e que seja de curta duração;

-Ser atrativo na sua apresentação e desenvolvimento;

-Não ser puramente de azar;

-A ser possível, jogos que o aluno conheça e pratique fora do ambiente escolar e que possam ser "matematizados".

Além da prática do jogo em si, o aluno pode ser o próprio autor do jogo. Smole, Diniz, Pessoa e Ishihara (2008) diz que a elaboração de jogos pelos alunos é uma das atividades mais interessantes de se propor no ensino secundário, já que envolve a leitura, a interpretação, a produção de textos instrucionais (regras de jogo), a resolução de problemas e o desenvolvimento de conceitos e procedimentos relativos a diferentes temas matemáticos. Desafiar os alunos a elaborarem os seus próprios jogos permite-lhes aprofundar a compreensão de um conceito em especial, criar um contexto de resolução de problemas, exercitar os procedimentos matemáticos, perceber como se estrutura um jogo, organizar um trabalho em grupo, planear, executar e avaliar as ações de uma sequência de atividades com determinado fim. Na perspetiva destes autores, elaborar um jogo constitui-se como uma atividade essencialmente matemática, bastante próxima da modelação, da simulação ou da resolução de um problema. Nessa atividade, os alunos por exemplo aprendem a ter uma perceção mais global dos conteúdos e da integração entre eles, a fazer antecipações e planeamento, a realizar as ações de modo mais independente, a procurar o consenso, a ser exigentes ou a levar uma tarefa até ao fim.

2.5. O papel do professor

O professor, sendo o conhecedor do jogo, desempenha um papel fundamental, servindo de mediador da aprendizagem ao colocar questões aos alunos que os instiguem a analisar as jogadas que efetuaram e a tirar conclusões. Para que o jogo possa contribuir para o desenvolvimento do conhecimento matemático dos alunos é fundamental que o docente tenha em conta a utilidade do jogo, de modo a que este nunca seja utilizado somente pela sua vertente lúdica (Gaspar, 2015).

Os jogos podem ser utilizados para introduzir conteúdos ou para aprofundá-los, sendo que devem ser escolhidos e preparados cautelosamente, atendendo-se ao tempo e ao espaço de que se dispõe, aos objetivos que o professor quer que os alunos atinjam e ao seu grau de dificuldade, de modo a garantir que se adequam às caraterísticas de cada grupo (Smole, Diniz, Pessoa & Ishihara, 2008). Como tal, um cuidado metodológico que o professor deve considerar antes de levar os jogos para a sala de aula, é o de estudar previamente cada jogo, o que só é possível jogando. Através da exploração e análise das suas próprias jogadas e da reflexão sobre os seus próprios erros e acertos, o professor terá condições para colocar questões que irão auxiliar os seus alunos e terá também noção das dificuldades que estes irão encontrar (Silva & Kodama, 2004).

Para Vankúš (2008), é bastante importante a forma como os professores usam os jogos didáticos no ensino da Matemática. Vankúš (2006) identifica três importantes fases da implementação do jogo por parte do professor:

1. A seleção de um jogo apropriado para as aulas de Matemática. O uso do jogo deve permitir que os alunos atinjam os objetivos pedagógicos estabelecidos para a aula onde o jogo é implementado e, além disso, deve ser apropriado para a idade, nível de conhecimento e interesses dos alunos. A preparação do jogo deve ser fácil no que diz respeito ao professor, tanto nos materiais necessários para a realização, como para a gestão do processo de jogo.
2. A realização do jogo na aula de Matemática. A apresentação do jogo deve começar pelo seu nome. Este deve ser atrativo para os alunos e também deve caraterizar os conteúdos que o jogo envolve. Seguidamente devem ser apresentadas as regras do jogo. O autor sugere que a melhor forma de o fazer de forma efetiva é através de alguns exemplos. Durante o desenrolar do jogo, o professor deverá controlar o processo e cumprimento das regras.
3. A avaliação do desempenho dos alunos durante o jogo. Como qualquer atividade humana, também a atividade dos alunos durante o jogo deve ser avaliada. Devido às caraterísticas do jogo devem ser usadas apenas avaliações positivas, por exemplo o vencedor tem pontos positivos, enquanto o segundo classificado também tem pontos positivos mas em menor quantidade. Desta forma, os alunos sentem-se motivados para se esforçarem durante o decorrer do jogo.

A escolha do jogo representa para o professor o primeiro obstáculo para o seu uso na aula de matemática. Segundo Grando (2004), ainda existe uma grande falta de jogos que exploram diretamente conteúdos matemáticos. Ainda assim, o autor refere que deve ser uma preocupação do professor criar os seus próprios jogos e, em alternativa, fazê-lo com a colaboração dos alunos. É esta a opinião de Martins (2012), que refere que o professor, ao utilizar a sua imaginação pode:

> criar os seus próprios jogos, a partir dos materiais que não serão mais utilizados, disponíveis na instituição de ensino em que leciona ou até mesmo na sala de aula, porém precisa atentar para a forma como serão trabalhados, não esquecendo os objetivos e o conteúdo a ser desenvolvido (p. 10).

Segundo Silva e Kodama (2004), o uso de jogos para o ensino, representa, na sua essência, uma mudança de postura do professor em relação ao que é ensinar Matemática, ou seja, o papel do professor muda de comunicador de conhecimento para o de observador, organizador, consultor, mediador, controlador e incentivador da aprendizagem. Esta mudança implica que o professor valorize o processo de construção do saber pelo aluno, e só interfira quando necessário, por exemplo, através de questões que levem os alunos à mudança de hipóteses, da apresentação de situações que forcem a reflexão ou a partilha das descobertas dos grupos, mas nunca para dar a resposta certa. Com esta abordagem, o professor lança questões desafiantes e ajuda os alunos a apoiarem-se uns nos outros para enfrentar as suas próprias dificuldades, leva os alunos a pensar, espera que eles pensem, dá tempo para isso, acompanha as suas explorações e resolve, quando necessário, problemas secundários. Um aspeto importante para incrementar as discussões sobre as estratégias usadas é o registo das jogadas, tanto as eficientes como as fracassadas.

Os mesmos autores também abordam os problemas do ruído e do tempo necessário para que o uso do jogo seja útil para as aprendizagens dos alunos. Quanto ao ruído em sala de aula, este é inevitável, pois só através de discussões é possível chegar-se a resultados convincentes. É preciso encarar esse barulho de uma forma construtiva; sem ele, dificilmente, há ambiente ou motivação para o jogo. É importante o hábito do trabalho em grupo, uma vez que o barulho diminui se os alunos estiverem habituados a organizarem-se em equipas. Por meio do diálogo, com trocas de componentes das equipas e, principalmente, enfatizando a importância das opiniões contrárias para descobertas de estratégias vencedoras, conseguem-se resultados positivos. Em relação ao tempo despendido, os autores defendem que o mesmo jogo deve ser jogado várias vezes e em aulas diferentes para permitir aos alunos se apropriarem das estratégias, compreenderem as regras, aprimorarem o raciocínio, aperfeiçoarem a linguagem e aprofundarem os problemas que o jogo apresenta. Se possível, deve ser jogado em blocos de duas aulas para que os alunos sintam justiça quanto ao número de jogos jogados ou se não, decidir-se à partida com os alunos o que fazer quando o tempo da aula acabar, mas o jogo não. Uma alternativa é anotar-se no registo do jogo o momento em que se parou e começar a partir daí na próxima vez, ou decidir quem venceu naquele momento. Todos estes cuidados são essenciais para que o tempo de aprendizagem não seja ignorado. Aprender e ensinar devem caminhar juntos e através do uso do jogo, o tempo de aprender determina o compasso do tempo de ensinar.

2.6. Os momentos de jogo

O trabalho exploratório na aula de Matemática cria oportunidades para que os alunos construam ou aprofundem a sua compreensão de conceitos, procedimentos, representações e ideias matemáticas. No entanto, no caso do jogo, é necessário que o professor imponha um trabalho faseado para que os alunos consigam usufruir de todos os benefícios deste recurso e não saltem etapas. Grando (2004 citado por Mota, 2009) propõe sete "momentos de jogo" sequenciais durante a realização das atividades em sala de aula:

Tabela 1: Momentos de jogo propostos por Grando (2004).

Momentos de jogo	
1.º	Familiarização dos alunos com o material do jogo
2.º	Reconhecimento das regras
3.º	O "jogo pelo jogo" – jogar para garantir regras
4.º	Intervenção pedagógica verbal
5.º	Registo do jogo
6.º	Intervenção escrita
7.º	Jogar com competência

O primeiro momento diz respeito ao contacto do aluno com o material do jogo, identificando os materiais que serão necessários para a concretização do mesmo. O segundo momento refere-se à leitura e interpretação das regras, para que sejam esclarecidas todas as dúvidas que possam surgir por parte dos alunos, podendo até existir simulações de jogadas. O terceiro momento não é mais do que o ato de jogar, em que os alunos têm apenas a preocupação de jogar de acordo com as regras, não havendo a preocupação de aplicar estratégias que impliquem um raciocínio mais complexo. O quarto momento diz respeito à observação e intervenção por parte do professor. Ou seja, o professor deverá utilizar este momento para perceber as jogadas estratégicas, a resolução de problemas, entre outras estratégias implementadas pelos alunos. O quinto momento refere-se ao registo do jogo, isto é, o professor deverá criar em todos os jogos uma folha de registo com o intuito de ser preenchida pelos alunos. Este registo constitui outra forma de análise do jogo por parte do docente. O sexto momento é a análise do jogo, por parte dos alunos. O professor regista todas as estratégias, as propostas de novas situações e os limites do jogo encontrados pelos alunos depois da atividade de jogar. Este momento é importante porque o professor "direciona os alunos para os conceitos matemáticos trabalhados no jogo" (p. 41). Por fim, o sétimo momento não é mais do que a aplicação do que foi discutido e descoberto no momento anterior, sendo agora tudo isso utilizado pelos alunos aquando do ato de jogar novamente, desta vez com pleno conhecimento das regras do jogo e com a possibilidade de novos horizontes de exploração e implementação das estratégias mais vantajosas.

Por sua vez, Sá e Zenhas (2004) esboçam apenas cinco momentos aplicáveis aquando da introdução dos jogos, como se pode observar na tabela 2 que se segue:

Tabela 2: Momentos de jogo propostos por Sá e Zenhas (2004).

Momentos de jogo	
1.º	Reflexão inicial
2.º	Simulação
3.º	Situações de jogo
4.º	Debate
5.º	Reflexão escrita

O primeiro momento diz respeito à descodificação, por parte dos alunos, do material proposto para o jogo, bem como a compreensão das regras do mesmo. O segundo momento não é mais do que a discussão sobre o que os alunos perceberam no primeiro momento. Esta é a ocasião em que os alunos criam supostas jogadas para compararem e interpretarem as suas ideias, verificando se compreenderam as regras impostas. O terceiro momento prende-se com o ato de jogar propriamente dito, em que os alunos, para além disso, têm de preencher uma folha de registo, feita pelo professor. Essa folha permite que este consiga avaliar todo o processo do jogo, podendo mais tarde abordar erros ou conceitos matemáticos pouco compreendidos. O quarto momento, para estes autores, refere-se ao debate sobre o que foi jogado. Ou seja, o professor tem o papel crucial de levar os alunos a refletirem sobre todo o jogo. As reflexões passam pela "discussão de dificuldades, avaliação de procedimentos e resultados, reflexão sobre os conceitos matemáticos e sobre a pertinência das tarefas realizadas, avaliação do jogo e pela motivação para a aprendizagem" (p. 6). Por fim, o quinto momento diz respeito e privilegia a comunicação escrita individual, em que os alunos refletem sobre todo o jogo.

2.7. O jogo no currículo de Matemática

Tanto no Currículo Nacional do Ensino Básico – Competências Essenciais de 2001, como no Programa de Matemática do Ensino Básico de 2007 existem referências às potencialidades do jogo no processo de ensino-aprendizagem da Matemática. Segundo o Currículo Nacional do Ensino Básico - Competências Essenciais, o jogo é uma atividade que através de uma forma lúdica associa o raciocínio, a reflexão e a estratégia ao desafio e à competição, contribuindo para a evolução das capacidades matemáticas e para o desenvolvimento pessoal e social dos alunos (DEB, 2001). Já o Programa de Matemática do Ensino Básico de 2007 (ME, 2007) propõe a utilização do jogo no ensino desta disciplina, nomeadamente na exploração de conteúdos do âmbito da Geometria e Medida e da Organização e Tratamento de Dados. Em contrapartida, o atual programa do ensino básico não faz qualquer alusão às potencialidades associadas à implementação deste recurso.

No que diz respeito aos programas de Matemática A do ensino secundário não é notada qualquer referência explícita ao uso de jogos como metodologia de ensino. Apesar disto, Santos, Canavarro e Machado (2007) apresentam-nos como atividades intelectuais privilegiadas da Matemática A, a formulação e resolução de problemas, a comunicação, a memória, o rigor, o espírito crítico e a criatividade (DES, 2001; 2002a;2002b), capacidades que a literatura sugerem serem de fácil alcance através do uso de jogos no ensino. Por outro lado, o Programa e metas curriculares de Matemática A garante "simultaneamente aos professores autonomia pedagógica e liberdade de usar conhecimentos e experiência acumulada para auxiliar os alunos a atingir o seu melhor desempenho" (Bivar, Grosso, Oliveira & Timóteo, 2012, p. 3). Portanto, não está de parte a opção do professor usar o jogo como uma ferramenta didática alternativa aos métodos tradicionais.

2.8. Estudos efetuados

Como já referido neste capítulo, a maioria dos estudos efetuados restringem o uso do jogo ao período que vai desde a infância até ao 3.º ciclo. De seguida apresentaremos os contributos dados por alguns estudos, apesar da maioria destes terem sido realizados ou com jovens com menos de quinze anos ou exclusivamente através de jogos de estratégia.

Peralta, Zalaveta e Aguilar (2014) referem que no final dos anos sessenta, as investigações formais acerca dos jogos tiveram um ávido crescimento. Percursores notáveis desta tendência são Bright, Harvey e Wheeler, que em 1985 publicaram uma monografia relativa à aprendizagem e aos jogos matemáticos: Learning and mathematics games. Neste trabalho pode apreciar-se que, em duas décadas prévias à publicação, se gerou um importante crescimento do número de estudos sobre jogos. Porém, a monografia reporta também estudos da primeira metade do século XX: Steinway (1918), Hoover (1921) e Wheeler e Wheeler (1940).

Eck (2006) refere-se ao estudo de Bright, Harvey e Wheeler (1985), como uma das investigações mais ambiciosas e com maior rigor da utilização do jogo no ensino da Matemática, e onde foram desenvolvidos onze jogos para diferentes níveis de ensino envolvendo 1637 participantes. É dada especial importância ao entendimento, não apenas do funcionamento, mas também dos diferentes tipos de jogos, assim como das taxonomias do jogo e da aprendizagem. Eck (2006) acrescenta que o estudo tinha como hipótese que o uso do jogo era mais adequado a certos níveis de ensino, tendo concluído que efetivamente existem diferenças consoante o nível de ensino. Também o facto de o jogo ter sido usado antes, durante ou após o ensino dos conteúdos em causa pode influenciar o grau de aprendizagem dos alunos. Outra das conclusões retiradas por estes autores é o facto dos jogos de conhecimento poderem ser eficazes para os níveis mais avançados de ensino, desde que bem construídos e implementados.

No estudo realizado por Ernest (1986), o autor baseia-se em três objetivos de ensino da Matemática (adquirir novos conceitos e desenvolve-los, praticar e reforçar capacidades, desenvolver estratégias de resolução de problemas) para agrupar alguns estudos sobre o jogo, acrescentando um quarto aspeto: o efeito motivacional dos jogos. As conclusões retiradas da revisão efetuada por este autor sugerem que a aplicação do jogo é uma forma eficaz de ensinar Matemática, tanto em termos de se atingir os objetivos inerentes ao ensino da Matemática como em termos de motivar os alunos para a sua aprendizagem. O autor conclui assim que o jogo deve ser integralmente incorporado no currículo da Matemática.

Swan e Marshall (2009) iniciam o seu artigo relatando uma investigação realizada por Bragg (2006), onde foi questionada a forma como os jogos são usados no ensino da Matemática. Este estudo conclui que os jogos utilizados pelos professores são usados como passatempos, como incentivo ou recompensa por finalizar ou produzir com grande qualidade uma tarefa ou ainda como introdução de uma aula. Desta forma, os autores constatam que raramente o jogo é usado para fomentar uma discussão em torno dos conceitos abordados ou de forma sistemática que permita uma aprendizagem eficaz dos conceitos matemáticos e subsequentes experiências. Por outro lado, o autor refere ainda não existirem evidências claras sobre como estabelecer uma aprendizagem eficaz da Matemática através de um jogo. Dado o enorme contributo dos quadros interativos, computadores e jogos eletrónicos, o autor diz ser tempo da investigação em relação ao uso de jogos no ensino da Matemática ser reavaliada.

Para finalizar, Peralta, Zalaveta e Aguilar (2014) afirmam que, apesar de um crescente número de investigações relativamente ao uso de jogos no ensino da Matemática, ainda existe uma grande carência de estudos experimentais sobre este tema, já que há poucas investigações de carater empírico. São frequentes as investigações que têm o seu foco sobre os efeitos comportamentais do jogo. No entanto são também estudados outros aspetos como o uso de estratégias semelhantes às usadas na resolução de problemas durante o jogo (Corbalán, 2002) ou a construção do conhecimento através de jogos (Edo & Deulofeu, 2006).

3. Metodologia

No presente capítulo, em primeira análise é definida e caraterizada a investigação qualitativa em educação. Posteriormente, é descrita a forma como foi desenhado e implementado o estudo, nomeadamente a escolha do conjunto de alunos participantes na investigação, as técnicas de recolha de dados e respetiva implementação. São ainda apresentados os jogos utilizados.

3.1. Investigação qualitativa

Bogdan e Biklen (1994) definem "investigação qualitativa" como "um termo genérico que agrupa diversas estratégias de investigação que partilham determinadas caraterísticas" (p.16). Neste tipo de investigações formulam-se previamente questões com o intuito de averiguar os fenómenos em contexto natural, ainda que se possam selecionar questões específicas à medida que se recolhem os dados.

Neves (1996) distingue investigação qualitativa de quantitativa dizendo que enquanto na quantitativa se procura seguir com rigor um plano previamente estabelecido, a investigação qualitativa costuma ser direcionada ao longo do seu desenvolvimento, não procura enumerar ou medir acontecimentos e, geralmente, não usa instrumentos estatísticos para a análise de dados.

Para Bogdan e Biklen (1994), a investigação qualitativa carateriza-se pelos cinco aspetos seguintes: (1) os dados recolhidos provêm diretamente do ambiente natural, sendo o investigador o principal agente na recolha desses mesmos dados; (2) os dados recolhidos denominam-se de qualitativos e são essencialmente de carácter descritivo; (3) os investigadores que utilizam metodologias qualitativas interessam-se mais pelo processo em si do que propriamente pelos resultados; (4) a análise dos dados é feita de forma indutiva; e (5) o investigador preocupa-se, essencialmente, em tentar compreender o significado que os participantes atribuem às suas experiências.

Além disso, estes autores também abordam alguns aspetos acerca deste tipo de investigação tais como a generalização, o grau de enviesamento dos dados e a presença do investigador durante a recolha de dados.

Quanto ao facto dos resultados qualitativos poderem ou não ser generalizados, ou seja, "ao facto de os resultados de um estudo particular serem aplicáveis a locais e sujeitos diferentes" (p.65), estes autores referem diferentes situações que dependem dos investigadores qualitativos que realizam os estudos. Os investigadores que se preocupam com o aspeto da generalização, podem basear-se noutros estudos para determinarem a representatividade do que encontraram e, no caso de recorrerem a investigações que estudem uma turma em particular, é importante saberem quais as caraterísticas desta turma para se perceber se os resultados retirados podem ou não sugerir alguma conclusão noutra turma. Alguns investigadores pensam nas questões da generalização, embora entendam que o seu trabalho é documentar cuidadosamente um determinado assunto, não fazendo parte das suas tarefas articular os seus resultados num quadro geral, visto que uma teoria deve saber explicar qualquer tipo de acontecimento. Também existem investigadores qualitativos que não pensam nesta questão da generalização em termos convencionais. A sua preocupação central passa por estabelecer afirmações universais sobre processos sociais gerais em vez de considerações relativas aos pontos comuns de contextos semelhantes como é o caso das turmas.

Patton (1990) substitui o termo generalização e opta pelo termo "extrapolação" (p.489). A extrapolação apresenta-se com um significado mais adequado no que se refere às possibilidades de transferência de conhecimento de um caso a outro caso posterior. As conclusões de um estudo poderão ser extrapoladas ou transferíveis para outros casos tendo em conta as similaridades das condições particulares e contextuais de cada situação.

Pelo facto de uma investigação ser qualitativa, existe uma preocupação relativamente ao risco de influência das opiniões ou preconceitos do investigador aquando do registo e análise dos dados. Apesar disto, Bogdan e Biklen (1994) argumentam que "aquilo que os investigadores qualitativos tentam fazer é estudar objetivamente os estados subjetivos dos seus sujeitos" (p.67), sendo que os métodos utilizados são bons no auxílio deste processo. Além disso, cada investigador quererá que o seu estudo forneça teoria, descrição ou compreensão e portanto não lhe interessa dar as suas próprias opiniões, mas sim construir conhecimento. No entanto, Cohen, Manion e Morrison (2007) na mesma linha que Maxwell (1992) referem que os investigadores são parte do mundo que investigam e por isso não podem ser completamente objetivos na análise que fazem visto existirem sempre outras perspetivas não menos válidas.

Um fator que pode comprometer o comportamento normal dos sujeitos em estudo é a presença do investigador durante a recolha de dados. Bogdan e Biklen (1994) confirmam que efetivamente existe uma alteração no comportamento dos sujeitos, provocada pela presença do investigador e que este fenómeno se designa por "efeito observador". Como forma de suavizar este comportamento, o investigador "deverá interagir com os seus sujeitos de forma natural, não intrusiva e não ameaçadora" (p.68). De facto, não há a possibilidade de contornar de forma efetiva este aspeto e obter uma correspondência exata entre o que se pretende estudar e o ambiente natural dos sujeitos em estudo, embora este não seja um problema desconsiderado pelos investigadores que têm desenvolvido procedimentos com o objetivo de o minimizar.

Apesar de Bogdan e Biklen (1994) referirem estes fatores como caraterísticas da investigação qualitativa, também referem que existem investigações deste tipo que não têm qualquer uma destas caraterísticas e no entanto não deixam de o ser. Desta forma, fundamentam que uma investigação não se carateriza por ser ou não qualitativa, trata-se sim de uma questão de grau, possuindo mais ou menos caraterísticas deste tipo de investigação.

3.2. Estudo de caso

O estudo de caso como estratégia de investigação é referido por Bogdan e Biklen (1994) como um dos métodos mais comuns na investigação qualitativa.

Coutinho e Chaves (2002) definem o estudo de caso como uma abordagem metodológica que consiste num plano de investigação que envolve o estudo intensivo e detalhado de uma entidade bem definida: o caso (ou um pequeno número de casos). Neste sentido, Fiorentini e Lorenzato (2006) definem o caso como qualquer "sistema delimitado" que apresente caraterísticas singulares e que faça por merecer um investimento ao nível da investigação por parte do investigador.

Também Meirinhos e Osório (2010) apoiados na obra de Yin (2005) apresentam a sua definição de estudo caso. Para estes autores esta abordagem metodológica trata-se de um estudo empírico sobre um determinado fenómeno contemporâneo inserido em contexto real, reforçando sobretudo a utilização deste método de investigação quando as fronteiras entre o fenómeno e o real não são evidentes.

Ponte (2006), segundo a perspetiva de Yin (1984), carateriza o estudo de caso de acordo com os seus propósitos: exploratório, para obter informação preliminar acerca do objeto em estudo; descritivo, com o objetivo de relatar minuciosamente o caso em questão; analítico, procurando problematizar o seu objeto, construir ou desenvolver uma nova teoria ou confrontá-la com uma já existente. Apesar da forte componente descritiva que esta abordagem metodológica contempla, o autor defende que o estudo de caso deve integrar uma profunda análise, interrogando e confrontando as situações em estudo com a teoria existente. Este tipo de confrontação pode levar à construção de novas teorias e novos problemas para futuras pesquisas.

Meirinhos e Osório (2010) apresentam um conjunto de caraterísticas dos estudos de caso. Os autores evidenciam a existência de uma grande diversidade ao nível conceptual no que diz respeito a esta abordagem metodológica e que varia conforme o enquadramento epistemológico de cada autor. Ainda assim, existem características comuns como a natureza da investigação no estudo de caso, o seu carácter holístico, o contexto e sua relação com o estudo, a possibilidade de poder fazer generalizações, a importância de uma teoria prévia e o seu carácter interpretativo constante.

No que diz respeito à natureza da investigação, o estudo de caso é visto com mais ênfase nas metodologias qualitativas, embora possa contemplar perspetivas mais quantitativas. Sobre o seu caráter holístico, Meirinhos e Osório (2010) defendem que é herdado da investigação qualitativa e que nesta perspetiva, os estudos de caso permitem a compreensão de um fenómeno na sua globalidade.

Em relação à importância do contexto, os autores apontam para as visões de Stake (1999) e Yin (2005). O primeiro autor refere que a atenção que se deve dar ao contexto deve ser tanto maior, quanto mais intrínseco for o caso, dependendo portanto sempre do tipo de caso em estudo. Para Yin (2005) a própria necessidade de realizar estudos de caso, nasce da imposição de estudar fenómenos sociais complexos. Neste sentido, os estudos de casos são usados quando se lida com condições contextuais, acreditando que essas condições podem ser pertinentes na investigação.

Quanto à possibilidade de poder fazer generalizações, a problemática consiste no facto, como já referido, dos estudos de caso se fazerem sempre para determinados contextos particulares. A este respeito, Meirinhos e Osório (2010) colocam o foco na questão da transferibilidade das investigações para outros contextos. Os autores baseiam-se na perspetiva de Stake (1999) que afirma que existem circunstâncias em que o estudo de um caso pode permitir generalizar para outro caso.

Meirinhos e Osório (2010) defendem a importância de uma teoria prévia ao estudo de caso por ser essencial para o propósito decorrente do mesmo. Através da revisão da literatura existente, o investigador decide se o objetivo do seu estudo de caso é desenvolver ou testar a teoria. Desta forma, o esquema construído a partir de algumas proposições teóricas previamente abordadas pela bibliografia poderá proporcionar a direção ao estudo.

3.3. Técnicas de recolha de dados

Segundo Vale (2004), a recolha de dados é uma fase crucial em qualquer investigação, e há algumas técnicas e instrumentos que podem ajudar neste processo. O investigador tem vários métodos para recolher dados, mas são as observações, as entrevistas e os documentos as três formas privilegiadas da investigação qualitativa. Tais dados não estão imediatamente acessíveis para análise, necessitam primeiro de ser processados pelo investigador. A autora baseia-se em Patton (1990) para caraterizar a forma como os dados se podem apresentar: "(1) descrições detalhadas de situações, acontecimentos, pessoas, interações e comportamentos observados; (2) citações dos intervenientes no estudo sobre as suas experiências, atitudes, convicções, pensamentos; e (3) excertos ou passagens de registos, documentos e histórias de casos" (p.8).

3.3.1. Observação participante e não participante

Segundo Aires (2011), a observação consiste na recolha de informação, de modo sistemático e não mensurável, através do contacto direto com situações específicas. No desenvolvimento da observação pode-se considerar três variáveis: grau de controlo, grau de estruturação e grau de participação do observador.

> Os observadores qualitativos não estão limitados por categorias de medida ou de resposta, são livres de pesquisar conceitos e categorias que se afiguram significativas para os sujeitos. A observação qualitativa não se realiza a partir de um projeto de pesquisa rígido; a sua maior virtualidade reside no seu carácter flexível e aberto (p.25).

Segundo Meirinhos e Osório (2010), a observação pode ser participante ou não participante.

Quando o pesquisador atua apenas como espectador atento, temos o que se convencionou chamar de observação não-participante. Baseado nos objetivos da pesquisa e num roteiro de observação, o investigador procura ver e registrar o máximo de ocorrências que interessam ao seu trabalho (Godoy, 1995).

A observação participante é a mais frequente na investigação qualitativa (Flick, 2004; Rodríguez, Flores & Jiménez, 1999). Este tipo de investigação é um processo interativo de recolha de dados que envolve uma integração do investigador nos acontecimentos e fenómenos que está a observar (Rodríguez, Flores & Jiménez, 1999). Flick (2004) refere que a integração do investigador no campo de observação é o fundamental desta observação, pois este observa desde a perspetiva de um membro participante, podendo influenciar o que observa devido à sua participação e tornando-se parte ativa do campo observado. No entanto, o autor alerta para o dilema da observação e participação como relevante em questões de necessário distanciamento, mostrando uma visão defensora de uma postura intermédia, onde a participação deva ser apenas em função da "descoberta dos segredos do campo" (p. 70).

Bogdan e Biklen (1994) sustentam a ideia de um contínuo entre a observação não participante e a observação participante. Neste sentido, a ideia de participação não é absoluta e podem ocorrer diferentes graus de implicação por parte do investigador. Assim, na mesma investigação, a participação do investigador pode variar conforme a necessidade e as circunstâncias, podendo a participação ser baixa em alguns momentos e, noutros momentos, ser mais alta.

3.3.2. Entrevista

Segundo Meirinhos e Osório (2010), a entrevista é considerada uma interação verbal entre, pelo menos, duas pessoas: o entrevistado, que fornece respostas, e o entrevistador, que solicita informação para, a partir de uma sistematização e interpretação adequada, extrair conclusões sobre o tema em causa.

Bogdan e Biklen (1994) referem que as entrevistas em investigação qualitativa podem ser usadas em conjunto com outras estratégias ou constituir uma estratégia dominante para a recolha de dados. A entrevista é sempre utilizada para recolha de dados descritivos, permitindo ao investigador desenvolver intuitivamente uma ideia sobre a maneira como os sujeitos interpretam as situações em estudo.

> Num projeto de entrevista qualitativa a informação é cumulativa, isto é, cada entrevista, determina e liga-se à seguinte. O que conta é o que se retira do estudo completo. Embora se possa aprender mais com umas entrevistas do que com outras, e embora não se possa usufruir da mesma intensidade com toda as pessoas entrevistadas, mesmo uma má entrevista pode proporcionar informação útil (Bogdan & Biklen, 1994, p.136).

Vale (2004) assinala que esta técnica de recolha de dados tem, entre outras vantagens, a de clarificar e ajudar a interpretar o sentido das opiniões dos entrevistados, bem como as suas atitudes e conceções. Em conjugação com questionários e tarefas, as entrevistas permitem a validação das respostas e contribuem para a sua melhor interpretação, assim como dão a possibilidade ao investigador de clarificar determinados aspetos ligados com o participante.

Para Bogdan e Biklen (1994) as entrevistas dividem-se segundo a sua estrutura, classificando-as em estruturadas, semiestruturadas ou não estruturadas. O grau de estruturação de uma entrevista influencia a forma como a entrevista se processa e a quem é dado o papel principal, entrevistador ou sujeito. Por isso a escolha do modelo de entrevista deverá ser feito em função dos objetivos de estudo.

As entrevistas estruturadas, segundo Vale (2004), são conduzidas de acordo com um guião conforme a situação e o tempo. As questões podem ser abertas ou estruturadas de modo a encorajar o sujeito a ser expansivo sobre determinado assunto, ou serem do tipo fechado permitindo apenas ao participante responder dentro de um leque de respostas pré-definidas.

A entrevista semiestruturada não segue uma ordem pré-estabelecida na formulação das perguntas, deixando maior flexibilidade para colocar as questões no momento mais apropriado, conforme as respostas do entrevistado (Meirinhos & Osório, 2010).

