Eduarda Maria Vieira dos Santos
Nunes de Oliveira
Licenciatura em Matemática Aplicada

A utilização das Aplicações Interativas no ensino e aprendizagem das Equações do 1.º grau

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em Ensino de Matemática no 3.º ciclo do Ensino Básico e no Secundário

Orientador: Professor Doutor António Manuel Dias Domingos, Professor Auxiliar, Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa

Júri:
Presidente: Prof. Doutora Maria Helena Coutinho Gomes de Almeida Santos
Arguente: Prof. Doutora Ana Elisa Esteves Santiago
Vogal: Prof. Doutor António Manuel Dias Domingos

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

setembro 2014

Eduarda Maria Vieira dos Santos Nunes de Oliveira

Licenciatura em Matemática Aplicada

A utilização das Aplicações Interativas no ensino e aprendizagem das Equações do 1.º grau

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em Ensino de Matemática no 3.º ciclo do Ensino Básico e no Secundário

Orientador: Professor Doutor António Manuel Dias Domingos, Professor Auxiliar, Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa

Júri:

Presidente: Prof. Doutora Maria Helena Coutinho Gomes de Almeida Santos

Arguente: Prof. Doutora Ana Elisa Esteves Santiago

Vogal: Prof. Doutor António Manuel Dias Domingos

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

setembro 2014

Ao Pedro e ao Zé

AGRADECIMENTOS

Ao meu filho Pedro pelo seu carinho e compreensão nas horas de maior trabalho, demonstrando o quanto gosta de mim.

Ao Zé pela sua ajuda e incentivo garantindo que tudo estava bem.

Ao avô Reis que esteve sempre disponível para me ajudar.

Ao meu orientador, Professor Doutor António Manuel Dias Domingos, pela disponibilidade em reunir comigo, pelo seu incentivo e pelos seus conselhos e ensinamentos.

À Sónia pelo apoio que me deu, mostrando-se sempre disponível para colaborar.

Aos alunos que colaboraram neste estudo pelo seu empenho nas tarefas propostas.

À Helena e à Lígia pela amizade e pelos seus conselhos.

Ao meu Diretor por viabilizar a implementação do estudo.

RESUMO

Numa época em que existe uma grande diversidade de ferramentas tecnológicas ao nosso dispor, é imprescindível que se reflita sobre o seu contributo para o ensino e aprendizagem. Este estudo pretende analisar de que forma é que a exploração das *applets* pode contribuir para o ensino e aprendizagem das equações do 1.º grau. Especificamente, pretende-se estudar como é que as mesmas podem contribuir para que os alunos efetuem a passagem da aritmética para a álgebra, desenvolvam o conceito de incógnita e de equação e compreendam os princípios de equivalência.

Na revisão da literatura fez-se referência ao pensamento de Vygotsky, nomeadamente os aspetos importantes no âmbito da educação, tais como, a Zona de Desenvolvimento Proximal e a Atividade Mediada. Também foi focado o ensino e a aprendizagem da álgebra e referidas as tecnologias de informação e comunicação.

Neste estudo a metodologia utilizada foi de natureza qualitativa tentando-se descrever, analisar e compreender os processos realizados por quatro alunos do 7.º ano.

Foram analisadas várias tarefas que envolveram a aplicação das *applets* relacionadas com o ensino e aprendizagem das equações do 1.º grau. Ao longo da implementação do estudo os alunos mostraram-se motivados para a aprendizagem das referidas equações e divertidos quando recorriam à utilização das *applets*. Por vezes, as mesmas apresentaram limitações, o que implicou a adaptação das estratégias e contribuiu para a reflexão sobre a importância do professor.

Os resultados obtidos parecem indicar que as *applets* podem funcionar como instrumento mediador uma vez que os alunos conseguiram apropriar-se dos conceitos matemáticos através das mesmas. Parecem também reforçar a importância que se deve dar, no ensino e aprendizagem das equações do 1º grau, a tarefas que permitem aos alunos efetuar a passagem da aritmética para a álgebra e a tarefas que apelem à necessidade do uso natural dos princípios de equivalência para que os alunos compreendam a sua aplicação.

Palavras-chave: *Applet;* Aprendizagem da Álgebra; Equação do 1.º grau; Princípios de Equivalência

ABSTRACT

At a time, in which such a wide variety of technological tools is available to us, it is indispensable to reflect on their contribution to the teaching-learning process.

The aim of this study is to analyze how far the exploration of applets can contribute to the teaching and learning of first degree equations. It was specifically intended to study how applets can contribute to the students' passage from arithmetic to algebra, how they can help them develop the concepts of unknown and equation and understand the principles of equivalence.

In the literature revision the Vygotsky´s theory has been referred to, namely some of his important ideas regarding education, such as, the Zone of Proximal Development and the Mediated Activity. The teaching and learning of algebra, as well as technologies of information and communication, have also been targets of this study.

The methodology used in this study was qualitative, and it has been tried to describe, analyze and understand the procedures used by four students attending the 7th year.

Various tasks involving the application of applets to the teaching and learning of first degree equations have been analyzed.

In the course of the implementation of this study, students seemed not only motivated to the learning of the equations, but also amused when they had to make use of applets.

Applets sometimes presented limitations, which meant the adaptation of different strategies and led to a reflection on the importance of the teacher´s role.

The results obtained seem to show that applets can work as a mediating tool since students were able to appropriate the mathematical concepts through them.

When teaching and learning equations of first degree, applets also seem to reinforce the importance that should be given to tasks, that allow students to pass from arithmetic to algebra and to tasks appealing to the need for the natural use of the principles of equivalence, so that students understand their application.

Key words: Applet; Algebra Learning; First degree equations; Principles of equivalence

ÍNDICE

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABELAS

CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO

1. MOTIVAÇÃO E PERTINÊNCIA DO ESTUDO

A utilização da tecnologia no ensino e na aprendizagem da matemática é de grande importância. Ao longo de mais de duas décadas a trabalhar como professora de matemática, a investigadora tem tido a preocupação de atualizar os seus conhecimentos no âmbito das tecnologias de informação e comunicação. O investimento efetuado na sua formação tem sido, em grande parte, dirigido para a utilização das referidas tecnologias no ensino da matemática. Na experiência da investigadora como professora de matemática, o uso das tecnologias de informação e comunicação é um desafio constante que envolve várias etapas. Inicialmente, existe a necessidade do professor se familiarizar com o modo como funciona a tecnologia que vai aplicar. Este trabalho é tão complexo quanto a complexidade da ferramenta em questão. Posteriormente, é necessário estudar de que forma é que a tecnologia pode ser integrada no ensino e aprendizagem. Quais as suas potencialidades e como pode a mesma contribuir para a construção de um determinado conhecimento matemático e para o desenvolvimento psicológico do aluno. A velocidade com que aparecem no mercado novas tecnologias e com que se tornam obsoletas as anteriores é enorme. O professor tem de estar sempre atento e acompanhar a evolução tecnológica. Não é possível utilizar a tecnologia, em contexto de sala de aula, sem se efetuar antecipadamente um trabalho de preparação que envolva a criação de tarefas e a análise das vantagens da utilização das ferramentas tecnológicas escolhidas. O National Council of Teachers of Mathematics (2007) refere "A utilização eficaz da tecnologia, durante as aulas de matemática, depende do professor. A tecnologia não é uma panaceia. Como qualquer ferramenta de ensino, pode ser usada de forma adequada ou ineficaz." (p.27).

A utilização das *applets* no processo de ensino e aprendizagem, quando efetuada de forma adequada, pensa-se que pode ser uma mais-valia. Poderá contribuir não só para a motivação dos alunos para a aprendizagem da matemática, como também ser uma ferramenta que poderá ajudar a centrar o processo ensino e aprendizagem no aluno, proporcionar o debate de ideias e ajudar o professor a compreender os processos realizados pelos alunos quando da sua utilização. Neste caso, da aplicação das *applets* no ensino e aprendizagem de equações do 1.º grau, pensa-se que este estudo poderá contribuir para entender como podemos ajudar os alunos a efetuarem a transição da aritmética para a álgebra e a desenvolverem conceitos específicos relacionados com o ensino e aprendizagem da álgebra. Ponte, Branco e Matos (2009) referem:

> Existem também programas específicos, para trabalhar este ou aquele tópico ou conceito, de que os exemplos mais conhecidos são os applets, muitos dos quais disponíveis na Internet. Estes programas, que por vezes assumem a forma de jogos, são muitas vezes muito úteis para promover a aprendizagem de aspetos específicos da Álgebra." (p. 16-17)

A escolha do tema equações do 1.º grau deve-se a diversos fatores. Um dos fatores é o de a aprendizagem da álgebra ser fundamental para o futuro dos alunos e para o ensino e aprendizagem da Matemática. A posição do National Council of Teachers of Mathematics, NCTM

(2007) sobre a aprendizagem da álgebra é que “ A competência algébrica revela-se importante na vida adulta, quer no trabalho, quer como preparação para o ensino superior. Todos os alunos deveriam aprender álgebra.” (p.39). Outro fator baseia-se na experiência da investigadora quer como aluna, quer como professora de Matemática do ensino básico e secundário. Assim, a mesma confrontou-se com diferentes abordagens das equações do 1º grau. No entanto, num passado recente, a maioria dessas abordagens centravam-se essencialmente na aplicação das regras práticas. Por vezes, numa tentativa, de tornar inteligível o ensino das equações, essas abordagens incidiam mais sobre a aplicação dos princípios de equivalência de forma breve, ou seja, eram efetuadas referências aos princípios de equivalência e logo a seguir eram aplicados na resolução de algumas equações. Também se considera importante a escolha das equações do 1.º grau devido a terem sido diagnosticadas diversas dificuldades em alguns alunos quando este tema é abordado. Estas dificuldades estão relacionadas com o facto dos mesmos não entenderem por vezes o conceito de equação, de incógnita, com o facto de cometerem erros sistemáticos ao resolver as equações e também estão relacionadas com a transição da aritmética para a álgebra. A investigadora pensa que existe a necessidade de refletir sobre diferentes formas de ensinar as equações do 1º grau. Os alunos devem entender os conceitos subjacentes ao ensino e aprendizagem das equações, nomeadamente, o conceito de equação e de incógnita e devem também aprender a efetuar os procedimentos algébricos atribuindo-lhes significados, ou seja, evitar que se utilizem as regras práticas de resolução de equações de forma mecanizada e desprovidas de significado.

O insucesso na disciplina de Matemática afeta toda a sociedade dado que o mesmo tem consequências graves a vários níveis. Pensa-se que todos podem contribuir para ajudar a alterar esta situação. No entanto, os professores de matemática têm um papel fundamental no diagnóstico das causas que contribuem para o insucesso dos alunos na referida disciplina. Pensa-se que cabe ao professor a tarefa de refletir e elaborar propostas que ajudem os alunos a ultrapassar as suas dificuldades. Com este estudo pretende-se, a este nível, refletir e procurar entender como se poderá contribuir para a motivação dos alunos para o ensino e aprendizagem da matemática, e mais concretamente na aprendizagem da álgebra. Considera-se também que é necessária uma constante reflexão sobre a forma como os alunos aprendem e a forma como se ensina. Nunca esquecendo que os alunos que temos hoje são diferentes dos que tivemos e dos que teremos, assim como, as tecnologias disponíveis. Para a investigadora é muito importante que o professor efetue de forma sistemática a análise das tarefas propostas e que se reflita sobre de que forma é que a sua utilização se adequa à tecnologia escolhida e ao que pretende ensinar. Este é um trabalho interminável, devido à panóplia de tecnologias que se tem disponíveis, ao ritmo que surgem novas ferramentas tecnológicas e consequentemente às diferentes potencialidades de utilização.

2. OBJETIVOS E QUESTÕES DO ESTUDO

Este estudo pretende compreender quais são os aspetos relevantes a ter em consideração no ensino e aprendizagem das equações do 1.º grau, de forma que os alunos, do 7º ano de escolaridade, compreendam a sua utilização e os conceitos que lhes são inerentes. Pretende-se refletir sobre a passagem da aritmética para a álgebra e sobre a forma de ensinar os princípios de equivalência.

Dada a importância da utilização da tecnologia no ensino e na aprendizagem da matemática e a diversidade de ferramentas que temos ao nosso dispor, pensa-se que é necessário refletir sobre o contributo das mesmas na aprendizagem dos alunos. Neste estudo pretende-se refletir sobre o ensino e aprendizagem das equações do 1.º grau com uma incógnita através da utilização das *applets, i*nvestigando de que forma é que as mesmas podem funcionar como um instrumento mediador da aprendizagem com o objetivo de contribuírem para que os alunos se apropriem do conceito de equação, de incógnita e dos princípios de equivalência.

Especificamente, pretende-se:

a) Analisar como é que os alunos efetuaram a passagem da aritmética para a álgebra através do recurso a *applets.*
b) Analisar como foi desenvolvido nos alunos o conceito de equação e de incógnita recorrendo a tarefas que envolvem o recurso a *applets*.
c) Refletir sobre a forma como as tarefas que envolveram a utilização das *applets*, contribuíram para a compreensão dos princípios de equivalência das equações do 1.º grau.
d) Compreender de que forma é que as *applets* funcionam como mediadores da aprendizagem.

A utilização das *applets* requer uma reflexão sobre as tarefas que são propostas e a análise das estratégias implementadas na sala de aula. Pretende-se analisar de que forma podemos utilizar esta ferramenta para que a mesma seja uma mais-valia no ensino e aprendizagem das equações do 1.º grau.

3. ORGANIZAÇÃO DO ESTUDO

Este trabalho está estruturado em cinco capítulos. Neste primeiro capítulo, apresenta-se os motivos que conduziram à realização deste estudo, justificando a sua pertinência. Também são apresentados os objetivos e as questões da investigação.

No segundo capítulo, fundamentação teórica, foi referido o pensamento de Vygotsky, nomeadamente os aspetos importantes no âmbito da educação, tais como, a Zona de Desenvolvimento Proximal e a Atividade Mediada, foi focado o ensino e a aprendizagem da álgebra e referidas as tecnologias de informação e comunicação.

No capítulo três, metodologia de investigação, refere a metodologia escolhida e os instrumentos de recolha de dados. Posteriormente, neste capítulo, descreve-se qual é o contexto em que o estudo está inserido e efetua-se a caracterização dos participantes. No final foi apresentada a planificação das atividades desenvolvidas com os alunos e efetuou-se uma breve descrição das aulas onde foi implementada esta investigação.

No capítulo quatro, análise de dados, foram apresentados e analisados os dados recolhidos relacionados com as várias tarefas desenvolvidas em sala de aula.

Por fim, no último capítulo, conclusão, procurou-se responder às questões da investigação. Refletindo-se sobre as tarefas implementadas utilizando as *applets* e a forma como os alunos as efetuaram tendo por base a revisão de literatura. Posteriormente, pretendeu-se indicar alguns caminhos que a investigadora pensa serem importantes para o ensino e aprendizagem das equações do 1.º grau e para trabalho a realizar no âmbito da utilização das tecnologias.

