



JOSÉ NUNO DA PENHA COUTINHO CAGICA PINTO
Licenciado em Ciências de Engenharia Mecânica

OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA MULTIMATERIAL DE
ESTRUTURAS COM CRITÉRIOS DE RIGIDEZ
MASSA E CUSTO

MESTRADO EM ENGENHARIA MECÂNICA

Universidade NOVA de Lisboa

Novembro, 2021

OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA MULTIMATERIAL DE ESTRUTURAS COM CRITÉRIOS DE RIGIDEZ MASSA E CUSTO

JOSÉ NUNO DA PENHA COUTINHO CAGICA PINTO
Licenciado em Ciências de Engenharia Mecânica

Orientador: Dr. Pedro Samuel Gonçalves Coelho,
Professor Auxiliar,
Faculdade de Ciências e Tecnologia da
Universidade NOVA de Lisboa

Júri:

Presidente: Dr. José Manuel Cardoso Xavier, Professor Auxiliar,
Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade NOVA de Lisboa

Arguentes: Dr. João Mário Burguete Botelho Cardoso, Professor Auxiliar,
Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade NOVA de Lisboa
Dr. João Pedro de Sousa Oliveira, Professor Auxiliar Convidado,
Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade NOVA de Lisboa

Vogais: Dr. Pedro Samuel Gonçalves Coelho, Professor Auxiliar,
Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade NOVA de Lisboa

MESTRADO EM ENGENHARIA MECÂNICA

Universidade NOVA de Lisboa
Novembro, 2021

Otimização Topológica Multimaterial com critérios de rigidez massa e custo

Copyright © José Nuno da Penha Coutinho Cagica Pinto, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa.

A Faculdade de Ciências e Tecnologia e a Universidade Nova de Lisboa têm o direito, perpétuo e sem limites geográficos, de arquivar e publicar esta dissertação através de exemplares impressos reproduzidos em papel ou de forma digital, ou por qualquer outro meio conhecido ou que venha a ser inventado, e de a divulgar através de repositórios científicos e de admitir a sua cópia e distribuição com objectivos educacionais ou de investigação, não comerciais, desde que seja dado crédito ao autor e editor.

À minha Família

Agradecimentos

Em primeiro lugar, quero agradecer ao meu orientador, Prof. Dr. Pedro Coelho, por me acompanhar durante estes meses oferecendo a sua disponibilidade e paciência nos momentos mais críticos. Agradeço também a sua dedicação ao ensino e a partilha do seu gosto pela otimização estrutural.

Em segundo lugar, quero agradecer aos meus pais pelo apoio incondicional durante a minha carreira estudantil, aos meus avós pelas discussões pertinentes sobre as minhas paixões e futuro, aos meus irmãos pela camaradagem e partilha de responsabilidades e ao meu tio Nuno pela ajuda a escolher o meu rumo profissional.

Agradeço aos meus amigos. Aos Franciscos e Josés, às Marianas, ao Danyal, Carolina, Gonçalo, Rodrigo e Elisa que me acompanharam durante quase todo o meu percurso e me ajudaram nos momentos mais difíceis. Ao Rafael e Pedro que partilharam imensos momentos felizes comigo, enquanto me levantaram nos momentos mais negros.

Finalmente, quero agradecer a todos os professores que conheci, desde a creche até à universidade, por partilharem comigo o máximo da sua sabedoria, no pouco tempo que tivemos juntos.

Resumo

Esta dissertação tem como objetivo o desenvolvimento de metodologias de otimização topológica multimaterial de estruturas capazes de resolver problemas com critérios de rigidez, massa e custo, no domínio contínuo bidimensional.

Para o caso de estudo da viga de *Messerschmitt-Bölkow-Blohm*, MBB-Beam, são testadas e comparadas as formulações multimaterial de minimização de *compliance* (flexibilidade) com constrangimentos de volume, massa e custo. Estuda-se ainda uma formulação multi-objectivo.

Os problemas abordados são *Single Material Topology Optimization*, SMTO e *Multi Material Topology Optimization* com dois materiais, MMTO2, três materiais, MMTO3, e quatro materiais, MMTO4, em que se utiliza a lei de interpolação de material SIMP recursivo, para fazer a seleção de materiais.

Os resultados obtidos permitem confirmar o sucesso da metodologia desenvolvida na obtenção de estruturas rígidas, leves e económicas. A discussão de resultados demonstra que alguns materiais são mais vantajosos que outros, dependendo do critério do projeto a que se der mais importância.

Palavras-chave: Otimização Topológica, Multimaterial, Multi-objectivo, Volume, Massa, Custo.

Abstract

This dissertation aims to develop multimaterial topology optimization methodologies capable of solving problems with stiffness, mass and cost criteria, in the two-dimensional continuous domain.

For the MBB-Beam case study, compliance minimization multimaterial formulations are tested and compared with volume, mass and cost constraints, and the implementation of the multiobjective formulation is studied.

The problems addressed are SMTO (single material), MMT02 (two materials), MMT03 (three materials) and MMT04 (four materials) where the recursive SIMP material interpolation law is used to select the material.

The results obtained confirm the effectiveness of the methodology developed in obtaining rigid, light and sustainable structures. The results also demonstrate the need for an informed choice of materials to be used.

Keywords: Optimization, Topology, Multimaterial, Multiobjective, Volume, Mass, Cost.

Simbologia e Notações

Latim

C	Compliance
E	Módulo de Young
E_e	Módulo de Young do elemento e
E^m	Módulo de Young da fase de material m
$\mathbf{E}, E_{ijkl}$	Tensor da rigidez
$\mathbf{E}_e$	Tensor da rigidez do element e
$\mathbf{f}$	Vetor de carregamentos
$f(x)$	Função objetivo
$f_q(x)$	Função objetivo do critério q
g_j	Constrangimento de desigualdade
g^V	Constrangimento de volume
g^M	Constrangimento de massa
g^P	Constrangimento de custo
h_k	Constrangimento de igualdade
$\hat{H}_{ei}$	Fator de Peso
$\mathbf{K}$	Matriz de rigidez global
$\mathbf{K}_e$	Matriz de rigidez do element e
N	Número de elementos finitos
M	Massa total
M^*	Massa ideal
p	Expoente de penalização

r_{min}	Raio de filtragem
$\mathbf{u}$	Vetor de deslocamentos global
$\mathbf{u}_e$	Vetor de deslocamentos do element e
V	Volume Total
V^*	Volume Maximo
V_{fm}	Fração volumica da fase de material m
V_{fT}	Fração volúmica total
w_i	Peso relativo da função objetivo i
$\mathbf{x}$	Vetor das variaveis de projeto
x_e	Variavel de densidade do elementos e
$x_{e,m}$	Variavel de densidade da fase de material m no elemento e
$\bar{x}$	Limite superior das variaveis de densidade
$\underline{x}$	Limite inferior das variaveis de densidade

Grego

β_e	Característica arbitrária do elemento e
$\beta_{m,M}$	Característica arbitrária do material m consoante M fases de material
$\boldsymbol{\epsilon}, \epsilon_{kl}$	Tensor da deformações
$\boldsymbol{\epsilon}$	Vetor das deformações
ρ_e	Densidade mássica do elemento e
ρ^m	Densidade mássica do material m
$\boldsymbol{\sigma}, \sigma_{ij}$	Tensor das tensões
τ_e	Custo volumico do element e
τ^m	Custo volúmico do material m

ν	Coeficiente de Poisson
φ_e	Função degrau
Ω	Dominio de design
Ω^{mat}	Dominio de design preenchido com material
Ω^{vaz}	Dominio de design preenchido com vazio
$ \Omega _e$	Volume do element e

Abreviaturas

AM	<i>Additive Manufacturing</i>
DMO	<i>Discrete Material Optimization</i>
MEF	Método do Elementos Finitos
MMA	<i>Method of Moving Asymptotes</i>
MMTO	<i>Multi Material Topology Optimization</i>
SEM	<i>Spring Element Model</i>
SIMP	<i>Solid Isotropic Material with Penalization</i>
SMTO	<i>Single Material Topology Optimization</i>
RVE	<i>Representative Volume Element</i>

Índice Geral

AGRADECIMENTOS	IX
RESUMO	XI
ABSTRACT	XIII
SIMBOLOGIA E NOTAÇÕES	XV
ÍNDICE GERAL	XIX
ÍNDICE DE FIGURAS	XXIII
LISTA DE TABELAS.....	XXV
CAPÍTULO 1. INTRODUÇÃO.....	1
1.1 MOTIVAÇÃO	1
1.2 OBJETIVOS.....	1
1.3 ESTRUTURA.....	2
CAPÍTULO 2. ESTADO DE ARTE	3
2.1 OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA	3
2.2 OTIMIZAÇÃO MULTIMATERIAL.....	4
2.3 OTIMIZAÇÃO MULTI-OBJETIVO.....	7
CAPÍTULO 3. METODOLOGIA DE PROJETO	9
3.1 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA.....	10
3.2 PROBLEMA RELAXADO E SIMP.....	13
3.2.1 <i>Múltiplas fases de material</i>	14
3.2.2 <i>Otimização Multi-objetivo</i>	15
3.3 ALGORITMOS DE OTIMIZAÇÃO	16
3.4 ANALISE DE SENSIBILIDADES	16
3.5 TÉCNICAS DE FILTRAGEM.....	17
CAPÍTULO 4. FORMULAÇÃO DOS PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO	21
4.1 CLASSES DE PROBLEMAS	21

4.2	SMT0	22
4.3	MMT0.....	23
4.3.1	<i>Volume local</i>	24
4.3.2	<i>Massa global</i>	27
4.3.3	<i>Massa global e custo global</i>	30
4.3.4	<i>Multi-objetivo</i>	32
4.4	ESTRATÉGIA DE PENALIZAÇÃO, RAIO DE FILTRAGEM E INICIALIZAÇÃO DAS VARIÁVEIS DE PROJETO	35
CAPÍTULO 5. CÁLCULO DAS SENSIBILIDADES.....		39
5.1	FUNÇÃO OBJETIVO.....	39
5.1.1	<i>Uni-objectivo</i>	40
5.1.2	<i>Multi-objetivo</i>	41
5.2	CONSTRANGIMENTOS	42
5.2.1	<i>Constrangimentos de volume</i>	42
5.2.2	<i>Constrangimentos de Massa e Custo</i>	43
CAPÍTULO 6. RESULTADOS		45
6.1	RESULTADOS SMT0-V	46
6.2	S-MMT02-V.....	48
6.3	S-MMT03-V E S-MMT04-V	51
6.4	S-MMT02-M	52
6.5	S-MMT03-M E S-MMT04-M	54
6.6	S-MMT02-MP, S-MMT03-MP E S-MMT04-MP	56
6.7	M-MMT04-V	60
6.8	M-MMT04-V DUPLO	64
CAPÍTULO 7. CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS		69
7.1	CONCLUSÕES.....	69
7.2	TRABALHOS FUTUROS	71
CAPÍTULO 8. BIBLIOGRAFIA.....		73

ANEXOS	77
ANEXO A – COMPARAÇÃO ENTRE SIMP RECURSIVOS	79
ANEXO B – BASE DE DADOS DAS PROPRIEDADES DOS MATERIAIS USADOS	81

Índice de Figuras

Figura 2.1 <i>Long Cantiléver</i> adaptado de [20].....	5
Figura 2.2- <i>Control Arm</i> adaptado de [20]	5
Figura 2.3 Evolução da <i>Compliance</i> segundo a fração volúmica do aço no problema <i>Long Cantiléver</i> adaptado de [20]	6
Figura 2.4 Evolução da <i>Compliance</i> segundo a fração volúmica do aço no problema <i>Control Arm</i> adaptado de [20]	6
Figura 3.1 Fluxograma de otimização	9
Figura 3.2 Fluxograma de otimização Topológica.....	9
Figura 3.3 Malha em <i>checkerboard</i> adaptado de [30].....	18
Figura 3.4 Ilustração de diferentes refinamentos de malha adaptado de [30]	18
Figura 4.1 <i>Continuation Approach</i> para até 3 fases de material	36
Figura 4.2 <i>Continuation Approach</i> para 4 fases de material em Uni-objetivo.....	36
Figura 4.3 <i>Continuation Approach</i> para Multi-objetivo	37
Figura 4.4 - <i>Continuation Approach</i> da fração volúmica inferior	37
Figura 6.1 MBB-Beam	45
Figura 6.2 Distribuição de material para os problemas S-SMTO-V	47
Figura 6.3 Distribuição de material para os casos de problemas S-MMTO2-V	49
Figura 6.4 Distribuição de material para os casos de problemas S-MMTO3-V e S-MMTO4-V	52
Figura 6.5 Distribuição de material para os casos de problemas S-MMTO2-M.....	53
Figura 6.6 Distribuição de material nos problemas S-MMTO3-M e S-MMTO4-M	55
Figura 6.7 Distribuição de material para os casos de problemas S-MMTO2-MP.....	57
Figura 6.8 Distribuição de material para os casos de problemas S-MMTO3-MP e S-MMTO4-MP....	58
Figura 6.9 Distribuição de material para os casos de problemas M-MMTO-V	61
Figura 6.10 Gráfico da evolução das funções objetivos em relação a w_2 em M-MMTO4-V	62
Figura 6.11 Gráfico da fração volúmica dos materiais em função de w_2 em M-MMTO4-V.....	63
Figura 6.12 - Gráfico da curva de <i>Pareto</i> de M-MMTO4-V.....	63
Figura 6.13 Distribuição de material para os casos de problemas M-MMTO4-V Duplo	65
Figura 6.14 Gráfico da evolução das funções objetivos em relação a w_2 em M-MMTO4-V duplo	66
Figura 6.15 Gráfico da fração volúmica dos materiais em função de w_2 em M-MMTO4-V duplo.....	66
Figura 6.16 Gráfico da curva de <i>Pareto</i> de M-MMTO4-V Duplo	67

Lista de Tabelas

Tabela 4.1 Classificação das formulações dos problemas de otimização topológica consoante o número de fases de material e do tipo de constrangimentos	22
Tabela 4.2 Classificação das formulações dos problemas de otimização topológica consoante o tipo de função objetivo	22
Tabela 4.3 Formulação dos problemas SMTO consoante o tipo de filtro	23
Tabela 4.4 Formulação dos problemas MMTO2 com constrangimentos de volume e apenas uma função objetivo	24
Tabela 4.5 Constrangimentos de volume adicionais considerando mais fases de material.....	25
Tabela 4.6 Interpolação do Módulo de Young para 3 e 4 fases de material.....	25
Tabela 4.7 Seleção da fase de material nos problemas MMTO2	26
Tabela 4.8 Seleção da fase de material nos problemas MMTO3	26
Tabela 4.9 Seleção de Material nos problemas MMTO4.....	27
Tabela 4.10 Interpolação da densidade mássica em função do número de fases de material	28
Tabela 4.11 Formulação do problema MMTO2 com constrangimento de massa.....	29
Tabela 4.12 Formulação do constrangimento de massa para três e quatro fases	29
Tabela 4.13 Interpolação do custo volúmico em função do número de fases de material	30
Tabela 4.14 Formulação do problema MMTO2 com constrangimento de massa e custo	31
Tabela 4.15 Formulação do constrangimento de custo para três e quatro fases.....	31
Tabela 4.16 Formulação do problema Multi-objetivo.....	34
Tabela 5.1 Sensibilidade da <i>Compliance</i>	40
Tabela 5.2 Sensibilidade da função Massa.....	41
Tabela 5.3 Sensibilidade da função Custo.....	41
Tabela 5.4 Sensibilidade dos constrangimentos de volume para MMTO2.....	42
Tabela 5.5 Sensibilidade dos constrangimentos de volume para MMTO3.....	42
Tabela 5.6 Sensibilidade dos constrangimentos para MMTO4.....	43
Tabela 5.7 Sensibilidade dos constrangimentos de massa e custo	44
Tabela 6.1 Propriedades das fases de material consideradas.....	46
Tabela 6.2 Propriedades relativas das fases de material consideradas	46
Tabela 6.3 Resultados das otimizações SMTO	47
Tabela 6.4 Comparação das soluções de otimização dos casos B) , C) e D) com o caso de referência A)	48
Tabela 6.5 Resultados das otimizações S-MMTO2-V	49

Tabela 6.6 Comparação das soluções de otimização de MMTO2 com as soluções SMTO (Tabela 6.3)	50
Tabela 6.7 Resultados das otimizações S-MMTO3-V e S-MMTO4-V	51
Tabela 6.8 Resultados das otimizações S-MMTO2-M	53
Tabela 6.9 Comparação das soluções de otimização de S-MMTO2-M com as soluções S-MMTO2-V	54
Tabela 6.10 Resultados das otimizações S-MMTO3-M e S-MMTO4-M	54
Tabela 6.11 Comparação das soluções de otimização de S-MMTO3-M e S-MMTO4-M com as soluções S-MMTO3-V e S-MMTO4-V	55
Tabela 6.12 Resultados das otimizações S-MMTO2-MP	57
Tabela 6.13 Resultados das otimizações S-MMTO3-MP e S-MMTO4-MP	58
Tabela 6.14 Comparação das soluções de otimização de S-MMTO2-MP com as soluções S-MMTO2- M	59
Tabela 6.15 Comparação das soluções de otimização de S-MMTO3-MP e S-MMTO4-MP com as soluções S-MMTO3-M e S-MMTO4-M (Tabela 6.10)	59
Tabela 6.16 Valores de normalização das funções objetivo	60
Tabela 6.17 Propriedades das otimizações M-MMTO4-V	62
Tabela 6.18 Resultados das otimizações M-MMTO4-V Duplo	65

Capítulo 1. Introdução

1.1 Motivação

Com um aumento da consciencialização ambiental, justificada pela escassez de recursos naturais e o agravamento na importância da conservação de energia, a procura por projetos estruturais mais sustentáveis sem prescindir da sua integridade estrutural, ganhou uma maior importância. A otimização estrutural é, nos tempos modernos, um tópico muito discutido dentro da comunidade científica pois permite obter soluções sustentáveis que correspondem a essa procura. Com o desenvolvimento de tecnologias de fabrico aditivo as soluções multimateriais ganham credibilidade, e assim, a otimização multimaterial torna-se pertinente e alvo de estudo.

A otimização estrutural é uma ferramenta útil para as indústrias aeronáutica e automóvel, pelo que a introdução do carácter multimaterial nas otimizações, é favorável pois a utilização de dois ou mais materiais com propriedades mecânicas distintas pode promover uma estrutura final mais leve e/ou com um maior nível de rigidez, aumentando assim a sua *performance*.

Estruturas leves, rígidas e baratas só podem ser concebidas utilizando vários materiais pois a flexibilidade (*compliance*), massa e custo são propriedades conflituosas do material. O foco desta dissertação é o desenvolvimento de metodologias de otimização topológica multimaterial que balancem os critérios de sustentabilidade e *performance* de forma a obter a melhor estrutura possível.

1.2 Objetivos

Com os avanços nas tecnologias de fabrico, como a impressão 3D e fabrico aditivo, as soluções topológicas multimateriais podem ser consideradas concebíveis. Esta dissertação pretende explorar os benefícios da utilização de vários materiais na otimização topológica, resolvendo problemas de elasticidade em meio contínuo bidimensional. Apresentam-se metodologias de otimização topológica multimaterial com critérios de rigidez, massa e custo de forma a estudar os benefícios da incorporação dos vários materiais no projeto ótimo estrutural. O trabalho culmina com a formulação multi-objetivo onde se aplica a importância dos diferentes critérios diretamente na formulação.

Numa primeira fase é estudada a utilização de vários materiais no projeto ótimo de minimização de *Compliance* com constrangimento de volume num problema sugerido pelo trabalho de Sigmund[1]. Considerando a viga de *Messerschmitt-Bölkow-Blohm*, MBB-Beam, como o domínio de design,

determina-se a geometria ótima com constrangimentos de fração volúmica total e, simultaneamente, a distribuição de cada material com um constrangimento de fração volúmica dedicado a cada material.

Para estudar a melhor distribuição entre materiais, formula-se um problema com constrangimento global de massa. Com esta formulação é estudado se os materiais com melhor relação rigidez/massa são beneficiados. Adicionalmente, é introduzido o constrangimento de custo que impõe uma terceira dimensão nas soluções, penalizando os materiais mais caros.

Finalmente incorpora-se a massa e o custo da estrutura como objetivos, juntamente com a *Compliance*, fazendo-se assim uma otimização multi-objetivo, para estudar o “*trade-off*” entre critérios.

De modo a aplicar estas formulações, estudos sobre as sensibilidades devem ser feitos, com especial atenção à *Compliance*.

1.3 Estrutura

Esta dissertação está organizada em 7 capítulos. No presente capítulo apresenta-se a motivação para a realização deste estudo e definem-se objetivos.

No Capítulo 2 introduzem-se os temas de otimização topológica, otimização multimaterial e otimização multi-objetivo referenciando vários estudos e trabalhos sobre os respetivos temas.

No Capítulo 3 aborda-se a metodologia de otimização utilizada, detalhando os vários estágios do seu processo.

No Capítulo 4 são formulados os problemas de otimização multimaterial considerando varias fases de material com: constrangimento de volume; constrangimento de massa; constrangimento de massa e custo; e multi-objetivo com constrangimento de volume.

No Capítulo 5 são apresentados os cálculos das sensibilidades necessárias para a utilização de algoritmos baseados no gradiente.

Os resultados das formulações propostas são apresentados no Capítulos 6.

No Capítulo 7 são retiradas as conclusões com base nos resultados obtidos e apresentam-se propostas para trabalhos futuros.

Capítulo 2. Estado de Arte

2.1 Otimização Topológica

A otimização estrutural é um domínio na Engenharia Mecânica que estuda e aplica metodologias de modo a obter a estrutura ótima para um propósito definido. Esta disciplina tem impacto principalmente nos projetos de estruturas mais complexos, devido aos métodos tradicionais serem mais adequados para projetos simples. Para alcançar a estrutura que melhor desempenha o seu propósito (**Função Objetivo**) inicia-se um processo iterativo onde se modificam os parâmetros da estrutura consoante um algoritmo de otimização (**Variáveis de projeto**) sem violar os limites estruturais (**Constrangimentos**).

A otimização estrutural foi introduzida na comunidade científica através dos trabalhos de Maxwell [2] em 1890 e Michell [3] em 1904. No entanto, só após 1950 é que se deu início ao estudo da otimização estrutural moderna suportada pelos avanços tecnológicos dos computadores digitais e o desenvolvimento de métodos numéricos de programação matemática e de métodos numéricos de análise de estruturas, como o Método dos Elementos Finitos.

É possível classificar a otimização estrutural em três categorias principais: dimensional, forma e topológica. Na otimização dimensional as variáveis de projeto podem ser contínuas ou discretas e representam as características das secções transversais, como por exemplo, diâmetros de barras, áreas de secções, espessura de placas, número de lâminas ou orientação de fibras de um material compósito. Na otimização de forma tem-se predefinido a topologia da estrutura, mas com a fronteira Γ , que limita o domínio Ω , a funcionar como variável de projeto. A otimização topológica procura preencher um domínio com uma quantidade de material limitado determinando a localização, tamanho e forma da ausência do material através de um processo repetitivo de adição e remoção do mesmo.

Em 1967, Dorn et al.[4] introduz a metodologia *Ground Structure Approach* para a otimização de estruturas reticuladas. Esta metodologia consiste em partir de uma estrutura reticulada, constituída por um determinado número de nós e de elementos tipo barra ou viga que fazem conexão entre nós, e determinar a distribuição mais eficiente de material utilizando variáveis booleanas, 0 ou 1, onde 1 representa a existência de elemento de ligação e 0 a sua inexistência.

Em 1988, Bendsøe & Kikuchi [5] contribuem para uma nova era na otimização topológica nos domínios contínuos bidimensionais com a publicação do seu trabalho sobre criação de um design estrutural ótimo utilizando o método da homogeneização. Aqui, os autores apresentam uma metodologia

que consiste em introduzir de vazio no domínio preenchido por um material homogêneo e isotrópico, de forma que a estrutura resultante aguarde as forças aplicadas cumprindo os requisitos de *design*.

Em 1989 uma abordagem alternativa conhecida por *power-law approach* ou SIMP (*Solid Isotropic Material with Penalization*) é apresentada por Bendsoe [6], e por Zhou e Rozvany [7]. Aqui, as propriedades dos materiais como o tensor da rigidez ou a massa são dependentes da densidade relativa que funciona como variável de projeto, sendo esta penalizada para assegurar valores discretos entre 0 ou 1 e assim ter uma solução com material não fictício. Esta estratégia é implementada por Sigmund[1] e Sigmund et al.[8] num programa Matlab que permite resolver problemas de otimização tendo como objetivo a minimização de flexibilidade, referenciada como *Compliance*.

Com estes contributos, a otimização topológica, ou SMTO (*Single Material Topology Optimization*) tem sido extensivamente investigada dando lugar a várias formulações da função objetivo conjugadas com diferentes constrangimentos, exemplificado no trabalho de Bruggi e Duysinx [9] onde a *Compliance* é um constrangimento de projeto da estrutura enquanto se minimiza a massa global.

2.2 Otimização Multimaterial

Com um acréscimo na importância de criação de estruturas eficientes e sustentáveis, os engenheiros projetistas procuram metodologias e soluções que acompanhem a procura. Na otimização estrutural utilizam-se com frequência ligas de aço por terem rigidez elevada. No entanto, devido à sua densidade alta, tornam a estrutura muito pesada. Como alternativas mais leves existem ligas de alumínio e de titânio, mas estas são, respetivamente, mais flexíveis e mais caras. A incorporação de uma metodologia de seleção de material na estratégia de otimização topológica permite captar, em teoria, o melhor de cada material e assim, juntamente com uma formulação matemática rigorosa e algoritmos de otimização adequados, é estabelecida a otimização topológica multimaterial, ou MMTTO (*Multi Material Topology Optimization*).

A otimização multimaterial tem sido alvo de vários estudos. Ramani [10] desenvolveu um algoritmo que deriva pseudo-sensibilidades da função objetivo e constrangimentos para escolher o material, mantendo as variáveis na forma discreta.

Saxena [11] usou algoritmo genético designando as variáveis de design como binárias, 0 de vazio e 1 de material, para resolver problemas multimateriais.

Stegmann & Lund [12] construíram a matriz constitutiva do sistema fazendo a soma ponderada das matrizes constitutivas de cada material.

O cálculo heurístico das sensibilidades impede a resolução de problema que envolvem um grande número de variáveis de *design* pois a afinação dos parâmetros heurísticos implica um valor significativo de testes. Por conseguinte, métodos de interpolação são utilizados para fazer a seleção de material.

Stegmann & Erik [13] desenvolveram um método de interpolação de soma ponderada baseado nas matrizes constitutivas dos elementos e aplicaram na otimização de compósitos laminados.

Zuo & Saitou [14] propuseram um SIMP multimaterial ordenado para resolver problemas de minimização de *Compliance* com constrangimento de massa e custo.

Kim & Li [15] aplicaram constrangimentos de volume a cada material na otimização da *Compliance* e criaram um método para obter o melhor equilíbrio entre materiais.