Em relação à entrevista não estruturada, Bogdan e Biklen (1994) explicam que o sujeito desempenha um papel crucial na definição do conteúdo da mesma e na condução do estudo, sentindo-se encorajado para desenvolver e aprofundar os temas em causa. A desvantagem deste tipo de entrevista é a difícil comparação entre entrevistas do mesmo tipo e acerca do mesmo tema.

Os mesmos autores assinalam algumas estratégias para uma boa entrevista: a) os investigadores devem evitar perguntas de resposta fechada visto que não aludem à exploração e a um discurso detalhado e com pormenor; b) o silêncio por parte dos entrevistados não deverá ser considerado como uma má pratica, é importante dar tempo para que reflitam e construam a sua argumentação; c) no caso de não se compreender o que o entrevistado quer dizer, deve ser pedido uma clarificação; e d) todas as palavras ditas pelo entrevistado devem ser consideradas importantes e portanto é claramente importante ouvir com muita atenção todo o discurso do sujeito.

3.3.3. Questionário

Segundo Rodríguez, Flores e Jiménez (1999), o questionário é uma técnica de recolha de dados que se baseia na criação de um formulário, previamente elaborado e normalizado.

Esta técnica tem um propósito semelhante ao da entrevista, ou seja, obter certo tipo de informação que não se pode observar diretamente. O facto das questões no questionário se apresentarem na forma escrita, permite a sua resposta sem a presença do investigador

(Vale, 2004). Além disso, quando se utiliza esta técnica considera-se que para a obtenção de informação sobre o problema em estudo é suficiente uma interação impessoal com o entrevistado (Rodríguez, Flores & Jiménez, 1999).

Vale (2004) afirma que esta técnica de recolha de dados é talvez a mais usada em investigação por ser fácil de administrar, proporcionar respostas diretas sobre informações, quer factuais quer de atitudes, e permitir a classificação de respostas sem esforço. Por outro lado, Rodríguez, Flores e Jiménez (1999), afirma que esta não é das técnicas mais representativas na investigação qualitativa, pois a sua utilização está mais associada a técnicas de investigação quantitativa. Contudo, enquanto técnica de recolha de dados, o autor afirma que o questionário pode prestar um importante serviço à investigação qualitativa.

3.4. Seleção dos participantes

Segundo Aires (2011), o cuidado na seleção dos participantes justifica-se pela obtenção da informação necessária para a fundamentação do estudo e a criação de uma teoria baseada em "critérios pragmáticos e teóricos" (p.22). O facto de os sujeitos não serem escolhidos aleatoriamente torna intencional a seleção do conjunto dos participantes.

O investigador escolhe os elementos participantes no estudo segundo critérios específicos que se dividem em duas categorias: quando o investigador escolhe os sujeitos segundo caraterísticas que facilitem o processo do estudo, por exemplo o conhecimento dos sujeitos acerca do problema em estudo, os que são mais facilmente abordáveis ou os que voluntariamente se mostram disponíveis em participar na investigação; quando o investigador, tendo em vista o desenvolvimento de uma teoria, primeiro analisa a informação que dispõe e a que necessita para fundamentar o seu estudo e depois decide "as pessoas ou contextos que pretende estudar, os grupos a analisar, onde e quando encontrá-los e que informação deve solicitar-lhes" (Aires, 2011, p.23).

3.5. Procedimentos metodológicos adotados

A presente investigação foi desenvolvida através de uma metodologia qualitativa de índole interpretativa, em linha com as ideias preconizadas por Bogdan e Biklen (1994) e concretizada ao longo do decorrente ano letivo. A investigação envolveu a realização de estudos de caso de quatro alunos de uma turma do 10.º ano de uma escola da Grande Lisboa.

O estudo centra-se na prática e construção de jogos que envolvem conteúdos matemáticos por parte dos alunos escolhidos, com o objetivo de analisar e compreender o impacto destas tarefas sobre a aprendizagem matemática de alunos do 10.º ano de escolaridade. Os jogos presentes neste estudo foram concebidos com caraterísticas que favorecessem através da sua prática a consolidação de conceitos matemáticos e o desenvolvimento de capacidades essenciais ao trabalho matemático.

Com vista a ter uma compreensão do objetivo geral, serão analisadas as seguintes questões:

1. Qual o contributo da prática do jogo na aprendizagem e no desenvolvimento de capacidades matemáticas?
2. Qual o comportamento dos alunos em relação à cooperação e à competição durante a prática do jogo e em que medida este comportamento promove a aprendizagem matemática?
3. Quais os momentos do jogo onde os alunos manifestam maiores dificuldades?
4. Em que medida a construção de jogos favorece o aprofundamento de conceitos matemáticos?

No sentido de responder às questões explicitadas anteriormente, desenvolveu-se este estudo em duas fases.

Na primeira fase, os alunos participantes no estudo submeteram-se a um questionário individual, tendo como principais objetivos perceber quais as principais dificuldades sentidas na disciplina de Matemática, o seu gosto pelo trabalho em grupo e a sua perspetiva perante a Matemática.

A segunda fase do estudo dividiu-se em quatro sessões onde os alunos participantes exploraram dois jogos propostos e construíram um terceiro jogo. Estas sessões tiveram como objetivo analisar a adaptação dos alunos ao uso e construção deste recurso, as principais dificuldades sentidas e os fatores que favoreceram a sua aprendizagem. Esta fase também contemplou entrevistas aos alunos participantes durante e após o decorrer das tarefas. Através desta técnica de recolha de dados pretendeu-se perceber qual a posição dos alunos e quais as suas dificuldades perante a utilização do jogo como veículo para a sua aprendizagem e avaliar o impacto desta metodologia nos conhecimentos e capacidades adquiridas.

3.5.1. Critérios de escolha dos alunos e formação dos grupos

A escolha dos alunos para a participação no estudo foi realizada sobre aqueles que voluntariamente se mostraram disponíveis em participar na investigação. O facto dos alunos da turma frequentarem bastantes atividades extracurriculares e a premissa de ser um estudo que exige participação continuada foram aspetos considerados quando se optou, numa primeira fase, por analisar a voluntariedade dos alunos. Surpreendentemente, muitos dos alunos predispuseram-se a participar, num total de dez alunos que foram agrupados em três grupos de trabalho.

Na composição de cada grupo, a investigadora teve em consideração a literatura consultada, usando como critério para a sua formação a heterogeneidade ao nível do aproveitamento na disciplina de Matemática. O número de alunos por grupo variou entre três e quatro elementos, respeitando condições logísticas do estudo. A composição dos grupos ao longo das quatro sessões manteve-se sempre igual. Na tabela 3 encontra-se descrita a distribuição dos alunos cujos nomes são fictícios pelos respetivos grupos.

Tabela 3: Composição dos grupos.

Grupos	**Alunos**
1	Leonor, Maria, Carmo, Ana
2	Vitória, Gabriela, Daniela
3	Juliana, Simone, Tatiana

Dos dez alunos integrantes dos grupos, a investigadora escolheu quatro para integrarem os estudos de caso (ver tabela 4). Os critérios usados na seleção dos alunos foram cuidadosamente estruturados em articulação com as questões de investigação. O primeiro critério prendeu-se com o nível do aproveitamento dos alunos à disciplina de Matemática. Procurou-se que os alunos escolhidos não se colocassem no mesmo patamar de conhecimento, para que esse aspeto não constituísse uma condição no estudo e se pudesse analisar a versatilidade do jogo neste contexto. O segundo critério esteve relacionado com a participação dos alunos durante as aulas regulares e de apoio. Escolheram-se alunos que evidenciassem níveis distintos de comunicação em sala de aula para que se pudesse analisar como é que este parâmetro influencia a aprendizagem dos alunos através do uso do jogo.

O nível de aproveitamento dos alunos classificou-se com base na média aritmética das classificações dos dois testes do 1.º período do presente ano letivo. Os dez alunos foram subdivididos por três níveis, onde o nível C corresponde ao intervalo de 3 a 9 valores, o nível B corresponde ao intervalo de 10 a 15 valores e o nível A corresponde ao intervalo de 16 a 20 valores.

O grau de participação dos alunos foi avaliado qualitativamente, tendo em conta a frequência, a iniciativa, a qualidade do seu discurso e o à vontade em esclarecer dúvidas, sendo + quando positivo e – quando negativo.

Tabela 4: Classificação dos alunos nos testes e na participação em aula do 1.º período.

Alunos (nomes fictícios)	Grupos	Teste 1	Teste 2	Média aritmética	Nível	Participação	Estudo de Caso
Carmo	I	12.5	8.4	10.45	B	+	
Leonor		15	13.1	14.05	B	+	√
Maria		17.5	15.5	16.5	A	-	√
Ana		18.7	16.4	17.55	A	-	
Gabriela	II	13.6	10	11.8	B	-	
Vitória		17.8	15	16.4	A	+	√
Daniela		15.5	18.3	16.9	A	-	
Simone	III	10.2	5.6	7.9	C	-	√
Juliana		19.2	16.1	17.65	A	-	
Tatiana		17.6	16.5	17.05	A	-	

3.5.2. Técnicas e instrumentos de recolha de dados

A recolha de dados foi realizada através das informações obtidas no questionário, na observação participante e não participante, nos documentos recolhidos durante as sessões e nas entrevistas realizadas. Todas as sessões de trabalho e entrevistas foram acompanhadas de gravação vídeo por favorecer o detalhe na recolha de informação. Posteriormente procedeu-se à sua transcrição, para análise detalhada das interpretações e conceções dos sujeitos sobre as temáticas abordadas.

3.5.2.1. Observação participante e não participante

Ao longo do ano letivo, procedeu-se à observação não participante dos alunos intervenientes no estudo, registando-se informação acerca da: (a) realização do trabalho de casa; (b) concentração nas aulas; (c) participação em aula. Com base nestes aspetos, elaborou-se uma síntese sobre as características individuais dos alunos e a sua relação com a disciplina.

No decorrer das sessões de trabalho, realizou-se em diferentes momentos observação participante e não participante dos alunos. Principalmente nos momentos iniciais e finais de cada sessão realizaram-se várias interações com os alunos, interpelando-os no sentido de promover a compreensão das regras, estimular um aprofundamento do raciocínio tanto nas jogadas que realizavam como nas discussões em que participavam e no caso da construção do jogo, incentivar à divisão de tarefas. Estas intervenções também permitiram retirar informações acerca das perspetivas dos alunos nas diversas situações tanto da prática como da construção do jogo. A observação não participante, numa fase em que os alunos jogavam com competência, permitiu retirar informação acerca das estratégias utilizadas. Mais, este tipo de observação admitiu ainda que se avaliasse o progresso obtido durante o jogo sem que os alunos sentissem a pressão de estarem a ser de alguma forma avaliados.

3.5.2.2. Questionário

O questionário era constituído por seis questões e foi construído com o objetivo de retornar informação acerca da atitude dos alunos perante a Matemática e a sua relação com os jogos (ver anexo n.º 2). O questionário, apesar de incluir algumas perguntas de resposta fechada incluiu também sempre um pedido de explicação. Foi entregue aos alunos no 1.º período e foi-lhes pedido que o preenchessem sozinhos em casa.

Nas primeiras duas perguntas os alunos era pedida uma reflexão sobre o gosto pela Matemática e as suas principais dificuldades, o que permitiu perceber se existe alguma relação entre estes dois fatores e se de alguma forma estes podem influenciar também o seu envolvimento no âmbito do jogo.

As demais perguntas permitiram compreender se os alunos tinham o hábito de praticar jogos de mesa nos seus tempos livres. Visto pertencerem a uma geração muito ligada às tecnologias, era possível que muitos não tivessem qualquer ligação a este tipo de jogos, o que poderia ser um obstáculo ao uso dos mesmos. Além disso, também permitiu perceber qual a sua opinião acerca de usar jogos como um veículo para a sua própria aprendizagem.

3.5.2.3. Entrevista semiestruturada

Aos quatro alunos escolhidos para os estudos de caso aplicaram-se entrevistas que decorreram no final da segunda e terceira sessões. As entrevistas foram semiestruturadas, com a investigadora a colocar questões onde procurou compreender as principais dificuldades sentidas na sessão de trabalho e a perceção dos alunos acerca do impacto do jogo na sua aprendizagem.

3.5.2.4. Recolha documental

Através da recolha dos registos de jogo elaborados pelos alunos durante cada sessão, puderam ser analisadas informações relativas ao decurso de cada partida.

3.5.3. Sessões de Trabalho

Composta por quatro sessões de trabalho, esta investigação envolveu diferentes objetivos em cada sessão.

A primeira sessão de trabalho foi realizada durante a última aula do 1.º período, onde foi aplicado o primeiro jogo – designado *Polygame* – com todos os alunos da turma. Os conteúdos presentes neste jogo enquadram-se no domínio da Álgebra. Esta sessão iniciou-se com a divisão em grupos segundo critérios pré-estabelecidos e uma breve introdução acerca do jogo. Seguiu-se a leitura das regras, a simulação de algumas jogadas, esclarecimento de eventuais dúvidas acerca das regras e a prática concreta do jogo. De início, a investigadora foi abordando alguns grupos acerca de jogadas possíveis e de aspetos ao nível do conteúdo. Cada aluno ao longo da tarefa efetuou um registo de jogo onde estão contempladas as combinações de cartas realizadas.

A segunda sessão de trabalho foi realizada no 2.º período durante o mês de fevereiro, aplicando-se o mesmo jogo, agora fora do ambiente de aula e com cada grupo em separado. Nesta sessão, cada grupo começou por rever as regras do jogo e seguidamente começaram a jogar.

A terceira sessão de trabalho foi realizada durante o mês de abril, no 3.º período, nas mesmas condições que a sessão anterior. Nesta sessão foi aplicado o segundo jogo – designado *Qual é Qual?*. Os conteúdos presentes neste jogo enquadram-se no domínio da Geometria. Os alunos começaram a sessão com a leitura e o esclarecimento das regras. A investigadora simulou algumas jogadas no sentido dos alunos se envolverem com a dinâmica do jogo. No início de cada jogo observou-se a organização que os alunos deram aos seus tabuleiros. Cada aluno ao longo do jogo efetuou um registo de jogo e em determinadas situações foram analisados esses registos.

A quarta sessão de trabalho também foi realizada durante o mês de abril, no 3.º período. Nesta sessão foi proposto aos alunos que construíssem um jogo na íntegra, podendo decidir as caraterísticas do seu jogo, elaborando as regras e envolvendo os conteúdos presentes no domínio Funções Reais de Variável Real.

3.6. Os jogos aplicados

Atendendo aos objetivos desta investigação usámos como referencial para a criação e construção dos jogos aplicados nas primeiras três sessões os critérios dados por Smole, Diniz, Pessoa e Ishihara (2008).

3.6.1. Polygame

O jogo aplicado nas duas primeiras sessões do estudo designa-se Polygame e é um jogo de cartas que tem como objetivo combinar quatro cartas de cores diferentes (azul, cor-de-rosa, amarela e verde) com caraterísticas dum polinómio (ver anexo 3). As cartas azuis contêm a expressão algébrica do polinómio, as cor-de-rosa os zeros, as amarelas as multiplicidades dos respetivos zeros e as verdes a expressão algébrica de polinómios divisores dos polinómios das cartas azuis (ver anexo 5). Este jogo é inspirado no popular jogo *Kames,* conhecido pela generalidade dos jovens.

No início do jogo são distribuídas quatro cartas por jogador e colocadas outras quatro cartas na mesa. Quando os alunos não pretenderem trocar mais nenhuma das suas cartas com alguma da mesa, estas são colocadas no fundo do baralho e repostas outras quatro cartas na mesa. A função de distribuir e recolher as cartas é atribuída pelo grupo a um dos jogadores que passará a ser chamado de poly.

Quando um jogador combina quatro cartas de cores diferentes tem de explicar aos seus oponentes quais as razões que o levam àquela combinação. As combinações têm que ser discutidas e validadas por todos, sob pena da combinação estar errada, o jogador ganhar indevidamente um ponto e, no final, as últimas quatro cartas do baralho não constituírem uma combinação. A validação da combinação corresponde a um polygame e este deverá ser anotado pelo jogador na folha de registo de jogo (ver anexo 4). Ganha o jogador que realizar maior número de polygames.

Este é um jogo que envolve estratégia e a compreensão do conteúdo, podendo ser qualificado como jogo de conhecimento co-instrucional e de estratégia. Através deste jogo, os alunos trabalham conteúdos contidos no domínio da álgebra, em particular polinómios, fatorização, casos notáveis, divisibilidade, zeros de um polinómio e sua multiplicidade. Este jogo pode ser jogado em grupos de dois a cinco alunos.

3.6.2. Qual é Qual?

O jogo aplicado na terceira sessão do estudo designa-se *Qual é Qual?* e é um jogo de mesa que tem como objetivo descobrir a carta mistério do adversário. Este jogo foi criado com base nas regras do jogo *Quem é Quem?*, também conhecido pelos alunos. Cada jogador tem um baralho de cartas mistério com representações de figuras geométricas espaciais, a que chamámos genericamente de objetos matemáticos (ver anexo 8). Os objetos matemáticos no espaço que constam nas cartas do jogo são: Esfera, superfície esférica, segmento de reta, reta e ponto. À frente dos jogadores estão os seus tabuleiros que contêm cartas (ver anexo 7) com os mesmos objetos matemáticos que as cartas mistério, embora alguns com representações distintas (ver fig. 1).

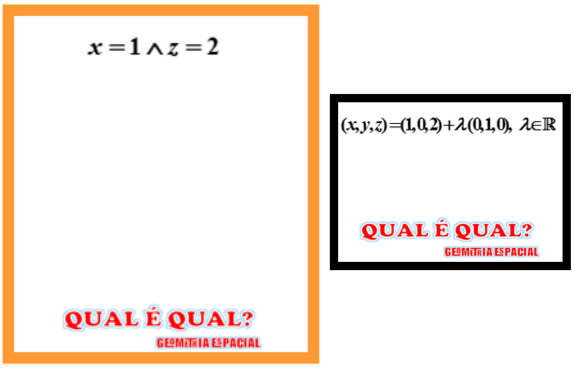


Figura 1: Carta do tabuleiro e carta mistério.

No início do jogo, cada jogador escolhe a carta mistério que o seu oponente terá de descobrir. Ao contrário do *Quem é Quem?*, no *Qual é Qual?* podem jogar mais de dois jogadores. O jogador que começa será identificado de acordo com a ordem alfabética dos nomes dos jogadores e o jogo deverá seguir para a sua esquerda. Os jogadores alternam a vez fazendo uma pergunta que apenas possa ser respondida com SIM ou NÃO. Dependendo da resposta, o jogador deve retirar os objetos que sabe que não são o Objeto Misterioso do seu adversário. Cada jogador deve registar todas as questões colocadas, bem como as respetivas respostas. Assim que um jogador identificar o objeto matemático que consta na carta mistério do seu oponente, deve aguardar a sua vez e mostrar a carta que considera corresponder ao objeto mistério. Os jogadores devem discutir a validade da aposta. Se a aposta estiver correta, o jogador ganha um ponto. Ganha o jogador que realizar cinco pontos (ver anexo 6).

À semelhança do anterior, este é um jogo que envolve estratégia e a compreensão do conteúdo, podendo também ser qualificado como jogo de conhecimento co-instrucional e de estratégia. Através deste jogo, os alunos trabalham conteúdos contidos no domínio de Geometria e subdomínio de Geometria espacial.

4. Apresentação e análise de dados

Nesta secção são apresentados os estudos de caso realizados no âmbito da investigação. De notar, que nos excertos de diálogos transcritos identificamos cada aluno pela letra inicial do seu nome fictício, a investigadora por I e a professora titular da turma por P.

4.1. Leonor

4.1.1. Caraterização de Leonor

Leonor é uma aluna de 15 anos extremamente trabalhadora, interessada, muito comunicativa, mas com muitas dificuldades. A aluna, por regra recorre à mecanização e repetição exaustiva dos exercícios trabalhados em aula para tentar ser bem sucedida. Leonor realiza sempre o trabalho de casa, frequentemente complementa o seu estudo com outros exercícios além dos pedidos e é presença frequente nas aulas de apoio. Ambiciona sempre encontrar uma estratégia para memorizar os conceitos e solicita recorrentemente que a professora repita a explicação dos conteúdos lecionados, não se inibindo de colocar as suas dificuldades perante a turma. No questionário, afirma gostar de matemática, em particular de "cálculos", o que vai ao encontro da sua preferência por processos mecanizados.

Leonor nunca repetiu um ano e terminou o 3.º ciclo do Ensino Básico com nível 4 a Matemática, nota que subiu no Exame Nacional para 5. Neste ano letivo, a aluna concluiu o 1.º período com 15 valores à disciplina, o 2.º período também com 15 valores e na ficha de avaliação do 3.º período obteve 11 valores. O seu trabalho e esforço fazem com que a sua professora de Matemática a considere uma aluna média.

4.1.2. Jogo 1 – Polygame

Na primeira sessão, ao serem explicadas as regras e a dinâmica do jogo à turma, Leonor identifica desde logo algumas semelhanças entre as regras do jogo proposto e as de um outro com o qual já teria jogado. O facto de o jogo lhe ser familiar permite que facilmente perceba como o mesmo funciona e que explique às suas colegas de grupo de uma forma simples e sintética todo o processo deste. A aluna mostra-se muito interessada e proactiva no início da sessão e, neste sentido, aquando da escolha do poly, Leonor voluntaria-se de imediato, sendo-lhe atribuído pelo grupo esse cargo. O comportamento de Leonor desenvolve-se a partir de um potencial sentimento de liderança, sendo a aluna o elemento de grupo que mais discussões inicia e determina muitas ações de jogo:

L- Ninguém tem polinómios para trocar? Então vou recolher as cartas. É giro pôr as cartas na mesa, assim consigo tirar boé rápido.
M- Nós deste lado vemos é as cartas ao contrário!
L- Ah ya, então desta vez viramos as cartas para vocês.

Apesar de o jogo ter sido aplicado após a lecionação dos conteúdos nele implicados, Leonor e o grupo em geral mostram não terem presentes os conceitos envolvidos. Isto implica que Leonor não consiga compreender qual a estratégia que deve tomar para combinar as suas cartas, mesmo dominando em pleno as regras do jogo.

L- Professora, pode ver uma coisa? Esta carta aqui dá-me jeito não dá?
P- Você só tem na mão cartas com multiplicidade e divisibilidade, o que lhe interessa a si é um polinómio. O que está aqui na mesa são tudo cartas de divisibilidade. Só quando tiver uma carta polinómio é que lhe interessa ver se é divisível pelas cartas que estão na mesa. Se não tem nenhuma carta polinómio, então nenhuma destas cartas lhe interessa.

No sentido de ajudar os alunos a jogarem, a professora da turma faz no quadro uma revisão do conceito de zero de um polinómio e respetiva multiplicidade. Leonor após a explicação da professora sugere às suas colegas de grupo colocarem as cartas na mesa e entreajudarem-se. A proposta, apesar da relutância demonstrada por algumas das suas colegas, reúne a aprovação do grupo. Leonor rapidamente se envolve no jogo e potencia o envolvimento das suas colegas ao colocar-lhes questões relacionadas com as cartas que tem na mão. Apesar disto, Leonor revela contentar-se com informações que lhe garantem que pode combinar certas cartas, não refletindo sobre a base teórica que sustenta as suas jogadas. Como consequência repete as mesmas perguntas em jogadas semelhantes:

L- Ok, ajudem-me lá. Tenho que encontrar uma multiplicidade três?
M- Sim! E um zero cinco.
L- Então quero este! E o divisível tem de ser (x-5)?
M- Ou $(x-5)^2$ ou $(x-5)^3$.
L- Ah! Ok ok.

Este comportamento sucessivo leva-a a apresentar argumentos inválidos aquando da justificação de cada polygame realizado.

L- Então tenho este polinómio $P(x) = (x-2)(x^2-4)$. Nós temos uma raiz simples, porque… nesta parcela aqui 2-2 dá 0 e nesta parcela o 2 e o -2 podem ser aceites para dar o 0, por isso é que é uma raiz dupla na segunda parte. Então eu digo que na primeira parte é uma raiz simples, porque só o 2 é que faz com que se anule aquela parcela e na segunda parcela, só o -2 e o 2, por isso é uma raiz dupla…
M- Não estou a perceber…
I- Continua Leonor.

L- Então e o polinómio é divisível por $(x-2)^2$, porque basta ter aquela parcela igual para ser divisível.
I- Então também é divisível por $(x-2)^3$?
L- Sim…
M- Não… se fosse $(x-2)^3$ era maior.
I- A multiplicidade é referente ao quê?
M/A- Aos zeros!

Além da incompreensão do conceito de multiplicidade, no discurso de Leonor também se pode verificar que a aluna usa a palavra “parcela” com o significado da palavra “fator”. No decorrer desta sessão, repetidamente coloca questões baseando-se nas conceções erradas dos conceitos que tinha antes da prática do jogo, não refletindo no seu discurso ter retido as conclusões das discussões com as suas colegas. Além disso, o ritmo do seu discurso aumenta quando tem de justificar os seus polygames, explicando sequencialmente as suas opções, sem fazer pausas e não permitindo por isso que as colegas coloquem questões sem a interromper. Este comportamento é possivelmente justificado pela sua relutância em justificar as suas jogadas, admitindo ter maiores dificuldades nesta fase do jogo. Por outro lado, à medida que avança nas partidas, a aluna começa a levantar a cabeça e a analisar os jogos das suas colegas, descentralizando-se do seu próprio jogo:

L- Ana tens aí uma carta de multiplicidade com 4,1,1, não deveria ser só 4,1?
A- Não, porque eu tenho três zeros.
L- Ainda não estou a perceber…

Na segunda sessão, a investigadora começa por pedir ao grupo que lhe explique o jogo. Leonor predispõe-se a rever as regras:

L- Então nós tiramos quatro cartas e uma pessoa à nossa escolha que é o poly vai meter à vez pela nossa decisão quatro cartas em cima da mesa e nós vamos trocando aquilo que temos na nossa mão até formar um conjunto de quatro cartas de cores diferentes e vamos trocando aquilo que há na mesa.

O grupo continuou a manter as cartas assentes em cima da mesa, o que permitiu que cada jogador pudesse controlar o jogo dos seus oponentes. Isto motivou a colaboração entre os alunos, tendo Leonor trocado diversas vezes cartas diretamente com os seus colegas.

L- Ah eu preciso dessa! Duas raízes simples! Ah obrigada, vê lá se alguma das minhas te dá jeito?
M- Hum, não, mas obrigada…

Em relação ao domínio de Leonor no que diz respeito aos conteúdos este parece começar a evoluir. Esta evolução parece estar associada à alteração da sua atitude no jogo, deixando de solicitar apenas informação sobre as suas cartas às colegas e começando a construir os seus próprios raciocínios. Perante o polinómio da sua carta azul

$P(x) = (x^2 + 2x + 1)(x - 3)^4$, Leonor toma como estratégia identificar o caso notável presente no primeiro fator para decompor o seu polinómio em polinómios do 1.º grau e mais facilmente conseguir identificar as cartas a combinar:

L- Aqui isto é… se eu fizer como este que está aqui posso fazer $(x - 1)$? Não… $(x + 1)$? Ou seja, se eu fizer este fator aqui como este, posso meter $(x + 1)$?
A- Sim… ao quadrado.
L- Sim, $(x + 1)^2$! Ah, então quero esta carta [buscando uma carta verde $(x + 1)(x - 3)$].

Num outro momento, em que tem a carta azul com o polinómio $P(x) = (x - 3^2)(x + 2^3)$ e pondera a adequação da carta verde que sugere a divisibilidade por $(x - 9)(x + 8)$ e da carta cor-de-rosa com os zeros 8 e 9, começa finalmente a ganhar alguma autonomia:

L- 3^2 é 9 e 2^3 é 8, então são fatores exatamente iguais. [referindo-se ao polinómio da sua carta verde] Logo é divisível. Neste a carta está errada (referindo-se aos zeros na carta cor-de-rosa), porque devia ser… calma eu chego lá…devia ser -8, porque -8 com 8 dá zero e pronto. E depois são duas raízes simples porque os fatores só se repetem uma vez.

Noutra situação de jogo, possui a carta com o polinómio $P(x) = (x - 2)(x^2 - 4)$ e a carta multiplicidade 2,4. A aluna começa por confundir a carta, atribuindo-lhe o valor dos zeros do polinómio. Não identifica o caso notável, embora desconfie que o facto de ter a incógnita ao quadrado terá influência nos zeros que procura:

L- Este x^2 vai interferir na multiplicidade? Não, não é na multiplicidade, enganei-me na carta… nos zeros? Eu acho que tem que ser (x-4) para ser o 4, não é?

A investigadora questiona-a apenas sobre o polinómio $(x^2 - 4)$:

I- Vou fazer uma pergunta à Leonor… Quantos zeros tem este polinómio?
L- 3
I- Quais é que são?
L- Aaa… 4, -4 e 2
I- 4 é zero porquê?
L- Ah não, enganei-me… é 2 e -2
I- Quantos zeros tem então?
L- 3… não 2!
I- Quais é que são?
L- 2 e -2
I- Então no polinómio da tua carta qual a multiplicidade do 2?
L- A multiplicidade do 2… dupla!
I- E qual a multiplicidade do -2?
L- Simples!

A aluna aos poucos consegue interpretar de forma correta cada polinómio e construir raciocínios coerentes com o significado que vai adquirindo dos conceitos presentes no jogo.

Após a realização de todas as partidas, a aluna admite gostar dos materiais com o qual o jogo foi construído, não ter dúvidas que ficou mais à vontade com a matéria envolvida e que realmente sente que aprendeu. Por outras palavras, admite que o jogo desenvolveu o seu sentido crítico em relação aos polinómios:

> L- Tenho um sentimento de desconfiança em relação aos polinómios, pois quando olho para um qualquer polinómio… não basta só olhar, mas sim analisá-lo ao pormenor.

4.1.3. Jogo 2 – Qual é Qual?

Neste jogo, Leonor também não revela ter dificuldades em compreender as regras e rapidamente carateriza o jogo como idêntico ao *Quem é quem?*, jogo que a aluna revela gostar bastante. O facto de o jogo lhe ser familiar, desperta na aluna uma grande motivação para começar o jogo, avisando as colegas que é "bastante boa neste tipo de jogos".

Na primeira partida, a aluna coloca aleatoriamente os seus cartões no tabuleiro e começa por perguntar que cartas representam pontos. A aluna mostra alguma confusão entre reconhecer as expressões que identificam os objetos matemáticos e encontrar coordenadas de pontos que ou pertençam aos objetos ou tenham alguma relação com estes.

> L- Professora este aqui $[(x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 \leq \sqrt{16}]$ pode ser um ponto? Podemos identificar um ponto aqui! Por exemplo o centro da…
> I- Que objeto matemático é esse?
> L- Uma… esfera
> I- Se é uma esfera, como pode ser um ponto?
> L- Um ponto do centro…

Ao retirar as cartas do tabuleiro que não dizem respeito à carta mistério que procura, Leonor demonstra alguma dificuldade em identificar e distinguir alguns objetos matemáticos. A aluna aborda diretamente as colegas para lhe esclarecerem as suas dúvidas e tira vantagem das conclusões das discussões do grupo:

> L- Isto está a parecer-me um bocado complicado. Isto pode ser considerado como uma não esfera? [apontando para o sistema de equações paramétricas de um segmento de reta]
> I- O que representa?
> L- É uma esfera
> I- É uma esfera?
> L- Não sei. Ana é uma esfera?
> A- Isso não é uma reta?
> I- Se fosse uma reta, o λ pertencia a que conjunto?
> A- Ah é um segmento de reta, pertence a um intervalo!