CAPÍTULO II – FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

1. INTRODUÇÃO

Neste Capítulo, primeiramente, é feita uma breve referência ao trabalho desenvolvido por Vygotsky, tentando explicitar os conceitos mais importantes relacionadas com a educação, nomeadamente, o conceito de mediação e de Zona de Desenvolvimento Proximal, que a investigadora considera que são importantes para o desenvolvimento deste estudo. Posteriormente, refere-se uma perspetiva do desenvolvimento da álgebra ao longo da história, algumas conceções do ensino e da aprendizagem da álgebra e sobre o pensamento algébrico e o ensino e a aprendizagem das equações. No final, é analisado o uso de tecnologias de informação e comunicação e das *applets* no ensino e aprendizagem da matemática.

2. O PENSAMENTO DE VYGOTSKY

2.1. BREVE REFERÊNCIA BIOGRÁFICA DE VYGOTSKY

Lev Semenovich Vygotsky nasceu em 1896, na cidade de Orsha na Bielorrússia e faleceu em 1934, com 37 anos, por ter contraído tuberculose. Segundo Oliveira (1992) formou-se em Direito e Literatura. Estudou também medicina e pertenceu ao Instituto de Psicologia de Moscovo tendo trabalhado com os psicólogos Alexander Romanovich Luria e Alexis Nikolaevich Leontiev. Apesar de ter tido uma vida curta, Vygotsky conseguiu efetuar valiosos estudos no âmbito da psicologia. Entre 1917 e 1923, ensinou literatura e psicologia numa escola em Gomel, onde também dirigiu a seção de teatro do Centro de Educação de Adultos e discursou e participou em palestras sobre problemas da literatura e da ciência. Durante o referido período, Vygotsky fundou a revista literária Verask onde publicou a sua primeira pesquisa literária reeditada como A Psicologia da Arte. Em 1924, mudou-se para Moscovo e começou a trabalhar no Instituto de Psicologia e posteriormente, no Instituto de Defectologia, por ele fundado. Ao mesmo tempo, dirigiu um departamento para a educação de crianças fisicamente deficientes e deficientes mentais, ministrou cursos na Academia de Educação Comunista Krupskaia. Entre 1925 e 1934, Vygotsky reuniu ao seu redor um grande grupo de jovens cientistas que trabalhavam nas áreas de psicologia, defectologia e deficiência mental. Teve uma formação médica no instituto médico em Moscovo e posteriormente em Kharkov. Lecionou o curso de psicologia na Ukrainian Psychoneurological Academy. Segundo Fino (2001) na antiga União Soviética o pensamento de Vygotsky, por ter entrado em conflito com a ortodoxia, foi praticamente afastado até ao fim do comunismo. No entanto, através de intercâmbios entre académicos americanos e soviéticos foram traduzidas e publicadas as obras, *Thought and Language* e *Mind in Society. O* trabalho de Vygotsky tornou-se conhecido no ocidente depois da Guerra Fria ter acabado.

2.2. ALGUNS ASPETOS IMPORTANTES DO PENSAMENTO DE VYGOTSKY PARA A EDUCAÇÃO

O trabalho de Vygotsky tem sido alvo de estudo por parte de muitos investigadores devido à sua importância no âmbito da psicologia e devido ao facto de o mesmo se repercutir em diversas áreas, nomeadamente, na área da educação. As teorias de Vygotsky têm sido de grande relevância para compreender o desenvolvimento humano. Oliveira (1992) menciona que referir a perspetiva de Vygotsky é falar da dimensão social relativa ao desenvolvimento humano. Uma das bases das suas ideias é que "…o ser humano constitui-se enquanto tal na sua relação com o outro social.". (p.24). Para a referida autora, as funções psicológicas superiores são de extrema importância para Vygotsky, a mesma menciona:

> …as concepções de Vygotsky sobre o funcionamento do cérebro humano fundamentam-se em sua ideia de que as funções psicológicas superiores são construídas ao longo da história social do homem. Na sua relação com o mundo, mediada pelos instrumentos e símbolos desenvolvidos culturalmente…. (p. 24).

As atividades psicológicas superiores são próprias do ser humano, como exemplo deste tipo de atividades, Oliveira (2000) refere " O ser humano tem a possibilidade de pensar em objetos ausentes, imaginar eventos nunca vividos, planejar ações a serem realizadas em momentos posteriores." (p. 26). O conceito de mediação é de grande importância para Vygotsky. Kozulin (2003) refere que na teoria de Vygotsky o desenvolvimento de processos mentais mais elevados da criança está dependente de agentes de mediação na interação desta com o meio. Assim, existe a necessidade de compreender o conceito de mediação. Segundo Oliveira (2000), "Mediação em termos genéricos, é o processo de intervenção de um elemento intermediário numa relação; a relação deixa, então, de ser direta e passa a ser mediada por esse elemento. " (p. 26).

Em Vygotsky (1978) podemos constatar que a atividade mediada envolve o uso de signos e de instrumentos, para ilustrar a relação entre signo e instrumento na atividade mediada é apresentado o esquema:

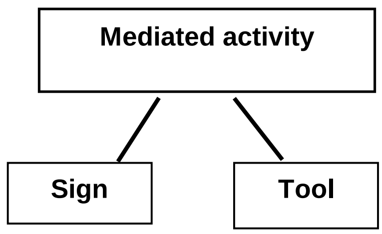


Figura 2.1. Atividade Mediada 1 (p.54)

São também referidos em Vygotsky (1978)

> O uso de instrumentos e o uso de signos partilham algumas propriedades importantes; ambos envolvem a atividade mediada. Mas eles também divergem entre si; os signos são orientados internamente, de acordo com Vygotsky um meio de influência psicológica para o domínio de si mesmo; os instrumentos, por outro lado, são orientados externamente, visando dominar e triunfar sobre a natureza. (p. 127).

No sentido de salientar a importância de atividade mediada e as suas implicações no desenvolvimento das funções psicológicas, devemos considerar que segundo Vygotsky (1978)

> O uso de meios artificiais, a transição para a atividade mediada, muda fundamentalmente, todas as operações psicológicas, assim como o uso de instrumentos amplia ilimitadamente o leque de atividades em que as novas funções psicológicas podem operar. Neste contexto, podemos usar o termo função psicológica superior, ou comportamento superior como referindo-se à combinação de instrumento e signo na atividade psicológica. (p. 55).

Oliveira (2000) considerando os estudos efetuados por Vygotsky e seus colaboradores refere:

> O processo de mediação, por meio de instrumentos e signos, é fundamental para o desenvolvimento das funções psicológicas superiores, distinguindo o homem dos outros animais. A mediação é um processo essencial para tornar possível atividades psicológicas voluntárias, intencionais, controladas pelo próprio indivíduo (p. 33).

Kozulin (2003) refere dois tipos de mediação, uma através de outro ser humano e outra que é a mediação na forma de atividade de aprendizagem organizada. Refere também dois tipos de mediadores, o mediador humano e o mediador simbólico. Em relação à mediação humana, Kozulin (2003) refere que na teoria de Vygotsky o papel de mediador humano é definido "…através da noção de que cada função psicológica aparece duas vezes no desenvolvimento, uma vez sobre a forma de interação atual entre as pessoas, e a segunda vez, como uma forma de internalização dessa função.". (p.19). O referido autor menciona ainda que "…uma das preocupações centrais dos estudos socioculturais inspirados por Vygotsky é a de elucidar como é que as atividades que começam com uma interação entre a criança e o adulto se tornam internalizadas como funções psicológicas da própria criança.". (p.19). Oliveira (2000), ao explicar processo de internalização definido por Vygotsky refere:

> Ao longo da evolução da espécie humana e do desenvolvimento de cada indivíduo, ocorrem, entretanto, duas mudanças qualitativas fundamentais no uso dos signos. Por um lado, a utilização de marcas externas vai-se transformar em processos internos de mediação: esse mecanismo é chamado, por Vygotsky, de processo de internalização. (p. 34).

No que diz respeito aos mediadores simbólicos Vygotsky (1978) refere " Como as palavras, os instrumentos e os signos não-verbais dão aos alunos formas de tornar mais eficientes os seus esforços de adaptação e solução de problemas." (p. 127). De acordo com Kozulin (2003), a teoria de Vygotsky fez a distinção "…entre as experiências produzidas pelo contacto do indivíduo com estímulos ambientais e as experiências moldadas por interações mediadas por ferramentas simbólicas." (p. 23). Este autor refere a contagem pelos dedos como exemplo de um "objeto sempre presente (dedos) pode servir como uma ferramenta simbólica externa que organiza as funções cognitivas envolvidas em operações aritméticas elementares." (p.23). Kozulin (2003) menciona que, de acordo com Vygotsky, o desenvolvimento cognitivo depende do domínio de "…mediadores simbólicos pela criança e na sua apropriação e internalização na forma de ferramentas internalizadas." (p. 24).

Outro conceito criado por Vygotsky foi de Zona de Desenvolvimento Proximal a qual é referida por muitas investigações relacionadas com a educação. A Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP) é definida por Vygotsky (1978) como "a distância entre o nível de desenvolvimento atual, é determinado pela resolução de problema independente e o nível de desenvolvimento potencial determinado através da resolução de um problema sob auxílio do adulto ou em colaboração com colegas mais capazes " (p. 86). Fino (2001) refere:

> De acordo com Wertsch e Stone (1985), Vygotsky introduziu a noção de Zona de Desenvolvimento Proximal num esforço para lidar com duas questões práticas de psicologia educacional: a avaliação das habilidades cognitivas das crianças e a avaliação das práticas de instrução. No primeiro caso para verificar o nível de desempenho individual da criança (nível actual de desenvolvimento) e o nível a que seriam capazes de chegar funcionando interpsicologicamente (nível potencial de desenvolvimento). No segundo caso para a avaliação da instrução, uma vez que Vygotsky defendia que o funcionamento intrapsicológico cresce a partir do funcionamento interpsicológico. Sobre este segundo caso, o argumento de Vygotsky consiste na afirmação de que a instrução só é boa quando faz prosseguir o desenvolvimento, isto é, quando desperta e põe em marcha funções psicológicas que estão em processo de maturação ou na ZDP. Sendo por esta via que a instrução exerce um papel importante no desenvolvimento. (p. 5)

As implicações do conceito de Zona de Desenvolvimento Proximal na educação é de extrema importância. Oliveira (2000) refere:

> O processo de ensino e aprendizagem deve ser construído, ter como ponto de partida o nível de desenvolvimento real da criança e o ponto de chegada os objetivos estabelecidos os quais é suposto que estejam adequados à idade e ao nível de conhecimentos e habilidades de cada grupo de crianças. O processo deve ter em consideração as possibilidades da criança, ou seja, o seu nível de desenvolvimento potencial. (p. 62).

Segundo a mesma autora, "…a escola tem o papel de fazer a criança avançar em sua compreensão do mundo a partir de seu desenvolvimento já consolidado e tendo como etapas posteriores, ainda não alcançadas." (p. 62). Mais à frente a autora refere ainda que " O professor tem o papel explícito de interferir na zona de desenvolvimento proximal dos alunos, provocando avanços que não ocorreriam espontaneamente." (p. 62).

O pensamento de Vygotsky tem fundamentado estudos que recorrem ao uso das tecnologias como instrumento mediador. Peixoto & Carvalho (2011) mencionaram:

> O estudo sobre mediação e mediação pedagógico-didática, por meio das tecnologias, fundamentado, principalmente, no pensamento vigotskiano, nos provocou inúmeras reflexões. Compreender a tecnologia como uma dimensão sócio-cultural permitiu compreender sua utilização na perspectiva de situações instrumentadas e socialmente construídas do conhecimento…”.(p.37).

Segundo Bussi e Mariotti (2008), a mediação é um termo muito usado na literatura educacional. Sendo este termo usado para referir a potencialidade de promover a relação entre os alunos e os conhecimentos matemáticos, especialmente, através da realização de uma tarefa. Também referem que a ideia de mediação em relação às tecnologias está amplamente presente na literatura atual da educação matemática.

3. O ENSINO E A APRENDIZAGEM DA ÁLGEBRA

3.1. UMA PERSPETIVA DO DESENVOLVIMENTO DA ÁLGEBRA AO LONGO DA HISTÓRIA

Ao longo da história, a álgebra passou por várias fases de desenvolvimento, tendo as mesmas sido objeto de estudo por parte de vários investigadores. Surgiram, assim, várias perspetivas relacionadas com o desenvolvimento da álgebra. Uma das perspetivas está relacionada com o desenvolvimento da notação. Segundo Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), uma das perspetivas ”…muito frequente nos manuais de história da Matemática, é aquela que distingue três momentos no desenvolvimento da álgebra em função das fases evolutivas da linguagem algébrica: a retórica, ou verbal, a sincopada e a simbólica.” (p. 79). A retórica ou verbal, usada já em 1700 a.C. pelos Babilónios, é caracterizada pela descrição em linguagem corrente da resolução de problemas matemáticos. Não eram utilizados ”…símbolos nem abreviações para expressar o pensamento algébrico.” (Fiorentini, Miorim, Miguel,1993, p. 79). A palavra *Álgebra* tem origem na palavra árabe *al-jabr,* que significava ”restauração”. Esta palavra foi usada no título do livro, Hisab al-jabr w'al muqabalah, escrito por volta do ano 830 pelo matemático Mohammed ibn-Musa al-Khowarizmi. No referido livro a linguagem utilizada inseria-se na fase retórica. Esta fase está relacionada com a álgebra desenvolvida antes de Diofanto de Alexandria, matemático e filósofo grego considerado o “ pai da álgebra”. Pouco se conhece da sua vida, presumindo-se que tenha vivido numa época situada algures no século III. Segundo Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), Diofanto introduziu um símbolo, a letra do alfabeto grego, “sigma” para representar a incógnita, utilizou formas mais abreviadas de representar as equações, dando início à fase sincopada. Na fase sincopada, eram utilizadas palavras abreviadas e letras para representar a incógnita. Os referidos autores mencionam que este estilo foi utilizado pelos algebristas italianos do século XVI. A fase simbólica é considerada a que corresponde à utilização de símbolos. O principal matemático que introduziu a álgebra simbólica foi François Viéte (1540-1603), este inseriu as vogais para “…representar quantidades constantes e consoantes para quantidades incógnitas.” (Fiorentini, Miorim e Miguel,1993, p. 80). No entanto, a álgebra só passou a ser completamente simbólica com René Descartes (1596-1650), matemático e filósofo francês. René Descartes utilizou as primeiras letras do alfabeto para quantidades fixas e as últimas letras para as incógnitas e variáveis.

