



Nova
NOVA SCHOOL OF
SCIENCE & TECHNOLOGY

DEPARTAMENTO DE
MATEMÁTICA

FILIPA ISABEL NETO COSTA
Licenciada em Matemática

TEORIA DE FREDHOLM DE OPERADORES DISCRETOS DE WIENER-HOPF

MESTRADO EM MATEMÁTICA E APLICAÇÕES

Universidade NOVA de Lisboa
Março, 2022



TEORIA DE FREDHOLM DE OPERADORES DISCRETOS DE WIENER-HOPF

FILIPA ISABEL NETO COSTA

Licenciada em Matemática

Orientador: Doutor Oleksiy Karlovych

Professor Associado, NOVA School of Science & Technology

Coorientador: Doutor Cláudio António Rainha Aires Fernandes

Professor Associado, NOVA School of Science & Technology

Júri

Presidente: Doutora Magda Stela de Jesus Rebelo

Professora Auxiliar, NOVA School of Science & Technology

Arguente: Doutora Maria Amélia Duarte Reis Bastos

Professora Associada com Agregação, Instituto Superior Técnico da Universidade de Lisboa

Orientador: Doutor Oleksiy Karlovych

Professor Associado, NOVA School of Science & Technology

Teoria de Fredholm de operadores discretos de Wiener-Hopf

Copyright © Filipa Isabel Neto Costa, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade NOVA de Lisboa.

A Faculdade de Ciências e Tecnologia e a Universidade NOVA de Lisboa têm o direito, perpétuo e sem limites geográficos, de arquivar e publicar esta dissertação através de exemplares impressos reproduzidos em papel ou de forma digital, ou por qualquer outro meio conhecido ou que venha a ser inventado, e de a divulgar através de repositórios científicos e de admitir a sua cópia e distribuição com objetivos educacionais ou de investigação, não comerciais, desde que seja dado crédito ao autor e editor.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de começar por agradecer ao meu orientador Professor Doutor Oleksiy Karlovych e ao meu coorientador Professor Doutor Cláudio Fernandes pelo vasto conhecimento matemático e por todo o apoio, tempo e dedicação despendidos. Agradeço a ambos a análise minuciosa e acutilante e a constante partilha de sabedoria fundamentais para a consecução desta dissertação.

Aos meus amigos agradeço as horas de conversas longas e os momentos inesquecíveis deste atípico ano. Agradeço-lhes o incansável incentivo, o companheirismo, a cumplicidade e a amizade.

Não podia deixar de agradecer à minha família que sempre foi um pilar para mim, especialmente à minha sobrinha que traz outro sabor à vida, enchendo os dias de leveza, de gargalhadas soltas e pura felicidade.

*«abstraction can lead
existence to an answer»*

- Tiago Canarias, Into the imaginary friend of mine

RESUMO

Na impossibilidade de determinar se um operador é invertível, procuramos saber se um operador é de Fredholm. Nesta dissertação, o nosso objetivo é estudar a propriedade de Fredholm de operadores discretos de Wiener-Hopf no espaço de Banach $\ell^p(\mathbb{Z}_+)$, com $1 < p < \infty$.

Otto Toeplitz provou, em 1911, que a matriz de Toeplitz induz um operador limitado em $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$ se, e apenas se, as suas entradas são coeficientes de Fourier de uma função limitada no círculo unitário - o símbolo do operador. Partimos deste famoso resultado e da álgebra de Banach dos multiplicadores para estendermos o operador discreto de Wiener-Hopf aos espaços de Banach $\ell^p(\mathbb{Z}_+)$, com $1 < p < \infty$. Através da desigualdade de Stechkin, provamos que se o símbolo do operador discreto de Wiener-Hopf é o limite de polinômios trigonométricos na álgebra de Banach dos multiplicadores, então o operador é de Fredholm em $\ell^p(\mathbb{Z}_+)$ se, e só se, o seu símbolo não se anula no círculo unitário. Mais, o número de voltas que a curva do símbolo realiza em torno da origem está estritamente relacionado com o índice do operador.

Para atingirmos este objetivo, começamos inevitavelmente por abordar a componente teórica. Estudamos, em particular, o Princípio local de Gohberg-Krupnik e os operadores compactos que são ferramentas fundamentais para o desenvolvimento da teoria de Fredholm.

Palavras-chave: Princípio local de Gohberg-Krupnik, Operadores compactos, Operadores de Fredholm, Funções de variação limitada, Operador discreto de Wiener-Hopf, Álgebra de Banach de multiplicadores, Desigualdade de Stechkin

ABSTRACT

In the impossibility of determining whether an operator is invertible, we seek to know whether an operator is Fredholm. In this dissertation, we aim to study the Fredholm property of discrete Wiener-Hopf operators on the Banach space $\ell^p(\mathbb{Z}_+)$ with $1 < p < \infty$.

Otto Toeplitz proved in 1911 that a Toeplitz matrix induces a bounded operator on $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$ if and only if its entries are Fourier coefficients of a bounded function on the unit circle - the operator's symbol. We start from this famous result and from the Banach algebra of multipliers to extend the discrete Wiener-Hopf operator to the Banach spaces $\ell^p(\mathbb{Z}_+)$ with $1 < p < \infty$. Using Stechkin's inequality, we prove that if the symbol of the discrete Wiener-Hopf operator is the limit of trigonometric polynomials in the Banach algebra of multipliers, then the operator is Fredholm on $\ell^p(\mathbb{Z}_+)$ if and only if its symbol has no zeros on the unit circle. Further, the number of turns that the symbol curve makes around the origin is strictly related to the index of the operator.

To achieve this goal, we inevitably start by addressing the theoretical component. We study, in particular, the Gohberg-Krupnik local principle and the compact operators which are fundamental tools for the development of Fredholm's theory.

Keywords: Gohberg-Krupnik local principle, Compact operators, Fredholm operators, Functions of bounded variation, Discrete Wiener-Hopf operators, Banach algebra of multipliers, Stechkin's inequality

ÍNDICE

1	Introdução	1
2	Preliminares	5
2.1	Conceitos e resultados algébricos	5
2.1.1	Operadores lineares	5
2.1.2	Subespaços complementares	6
2.1.3	Espaço quociente	6
2.2	Espaços normados	7
2.2.1	Norma quociente	7
2.2.2	Completação de um espaço métrico	7
2.2.3	Operadores limitados	8
2.3	Espaços L^p e ℓ^p , $1 \leq p \leq \infty$	10
3	Álgebras	13
3.1	Conceitos básicos	13
3.2	Álgebras quociente	16
3.3	Princípio local de Gohberg-Krupnik	16
4	Operadores compactos em espaços de Banach	23
4.1	Conjuntos compactos e relativamente compactos em espaços métricos	23
4.2	Propriedades gerais de operadores compactos	25
4.2.1	Ideal $\mathcal{K}(X)$ de $\mathcal{B}(X)$	25
4.2.2	Extensão e operador transposto de um operador compacto	28
4.3	Aproximação de operadores compactos por operadores de característica finita	30
4.4	A teoria de Riesz-Schauder	35
5	Operadores de Fredholm	41
5.1	Definições e resultados auxiliares	41
5.2	Propriedades dos operadores de Fredholm	44
5.2.1	Caracterizações dos operadores de Fredholm	44
5.2.2	Perturbação de operadores de Fredholm	47
5.3	Álgebra de Calkin	51

6 Operadores discretos de Wiener-Hopf	53
6.1 Funções de variação limitada e funções contínuas por partes	53
6.2 Matrizes infinitas e multiplicadores	57
6.2.1 Matrizes de Laurent	57
6.2.2 Matrizes de Toeplitz	60
6.2.3 Álgebra de Banach dos multiplicadores	61
6.3 Critério de Fredholm para o operador discreto de Wiener-Hopf	66
6.3.1 Polinómios trigonométricos e suas propriedades	66
6.3.2 Localização dos operadores discretos de Wiener-Hopf	69
6.4 Trabalho futuro	74
Bibliografia	75

INTRODUÇÃO

Dados X e Y espaços de Banach, um operador de Fredholm $T : X \rightarrow Y$ é um operador linear limitado cujas dimensões do núcleo e do espaço quociente $Y/\text{Im}T$ são finitas. Associa-se aos operadores de Fredholm um índice que corresponde à diferença entre a dimensão do núcleo e a dimensão de $Y/\text{Im}T$. Nesta dissertação vamos trabalhar em espaços de Banach complexos e começamos por estudar a teoria de Fredholm de um modo geral para, posteriormente, a aplicarmos a um caso concreto, os operadores discretos de Wiener-Hopf.

O estudo de invertibilidade acompanha-nos desde o início do estudo da Matemática quando pretendemos resolver equações lineares de primeiro grau com uma incógnita. Com a progressão dos estudos, generalizamos o problema para espaços de dimensão finita e resolvemos sistemas lineares de equações algébricas do tipo $Ax = y$, invertendo a matriz A . Quando avançamos para um universo abstrato, como por exemplo espaços de Banach, passamos a investigar equações do tipo $Tx = y$, onde x e y são elementos de um espaço de Banach e T é um operador linear. O nosso objetivo é, portanto, determinar se o operador T é invertível.

Porém, nem sempre é possível determinar quando é que um operador é invertível e, por isso, baixamos o nível de exigência e passamos a falar de invertibilidade no sentido fraco. Ora, por definição, um operador limitado T é invertível se existe outro operador limitado R tal que $I - RT = 0$ e $I - TR = 0$. No sentido fraco de invertibilidade, procuramos a existência um operador limitado R tal que $I - RT$ e $I - TR$ são operadores compactos. Esta definição é algebricamente conhecida por T ser invertível módulo operadores compactos. De facto, a invertibilidade módulo operadores compactos é uma definição equivalente para o operador T ser de Fredholm e, deste modo, podemos pensar na propriedade de Fredholm como sendo um enfraquecimento do conceito de invertibilidade.

O nosso interesse é estudar a propriedade de Fredholm do operador de Toeplitz, formulado de seguida. Dada uma sucessão de números complexos $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$, consideremos

a matriz definida por

$$(a_{j-k})_{j,k=0}^{\infty} = \begin{pmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \cdots \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & \cdots \\ a_2 & a_1 & a_0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}. \quad (1.0.1)$$

A matrizes que são constantes ao longo das suas diagonais dá-se o nome de matrizes de Toeplitz, em homenagem ao matemático alemão Otto Toeplitz. Em 1911, Otto Toeplitz conseguiu determinar em que condições é que a matriz (1.0.1) induz um operador limitado em $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$, bastando que $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ seja a sucessão dos coeficientes de Fourier de uma função limitada a no círculo unitário \mathbb{T} . Ao operador gerado pela matriz (1.0.1) dá-se o nome operador de Toeplitz e a função a designa-se o símbolo da matriz/operador de Toeplitz. Curiosamente, Otto Toeplitz nunca estudou realmente estas matrizes pois o seu material de estudo centrou-se nas matrizes de Laurent

$$(a_{j-k})_{j,k=-\infty}^{\infty} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} & \cdots \\ \cdots & a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \cdots \\ \hline \cdots & a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} & \cdots \\ \cdots & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array} \right).$$

No entanto, numa nota em rodapé no seu artigo [24] diz simplesmente que quando se trata da teoria das formas $x \mapsto (Ax, x)$, não há diferença entre o “caso Toeplitz” e o “caso Laurent”, dada a “estrutura Toeplitz” de matrizes invariantes em translação. Por outro lado, o verdadeiro início da história dos operadores Toeplitz está particularmente associado aos nomes Norbert Wiener e Eberhard Hopf, nos anos 30, quando se confrontaram com o aparecimento das equações integrais, conhecidas como equações integrais de Wiener-Hopf, dadas por

$$\lambda f - W_k f = g,$$

$$W_k f(x) = \int_0^{\infty} k(x-y)f(y)dy, \quad x > 0,$$

onde k é uma função exponencialmente decrescente e as funções f (desconhecida) e g (dada) podem crescer de tal forma que os integrais convergem absolutamente. A discretização das funções W_k transformam-nas nos operadores gerados pelas matrizes de Toeplitz.

Mas as ligações entre os operadores de Toeplitz e os de Wiener-Hopf são, de facto, muito mais íntimas. Desde o início e até ao final dos anos 60, os dois operadores foram considerados como semelhantes, mas independentes. Ora, Rosenblum em 1965 e Devinatz em 1967 identificaram a matriz de um operador de Wiener-Hopf em $L^2(\mathbb{R}_+)$ em relação à base ortonormada dos polinómios de Laguerre como sendo uma matriz de

Toeplitz. E, portanto, só passados 30 anos é que se conseguiu encontrar a equivalência entre estes operadores. E é por esta razão que o operador de Toeplitz é também conhecido por operador discreto de Wiener-Hopf. É possível encontrar a história mais detalhada de estudos de operadores de Toeplitz e Wiener-Hopf em vários contextos nas monografias de Albrecht Böttcher e Bernd Silbermann [7, 8] e de Nikolai Nikolski [18].

Um dos objetivos desta dissertação é estabelecer uma relação entre as propriedades funcionais/analíticas de operadores discretos de Wiener-Hopf e as propriedades geométricas dos seus símbolos, nomeadamente a teoria de Fredholm. A beleza da teoria de Fredholm neste caso reside no facto de ser possível formular a propriedade de Fredholm em termos do símbolo do operador discreto de Wiener-Hopf e, deste modo, relacionam-se condições estritamente algébricas da definição de operador de Fredholm com características puramente analíticas do símbolo do operador. Este resultado foi descoberto por Israel Gohberg em 1952, altura em que conseguiu também encontrar uma fórmula algebricamente mais simples para determinar o índice do operador.

A presente dissertação encontra-se organizada como se segue:

Começamos no capítulo 2 por recordar conceitos elementares e alguns resultados conhecidos da análise funcional e da álgebra linear necessários para o entendimento desta dissertação. No entanto, este capítulo não é autossuficiente, sendo necessário alguns conhecimentos na área da análise funcional, álgebra linear e análise complexa.

No capítulo 3 desenvolvemos a teoria de álgebras, onde abordamos as álgebras de Banach, as álgebras quociente e finalizamos com um resultado muito importante nesta teoria: o Princípio local de Gohberg-Krupnik. Este princípio é fundamental para o estudo de invertibilidade em álgebras de Banach com unidade uma vez que permite localizar os elementos invertíveis.

O capítulo 4 é destinado ao estudo dos operadores compactos que estão intimamente ligados à teoria de Fredholm. Provamos que $\mathcal{K}(X)$, o conjunto dos operadores compactos definidos num espaço de Banach X , é um ideal bilateral fechado da álgebra de Banach dos operadores limitados, $\mathcal{B}(X)$. Introduzimos as noções de operadores de característica finita, espaço vetorial normado com propriedade de aproximação e com base de Schauder, que nos conduzem ao último resultado deste capítulo que afirma que se T for um operador compacto definido num espaço de Banach com a propriedade de aproximação, então para qualquer $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ o operador $T - \lambda I$ é de Fredholm e o seu índice é zero.

Estudamos os operadores de Fredholm no capítulo 5 e denotamos o conjunto formado por estes operadores por $\phi(X, Y)$. Provamos que um operador T é de Fredholm se, e só se, existe um operador limitado R tal que $I - RT$ e $I - TR$ são operadores compactos. Ao operador R dá-se o nome de operador regularizador de T . Assim, caracterizamos os operadores de Fredholm através dos operadores regularizadores, obtendo uma definição alternativa para um operador ser de Fredholm. Provamos também que a propriedade de Fredholm é invariante tanto para perturbações compactas como para perturbações contínuas com norma suficientemente pequena. Terminamos este capítulo com a álgebra de Calkin $\mathcal{B}(X)/\mathcal{K}(X)$ e apresentamos outra caracterização para a propriedade de Fredholm:

um operador é de Fredholm se, e apenas se, é invertível na álgebra de Calkin.

Finalizamos com o capítulo 6 onde estudamos os operadores discretos de Wiener-Hopf no espaço de Banach $\ell^p(\mathbb{Z}_+)$, $1 < p < \infty$. Aqui vamos recorrer ao Princípio local de Gohberg-Krupnik e à álgebra de Calkin para obtermos uma condição necessária e suficiente para estes operadores serem de Fredholm. Começamos por definir funções de variação limitada e funções contínuas por partes. Provamos que a matriz de Laurent e a matriz de Toeplitz induzem operadores limitados em $\ell^2(\mathbb{Z})$ e $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$, respetivamente, quando as suas entradas são coeficientes de Fourier de uma função limitada, a qual designamos por símbolo. Introduzimos a álgebra de Banach dos multiplicadores que vai permitir estender o operador discreto de Wiener-Hopf ao espaço $\ell^p(\mathbb{Z}_+)$ com $1 < p < \infty$. Provamos também a desigualdade de Stechkin que é uma peça fundamental neste estudo. Por fim, chegamos ao último resultado no qual provamos que se o símbolo do operador discreto de Wiener-Hopf é o limite de polinómios trigonométricos na álgebra de Banach dos multiplicadores, então o operador é de Fredholm se, e só se, o seu símbolo não se anula no círculo unitário. Mais, neste caso, o índice do operador está diretamente relacionado com o número de voltas que a curva do símbolo realiza em torno da origem.

PRELIMINARES

Ao longo deste documento, salvo indicação contrária, vamos sempre considerar espaços vetoriais sobre o corpo dos números complexos \mathbb{C} .

2.1 Conceitos e resultados algébricos

2.1.1 Operadores lineares

Definição 2.1.1. Sejam X e Y espaços vetoriais. Uma aplicação $T : X \rightarrow Y$ diz-se um *operador linear* se, para quaisquer $x_1, x_2 \in X$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, se tem

$$T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha T x_1 + \beta T x_2.$$

Representamos por $\mathcal{L}(X, Y)$ o espaço vetorial constituído por todos os operadores lineares de X em Y . Se $X = Y$, denotamos $\mathcal{L}(X, X)$ por $\mathcal{L}(X)$.

Definição 2.1.2. Sejam X, Y espaços vetoriais e $T \in \mathcal{L}(X, Y)$.

A *imagem de T* , $\text{Im } T$, é o subespaço linear definido por

$$\text{Im } T = \{Tx : x \in X\}.$$

O *núcleo de T* , $\text{Ker } T$, é o subespaço linear

$$\text{Ker } T = \{x \in X : Tx = 0\}.$$

Definição 2.1.3. Sejam X e Y espaços vetoriais. Uma aplicação $T : X \rightarrow Y$ que seja linear e bijetiva diz-se um *isomorfismo algébrico*. Neste contexto dizemos que X é algebricamente isomorfo a Y .

Definição 2.1.4. Seja X um espaço vetorial. Um operador $P \in \mathcal{L}(X)$ diz-se um *operador projeção* se $P^2 = P$, isto é, se P é idempotente.

2.1.2 Subespaços complementares

Definição 2.1.5. Seja X um espaço vetorial e M um subespaço vetorial de X . Dizemos que M tem um *complementar algébrico* se existe um subespaço N de X tal que $X = M \oplus N$. Ou, de modo equivalente, qualquer $x \in X$ tem uma única decomposição da forma

$$x = x_M + x_N, \quad x_M \in M, \quad x_N \in N.$$

Sabemos que $M \cap N = \{0\}$.

Recordamos que dado um espaço vetorial X e um subespaço $M \subseteq X$, podemos garantir que M tem pelo menos um complementar algébrico em X .

Lema 2.1.6 ([21, Lema 5.61]). *Seja X um espaço vetorial. Suponhamos que U, V são subespaços complementares em X e definam-se os operadores $P_U : X \rightarrow U, P_V : X \rightarrow V$, por*

$$P_U x = u_x, \quad P_V x = v_x, \quad x \in X,$$

onde u_x, v_x são tais que $x = u_x + v_x$ com u_x, v_x únicos. Então P_U, P_V são projeções em X e $P_U + P_V = I$, sendo I o operador identidade.

Definição 2.1.7. Seja X um espaço vetorial. Para quaisquer subespaços complementares U, V em X , a projeção P_U construída no Lema 2.1.6 é designada *projeção sobre U ao longo de V* . A terminologia para P_V é análoga.

Definição 2.1.8. Caso X seja um espaço vetorial normado, dizemos que um subespaço fechado M tem um *complementar topológico* se existe um subespaço fechado $N \subseteq X$ tal que $X = M \oplus N$ (soma direta topológica). Quando tal acontece diz-se que M é *complementado* em X .

2.1.3 Espaço quociente

Definição 2.1.9. Seja X um espaço vetorial e M um seu subespaço. Designamos por *espaço quociente de X por M* , e representamos por X/M , o conjunto formado pelas classes de equivalência determinadas por

$$[x] = \{u \in X : x + u \in M\} = x + M,$$

munido das operações

$$(x + M) + (y + M) = (x + y) + M, \quad x, y \in X$$

$$\alpha(x + M) = \alpha x + M, \quad \alpha \in \mathbb{C}, \quad x \in X.$$

Temos que X/M é um espaço vetorial e a aplicação linear

$$Q : X \rightarrow X/M$$

$$x \mapsto Qx = x + M$$

designa-se por *aplicação quociente* (ou canónica) de X sobre X/M .

Designamos por *codimensão de M* , e representamos por $\text{codim } M$, a dimensão de X/M , ou seja,

$$\text{codim } M = \dim X/M.$$

Proposição 2.1.10 ([23, Proposição IV.2.2]). *Sejam X um espaço vetorial, M um subespaço de X e N um complementar algébrico de M em X , i.e., $X = M \oplus N$. Então X/M é algebricamente isomorfo a N .*

Como consequência da Proposição 2.1.10, se $X = M \oplus N$, então $\text{codim } M = \dim N$.

Corolário 2.1.11 ([23, Corolário IV.2.3]). *Sejam X, Y espaços vetoriais e $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Então $\text{Im } T$ é algebricamente isomorfo a $X/\text{Ker } T$.*

2.2 Espaços normados

2.2.1 Norma quociente

Teorema 2.2.1 ([23, Teorema IV.4.6]). *Qualquer subespaço de dimensão finita de um espaço vetorial normado X é complementado em X .*

Definição 2.2.2. *Seja X um espaço vetorial normado e $M \subseteq X$ um subespaço fechado. Consideremos Q a aplicação quociente de X em X/M . Para cada $x \in X$, a norma quociente de $Q(x)$ em X/M é definida por*

$$\|Q(x)\|_{X/M} = d(x, M) = \inf \{\|x + m\| : m \in M\}.$$

Teorema 2.2.3 ([23, Teorema IV.2.4]). *Sejam X um espaço vetorial normado e M um seu subespaço. Então $\|\cdot\|_{X/M}$ é uma norma se, e só se, M é fechado.*

Teorema 2.2.4 ([23, Teorema IV.2.5]). *Sejam X um espaço de Banach e M um subespaço fechado de X . Então X/M é um espaço de Banach.*

2.2.2 Completação de um espaço métrico

Definição 2.2.5. *Sejam (X, d) e (\tilde{X}, \tilde{d}) espaços métricos. Então*

(i) *Uma aplicação $T : X \rightarrow \tilde{X}$ é uma isometria se, para quaisquer $x, y \in X$,*

$$\tilde{d}(Tx, Ty) = d(x, y).$$

(ii) *O espaço X diz-se isométrico ao espaço \tilde{X} se existe uma isometria bijetiva de X em \tilde{X} .*

Teorema 2.2.6 ([14, Teorema 1.6-2]). *Dado um espaço métrico $X = (X, d)$, existe um espaço métrico completo $\tilde{X} = (\tilde{X}, \tilde{d})$ tal que \tilde{X} tem um subespaço W que é isométrico a X e é denso em \tilde{X} . O espaço \tilde{X} é único, a menos de isometrias.*

Definição 2.2.7. *Ao espaço \tilde{X} do Teorema 2.2.6 dá-se o nome de completado de X .*

2.2.3 Operadores limitados

Definição 2.2.8. Sejam X, Y espaços vetoriais normados. Um operador linear $T : X \rightarrow Y$ diz-se *limitado* se existir um número real $K > 0$ tal que, para qualquer $x \in X$,

$$\|Tx\|_Y \leq K\|x\|_X.$$

Denotamos por $\mathcal{B}(X, Y) \subseteq \mathcal{L}(X, Y)$ o subespaço de todos os operadores lineares limitados de X em Y onde está definida a norma

$$\|T\|_{\mathcal{B}(X, Y)} = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X \leq 1}} \|Tx\|_Y.$$

Como podemos observar, esta definição envolve três normas diferentes, de três espaços distintos. Vamos utilizar o símbolo $\|\cdot\|$ para a norma em todos estes espaços, visto que é normalmente fácil determinar em que espaço está um dado elemento. Em caso de ambiguidade, distinguir-se-á as normas, indexando o espaço onde estas estão definidas.

Se $X = Y$, denotamos $\mathcal{B}(X, X)$ por $\mathcal{B}(X)$.

Recordamos que a noção de operador limitado coincide com a noção de operador contínuo.

Definição 2.2.9. Sejam X, Y espaços vetoriais normados e $\mathcal{D}(T)$ um subespaço de X . Um operador linear $T : \mathcal{D}(T) \rightarrow Y$ diz-se *fechado* se o seu gráfico $G(T) = \{(x, Tx) : x \in \mathcal{D}(T)\}$ é fechado em $X \times Y$. Facilmente se verifica que todo o operador limitado é fechado.

Apresentamos de seguida um resultado muito útil na Análise Funcional pois permite-nos estender um operador limitado definido num subespaço denso ao espaço todo.

Teorema 2.2.10 (Princípio de extensão por continuidade, [12, Capítulo 2, Subcapítulo 1, Teorema 2]). *Sejam X um espaço normado, W um subespaço denso em X e Y um espaço de Banach. Seja $T_0 : W \rightarrow Y$ um operador limitado. Então existe um único operador limitado $T : X \rightarrow Y$ tal que a restrição de T ao subespaço W coincide com T_0 , ou seja, $T|_W = T_0$ e $\|T\| = \|T_0\|$.*

Obtém-se diretamente da definição de operador limitado o resultado seguinte.

Lema 2.2.11. *Sejam X um espaço vetorial normado e M um subespaço fechado de X . A aplicação quociente $Q : X \rightarrow X/M$ é limitada.*

Lema 2.2.12 ([16, Corolário 7-4.9]). *Sejam X um espaço vetorial normado e $M \subseteq X$ um subespaço fechado. Então para todo o subespaço de dimensão finita N de X , a soma $M + N$ é um subespaço fechado de X .*

Demonstração. Sejam M um subespaço fechado e N um subespaço de dimensão finita. É fácil verificar que $M + N$ é um subespaço.