Durante as partidas deste jogo, Leonor demonstra estar mais disponível para responder às dúvidas do grupo e mostra-se sempre interessada em compreender os esclarecimentos às questões das suas colegas. Apesar de a sua linguagem não ser rigorosa e de definir conceitos de forma muito intuitiva, a aluna expressa-se de modo a que o grupo entenda, e muitas vezes recorre a gestos para se exprimir.

> M- Qual a diferença entre esfera e superfície esférica?
> L- A superfície esférica é igual, é só a superfície e se for a esfera é igual mas também menor que isso.

Ao contrário do que aconteceu no *Polygame*, a aluna neste segundo jogo analisa cada discussão e aplica o conhecimento adquirido nas jogadas seguintes. Este jogo inclui essencialmente conteúdos do subdomínio geometria espacial, mas também implica a aplicação de outros conteúdos que são transversais a todo o programa de 10.º ano, como é o caso do domínio Álgebra. Apesar de mostrar saber identificar o raio da esfera, perante a inequação $(x+1)^2+(y+2)^2+z^2 \leq \sqrt{16}$ pede ajuda ao grupo.

> L- Se aqui neste caso o raio ao quadrado é raiz de 16, qual é que é o raio? Raiz de raiz de 16? Qualquer coisa ao quadrado vai dar raiz de 16.
> M- Não, não sei se está certo.
> L- Qualquer coisa ao quadrado tem que dar raiz de 16… não, errado… não sei! Eu sei que isto é o raio ao quadrado! Alguém me quer ajudar? [coloca a carta na mesa] Isto aqui é o raio ao quadrado, quanto é que é o raio?

O grupo discute sobre o assunto e conclui que o raio da esfera é 2, mas Leonor não se contenta com a resposta e tenta perceber porque é que sendo o raio igual a 2, o quadrado do raio é igual a $\sqrt{16}$.

> M- Isso [aponta para o 2.º membro da inequação] já está ao quadrado. Raiz de 16 dá quanto?
> L- [com dificuldades] dá 4… mas não é essa a minha dúvida! Vocês não estão a ver…
> M- Mas isso não vai ficar assim, raiz de 16 é 4.
> L- Raiz de 4 é o raio… se eu faço raiz de 4 ao quadrado para ficar aqui [aponta para a inequação] dá isto, mas o 2 não corta com a raiz?
> A- Corta! Quanto é que vai dar?
> L- Ah ok, que estúpido! Dá 4 e 4 é igual a raiz de 16 [a aluna começa-se a rir]. Toda a gente estava a dizer de maneiras diferentes, mas estávamos todas bem!

Ao descobrir a carta mistério $(x+1)^2+(y+2)^2+z^2 \leq 5$, Leonor decide confirmar a carta com as respostas dadas pela Maria às suas questões. Confrontando a sua carta final com as respostas, a aluna confunde-se e estranha ter perguntado se o centro da esfera era (1,2,1) ao qual a Maria respondeu que não. Leonor decide então colocar mais uma questão:

L- O centro da tua circunferência é (-1,-2,1)?
M- Não.
I- Só te sobrou uma carta Leonor? Qual é?
L- Sim… mas supostamente o centro é (-1,-2,…
M- Isto aqui quando não tem nada, não é 1 , é 0!
L- É zero?
M- Claro, se fosse 1 era $z-1$… olha este aqui [apontando para $(x+1)$]
L- Então a outra também podia ter sido!

Neste diálogo, Leonor descuidadamente troca a palavra esfera por circunferência, apesar de a colega ter entendido o sentido da sua pergunta e responder acertadamente à questão. Leonor percebe através da discussão com as suas colegas que não estava a identificar corretamente a cota do centro da esfera e à custa desse erro põe em causa a escolha que fez das cartas para retirar do tabuleiro. A aluna confronta novamente as respostas às questões, troca a carta que tinha pela carta correta e ganha esta partida.

Noutra situação, Leonor revela dificuldades em identificar um segmento de reta segundo a condição que o define. A aluna tem apenas cinco cartas no tabuleiro e sabe que quatro representam pontos. Por isso começa por concluir que é um segmento de reta, embora não saiba justificar.

L- Aqui estão duas retas $x=1$ e $y=2$.
I- No espaço, $x=1$ é uma reta?
L- É uma reta assim [a aluna representa gestualmente um reta vertical] e o y=2 é outra reta.
I- É uma reta também?
L- Um plano? É uma coisa assim…
C- É um plano, é um conjunto de pontos todos com abcissa um, não é?
I- E a interceção de planos…
L- É uma reta e depois a cota como não varia em todos os números, fica um segmento de reta.

A organização dada às cartas no tabuleiro por Leonor foi diferenciada partida após partida. À medida que adquire maior facilidade na identificação dos objetos matemáticos que constam no jogo, agrupa as cartas segundo o objeto que contêm. Começa por ordenar as cartas em leque na sua mão, tentando colocar em linha as cartas respetivas ao mesmo tipo de objeto matemático no tabuleiro (ver fig. 2).

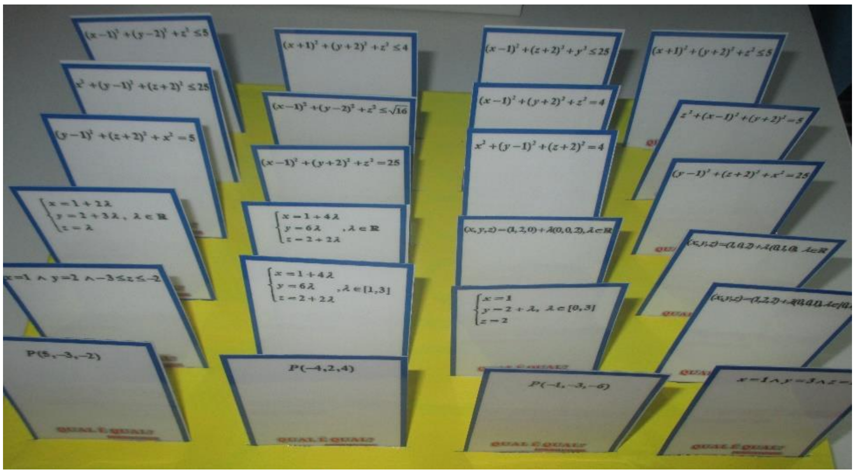


Figura 2: Disposição das cartas no tabuleiro de Leonor no último jogo.

Quanto às perguntas formuladas por Leonor, a estratégia da aluna mantém-se ao longo do jogo. À semelhança das suas colegas, a aluna começa por descobrir primeiro que tipo de objeto matemático se trata, formulando depois questões referentes às caraterísticas do objeto (ver fig. 3). Além disso, admite não ter qualquer critério na escolha da carta mistério e, contrariamente à opinião de uma das suas colegas, considera que esta carta não regula a dificuldade do jogo do seu oponente.

Perguntas	R
é uma espera ?	S
o raio da espera é 5 ?	N
o raio da espera é $\sqrt{5}$?	S
o centro da tua espera é (1,2,1)?	N
o centro da tua espera é (-1,-2,1)?	N
é uma espera ?	N
é uma superficie esperica ?	N
é uma reta ?	N
é um ponto ?	N
o segmento passa no ponto (1,2,2)	S
o segmento tem um intervalo [0,3]	N
é uma superficie esperica	N
é uma reta	N
é uma espera	S
é um ponto	N
é uma espera	N
é um segmento de reta	S
um ponto pertencente ao teu segmento de reta é o (1,2,2)	N

Figura 3: Perguntas formuladas por Leonor.

4.1.4. Construção do jogo

O grupo onde se inclui Leonor decide construir um dominó por ser um jogo que todas conhecem e ser de fácil construção. Leonor no início da construção do jogo confessa que precisa de ir ao apoio, porque está "mesmo a precisar de ajuda em funções". O grupo abre o manual e Leonor começa por distinguir quanto à injetividade e sobrejetividade quatro funções representadas por diagramas de setas. A aluna admite sentir alguma dificuldade em compreender as funções quando não estão representadas por um diagrama de setas, principalmente classificá-las quanto à injetividade e sobrejetividade. Mesmo assim, a aluna sugere que o jogo envolva estes conteúdos:

> L- Podemos pôr funções numas peças para unirmos com outras peças em que escrevemos injetiva, não injetiva, e assim. E as funções podem ser a expressão analítica ou gráfico ou de outra forma para dificultar.

A aluna tem uma participação ativa na elaboração do jogo e regras, dando sempre a sua opinião e contestando as ideias das colegas, o que potencia diversas vezes a alteração das regras do jogo. A aluna considera ser difícil fazer uma versão do jogo idêntica à original e por isso sugere que se construam menos peças.

Ao longo da construção do jogo surgem diferentes discussões em que a aluna participa. Estas discussões envolvem sobretudo a escolha das funções que vão constar nas peças, as suas caraterísticas e as combinações possíveis entre as peças. Cada elemento do grupo sugere uma função que pode estar representada através de diagrama de setas, gráfico, tabela ou expressão analítica e posteriormente em conjunto discute-se o conteúdo da peça que pode ser unida à peça da função.

> A- Uma qualquer função constante tem inversa?
> L- Acho que sim, tem de ser bijetiva, ou seja, tem de ser injetiva e sobrejetiva…
> A- É injetiva? Injetiva é ser…
> L- Não tem [inversa] não, porque todos vão para o mesmo… Já estou a perceber. Eee já estou a perceber! Pode é ser sobrejetiva, mas injetiva não!
> A- Pois, isso depende do conjunto de chegada…

Leonor sugere uma função ao grupo que recorda ter sido estudada na aula:

> L- Eu lembro-me de uma… $f(x) = x^2$ é uma função que… nunca pode ser… nunca pode ser… por ser ao quadrado nunca pode ser ou é injetiva ou sobrejetiva…

A aluna pensa na representação gráfica e gestualmente começa a desenhar na mesa o gráfico da função. No entanto, a sua justificação reflete que o raciocínio que constrói sobre a injetividade e sobrejetividade de uma função tem em conta a representação da função através de um diagrama de setas. Apesar do domínio da função em causa ser um conjunto infinito, a aluna considera-o um conjunto finito de inteiros e a partir daí elabora a sua conjetura:

L- Ah não é… injetiva, porque o mesmo y pode ter dois x, o -1 e o 1 tem o mesmo y. Mas pode ser ou não sobrejetiva porque todos podem estar ligados ou não. Então podemos pôr que $f(x) = x^2$ é não injetiva, é isso?

Na tentativa de produzir mais peças que possibilitem a união à peça com a função, Leonor começa por analisar algumas imagens de $f(x) = x^2$ e tirar conclusões:

L- Podemos juntar $f(x)$ igual a R positivo?
I- O que é que isso quer dizer?
L- Por exemplo, o -2 vai dar positivo.
I- E então?
L- O 2 vai dar positivo! Então significa que o y pode ser sempre um valor R positivo
I- O que significa um valor R positivo?
L- Ah… é o contradomínio.
I- Mas consegues concluir que as tuas imagens são sempre positivas apenas concretizando o 2 e o -2?
L- Ah também pode ser 0, porque vai dar 0.
I- Então quais pensas serem os elementos do conjunto que representa o contradomínio da função?
L- 0 ou $\mathbb{R}^+$ [escreve $[0, +\infty[$].

Ana propõe a Leonor alterar a função. Pelo facto da expressão analítica da função se ter alterado, Leonor usa a intuição classificando-a de injetiva e apesar de mostrar compreender o conceito de injetividade de uma função, começa por justificar-se com argumentos inválidos:

A- E se for $f(x) = 3x^2$ mas só considerando o domínio em $[0, +\infty[$?
I- Neste caso é injetiva?
L- Neste caso já temos que considerar, porque tem o 3 e mesmo que aqui [aponta para x^2] o valor seja sempre positivo… por exemplo, -1 …
I- Sim?
L- Sim, vai ser sempre dar positivo na mesma.
I- Quando tinhas $f(x) = x^2$ concluíste que era não injetiva, porque é que agora dizes que esta é injetiva?
L- Porque tem um número a multiplicar por aquele e vai sempre dar um valor diferente…
I- Porque é que o $3x^2$ vai dar sempre um valor diferente e o x^2 não?
L- Porque o x^2 admite sempre dois valores…
I- Porquê?
L- Não, $3x^2$ também tem a mesma imagem para dois objetos simétricos mas…
I- Mas?
L- Já sei, neste caso a Ana só está a considerar objetos positivos e por isso vão sempre ter imagens diferentes!

No final da sessão em que o grupo elaborou o plano da construção do jogo e determinou o conteúdo de cada peça, a investigadora questionou Leonor:

I- O que achaste da construção do jogo?

L- É mesmo difícil conseguir que o jogo funcione, porque por exemplo pode haver uma peça que só encaixa com outra, e se não encaixar logo essa peça e encaixar outra, ela fica sem par… e isso pode ser mau no jogo. Temos de ter tudo em conta, por isso é que preferimos construir menos peças.

I- Foi difícil estudares as funções?

L- Não, algumas mais que outras. Mas foi giro inventarmos nós as funções e depois descobrirmos o que estava por detrás. Acima de tudo, agora sinto-me mais à vontade e consigo visualizar melhor cada função.

I- Achas que foi importante para ti teres contruído este jogo?

L- Acho que aprendi bastante, porque elas [as colegas] às vezes inventavam funções com caraterísticas especiais em que eu nunca tinha pensado e às vezes é isso que acontece nos testes, aparecem casos diferentes dos que eu estudei e nem sempre me sinto preparada para isso.

4.1.5. Considerações finais

- **Aprendizagem e desenvolvimento de capacidades matemáticas**

No *Polygame*, a justificação e análise das jogadas que o jogo exige permitem que Leonor identifique as suas dificuldades, constituindo a prática do jogo um agente de diagnóstico. Por outro lado, as discussões em torno dos diferentes conceitos envolvidos romperam progressivamente com algumas das suas conceções incorretas e enriqueceram as suas estruturas mentais.

Em todas as sessões a aluna tem uma participação ativa nos momentos de discussão, o que potencia em Leonor a capacidade de organização do pensamento e de sistematização dos conteúdos. De notar que na primeira partida do *Qual é Qual?* coloca as cartas no seu tabuleiro sem qualquer ordem e ao longo dos jogos começa progressivamente a organizar as cartas, agrupando-as segundo os objetos matemáticos que vai reconhecendo. À medida que as sessões decorrem o grupo tem mais momentos de diálogo e a aluna sente mais a necessidade de defender os seus pareceres, o que resulta no desenvolvimento da sua capacidade de argumentar e de relacionar conceitos matemáticos e consequentemente num potencial desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático e de uma linguagem matemática mais rigorosa.

- **Cooperação versus competição**

Leonor demonstra durante a prática dos jogos um grande sentido competitivo, o que no caso do *Polygame* a prejudica. No primeiro jogo, Leonor combina as cartas rapidamente e a todo o custo, mesmo que para isso não compreenda a razão pela qual o faz. Esta postura vai sendo alterada ainda no primeiro jogo, com a necessidade de justificar de forma válida as suas jogadas. No *Qual é Qual?* a aluna afirma várias vezes que vai ganhar o jogo porque costuma ser "bastante boa neste tipo de jogos". Apesar de ter esta atitude, a aluna não mostra preocupação em formular questões que a levem a eliminar o maior número de cartas do seu tabuleiro e em situações de jogo em que tem apenas uma carta no tabuleiro e pode vencer o jogo, opta por fazer mais uma pergunta a título de confirmação, mesmo arriscando-se a que uma das suas colegas lhe ganhe. Leonor afirma que a escolha da carta mistério é completamente aleatória, não existindo qualquer intenção de escolher uma carta que seja mais difícil de descobrir.

No entanto Leonor promove diversas vezes a cooperação do grupo para que o mesmo ultrapasse as dificuldades encontradas tanto na prática dos jogos, como na construção do dominó. No *Polygame* sugere que o grupo coloque as cartas na mesa, entreajudando-se e podendo trocar cartas entre si consoante o jogo de cada elemento. Tanto no *Qual é Qual?* como na construção do jogo, voluntaria-se para auxiliar as colegas e diversas vezes apela à ajuda do grupo.

- **Momentos do jogo**

Nos dois jogos e tal como a literatura aponta, Leonor necessita de jogar várias vezes até conseguir dominar todos os conteúdos envolvidos. Contrariamente, não revela qualquer problema em perceber as regras e em manusear o material de jogo.

No *Polygame*, Leonor admite ter maiores dificuldades quando tem que explicar ao grupo o porquê de ter agrupado as cartas e por isso ao apresentar as suas justificações percebe-se que o tenta fazer rapidamente para que as colegas não lhe coloquem questões.

No jogo *Qual é Qual?*, as dificuldades que Leonor diz sentir prendem-se com interpretar as respostas às questões que formula e com isso eliminar as cartas correspondentes. A identificação incorreta de alguns objetos matemáticos, como por exemplo segmentos de reta e pontos, levaram a que Leonor após algumas questões ainda permanecesse com muitas dessas cartas no seu tabuleiro.

- **Construção do jogo**

Ao longo da construção do jogo, Leonor utiliza a liberdade de realizar e discutir o estudo de diferentes funções para aprofundar o seu conhecimento. O facto de a aluna não ser obrigada a seguir uma linha orientadora, como é frequente nos exercícios que resolve, permite-lhe não ter limites no que pretende descobrir acerca de cada função e autonomamente vai dirigindo o seu trabalho. Pela análise do seu discurso conclui-se que Leonor tem dificuldade em expressar matematicamente as suas conjeturas e por isso sente sempre a necessidade de dar exemplos para justificar as suas afirmações. Além disso, parece desenvolver muitas vezes uma ideia inicial não sustentada que tenta defender, mesmo que apresentando para isso argumentos inválidos.

4.2. Maria

4.2.1. Caraterização de Maria

Maria é uma aluna de 16 anos, empenhada mas pouco participativa. É considerada uma boa aluna pela sua professora de Matemática, destacando-se pela preocupação em compreender os conteúdos e em relacioná-los durante a aula. Tímida, raramente coloca dúvidas perante a turma, preferindo apresentá-las individualmente à professora. Maria realiza sempre o trabalho de casa e tem um comportamento exemplar em sala de aula.

No questionário, a aluna revela gostar de Matemática. Acerca dos seus hábitos de jogo, refere ter jogado apenas uma vez um jogo envolvendo conteúdos matemáticos em sala de aula, mas diz estar habituada a jogar às cartas com amigos e família. Quando questionada sobre a possibilidade de aprender Matemática através do uso de jogos, aponta a motivação como principal razão para essa ser uma experiência de sucesso.

Maria tem um percurso escolar sem retenções e terminou o 3.º ciclo do Ensino Básico com nível 5 a Matemática, nota que desce para 4 no Exame Nacional. No 1.º período do 10.º ano obtém 17 valores e no 2.º período desce para 15 valores, assumindo ter muitas dificuldades no subdomínio Geometria Espacial por não conseguir "visualizar no espaço". Na ficha de avaliação realizada no 3.º período, a aluna obteve 16 valores.

4.2.2. Jogo 1 – Polygame

Na primeira sessão, Maria revela dificuldades em perceber o objetivo e as regras do jogo. Como a professora está por perto, opta por lhe pedir ajuda em vez de recorrer ao apoio do grupo:

> M- Eu não estou a perceber.
> P- Você tem que conseguir encaixar polinómios, com os seus zeros e multiplicidades. [a professora dá atenção a outro aluno do grupo]
> M- E aqui?
> P- Aqui tem de ter $\sqrt{3}$ como zero.
> M- Então este polinómio é divisível por este.
> P- Então apanhe essa carta.
> M- Posso apanhar?
> P- Claro que pode!

Após algumas jogadas e uma explicação por parte da professora no quadro, Maria começa a compreender a dinâmica do jogo e comparativamente aos restantes elementos do grupo é a que realiza combinações corretas de cartas mais rapidamente. Apesar da timidez e de falar pouco com o grupo, a aluna apercebe-se que os colegas estão com dificuldade em combinar as cartas, em particular as da divisibilidade. Para que o jogo avance e que possa também ela trocar cartas, intervém dando um exemplo ao grupo manipulando as suas próprias cartas:

> M- Estão a perceber?
> C- Eu ainda não…
> M- Eu já estou a perceber… Imaginem que têm este polinómio aqui, $P(x) = (x-5)^3$, se guardarem a carta divisível por este polinómio, é um $(x-5)$, por exemplo… Só $(x-5)$ ou $(x-5)^2$ ou $(x-5)^3$.
> L- Então e $(x+5)$ não pode ser?
> M- Não… o zero é -5.
> Todos- Não o zero é 5.
> L- E a multiplicidade era o quê?
> M- É o expoente da… a multiplicidade é isto [aponta para o expoente de um dos fatores].

Através da discussão, a aluna vai expressando as suas ideias, mas também reforçando o seu conhecimento. De notar que no discurso de Maria é visível uma ausência de certos termos matemáticos, sendo frequente o uso da palavra "isto", uma lacuna possivelmente justificável por raramente se expressar oralmente nas aulas.

O grupo começa a recorrer principalmente a Maria para que os ajude a combinar cartas e esta mostra-se gradualmente envolvida em mais diálogos. No seguinte diálogo, a aluna toma como estratégia a escolha de um polinómio onde lhe pareça mais simples visualizar as suas caraterísticas, no entanto continua a ter dificuldades em compreender as regras. Nesse sentido, ao tentar ajudar Carmo, diz-lhe quais as combinações que tem de encontrar para um outro polinómio. As alunas trocam o papel das cartas azuis com o das verdes e Maria induz a sua colega em erro:

> C- E este [carta verde: $4(x+1)^3$] tem que ser como? Tem que ser $4(x+1)$?
> M- Troca por este que é mais fácil! [troca por outra carta verde $(x-2)^2$] Aí o zero é dois e a sua multiplicidade também é dois e pode ser divisível por $(x-2)$ ou $(x-2)^2$.

Durante esta sessão, a maioria das dúvidas de Maria prendem-se com a forma como pode jogar. Para obter resposta a estas dificuldades, solicita a ajuda da investigadora ou da professora, não se expondo perante as colegas do grupo.

> M- Um polinómio com multiplicidade 3, pode ter 1, 2, 3?
> I- Como assim?

M- Eu tenho este polinómio $P(x) = (\mathrm{x}+3)(\mathrm{x}+2)^2\left(x-\frac{1}{2}\right)^3$, posso só juntar uma carta que tenha a multiplicidade de um dos zeros? Tipo 3?

I- Não, tem de ter a multiplicidade de todos os zeros do polinómio.

M- Ok ok!

À medida que vai jogando, a aluna depara-se com polinómios mais complexos. Com o polinómio $P(x) = \left(x-\sqrt{3}\right)^3(x^2+1)^2$ na mão, mostra-se apreensiva e mais uma vez chama a professora. As questões que vai colocando ao longo do jogo atraem o interesse do grupo que a vai indagando sobre as conclusões retiradas:

M- Professora esta multiplicidade não conta pois não? [apontando para o expoente do segundo fator].

P- Não, porque este fator não tem zeros.

M- Pois!

L- Não tem zeros?

M- Não, porque x^2, nunca vai dar -1.

No final desta sessão, Maria expressa a sua opinião sobre o jogo, explicitando que este só se torna divertido quando se compreende os conteúdos:

C- E eu também, polygame! Eu gosto deste jogo.

M- É divertido se souberes fazer… se não souberes, não vais estar animada.

Na segunda sessão, a aluna sente menos dificuldade em lidar com as regras do jogo. Progressivamente, vai dando mais exemplos das suas combinações, envolvendo-se em mais discussões em torno dos conteúdos e parecendo ter uma crescente facilidade em se expressar:

M- Olha aqui o meu, eu também tenho esse (x^2-1). E eu pus estas raízes, 1 e -1, porque 1^2 dá 1, 1-1=0, e $(-1)^2$ dá 1, 1-1=0 [a aluna refere-se ao polinómio $P(x) = \left(x+\sqrt{3}\right)^4(x^2-1)$].

Em seguida, a aluna procura confirmar junto do grupo se a multiplicidade dos seus zeros é 4, 1, 1 e acaba por explicar a Leonor o seu ponto de vista:

L- Eu acho que sim.

I- Porquê?

L- Isso não sei explicar, não sei porque é que tem dois 1 se são só dois fatores.

M- Porque é do -1 e do 1. É como se tivesse $(x-1)(x+1)$. É um caso notável.

Noutro momento, Maria atenta no jogo de Carmo, pergunta ao grupo se a carta verde que tem na sua mão não serve no polinómio da colega. [Carta Azul: $P(x) = (x-5)^3$; Carta Verde: $10 \times (x-5)^2$].

M- Este aqui é divisível por aquele? Não é?

C- Eu acho que não …

I- Maria porque é que achas que é divisível?

M- Porque tem um fator em comum.

C- Mas este aqui está ao quadrado e este ao cubo… e então?
M- E então… é este [carta azul] a dividir por este [carta verde]… Este é menor e este é maior… [aponta para os expoentes].
I- E qual a influência do 10?
L- O 10 não vai ser o resto na divisão?
A- Para ele ser divisível, o resto tem de ser 0!
M- Então não pode ser?

O grupo desenvolve uma argumentação sustentada por diversas incertezas, não chegando a nenhuma conclusão. Maria continua sem compreender se o polinómio presente na carta azul de Carmo é divisível pelo da sua carta verde. Neste momento, a investigadora decide intervir e orientar o raciocínio da aluna que rapidamente consegue construir uma conjetura para justificar a sua ideia.

I- Se dividirmos $(x-5)^3$ por $(x-5)^2$, quanto será o quociente da divisão?
M- $(x-5)$
I- Porquê?
L- Porque um está elevado a 3 e o outro a 2.
A- Regras de potências.
M- 3-2=1
I- Se multiplicares o quociente pelo polinómio divisor…
M- Ah, dá-me o polinómio da carta azul!
I- Mas o teu polinómio divisor é $10 \times (x-5)^2$.
L- Então assim quanto é o quociente?
M- Pode ficar igual mas a dividir por 10, porque depois corta com o polinómio divisor e fica igual ao polinómio da carta azul! [momentos de silêncio] Ah! Então este é divisível por este, porque consegui encontrar um quociente que a multiplicar por este [carta verde] dá aquele [carta azul]… e o resto assim aqui continua a ser zero…

Numa outra partida e ainda dentro do tema da divisibilidade de um polinómio, Maria concretiza um polygame. Ao justificar a sua combinação, a investigadora tenta perceber se Maria compreende o teorema do resto. A aluna mostra ter dúvidas quanto à possibilidade de utilizar o teorema do resto nesta situação. No entanto, com ajuda de Ana, consegue estabelecer a ligação entre o teorema do resto e a divisibilidade do seu polinómio:

M- Este polinómio fica $\left(x+\sqrt{3}\right)^4(x-1)(x-1)$… não, $(x+1)$. É divisível por $(x-1)$ porque um dos fatores é $x-1$. A multiplicidade é 4, 1, 1 e os zeros é… $-\sqrt{3}$, 1, -1.
I- Podes usar o teorema do resto neste caso para justificares a escolha da tua carta verde?
M- Talvez… [mostra-se pensativa]
I- Quando é que podemos aplicar o teorema do resto?
A- Quando o divisor é do tipo $x-\alpha$.
M- Sim e como o P(1) é 0… por isso o meu polinómio é divisível por $x-1$.

No final da segunda sessão, a aluna destaca que com o uso do jogo consolidou e aprofundou sobretudo o conhecimento acerca de casos notáveis, factorização e divisibilidade de polinómios:

> I- Gostaste do jogo Maria?
> M- Sim!
> I- Porquê?
> M- Porque por exemplo eu sei que nos polinómios há sempre muitos casos notáveis e aqui eu pratiquei bastante. Mesmo a saber quando são casos notáveis, mas principalmente como o tornar num caso notável…
> I- Tornar num caso notável?
> M- Sim, a fatorizar! E nestes últimos jogos acho que percebi tudo sobre divisibilidade, até aquelas rasteiras dos números antes dos fatores para parecer que não era divisível! [a aluna ri-se].

4.2.3. Jogo 2 – Qual é Qual?

Antes de começar a jogar e após ler as regras, Maria questiona a investigadora sobre a disposição dos tabuleiros e o papel das cartas. A investigadora faz uma simulação de uma jogada para que entenda o funcionamento do jogo e de imediato a aluna identifica o papel das cartas do seu tabuleiro com as de outro jogo que já conhece:

> M- Mas a Leonor vai ver as minhas cartas…
> I- E pode ver, não há problema! Tu é que não podes ver a carta mistério que ela tem, nem deixares que a Carmo veja a tua carta mistério.
> M- E as cartas do tabuleiro servem para quê?
> I- Vais fazer perguntas à Leonor não é? Por exemplo, se perguntares à Leonor se a carta mistério que ela esconde é um certo objeto matemático e ela disser que sim, tu vais retirar do teu tabuleiro todas as cartas que não o são.
> M- Aaah, estas são aquelas que se baixam no "Quem é Quem?" !

Ao colocar as cartas no tabuleiro pela primeira vez, Maria começa por agrupá-las segundo os objetos matemáticos que reconhece e ao tentar constituir um conjunto de cartas com pontos depara-se com um problema:

> M- Eu não tenho quase pontos nenhuns! Só tenho um!
> I- Tens quatro!
> M- Acho que não… Um ponto P só tenho um.
> I- Tal como as retas, os pontos não têm que estar representados nas cartas de uma só forma, correto?
> M- Eu não me lembro nada disto…

Quando questionada sobre a organização que deu às suas cartas, Maria assume ainda não identificar todos os objetos matemáticos presentes no jogo, condicionando assim a disposição no tabuleiro:

> I- Como colocaste as cartas no teu tabuleiro?
> M- Foi um bocado aleatório, porque há aqui cartas que ainda não sei o que são. Mas porquê? É melhor organizarmos?

A- Eu pensei em pôr os pontos para um lado e os outros…
M- Eu também, só que estas equações…

Maria começa o jogo por perguntar à investigadora que tipo de perguntas pode fazer, dando um exemplo. De seguida, faz a primeira pergunta sobre a carta mistério a Carmo começando por questionar sobre a possibilidade de ser um ponto, já tendo percebido que não tinha identificado todos os pontos no seu tabuleiro:

M- Posso fazer perguntas do tipo: é uma esfera?
I- Podem fazer as perguntas que quiserem!
M- É um ponto?
C- Se é um ponto? Não!

Retira apenas a carta que tinha identificado como sendo um ponto e fica a olhar pensativa para as cartas do seu tabuleiro:

I- Se não é um ponto, tens que retirar do teu tabuleiro todas as cartas que não são pontos.
M- A professora diz para eu retirar os pontos e à pouco também disse que havia quatro pontos. Eu não sei quais são os outros pontos.
I- Então eu vou começar a apontar para as cartas e quando não souberes o que é dizes-me.

Quando a investigadora aponta para a carta: $x = 1 \wedge z = 2$, Maria mostra não saber identificar a equação cartesiana de um plano e consequentemente não reconhece o sistema de equações cartesianas de uma reta.

M- Isso…
I- Não sabes o que é? No espaço representa uma interseção entre…
M- Dois… pontos? Não…
A- São condições que representam planos, não são?
M- Ah então a interseção entre…Ah dá um ponto! Não… dá uma reta! Então os pontos são aqueles que nos dão… este, este e este?

Maria percebe que no espaço a interceção entre três planos representa um ponto e identifica corretamente quais as três cartas que também representam pontos. No entanto, noutro jogo volta a ter dúvidas e a questionar a investigadora:

M- Professora só uma coisa… eu agora tenho cinco pontos não tenho?
I- Tens? Então?
M- Este [aponta para $x = 1 \wedge y = 2 \wedge -3 \leq z \leq -2$]
I- Define um ponto no espaço?
M- É… não, não é!
I- É o quê?
M- É um plano… não sei!
I- Se estivesse na carta $x = 1 \wedge y = 2$…
M- É uma interseção… é uma reta… ah já sei, é um segmento de reta!
I- Porquê?