3.2. CONCEÇÕES DO ENSINO E DA APRENDIZAGEM DA ÁLGEBRA

Existem várias conceções do ensino da álgebra relacionadas com a evolução histórica da álgebra e com as diferentes formas de abordagens didáticas. Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), relacionando o desenvolvimento histórico da álgebra com diferentes conceções de ensino da mesma, definem três conceções de educação algébrica que consideraram dominantes. A primeira, a linguístico-pragmática, relativa ao século XIX e primeira metade do século XX, é considerada como aquela em que "…a aquisição, ainda que mecânica, das técnicas requeridas pelo "transformismo algébrico[1] "…seria necessário e suficiente para que o aluno adquirisse a capacidade de resolver problemas…". (p. 83). A segunda conceção, a fundamentalista-estrutural é associado ao Movimento da Matemática Moderna. Segundo Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), "O Movimento da Matemática Moderna iria contrapor a essa conceção linguístico-pragmática da educação algébrica uma outa conceção de cunho linguístico, que denominaremos de fundamentalista-estrutural." (p. 84). Nesta conceção da álgebra, em relação à abordagem de conteúdos algébricos, Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) referem:

> …prevaleceu a crença de que a introdução de propriedades estruturais das operações, que justificassem logicamente cada passagem presente no transformismo algébrico, capacitaria o estudante a identificar e aplicar essas estruturas nos diferentes contextos em que estivessem subjacentes. (p. 84).

A terceira e última conceção a que os referidos autores chamaram de fundamentalista-analógica, envolve as duas conceções anteriormente referidas. Fiorentini, Fernandes e Cristovão (2005) mencionam:

> A terceira concepção - a fundamentalista-analógica - procura fazer uma síntese entre as duas anteriores, pois tenta recuperar o valor instrumental da álgebra e preserva a preocupação fundamentalista, só que não com base nas propriedades estruturais, mas, sim, através do uso de modelos analógicos geométricos (blocos de madeira ou mesmo figuras geométricas) ou físicos (como a balança) que visualizam ou justificam as passagens do transformismo algébrico. (p. 6)

Nas três conceções acima referidas Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) consideram que existe um ponto em comum didaticamente negativo. Assim, segundo Fiorentini, Fernandes e Cristovão (2005) referem:

[1] "Estamos utilizando a expressão transformismo algébrico para designar o processo de obtenção de expressões algébricas equivalentes mediante o emprego de regras e propiedades válidas." (Fiorentini, Miorim e Miguel,1993, p. 83)

> O ponto problemático e comum entre essas três concepções, segundo Fiorentini et al. (1993), é que elas praticamente reduzem o ensino da álgebra aos seus aspectos linguísticos e transformistas, dando mais ênfase à sintaxe da linguagem algébrica que ao pensamento algébrico e seu processo de significação (a semântica). Em outras palavras, as três concepções enfatizam o ensino de uma linguagem algébrica já constituída, priorizando o domínio, por parte do aluno, de habilidades manipulativas das expressões algébricas. Além disso, a álgebra não se reduz a um instrumento técnico-formal que facilita a resolução de certos problemas. Ela é, também, uma forma específica de pensamento e de leitura do mundo. (p.6).

Ponte (2006) referindo-se ao ensino e aprendizagem da álgebra menciona várias abordagens didáticas e várias correntes diferenciadas por vários autores. Neste contexto refere três correntes distinguidas por Lins e Giménez, mencionando:

> A primeira corrente é o que designam por visão “letrista”, que reduz a Álgebra exclusivamente à sua vertente simbólica. Esta visão tem uma versão “pobre”, em que o objectivo é aprender a manipular os símbolos (por treino e prática) e tem uma versão “melhorada” segundo a qual o objectivo é aprender a manipular correctamente os símbolos, recorrendo a apoios intuitivos (de novo com destaque para a balança). (p.16).

Ponte (2006) refere que a segunda corrente é aquela que “…vê a Álgebra como Aritmética generalizada.” (p.16). Segundo o autor “…procura-se agora valorizar a linguagem algébrica como meio de representar ideias e não apenas como um conjunto de regras de transformação de expressões simbólicas.” (p.16). Em relação à terceira corrente Ponte (2006) refere que a mesma “…corresponde à visão “estruturalista” subjacente ao movimento da matemática moderna. Para esta tendência, a atenção deve centrar-se nas estruturas algébricas abstractas, ou seja, nas propriedades das operações numéricas ou transformações geométricas.” (p.16). O referido autor menciona também uma quarta corrente, referindo que “:…Lins e Giménez (1997) discutem uma quarta corrente, em que a Álgebra é encarada como uma actividade. Esta actividade pode desenvolver-se sobretudo a partir de um contexto, mas pode também assumir um cunho investigativo ou, de preferência, englobar os dois aspectos.” (p. 16).

Em relação à Educação Algébrica e ao trabalho a desenvolver, Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) sustentam que a primeira etapa será o trabalho com situações-problema cujo ”…objetivo é chegar às expressões simbólicas através da análise de situações concretas” (p. 90). Para os referidos autores, através deste trabalho possibilita-se “…a construção de uma linguagem simbólica que seja significativa para o estudante.” (Fiorentini, Miorim e Miguel,1993, p. 90). A segunda etapa será a de partir da expressão algébrica e tentar atribuir-lhe os significados que ela permite. Na terceira e última etapa, do ponto de vista de Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), “ … a ênfase deve recair sobre o transformismo, isto é, sobre o modo como uma expressão algébrica se transforma em outra equivalente e sobre os procedimentos que legitimam essas transformações.”. (p. 90). Existe a necessidade de salientar que os autores mencionam que as referidas etapas devem ser efetuadas não cumprindo uma ordem rígida, mas sim, de forma que se interliguem, para possibilitarem ao estudante rever ideias mal construídas e permitir o acesso à construção sólida do pensamento algébrico.

3.3. O PENSAMENTO ALGÉBRICO

No ensino da álgebra, durante anos e até a um passado recente, privilegiou-se a simplificação de expressões e a resolução de equações, dando enfase à aplicação de regras e de processos que eram decorados pelos alunos. Ponte (2006) refere-se a uma visão redutora da álgebra, mencionando que " A visão mais habitual da Álgebra é que se trata simplesmente de regras de transformação de expressões (monómios, polinómios, frações algébricas, expressões com radicais…) e processos de resolução de equações." (p.6). Com a introdução do conceito de pensamento algébrico, que assume diversas perspetivas, surge uma nova visão da álgebra no contexto escolar. Ponte (2006) refere "A melhor forma de indicar os grandes objetivos do estudo da Álgebra, ao nível escolar, é dizer então que se visa desenvolver o pensamento algébrico dos alunos. Este pensamento inclui a capacidade de manipulação de símbolos mas vai muito além disso.". (p.7).

Vários investigadores efetuaram estudos sobre a forma de desenvolver o pensamento algébrico nos alunos. Sendo diversas as perspetivas de desenvolvimento do pensamento algébrico e as reflexões sobre como o mesmo pode ser desenvolvido desde os primeiros anos de escolaridade. Kieran (2004), considerando o pensamento algébrico, refere três tipos de atividades. Um dos tipos de atividades referidas pela autora como essenciais são as "the global meta-level". Estas atividades usam a álgebra como ferramenta, mas podem ser resolvidas por outros processos sem recorrer a ela. Para Kieran (2004), ao rejeitarmos este tipo de atividades remove-se qualquer contexto ou necessidade para a utilização de álgebra. Elas são consideradas fundamentais para a construção de significado em álgebra e para o desenvolvimento de formas de pensar cruciais para o sucesso na mesma. Tornam possível ter uma visão do pensamento algébrico em níveis iniciais de escolaridade que é compatível com certas perspetivas atuais sobre a atividade algébrica em níveis posteriores. Com base na atividade "the global meta-level", para a referida autora, o pensamento algébrico nos níveis iniciais de escolaridade está relacionado com o desenvolvimento de formas de pensar através de atividades que não sejam exclusivas da álgebra. Em Arcavi (2006), João Pedro da Ponte refere os problemas matemáticos que frequentemente podem ser resolvidos por diversos métodos recorrendo a abordagens de diferentes áreas da Matemática. Outro autor que escreveu sobre o pensamento algébrico foi James Kaput. Ponte (2009) refere que James Kaput considera:

> (…) o pensamento algébrico é algo que se manifesta quando, através de conjecturas e argumentos, se estabelecem generalizações sobre dados e relações matemáticas, expressas através de linguagens cada vez mais formais. Este processo de generalização pode ocorrer com base na Aritmética, na Geometria, em situações de modelação matemática e, em última instância, em qualquer conceito matemático leccionado desde os primeiros anos de escolaridade. (p.9)

Abraham Arcavi não refere o pensamento algébrico mas sim, o sentido de símbolo e explica esta escolha em Arcavi (2006) mencionando:

> (…) se os símbolos são o instrumento principal da Álgebra, podemos concentrarmo-nos no symbol sense em relação com a noção geral de "sense making", criação de significados em geral e não somente na álgebra. De alguma maneira o symbol sense é um caso específico de algo que me preocupa muitíssimo e que é o "sense making" em Matemática. Eu penso que a chave do divórcio entre os nossos alunos e a Matemática, se deve a esse corte entre os significados e o formalismo. (p. 363)

Arcavi (2006a) refere que para apoiar o desenvolvimento do sentido de símbolo nos alunos, uma das formas podem ser as relativas a materiais de estudo e práticas em sala de aula. Para o referido autor, esta forma deve centrar-se e cultivar a procura dos significados dos símbolos, a solução de problemas ao mesmo tempo e antes da aplicação das regras de forma automática, a paciência que é necessária para a aprendizagem. Especificamente, a capacidade de aceitar respostas parciais, e o sentido de finalidade do uso dos símbolos e o poder que o seu uso e compreensão nos dá sobre uma diversidade de situações. Ponte, em Arcavi (2006), fala sobre os problemas matemáticos que frequentemente podem ser resolvidos por diversos métodos recorrendo a abordagens de diferentes áreas da Matemática. Kaput (1999) refere que o desafio é encontrar maneiras para tornar o poder da álgebra acessível a todos os alunos. Considerando que o desafio é o de encontrar formas de ensino que permitam que os alunos aprendam com compreensão. Windsor (2010) refere o desenvolvimento do pensamento algébrico através da análise aprofundada de problemas matemáticos. Esta abordagem de resolução de problemas baseia-se em considerar, ver e pensar sobre conceitos matemáticos dentro de um problema.

O ensino da álgebra, passou a ser visto de uma forma diferente da referida inicialmente e neste contexto, o de desenvolver o pensamento algébrico, o NCTM (2007), estabelece normas para a Álgebra, referindo que os programas de ensino deverão dar a todos os alunos a capacidade de

> - Compreender padrões, relações e funções;
> - Representar e analisar situações e estruturas matemáticas usando símbolos algébricos;
> - Usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas;
> - Analisar a variação em diversos contextos. (p. 39).

3.4. O ENSINO E A APRENDIZAGEM DAS EQUAÇÕES

No ensino das equações do 1º grau, pode-se constar que têm existido mudanças na sua abordagem ao longo dos tempos. Em Portugal também podemos constatar que existem mudanças. Ponte (2004a) analisou quatro manuais escolares portugueses, de diferentes épocas. "… um do fim do século XIX, outro de meados do século XX, outro da época da Matemática Moderna (anos 70) e um da actualidade (anos 90)." (p. 149). O referido investigador constatou que existe uma grande evolução em diversos aspetos na forma como são abordadas as equações do 1º grau. Segundo Ponte (2004a)

> Estes quatro livros testemunham uma evolução muito significativa no ensino das equações ao longo de mais de 100 anos. Desde logo, o nível etário dos alunos que estudam este conceito foi baixando dos 15 aos 12 anos. Ao mesmo tempo, a abordagem mais formal e abstracta foi dando origem a abordagens muito mais simples. Enquanto que no século XIX se estudavam as expressões algébricas (incluindo fracções algébricas) e depois as equações numéricas e literais e logo a seguir os sistemas de equações, mais tarde passou-se a diferenciar várias etapas neste estudo, a realizar em anos diferentes: equações numéricas do 1º grau, equações literais do 1º grau e sistemas de equações. As expressões algébricas deixaram de ser estudadas anteriormente, como pré-requisito para as equações, para passarem a ser introduzidas a partir do próprio estudo das equações. A intenção é, certamente, a de motivar o estudo das expressões algébricas, um tema reconhecidamente árido e pouco interessante, através do estudo das equações. (p. 168).

No entanto, apesar de existir uma evolução na forma de ensinar as equações do 1º grau, subsistem muitas dificuldades nos alunos. Estas dificuldades estão relacionadas com a forma como os mesmos efetuam a passagem da aritmética para a álgebra, como adquirem o conceito de equação e de incógnita, como resolvem as equações e os problemas algébricos. Neste contexto, e numa tentativa quer de entender os problemas e as dificuldades dos alunos no ensino e aprendizagem das equações, quer visando a criação de metodologias/estratégias que têm como objetivo ultrapassar essas mesmas dificuldades, foram efetuadas várias investigações. Sobre o ensino e aprendizagem da álgebra, Booth (1988) considera que uma das formas de entender porque é que existem dificuldades na aprendizagem da álgebra, é identificar o tipo de erros que os alunos praticam, e as razões que são subjacentes a esses mesmos erros. O autor refere um projeto efetuado no Reino Unido, entre 1980 e 1983, que envolveu estudantes de vários níveis de ensino com idades desde os 13 até aos 16 anos. Nesse estudo Booth (1988) refere que, não obstante as diferentes idades e experiências em álgebra, foram identificados erros semelhantes que podem ser atribuídos a aspetos, tais como: o facto de os alunos se concentrarem na atividade algébrica e na natureza das respostas; o uso da notação em álgebra; o significado das letras e variáveis; e o tipo de relações e métodos utilizados na aritmética.

Kieran (1992) refere que a resolução de equações envolve o procedimento formal de realizar a mesma operação em ambos os membros da equação. Refere também métodos que envolvem técnicas informais, tais como os que envolvem a substituição numérica, "*cover-up*" e de" trabalhar para trás", ou seja, utilizar as operações inversas. A referida autora menciona vários métodos usados para resolver equações, considerando-os de diversos tipos:

(i) Utilização de factos numéricos;
(ii) Utilização de técnicas de contagem;
(iii) *Cover-up*;
(iv) Desfazer (utilizando as operações inversas);
(v) Substituição (tentativa e erro);
(vi) Transposição (mudar de membro – mudar de sinal);
(vii) Realizar a mesma operação em ambos os membros.