Jung et al [16] considerou o peso próprio na otimização do teto de um autocarro da estrutura e Lu et al [17] juntou a otimização multimaterial à otimização da secção de um autocarro.

Mais recentemente, existem formulações de otimização em estruturas reticuladas onde se combina critérios de rigidez com pico de tensão, como é o trabalho de Pratas[18], que formulou problemas de minimização de massa multimaterial com constrangimentos de tensão, e Almeida[19], que usou a área de barras como variável de projeto. Ambos[18] e [19] introduziram na sua formulação uma biblioteca de materiais dissimilares para a obtenção de melhores resultados.

Um contributo importante para esta dissertação vem por parte de Chao Li e Il Yong Kim [20]. Neste estudo os autores resolveram problemas de minimização de *Compliance* com constrangimento de volume material utilizando algoritmos de otimização topológica multimaterial bidimensionais e tridimensionais. Começando por testar a fiabilidade do programa desenvolvido, os autores estudaram dois casos: *Long cantiléver*, Figura 2.1, uma viga bidimensional constrangida no lado esquerdo e uma força vertical descendente aplicada na extremidade direita; *Control arm*, uma peça tridimensional com 2 pontos de fixação totalmente constrangidos em duas extremidades, um terceiro ponto apenas bloqueado na direção vertical e com 3 forças concentradas numa extremidade, Figura 2.2.

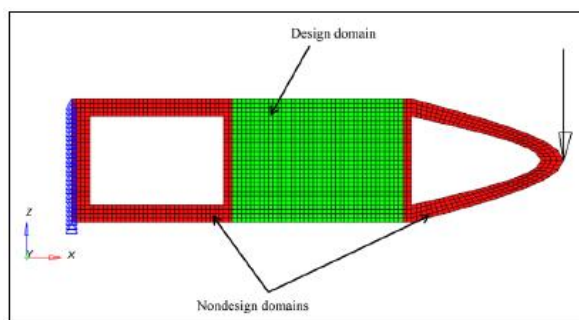


Figura 2.1 *Long Cantiléver* adaptado de [20]

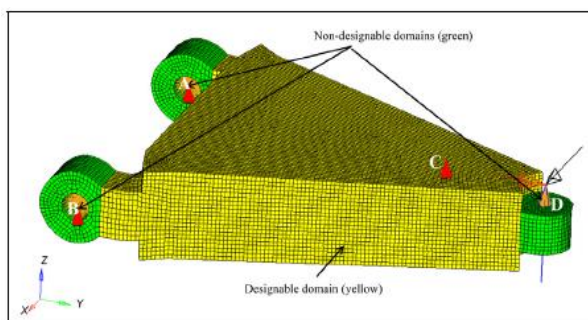


Figura 2.2- *Control Arm* adaptado de [20]

Após ter sido resolvido o problema de otimização com um material, foram resolvidos os problemas com duas fases de material, em que cada fase é limitada por constrangimentos locais de volume. De forma a comparar com a solução *Single material*, ao variar a fração volúmica do primeiro material, calculou-se a fração volúmica do segundo material de forma a manter a massa total da estrutural igual em cada solução. Obtiveram-se os resultados das Figuras 2.3 e 2.4, variando a combinação de frações volúmicas dos dois materiais.

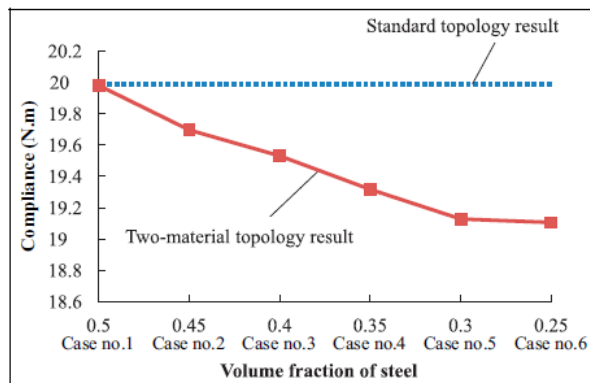


Figura 2.3 Evolução da *Compliance* segundo a fração volúmica do aço no problema *Long Cantiléver* adaptado de [20]

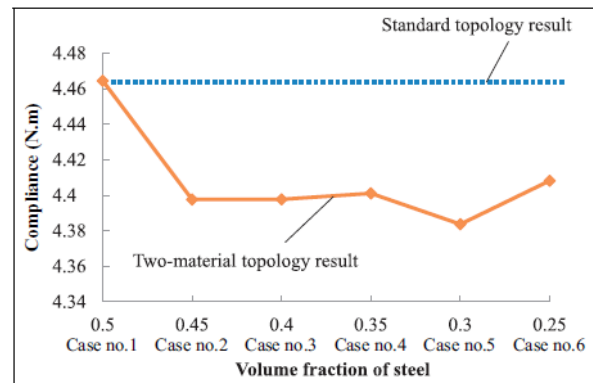


Figura 2.4 Evolução da *Compliance* segundo a fração volúmica do aço no problema *Control Arm* adaptado de [20]

Os resultados demonstraram uma correlação entre a otimização multimaterial e um aumento de rigidez da estrutura. Os autores resolvem ainda mais dois problemas com dimensão e complexidade maior: *Cross-member of chassis frame*, uma estrutura em “I” presente na configuração do chassis de um automóvel; e *Engine cradle*, a estrutura que suporta o motor. Ambos os problemas são apresentados num contexto de prática de engenharia. Nestes estudos confirma-se que as soluções multimateriais são superiores, em termos de rigidez quando se quer uma massa total fixa e fração volúmica total não restringida, quando comparadas com os resultados com um material apenas. No entanto, essas soluções diferem, dependendo da fração volúmica de cada material. Também, a escolha de materiais disponíveis no mercado tem impacto no conceito inicial de um projeto de engenharia. Sublinhe-se que os constrangimentos de volume têm importância e são práticos pois podem ser traduzidos como constrangimentos de custo e da manufacturabilidade.

Anteriormente, nas otimizações com um só material, SMTO, tanto a massa como o custo estavam diretamente associados ao volume da estrutura, pelo que, um dos benefícios da otimização multimaterial é a possibilidade de incluir a massa e o custo nos critérios do projeto. O custo, no entanto, não pode ser calculado diretamente, pois, este depende dos custos associados à produção da estrutura e à manufacturabilidade de cada material.

Stroobants et. al.[21] propôs uma abordagem a soluções multimateriais considerando massa e custos dos materiais. Desmet et al.[22] propôs métodos de resolução de problemas multimateriais genéricos tendo em conta o custo de materiais e a sua manufacturabilidade.

Em alternativa considera-se a tecnologia de fabrico aditivo, AM (*Additive Manufacturing*), para ultrapassar os problemas de manufacturabilidade removendo constrangimentos de geometrias e processos inerentes a maquinação convencional. Kennedy[23] utilizou os métodos AM para aplicar MMTO a uma estrutura a ser usada na indústria aeronáutica.

Apesar dos avanços recentes nas tecnologias AM, a ligação entre dois metais dissimilares, como o aço e titânio continua a demonstrar dificuldades, e por isso é sugerido a utilização de materiais poliméricos, que mostram resultados positivos no fabrico de soluções multimateriais, referencia-se Bandyopadhyay [24].

2.3 Otimização Multi-objetivo

As metodologias de otimização apresentadas até agora procuram a topologia que maximiza apenas um aspeto estrutural. Sendo o projeto de estruturas multidisciplinar, existindo vários aspetos a otimizar, a formulação multi-objetivo permite acomodar várias funções objetivo conflituosas consoante o parecer do engenheiro projetista.

Segundo Grandhi e Bharatram[25], a escolha de um critério dominante a otimizar no projeto estrutural é, muitas vezes, o suficiente se for acoplado a constrangimentos de igualdade ou desigualdade. No entanto, a determinação dos limites destes constrangimentos pode não ser uma tarefa fácil, sendo muitos dos valores determinados algo abstratos no problema prático. Se o limite não pode ser determinado, considera-se razoável tratar o seu valor como um objetivo e assim entregar ao engenheiro projetista a tarefa de escolher a melhor distribuição entre os varios objetivos.

Existem várias abordagens na acoplagem das várias funções objetivos, ver Arora [26] e Vareiso et al. [27], sendo a mais comum a soma ponderada das funções objetivo. Esta abordagem envolve normalizar as funções para que estas estejam em pé de igualdade na otimização e cada uma tenha um peso relativo associado á importância dada pelo engenheiro projetista.

A aplicação desta metodologia pode ser observada em [25], onde os autores discutiram a aplicação da otimização multi-objetivo em estruturas de fuselagem.

Conde et al.[28] utilizou a metodologia multi-objetivo, nomeadamente o método de soma ponderada, para formular problemas de otimização de compósitos reforçados com fibra híbrida com o fim de obter um comportamento “pseudo-dúctil”. Os problemas multi-objetivo procuram obter o melhor

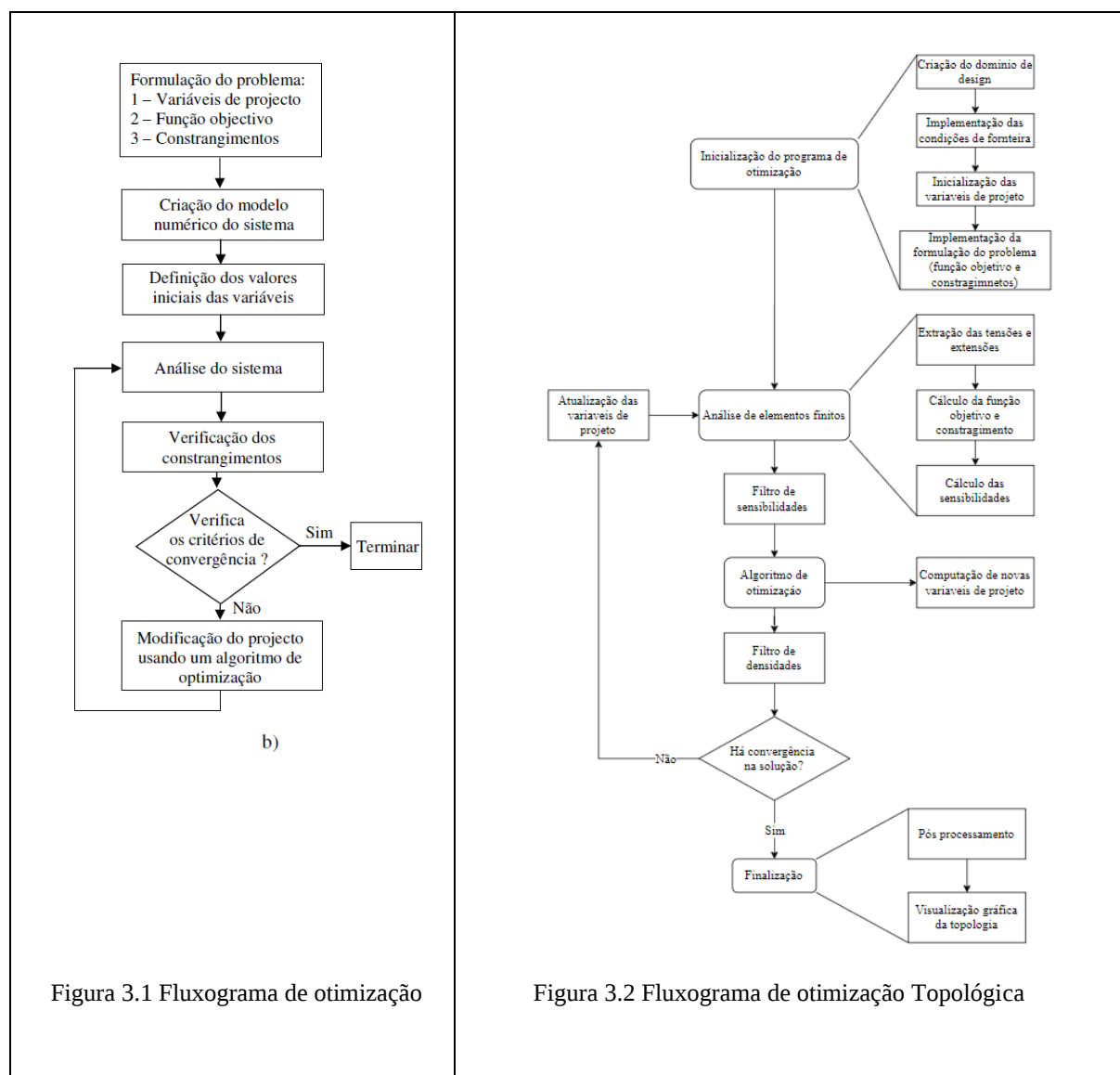
balanço entre os critérios de falha e ductilidade, combinando diferentes tipos de fibras numa matriz polimérica.

No mesmo espectro de compósitos híbridos, Conde et al.[29] resolveu os mesmos problemas propostos em [28] mas modificando para incluir SEM, (*Spring Element Model*), um modelo numérico com RVE (*Representative Volume Element*) que prevê com mais precisão o comportamento do compósito.

Bureerat e Kunakote [30] compararam a performance de diferentes algoritmos de otimização multi-objetivo.

Capítulo 3. Metodologia de Projeto

Como é referido anteriormente, a obtenção de um projeto ótimo estrutural é por natureza um processo iterativo que, utilizando a formulação inicial do problema, analisa o sistema e gera uma solução melhorada. Esta solução é subsequentemente analisada dando início a um ciclo que encerra quando as soluções convergem, cumprindo os requisitos iniciais do problema. Aplicando esta metodologia de otimização a um problema de otimização comum, a formulação do problema procura melhorar a **função objetivo** utilizando um **algoritmo de otimização** para obter em cada iteração **variáveis de projeto** que cumpram os **constrangimentos**. Esta metodologia é ilustrada na Figura 3.1 com a adaptação para problemas de otimização topológica na Figura 3.2



As formulações dos problemas de otimização são muito variadas podendo depender dos objetivos, constrangimentos e variáveis de projeto, que consoante a natureza do problema e/ou o algoritmo de otimização utilizado, podem convergir para soluções distintas.

3.1 Formulação do problema de otimização topológica

Um problema geral de otimização segue a seguinte formulação standard:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & f(\mathbf{x}) \\ \text{s. a} \quad & \begin{cases} g_j(\mathbf{x}) \leq 0 & ; j = 1, \dots, m \\ h_k(\mathbf{x}) = 0 & ; k = 1, \dots, p \\ \bar{x}_i \leq x_i \leq \underline{x}_i & ; i = 1, \dots, n \end{cases} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Aqui $f(\mathbf{x})$ é a função objetivo segundo $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ que é o vetor das n variáveis de projeto, $g_j(\mathbf{x})$ são os m constrangimentos de desigualdade, $h_k(\mathbf{x})$ os p constrangimentos de igualdade, e $\bar{x}_i$ e $\underline{x}_i$ os limites superior e inferior das variáveis de projeto, respetivamente.

Adaptando esta formulação a um problema comum de otimização topológica, temos a maximização da rigidez, ou seja, minimizar a sua flexibilidade (*compliance*), C , de uma estrutura com limitação de material, V^* , em um domínio Ω composto pelos subdomínios de material, Ω_{mat} , ou vazio, Ω_{vaz} , por N elementos finitos, e . A formulação fica:

$$\begin{aligned} \min_{\varphi_e} \quad & C = \mathbf{f}^T \mathbf{u} \\ \text{s. a} \quad & \begin{cases} \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad \mathbf{K} = \mathbf{K}(\mathbf{E}_e(\varphi_e)) \\ \sum_{e=1}^N \varphi_e |\Omega|_e - V^* \leq 0 \\ \varphi_e \in \{0,1\} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Onde $\mathbf{f}$ é o vetor das cargas aplicadas, $\mathbf{u}$ é o vetor dos deslocamentos nodais, φ_e é a função degrau que define a existência ou não de material em cada elemento finito e ,

$$\varphi_e = \begin{cases} 1, & \text{se } \varphi_e \in \Omega_{mat} \\ 0, & \text{se } \varphi_e \in \Omega_{vaz} \end{cases} \quad (3.3)$$

$\mathbf{K}$ é a matriz de rigidez global do sistema que é criada acoplando as matrizes de rigidez de cada elemento, $\mathbf{K}_e$, que por sua vez são dependentes do tensor de rigidez de cada elemento, $\mathbf{E}_e$, sendo que:

$$\mathbf{K}(\mathbf{E}_e(\varphi_e))\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad \text{com} \quad \mathbf{K}(\mathbf{E}_e(\varphi_e)) = \sum_{e=1}^N \mathbf{K}_e(\mathbf{E}_e(\varphi_e)) \quad e \quad \mathbf{E}_e(\varphi_e) = \varphi_e \mathbf{E}^{(1)} \quad (3.4)$$

$\mathbf{E}^{(1)}$ é o tensor de rigidez do material a ser utilizado. Considerando que $\mathbf{u}_e$ é o vetor de deslocamento do elemento, a *Compliance*, C , pode então ser escrita da seguinte forma:

$$C = \sum_{e=1}^N \mathbf{u}_e^T \mathbf{K}_e \mathbf{u}_e \quad (3.5)$$

Evidenciando a função degrau temos:

$$C = \sum_{e=1}^N \varphi_e \mathbf{u}_e^T \mathbf{K}^{(1)} \mathbf{u}_e \quad (3.6)$$

Onde $\mathbf{K}^{(1)}$ é a rigidez do material a ser utilizado.

Neste tipo de formulação os materiais são considerados isotrópicos com comportamento elástico. Pela Lei de Hooke, o tensor das tensões, σ_{ij} , relaciona-se ao tensor das deformações, ε_{kl} , pela seguinte equação constitutiva:

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (3.7)$$

E_{ijkl} , anteriormente designado por $\mathbf{E}_e$, é o tensor da de 4ª ordem do material que é constituído por coeficientes elásticos que definem o comportamento elástico do material no espaço tridimensional. Devido às simetrias inerentes dos materiais isotrópicos apenas é preciso fornecer duas constantes independentes para completar o tensor. Essas constantes são o módulo de Young, E_e , e o coeficiente de Poisson, ν . No caso da otimização bidimensional em elasticidade plana, considera-se duas situações para a obtenção das tensões. A primeira, tensão plana, determina que a tensão resultante na terceira direção

principal é nula existindo apenas extensão nesta direção, enquanto a segunda situação, extensão plana, determina que esta extensão seja nula, e, portanto, na terceira direção principal existe só tensão. Nesta dissertação considera-se tensão plana.

Tendo um domínio constituído por N elementos finitos, o volume do domínio preenchido por material, Ω_{mat} , é dado por:

$$V = \sum_{e=1}^N \varphi_e |\Omega|_e \quad (3.8)$$

Aqui $|\Omega|_e$ representa o volume de cada elemento. A quantidade máxima de material a ser utilizado, V^* é determinado pela percentagem de volume do domínio a ser preenchido, V_f :

$$V^* = V_f \sum_{e=1}^N |\Omega|_e \quad (3.9)$$

Generalizando o constrangimento de volume global, g^V , temos:

$$g^V = \frac{\sum_{e=1}^N (\varphi_e |\Omega|_e)}{V_f \sum_{e=1}^N |\Omega|_e} \leq 1 \quad (3.10)$$

Da mesma forma é possível calcular a massa, custo ou outras propriedades globais do sistema utilizando o mesmo raciocínio. Considerando ρ e τ como a densidade mássica e custo volúmico respetivamente temos:

$$M = \sum_{e=1}^N \varphi_e \rho |\Omega|_e \quad (3.11)$$

$$P = \sum_{e=1}^N \varphi_e \tau |\Omega|_e \quad (3.12)$$

3.2 Problema relaxado e SIMP

Para resolver um problema de otimização topológica existem dois métodos que se distinguem pela natureza discreta ou contínua do problema. O mais comum, e o que está presente nesta dissertação é o método que resolve problemas contínuos baseando-se na variável de densidade artificial. Transformando a função degrau numa função contínua introduzindo a variável de densidade artificial x_e que toma valores entre 0 e 1 temos:

$$\begin{aligned} \min_{x_e} \quad & C = \mathbf{f}^T \mathbf{u} \\ \text{s. a} \quad & \begin{cases} \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad \mathbf{K} = \mathbf{K}(\mathbf{E}_e(x_e)) \\ g^V = \frac{\sum_{e=1}^N (x_e |\Omega|_e)}{V_f \sum_{e=1}^N |\Omega|_e} \leq 1 \\ x_e \in [0,1] \end{cases} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Como os valores intermédios da variável densidade representam material fictício e não contribuem para uma solução viável, é necessário criar desfavorecimento a estes valores durante a otimização. Para tal usam-se estratégias de penalização, sendo o SIMP (*Solid isotropic material with penalization*) a estratégia mais reconhecida na otimização topológica. Esta estratégia usa a lei de potência para interpolar as fases de material, penalizando os valores intermédios de x_e :

$$E_e = E^0 + x_e^p (E^1 - E^0), \quad \text{onde} \quad \begin{cases} p \geq 1 \\ x_e \in]0,1] \\ E^1 > E^0 \geq 0 \end{cases} \quad (3.14)$$

Para contornar os problemas resultantes da singularidade da matriz de rigidez $\mathbf{K}$ considera-se $E^0 = 0$ se $x_e > 0$ ou $E^0 > 0$ se $x_e \geq 0$, onde E^0 representa a fase de vazio tendo um valor de uma ordem de grandeza muito a baixo da fase de solido, E^1 . O expoente p toma valores superiores a 1 para penalizar valores intermédios de x_e .

Nesta dissertação considera-se o valor mínimo de $x_e = 0.001$ com $E^0 = 0$, transformando-se a equação (3.14) em:

$$E_e = x_e^p (E^1) \quad (3.15)$$

3.2.1 Múltiplas fases de material

O problema de otimização formulado até agora só considera duas fases, uma de vazio e uma de material. No entanto, é possível adaptar a formulação para permitir a utilização de vários materiais, não podendo ser escolhido mais que um material para o mesmo elemento, tendo-se assim uma otimização multimaterial, conhecida como MMTO, (*Multi Material Topology Optimisation*). Neste tipo de problemas adiciona-se o problema de seleção de fase de material ao já existente problema de otimização topológica. Esta formulação, apesar de permitir melhores resultados estruturais implica um aumento da complexidade na metodologia do projeto e na resolução do problema.

Para selecionar a fase de material presente em cada elemento recorre-se a expressões matemáticas que usam as variáveis de projeto para calcular a propriedade resultante. Estas expressões denominam-se de leis de interpolação de material. Alguns destes são as extensões do SIMP, (*Solid Isotropic Material with Penalization*), propostas por Sigmund & Torquato[31], Gibiansky & Sigmund [32], Chao Li & Il Yong Kim[20], ver Anexo 1, Zou & Saitou[14] e a formulação DMO, (*Discrete Material Optimization*) proposto por Stegmann[12], [13], [33].

Segundo Chao Li & Il Yong Kim[20], a formulação para a interpolação das fases de material para a otimização de dois materiais sólidos fica:

$$E_e(x_{e,1}, x_{e,2}) = (x_{e,1})^p \left\{ (x_{e,2})^p E^1 + [1 - (x_{e,2})^p] E^2 \right\} \quad (3.16)$$

Onde E_e é o módulo de Young do elemento e , $x_{e,1}$ e $x_{e,2}$ são as variáveis da densidade artificial que representam a existência de material e a porção do material 1 em relação ao material 2, respetivamente. E^1 e E^2 são os valores do módulo de Young dos materiais 1 e 2 respetivamente e o expoente p é o fator de penalização.

Para a otimização com $m \geq 2$ fases de materiais, a lei de interpolação generalizada para qualquer propriedade do elemento é escrita na forma recursiva:

$$\beta_e(x_{e,1,M}) = (x_{e,1})^p \beta_{1,M} = (x_{e,1})^p \left\{ (x_{e,2})^p \beta_1 + [1 - (x_{e,2})^p] \beta_{2,M} \right\} \quad (3.17)$$

onde,

$$\beta_{m,M} = (x_{e,m+1})^p \beta_m + [1 - (x_{e,m+1})^p] \beta_{m+1,M} \quad \text{com } \beta_{M,M} = \beta_M \text{ e } m = 1, 2, \dots, M \quad (3.18)$$

Aqui $\beta_e(x_{e,1,M})$ representa a propriedade interpolada com M materiais e $\beta_{m,M}$ é a propriedade associada ao material m .

3.2.2 Otimização Multi-objetivo

Na otimização multi-objetivo a função objetivo é uma combinação de várias funções, modificando a formulação standard na seguinte forma:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & \mathbf{f}(\mathbf{x}) = (\mathbf{f}_1(x), \mathbf{f}_2(x), \dots, \mathbf{f}_q(x)) \\ \text{s. a} \quad & \begin{cases} g_j(\mathbf{x}) \leq 0 & ; j = 1, \dots, m \\ h_k(\mathbf{x}) = 0 & ; k = 1, \dots, p \\ \bar{x}_i \leq x_i \leq \underline{x}_i & ; i = 1, \dots, n \end{cases} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Aqui $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ é a função multi-objetivo do problema, que depende de várias funções objetivo independentes da quantidade q .

Existem várias formulações da função multi-objetivo, ver Chiandussi et al[27] e Jasbir Singh Arora[26], entre elas destaca-se a formulação da soma ponderada das funções objetivo:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^q \alpha_i f_i(\mathbf{x}), \quad \text{com} \quad \sum_{i=1}^q \alpha_i = 1 \quad (3.20)$$

Sendo que $\alpha_i \geq 0$ é o peso de cada função objetivo que representa a sua importância na resolução do projeto. Considerando um problema com duas funções objetivo, f_1 e f_2 , acopladas aos seus pesos relativos, α_1 e α_2 , a obtenção de um leque de soluções ótimas, onde se varia os pesos relativos, permite marcar alguns pontos da chamada *Pareto Front* (frente de Pareto).

Adicionalmente, devido aos diferentes graus de grandeza das funções objetivo, como por exemplo, a *Compliance* e Massa, é necessário normalizar estas funções. A normalização é feita com

base na solução ótima da otimização individual de cada função objetivo nos mesmos constrangimentos. No entanto, uma otimização individual de uma função objetivo que apenas dependa da quantidade de elementos, como a massa e o custo, no caso do constrangimento de volume ser de desigualdade, a solução ótima pode ser uma solução sem material. Por isso os valores ótimos das funções objetivo de massa ou custo, são calculados com base no constrangimento de volume na igualdade.

3.3 Algoritmos de otimização

A otimização é um processo iterativo que utiliza um algoritmo para modificar os valores das variáveis de projeto consoante os resultados das análises de elementos finitos. Os diferentes algoritmos têm duas categorias, baseados no gradiente e não baseados no gradiente.

Os métodos de otimização baseados no gradiente necessitam que o espaço de projeto seja convexo, fechado e limitado e que as formulações da função objetivo e dos constrangimentos sejam contínuas e diferenciáveis. Existem vários métodos, ver Coelho[34], destacando-se o Método das Assíntotas Móveis (MMA) que foi usado nesta dissertação.