M- Porque se fosse assim [tapa com os dedos $-3 \leq z \leq -2$], eu sei que… os pontos da reta podiam ter qualquer cota, podia ser qualquer valor de $\mathbb{R}$… mas assim não, a cota está só nesses valores e por isso tem início e fim.

Ao longo dos jogos, a aluna joga de forma bastante calma, ponderada e formulando as suas questões com o objetivo de retirar sempre o maior número de cartas. Com seis cartas de esferas no seu tabuleiro, pondera qual a questão que permite retirar um maior número de cartas:

M- O centro da esfera é… é… (1, 2, 0)? Não… (-1, -2, 0)?
C- Não podes mudar a pergunta Maria.
M- Oh na verdade é indiferente, porque tenho duas cartas de cada.
C- A resposta à tua segunda pergunta é não.

Retira as duas cartas corretamente e na sua questão seguinte pergunta então se o centro é (1, 2, 0), ao que Carmo responde que não, retirando assim mais duas cartas. Por último, restam-lhe duas cartas, ambas esferas com raio 5 e por isso Maria continua a questionar sobre o centro da esfera que procura:

M- Pois, o raio é o mesmo… vou continuar igual… O centro é (0,1,-2)?
C- Sim, aleluia acertaste no centro!
M- Então ganheiii!

Noutra situação, Maria retira as cartas com equações cartesianas de superfícies esféricas quando tinha questionado acerca das esferas. Apercebe-se do seu erro e, ao formular a pergunta seguinte, resolve questionar Carmo sobre a hipótese da carta ser efetivamente uma superfície esférica, ficando aliviada por perceber que não teria de repor as cartas novamente:

M- É uma sup… é uma…esfera?
C- Já perguntaste isso.
M- Ah pois… É uma superfície esférica?
C- Não.
M- Não é? Ainda bem, é que eu troquei.

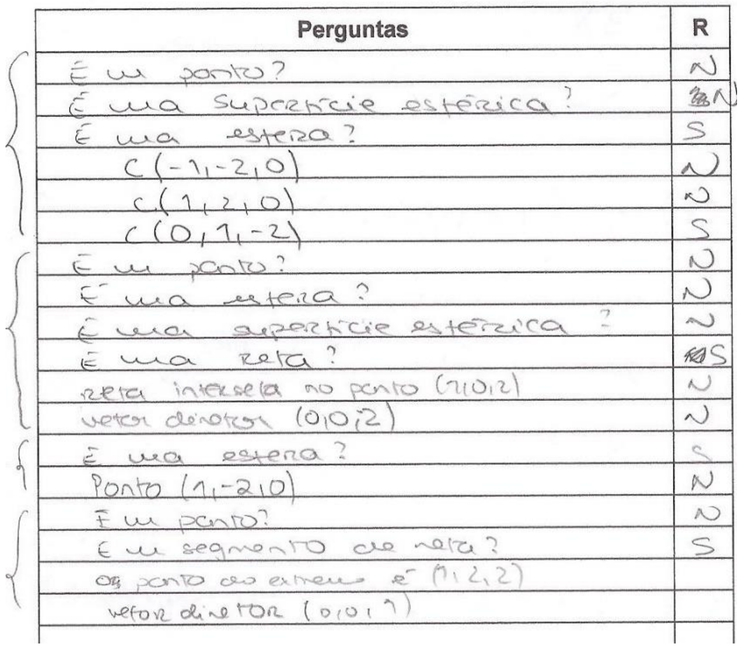
Mais à frente, Maria põe uma questão ao grupo sobre o tipo de perguntas que pode fazer. Ao perceber que o mesmo objeto matemático pode estar representado de forma diferente nas cartas mistério e que por isso não pode formular as suas questões com base na sua representação, sente necessidade de recorrer à escrita:

M- As perguntas podem perguntar mais que uma coisa?
L- Não…
M- Queria perguntar se era uma reta representada por uma equação vetorial…
C- Ah mas a reta pode estar nas tuas cartas como equação vetorial e nas minhas de outra forma. Por exemplo, tu podes ter a equação vetorial de um segmento de reta e eu posso ter o mesmo segmento por equações paramétricas.
M- Hum… então posso fazer cálculos?

Maria começa por escrever na sua folha todas as expressões que constam nas cartas e seguidamente toma como estratégia escreve-las sob a forma de sistemas de equações paramétricas.

> I- Porque sentiste a necessidade de escrever o sistema de equações paramétricas das retas?
>
> M- Porque assim ao fazer as perguntas, consigo comparar melhor todas as cartas e depois também porque quero ver se consigo com as perguntas que faço excluir mais do que uma carta de cada vez, assim vejo o que têm em comum.
>
> I- Como assim o que têm em comum?
>
> M- Tipo, imagine que há duas que têm o mesmo vetor diretor, eu posso perguntar e… ou fico com essas duas cartas ou tiro-as logo.
>
> I- Então mas se queres comparar os vetores diretores não era mais fácil escreveres antes as equações vetoriais? Tu até já tens duas retas escritas sob a forma de equações vetoriais…
>
> M- Ah sim…mas para mim é mais fácil escrever todos os sistemas de paramétricas do que as equações vetoriais.

Quanto às perguntas formuladas, Maria ao longo do jogo recorre sempre ao mesmo tipo de perguntas, no entanto pondera a pergunta segundo o número de cartas que a resposta à mesma pode excluir do tabuleiro. À semelhança do que todo o grupo faz, a aluna começa por descobrir primeiro o tipo de objeto matemático, formulando depois questões referentes às caraterísticas do objeto (ver fig. 4).



Perguntas	R
É um ponto?	N
É uma superfície esférica?	N
É uma esfera?	S
C(-1,-2,0)	N
C(1,2,0)	N
C(0,1,-2)	S
É um ponto?	N
É uma esfera?	N
É uma superfície esférica?	N
É uma reta?	S
reta intersecta no ponto (1,0,2)	N
vetor diretor (0,0,2)	N
É uma esfera?	S
Ponto (1,-2,0)	N
É um ponto?	N
É um segmento de reta?	S
os pontos dos extremos é (1,2,2)	
vetor diretor (0,0,1)	

Figura 4: Perguntas formuladas por Maria.

Jogo após jogo, Maria vai conseguindo formar conjuntos de cartas com características idênticas e no terceiro jogo organiza as cartas no tabuleiro conforme o tipo de objeto matemático representado (ver fig. 5). Mesmo durante os jogos, a aluna tem o cuidado de ir deslocando as cartas que dentro do mesmo tipo, têm características semelhantes. Refere que constituiu uma estratégia que a levava a "não perder tempo a procurar as coisas no tabuleiro e assim, já tinha tudo organizado e era mais fácil de perceber". No entanto, admite que a escolha da carta mistério foi aleatória, não tendo qualquer estratégia assente quanto a isso.

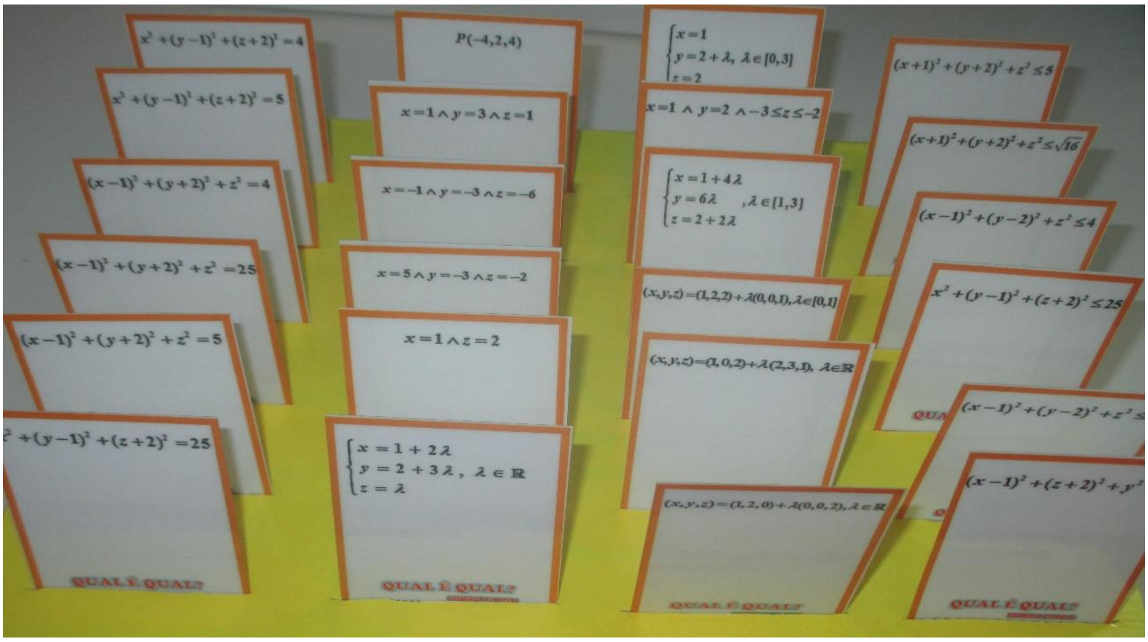


Figura 5: Disposição das cartas no tabuleiro de Maria no último jogo.

4.2.4. Construção do jogo

Tal como Leonor, Maria integra o grupo que constrói o dominó. Nesta sessão, a aluna tem uma posição dominante no grupo, definindo as etapas de construção do jogo e a distribuição de tarefas. Desde logo, participa nas ideias iniciais para decisão sobre qual o conteúdo das peças do jogo, mostrando-se envolvida na construção do mesmo:

> A- Neste caso pode ser tipo, imagina, tens uma função e juntas o domínio dessa função à função…
>
> M- Ou então se essa função é bijetiva ou sobrejetiva ou injetiva… ou até se é uma função ou não.

Neste sentido, Maria é o elemento do grupo que se voluntaria para escrever as regras do jogo. Não só desempenha a função de ir registando as ideias do grupo, como também apresenta sugestões fundamentadas:

M- Podemos escrever nas regras que não se pode ligar domínios com contradomínios?
C- Porque vais escrever isso?
M- Porque podes ter uma função com o domínio que quiseres e o contradomínio que quiseres, tu é que constróis. Se não escreveres isso, as pessoas podem sempre unir os domínios com os contradomínios.

Como o grupo não está a conseguir definir concretamente o conteúdo presente nas peças e o que deve constar nas regras, Maria aconselha fazerem um esboço das peças e propõe às colegas que cada uma invente funções, construindo também as peças que poderiam ligar essas funções. Durante essa construção, Carmo questiona o grupo sobre a relação entre o conjunto de partida e o domínio e Maria ajuda a colega:

C- O conjunto de partida não tem que ser igual ao domínio pois não?
M- É sempre, porque se não não é uma função…
C- Não é uma função?
M- Então se cada objeto tem de ter uma e uma só imagem, se tiveres um objeto que não tenha imagem então não tem uma e uma só imagem.
C- Não estou a perceber…
M- O teu domínio são todos os que estão no teu conjunto de partida, porque todos os elementos do teu conjunto de partida têm de ter um elemento no conjunto de chegada… se não tiver, não é função.

Maria folheia o manual e começa por esboçar a parábola definida pela função f definida por $f(x) = x^2 + 1$ (ver fig. 6). Nesta altura, os conhecimentos que Maria tem sobre a função quadrática advêm somente do 9.º ano pois ainda não tinha sido lecionado o conteúdo relacionado com transformações geométricas dos gráficos de funções. A investigadora questiona-a e a aluna começa a refletir sobre o gráfico da função e de forma intuitiva vai tirando conclusões:

I- Como sabes que o ponto de coordenadas (0,1) pertence ao gráfico da função?
M- Vi aqui no manual…
I- Ah então fecha o livro, não quero que vejas. Pensa lá…
M- Hum… porque 1 é a ordenada na origem? Ah não… porque isto é 1 [aponta para o eixo das ordenadas].
I- E que valor tem a abcissa do vértice?
M- Zero… pois claro faz sentido!
I- E se fosse $f(x) = x^2$? Qual era o vértice da parábola?
M- Estava aqui [aponta para a origem do referencial].
I- Então quando somas um, o que achas que acontece ao gráfico de f?
M- Sobe uma unidade?

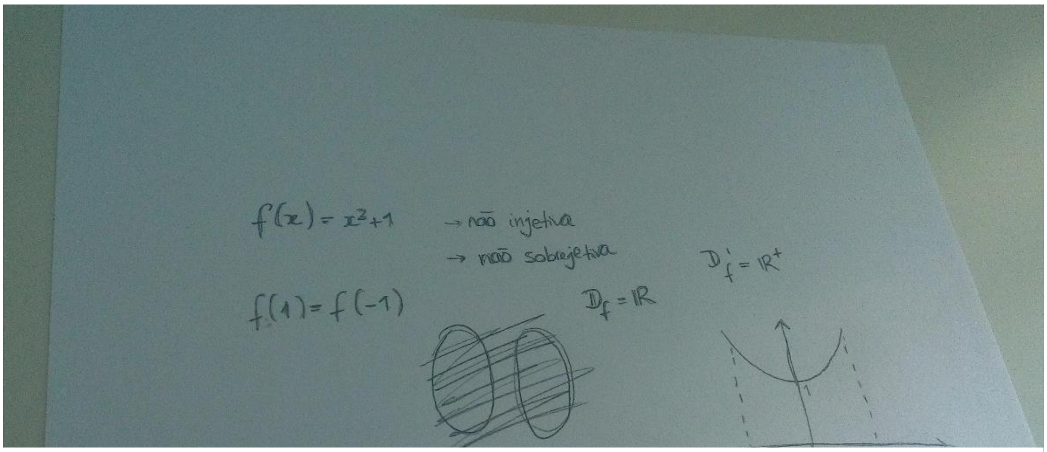


Figura 6: Esboço de Maria.

De modo a que a construção do jogo seja mais organizada, Maria altera a estratégia do grupo e propõe que construam as peças à medida que as vão encaixando (ver fig. 7). À vez, cada elemento do grupo esboça uma peça que possa ser ligada a outra. Durante este processo, Ana escreve numa peça "função não injetiva" e o grupo pensa numa função que possa ligar a esta. Maria, tal como noutras situações, é a primeira a intervir, impedindo que se construa uma peça que não tem a correspondência pretendida. A aluna mostra-se sempre atenta e tem um papel fundamental na aprendizagem das suas colegas, que não se mostram incomodadas com as suas correções. Por outro lado, as diferentes situações que as suas colegas vão criando fazem-na refletir e reforçar o seu conhecimento.

A- Uma função não injetiva…
C- Constrói uma tabela vá…
L- 1, 2, 3 está para …2, 3, 4 por exemplo.
M- Isso… isso é injetiva!
L- Aaah, nós queremos é uma não injetiva.
M- Ou seja, 2, 2, 2… estes objetos têm de ter a mesma imagem.
A- Têm que ter os três a mesma imagem?
M- Não, basta que dois tenham a mesma imagem.

Seguidamente, Maria ajuda Leonor a esboçar um diagrama de setas (ver fig. 7) que possa ser ligado à peça que contém $f(1) = f(-1)$:

M- Leonor tens que pôr no conjunto de partida o 1 e o -1 pelo menos.
L- Porque é que eu tenho que meter no domínio o -1 e o 1?
M- Porque isto (ver fig. 7) é o domínio e o domínio é representado no eixo dos x e isto aqui é o x…
L- Ah ok faz sentido.
M- Agora por exemplo 4, 6 e depois fica… o 1 e o -1…
L- Ligam ao mesmo…
M- Sim, e por exemplo o 3 liga ao 4.

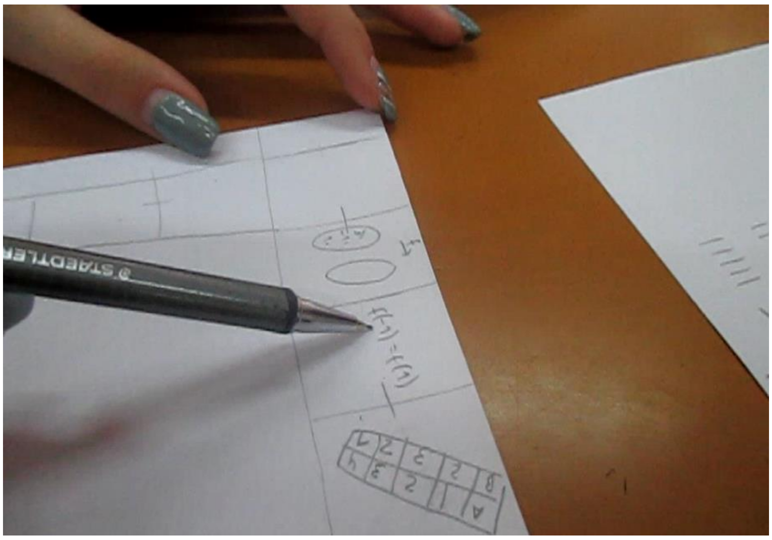


Figura 7: Esboço do Domizzle.

Na construção do jogo, Maria toma uma posição diferente no grupo em relação à prática dos jogos e até mesmo em relação à sua postura em sala de aula. Dinâmica e muito organizada, Maria lidera as ações do grupo durante a construção e mostra uma maior vontade em comunicar com as colegas do grupo. Nos conteúdos já lecionados, não revela ter dificuldades e por isso ajuda as colegas, corrigindo algumas falhas e esclarecendo as suas dúvidas. Ao mesmo tempo expressa em voz alta alguns conceitos, o que a ajuda a dar mais significado aos conteúdos.

O grupo onde se inserem Maria e Leonor conseguiu concluir o jogo após a sessão. Na figura 8 pode-se visualizar o resultado final do jogo:

Figura 8: Jogo Domizzle.

4.2.5. Considerações finais

- **Aprendizagem e desenvolvimento de capacidades matemáticas**

Para Maria, a grande vantagem de jogar *Polygame* reside no desenvolvimento da sua capacidade de intervir de forma efetiva, reforçando para isso o seu conhecimento. Talvez pela motivação, tal como aponta no seu questionário, a aluna rapidamente se envolve no jogo. Perante erros, dúvidas e dificuldades do grupo, a aluna constrói ao longo do tempo diálogos com maior nível de argumentação. Por outro lado, deixa de recorrer à professora aquando das suas dúvidas, preferindo falar com as suas colegas e contribuindo para a autonomia da discussão no grupo.

No *Qual é Qual?*, é mais evidente a falta de domínio sobre os conteúdos de Geometria Espacial. A aluna apresenta fragilidades neste tema, potencialmente evidenciadas pelas dificuldades que relata no processo de visualização e perceção do espaço. Na preparação do seu tabuleiro, Maria apercebe-se de que existem algumas cartas que não reconhece e afirma não se recordar das representações enunciadas. Perante as dificuldades e não mostrando iniciativa em recorrer ao grupo, é através de dicas das suas colegas e da investigadora que vai desenvolvendo alguns raciocínios e tirando conclusões. Jogo após jogo, conforme o seu conhecimento vai progredindo, a aluna foca-se em formular as suas questões em função do número de cartas que estas a podem fazer excluir, melhorando por isso a sua estratégia de jogo.

- **Cooperação versus competição**

Principalmente no *Polygame*, Maria participa em diferentes diálogos para apoiar as suas colegas e o grupo recorre com frequência à sua ajuda. Nesta perspetiva, pode-se considerar que apesar do *Polygame* ser um jogo que no seu final terá um vencedor, para Maria o jogo passa pela entreajuda e cooperação do grupo.

Nos dois jogos, naturalmente a aluna tenta jogar sempre o melhor que consegue, esforçando-se para ganhar e desenvolvendo estratégias nesse sentido. O seu sentido de competição desenvolve-se em torno de aprender para ganhar, não ultrapassando regras nem prejudicando de alguma forma as adversárias.

- **Momentos do jogo**

Nos dois jogos, Maria mostra ter dificuldades em compreender as regras, o que a condiciona nas primeiras partidas de cada jogo. Apesar de em todas as sessões ler o enunciado com as regras e de ser feita a simulação de algumas jogadas, a aluna destaca-se no seu grupo por ser a que coloca mais questões acerca das regras e por ao longo das partidas continuar a apresentar algumas dificuldades.

Em particular, no jogo *Qual é Qual?*, as dificuldades que Maria apresenta prendem-se também com a compreensão dos conteúdos, embora com o decorrer das partidas consiga ultrapassar as suas dúvidas, conseguindo dominar os conteúdos e focar a sua atenção na formulação de questões.

- **Construção do jogo**

Na construção do jogo, Maria toma uma postura de liderança perante o grupo, comandando o ritmo de trabalho e contribuindo com várias ideias nas diferentes etapas. Esta atitude também é potencialmente forçada pelo facto das colegas depositarem em Maria a responsabilidade de ser uma boa aluna e esta sentir que, tal como aconteceu no *Polygame*, pode ajudar bastante o grupo, por se sentir confiante com os conteúdos envolvidos. Esta entrega ao desenvolvimento da atividade potencia a sua participação assídua nos diálogos que vão existindo, ajudando as suas colegas e expressando oralmente algumas noções, o que lhe permite também recordar e aprofundar conceitos.

4.3. Vitória

4.3.1. Caraterização de Vitória

Vitória tem 16 anos e é uma aluna com um bom rendimento a Matemática. Nas aulas está sempre atenta, concentrada e bastante curiosa. Frequentemente coloca questões para aprofundar os seus conhecimentos matemáticos e tem um sentido crítico bastante apurado. Tem uma grande preocupação em compreender os conceitos durante a aula e não tem problemas em se expressar perante a turma, fazendo-o regularmente. Além disso, também discute com a sua colega de mesa variadas questões no âmbito da resolução de exercícios ou mesmo durante a exposição de matéria. Não realiza sempre os trabalhos de casa, embora tenha uma nota elevada neste parâmetro de avaliação. No questionário, revela gostar de Matemática e justifica este seu interesse pelo "facto de termos de pensar de uma forma racional sobre uma maneira de resolver um problema", mostrando preferência por problemas aplicados a situações reais. Quanto a dificuldades de aprendizagem, a aluna diz que a sua maior dificuldade está na memorização e que, no caso da Matemática, as fórmulas são o seu maior obstáculo. Diz ter pouco tempo livre para se dedicar à prática de jogos, mas que gosta de jogar xadrez.

Vitória nunca reprovou e terminou o 3.º ciclo do Ensino Básico com nível 5 a Matemática, nota que manteve no Exame Nacional. No presente ano letivo, obteve 17 valores no 1.º e no 2.º período e 18 valores na ficha de avaliação realizada no 3.º período.

4.3.2. Jogo 1 – Polygame

A primeira vez que Vitória joga o *Polygame* percebe que tem de combinar quatro cartas de cores diferentes, mas nem ela nem os restantes elementos do grupo compreendem a importância da carta azul para a associação de cartas. Além disso, desde o primeiro jogo que revela uma grande vontade de ganhar, o que destaca o seu lado competitivo:

> G- Não tenho nada…
> V- Teres até deves ter, tu é que ainda não sabes…
> I- Alguma de vós tem uma carta azul?
> Todos- Não!
> I- Então como querem combinar cartas, se nem sabem qual o vosso polinómio?
> V- Aaah, pois… vou perder e eu não gosto nada de perder!

O grupo onde se insere Vitória confere ao poly a responsabilidade de dar um sinal de partida quando acaba de dispor as cartas na mesa, tendo assim também este mais tempo para analisar as suas cartas. A sua vontade de vencer conduz Vitória a quebrar pequenas regras estabelecidas pelo grupo. Quando finalmente sai uma carta azul e antes de Gabriela colocar todas as cartas na mesa, Vitória antecipa-se e retira-a de imediato:

> V- Olha uma carta azul!
> D- Então? Ela ainda não ordenou?
> G- Mesmo! O poly é que ordena!

Vitória ri-se e volta a colocar a carta na mesa, pedindo desculpa. Logo que Gabriela dá a instrução que podem trocar as cartas da mesa, Vitória retira rapidamente a mesma carta azul $P(x) = (x-5)^3$ e desabafa não estar a perceber como combinar as cartas. Neste momento evidencia não se recordar do conceito de zero de um polinómio e pede ajuda à investigadora:

> V- Eu não sei fazer isto, mas vamos lá tentar… professora, nós sabemos fazer com ao cubo? Nós sabemos fazer este caso notável que é ao cubo?
> I- Não consegues saber qual o zero do polinómio sem o desenvolver?
> V- Hum… não me lembro…
> I- Qual o valor que tens que concretizar para que seja zero?
> V- Ah 5! Já me lembro!

Seguidamente a aluna encontra corretamente a carta que atribui a multiplicidade ao zero do seu polinómio e resta-lhe apurar qual a carta verde que perfaz o polygame. Entretanto Gabriela e Vitória exprimem ter dificuldades em descobrir qual a carta da divisibilidade que encaixam com os seus polinómios. Vitória e Daniela tentam descrever o polinómio divisor para que o resto da divisão de polinómios seja zero. No entanto, designam o polinómio divisor por divisível:

G- Não sei fazer os divisíveis…
V- São os mais difíceis.
D- Mais difíceis? Não.
V- Na minha opinião são.
D- Os divisíveis vão ser estes [fatores do polinómio] sem os expoentes, praticamente.
V- Para mim, os divisíveis vão ser aqueles que… tipo $x - \alpha$.

Ainda na procura da carta verde e não encontrando um polinómio divisor que cumpra na totalidade a condição que predefiniu para tornar o polinómio divisível por este, chama a professora para que a ajude:

V- Estou a ter boé problemas em encontrar a divisibilidade. Tenho medo que já tenha passado a carta verde que preciso… Professora não pode ter o 10 a multiplicar aqui atrás pois não?
P- Pode… mostra lá! Já tens polygame na mão Vitória!
V- Ah então polygame!
P- Tens de justificar agora… pensa lá porque é que pode.

Vitória não consegue encontrar uma explicação para que o polinómio da carta azul seja divisível pelo polinómio da carta verde. A aluna sabe que o seu polinómio é divisível por um do tipo $x - \alpha$, com α zero do polinómio, embora não compreenda que o resto continua a ter o valor zero mesmo que este polinómio divisor seja multiplicado por uma qualquer constante não nula. O resto do grupo não a consegue ajudar e a professora acaba por esclarecer esta questão, fazendo ainda o paralelismo com o que foi dado em aula: “este [polinómio divisor] é o tal do $ax + b$, este 10 tem esse papel”. Vitória muito atenta à explicação da professora justifica que por ser o final do período já não consegue “interligar toda a informação”. De qualquer forma diz fazer todo o sentido e ainda que se recorda de terem visto este caso quando falaram da divisão euclidiana de polinómios.

Durante a justificação dos diferentes polygames, Vitória faz com regularidade alguns comentários, no sentido de complementar o discurso das colegas ou mesmo as ajudar na sua explicação:

G- Eu acho que estes zeros estão mal… [Carta azul: $P(x) = (x - 3^2)(x + 2^3)$; Carta rosa: -8,9]
V- Porque é que achas que estes zeros estão mal? Se este está certo [carta verde: $(x - 9)(x + 8)$], este [carta rosa] está certo também!
D- Porquê?
V- Porque tem dois fatores do tipo $(x - \alpha)$ e os α concretizam o polinómio da carta azul e tornam-no 0… Aliás, a carta verde é igual à azul!

D- Já percebi!
G- Não estou a perceber bem…
V- Esquece a carta azul que é mais complicada… hum… consegues perceber que a carta azul é igual à verde? É só fazeres as potências.
G- Sim…
V- Então quais são os valores que podes substituir no x nesta carta [verde] para que o polinómio seja zero?
G- Esquece, já percebi! Eram aquelas potências que me estavam a fazer confusão!

A forma como Vitória e o seu grupo jogam, confere ao *Polygame* níveis de dificuldade progressivos ajustados ao seu conhecimento. Por um lado tem a possibilidade de escolher quais os polinómios com que quer jogar, por outro sabe que quanto mais avança no jogo menor é o número de opções e mais complexos são:

V- Eu não gosto do meu poly! [carta azul]
G- Eu também não gosto do meu! Não é nada bonito! Deixa-me ver o teu poly… Também não gosto do teu!
V- Nem eu do teu! Vou trocar, quero este!
G- Mas depois vamos ter que os fazer a todos!
V- Mas eu prefiro começar pelos mais fáceis!

No final do jogo da primeira sessão, o grupo de Vitória não consegue combinar as últimas cartas. A aluna sugere que coloquem as cartas em cima da mesa e procurem possíveis combinações inválidas. O grupo conversa sobre os possíveis emparelhamentos:

D- Professora estamos com um problema com as multiplicidades, não estão a dar certo!
I- Então deve ter havido algum erro no agrupamento das cartas anteriores, não?
V- Pois, é isso que estamos a ver… mas não encontramos o erro.
D- Esta multiplicidade (2, 3) é desta não é? [$P(x) = \left(x + \frac{2}{3}\right)^2 (x-4)^3$]
V- Ou desta! [$P(x) = \left(x - \sqrt{3}\right)^3 (x^2+1)$]
I- Ah sim? Então quais são os zeros desse polinómio Vitória?
D- É o $\sqrt{3}, 1\ e -1$.
V- Não porque isto é ao quadrado. Se substituirmos o x por 1 fica 2 e por -1 também! Por isso só temos um zero e a multiplicidade tem de ser 3, tens aí?

Na segunda sessão, Vitória desenvolve a sua forma de jogar e controla as cartas das suas colegas. Além de procurar as cartas que lhe convêm, ainda retira rapidamente da mesa as cartas que sabe que as colegam necessitam, dificultando-lhes o jogo. Outra diferença evidente em relação à sessão anterior está no seu discurso enquanto justifica os seus polygames, pois diversifica as suas explicações para garantir que as suas colegas compreendem o que diz, desenvolvendo discursos mais longos e construindo oralmente os seus raciocínios. Também nesta sessão, começa por usar a divisibilidade para tentar justificar todas as suas combinações:

> V- O meu polinómio é este [$P(x) = (x+3)(x+2)^2\left(x-\frac{1}{2}\right)^3$]. Quais são os zeros deste polinómio? São o -3, -2 e o $\frac{1}{2}$ porque um polinómio é sempre divisível por um polinómio da forma $x-\alpha$, onde o α é um zero do polinómio, neste caso temos por exemplo $(x+3)$ que é o mesmo que $(x-(-3))$, logo -3 é zero do polinómio… e o mesmo raciocínio para os outros fatores.
>
> D- Mas como é que sabes que é divisível por $(x+3)$?
>
> V- Porque é um dos fatores do polinómio… mas pronto estou a fazer o raciocínio um bocado ao contrário, é mais fácil se formos pelo polinómio, $P(-3) = 0$, logo -3 é zero do polinómio. E depois temos as multiplicidades destes zeros… então como já disse este polinómio é divisível por $(x+3)$, mas também por $(x+2)$ e $(x-\frac{1}{2})$… quando fazemos a regra de Ruffini eu vou conseguir dividir o polinómio duas vezes por $(x+2)$ logo a multiplicidade do -2 é 2 e o mesmo para o $\frac{1}{2}$ logo neste caso é 3. Se bem que na verdade eu vejo a multiplicidade pelos expoentes e pronto [as colegas riem-se]. Ah e é divisível por este, porque são dois fatores que estão no polinómio assim fatorizado.

No final da sessão, a investigadora questiona Vitória sobre a sua experiência com o jogo. A aluna admite que a comunicação matemática oral é-lhe mais difícil que a escrita, mas que o facto de se expressar em voz alta permite-lhe organizar as ideias e relacionar os conceitos:

> I- O que achaste do jogo?
>
> V- Gostei mais do que pensava que ia gostar, por acaso.
>
> I- E porquê?
>
> V- Para mim é mais fácil escrever do que falar, se bem que às vezes não pareça porque estou sempre a falar… mas a matemática, falar destas coisas é complicado… nem sei como explicar. É complicado porque não estamos habituados a expressar-nos matematicamente, entende? Escrever com símbolos é mais fácil do que explicar. E quanto mais jogava e mais tinha que explicar os polys que estava a fazer, mais fácil era para mim falar…
>
> I- Isso ajudou-te?
>
> V- Eu acho que sim, agora sinto que consigo relacionar melhor as coisas e esta matéria dos polinómios parece-me mais clara na minha cabeça.