Sendo M fechado, pelo Teorema 2.2.3, temos que X/M é um espaço normado. Como a aplicação quociente Q de X em X/M é linear e atendendo ao Lema 2.2.11, resulta que a aplicação Q é contínua.

Tendo N dimensão finita, $Q(N)$ tem dimensão finita em X/M . Logo $Q(N)$ é fechado em X/M (cf. [21, Corolário 2.20]). Ora, $M + N = Q^{-1}(Q(N))$ é a pré-imagem de um conjunto fechado, pelo que $M + N$ é fechado. \square

Teorema 2.2.13 (Banach-Steinhaus, [23, Teorema IV.8.2]). *Sejam X e Y espaços de Banach e $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de termos em $\mathcal{B}(X, Y)$ tal que $\{T_n x\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge para cada $x \in X$. Então o operador $T : X \rightarrow Y$ dado por*

$$Tx = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n x$$

é linear limitado e a sucessão $\{\|T_n\|\}_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada.

Definição 2.2.14. *Seja X um espaço vetorial normado. O espaço de Banach $\mathcal{B}(X, \mathbb{C})$ chama-se espaço dual de X e representa-se por X' . Os operadores $f \in X'$ designam-se funcionais lineares limitados.*

Definição 2.2.15. *Sejam X, Y espaços vetoriais normados e $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. Designa-se operador transposto de T o operador $T' : Y' \rightarrow X'$ dado por*

$$T'g = g \circ T, \quad g \in Y'.$$

Sabemos que T' é um operador linear limitado e $\|T'\| = \|T\|$ (cf. [21, Lema 5.52(a)]).

Definição 2.2.16. *Sejam X um espaço vetorial normado, X' o seu espaço dual e consideremos o espaço de Banach $X'' = (X')' = \mathcal{B}(X', \mathbb{C})$, designado *bidual* de X .*

Fixando $x \in X$, podemos definir $F_x : X' \rightarrow \mathbb{C}$ dado por

$$F_x(f) = f(x), \quad f \in X'.$$

Vejamos que F_x é um operador limitado.

Lema 2.2.17 ([21, Lema 5.35]). *Seja X um espaço vetorial normado. Para qualquer $x \in X$, consideremos $F_x : X' \rightarrow \mathbb{C}$ definida por*

$$F_x(f) = f(x), \quad f \in X'.$$

Então $F_x \in X''$ e $\|F_x\|_{X''} = \|x\|_X$.

Definição 2.2.18. *Dado um espaço vetorial normado X , definimos a aplicação canónica J_X de X em X'' dada por*

$$J_X x = F_x, \quad x \in X.$$

Pelo Lema 2.2.17 concluímos que J_X é uma isometria e, além disso, temos que

$$(J_X x)(f) = f(x), \quad x \in X, f \in X'.$$

Lema 2.2.19 ([21, Teorema 5.55]). *Sejam X e Y espaços vetoriais normados e $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. Então*

$$J_Y \circ T = T'' \circ J_X,$$

onde $T'' = (T)'$.

Definição 2.2.20. *Sejam X e Y dois espaços vetoriais normados com normas $\|\cdot\|_X$ e $\|\cdot\|_Y$, respectivamente, tal que $X \subseteq Y$. Se a função*

$$\begin{aligned} i : X &\rightarrow Y, \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

é contínua, isto é, se existe uma constante $C \geq 0$ tal que, para qualquer $x \in X$,

$$\|x\|_Y \leq C \|x\|_X,$$

então diz-se que X está *continuamente mergulhado* em Y .

2.3 Espaços L^p e ℓ^p , $1 \leq p \leq \infty$

Definição 2.3.1. *Seja (X, Σ, μ) um espaço de medida. Suponhamos que $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função mensurável e que existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \leq b$ para quase todos os x . Então define-se *supremo essencial de f* como sendo*

$$\text{ess sup } f = \inf \{b \in \mathbb{R} : f(x) \leq b, \text{ para quase todos os } x\}.$$

Definimos os espaços

$$\mathcal{L}^p(X) = \left\{ f : f \text{ é mensurável e } \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p} < \infty \right\}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\mathcal{L}^\infty(X) = \{f : f \text{ é mensurável e } \text{ess sup } |f| < \infty\}$$

e nestes espaços podemos definir uma relação de equivalência \equiv dada por

$$f \equiv g \iff f(x) = g(x), \quad \text{para quase todos os } x \in X.$$

Considerando $1 \leq p \leq \infty$, a relação de equivalência anterior particiona os conjuntos $\mathcal{L}^p(X)$ em espaços de classes de equivalência, os quais representamos por $L^p(X)$. Na prática referimos simplesmente as funções representativas dessas classes de equivalência, em vez das próprias classes. Assim, escrevemos a “função” $f \in L^p(X)$.

Para $1 \leq p \leq \infty$, o espaço $L^p(X)$ é um espaço de Banach com norma dada por

$$\|f\|_{L^p(X)} = \begin{cases} \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty, \\ \text{ess sup}_{x \in X} |f(x)|, & p = \infty. \end{cases}$$

Definição 2.3.2. Consideremos $1 \leq p \leq \infty$ e $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$. Denotamos por $\ell^p(\mathbb{Z}_+)$ o espaço de Banach de todas as sucessões de valores complexos $x = \{x_n\}_{n=0}^\infty$ tal que

$$\|x\|_{\ell^p(\mathbb{Z}_+)} = \begin{cases} \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p} < \infty, & 1 \leq p < \infty, \\ \sup \{|x_n| : n \in \mathbb{Z}_+\} < \infty, & p = \infty. \end{cases}$$

Como podemos observar, o espaço $\ell^p(\mathbb{Z}_+)$ é o espaço $L^p(\mathbb{Z}_+)$ considerando a medida de contagem.

Para $1 \leq p \leq \infty$, denotamos por $\ell^p(\mathbb{Z})$ o espaço de Banach de todas as sucessões de valores complexos $x = \{x_n\}_{n=-\infty}^\infty$ tal que

$$\|x\|_{\ell^p(\mathbb{Z})} = \begin{cases} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p} < \infty, & 1 \leq p < \infty, \\ \sup \{|x_n| : n \in \mathbb{Z}\} < \infty, & p = \infty. \end{cases}$$

Lema 2.3.3 ([21, Lema 5.4]). *Para um número inteiro arbitrário $k \geq 1$, seja $\mathcal{S}_k \subseteq \ell^\infty(\mathbb{Z})$ o conjunto que consiste nas sucessões com k termos não nulos. O conjunto $\mathcal{S} = \bigcup_{k \geq 1} \mathcal{S}_k$ é denso em $\ell^p(\mathbb{Z})$, $1 \leq p < \infty$.*

Teorema 2.3.4 (Teorema de convexidade de Riesz, [4, Capítulo 4, Teorema 1.7]). *Seja X um espaço de medida. Suponhamos que $1 \leq p \leq r \leq +\infty$ e $0 \leq \delta \leq 1$. Consideremos $1 \leq q \leq +\infty$ tal que*

$$\frac{1}{q} = \frac{1-\delta}{r} + \frac{\delta}{p}.$$

Se $T \in \mathcal{B}(L^p(X))$ e $T \in \mathcal{B}(L^r(X))$, então $T \in \mathcal{B}(L^q(X))$ e temos a seguinte estimativa para as normas:

$$\|T\|_{\mathcal{B}(L^q(X))} \leq \left(\|T\|_{\mathcal{B}(L^p(X))} \right)^\delta \left(\|T\|_{\mathcal{B}(L^r(X))} \right)^{1-\delta}.$$

3.1 Conceitos básicos

Definição 3.1.1. Uma *álgebra* \mathcal{A} sobre um corpo \mathbb{C} é um espaço vetorial sobre \mathbb{C} ao qual se associa uma operação binária

$$* : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$$

usualmente designada por multiplicação tal que

- (i) $\forall a, b, c \in \mathcal{A}, (a * b) * c = a * (b * c)$;
- (ii) $\forall a, b, c \in \mathcal{A}, (a + b) * c = a * c + b * c$;
- (iii) $\forall a, b, c \in \mathcal{A}, a * (b + c) = a * b + a * c$;
- (iv) $\forall a, b \in \mathcal{A}, \forall \lambda \in \mathbb{C}, (\lambda a) * b = a * (\lambda b) = \lambda(a * b)$.

Geralmente denotamos $a * b$ por ab para quaisquer $a, b \in \mathcal{A}$.

Uma álgebra diz-se *comutativa* se

$$\forall a, b \in \mathcal{A}, ab = ba.$$

Um elemento $e \in \mathcal{A}$ diz-se um *elemento unidade* ou *identidade* se

$$\forall a \in \mathcal{A}, ea = ae = a.$$

Caso \mathcal{A} tenha identidade, definimos $a^0 := e$ para qualquer $a \in \mathcal{A}$. Note-se que caso a identidade exista, esta é única.

Definição 3.1.2. Seja \mathcal{A} uma álgebra com identidade. Um elemento $a \in \mathcal{A}$ diz-se *invertível à esquerda/invertível à direita/invertível* se existe $b \in \mathcal{A}$ tal que

$$ba = e \quad / \quad ab = e \quad / \quad ba = ab = e.$$

Ao elemento b chama-se *inverso esquerdo/inverso direito/inverso* e denota-se por $a_e^{-1} / a_d^{-1} / a^{-1}$. Observemos que quando existe inverso, este é único.

Temos as seguintes propriedades:

- (i) $(a^{-1})^{-1} = a$;
- (ii) se a, b são invertíveis, então o produto ab é invertível e $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.

Denotamos por $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ o conjunto dos elementos de \mathcal{A} que são invertíveis, isto é,

$$\mathcal{G}_{\mathcal{A}} = \{a \in \mathcal{A} : a \text{ é invertível}\}.$$

Definição 3.1.3. Seja \mathcal{A} uma álgebra com identidade e $x \in \mathcal{A}$. Designa-se por *espectro de x* o conjunto

$$\sigma(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : x - \lambda e \text{ não é invertível}\}.$$

Definição 3.1.4. Sejam \mathcal{A} e \mathcal{B} duas álgebras. Um *homomorfismo* de \mathcal{A} em \mathcal{B} é uma aplicação linear $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ tal que, para quaisquer $x, y \in \mathcal{A}$,

$$\phi(xy) = \phi(x)\phi(y).$$

Definição 3.1.5. Dado um subconjunto não vazio \mathcal{B} de uma álgebra \mathcal{A} , diz-se que \mathcal{B} é uma *subálgebra* de \mathcal{A} , se \mathcal{B} for fechado para as operações herdadas de \mathcal{A} .

Definição 3.1.6. Uma álgebra \mathcal{A} diz-se *normada* se nela se fixar uma norma, $\|\cdot\| : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, que satisfaz

$$\|ab\| \leq \|a\| \|b\|,$$

para quaisquer $a, b \in \mathcal{A}$. Esta propriedade designa-se propriedade submultiplicativa. Caso \mathcal{A} tenha identidade, convencionou-se que $\|e\| = 1$.

Se $X \neq \{0\}$ é um espaço vetorial normado, então a multiplicação em $\mathcal{B}(X)$ é a operação composição de operadores e atendendo a que, para quaisquer $x \in X$ e $S, T \in \mathcal{B}(X)$,

$$\|STx\| \leq \|S\| \|Tx\| \leq \|S\| \|T\| \|x\|$$

e, conseqüentemente,

$$\|ST\| \leq \|S\| \|T\|,$$

facilmente se vê que $\mathcal{B}(X)$ é uma álgebra normada com identidade, o operador identidade.

Definição 3.1.7. Uma álgebra \mathcal{A} é uma *álgebra de Banach* se \mathcal{A} é uma álgebra normada completa, isto é, se \mathcal{A} é uma álgebra normada onde todas as sucessões de Cauchy são convergentes.

Teorema 3.1.8 ([3, Teorema 1.2.13]). *Seja \mathcal{A} uma álgebra de Banach com identidade. Então, para qualquer $x \in \mathcal{A}$, $\sigma(x)$ é um conjunto não vazio e compacto.*

Teorema 3.1.9 (Série de Neumann, [3, Teorema 1.2.1]). *Seja \mathcal{A} uma álgebra de Banach com identidade. Se $x \in \mathcal{A}$ e $\|x\| < 1$, então*

(i) $e - x$ é invertível com o inverso

$$(e - x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n;$$

(ii) $\|(e - x)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|x\|}$.

Demonstração. Seja $x \in \mathcal{A}$ tal que $\|x\| < 1$. Como \mathcal{A} é uma álgebra normada, então pela propriedade submultiplicativa da norma temos que

$$\|x^n\| = \|x \cdot x \cdot \dots \cdot x \cdot x\| \leq \|x^{n-1}\| \|x\| \leq \|x^{n-2}\| \|x\|^2 \leq \dots \leq \|x\|^n, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.1.1)$$

Ora, por hipótese, $\|x\| < 1$, pelo que a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|x\|^n$$

é convergente. Consequentemente, tendo em conta a desigualdade (3.1.1), a série $\sum_{n=0}^{\infty} \|x^n\|$ é convergente, isto é, a série $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ é absolutamente convergente. Atendendo a que a álgebra \mathcal{A} é completa, temos que a série $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ é convergente. Assim, a sucessão das somas parciais

$$S_k = \sum_{n=0}^k x^n$$

converge para um limite $y \in \mathcal{A}$.

Temos que

$$(e - x)S_k = \sum_{n=0}^k (e - x)x^n = \sum_{n=0}^k (x^n - x^{n+1}) = x^0 - x^{k+1} = e - x^{k+1} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} e.$$

Assim,

$$(e - x)y = (e - x) \lim_{k \rightarrow \infty} S_k = \lim_{k \rightarrow \infty} (e - x)S_k = e.$$

De forma similar se prova que $y(e - x) = e$, pelo que

$$(e - x)^{-1} = y = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

e, como $\|x\| < 1$, temos que

$$\|(e-x)^{-1}\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|x\|^n = \frac{1}{1-\|x\|}.$$

□

Definição 3.1.10. Uma subálgebra \mathcal{J} de uma álgebra \mathcal{A} diz-se um *ideal esquerdo* (resp. *direito*) em \mathcal{A} se

$$\forall a \in \mathcal{A}, \forall j \in \mathcal{J}, \quad aj \in \mathcal{J} \quad (\text{resp. } ja \in \mathcal{J}).$$

Se \mathcal{J} for um ideal esquerdo e direito, então \mathcal{J} diz-se um *ideal bilateral* ou simplesmente *ideal*.

Qualquer álgebra tem pelo menos dois ideais, $\{0\}$ e a própria álgebra, e estes ideais são designados *ideais triviais*. Aos ideais de uma álgebra diferentes da própria álgebra dá-se o nome de *ideais próprios*.

3.2 Álgebras quociente

Definição 3.2.1. Dada uma álgebra de Banach \mathcal{A} e um ideal fechado \mathcal{J} de \mathcal{A} , chama-se *álgebra quociente de \mathcal{A} por \mathcal{J}* , e denota-se por \mathcal{A}/\mathcal{J} , à álgebra formada pelas classes de equivalência determinadas por

$$a_{\mathcal{J}} := a + \mathcal{J} := \{a + j : j \in \mathcal{J}\}, \text{ com } a \in \mathcal{A}.$$

As operações de adição e de multiplicação por um escalar da estrutura algébrica coincidem com as do espaço quociente e definimos ainda a operação de multiplicação dada por

$$(a + \mathcal{J})(b + \mathcal{J}) = ab + \mathcal{J},$$

com $a, b \in \mathcal{A}$.

A norma é dada por

$$\|a + \mathcal{J}\|_{\mathcal{A}/\mathcal{J}} := \inf_{y \in a + \mathcal{J}} \|y\| = \inf\{\|a + j\| : j \in \mathcal{J}\}.$$

Teorema 3.2.2 ([3, Teorema 1.3.5]). *Se \mathcal{A} é uma álgebra de Banach e \mathcal{J} é um ideal próprio fechado de \mathcal{A} , então \mathcal{A}/\mathcal{J} é uma álgebra de Banach.*

3.3 Princípio local de Gohberg-Krupnik

Nesta secção \mathcal{A} denota uma álgebra de Banach com identidade e .

Definição 3.3.1. Diz-se que um subconjunto $M \subseteq \mathcal{A}$ é uma *classe localizadora* se

- (i) $0 \notin M$;

- (ii) dados dois elementos arbitrários $f_1, f_2 \in M$, existe sempre um terceiro elemento $f \in M$ tal que $f_j f = f f_j = f$, $j = 1, 2$.

Definição 3.3.2. Seja M uma classe localizadora. Dois elementos $a, b \in \mathcal{A}$ dizem-se M -equivalentes à esquerda (resp. à direita) se

$$\inf_{f \in M} \|(a-b)f\| = 0 \quad (\text{resp. } \inf_{f \in M} \|f(a-b)\| = 0).$$

Se a e b são M -equivalentes à esquerda e à direita, dizemos simplesmente que a e b são M -equivalentes.

Um elemento $a \in \mathcal{A}$ diz-se M -invertível à esquerda (resp. à direita) se existirem elementos $b \in \mathcal{A}$ e $f \in M$ tais que

$$baf = f \quad (\text{resp. } fab = f).$$

É claro que se um elemento $a \in \mathcal{A}$ é invertível à esquerda (resp. à direita), então a é M -invertível à esquerda (resp. à direita).

Proposição 3.3.3 ([3, Proposição 2.3.8], [7, Lema 1.31]). *Seja M uma classe localizadora e sejam $a_1, a_2 \in \mathcal{A}$ elementos M -equivalentes à esquerda (resp. à direita). Então a_1 é M -invertível à esquerda (resp. à direita) se, e só se, a_2 é M -invertível à esquerda (resp. à direita).*

Demonstração. Sejam $a_1, a_2 \in \mathcal{A}$ elementos M -equivalentes à esquerda. Suponhamos que a_1 é M -invertível à esquerda. Então existem $b_1 \in \mathcal{A}$ e $f \in M$ tais que $b_1 a_1 f = f$. Uma vez que por hipótese a_1, a_2 são M -equivalentes à esquerda, existe $g \in M$ tal que

$$\|(a_1 - a_2)g\| < \|b_1\|^{-1}.$$

Seja $h \in M$ tal que $fh = gh = h$. Então

$$\begin{aligned} b_1 a_2 h &= b_1 a_1 h - b_1 (a_1 - a_2) h \\ &= b_1 a_1 f h - b_1 (a_1 - a_2) g h \\ &= f h - b_1 (a_1 - a_2) g h \\ &= h - b_1 (a_1 - a_2) g h. \end{aligned}$$

Definindo $u = b_1 (a_1 - a_2) g$, temos que $b_1 a_2 h = (e - u)h$. Uma vez que $\|u\| < 1$, então, pelo Teorema 3.1.9, $e - u$ é invertível em \mathcal{A} . Definindo $b_2 = (e - u)^{-1} b_1$, obtemos

$$b_2 a_2 h = (e - u)^{-1} b_1 a_2 h = (e - u)^{-1} (e - u) h = h.$$

Portanto a_2 é M -invertível à esquerda.

Analogamente se prova que a_1 é M -invertível à direita se, e só se, a_2 é M -invertível à direita. \square

Definição 3.3.4. Seja X um espaço topológico. Uma família de classes localizadoras $\{M_\tau\}_{\tau \in X}$ diz-se:

- (a) uma *cobertura* se para cada escolha $\{f_\tau\}_{\tau \in X}$ de elementos de M_τ existe um número finito de elementos $\{f_{\tau_1}, \dots, f_{\tau_m}\}$ cuja soma é invertível em \mathcal{A} ;
- (b) uma *sobreposição* se:
- (i) cada M_τ é um subconjunto limitado de \mathcal{A} ;
 - (ii) se $f \in M_{\tau_0}$ para algum $\tau_0 \in X$, então $f \in M_\tau$ para qualquer τ numa vizinhança aberta de τ_0 ;
 - (iii) os elementos de $F_X := \bigcup_{\tau \in X} M_\tau$ comutam dois a dois.

Definição 3.3.5. Seja $\{M_\tau\}_{\tau \in X}$ uma sobreposição. Definimos *comutante* de $F_X := \bigcup_{\tau \in X} M_\tau$ como sendo o conjunto

$$\text{Com } F_X = \{a \in \mathcal{A} : af = fa, \forall f \in F_X\}.$$

Lema 3.3.6. $\text{Com } F_X$ é uma subálgebra fechada de \mathcal{A} .

Demonstração. Uma vez que $e \in \text{Com } F_X$ então $\text{Com } F_X \neq \emptyset$. Sejam $a, b \in \text{Com } F_X$, $f \in F_X$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Temos que

$$\begin{aligned} (\alpha a + \beta b)f &= (\alpha a)f + (\beta b)f = f(\alpha a) + f(\beta b) = f(\alpha a + \beta b), \\ (ab)f &= a(bf) = a(fb) = (af)b = f(ab). \end{aligned}$$

Logo $\alpha a + \beta b$ e ab são elementos de $\text{Com } F_X$ e, por isso, $\text{Com } F_X$ é uma subálgebra de \mathcal{A} .

Consideremos $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão constituída por elementos de $\text{Com } F_X$ tal que $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a \in \mathcal{A}$ e seja $f \in F_X$. Temos que

$$af = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n\right)f = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n f) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f a_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n\right) = fa.$$

Consequentemente, $a \in \text{Com } F_X$ e, portanto, $\text{Com } F_X$ é uma subálgebra fechada de \mathcal{A} . \square

Notação 3.3.7. Para $\tau \in X$, representa-se por Z^τ o conjunto dos elementos de $\text{Com } F_X$ que são M_τ -equivalentes a zero.

Lema 3.3.8 ([3, Lema 2.3.10]). O conjunto Z^τ é um ideal bilateral próprio e fechado de $\text{Com } F_X$.

Demonstração. Seja $\tau \in X$. Consideremos $a \in \text{Com } F_X$, $j \in Z^\tau$ e $f \in F_X$. Temos que

$$(aj)f = a(jf) = a(fj) = (af)j = (fa)j = f(aj).$$

Pelo que $aj \in \text{Com } F_X$.

Por outro lado, como $j \in Z^\tau$, temos que $\inf_{f \in M_\tau} \|jf\| = 0$. Assim,

$$0 \leq \inf_{f \in M_\tau} \|(aj)f\| \leq \inf_{f \in M_\tau} (\|a\| \|jf\|) = \|a\| \inf_{f \in M_\tau} \|jf\| = 0.$$

Isto é, aj é M_τ -equivalente à esquerda a zero. Analogamente se prova que aj é M_τ -equivalente à direita a zero.

Acabámos assim de provar que $aj \in Z^\tau$ e, por isso, Z^τ é um ideal esquerdo de $\text{Com} F_X$. Do modo análogo se prova que Z^τ é um ideal direito.

Consideremos agora $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de elementos de Z^τ tal que $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$ com $a \in \mathcal{A}$. Seja $f \in F_X$. Temos que

$$af = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n f = \lim_{n \rightarrow \infty} f a_n = f a.$$

Logo $a \in \text{Com} F_X$.

Seja $\epsilon > 0$. Como, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, $\inf_{f \in M_\tau} \|a_n f\| = 0$, então para qualquer $n \in \mathbb{N}$ existe $f_n \in M_\tau$ tal que

$$\|a_n f_n\| < \frac{\epsilon}{K+1},$$

onde K é tal que $\|f_n\| < K$ (recordemos que neste contexto M_τ é um conjunto limitado).

Como por hipótese $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$, então existe $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > p \implies \|a_n - a\| < \frac{\epsilon}{K+1}.$$

Assim, para $n > p$,

$$\|af_n\| \leq \|(a_n - a)f_n\| + \|a_n f_n\| \leq \|a_n - a\| \|f_n\| + \|a_n f_n\| < \frac{\epsilon}{K+1} K + \frac{\epsilon}{K+1} = \epsilon.$$

Logo $\inf_{f \in M_\tau} \|af\| = \inf_{f \in M_\tau} \|fa\| = 0$ e por isso concluímos que $a \in Z^\tau$. Acabámos de provar que Z^τ é um ideal fechado.

Para mostrar que Z^τ é um ideal próprio, suponhamos com vista a uma contradição que $e \in Z^\tau$. Então existe uma sucessão $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de M_τ tal que $\|f_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Uma vez que existem elementos não nulos $g_n \in M_\tau$ tais que $f_n g_n = g_n$, resulta que $\|f_n\| \geq 1$, o que é uma contradição. \square

Definição 3.3.9. Para cada $a \in \text{Com} F_X$, definimos a classe $a_\tau := a + Z^\tau$ de a na álgebra quociente $\text{Com} F_X / Z^\tau$.

Proposição 3.3.10 ([3, Proposição 2.3.11], [7, Lema 1.31]). *Seja $\{M_\tau\}_{\tau \in X}$ um sistema de classes localizadoras onde, para $\tau \in X$, M_τ é limitado em \mathcal{A} . Para $\tau \in X$ e $a \in \text{Com} F_X$, o elemento a é M_τ -invertível à esquerda (resp. à direita) em $\text{Com} F_X$ se, e só se, a_τ é invertível à esquerda (resp. à direita) em $\text{Com} F_X / Z^\tau$.*

Demonstração. Suponhamos que a_τ é invertível à esquerda em $\text{Com} F_X / Z^\tau$. Então existe $b_\tau \in \text{Com} F_X / Z^\tau$ tal que $b_\tau a_\tau = e_\tau$. Isto é, para $b \in \text{Com} F_X$,

$$(b + Z^\tau)(a + Z^\tau) = e + Z^\tau \iff ba + Z^\tau = e + Z^\tau \iff (ba - e) + Z^\tau = Z^\tau.$$

Logo $ba - e \in Z^\tau$, o que implica que $ba - e$ é M_τ -equivalente a zero. Ora, isto significa que ba é M_τ -equivalente a e à esquerda. Atendendo a que e é M_τ -invertível e aplicando a Proposição 3.3.3 à álgebra $\text{Com} F_X$, resulta que ba é M_τ -invertível à esquerda em $\text{Com} F_X$.

Consequentemente, existem $c \in \text{Com}F_X$ e $f \in M_\tau$ tais que $c(ba)f = f$. Considerando $d = cb \in \text{Com}F_X$, concluímos que a é M_τ -invertível à esquerda em $\text{Com}F_X$.