O MMA, proposto por Svanberg [35] em 1987, procura resolver o problema de otimização original, usando subproblemas que se aproximam em cada iteração ao original, mas mais simples e melhores do ponto de vista da convexidade e separabilidade. Para a criação dos subproblemas, o MMA usa a informação dos gradientes das funções objetivo e constrangimentos originais.

3.4 Análise de sensibilidades

Nas otimizações topológicas que necessitam dos gradientes das funções para aplicar o algoritmo de otimização, é necessário estudar as sensibilidades com a alteração das variáveis de projeto ao longo das iterações. Para o cálculo destas sensibilidades existem o método analítico, complexo e meticuloso matematicamente, e o método das diferenças finitas, ver [18], [19].

Para as funções presentes na formulação dos problemas de otimização topológica que apenas dependem das variáveis de projeto, o cálculo das suas sensibilidades é relativamente simples pois são facilmente diferenciáveis. No entanto, as sensibilidades das funções que dependem também dos deslocamentos, são obtidas através da regra da cadeia, ver Coelho[34]. Na otimização topológica que, por norma, inclua um número elevado de variáveis de projeto e um comparativamente baixo ou moderado número de constrangimentos, o método analítico mais eficiente para calcular as derivadas é o método adjunto.

Considerando o problema de mínimo de *Compliance* (3.8), aplica-se a regra da cadeia na sua derivação:

$$\frac{d C[\mathbf{u}(x_e)]}{d x_e} = \frac{\partial C(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \frac{d \mathbf{u}(x_e)}{d x_e} \quad (3.21)$$

Aplicando o método adjunto, ver [34], a derivada fica:

$$\frac{d C[\mathbf{u}(x_e)]}{d x_e} = -\mathbf{u}^T \frac{\partial \mathbf{K}(x_e)}{\partial x_e} \mathbf{u} \quad (3.22)$$

Introduzindo a lei da potência em (3.15) e diferenciando em ordem a x_e obtém-se:

$$\frac{d C[\mathbf{u}(x_e)]}{d x_e} = -p(x_e)^{p-1} \mathbf{u}^T \mathbf{K}_e^0 \mathbf{u}, \quad \text{onde} \quad \mathbf{K}_e = x_e^p \mathbf{K}_e^0 \quad (3.23)$$

Expressando agora em relação aos tensores de rigidez, $\mathbf{E}$, e extensão, ε ,

$$\frac{d C[\mathbf{u}(x_e)]}{d x_e} = -p(x_e)^{p-1} \bar{\varepsilon} \mathbf{E}^0 \bar{\varepsilon} |\Omega_e| \quad (3.24)$$

3.5 Técnicas de Filtragem

Os problemas de otimização topológica, sendo problemas de distribuição de material num domínio constituído por elementos finitos, produzem dois fenómenos que influenciam as soluções obtidas: resultados enxadrezados (*checkerboard*), Figura 3.3 , e resultados que dependem do refinamento da malha de elementos finitos (*mesh-dependency*), Figura 3.4.



Figura 3.3 Malha em *checkerboard* adaptado de [30]

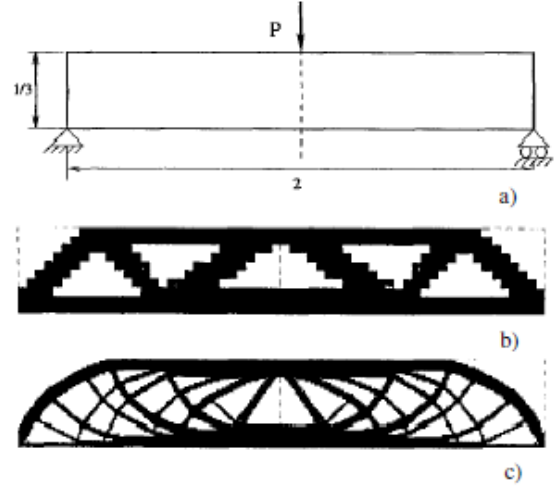


Figura 3.4 Ilustração de diferentes refinamentos de malha adaptado de [30]

Para ultrapassar estes fenómenos utilizam-se técnicas que consistem em aumentar os constrangimentos no problema, reduzir o espaço de parâmetros do design ou aplicar filtros na formulação do problema.

A aplicação de filtros no processo de otimização é uma forma eficaz na obtenção de resultados independentes da malha e ajuda a lidar com o problema da *checkerboard*, ver [34].

Na sua essência, os filtros modificam o valor da variável a filtrar para que seja uma média ponderada dos valores das variáveis vizinhas. Apresentam-se dois filtros, o filtro das sensibilidades e o filtro das densidades. Como o nome indica, o filtro das sensibilidades modifica o gradiente da função objetivo dado em (3.17) e (3.18):

$$\overline{\frac{dC}{dx_e}} = \frac{\sum_{i=1}^N \hat{H}_{ei} x_e \left(\frac{dC}{dx_e} \right)}{x_e \sum_{i=1}^N \hat{H}_{ei}}, \quad e = 1, \dots, N \quad (3.25)$$

Onde N é o número total de elementos e $\hat{H}_{ei}$ é o fator do peso dado por:

$$\hat{H}_{ei} = \max[0, r_{min} - \Delta(e, i)] \quad \text{com} \quad \Delta(e, i) = \|x_e - x_i\| \quad e \quad \{i \in N | \Delta(e, i) \leq r_{min}\} \quad (3.26)$$

Aqui o fator de peso representa a importância que cada elemento vizinho tem no elemento a ser filtrado, sendo definido pela distância entre o centro dos dois. r_{min} é o raio de aplicação do filtro, pelo que, se a distância entre dois elementos for maior que r_{min} o valor do fator é 0.

Apesar de as bases teóricas para este filtro não serem totalmente compreendidas, este filtro continua a apresentar bons resultados a nível de estabilidade e independência de malha. No entanto, ao modificar-se a sensibilidade, corre-se o risco de modificar o problema original também, por isso o método de filtragem de densidades é considerado uma melhor alternativa.

Neste método as densidades artificiais x_e são transformadas:

$$\tilde{x}_e = \frac{\sum_{i=1}^N \hat{H}_{ei} x_i}{\sum_{i=1}^N \hat{H}_{ei}} \quad (3.27)$$

Com esta transformação as densidades originais do elemento, x_e , passam a ter significado de apenas variáveis de *design*, enquanto as densidades filtradas $\tilde{x}_e$ ganham significado físico e são utilizadas na solução do problema.

Neste tipo de filtro, as funções objetivo e constrangimentos que dependiam de x_e passam a depender de $\tilde{x}_e$ e com isso as suas sensibilidades passam a ter que ser calculadas segundo a regra da cadeia. Considerando a função objetivo ou constrangimento que depende de x_e , $\psi(x_e)$, vem que:

$$\frac{d\psi}{dx_j} = \sum_{e \in N_j} \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{x}_e} \frac{d\tilde{x}_e}{dx_j} = \sum_{e \in N_j} \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{x}_e} \frac{\hat{H}_{je}}{\sum_{i \in N_e} \hat{H}_{ei}} \quad (3.28)$$

Sendo que:

$$\hat{H}_{ei} = \max[0, r_{min} - \Delta(e, i)] \text{ com } \Delta(e, i) = \|x_e - x_i\| \text{ e } \{i \in N | \Delta(e, i) \leq r_{min}\} \quad (3.29)$$

e,

$$\hat{H}_{je} = \max[0, r_{min} - \Delta(j, e)] \text{ com } \Delta(j, e) = \|x_j - x_e\| \text{ e } \{e \in N | \Delta(j, e) \leq r_{min}\} \quad (3.30)$$

Capítulo 4. Formulação dos problemas de otimização

O objetivo desta dissertação é demonstrar a viabilidade das formulações multimateriais nos problemas de otimização topológica com critérios de rigidez, massa e custo. É desenvolvida uma metodologia que resolve os problemas utilizando algoritmos de otimização baseados em gradientes, em ambientes de elementos finitos quadriláteros onde a sua análise é feita com recurso ao programa ANSYS. As otimizações são realizadas para o caso de *design* da viga MBB utilizada em [1,36].

Primeiramente apresenta-se a formulação do problema clássico de minimização de *compliance* com constrangimento de volume, conforme baseado em [7] e [24]. Inicialmente implementa-se o filtro das sensibilidades e, depois, o filtro de densidades. Um dos dois pode ser escolhido.

De seguida, introduzem-se múltiplas fases de material na formulação, tornando-se agora um problema multimaterial. No entanto, tendo só informação sobre a rigidez de cada material, o algoritmo apenas selecionaria o material mais rígido. Para forçar a inclusão de outros materiais adicionaram-se constrangimentos de volume locais. De forma a comparar as várias combinações de quantidades de material, estas foram feitas tendo em conta a massa total da estrutura, ou seja, a massa combinada dos vários materiais no problema multimaterial teria de ser igual à massa total da estrutura do problema original só com um material.

A escolha de volume ideal de cada fase de material em problema com 3 ou mais materiais não é direta pelo que seria necessário um grande número de testes. Assim, introduzindo-se informação sobre a densidade mássica de cada material, é possível adicionar um constrangimento global de massa e assim procurar a melhor combinação de materiais tendo em conta a sua massa. Sendo um problema que pode usufruir de 4 fases de material dissimilares, adiciona-se o constrangimento de custo para penalizar os materiais com melhor relação rigidez/massa, mas que são subsequentemente mais caros.

Finalmente, na procura da estrutura com a melhor relação rigidez/massa, formula-se o problema multi-objetivo usando a *Compliance* e Massa como objetivos e com constrangimento de volume global.

4.1 Classes de Problemas

Nesta dissertação são resolvidos um leque variado de problemas, estes podem ser divididos em relação ao número de fases de materiais, função objetivo e constrangimentos, ver Tabela 4.1 e 4.2.

Tabela 4.1 Classificação das formulações dos problemas de otimização topológica consoante o número de fases de material e do tipo de constrangimentos

Nº de Fases	Constrangimentos		
	Volume (V)	Massa (M)	Massa (M) e Custo (P)
1	SMT0-V	SMT0-M	SMT0-MP
2	MMT02-V	MMT02-M	MMT02-MP
3	MMT03-V	MMT03-M	MMT03-MP
4	MMT04-V	MMT04-M	MMT04-MP

Tabela 4.2 Classificação das formulações dos problemas de otimização topológica consoante o tipo de função objetivo

Função Objetivo	Problema
Uni-objetivo, SO (<i>Single-Objective</i>)	S-MMT0
Multi-objetivo, MO(<i>Multi-objective</i>)	M-MMT0

Por exemplo, S-MMT0-M significa problema uni-objetivo, multimaterial e com constrangimento de massa.

Nesta dissertação começou-se por formular e resolver o problema clássico SMT0 referido em [1] e, de seguida, modificou-se sucessivamente o problema até se obter o problema multi-objetivo. Neste capítulo apresentam-se todas as formulações intermédias.

4.2 SMT0

A formulação do problema *single material* de minimização de *compliance* com limitação de quantidade de material para um caso de carga, S-SMT0-V, é apresentada, adaptada para cada filtro, na Tabela 4.3.

Tabela 4.3 Formulação dos problemas SMTO consoante o tipo de filtro

Filtro de Sensibilidades

$$\begin{aligned}
& \min_{x_e} \quad C = \sum_{e=1}^N \mathbf{u}_e^T \mathbf{K}_e \mathbf{u}_e \\
& s. a \quad \begin{cases} \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f} \\ g^V = \frac{\sum_{e=1}^N (x_e |\Omega|_e)}{V_f \sum_{e=1}^N |\Omega|_e} \leq 1 \end{cases} \\
& \text{Em que:} \\
& \begin{cases} \mathbf{K} = \sum_{e=1}^N \mathbf{K}_e \quad ; \quad \mathbf{K}_e = \mathbf{K}_e(E_e(x_e)) \\ E_e(x_e) = x_e^p(E^1) \\ 0 < x_e \leq 1 \end{cases} \\
& e = 1, \dots, N \quad ; \quad p = 3 \text{ ou } 4
\end{aligned}$$

Filtro de Densidades

$$\begin{aligned}
& \min_{x_e} \quad C = \sum_{e=1}^N \mathbf{u}_e^T \mathbf{K}_e \mathbf{u}_e \\
& s. a \quad \begin{cases} \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f} \\ g^V = \frac{\sum_{e=1}^N (x_e |\Omega|_e)}{V_f \sum_{e=1}^N |\Omega|_e} \leq 1 \end{cases} \\
& \text{Em que:} \\
& \begin{cases} \mathbf{K} = \sum_{e=1}^N \mathbf{K}_e \quad ; \quad \mathbf{K}_e = \mathbf{K}_e(E_e(\tilde{x}_e)) \\ E_e(\tilde{x}_e) = \tilde{x}_e^p(E^1) \\ \tilde{x}_e = \frac{\sum_{i=1}^N \hat{H}_{ei} x_i}{\sum_{i=1}^N \hat{H}_{ei}} \\ \hat{H}_{ei} = \max[0, r_{min} - \Delta(e, i)] \\ \Delta(e, i) = \|x_e - x_i\| \\ \{i \in N | \Delta(e, i) \leq r_{min}\} \\ 0 < x_e \leq 1 \end{cases} \\
& e = 1, \dots, N \quad ; \quad i = 1, \dots, N \quad ; \quad p = 3 \text{ ou } 4
\end{aligned}$$

Na Tabela 4.3, N é o número de elementos finitos da malha; g^V é o constrangimento de volume global ditado por V^* ; r_{min} é o raio de aplicação do filtro. A interpolação entre as fases de material e sólido é feita utilizando a variável de design x_e . Limitando os valores de x_e a serem superiores a 0 evita-se matrizes singulares. O expoente p varia entre 3 e 4.

4.3 MMTO

Nas formulações dos problemas multimaterial é necessário aplicar leis para interpolar o: Módulo de Young, E ; densidade mássica, ρ ; e preço por unidade de volume, τ . A lei de interpolação generalizada é dada nas equações (3.17).

4.3.1 Volume local

Os problemas na versão multimaterial com constrangimentos de volume, necessitam de constrangimentos de volume locais, para cada fase de material, pois sem estes, o algoritmo escolheria apenas um material, aquele que melhor beneficia o objetivo.

Na Tabela 4.4 apresenta-se a formulação adaptada para otimização multimaterial considerando 2 materiais. Esta formulação tem um constrangimento de volume para cada elemento, V_{f1} , para além de um constrangimento de volume global, V_{fT} .

Tabela 4.4 Formulação dos problemas MMT02 com constrangimentos de volume e apenas uma função objetivo

S-MMT02-V

$$\begin{aligned}
 & \min_{x_e} \quad C = \sum_{e=1}^N \mathbf{u}_e^T \mathbf{K}_e \mathbf{u}_e \\
 & \text{s. a.} \quad \begin{cases} \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f} \\ g_1^V = \frac{\sum_{e=1}^N (\tilde{x}_{e,1} |\Omega|_e)}{V_{fT} \sum_{e=1}^N |\Omega|_e} \leq 1 \\ g_2^V = \frac{\sum_{e=1}^N (\tilde{x}_{e,1} \tilde{x}_{e,2} |\Omega|_e)}{V_{f1} \sum_{e=1}^N |\Omega|_e} \leq 1 \end{cases} \\
 & \text{Em que:} \\
 & \left\{ \begin{aligned} & \mathbf{K} = \sum_{e=1}^N \mathbf{K}_e \quad ; \quad \mathbf{K}_e = \mathbf{K}_e(E_e(\tilde{x}_e)) \\ & E_e(\tilde{x}_e) = \tilde{x}_{e,1}^p (\tilde{x}_{e,2}^p E^1 + (1 - \tilde{x}_{e,2}^p) E^2) \\ & \tilde{x}_e = \frac{\sum_{i=1}^N \hat{H}_{e,i} x_i}{\sum_{i=1}^N \hat{H}_{e,i}} \\ & \hat{H}_{ei} = \max[0, r_{min} - \Delta(e, i)] \\ & \Delta(e, i) = \|x_e - x_i\| \\ & \{i \in N | \Delta(e, i) \leq r_{min}\} \\ & 0 < x_e \leq 1 \end{aligned} \right. \\
 & e = 1, \dots, N \quad ; \quad i = 1, \dots, N \quad ; \quad p = 3 \text{ ou } 4
 \end{aligned}$$

As formulações para três ou quatro materiais, S-MMTO3-V e S-MMTO4-V, são semelhantes, necessitando apenas de adicionar o constrangimento de volume para o material adicional, Tabela 4.5, e alterar a interpolação de material para incluir o material adicional, Tabela 4.6.

Tabela 4.5 Constrangimentos de volume adicionais considerando mais fases de material

Nº de Fases	Constrangimento
3	$g_3^V = \frac{\sum_{e=1}^N (\tilde{x}_{e,1}(1 - \tilde{x}_{e,2})\tilde{x}_{e,3} \Omega _e)}{V_{f2} \sum_{e=1}^N \Omega _e} \leq 1$
4	$g_4^V = \frac{\sum_{e=1}^N (\tilde{x}_{e,1}(1 - \tilde{x}_{e,2})(1 - \tilde{x}_{e,3})\tilde{x}_{e,4} \Omega _e)}{V_{f3} \sum_{e=1}^N \Omega _e} \leq 1$

Tabela 4.6 Interpolação do Módulo de Young para 3 e 4 fases de material

Nº de Fases	Interpolação
3	$E_e(\tilde{x}_e) = \tilde{x}_{e,1}^p \left(\tilde{x}_{e,2}^p E^1 + (1 - \tilde{x}_{e,2}^p) \left(\frac{\tilde{x}_{e,3}^p E^2 + (1 - \tilde{x}_{e,3}^p) E^3}{(1 - \tilde{x}_{e,3}^p) E^3} \right) \right)$
4	$E_e(\tilde{x}_e) = \tilde{x}_{e,1}^p \left(\tilde{x}_{e,2}^p E^1 + (1 - \tilde{x}_{e,2}^p) \left(\frac{\tilde{x}_{e,3}^p E^2 + (1 - \tilde{x}_{e,3}^p) \left(\frac{\tilde{x}_{e,4}^p E^3 + (1 - \tilde{x}_{e,4}^p) E^4}{(1 - \tilde{x}_{e,4}^p) E^4} \right)}{(1 - \tilde{x}_{e,3}^p) \left(\frac{\tilde{x}_{e,4}^p E^3 + (1 - \tilde{x}_{e,4}^p) E^4}{(1 - \tilde{x}_{e,4}^p) E^4} \right)} \right) \right)$

Nestas formulações a variável de densidade filtrada, $\tilde{x}_{e,1}$, seleciona o tipo de fase, vazio ou sólido, enquanto as variáveis de densidade filtradas, $\tilde{x}_{e,2}$, $\tilde{x}_{e,3}$, $\tilde{x}_{e,4}$, selecionam o material presente no elemento. A seleção é feita no cálculo da matriz de rigidez do elemento E_e onde se aplica o SIMP recursivo entre os módulos de Young dos materiais, E_1, E_2, E_3, E_4 . O constrangimento g_1^V refere-se à fração volúmica total de material utilizado, V_{fT} , enquanto os constrangimentos g_2^V , g_3^V e g_4^V são referentes aos volumes ocupados pelos materiais 1 (V_{f1}), 2 (V_{f2}) e 3 (V_{f3}), respetivamente. Nas Tabelas 4.7, 4.8 e 4.9 apresenta-se o material selecionado consoante os valores das variáveis de projeto para os problemas MMTO2, MMTO3 e MMTO4, respetivamente.

Tabela 4.7 Seleção da fase de material nos problemas MMT02

$x_{e,1}$	$x_{e,2}$	Fase selecionada
0	0	Vazio, $E_e \approx 0$
0	1	
1	0	Material 2, $E_e = E_2$
1	1	Material 1, $E_e = E_1$

Tabela 4.8 Seleção da fase de material nos problemas MMT03

$x_{e,1}$	$x_{e,2}$	$x_{e,3}$	Fase selecionada
0	0	0	Vazio, $E_e \approx 0$
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	Material 3, $E_e = E_3$
1	0	1	Material 2, $E_e = E_2$
1	1	0	Material 1, $E_e = E_1$
1	1	1	

Tabela 4.9 Seleção de Material nos problemas MMT04

$x_{e,1}$	$x_{e,2}$	$x_{e,3}$	$x_{e,4}$	Fase selecionada
0	0	0	0	Vazio, $E_e \approx 0$
0	0	0	1	
0	0	1	0	
0	0	1	1	
0	1	0	0	
0	1	0	1	
0	1	1	0	
0	1	1	1	
1	0	0	0	Material 4, $E_e = E_4$
1	0	0	1	Material 3, $E_e = E_3$
1	0	1	0	Material 2, $E_e = E_2$
1	0	1	1	
1	1	0	0	Material 1, $E_e = E_1$
1	1	0	1	
1	1	1	0	
1	1	1	1	

4.3.2 Massa global

A dificuldade da formulação anterior é a necessidade de predefinir a quantidade de material necessário e não ter confirmação de a combinação de frações volúmicas de material estipulada ser a ideal. No exemplo da formulação com dois materiais, é possível obter uma boa combinação entre dois materiais, variando a sua fração volúmica no domínio, mas mantendo a massa total entre variações. No entanto, isto requer várias tentativas e a metodologia não pode ser transferida para formulações com 3 ou mais materiais. Em alternativa, introduz-se um constrangimento dedicado a limitar a massa global da estrutura. Substitui-se os constrangimentos de volume por um constrangimento de massa, g^M :

$$g^M = \sum_{e=1}^N \rho_e(\tilde{x}_e) |\Omega|_e \leq M^* \quad (4.1)$$

Aqui ρ_e é a interpolação das densidades mássicas, estando apresentado na Tabela 4.10 a lei de interpolação para número diferente de fases de material, e M^* é dado por:

$$M^* = M_f \sum_{e=1}^N \rho^M |\Omega|_e \quad (4.2)$$

M^* é a massa associada à fração mássica, M_f , quando o domínio de projeto é totalmente preenchido por um material de densidade ρ^M . M é o índice de escolha de material, sendo que nesta dissertação é usado o aço, pois é material com maior densidade mássica. Com esta definição de massa limite, as soluções multimateriais e uni-material podem ser comparadas.

Tabela 4.10 Interpolação da densidade mássica em função do número de fases de material

Nº de fases	Interpolação
2	$\rho_e(\tilde{x}_e) = \tilde{x}_{e,1}^p (\tilde{x}_{e,2}^p \rho^1 + (1 - \tilde{x}_{e,2}^p) \rho^2)$
3	$\rho_e(\tilde{x}_e) = \tilde{x}_{e,1}^p (\tilde{x}_{e,2}^p \rho^1 + (1 - \tilde{x}_{e,2}^p) (\tilde{x}_{e,3}^p \rho^2 + (1 - \tilde{x}_{e,3}^p) \rho^3))$
4	$\rho_e(\tilde{x}_e) = \tilde{x}_{e,1}^p \left(\tilde{x}_{e,2}^p \rho^1 + (1 - \tilde{x}_{e,2}^p) \left(\tilde{x}_{e,3}^p \rho^2 + (1 - \tilde{x}_{e,3}^p) \left(\frac{\tilde{x}_{e,4}^p \rho^3 + (1 - \tilde{x}_{e,4}^p) \rho^4}{(1 - \tilde{x}_{e,4}^p) \rho^4} \right) \right) \right)$

Assim apresenta-se na Tabela 4.11 a formulação MMTO2 para os problemas de minimização de *Compliance* com constrangimento global de Massa e na Tabela 4.12 a alteração do constrangimento para os problemas MMTO3 e MMTO4.

Tabela 4.11 Formulação do problema MMTO2 com constrangimento de massa

S-MMTO2-M

$$\begin{aligned}
& \min_{x_e} \quad C = \sum_{e=1}^N \mathbf{u}_e^T \mathbf{K}_e \mathbf{u}_e \\
& s. a \quad \left\{ \begin{aligned} & \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f} \\ & g^M = \frac{\sum_{e=1}^N |\Omega|_e [\tilde{x}_{e,1}^p (\tilde{x}_{e,2}^p \rho^1 + (1 - \tilde{x}_{e,2}^p) \rho^2)]}{M_f \sum_{e=1}^N \rho^M |\Omega|_e} \leq 1 \end{aligned} \right. \\
& \text{Em que:} \\
& \left\{ \begin{aligned} & \mathbf{K} = \sum_{e=1}^N \mathbf{K}_e \quad ; \quad \mathbf{K}_e = \mathbf{K}_e(E_e(\tilde{x}_e)) \\ & E_e(\tilde{x}_e) = \tilde{x}_{e,1}^p (\tilde{x}_{e,2}^p E^1 + (1 - \tilde{x}_{e,2}^p) E^2) \\ & \tilde{x}_e = \frac{\sum_{i=1}^N \hat{H}_{ei} x_i}{\sum_{i=1}^N \hat{H}_{ei}} \\ & \hat{H}_{ei} = \max[0, r_{min} - \Delta(e, i)] \\ & \Delta(e, i) = \|x_e - x_i\| \\ & \{i \in N | \Delta(e, i) \leq r_{min}\} \\ & 0 < x_e \leq 1 \end{aligned} \right. \\
& e = 1, \dots, N \quad ; \quad i = 1, \dots, N \quad ; \quad M = 1, \dots, 4 \quad ; \quad p = 3 \text{ ou } 4
\end{aligned}$$

Tabela 4.12 Formulação do constrangimento de massa para três e quatro fases

Nº de Fases	Constrangimento
3	$g^M = \frac{\sum_{e=1}^N \Omega _e \left[\tilde{x}_{e,1}^p \left(\tilde{x}_{e,2}^p \rho^1 + (1 - \tilde{x}_{e,2}^p) (\tilde{x}_{e,3}^p \rho^2 + (1 - \tilde{x}_{e,3}^p) \rho^3) \right) \right]}{M_f \sum_{e=1}^N \rho^M \Omega _e} \leq 1$
4	$g^M = \frac{\sum_{e=1}^N \Omega _e \left[\tilde{x}_{e,1}^p \left(\tilde{x}_{e,2}^p \rho^1 + (1 - \tilde{x}_{e,2}^p) \left(\tilde{x}_{e,3}^p \rho^2 + (1 - \tilde{x}_{e,3}^p) \left(\tilde{x}_{e,4}^p \rho^3 + (1 - \tilde{x}_{e,4}^p) \rho^4 \right) \right) \right) \right]}{M_f \sum_{e=1}^N \rho^M \Omega _e} \leq 1$

4.3.3 Massa global e custo global

Finalmente, introduz-se o constrangimento de custo para penalizar os materiais mais caros e assim ter um caminho mais direto para a solução mais economicamente sustentável. Similarmente ao constrangimento da massa, nesta dissertação utiliza-se titânio, como o material de maior custo para calcular P^* , sendo g^P :

$$g^P = \sum_{e=1}^N \tau_e(\tilde{x}_e) |\Omega|_e \leq P^* \quad (4.3)$$

Com P^* :

$$P^* = P_f \sum_{e=1}^N \tau_e^M |\Omega|_e \quad (4.4)$$

Aqui τ_e é a interpolação do custo volúmico (por unidade de volume) apresentado na Tabela 4.13 para as várias quantidades de fases de material.