Segundo Kieran (1992) os dois primeiros tipos de método, geralmente, estão relacionados com as aprendizagens efetuadas pelos alunos, nos primeiros anos de escolaridade, em que são usadas técnicas informais. Alguns exemplos dados pela autora relacionados com estes tipos de métodos foram: 2 + $\square$ = 5; 5 + n = 8 em que 5 mais 3 é 8 (utilização de factos numéricos) e resolver 5 + n = 8, contando 5, 6, 7, 8 e aperceberem-se que foram nomeados três números após o 5, até chegar ao 8 (exemplo de técnicas de contagem). No que diz respeito ao método do tipo *Cover-up*, a investigadora refere como um exemplo a resolução da equação $2x + 9 = 5x$ efetuada da seguinte forma: 9 é igual a $3x$ devido a $2x + 3x$ ser igual a $5x$ então $x = 3$. Sobre o quarto tipo, o de desfazer, este método é análogo ao utilizado na resolução de problemas aritméticos utilizando as operações inversas. Como exemplo a equação $2x + 8 = 18$, em que se considera o resultado numérico do lado direito, 18, e se prossegue da direita para a esquerda "desfazendo" cada operação através da realização da operação inversa, ou seja, 18-8= 10 e 10:2=5. O método do tipo substituição, por tentativa e erro, é referido como aquele que consiste em resolver a equação através da substituição da incógnita por vários valores até obter uma igualdade verdadeira. Como por exemplo: $2x + 3 = 11$ ao substituir x por 3 temos 9=11 que é falso e substituindo $\mathbf{x}$ por 4 temos 11=11 que é verdade. O penúltimo tipo de método acima mencionado, transposição, consiste em aplicar as regras práticas para a resolução de equações. O último tipo, tal como o nome indica, consiste em realizar a mesma operação em ambos os membros. Por exemplo: $2x + 4 = 10 <=> 2x + 4 - 4 = 10 - 4 <=> 2x = 6 <=> \frac{2x}{2} = \frac{6}{2} <=> x = 3$.

Kieran (1992), menciona que embora muitos professores considerem o método "transposição" como sendo uma forma abreviada do método de realizar a mesma operação em ambos os membros. Estes dois métodos parecem ser entendidos pelos alunos de forma diferente. Realizando a mesma operação em ambos os membros dá-se ênfase à simetria da equação, o que não acontece no processo de transposição. Existindo indícios que sugerem que muitos estudantes que usam transposição aplicam as regras práticas sem entender o que fazem, ou seja de uma forma mecanizada.

4. AS TECNOLOGIAS DE INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO

4.1. O USO DE TECNOLOGIAS DE INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO NO ENSINO E APRENDIZAGEM

O uso das tecnologias de informação e comunicação já fazem parte das nossas vidas. A velocidade com surgem novas tecnologias e que outras se tornam obsoletas, exigem que o professor esteja em constante atualização e investigação. Estudar como funcionam as novas ferramentas, quais as suas aplicações no ensino e aprendizagem, que atividades podem ser desenvolvidas através das mesmas, qual a mais-valia dessa utilização são atividades que são indispensáveis na vida de um professor. Ponte e Canavarro (1997) referem:

> Uma escola que não proporcione aos seus alunos e professores a oportunidade de se poderem envolver duma forma activa no estudo de novos problemas, no prosseguimento de novos interesses, na criação de novas actividades e formas de trabalho, em suma, no desenvolvimento de novas aprendizagens falha necessariamente nos seus objectivos. (p. 24).

O professor ao utilizar as tecnologias deverá refletir sobre de que forma é que essa utilização pode conduzir a uma mudança significativa na aprendizagem dos alunos. Ponte e Canavarro (1997) mencionam:

> Numa época em que todos são unânimes em reconhecer a crise da escola, mais do que introduzir alterações de alcance meramente cosmético, interessa usar o computador para facilitar a criação de novas dinâmicas de aprendizagem, alterando o processo de construção do saber e as relações entre os diversos intervenientes do processo educativo. (p. 24)

Estes autores referindo a utilização do computador como uma ferramenta baseada na perspetiva de Vygotsky mencionaram:

> De acordo com diversas correntes actuais, da psicologia cognitiva, o conhecimento desenvolve-se sobretudo através do uso das ideias na tentativa de compreender situações e resolver problemas concretos. Esta visão apoia-se na perspectiva de Vygotsky, para quem o conhecimento resulta de interiorização pelos indivíduos de ferramentas culturais já preexistentes na sociedade. Neste sentido, o computador, perspectivado como uma nova ferramenta cultural pode ser um elemento fundamental na aprendizagem. (Ponte e Canavarro,1997, p. 30).

Relativamente à forma como o computador pode ser utilizado no contexto educativo. Segundo Ponte e Canavarro (1997)

> Uma outra possibilidade será a utilização do computador como suporte da criação de novos contextos educativos. Programas envolvendo situações problemáticas e mesmo alguns jogos educacionais usados com imaginação podem constituir actividades de aprendizagem envolventes e estimulantes. (p. 31).

Os autores acima mencionados também referem:

> No que se refere ao ensino da Matemática, as novas tecnologias potenciam uma reformulação do trinómio saber-aluno-professor, de modo a que:
>
> - Na aprendizagem se contacte com uma Matemática mais viva, onde há lugar para interrogações, conjecturas, provas e refutações, isto é, muito mais próxima do espírito investigativo que verdadeiramente caracteriza a actividade dos matemáticos;
> - O aluno passe a desempenhar um papel muito mais activo e autónomo, definindo e aprofundando os seus domínios de interesse, e usando com desembaraço e espírito crítico uma variedade de ferramentas para o seu estudo;
> - O professor veja reconhecido e valorizado o papel fundamental que só ele pode desempenhar na criação, condução e contínuo aperfeiçoamento de situações de aprendizagem. (p.33).

Ao utilizar a tecnologia o professor deve refletir sobre os vários aspetos acima mencionados, de forma que a sua aplicação, em sala de aula, permita a exploração das potencialidades que lhe são inerentes.

4.2. AS APPLETS NO ENSINO E APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA

As *applets* são aplicações interativas, ou programas interativos, que normalmente são programados em java. Pode-se aceder às *applets Java* através da internet. No entanto, estes requerem uma instalação prévia do Java, que pode ser obtido, gratuitamente, fazendo o *download* no *site java.com.* Neste *site*, pode ler-se a seguinte informação "A tecnologia de *plug-in* Java faz parte do *Java Runtime Environment* e estabelece um conexão entre browsers populares e a plataforma Java.". Segundo Duarte (2012)

> As applets são ferramentas de simples utilização e adequadas para apoiarem objetivos específicos de aprendizagem que exigem, em geral, uma ligação à Internet, pois funcionam on-line numa página Web. No entanto, já existem hoje alguns sites que permitem instalar as aplicações no computador e funcionar com elas de forma autónoma (ver em http://nlvm.usu.edu). (p. 30).

Existem *applets* direcionadas para o ensino e aprendizagem da matemática que se podem encontrar em diversos *sites*, como por exemplo, no *site Wisweb*[2], que pertence ao Instituto Freudental. Podemos encontrar várias *applets* direcionadas para a educação matemática de alunos que frequentam o 3.º ciclo e secundário. Relativamente às potencialidades de utilização das mesmas, no referido *site* pode ler-se "…para explorar uma situação-problema, para descobrir uma representação ou um conceito para construir e explorar objetos 3D, ou para a prática de uma habilidade". Existem também outros *sites* onde podemos obter as *applets*, no entanto, devemos sempre ter o cuidado de proceder a uma escolha criteriosa.

Sobre as potencialidades das *applets* ensino e aprendizagem da matemática, Figueiredo e Palha (2005), mencionaram:

> Este tipo de recursos permite trabalhar os conceitos matemáticos de uma forma diferente, estimulante para os alunos, possibilitando a diferenciação na sala de aula. De facto, o carácter interactivo destes applets, aliado a um contexto de resolução de problemas, onde não é o professor mas o computador, ou o próprio aluno com ajuda do computador, a validar as respostas, cria um ambiente onde o aluno se sente à vontade para arriscar, experimentar e explorar, sendo convidado a analisar as suas tentativas. (p. 6).

Os referidos autores mencionaram também "A facilidade de compreensão destes *applets* que apelam fundamentalmente ao conhecimento informal dos alunos torna possível tratar os conceitos de uma forma natural e intuitiva, constituindo, desta forma, uma base sólida para um trabalho, posterior, mais formal." (p.7).

A escolha das *applets* implica que se examine se as mesmas são adequadas aos conceitos e tópicos que se quer trabalhar e se estão bem construídas. Devem efetuar-se várias simulações tentando esgotar todas as suas potencialidades e estar sempre atento aos possíveis erros das mesmas.

---

[2] Pode-se aceder a este *site* em http://www.fi.uu.nl/wisweb/en/

CAPÍTULO III – METODOLOGIA DE INVESTIGAÇÃO

1. A ESCOLHA DA METODOLOGIA

Neste estudo foi utilizada uma metodologia de natureza qualitativa. De acordo com Bogdan e Biklen (1994), a investigação qualitativa tem cinco características. A primeira característica refere que “Na investigação qualitativa a fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal.”. (p.47). A segunda característica referida pelos mesmos autores é de que:

> A investigação qualitativa é descritiva. Os dados recolhidos são em forma de palavras ou imagens e não de números. Os resultados escritos da investigação contêm citações feitas com base nos dados para ilustrar e substanciar a apresentação. Os dados incluem transcrições de entrevistas, notas de campo, fotografias, vídeos, documentos pessoais, memorandos e outros registos oficiais. Na sua busca de conhecimento, os investigadores qualitativos não reduzem as muitas páginas contendo narrativas e outros dados a símbolos numéricos. Tentam analisar os dados em toda a sua riqueza, respeitando, tanto quanto o possível, a forma em que estes foram registados ou transcritos. (p.48).

Em terceiro lugar, a característica da investigação qualitativa referida por Bogdan e Biklen (1994) reside no facto de “Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos.”. (p. 49). A quarta característica prende-se com a forma como os investigadores analisam os dados. Segundo os mesmos autores, “Não recolhem dados ou provas com o objetivo de confirmar ou infirmar hipóteses contruídas previamente; ao invés disso, as abstrações são construídas à medida que os dados particulares que foram recolhidos se vão agrupando.”. (p.50). Por fim, a quinta característica referida é a de que “O significado é de importância vital na abordagem qualitativa. Os investigadores que fazem uso deste tipo de abordagem estão interessados no modo como diferentes pessoas dão sentido às suas vidas.”.(p.50).

Tentando entender melhor o papel do investigador e dado que a investigadora assume o papel de professora de matemática durante este estudo, pensa-se que será importante refletir sobre a postura do investigador em sala de aula, quando efetua uma investigação qualitativa. Bogdan e Biklen (1994) estabelecendo analogias e diferenças entre a investigação qualitativa e o que os professores fazem:

> Muitas pessoas inteligentes e leigas são bons observadores do mundo que as rodeia, procedem a formas sistemáticas de questionação e chegam a conclusões. Os bons professores fazem-no de forma consistente. O que eles fazem é, de certo modo, investigação qualitativa, mas difere nalguns aspectos. Em primeiro lugar, o dever principal do observador é o de conduzir investigação; não tem de perder tempo a elaborar currículos, a dar aulas e a disciplinar os alunos. O investigador pode, pois, devotar-se à investigação de alma e coração. De igual modo, os investigadores procedem com rigor no que diz respeito ao registo detalhado daquilo que descobrem. Conservam os seus dados. (p. 64).

Considerando as características do estudo e os aspetos acima descritos, foi escolhida uma metodologia de natureza qualitativa. Existe a necessidade de dar uma especial atenção a todo o processo realizado pelos alunos devido a diversos fatores. Estes fatores estão relacionados com o facto do estudo se basear na análise do trabalho desenvolvido por quatro alunos e das questões da investigação estarem relacionadas com a forma como os alunos efetuam a transição da aritmética para a álgebra, com o desenvolvimento nos alunos do conceito de equação e de incógnita e de se pretender entender como é que a utilização das *applets* podem contribuir para a compreensão dos princípios de equivalência e de que forma funcionam como mediadores da aprendizagem.

Procurou--se descrever a forma como os alunos realizaram as tarefas, dando uma especial atenção ao processo, sendo efetuadas citações e transcrições dos dados recolhidos utilizando vários instrumentos de análise criados para o efeito. Nesta investigação optou-se pelo estudo de caso. Segundo Merriam citado por Ponte (2006a) dever-se-á utilizar um estudo de caso, quando:

> Não se pergunta "o quê?", "quantas?", mas sim "como?", "porquê?";
> A situação é de tal modo complexa que não permite a identificação das variáveis eventualmente relevantes;
> -Se pretende descobrir interacções entre factores significativos especificamente característicos dessa entidade;
> Se pretende uma descrição ou uma análise profunda e global de um fenómeno a que se tem acesso directo;
> -Se quer compreender melhor a dinâmica de um dado programa ou processo. (p.15).

Relativamente à seleção das fontes de dados, Stake (2007) considera que "O investigador deverá possuir a intuição de um conhecedor para selecionar as melhores pessoas, lugares e ocasiões. "Melhores" normalmente significa aqueles que nos poderão ajudar da melhor maneira a compreender o caso, quer sejam representativos ou não. (p. 73).

Em relação à forma como pode ser caracterizado um estudo de caso, Ponte (1994) mencionou:

> Um estudo de caso pode ser caracterizado como um estudo de uma entidade bem definida como um programa, uma instituição, um sistema educativo, uma pessoa ou uma unidade social. Visa conhecer em profundidade o seu "como" e os seus "porquês" evidenciando a sua unidade e identidade próprias. É uma investigação que se assume como particularista, isto é, debruça-se deliberadamente sobre uma situação específica que se supõe ser única em muitos aspetos, procurando descobrir o que há nela de mais essencial e característico. (p.3).

Foi efetuada a recolha de dados com base nos diálogos estabelecidos ao longo da investigação, na forma como os alunos realizaram as tarefas propostas, nas gravações que efetuou dos procedimentos efetuados através do computador e nas gravações áudio, nas respostas dadas pelos alunos nas entrevistas informais e em documentos e registos efetuados pela investigadora.

2. OS INSTRUMENTOS DE RECOLHA DE DADOS

Neste estudo, procurou-se diversificar os instrumentos de recolha de dados. Recorreu-se a entrevistas, a registos escritos pelos alunos, ao diário de bordo, a gravações dos procedimentos efetuados pelos alunos no computador e a gravações áudio.

No decorrer das aulas tentou-se efetuar o registo da forma como os alunos realizaram as tarefas, das questões que colocavam, do debate de ideias, dos diálogos. Enfim, de tudo o se considerou pertinente para posteriormente efetuar a análise. Recorreu-se para o efeito ao diário de bordo. Segundo Ponte (2004) "A observação participante é frequentemente apoiada num diário de bordo ou de registos, onde o investigador toma as suas notas descritivas e reflexivas sobre os acontecimentos que presenciou na sala de aula (…)." (p. 13)

Segundo Bogdan e Biklen (1994), " As notas de campo devem ser detalhadas e descritivas, mas não devem assentar nas suposições que o investigador faz acerca do meio." (p.172).