4.3.3. Jogo 2 – Qual é Qual?

Ao ler as regras do jogo, Vitória questiona o funcionamento do jogo pelo facto de serem três jogadores e o jogo que conhece do *Quem é Quem?* ser para dois jogadores. Além disso, pergunta ainda se existe alguma restrição quanto ao tipo de perguntas que pode fazer. Durante o jogo, não evidencia qualquer constrangimento causado pelo não entendimento das regras.

Na primeira partida, coloca as cartas no tabuleiro pela ordem em que estavam no baralho, não dando qualquer tipo de organização às mesmas e justifica-o por ainda se estar a familiarizar com as equações e inequações presentes nas cartas.

O ambiente durante a realização do jogo é de animação. Vitória ajuda Gabriela, dando-lhe exemplos de perguntas de resposta fechada e aproveita para entrar numa brincadeira inserida no contexto do jogo:

> G- Eu não percebo é que tipo de perguntas é que eu faço com as respostas sim e não?
> D- É um ponto, é uma reta, é um segmento de reta...
> V- Se é uma equação, uma inequação… Tem o centro bla, tem o raio bla.
> D- Não, é bla bla!
> V- Não não, assim é bla bla bla, porque é no espaço! [as alunas riem-se]

No seguimento deste diálogo, a investigadora questiona o grupo sobre a formulação das questões. Durante a discussão, Vitória mostra ter compreendido a atribuição de pontos presente nas regras e além disso, revelou perceber a importância da construção das questões para a sua estratégia de jogo:

> I- Qual é o objetivo que vocês querem atingir quando pensam nas perguntas que vão fazer?
> G- Que sejam fáceis, para que o adversário consiga responder e não nos engane.
> D- Eu acho que não, o objetivo é ganhares o jogo… por isso queres é acabar com as tuas cartas.
> V- Por isso podemos fazer perguntas com rasteiras, porque se responderem mal perdem um ponto!
> I- Mas ainda não responderam à minha questão.
> V- Como disse a Daniela, o objetivo é fazer perguntas que tirem muitas cartas, por isso temos que pensar bem sobre elas.

Logo na primeira partida, Vitória atenta nas suas perguntas e nas perguntas que as suas colegas fazem. A primeira questão que coloca permite-lhe retirar do seu tabuleiro metade das cartas: A tua expressão tem algum tipo de raio? Por ser uma questão que lhe permite excluir metade das suas cartas, a aluna fá-la sempre na primeira jogada nos jogos seguintes. Intitula de expressões as representações dos objetos matemáticos presentes nas cartas e a questão em si não tem significado matemático, ainda assim o grupo compreende o que Vitória pretende saber e não existe a necessidade de a corrigir. Enquanto noutra situação, onde Gabriela quer descobrir as coordenadas do centro da sua esfera, Vitória compreende o que a colega pergunta mas obriga-a a reformular a questão:

> G-A tua carta mistério tem abcissa 0?

V- Não… abcissa zero? No que? Onde?
G- No x, o x é a abcissa.
V- Eu sei que o x é a abcissa mas… como é que eu vou dizer isto sem ela saber qual é a minha carta?
G- Então calma, posso fazer outra pergunta? Podemos esquecer esta?
V- Podes, é melhor, porque eu sei o que queres saber com essa pergunta, mas a forma como a fazes não dá para responder.

No segundo jogo, Vitória começa a querer organizar as cartas no seu tabuleiro agrupando as esferas, superfícies esféricas e pontos. Quanto à identificação das retas e segmentos de reta, constitui um único conjunto com estas cartas onde forma um subconjunto apenas com cartas com sistemas de equações paramétricas.

No início da sessão, a investigadora alertou para a possibilidade do mesmo objeto matemático estar representado de formas diferentes em tabuleiros distintos. Neste jogo, Vitória não reconheceu valor a esta chamada de atenção e cometeu algumas imprudências:

V- A tua expressão tem algum λ contido na mesma?
D- A resposta à tua pergunta é sim… mas olha que tens de ter cuidado com essas perguntas.
V- Porquê?
D- Porque imagina que a carta mistério é uma reta ou um segmento de reta mas está representada de outra forma… Olha como esta carta aqui do tabuleiro [mostra $x = 1 \wedge y = 2 \wedge -3 \leq z \leq -2$]. A professora avisou que as cartas não são todas iguais.
V- Ah ok…

Imediatamente na questão seguinte, volta a não ter em consideração o conselho da colega e coloca novamente uma questão cuja resposta não lhe permite determinar as cartas que deve retirar. Desta vez, o grupo não permite que reformule a questão e é penalizada:

V- A tua expressão é uma expressão paramétrica? Não, um sistema de equações paramétricas?
D- Já te disse, isto pode estar representado de maneira diferente
V- Não faz mal…
D- Faz mal faz!
V- Pois faz, ok. Então…
G- Agora não podes mudar de pergunta, já te tínhamos avisado.
V- Mas assim demora muito tempo e eu já me sinto a perder!

No decorrer dos jogos, Vitória ouve com muita atenção o que as colegas falam entre si e muitas vezes intervém no sentido de compreender melhor os conteúdos envolvidos nessas conversas. Esta sua curiosidade permite-lhe ir adquirindo conhecimento que transporta para jogos futuros. Um exemplo disso acontece quando Gabriela quer formular uma pergunta sobre os segmentos de reta, Daniela aconselha-a a questionar acerca dos extremos dos segmentos e Vitória, atenta na conversa, questiona Daniela:

V- Não percebi… O intervalo onde varia o λ pode ser diferente e termos representações do mesmo segmento?
D- O que eu estou a dizer é…
V- O λ é a quantidade de vezes que o vetor diretor estica… é por isso?
D- Sim, mas dois segmentos de reta são iguais se têm os mesmos extremos certo? Mas podes ter equações diferentes, porque os vetores diretores podem ser colineares…
V- Sim… Mas se forem diferentes… se tens um ponto… pode ser um extremo e depois adicionas o vetor diretor… em equações diferentes se o ponto for o mesmo e os vetores diretores diferentes… colineares, não vão ser os mesmos segmentos!
D- Se o intervalo onde variar o λ for o mesmo tens razão, mas se for diferente pode representar o mesmo segmento, basta que o intervalo faça com que os extremos sejam os mesmos. [Daniela escreve um exemplo numa folha].
V- Que cena, nunca tinha pensado nisto.

No terceiro jogo, Vitória evidencia já conseguir diferenciar com pormenor todos os objetos matemáticos presentes no jogo. Agrupa as cartas segundo os objetos matemáticos que representam e explica à investigadora como organizou o tabuleiro (ver fig. 9):

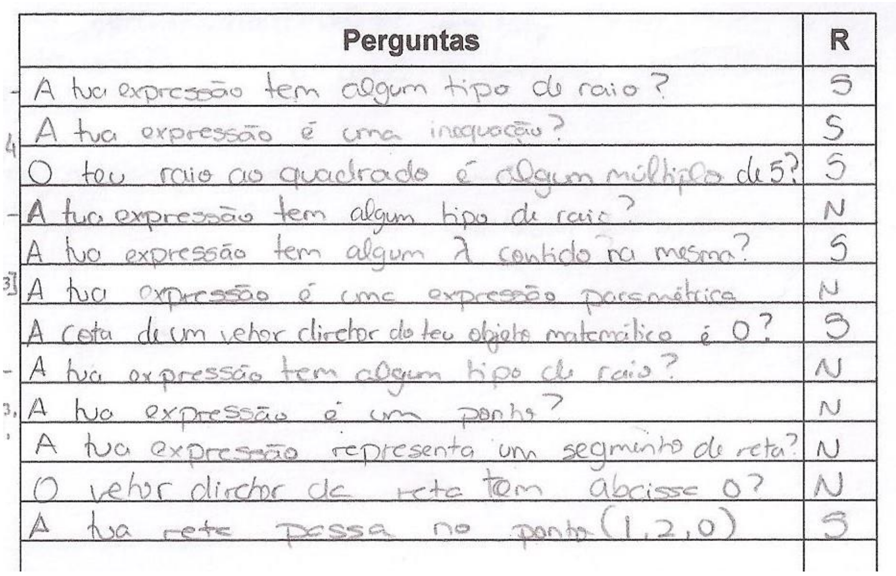
I- Só tens dois segmentos de reta?
V- Só…
D- Como assim? Eu tenho quatro!
V- Oh não liguem, estão aqui atrás os outros dois. Pensava que tinha mudado os segmentos de reta de sítio e esqueci-me destes!

Figura 9: Disposição das cartas no tabuleiro de Vitória no último jogo.

Numa das situações do jogo, Vitória ajuda Gabriela a formular uma questão sobre as retas. Neste diálogo é possível perceber que a aluna compreende que para definir a equação vetorial de uma reta podem ser usadas coordenadas de qualquer vetor diretor dessa reta e que caso as coordenadas do vetor diretor consideradas na representação da reta na carta da colega sejam diferentes, basta verificar se ambos os vetores são vetores colineares:

> G-Que tipo de perguntas te posso fazer sobre as retas?
> V-Sobre… se passa num determinado ponto ou sobre o vetor diretor, por exemplo…
> G-Mas eu posso pensar uma coisa, mas pode ser colinear, ela responder-me outra e depois estou errada…
> V-Não, eu é que estou errada. Eu é que fico com menos um ponto se não responder bem.
> D- Mas o que ela está a querer dizer é que se as cartas forem diferentes…
> G-Exato!
> V-Se ela me perguntar se um vetor é vetor diretor da reta, eu é que tenho que ver ser é ou não… qual é a dúvida?
> G-Então eu posso perguntar se o vetor diretor é tal, tal e tal?
> V-Um dos [vetores diretores]… sim!
> G-E ela tem que fazer as contas porque pode não estar igual.
> V-Sim, sou eu.

Durante toda a sessão, Vitória manifesta que o que lhe importa é ganhar e que não gosta nada de perder. Esta atitude leva-a a pensar ponderadamente sobre as questões que formula para tentar eliminar o máximo de cartas do seu tabuleiro (ver fig. 10).



Perguntas	R
A tua expressão tem algum tipo de raio?	S
A tua expressão é uma inequação?	S
O teu raio ao quadrado é algum múltiplo de 5?	S
A tua expressão tem algum tipo de raio?	N
A tua expressão tem algum λ contido na mesma?	S
A tua expressão é uma expressão paramétrica	N
A cota de um vetor diretor do teu objeto matemático é 0?	S
A tua expressão tem algum tipo de raio?	N
A tua expressão é um ponto?	N
A tua expressão representa um segmento de reta?	N
O vetor diretor da reta tem abcissa 0?	N
A tua reta passa no ponto (1,2,0)	S

Figura 10: Perguntas formuladas por Vitória.

Apesar de no início do primeiro jogo não identificar alguns dos objetos matemáticos, com o decorrer das partidas e ouvindo as discussões entre as colegas, recorda os conteúdos e joga em conformidade. É no seu discurso que a aluna comete mais falhas, sendo evidente o desprendimento com o rigor matemático, característico de uma conversa entre colegas na ausência de uma avaliação.

No final da sessão, a investigadora faz algumas perguntas a Vitória, no sentido de perceber qual a influência que a organização do tabuleiro e a escolha da carta mistério teve no seu jogo:

> I- A organização que deste às tuas cartas no teu tabuleiro ajudou-te?
> V- Sim, principalmente no que toca à rapidez, à fluência do jogo e continuamento do raciocínio.
> I- E quanto à tua carta mistério, como é que a escolheste?
> V- Ah aí foi sempre aleatoriamente, porque não consegui perceber quais as cartas que necessitavam de mais perguntas para se descobrir.

A aluna refere ainda que o ponto forte deste jogo está no facto de proporcionar "o desenvolvimento de novos raciocínios e maneiras para perceber e, de certa forma, relembrarmo-nos de expressões que representam objetos matemáticos". Além disso, a aluna acrescenta que o jogo contribuiu para a sua aprendizagem: "através de questões que eu posso fazer a mim própria em situações de escolha múltipla, para exclusão de opções, o que até pode ser útil em questões de resposta aberta".

Por fim, a aluna assume que a prática dos jogos tornou a sua aprendizagem mais significativa e marcante:

> V- Eu tenho um problema. É que às vezes esqueço-me rapidamente do que damos nas aulas, mas por exemplo, quando se fala de alguma coisa que seja diferente, como uma piada sobre a matéria ou alguma coisa engraçada, eu disso não me esqueço. E eu acho que aprender com este jogo e com o outro também, marcou-me e parece-me que não me vou esquecer do que falámos e principalmente daqueles momentos mais difíceis porque foram os que me deram mais luta.

4.3.4. Construção do jogo

O grupo onde se inclui Vitória decide construir um jogo a que chama *O Resgate Naval*, tendo por base o conceito do jogo *Batalha Naval*. A ideia partiu da aluna e foi desde logo aceite e desenvolvida pelo grupo.

> V- A minha ideia foi sob pressão, saiu… baseado na batalha naval. Por exemplo cada pessoa tem um número de funções e têm de dizer o domínio e etc…. a pessoa que tem as funções dá pistas… por exemplo o contradomínio é bla e é bijetiva.

Neste jogo, os oponentes têm que colocar dois barcos nas quadrículas que contenham representações da mesma função ou onde se possa relacionar as funções (exemplo: função e a sua inversa), sendo que os dois barcos ocupam duas e três quadriculas respetivamente.

Neste sentido, o jogo criado pelo grupo de Vitória exige que os jogadores explorem todas as funções do seu tabuleiro antes mesmo de colocarem os barcos pois tem como regra não colocar um barco de duas quadrículas onde exista a hipótese de relacionar três quadrículas.

Durante a construção do jogo, a aluna tem uma participação bastante ativa e sugere diversas ideias. O grupo constitui conjuntos de dois ou três elementos com diferentes representações de uma função ou com funções que tenham algum tipo de relação. Cada conjunto representa um barco, tal como na *Batalha Naval*:

> V- Se quisermos ser maus… temos uma função g que tem um domínio e depois temos a função inversa g^{-1} e o domínio da g^{-1} é igual ao domínio de outra função f… ou seja o contradomínio da g é igual ao domínio da f.

Enquanto constroem o jogo, Vitória explora os diferentes conteúdos dados nas últimas aulas. A aluna quer construir funções com diferentes caraterísticas para que o jogo se torne mais interessante e para isso vai propondo alternativas. No diálogo seguinte as alunas estavam a construir uma função representada através de um diagrama de setas:

> V- Fazemos o contradomínio diferente do conjunto de chegada? Assim ficamos com uma não sobrejetiva…
> D- Sim.
> V- Tipo… contido. Então temos que pôr mais que quatro números [no conjunto de chegada].

Quando a função é representada através de um diagrama de setas, mostra saber caraterizá-la segundo a sobrejetividade. No entanto, aquando da construção da representação gráfica de uma função afim, o grupo considera a restrição da função inicial a um subconjunto do respetivo domínio e surgem dúvidas em Vitória quanto à sobrejetividade da nova função:

> D- Olhando só para o gráfico da função não conseguimos saber se é sobrejetiva, pois não?
> V- Sobrejetiva? É! Não há nenhuma linha horizontal! Não me digam que estou a trocar a sobrejetiva com a injetiva. Estou, não estou?
> D- Não, não é sobrejetiva porque nem todos os elementos daqui estão aqui…
> V- Sim claro, definimos o conjunto de chegada em ℝ e o contradomínio é de 4 a 4,5. Logo não são iguais.
> G- Mas só olhando para o gráfico, sabes se é?
> V- Ah, assim não, tu não sabes o conjunto de chegada através do gráfico, só o contradomínio. Quer dizer, mas se não disserem nada, supões que é ℝ e assim sabes que não é sobrejetiva.

Devido à falta de espaço nas quadrículas do jogo para incluir muitas representações gráficas, o grupo de Vitória decide que podem acrescentar ao jogo domínios de funções. Neste momento, a aluna usa a sua criatividade e simultaneamente conhecimento matemático para primeiro elaborar uma função ($f(x) = \frac{\frac{4}{3}x-2}{\sqrt{x}}$) que segundo a aluna "não fosse imediato" descobrir o seu domínio e depois construir uma função que atendesse ao domínio que o grupo sugere.

V- Aqui o domínio só pode ser $\mathbb{R}^+$…
D- Sim, por causa do denominador.
V- Porque se for zero não tem significado. Mas agora convém não termos outra função com este domínio para que também não fique muito complicado descobrir onde estão os barcos. Podemos fazer a seguir com $\mathbb{R}_0^+$ ... ou então $\mathbb{R}_0^-$ se no denominador tivesse uma $\sqrt{-2x}$.
D- Então tira o zero…

Também nesta sessão Vitória sente a necessidade de envolver as suas colegas na atividade e para isso garante que compreendem os seus raciocínios. No seguimento do diálogo anterior em que Gabriela se mostra pensativa e não participa, Vitória questiona-a enquanto vai escrevendo as suas ideias na folha (ver fig. 11):

V- Sim, assim também não pode ser zero. Gabriela estás a perceber?
G-Sim…
V- Então porque é que não pode ser zero?
G- Porque se fosse zero a fração não tinha significado.

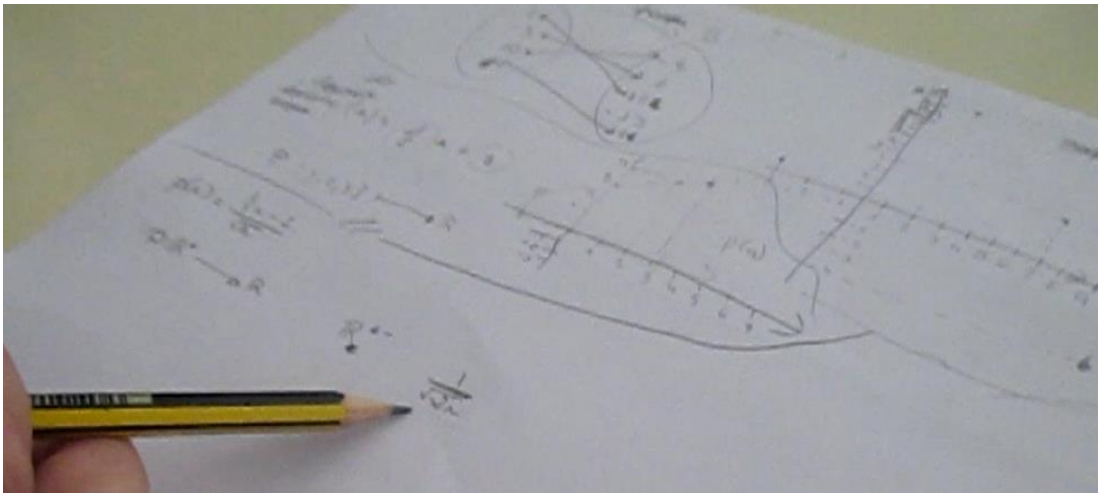


Figura 11: Folha de rascunho onde o grupo esboça as ideias para o jogo.

A aluna entretanto confunde o radical da raiz do seu denominador, fazendo uma afirmação inválida no contexto da raiz original, mas dá de imediato conta do seu erro. A investigadora pede-lhe para explorar essa nova função. Vitória fica por momentos a pensar e escreve corretamente o domínio da função que tinha pensado:

V- Nem é a fração, é antes a raiz… Ah não, esqueçam, estava a pensar como se fosse $-2 + x$.
I- E nesse teu caso, qual seria o domínio?
V- Hum… de 2 aberto até infinito.

Outra das sugestões que Vitória faz é que se possa incluir no jogo os conteúdos aprendidos em Geometria e relacioná-los com funções.

V- Por exemplo se tivermos uma função que graficamente é uma reta… tipo… uma função afim, em vez de fazermos o gráfico colocamos a equação vetorial.

G- Parece-me uma ideia bastante gira. Então desenhamos primeiro o gráfico de uma função dessas e depois escrevemos a função e a equação vetorial.

Para a construção do jogo, Vitória e o seu grupo vão esboçando numa folha de rascunho todas as funções, estando para isso o grupo à volta de uma mesa a trabalhar em simultâneo. Na figura 12 verifica-se Vitória a confirmar o declive da reta que corresponde ao gráfico da função construído por Gabriela. A motivação, entusiamo e interesse que a construção do jogo desperta em Vitória fazem com que esta contagie os restantes elementos do grupo e também estes estejam absorvidos pela tarefa. As diferentes situações que o grupo vai criando no jogo, permitem que Vitória desenvolva a sua criatividade, capacidade de trabalho em grupo e sentido crítico.

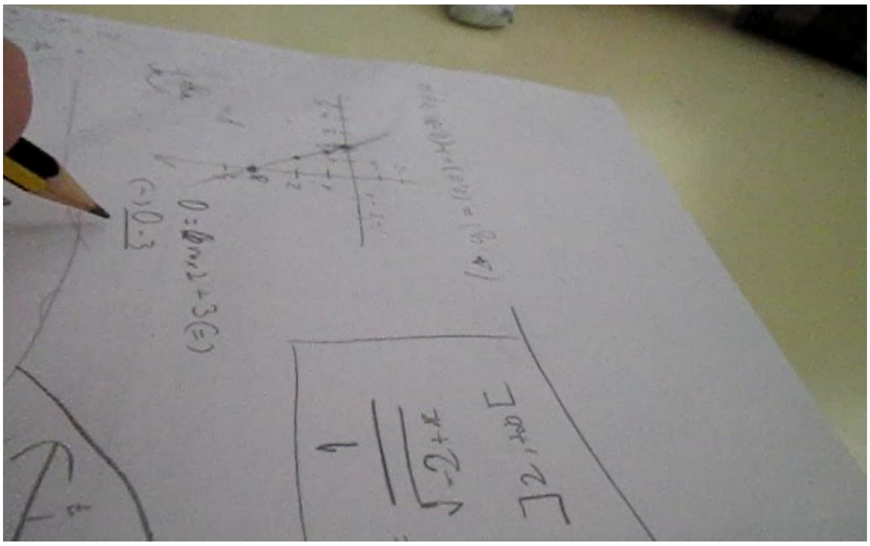


Figura 12: Vitória a trabalhar na folha de rascunho do seu grupo.

Após toda a planificação, o grupo de Vitória elabora o jogo que se apresenta na figura 13. A aluna encara a construção desta ferramenta como um projeto sério, que lhe desperta muito interesse e por isso autonomamente escreve uma história que carateriza o jogo (ver anexo 10).

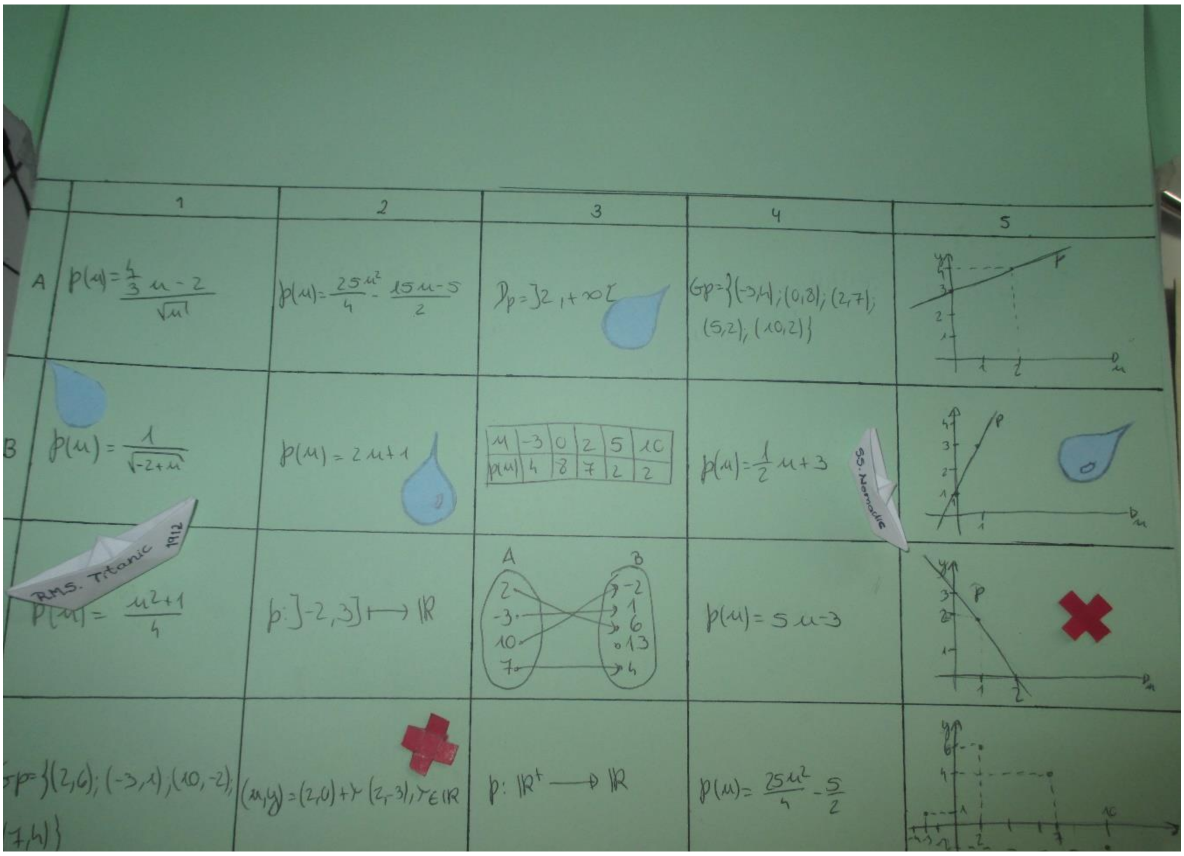


Figura 13: O Resgate Naval.

4.3.5. Considerações finais

- **Aprendizagem e desenvolvimento de capacidades matemáticas**

A prática do *Polygame* permite a Vitória em especial recordar o conceito de zero de um polinómio e consolidar o conhecimento que tem sobre divisibilidade de polinómios. A sua estratégia passa por escolher primeiro os polinómios que considera menos difíceis de explorar, o que confere ao seu jogo níveis de dificuldade progressiva. Isto permite que ganhe familiaridade com os conteúdos e que construa gradualmente as capacidades necessárias para novos desafios. Além disso, o facto de o jogo exigir que justifique as suas jogadas aliado às interações com as colegas do grupo provocam discussões que estimulam novas descobertas e permitem que construa um conhecimento mais sólido. Ao falar e ouvir as colegas, clarifica os significados das palavras, apropria-se aos poucos da linguagem matemática e desenvolve raciocínios mais complexos.

No *Qual é Qual?* assiste-se à evolução dos seus conhecimentos através da organização que dá às suas cartas. Apesar de no início do primeiro jogo não identificar alguns dos objetos matemáticos, com o decorrer das partidas, ouvindo e participando nas discussões do grupo, recorda os conteúdos.

Em ambos os jogos, apresenta no seu discurso alguns erros de caráter científico e tem algumas expressões-chave que usa com regularidade como por exemplo “polinómio da forma $x - \alpha$”. É ainda evidente o desprendimento com o rigor matemático, característico de uma conversa entre colegas na ausência de uma avaliação. No entanto, ao longo dos jogos desenvolve diálogos mais longos e complexos, relacionando conceitos e aprofundando o seu conhecimento.

- **Cooperação versus competição**

No caso de Vitória, o objetivo do jogo passa essencialmente por ganhar, demonstrando um sentido competitivo apurado nos dois jogos. A aluna assume diversas vezes que não gosta de perder e em algumas situações a ansiedade provocada por querer ganhar prejudica o seu jogo. Por outro lado, também é esta atitude que lhe permite no *Polygame* desenvolver a capacidade de analisar as cartas das suas colegas com o objetivo de lhes dificultar o jogo. Para isso necessita articular simultaneamente as diferentes combinações que as suas colegas poderão fazer, progredindo obviamente na rapidez de raciocínio, e retirar da mesa cartas que lhes interessam.

Ao nível da cooperação, os jogos permitem que o grupo onde se inclui Vitória se entreajude perante as adversidades encontradas. Mesmo sendo muito competitiva, em alguns momentos contribui para a aprendizagem do grupo, principalmente por sentir a necessidade que as suas colegas compreendam os seus raciocínios.

- **Momentos do jogo**

Segundo Vitória, é quando tem que se expressar matematicamente que sente maiores dificuldades, referindo que se sente mais confortável quando o pode fazer através da escrita. Ainda assim, admite que ao longo dos jogos esta dificuldade foi sendo reduzida.

Ao nível das regras, compreende rapidamente qual a dinâmica dos jogos, embora seja influenciada pela competição para tentar ultrapassar algumas das regras. Inclusive no *Qual é Qual?*, a aluna tem a noção que existem representações diferentes do mesmo objeto entre as cartas do tabuleiro e as cartas mistério e mesmo assim prefere formular questões com base no tipo de representação para excluir um maior número de cartas, sabendo que corre o risco de perder o jogo.

Nas restantes fases de jogo, a aluna apresenta um comportamento regular e sem qualquer aspeto merecedor de ser salientado.

- **Construção do jogo**

Durante a construção do jogo, a aluna tem uma participação bastante ativa e constantemente contribui com ideias. Vitória explora os diferentes conteúdos dados nas últimas aulas e o seu entusiasmo contagia as suas colegas. Coloca como desafio construir um jogo que inclua funções com diferentes caraterísticas para que se torne mais interessante e desafiante, enquanto cria, investiga e carateriza as funções que vai propondo, testando assim os seus conhecimentos. Ao mesmo tempo, desenvolve as capacidades de comunicar, argumentar, representar e elaborar estratégias como é o caso em que constrói uma função sabendo à partida o seu domínio.

4.4. Simone

4.4.1. Caraterização de Simone

Simone tem 17 anos e está a repetir o 10.º ano. Nas aulas nunca coloca questões ou faz qualquer comentário aos assuntos tratados, não interage com os colegas e parece estar distanciada da turma. Raramente realiza os trabalhos de casa e ao longo do ano obteve nota negativa em todas as avaliações. A aluna admite estar desmotivada, querer mudar de curso e que só vai à escola porque é obrigada.

No questionário, revela não gostar muito de Matemática, em particular de certas matérias. Quanto a dificuldades de aprendizagem, a aluna salienta que a sua maior fragilidade está na "interpretação de exercícios". Diz nunca ter jogado nenhum jogo em contexto de sala de aula, mas pensa ser uma forma interessante de aplicar os conhecimentos. Além disso, pensa ser possível aprender Matemática a jogar pois a motivação que se tem para querer ganhar e o facto de ser divertido são razões que o justificam. Atualmente não dedica qualquer tempo à prática de jogos, embora indique gostar de xadrez.

No presente ano letivo, obteve 8 valores no 1.º período, no 2.º período 6 valores e na ficha de avaliação realizada no 3.º período 5 valores.

4.4.2. Jogo 1 – Polygame

No primeiro jogo e após serem explicadas as regras e a sua dinâmica à turma, Simone voluntaria-se de imediato para ser poly, sendo-lhe atribuído pelo grupo esse cargo. No quadro, a professora simula algumas jogadas e Simone mostra-se muito atenta.

Logo que as cartas são colocadas na mesa, retira uma carta azul e começa a comparar a carta com as da sua mão. De seguida, ouve atentamente o esclarecimento de uma dúvida de Tatiana e participa no primeiro diálogo do grupo:

> T- Este aqui só é divisível por este quando tem… quando era ao quadrado só era divisível pelo fator ao quadrado ou pelo próprio fator…
> J- Não pode é ser superior…
> S- Então esse dá!
> J- Sim, esse dá, esse dá!