Reciprocamente, suponhamos que a é M_τ -invertível à esquerda em $\text{Com}F_X$. Então existem $b \in \text{Com}F_X$ e $f \in M_\tau$ tais que $baf = f$. Logo $(ba - e)f = 0$. Assim, $ba - e \in Z^\tau$, o que implica que $b_\tau a_\tau = e_\tau$ e, por isso, a_τ é invertível à esquerda em $\text{Com}F_X/Z^\tau$.

A equivalência correspondente à invertibilidade à direita prova-se analogamente. \square

Definição 3.3.11. O centro de uma álgebra de Banach \mathcal{A} , $\text{Cen}(\mathcal{A})$, é o conjunto dos elementos $b \in \mathcal{A}$ tais que

$$ba = ab, \quad \forall a \in \mathcal{A}.$$

Definição 3.3.12. Seja X um espaço topológico. Uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ diz-se *superiormente semicontínua* em $x_0 \in X$ se para cada $\epsilon > 0$ existe uma vizinhança $U_\epsilon(x_0) \subseteq X$ de x_0 tal que $f(x) < f(x_0) + \epsilon$, para todo $x \in U_\epsilon(x_0)$.

A função f diz-se *superiormente semicontínua em X* se for superiormente semicontínua para cada $x \in X$.

Terminamos este capítulo com o famoso Princípio local de Gohberg-Krupnik.

Teorema 3.3.13 (Princípio local de Gohberg-Krupnik, [3, Teorema 2.3.12], [7, Teorema 1.32]). *Sejam \mathcal{A} uma álgebra de Banach com identidade e $\{M_\tau\}_{\tau \in X}$ uma cobertura cujos elementos pertencem ao centro de \mathcal{A} . Consideremos $a \in \mathcal{A}$ e para $\tau \in X$, seja \tilde{a}^τ um elemento de \mathcal{A} que é M_τ -equivalente à esquerda (resp. à direita) ao elemento a .*

- (i) *O elemento a é invertível à esquerda (resp. à direita) em \mathcal{A} se, e só se, \tilde{a}^τ é M_τ -invertível à esquerda (resp. à direita) em \mathcal{A} para todo $\tau \in X$.*
- (ii) *Suponhamos que cada M_τ é um conjunto limitado em \mathcal{A} . Então a é invertível à esquerda (resp. à direita) em \mathcal{A} se, e só se, a_τ é invertível à esquerda (resp. à direita) em \mathcal{A}/Z^τ para todo $\tau \in X$.*
- (iii) *Se o sistema $\{M_\tau\}_{\tau \in X}$ é uma sobreposição, então a função*

$$\begin{aligned} X &\rightarrow \mathbb{R}^+, \\ \tau &\mapsto \|a_\tau\| \end{aligned}$$

é superiormente semicontínua.

Demonstração. Notemos em primeiro lugar que $\mathcal{A} = \text{Com}F_X$.

(i) Suponhamos que a é invertível à esquerda em \mathcal{A} . Então a é M_τ -invertível à esquerda em \mathcal{A} para todo $\tau \in X$. Consequentemente, pela Proposição 3.3.3, \tilde{a}^τ é M_τ -invertível à esquerda para todo $\tau \in X$.

Reciprocamente, suponhamos que \tilde{a}^τ é M_τ -invertível à esquerda para todo $\tau \in X$. Pela Proposição 3.3.3 resulta que a é M_τ -invertível à esquerda para todo $\tau \in X$. Para cada $\tau \in X$, existem então $b^\tau \in \mathcal{A}$ e $f^\tau \in M_\tau$ tais que $b^\tau a f^\tau = f^\tau$. Uma vez que por hipótese $\{M_\tau\}_{\tau \in X}$

é uma cobertura, é possível escolher um número finito de elementos $f^{\tau_1}, \dots, f^{\tau_m}$ tais que $\sum_{j=1}^m f^{\tau_j}$ é invertível.

Defina-se

$$s := \sum_{j=1}^m b^{\tau_j} f^{\tau_j}.$$

Temos que

$$sa = \sum_{j=1}^m b^{\tau_j} f^{\tau_j} a = \sum_{j=1}^m b^{\tau_j} a f^{\tau_j} = \sum_{j=1}^m f^{\tau_j}.$$

Multiplicando à esquerda por $(\sum_{j=1}^m f^{\tau_j})^{-1}$ obtemos

$$\left(\sum_{j=1}^m f^{\tau_j} \right)^{-1} sa = e.$$

Portanto $(\sum_{j=1}^m f^{\tau_j})^{-1} s$ é um inverso à esquerda de a , como queríamos provar.

Analogamente se prova a equivalência que diz respeito à invertibilidade à direita.

(ii) Suponhamos que a_τ é invertível à esquerda em \mathcal{A}/Z^τ para todo $\tau \in X$. Então pela Proposição 3.3.10 a é M_τ -invertível à esquerda em \mathcal{A} e por (i) concluímos que a é invertível à esquerda em \mathcal{A} .

Suponhamos agora que a é invertível à esquerda em \mathcal{A} . Temos que, para $\tau \in X$,

$$(a^{-1} + Z^\tau)(a + Z^\tau) = (a^{-1}a + Z^\tau) = e + Z^\tau.$$

Portanto a_τ é invertível à esquerda em \mathcal{A}/Z^τ para todo $\tau \in X$.

A equivalência correspondente à invertibilidade à direita prova-se de modo análogo.

(iii) Suponhamos que $\{M_\tau\}_{\tau \in X}$ é uma sobreposição. Consideremos $\tau_0 \in X$ e $\epsilon > 0$. Escolha-se $z \in Z^{\tau_0}$ tal que

$$\|a + z\| < \|a_{\tau_0}\| + \frac{\epsilon}{2}.$$

Uma vez que z é M_{τ_0} -equivalente a zero à esquerda, então $\inf_{f \in M_{\tau_0}} \|zf\| = 0$. Logo existe $f \in M_{\tau_0}$ tal que

$$\|zf\| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Como $f \in M_{\tau_0}$, devido à segunda propriedade de sobreposição, temos que $f \in M_\tau$ para qualquer τ numa vizinhança $U(\tau_0)$ de τ_0 .

Defina-se $y := z - zf$. Se $\tau \in U(\tau_0)$, então existe $g \in M_\tau$ tal que $fg = g$. Ora, temos que

$$yg = zg - zfg = zg - zg = 0.$$

e, atendendo que $y \in \text{Com } F_X$, concluímos que $y \in Z^\tau$ para qualquer $\tau \in U(\tau_0)$. Assim,

$$\|a_\tau\| \leq \|a + y\|, \quad \text{para } \tau \in U(\tau_0).$$

E, portanto, para $\tau \in U(\tau_0)$,

$$\|a_\tau\| - \|a_{\tau_0}\| < \|a + y\| - \|a + z\| + \frac{\epsilon}{2} \leq \|y - z\| + \frac{\epsilon}{2} = \|zf\| + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

Logo a função $X \rightarrow \mathbb{R}^+$, $\tau \mapsto \|a_\tau\|$ é superiormente semicontínua. □

OPERADORES COMPACTOS EM ESPAÇOS DE BANACH

4.1 Conjuntos compactos e relativamente compactos em espaços métricos

Definição 4.1.1. Seja (X, d) um espaço métrico. Para cada $r > 0$ e $x \in X$ denotamos por $B_X(x, r)$ a bola aberta de raio r centrada em x , isto é,

$$B_X(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}.$$

Notação 4.1.2. Seja (X, d) um espaço métrico. Denotamos o fecho do conjunto $A \subseteq X$ em X por $\text{cl}_X A$. Escrevemos simplesmente $\text{cl } A$ quando não existe perigo de ambiguidade.

Definição 4.1.3. Seja (X, d) um espaço métrico. Um conjunto $A \subseteq X$ é *compacto* se qualquer sucessão em A contiver uma subsucessão convergente para um elemento de A . Equivalientemente, se qualquer cobertura de A por abertos de X tiver uma subcobertura finita. Diz-se que o conjunto A é *relativamente compacto* se $\text{cl } A$ é compacto.

São conhecidos os seguintes resultados em espaços métricos:

Proposição 4.1.4. *Seja (X, d) um espaço métrico. Dado $A \subseteq X$, são equivalentes as seguintes afirmações:*

(i) *A é relativamente compacto.*

(ii) *Qualquer sucessão de termos em A tem uma subsucessão que converge em X .*

Demonstração. Suponhamos que A é relativamente compacto e seja $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de termos em A . Como $\{x_n\}$ é, em particular, uma sucessão de termos em $\text{cl } A$ e sendo $\text{cl } A$ um conjunto compacto, resulta que esta sucessão tem alguma subsucessão convergente em $\text{cl } A \subseteq X$.

Suponhamos agora que qualquer sucessão de termos em A tem uma subsucessão convergente em X . Seja $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de elementos de $\text{cl } A$ e consideremos, para cada $n \in \mathbb{N}$, $y_n \in A$ tal que

$$d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}. \quad (4.1.1)$$

Por hipótese existe uma subsucessão $\{y_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ da sucessão $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ que converge para algum $y \in X$. Ora, considerando (4.1.1), resulta que $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \text{cl } A$ converge para y . Logo $\text{cl } A$ é compacto, visto que qualquer sucessão de elementos de $\text{cl } A$ admite uma subsucessão convergente. \square

Definição 4.1.5. Seja (X, d) um espaço métrico. Um conjunto $A \subseteq X$ é *totalmente limitado* se para qualquer $\epsilon > 0$ existem $p \in \mathbb{N}$ e $x_1, \dots, x_p \in A$ tais que

$$A \subseteq B_X(x_1, \epsilon) \cup \dots \cup B_X(x_p, \epsilon).$$

Proposição 4.1.6. Seja (X, d) um espaço métrico.

- (i) Se $A \subseteq X$ é relativamente compacto, então é totalmente limitado.
- (ii) Suponhamos que X é um espaço completo. Se A é totalmente limitado, então A é relativamente compacto.

Demonstração. (i) Suponhamos que $A \subseteq X$ é relativamente compacto. Por definição, $\text{cl } A$ é compacto e, por isso, para cada $r > 0$,

$$\text{cl } A \subseteq \bigcup_{i=1}^p B_X(y_i, r), \quad \text{com } y_i \in \text{cl } A \text{ para } i = 1, \dots, p \text{ e } p \in \mathbb{N}.$$

Para cada $i \in \{1, \dots, p\}$, sejam $x_i \in A$ tais que $d(x_i, y_i) < \frac{1}{r}$. Então,

$$A \subseteq \text{cl } A \subseteq \bigcup_{i=1}^p B_X\left(x_i, r + \frac{1}{r}\right).$$

Tomando $\epsilon = r + \frac{1}{r}$, concluímos que para cada $\epsilon > 0$, existem $p \in \mathbb{N}$ e $x_1, \dots, x_p \in A$ tais que

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^p B_X(x_i, \epsilon).$$

Portanto A é totalmente limitado.

(ii) Suponhamos agora que X é um espaço completo e que $A \subseteq X$ é totalmente limitado. Como $\text{cl } A \subseteq X$ é um conjunto fechado, então $\text{cl } A$ é completo. Por outro lado, fixando $\epsilon > 0$ sabemos que existem $p \in \mathbb{N}$ e $x_1, \dots, x_p \in A$ tais que

$$A \subseteq B_X(x_1, \epsilon) \cup \dots \cup B_X(x_p, \epsilon).$$

Ora,

$$\begin{aligned} \text{cl } A &\subseteq \text{cl } B_X(x_1, \epsilon) \cup \dots \cup \text{cl } B_X(x_p, \epsilon) \\ &\subseteq B_X(x_1, 2\epsilon) \cup \dots \cup B_X(x_p, 2\epsilon), \end{aligned}$$

pelo que $\text{cl } A$ é totalmente limitado.

Seja $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de elementos em $\text{cl } A$. Uma vez que $\{x_n\}$ tem infinitos termos, existe pelo menos uma bola $B_X(x_i, 2\epsilon)$, com $i \in \{1, \dots, p\}$, que contém infinitos termos da sucessão. Ordenando estes termos, obtemos uma subsucessão $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ da sucessão $\{x_n\}$ que é uma sucessão de Cauchy.

Assim, sendo $\text{cl } A$ completo, então $x_{n_k} \rightarrow x \in \text{cl } A$. Visto que $\{x_n\}$ admite uma subsucessão convergente, concluímos que $\text{cl } A$ é compacto, como queríamos provar. \square

Teorema 4.1.7 (Arzelà-Ascoli, [22, Apêndice A3]). *Seja (M, d) um espaço métrico compacto. Consideremos $C(M)$ o espaço das funções complexas e contínuas em M onde está definida a norma*

$$\|f\|_{C(M)} = \sup \{|f(x)| : x \in M\}, \quad f \in C(M).$$

Se \mathcal{F} é uma família de funções em $C(M)$ tal que

- (i) \mathcal{F} é equilimitada, isto é, existe uma constante $C > 0$ tal que $|f(x)| < C$, para quaisquer $x \in M$ e $f \in \mathcal{F}$;
- (ii) \mathcal{F} é equicontínua, isto é,

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall f \in \mathcal{F} \quad \forall x, y \in M, \quad d(x, y) < \delta \implies \|f(x) - f(y)\|_{C(M)} < \epsilon,$$

então \mathcal{F} é relativamente compacta, ou seja, toda a sucessão de funções em \mathcal{F} tem uma subsucessão uniformemente convergente.

4.2 Propriedades gerais de operadores compactos

4.2.1 Ideal $\mathcal{K}(X)$ de $\mathcal{B}(X)$

Definição 4.2.1. Sejam X e Y espaços vetoriais normados. Um operador linear $T : X \rightarrow Y$ diz-se *compacto* se $T(B_X(0, 1))$ é um subconjunto relativamente compacto de Y . Representamos por $\mathcal{K}(X, Y)$ o conjunto dos operadores compactos de X em Y . Se $X = Y$, denotamos $\mathcal{K}(X, X)$ por $\mathcal{K}(X)$.

O resultado seguinte permite caracterizar operadores compactos de forma alternativa.

Teorema 4.2.2 ([23, Teorema II.6.2]). *Sejam X e Y espaços vetoriais normados e $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. São equivalentes as seguintes proposições:*

- (i) T é compacto.

(ii) A imagem por T de qualquer subconjunto limitado de X é relativamente compacta em Y .

(iii) Para toda a sucessão limitada $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de termos em X , $\{Tx_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tem uma subsucessão convergente em Y .

Demonstração. [(i) \Rightarrow (ii)] Suponhamos que T é um operador compacto e seja A um subconjunto limitado de X . Então existe $r > 0$ tal que

$$A \subseteq B_X(0, r) = rB_X(0, 1).$$

Portanto,

$$T(A) \subseteq T(rB_X(0, 1)) = rT(B_X(0, 1))$$

e, por isso, $\text{cl}T(A) \subseteq r \text{cl}T(B_X(0, 1))$. Assim, como $\text{cl}T(A)$ é um subconjunto fechado de um conjunto compacto, concluímos que $\text{cl}T(A)$ é um conjunto compacto. Logo $T(A)$ é relativamente compacto, como queríamos provar.

[(ii) \Rightarrow (i)] Suponhamos que a imagem por T de qualquer conjunto limitado de X é relativamente compacta em Y . Como $B_X(0, 1) \subseteq X$ é um conjunto limitado, então por hipótese $T(B_X(0, 1))$ é um conjunto relativamente compacto em Y . Logo T é um operador compacto.

[(ii) \Rightarrow (iii)] Suponhamos que a imagem por T de qualquer conjunto limitado de X é relativamente compacta em Y .

Seja $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão limitada de elementos de X e consideremos

$$A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Temos que A é um conjunto limitado de X e, por hipótese, resulta que $T(A) = \{Tx_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é relativamente compacto em Y . Consequentemente, pela Proposição 4.1.4, $\{Tx_n\}$ tem uma subsucessão convergente em Y .

[(iii) \Rightarrow (ii)] Suponhamos que para toda a sucessão limitada $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de termos em X , $\{Tx_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tem uma subsucessão convergente em Y .

Seja A um subconjunto limitado de X e seja $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão em $T(A)$. Então, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$y_n = Tx_n \quad \text{com } x_n \in A.$$

Sendo A um conjunto limitado, $\{x_n\}$ é uma sucessão limitada e por isso $\{y_n\} = \{Tx_n\}$ tem uma subsucessão convergente em Y por hipótese. Atendendo à Proposição 4.1.4, concluímos que $T(A)$ é relativamente compacto, como queríamos provar. \square

Teorema 4.2.3 ([23, Teorema II.6.3]). $\mathcal{K}(X, Y)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(X, Y)$.

Demonstração. Sejam $\lambda \in \mathbb{C}$ e $T \in \mathcal{K}(X, Y)$. Temos que

$$(\lambda T)(B_X(0, 1)) = \lambda(T(B_X(0, 1)))$$

e como $T(B_X(0,1))$ é relativamente compacto, então $\lambda(T(B_X(0,1)))$ também o é. Logo $\lambda T \in \mathcal{K}(X, Y)$.

Sejam agora $T_1, T_2 \in \mathcal{K}(X, Y)$. Consideremos $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão limitada em X . Então, pelo Teorema 4.2.2, $\{T_1 x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tem uma subsucessão $\{T_1 x'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergente em Y . Do mesmo modo, $\{T_2 x'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ também tem uma subsucessão $\{T_2 x''_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergente em Y . Como, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$(T_1 + T_2)(x''_n) = T_1 x''_n + T_2 x''_n,$$

concluimos que $\{(T_1 + T_2)(x''_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Portanto $T_1 + T_2 \in \mathcal{K}(X, Y)$, pelo Teorema 4.2.2. \square

Teorema 4.2.4 ([23, Teorema II.6.4]). *Se $T \in \mathcal{K}(X, Y)$, então T é um operador limitado.*

Demonstração. Seja $T \in \mathcal{K}(X, Y)$. Pelo Teorema 4.2.2, $T(\text{cl } B_X(0,1))$ é relativamente compacto em Y e, portanto, é um conjunto limitado, pela Proposição 4.1.6. Logo

$$\sup \{ \|Tx\| : \|x\| \leq 1 \} < \infty.$$

Consequentemente, sendo T um operador linear, T é limitado. \square

Combinando os dois últimos resultados, enunciamos o seguinte Teorema.

Teorema 4.2.5 ([23, Teorema VI.1.3]). *Sejam X, Y espaços vetoriais normados. Temos que $\mathcal{K}(X, Y)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{B}(X, Y)$.*

Teorema 4.2.6 ([23, Teorema VI.1.4]). *Se X é um espaço vetorial normado e Y um espaço de Banach, então $\mathcal{K}(X, Y)$ é um subespaço fechado de $\mathcal{B}(X, Y)$.*

Demonstração. Suponhamos que $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sucessão de operadores compactos em $\mathcal{B}(X, Y)$ e $\|T_n - T\| \rightarrow 0$, com $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. Queremos provar que $T \in \mathcal{K}(X, Y)$.

Seja $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão limitada em X com $\|x_n\| < \alpha$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$ e $\alpha > 0$. Como $T_1 \in \mathcal{K}(X, Y)$, então pelo Teorema 4.2.2 $\{x_n\}$ tem uma subsucessão $\{x_{n_1}\}$ tal que $\{T_1 x_{n_1}\}$ converge. Do mesmo modo, como também $T_2 \in \mathcal{K}(X, Y)$, então $\{x_{n_1}\}$ tem uma subsucessão $\{x_{n_2}\}$ tal que $\{T_2 x_{n_2}\}$ converge.

Continuando este processo iterativamente, para cada $j \in \mathbb{N}$ tal que $j \geq 2$, obtemos uma subsucessão $\{x_{n_j}\}$ de $\{x_{n_{j-1}}\}$ tal que $\{T_j x_{n_j}\}$ converge. Vamos provar que a sucessão $\{T x_{n_n}\}$ converge, o que prova que T é um operador compacto visto que $\{x_{n_n}\}$ é uma sucessão limitada.

Por hipótese, dado $\epsilon > 0$, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|T - T_p\| < \frac{\epsilon}{2\alpha}.$$

Ora, para $n \geq p$ tem-se que $\{T_p x_{n_n}\}$ é uma subsucessão da sucessão convergente $\{T_p x_{n_p}\}$ e por isso $\{T_p x_{n_n}\}$ converge. Assim,

$$\begin{aligned} \|Tx_{n_n} - Tx_{m_m}\| &\leq \|Tx_{n_n} - T_p x_{n_n}\| + \|T_p x_{n_n} - T_p x_{m_m}\| + \|T_p x_{m_m} - Tx_{m_m}\| \\ &\leq \|T - T_p\| \|x_{n_n}\| + \|T_p x_{n_n} - T_p x_{m_m}\| + \|T_p - T\| \|x_{m_m}\| \\ &\leq \epsilon + \|T_p x_{n_n} - T_p x_{m_m}\| \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} \epsilon. \end{aligned}$$

Portanto $\{Tx_{n_n}\}$ é uma sucessão de Cauchy em Y , sendo Y um espaço completo. Logo $\{Tx_{n_n}\}$ é uma sucessão convergente e, deste modo, $T \in \mathcal{K}(X, Y)$ pelo Teorema 4.2.2. \square

Teorema 4.2.7 ([23, Teorema II.6.5]). *Sejam X, Y, Z espaços vetoriais normados, $T \in \mathcal{K}(X, Y)$, $T_1 \in \mathcal{B}(Y, Z)$ e $T_2 \in \mathcal{B}(Z, X)$. Então $T_1 T \in \mathcal{K}(X, Z)$ e $T T_2 \in \mathcal{K}(Z, Y)$.*

Demonstração. Seja $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão limitada em X . Como $T \in \mathcal{K}(X, Y)$, pelo Teorema 4.2.2 temos que $\{Tx_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tem uma subsucessão $\{Tx'_n\}$ convergente em Y . Então, sendo T_1 um operador contínuo, $\{T_1 Tx'_n\}$ converge e, portanto, $T_1 T$ é compacto.

Do mesmo modo, se $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sucessão limitada em Z , então $\{T_2 z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ também é uma sucessão limitada em X , pois T_2 é contínuo. Logo, como T é compacto, $\{TT_2 z_n\}$ tem uma subsucessão convergente e, por isso, TT_2 é compacto. \square

Como consequência do resultado anterior, no caso em que X é um espaço de Banach, temos que $\mathcal{K}(X)$ é um ideal bilateral da álgebra de Banach $\mathcal{B}(X)$. Mais, $\mathcal{K}(X)$ é um ideal fechado de $\mathcal{B}(X)$ pelo Teorema 4.2.6.

4.2.2 Extensão e operador transposto de um operador compacto

Atendendo ao Teorema da Completude (cf. [14, Teorema 2.3-2]) em espaços normados, apresentamos o Teorema seguinte que mostra que dado um espaço vetorial normado X no qual está definido um operador compacto é possível estender este operador ao completado de X (cf. Definição 2.2.7).

Teorema 4.2.8 ([23, Teorema VI.1.7]). *Sejam X um espaço vetorial normado, \tilde{X} o completado de X , Y um espaço de Banach e $T \in \mathcal{K}(X, Y)$. Então T tem uma extensão linear compacta $\tilde{T} : \tilde{X} \rightarrow Y$.*

Demonstração. Consideremos X como subespaço de \tilde{X} (cf. Teorema 2.2.6). Como T é um operador compacto, então T é limitado pelo Teorema 4.2.4. Sabemos que existe uma extensão linear limitada $\tilde{T} : \tilde{X} \rightarrow Y$ de T (cf. Teorema 2.2.10). Falta então provar que \tilde{T} é um operador compacto.

Seja $\{\tilde{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão limitada de termos em \tilde{X} . Pelo Teorema de Completude (cf. [14, Teorema 2.3-2]) sabemos que X é denso em \tilde{X} e por isso existe uma sucessão $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de termos em X tal que $\tilde{x}_n - x_n \rightarrow 0$. Uma vez que $\{\tilde{x}_n\}$ é limitada então é claro que a sucessão $\{x_n\}$ também o é.

Como T é um operador compacto, então $\{Tx_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tem uma subsucessão $\{Tx_{n_k}\}$ convergente. Seja

$$y = \lim_{k \rightarrow \infty} Tx_{n_k}.$$

Então $\tilde{x}_{n_k} - x_{n_k} \rightarrow 0$ e atendendo a que \tilde{T} é linear e contínuo, resulta que

$$\tilde{T}\tilde{x}_{n_k} - Tx_{n_k} = \tilde{T}(\tilde{x}_{n_k} - x_{n_k}) \rightarrow \tilde{T}0 = 0.$$

Logo $\tilde{T}\tilde{x}_{n_k} \rightarrow y$. Provamos assim que $\{\tilde{T}\tilde{x}_n\}$ tem uma subsucessão convergente e por isso \tilde{T} é um operador compacto pelo Teorema 4.2.2. \square

Vejam agora que se o operador T é compacto, então o seu transposto T' também o é. O recíproco só é verdadeiro se o espaço de chegada de T é um espaço de Banach, como veremos adiante.

Teorema 4.2.9 ([23, Teorema VI.1.8]). *Se X, Y são espaços vetoriais normados e $T \in \mathcal{K}(X, Y)$, então $T' \in \mathcal{K}(Y', X')$.*

Demonstração. Consideremos $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão limitada de termos em Y' . Para quaisquer $y_1, y_2 \in Y$ e $n \in \mathbb{N}$, tem-se

$$|g_n(y_1) - g_n(y_2)| \leq \|g_n\| \|y_1 - y_2\| \leq \alpha \|y_1 - y_2\|, \quad (4.2.1)$$

para algum $\alpha > 0$.

Consideremos $M = \text{cl}T(B_X(0, 1))$. Como T é compacto, então M é um conjunto compacto por definição. Para cada $n \in \mathbb{N}$, considerando g_n restrito a M , $g_n|_M$, a desigualdade (4.2.1) mostra que

$$\mathcal{F} = \{g_n : n \in \mathbb{N}\}$$

é uma família equicontínua de funções em $C(M)$. Por outro lado, como M é um conjunto compacto, então em particular é limitado. Logo, para quaisquer $y \in M$ e $n \in \mathbb{N}$,

$$|g_n(y)| \leq \|g_n\| \|y\| \leq \alpha c \quad \text{com } c > 0.$$

Temos então que \mathcal{F} é uma família equilimitada e equicontínua de funções de $C(M)$. Assim, o Teorema 4.1.7 garante que $\{g_n\}$ tem uma subsucessão $\{g_{n_k}\}$ uniformemente convergente em M .