Foram também efetuadas entrevistas na maioria das vezes através de conversas informais, quer com os alunos que participaram no estudo, quer com a professora que lecionava as aulas à turma onde estavam inseridos os referidos alunos. Estas conversas informais, efetuadas ao longo do trabalho de campo, tiveram o objetivo de recolher dados descritivos na 1ª pessoa de forma a possibilitarem maior conhecimento da forma de pensar dos participantes e também permitir à investigadora uma reflexão constante sobre o trabalho que estava implementar. Segundo Bogdan e Biklen (1994), existem duas formas de utilizar as entrevistas:

> Podem constituir a estratégia dominante para a recolha de dados ou podem ser utilizadas em conjunto com a observação participante, análise de documentos e outras técnicas. Em todas estas situações, a entrevista é utilizada para recolher dados descritivos na linguagem do próprio sujeito, permitindo ao investigador desenvolver intuitivamente uma ideia sobre a maneira como os sujeitos interpretam aspectos do mundo. (p. 134)

Nesta investigação recorreu-se à entrevista não como técnica dominante, mas sim, de forma a permitir recolher dados descritivos em conjunto com a recolha de outros elementos. Foi essencial, para o estudo, a gravação dos procedimentos efetuados pelos alunos, quando estes realizavam as tarefas no computador utilizando as *applets*. Também foi efetuada a gravação do ecrã do computador utilizando um programa específico[3] e procedeu-se à gravação áudio, quer nas entrevistas, quer durante a realização de algumas tarefas. O recurso a gravações prende-se com o facto de permitir uma análise posterior mais detalhada e inserida no contexto de forma a complementar a informação registada. Foi efetuada a aplicação de questionários, onde foram alvo de análise as produções escritas dos alunos. Para o efeito, pediu-se aos alunos, ao mesmo tempo que realizavam as tarefas, que efetuassem o registo escrito dos procedimentos efetuados em algumas tarefas. Estes registos foram de grande importância para a investigação, na medida em que permitiram entender melhor a forma como os alunos realizaram algumas das tarefas recorrendo às *applets* e investigar como os mesmos conseguiram expressar as suas ideias por escrito.

[3] vidshot capturer retirado da internet em http://www.geovid.com/VidShot_Capturer/

3. CONTEXTO DO ESTUDO

O estudo foi realizado numa escola do 2.º e 3.ºciclos que é a sede de um agrupamento de escolas, situada na margem sul do rio Tejo, no distrito de Setúbal. O trabalho realizado foi autorizado pelo Diretor do agrupamento (anexo 6). Este agrupamento serve uma população com mais de 14000 habitantes. Segundo os dados disponibilizados, cerca de 30% dos Encarregados de Educação possuem o Ensino Secundário e cerca de 13% tem habilitações de nível superior. A atividade profissional dos Encarregados de Educação, com mais expressão é a de Empregados do Comércio e Serviços. Na sua maioria são oriundos de um meio socioeconómico médio. No entanto, há a referir que no âmbito da ação social beneficiam de auxílios económicos mais de um terço dos alunos.

4. PARTICIPANTES

Participaram neste estudo quatro alunos de uma turma do 7.º ano, o nível escolhido deve-se ao facto deste estudo incidir sobre o tema equações do 1.º grau, que é introduzido e lecionado no referido nível de ensino. A investigadora, no início do estudo, não conhecia a turma a que pertenciam os alunos participantes, pois a disciplina de matemática era lecionada por uma colega sua que trabalhava na mesma escola. A necessidade de implementar o estudo numa turma, cuja investigadora não era professora prendeu-se com o facto de a mesma não lecionar, nesse ano letivo, o 7º ano. Os quatro alunos que foram alvo deste estudo estavam inseridos numa turma constituída por vinte e seis alunos, doze raparigas e catorze rapazes. No início do ano, os alunos tinham na sua maioria doze anos, apenas um aluno, que era repetente, tinha treze anos. O nível socioeconómico dos encarregados de educação foi considerado médio, no entanto, cinco alunos beneficiavam de auxílio económico.

No que diz respeito ao comportamento global da turma, este foi considerado, em termos globais satisfatório. Em relação ao aproveitamento, a turma apresentava um aproveitamento global não satisfatório, no final do 2.º período, existiam nove alunos que estavam em situação de retenção. Na disciplina de matemática o aproveitamento da turma também era problemático, tendo sido atribuída, no final do 2º período, a classificação de nível dois a dez alunos, de nível três a oito alunos, de nível quatro a cinco alunos, e de nível cinco a três alunos.

A professora que lecionava a disciplina de matemática à referida turma tinha experiência de ensino, tirou o mestrado na área da matemática e encontrava-se a efetuar o doutoramento. Ao longo de todo o trabalho realizado a referida professora mostrou-se sempre disponível em colaborar em novos projetos e na sua implementação. A planificação e calendarização das tarefas foram efetuadas em consonância com a mesma. Tendo sido, ao longo da implementação do estudo, estabelecidas sistematicamente, conversas informais entre a investigadora e a referida professora. As conversas/entrevistas informais para além de terem como objetivo diagnosticar eventuais problemas que poderiam ir surgindo, relacionadas com a calendarização das atividades a desenvolver com os alunos, também tiveram como objetivo recolher informações sobre a forma como os alunos, que integraram o estudo, estavam a adquirir os conceitos e a aplicá-los.

A investigadora procedeu à escolha dos alunos participantes, com base nas conversas informais com a professora de matemática da turma e através de uma análise efetuada previamente em sala de aula. Contactou com todos os alunos e observou a forma como estes resolviam as tarefas relacionadas com operações com polinómios. Na seleção dos alunos foram tidos em consideração vários fatores, nomeadamente, o desempenho dos mesmos, o interesse em participarem nesta investigação, o facto dos encarregados de educação autorizarem a participação, o respeito pelas regras estabelecidas dentro da sala de aula, a participação nas atividades com empenho e a não apresentação de falta de pré-requisitos. Foi pedida aos Encarregados de Educação a autorização para os alunos participarem no estudo (anexo 7), tendo sido garantido o anonimato dos alunos, nomeadamente, através da atribuição de nomes fictícios. Assim, a investigadora atribuiu aos alunos participantes no estudo os nomes Isabel, José, Gustavo e Manuel.

Relativamente à caracterização dos alunos participantes, a Isabel era uma aluna introvertida e que participava pouco oralmente. No entanto, era muito empenhada na realização das tarefas. Esta aluna tinha um excelente aproveitamento na disciplina de matemática, tendo pertencido ao quadro de honra da escola. Apresentou um comportamento muito bom, sempre atenta e com uma atitude correta face ao estudo. Em relação ao José também era um aluno introvertido, mas participava oralmente e era muito empenhado na realização das tarefas. O seu desempenho ao nível da matemática era bom, revelava-se persistente, esforçando-se sempre por melhorar e destacar-se. O seu comportamento foi excelente, apresentando-se muito atento nas aulas e cumpridor das regras de funcionamento dentro da sala de aula. O Gustavo revelou uma grande capacidade de raciocínio e de trabalho. Tinha um excelente aproveitamento na disciplina de matemática e revelou-se muito participativo, curioso, alegre e com sentido de humor. Com um bom comportamento e intervindo de forma oportuna. O Manuel era um aluno que, no princípio do ano, revelou algumas dificuldades na disciplina de matemática e que estava integrado nas aulas de apoio de matemática. Apresentava dificuldades em refletir sobre os assuntos tratados, revelou-se muito irrequieto, com dificuldades de concentração e ansioso. No entanto, era trabalhador e revelava empenho nas tarefas depois de ultrapassar as suas dificuldades. O aluno era extrovertido, brincalhão e participava bastante nas aulas. Por vezes, revelava alguns problemas de comportamento, estando desatento e a conversar, sendo necessário intervir para que voltasse a estar concentrado. O aluno quando era corrigido mudava de imediato a sua atitude passando a comportar-se corretamente.

5. PLANIFICAÇÃO DAS ATIVIDADES

A planificação das atividades inserem-se no conteúdo do 7.º ano, Equações Algébricas do Programa da Matemática do Ensino Básico em vigor. A planificação geral foi elaborada pela investigadora com a colaboração da professora matemática da turma. Ao elaborar a planificação foram tidos em consideração vários fatores, nomeadamente, algumas incompatibilidades entre o horário da investigadora e da turma; a necessidade de lecionar alguns temas relacionados com os pré-requisitos necessários ao desenvolvimento das tarefas; e a conciliação entre o trabalho a desenvolver pela professora da turma e pela investigadora. Foi necessário garantir que os alunos alvo deste estudo não abordassem com a professora de matemática da turma os conceitos matemáticos envolvidos neste estudo durante a implementação das tarefas. A calendarização das tarefas teve em consideração a disponibilidade de salas com computadores e quadro interativo e a planificação e planeamento curricular de matemática para o 7.º ano. As aulas que constam na planificação são aquelas que ocorreram no período de implementação das tarefas em sala de aula. As aulas onde foram implementadas as tarefas que são analisadas neste estudo foram lecionadas pela investigadora. Ao longo da implementação das tarefas existiu a necessidade de a professora da turma lecionar conteúdos que funcionavam como pré-requisitos das mesmas. Assim, foi feita uma planificação geral conjunta, entre a investigadora e a professora da turma, de forma a desenvolver um trabalho que nas aulas lecionadas pela professora da turma fossem desenvolvidos os pré-requisitos e que as mesmas respeitassem os objetivos das tarefas, ou seja, de forma a não serem abordados conceitos inerentes a cada uma das tarefas antes da implementação das mesmas. No final da implementação das tarefas, os alunos participantes realizaram com a professora da turma uma ficha de avaliação que também foi alvo de análise.

Tabela 1- Planificação geral das atividades desenvolvidas

Aula (45 min.)	**Professora**	**Tarefas**	**Objetivos**	**Applet utilizado**
Aula n.º 1 e n.º 2	Investigadora	Tarefa 1 e 2	-Desenvolver estratégias de resolução de problemas através de procedimentos aritméticos e algébricos; - Desenvolver o cálculo mental; - Efetuar tarefas que promovam a transição da aritmética para a álgebra; - Compreender o significado da incógnita; - Compreender o conceito de equação; - Utilizar a linguagem das equações; - Equacionar problemas;	*Applet 1 - "Algebric Reasonig*
2 Aulas	Professora da turma	______	-Simplificar expressões algébricas; Operações com polinómios. - Noção de membros, termos e incógnita de uma equação do 1º grau.	
Aula n.º 3	Investigadora	Tarefa 3	- Desenvolver o cálculo mental; - Compreender o significado da incógnita; - Compreender o conceito de equação; - Solução da equação (Substituição da incógnita de forma a obter uma proposição verdadeira).	*Applet 2 "One Step Equation Game"*
Aula n.º4 e n.º 5	Investigadora	Tarefa 4	-Compreender o significado da incógnita; -Compreender o conceito de equações equivalentes; -Compreender os princípios de equivalência para a resolução de equações; -Resolver equações do 1.º grau simples utilizando os princípios de equivalência;	*Applet 3 "Algebra Balance Scales"*

Aula (45 min.)	Professora	Tarefas	Objetivos	Applet utilizado
2 Aulas	Professora da turma	_____	-Enunciar os Princípios de equivalência para a resolução de equações; -Resolver equações do 1.º grau utilizando os princípios de equivalência;	____________
Aula n.º 6	Investigadora	Tarefa 5	- Resolver equações do 1.º grau aplicando os princípios de equivalência; - Resolver equações do 1.º grau sem parenteses e denominadores.	*Applet 4 Solving equations with balance-strategy: game*
Aula n.º 7 e n.º 8	Investigadora	Tarefa 5	- Resolver equações do 1.º grau com parenteses e denominadores.	*Applet 4 Solving equations with balance-strategy: game*
2 Aulas	Professora da turma	_______	-Regras práticas para a resolução de equações; -Resolver equações do 1.º grau utilizando as regra.	____________
Aula n.º9	Investigadora	Tarefa 6	-Resolução de problemas. - Desenvolvimento da linguagem Matemática.	*Applet 5* *Escape Planet X*
Aula n.º10	Investigadora	Questionário/ Entrevista	-Análise e reflexão sobre o trabalho desenvolvido.	____________

6. BREVE DESCRIÇÃO DAS AULAS

Neste estudo foi efetuada a implementação das tarefas durante dez aulas, as quais foram realizadas com a presença dos quatro alunos participantes e onde a investigadora assumiu também o papel de professora. As duas primeiras aulas realizaram-se com a presença de toda a turma e com a presença da professora de matemática da turma. As restantes aulas foram lecionadas pela investigadora apenas com a presença dos quatro alunos que participaram no estudo. A opção de realizar as duas primeiras aulas com a presença de todos os alunos da turma, deveu-se ao facto de se pensar que era importante criar inicialmente um ambiente que favorece-se a ligação entre os alunos e a investigadora e devido às metodologias/estratégias escolhidas, para aplicar as tarefas propostas nestas duas aulas, se adequarem ao contexto. Nas oito aulas subsequentes às duas primeiras, foi necessário a utilização de computadores para os alunos trabalharem, efetuar a gravação do trabalho realizado pelos alunos no computador (gravação de ecrã) e um maior acompanhamento do trabalho realizado pelos alunos. Em todas as aulas procedeu-se à gravação do ecrã dos computadores utilizados e à gravação áudio, foram recolhidas todas as fichas com as respostas dos alunos e foram efetuados pela investigadora registos no diário de bordo.

1.ª e 2.ª aulas

As duas aulas primeiras tiveram a duração de um bloco de 90 minutos (45 minutos cada uma). A sala tinha capacidade para os 26 alunos e possuía um computador e um quadro interativo. No início os alunos estavam agitados faziam perguntas sobre o que iria acontecer. A professora da turma, depois de os alunos acalmarem, informou que a mesma iria ser dada pela investigadora com a sua colaboração. Posteriormente, procedeu-se à realização da tarefa1 e da tarefa 2, respetivamente.

Descrição da implementação da tarefa1:

Os alunos foram divididos em grupos de dois e de três elementos, com o intuito de formar equipas para a realização de um jogo envolvendo as tarefas, de nível 1, propostas na applet "Algebric Reasonig[4]" cuja primeira imagem consta na figura 3.1.