Através das respostas das suas colegas às questões que coloca, vai retirando a informação necessária para conseguir jogar. Nos diálogos entre as alunas é possível notar pouco rigor matemático e algumas vezes mesmo erros científicos.

Repostas novas cartas na mesa, retira mais uma carta azul e devolve à mesa a carta verde $(x-9)(x+8)$ que combina com a sua primeira carta azul $P(x)=(x-3^2)(x+2^3)$. Continua a analisar as suas cartas e coloca uma questão ao grupo. No seguinte diálogo pode-se verificar como a falta de rigor na comunicação que as alunas inicialmente impõem no seu discurso pode influenciar a aprendizagem de Simone:

> S- Pessoal isto quando tem duas raízes simples é como?
> T- É o expoente ao quadrado.
> S- Mas têm que estar os dois ao quadrado, não pode ter tipo ao cubo? [refere-se a $P(x)=(x-3^2)(x+2^3)$]
> T- Duas raízes simples… não esquece. Tens de ter uma raiz num fator e outra raiz noutro fator. É isso não é? Sem expoentes!
> J- Têm que ser diferentes.
> T- Duas raízes diferentes em cada fator, mas sem expoentes.
> S- Ok, isto não me interessa então.

Na ronda seguinte, observa as cartas na mesa e recolhe uma carta azul e a sua respetiva carta verde. A aluna mostra-se sempre muito atenta e é capaz de identificar combinações entre as cartas colocadas na mesa, o que favorece a sua forma de jogar. Entretanto a sua colega Juliana realiza um polygame, a investigadora questiona o grupo sobre a carta verde e Simone envolve-se mais uma vez na discussão:

> I- Se dividissem o polinómio $(x-5)^3$ por $(x-5)^2$, quanto iria ser o quociente?
> S- $x-5$ [diz rapidamente]
> J- Exato…
> I- Neste caso, quando multiplicamos o polinómio divisor pelo quociente obtemos o dividendo, certo? E se for pelo produto com 10?
> S- Tem que dar o dividendo…mas…
> I- Sim! Queres que repita a pergunta?
> S- Sim…

A investigadora tenta recomeçar o raciocínio e Simone não o permite, mostrando-se ansiosa para chegar a uma resposta:

S- Sim, não é preciso, essa parte já percebi. Neste caso aqui…
T- O quociente fica também a multiplicar por 10?
S/J- A dividir por 10! [as alunas riem-se]
S- Os 10 cortam e dá o dividendo outra vez.
J- Ah e não é preciso somar nada… por isso o resto é zero.

No seu primeiro polygame, Simone faz uma explicação apressada das suas opções. A investigadora questiona-a sobre uma das suas escolhas e a aluna mostra não compreender o conceito de zero apesar de ter conseguido combinar a carta rosa. Durante a discussão, Tatiana dá-lhe uma pista que a ajuda no seu raciocínio:

S- Então… É divisível por este porque tem os dois fatores. Tem multiplicidade 1, 2, 3 porque 1, 2, 3 [aponta para os expoentes dos fatores] e os zeros [aponta para os zeros].
I- Porque é que são esses os zeros?
S- Porque se forem substituídos por x dá 0.
J- É isso, é isso!
I- O que é que dá zero? Não estou a perceber…
S- Os fatores!
I- Ou seja, se substituir o x por -3, o $x+2$ é 0, é isso?
S- Não, o -3 fica aqui [aponta para $x+3$] e depois vai dar 0, o -2 fica aqui [aponta para $x+2$] e depois vai dar 0 e o $\frac{1}{2}$ fica aqui [aponta para $x-\frac{1}{2}$] e vai dar 0.
I- Fazes isso tudo ao mesmo tempo? Então é P de quanto?
S- Não! A professora está a baralhar tudo! Hum…
I- $P(-3)$ quanto é?
S- Vai dar 0 no primeiro…
T- Pensa no sinal que está entre os fatores…
S- É vezes é verdade! É 0.
I- Então e $P(-2)$?
S- Aqui vai ficar zero e depois como está tudo a multiplicar, fica zero.

A postura de Simone durante o jogo em nada se assemelha à que as suas colegas estão habituadas em contexto de aula. A aluna partilha o seu ponto de vista em todas as discussões e vai mostrando a evolução dos seus conhecimentos através dos raciocínios que expressa. Além disso, mostra ir controlando as cartas que passam pela mesa, o que lhe permite otimizar a sua estratégia, escolhendo combinar polinómios cujas cartas correspondentes ainda não saíram do baralho. A investigadora aconselha Tatiana a pedir ajuda às suas colegas na descoberta dos zeros do polinómio $P(x)=\left(x-\sqrt{3}\right)^3(x^2+1)$ e Simone ajuda-a tanto ao nível da compreensão dos conteúdos como de estratégia de jogo:

I- Quais são os teus zeros?

T- -1 e $\sqrt{3}$… ou será 3? Ah, não está aqui um x^2… isto vai ficar $(x-1)(x+1)$ não é?
J- Eu acho que é só $\sqrt{3}$, porque o outro fator não tem zeros.
S- Eu também acho que não tem, se fosse -1 como está ao quadrado ia ficar 1 na mesma e não ia dar 0. E já passou a carta com $\sqrt{3}$ no principio…
T- Pois, parece que descobri a pólvora e a $\sqrt{3}$ foi lá para baixo e nunca mais vai sair de lá… [as alunas riem-se].

Numa das partidas seguintes, o grupo de Simone coloca as cartas das suas mãos na mesa. Simone observa as cartas das suas colegas e começa a jogar também em função das mesmas. Ainda assim, continua a fazer comentários no sentido de auxiliar a estratégia das colegas que se mostram surpreendidas por Simone conseguir entrar também nos seus jogos:

S- Juliana acho que deixaste escapar uma carta verde…
J- Como?
S- Vê lá… [voltam a colocar a anterior rodada na mesa]
J- Ah pois foi! Nem vi.
T- Bem estás forte Simone, quem me dera ter essa atenção toda ao meu jogo.
J- E eu que o diga!
S- Se quiseres troca a carta, por mim não há problema.

Outra estratégia que desenvolve ao longo das partidas passa por, sempre que possível e quando inicia a procura por um novo polygame, criar combinações de polinómios distintos simultaneamente com o objetivo de na ronda seguinte ter maior probabilidade de sair uma carta que combine com um dos seus dois polinómios (ver fig. 14).

Figura 14: Combinação de dois polinómios em simultâneo.

No final da sessão, Simone assume gostar muito do jogo, carateriza a sua experiência como bastante positiva para a sua aprendizagem e as suas colegas comentam a postura de Simone durante o jogo:

S- Eu nem sabia que podia alguma vez vir a entender isto…
I- E porque é que pensas que agora entendes?
S- Sinceramente acho que nem me apercebi que estava a aprender. Como estava a gostar tanto do jogo e queria ganhar á Juliana, acabei por aprender bastante, o que foi muito bom.
T- Eu acho que nunca te tinha ouvido a falar tanto.
J- Nem eu! Se é preciso jogares, para falar, então temos que jogar mais vezes!
T- E já estavas a ficar pró no jogo.

4.4.3. Jogo 2 – Qual é Qual?

Na primeira partida, Simone inicialmente coloca aleatoriamente os seus cartões no tabuleiro embora diga que a sua ideia é durante o jogo conseguir conhecer melhor as suas cartas para na próxima partida "meter os mais parecidos num só lado". Enquanto aguarda que as suas colegas posicionem as cartas, a aluna começa também a agrupar as cartas segundo as semelhanças que encontra:

S- Estas aqui têm todas um sistema, estas têm todas o P, estas têm (x, y, z), esta coluna têm todas 5 ou 25 no segundo membro e são parecidas e estas são as que restam.

Antes de iniciarem o jogo, Simone admite não ter ideia do que representam cada uma das cartas do seu tabuleiro e em tom de brincadeira pede ajuda à Juliana.

S- Olá Julianaaa! Podias ajudar-me por favor?
J- Olá! Claro, diz.
S- Não, vais-me ajudando ao longo do jogo pode ser? É mais fácil.

Através da ajuda que as colegas lhe vão dando, Simone vai conseguindo aos poucos identificar os objetos matemáticos nas suas cartas e jogar com competência. Na primeira partida, a sua carta mistério é $P(1,3,1)$.

J- Simone a tua carta mistério é uma superfície esférica?
S- Não… [hesitante] Não é, pois não?
T- Não, é um ponto [ao ouvido].

Percebendo que a sua carta mistério contém a representação de um ponto e julgando assim saber identificar todos os pontos presentes nas suas cartas, utiliza essa informação para questionar a colega sobre a hipótese do objeto matemático que procura também ser um ponto. Ainda assim, através da pergunta que faz percebe-se que não reconhece que os pontos presentes no jogo incluem-se na geometria espacial:

S- Tatiana a tua carta mistério é um ponto no plano?
T- No plano? Não.

J- Estamos no espaço Simone.
T- Eu percebi o que ela quis dizer.

Simone apenas retira as três cartas que contêm os pontos representados pelas suas coordenadas, deixando no tabuleiro a carta com $x = 1 \wedge y = 3 \wedge z = 1$. Através da sua questão seguinte, acaba por excluir esta carta por ter a certeza que não se trata de uma esfera.

S- É uma esfera?
T- Sim.

Ainda assim, Simone deixa as cartas que representam esferas e superfícies esféricas no tabuleiro. Na ronda seguinte, responde a Juliana acerca das coordenadas do ponto da sua carta mistério e mostra incerteza acerca do significado de abcissa.

J- O ponto tem abcissa 1?
S- A abcissa é o x não é?
J- É!

Na formulação da sua última questão para Simone, revela não compreender a inequação cartesiana da esfera mas, com a ajuda de Juliana, começa a fazer progressos:

S- É menor ou igual que 25 a… hum… a área da esfera? Eu não sei… Juliana…
J- Não, isto aqui é o raio ao quadrado.
S- Ao quadrado?
J- Sim r ao quadrado.
S- Ah afinal isto aqui é o raio. Então aqui é 5. Mas e nesta? Tem aqui já 5.
J- É raiz de 5 assim.
S- Não fazia ideia disto. Ando mesmo a leste! [a rir-se]

Na ronda seguinte, Simone não formula uma questão pois Juliana mostra a carta a que chegou e vence o jogo. Pela rapidez com que decorreu o primeiro jogo, Simone não consegue identificar as diferentes representações de um ponto e não chega a perceber a diferença entre esfera e superfície esférica.

Do primeiro para o segundo jogo, a organização que dá às suas cartas não apresenta uma evolução significativa, apesar de agora identificar as três cartas com P como sendo representações de pontos.

S- Desta vez coloquei os [três] pontos aqui nesta coluna e o resto do género de à pouco.

Mais à frente, a pergunta que faz a Tatiana obriga-a a identificar as cartas que contêm representações de segmentos de reta. Pede ajuda a Juliana, que lhe dá uma explicação intuitiva e pouco rigorosa, mas que lhe garante o jogo:

S- É um segmento de reta?
T- Não.

S- Juliana ajuda-me quais é que são segmentos?
J- Esta, esta e esta [três cartas].
S- Porquê?
J- Porque tens um intervalo. Se pertencesse a $\mathbb{R}$ era uma reta, não tinha início nem fim, mas aqui tu tens um início e um fim [aponta para o intervalo]. Digamos assim.

Apenas retira as cartas que Juliana lhe indica. Na ronda seguinte questiona Tatiana sobre a possibilidade de ser um reta, o que lhe é confirmado. Quando está a retirar as cartas, pede mais uma vez ajuda a Juliana para identificar uma carta. Ao ouvir o diálogo entre a investigadora e a colega, a aluna consegue compreender que a interceção entre três planos resulta num ponto:

S- Isto aqui é uma reta? [$x = 1 \wedge y = 2 \wedge -3 \leq z \leq -2$]
J- É…
I- Porquê?
J- Porque…Este representa um plano… $x = 1$ que se intercepta com outro plano $y = 2$… isso é uma reta. Pois, intersetado com isso… ah é um segmento de reta.
I- E se lá estivesse $x = 1 \wedge y = 2 \wedge z = -3$?
S- Um ponto…

Retira as cartas corretamente, entretanto Tatiana vence o jogo e Simone não pode formular mais nenhuma questão acerca da reta que procura.

No terceiro jogo, Simone já consegue formar no seu tabuleiro o conjunto dos pontos, dos segmentos de reta e das retas e reúne num só conjunto as esferas e superfícies esféricas, agrupando-as segundo o seu raio. Nos três jogos escolhe sempre pontos para a carta mistério e admite fazê-lo pela facilidade que tem em responder às questões sobre as mesmas.

Nesta partida, apenas com uma questão consegue descobrir o tipo de objeto que procura:

S- É um ponto no espaço?
T- É!
S- Yes!

Na pergunta seguinte, reformula a sua questão sem razão aparente. Simone tem no tabuleiro quatro cartas com pontos, em que apenas um tem cota ímpar e por isso a mudança de questão não lhe permite excluir mais cartas:

S- Tem cota 1? Não, não, tem cota ímpar?
M- Não.

Retira a carta corretamente e restam-lhe três pontos, em que dois têm ordenada igual a -3. A aluna formula a sua questão em função dessa conjuntura e consegue vencer o jogo.

S- O y é -3?
T- Não.

I- Outra forma de perguntares?
S- A ordenada é -3?

No quarto jogo, Simone mantém a organização do seu tabuleiro e escolhe um segmento de reta para carta mistério. Por continuar a não fazer distinção entre esferas e superfícies esféricas, quando Tatiana lhe responde que não é uma esfera, a aluna retira as esferas e as superfícies esféricas do seu tabuleiro. Após duas perguntas em que percebe que o objeto matemático que procura não é um ponto nem um segmento de reta, a pergunta de Juliana faz reconsiderar as suas opções:

J- É uma superfície esférica?
S- Não… ah calma lá…
J- Então?
S- Tenho estado a pôr esferas e superfícies esféricas no mesmo saco.

Apenas com cartas com representações de retas no tabuleiro, percebe que se precipitou e excluiu as superfícies esféricas. Para contornar o problema questiona Tatiana, não se percebendo se reconhece a diferença entre esfera e superfície esférica:

S- É uma superfície esférica?
T- Não.
S- Pois, que sorte!

Excluídas todas as hipóteses, a aluna conclui que é uma reta e constrói questões sobre as possíveis retas que podem estar representadas na carta mistério:

S- Passa num ponto com ordenada 2?
T- Sim.

A aluna considera apenas as retas que têm 2 como ordenada do ponto considerado na equação vetorial ou no sistema de equações paramétricas e por isso retira cartas incorretamente tendo em conta a resposta de Tatiana à sua pergunta. Como a carta mistério contém a equação vetorial da reta considerando o ponto da reta $(1,0,2)$, Simone por sorte continua com a carta mistério que procura no seu tabuleiro.

De seguida, reflete sobre a questão que Juliana lhe coloca acerca da carta mistério $(x, y, z) = (1,0,2) + \lambda(4,6,2), \lambda\epsilon[1,3]$ e a investigadora dá uma ajuda:

J- O segmento de reta é paralelo ao eixo do z?
S- Sim… Não, tem calma…Eu tenho que olhar para aqui [aponta para as coordenadas do vetor diretor da reta]. Hum…
I- Imagina que o teu eixo Oz está naquele canto da sala…
S- Sim, é isso que estou a fazer…
I- Para ser paralelo a esse eixo o que é que tem de acontecer?
S- Tem de ser um vetor que vá para cima…
I- Então qual o valor da primeira e segunda coordenadas?
S- Zero!

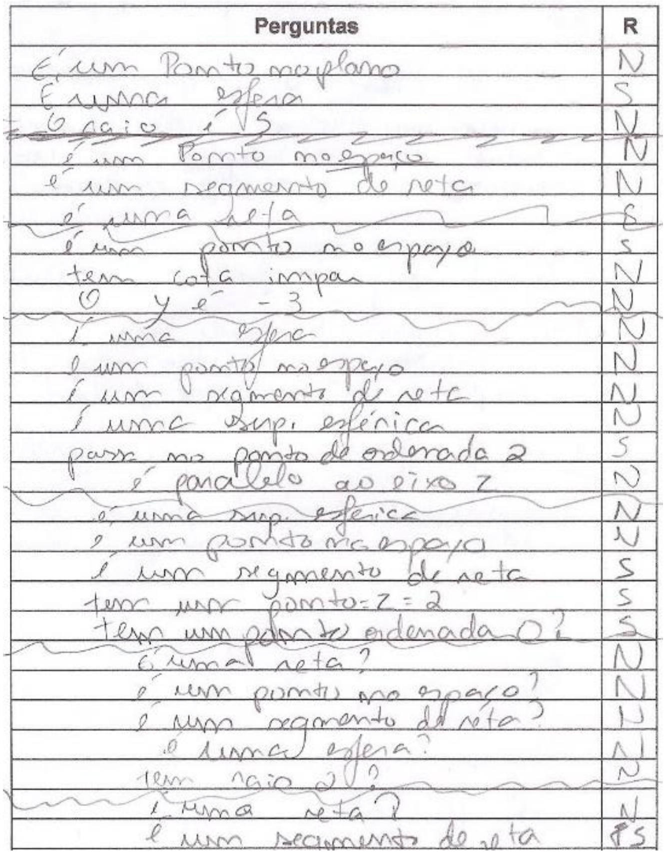
Com duas cartas no tabuleiro e baseando-se na questão que a sua colega lhe fez, Simone coloca a última pergunta e ganha novamente o jogo.

S- É paralela ao eixo das cotas?
J- Não.
S- Então a reta tem um ponto em (1,2,0) e vetor diretor (2,3,1)?
T- Sim.
S- Yes!

Através da figura 15 pode-se analisar o tipo de questões que Simone coloca ao longo do jogo. À semelhança do que todo o grupo faz, a aluna começa por descobrir primeiro o tipo de objeto matemático, formulando depois questões referentes às caraterísticas do objeto. Em algumas situações, coloca questões menos específicas mas nem sempre pondera o número de cartas que as suas questões permitem excluir.

No final da sessão, a investigadora coloca algumas questões a Simone sobre o jogo e a influência que tem na sua aprendizagem:

I- Pensas que a organização que deste às cartas no teu tabuleiro te ajudou no teu jogo?
S- A princípio não, porque não sabia bem o que eram. Mas assim que percebi o que eram, ajudou bastante.
I- Porquê?
S- Porque como já as conhecia, conseguia ver melhor que perguntas devia fazer e também que cartas devia tirar.
I- E qual a estratégia que tomaste na escolha da carta mistério?
S- Comecei por escolher aqueles que conhecia bem, para responder facilmente às perguntas do adversário, mas depois fui trocando para algumas diferentes que fosse mais difícil descobrir.
I- Quais os pontos fortes e a melhorar?
S- Acho que está bastante bem feito, criativo e fiquei a perceber melhor as caraterísticas destes objetos matemáticos. Podia ter cartas menos dolorosas e falta uma ou duas regras. Mas acho que resultou muito bem.
I- De que forma este jogo contribuiu para a tua aprendizagem?
S- Contribuiu bastante porque eu não sabia o que era o quê, mas depois do jogo já sei identificar bem esta parte do espaço.



Perguntas	R
É um ponto no plano	N
É uma esfera	S
O raio é 5	N
é um ponto no espaço	N
é um segmento de reta	N
é uma reta	S
é um ponto no espaço	S
tem cota impar	N
O y é -3	N
é uma esfera	N
é um ponto no espaço	N
é um segmento de reta	N
é uma sup. esférica	N
passa no ponto de ordenada 2	S
é paralelo ao eixo z	N
é uma sup. esférica	N
é um ponto no espaço	N
é um segmento de reta	S
tem um ponto z = 2	S
tem um ponto de ordenada 0?	S
é uma reta?	N
é um ponto no espaço?	N
é um segmento de reta?	N
é uma esfera?	N
tem raio 2?	N
é uma reta?	N
é um segmento de reta	S

Figura 15: Perguntas formuladas por Simone.

4.4.4. Construção do jogo

O grupo de Simone decide construir um jogo baseado no conhecido jogo do *Peixinho*, a que o grupo chama de *Funcinho*. Nesta sessão, a aluna volta ao comportamento que a carateriza durante as aulas, não se envolvendo na atividade que as colegas desenvolvem e permanecendo em silêncio a maior parte do tempo. Qualquer uma das suas colegas faz perguntas para o grupo, mas Simone apenas observa e mantém-se numa posição relaxada na sua cadeira.

No fim da sessão, a investigadora questiona Simone sobre o seu comportamento:

> I- Como te sentiste nesta sessão?
> S- Bem, acho.
> I- De que forma ajudaste o grupo a construir o jogo?
> S-Não ajudei muito.
> I- Porquê?
> S- Porque não percebo nada de funções.
> I- Mas nas outras sessões também começaste por ter muitas dúvidas e conseguiste dar a volta. Porque é que hoje foi diferente?
> S- É diferente. Eu gostei mais de jogar, é mais divertido. Para se fazer um jogo, eu tinha que saber melhor a matéria e não sei.

4.4.5. Considerações finais

- **Aprendizagem e desenvolvimento de capacidades matemáticas**

Nas sessões em que decorrem os jogos, Simone inverte a sua habitual postura em sala de aula. Mostra querer aprender os conteúdos envolvidos motivada por gostar de jogar e também pela vontade de querer ganhar à sua colega Juliana. Este interesse leva-a a não ter problemas em questionar o grupo quando necessita de ajuda e a tecer comentários nas diversas discussões.

No *Polygame* quando tem que justificar o seu primeiro polygame ao grupo, demonstra insegurança, fala demasiado depressa e através das questões que a investigadora lhe coloca nota-se que apesar de conseguir fazer ligações entre as cartas não compreende o significado de zero de um polinómio. Esta situação é provavelmente justificada pelo fraco investimento no estudo da disciplina, aliado à sua postura quase que ausente em sala de aula. É notável o progresso na sua aprendizagem ao longo da prática do jogo, não mostrando dificuldade em transportar o conhecimento adquirido de umas jogadas para outras e ainda, em realizar conexões entre as jogadas que as colegas fazem e as suas próprias jogadas.

No *Qual é qual?* o seu comportamento foi muito semelhante ao então visto no *Polygame*. Começa o jogo com poucos conhecimentos sobre os conteúdos envolvidos e é através da reflexão nas diferentes situações que o jogo implica associada à ajuda que as colegas lhe vão dando que Simone consegue no final do jogo identificar todos os objetos matemáticos presentes, organizando-os no seu tabuleiro.

- **Cooperação versus competição**

Ao nível da cooperação, nos dois jogos a aluna contribui e beneficia dos diálogos existentes ao longo das partidas. O grupo entreajuda-se sempre que algum elemento requer de ajuda e neste sentido Simone destaca-se no primeiro jogo por chamar a atenção de Juliana para uma carta que lhe interessava e no segundo jogo pelo apoio também de Juliana na determinação dos objetos matemáticos. Mesmo quando a investigadora questiona diretamente uma das alunas, é notório o esforço que o grupo faz para ajudar a mesma, indo fazendo pontes na construção do raciocínio.

Por outro lado, o seu espirito estratega e a vontade de querer ganhar à sua colega Juliana são fatores que motivam o seu envolvimento com o jogo e consequentemente a sua aprendizagem. Desta forma pode-se concluir que apesar do seu sentido competitivo apurado, este não reduz os benefícios que a prática do jogo pode propiciar na sua aprendizagem, pelo contrário, a aluna promove o desenvolvimento dos seus conhecimentos com o objetivo de alcançar o seu objetivo: ganhar.

- **Momentos do jogo**

Apesar do jogo não ser uma atividade que seja frequente na vida da aluna, não mostra problemas em compreender o objetivo e as regras dos jogos.

No *Polygame*, as dificuldades da aluna durante as partidas evidenciam-se principalmente quando tem que justificar corretamente os seus primeiros polygames. Apesar das suas combinações serem válidas e de jogar com competência, apresenta argumentos que têm por base a seu deficiente conhecimento sobre os conteúdos.

No *Qual é Qual?*, os seus fracos conhecimentos sobre geometria espacial levam-na a retirar incorretamente as cartas do seu tabuleiro e a necessitar de apoio das colegas para conseguir jogar. Apresenta muitas dificuldades em identificar os objetos matemáticos, não o conseguindo fazer autonomamente, o que influencia as suas jogadas nas primeiras partidas. De notar ainda, que apesar das dificuldades referidas, nota-se que ao longo das partidas a aluna consegue superar com algum sucesso as barreiras impostas pela sua condição.

- **Construção do jogo**

A sessão onde o grupo constrói o jogo, não provoca qualquer efeito na aprendizagem de Simone. Ao contrário do que acontece nas sessões anteriores, não se envolve na atividade e mantém-se à parte do grupo. A aluna justifica este seu comportamento por não possuir conhecimento sobre os conteúdos envolvidos, embora também fosse essa a sua condição nas sessões em que joga. Esta posição de Simone é possivelmente explicada pela motivação que encontra no ato de jogar, mesmo que para isso tenha que compreender conceitos que desconhece. Na construção do jogo, a aluna não tem um momento onde seja da sua responsabilidade desempenhar uma atividade, tal como no caso do jogo, o que lhe permite distanciar-se. Por outro lado, a construção do jogo obriga a um trabalho de grupo em que não existe qualquer tipo de competição e onde Simone não se sente desafiada a vencer alguém ou a alcançar um objetivo especifico individual.

5. Conclusão

A presente investigação permite compreender a influência da prática do jogo no processo de ensino aprendizagem de alunos do ensino secundário, enquanto ferramenta construída com caraterísticas específicas para este âmbito.

O estudo implicou quatro sessões que envolveram, em particular, quatro alunos do 10.º ano de escolaridade. Durante as sessões, os alunos integrados nos seus grupos puseram em prática dois jogos, *Polygame* e *Qual é Qual?*, e dedicaram-se ainda à construção do seu próprio jogo. As três tarefas envolveram conteúdos integrados no programa de 10.º ano e foram aplicadas após estes terem sido lecionados.

A metodologia adotada foi qualitativa, tendo-se optado pela realização de quatro estudos de caso. A investigadora analisou o comportamento e diálogos das alunas ao longo das sessões, o que possibilitou avaliar o contributo da prática e construção do jogo na aprendizagem e no desenvolvimento de capacidades matemáticas e além disso, compreender quais as principais dificuldades dos alunos na atividade de jogar.

Mais concretamente pretendeu-se responder às seguintes questões:

1. Qual o contributo da prática do jogo na aprendizagem e no desenvolvimento de capacidades matemáticas?
2. Qual o comportamento dos alunos em relação à cooperação e à competição durante a prática do jogo e em que medida este comportamento promove a aprendizagem matemática?
3. Quais os momentos do jogo onde os alunos manifestam maiores dificuldades?
4. Em que medida a construção de jogos favorece o aprofundamento de conceitos matemáticos?

- **Aprendizagem e desenvolvimento de capacidades matemáticas**

A atividade exigida pelo jogo possibilita às quatro alunas que identifiquem as suas dificuldades no que diz respeito aos conteúdos envolvidos, em alguns casos por não compreenderem os conceitos, noutros por não se recordarem dos mesmos. Além disso, confere a cada aluna e ao seu grupo a responsabilidade no processo de deteção e correção dos erros presentes nas jogadas. Por um lado, é necessário compreender os conteúdos para jogar de forma efetiva e abrir possibilidades de alcançar a vitória, por outro lado, no caso do *Polygame*, não identificar erros nas combinações dos colegas leva à realização por parte dos adversários de polygames incorretos. Neste sentido, o jogo constitui um agente de diagnóstico e de autorregulação em todo o processo de aprendizagem decorrente da sua prática.

As caraterísticas dos jogos aplicados fazem com que estes se tornem um veículo para a comunicação e dão um contributo importante para o desenvolvimento em especial da comunicação matemática. No *Polygame*, à medida que combinam as cartas, as alunas sentem a necessidade de ir confirmando as suas jogadas, expressando desta forma as suas ideias ao mesmo tempo que discutem com o grupo as suas conjeturas. Enquanto se envolvem nos diálogos, as alunas comparam as opiniões dos seus pares e refletem sobre as próprias conceções. O próprio jogo exige que, depois de realizarem polygame, as alunas justifiquem as suas opções, o que jogo após jogo, desenvolve o seu poder de argumentação com base nos conhecimentos que vão adquirindo e nas reflexões que vão fazendo. Através dos diálogos que estabelecem, as alunas no geral apropriam-se gradualmente da linguagem matemática e parecem desenvolver progressivamente raciocínios mais complexos.

Também no *Qual é Qual?*, a comunicação é uma condição para se jogar. A formulação de questões implica que as alunas analisem e interpretem as representações do objetos matemáticos que constam nas cartas do seu tabuleiro. Todas as alunas optam por primeiro descobrir o objeto matemático, formulando depois questões referentes às caraterísticas do mesmo. Vitória é a única aluna que consegue apenas com a primeira questão eliminar metade das cartas do seu tabuleiro. Ainda que a pergunta em si não tenha significado matemático, Vitória reconhece no raio uma propriedade da estrutura das esferas e superfícies esféricas, ausente dos restantes objetos matemáticos. Tanto Vitória como Maria ponderam bastante antes de colocarem cada questão e conseguem de forma efetiva ajustar a pergunta efetuada ao número de cartas possível de excluir. Além da formulação de perguntas, cada aluna necessita de interpretar a sua carta mistério para dar respostas à sua oponente. Simone é a aluna que mais solicita ajuda na altura de responder à sua oponente.

Neste contexto, os casos de Maria e de Simone destacam-se em particular pelo contraste entre a sua postura em sala de aula e o favorável desenvolvimento da sua capacidade de comunicar influenciado pela sua motivação e envolvimento no jogo. Embora, no caso de Maria, este comportamento seja mais evidente no primeiro jogo, as alunas são muito ativas desde o início de cada partida e, ao contrário da postura comumente apresentada em aula, intervêm em várias discussões relacionadas com os conteúdos. Em diversas situações apresentam as suas perspetivas e participam em discussões dos seus grupos, tirando partido das conclusões para as suas jogadas, consequentemente para o seu conhecimento. Esta disponibilidade que apresentam para a oralidade permite que tomem um maior contacto com os diferentes termos matemáticos e através da sua utilização no seu discurso dão maior significado a essas palavras.

No decorrer dos jogos, é possível verificar com alguma frequência a falta de rigor matemático imposto pelas alunas no seu discurso. Esta situação pode potencialmente estar ligada a dois fatores: por um lado o facto de estarem num ambiente de grupo, entre colegas e na ausência de uma avaliação, por outro, ser pouco frequente os professores destinarem momentos em aula para serem estruturados e realizados discursos coerentes e com conteúdo matemático.

No que diz respeito à influência direta da aquisição dos conhecimentos no desenvolvimento de estratégias, é possível destacar os casos de Simone e Vitória. As alunas têm níveis opostos de conhecimento mas, após algumas partidas, ambas sentem-se familiarizadas com os conteúdos e confiantes para desenvolver estratégias que lhes possam ajudar a ganhar os jogos. Nos dois jogos, Simone parte com um fraco domínio sobre os conteúdos e é notório o interesse e motivação que tem para compreender os conceitos e raciocínios a serem desenvolvidos, percebendo ser essa a única via para conseguir jogar. Efetivamente é possível verificar o progresso que tem ao longo dos jogos, ao ponto de, por exemplo, no *Polygame* sentir-se preparada para combinar dois polygames em simultâneo, aumentando a probabilidade de na jogada seguinte encontrar uma carta que combine com um dos seus polinómios. No caso de Vitória, aluna com um bom desempenho à disciplina, consegue dificultar o jogo das suas colegas, gerindo as cartas que lhes interessam e incluindo-as primeiro na sua mão. No *Qual é Qual?,* todas as alunas reconhecem os objetos matemáticos presentes e pelo menos na última partida do jogo organizam o seu tabuleiro dividindo as cartas em conjuntos segundo o tipo de objeto matemático que contêm. Esta ação além de constituir uma estratégia de jogo, permite-lhes sistematizar e estruturar mentalmente o conhecimento sobre as figuras geométricas espaciais.