Tabela 4.13 Interpolação do custo volúmico em função do número de fases de material

Nº de fases	Interpolação
2	$\tau_e(\tilde{x}_e) = \tilde{x}_{e,1}^p (\tilde{x}_{e,2}^p \tau^1 + (1 - \tilde{x}_{e,2}^p) \tau^2)$
3	$\tau_e(\tilde{x}_e) = \tilde{x}_{e,1}^p (\tilde{x}_{e,2}^p \tau^1 + (1 - \tilde{x}_{e,2}^p) (\tilde{x}_{e,3}^p \tau^2 + (1 - \tilde{x}_{e,3}^p) \tau^3))$
4	$\tau_e(\tilde{x}_e) = \tilde{x}_{e,1}^p \left(\tilde{x}_{e,2}^p \tau^1 + (1 - \tilde{x}_{e,2}^p) \left(\tilde{x}_{e,3}^p \tau^2 + (1 - \tilde{x}_{e,3}^p) \left(\tilde{x}_{e,4}^p \tau^3 + (1 - \tilde{x}_{e,4}^p) \tau^4 \right) \right) \right)$

A Tabela 4.14 apresenta a formulação com o constrangimento de custo para duas fases de material e Tabela 4.15 apresenta o constrangimento modificado para 3 e 4 fases de material.

Tabela 4.14 Formulação do problema MMT02 com constrangimento de massa e custo

S-MMT02-MP

$$\begin{aligned}
& \min_{x_e} \quad C = \sum_{e=1}^N \mathbf{u}_e^T \mathbf{K}_e \mathbf{u}_e \\
& s. a \quad \begin{cases} \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f} \\ g^M = \frac{\sum_{e=1}^N |\Omega|_e [\tilde{x}_{e,1}^p (\tilde{x}_{e,2}^p \rho^1 + (1 - \tilde{x}_{e,2}^p) \rho^2)]}{M_f \sum_{e=1}^N \rho^M |\Omega|_e} \leq 1 \\ g^P = \frac{\sum_{e=1}^N |\Omega|_e [\tilde{x}_{e,1}^p (\tilde{x}_{e,2}^p \tau^1 + (1 - \tilde{x}_{e,2}^p) \tau^2)]}{P_f \sum_{e=1}^N \tau^M |\Omega|_e} \leq 1 \end{cases} \\
& \text{Em que:} \\
& \left\{ \begin{aligned} \mathbf{K} &= \sum_{e=1}^N \mathbf{K}_e \quad ; \quad \mathbf{K}_e = \mathbf{K}_e(E_e(\tilde{x}_e)) \\ E_e(\tilde{x}_e) &= \tilde{x}_{e,1}^p (\tilde{x}_{e,2}^p E^1 + (1 - \tilde{x}_{e,2}^p) E^2) \\ \tilde{x}_e &= \frac{\sum_{i=1}^N \hat{H}_{ei} x_i}{\sum_{i=1}^N \hat{H}_{ei}} \\ \hat{H}_{ei} &= \max[0, r_{min} - \Delta(e, i)] \\ \Delta(e, i) &= \|x_e - x_i\| \\ \{i \in N | \Delta(e, i) \leq r_{min}\} \\ 0 &< x_e \leq 1 \end{aligned} \right. \\
& e = 1, \dots, N \quad ; \quad i = 1, \dots, N \quad ; \quad M = 1, \dots, 4 \quad ; \quad p = 3 \text{ ou } 4
\end{aligned}$$

Tabela 4.15 Formulação do constrangimento de custo para três e quatro fases

Nº de Fases	Constrangimento
3	$g^P = \frac{\sum_{e=1}^N \Omega _e \left[\tilde{x}_{e,1}^p \left(\tilde{x}_{e,2}^p \tau^1 + (1 - \tilde{x}_{e,2}^p) (\tilde{x}_{e,3}^p \tau^2 + (1 - \tilde{x}_{e,3}^p) \tau^3) \right) \right]}{P_f \sum_{i=e}^N \tau^M \Omega _e} \leq 1$
4	$g^P = \frac{\sum_{e=1}^N \Omega _e \left[\tilde{x}_{e,1}^p \left(\tilde{x}_{e,2}^p \tau^1 + (1 - \tilde{x}_{e,2}^p) \left((1 - \tilde{x}_{e,3}^p) \left(\tilde{x}_{e,3}^p \tau^2 + \tilde{x}_{e,4}^p \tau^3 + (1 - \tilde{x}_{e,4}^p) \tau^4 \right) \right) \right) \right]}{P_f \sum_{i=e}^N \tau^M \Omega _e} \leq 1$

4.3.4 Multi-objetivo

Nas formulações anteriores, foi sempre necessário predefinir limitações, seja a nível de volume, massa ou custo. No entanto, as soluções variam quando estas limitações são modificadas ou anuladas. Não sendo possível determinar a massa da estrutura que permite maximizar a rigidez em relação ao volume utilizado ou ao custo permitido, devido à quantidade de tentativas necessárias, recorre-se aos problemas multi-objetivo.

Os problemas multi-objetivo combinam a *Compliance*, a Massa e o Custo como objetivos a minimizar tendo o volume global como constrangimento:

$$C(x_e) = \sum_{e=1}^N \bar{\epsilon} E_e(x_e) \bar{\epsilon} |\Omega|_e \quad (4.5)$$

$$M(x_e) = \sum_{e=1}^N \rho_e(x_e) |\Omega|_e \quad (4.6)$$

$$P(x_e) = \sum_{e=1}^N \tau_e(x_e) |\Omega|_e \quad (4.7)$$

Devido à discrepância entre as ordens de grandeza da *Compliance*, Massa e Custo, faz-se uma normalização. Esta normalização depende dos valores ideais de cada função objetivo, $C^\#$, $M^\#$, $P^\#$ quando otimizadas individualmente. A cada objetivo é dado um peso, w , que depende da importância dada a cada objetivo:

$$f(C, M, P) = w_1 \frac{C}{C^\#} + w_2 \frac{M}{M^\#} + w_3 \frac{P}{P^\#} \quad (4.8)$$

Na formulação clássica de otimização topológica são propostos constrangimentos de igualdade para definir a quantidade de material presente na solução, no entanto, este tipo de constrangimento não é compatível com muitos algoritmos de otimização, incluindo o MMA que é utilizado nesta dissertação. Por essa razão todos os problemas formulados nesta dissertação utilizam constrangimentos de desigualdade de volume máximo para limitar a quantidade de material e que no final do processo iterativo acaba por satisfazer a igualdade porque está ativo. Na formulação multi-objetivo, a adição de material contribui apenas para a diminuição de uma parte da função multi-objetivo, *Compliance*, enquanto as restantes funções objetivo, Massa e Custo, aumentam. Quando se formula o problema multi-

objetivo com constrangimento de desigualdade de volume máximo permitido, observa-se que quando, por exemplo, no cálculo da função multi-objetivo, a Massa tem maior peso que a Compliance, o volume total da estrutura otimizada fica abaixo do volume máximo. Verifica-se assim que o constrangimento de desigualdade de volume máximo deixa de estar satisfeito na igualdade, e por isso é acrescentado um constrangimento de desigualdade para limitar a quantidade de material inferiormente e assim as soluções obtidas corresponderam a uma determinada fração volúmica. Nesta dissertação estuda-se ambas as formulações multi-objetivo, primeiramente só com o constrangimento superior de volume, g_s^V , definido pela fração volúmica superior, V_{fs} , Tabela 4.16, e de seguida adicionando o constrangimento de volume inferior, g_i^V , definido pela fração volúmica inferior, V_{fi} :

$$g_i^V = 2 - \frac{\sum_{e=1}^N \tilde{x}_{e,1}^p |\Omega|_e}{V_{fi} \sum_{e=1}^N |\Omega|_e} \leq 1 \quad (4.9)$$

Tabela 4.16 Formulação do problema Multi-objetivo

M-MMT04-V

$$\min_{x_e} \quad w^1 \frac{C}{C^\#} + w^2 \frac{M}{M^\#} + w^3 \frac{P}{P^\#}$$

$$s. a \quad \begin{cases} \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f} \\ g_s^V = \frac{\sum_{e=1}^N \tilde{x}_{e,1}^p |\Omega|_e}{V_{fs} \sum_{e=1}^N |\Omega|_e} \leq 1 \end{cases}$$

Em que:

$$\left\{ \begin{array}{l} C = \sum_{e=1}^N \mathbf{u}_e^T \mathbf{K}_e \mathbf{u}_e \\ \mathbf{K} = \sum_{e=1}^N \mathbf{K}_e \quad ; \quad \mathbf{K}_e = \mathbf{K}_e(E_e(\tilde{x}_e)) \\ E_e(\tilde{x}_e) = \tilde{x}_{e,1}^p \left(\tilde{x}_{e,2}^p E^1 + (1 - \tilde{x}_{e,2}^p) \left(\tilde{x}_{e,3}^p E^2 + (1 - \tilde{x}_{e,3}^p) \left(\tilde{x}_{e,4}^p E^3 + (1 - \tilde{x}_{e,4}^p) E^4 \right) \right) \right) \\ M(\tilde{x}_e) = \sum_{e=1}^N |\Omega|_e \left[\tilde{x}_{e,1}^p \left(\tilde{x}_{e,2}^p \rho^1 + (1 - \tilde{x}_{e,2}^p) \left((1 - \tilde{x}_{e,3}^p) \left(\tilde{x}_{e,4}^p \rho^2 + \tilde{x}_{e,4}^p \rho^3 + (1 - \tilde{x}_{e,4}^p) \rho^4 \right) \right) \right) \right] \\ P(\tilde{x}_e) = \sum_{e=1}^N |\Omega|_e \left[\tilde{x}_{e,1}^p \left(\tilde{x}_{e,2}^p \tau^1 + (1 - \tilde{x}_{e,2}^p) \left((1 - \tilde{x}_{e,3}^p) \left(\tilde{x}_{e,4}^p \tau^2 + \tilde{x}_{e,4}^p \tau^3 + (1 - \tilde{x}_{e,4}^p) \tau^4 \right) \right) \right) \right] \\ \sum_{i=1}^3 w^i \leq 1 \\ \tilde{x}_e = \frac{\sum_{i=1}^N \hat{H}_{ei} x_i}{\sum_{i=1}^N \hat{H}_{ei}} \\ \hat{H}_{ei} = \max[0, r_{min} - \Delta(e, i)] \\ \Delta(e, i) = \|x_e - x_i\| \\ \{i \in N | \Delta(e, i) \leq r_{min}\} \\ 0 < x_e \leq 1 \end{array} \right.$$

$e = 1, \dots, N \quad ; \quad i = 1, \dots, N \quad ; \quad p = 3 \text{ ou } 4$

4.4 Estratégia de Penalização, Raio de Filtragem e inicialização das variáveis de projeto

Com base em estudo anteriores, [18-20], os valores dos expoentes, p , mais adequados para estes problemas são, 3 e 4 para as interpolações dos Módulos de Young, E , e 1 para as interpolações de Massa, M , e Custo, P . No entanto, ao aplicar-se uma penalização muito acentuada no início da otimização corre-se o risco de esta tender para um mínimo local. O mesmo se aplica à aplicação de um raio de filtragem curto, ou para frações volúmicas com limites inferiores e superiores muito próximos no caso da formulação multi-objetivo. Para evitar que tal aconteça aplica-se o método CA, (*Continuation Approach*). Este método modifica os valores destes parâmetros em causa ao longo das iterações.

A inicialização das variáveis de projeto, ou seja, os valores iniciais das variáveis de densidade são relevantes para evitar mínimos locais. No entanto, enquanto a sua determinação é feita normalmente de forma a ativar os constrangimentos, na existência de vários constrangimentos conflitantes, como é o caso de algumas formulações apresentadas, a escolha destes valores iniciais passa a ser de cariz mais empírico, isto é, passa a ser um processo de tentativa e erro.

Nas formulações com 4 fases de material a inicialização das variáveis de projeto e o método CA divergem das metodologias utilizadas para as formulações até 3 fases de material. Verificou-se que para o problema MBB-Beam em estudo, a inicialização com valores iguais para todas as variáveis de projeto e a aplicação de um método CA adequado, resulta em topologias consistentes para diferentes valores iniciais nas formulações cujo número de fases é no máximo 3. O mesmo não se confirma nas formulações com 4 fases de material, e por isso, é feito um estudo para obter os valores iniciais das variáveis mais adequados para o problema, juntamente com reformulações do CA para os problemas uni-objetivo e multi-objetivo, este último inclui um CA para a fração volúmica inferior.

Para os problemas que têm até 3 fases de material na formulação, representa-se na Figura 4.1 o CA aplicado.

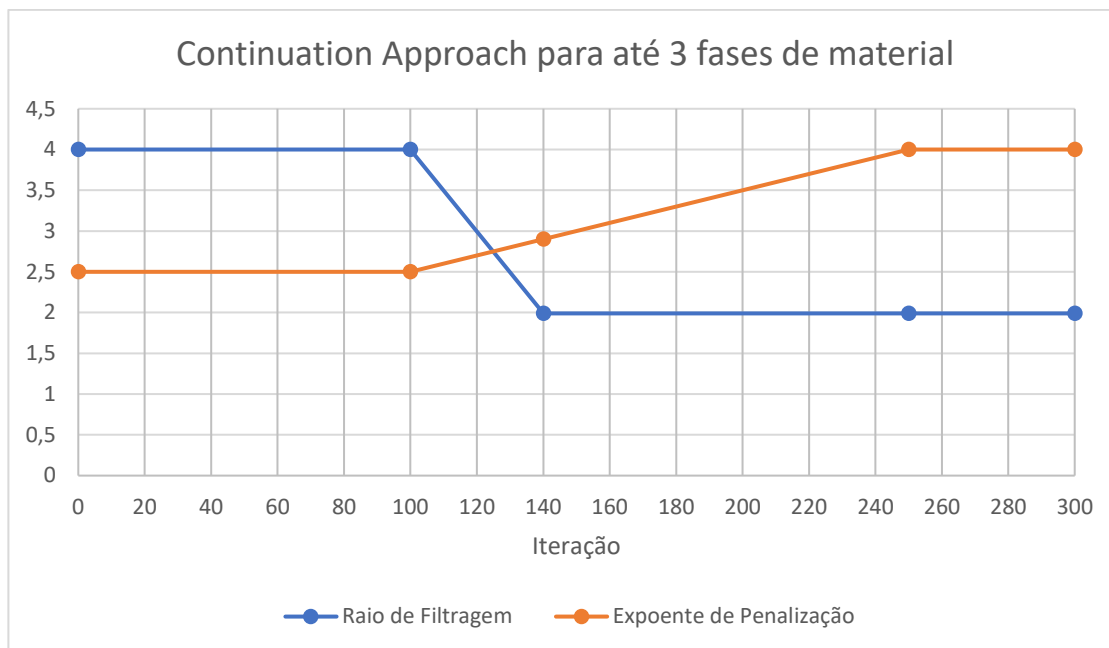


Figura 4.1 *Continuation Approach* para até 3 fases de material

Para os problemas com 4 fases de material nas formulações uni-objetivo, utiliza-se o CA representado na Figura 4.2.

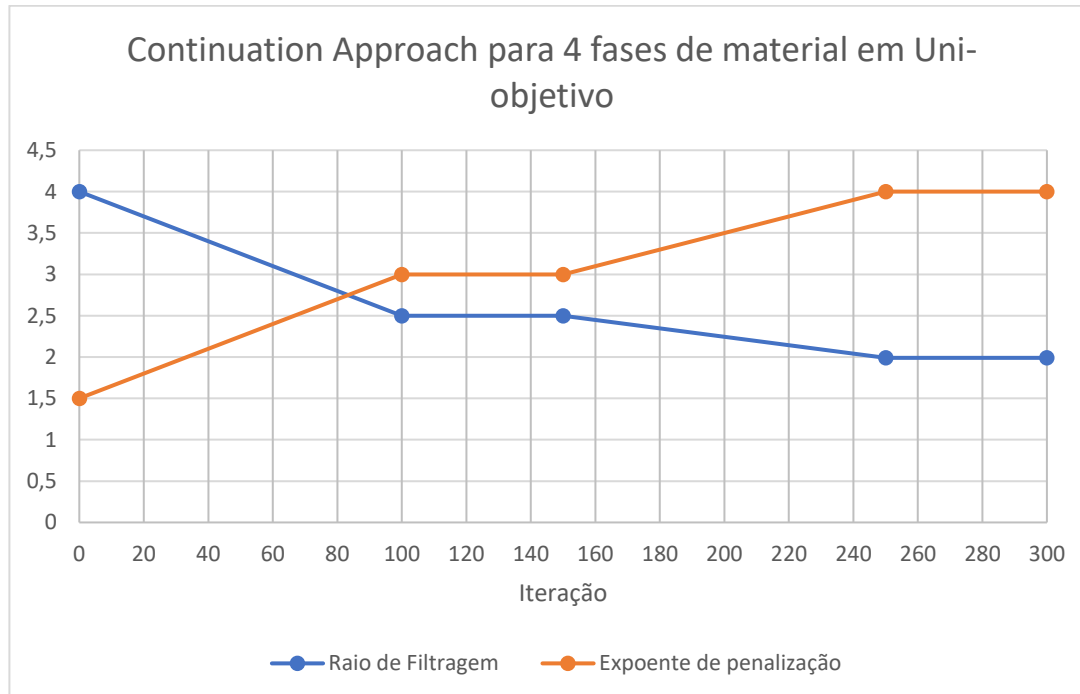


Figura 4.2 *Continuation Approach* para 4 fases de material em Uni-objetivo

Para os problemas multi-objetivo aplica-se o CA representado na Figura 4.3.

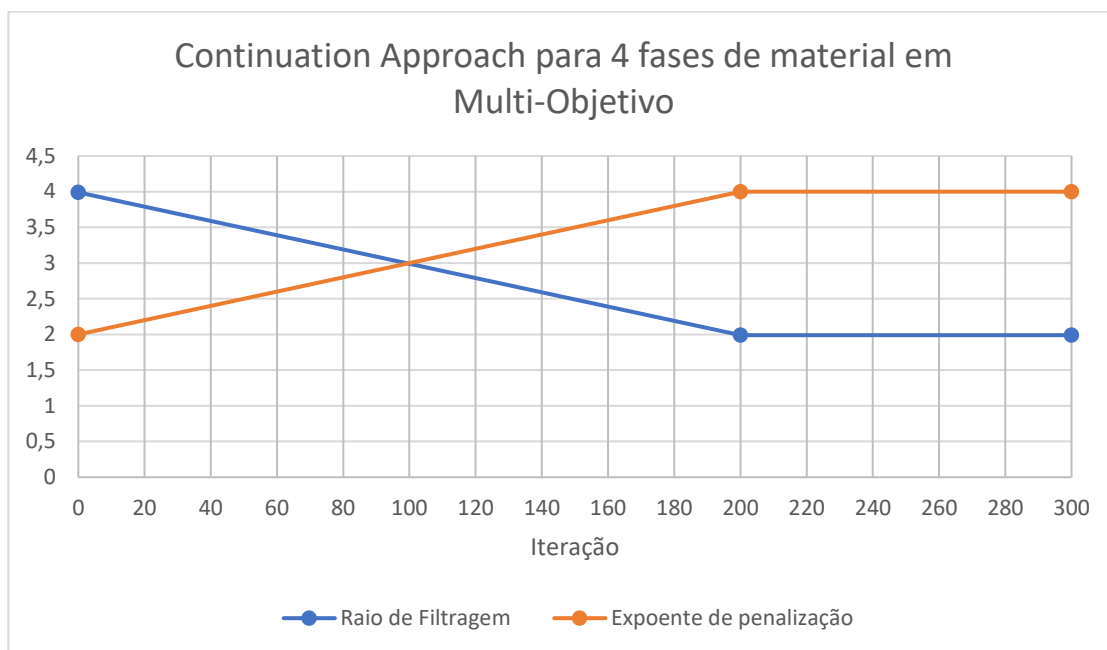


Figura 4.3 *Continuation Approach* para Multi-objectivo

O limite inferior da fração volúmica segue a CA representado na Figura 4.4.

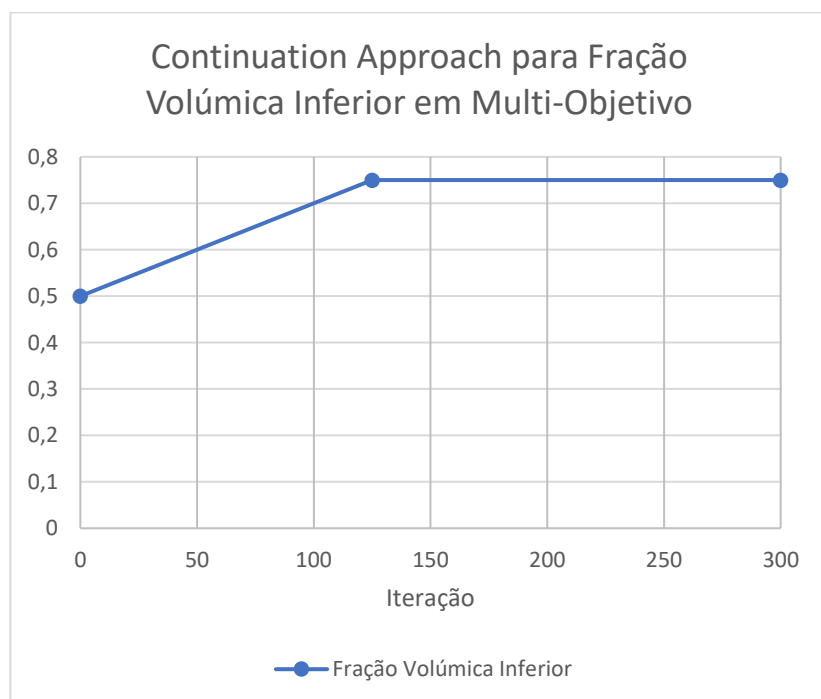


Figura 4.4 - Continuation Approach da fração volúmica inferior

Capítulo 5. Cálculo das Sensibilidades

O algoritmo de otimização utilizado, MMA, precisa da informação do gradiente das funções objetivo e dos constrangimentos. Para tal calcula-se as sensibilidades destas funções em relação às variáveis de densidade artificial.

As sensibilidades são calculadas utilizando as regras de derivação diretas pois as expressões analíticas definidas nas formulações anteriores são simples apesar do número elevado de variáveis diferentes.

5.1 Função objetivo

Nas formulações apresentadas a função objetivo apresenta duas configurações: (1) *single objective*, SO, com *compliance*; (2) *multi objective*, MO, com *Compliance*, massa total e custo total.

Nas formulações SO e MO a *Compliance* é obtida através do somatório da energia de deformação associada a cada elemento que depende do Módulo de Young, E , presente no elemento, (5.1). Adicionalmente, na formulação MO, a massa total e o custo total são obtidos através do somatório da massa e do custo presente em cada elemento, (5.2) e (5.3). No caso em que o filtro de densidades é aplicado, a sensibilidade das funções objetivo em relação às variáveis de densidade x_e são obtidas utilizando a regra da cadeia segundo as equações (3.21) e (3.22), sendo agora necessário obter as sensibilidades das funções objetivo em relação à variável densidade filtrada, $\tilde{x}_e$.

$$C(\tilde{x}_e) = \sum_{e=1}^N \bar{\epsilon} E_e(\tilde{x}_e) \bar{\epsilon} |\Omega|_e \quad (5.1)$$

$$M(\tilde{x}_e) = \sum_{e=1}^N \rho_e(\tilde{x}_e) |\Omega|_e \quad (5.2)$$

$$P(\tilde{x}_e) = \sum_{e=1}^N \tau_e(\tilde{x}_e) |\Omega|_e \quad (5.3)$$

5.1.1 Uni-objectivo

A derivada da *compliance* em relação à densidade filtrada, $\tilde{x}_e$, é calculada segundo a regra da cadeia de equação (3.22), onde se calcula a derivada do módulo de Young, $E_e(\tilde{x}_e)$.

As expressões das derivadas das interpolações do módulo de Young em função das variáveis de densidade filtrada, $\tilde{x}_e$, para cada fase de material, m , apresentam-se na Tabela 5.1.

Tabela 5.1 Sensibilidade da *Compliance*

Formulação	Variável	Expressão da sensibilidade
SMT0	$\tilde{x}_e$	$\frac{\partial E_e(\tilde{x}_e)}{\partial \tilde{x}_e} = -p\tilde{x}_e^{p-1}E^1$
MMTO2	$\tilde{x}_{e,1}$	$\frac{\partial E_e(\tilde{x}_e)}{\partial \tilde{x}_{e,1}} = -p\tilde{x}_{e,1}^{p-1}[\tilde{x}_{e,2}^p E^1 + (1 - \tilde{x}_{e,2}^p)E^1]$
	$\tilde{x}_{e,2}$	$\frac{\partial E_e(\tilde{x}_e)}{\partial \tilde{x}_{e,2}} = -p\tilde{x}_{e,1}^p \tilde{x}_{e,2}^{p-1}[E^1 - E^2]$
MMTO3	$\tilde{x}_{e,1}$	$\frac{\partial E_e(\tilde{x}_e)}{\partial \tilde{x}_{e,1}} = p\tilde{x}_{e,1}^{p-1}(\tilde{x}_{e,2}^p E^1 + (1 - \tilde{x}_{e,2}^p)(\tilde{x}_{e,3}^p E^2 + (1 - \tilde{x}_{e,3}^p)E^3))$
	$\tilde{x}_{e,2}$	$\frac{\partial E_e(\tilde{x}_e)}{\partial \tilde{x}_{e,2}} = -p\tilde{x}_e^p \tilde{x}_{e,2}^{p-1}[E^1 - E^3 + (E^3 - E^2)\tilde{x}_{e,3}^p]$
	$\tilde{x}_{e,3}$	$\frac{\partial E_e(\tilde{x}_e)}{\partial \tilde{x}_{e,3}} = -p\tilde{x}_e^p \tilde{x}_{e,3}^{p-1}[E^2 - E^3 + (E^3 - E^2)\tilde{x}_{e,2}^p]$
MMTO4	$\tilde{x}_{e,1}$	$\frac{\partial E_e(\tilde{x}_e)}{\partial \tilde{x}_{e,1}} = p\tilde{x}_{e,1}^{p-1} \left(\tilde{x}_{e,2}^p E^1 + \tilde{x}_{e,3}^p E^2 + (1 - \tilde{x}_{e,2}^p) \left((1 - \tilde{x}_{e,3}^p) \left(\tilde{x}_{e,4}^p E^3 + (1 - \tilde{x}_{e,4}^p) E^4 \right) \right) \right)$
	$\tilde{x}_{e,2}$	$\frac{\partial E_e(\tilde{x}_e)}{\partial \tilde{x}_{e,2}} = -p\tilde{x}_e^p \tilde{x}_{e,2}^{p-1}[E^1 - E^4 + (E^4 - E^2 + (E^3 - E^4)\tilde{x}_{e,4}^p)\tilde{x}_{e,3}^p + (E^4 - E^3)\tilde{x}_{e,4}^p]$
	$\tilde{x}_{e,3}$	$\frac{\partial E_e(\tilde{x}_e)}{\partial \tilde{x}_{e,3}} = -p\tilde{x}_e^p \tilde{x}_{e,3}^{p-1}[E^2 - E^4 + (E^4 - E^3 + (E^3 - E^4)\tilde{x}_{e,2}^p)\tilde{x}_{e,4}^p + (E^4 - E^2)\tilde{x}_{e,2}^p]$
	$\tilde{x}_{e,4}$	$\frac{\partial E_e(\tilde{x}_e)}{\partial \tilde{x}_{e,4}} = -p\tilde{x}_e^p \tilde{x}_{e,4}^{p-1}[E^3 - E^4 + (E^4 - E^3 + (E^3 - E^4)\tilde{x}_{e,2}^p)\tilde{x}_{e,3}^p + (E^4 - E^3)\tilde{x}_{e,2}^p]$

5.1.2 Multi-objetivo

Na formulação MO, onde a função objetivo final é uma soma ponderada e normalizada das funções objetivo *Compliance*, Massa e Custo, a sensibilidade é a soma ponderada e normalizada das sensibilidades de cada uma:

$$\frac{df(C, M, P)}{dx_e} = w_1 \frac{\left(\frac{dC}{dx_e}\right)}{C^\#} + w_2 \frac{\left(\frac{dM}{dx_e}\right)}{M^\#} + w_3 \frac{\left(\frac{dP}{dx_e}\right)}{P^\#} \quad (5.4)$$

Similarmente ao cálculo da sensibilidade da *Compliance* feito na secção anterior, as sensibilidades das funções de Massa e Custo são obtidas derivando as interpolações de $\rho_e(\tilde{x}_e)$ e $\tau_e(\tilde{x}_e)$, apresentadas nas Tabelas 5.2 e 5.3.