Ora, para quaisquer $j, k \in \mathbb{N}$, tem-se

$$\begin{aligned} \|T'g_{n_j} - T'g_{n_k}\| &= \sup_{x \in \text{cl}B_X(0,1)} |(T'g_{n_j})(x) - (T'g_{n_k})(x)| \\ &= \sup_{x \in \text{cl}B_X(0,1)} |g_{n_j}(Tx) - g_{n_k}(Tx)| \\ &= \sup_{y \in M} |g_{n_j}(y) - g_{n_k}(y)| \\ &= \sup_{y \in M} |(g_{n_j} - g_{n_k})(y)| \\ &= \|g_{n_j} - g_{n_k}\|_{C(M)}. \end{aligned}$$

Atendendo a que $\{g_{n_k}\}$ é uniformemente convergente em M , então $\{T'g_{n_k}\}$ é uma sucessão de Cauchy em X' e como X' é completo, concluímos que $\{T'g_{n_k}\}$ é uma subsucessão convergente de $\{T'g_n\}$. Provámos assim que T' é um operador compacto. \square

Queremos agora saber se um operador é compacto quando o seu transposto o é. De facto, se o espaço de chegada é um espaço de Banach e o operador transposto T' é um operador compacto, então o operador T também é compacto.

Teorema 4.2.10 ([23, Teorema VI.1.9]). *Se X é um espaço vetorial normado, Y um espaço de Banach e $T' \in \mathcal{K}(Y', X')$, então $T \in \mathcal{K}(X, Y)$.*

Demonstração. Suponhamos que T' é compacto. Então pelo Teorema 4.2.9, $T'' \in \mathcal{L}(X'', Y'')$ é um operador compacto. Consideremos as aplicações canónicas (cf. Definição 2.2.18) $J_X : X \rightarrow X''$ e $J_Y : Y \rightarrow Y''$.

Como T'' é um operador compacto, $T''(B_{X''}(0, 1))$ é um conjunto relativamente compacto e portanto totalmente limitado, pela Proposição 4.1.6. Por outro lado, atendendo ao Lema 2.2.19 e a que J_X é uma isometria, resulta que

$$J_Y T(B_X(0, 1)) = T'' J_X(B_X(0, 1)) \subseteq T''(B_{X''}(0, 1)),$$

pelo que $J_Y T(B_X(0, 1))$ é um conjunto totalmente limitado. Uma vez que J_Y é uma isometria, então também $T(B_X(0, 1))$ é totalmente limitado. Logo, como Y é completo, $T(B_X(0, 1))$ é relativamente compacto pela Proposição 4.1.6, o que prova que T é um operador compacto. \square

4.3 Aproximação de operadores compactos por operadores de característica finita

Definição 4.3.1. Um operador $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ diz-se um *operador de característica finita* se $\dim \operatorname{Im} T < \infty$.

Proposição 4.3.2 ([23, Exemplo VI.1.6]). *Qualquer operador de característica finita é compacto. Além disso, se Y é completo, então o limite em $\mathcal{B}(X, Y)$ de uma sucessão de operadores de característica finita é um operador compacto.*

Demonstração. Suponhamos que T é um operador de característica finita. Dada uma sucessão $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ limitada de termos em X , temos que $\{Tx_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sucessão limitada em $\operatorname{Im} T$, pois T é contínuo. Uma vez que $\operatorname{Im} T$ tem dimensão finita, então $\{Tx_n\}$ tem uma subsucessão convergente e por isso T é compacto.

Suponhamos agora que Y é completo. Então pelo Teorema 4.2.6 sabemos que $\mathcal{K}(X, Y)$ é um subespaço fechado de $\mathcal{B}(X, Y)$. Consequentemente, o limite de uma sucessão de operadores de característica finita é um operador compacto. \square

Pretendemos agora estudar em que circunstâncias é que um operador compacto é o limite de uma sucessão de operadores de característica finita.

4.3. APROXIMAÇÃO DE OPERADORES COMPACTOS POR OPERADORES DE
CARACTERÍSTICA FINITA

Definição 4.3.3. Seja Y um espaço vetorial normado. Dizemos que Y tem a *propriedade da aproximação* se existir em $\mathcal{B}(Y)$ uma sucessão de operadores de característica finita $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que, para qualquer $y \in Y$,

$$P_n y \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y.$$

Teorema 4.3.4 ([23, Teorema VI.2.1]). *Sejam X um espaço vetorial normado e Y um espaço de Banach com a propriedade da aproximação. Então qualquer operador compacto $T : X \rightarrow Y$ é o limite, em $\mathcal{B}(X, Y)$, de uma sucessão de operadores de característica finita.*

Demonstração. Seja $T \in \mathcal{K}(X, Y)$ tal que Y é espaço de Banach com a propriedade da aproximação. Então existe uma sucessão de operadores de característica finita $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em $\mathcal{B}(Y)$ tal que, para todo $y \in Y$,

$$\|P_n y - y\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Vamos provar que

$$\|P_n T - T\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

o que prova o resultado, pois $\{P_n T\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sucessão de operadores de característica finita em $\mathcal{B}(X, Y)$ que converge para $T \in \mathcal{K}(X, Y)$.

Ora, suponhamos com vista a uma contradição que $\|P_n T - T\|$ não converge para zero. Então existe $\epsilon > 0$ e uma subsucessão $\{n'\}$ de $\{n\}$ tal que

$$\|P_{n'} T - T\| = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} \|P_{n'} T x - T x\| \geq \epsilon,$$

para qualquer n' . Logo existem $x_{n'} \in X$ com $\|x_{n'}\| = 1$ tais que

$$\|P_{n'} T x_{n'} - T x_{n'}\| \geq \frac{\epsilon}{2}. \quad (4.3.1)$$

Como $\{x_{n'}\}$ é uma sucessão limitada de termos de X e T é compacto, então $\{T x_{n'}\}$ tem uma subsucessão $\{T x_{n''}\}$ que converge para algum $y \in Y$.

Além disso, atendendo a que Y é completo e que a sucessão $\{P_n\}$ é pontualmente limitada e convergente, então o Teorema 2.2.13 garante que $\{\|P_n\|\}$ é limitada, isto é, $\sup_n \|P_n\| = c < \infty$. Assim,

$$\begin{aligned} \|P_{n''} T x_{n''} - T x_{n''}\| &\leq \|P_{n''} T x_{n''} - P_{n''} y\| + \|P_{n''} y - y\| + \|y - T x_{n''}\| \\ &\leq (c + 1) \|T x_{n''} - y\| + \|P_{n''} y - y\| \xrightarrow{n'' \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

o que contradiz (4.3.1). Provámos assim que $\|P_n T - T\| \rightarrow 0$, pelo que T é o limite de uma sucessão de operadores de característica finita. \square

Definição 4.3.5. Seja Y um espaço vetorial normado e $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de elementos de Y . Diz-se que $\{e_n\}$ é uma *base de Schauder* de Y se para todo o $y \in Y$ existe uma sucessão única $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de termos em \mathbb{C} tal que

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n.$$

Para provar que um espaço de Banach com base de Schauder tem a propriedade da aproximação, precisamos de um Lema auxiliar:

Lema 4.3.6 ([23, Lema VI.2.3]). *Se Y é um espaço de Banach com uma base de Schauder $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, então os funcionais lineares $f_j : Y \rightarrow \mathbb{C}$ dados por*

$$f_j(y) = \alpha_j \quad \text{com} \quad y = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j e_j$$

são limitados e, além disso, $\sup_{j \in \mathbb{N}} \|f_j\| < \infty$.

Demonstração. Suponhamos que Y é um espaço de Banach com uma base de Schauder $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Designemos por X o espaço vetorial

$$X = \left\{ x = (\alpha_1, \alpha_2, \dots) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j e_j \text{ é convergente em } Y \right\}$$

com a norma

$$\|x\| = \sup_{k \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{j=1}^k \alpha_j e_j \right\|.$$

Consideremos a aplicação $\psi : X \rightarrow Y$ definida por

$$\psi(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j e_j.$$

Temos que ψ é linear e bijetiva. Além disso, para qualquer $x \in X$,

$$\|\psi(x)\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \sum_{j=1}^k \alpha_j e_j \right\| \leq \sup_{k \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{j=1}^k \alpha_j e_j \right\| = \|x\|,$$

pelo que ψ é um operador linear limitado.

Vejam agora que X é um espaço de Banach. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $\|e_j\| = 1$, para todo $j \in \mathbb{N}$.

Ora, para quaisquer $x \in X$ e $j \in \mathbb{N}$, temos

$$|\alpha_j| = \|\alpha_j e_j\| = \left\| \sum_{i=1}^j \alpha_i e_i - \sum_{i=1}^{j-1} \alpha_i e_i \right\| \leq 2\|x\|.$$

Seja agora $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de Cauchy de termos em X com $x_n = (\alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, \dots)$. Para cada $n, m, j \in \mathbb{N}$, temos

$$|\alpha_j^{(n)} - \alpha_j^{(m)}| \leq 2\|x_n - x_m\|.$$

Consequentemente, para cada $j \in \mathbb{N}$, $\{\alpha_j^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sucessão de Cauchy em \mathbb{C} e, sendo \mathbb{C} um espaço completo, temos que

$$\alpha_j^{(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha_j \in \mathbb{C}.$$

4.3. APROXIMAÇÃO DE OPERADORES COMPACTOS POR OPERADORES DE CARACTERÍSTICA FINITA

Vamos provar que $\{x_n\}$ converge para $x = (\alpha_1, \alpha_2, \dots) \in X$. Seja $\epsilon > 0$. Como $\{x_n\}$ é uma sucessão de Cauchy, então existe $p_1 \in \mathbb{N}$ tal que, para $m, n \geq p_1$,

$$\|x_n - x_m\| = \sup_{k \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{j=1}^k (\alpha_j^{(n)} - \alpha_j^{(m)}) e_j \right\| < \epsilon.$$

Fixando $n \geq p_1$ e fazendo $m \rightarrow \infty$, temos que

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{j=1}^k (\alpha_j^{(n)} - \alpha_j) e_j \right\| \leq \epsilon.$$

Falta então provar que $x = (\alpha_1, \alpha_2, \dots) \in X$. Ora, já vimos que para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$, temos que

$$\|\psi(x_n) - \psi(x_m)\| \leq \|x_n - x_m\|.$$

Logo $\{\psi(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sucessão de Cauchy em Y e por isso converge para algum $y \in Y$. Assim, existe $p_2 \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geq p_2$,

$$\|\psi(x_n) - y\| < \epsilon.$$

Então, sendo $p_0 = \max\{p_1, p_2\}$ e $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $k \geq k_0$,

$$\left\| \psi(x_{p_0}) - \sum_{j=1}^k \alpha_j^{(p_0)} e_j \right\| < \epsilon,$$

temos que

$$\begin{aligned} \left\| y - \sum_{j=1}^k \alpha_j e_j \right\| &\leq \left\| y - \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j^{(p_0)} e_j \right\| + \left\| \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j^{(p_0)} e_j - \sum_{j=1}^k \alpha_j^{(p_0)} e_j \right\| + \\ &\quad + \left\| \sum_{j=1}^k \alpha_j^{(p_0)} e_j - \sum_{j=1}^k \alpha_j e_j \right\| < 3\epsilon. \end{aligned}$$

Logo $y = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j e_j$, ou seja, $x = (\alpha_1, \alpha_2, \dots) \in X$. Acabámos de provar que X é um espaço de Banach.

Atendendo a que X e Y são espaços de Banach e ψ é um operador linear, limitado e bijetivo, então pelo Teorema da Aplicação Inversa (cf. [23, Teorema IV.7.3]), $\psi^{-1} : Y \rightarrow X$ é um operador limitado. Temos então que, para qualquer $y \in Y$ com $y = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j e_j$,

$$|f_j(y)| = |\alpha_j| \leq 2\|(\alpha_1, \alpha_2, \dots)\| = 2\|\psi^{-1}(y)\| \leq 2\|\psi^{-1}\| \|y\|, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Logo f_j é um funcional linear limitado com $\|f_j\| \leq 2\|\psi^{-1}\|$ para qualquer $j \in \mathbb{N}$. □

Proposição 4.3.7. *Se Y é um espaço de Banach com uma base de Schauder, então Y tem a propriedade da aproximação.*

Demonstração. Suponhamos que Y é um espaço de Banach com uma base de Schauder $\{e_j\}_{j \in \mathbb{N}}$. Então para todo $y \in Y$ existe uma sucessão única $\{\alpha_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ de termos em \mathbb{C} tal que

$$y = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j e_j.$$

Consideremos os funcionais lineares f_j definidos em Y por

$$f_j(y) = \alpha_j.$$

Pelo Lema 4.3.6, f_j são funcionais lineares limitados com $\sup_{j \in \mathbb{N}} \|f_j\| = K < \infty$.

Sejam, para cada $n \in \mathbb{N}$, $P_n : Y \rightarrow Y$ definidos por

$$P_n y = \sum_{j=1}^n f_j(y) e_j.$$

Vamos provar que $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sucessão de operadores de característica finita tal que $P_n y \rightarrow y$ para qualquer $y \in Y$. Seja $n \in \mathbb{N}$ e suponhamos, sem perda de generalidade, que $\|e_j\| = 1$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Para $y \in Y$, temos

$$\|P_n y\| = \left\| \sum_{j=1}^n f_j(y) e_j \right\| \leq \sum_{j=1}^n \|f_j\| \|y\| \|e_j\| \leq \sum_{j=1}^n K \|y\| = nK \|y\|.$$

Assim, $P_n \in \mathcal{B}(Y)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso, (e_1, e_2, \dots, e_n) gera $\text{Im } P_n$. Consequentemente, $\dim \text{Im } P_n \leq n < \infty$. Concluimos assim que $\{P_n\}$ é uma sucessão de operadores de característica finita em $\mathcal{B}(Y)$.

Falta apenas provar que para $y \in Y$,

$$\|P_n y - y\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Ora, para todo $y \in Y$,

$$\|P_n y - y\| = \left\| \sum_{j=1}^n f_j(y) e_j - \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j e_j \right\| = \left\| \sum_{j=n+1}^{\infty} \alpha_j e_j \right\| \leq \sum_{j=n+1}^{\infty} \|\alpha_j e_j\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

pelo que Y tem a propriedade da aproximação, como queríamos provar. \square

Conciliando a Proposição 4.3.7 e o Teorema 4.3.4, obtemos o seguinte Corolário.

Corolário 4.3.8 ([23, Corolário VI.2.4]). *Sejam X um espaço vetorial normado e Y um espaço de Banach com uma base de Schauder. Então qualquer operador compacto $T : X \rightarrow Y$ é o limite, em $\mathcal{B}(X, Y)$, de uma sucessão de operadores de característica finita.*

4.4 A teoria de Riesz-Schauder

Começemos por recordar, da Álgebra Linear, que se S é um operador linear definido num espaço vetorial de dimensão finita X , então, pelo Teorema das dimensões,

$$\dim X = \dim \text{Ker } S + \dim \text{Im } S.$$

Uma vez que $\text{codim Im } S = \dim(X/\text{Im } S) = \dim X - \dim \text{Im } S$, temos que

$$\dim \text{Ker } S = \text{codim Im } S. \quad (4.4.1)$$

O principal objetivo desta secção é generalizar a igualdade (4.4.1) aos operadores da forma $T - \lambda I$, em que T um operador compacto e $\lambda \in \mathbb{C}$, como veremos no Teorema 4.4.2. Para tal, precisamos do seguinte resultado auxiliar.

Lema 4.4.1 ([23, Lema VI.3.1]). *Sejam X um espaço vetorial normado e $T \in \mathcal{K}(X)$ um operador de característica finita. Então existem subespaços N e Z de X tais que N tem dimensão finita, Z é fechado e*

$$X = N \oplus Z, \quad T(N) \subseteq N \quad e \quad T(Z) = \{0\}.$$

Demonstração. Caso $T = 0$, o resultado é trivial. Consideremos então $T \neq 0$ um operador compacto de característica finita e $\{Tv_1, \dots, Tv_n\}$ uma base de $\text{Im } T$.

Como $\{Tv_1, \dots, Tv_n\} \subseteq X$ é um conjunto linearmente independente, então como consequência do Teorema de Hahn-Banach (cf. [23, Corolário IV.4.5]), sabemos que existem $f_1, \dots, f_n \in X'$ tais que

$$f_j(Tv_i) = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq n,$$

$$\text{com } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}.$$

Para cada $x \in X$, temos

$$Tx = \sum_{j=1}^n f_j(Tx)Tv_j. \quad (4.4.2)$$

Consideremos o espaço de dimensão finita gerado por $\{v_1, \dots, v_n, Tv_1, \dots, Tv_n\}$,

$$N = \text{span}\{v_1, \dots, v_n, Tv_1, \dots, Tv_n\}.$$

Ora, temos que $T(N) \subseteq \text{Im } T \subseteq N$ e, atendendo (4.4.2), para qualquer $x \in X$ temos

$$x - \sum_{j=1}^n f_j(Tx)v_j \in \text{Ker } T.$$

Logo

$$X = N + \text{Ker } T. \quad (4.4.3)$$

Por outro lado, visto que N tem dimensão finita, $N \cap \text{Ker } T$ é um subespaço de dimensão finita do subespaço vetorial normado $\text{Ker } T$. Consequentemente, o Teorema 2.2.1 garante que existe um subespaço fechado Z tal que

$$\text{Ker } T = (N \cap \text{Ker } T) \oplus Z.$$

Portanto, atendendo (4.4.3), resulta que

$$X = N \oplus Z.$$

Além disso, como $Z = \text{Ker } T - N \cap \text{Ker } T$, temos que

$$T(Z) = \{0\}.$$

□

Teorema 4.4.2 ([23, Teorema VI.3.2]). *Sejam X um espaço de Banach com a propriedade de aproximação, $T \in \mathcal{K}(X)$ e $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Consideremos o operador*

$$T_\lambda = T - \lambda I.$$

Temos que

- (i) $\text{Im } T_\lambda$ é fechada.
- (ii) $\text{Ker } T_\lambda$ tem dimensão finita.
- (iii) $\dim \text{Ker } T_\lambda = \text{codim } \text{Im } T_\lambda$.

Demonstração. Começemos por supor que $T \in \mathcal{K}(X)$ é um operador de característica finita. Então, pelo Lema 4.4.1, existem subespaços fechados N e Z de X tais que $\dim N < \infty$,

$$X = N \oplus Z, \quad T(N) \subseteq N \quad \text{e} \quad T(Z) = \{0\}. \quad (4.4.4)$$

Seja $T_\lambda|_N$ a restrição a N do operador T_λ . Temos que $\text{Ker } T_\lambda|_N \subseteq \text{Ker } T_\lambda$. Vamos então provar a inclusão contrária. Seja $x \in \text{Ker } T_\lambda$. Por (4.4.4), existem $y \in N$ e $z \in Z$ tais que $x = y + z$. Assim,

$$0 = T_\lambda x = T_\lambda y + T_\lambda z = T_\lambda y - \lambda z.$$

Logo $z = \frac{1}{\lambda} T_\lambda y \in N$, isto é, $z \in N \cap Z = \{0\}$. Consequentemente, $x = y \in N$ e $T_\lambda x = T_\lambda y = 0$, pelo que $x \in \text{Ker } T_\lambda|_N$. Concluimos assim que

$$\text{Ker } T_\lambda = \text{Ker } T_\lambda|_N. \quad (4.4.5)$$

Como N tem dimensão finita, então $\text{Ker } T_\lambda|_N$ também tem dimensão finita. Logo $\text{Ker } T_\lambda$ tem dimensão finita.

Vamos agora provar que $\text{Im } T_\lambda = \text{Im } T_\lambda|_N \oplus Z$. Tomemos $y \in \text{Im } T_\lambda$. Então $y = T_\lambda x$ com $x = y + z$, $y \in N$ e $z \in Z$ únicos. Temos que

$$y = T_\lambda x = T_\lambda y - \lambda z \in \text{Im } T_\lambda|_N \oplus Z,$$

donde resulta que $\text{Im } T_\lambda \subseteq \text{Im } T_\lambda|_N \oplus Z$.

Consideremos agora $w \in \text{Im } T_\lambda|_N \oplus Z$. Então existem $u \in N$ e $v \in Z$ tais que $w = T_\lambda u + v$. Ora, como $T(Z) = \{0\}$, temos que

$$w = T_\lambda u + v = T_\lambda \left(u + \frac{1}{\lambda} v \right),$$

pelo que $w \in \text{Im } T_\lambda$. Concluimos assim que

$$\text{Im } T_\lambda = \text{Im } T_\lambda|_N \oplus Z. \quad (4.4.6)$$

Como $\text{Im } T_\lambda|_N$ tem dimensão finita por N ter dimensão finita e sendo Z um subespaço fechado, então $\text{Im } T_\lambda|_N + Z$ é fechado pelo Lema 2.2.12. Consequentemente, $\text{Im } T_\lambda$ é fechado por (4.4.6).

Além disso, como $T_\lambda|_N \in \mathcal{B}(N)$ e N tem dimensão finita, então, pelas considerações feitas no início desta secção e pela igualdade (4.4.1), temos que

$$\dim \text{Ker } T_\lambda|_N = \text{codim } \text{Im } T_\lambda|_N.$$

Portanto, de (4.4.4), (4.4.5) e (4.4.6) resulta que

$$\dim \text{Ker } T_\lambda = \text{codim } \text{Im } T_\lambda.$$

Provamos assim (i), (ii) e (iii) caso $T \in \mathcal{K}(X)$ tenha característica finita.

Suponhamos agora que $T \in \mathcal{K}(X)$ não necessariamente de característica finita, sendo X um espaço de Banach com a propriedade de aproximação. Pelo Teorema 4.3.4, T é o limite de uma sucessão de operadores de característica finita. Consequentemente, existe um operador T_0 de característica finita tal que

$$\|T - T_0\| < |\lambda|.$$

Então o operador $S = I - \frac{1}{\lambda}(T - T_0)$ é invertível em $\mathcal{B}(X)$ pelo Teorema 3.1.9. Temos que

$$T_\lambda = T - \lambda I = T_0 - \lambda S = (T_0 S^{-1} - \lambda I)S = (T_0 S^{-1})_\lambda S. \quad (4.4.7)$$

Vamos provar que $\text{Im } T_\lambda = \text{Im}(T_0 S^{-1})_\lambda$. Pela igualdade (4.4.7) facilmente se prova a inclusão $\text{Im } T_\lambda \subseteq \text{Im}(T_0 S^{-1})_\lambda$.

Seja agora $y \in \text{Im}(T_0 S^{-1})_\lambda$. Então $y = (T_0 S^{-1})_\lambda x$ com $x \in X$. Temos que

$$y = (T_0 S^{-1})_\lambda x = (T_0 S^{-1})_\lambda (S S^{-1})x = T_\lambda (S^{-1}x) \in \text{Im } T_\lambda.$$

Acabámos de provar que

$$\text{Im } T_\lambda = \text{Im}(T_0 S^{-1})_\lambda.$$

Ora, atendendo a que T_0S^{-1} é um operador de característica finita e ao provado anteriormente, concluímos que $\text{Im } T_\lambda$ é fechada, ficando provado (i).

Vejamos agora que

$$S(\text{Ker } T_\lambda) = \text{Ker}(T_0S^{-1})_\lambda.$$

Seja $y \in S(\text{Ker } T_\lambda)$. Então $y = Sx$ com $x \in \text{Ker } T_\lambda$, pelo que

$$y = Sx = \left(I - \frac{1}{\lambda}(T - T_0)\right)x = \frac{1}{\lambda}(-T_\lambda + T_0)x = \frac{1}{\lambda}T_0x.$$

Consequentemente,

$$T_0x - \lambda y = 0 \implies T_0S^{-1}y - \lambda y = 0,$$

isto é, $y \in \text{Ker}(T_0S^{-1})_\lambda$.

Tomemos agora $x \in \text{Ker}(T_0S^{-1})_\lambda$. Então,

$$(T_0S^{-1})_\lambda x = 0 \implies (T_0S^{-1})_\lambda(SS^{-1})x = 0 \implies T_\lambda(S^{-1}x) = 0.$$

Portanto $S^{-1}x \in \text{Ker } T_\lambda$, pelo que $x \in S(\text{Ker } T_\lambda)$, como queríamos provar.

Sendo T_0S^{-1} um operador de característica finita, já provámos que $\text{Ker}(T_0S^{-1})_\lambda$ tem dimensão finita. Assim, $\text{Ker } T_\lambda = S^{-1}(\text{Ker}(T_0S^{-1})_\lambda)$ tem dimensão finita, ficando provado (ii).

Além disso,

$$\dim \text{Ker } T_\lambda = \dim \text{Ker}(T_0S^{-1})_\lambda = \text{codim } \text{Im}(T_0S^{-1})_\lambda = \text{codim } \text{Im } T_\lambda,$$

ficando provado (iii). □

Corolário 4.4.3 ([23, Corolário VI.3.3]). *Sejam X um espaço de Banach com a propriedade da aproximação, $T \in \mathcal{K}(X)$ e $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Consideremos o operador $T_\lambda = T - \lambda I$ e o seu transposto T'_λ . Temos que*

$$\dim \text{Ker } T_\lambda = \dim \text{Ker } T'_\lambda.$$

Demonstração. Seja $T \in \mathcal{K}(X)$ e $\lambda \neq 0$. Pelo Teorema 4.4.2, sabemos que $\text{Im } T_\lambda$ é fechada e $\text{codim } \text{Im } T_\lambda = \dim \text{Ker } T_\lambda$ é finita. Logo sabemos que (cf. [23, Teorema IV.6.10])

$$\dim \text{Ker } T'_\lambda = \text{codim } \text{Im } T_\lambda = \dim \text{Ker } T_\lambda.$$

□

Obtém-se imediatamente do Teorema 4.4.2 que sendo T um operador compacto num espaço de Banach X com a propriedade da aproximação e $\lambda \neq 0$, o operador $T - \lambda I$ é injetivo se, e só se, for sobrejetivo. Portanto uma, e uma só, das duas alternativas seguintes se pode verificar:

(a) Para todo $y \in X$, a equação

$$(T - \lambda I)x = y$$

tem uma única solução $x \in X$ e o operador $T - \lambda I$ é invertível.

(b) Existe uma solução não-trivial da equação homogénea

$$(T - \lambda I)x = 0$$

e, neste caso, o número de soluções linearmente independentes é finito.

Esta dicotomia é geralmente designada por *alternativa de Fredholm*.

OPERADORES DE FREDHOLM

5.1 Definições e resultados auxiliares

Definição 5.1.1. Sejam X e Y espaços vetoriais normados e $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. Diz-se que T é um *operador de Fredholm* se forem satisfeitas as seguintes condições:

- (i) $\text{Im } T$ é fechada em Y ;
- (ii) $\dim \text{Ker } T < \infty$;
- (iii) $\text{codim Im } T < \infty$.