Outro aspeto a ter em consideração é o facto dos dois jogos admitirem níveis progressivos de dificuldade. No *Polygame*, apenas no grupo de Vitória as alunas manifestam essa possibilidade, escolhendo primeiro os polinómios que consideram menos difíceis de explorar. No *Qual é Qual?*, Simone escolhe inicialmente as cartas mistério cujo objeto matemático melhor conhece, sendo assim mais fácil não se enganar nas respostas que dá à sua oponente. A vantagem destas estratégias passa por permitir que as alunas ganhem familiaridade com os conteúdos e que gradualmente construam as capacidades necessárias para novos desafios.

É possível verificar que todas as alunas, jogo após jogo, refletem sobre situações diferentes e progressivamente aprimoram os raciocínios e aprofundam-se nos problemas que o jogo apresenta. Ainda assim, o tempo disponível para cada sessão não é suficiente para que possam tomar contacto com todos os meios que os jogos dispõem, o que influencia o domínio que as alunas têm sobre os conteúdos. Por exemplo, no caso de Leonor percebe-se que o número de partidas não foi suficiente para que compreendesse e aprofundasse todos os conceitos. A aluna está habituada a desenvolver um trabalho na base da mecanização de raciocínios e memorização de conceitos, o que é incompatível com os jogos propostos. Neste sentido a investigação confirma a ideia de Smole, Diniz, Pessoa e Ishihara (2008) que explica que para todos os alunos dominarem os conteúdos presentes no jogo e terem a oportunidade de explorar todos os desafios é necessário tempo para que joguem várias vezes.

- **Cooperação versus competição**

É possível verificar que as quatro alunas atuam cooperativamente em todos os jogos. Em diversas situações procuram com os seus grupos as soluções das situações de jogo, o que implica discutirem, analisarem, trocarem ideias, tomarem decisões e aprenderem conjuntamente. Os resultados mostram situações em que o diálogo entre as alunas, a discussão matemática processada, a argumentação ou mesmo as jogadas que foram sendo realizadas na medida em que o conflito era estabelecido, parecem representar um processo de conceptualização matemática. Maria e Vitória, em particular, por diversas vezes abrem espaço no jogo para tentarem que os membros dos seus grupos compreendam determinados conceitos. Observa-se uma preocupação constante por parte das alunas em socializar o raciocínio obtido, procurando estabelecer diferentes formas de ser entendido pelas colegas e pela investigadora. Isto propicia que reflitam sobre o seu próprio raciocínio, ou seja, que estabeleçam uma reflexão sobre sua própria ação. Em contrapartida, Leonor e Simone apelam à cooperação e à entreajuda dos seus grupos, beneficiando e contribuindo para a análise conjunta das suas jogadas.

Quanto à competição, observa-se que a maioria das alunas tem um sentido competitivo vincado. Nos casos de Leonor e de Vitória, a competição que impõem nas partidas prejudica em alguns casos a eficácia dos seus jogos. No entanto, a própria dinâmica de cada jogo faz com que alterem a sua atitude, passando de um estado de ânsia de querer ganhar para um comportamento de ponderação e aprendizagem. Vitória começa a desenvolver estratégias válidas e que implicam o desenvolvimento de diferentes raciocínios em simultâneo, enquanto Leonor preocupa-se em compreender os conteúdos para conseguir jogar com validade. De outro modo, Maria e Simone percebem desde logo que é através da compreensão dos conceitos e dos raciocínios que os jogos implicam que poderão vencer. Simone não esconde que quer vencer à sua colega Juliana e Maria admite que o jogo só se torna divertido se se compreender os conteúdos.

- **Momentos do jogo**

Na revisão de literatura são estabelecidos por Sá e Zenhas (2004) e Grando (2004) cinco e sete momentos de jogo, respetivamente. Neste estudo, a dinâmica imposta pelos jogos aplicados não delimita claramente estas fases na sua aplicação e é possível verificar que não seguem estritamente uma ordem, tal como apontam os autores. Neste sentido, torna-se necessário definir, tendo por base os modelos dos autores referidos, um quadro que possa refletir e sintetizar os momentos evidenciados na realização dos jogos intervenientes neste estudo. Na tabela 5 organizam-se estas fases que se dividem em momentos sequenciais e momentos transversais. Os momentos sequenciais seguem no jogo a ordem em que se apresentam e os momentos transversais acontecem ao longo do decorrer de cada partida.

Tabela 5: Momentos dos jogos aplicados.

Momentos sequenciais		**Momentos transversais**
1.º momento	Reconhecimento das regras	Intervenção pedagógica verbal
2.º momento	Situações de jogo	Debate
3.º momento	Jogar com competência	Registo do jogo

O reconhecimento das regras do jogo pelo aluno é realizado de várias formas: as regras são lidas, explicadas pela investigadora, e ainda, identificadas através da realização de simulações de jogadas. Neste momento o aluno compreende as normas estabelecidas para o jogo e a importância de cumprir as mesmas para o equilíbrio do jogo.

O segundo momento, situações de jogo, é o momento em que os alunos jogam para garantir a compreensão das regras e explorar as noções matemáticas contidas no jogo.

Jogar com competência é o último momento e acontece quando existe o retorno da passagem por todas as fases. O aluno volta à ação do jogo para executar as jogadas sobre as quais refletiu nas partidas anteriores, tirando partido dos momentos transversais e cumprindo as regras definidas. Nesta fase o aluno, por já dominar os conteúdos envolvidos, dedica-se somente à descoberta de estratégias que otimizem o seu jogo.

Os momentos de intervenção pedagógica verbal dizem respeito às intervenções que são realizadas verbalmente pela investigadora durante o decorrer do jogo. Este momento caracteriza-se pelas questões tendo por base as observações realizadas pela investigadora da ação com o objetivo de provocar o aluno para a realização da análise das suas jogadas.

Nos momentos de debate, o aluno explica as jogadas realizadas, discute diferentes possibilidades de ação, partilha as suas dificuldades e conjeturas, argumenta para justificar uma escolha e avalia os procedimentos e resultados dos colegas, tirando conclusões e desenvolvendo o seu conhecimento.

O registo de jogo contempla a anotação do aluno na designada folha de resultados dos pontos e informações importantes para a gestão do jogo. Este registo pode ser considerado uma forma de sistematização e formalização, através de uma linguagem formal, no caso linguagem matemática.

No decorrer dos jogos é possível identificar dificuldades das alunas em diferentes momentos. Estas dificuldades não são comuns a todas as alunas, nem os problemas que evidenciam dentro de cada momento iguais.

Algumas das dificuldades de Maria e Vitória podem ser enquadradas no momento reconhecimento das regras. Para estas alunas o primeiro momento do jogo, onde leem e compreendem as regras não foi totalmente eficaz. No caso de Maria, a aluna mostra ter dificuldades em compreender as regras e ao longo das partidas é quem mais questões levanta acerca das normas impostas pelo jogo. No seu questionário, a aluna mostra ser frequente participar em jogos com a família e amigos, o que nos permite concluir que não existe uma relação entre a compreensão das regras destes jogos, que são idênticas às de jogos conhecidos, e a regularidade com que se participa noutros jogos fora do ambiente escolar. No caso de Vitória, algumas das suas dificuldades são relativas às regras do jogo, embora de cariz diferente quando comparadas com as de Maria. A aluna em situações pontuais tem dificuldade em cumprir as normas quer estabelecidas pelo grupo quer do próprio jogo. Este comportamento parece evidenciar o reduzido relevo dado pela aluna ao momento em que se abordam as regras e a sua importância.

No momento jogar com competência, Leonor e Simone são as alunas que mais dificuldades evidenciam em chegar a este patamar com o domínio pleno sobre todos os conteúdos. As dificuldades de aprendizagem que as alunas apresentam em aula parecem estar relacionadas com o número de jogos que necessitam até atingir este momento.

Ao nível dos momentos de debate, todas as alunas começaram por sentir dificuldades em expressar os seus raciocínios e em fundamentar as suas opções, desenvolvendo discursos pautados pelo pouco rigor na linguagem matemática. Ainda assim, em alguns caso nota-se um avanço na disponibilidade para questionar, argumentar e partilhar as suas experiências principalmente em Maria e Simone.

- **Construção do jogo**

Os jogos construídos pelas alunas, à exceção do caso de Simone, alargam as possibilidades de comunicação matemática, exigem que cada aluna raciocine sobre o conteúdo matemático dos jogos e sobre as suas propriedades. No caso do *Domizzle*, o facto de ser baseado num jogo já conhecido por Leonor e Maria, permite centrar as suas preocupações na componente das aprendizagens associadas à Matemática. Por outro lado, no grupo de Vitória, a tarefa é encarada como um projeto complexo onde a aluna se envolve e tenta criar um jogo desafiante. Apesar de despender muito tempo em torno das regras e na criação de uma história que fundamente a atividade do jogo, também existe um grande foco em investigar diferentes funções para que o jogo se torne além de interessante, um meio para que quem o jogue possa desenvolver o seu conhecimento. Neste sentido, a construção do jogo permite que estas alunas desenvolvam e aprofundem diferentes conceitos relacionados com funções, sendo que no processo de criação entram também num processo de modelação assegurado pela necessidade de que o teor dos conteúdos presentes possa satisfazer as dinâmicas do jogo.

De notar que Maria, uma aluna tímida e que raramente intervém nas aulas, teve uma participação constante e bastante importante na construção do jogo do seu grupo. Em contrapartida, Simone, que ao nível da comunicação tem uma postura idêntica à de Maria em aula, não se envolve na atividade do seu grupo admitindo que prefere jogar a construir um jogo.

Considerações finais

Em termos globais, o estudo sugere que o jogo pode constituir um recurso útil na aprendizagem dos alunos do 10.º ano do Ensino Secundário, estando a maioria dos resultados obtidos de acordo com as ideias presentes na literatura existente, para a qual também se procurou dar um contributo refinando as caraterísticas existentes relativamente aos momentos do jogo.

Através da prática dos dois jogos, as alunas participantes no estudo trabalham os conteúdos já lecionados em aula de forma interessada e motivada, necessitando de desenvolver o seu conhecimento e algumas capacidades matemáticas para poderem jogar. A vertente competitiva inerente a qualquer jogo não teve um papel particularmente negativo, tendo sido encarada de forma saudável e promovendo o desejo de querer aprender para abrir maior possibilidade de ganhar o jogo. Por outro lado, as alunas evidenciam espírito de cooperação e entreajuda na superação das dificuldades evidenciadas nos diferentes momentos de jogo, o que conduz a uma forte componente de interação ao nível de debates, discussões e partilha que se traduzem num enriquecimento de aquisição de aprendizagens. Ainda assim, é nos momentos em que têm que expressar oralmente as suas ideias matemáticas que se evidencia constrangimentos no uso de uma linguagem matemática rigorosa, consequência provável do pouco ênfase que é dado ao desenvolvimento da comunicação matemática na disciplina.

Na comparação entre jogar e construir um jogo, foi interessante perceber que, Simone, uma aluna desmotivada e com fraco desempenho à disciplina, não se interessa pela segunda tarefa, tendo-se auto excluído de participar justificando que não tem presente os conteúdos envolvidos. Aparentemente, o facto de esta tarefa não implicar ações diretamente dirigidas, não estimula a sua participação. No entanto, nas sessões em que se pratica os dois jogos, tem uma atitude completamente diferente, envolvendo-se seriamente no jogo e mostrando sentir a necessidade de aprender como veículo para poder ganhar. Posto isto, as conclusões do estudo sugerem também que a tarefa de construção de um jogo deve ser ponderada pelo professor na medida em que sendo proposta a sua realização em grupo pode ocorrer o risco de existirem alunos que não participam. Ainda assim, na maioria dos casos, a tarefa resultou na mobilização de conhecimentos, permitiu aprofundar a compreensão dos conceitos incluídos nos jogos, organizar um trabalho em grupo e exigiu a planificação, execução e avaliação das ações de uma sequência de passos com o fim de elaborar um jogo coerente.

Esta investigação desenvolve-se numa temática onde o número de estudos neste nível de ensino é reduzido. Dá portanto um contributo ao trabalho já realizado, mas deixa em aberto muitas questões que seria importante dar atenção em futuras investigações. Seria nomeadamente importante:

- Analisar as vantagens para a aprendizagem dos alunos com a aplicação de jogos que estimulem o desenvolvimento de conexões entre diferentes temas da Matemática;
- Perceber como se carateriza a avaliação que o professor pode e deve realizar no âmbito deste tipo de tarefa e analisar a sua influência no desempenho dos alunos;
- Analisar o impacto sobre a aprendizagem de momentos em que a ação do aluno decorre sem a presença e qualquer intervenção direta do professor durante a realização autónoma de jogos.

Por último salienta-se o entusiasmo e a dedicação com que as alunas participantes realizaram as tarefas propostas, evidenciando que existem estratégias didáticas alternativas às convencionais que favorecem e motivam a aprendizagem de todos os alunos.

Referências Bibliográficas

Abrantes, P. (1994). *O trabalho de projecto e a relação dos alunos com a matemática: a experiência do projecto Mat789*, Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa, Lisboa: APM.

Aires, L. (2011). *Paradigma qualitativo e práticas de investigação educacional*. 1ª Ed. Lisboa: Universidade Aberta

Avellar, A. F. (2010). *Jogos pedágogicos para o ensino da matemática*. Aparecida de Goiânia: Faculdade Alfredo Nasser, Instituto Superior de Educação.

Bivar, A., Grosso, C., Oliveira, F., & Timóteo, M. C. (2012). *Programa e metas curriculares de matemática do 1.º, 2.º e 3.º ciclos do ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação e Ciência.

Boavista, C., & Sousa, O. (2013). O diretor de turma: perfil e competências. *Revista Lusófona de Educação*, 23 (23), 77-93.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação – uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Booker, G. (2000). *The maths game: using instructional games to teach mathematics*. Wellington, NZ: New Zealand Council for Educational Research.

Bragg, L., (2006). *The impact of mathematical games on learning, attitudes and behaviours*. Tese de Doutoramento. La Trobe University, Bundoora.

Bragg, L. (2012). The effect of mathematical games on on-task behaviours in the primary classroom. *Mathematics Education Research Journal*, 24 (4), 385-401.

Bright, G. W., Harvey, J. G., & Wheeler, M. M. (1985). Learning and mathematics games. *Journal for Research in Mathematics Education Monograph.* Reston: NCTM, Reston.

Burnett, L. (1992). Using instructional games to construct number understanding and skills. In M. Horne & M. Supple (Eds.), *Mathematics: Meeting the challenge*. 223-228. Melbourne: The Mathematical Association of Victoria.

Butler, T. (1988), Games and simulations: creative educational alternatives. *TechTrends*, 33 (4), 20-23.

Castro, S. (2008). Juegos, simulaciones y simulación-juego y los entornos multimediales en educación:¿ mito o potencialidad?. *Revista de investigación*, (65), 223-245.

Chamoso, J., Durán, J., García, J., Martin, J., & Rodríguez, M. (2004). Análisis y experimentación de juegos como instrumentos para enseñar matemáticas. *SUMA*, 47, 47-58.

Cody, K. J., Rule, A. C., & Forsyth, B. R. (2015). Mathematical game creation and play assists students in practicing newly-learned challenging concepts. *Creative Education*, 6, 1484-1495.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2007). *Research methods in education*. Routledge.

Contreras, M. (2004). Las matemáticas de ESO y bachillerato a través de los juegos. Acedido a 24 de novembro de 2015 em http://www.mauriciocontreras. es/JUEGOSM.htm.

Corbalán, F. (2002). *Juegos matemáticos para secundaria y bachillerato*. Madrid: Sintesis.

Costa, O. (2011). *O jogo didático como estratégia de aprendizagem*. Dissertação de mestrado. Lisboa: Faculdade de Ciências Sociais e Humanas da Universidade Nova de Lisboa.

Coutinho, C. P., & Chaves, H. J. (2002). O estudo de caso na investigação em Tecnologia Educativa em Portugal. *Revista Portuguesa de Educação*, 15(1), 221-243.

Davidson, N. (Ed.) (1990). *Cooperative learning in mathematics.* S. Francisco: Addison-Wesley.

DEB (2001). *Currículo Nacional do Ensino Básico. Competências Essenciais*. Lisboa: departamento da Educação Básica., Ministério da Educação.

DES (2001). *Programa de Matemática A, 10.º ano*. ME, Departamento do Ensino Secundário.

DES (2002a). *Programa de Matemática A*, 11.º ano. ME, Departamento do Ensino Secundário.

DES (2002b). *Programa de Matemática A*, 12.º ano. ME, Departamento do Ensino Secundário.

Eck, R. (2006). Digital game-based learning: it's not just the digital natives who are restles, *EDUCAUSE Review*, 41(2), 16-30.

Edo, M., & Deulofeu, J. (2006). Investigación sobre juegos, interacción y construcción de conocimientos matemáticos. *Enseñanza de las Ciencias*, 24(2), 257-268.

Ernest, P. (1986). Games. A rationale for their use in the teaching of mathematics in school. *Mathematics in School*, 15(1), 2-5.

Escolano, J. M. M., Marcén, A. M. O., & Morales, J. M. (2009). Empleo didáctico de juegos que se materializan mediante grafos: una experiencia. Contextos Educativos. *Revista de Educación*, 12, 137-164.

Fernandes, E. (1997). O trabalho cooperativo num contexto de sala de aula. *Análise Psicológica*, 4(15), 563-572.

Fiorentini, D., & Lorenzeto, S. (2006). *Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos*. São Paulo: Autores Associados.

Flick, U. (2004). *Uma introdução à pesquisa qualitativa*. Porto Alegre: Bookman.

Gairín, J. (1990). Efectos de la utilización de juegos educativos en la enseñanza de las matemáticas. *Educar*, 17, 105-118.

Gairín, J. (2003), *Aprender a demostrar: Los juegos de estrategia. Actas de las X Jornadas para el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas*, Zaragoza, Instituto de Ciencias de la Educación, 171-188. Acedido a 14 de janeiro de 2016, em www.quadernsdigitals. net/datos/hemeroteca/r_40/nr_456/a_6219/6219.pdf.

Garris, R., Ahlers, R., & Driskell, J. E. (2002). Games, motivation, and learning: A research and practice model. *Simulation & Gaming*, 33 (4), 441-467.

Gaspar, I. (2015). *A influência dos jogos matemáticos na predisposição dos alunos para a matemática e na sua aprendizagem*. Relatório de Estágio, Escola Superior de Educação de Lisboa-Instituto Politécnico de Lisboa, Portugal.

Godoy, A. (1995). Pesquisa qualitativa: tipos fundamentais. *Revista de Administração de Empresas*, São Paulo, 35(3), 20-29.

Grando, R. C. (2004). *O jogo e a matemática no contexto da sala de aula*. São Paulo: Paulus.

Heras, S. G. (2014). *La utilización de juegos en la enseñanza de las matemáticas*. Trabajo fin de grado, Facultad de educación-Universidad de Zaragoza, España.

Johnson, D.W., & Johnson, R.T. (1994). *Learning together and alone* (4th ed.), Needham Heights, MA: Allyn and Bacon.

Kamii, C., & Rummelsburg, J. (2008). Arithmetic for first graders lacking number concepts. *Teaching children mathematics*, 14, 389-394.

Krulik, S., & Rudnick, J. (1983). Strategy game and problem solving: an instructional pair whose time has come! *The arithmetic teacher*, 83 (12), 26-28.

Lara, I. (2004). *Jogando com a Matemática de 5ª a 8ª série*. São Paulo: Rêspel.

Lopes, A. V., Bernardes, A., Loureiro, C., Varandas, J. M., Oliveira, M. J. C., Delgado, M. J. Bastos, R., & Graça, T. (1996). *Actividades matemáticas na sala de aula*. Lisboa: Texto Editora.

Macedo, L. (2000). *Aprender com jogos e situações-problema*. Porto Alegre: Artes médicas.

Martins, E. (2012). A importância dos jogos na educação fundamental do 6º ao 9º ano na escola estadual de cabeceiras. Trabalho Monográfico. Planaltina.

Maxwell, J. A. (1992) Understanding and validity in qualitative research. *Harvard Educational Review*, 62 (3), 279–300.

ME (2007). *Programa de matemática do ensino básico*. Lisboa: Autor.

Meirinhos, M., & Osório, A. (2010). O Estudo de caso como estratégia de investigação em educação. *EduSer: revista de educação*. 2(2), p. 49-65

Miller, K. (2009). *Real world math: Views from the researcher, teacher, and student*. Senior Thesis, Ypsilanti, MI: Eastern Michigan University.

Moore, N. (2012). *Alternative strategies for teaching mathematics*. Education and Human Development Master's Thesis Paper 130. Brockport, NY: State University of New York.

Mota, P. (2009). *Jogos no ensino da matemática*. Tese de mestrado. Universidade Portucalense Infante D. Henrique: Porto. Acedido a 12 de dezembro em http://repositorio.uportu.pt/jspui/bitstream/11328/525/2/TMMAT%20108.pdf.

Muniz, C. (2010). *Brincar e jogar: enlaces teóricos e metodológicos no campo da educação matemática*. Belo Horizonte: Autêntica.

Muñiz-Rodríguez, L., Alonso, P., & Rodríguez-Muñiz, L. J. (2014). El uso de los juegos como recurso didáctico para la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas: estudio de una experiencia innovadora. *Unión: revista iberoamericana de educación matemática*, (39), 19-33.

Muñoz, P. A. (2013). *Juegos y materiales para construir las matemáticas en Educación Primaria*. Trabajo fin de grado, Facultad de educación – Universidad de Valladolid, España.

Neves, J. (1996). Pesquisa qualitativa: características, usos e possibilidades. *Caderno de pesquisa em administração*, 1 (3), 1-5.

Nisbet, S., & Williams, A. (2009). Improving students' attitudes to chance with games and activities. *Australian Mathematics Teacher*, 65 (3), 25-37.

Oldfield, B. (1991a). Games in the learning of mathematics part 1: a classification. *Mathematics in School*, 20 (1), 41-43.

Oldfield, B. (1991b). Games in the learning of mathematics part 2: games to stimulate mathematical discussion. *Mathematics in School*, 20 (2), 7-9.

Oliveira, I., & Serrazina, L. (2002). A reflexão e o professor como investigador. In GTI (Ed.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 30-42). Lisboa: APM.

Patton, M. Q. (1990). *Qualitative evaluation and research methods*. Newbury Park, CA: Sage.

Peralta, A. G. G., Zavaleta, J. G. M., & Aguilar, M. S. (2014). La matemática nunca deja de ser un juego: investigaciones sobre los efectos del uso de juegos en la enseñanza de las matemáticas. *Educación Matemática*, 26(3), 109-133.

Ponte, J. P. (2006). Estudos de caso em educação matemática. *Bolema*, 25, 105-132.

Remmele, B., Seeber, G., Krämer, J., & Schmette, M. (2009): Game-based teaching - dimensions of analysis. In: *Proceedings of the 3rd European Conference on Games-Based Learning. Graz*: 325-331.

Rodríguez, G. G., Flores, J. G., & Jiménez, E. G. (1999). *Metodología de la investigación cualitativa*. Málaga: Ediciones Aljibe.

Sá, A. (1995). *A Aprendizagem da Matemática e o Jogo.* Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Sá, A., & Zenhas, M. G. (2004). O jogo na aula de matemática. *Revista Educação e Matemática*, 76, 5-8.

Sánchez, C., & Casas, L. M. (1998). *Juegos y materiales manipulativos como dinamizadores del aprendizaje en matemáticas*. Madrid, CIDE-MEC.

Santos, L., Canavarro, A., & Machado, S. (2007). Orientações curriculares actuais para a Matemática em Portugal. In *Actas do XV Encontro de Investigação em Educação Matemática – Currículo e desenvolvimento curricular*. Lisboa: Secção de Educação matemática, Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Selva, K., & Camargo, M. (2009). O jogo matemático como recurso para a construção do conhecimento. In Educação Matemática nos Anos Iniciais e Ensino Fundamental: *atas do X Encontro Gaúcho de Educação Matemática*, Rio Grande do Sul. Acedido a 3 de fevereiro de 2016, em http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica /cd_egem/ fscommand/CC/CC_4.pdf.

Silva A., & Kodama, H. (2004). Jogos no Ensino da Matemática. *2 Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática*, UFBA. Acedido a 26 de dezembro de 2015, em http://www.bienasbm.ufba.br/02.htm.

Smole, K. S., Diniz, M. I., Pessoa, N., & Ishihara, C. (2008). *Cadernos do Mathema: Ensino Médio: Jogos de matemática de 1.º a 3.º ano*. Porto Alegre: Artmed.

Smole, K., Diniz, M., & Cândido, P. (2007). *Cadernos do Mathema: Jogos de matemática de 1.º a 5.º ano.* Porto Alegre: Artmed.

Stake, R. E. (1999). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Morata.

Swan, P., & Marshall, L. (2009). Mathematical games as a pedagogical tool. Acedido a 10 de novembro de 2015, em http://recsam.edu.my/cosmed/cosmed09/Abstracts FullPapers2009/Abstract/Mathematics%20Parallel%20PDF/Full%20Paper/M26.pdf.

Vale, I. (2004). Algumas notas sobre investigação qualitativa em educação matemática, O Estudo de Caso. *Revista da Escola Superior de Educação*. Escola Superior de Educação de Viana do Castelo, 5, 171-202.

Vankúš, P. (2006). Methodology of the Using of Didactical Games on the Mathematics Lessons at the Lower Secondary School. *Fórum pedagogiky 2006: Transformácia vzdelávania smerom k potrebám európskeho trhu práce*, 282–287.

Vankúš, P. (2008). Games based learning in teaching of mathematics at lower secondary school. *ActaDidactica Universitatis Comenianae—Mathematics*, 8, 103-120. Bratislava: Comenius University in Bratislava.

Yin, R. (1984). *Case study research: Design and methods*. Newbury Park, CA: Sage.

Yin, R. (2005). *Estudo de Caso. Planejamento e Métodos*. Porto Alegre: Bookman.

Anexos

Anexo 1 - Autorização de Participação no Estudo

Exmo. Sr. Encarregado de Educação

Sou professora estagiária da disciplina de Matemática, a realizar o estágio pedagógico com a professora Rosário Lopes na turma - do 10.º ano, no âmbito do Mestrado em Ensino da Matemática na Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa. No desenvolvimento da tese de mestrado, realizo uma investigação que tem como principal objetivo compreender o papel da prática de jogos matemáticos nas aprendizagens dos alunos em Matemática.

A mesma investigação será desenvolvida durante o presente ano letivo, no - em horário letivo e não letivo. Tendo o seu educando manifestado disponibilidade para participar no presente projeto, solicito a sua autorização para o efeito.

Para o desenvolvimento do projeto será necessário proceder à gravação vídeo e ao registo fotográfico das atividades desenvolvidas, não constando das imagens o rosto do seu educando. Os dados recolhidos serão usados exclusivamente como materiais de trabalho, estando garantida a privacidade e anonimato dos participantes.

Manifesto, ainda, a minha inteira disponibilidade para prestar qualquer esclarecimento que considere necessário.

Na expectativa de uma resposta favorável, subscrevo-me com os melhores cumprimentos.

A Professora Estagiária — A Professora de Matemática
Sílvia Lopes — Rosário Lopes

Autorização

Eu, ..., Encarregado de Educação do aluno ...., n.º............., do 10.º-, autorizo a participação do meu educando nas atividades realizadas no âmbito da investigação que me foi dada a conhecer.

Data: ..../......../2015

....

(Assinatura do Encarregado de Educação)

Anexo 2 - Questionário aplicado aos alunos

Nome:____Nº___

1. Gostas de matemática? Justifica a tua resposta..

____

____

2. Qual a tua maior dificuldade na aprendizagem da matemática? Porquê?

____

____

3. Já jogaste algum jogo matemático em contexto de sala de aula? O que pensas sobre isso?

____

____

4. Costumas jogar jogos não digitais (tabuleiro, cartas, etc.) com a tua família ou amigos? Quais?

____

____

5. Pensas ser possível aprender matemática através da prática de jogos? Porquê?

____

____

Obrigada pela tua ajuda!

Anexo 3 - Regras do Polygame

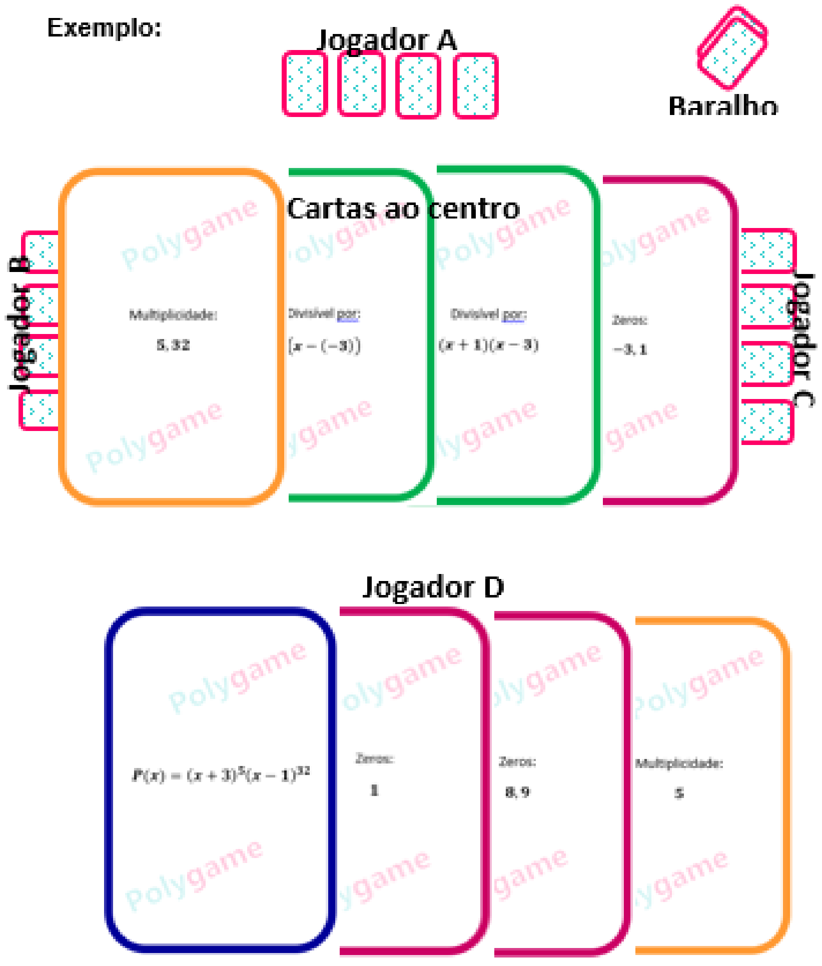
Polygame

Objetivo: Combinar quatro cartas de cores diferentes com caraterísticas do mesmo polinómio.

Regras:

1. É definido o jogador que distribui e recolhe as cartas, chamado "Poly".
2. O Poly deve dar a cada jogador 4 cartas.
3. São colocadas 4 cartas viradas pra cima sobre a mesa.
4. Quando o Poly permitir, cada jogador pega na carta que lhe convier e, seguidamente, terá de colocar uma carta na mesa para substituir a que tirou.
5. Cada jogador só pode ficar com quatro cartas na mão.
6. Os jogadores podem apanhar uma carta que outro jogador tenha colocado sobre a mesa.
7. Quando já ninguém quiser uma das 4 cartas que estão sobre a mesa, essas voltam para o fundo do monte. São viradas mais quatro cartas do monte e o jogo continua.
8. Quando algum jogador combinar 4 cartas, deverá dizer "Polygame", e mostrar a sua combinação, sendo discutida entre os jogadores a sua validade. Se todos os jogadores concordarem que a combinação está correta, o jogador deverá pôr essa combinação de parte e retirar mais quatro cartas do baralho. Caso contrário, o jogador deverá continuar a tentar fazer uma combinação.
9. O jogo acaba quando todas as combinações do baralho tiverem sido feitas.
10. Ganha o jogador que fizer mais "Polygames".