Tabela 5.2 Sensibilidade da função Massa

Variável	Expressão da Sensibilidade
$\tilde{x}_{e,1}$	$\frac{\partial \rho_e(\tilde{x}_e)}{\partial \tilde{x}_{e,1}} = p\tilde{x}_{e,1}^{p-1} \left(\tilde{x}_{e,2}^p \rho^1 + (1 - \tilde{x}_{e,2}^p) \left(\tilde{x}_{e,3}^p \rho^2 + (1 - \tilde{x}_{e,3}^p) (\tilde{x}_{e,4}^p \rho^3 + (1 - \tilde{x}_{e,4}^p) \rho^4) \right) \right)$
$\tilde{x}_{e,2}$	$\frac{\partial \rho_e(\tilde{x}_e)}{\partial \tilde{x}_{e,2}} = -p\tilde{x}_e^p \tilde{x}_{e,2}^{p-1} [\rho^1 - \rho^4 + (\rho^4 - \rho^2 + (\rho^3 - \rho^4) \tilde{x}_{e,4}^p) \tilde{x}_{e,3}^p + (\rho^4 - \rho^3) \tilde{x}_{e,4}^p]$
$\tilde{x}_{e,3}$	$\frac{\partial \rho_e(\tilde{x}_e)}{\partial \tilde{x}_{e,3}} = -p\tilde{x}_e^p \tilde{x}_{e,3}^{p-1} [\rho^2 - \rho^4 + (\rho^4 - \rho^3 + (\rho^3 - \rho^4) \tilde{x}_{e,2}^p) \tilde{x}_{e,4}^p + (\rho^4 - \rho^2) \tilde{x}_{e,2}^p]$
$\tilde{x}_{e,4}$	$\frac{\partial \rho_e(\tilde{x}_e)}{\partial \tilde{x}_{e,4}} = -p\tilde{x}_e^p \tilde{x}_{e,4}^{p-1} [\rho^3 - \rho^4 + (\rho^4 - \rho^3 + (\rho^3 - \rho^4) \tilde{x}_{e,2}^p) \tilde{x}_{e,3}^p + (\rho^4 - \rho^3) \tilde{x}_{e,2}^p]$

Tabela 5.3 Sensibilidade da função Custo

Variável	Expressão da sensibilidade
$\tilde{x}_{e,1}$	$\frac{\partial \tau_e(\tilde{x}_e)}{\partial \tilde{x}_{e,1}} = p\tilde{x}_{e,1}^{p-1} \left(\tilde{x}_{e,2}^p \tau^1 + (1 - \tilde{x}_{e,2}^p) \left(\tilde{x}_{e,3}^p \tau^2 + (1 - \tilde{x}_{e,3}^p) (\tilde{x}_{e,4}^p \tau^3 + (1 - \tilde{x}_{e,4}^p) \tau^4) \right) \right)$
$\tilde{x}_{e,2}$	$\frac{\partial \tau_e(\tilde{x}_e)}{\partial \tilde{x}_{e,2}} = -p\tilde{x}_e^p \tilde{x}_{e,2}^{p-1} [\tau^1 - \tau^4 + (\tau^4 - \tau^2 + (\tau^3 - \tau^4) \tilde{x}_{e,4}^p) \tilde{x}_{e,3}^p + (\tau^4 - \tau^3) \tilde{x}_{e,4}^p]$
$\tilde{x}_{e,3}$	$\frac{\partial \tau_e(\tilde{x}_e)}{\partial \tilde{x}_{e,3}} = -p\tilde{x}_e^p \tilde{x}_{e,3}^{p-1} [\tau^2 - \tau^4 + (\tau^4 - \tau^3 + (\tau^3 - \tau^4) \tilde{x}_{e,2}^p) \tilde{x}_{e,4}^p + (\tau^4 - \tau^2) \tilde{x}_{e,2}^p]$
$\tilde{x}_{e,4}$	$\frac{\partial \tau_e(\tilde{x}_e)}{\partial \tilde{x}_{e,4}} = -p\tilde{x}_e^p \tilde{x}_{e,4}^{p-1} [\tau^3 - \tau^4 + (\tau^4 - \tau^3 + (\tau^3 - \tau^4) \tilde{x}_{e,2}^p) \tilde{x}_{e,3}^p + (\tau^4 - \tau^3) \tilde{x}_{e,2}^p]$

5.2 Constrangimentos

O cálculo das sensibilidades dos constrangimentos de volume, g^v , massa, g^M e custo, g^P é feito derivando diretamente as respectivas expressões.

5.2.1 Constrangimentos de volume

As expressões das derivadas dos constrangimentos de volume estão apresentadas na equação (5.5) para SMTO e nas Tabelas 5.4, 5.5 e 5.6 para MMTO. Para m materiais, existe m constrangimentos de volume de fase de material, existe m^2 derivadas, onde cada constrangimento tem m derivadas parciais.

$$\frac{dg^v}{dx_e} = \frac{|\Omega|_e}{V_{fT} * \sum_{e=1}^N |\Omega|_e} \quad (5.5)$$

Tabela 5.4 Sensibilidade dos constrangimentos de volume para MMTO2

Constrangimentos	Variável	
	$\tilde{x}_{e,1}$	$\tilde{x}_{e,2}$
g_1^v	$\frac{dg_1^v}{d\tilde{x}_{e,1}} = \frac{ \Omega _e}{V_{fT} * \sum_{e=1}^N \Omega _e}$	$\frac{dg_1^v}{d\tilde{x}_{e,2}} = 0$
g_2^v	$\frac{dg_2^v}{d\tilde{x}_{e,1}} = \frac{\sum_{e=1}^N \tilde{x}_{e,2} \Omega _e}{V_{f1} * \sum_{e=1}^N \Omega _e}$	$\frac{dg_2^v}{d\tilde{x}_{e,2}} = \frac{\sum_e \tilde{x}_{e,1} \Omega _e}{V_{f1} * \sum_{e=1}^N \Omega _e}$

Tabela 5.5 Sensibilidade dos constrangimentos de volume para MMTO3

Constrangimentos	Variáveis		
	$\tilde{x}_{e,1}$	$\tilde{x}_{e,2}$	$\tilde{x}_{e,3}$
g_1^v	$\frac{dg_1^v}{d\tilde{x}_{e,1}} = \frac{ \Omega _e}{V_{fT} * \sum_{e=1}^N \Omega _e}$	$\frac{dg_1^v}{d\tilde{x}_{e,2}} = 0$	$\frac{dg_1^v}{d\tilde{x}_{e,3}} = 0$
g_2^v	$\frac{dg_2^v}{d\tilde{x}_{e,1}} = \frac{\sum_{e=1}^N \tilde{x}_{e,2} \Omega _e}{V_{f1} * \sum_{e=1}^N \Omega _e}$	$\frac{dg_2^v}{d\tilde{x}_{e,2}} = \frac{\sum_e \tilde{x}_{e,1} \Omega _e}{V_{f1} * \sum_{e=1}^N \Omega _e}$	$\frac{dg_2^v}{d\tilde{x}_{e,3}} = 0$
g_3^v	$\frac{dg_3^v}{d\tilde{x}_{e,1}} = \frac{\sum_{e=1}^N (1 - \tilde{x}_{e,2}) \tilde{x}_{e,3} \Omega _e}{V_{f2} * \sum_{e=1}^N \Omega _e}$	$\frac{dg_3^v}{d\tilde{x}_{e,2}} = \frac{\sum_e -\tilde{x}_{e,1} \tilde{x}_{e,3} \Omega _e}{V_{f2} * \sum_{e=1}^N \Omega _e}$	$\frac{dg_3^v}{d\tilde{x}_{e,3}} = \frac{\sum_{e=1}^N (1 - \tilde{x}_{e,2}) \tilde{x}_{e,1} \Omega _e}{V_{f2} * \sum_{e=1}^N \Omega _e}$

Note-se que as derivadas dos constrangimentos antecedentes se mantêm, logo, para MMTO4 apresenta-se as derivadas referentes a $\tilde{x}_{e,4}$ e g_4^v :

Tabela 5.6 Sensibilidade dos constrangimentos para MMTO4

Constrangimento	Variável		
	$\tilde{x}_{e,4}$		
g_1^v, g_2^v, g_3^v	$\frac{dg_1^v}{d\tilde{x}_{e,4}} = 0$	$\frac{dg_2^v}{d\tilde{x}_{e,4}} = 0$	$\frac{dg_3^v}{d\tilde{x}_{e,4}} = 0$
g_4^v	$\tilde{x}_{e,1}, \tilde{x}_{e,2}, \tilde{x}_{e,3}, \tilde{x}_{e,4}$		
	$\frac{dg_4^v}{d\tilde{x}_{e,1}}$	$\frac{dg_4^v}{d\tilde{x}_{e,2}}$	
	$= \frac{\sum_{e=1}^N (1 - \tilde{x}_{e,2})(1 - \tilde{x}_{e,3})\tilde{x}_{e,4} \Omega _e}{V_{f3} * \sum_{e=1}^N \Omega _e}$	$= \frac{\sum_e^N - (1 - \tilde{x}_{e,3})\tilde{x}_{e,1}\tilde{x}_{e,4} \Omega _e}{V_{f3} * \sum_{e=1}^N \Omega _e}$	
	$\frac{dg_4^v}{d\tilde{x}_{e,3}} = \frac{\sum_e^N - (1 - \tilde{x}_{e,2})\tilde{x}_{e,1}\tilde{x}_{e,4} \Omega _e}{V_{f3} * \sum_{e=1}^N \Omega _e}$	$\frac{dg_4^v}{d\tilde{x}_{e,4}} = \frac{\sum_e^N (1 - \tilde{x}_{e,3})(1 - \tilde{x}_{e,2})\tilde{x}_{e,1} \Omega _e}{V_{f3} * \sum_{e=1}^N \Omega _e}$	

5.2.2 Constrangimentos de Massa e Custo

As sensibilidades dos constrangimentos de Massa e Custo são similares entre si, pelo que diferem apenas nas propriedades interpoladas, ρ e M_f ou τ e P_f . As expressões das derivadas do constrangimento de Massa, segundo o número de fases, estão apresentadas na Tabela 5.7.

Tabela 5.7 Sensibilidade dos constrangimentos de massa e custo

Formulação	Variável	Expressão da sensibilidade
MMTO2	$\tilde{x}_{e,1}$	$\frac{\partial g^M(\tilde{x}_e)}{\partial \tilde{x}_{e,1}} = \frac{\sum_{e=1}^N -p \tilde{x}_{e,1}^{p-1} [\tilde{x}_{e,2}^p \rho^1 + (1 - \tilde{x}_{e,2}^p) \rho^1] \Omega _e}{M_f * \sum_{e=1}^N \rho^M \Omega _e}$
	$\tilde{x}_{e,2}$	$\frac{\partial g^M(\tilde{x}_e)}{\partial \tilde{x}_{e,2}} = \frac{\sum_{e=1}^N -p \tilde{x}_{e,1}^p \tilde{x}_{e,2}^{p-1} [\rho^1 - \rho^2] \Omega _e}{M_f * \sum_{e=1}^N \rho^M \Omega _e}$
MMTO3	$\tilde{x}_{e,1}$	$\frac{\partial g^M(\tilde{x}_e)}{\partial \tilde{x}_{e,1}} = \frac{\sum_{e=1}^N p \tilde{x}_{e,1}^{p-1} \left(\tilde{x}_{e,2}^p \rho^1 + (1 - \tilde{x}_{e,2}^p) (\tilde{x}_{e,3}^p \rho^2 + (1 - \tilde{x}_{e,3}^p) \rho^3) \right) \Omega _e}{M_f * \sum_{e=1}^N \rho^M \Omega _e}$
	$\tilde{x}_{e,2}$	$\frac{\partial g^M(\tilde{x}_e)}{\partial \tilde{x}_{e,2}} = \frac{\sum_{e=1}^N -p \tilde{x}_e^p \tilde{x}_{e,2}^{p-1} [\rho^1 - \rho^3 + (\rho^3 - \rho^2) \tilde{x}_{e,3}^p] \Omega _e}{M_f * \sum_{e=1}^N \rho^M \Omega _e}$
	$\tilde{x}_{e,3}$	$\frac{\partial g^M(\tilde{x}_e)}{\partial \tilde{x}_{e,3}} = \frac{\sum_{e=1}^N -p \tilde{x}_e^p \tilde{x}_{e,3}^{p-1} [\rho^2 - \rho^3 + (\rho^3 - \rho^2) \tilde{x}_{e,2}^p] \Omega _e}{M_f * \sum_{e=1}^N \rho^M \Omega _e}$
MMTO4	$\tilde{x}_{e,1}$	$\frac{\partial g^M(\tilde{x}_e)}{\partial \tilde{x}_{e,1}} = \frac{\sum_{e=1}^N p \tilde{x}_{e,1}^{p-1} \left(\tilde{x}_{e,2}^p \rho^1 + (1 - \tilde{x}_{e,2}^p) \left(\tilde{x}_{e,3}^p \rho^2 + (1 - \tilde{x}_{e,3}^p) \left(\tilde{x}_{e,4}^p \rho^3 + (1 - \tilde{x}_{e,4}^p) \rho^4 \right) \right) \right) \Omega _e}{M_f * \sum_{e=1}^N \rho^M \Omega _e}$
	$\tilde{x}_{e,2}$	$\frac{\partial g^M(\tilde{x}_e)}{\partial \tilde{x}_{e,2}} = \frac{\sum_{e=1}^N -p \tilde{x}_e^p \tilde{x}_{e,2}^{p-1} \left[\rho^1 - \rho^4 + (\rho^4 - \rho^2 + (\rho^3 - \rho^4) \tilde{x}_{e,4}^p) \tilde{x}_{e,3}^p + (\rho^4 - \rho^3) \tilde{x}_{e,4}^p \right] \Omega _e}{M_f * \sum_{e=1}^N \rho^M \Omega _e}$
	$\tilde{x}_{e,3}$	$\frac{\partial g^M(\tilde{x}_e)}{\partial \tilde{x}_{e,3}} = \frac{\sum_{e=1}^N -p \tilde{x}_e^p \tilde{x}_{e,3}^{p-1} \left[\rho^2 - \rho^4 + (\rho^4 - \rho^3 + (\rho^3 - \rho^4) \tilde{x}_{e,2}^p) \tilde{x}_{e,4}^p + (\rho^4 - \rho^2) \tilde{x}_{e,2}^p \right] \Omega _e}{M_f * \sum_{e=1}^N \rho^M \Omega _e}$
	$\tilde{x}_{e,4}$	$\frac{\partial g^M(\tilde{x}_e)}{\partial \tilde{x}_{e,4}} = \frac{\sum_{e=1}^N -p \tilde{x}_e^p \tilde{x}_{e,4}^{p-1} \left[\rho^3 - \rho^4 + (\rho^4 - \rho^3 + (\rho^3 - \rho^4) \tilde{x}_{e,2}^p) \tilde{x}_{e,3}^p + (\rho^4 - \rho^3) \tilde{x}_{e,2}^p \right] \Omega _e}{M_f * \sum_{e=1}^N \rho^M \Omega _e}$

Capítulo 6. Resultados

Neste capítulo aplicam-se ao problema MBB-Beam, Figura 6.1, com recurso a um programa FORTRAN e ao modo *batch* do ANSYS, as metodologias apresentadas em 4 grupos de otimização. O primeiro grupo visa demonstrar que a incorporação ponderada de uma segunda fase de material na formulação do problema, providencia melhorias na rigidez da estrutura otimizada. No entanto, com a adição da terceira e quarta fase na formulação do problema, confirma-se a necessidade de otimizar tanto a distribuição de material como a sua quantidade, ao invés da divisão da massa igualmente pelas fases de material presentes em cada otimização. O segundo grupo de otimização comprova esta necessidade. Aqui demonstra-se que a otimização da fração volúmica presente em cada solução resulta em melhorias de rigidez, face às otimizações do primeiro grupo com frações volúmicas predeterminadas. No terceiro grupo de otimizações observa-se que aumentando o valor de rigidez, é possível obter uma solução mais economicamente sustentável, quando imposto um teto orçamental. No quarto e último grupo de otimizações, estuda-se o comportamento das soluções multi-objetivo quando se varia a importância de cada função objetivo.

É implementado o filtro de densidades em todas as formulações.

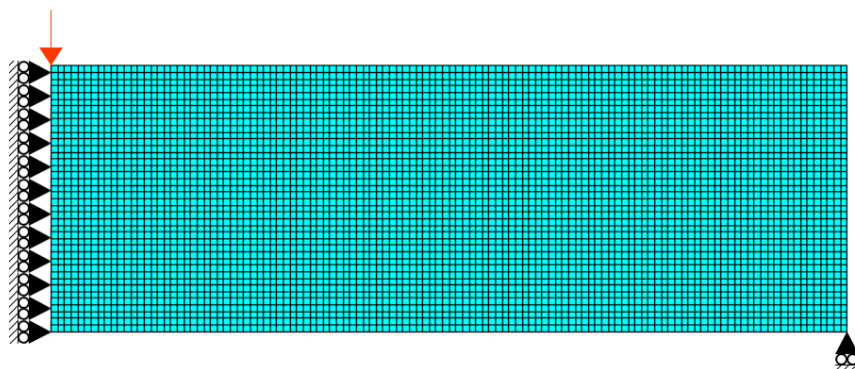


Figura 6.1 MBB-Beam

O domínio de projeto é definido, no programa FORTRAN e implementado no ambiente ANSYS, como sendo um retângulo bidimensional com 1 metro de altura e 3 metros de comprimento. Para efeitos de cálculo de volume, massa e custo, considera-se uma espessura de 0,01m. Para o cálculo da *Compliance* define-se o tipo de elemento como *Plane182*, elemento 2D com 4 nós, juntamente com as *Keyoptions* do elemento. A *Keyoption* 1 é igual a 2 para aplicar *Enhanced Strain Formulation*, que

introduz 4 graus de liberdade internos no elemento para lidar com *shear locking*. A *Keyoption* 3 é igual a 3 para permitir a definição de espessura do domínio. O domínio é refinado com 1600 elementos finitos por metro quadrado totalizando 4800 elementos finitos.

Considerando as propriedades de material de fabrico aditivo, ver Anexo 2, apresenta-se na Tabela 6.1 as 4 fases de material consideradas e as respetivas propriedades.

Tabela 6.1 Propriedades das fases de material consideradas

Fase de Material		Cor(n°)		Módulo de Young, E [GPa]	Densidade mássica ρ [Kg/m ³]	Custo por kilo [€/Kg]	Custo Volúmico τ [€/m ³]
Aço	St		4	173	7900	110.99	876821,0
Níquel	Ni		3	166	8440	160.32	1353100,8
Titânio	Ti		2	115	4430	650,00	2879500,0
Alumínio	Al		1	71	2670	143.88	384159,6

De forma a melhor comparar os materiais e entender os resultados, a Tabela 6.2 apresenta as propriedades a Tabela 6.1 normalizadas em relação ao aço.

Tabela 6.2 Propriedades relativas das fases de material consideradas

Fase de Material	E/E_0	ρ/ρ_0	€/€ ₀	τ/τ_0	E/ρ
Aço	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,0219
Níquel	0,9595	1,0684	1,4445	1,5433	0,0197
Titânio	0,6647	0,5608	5,8564	3,2840	0,0260
Alumínio	0,4104	0,3380	1,2963	0,4381	0,0266

6.1 Resultados SMTO-V

Nesta fase começou-se por analisar as soluções SMTO-V para cada um dos materiais. Para haver uma base de comparação, calculou-se separadamente a fração volúmica para os constrangimentos de volume, de forma a que as soluções partilhem sempre a mesma massa. Sendo o alumínio o material mais leve, este vai determinar a massa máxima admissível de 80,1 Kg que equivale a fração volúmica de

100% para a solução SMTO-V de alumínio, mas apenas 33,797% para a solução SMTO-V de aço. Apresentam-se as topologias resultantes para cada caso de fase de material na Figura 6.2.

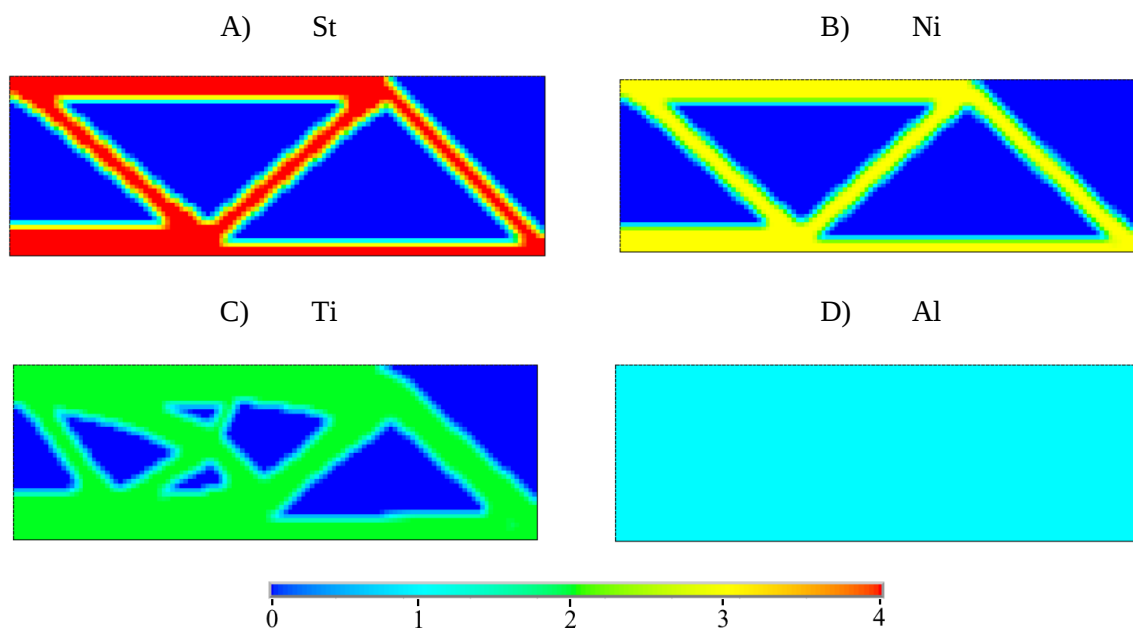


Figura 6.2 Distribuição de material para os problemas S-SMTO-V

Na Tabela 6.3 apresentam-se os resultados das otimizações s em cada caso SMTO e a sua comparação em relação ao primeiro caso, **A)**, da estrutura em aço está apresentada na Tabela 6.4.

Tabela 6.3 Resultados das otimizações SMTO

Caso	Material	Fração volúmica [%]	Massa, M [Kg]	Custo, P [€]	Compliance, C [N. m]
A)	St	33,80	80,1	8890	178875
B)	Ni	31,64		12842	200981
C)	Ti	60,27		52065	150016
D)	Al	100,00		11525	179277

Tabela 6.4 Comparação das soluções de otimização dos casos **B)**, **C)** e **D)** com o caso de referência **A)**

Caso	Variação da Fração volúmica [±%]	Custo, P [±]		Compliance, C [±]	
		€	%	N.m	%
B)	-2,62	+3951	+44,45	+22105	+12,36
C)	+26,47	+43174	+485,65	-28860	-16,13
D)	+66,20	+2634	+29,64	+403	+0,22

Verifica-se que para a mesma massa, apenas a solução SMTO com titânio supera a solução de aço em termos de rigidez. As soluções SMTO de aço e alumínio têm uma rigidez semelhante, apesar do alumínio ter a melhor relação rigidez/massa. Isto pode ser explicado pelo facto de a solução de aço ter uma topologia otimizada enquanto a solução de alumínio ocupa o domínio de *design* inteiro. Apesar da melhoria no aspeto de rigidez, a solução em titânio tem um custo associado muito elevado, o que a deixa pouco apelativa do ponto de vista do projeto.

6.2 S-MMTO2-V

Considera-se agora problemas S-MMTO2-V onde a massa global da estrutura de 80,1 Kg é dividida igualmente entre os dois materiais. Apresenta-se na Figura 6.3 as topologias ótimas multimateriais e nas Tabelas 6.5 e 6.6 apresentam-se os resultados das otimizações MMTO2 e comparação com as propriedades das topologias SMTO onde se encontram os mesmos materiais.