Ao número inteiro

$$\text{ind } T = \dim \text{Ker } T - \text{codim Im } T$$

chama-se *índice* de T .

O conjunto dos operadores de Fredholm definidos em X e com valores em Y é representado por $\phi(X, Y)$. Se $X = Y$, denotamos $\phi(X, X)$ por $\phi(X)$.

Observação 5.1.2. O Teorema 4.4.2 diz-nos que se K é um operador compacto num espaço de Banach, então $T = I - K$ é um operador de Fredholm de índice zero.

Teorema 5.1.3 ([23, Teorema VII.2.1]). *Sejam X e Y espaços de Banach e $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. Então $\text{Im } T$ é fechada em Y se, e só se, existe $c > 0$ tal que, para qualquer $x \in X$,*

$$d(x, \text{Ker } T) \leq c \|Tx\|,$$

com $d(x, \text{Ker } T) = \inf_{y \in \text{Ker } T} \|x - y\|$.

Notemos que, atendendo a definição de norma quociente, podemos escrever alternativamente

$$\|x + \text{Ker } T\|_{X/\text{Ker } T} \leq c \|Tx\|.$$

Demonstração. A demonstração vai ser feita em duas partes. Na primeira parte vamos considerar o caso particular de T ser injetivo e na segunda parte vamos provar o caso geral.

Suponhamos que T é injetivo. Então pretendemos provar que $\text{Im } T$ é fechada em Y se, e só se, existe $c > 0$ tal que, para qualquer $x \in X$,

$$\|x\| \leq c \|Tx\|.$$

Começemos por supor que $\text{Im } T$ é fechada em Y . Então como Y é um espaço completo, resulta que $\text{Im } T$ é um espaço de Banach para a norma induzida. Consequentemente, pelo Teorema da Aplicação Inversa (cf. [23, Teorema IV.7.3]), $T^{-1} \in \mathcal{B}(\text{Im } T, X)$. Então existe $c > 0$ tal que

$$\|T^{-1}y\| \leq c \|y\|, \quad y \in \text{Im } T$$

que é equivalente a

$$\|x\| \leq c \|Tx\|, \quad x \in X,$$

como queríamos provar.

Suponhamos agora que existe $c > 0$ tal que, para qualquer $x \in X$,

$$\|x\| \leq c \|Tx\|.$$

Consideremos $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de elementos de $\text{Im } T$ tal que $y_n \rightarrow y \in Y$. Então para cada $n \in \mathbb{N}$, $y_n = Tx_n$ com $x_n \in X$. Ora, por hipótese temos que

$$\|x_n - x_m\| \leq c \|y_n - y_m\| \rightarrow 0, \quad \text{quando } n, m \rightarrow \infty.$$

Logo $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é um sucessão de Cauchy em X e portanto convergente para $x \in X$. Por outro lado, uma vez que $T \in \mathcal{B}(X, Y)$, temos que

$$y_n = Tx_n \rightarrow Tx \in \text{Im } T.$$

Portanto $\text{Im } T$ é fechada em Y , como pretendíamos provar.

Analisemos agora o caso geral em que o operador T não é necessariamente injetivo.

Como $\text{Ker } T$ é um subespaço fechado de X , então é completo. Consequentemente, $X/\text{Ker } T$ é um espaço de Banach para a norma quociente, pelo Teorema 2.2.4.

Seja $\widehat{T} : X/\text{Ker } T \rightarrow Y$ definido por

$$\widehat{T}(x + \text{Ker } T) = Tx, \quad x \in X.$$

Temos que $\text{Ker } \widehat{T} = [0]$ e $\text{Im } \widehat{T} = \text{Im } T$. Vejamos que $\widehat{T} \in \mathcal{B}(X/\text{Ker } T, Y)$. Para tal, pelo Teorema do Gráfico Fechado (cf. [23, Teorema IV.7.7]), é suficiente provar que \widehat{T} é um operador fechado.

Ora, se

$$x_n + \text{Ker } T \longrightarrow x + \text{Ker } T \text{ em } X/\text{Ker } T \quad \text{e} \quad \widehat{T}(x_n + \text{Ker } T) \longrightarrow y \text{ em } Y,$$

então existe uma sucessão $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em $\text{Ker } T$ tal que

$$x_n + z_n \longrightarrow x \text{ em } X \quad \text{e} \quad Tx_n \longrightarrow y \text{ em } Y.$$

Como todo o operador limitado é fechado, então T é um operador fechado. Portanto $Tx = y$ e, conseqüentemente, $y = Tx = \widehat{T}(x + \text{Ker } T)$. Logo \widehat{T} é um operador fechado e, por isso, limitado.

Atendendo a que \widehat{T} é injetivo e usando a primeira parte da demonstração, podemos concluir que $\text{Im } \widehat{T}$ é fechada em Y se, e só se, existe $c > 0$ tal que, para qualquer $x \in X$,

$$\|x + \text{Ker } T\| \leq c \|\widehat{T}(x + \text{Ker } T)\|.$$

Ora, temos que $\text{Im } \widehat{T} = \text{Im } T$, $\widehat{T}(x + \text{Ker } T) = Tx$ e $\|x + \text{Ker } T\| = d(x, \text{Ker } T)$ para $x \in X$. Conseqüentemente, $\text{Im } T$ é fechada em Y se, e só se, existe $c > 0$ tal que, para qualquer $x \in X$,

$$d(x, \text{Ker } T) \leq c \|Tx\|.$$

□

Corolário 5.1.4 ([23, Corolário VII.2.2]). *Sejam X, Y espaços de Banach e $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. Suponhamos que existe um subespaço fechado N de Y tal que $Y = \text{Im } T \oplus N$. Então $\text{Im } T$ é fechada em Y .*

Demonstração. Suponhamos que existe um subespaço fechado $N \subseteq Y$ tal que $Y = \text{Im } T \oplus N$. Consideremos o produto cartesiano $X \times N$ munido da norma $\|(x, n)\| = \|x\| + \|n\|$ com $x \in X$ e $n \in N$. Seja $\widetilde{T} : X \times N \rightarrow Y$ o operador definido por

$$\widetilde{T}(x, n) = Tx + n, \quad x \in X, n \in N.$$

Temos que \widetilde{T} é um operador linear e considerando $C = \max\{1, \|T\|\}$, para $(x, n) \in X \times N$ temos que

$$\|\widetilde{T}(x, n)\| = \|Tx + n\| \leq \|Tx\| + \|n\| \leq C \|(x, n)\|.$$

Logo $\widetilde{T} \in \mathcal{B}(X \times N, Y)$.

Além disso, por hipótese $\text{Im } \widetilde{T} = Y$ e Y é fechado, pelo que, pelo Teorema 5.1.3, existe $c > 0$ tal que, para qualquer $(x, n) \in X \times N$,

$$d((x, n), \text{Ker } \widetilde{T}) \leq c \|\widetilde{T}(x, n)\|.$$

Tendo em conta que $\text{Ker } \widetilde{T} = \{(x, 0) : x \in \text{Ker } T\}$, então existe $c > 0$ tal que, para qualquer $x \in X$,

$$d(x, \text{Ker } T) = d((x, 0), \text{Ker } \widetilde{T}) \leq c \|\widetilde{T}(x, 0)\| = c \|Tx\|.$$

Logo $\text{Im } T$ é fechada em Y , pelo Teorema 5.1.3. □

5.2 Propriedades dos operadores de Fredholm

5.2.1 Caracterizações dos operadores de Fredholm

Na definição de operador de Fredholm, alguns autores omitem a condição de o operador ter imagem fechada devido ao próximo resultado.

Proposição 5.2.1 ([23, Proposição VII.3.1]). *Sejam X e Y espaços de Banach e $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. Então T é um operador de Fredholm se, e só se, $\dim \text{Ker } T < \infty$ e $\text{codim Im } T < \infty$.*

Demonstração. A condição necessária é imediata por definição de operador de Fredholm. Suponhamos então que $\dim \text{Ker } T < \infty$ e $\text{codim Im } T < \infty$. Como $\text{codim Im } T < \infty$ então existe um complementar N de $\text{Im } T$ em Y com dimensão finita e, portanto, fechado. Logo, pelo Corolário 5.1.4, temos que $\text{Im } T$ é fechada em Y , concluindo que T é um operador de Fredholm. \square

No estudo de operadores lineares o conceito de regularização permite em certos casos reduzir um problema geral a um problema para um operador compacto. Consideremos então a seguinte definição.

Definição 5.2.2. Sejam X e Y espaços vetoriais normados e $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. Diz-se que T admite uma regularização esquerda (resp. direita) se existe um operador $R_e \in \mathcal{B}(Y, X)$ (resp. $R_d \in \mathcal{B}(Y, X)$) tal que

$$R_e T = I_X - K_X \quad (\text{resp. } T R_d = I_Y - K_Y),$$

onde $K_X \in \mathcal{K}(X)$ (resp. $K_Y \in \mathcal{K}(Y)$). Ao operador R_e (resp. R_d) chama-se *regularizador esquerdo* (resp. *direito*) de T .

Diz-se que T admite uma regularização se existe um operador $R \in \mathcal{B}(Y, X)$ que é simultaneamente um regularizador esquerdo e direito de T . Ao operador R chama-se *regularizador de T* .

Lema 5.2.3 ([23, Lema VII.3.4]). *T admite uma regularização se, e só se, admite uma regularização esquerda e uma regularização direita.*

Demonstração. A condição necessária é imediata da definição, por isso vamos provar a condição suficiente.

Suponhamos então que existem $R_e, R_d \in \mathcal{B}(Y, X)$ tais que

$$R_e T = I_X - K_X, \quad T R_d = I_Y - K_Y,$$

com $K_X \in \mathcal{K}(X)$ e $K_Y \in \mathcal{K}(Y)$. Assim,

$$R_e T R_d = R_d - K_X R_d, \quad R_e T R_d = R_e - R_e K_Y,$$

pelo que

$$0 = R_d - K_X R_d - R_e + R_e K_Y \Leftrightarrow R_d - R_e = K_X R_d - R_e K_Y.$$

Tomando $K = K_X R_d - R_e K_Y : Y \rightarrow X$, temos que K é um operador compacto pelos Teoremas 4.2.3 e 4.2.7. Assim,

$$TR_e = T(R_d - K) = I_Y - \widetilde{K}_Y,$$

com $\widetilde{K}_Y = K_Y + TK \in \mathcal{K}(Y)$. Logo R_e é regularizador direito de T .

Por outro lado,

$$R_d T = (K + R_e)T = I_X - \widetilde{K}_X,$$

com $\widetilde{K}_X = K_X - KT \in \mathcal{K}(X)$. Logo R_d é um regularizador esquerdo de T .

Provamos assim que T admite uma regularização. \square

O resultado que apresentamos de seguida mostra que os operadores de Fredholm, e apenas estes, admitem uma regularização.

Teorema 5.2.4 ([23, Teorema VII.3.5]). *Sejam X, Y espaços de Banach e $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. Temos que $T \in \phi(X, Y)$ se, e só se, T admite uma regularização.*

Demonstração. Suponhamos que T admite uma regularização e seja $R \in \mathcal{B}(Y, X)$ um regularizador de T . Então por definição temos que

$$RT = I_X - K_X, \quad TR = I_Y - K_Y$$

com $K_X \in \mathcal{K}(X)$ e $K_Y \in \mathcal{K}(Y)$.

Como $\text{Ker } T \subseteq \text{Ker } RT = \text{Ker}(I_X - K_X)$, então $\dim \text{Ker } T \leq \dim \text{Ker}(I_X - K_X)$. Ora, atendendo à Observação 5.1.2, concluímos que $\dim \text{Ker } T < \infty$.

Além disso, temos que $\text{Im } T \supseteq \text{Im } TR = \text{Im}(I_Y - K_Y)$ e, pela Observação 5.1.2, sabemos que $\text{codim } \text{Im}(I_Y - K_Y) < \infty$, pelo que $\text{codim } \text{Im } T < \infty$. Assim, pela Proposição 5.2.1, concluímos que T é um operador de Fredholm.

Suponhamos agora que $T \in \phi(X, Y)$. Vamos usar um processo construtivo para obtermos um regularizador de T .

Como T é um operador de Fredholm, então $\dim \text{Ker } T < \infty$ e $\text{codim } \text{Im } T < \infty$. Logo existe um subespaço fechado X_0 de X (cf. Teorema 2.2.1) e existe um subespaço N de Y com dimensão finita tais que são válidas as seguintes decomposições em soma direta topológica

$$X = X_0 \oplus \text{Ker } T, \quad Y = \text{Im } T \oplus N.$$

Sabemos que a existência de um complementar topológico de um subespaço fechado é equivalente à existência de um operador projeção sobre esse subespaço (cf. [23, Teorema IV.7.8]). Vamos então identificar, a partir do operador T , os operadores de projeção sobre os subespaços $\text{Ker } T \subseteq X$ e $N \subseteq Y$.

Seja $T_0 = T|_{X_0} : X_0 \rightarrow \text{Im } T$ e vejamos que T_0 é bijetivo. Consideremos $x \in \text{Ker } T_0$. Então $x \in X_0 \cap \text{Ker } T = \{0\}$, pelo que $\text{Ker } T_0 = \{0\}$. E, como $\text{Im } T = \text{Im } T_0$, T_0 é sobrejetivo. Logo, pelo Teorema da Aplicação Inversa (cf. [23, Teorema IV.7.3]), temos que $T_0^{-1} \in \mathcal{B}(\text{Im } T, X_0)$.

Seja $R : Y \rightarrow X$ o operador definido por

$$Ry = \begin{cases} T_0^{-1}y, & y \in \text{Im } T \\ 0, & y \in N \end{cases}.$$

Sendo T_0^{-1} um operador linear limitado, concluímos que $R \in \mathcal{B}(Y, X)$. Ora, temos que

$$TRy = \begin{cases} y, & y \in \text{Im } T \\ 0, & y \in N \end{cases}, \quad RTx = \begin{cases} x, & x \in X_0 \\ 0, & x \in \text{Ker } T \end{cases}.$$

Donde

$$TR = I - Q, \quad RT = I - P,$$

onde Q é o operador de projeção de Y sobre N ao longo de $\text{Im } T$ e P é o operador de projeção de X sobre $\text{Ker } T$ ao longo de X_0 (cf. Lema 2.1.6, Definição 2.1.7).

Ora, P e Q são operadores de característica finita, visto que $\text{Ker } T < \infty$ e $N < \infty$. Portanto P e Q são operadores compactos e, por isso, R é um regularizador de T . \square

Analisando a demonstração da condição necessária do resultado anterior, podemos concluir o seguinte resultado:

Corolário 5.2.5 ([23, Corolário VII.3.7]). *Se $T \in \phi(X, Y)$, então existe um regularizador R de T tal que*

$$RT = I_X - F_X, \quad TR = I_Y - F_Y,$$

em que F_X e F_Y são operadores de característica finita em $\mathcal{B}(X)$ e $\mathcal{B}(Y)$, respetivamente.

Vejamos algumas consequências dos resultados anteriores.

Corolário 5.2.6 ([23, Corolário VII.3.6]). *Sejam X, Y espaços de Banach. Qualquer regularizador esquerdo (resp. direito) de um operador de Fredholm é também um regularizador direito (resp. esquerdo).*

Demonstração. É consequência imediata do Lema 5.2.3 e do Teorema 5.2.4. \square

Outra consequência que se pode deduzir da demonstração do Teorema 5.2.4 é que não existe unicidade para o regularizador de um operador de Fredholm T , pois este depende dos complementares escolhidos para os subespaços $\text{Ker } T$ de X e $\text{Im } T$ de Y . No entanto, temos a seguinte relação:

Proposição 5.2.7 ([23, Proposição VII.3.8]). *Quaisquer dois regularizadores de um operador de Fredholm diferem entre si de um operador compacto.*

Demonstração. Suponhamos que $R_1, R_2 \in \mathcal{B}(Y, X)$ são dois regularizadores de $T \in \phi(X, Y)$. Então R_1 é um regularizador esquerdo de T e R_2 é um regularizador direito de T . Assim, existem $K_X \in \mathcal{K}(X)$ e $K_Y \in \mathcal{K}(Y)$ tais que

$$R_1 T R_2 = (I_X - K_X) R_2 = R_1 (I_Y - K_Y).$$

Portanto $R_1 - R_2 = R_1 K_Y - K_X R_2$, que é um operador compacto pelos Teoremas 4.2.3 e 4.2.7. \square

Proposição 5.2.8 ([23, Proposição VII.3.9]). *Qualquer regularizador de um operador de Fredholm é um operador de Fredholm.*

Demonstração. Seja $R \in \mathcal{B}(Y, X)$ um regularizador de um operador de Fredholm T . Pela Proposição 5.2.7, qualquer regularizador de T é da forma $R + K$ em que K é um operador compacto.

Por outro lado, pelo Corolário 5.2.5,

$$RT = I_X - F_X, \quad TR = I_Y - F_Y,$$

em que F_X e F_Y são operadores de característica finita (e por isso compactos) em $\mathcal{B}(X)$ e $\mathcal{B}(Y)$, respetivamente.

Assim,

$$(R + K)T = I_X - F_X + KT = I_X - K_X, \quad T(R + K) = I_Y - F_Y + TK = I_Y - K_Y,$$

onde $K_X = F_X - KT$ e $K_Y = F_Y - TK$ são operadores compactos. Logo T é um regularizador de $R + K$. Pelo Teorema 5.2.4, concluímos que $R + K$ é um operador de Fredholm. \square

5.2.2 Perturbação de operadores de Fredholm

Comecemos por ver que o produto de operadores de Fredholm é também um operador de Fredholm.

Proposição 5.2.9 ([12, Capítulo 3, Subcapítulo 5, Teorema 1]). *Sejam X, Y e Z espaços de Banach, $S \in \phi(X, Z)$ e $T \in \phi(Z, Y)$. Então $TS \in \phi(X, Y)$ e*

$$\text{ind}(TS) = \text{ind } T + \text{ind } S.$$

Demonstração. Suponhamos que $S \in \phi(X, Z)$ e $T \in \phi(Z, Y)$. Consideremos o subespaço de dimensão finita $Z_0 = \text{Im } S \cap \text{Ker } T$ em Z .

Temos que

$$\text{Ker}(TS) = \{x \in X : Sx \in \text{Ker } T\}$$

e a restrição de S em $\text{Ker } TS$ para Z_0 , $S_0 : \text{Ker}(TS) \rightarrow Z_0$, é sobrejetiva com $\text{Ker } S_0 = \text{Ker } S$. Sendo S_0 um operador definido num subespaço de dimensão finita, resulta que

$$\dim \text{Ker}(TS) = \dim \text{Ker } S + \dim Z_0 < \infty. \quad (5.2.1)$$

O operador S é um operador de Fredholm por hipótese e, por isso, existe um subespaço de dimensão finita Z^0 tal que

$$Z = (\text{Im } S + \text{Ker } T) \oplus Z^0. \quad (5.2.2)$$

Tendo em conta que $\text{Im}(TS) = T(\text{Im } S)$, é fácil verificar que

$$\text{Im}(TS) = T(\text{Im } S + \text{Ker } T)$$

e, por (5.2.2), concluímos que $\text{Im } T = \text{Im}(TS) + T(Z^0)$. Vejamos que esta soma algébrica é de facto uma soma direta. Seja $y \in Y$ tal que $y = TSx$ com $x \in X$ e simultaneamente $y = Tz$ com $z \in Z^0$. Então $Sx - z \in \text{Ker } T$ e portanto $z \in (\text{Im } S + \text{Ker } T) \cap Z^0$. Consequentemente, atendendo (5.2.2), $z = 0$ e por isso $y = 0$. Logo

$$\text{Im } T = \text{Im}(TS) \oplus T(Z^0). \quad (5.2.3)$$

Observando que $\text{Ker } T \cap Z^0 = \{0\}$, concluímos que o operador $T|_{Z^0}$ é injetivo. Assim, $\dim T(Z^0) = \dim Z^0 < \infty$. Por outro lado, existe um subespaço de dimensão finita N que é um complementar algébrico de $\text{Im } T$ em Y e atendendo a igualdade (5.2.3), temos que $Y = \text{Im}(TS) \oplus T(Z^0) \oplus N$. Logo

$$\text{codim Im}(TS) = \dim T(Z^0) + \dim N = \dim Z^0 + \text{codim Im } T < \infty. \quad (5.2.4)$$

Assim, concluímos que TS é um operador de Fredholm de acordo com a Proposição 5.2.1. Além disso, por (5.2.1) e (5.2.4)

$$\text{ind}(TS) = (\dim \text{Ker } S + \dim Z_0) - (\text{codim Im } T + \dim Z^0).$$

Denotemos por Z_1 um complementar algébrico, necessariamente de dimensão finita, de Z_0 em $\text{Ker } T$. Então

$$\dim \text{Ker } T = \dim Z_0 + \dim Z_1$$

e observando que $\text{Im } S + \text{Ker } T = \text{Im } S \oplus Z_1$, por (5.2.2) resulta que

$$\text{codim Im } S = \dim Z^0 + \dim Z_1.$$

Assim,

$$\text{ind}(TS) = \dim \text{Ker } S - \text{codim Im } S + \dim \text{Ker } T - \text{codim Im } T = \text{ind } S + \text{ind } T.$$

□

Vejamos agora que qualquer perturbação (aditiva) compacta de um operador de Fredholm é ainda um operador de Fredholm.

Proposição 5.2.10 ([23, Proposição VII.4.1]). *Sejam X e Y espaços de Banach. Se $T \in \phi(X, Y)$ e $K \in \mathcal{K}(X, Y)$, então $T + K \in \phi(X, Y)$.*

Demonstração. Sejam $T \in \phi(X, Y)$ e $K \in \mathcal{K}(X, Y)$. Pelo Corolário 5.2.5, existe um regularizador $R \in \mathcal{B}(Y, X)$ de T tal que

$$RT = I_X - F_X, \quad TR = I_Y - F_Y,$$

em que F_X e F_Y são operadores de característica finita em $\mathcal{B}(X)$ e $\mathcal{B}(Y)$, respetivamente.

Assim,

$$R(T + K) = I_X - F_X + RK = I_X - K_X, \quad (T + K)R = I_Y - F_Y + KR = I_Y - K_Y,$$

em que $K_X \in \mathcal{K}(X)$ e $K_Y \in \mathcal{K}(Y)$. Logo R é um regularizador de $T + K$ e de acordo com o Teorema 5.2.4 concluímos que $T + K \in \phi(X, Y)$. \square

Temos ainda a seguinte relação entre os índices dos operadores de Fredholm da Proposição anterior.

Corolário 5.2.11 ([10, Capítulo XV, Teorema 4.1]). *Consideremos X, Y espaços de Banach, $T \in \phi(X, Y)$ e $K \in \mathcal{K}(X, Y)$. Temos que*

$$\text{ind}(T + K) = \text{ind } T.$$

Demonstração. Sejam $T \in \phi(X, Y)$ e $K \in \mathcal{K}(X, Y)$. Para qualquer regularizador $R \in \mathcal{B}(Y, X)$ de T temos que

$$RT = I - \widehat{K}, \quad R(T + K) = I - \widehat{K} + RK = I - \widetilde{K},$$

onde \widehat{K} e \widetilde{K} são operadores compactos. Assim, atendendo à Proposição 5.2.9 e à Observação 5.1.2,

$$\begin{aligned} \text{ind } RT &= \text{ind } R + \text{ind } T = \text{ind}(I - \widehat{K}) = 0, \\ \text{ind } R(T + K) &= \text{ind } R + \text{ind}(T + K) = \text{ind}(I - \widetilde{K}) = 0, \end{aligned}$$

pelo que $\text{ind } T = -\text{ind } R = \text{ind}(T + K)$. \square

O recíproco da Proposição 5.2.9 não é, em geral, verdadeiro no contexto dos operadores contínuos. Isto é, dados $T \in \mathcal{B}(X, Z)$ e $S \in \mathcal{B}(Z, Y)$, se $ST \in \phi(X, Y)$, não é necessariamente verdadeiro que $T \in \phi(X, Z)$ ou que $S \in \phi(Z, Y)$. Por exemplo, suponhamos que $T \in \mathcal{B}(X)$ é invertível à esquerda e que a sua imagem não tem codimensão finita. Seja $T_e^{-1} \in \mathcal{B}(X)$ o inverso esquerdo de T . Ora, temos que $T_e^{-1}T = I \in \phi(X)$, com $T \notin \phi(X)$ e $T_e^{-1} \notin \phi(X)$.

No entanto, temos o seguinte resultado:

Proposição 5.2.12 ([23, Proposição VII.4.3]). *Sejam X, Y e Z espaços de Banach e suponhamos que $S \in \mathcal{B}(Z, Y)$ e $T \in \mathcal{B}(X, Z)$ são tais que $ST \in \phi(X, Y)$. Então $S \in \phi(Z, Y)$ se, e só se, $T \in \phi(X, Z)$.*

Demonstração. Suponhamos que $S \in \mathcal{B}(Z, Y)$ e $T \in \mathcal{B}(X, Z)$ são tais que $ST \in \phi(X, Y)$. Começemos por supor que $S \in \phi(Z, Y)$ e seja $R \in \mathcal{B}(Y, Z)$ um regularizador de S . Então

$$RS = I_Z - K_Z,$$

em que K_Z é um operador compacto em $\mathcal{B}(Z)$. Temos que

$$RST = T - K_Z T.$$

Pela Proposição 5.2.8, $R \in \phi(Y, Z)$ por ser regularizador de S e, por hipótese, $ST \in \phi(X, Y)$, então pela Proposição 5.2.9 concluímos que $RST \in \phi(X, Z)$. Como $K_Z T \in \mathcal{K}(X, Z)$, resulta da Proposição 5.2.10 que $T \in \phi(X, Z)$, como queríamos provar.

A demonstração da implicação contrária é análoga. \square

Tal como acontecia com as perturbações compactas de um operador de Fredholm, as perturbações contínuas com norma suficientemente pequena são ainda operadores de Fredholm com o mesmo índice, como podemos ver no próximo resultado.