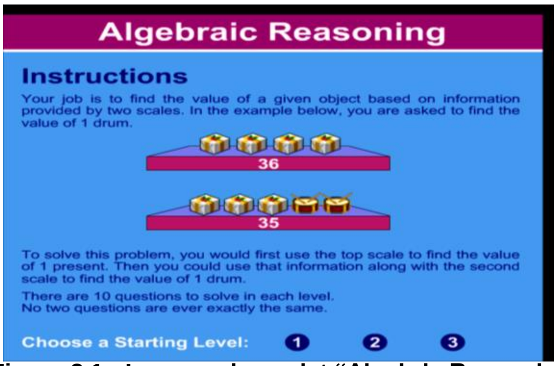


Figura 3.1.- Imagem da applet "Algebric Reasonig"

Em seguida a investigadora procedeu à explicação sobre o modo de funcionamento da *applet,* dos seus objetivos e das regras do jogo. Recorrendo ao quadro interativo e utilizando para o efeito o flipchart[5] (anexo 3). Em seguida, foi entregue a cada aluno uma ficha com as questões relativas à tarefa 1 (anexo 4) e foi pedido a cada um dos alunos que fossem registando por escrito, na 1ª parte da ficha, todos os procedimentos que efetuaram para resolver os referidos problemas, à medida que os mesmos eram apresentados e traduzidos pela investigadora. Ao longo desta tarefa a investigadora e a professora da turma acompanharam o trabalho realizado pelos vários grupos, tendo a primeira efetuado uma observação mais pormenorizada da forma como os alunos que foram alvo de estudo efetuaram os procedimentos. A investigadora foi colocando questões de forma a tentar compreender melhor o raciocínio efetuado por cada um. Os alunos ao longo do jogo resolveram os problemas propostos conversando baixinho. Estavam muito concentrados e tentavam resolver rapidamente cada problema proposto. À medida que os vários grupos foram respondendo foram registadas no quadro as várias pontuações dos grupos e no final do jogo foi entregue a cada dos elementos do grupo vencedor um Diploma de Participação (anexo 5). A maioria dos alunos no final da aplicação do jogo pediram para

[4] Disponível em http://www.mathplayground.com/algebraic_reasoning.html

[5] Ficheiro que pode ser criado através do software do quadro interativo e que apenas se pode aceder ao seu conteúdo através do mesmo.

continuarem a jogar e ficaram muito agitados. Posteriormente os alunos responderam individualmente às questões colocadas na 2ª parte da ficha acima referida (anexo 4). Tendo a professora da turma e a investigadora tentado acompanhar em pormenor a resolução das questões propostas.

Descrição da implementação da tarefa 2:

A investigadora apresentou aos alunos no quadro interativo o *flipchart* -Transição da Aritmética para a Álgebra (anexo 6). O intuito era o de estabelecer a relação entre os procedimentos aritméticos utilizados na resolução dos prolemas propostos pela *applet* “Algebric Reasonig” e os procedimentos algébricos. Durante a explicação efetuada pela investigadora os alunos fizeram perguntas e responderam às questões que lhes foram colocadas. Posteriormente, resolveram as questões da tarefa 2 (anexo 7).

3.ª aula

Esta aula teve a duração de 45 minutos e foi efetuada numa sala com 4 computadores e um quadro interativo. Como foi anteriormente referido, esta aula teve a participação dos quatro alunos e a investigadora assumiu também o papel de professora. Os alunos no início estavam calados e com muita atenção a tudo o que a investigadora dizia. Sentaram-se em grupos de dois em frente a um computador como lhes foi pedido e foi-lhes proposto a realização da tarefa 3.

Descrição da implementação da tarefa 3:

No início da implementação da tarefa a investigadora procedeu à explicação sobre o modo como funcionava a *applet* “One Step Equation Game[6] “ que tem como primeira imagem a figura 3.2.,e quais eram os objetivos da tarefa. Para este efeito, projetou um PowerPoint cujo conteúdo é o da tarefa 3 (anexo 8).

Figura 3.2.- A*pplet “*One Step Equation Game”

[6] Disponível em http://www.math-play.com/One-Step-Equation-Game.html

Posteriormente, a investigadora entregou uma ficha (anexo 8) a cada um dos alunos. Estes estavam sentados dois a dois em frente a um computador, como já foi referido, e começaram a seguir as instruções fornecidas e a jogar entre eles o primeiro e o segundo jogo. Ao longo dos dois jogos, mostraram-se muito participativos, registavam os procedimentos efetuados na ficha fornecida, comentando entre eles os resultados que iam obtendo em cada jogada e chamando a investigadora para partilharem com ela os resultados. A investigadora, ao longo da aula, foi tentando acompanhar o trabalho realizado pelos alunos e registou no diário de bordo as observações dos mesmos que considerava importantes. No final, quando acabou a aula os alunos pediram para continuarem a jogar na aula seguinte e saíram a comentar o jogo, nomeadamente, a falar sobre os resultados que obtiveram no mesmo.

4.ª e 5.ª aulas

Estas duas aulas tiveram a duração de um bloco de 90 minutos (45 minutos cada uma). Tiveram a participação dos mesmos quatro alunos e a investigadora assumiu também o papel de professora. Os alunos no início estavam a conversar entre eles e perguntaram o que iria ser realizado na aula. A Investigadora disse que a aula iria ser muito importante e que necessitava da colaboração de todos. Pediu para todos se sentarem na mesa redonda que ficava ao pé do quadro interativo e procedeu à implementação da tarefa 4.

Descrição da implementação da tarefa 4:

Foi efetuada pela investigadora a explicação sobre o modo de funcionamento da *applet “Algebra Balance Scales*[7]” (anexo 9) e projetada a imagem do computador no quadro interativo apresentando a referida *applet e* quatro problemas através da mesma. A 1º imagem da referida *applet* é a da figura 3.3.

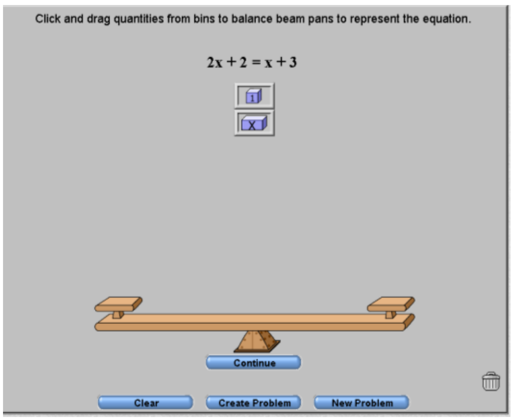


Figura 3.3- Applet “Algebra Balance Scales”

Ao longo da resolução dos problemas, os alunos responderam às questões colocadas pela investigadora, colocaram questões e efetuaram propostas de resolução para os vários problemas simulados, as quais foram discutidas e validadas por todos. Posteriormente, recorreu-se a um PowerPoint cujo conteúdo foi o da ficha informativa - Enunciar os princípios de equivalência

[7] Disponível em http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_201_g_4_t_2.html?open=instructions

(anexo 11), a qual foi também fornecida aos alunos. No final, foi entregue a cada aluno uma ficha de trabalho (anexo 10), tendo os alunos procedido à resolução das questões que lhes eram pedidas.

6.ª, 7.ª e 8.ª aulas

A 6.ª aula teve a duração de 45 minutos e a 7.ª e 8.ª aula tiveram a duração de um bloco de 90 minutos (45 minutos cada uma). Participaram nestas aulas os quatro alunos e a investigadora assumiu novamente o papel de professora. Os alunos foram divididos em grupos e cada um dos grupos estava numa mesa de dois lugares, onde tinham um computador para poder realizar a tarefa 5.

Descrição da implementação da tarefa 5:

No início da implementação da tarefa a investigadora procedeu à explicação sobre o modo como funcionava *applet* "*Solving equations with balance-strategy: game*[8]", sendo a imagem inicial a da figura 3.4., e quais os objetivos da tarefa projetando um PowerPoint cujo conteúdo foi o da tarefa 5. (anexo 12).

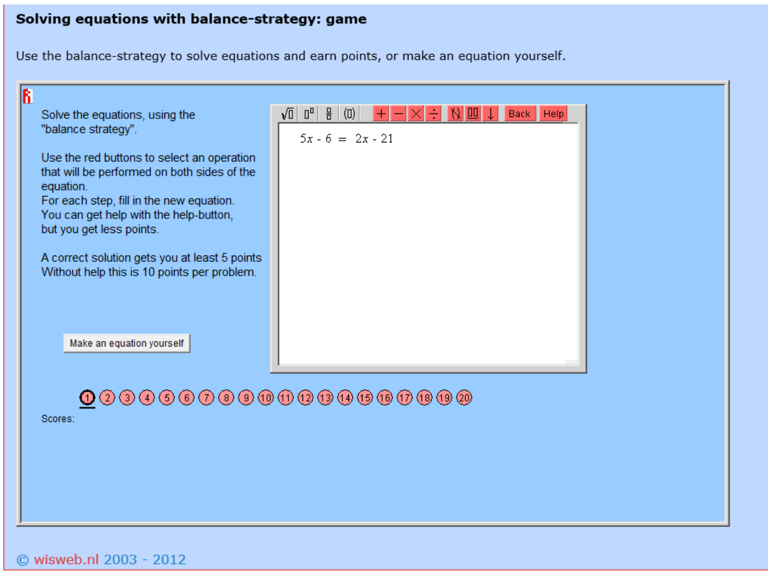


Figura 3.4- Applet "Solving equations with balance-strategy: game"

Cada aluno resolveu no computador de forma alternada as várias equações propostas pela *applet* e efetuou ao mesmo tempo na ficha (anexo 12) todas as equações propostas. A investigadora acompanhou o trabalho realizado pelos alunos e esclareceu as dúvidas que foram surgindo.

9.ª e 10.ª aulas

Estas aulas tiveram a duração de 90 minutos (45 minutos cada uma) e foi efetuada numa sala com quatro computadores e um quadro interativo. À semelhança da maioria das aulas,

[8] Disponível em http://www.fi.uu.nl/toepassingen/02018/toepassing_wisweb.en.html

participaram os quatro alunos e a investigadora assumiu novamente o papel de professora. Os alunos entraram e perguntaram se seria a última aula que teriam com a investigadora. Foi-lhes dito que seria efetuado um jogo, que posteriormente iriam responder a um questionário e que assim, terminaria o trabalho com a investigadora. Todos os alunos manifestaram vontade de continuar com as aulas e com o trabalho que foi desenvolvido. Posteriormente, a investigadora pediu para se sentarem na mesa redonda que ficava ao pé do quadro interativo e procedeu à implementação da tarefa 6 na 9º aula, na 10º aula foi entregue a cada aluno a ficha de trabalho (anexo 14) e foi efetuada a entrevista (anexo 15).

Descrição da implementação da tarefa 6:
Esta tarefa consistiu na implementação de um jogo recorrendo à *applet "Escape Planet X* [9]", cuja imagem inicial é semelhante à da figura 3.5.

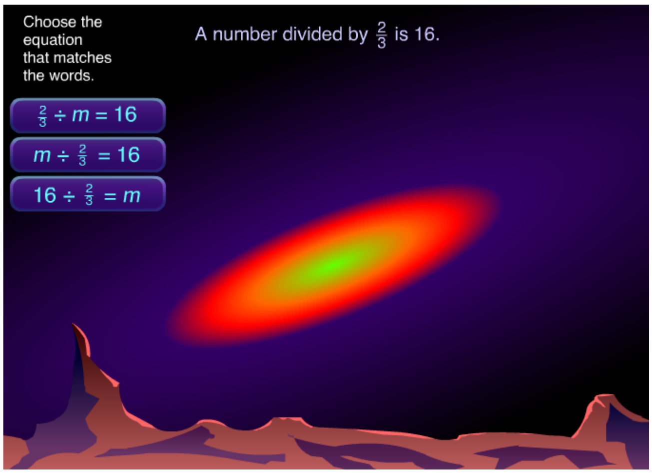


Figura 3.5- A*pplet* "Escape Planet X"

A investigadora procedeu à explicação sobre a forma como iria decorrer a tarefa e das regras do jogo. Assim, informou que à medida que os vários problemas eram simulados e projetados:

- Iria traduzir/adaptar os enunciados dos problemas, de inglês para português;
- Os alunos teriam que escrever o enunciado do problema e responder às questões na folha de registo (anexo 13);
- A investigadora iria validar as respostas e atribuir um ponto a cada resolução correta do problema em causa.
- A resolução de cada problema iria ser debatida conjuntamente;
- No final ganhava quem obtivesse a maior pontuação.

Em todas as aulas os alunos mostraram-se muito empenhados, realizando as tarefas pedidas, prestando atenção e intervindo de forma oportuna.

[9] Disponível em http://www.harcourtschool.com/activity/escape_planet_6/

CAPÍTULO IV - ANÁLISE DE DADOS

1. INTRODUÇÃO

Ao longo da implementação do estudo, como foi anteriormente referido, os alunos resolveram em grupo de dois elementos ou individualmente as tarefas propostas, consoante a estratégia implementada pela investigadora. O grupo A foi formado pelos alunos Gustavo e Manuel e o grupo B pelos alunos José e Isabel. Antes de serem implementadas as tarefas pela investigadora, a professora de matemática da turma, nas aulas anteriores, procedeu à simplificação de expressões algébricas e foram efetuadas operações com polinómios, de forma que os alunos adquirissem os conhecimentos prévios necessários. No entanto, ao longo da implementação do estudo foi necessário, por vezes, a investigadora recordar as operações com polinómios e a simplificação de expressões. No início da implementação deste trabalho com os alunos, nunca tinha sido lecionado pela professora da turma o tema equações do 1.º grau. O mesmo só foi trabalhado pela mesma de acordo com a planificação (Quadro 1- Planificação geral das atividades desenvolvidas) apresentada no capítulo anterior.

2. ANÁLISE DA TAREFA 1

Nesta tarefa, os alunos que foram alvo de estudo formaram grupos, de dois elementos, e resolveram quatro dos problemas propostos na *applet* "Algebric Reasonig[10]". Esta tarefa foi apresentada através da realização de um jogo, como foi anteriormente referido, os alunos falavam baixinho, discutindo a resolução dos problemas e tentavam resolvê-los rapidamente para obterem as pontuações. Os problemas propostos foram semelhantes e os alunos efetuaram o mesmo tipo de procedimentos ao resolvê-los. Assim, poderemos analisar, a título de exemplo, os procedimentos efetuados pelos alunos ao resolverem o primeiro problema. A investigadora propôs o problema (ver figura 4.1) e pediu aos grupos para encontrarem o valor de um presente.

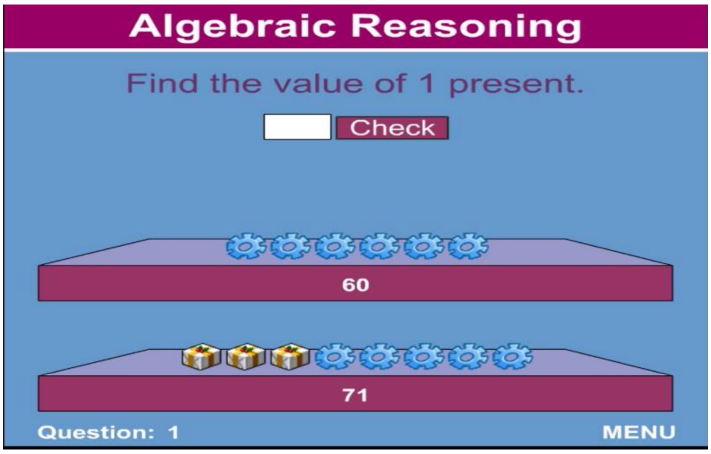


Figura 4.1.- Problema 1 do nível 1 da *applet* "Algebric Reasonig"

[10] Disponível em: http://www.mathplayground.com/algebraic_reasoning.html

Os dois grupos responderam corretamente tendo efetuado os cálculos que constam nas figuras (figuras.4.2. e 4.3.).