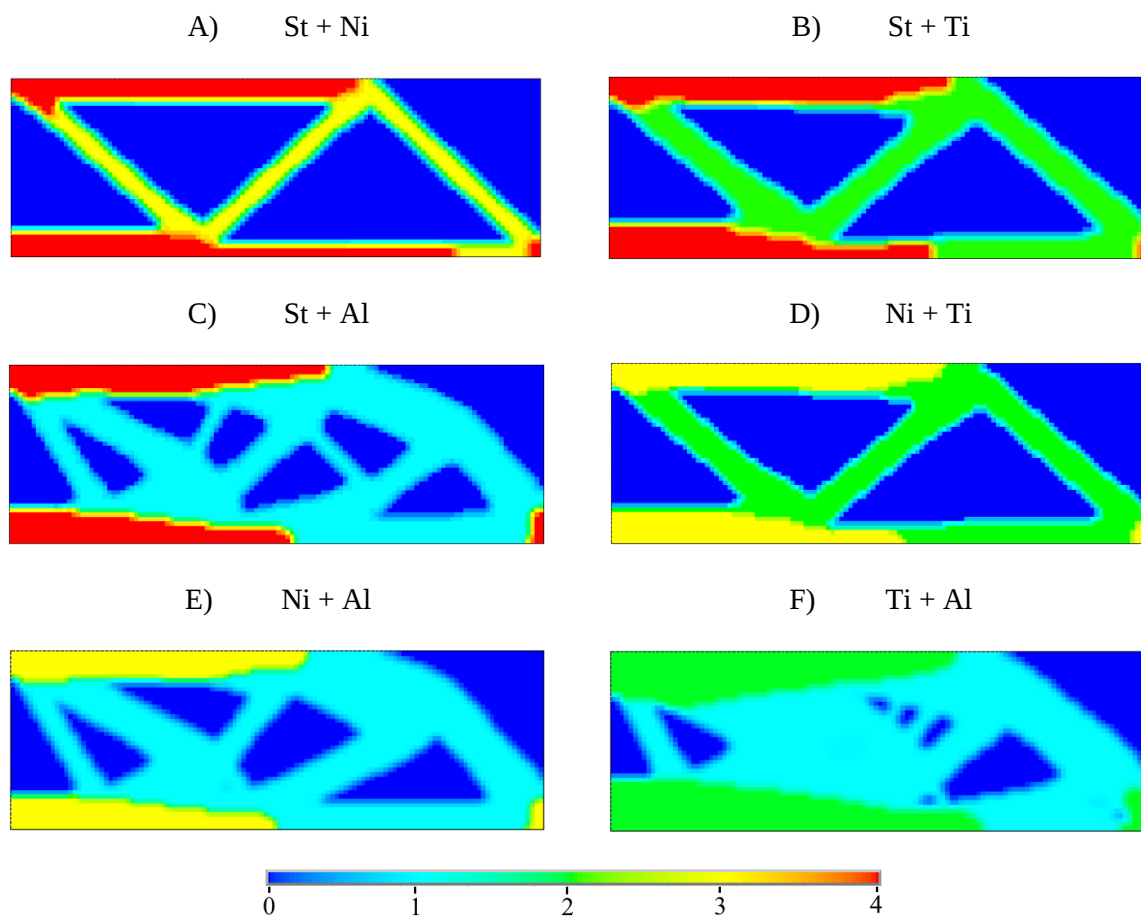


Figura 6.3 Distribuição de material para os casos de problemas S-MMTO2-V

Tabela 6.5 Resultados das otimizações S-MMTO2-V

Caso	Fração volúmica (%)				Custo, P [€]	Compliance, C [N. m]
	St	Ni	Ti	Al		
A)	16,90	15,82	-	-	10866	187672
B)	16,90	-	30,14	-	30478	150266
C)	16,90	-	-	50,00	10207	137656
D)	-	15,82	30,14	-	32453	158627
E)	-	15,82	-	50,00	12183	144982
F)	-	-	30,14	50,00	31795	139196

Tabela 6.6 Comparação das soluções de otimização de MMTO2 com as soluções SMTO (Tabela 6.3)

Caso em comparação		Variação da fração volumica total [$\pm$ %]	Custo, P [$\pm$]		Compliance, C [$\pm$]	
MMTO2	SMTO (de referência)		€	%	N.m	%
A)	A)	-1,08	+1976	+22,22	+8797	+4,92
	B)	+1,08	-1976	-15,39	-13308	-6,62
B)	A)	+13,24	+21587	+242,82	-28609	-15,99
	C)	-13,24	-21587	-41,46	251	+0,17
C)	A)	+33,10	+1317	+14,82	-41219	-23,04
	D)	-33,10	-1317	-11,43	-41621	-23,22
D)	B)	+14,32	+19612	+152,72	-42354	-21,07
	C)	-14,32	-19612	-37,67	+8612	+5,74
E)	B)	+34,18	-658	-5,13	-56000	-27,86
	D)	-34,18	+658	+5,71	-34296	-19,13
F)	C)	+19,86	-20270	-38,93	-10820	-7,21
	D)	-19,86	+20270	+175,88	-40082	-22,36

Observa-se na Figura 6.3 que, nas topologias resultantes da otimização, os materiais mais rígidos distribuem-se nas zonas de maior esforço, que são as zonas de contacto com as forças aplicadas e os apoios.

Analisando os resultados MMTO2 observa-se que estes são, em grande parte, mais rígidos, que os resultados SMTO, no entanto, retira-se da Tabela 6.6 os seguintes pontos:

- Observou-se que apenas três soluções MMTO2, casos A), B) e D), demonstraram ter menor rigidez que as soluções SMTO de um dos materiais incorporados.
- No caso A) das soluções MMTO2, a menor rigidez resultante face ao caso A) das soluções SMTO, deve-se o facto de o níquel ter uma rigidez menor e densidade maior que o aço e, portanto, uma relação E/ρ pior.
- Nos casos B) e D) das soluções MMTO2, a menor rigidez resultante face ao caso C) das soluções SMTO, pode resultar da distribuição incorreta dos materiais rígidos. Pois, apesar de o aço e níquel terem uma relação E/ρ menor que o titânio, o facto de terem uma rigidez maior, estes materiais são preferíveis nas zonas de maior esforço. Isto observa-se nas soluções MMTO2 dos casos C), E) e F), onde os materiais de maior

rigidez, mas com menor relação E/ρ que o alumínio, ocupam as zonas de maior esforço criando uma solução com menor *Compliance* do que as soluções SMTO dos materiais presentes.

- Os resultados obtidos demonstram o potencial de soluções topológicas com 2 materiais distintos.

6.3 S-MMTO3-V e S-MMTO4-V

Nos problemas com três e quatro fases de material, distribui-se novamente a massa igualmente entre as 3 ou 4 fases e obtém-se as topologias ótimas apresentadas nas Figuras 6.4 com os respetivos resultados das otimizações apresentados na Tabela 6.7

Tabela 6.7 Resultados das otimizações S-MMTO3-V e S-MMTO4-V

Caso	Fração volúmica (%)				Custo, P [€]	Compliance, C [N. m]
	St	Ni	Ti	Al		
A)	11,27	10,55	20,09	-	24599	162830
B)	11,27	10,55	-	33,33	11086	151539
C)	11,27	-	20,09	33,33	24160	136117
D)	-	10,55	20,09	33,33	25477	141295
E)	8,45	7,91	15,07	25	21333	146401

Os resultados das otimizações MMTO3-V confirmam a potencialidade das otimizações multimaterial, tendo-se obtido no caso C) o valor mais baixo de *Compliance* até agora. No entanto, verifica-se que as restantes soluções nem sempre são mais rígidas do que as soluções MMTO2-V dos materiais que as incorporam. O mesmo se verifica na solução MMTO4-V, que apenas é mais rígida do que metade das soluções MMTO3-V e MMTO2-V.

Impõe-se, então, a necessidade de introduzir na otimização a capacidade de se obter a fração volúmica ótima de cada material.

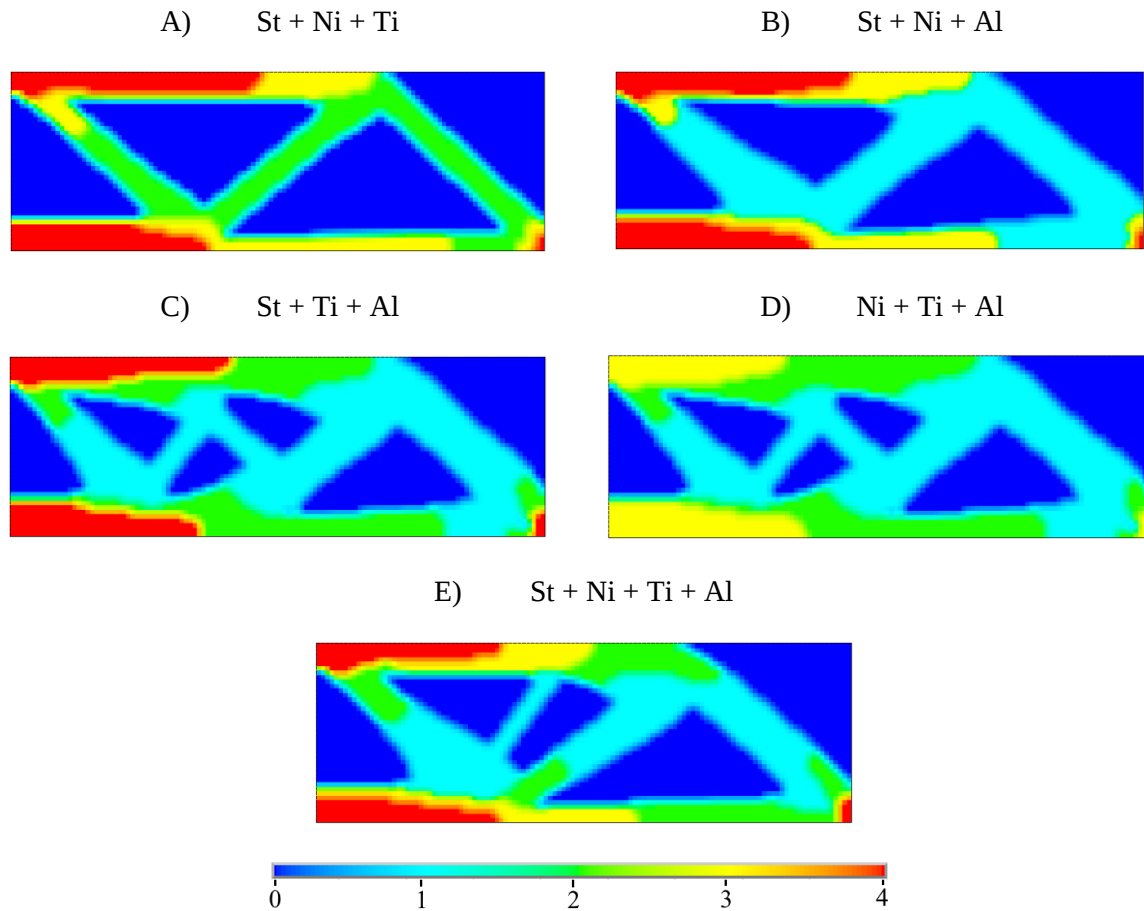


Figura 6.4 Distribuição de material para os casos de problemas S-MMTO3-V e S-MMTO4-V

6.4 S-MMTO2-M

De forma a obter a melhor distribuição e fração volúmica de cada material presente na formulação multimaterial aplica-se o constrangimento de massa global. Este constrangimento não obriga à escolha de todos as fases de material se o algoritmo assim o preferir.

Na Figura 6.5 apresentam-se as topologias resultantes das otimizações MMTO2-M. Na Tabela 6.8 apresentam-se os resultados das otimizações MMTO2-M e na Tabela 6.9 apresenta-se comparação com MMTO2-V.

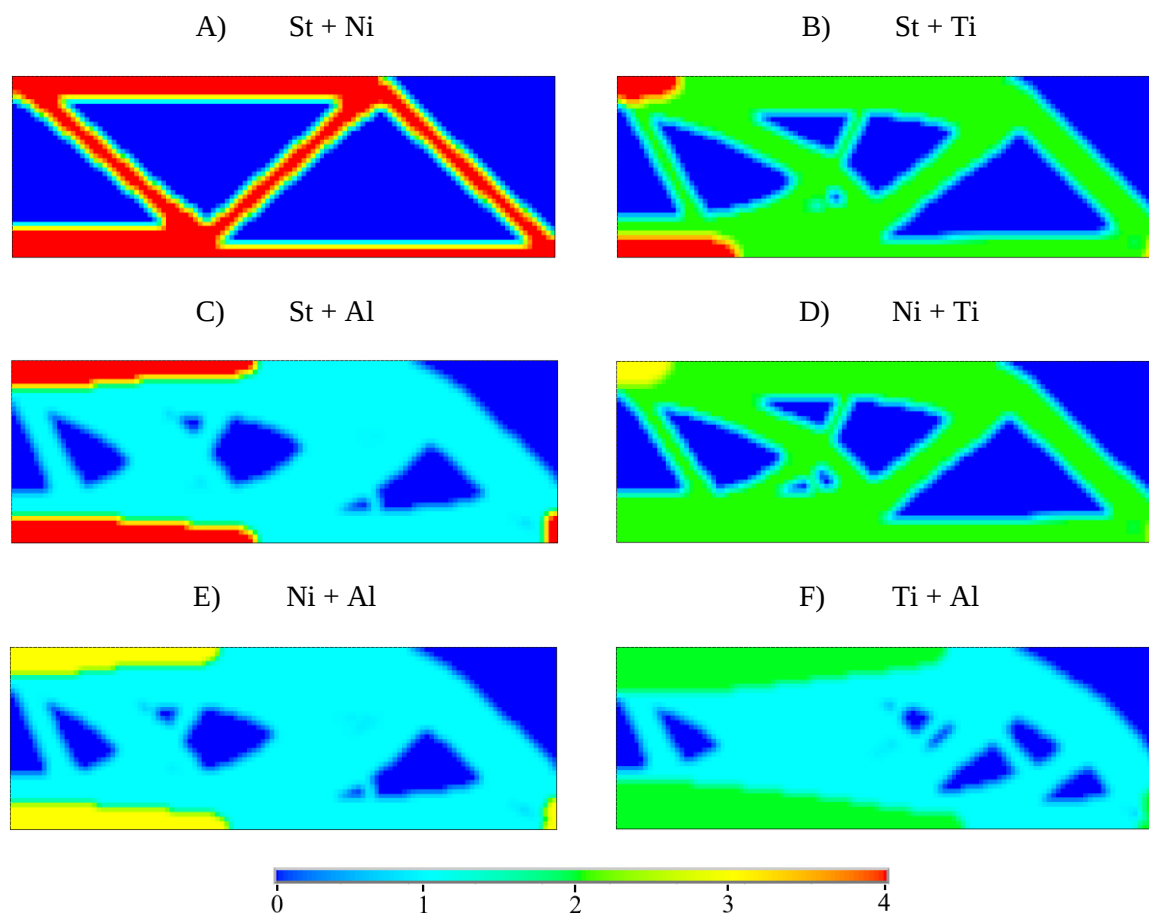


Figura 6.5 Distribuição de material para os casos de problemas S-MMTO2-M

Tabela 6.8 Resultados das otimizações S-MMTO2-M

Caso	Fração volúmica (%)				Custo, P [€]	Compliance, C [N. m]
	St	Ni	Ti	Al		
A)	33,80	0	-	-	8890	177950
B)	4,38	-	52,46	-	46471	143982
C)	11,57	-	-	65,78	10623	135501
D)	-	1,33	57,74	-	50417	147479
E)	-	10,03	-	68,30	11942	141417
F)	-	-	25,39	57,87	28602	139086

Tabela 6.9 Comparação das soluções de otimização de S-MMTO2-M com as soluções S-MMTO2-V
(Tabela 6.5)

Casos MMTO2 em comparação	Variação da fração volúmica total [±%]	Custo, <i>P</i> [±]		Compliance, <i>C</i> [±]	
		€	%	N.m	%
A)	+1,08	-1975	-18,18	-9722	-5,18
B)	+9,81	+15994	+52,48	-6284	-4,18
C)	+10,45	+416	+4,07	-2155	-1,57
D)	+13,11	+17964	+55,35	-11149	-7,03
E)	+12,51	-241	-1,98	-3565	-2,46
F)	+3,13	-3193	-10,04	-110	-0,08

Observa-se que existe uma melhoria em relação à *Compliance* nas otimizações S-MMTO2-M quando comparadas com as otimizações S-MMTO2-V. Esta melhoria vem acompanhada de um aumento de fração volúmica, devido ao aumento da região ocupada pelos materiais de menor densidade específica.

6.5 S-MMTO3-M e S-MMTO4-M

Aumentando o número de fases de material disponível para 3 e, posteriormente, 4, na formulação, apresenta-se na Figura 6.6 e Tabela 6.10, as soluções das otimizações S-MMTO3-M e S-MMTO4-M e os respetivos resultados das otimizações. Na Tabela 6.11 faz-se a comparação destes resultados com S-MMTO3-V e S-MMTO4-V

Tabela 6.10 Resultados das otimizações S-MMTO3-M e S-MMTO4-M

Caso	Fração volúmica (%)				Custo, <i>P</i> [€]	Compliance, <i>C</i> [N. m]
	St	Ni	Ti	Al		
A)	5,16	0,05	50,96	-	45404	143683
B)	11,94	0,06	-	64,47	10596	135600
C)	5,43	-	17,00	55,73	22539	132585
D)	-	3,87	19,83	54,88	25023	135254
E)	6,32	0,07	14,36	57,25	20694	133112

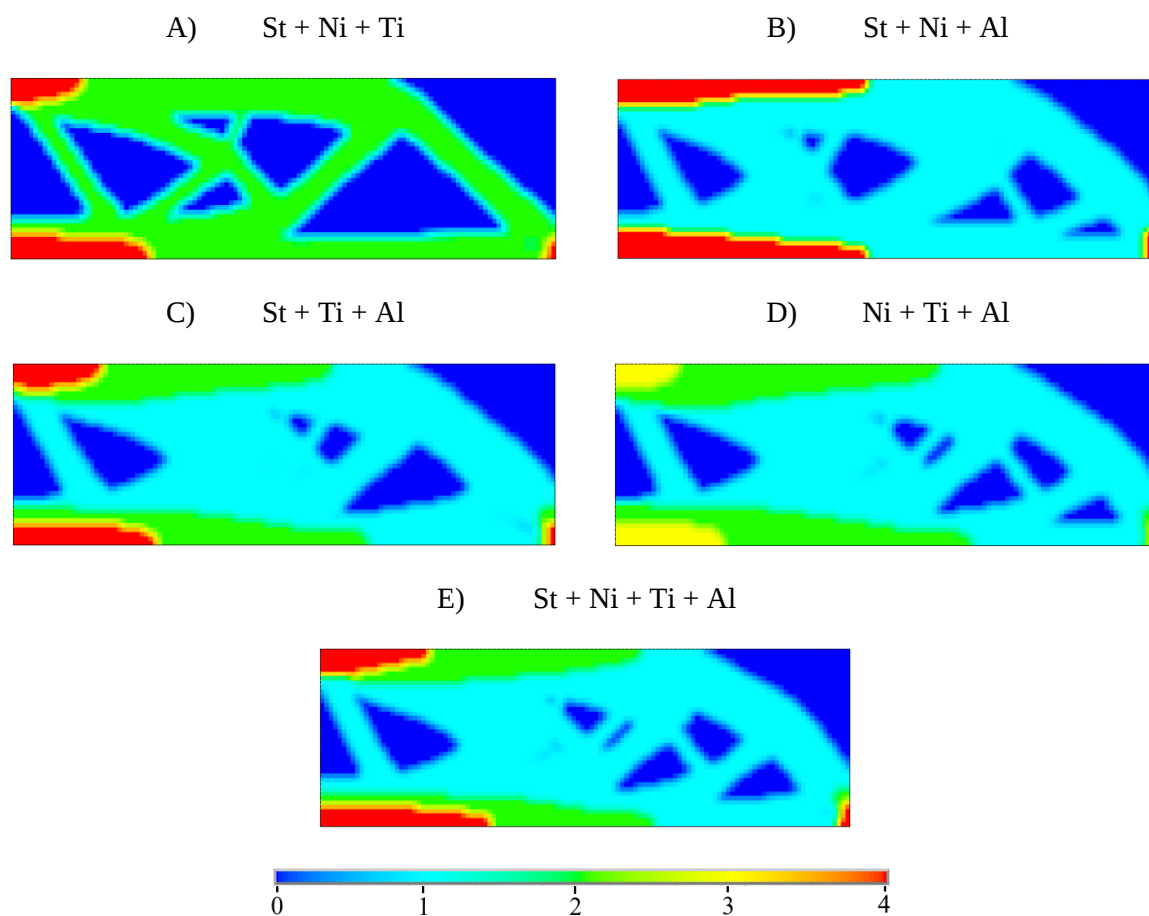


Figura 6.6 Distribuição de material nos problemas S-MMTO3-M e S-MMTO4-M

Tabela 6.11 Comparação das soluções de otimização de S-MMTO3-M e S-MMTO4-M com as soluções S-MMTO3-V e S-MMTO4-V

Casos MMTO3 e MMTO4 em comparação	Variação da fração volúmica total [±%]	Custo, P [±]		Compliance, C [±]	
		€	%	N.m	%
A)	+14,28	+20805	+84,58	-19147	-11,76
B)	+21,33	-489	-4,41	-15938	-10,52
C)	+13,47	-1621	-6,71	-3531	-2,59
D)	+14,60	-453	-1,78	-6040	-4,28
E)	+25,24	+4019	+18,84	-10630	-7,26

Similarmente às soluções S-MMTO2-M, as soluções das otimizações S-MMTO3-M demonstram ser mais rígidas que as soluções S-MMTO3-V.

Observa-se também que a topologia resultante da otimização S-MMTO4-M, caso E), é muito semelhante à topologia do caso C) das otimizações S-MMTO3-M. Aqui a otimização com as quatro fases de material escolheu não distribuir níquel.

O valor da *Compliance* do caso C) das otimizações S-MMTO3-M é o mais baixo obtido entre todas as otimizações uni-objetivo, tendo apenas menos 0.4% do que a otimização S-MMTO4-M, caso E). A discrepância dos valores, mesmo que baixa, pode ser explicada pelo maior grau de dificuldade, devido ao maior número de fases disponível, que a otimização S-MMTO4-M tem em encontrar o mesmo mínimo.

6.6 S-MMTO2-MP, S-MMTO3-MP e S-MMTO4-MP

A inclusão de titânio nas formulações multimateriais traz custos substanciais, que estão relacionados com o processamento do mesmo. Com o objetivo de tornar o projeto o mais economicamente sustentável possível, introduz-se na formulação o constrangimento de custo. Este constrangimento tem como limite o custo associado a um domínio preenchido com 40% de titânio, ou seja, 34554 euros.

Observe-se os resultados das otimizações com 2, 3 e 4 fases de material nas Figuras 6.7 e 6.8 complementado com as Tabelas 6.12 e 6.13, respetivamente. Nas Tabelas 6.14 e 6.15, apresenta-se as comparações entre as formulações com e sem constrangimento de custo.

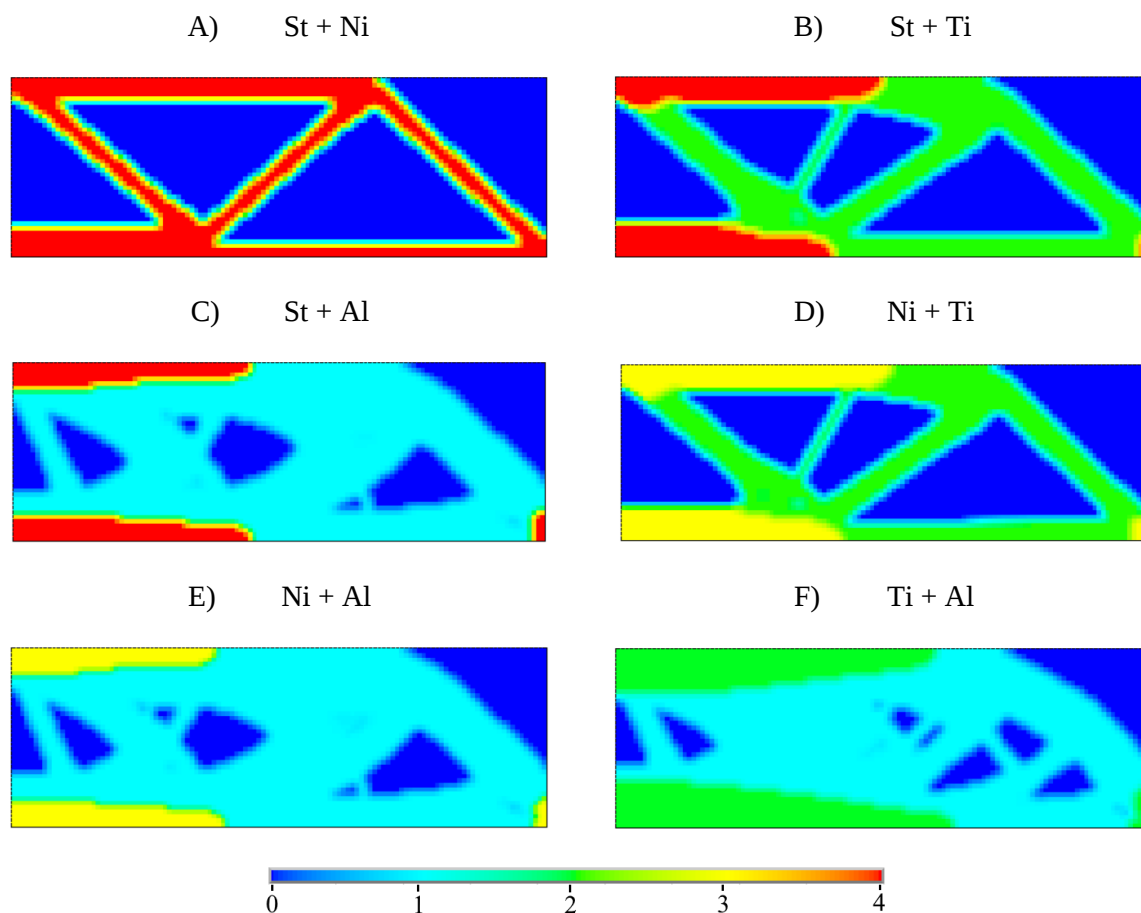


Figura 6.7 Distribuição de material para os casos de problemas S-MMTO2-MP

Tabela 6.12 Resultados das otimizações S-MMTO2-MP

Caso	Fração volúmica (%)				Custo, P [€]	Compliance, C [N.m]
	St	Ni	Ti	Al		
A)	33,80	0	-	-	8890	177950
B)	13,71	-	35,83	-	34554	147786
C)	11,57	-	-	65,78	10623	135501
D)	-	14,12	33,36	-	34554	156736
E)	-	10,00	-	68,38	11941	141431
F)	-	-	25,20	58,19	28476	139135