Teorema 5.2.13 ([23, Teorema VII.4.4]). *Sejam X e Y espaços de Banach e $T \in \phi(X, Y)$. Então existe $\eta > 0$ tal que, para qualquer $A \in \mathcal{B}(X, Y)$ satisfazendo $\|A\| < \eta$, se tem*

$$(i) \quad T + A \in \phi(X, Y);$$

$$(ii) \quad \text{ind}(T + A) = \text{ind } T.$$

Demonstração. Seja $R \in \mathcal{B}(Y, X)$ um regularizador de $T \in \phi(X, Y)$ e consideremos $\eta = \|R\|^{-1}$. Seja $A \in \mathcal{B}(X, Y)$ tal que $\|A\| < \eta$. Temos que

$$R(T + A) = I_X - K_X + RA, \quad (T + A)R = I_Y - K_Y + AR,$$

com $K_X \in \mathcal{K}(X)$ e $K_Y \in \mathcal{K}(Y)$.

Ora, temos que $\|RA\| < 1$ e $\|AR\| < 1$. Logo pelo Teorema 3.1.9 os operadores $I_X + RA$ e $I_Y + AR$ são invertíveis em $\mathcal{B}(X)$ e $\mathcal{B}(Y)$, respetivamente. Assim

$$(I_X + RA)^{-1} R(T + A) = I_X - (I_X + RA)^{-1} K_X = I_X - \widetilde{K}_X, \quad (5.2.5)$$

$$(T + A)R(I_Y + AR)^{-1} = I_Y - K_Y(I_Y + AR)^{-1} = I_Y - \widetilde{K}_Y,$$

com $\widetilde{K}_X \in \mathcal{K}(X)$ e $\widetilde{K}_Y \in \mathcal{K}(Y)$. Temos então que $(I_X + RA)^{-1} R$ e $R(I_Y + AR)^{-1}$ são regularizadores esquerdo e direito do operador $T + A$, respetivamente.

Atendendo ao Lema 5.2.3 e ao Teorema 5.2.4, concluímos que $T + A \in \phi(X, Y)$, o que prova (i).

Sendo R um operador de Fredholm pela Proposição 5.2.8 e aplicando a Proposição 5.2.9 e a Observação 5.1.2, obtemos

$$\text{ind}(RT) = \text{ind } R + \text{ind } T = \text{ind}(I_X - K_X) = 0.$$

Logo $\text{ind } R = -\text{ind } T$ e de (5.2.5) vem que

$$\text{ind}(I_X + RA)^{-1} - \text{ind } T + \text{ind}(T + A) = 0.$$

Além disso, temos que $\text{ind}(I_X + RA)^{-1} = 0$. Logo

$$\text{ind}(T + A) = \text{ind } T,$$

o que prova (ii). \square

A propriedade (i) do Teorema 5.2.13 implica que o conjunto $\phi(X, Y)$ é aberto em $\mathcal{B}(X, Y)$ e a propriedade (ii) é normalmente designada por estabilidade do índice de Fredholm para pequenas perturbações.

5.3 Álgebra de Calkin

Definição 5.3.1. Seja X um espaço de Banach. Como já vimos, o conjunto $\mathcal{K}(X)$ dos operadores compactos é um ideal fechado de $\mathcal{B}(X)$ (cf. Teoremas 4.2.6 e 4.2.7) e por isso, atendendo ao Teorema 3.2.2, $\mathcal{B}(X)/\mathcal{K}(X)$, munido da norma quociente, é uma álgebra de Banach, a *álgebra de Calkin*.

Vamos designar por $Q : \mathcal{B}(X) \rightarrow \mathcal{B}(X)/\mathcal{K}(X)$ a aplicação quociente que a cada operador $T \in \mathcal{B}(X)$ faz corresponder a classe de equivalência T^π de $\mathcal{B}(X)/\mathcal{K}(X)$. Como

$$Q(ST) = (ST)^\pi = S^\pi T^\pi = Q(S)Q(T),$$

para quaisquer $S, T \in \mathcal{B}(X)$, então Q é um homomorfismo.

Podemos agora caracterizar os operadores de $\mathcal{B}(X)$ que são operadores de Fredholm:

Teorema 5.3.2 ([23, Teorema VII.5.1]). *Sejam X um espaço de Banach e $T \in \mathcal{B}(X)$. Então $T \in \phi(X)$ se, e só se, $Q(T)$ é invertível em $\mathcal{B}(X)/\mathcal{K}(X)$.*

Demonstração. Suponhamos que $T \in \phi(X)$. Então pelo Teorema 5.2.4, T admite um regularizador $R \in \mathcal{B}(X)$. Logo

$$RT = I - K_1, \quad TR = I - K_2,$$

em que $K_1, K_2 \in \mathcal{K}(X)$. Aplicando a ambos os membros das igualdades anteriores a aplicação quociente Q e atendendo a que Q é um homomorfismo, temos que

$$Q(RT) = Q(R)Q(T) = Q(I), \quad Q(TR) = Q(T)Q(R) = Q(I).$$

Como $Q(I)$ é a identidade de $\mathcal{B}(X)/\mathcal{K}(X)$, então $Q(T)$ é invertível com inverso $Q(R)$.

Suponhamos agora que $Q(T)$ é invertível em $\mathcal{B}(X)/\mathcal{K}(X)$. Então existe $Q(R) \in \mathcal{B}(X)/\mathcal{K}(X)$ tal que

$$Q(RT) = Q(R)Q(T) = Q(I), \quad Q(TR) = Q(T)Q(R) = Q(I).$$

Temos então que $RT - I$ e $TR - I$ são operadores compactos, logo R é um regularizador de T e, por isso, vem que $T \in \phi(X)$ segundo o Teorema 5.2.4. \square

Definição 5.3.3. Sejam X um espaço de Banach e $T \in \mathcal{B}(X)$. Designa-se por *espectro de Fredholm de T* o conjunto

$$\sigma_{\phi}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \notin \phi(X)\}.$$

Uma vez que qualquer operador invertível é um operador de Fredholm, temos que $\sigma_{\phi}(T) \subseteq \sigma(T)$, onde $\sigma(T)$ representa o espectro de T em $\mathcal{B}(X)$ (cf. Definição 3.1.3).

Proposição 5.3.4 ([23, Proposição VII.5.3]). *Sejam X um espaço de Banach complexo e $T \in \mathcal{B}(X)$.*

- (i) *Se X tem dimensão finita, então o espectro de Fredholm é vazio.*
- (ii) *Se X tem dimensão infinita, então o espectro de Fredholm é não vazio e compacto.*

Demonstração. Seja Q a aplicação quociente de $\mathcal{B}(X)$ em $\mathcal{B}(X)/\mathcal{K}(X)$ e denotemos $Q(T)$ por T^{π} . Designemos por $\sigma(T^{\pi})$ o espectro de T^{π} na álgebra de Calkin $\mathcal{B}(X)/\mathcal{K}(X)$. Então pelo Teorema 5.3.2,

$$\sigma_{\phi}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T^{\pi} - \lambda I^{\pi} \text{ não é invertível}\} = \sigma(T^{\pi}).$$

Se X tem dimensão finita, então, para qualquer $\lambda \in \mathbb{C}$, $T - \lambda I$ é um operador de Fredholm e, portanto, neste caso $\sigma_{\phi}(T) = \emptyset$.

Se X tem dimensão infinita, então atendendo ao Teorema 3.1.8, concluímos que $\sigma(T^{\pi})$ é um conjunto compacto e não vazio. Consequentemente, $\sigma_{\phi}(T)$ é compacto e não vazio. □

OPERADORES DISCRETOS DE WIENER-HOPF

O objetivo deste capítulo é estudar propriedades de Fredholm de operadores discretos de Wiener-Hopf no espaço de Banach $\ell^p(\mathbb{Z}_+)$, $1 < p < \infty$. Vamos utilizar o Princípio Local de Gohberg-Krupnik para chegar ao resultado principal deste capítulo, o Teorema 6.3.17, no qual se obtém uma condição (algebricamente mais simples) necessária e suficiente para estes operadores serem de Fredholm.

Vamos representar por $\mathbb{T} = \{t \in \mathbb{C} : |t| = 1\}$ o círculo unitário complexo com a orientação natural anti-horário.

6.1 Funções de variação limitada e funções contínuas por partes

Definição 6.1.1. Denotamos por $\mathcal{P}([a, b])$ a família de todas as partições do intervalo $[a, b]$, isto é, todos os conjuntos finitos $P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$, com $n \in \mathbb{N}$, tal que

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b.$$

Definição 6.1.2. Consideremos uma partição $P = \{\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n\} \in \mathcal{P}([0, 2\pi])$ e uma função $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$. O número real não negativo

$$\text{Var}(f, P) = \text{Var}(f, P; [0, 2\pi]) := \sum_{j=0}^{n-1} |f(\theta_{j+1}) - f(\theta_j)|$$

designa-se *variação de f em $[0, 2\pi]$ em relação a P* .

Quando tomamos o supremo sobre todas as partições de $[0, 2\pi]$,

$$\text{Var}(f) = \text{Var}(f; [0, 2\pi]) := \sup \{\text{Var}(f, P; [0, 2\pi]) : P \in \mathcal{P}([0, 2\pi])\}$$

designa-se *variação total de f em $[0, 2\pi]$* .

No caso em que $\text{Var}(f) < \infty$, dizemos que f é uma *função de variação limitada* e escrevemos $f \in BV_{[0, 2\pi]}$.

Proposição 6.1.3 ([1, Proposição 1.3]). *Sejam $f, g : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$.*

(i) *A variação total é subaditiva, isto é,*

$$\text{Var}(f + g) \leq \text{Var}(f) + \text{Var}(g).$$

(ii) *A variação total é homogênea, isto é, para todo $\mu \in \mathbb{C}$,*

$$\text{Var}(\mu f) = |\mu| \text{Var}(f).$$

(iii) *Para $0 \leq \theta_1 < \theta_2 \leq 2\pi$,*

$$|f(\theta_1) - f(\theta_2)| \leq \text{Var}(f; [\theta_1, \theta_2]).$$

(iv) *Se $f \in BV_{[0, 2\pi]}$, então f é limitada com*

$$\|f\|_{L^\infty([0, 2\pi])} \leq |f(0)| + \text{Var}(f).$$

(v) *Para quaisquer $P, Q \in \mathcal{P}([0, 2\pi])$ tais que $P \subseteq Q$, temos que*

$$\text{Var}(f, P) \leq \text{Var}(f, Q).$$

(vi) *Para $0 < \theta < 2\pi$,*

$$\text{Var}(f; [0, 2\pi]) = \text{Var}(f; [0, \theta]) + \text{Var}(f; [\theta, 2\pi]).$$

(vii) *Suponhamos que $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função monótona. Então $f \in BV_{[0, 2\pi]}$ com*

$$\text{Var}(f) = |f(2\pi) - f(0)|.$$

Demonstração. Sejam $f, g : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $\mu \in \mathbb{C}$ e $P = \{\theta_0, \dots, \theta_n\} \in \mathcal{P}([0, 2\pi])$. Temos que

$$\begin{aligned} \text{Var}(f + g, P) &= \sum_{j=0}^{n-1} |(f + g)(\theta_{j+1}) - (f + g)(\theta_j)| \\ &\leq \sum_{j=0}^{n-1} |f(\theta_{j+1}) - f(\theta_j)| + \sum_{j=0}^{n-1} |g(\theta_{j+1}) - g(\theta_j)| = \text{Var}(f, P) + \text{Var}(g, P) \end{aligned}$$

e

$$\text{Var}(\mu f, P) = \sum_{j=0}^{n-1} |(\mu f)(\theta_{j+1}) - (\mu f)(\theta_j)| = |\mu| \sum_{j=0}^{n-1} |f(\theta_{j+1}) - f(\theta_j)| = |\mu| \text{Var}(f, P),$$

o que prova as alíneas (i) e (ii).

Para provar (iii) é suficiente considerar a partição $P_1 = \{\theta_1, \theta_2\} \in \mathcal{P}([\theta_1, \theta_2])$ e observar que

$$|f(\theta_2) - f(\theta_1)| = \text{Var}(f, P_1; [\theta_1, \theta_2]) \leq \text{Var}(f; [\theta_1, \theta_2]).$$

Consideremos agora a partição $P_\theta = \{0, \theta, 2\pi\} \in \mathcal{P}([0, 2\pi])$. Temos que

$$|f(\theta) - f(0)| \leq |f(2\pi) - f(\theta)| + |f(\theta) - f(0)| = \text{Var}(f, P_\theta; [0, 2\pi])$$

e, conseqüentemente,

$$|f(\theta)| \leq |f(0)| + \text{Var}(f, P_\theta; [0, 2\pi]) \leq |f(0)| + \text{Var}(f; [0, 2\pi]).$$

Deste modo,

$$\|f\|_{L^\infty([0, 2\pi])} = \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} |f(\theta)| \leq |f(0)| + \text{Var}(f; [0, 2\pi]),$$

o que prova (iv).

Provemos agora (v). Sejam $P, Q \in \mathcal{P}([0, 2\pi])$ tais que $P \subseteq Q$. Consideremos $m, n \in \mathbb{N}$ tais que $m \leq n$ e suponhamos que $P = \{\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_m\}$ e $Q = \{\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ de tal forma que, para cada $j \in \{0, 1, \dots, m\}$, $\theta_j = \lambda_i$ para certo $i \in \{0, 1, \dots, n\}$. Temos que

$$\text{Var}(f, P) = \sum_{j=0}^{m-1} |f(\theta_{j+1}) - f(\theta_j)| \leq \sum_{j=0}^{n-1} |f(\lambda_{j+1}) - f(\lambda_j)| = \text{Var}(f, Q).$$

Sejam $0 < \theta < 2\pi$, $P = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n\} \in \mathcal{P}([0, \theta])$ e $Q = \{\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m\} \in \mathcal{P}([\theta, 2\pi])$. Então $R = P \cup Q \in \mathcal{P}([0, 2\pi])$. Assim,

$$\begin{aligned} \text{Var}(f, R; [0, 2\pi]) &= \sum_{j=0}^{n-1} |f(\alpha_{j+1}) - f(\alpha_j)| + \sum_{j=0}^{m-1} |f(\beta_{j+1}) - f(\beta_j)| \\ &= \text{Var}(f, P; [0, \theta]) + \text{Var}(f, Q; [\theta, 2\pi]). \end{aligned}$$

Logo $\text{Var}(f; [0, 2\pi]) = \text{Var}(f; [0, \theta]) + \text{Var}(f; [\theta, 2\pi])$, ficando provado (vi).

Resta-nos provar (vii). Para tal, consideremos $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função crescente e seja $P = \{\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n\} \in \mathcal{P}([0, 2\pi])$ tal que $0 = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_n = 2\pi$. Então

$$\text{Var}(f, P) = \sum_{j=0}^{n-1} |f(\theta_{j+1}) - f(\theta_j)| = \sum_{j=0}^{n-1} [f(\theta_{j+1}) - f(\theta_j)] = f(2\pi) - f(0).$$

Caso f seja decrescente, obtemos $\text{Var}(f, P) = f(0) - f(2\pi)$. Logo, se f é uma função monótona, então f é de variação limitada com

$$\text{Var}(f) = |f(2\pi) - f(0)|.$$

□

Apesar de funções de variação limitada não serem necessariamente monótonas, existe uma relação entre funções de variação limitada e monotonicidade que é apresentada no próximo resultado, geralmente designado por Teorema de decomposição de Jordan.

Teorema 6.1.4 (Teorema de decomposição de Jordan, [1, Teorema 1.5]). *Uma função $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ é de variação limitada se, e só se, pode ser representada na forma*

$$f = p_f - n_f,$$

onde p_f e n_f são funções monótonas crescentes.

Demonstração. Seja $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$. Suponhamos que existem funções monótonas crescentes p_f, n_f tais que $f = p_f - n_f$. Pela Proposição 6.1.3, a diferença de funções monótonas é de variação limitada e, por isso, $f \in BV_{[0, 2\pi]}$.

Suponhamos agora que $f \in BV_{[0, 2\pi]}$. Consideremos a função $V_f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$V_f(\theta) = \text{Var}(f; [0, \theta]), \quad \text{com } \theta \in [0, 2\pi].$$

Tomemos $p_f := V_f$. Temos que p_f é crescente com $V_f(0) = 0$ e $V_f(2\pi) = \text{Var}(f; [0, 2\pi])$. Portanto basta provar que a função $n_f := V_f - f$ também é crescente. Pela Proposição 6.1.3, para $0 \leq \theta_1 < \theta_2 \leq 2\pi$ temos que

$$f(\theta_2) - f(\theta_1) \leq \text{Var}(f; [\theta_1, \theta_2]) = V_f(\theta_2) - V_f(\theta_1)$$

e, portanto,

$$n_f(\theta_2) - n_f(\theta_1) \geq 0.$$

Logo n_f também é crescente e $f = p_f - n_f$. □

Definição 6.1.5. A função $a : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ é de variação limitada se a função $\tilde{a} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $\theta \mapsto a(e^{i\theta})$, é de variação limitada, isto é,

$$\text{Var}(a) := \sup \sum_{j=0}^{n-1} |a(e^{i\theta_{j+1}}) - a(e^{i\theta_j})| < \infty,$$

o supremo sobre todas as partições $0 = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_n = 2\pi$. Neste contexto, escrevemos $a \in BV$.

Definição 6.1.6. Representamos por PC a álgebra fechada de todas as funções, de \mathbb{T} em \mathbb{C} , limitadas e contínuas por partes. Assim, $a \in PC$ se, e só se, a é limitada e, para todo $t \in \mathbb{T}$, os limites laterais

$$a(t \pm 0) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0 \pm 0} a(te^{i\epsilon})$$

existem.

Teorema 6.1.7. *Toda a função de variação limitada em \mathbb{T} é limitada e contínua por partes, isto é,*

$$BV \subseteq PC.$$

Demonstração. Seja $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $f \in BV$. Sendo f uma função complexa, então podemos escrever $f = f_R + if_I$, onde $f_R : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ é a parte real de f e $f_I : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ é a sua parte imaginária.

Consideremos uma partição $\{\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n\}$ de $[0, 2\pi]$. Como para $j = 0, \dots, n-1$,

$$|f(e^{i\theta_{j+1}}) - f(e^{i\theta_j})| \leq |f_R(e^{i\theta_{j+1}}) - f_R(e^{i\theta_j})| + |f_I(e^{i\theta_{j+1}}) - f_I(e^{i\theta_j})|,$$

resulta que

$$|f_k(e^{i\theta_{j+1}}) - f_k(e^{i\theta_j})| \leq |f(e^{i\theta_{j+1}}) - f(e^{i\theta_j})|, \quad k = R, I.$$

Assim, decorre imediatamente da definição que f é uma função complexa de variação limitada se, e só se, f_R e f_I são funções reais de variação limitada.

Consideremos as funções $\tilde{f}_k : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$, com $k = R, I$. Segundo o Teorema 6.1.4, existem funções monótonas p_R, n_R, p_I, n_I tais que

$$\tilde{f}_R = p_R - n_R, \quad \tilde{f}_I = p_I - n_I,$$

pelo que

$$\tilde{f} = (p_R - n_R) + i(p_I - n_I), \tag{6.1.1}$$

onde $\tilde{f} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$.

Ora, uma função monótona tem limites laterais finitos em todos os pontos do seu domínio (cf. [20, Teorema 4.29]) e por (6.1.1) concluímos que \tilde{f} tem limites laterais finitos. Atendendo a que $\tilde{f} \in L^\infty([0, 2\pi])$ pela Proposição 6.1.3, então $f = \tilde{f} \circ e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$, pertence a PC . \square

6.2 Matrizes infinitas e multiplicadores

Daqui adiante denotamos $L^\infty(\mathbb{T})$ simplesmente por L^∞ .

6.2.1 Matrizes de Laurent

Definição 6.2.1. Dada uma sucessão $\{a_n\}_{n=-\infty}^\infty$ de números complexos, consideremos a matriz infinita

$$(a_{j-k})_{j,k=-\infty}^\infty = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} & \dots \\ \dots & a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \dots \\ \dots & a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} & \dots \\ \dots & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right). \tag{6.2.1}$$

As matrizes da forma (6.2.1), que são constantes ao longo das diagonais, designam-se *matrizes de Laurent*.

É sempre possível representar matricialmente um operador limitado no espaço munido de produto interno $\ell^2(\mathbb{Z})$. De facto, considerando $\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ a base ortonormada de $\ell^2(\mathbb{Z})$ constituída pelos vetores e_n cuja n -ésima posição é 1 e as restantes são nulas, se tivermos $A \in \mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{Z}))$, então podemos associar a matriz infinita $(a_{j,k})_{j,k \in \mathbb{Z}}$ dada por

$$a_{j,k} = (Ae_k, e_j).$$

No entanto, nem toda a matriz infinita define um operador limitado em $\ell^2(\mathbb{Z})$. Vejamos portanto em que circunstâncias é que a matriz (6.2.1) gera um operador limitado em $\ell^2(\mathbb{Z})$.

Teorema 6.2.2 ([8, Teorema 1.1]). *A matriz de Laurent (6.2.1) gera um operador limitado em $\ell^2(\mathbb{Z})$ se, e só se, existe uma função $a \in L^\infty$ tal que $\{a_n\}_{n=-\infty}^\infty$ é a sucessão de coeficientes de Fourier de a :*

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a(e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Além disso, a norma do operador gerado por (6.2.1) é igual a $\|a\|_{L^\infty}$.

Demonstração. Por uma questão de simplificação vamos denotar a matriz (6.2.1) por A , $L^2(\mathbb{T})$ por L^2 e vamos omitir o espaço das normas dos operadores intervenientes.

Para $a \in L^\infty$, consideremos o operador de multiplicação

$$\begin{aligned} M(a) : L^2 &\rightarrow L^2 \\ f &\mapsto af. \end{aligned}$$

Seja $f \in L^2$. Temos que $\|M(a)f\|_{L^2} \leq \|a\|_{L^\infty} \|f\|_{L^2}$, donde se conclui que $M(a)$ é um operador limitado e que

$$\|M(a)\| \leq \|a\|_{L^\infty}.$$

Vejamos que efetivamente $\|M(a)\| = \|a\|_{L^\infty}$. Fixemos $\epsilon > 0$ e consideremos o conjunto

$$C = \{t \in \mathbb{T} : |a(t)| \geq \|a\|_{L^\infty} - \epsilon\}.$$

Seja χ_C a função característica de C . Temos que $\chi_C \in L^2$ com $\|\chi_C\|_{L^2}^2 = m(C)$, sendo m a medida de Lebesgue em \mathbb{T} . Além disso,

$$\|M(a)\chi_C\|_{L^2}^2 \geq m(C) (\|a\|_{L^\infty} - \epsilon)^2.$$

Portanto,

$$\|M(a)\| \geq \|a\|_{L^\infty} - \epsilon.$$

Como esta desigualdade é verdadeira para qualquer $\epsilon > 0$, concluímos que

$$\|M(a)\| \geq \|a\|_{L^\infty},$$

pelo que $\|M(a)\| = \|a\|_{L^\infty}$.

Provemos agora que o operador $M(a)$ não é limitado se $a \notin L^\infty$. Suponhamos que $a \notin L^\infty$. Então a medida do conjunto $\{t \in \mathbb{T} : |a(t)| \geq M\}$ é não nula para todo $M > 0$. Além disso, para cada $M > 0$ podemos escolher $N > M$ tal que a medida do conjunto $D = \{t \in \mathbb{T} : N \leq |a(t)| \leq N+1\}$ é finita e não nula.

Seja χ_D a função característica do conjunto D . Temos que

$$\|M(a)\chi_D\|_{L^2}^2 \geq m(D)N^2$$

e, portanto,

$$\frac{\|M(a)\chi_D\|_{L^2}}{\|\chi_D\|_{L^2}} \geq N \geq M.$$

Como esta desigualdade é verdadeira para todo $M > 0$, concluímos que o operador $M(a)$ não é limitado.

Assim, o operador $M(a)$ é limitado se, e só se, $a \in L^\infty$ com $\|M(a)\| = \|a\|_{L^\infty}$.

Seja $\phi : L^2 \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$ o operador que a cada função faz corresponder a sucessão dos seus coeficientes de Fourier, isto é, para qualquer $f \in L^2$,

$$\phi(f) = \{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}}.$$

O operador ϕ é bijetivo e pela identidade de Parseval (cf. [23, Teorema 3.47]),

$$\|f\|_{L^2}^2 = \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^2 d\theta = 2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} |f_n|^2,$$

onde $\{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ é a sucessão constituída pelos coeficientes de Fourier de f . Logo

$$\|f\|_{L^2} = \sqrt{2\pi} \|\{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}}\|_{\ell^2(\mathbb{Z})} = \sqrt{2\pi} \|\phi(f)\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}.$$

Consideremos o produto interno definido em L^2 dado por

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \overline{g(e^{i\theta})} d\theta,$$

com $f, g \in L^2$. Seja $\{\tilde{e}_n\}_{n \in \mathbb{Z}} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{in\theta} \right\}_{n \in \mathbb{Z}}$ a base ortonormada de L^2 . Observemos que para cada $k, j \in \mathbb{Z}$ temos que

$$\langle M(a)\tilde{e}_k, \tilde{e}_j \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a(e^{i\theta}) e^{-i(j-k)\theta} d\theta = a_{j-k},$$

sendo a_{j-k} o $(j-k)$ -ésimo coeficiente de Fourier da função a . Logo as matrizes de Laurent são as representações matriciais dos operadores de multiplicação em L^2 em relação à base $\{\tilde{e}_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$, ou seja,

$$A = \phi M(a) \phi^{-1}. \tag{6.2.2}$$

Assim, concluímos que A define um operador limitado em $\ell^2(\mathbb{Z})$ se, e só se, $a \in L^\infty$.

Além disso, temos que

$$\|A\| = \|a\|_{L^\infty}.$$

□

Denotamos a matriz (6.2.1), bem como o operador limitado gerado por esta matriz em $\ell^2(\mathbb{Z})$, por $L(a)$. A função a é, neste contexto, geralmente referida como o *símbolo* da matriz ou do operador de Laurent $L(a)$.

Observamos que pela igualdade (6.2.2), se pode concluir que

$$L(ab) = L(a)L(b), \quad \forall a, b \in L^\infty.$$

6.2.2 Matrizes de Toeplitz

Vamos agora considerar uma submatriz da matriz de Laurent, a matriz de Toeplitz, e vamos ver em que condições é que esta submatriz gera também um operador limitado.