Exemplo:



O Jogador D conseguiria fazer Polygame trocando algumas cartas. Quais?

Anexo 4 - Folha de Registo do *Polygame*

Polygame

Jogador	Polinómio	Zeros	Multiplicidades	Divisível por:

Anexo 5- Cartas do *Polygame*

$$P(x) = (x+5)^3(x-2)$$

$$P(x) = (x^2+2x+1)(x-3)^4$$

$$P(x) = (x-2)(x^2-4)$$

$$P(x) = (x+3)(x+2)^2\left(x-\tfrac{1}{2}\right)^3$$

$$P(x) = (x-5)^3$$

$$P(x) = \left(x-\sqrt{3}\right)^3\left(x^2+1\right)^2$$

$$P(x) = (x+1)^3$$

$$P(x) = \left(x+\sqrt{3}\right)^4\left(x^2-1\right)$$

Polygame

$P(x) = \left(x + \frac{2}{3}\right)^2 (x-4)^3$

Polygame

Polygame

$P(x) = (x - 3^2)(x + 2^3)$

Polygame

Polygame

Zeros:

-1

Polygame

Polygame

Zeros:

5

Polygame

Polygame

Zeros:

$-\sqrt{3}, 1, -1$

Polygame

Polygame

Zeros:

$\sqrt{3}$

Polygame

Polygame

Zeros:

$2, -2$

Polygame

Polygame

Zeros:

$-5, 2$

Polygame

Zeros:

$-3, -2, \frac{1}{2}$

Zeros:

$-1, 3$

Zeros:

$-\frac{2}{3}, 4$

Zeros:

$-8, 9$

Multiplicidade:

3

Multiplicidade:

3

Multiplicidade:

$4, 1, 1$

Multiplicidade:

3

Uma raiz simples e

uma raiz dupla

Multiplicidade:

$3, 1$

Multiplicidade:

$2, 3$

Duas raízes simples

Multiplicidade:

$1, 2, 3$

Multiplicidade:

$2, 4$

Divisível por:

$4(x+1)^3$

Divisível por:

$10 \times (x-5)^2$

Divisível por:

$(x-1)$

Divisível por:

$\left(x-\sqrt{3}\right)^2$

Divisível por:

$(x-2)^2$

Divisível por:

$(x+5)(x-2)$

Divisível por:

$(x+3)(x+2)$

Divisível por:

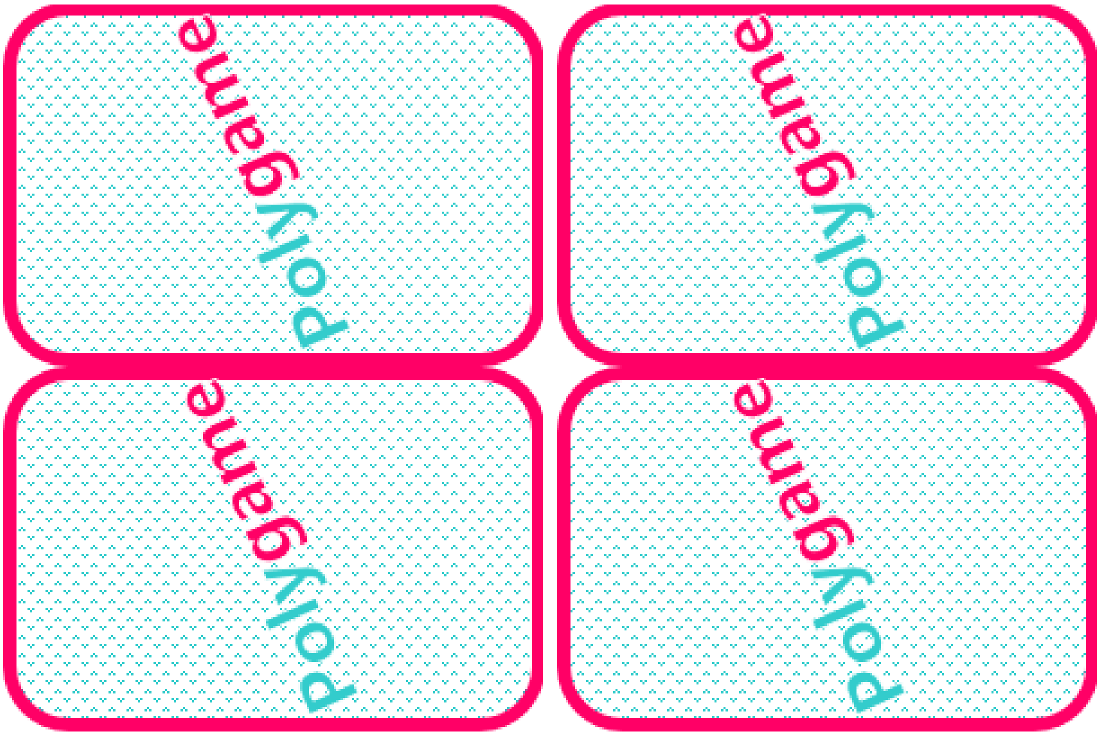
$(x+1)(x-3)$

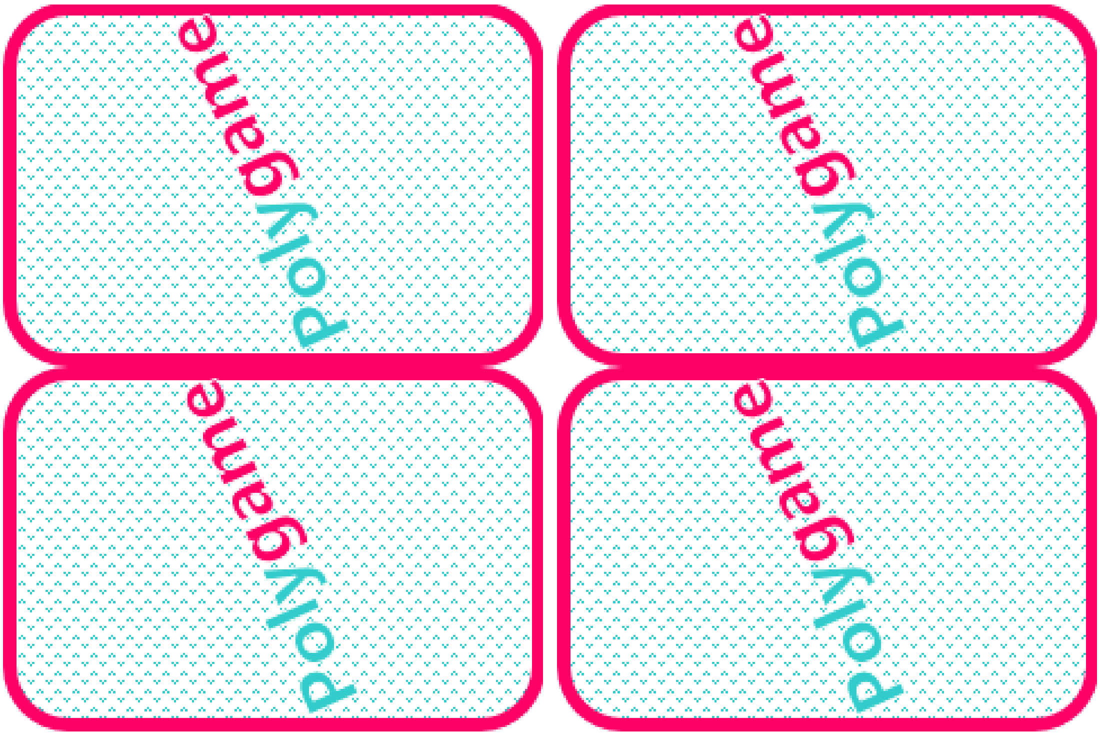
Divisível por:

$4\times\left(x+\frac{2}{3}\right)$

Divisível por:

$(x-9)(x+8)$


polygame
polygame
polygame
polygame


polygame
polygame
polygame
polygame

Anexo 6 - Regras e Folha de Registo do *Qual é Qual?*

QUAL É QUAL?
GEOMETRIA ESPACIAL

<u>Objetivo:</u> Descobrir qual o Objeto Matemático que consta na carta mistério do seu oponente.
<u>Material:</u> 1 tabuleiro de jogo, 24 cartas da mesma cor + 24 cartas mistério + 1 lápis (por jogador).
<u>Cartas:</u> Os objetos matemáticos no espaço que constam nas cartas do jogo são: Esfera, superfície esférica, segmento de reta, reta e ponto.
<u>Regras:</u>
1. Cada jogador escolhe um tabuleiro e coloca as suas cartas nas ranhuras.
2. Cada jogador escolhe a carta mistério que o seu oponente terá de descobrir. Esta carta deve ser colocada no encaixe próprio do tabuleiro e as restantes cartas são postas fora do jogo.
3. O jogador que começa será identificado de acordo com a ordem alfabética dos nomes dos jogadores e o jogo deverá seguir para a sua esquerda.
4. Os jogadores alternam a vez fazendo uma pergunta que apenas possa ser respondida com SIM ou NÃO. Dependendo da resposta, o jogador deve retirar os objetos que sabe que **não** são o Objeto Misterioso do seu adversário.
5. Cada jogador deve registar todas as questões colocadas, bem como as respetivas respostas.
6. Assim que um jogador identificar o objeto matemático que consta na carta mistério do seu oponente, deve aguardar a sua vez e mostrar a carta que considera corresponder ao objeto mistério. Os jogadores devem discutir a validade da aposta.
Se a aposta estiver correta, o jogador ganha um ponto.
Se a aposta estiver incorreta, os alunos devem analisar as perguntas e respostas dadas e duas situações podem ocorrer:

A. O jogador que responde às questões, deu respostas inválidas face às questões colocadas. Este jogador perde 1 ponto e o jogador que fez a aposta ganha 1 ponto.

B. O jogador que fez a aposta, interpretou mal as respostas que lhe foram dadas. Nenhum jogador acumula pontos.

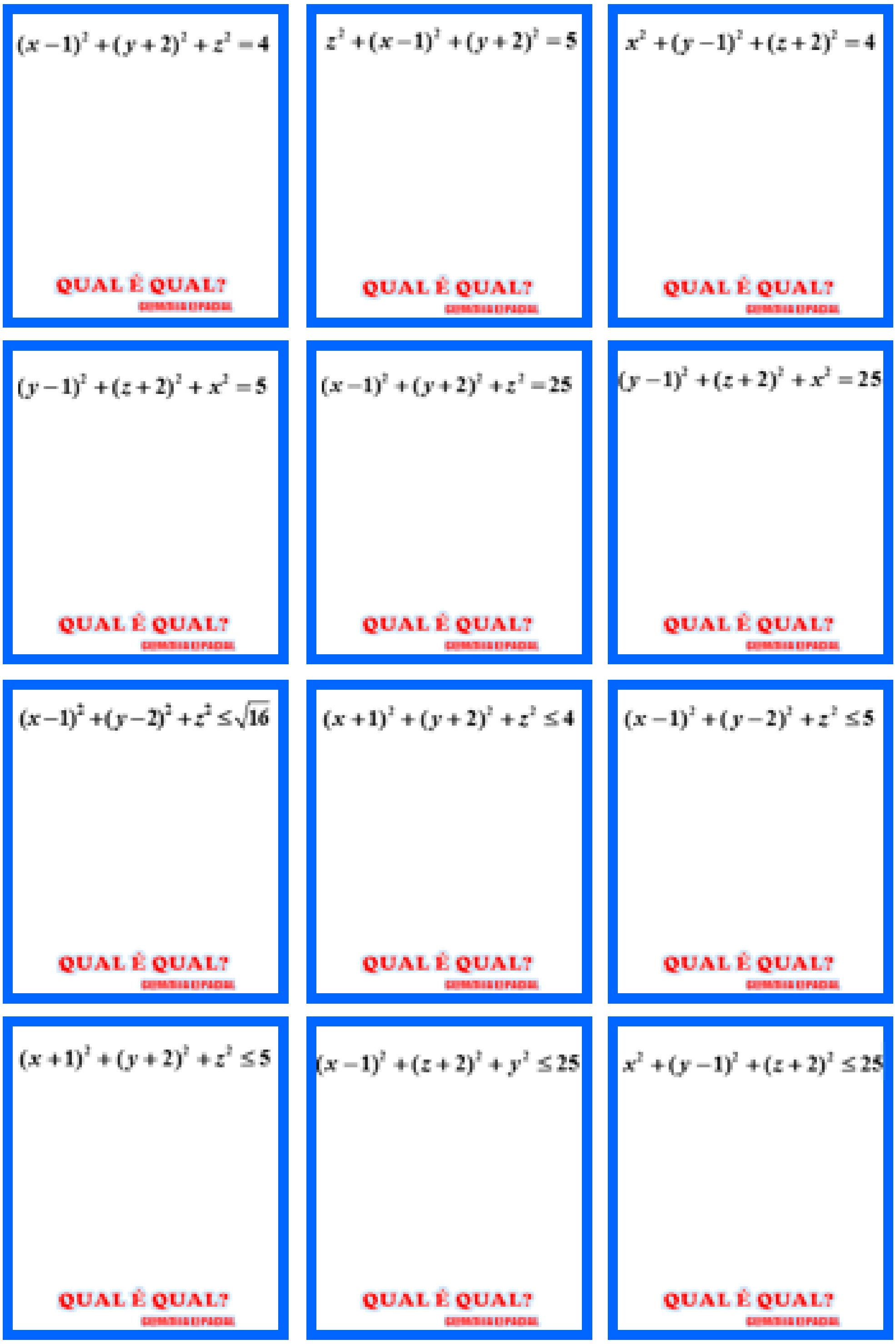
7. Os jogadores devem repetir o jogo, até um deles alcançar **cinco pontos**. As cartas mistério não devem ser repetidas pelo mesmo jogador.

Folha de Perguntas e Respostas

QUAL É QUAL?
GEOMETRIA ESPACIAL

Perguntas	R

Anexo 7 - Cartas do tabuleiro do *Qual é Qual?*



$\begin{cases} x = 1 + 4\lambda \\ y = 6\lambda \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$ **QUAL É QUAL?**	$(x,y,z)=(1,0,2)+\lambda(0,1,0),\ \lambda\in\mathbb{R}$ **QUAL É QUAL?**	$(x,y,z)=(1,2,0)+\lambda(0,0,2), \lambda\in\mathbb{R}$ **QUAL É QUAL?**
$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 + 3\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$ **QUAL É QUAL?**	$\begin{cases} x = 1 + 4\lambda \\ y = 6\lambda \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases}, \lambda \in [1,3]$ **QUAL É QUAL?**	$(x,y,z)=(1,2,2)+\lambda(0,0,1), \lambda\in[0,1]$ **QUAL É QUAL?**
$x=1 \wedge y=2 \wedge -3\leq z\leq -2$ **QUAL É QUAL?**	$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + \lambda, \ \lambda \in [0,3] \\ z = 2 \end{cases}$ **QUAL É QUAL?**	$P(-4,2,4)$ **QUAL É QUAL?**
$x=1 \wedge y=3 \wedge z=1$ **QUAL É QUAL?**	$P(5,-3,-2)$ **QUAL É QUAL?**	$P(-1,-3,-6)$ **QUAL É QUAL?**

$(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=4$

QUAL É QUAL?

$(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=5$

QUAL É QUAL?

$x^2+(y-1)^2+(z+2)^2=4$

QUAL É QUAL?

$x^2+(y-1)^2+(z+2)^2=5$

QUAL É QUAL?

$(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=25$

QUAL É QUAL?

$x^2+(y-1)^2+(z+2)^2=25$

QUAL É QUAL?

$(x-1)^2+(y-2)^2+z^2\leq 4$

QUAL É QUAL?

$(x+1)^2+(y+2)^2+z^2\leq\sqrt{16}$

QUAL É QUAL?

$(x-1)^2+(y-2)^2+z^2\leq 5$

QUAL É QUAL?

$(x+1)^2+(y+2)^2+z^2\leq 5$

QUAL É QUAL?

$(x-1)^2+(z+2)^2+y^2\leq 25$

QUAL É QUAL?

$x^2+(y-1)^2+(z+2)^2\leq 25$

QUAL É QUAL?

$(x,y,z)=(1,0,2)+\lambda(2,3,1),\ \lambda\in\mathbb{R}$

QUAL É QUAL?

$x=1 \wedge z=2$

QUAL É QUAL?

$(x,y,z)=(1,2,0)+\lambda(0,0,2),\lambda\in\mathbb{R}$

QUAL É QUAL?

$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 + 3\lambda\ , \ \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$$

QUAL É QUAL?

$$\begin{cases} x = 1 + 4\lambda \\ y = 6\lambda \qquad ,\lambda \in [1,3] \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases}$$

QUAL É QUAL?

$(x,y,z)=(1,2,2)+\lambda(0,0,1),\lambda\in[0,1]$

QUAL É QUAL?

$x=1\ \wedge\ y=2\ \wedge -3\leq z\leq -2$

QUAL É QUAL?

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + \lambda,\ \lambda \in [0,3] \\ z = 2 \end{cases}$$

QUAL É QUAL?

$P(-4,2,4)$

QUAL É QUAL?

$x=1 \wedge y=3 \wedge z=1$

QUAL É QUAL?

$x=5 \wedge y=-3 \wedge z=-2$

QUAL É QUAL?

$x=-1 \wedge y=-3 \wedge z=-6$

QUAL É QUAL?

$(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=4$

QUAL É QUAL?

$(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=5$

QUAL É QUAL?

$x^2+(y-1)^2+(z+2)^2=4$

QUAL É QUAL?

$x^2+(y-1)^2+(z+2)^2=5$

QUAL É QUAL?

$(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=25$

QUAL É QUAL?

$x^2+(y-1)^2+(z+2)^2=25$

QUAL É QUAL?

$(x-1)^2+(y-2)^2+z^2\leq 4$

QUAL É QUAL?

$(x+1)^2+(y+2)^2+z^2\leq 4$

QUAL É QUAL?

$(x-1)^2+(y-2)^2+z^2\leq 5$

QUAL É QUAL?

$(x+1)^2+(y+2)^2+z^2\leq 5$

QUAL É QUAL?

$(x-1)^2+(z+2)^2+y^2\leq 25$

QUAL É QUAL?

$x^2+(y-1)^2+(z+2)^2\leq 25$

QUAL É QUAL?

$(x,y,z)=(1,0,2)+\lambda(2,3,1),\ \lambda\in\mathbb{R}$

QUAL É QUAL?

$x=1 \wedge z=2$

QUAL É QUAL?

$(x,y,z)=(1,2,0)+\lambda(0,0,2), \lambda\in\mathbb{R}$

QUAL É QUAL?

$$\begin{cases} x = 1+2\lambda \\ y = 2+3\lambda\ ,\quad \lambda\in\mathbb{R} \\ z=\lambda \end{cases}$$

QUAL É QUAL?

$(x,y,z)=(1,0,2)+\lambda(4,6,2), \lambda\in[1,3]$

QUAL É QUAL?

$(x,y,z)=(1,2,2)+\lambda(0,0,1), \lambda\in[0,1]$

QUAL É QUAL?

$(x,y,z)=(1,2,-2)+\lambda(0,0,1), \lambda\in[-1,0]$

QUAL É QUAL?

$(x,y,z)=(1,2,2)+\lambda(0,1,0), \lambda\in[0,3]$

QUAL É QUAL?

$P(-4,2,4)$

QUAL É QUAL?

$P(1,3,1)$

QUAL É QUAL?

$x=5 \wedge y=-3 \wedge z=-2$

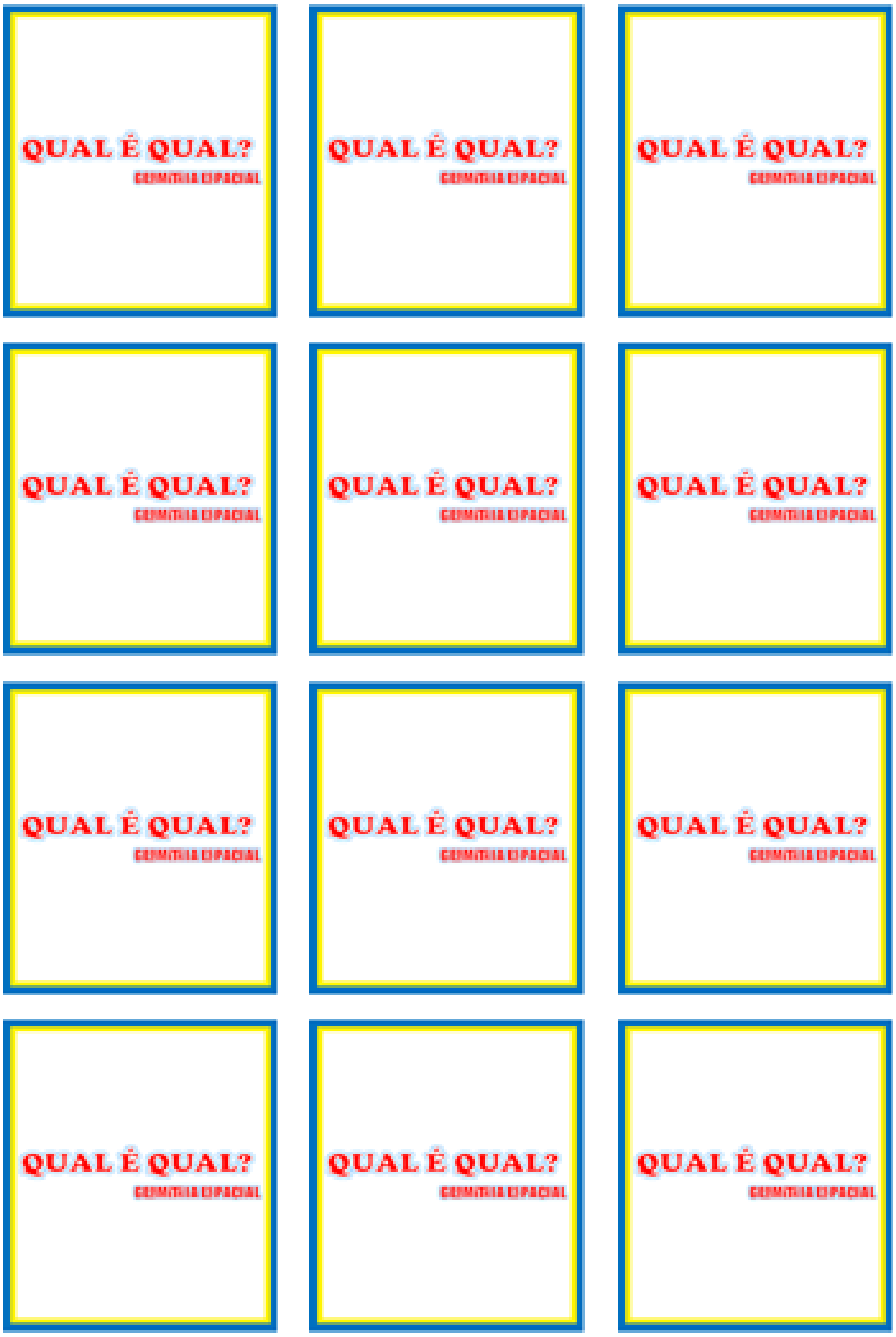
QUAL É QUAL?

$x=-1 \wedge y=-3 \wedge z=-6$

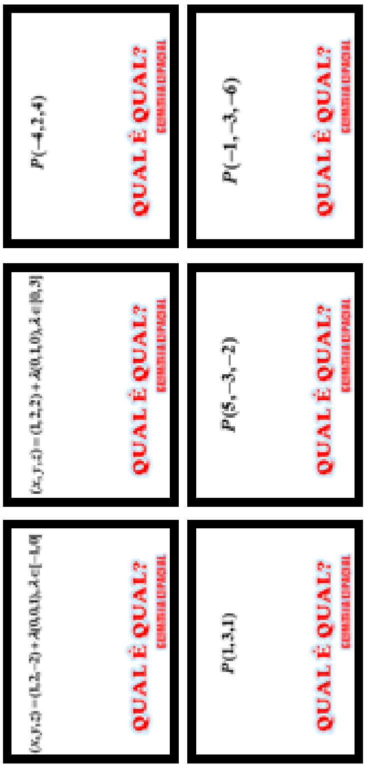
QUAL É QUAL?

$(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=4$ QUAL É QUAL?	$z^2+(x-1)^2+(y+2)^2=5$ QUAL É QUAL?	$x^2+(y-1)^2+(z+2)^2=4$ QUAL É QUAL?
$(y-1)^2+(z+2)^2+x^2=5$ QUAL É QUAL?	$(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=25$ QUAL É QUAL?	$(y-1)^2+(z+2)^2+x^2=25$ QUAL É QUAL?
$(x-1)^2+(y-2)^2+z^2\leq 4$ QUAL É QUAL?	$(x+1)^2+(y+2)^2+z^2\leq\sqrt{16}$ QUAL É QUAL?	$(x-1)^2+(y-2)^2+z^2\leq 5$ QUAL É QUAL?
$(x+1)^2+(y+2)^2+z^2\leq 5$ QUAL É QUAL?	$(x-1)^2+(z+2)^2+y^2\leq 25$ QUAL É QUAL?	$x^2+(y-1)^2+(z+2)^2\leq 25$ QUAL É QUAL?

$(x,y,z)=(1,0,2)+\lambda(4,6,2),\ \lambda\in\mathbb{R}$ **QUAL É QUAL?**	$\begin{cases} x=1 \\ y=\lambda\ ,\quad \lambda\in\mathbb{R} \\ z=2 \end{cases}$ **QUAL É QUAL?**	$y=2 \wedge x=1$ **QUAL É QUAL?**
$(x,y,z)=(1,2,0)+\lambda(2,3,1),\lambda\in\mathbb{R}$ **QUAL É QUAL?**	$(x,y,z)=(1,0,2)+\lambda(4,6,2),\ \lambda\in[1,3]$ **QUAL É QUAL?**	$y=2\ \wedge\ x=1\ \wedge\ 2\leq z\leq 3$ **QUAL É QUAL?**
$\begin{cases} x=1 \\ y=2 \qquad ,\ \lambda\in[-5,-4] \\ z=2+\lambda \end{cases}$ **QUAL É QUAL?**	$(x,y,z)=(1,2,2)+\lambda(0,1,0),\lambda\in[0,3]$ **QUAL É QUAL?**	$x=-4 \wedge y=2 \wedge z=4$ **QUAL É QUAL?**
$P(1,3,1)$ **QUAL É QUAL?**	$P(5,-3,-2)$ **QUAL É QUAL?**	$P(-1,-3,-6)$ **QUAL É QUAL?**


QUAL Ê QUAL?
QUAL Ê QUAL?
QUAL Ê QUAL?
QUAL Ê QUAL?
QUAL Ê QUAL?
QUAL Ê QUAL?
QUAL Ê QUAL?
QUAL Ê QUAL?
QUAL Ê QUAL?
QUAL Ê QUAL?
QUAL Ê QUAL?
QUAL Ê QUAL?

Anexo 8 - Cartas mistério do *Qual é Qual?*



JOGADOR 1 **CARTA MISTÉRIO** **?**	JOGADOR 1 **CARTA MISTÉRIO** **?**	JOGADOR 1 **CARTA MISTÉRIO** **?**
JOGADOR 1 **CARTA MISTÉRIO** **?**	JOGADOR 1 **CARTA MISTÉRIO** **?**	JOGADOR 1 **CARTA MISTÉRIO** **?**
JOGADOR 1 **CARTA MISTÉRIO** **?**	JOGADOR 1 **CARTA MISTÉRIO** **?**	JOGADOR 1 **CARTA MISTÉRIO** **?**
JOGADOR 1 **CARTA MISTÉRIO** **?**	JOGADOR 1 **CARTA MISTÉRIO** **?**	JOGADOR 1 **CARTA MISTÉRIO** **?**
JOGADOR 1 **CARTA MISTÉRIO** **?**	JOGADOR 1 **CARTA MISTÉRIO** **?**	JOGADOR 1 **CARTA MISTÉRIO** **?**
JOGADOR 1 **CARTA MISTÉRIO** **?**	JOGADOR 1 **CARTA MISTÉRIO** **?**	JOGADOR 1 **CARTA MISTÉRIO** **?**

Anexo 9 - Regras de *O Resgate Naval*

O
Resgate
Naval

Objetivo: Descobrir as peças do R.M.S. Titanic e do S.S. Nomadic
Material: Dois tabuleiros; duas folhas de resposta; dois lápis; 6 barcos Titanic e 4 S.S. Nomadic; 30 gotas e 10 cruzes.
Regras:
-Cada jogador tem em sua posse um tabuleiro, uma folha de respostas, um lápis, 3 peças do Titanic, 2 peças do S.S. Nomadic, 15b gotas e 5 cruzes;
-As peças são posicionadas em quadrículas onde as representações representam funções que se relacionam entre si, de alguma maneira;
-Existem representações gráficas, diagramas, domínios, expressões e representações por extenso;
-As peças do Titanic deverão ser colocadas em três quadrículas, de modo a que essas representações se relacionam somente entre si;
-As peças do S.S. Nomadic devem ser colocadas em apenas duas quadrículas, de modo a que essas representações se relacionem somente entre si. Não se podem relacionar com quaisquer outras representações no tabuleiro;
-Após serem colocadas as peças, o jogador mais velho inicia o jogo, questionando o seu adversário sobre a sua função, com o objetivo de decobrir a função correspondente aos pedaços do Titanic antes dos do S.S. Nomadic;
-Ao longo das jogadas, cada jogador vai questionando o seu adversário, alternadamente;
-Os jogadores têm que registar as perguntas feitas e as respetivas respostas;
-As perguntas só podem ser de resposta curta (sim ou não);
-quando o jogador descobrir a representação, procura a(s) representação(ções) que se relacionam com a descoberta;
-Na jogada seguinte esse jogador apresenta o conjunto de representações que descobriu:
A)O conjunto está completamente correto – o jogador ganha dois pontos
B) Uma das representações está correta, mas a(s) outra(s) não, porque se enganou a relacionar as representações – apenas ganha um ponto
C)O jogador não descobre o conjunto, porque o adversário lhe deu uma resposta errada – o adversário perde um ponto
-Se não descobrir o conjunto , o jogador joga até acertar;
-Quando descobrir o conjunto completo, passa a tentar descobrir a localização das peças do S.S. Nomadic;
-O jogo acaba quando um dos jogadores descobrir a localizaçãoo de todas as peças.

Anexo 10 - História de *O Resgate Naval*

O imponente e sublime navio R.M.S. Titanic aventurou-se pelo maligno e misterioso mar, pela primeira vez, no dia 10 de abril de 1912, após incansáveis trabalhadores o terem construído, visionários engenheiros o terem planeado e poderosos homens o terem financiado. A White Star Line sentiu-se altiva com a grande conquista que foi a construção de tão grandioso barco, que apelou à curiosidade de tantos e deslumbrou a população à sua volta.

O S.S. Nomadic, um barco auxiliar da White Star Line, transportou 274 passageiros a bordo do Titanic no dia da sua viagem inaugural, o que o tornou parte da própria trágica história do célebre navio afundado.

Apesar da sua grandeza, o Titanic esmoreceu no Oceano Atlântico no dia 15 de abril de 1912, após ter embatido com um iceberg e naufragado. Assim, o barco julgado inaufragável chegou ao seu fim, em conjunto com várias pessoas a bordo do mesmo.

Devido a este acontecimento lúgubre, enviamos esta carta para lhe pedir ajuda a encontrar os destroços do R.M.S. Titanic e do S.S. Nomadic, localizando-os o mais rapidamente possível.

Obrigado pela sua atenção,

Administração da White Star Line.