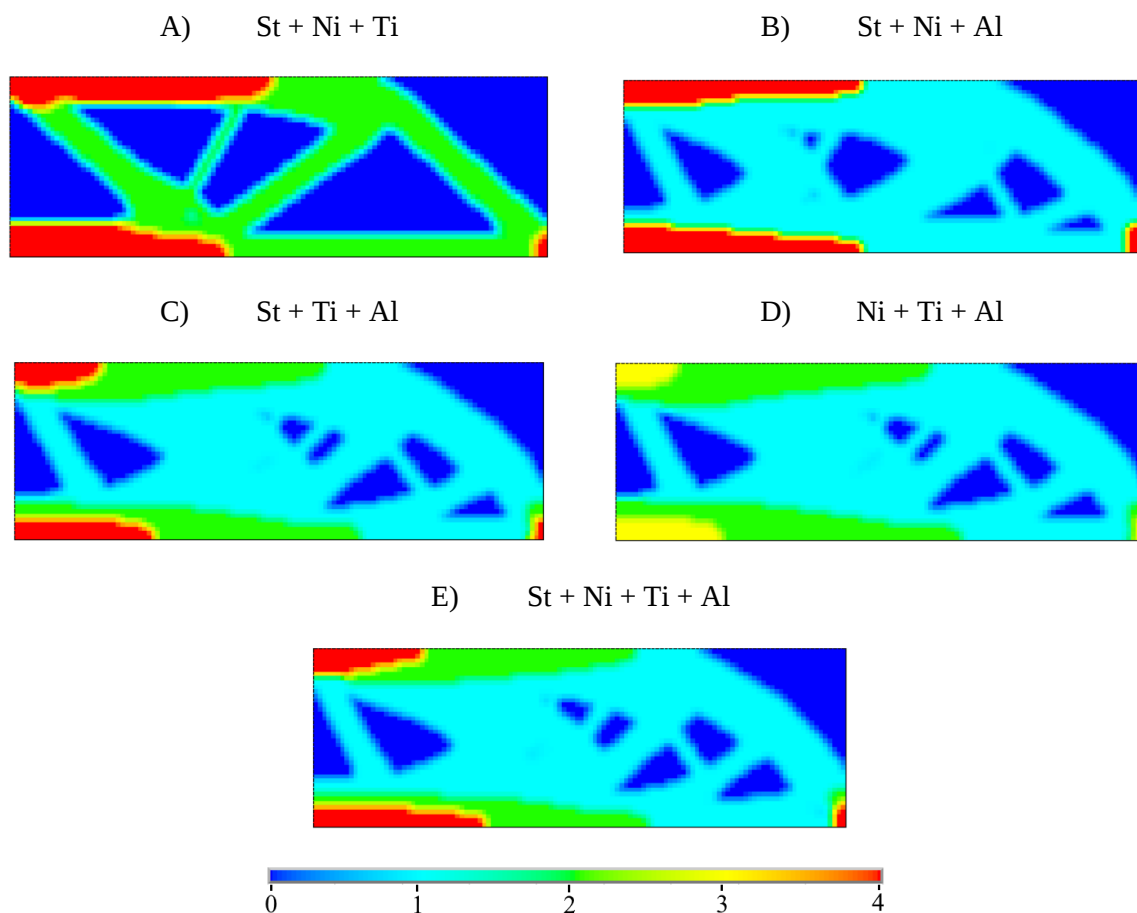


Figura 6.8 Distribuição de material para os casos de problemas S-MMTO3-MP e S-MMTO4-MP

Tabela 6.13 Resultados das otimizações S-MMTO3-MP e S-MMTO4-MP

Caso	Fração volúmica (%)				Custo, P [€]	Compliance, C [N.m]
	St	Ni	Ti	Al		
A)	13,67	0,04	35,82	-	34554	147922
B)	11,94	0,06	-	64,47	10596	135609
C)	5,45	-	17,03	55,63	22555	132662
D)	-	3,87	19,80	54,94	25000	135246
E)	6,36	0,07	14,34	57,16	20677	133110

Tabela 6.14 Comparação das soluções de otimização de S-MMTO2-MP com as soluções S-MMTO2-M (Tabela 6.8)

Casos MMTO2 em comparação	Variação da fração volúmica total [±%]	Custo, P [±]		Compliance, C [±]	
		€	%	N.m	%
A)	0	0	0	0	0
B)	-7,31	-11916	-25,64	+3804	+2,64
C)	0	0	0	0	0
D)	-11,58	-15862	-31,46	+9258	+6,28
E)	+0,05	-1	-0,01	+14	+0,01
F)	+0,12	-127	-0,44	+50	+0,04

Tabela 6.15 Comparação das soluções de otimização de S-MMTO3-MP e S-MMTO4-MP com as soluções S-MMTO3-M e S-MMTO4-M (Tabela 6.10)

Casos MMTO3 e MMTO4 em comparação	Variação da fração volúmica total [±%]	Custo, P [±]		Compliance, C [±]	
		€	%	N.m	%
A)	-6,65	-10850	-23,90	+4239	+2,95
B)	0	0	0	+8	-0,01
C)	0,05	+16	+0,07	+77	+0,06
D)	0,02	-23	-0,09	-8	-0,01
E)	-3,74	-4675	-18,44	-2662	-1,96

Nas Tabelas 6.12, 6.13, 6.14 e 6.15 é possível verificar que a adição do constrangimento de custo igual a 34554 na formulação, obrigou a modificações na topologia e na distribuição de material nas soluções S-MMTO2-M, S-MMTO3-M e S-MMTO4-M, que tinham valores de custo superiores ao constrangimento agora aplicado. As soluções S-MMTO2-MP, S-MMTO3-MP e S-MMTO4-MP demonstram também pouco impacto na topologia resultante nas soluções que não ativam o constrangimento de custo. Nos casos B) e D) das soluções S-MMTO2-MP e A) das soluções S-MMTO3-MP, observa-se que, abdicando um pouco da rigidez, obtém-se um resultado mais economicamente sustentável, isto é, o constrangimento de custo está ativo.

6.7 M-MMTO4-V

Na formulação multi-objetivo é necessário normalizar cada função objetivo individualmente. Estas normalizações baseiam-se no ótimo individual quando 80% do domínio de projeto fica preenchido com material. A Tabela 6.16 apresenta os valores de normalização para cada função objetivo.

Tabela 6.16 Valores de normalização das funções objetivo

Massa, $M^\#$ [Kg]	Custo, $P^\#$ [€]	Compliance, $C^\#$ [N.m]
64,08	9219,816	81101,79688

Na formulação (4.8), apesar de estar presente o Custo como função objetivo, o seu peso relativo, w_3 , é considerado aqui nulo. Assim obtém-se um leque de resultados que mais facilmente se comparam entre si e se representam graficamente (curva em vez de superfície de Pareto), variando apenas os pesos relativos da *Compliance*, w_1 , e Massa, w_2 . Na Figura 6.9 observa-se a distribuição de material obtido para cada caso aumentando progressivamente o peso relativo da Massa e subsequentemente diminuindo o da *Compliance*. Apresenta-se, na Tabela 6.17, os resultados das otimizações para diferentes pesos, visualizando-se graficamente esses resultados nas Figuras 6.10 e 6.11 e na Figura 6.12 representa-se a curva de *Pareto*.

Na Figura 6.10 está representado, em função de w_2 ($w_1 = 1 - w_2$), a função multi-objetivo,

$$f(C, M) = w_1 \frac{C}{C^\#} + w_2 \frac{M}{M^\#} \quad (6.1)$$

e também as funções normalizadas da *Compliance* ($\frac{C}{C^\#}$) e Massa ($\frac{M}{M^\#}$). Acrescente-se que embora o custo não faça parte da formulação multi-objetivo, também se procedeu à sua leitura para cada otimização efetuada. A representação gráfica deste custo também se encontra na Figura 6.10.

Conforme se pode observar nos valores de w_2 entre 0,2 e 0,3, o custo é comparativamente mais elevado devido à presença de titânio nos *layout* obtidos, como se comprova no gráfico da Figura 6.11.

Na Figura 6.10 pode observar-se que com a variação do peso w_2 os objetivos *Compliance* e Massa são conflitantes, isto é, tem-se uma menor *Compliance* para uma maior Massa, ou tem-se uma maior *Compliance* para uma menor Massa.

Na figura 6.11, para um valor de w_2 superior a 0,5, a minimização da Massa torna-se preponderante e, portanto, existindo apenas um constrangimento de volume de “menor ou igual”, significa que a massa é reduzida até se aproximar de zero no limite quando w_2 se aproxima de 1. Sendo

assim, torna-se importante comparar diferentes soluções para a mesma fração volúmica total de material. Por isso, na próxima secção, é considerado um limite inferior para esta fração volúmica dada a impossibilidade de se trabalhar com constrangimentos de igualdade no algoritmo de otimização utilizado nesta dissertação, MMA.

Na figura 6.12 visualiza-se a curva de *Pareto* obtida no espaço das funções normalizadas onde cada ponto é marcado para uma determinada combinação de pesos dessas funções normalizadas. O aspeto da curva obtida corresponde a um formato *standart* tipo “cotovelo”.

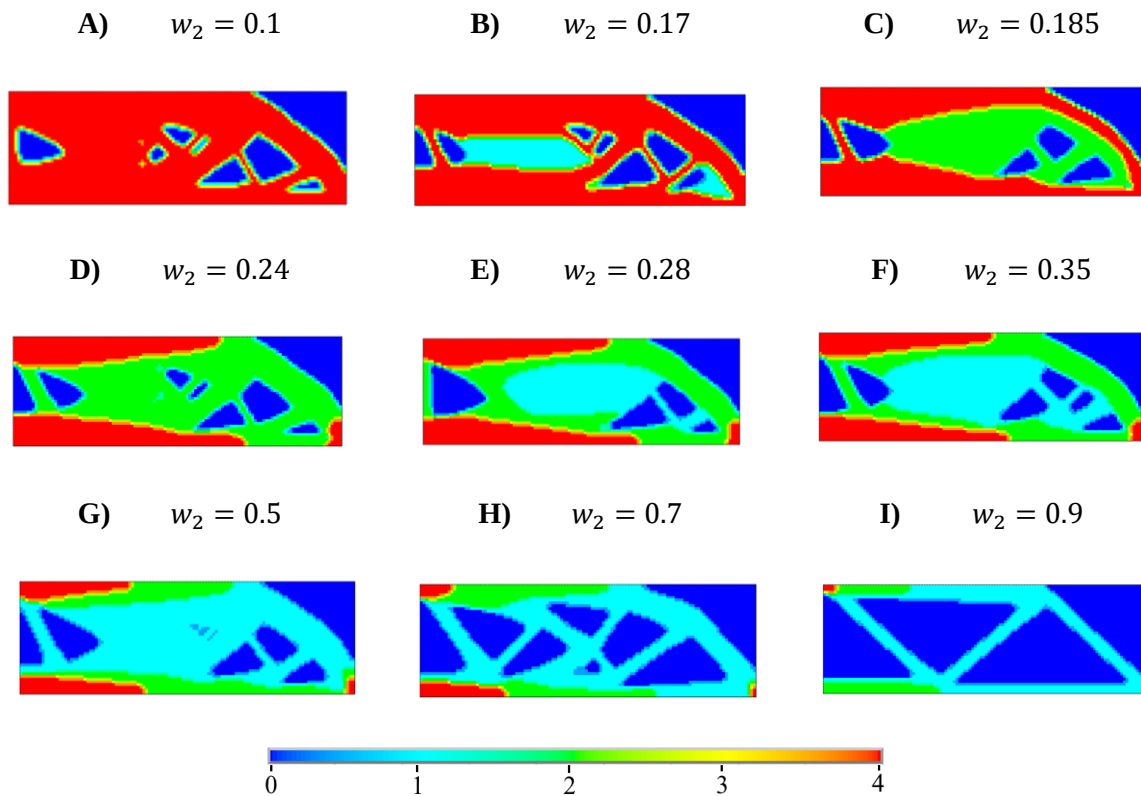
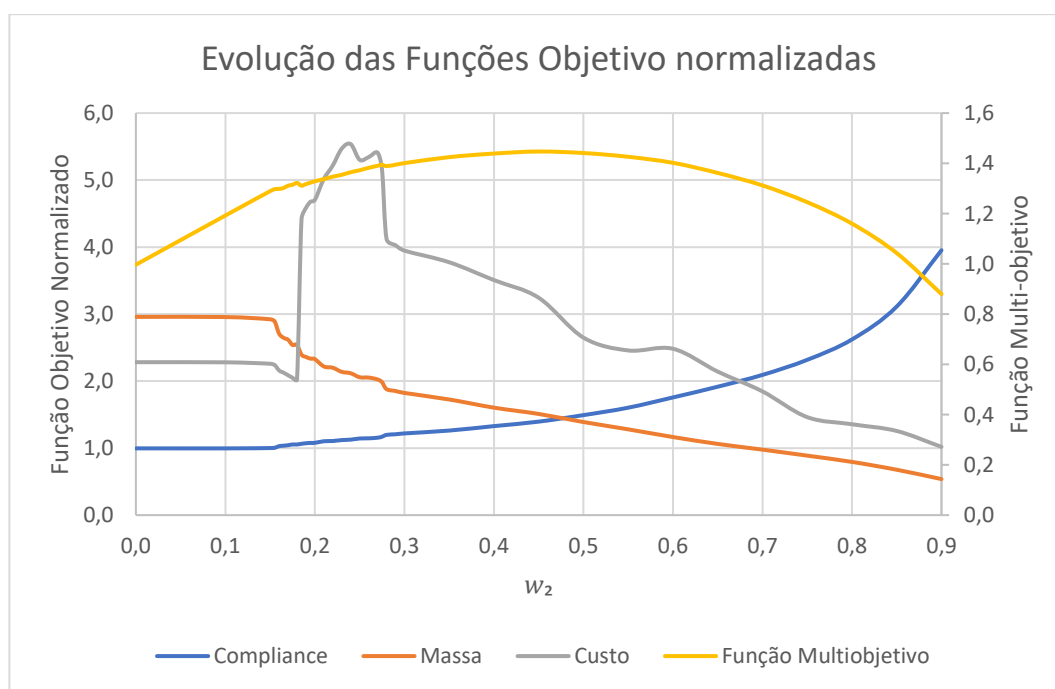


Figura 6.9 Distribuição de material para os casos de problemas M-MMTO-V

Tabela 6.17 Propriedades das otimizações M-MMTO4-V

Caso	Peso		Fração volúmica (%)			Massa, M [Kg]	Custo, P [€]	Compliance, C [N.m]
	w_1	w_2	St	Ti	Al			
A)	0,9	0,1	79,90	0	0,1	189,44	21028	80817
B)	0,83	0,17	65,92	0,38	13,67	167,77	19248	84624
C)	0,815	0,185	45,87	32,94	1,15	153,50	40670	86364
D)	0,76	0,24	28,69	50,19	1,07	135,68	51048	91410
E)	0,72	0,28	24,59	33,60	21,76	120,50	38021	97157
F)	0,65	0,35	19,38	30,32	30,24	110,60	34795	102389
G)	0,5	0,5	9,65	18,38	51,89	89,05	24428	121051
H)	0,3	0,7	4,43	12,42	44,31	62,64	1706	169745
I)	0,1	0,9	0,32	6,62	31,02	34,5	9394	320608

Figura 6.10 Gráfico da evolução das funções objetivos em relação a w_2 em M-MMTO4-V

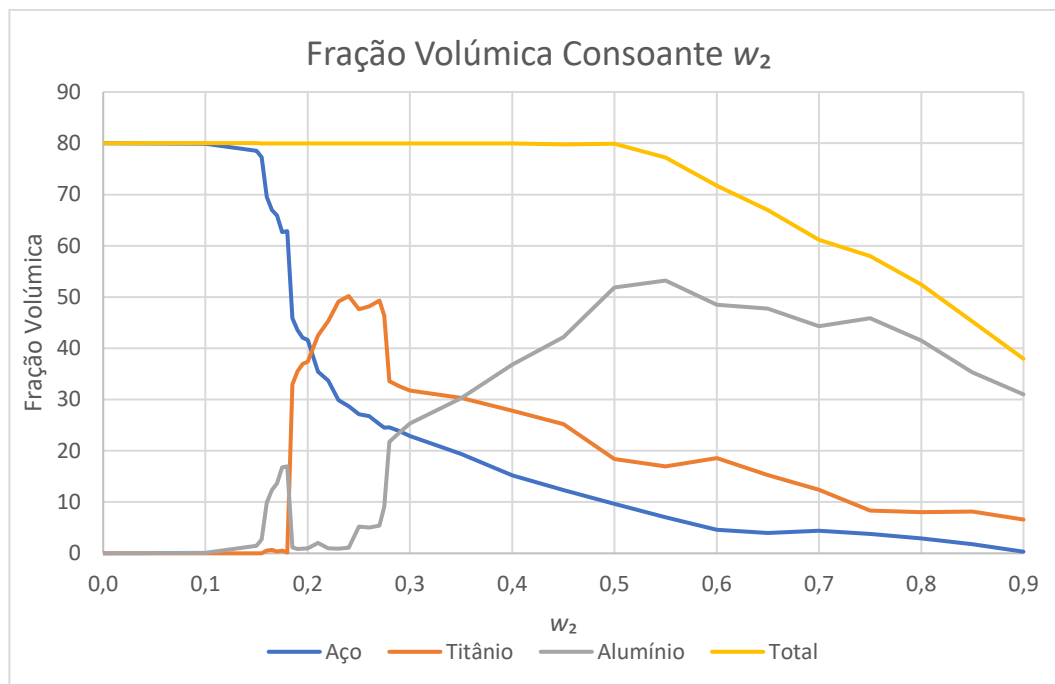


Figura 6.11 Gráfico da fração volúmica dos materiais em função de w_2 em M-MMTO4-V

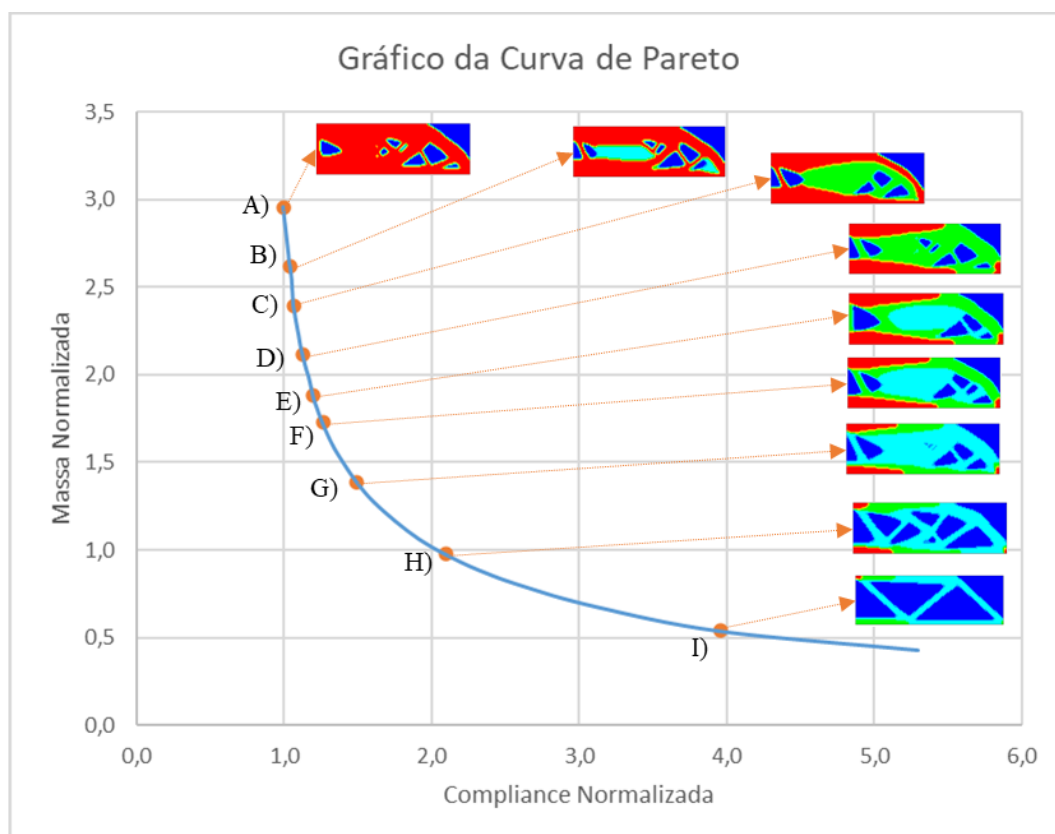


Figura 6.12 - Gráfico da curva de Pareto de M-MMTO4-V

6.8 M-MMTO4-V duplo

Observando nos resultados da secção anterior, nomeadamente veja-se a Figura 6.11, que o constrangimento de volume deixa de estar ativo a partir de $w_2 = 0.5$, introduz-se um constrangimento de volume com limite mínimo. Este constrangimento começa por limitar a fração volúmica mínima em 50%, aumentando 0.2% por iteração até 75%. Recorde-se que o limite superior da fração volúmica é 80%, deixando 5% de margem para possíveis otimizações. Apresenta-se na Figura 6.13 as distribuições ótimas de material para diferentes valores w_2 , estando na Tabela 6.18 os respetivos resultados numéricos, nas Figuras 6.14 e 6.15 as representações gráficas destes resultados e na Figura 6.16 a curva *Pareto* associado.

Observa-se na figura 6.14 que as funções objetivo seguem a mesma tendência que na secção anterior, ainda que, a fração volúmica baixe de 80% para 75% entre os valores 0,5 e 0,6 de w_2 . A fração volúmica mantém-se em 75% no resto das otimizações, o que se deve ao facto de se agora ativar o constrangimento de fração volúmica de limite inferior.

Com constrangimentos de volume de limites superior e inferior é imperativo que ao longo das iterações estes estejam distantes no seu valor para permitir uma melhor otimização. É por isso implementado um CA onde no início da otimização a diferença entre limites é de 30% e no final é de 5%.

Na figura 6.16 visualiza-se a curva de *Pareto* obtida no espaço das funções normalizadas. O aspeto da curva obtida mantem-se em formato *standart* tipo “cotovelo”.

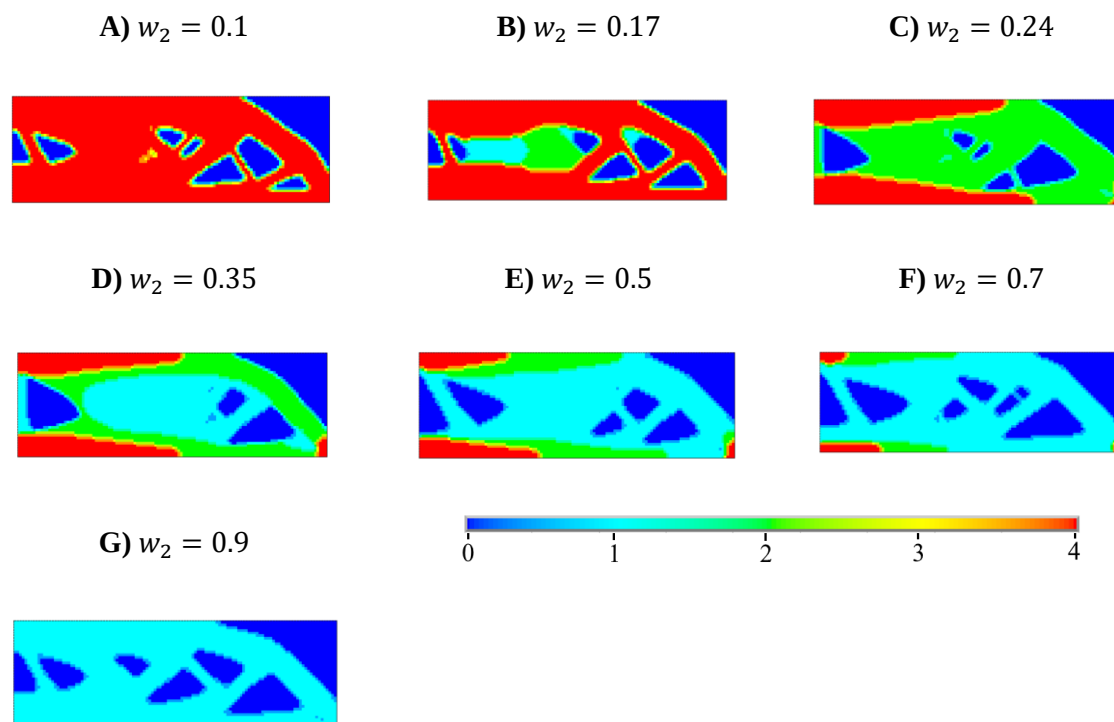


Figura 6.13 Distribuição de material para os casos de problemas M-MMTO4-V Duplo

Tabela 6.18 Resultados das otimizações M-MMTO4-V Duplo

Caso	Peso		Fração volúmica (%)			Massa, M [Kg]	Custo, P [€]	Compliance, C [N. m]
	w_1	w_2	Aço	Titânio	Alumínio			
A)	0,9	0,1	79,46	0	0,54	188,76	20964	80848
B)	0,84	0,17	64,60	7,22	8,16	169,28	24176	83755
C)	0,75	0,24	27,48	51,34	1,13	134,40	51728	91960
D)	0,65	0,35	18,41	30,48	31,05	109,16	34778	103480
E)	0,5	0,5	9,73	16,27	53,93	88,06	22859	122051
F)	0,25	0,7	3,19	6,43	65,3	68,61	13953	158554
G)	0,1	0,9	0	0	74,78	60,36	8732	205371

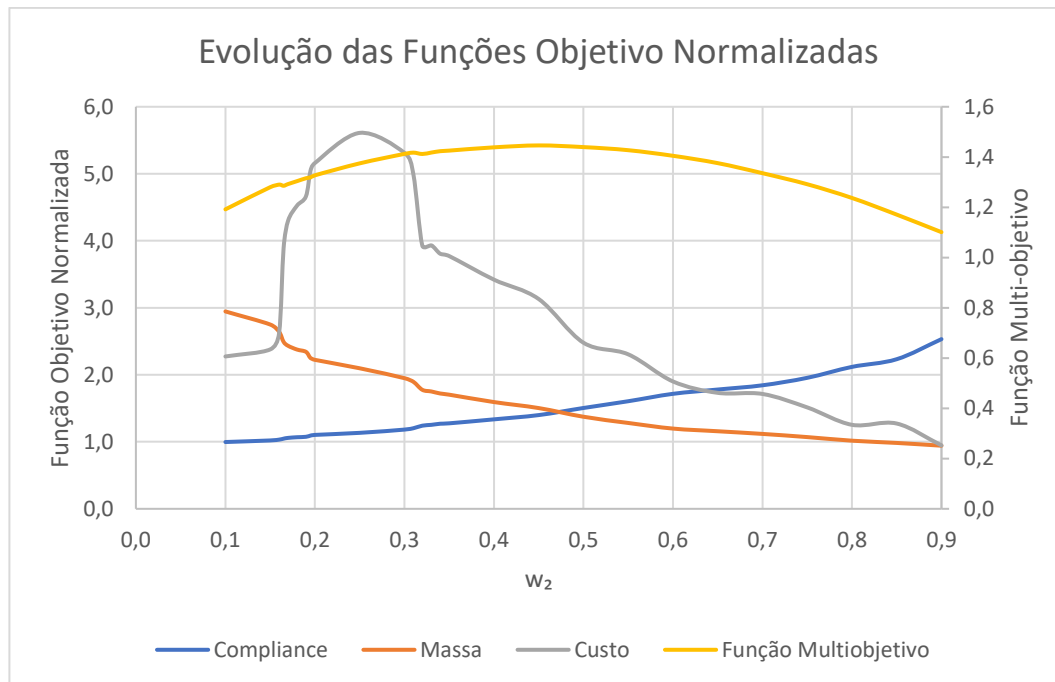


Figura 6.14 Gráfico da evolução das funções objetivos em relação a w_2 em M-MMTO4-V duplo