Definição 6.2.3. A *matriz de Toeplitz* definida pela sucessão $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ de número complexos é a matriz infinita

$$(a_{j-k})_{j,k=0}^{\infty} = \begin{pmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \cdots \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & \cdots \\ a_2 & a_1 & a_0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}. \quad (6.2.3)$$

Como seria de esperar, a matriz (6.2.3) gera um operador limitado em $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$ quando as suas entradas são coeficientes de Fourier de uma função limitada em \mathbb{T} :

Teorema 6.2.4 ([8, Teorema 1.9]). *A matriz de Toeplitz (6.2.3) gera um operador limitado em $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$ se, e só se, os números $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ são os coeficientes de Fourier de alguma função $a \in L^\infty$. Além disso, a norma do operador gerado por (6.2.3) é igual a $\|a\|_{L^\infty}$.*

Demonstração. Por uma questão de simplificação, vamos omitir o espaço das normas dos operadores intervenientes e vamos denotar por B a matriz (6.2.3).

A matriz B é a submatriz inferior direita da matriz $L(a)$ (6.2.1) e por isso podemos pensar na matriz B como sendo a “compressão” da matriz $L(a)$ ao espaço $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$. De facto, podemos identificar $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$ como sendo um subespaço de $\ell^2(\mathbb{Z})$ onde as sucessões $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ são tais que $x_n = 0$ para $n < 0$. Seja P a projeção ortogonal sobrejetiva de $\ell^2(\mathbb{Z})$ sobre $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$ definida por

$$P(\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots) = (\dots, 0, 0, x_0, x_1, x_2, \dots).$$

Temos que $\|P\| = 1$ e $B = PL(a)|_{\text{Im } P}$. E, se $a \in L^\infty$, o Teorema 6.2.2 garante que

$$\|B\| = \|PL(a)|_{\text{Im } P}\| \leq \|L(a)\| = \|a\|_{L^\infty}. \quad (6.2.4)$$

Para cada $n \in \mathbb{Z}$, denotemos por S_n a projeção em $\ell^2(\mathbb{Z})$ dada por

$$S_n : \{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \mapsto (\dots, 0, 0, x_{-n}, \dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots).$$

Consideremos $\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ a base de $\ell^2(\mathbb{Z})$ tal que, para cada $n \in \mathbb{Z}$, as entradas do vetor e_n são nulas exceto na entrada n que tem valor 1. Então a representação matricial em relação à

base $\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ do operador $S_n L(a) S_n|_{\text{Im } S_n}$ é a matriz $L(a)$ eliminando as colunas e as linhas indexadas por um número em $\{-(n+1), -(n+2), \dots\}$ e, portanto, a representação matricial é precisamente a matriz B . Temos então que

$$\|B\| = \|S_n L(a) S_n\|. \quad (6.2.5)$$

Por outro lado, $S_n \rightarrow I$ pontualmente em $\ell^2(\mathbb{Z})$, pelo que $S_n L(a) S_n \rightarrow L(a)$. Assim deduzimos pelo Teorema 2.2.13 que

$$\|L(a)\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|S_n L(a) S_n\|.$$

Atendendo a (6.2.5) e ao Teorema 6.2.2 conclui-se que

$$\|a\|_{L^\infty} = \|L(a)\| \leq \|B\|. \quad (6.2.6)$$

Consequentemente, o operador gerado pela matriz B é limitado se, e só se, $a \in L^\infty$ e neste caso $\|B\| = \|a\|_{L^\infty}$, por (6.2.4) e (6.2.6). \square

A função $a \in L^\infty$ dada pelo Teorema 6.2.4 chama-se *símbolo* da matriz de Toeplitz (6.2.3) e do operador de Toeplitz induzido pela matriz em $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$. A matriz (6.2.3) bem como o operador gerado por esta matriz em $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$ denotam-se por $T(a)$.

O operador de Toeplitz $T(a)$ é também designado por *operador discreto de Wiener-Hopf com símbolo a* .

6.2.3 Álgebra de Banach dos multiplicadores

Definição 6.2.5. Consideremos $1 < p < \infty$. Chamamos *conjunto dos multiplicadores* e denotamos por M_p o conjunto de todas as funções $a \in L^\infty$ para as quais existe uma constante $C_{p,a} < \infty$ tal que

$$\|L(a)x\|_{\ell^p(\mathbb{Z})} \leq C_{p,a} \|x\|_{\ell^p(\mathbb{Z})}, \quad \forall x \in \ell^2(\mathbb{Z}) \cap \ell^p(\mathbb{Z}).$$

Consideremos \mathcal{S} o conjunto das sucessões com número finito de termos não nulos. Pelo Lema 2.3.3, \mathcal{S} é um conjunto denso em $\ell^p(\mathbb{Z})$ e, uma vez que o conjunto $\ell^2(\mathbb{Z}) \cap \ell^p(\mathbb{Z})$ contém \mathcal{S} , concluímos que $\ell^2(\mathbb{Z}) \cap \ell^p(\mathbb{Z})$ é um conjunto denso em $\ell^p(\mathbb{Z})$. Assim, o Teorema 2.2.10 garante que podemos estender um operador limitado definido em $\ell^2(\mathbb{Z}) \cap \ell^p(\mathbb{Z})$ ao espaço $\ell^p(\mathbb{Z})$.

Por outro lado, como já vimos na prova do Teorema 6.2.4, o espaço $\ell^p(\mathbb{Z}_+)$ pode ser visto como um subespaço de $\ell^p(\mathbb{Z})$ onde todas as sucessões $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ são tais que $x_n = 0$ para $n < 0$. Considerando P a projeção sobrejetiva de $\ell^p(\mathbb{Z})$ em $\ell^p(\mathbb{Z}_+)$, temos que $T(a) = PL(a)|_{\text{Im } P}$ e portanto $\|T(a)\| \leq \|L(a)\|$.

Deste modo, se $a \in M_p$, então $L(a)$ e $T(a)$ induzem operadores limitados em $\ell^p(\mathbb{Z})$ e $\ell^p(\mathbb{Z}_+)$, respetivamente.

Define-se uma norma em M_p dada por

$$\|a\|_{M_p} := \|L(a)\|_{\mathcal{B}(\ell^p(\mathbb{Z}))}.$$

Lema 6.2.6 ([11, Subcapítulo 5.2, Lemas 2.1, 2.2],[7, Secção 2.1, Subsecção 2.5]). *Para $a \in L^\infty$, definimos $\bar{a}(t) = \overline{a(t)}$. Sejam $1 < p, q < \infty$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*

(i) $a \in M_2$ com

$$\|a\|_{M_2} = \|a\|_{L^\infty}.$$

(ii) Se $a \in M_p$, então $\bar{a} \in M_q$ e o operador transposto $L(a)' \in \mathcal{B}(\ell^q(\mathbb{Z}))$ coincide com $L(\bar{a})$.

(iii) $M_p = M_q$. Se $a \in M_p$, então $\bar{a} \in M_p$ e

$$\|a\|_{M_p} = \|\bar{a}\|_{M_p} = \|a\|_{M_q} = \|\bar{a}\|_{M_q}.$$

(iv) M_p está continuamente mergulhado em L^∞ , isto é,

$$\|a\|_{L^\infty} \leq \|a\|_{M_p}, \quad \forall a \in M_p.$$

Demonstração. (i) É imediato pelo Teorema 6.2.2.

(ii) Suponhamos que $a \in M_p$. É sabido que o dual de $\ell^p(\mathbb{Z})$, $(\ell^p(\mathbb{Z}))'$, é isometricamente isomorfo a $\ell^q(\mathbb{Z})$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (cf. [23, Teorema 5.5]). Uma vez que $L(a) \in \mathcal{B}(\ell^p(\mathbb{Z}))$, então o operador transposto $L(a)' \in \mathcal{B}(\ell^q(\mathbb{Z}))$.

Por outro lado, por definição de multiplicador, $L(a)$ é limitado em $\ell^2(\mathbb{Z}) \cap \ell^p(\mathbb{Z}) \subseteq \ell^2(\mathbb{Z})$. Consideremos o produto interno definido em $\ell^2(\mathbb{Z})$ dado por

$$\langle \phi, \psi \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \phi_n \bar{\psi}_n, \quad \forall \phi, \psi \in \ell^2(\mathbb{Z}).$$

Seja $\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ a base canónica dos espaços $\ell^p(\mathbb{Z})$, $1 < p < \infty$, tais que, para $n \in \mathbb{Z}$, o vetor e_n tem todas as entradas nulas excepto na entrada n que tem valor 1. Para cada $j, k \in \mathbb{Z}$ com $j \neq k$, temos que

$$\langle e_j, L(a)e_k \rangle = \bar{a}_{k-j} = \langle L(\bar{a})e_j, e_k \rangle.$$

Consequentemente, $L(a)' = L(\bar{a})$ em $\ell^2(\mathbb{Z}) \cap \ell^q(\mathbb{Z})$. Como $L(a)' \in \mathcal{B}(\ell^q(\mathbb{Z}))$ e como podemos estender $L(\bar{a})$ a $\ell^q(\mathbb{Z})$ pelo Teorema 2.2.10, então $L(\bar{a})$ também coincide com $L(a)'$ em $\ell^q(\mathbb{Z})$ e portanto $\bar{a} \in M_q$.

(iii) Suponhamos que $a \in M_p$ e seja J o operador em $\ell^p(\mathbb{Z})$ dado por

$$J\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}} = \{\bar{x}_{-n}\}_{n \in \mathbb{Z}}.$$

Então para $\phi = \{\phi_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ uma sucessão de suporte finito, temos que

$$(JL(a)J)(\phi) = J\left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j-k} \bar{\phi}_{-k}\right)_{j=-\infty}^{+\infty} = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \bar{a}_{k-j} \phi_k\right)_{j=-\infty}^{+\infty} = L(\bar{a})\phi.$$

Logo $JL(a)J = L(\bar{a})$ e como J é uma isometria sobrejetiva, então $\bar{a} \in M_p$ e $\|a\|_{M_p} = \|\bar{a}\|_{M_p}$.

Pela alínea (ii) conclui-se que $a \in M_q$ e portanto $M_p \subseteq M_q$. Analogamente se prova que $M_q \subseteq M_p$, obtendo-se a igualdade destes conjuntos.

Além disso, atendendo a que $\|\bar{a}\|_{M_p} = \|a\|_{M_q}$ por (ii), temos que

$$\|a\|_{M_p} = \|\bar{a}\|_{M_p} = \|a\|_{M_q} = \|\bar{a}\|_{M_q}.$$

(iv) Em virtude da alínea (iii), podemos assumir que $1 < p \leq 2$ sem perder a generalidade.

Suponhamos que $p \leq r \leq 2$. Pelo Teorema 2.3.4,

$$\|L(a)\|_{\mathcal{B}(\ell^r(\mathbb{Z}))} \leq \|L(a)\|_{\mathcal{B}(\ell^p(\mathbb{Z}))}^\delta \|L(a)\|_{\mathcal{B}(\ell^q(\mathbb{Z}))}^{1-\delta},$$

onde $\frac{1}{r} = \frac{\delta}{p} + \frac{1-\delta}{q}$ e $0 \leq \delta \leq 1$ e, pela alínea (iii), vem que

$$\|L(a)\|_{\mathcal{B}(\ell^r(\mathbb{Z}))} \leq \|L(a)\|_{\mathcal{B}(\ell^p(\mathbb{Z}))}.$$

Pela alínea (i), tomando $r = 2$, concluímos que

$$\|a\|_{L^\infty} \leq \|a\|_{M_p}.$$

□

Teorema 6.2.7 ([7, Secção 2.1, Subsecção 2.5(g)], [11, Subcapítulo 5.2, Teorema 2.1]). O conjunto M_p é uma álgebra de Banach com norma

$$\|a\|_{M_p} = \|L(a)\|_{\mathcal{B}(\ell^p(\mathbb{Z}))}.$$

Demonstração. Verifica-se facilmente que M_p é uma álgebra e para $a, b \in M_p$, temos que

$$\|ab\|_{M_p} = \|L(a)L(b)\|_{\mathcal{B}(\ell^p(\mathbb{Z}))} \leq \|L(a)\|_{\mathcal{B}(\ell^p(\mathbb{Z}))} \|L(b)\|_{\mathcal{B}(\ell^p(\mathbb{Z}))} = \|a\|_{M_p} \|b\|_{M_p}.$$

Portanto M_p é uma álgebra normada e falta apenas provar que é completa.

Seja $\{a^{(m)}\}_{m \in \mathbb{Z}}$ uma sucessão de Cauchy em M_p . Pelo Lema 6.2.6, $\{a^{(m)}\}$ é uma sucessão de Cauchy em L^∞ e, portanto, converge uniformemente para $a \in L^\infty$.

Por outro lado, $\{L(a^{(m)})\}$ é uma sucessão de Cauchy em $\mathcal{B}(\ell^p(\mathbb{Z}))$ e, por isso, converge para um operador $A \in \mathcal{B}(\ell^p(\mathbb{Z}))$.

Ora, como para qualquer sucessão de suporte finito ϕ , $L(a)\phi = A\phi$, então $L(a) = A$ e, portanto, $a \in M_p$. □

Se for claro qual é a norma em consideração, denotaremos a norma $\|\cdot\|_{M_p}$ por $\|\cdot\|_p$. Vamos agora demonstrar um resultado fundamental: a desigualdade de Stechkin.

Teorema 6.2.8 (Desigualdade de Stechkin, [7, Secção 2.1, Subsecção 2.5(f)], [11, Subcapítulo 5.2, Teorema 2.2], [6, Teorema 1.2]). Existe uma constante $C_p < \infty$ que depende apenas de p tal que para todo o $a \in BV$,

$$\|a\|_p \leq C_p (\text{Var}(a) + \|a\|_{L^\infty}).$$

Em particular, $BV \subseteq M_p$.

Demonstração. Pelo Lema 6.2.6 (iii) podemos assumir sem perda de generalidade que $1 < p \leq 2$.

Para $\alpha \in [0, 2\pi]$, seja χ_α a função característica definida por

$$\chi_\alpha(e^{i\theta}) = \begin{cases} 1, & \text{se } \alpha < \theta < 2\pi \\ 0, & \text{se } 0 < \theta < \alpha \end{cases}, \quad \theta \in]0, 2\pi[.$$

Definimos

$$f(e^{i\theta}) = 1 - 2\chi_\alpha(e^{i\theta}) = \begin{cases} -1, & \text{se } \alpha < \theta < 2\pi \\ 1, & \text{se } 0 < \theta < \alpha \end{cases}.$$

Para $n \neq 0$, os coeficientes de Fourier de f são dados por

$$f_n = \frac{1}{\pi i n} (1 - e^{-in\alpha}).$$

Consideremos agora a função $g(e^{i\theta}) = f(e^{i\theta}) - f_0$. Então para $x = \{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ uma sucessão de suporte finito e $j \neq k$,

$$L(g)x = \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(1 - e^{i(k-j)\alpha})x_k}{\pi i(j-k)} \right)_{j=-\infty}^{+\infty}.$$

Ora, a transformada discreta de Hilbert \mathcal{H} dada por

$$\mathcal{H}x_j = \frac{1}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{x_k}{j-k}$$

é um operador linear limitado em qualquer espaço $\ell^p(\mathbb{Z})$ para $1 < p < \infty$ (cf. [9, Capítulo III, Subcapítulo 10, Teorema A]), com $\|\mathcal{H}\|_{\mathcal{B}(\ell^p(\mathbb{Z}))} > 1$ (cf. [2, Teorema 1.1]). Consequentemente,

$$\|g\|_p = \|L(g)\|_{\mathcal{B}(\ell^p(\mathbb{Z}))} \leq 2\|\mathcal{H}\|_{\mathcal{B}(\ell^p(\mathbb{Z}))}$$

e

$$\|f\|_p \leq 2\|\mathcal{H}\|_{\mathcal{B}(\ell^p(\mathbb{Z}))} + 1.$$

Logo, para $\alpha \in [0, 2\pi]$, $1 - 2\chi_\alpha \in M_p$ e as normas $\|1 - 2\chi_\alpha\|_p$ são limitadas por uma constante que é independente de α . Uma vez que $L(\chi_\alpha) = -\frac{1}{2}L(1 - 2\chi_\alpha)$, existe $c_p > 1$ tal que $\|\chi_\alpha\|_p = \|L(\chi_\alpha)\|_{\mathcal{B}(\ell^p(\mathbb{Z}))} < c_p$.

Sejam $0 = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_n = 2\pi$ e, para $\theta \in [0, 2\pi]$, $b(e^{i\theta})$ uma função simples crescente dada por

$$b(e^{i\theta}) = \beta_k \quad \text{se } \theta_{k-1} \leq \theta < \theta_k.$$

Esta função pode ser reescrita da forma

$$b = \sum_{k=1}^{n-1} \chi_{\theta_k} (\beta_{k+1} - \beta_k) + \beta_1.$$

Logo $b \in M_p$ e

$$\|b\|_p = \|L(b)\|_{\mathcal{B}(\ell^p(\mathbb{Z}))} \leq c_p \left(\text{Var}(b) + \|b\|_{L^\infty([0, 2\pi])} \right). \quad (6.2.7)$$

Seja agora $a : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de variação limitada e suponhamos que a função $\tilde{a} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $\theta \mapsto a(e^{i\theta})$ é crescente. Então existe uma sucessão $\{a^{(m)}\}_{m \in \mathbb{N}}$ de funções simples crescentes que convergem uniformemente para \tilde{a} .

Seja $x = \{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ uma sucessão de suporte finito e $q = \frac{p}{p-1} \geq 2$. Então, tendo em conta que $L(a) = L(\tilde{a})$,

$$\|(L(a) - L(a^{(m)}))x\|_{\ell^q(\mathbb{Z})} \leq \|(L(a) - L(a^{(m)}))x\|_{\ell^2(\mathbb{Z})} \leq \|\tilde{a} - a^{(m)}\|_{L^\infty([0, 2\pi])} \|x\|_{\ell^2(\mathbb{Z})} \rightarrow 0.$$

Além disso, pelo Lema 6.2.6 e pela desigualdade (6.2.7),

$$\begin{aligned} \|L(a^{(m)})\|_{\mathcal{B}(\ell^q(\mathbb{Z}))} &= \|L(a^{(m)})\|_{\mathcal{B}(\ell^p(\mathbb{Z}))} \leq c_p \left(\text{Var}(a^{(m)}) + \|a^{(m)}\|_{L^\infty([0, 2\pi])} \right) \\ &\leq c_p \left(\text{Var}(\tilde{a}) + \|\tilde{a}\|_{L^\infty([0, 2\pi])} \right). \end{aligned}$$

Portanto $L(a^{(m)})$ é limitado e converge pontualmente em $\mathcal{B}(\ell^q(\mathbb{Z}))$ para o operador $L(a)$, pelo que $L(a)$ é limitado em $\ell^q(\mathbb{Z})$ e em $\ell^p(\mathbb{Z})$ com

$$\|a\|_p \leq c_p \left(\text{Var}(a) + \|a\|_{L^\infty} \right). \quad (6.2.8)$$

Acabámos de provar o resultado para funções de valor real em \mathbb{T} .

Seja agora $a : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função de variação limitada arbitrária e consideremos $u = \text{Re } a : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$. Naturalmente,

$$\|u\|_{L^\infty} \leq \|a\|_{L^\infty} \quad \text{e} \quad \text{Var}(u) \leq \text{Var}(a).$$

Para $\theta \in]0, 2\pi]$, denotamos por $V_{[0, \theta]}(u)$ a variação de \tilde{u} em $[0, \theta]$ e seja $V_{[0, 0]}(u) = 0$. Consideremos

$$u_1(e^{i\theta}) = V_{[0, \theta]}(u) \quad \text{e} \quad u_2 = u_1 - u.$$

A função $\tilde{u}_1 : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ é crescente de 0 a $\text{Var}(u)$. Consequentemente, pela Proposição 6.1.3,

$$\begin{aligned} \text{Var}(u_1) &= |u_1(e^{i2\pi}) - u_1(e^{i0})| = \text{Var}(u), \\ \|u_1\|_{L^\infty} &\leq \text{Var}(u_1) = \text{Var}(u) \leq \text{Var}(a). \end{aligned}$$

Ora, pela desigualdade (6.2.8),

$$\|u_1\|_p \leq c_p \left(\text{Var}(u_1) + \|u_1\|_{L^\infty} \right) \leq 2c_p \text{Var}(a).$$

Para a função u_2 , temos que

$$\begin{aligned}\|u_2\|_{L^\infty} &\leq \|u_1\|_{L^\infty} + \|u\|_{L^\infty} \leq \text{Var}(a) + \|a\|_{L^\infty}, \\ \text{Var}(u_2) &\leq \text{Var}(u_1) + \text{Var}(u) \leq 2\text{Var}(a)\end{aligned}$$

e atendendo à desigualdade (6.2.8) obtemos

$$\|u_2\|_p \leq c_p(3\text{Var}(a) + \|a\|_{L^\infty}).$$

Logo

$$\|u\|_p \leq \|u_1\|_p + \|u_2\|_p \leq c_p(5\text{Var}(a) + \|a\|_{L^\infty}).$$

Analogamente se prova que se $v = \text{Im } a$, então

$$\|v\|_p \leq c_p(5\text{Var}(a) + \|a\|_{L^\infty}).$$

Assim,

$$\|a\|_p \leq \|u\|_p + \|v\|_p \leq 10c_p(\text{Var}(a) + \|a\|_{L^\infty}) = C_p(\text{Var}(a) + \|a\|_{L^\infty}).$$

□

Definição 6.2.9. Vamos denotar por PC_p o fecho de BV em M_p , ou seja,

$$PC_p = \text{cl}_{M_p}(BV).$$

6.3 Critério de Fredholm para o operador discreto de Wiener-Hopf

Vamos aplicar o Princípio Local de Gohberg-Krupnik (Teorema 3.3.13) e o Teorema 5.3.2 à álgebra de Calkin $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\ell^p(\mathbb{Z}_+))/\mathcal{K}(\ell^p(\mathbb{Z}_+))$ para definirmos uma condição necessária e suficiente para o operador $T(a)$ ser de Fredholm. Para $T \in \mathcal{B}(\ell^p(\mathbb{Z}_+))$, denotamos a classe de equivalência $T + \mathcal{K}(\ell^p(\mathbb{Z}_+)) \in \mathcal{A}$ por T^π .

6.3.1 Polinômios trigonométricos e suas propriedades

Definição 6.3.1. Seja \mathcal{P} o conjunto de todos os polinômios trigonométricos definidos em \mathbb{T} , isto é,

$$\mathcal{P} = \left\{ \sum_{k=-n}^n \alpha_k t^k : n \in \mathbb{N}, \alpha_k \in \mathbb{C} \text{ para todo } k \in \{-n, \dots, n\} \text{ e } t \in \mathbb{T} \right\}.$$

Se $a \in \mathcal{P}$, então $L(a)$ é uma matriz banda e consequentemente $\mathcal{P} \subseteq M_p$.

Definição 6.3.2. Vamos denotar o fecho de \mathcal{P} em M_p por \mathcal{C}_p , ou seja,

$$\mathcal{C}_p = \text{cl}_{M_p}(\mathcal{P}).$$

De seguida formulamos o Teorema de Weierstrass para polinómios trigonométricos que afirma que o conjunto destes polinómios, \mathcal{P} , é de facto denso no espaço das funções contínuas, $C(\mathbb{T})$.

Teorema 6.3.3 (Teorema de Weierstrass para polinómios trigonométricos, [13, Capítulo I, Corolário do Teorema 2.12]). *Toda a função contínua em \mathbb{T} pode ser uniformemente aproximada por polinómios trigonométricos.*

Observação 6.3.4. De acordo com o Teorema 6.2.2, temos que $M_2 = L^\infty$. Consequentemente, \mathcal{C}_2 é o fecho dos polinómios trigonométricos na norma de L^∞ . Além disso, $\mathcal{C}_2 \subseteq C(\mathbb{T})$, portanto pelo Teorema 6.3.3 concluímos que $\mathcal{C}_2 = C(\mathbb{T}) := C$.

Denotando o conjunto das funções continuamente diferenciáveis em \mathbb{T} , $C^1(\mathbb{T})$, simplesmente por C^1 , vamos provar um exercício de Análise Matemática mais elementar:

Lema 6.3.5. *Uma função continuamente diferenciável em \mathbb{T} é de variação limitada, isto é,*

$$C^1 \subseteq BV \cap C.$$

Demonstração. Seja $f \in C^1$. É evidente que $f \in C$ e sendo f' contínua em \mathbb{T} , pelo Teorema de Weierstrass, f' é limitada em \mathbb{T} . Logo existe uma constante $M > 0$ tal que

$$\sup_{\theta \in [0, 2\pi]} |f'(e^{i\theta})| \leq M.$$

Consideremos $0 = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_n = 2\pi$ uma partição arbitrária de $[0, 2\pi]$. O Teorema do valor médio de Lagrange garante que, para cada $j \in \{0, \dots, n-1\}$, existe $\alpha_j \in]\theta_j, \theta_{j+1}[$ tal que

$$|f(e^{i\theta_{j+1}}) - f(e^{i\theta_j})| = |f'(e^{i\alpha_j})| |\theta_{j+1} - \theta_j| \leq M(\theta_{j+1} - \theta_j).$$

Logo

$$\sum_{j=0}^{n-1} |f(e^{i\theta_{j+1}}) - f(e^{i\theta_j})| \leq M \sum_{j=0}^{n-1} (\theta_{j+1} - \theta_j) = 2\pi M,$$

pelo que

$$\text{Var}(f) = \sup \sum_{j=0}^{n-1} |f(e^{i\theta_{j+1}}) - f(e^{i\theta_j})| \leq 2\pi M,$$

isto é, $f \in BV$. Acabámos de provar que $C^1 \subseteq BV \cap C$. □

Corolário 6.3.6. *Um polinómio trigonométrico é de variação limitada.*

Precisamos de introduzir um conceito para provarmos o resultado que relaciona os conjuntos \mathcal{C}_p , BV e C .

Definição 6.3.7. Seja $a \in L^1(\mathbb{T})$ e consideremos

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a(e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta$$

o n -ésimo coeficiente de Fourier de a . Para $t = e^{i\theta} \in \mathbb{T}$, a série de Fourier $S[a]$ da função a é a série trigonométrica

$$S[a] \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{in\theta}.$$

Denotamos por $S_n(a)$ a n -ésima soma parcial de $S[a]$, isto é,

$$(S_n(a))(\theta) = S_n(a, \theta) = \sum_{j=-n}^n a_j e^{ij\theta}.$$

A n -ésima média aritmética de $S_n(a)$ é então dada por

$$\sigma_n(a) = \frac{1}{n+1} (S_0(a) + S_1(a) + \dots + S_n(a)),$$

que é usualmente designada por n -ésima média de Fejér-Cesàro. Naturalmente temos que $\sigma_n \in \mathcal{P}$ e sabemos que

$$\sigma_n(a) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a$$

na norma $L^1(\mathbb{T})$.