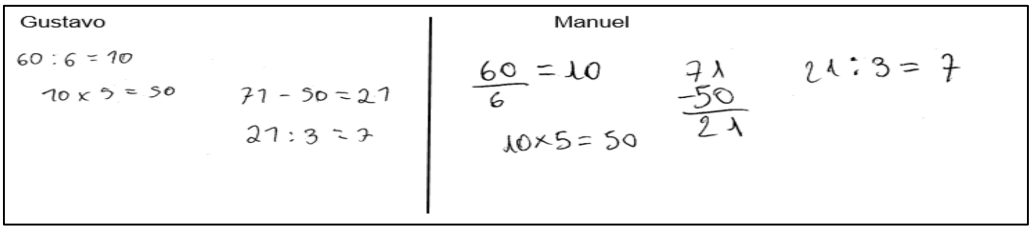


Figura 4.2. - Respostas dos alunos; Tarefa 1-problema1; Grupo A

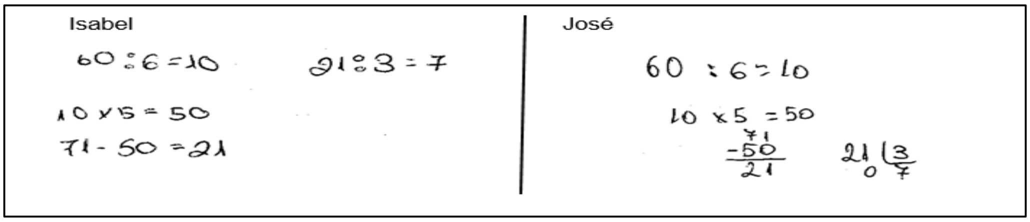


Figura 4.3. - Respostas dos alunos; Tarefa 1-problema1; Grupo B

Os alunos, em primeiro lugar, calcularam o valor de cada "argola" dividindo 60 por 6 que eram o número total de "argolas" da "plataforma de cima". Posteriormente, calcularem o valor do total das "argolas" da plataforma em baixo, multiplicando o valor de cada argola por 5. Subtraíram a 71 o valor das 5 "argolas" e obtiveram o valor dos três presentes. Por fim, foram calcular o valor de cada presente dividindo o valor dos presentes por 3. Nenhum dos alunos apresentou grandes dificuldades em resolver o problema proposto. Nos restantes problemas propostos, como já foi referido, os alunos resolveram-nos de forma análoga e também não apresentaram dificuldades.

Ainda no âmbito da tarefa 1, como foi referido na descrição das aulas, foi colocada individualmente aos alunos a questão 2 (figura 4.4.). Estas questões foram efetuadas com o objetivo de os mesmos explicitarem, por escrito, o raciocínio efetuado e de proporcionar à investigadora um melhor entendimento sobre a forma como os alunos pensaram e como compreenderam os procedimentos que efetuaram.

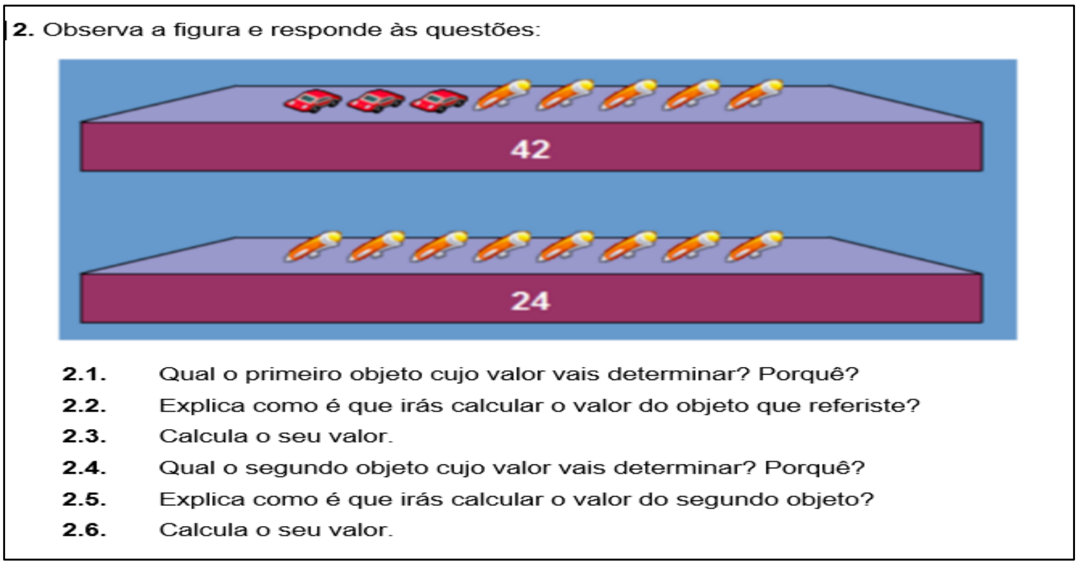


Figura 4.4. - Questão 2 da tarefa 1

Os alunos responderam de forma semelhante às questões acima referidas, apresentando todos os mesmos cálculos. Como exemplo apresenta-se a resolução efetuada pela aluna Isabel (figura 4.5.).

Isabel

2.1.

As canetas, pois sabendo o valor das canetas pode-se determinar o valor dos carros, retirando ao valor final o valor das canetas e dividindo o valor obtido pelos carros.

2.2.

No grupo em que só existem canetas divido o seu valor total pelo numero de canetas do grupo, assim saberei o valor de cada uma das canetas

2.3.

$24 \div 8 = 3$ Cada caneta tem o valor de 3.

2.4.

Os carros, pois descobrindo o valor das canetas já posso calcular o valor dos carros.

2.5.

Após calcular o valor das canetas irei retirar ao grupo misto o valor das canetas, o que sobrar será o valor total dos carros. Depois divido o valor do grupo dos carros pelo número de carros existentes no grupo.

2.6.

$3 \times 5 = 15$ $27 \div 3 = 9$

$42 - 15 = 27$

Figura 4.5. -Respostas da aluna Isabel; Tarefa 1- questão 2

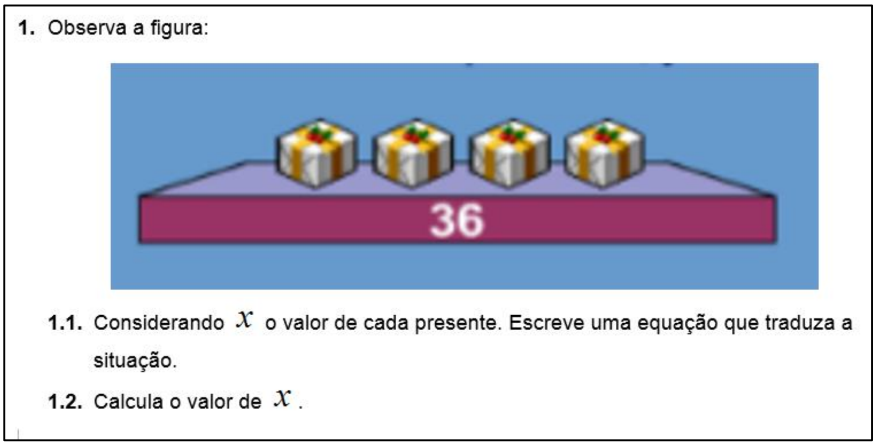
As respostas dadas pelos alunos evidenciaram que os mesmos conseguiram explicitar por escrito o seu raciocínio de forma clara, mostrando que compreenderam todos os procedimentos que tiveram de efetuar para calcular o valor de cada caneta e de cada carro.

A tarefa1 teve como objetivo o trabalho com situações-problema cujo objetivo é referido por Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) como o de "…chegar às expressões simbólicas através da análise de situações concretas" (p. 90). Neste caso recorreu-se a problemas que os alunos resolveram facilmente através de procedimentos aritméticos e que possibilitam posteriormente a sua resolução através de procedimentos algébricos.

3. ANÁLISE DA TAREFA 2

Na aplicação da tarefa 2, a investigadora inicialmente estabeleceu a relação entre os procedimentos aritméticos, utilizados na resolução dos problemas propostos na tarefa1, e os procedimentos algébricos que poderiam ter sido utilizados. Foram introduzidos os conceitos de incógnita e de equação de uma forma informal, ou seja, estabelecendo uma analogia entre os conceitos e o que os mesmos representavam no contexto do problema apresentado. Para este efeito foi utilizado o *flipchart* -Transição da Aritmética para a Álgebra (anexo 6). Os alunos estiveram atentos e demonstraram interesse, colocaram questões e responderam às questões que lhes foram colocadas pela investigadora. Posteriormente, a investigadora pediu para resolverem, individualmente, as questões 1 (figura 4.6) e 2 (figura 4.11) da tarefa 2 (anexo 7).

Questão 1:

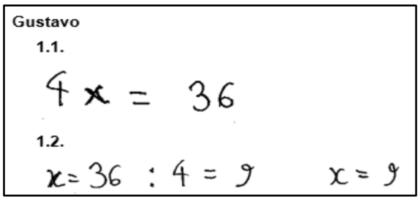

1. Observa a figura:

1.1. Considerando x o valor de cada presente. Escreve uma equação que traduza a situação.

1.2. Calcula o valor de x .

Figura 4.6. - Questão 1 da tarefa 2

Respostas dos alunos:


Gustavo

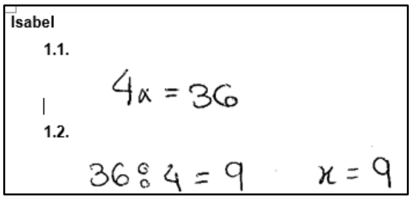
1.1.

$4x = 36$

1.2.

$x = 36 : 4 = 9 \qquad x = 9$

Figura 4.7.-Resposta do aluno Gustavo; Tarefa 2- Questão 1


Isabel

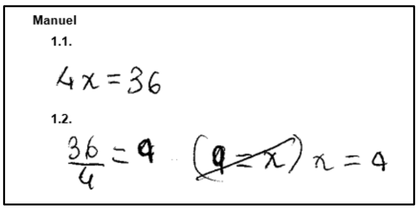
1.1.

$4x = 36$

1.2.

$36 : 4 = 9 \qquad x = 9$

Figura 4.8.-Resposta da aluna Isabel; Tarefa 2- Questão 1


Manuel

1.1.

$4x = 36$

1.2.

$\frac{36}{4} = 9 \quad (\cancel{9 = x}) \quad x = 4$

Figura 4.9.-Resposta do aluno Manuel; Tarefa 2- Questão 1

José

1.1. $4x = 36$

1.2. $36 : 4 = 9$ $\quad 9 \times 4 = 36$

Figura 4.10.-Resposta do aluno José; Tarefa 2- Questão 1

Podemos constatar que todos os participantes no estudo escreveram corretamente a equação pedida e conseguiram calcular o valor correto do presente (valor de X). A forma como os alunos calcularam o valor de X foi referida por Kieran (1992) como o método para resolver equações do tipo "desfazer". A autora refere que este método é análogo ao utilizado na resolução de problemas aritméticos utilizando as operações inversas.

Questão 2:

Esta questão foi colocada aos alunos sem que aos mesmos tivessem sido ensinados os princípios de equivalência de equações e as regras práticas. Salienta-se que os alunos dispõem do conhecimento das operações inversas e da analogia efetuada entre conceito de equação e de incógnita e o que estes representavam no contexto do problema, de acordo com o que foi anteriormente mencionado (ver anexo 6). Os objetivos desta questão foram os de investigar como é que os alunos resolviam as equações propostas (figura 4.11) através dos conhecimentos que dispunham até ao momento. Verificar se compreenderam a analogia estabelecida e se esta permitiu a apropriação do conceito de equação e de incógnita.

2. Para cada uma das seguintes equações, diz qual é o valor de x e explica como procedeste para o obteres.

2.1. $4x = 8$

2.2. $2x - 2 = 10$

2.3. $4x + 2 = 22$

2.4. $\frac{x}{2} = 4$

2.5. $4x = -8$

Figura 4.11. - Questão 2 da tarefa 2

Respostas dos alunos:

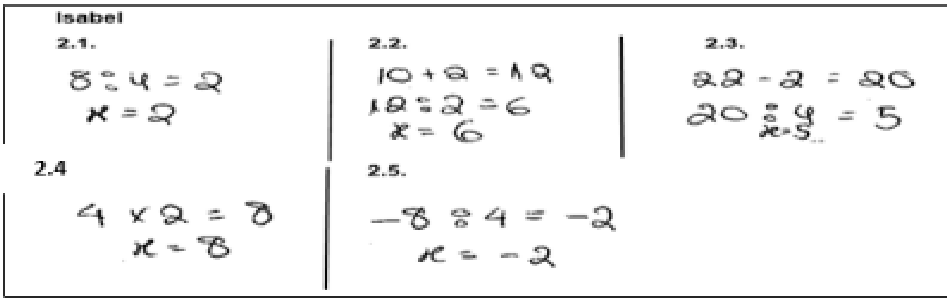
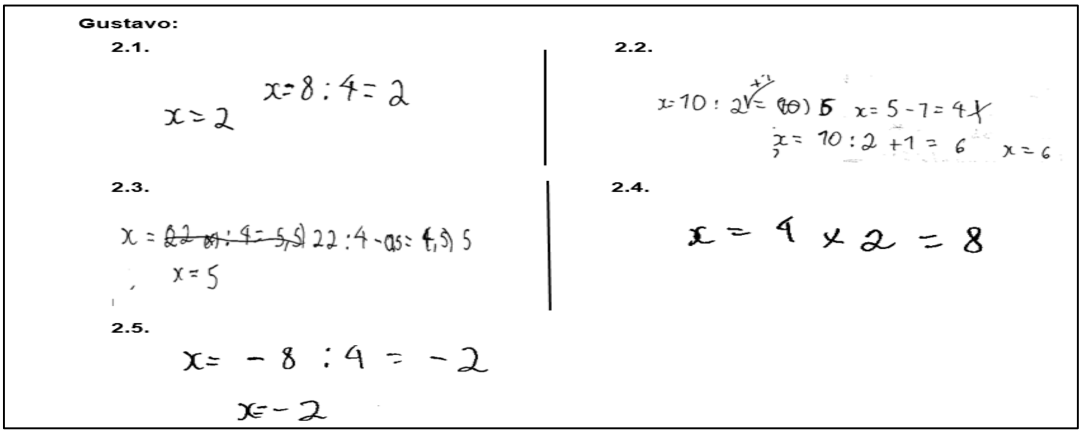


Figura 4.12.-Resposta da aluna Isabel; Tarefa 2- Questão 2

A Isabel utiliza as operações aritméticas para calcular o valor de x. Resolve todas as equações recorrendo às operações inversas e só no final é que explicita que está a calcular o valor de x. Parece que esta aluna conseguiu estabelecer a analogia entre os processos utilizados para resolver os problemas propostos na tarefa 1 e a sua aplicação à resolução das equações.