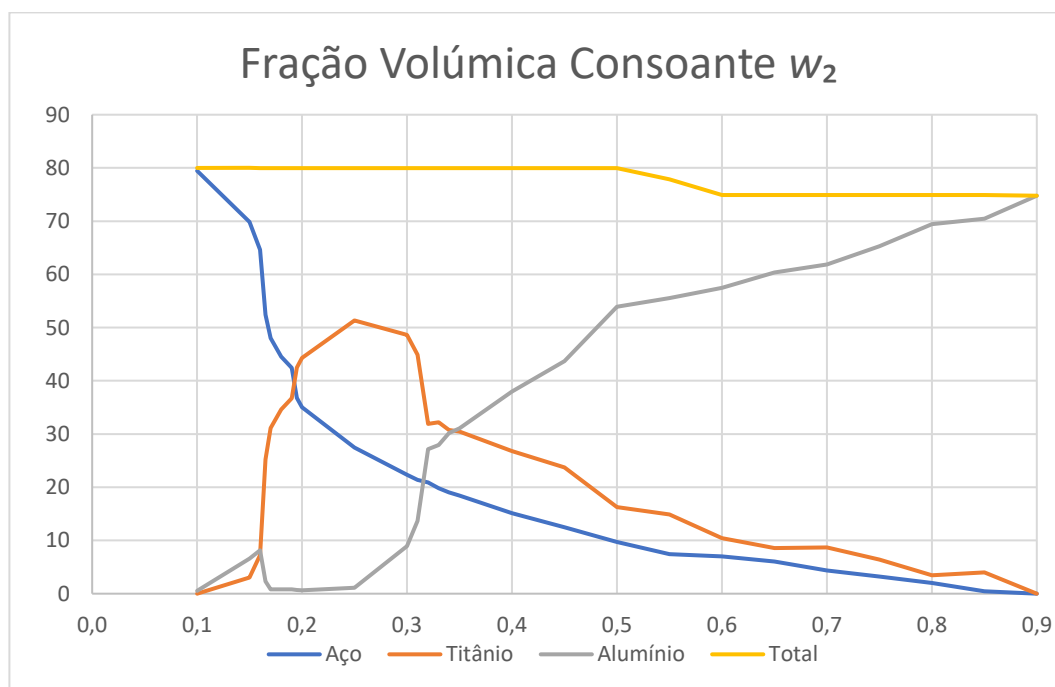


Figura 6.15 Gráfico da fração volúmica dos materiais em função de w_2 em M-MMTO4-V duplo

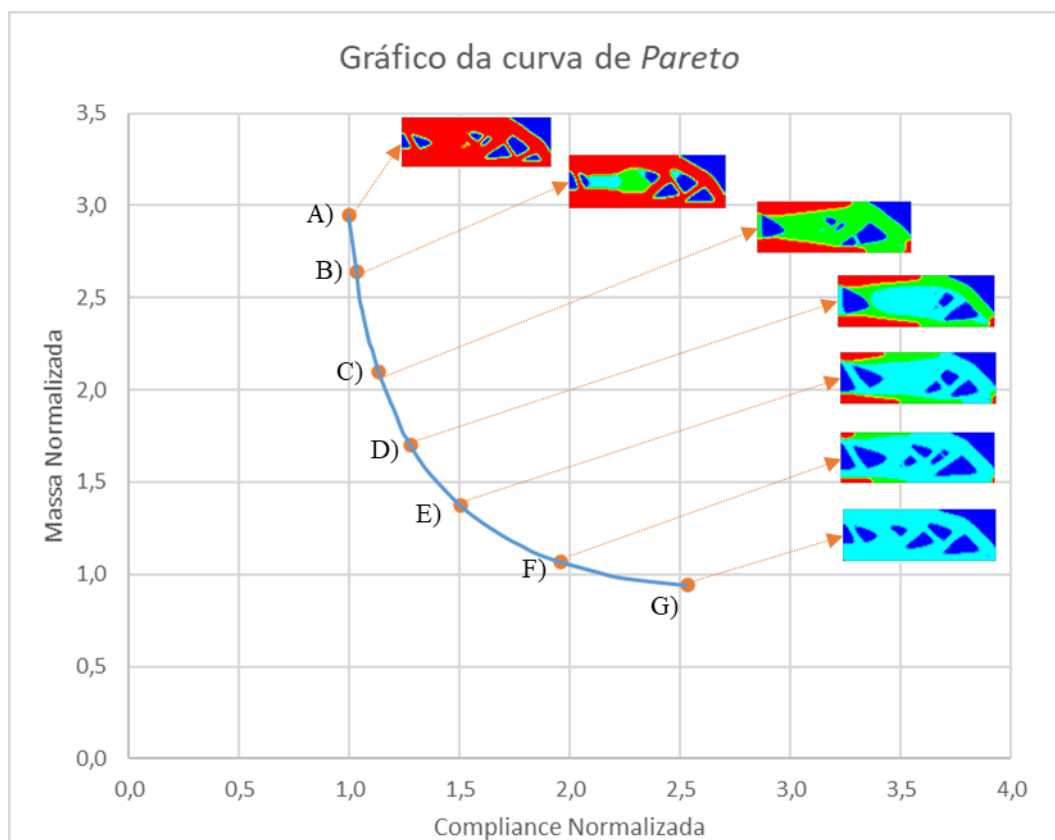


Figura 6.16 Gráfico da curva de *Pareto* de M-MMTO4-V Duplo

Capítulo 7. Conclusões e Trabalhos futuros

7.1 Conclusões

Esta dissertação tem como objetivo contribuir para o avanço do conhecimento científico na área de otimização topológica multimaterial, através do desenvolvimento de metodologias capazes de resolver problemas uni e multi-objetivo com critérios de rigidez, volume, massa e custo.

Antes de se iniciar a resolução dos problemas foi feita uma revisão bibliográfica sobre os temas da otimização topológica relevantes para o desenvolvimento desta dissertação, nomeadamente, a metodologia utilizada, a escolha de filtro, a consideração de várias fases de material e a introdução de vários objetivos conflitantes na função objetivo do problema.

Na otimização topológica multimaterial, a lei de interpolação escolhida é o SIMP recursivo. Verifica-se o impacto dos valores iniciais das variáveis densidades e aplicar-se uma *continuation approach*, CA, que por sua vez, envolve um processo de tentativa e erro até se chegar a valores de parâmetros que produzem bons resultados.

Depois de definidos os parâmetros da CA, iniciou-se a formulação dos problemas apresentados, começando pelos problemas formulados com constrangimento de volume.

De forma a obter uma base de comparação, as frações volúmicas definidas nas formulações MMT02, MMT03, MMT04 são calculadas para que as fases de presentes na otimização tenham a mesma massa, e que a massa total seja igual á massa do problema SMTO otimizado com aço.

Para obter a melhor distribuição entre as fases de material, procedeu-se á formulação dos problemas com constrangimento de massa, usando a massa do problema SMTO otimizado com aço, como massa máxima. Devido ao custo elevado do titânio, introduziu-se o constrangimento de custo.

Finalmente formulou-se os problemas multio-objetivo, onde se variou a importância dada a várias funções objetivo.

Com a formulação dos problemas feita, aplicou-se a metodologia desenvolvida ao caso MBB-Beam, com recurso à linguagem FORTRAN para correr os programas e ao modo Batch do ANSYS para fazer os cálculos das deformações aplicando o MEF (Método dos Elementos Finitos).

Dos resultados S-SMTO-V, S-MMT02-V, S-MMT03-V e S-MMT04-V retiraram-se as seguintes conclusões:

- A incorporação de uma segunda fase de material na formulação leva, na maioria dos casos, a uma melhoria na rigidez da estrutura.

- A incorporação do níquel ou aço como segundo material, em alguns casos, não melhora a rigidez do sistema, o que se pode dever à fraca otimização da fração volúmica de cada desse material.

Dos resultados S-MMTO2-M, S-MMTO3-M e S-MMTO4-M conclui-se as seguintes conclusões:

- Ao permitir-se a livre distribuição entre fases de material, obtém-se melhores resultados em termos de rigidez.
- Como previsto, o algoritmo de otimização escolhe não utilizar o níquel quando tem o aço como opção, dando o problema de otimização com quatro fases de material, a solução ndo problema com três fases de material.
- A escolha de titânio na otimização implica um agravamento no custo final da estrutura pelo que não é sustentável economicamente.

Dos resultados S-MMTO2-MP e S-MMTO4-MP tira-se como conclusão que, ao restringir-se o custo máximo da estrutura, se pode obter uma solução com redução de 31% de custo ao abdicar-se de 6% de rigidez.

Dos resultados multi-objetivo foram retiram-se as seguintes conclusões:

- A distribuição entre as fases de material varia substancialmente consoante a importância dada à minimização da massa.
- A solução *Single Material* só é apelativa quando apenas se procura a estrutura mais rígida ou a estrutura mais leve, sem considerar outro tipo de critério.
- As soluções *Multimaterial* são as mais aconselhadas para os projetos que incluem vários critérios estruturais.

Generalizando, conclui-se que foi desenvolvida nesta dissertação, com sucesso, uma metodologia capaz de aplicar a otimização multimaterial, de forma a projetar estruturas leves, rígidas e economicamente sustentáveis.

7.2 Trabalhos futuros

Como trabalhos futuros tem-se, por exemplo, a aplicação da metodologia apresentada a diversos casos de estudo, com diferentes domínios de *design*, diferentes casos de carga e apoios, com incorporação de zonas sem material ou de múltiplos casos de carga (multi-carga).

Contrariamente aos materiais utilizados nesta dissertação, os materiais poliméricos tiram o maior partido dos avanços tecnológicos do fabrico aditivo, pelo que seria interessante aplicar estas metodologias a casos de estudo com várias fases de materiais poliméricos. Seria mais fácil de ligar mais fases de material distintas em polímero do que em metal.

Outro ponto interessante a ser estudado é a comparação do impacto de diferentes leis de interpolação de material ou diferentes algoritmos de otimização.

Alem dos critérios apresentados nesta dissertação, tem interesse a incorporação de critérios de resistência, como o pico de tensão máxima, e/ou critérios de falha.

Capítulo 8. Bibliografía

- [1] O. Sigmund, “A 99 line topology optimization code written in matlab,” *Struct. Multidiscip. Optim.*, vol. 21, no. 2, pp. 120–127, 2001, doi: 10.1007/s001580050176.
- [2] J. C. Maxwell and W. D. Niven, “The scientific papers of James Clerk Maxwell,” *Sci. Pap. James Clerk Maxwell*, vol. 2, pp. 1–802, 2011, doi: 10.1017/CBO9780511710377.
- [3] A. G. M. Michell, “LVIII. The limits of economy of material in frame-structures ,” *London, Edinburgh, Dublin Philos. Mag. J. Sci.*, vol. 8, no. 47, pp. 589–597, 1904, doi: 10.1080/14786440409463229.
- [4] W. S. Dorn, R. E. Gomory, and H. J. Greenberg, “Automatic design of optimal structures,” *J. Mech*, vol. 3, pp. 25–52, 1964.
- [5] M. P. Bendsoe and N. Kikuchi, “Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method,” *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 71, pp. 197–224, 1988.
- [6] M. P. Bendsøe, “Optimal shape design as a material distribution problem,” *Struct. Optim.*, vol. 1, no. 4, pp. 193–202, 1989, doi: 10.1007/BF01650949.
- [7] G. I. N. Rozvany, M. Zhou, and T. Birker, “Generalized shape optimization without homogenization,” *Struct. Optim.*, vol. 4, no. 3–4, pp. 250–252, 1992, doi: 10.1007/bf01742754.
- [8] E. Andreassen, A. Clausen, M. Schevenels, B. S. Lazarov, and O. Sigmund, “Efficient topology optimization in MATLAB using 88 lines of code,” *Struct. Multidiscip. Optim.*, vol. 43, no. 1, pp. 1–16, 2011, doi: 10.1007/s00158-010-0594-7.
- [9] M. Bruggi and P. Duysinx, “Topology optimization for minimum weight with compliance and stress constraints,” *Struct. Multidiscip. Optim.*, vol. 46, no. 3, pp. 369–384, 2012, doi: 10.1007/s00158-012-0759-7.
- [10] A. Ramani, “A pseudo-sensitivity based discrete-variable approach to structural topology optimization with multiple materials,” *Struct. Multidisc. Optim.* vol. 40, pp. 913–934, 2010, doi: 10.1007/s00158-009-0455-4.
- [11] A. Saxena, “Topology design of large displacement compliant mechanisms with,” *Struct. Multidisc. Optim.*, vol. 30, pp. 477–490, 2005, doi: 10.1007/s00158-005-0535-z.
- [12] J. Stegmann and E. Lund, “Discrete material optimization of general composite shell structures,” *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 62, no. 14, pp. 2009–2027, 2005, doi: 10.1002/nme.1259.
- [13] E. Lund and J. Stegmann, “On structural optimization of composite shell structures using a

- discrete constitutive parametrization,” *Wind Energy*, vol. 8, no. 1, pp. 109–124, 2005, doi: 10.1002/we.132.
- [14] W. Zuo and K. Saitou, “Multi-material topology optimization using ordered SIMP interpolation,” *Struct. Multidiscip. Optim.*, vol. 55, no. 2, pp. 477–491, 2017, doi: 10.1007/s00158-016-1513-3.
- [15] D. Li and I. Y. Kim, “Multi-material topology optimization for practical lightweight design,” *Struct. Multidiscip. Optim.*, vol. 58, no. 3, pp. 1081–1094, 2018, doi: 10.1007/s00158-018-1953-z.
- [16] Y. Jung, S. Lim, J. Kim, and S. Min, “Lightweight design of electric bus roof structure using multi-material topology optimisation,” *Struct. Multidiscip. Optim.*, 2019, doi: 10.1007/s00158-019-02410-8.
- [17] S. Lu, H. Ma, L. Xin, and W. Zuo, “Lightweight design of bus frames from multi-material topology optimization to cross-sectional size optimization,” *Eng. Optim.*, vol. 51, no. 6, pp. 961–977, 2019, doi: 10.1080/0305215X.2018.1506770.
- [18] T. Pratas, “Optimização topológica multimaterial de estruturas reticuladas com constrangimentos de tensão,” Tese de Mestrado, Faculdade de Ciências e Tecnologias, Universidade Nova de Lisboa, 2019.
- [19] C. Almeida, “Projeto de estruturas reticuladas leves e resistentes utilizando variáveis de área e de seleção de material,” Tese de Mestrado, Faculdade de Ciências e Tecnologias, Universidade Nova de Lisboa, 2020.
- [20] C. Li and I. Y. Kim, “Multi-material topology optimization for automotive design problems,” *Proc. Inst. Mech. Eng. Part D J. Automob. Eng.*, vol. 232, no. 14, pp. 1950–1969, 2018, doi: 10.1177/0954407017737901.
- [21] C. López, S. Burggraeve and J Stroobants “A Preliminary approach to multi-material topology optimization considering,” *WIT Transactions on The Built Environment*, vol. 175, pp. 121–131, 2019, doi: 10.2495/HPSM180131.
- [22] S. Burggraeve *et al.*, “Model-based , multi-material topology optimization taking into account cost and manufacturability,” *Struct. Multidiscip. Optim.*, vol. 62, pp. 2951–2973, 2020.
- [23] G. J. Kennedy and A. Engineering, “Large-Scale Multimaterial Topology Optimization for Additive Manufacturing,” *56th AIAA/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*, 2015.

- [24] A. Bandyopadhyay and B. Heer, “Materials Science & Engineering R Additive manufacturing of multi-material structures,” *Mater. Sci. Eng. R*, vol. 129, no. March, pp. 1–16, 2018, doi: 10.1016/j.mser.2018.04.001.
- [25] R. V. Grandhi, G. Bharatram, and V. B. Venkayya, “Multiobjective optimization of large-scale structures,” *AIAA J.*, vol. 31, no. 7, pp. 1329–1337, 1993, doi: 10.2514/3.11771.
- [26] J. S. Arora, *Introduction to optimum design*, 4th ed. Elsevier Inc 2017.
- [27] G. Chiandussi, M. Codegone, S. Ferrero, and F. E. Varesio, “Comparison of multi-objective optimization methodologies for engineering applications,” *Computers & Mathematics with Applications* vol. 63, no. 5. pp. 912–942, 2012.
- [28] F. M. Conde, P. G. Coelho, R. P. Tavares, P. C. Camanho, J. M. Guedes, and H. C. Rodrigues, “Optimization of hybrid polymer composites under uniaxial traction,” *Eng. Comput. (Swansea, Wales)*, vol. 35, no. 2, pp. 904–931, 2018, doi: 10.1108/EC-11-2017-0427.
- [29] F. M. Conde, P. G. Coelho, R. P. Tavares, H. C. Rodrigues, J. M. Guedes, and P. P. Camanho, “Optimization of the microstructure of unidirectional hybrid composites under uniaxial tensile loads,” *Compos. Struct.*, vol. 235, no. July 2019, p. 111795, 2020, doi: 10.1016/j.compstruct.2019.111795.
- [30] T. Kunakote and S. Bureerat, “Multi-objective topology optimization using evolutionary algorithms,” *Engineering Optimization* vol. 43, pp. 541-557 2011, doi: 10.1080/0305215X.2010.502935.
- [31] O. Sigmund and S. Torquato, “Design of materials with extreme thermal expansion using a three-phase topology optimization method,” *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 45, no. 6, pp. 1037–1067, 1997, doi: 10.1016/S0022-5096(96)00114-7.
- [32] L. V. Gibiansky and O. Sigmund, “Multiphase composites with extremal bulk modulus,” *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 48, no. 3, pp. 461–498, 2000, doi: 10.1016/S0022-5096(99)00043-5.
- [33] J. Stegmann, “Analysis and Optimization of Laminated Composite Shell Structures,” PhD thesis, Department of Mechanical Engineering, Aalborg University, 2004.
- [34] P. Coelho, “Tópicos avançados em mecânica estrutural,” FCT/UNL, 2017/2018.
- [35] S. K., “The method of moving asymptotes - a new method for structural optimization.,” *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 24, no. 2, pp. 359–373, 1987.
- [36] P. Wei, Z. Li, X. Li, and M. Y. Wang, “An 88-line MATLAB code for the parameterized level set method based topology optimization using radial basis functions,” *Struct. Multidiscip. Optim.*, vol. 58, no. 2, pp. 831–849, 2018, doi: 10.1007/s00158-018-1904-8.

Anexos

Anexo A – Comparação entre SIMP Recursivos

Segundo Sigmund & Torquato[31] e Chao Li & Il Yong Kim[20], o SIMP recursivo para 2 fases de material considerando $x_e > 0$ e $E^0 = 0$ é dado por:

$$E_e(x_{e,1}, x_{e,2}) = (x_{e,1})^p \left\{ (x_{e,2})^p E^1 + [1 - (x_{e,2})^p] E^2 \right\}$$

No entanto, para [31], o SIMP recursivo para 3 fases de material é dado por:

$$E_e(x_{e,1}, x_{e,2}, x_{e,3}) = (x_{e,1})^p \left\{ (x_{e,2})^p \left[(x_{e,3})^p E^1 + (1 - (x_{e,3})^p) E^2 \right] + [1 - (x_{e,2})^p] E^3 \right\}$$

Enquanto para [20], o SIMP recursivo para 3 fases é dado por:

$$E_e(x_{e,1}, x_{e,2}, x_{e,3}) = (x_{e,1})^p \left\{ (x_{e,2})^p E^1 + [1 - (x_{e,2})^p] \left[(x_{e,3})^p E^2 + [1 - (x_{e,3})^p] E^3 \right] \right\}$$

Isto deve-se ao diferente método de expansão adotado. [31] expande o SIMP substituindo, no SIMP para duas fases, E^1 por $\{(x_{e,3})^p E^2 + [1 - (x_{e,3})^p] E^3\}$ e de seguida ordenando os E e os x . [20] expande o mesmo SIMP para duas fases substituído E^2 por $\{(x_{e,3})^p E^2 + [1 - (x_{e,3})^p] E^3\}$ e de seguida ordenando os E e os x . Seguindo as mesmas expansões temos que para 4 fases, o SIMP recursivo de [31] é dado por:

$$E_e(x_{e,1}, x_{e,2}, x_{e,3}, x_{e,4}) = (x_{e,1})^p \left\{ (x_{e,2})^p \left[(x_{e,3})^p \left\{ (x_{e,4})^p E^1 + [1 - (x_{e,4})^p] E^2 \right\} + (1 - (x_{e,3})^p) E^3 \right] + [1 - (x_{e,2})^p] E^4 \right\}$$

E o SIMP recursivo de [20] é dado por:

$$E_e(x_{e,1}, x_{e,2}, x_{e,3}, x_{e,4}) = (x_{e,1})^p \left\{ (x_{e,2})^p E^1 + [1 - (x_{e,2})^p] \left[(x_{e,3})^p E^2 + [1 - (x_{e,3})^p] \left\{ (x_{e,4})^p E^3 + [1 - (x_{e,4})^p] E^4 \right\} \right] \right\}$$

Comparando os possíveis resultados das combinações de x_e temos:

$x_{e,1}$	$x_{e,2}$	$x_{e,3}$	$x_{e,4}$	Fase selecionada segundo [20]	Fase selecionada segundo [31]
0	0	0	0	Vazio, $E_e \approx 0$	Vazio, $E_e \approx 0$
0	0	0	1		
0	0	1	0		
0	0	1	1		
0	1	0	0		
0	1	0	1		
0	1	1	0		
0	1	1	1		
1	0	0	0	Material 4, $E_e = E_4$	Material 4, $E_e = E_4$
1	0	0	1	Material 3, $E_e = E_3$	
1	0	1	0	Material 2, $E_e = E_2$	
1	0	1	1		
1	1	0	0	Material 1, $E_e = E_1$	Material 3, $E_e = E_3$
1	1	0	1		Material 2, $E_e = E_2$
1	1	1	0		
1	1	1	1		Material 1, $E_e = E_1$

Anexo B – Base de dados das propriedades dos materiais usados

As propriedades dos materiais usados foram obtidas através dos catálogos da empresa SLM Solutions, que indicam a qualidade do material, dependendo dos parâmetros, após impressão.

Os preços dos materiais foram obtidos recorrendo ao site <https://www.msесupplies.com> e <https://mateck.com>.

Material Data Sheet

Al-Alloy AlSi10Mg^[1]

60 μm / 400 W ^[4]		As-built	Heat-treated ^[13]
---	--	----------	------------------------------

Build-up rate ^[10]	[cm ³ /h]	35.6 cm ³ /h	
Component density ^[11]	[%]	≥ 99.0 %	

Tensile test ^[12]				M	SD	M	SD
Tensile strength	R _m [MPa]	H		443	6	264	5
			V	432	28	273	5
Offset yield strength	R _{p0.2} [MPa]	H		277	7	151	8
			V	259	5	154	6
Elongation at break	A [%]	H		8	1	19	3
			V	5	1	14	3
Reduction of area	Z [%]	H		7	2	30	5
			V	4	1	19	6
Young's modulus	E [GPa]	H		72	5	57	14
			V	71	3	58	14

Hardness test ^[13]			M	SD	M	SD
Vickers hardness	HV5		127	4	80	1

Roughness measurement ^[7]		As-built		Corundum blasted		Glass-bead blasted	
		M	SD	M	SD	M	SD
Roughness average	Ra [μm]	13	2	8	1	5	1
Mean roughness depth	Rz [μm]	80	13	49	7	30	4

Material Data Sheet



Ni-Alloy IN625 / 2.4856 / B446^[1]

60 μm / 400 W ^[5]				As-built		Heat-treated ^[13]	
Build-up rate ^[7]		[cm³/h]		23.33 cm³/h			
Component density ^[6]		[%]		> 99.5 %			
Tensile test ^[10]				M	SD	M	SD
Tensile strength	R _m	[MPa]	H	1057	5	1063	7
			V	995	8	1006	7
Offset yield strength	R _{p0,2}	[MPa]	H	708	15	664	9
			V	674	23	653	6
Elongation at break	A	[%]	H	33	1	34	1
			V	37	4	40	2
Reduction of area	Z	[%]	H	41	4	39	1
			V	36	5	43	4
Young's modulus	E	[GPa]	H	191	47	179	28
			V	166	30	208	7

Material Data Sheet



Fe-Alloy 316L (1.4404)^[1]

60 µm / 400 W ^[5]		As-built
Build-up rate ^[7]	[%]	24.6 cm³/h
Component Density ^[6]	[%]	≥ 99.5 %

Tensile test ^[10]				M	SD
Tensile strength	R _m	[MPa]	H	674	5
			V	616	4
Offset yield strength	R _{p0.2}	[MPa]	H	556	12
			V	498	3
Elongation at break	A	[%]	H	40	1
			V	44	5
Reduction of area	Z	[%]	H	65	3
			V	66	7
Young's modulus	E	[GPa]	H	187	54
			V	173	12

Hardness test ^[11]		M	SD
Vickers hardness	HV10	214	5

Roughness measurement ^[12]		As-built		Corundum blasted		Corundum- and Glass-bead blasted	
		M	SD	M	SD	M	SD
Roughness average	Ra [µm]	12	5	10	3	9	2
Mean roughness depth	Rz [µm]	83	18	63	7	57	6

Material Data Sheet

Ti-Alloy Ti6Al4V ELI (Grade 23) / 3.7165 / B348 / F136^[1]

60 μm / 400 W ^[4]				As-built		Heat-treated ^[15]		HIP ^[16]	
Build-up rate ^[6]		[cm³/h]		28.51 cm³/h					
Component density ^[7]		[%]		> 99.5 %					
Tensile test ^[11]				M	SD	M	SD	M	SD
Tensile strength	R _m	[MPa]	H	1351	17	987	4	1021	3
			V	1330	12	991	3	1027	3
Offset yield strength	R _{p0.2}	[MPa]	H	1189	49	894	5	885	11
			V	1196	26	905	11	953	7
Elongation at break	A	[%]	H	7	1	12	1	15	1
			V	9	1	15	1	15	1
Reduction of area	Z	[%]	H	13	2	45	5	39	2
			V	26	3	49	1	38	9
Young's modulus	E	[GPa]	H	113	7	112	5	127	6
			V	120	4	130	8	125	3
Hardness test ^[12]				M	SD	M	SD	M	SD
Vickers hardness		HV10		-	-	-	-	-	-
Tenacity test ^[13]				M	SD	M	SD	M	SD
Impact energy		KV [J]		14	1	27	2	21	2
Roughness measurement ^[14]				As-built		Corundum blasted			
				M	SD	M	SD		
Roughness average		Ra	[μm]	12	1	6	1		
Mean roughness depth		Rz	[μm]	71	6	36	3		



2021

JOSÉ NUNO DA PENHA
COUTINHO CAGICA PINTO

OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA MULTIMATERIAL DE ESTRUTURAS COM CRITÉRIOS DE RIGIDEZ MASSA E CUSTO