É ainda possível provar que, sendo a um elemento de $C(\mathbb{T})$, $\sigma_n(a)$ converge para a na norma $C(\mathbb{T})$, como vamos ver no próximo resultado.

Teorema 6.3.8 ([13, Capítulo I, Teorema 2.11]). *Seja $C(\mathbb{T})$ o espaço de todas as funções contínuas em \mathbb{T} com norma*

$$\|a\|_{C(\mathbb{T})} = \sup_{t \in \mathbb{T}} |a(t)|, \quad a \in C(\mathbb{T}).$$

Consideremos $a \in C(\mathbb{T})$. Temos que

$$\|\sigma_n(a) - a\|_{C(\mathbb{T})} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

Uma vez que $L^\infty(\mathbb{T}) \subseteq L^1(\mathbb{T})$, então faz sentido considerar $\sigma_n(a)$ quando $a \in L^\infty$. Além disso, atendendo à definição de média de Fejér-Cesàro, temos que $L(\sigma_n(a))$ gera um operador limitado em $\ell^2(\mathbb{Z})$ e portanto $\sigma_n(a) \in M_p$.

Lema 6.3.9 ([7, Lema 2.44]). *Sejam $a \in M_p$ e $\sigma_n(a)$ a n -ésima média de Fejér-Cesàro de a . Então, para todo o $n \in \mathbb{N}$, temos que*

$$\|\sigma_n(a)\|_p \leq \|a\|_p.$$

Lema 6.3.10 ([5, Lema 6.2]). *Temos que*

$$C \cap BV \subseteq \mathcal{C}_p \subseteq C.$$

Demonstração. Seja $a \in C \cap BV$. Pelo Lema 6.3.9, sabemos que para todo $n \in \mathbb{N}$, a média Fejér-Cesàro $\sigma_n(a)$ de qualquer $a \in M_p$ satisfaz a desigualdade

$$\|\sigma_n(a)\|_p \leq \|a\|_p. \quad (6.3.1)$$

Uma vez que $\sigma_n(a) \in \mathcal{P}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então basta provar que $\|a - \sigma_n(a)\|_p \rightarrow 0$.

Se $p = 2$, então, pelo Teorema 6.3.8, vem que

$$\|a - \sigma_n(a)\|_2 = \|a - \sigma_n(a)\|_{L^\infty} \leq \|a - \sigma_n(a)\|_{C(\mathbb{T})} \rightarrow 0.$$

Se $p \neq 2$, então podemos utilizar o Teorema 2.3.4 obtendo

$$\|a - \sigma_n(a)\|_p \leq \|a - \sigma_n(a)\|_{\tilde{p}}^{1-\delta} \|a - \sigma_n(a)\|_2^\delta = \|a - \sigma_n(a)\|_{\tilde{p}}^{1-\delta} \|a - \sigma_n(a)\|_{L^\infty}^\delta,$$

para algum $\tilde{p} \in]1, 2[\cup]2, \infty[$ e algum $\delta \in]0, 1[$. Então por (6.3.1) e pelo Teorema 6.2.8 temos

$$\|a - \sigma_n(a)\|_{\tilde{p}} \leq 2\|a\|_{\tilde{p}} \leq 2C_{\tilde{p}} (\|a\|_{L^\infty} + \text{Var}(a)),$$

pelo que

$$\|a - \sigma_n(a)\|_p \leq \left(2C_{\tilde{p}} (\|a\|_{L^\infty} + \text{Var}(a))\right)^{1-\delta} \|a - \sigma_n(a)\|_{L^\infty}^\delta \rightarrow 0.$$

Portanto $a \in \mathcal{C}_p$.

Veamos agora a outra inclusão. Seja $a \in \mathcal{C}_p$. Então $a \in M_p$ e por isso existe uma constante $K < \infty$ tal que

$$\|a\|_p \leq K.$$

Aplicando o Lema 6.2.6 obtemos

$$\|a\|_2 = \|a\|_{L^\infty} \leq \|a\|_p < K,$$

pelo que $a \in M_2$. Consequentemente $M_p \subseteq M_2$, o que implica que $\mathcal{C}_p \subseteq \mathcal{C}_2 = C$, pela Observação 6.3.4. \square

6.3.2 Localização dos operadores discretos de Wiener-Hopf

O nosso objetivo agora é a construção de uma cobertura que permita a aplicação do Princípio local de Gohberg-Krupnik à álgebra $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\ell^p(\mathbb{Z}_+))/\mathcal{K}(\ell^p(\mathbb{Z}_+))$. Recordemos que denotamos a classe de equivalência $T + \mathcal{K}(\ell^p(\mathbb{Z}_+)) \in \mathcal{A}$ por T^π .

Começemos por um resultado auxiliar.

Proposição 6.3.11 ([7, Proposição 2.14]). *Sejam $a, b \in M_p$. Então*

$$T(ab) = T(a)T(b) + H(a)\tilde{H}(b),$$

com $H(a) = \left(a_{j+k+1}\right)_{j,k=0}^{\infty}$ e $\tilde{H}(b) = \left(b_{-j-k-1}\right)_{j,k=0}^{\infty}$.

Estamos agora em condições de provar que as classes de equivalência de \mathcal{A} comutam entre si.

Lema 6.3.12 ([5, Lema 6.3]). *Se $a \in M_p$ e $f \in \mathcal{C}_p$, então*

$$T^\pi(af) = T^\pi(a)T^\pi(f) = T^\pi(f)T^\pi(a).$$

Demonstração. Sejam $a \in M_p$ e $f \in \mathcal{C}_p$. Pela Proposição 6.3.11, temos que

$$T(af) = T(a)T(f) + H(a)\tilde{H}(f),$$

onde $H(a) = \left(a_{j+k+1}\right)_{j,k=0}^{\infty}$ e $\tilde{H}(f) = \left(f_{-j-k-1}\right)_{j,k=0}^{\infty}$.

Como $H(a)$ é uma parte de $L(a)$ e $a \in M_p$, então $H(a)$ induz um operador limitado em $\ell^p(\mathbb{Z}_+)$. Por outro lado, como $f \in \mathcal{C}_p$, por definição, f é o limite em M_p de uma sucessão $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de \mathcal{P} . Logo, para cada $n \in \mathbb{N}$, os coeficientes de Fourier de f_n são iguais a zero a partir de certa ordem, pelo que o operador $\tilde{H}(f_n)$ é de característica finita, para cada $n \in \mathbb{N}$. Assim, a Proposição 4.3.2 garante que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\tilde{H}(f_n)$ é um operador compacto.

Além disso, temos que

$$\|\tilde{H}(f) - \tilde{H}(f_n)\| = \|\tilde{H}(f - f_n)\| \leq \|L(f - f_n)\| = \|f - f_n\|_p \rightarrow 0.$$

Portanto $\tilde{H}(f)$ é o limite de operadores compactos e, por isso, $\tilde{H}(f)$ é um operador compacto pelo Teorema 4.2.6. Sendo $H(a)$ um operador limitado e $\tilde{H}(f)$ um operador compacto, $H(a)\tilde{H}(f)$ é um operador compacto segundo o Teorema 4.2.7. Logo

$$T^\pi(af) = T^\pi(a)T^\pi(f).$$

Analogamente se prova que $T^\pi(fa) = T^\pi(f)T^\pi(a)$, demonstrando-se neste caso que $H(f)$ é um operador compacto e $\tilde{H}(a)$ é um operador limitado. \square

Definição 6.3.13. Para $\tau \in \mathbb{T}$, definimos \mathcal{N}_τ como sendo o conjunto de todas as funções $f \in C^1(\mathbb{T})$ com as seguintes propriedades:

- (i) $0 \leq f \leq 1$;
- (ii) $f = 1$ para alguma vizinhança aberta U_f de τ ;
- (iii) existe uma vizinhança aberta W_f de τ tal que

$$x \notin W_f \implies f(x) = 0;$$

(iv) f é monótona em $W_f \setminus U_f$.

Temos que $\|f\|_{L^\infty} = 1$ e $\text{Var}(f) = 2$, para todo $f \in \mathcal{N}_\tau$. E, pelo Teorema 6.2.8, concluímos que $T^\pi(f) \in \mathcal{A}$, para todo $f \in \mathcal{N}_\tau$.

Denotemos por \mathcal{M}_τ o conjunto

$$\mathcal{M}_\tau = \{T^\pi(f) : f \in \mathcal{N}_\tau\}.$$

Lema 6.3.14. $\{\mathcal{M}_\tau\}_{\tau \in \mathbb{T}}$ é uma cobertura.

Demonstração. Seja $\tau \in \mathbb{T}$. Uma vez que $0 \notin \mathcal{N}_\tau$, então $0 \notin \mathcal{M}_\tau$. Para $T^\pi(f_1), T^\pi(f_2) \in \mathcal{M}_\tau$, temos que $f_j f = f f_j = f$, com $j = 1, 2$, para $f \in \mathcal{N}_\tau$ com suporte suficientemente pequeno.

Como $\text{Var}(f) = 2$ para qualquer $f \in \mathcal{N}_\tau$, então $\mathcal{N}_\tau \subseteq BV$. E atendendo a que $\mathcal{N}_\tau \subseteq C$ por definição, concluímos que $\mathcal{N}_\tau \subseteq C \cap BV$. Logo o Lema 6.3.10 garante que $f \in \mathcal{C}_p$, para qualquer $f \in \mathcal{N}_\tau$.

Ora, pelo Lema 6.3.12 temos que

$$T^\pi(f_j)T^\pi(f) = T^\pi(f)T^\pi(f_j) = T^\pi(f), \quad j = 1, 2.$$

Portanto \mathcal{M}_τ é uma classe localizadora para todo $\tau \in \mathbb{T}$.

Seja agora $\{T^\pi(f_\tau)\}_{\tau \in \mathbb{T}}$ uma família de elementos tais que $T^\pi(f_\tau) \in \mathcal{M}_\tau$. Sendo \mathbb{T} um conjunto compacto, existe uma subfamília finita $\{f_{\tau_j}\}_{j=1}^m$ tal que

$$g = f_{\tau_1} + \dots + f_{\tau_m} \geq \epsilon > 0.$$

Logo g é invertível com $g^{-1} \in C^1(\mathbb{T}) \subseteq C \cap BV$, pelo Lema 6.3.5. Pelos Lemas 6.3.10 e 6.3.12, temos que

$$T^\pi(g^{-1})T^\pi(g) = T^\pi(g)T^\pi(g^{-1}) = T^\pi(1),$$

o que prova que $T^\pi(g)$ é invertível. Consequentemente, $\{\mathcal{M}_\tau\}_{\tau \in \mathbb{T}}$ é uma cobertura. \square

Lema 6.3.15 ([5, Lema 6.4]). *Seja $\tau \in \mathbb{T}$. Se $a, b \in PC_p$ e $a(\tau \pm 0) = b(\tau \pm 0)$, então $T^\pi(a)$ e $T^\pi(b)$ são \mathcal{M}_τ -equivalentes.*

Demonstração. Seja $\tau \in \mathbb{T}$ e suponhamos que $a, b \in PC_p$ e $a(\tau \pm 0) = b(\tau \pm 0)$. Por definição de PC_p , existem sucessões $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ constituídas por elementos de BV tais que

$$\|a_n - a\|_p \longrightarrow 0 \quad \text{e} \quad \|b_n - b\|_p \longrightarrow 0.$$

Podemos então assumir que $a_n(\tau \pm 0) = a(\tau \pm 0)$ e $b_n(\tau \pm 0) = b(\tau \pm 0)$. Por outro lado, atendendo a definição de \mathcal{M}_τ -equivalência, se $T^\pi(a_n)$ e $T^\pi(b_n)$ são \mathcal{M}_τ -equivalentes para todo $n \in \mathbb{N}$, então $T^\pi(a)$ e $T^\pi(b)$ também são \mathcal{M}_τ -equivalentes. Podemos então assumir, sem perda de generalidade, que $a, b \in BV$.

Pelos Lemas 6.3.10 e 6.3.12 temos que

$$\left\| (T^\pi(a) - T^\pi(b)) T^\pi(f) \right\| = \left\| T^\pi(f) (T^\pi(a) - T^\pi(b)) \right\| \leq \|(a - b)f\|_p, \quad (6.3.2)$$

para todo $f \in \mathcal{N}_\tau$.

Ora, é possível construir uma sucessão $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de \mathcal{N}_τ de tal maneira que a vizinhança aberta $W_{f_{n+1}}$ (onde a função f_{n+1} não se anula) esteja contida na vizinhança aberta U_{f_n} (na qual a função f_n toma o valor 1). Deste modo, as funções f_n têm suporte cada vez menor e por isso temos que

$$\|(a-b)f_n\|_2 = \|(a-b)f_n\|_{L^\infty} \longrightarrow 0.$$

E por isso no caso $p = 2$, atendendo (6.3.2), temos que

$$\left\| \left(T^\pi(a) - T^\pi(b) \right) T^\pi(f_n) \right\| = \left\| T^\pi(f_n) \left(T^\pi(a) - T^\pi(b) \right) \right\| \longrightarrow 0,$$

donde $T^\pi(a)$ e $T^\pi(b)$ são \mathcal{M}_τ -equivalentes.

Caso $p \neq 2$, então pelo Teorema 2.3.4,

$$\|(a-b)f_n\|_p \leq \|(a-b)f_n\|_{\tilde{p}}^{1-\delta} \|(a-b)f_n\|_2^\delta$$

para algum $\tilde{p} \in]1, 2[\cup]2, \infty[$ e algum $\delta \in]0, 1[$. Ora, como $a, b \in BV$ e $f_n \in \mathcal{N}_\tau \subseteq BV$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então pelo Teorema 6.2.8 existe uma constante $C_{\tilde{p}} < \infty$ tal que

$$\|(a-b)f_n\|_{\tilde{p}} \leq C_{\tilde{p}} \left(\|(a-b)f_n\|_{L^\infty} + \text{Var}((a-b)f_n) \right).$$

Logo $\|(a-b)f_n\|_{\tilde{p}} \longrightarrow 0$ e portanto, atendendo a (6.3.2), $T^\pi(a)$ e $T^\pi(b)$ são \mathcal{M}_τ -equivalentes. \square

Definição 6.3.16. O número total de voltas no sentido anti-horário que a curva a realiza em torno da origem é designado por *winding number* e denotamos por $\text{wind } a$.

Apresentamos agora o resultado principal deste capítulo. Este resultado permite-nos saber se o operador discreto de Wiener-Hopf é um operador de Fredholm através de uma ferramenta algebricamente simples: só precisamos saber se o seu símbolo tem zeros no círculo unitário. Mais, caso o operador seja de Fredholm, existe uma relação entre o *winding number* do seu símbolo e o índice do operador.

Teorema 6.3.17 ([5, Teorema 6.5]). *Seja $a \in \mathcal{C}_p$. O operador $T(a)$ é um operador de Fredholm em $\ell^p(\mathbb{Z}_+)$ se, e só se, o símbolo a não tem zeros em \mathbb{T} . Neste caso,*

$$\text{ind } T(a) = -\text{wind } a.$$

Demonstração. Seja $a \in \mathcal{C}_p$. Suponhamos que $a(t) \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{T}$. Pelo Lema 6.3.12 temos que $T^\pi(a) \in \text{Com } \mathcal{M}$ com $\mathcal{M} = \bigcup_{t \in \mathbb{T}} \mathcal{M}_\tau$. Atendendo ao Corolário 6.3.6, temos que $\mathcal{C}_p \subseteq PC_p$, pelo que $a \in PC_p$. Por isso, pelo Lema 6.3.15, $T^\pi(a)$ é \mathcal{M}_τ -equivalente a $a(\tau)T^\pi(1)$ para cada $\tau \in \mathbb{T}$.

Uma vez que $a(\tau)T^\pi(1)$ tem inverso $\frac{1}{a(\tau)}T^\pi(1)$, concluímos pelo Teorema 3.3.13 que $T^\pi(a)$ é invertível. Logo, pelo Teorema 5.3.2, concluímos que $T(a)$ é um operador de Fredholm.

Suponhamos agora, com vista a um absurdo, que $a(\tau) = 0$ para algum $\tau \in \mathbb{T}$ e que $T(a)$ é um operador de Fredholm.

Pelo Teorema 5.3.2, $T^\pi(a)$ é invertível e por isso também é \mathcal{M}_τ -invertível. Ora, pela Lema 6.3.15, temos que $T^\pi(a)$ é \mathcal{M}_τ -equivalente a $a(\tau)T^\pi(1) = 0$, pelo que 0 é \mathcal{M}_τ -invertível pela Proposição 3.3.3, o que é absurdo.

Provemos agora a igualdade. Suponhamos então que a não tem zeros em \mathbb{T} . Seja $b \in \mathcal{C}_p$ tal que $\|a - b\|_p$ é suficientemente pequena, isto é, existe $\eta > 0$ tal que $\|a - b\|_p < \eta$.

Ora, temos que

$$\|T(b - a)\|_{\mathcal{B}(\ell^p(\mathbb{Z}_+))} < \eta.$$

Logo o Teorema 5.2.13 garante que $T(b)$ é um operador de Fredholm e que $\text{ind } T(b) = \text{ind } T(a)$. Podemos então escolher $b \in \mathcal{P}$ nestas condições, visto que a é um elemento de \mathcal{C}_p . Podemos também assumir que b não é igual a zero e $\text{wind } b = \text{wind } a$. De facto, se desenharmos à volta do gráfico da função a uma faixa de largura 2η , então o gráfico da função b fica contido dentro desta faixa. Isto significa que podemos escolher η suficientemente pequeno de modo a que esta faixa não contenha zeros. Consequentemente, o número de voltas que a curva da função b realiza em torno da origem é igual ao número de voltas da curva da função a .

Uma vez que $b \in \mathcal{P}$, podemos factorizar b do seguinte modo (cf. [11, Subcapítulos 3.1, 3.2])

$$b(z) = b_-(z)z^{\text{wind } b}b_+(z), \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\},$$

com $b_\pm \in \mathcal{P}$ tais que $b_-(z) \neq 0$ para $1 \leq |z| \leq \infty$ e $b_+(z) \neq 0$ para $|z| \leq 1$.

Consequentemente,

$$T(b) = T(b_-)T(t^{\text{wind } b})T(b_+).$$

Atendendo a que $T(b_\pm)$ tem inverso $T(b_\pm^{-1})$, então $\text{ind } T(b_\pm) = 0$.

Por outro lado, para $n \in \mathbb{Z}$ consideremos a função $\phi_n(t) = t^n$, $t \in \mathbb{T}$. O coeficiente de Fourier de ordem m de ϕ_n , $\phi_{n,m}$, é dado por

$$\phi_{n,m} = \begin{cases} 1, & \text{se } n = m \\ 0, & \text{se } n \neq m \end{cases}.$$

Assim,

$$T(\phi_n) : \{x_j\}_{j \in \mathbb{Z}_+} \mapsto \underbrace{(0, \dots, 0, x_0, x_1, \dots)}_n, \quad \text{se } n \geq 0$$

$$T(\phi_n) : \{x_j\}_{j \in \mathbb{Z}_+} \mapsto (x_{|n|}, x_{|n|+1}, x_{|n|+2}, \dots), \quad \text{se } n < 0.$$

Consequentemente,

$$\dim \text{Ker } T(\phi_n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n \geq 0 \\ |n|, & \text{se } n < 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \text{codim } \text{Im } T(\phi_n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \geq 0 \\ 0, & \text{se } n < 0 \end{cases}.$$

Portanto $\text{ind } T(\phi_n) = -n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Deste modo, pela Proposição 5.2.9, concluímos que

$$\begin{aligned} \text{ind } T(a) &= \text{ind } T(b) = \text{ind } T(b_-) + \text{ind } T(t^{\text{wind } b}) + \text{ind } T(b_+) = \\ &= \text{ind } T(t^{\text{wind } b}) = -\text{wind } b = -\text{wind } a, \end{aligned}$$

como queríamos provar. □

6.4 Trabalho futuro

Apesar de haver bastante literatura dedicada ao estudo das propriedades de Fredholm de operadores discretos de Wiener-Hopf no espaço das sucessões $\ell^p(\mathbb{Z}_+)$, não existem praticamente estudos destes operadores em espaços de sucessões mais gerais, os espaços de Orlicz que definimos de seguida.

Consideremos o espaço de Banach $\ell^p(\mathbb{Z}_+)$ com $1 \leq p < \infty$. Para cada sucessão de números complexos $a = \{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$, temos que

$$\|a\|_{\ell^p(\mathbb{Z}_+)} = \inf \left\{ c > 0 : \sum_{n=0}^{\infty} \phi \left(\frac{|a_n|}{c} \right) \leq 1 \right\},$$

onde $\phi(t) = t^p$ é uma função convexa, crescente e não-negativa em $[0, \infty[$. Os espaços de sucessões de Orlicz surgem na tentativa de generalização do espaço $\ell^p(\mathbb{Z}_+)$, substituindo a função $\phi(t)$ por uma função arbitrária convexa, crescente e não-negativa, designada por função de Orlicz.

Assim, definimos o espaço de sucessões de Orlicz em relação à função ϕ como sendo o espaço de Banach de todas as sucessões $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tal que $\sum_{n=0}^{\infty} \phi \left(\frac{|a_n|}{c} \right) < \infty$ para algum $c > 0$.

Acredita-se que seja possível, como trabalho futuro, generalizar alguns dos resultados deste capítulo ao caso dos espaços de sucessões de Orlicz, como por exemplo a desigualdade de Stechkin que é um dos resultados chave para chegar ao Teorema 6.3.17. Para um estudo mais aprofundado deste assunto, é possível consultar as obras [17, 19].

BIBLIOGRAFIA

- [1] J. Appell, J. Banaś e N. Merentes. *Bounded Variation and Around*. De Gruyter, 2014. DOI: 10.1515/9783110265118 (ver pp. 54, 56).
- [2] R. Bañuelos e M. Kwaśnicki. «On the ℓ^p -norm of the Discrete Hilbert Transform». Em: *Duke Math. J.* 168 (2019), pp. 471–504. DOI: 10.1215/00127094-2018-0047 (ver p. 64).
- [3] M. A. Bastos, C. Fernandes e P. A. Santos. *Introdução às Álgebras de Operadores*. IST Press, 2021 (ver pp. 15–20).
- [4] C. Bennett e R. Sharpley. *Interpolation of Operators*. Academic Press, Inc., 1988 (ver p. 11).
- [5] A. Böttcher e M. Seybold. «Discrete Wiener-Hopf Operators on Spaces with Muckenhoupt Weight». Em: *Studia Mathematica* 143 (2000), pp. 121–144. DOI: 10.4064/sm-143-2-121-144 (ver pp. 69–72).
- [6] A. Böttcher e M. Seybold. «Wackelsatz and Stechkin’s Inequality for Discrete Muckenhoupt Weights». Em: *Preprint 99-7* (1999). URL: <https://www-user.tu-chemnitz.de/~aboettch/WASTE.pdf> (ver p. 63).
- [7] A. Böttcher e B. Silbermann. *Analysis of Toeplitz Operators*. Springer, 2006. DOI: 10.1007/3-540-32436-4 (ver pp. 3, 17, 19, 20, 62, 63, 68, 70).
- [8] A. Böttcher e B. Silbermann. *Introduction to Large Truncated Toeplitz Matrices*. Universitext. Springer-Verlag, 1999. DOI: 10.1007/978-1-4612-1426-7 (ver pp. 3, 58, 60).
- [9] I. C. Gohberg e M. G. Kreĭn. *Theory and Applications of Volterra Operators in Hilbert Space*. Translations of Mathematical Monographs, Vol. 24. Translated from the Russian by A. Feinstein. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1970 (ver p. 64).
- [10] I. Gohberg, S. Goldberg e M. A. Kaashoek. *Basic Classes of Linear Operators*. Birkhäuser Verlag, 2003. DOI: 10.1007/978-3-0348-7980-4 (ver p. 49).
- [11] I. Gohberg e N. Krupnik. *One-dimensional Linear Singular Integral Equations*. Birkhäuser Verlag, 1992. DOI: 10.1007/978-3-0348-8602-4 (ver pp. 62, 63, 73).
- [12] A. Y. Helemskii. *Lectures and Exercises on Functional Analysis*. American Mathematical Society, 2006 (ver pp. 8, 47).

- [13] Y. Katznelson. *An Introduction to Harmonic Analysis*. Third. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, 2004. DOI: 10.1017/CB09781139165372 (ver pp. 67, 68).
- [14] E. Kreyszig. *Introductory Functional Analysis with Applications*. John Wiley & Sons, 1978 (ver pp. 7, 28).
- [15] J. M. Lourenço. *The NOVAthesis L^AT_EX Template User's Manual*. NOVA University Lisbon. 2021. URL: <https://github.com/joaomlourenco/novathesis/raw/master/template.pdf> (ver p. iii).
- [16] T.-W. Ma. *Banach-Hilbert Spaces, Vector Measures and Group Representations*. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 2002. DOI: 10.1142/4998 (ver p. 8).
- [17] L. Maligranda. «Orlicz Spaces and Interpolation». Em: *Seminars in Mathematics* 5 (1989) (ver p. 74).
- [18] N. Nikolski. *Toeplitz Matrices and Operators*. Vol. 182. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 2020. DOI: 10.1017/9781108182577 (ver p. 3).
- [19] B.-Z. A. Rubshtein et al. *Foundations of Symmetric Spaces of Measurable Functions*. Springer, 2016. DOI: 10.1007/978-3-319-42758-4 (ver p. 74).
- [20] W. Rudin. *Principles of Mathematical Analysis*. Third. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill Book Co., 1976 (ver p. 57).
- [21] B. P. Rynne e M. A. Youngson. *Análise Funcional Linear*. IST Press, 2011 (ver pp. 6, 9–11).
- [22] C. Swartz. *Measure, Integration and Function Spaces*. World Scientific, 1994 (ver p. 25).
- [23] F. Teixeira e A. Lebre. *Apontamentos de Análise Funcional I*. Instituto Superior Técnico, 1995 (ver pp. 7, 9, 25–36, 38, 41–52, 59, 62).
- [24] O. Toeplitz. «Zur Theorie der Quadratischen und Bilinearen Formen von Unendlichen Veränderlichen, I: Theorie des L-Formen». Em: *Mathematische Annalen* 70 (1911), pp. 351–376 (ver p. 2).