Figura 4.13.-Resposta do aluno Gustavo; Tarefa 2- Questão 2



No final da resolução da questão 2, a investigadora questionou o Gustavo:

Investigadora - Como é que pensaste para descobrir o valor de x na primeira equação (2.1.)?

Gustavo- Eram quatro então cada um era 8 a dividir por 4.

Investigadora - Na segunda equação (2.2.) porque é que fizeste $x = 10 : 2 + 1$?

Gustavo - Eram dois valores!

Investigadora - E como é pensastes para escreveres 10:2 +1?

Gustavo - Como tenho $2x$ dividi por dois o 10 e o 2.

Investigadora - Na terceira equação (2.3.) porque é que fizeste $x = 22 : 4 - 0{,}5$.

Gustavo - Porque é $4x$ e dividi por 4.

O aluno Gustavo resolveu as equações 2.2. e 2.3. de uma forma diferente das efetuadas pelos outros alunos. Parece que nestas equações o aluno, inicialmente, estava com alguma dificuldade em pensar qual seria a operação aritmética que deveria efetuar primeiro. No caso da equação 2.2. podemos observar que o Gustavo começou por calcular o valor de x , efetuando a divisão de 10 por 2 e que se confrontou com dificuldades em escolher a operação que iria efetuar posteriormente. No entanto, mostrou que se tinha apercebido do erro cometido, ao assinalar esse erro com uma cruz e ao apresentar em seguida os cálculos corretos. Nas restantes equações o aluno não apresentou dificuldades em calcular o valor de x recorrendo às operações inversas, talvez porque estas apenas envolviam a realização de uma operação aritmética.

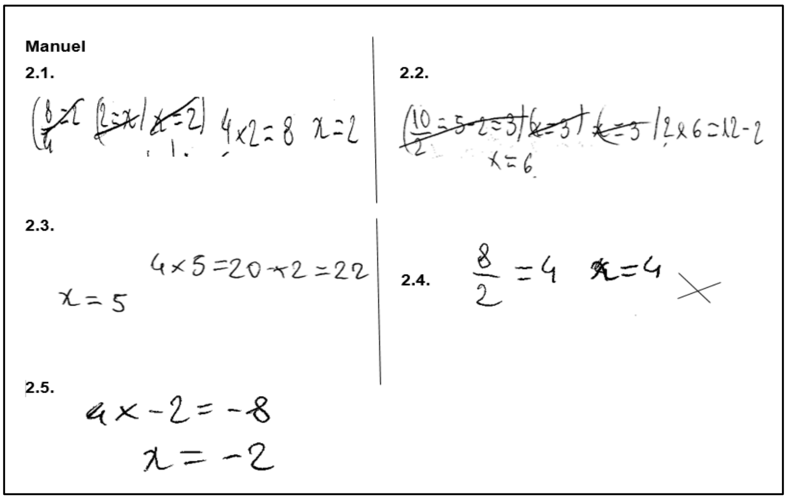


Figura 4.14.-Resposta do aluno Manuel; Tarefa 2- Questão 2

No início o Manuel apresentou dificuldades e alguma resistência em efetuar a tarefa existindo a necessidade da investigadora apelar à persistência e de dar um reforço positivo, incentivando o aluno a acreditar nas suas capacidades.

No final da resolução da questão 2, a investigadora questionou o Manuel:

> A investigadora, apontado para a parte da resolução das equações (2.1 e 2.2.) perguntou ao Manuel porque é que tinha riscado os cálculos.
>
> Manuel - Necessito de saber melhor estas contas porque não sei o que fazer primeiro.
>
> Investigadora - Então como fizeste depois?
>
> Manuel - Tentei.

O aluno nas equações 2.1 e 2.2. tentou aplicar as operações inversas para calcular o valor de x**.**

No entanto, podemos observar que desistiu deste processo e optou, informalmente, pelo método de substituição. Apesar de na apresentação dos cálculos o Manuel apresentar erros tais como, 2x6=12-2 e 4x5=20+2, este conseguiu utilizar uma estratégia para calcular o valor da incógnita.

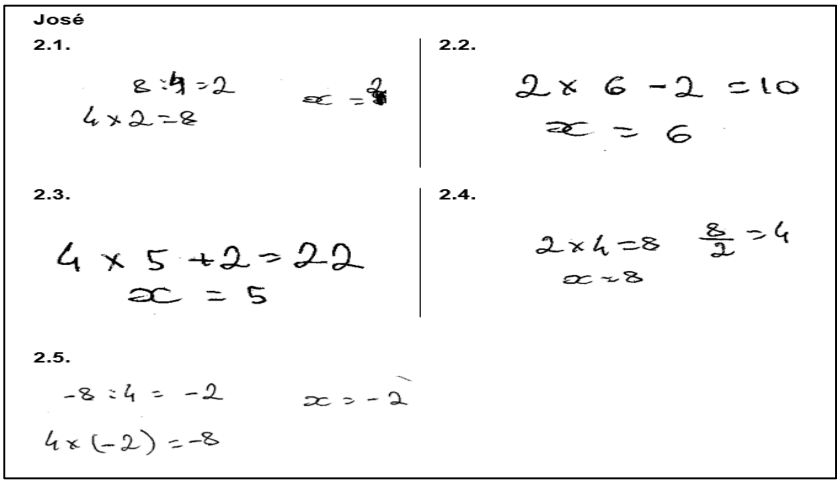


Figura 4.15.-Resposta do aluno José; Tarefa 2- Questão 2

O José resolveu todas equações recorrendo à substituição da incógnita e às operações inversas, com a exceção das equações 2.2 e 2.3., onde apenas foi apresentada a resolução com recurso à substituição da incógnita. O aluno poderá ter tido dificuldades resolver as equações que envolviam a aplicação de várias operações inversas e ter assim optado por recorrer à substituição da incógnita.

Em geral, podemos contatar que os alunos conseguiram calcular o valor x na maioria das equações propostas apesar de não terem sido ensinados os princípios de equivalência de equações e as regras práticas. Os métodos utilizados pelos alunos foram variados, no entanto, os mais utilizados foram os referidos por Kieran (1992) como os do tipo "desfazer" e de "substituição".

Parece que o recurso a problemas que os alunos resolveram facilmente através de procedimentos aritméticos e a analogia efetuada entre conceito de equação e de incógnita e o que estes representavam no contexto do problema permitiu que os alunos conseguissem resolver as equações. Consideramos que papel da investigadora enquanto professora foi fundamental. A sua intervenção fazendo a analogia acima referida permitiu que os alunos se apropriassem dos conceitos de equação e de incógnita e que fosse estabelecida a ligação entre a aritmética e a álgebra. Considero oportuno relembrar que Oliveira (2000) refere que " O professor tem o papel explícito de interferir na zona de desenvolvimento proximal dos alunos, provocando avanços que não ocorreriam espontaneamente." (p. 62).

4. ANÁLISE DA TAREFA 3

Nesta tarefa foi utilizada a *applet* "One Step Equation Game[11] ", com o objetivo de proporcionar aos alunos, de uma forma motivadora, a apropriação do conceito de incógnita e de solução da equação. Esta tarefa também teve o objetivo de possibilitar o recurso a métodos tais como o da substituição da incógnita para verificar a solução da equação e a utilização das operações inversas para resolverem as equações.

Os alunos no início estavam em silêncio e com muita atenção à explicação dada pela investigadora sobre o funcionamento da *applet* e o que teriam de registar ao longo da tarefa (anexo 8). Sentaram-se em grupos de dois em frente a um computador. Ao longo dos dois Jogos, propostos pela *applet,* mostraram-se muito participativos, jogavam cada jogo dois a dois alternadamente e foram registando os procedimentos que efetuaram na ficha fornecida para o efeito. Comentavam entre eles os resultados que foram obtendo em cada jogada e chamavam a investigadora para partilharem com ela os resultados que obtiveram e as suas vitórias, nomeadamente, quando conseguiam acertar com a bola no cesto (figura 4.36). No final, quando acabou a aula os alunos pediram para continuarem a jogar na aula seguinte e saíram a comentar o jogo. Durante a implementação desta tarefa foram várias as equações e opções de resposta apresentadas na *applet*. Por vezes, os procedimentos utilizados pelos alunos para a sua

[11] Disponível em http://www.math-play.com/One-Step-Equation-Game.html

resolução eram repetidos, pelo que são apresentadas algumas respostas dadas pelos alunos e que se considera serem ilustrativas dos resultados obtidos e das dificuldades sentidas.

No primeiro jogo proposto pela *applet* foram apresentadas algumas equações e opções de resposta, tais como as seguintes:

-1.ª Equação proposta e respetivas opções da *applet*:

Figura 4.16.- 1.ª Equação do 1.º jogo da *applet*

Respostas dos alunos:

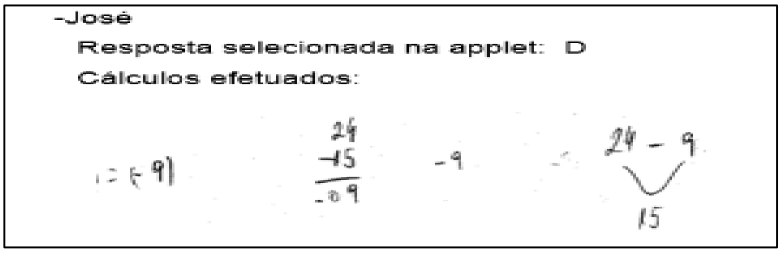


Figura 4.17.-Resposta do José; Tarefa 3; 1.ª Equação do 1.º jogo

O José escolheu a opção correta D, m=-9, no entanto apresentou os cálculos incorretos, 24 -15 = -9. Mostra que sabe que tem de substituir a incógnita pelo valor -9 quando realiza a operação 24-9 e coloca o 15 como resultado. Podemos pensar que teve dificuldades em efetuar as operações aritméticas com números relativos e em efetuar a resolução da equação recorrendo às operações inversas.

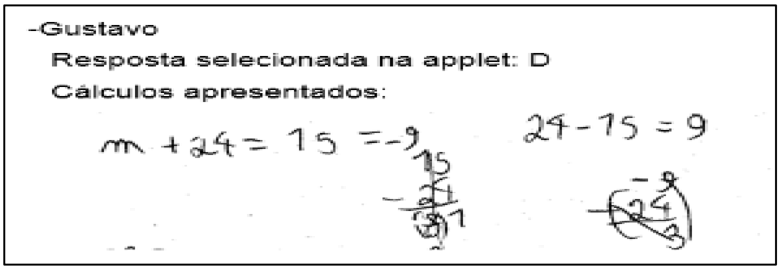


Figura 4.18.-Resposta do Gustavo; Tarefa 3; 1.ª Equação do 1.º jogo

O Gustavo indicou mal os cálculos, m+24=15=-9 e mostrou que tinha dificuldades em efetuar a resolução da equação recorrendo às operações inversas quando apresentou o cálculo 24-15=9 e quando riscou 15-24. O aluno tentou efetuar a operação 15-24, mas não conseguiu, colocou o número mais pequeno em cima, 15, e tentou subtraiu 24. Denota dificuldades em efetuar as operações aritméticas com números relativos quando apresenta os cálculos riscados que parecem semelhantes a -9-24=3 e 15-24=…1. No entanto, o Gustavo escolheu a opção correta, D, m=-9, talvez, porque a mesma era a que mais se assemelhava aos resultados que obteve.

-2.ª Equação proposta e respetivas opções da *applet*:

Figura 4.19.- 2.ª Equação do 1.º jogo da *applet*

Respostas dos alunos:

-Isabel:

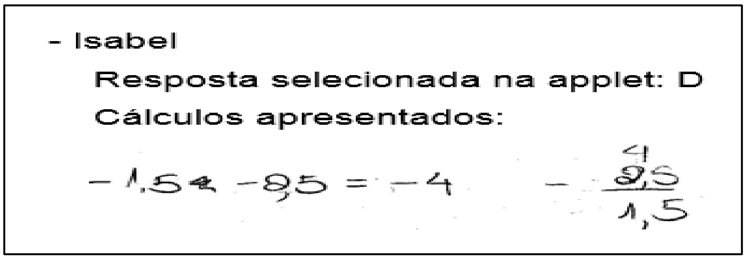


Figura 4.20.-Resposta da Isabel; Tarefa 3; 2.ª Equação do 1.º jogo

A Isabel resolveu corretamente, substituiu o valor da incógnita, m, por -1,5 e apresentou corretamente os cálculos, -1,5-2,5=-4.

- Manuel

Resposta selecionada na *applet*: B

O aluno não apresentou qualquer cálculo e a investigadora resolveu questioná-lo:

Investigadora -Porque é que não apresentou os cálculos?

Manuel -Não sei fazer os cálculos.

Investigadora-É necessário saber qual era o valor da incógnita. Qual é o valor de m, no caso da equação $m + 2 = 3$?

Manuel -É um. Já sei!

O aluno teve dificuldades em entender o que era pedido e como devia efetuar os cálculos. Foi necessária a intervenção da investigadora para que o aluno conseguisse ultrapassar estas dificuldades. No entanto, podemos constatar que para ajudar o Manuel a investigadora apenas apresentou outra equação mais simples que só tinha números inteiros e não explicou quais os cálculos que este deveria efetuar. O aluno resolveu facilmente esta nova questão, o que pode levar-nos a pensar que as dificuldades maiores estavam relacionadas com as operações com números negativos e com números decimais que eram necessárias efetuar, para resolver a equação proposta pela *applet.*

-3.ª Equação proposta e respetivas opções da *applet*:

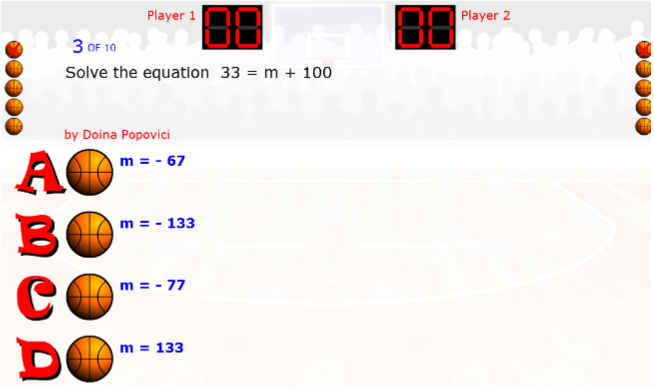


Figura 4.21.- 3.ª Equação do 1.º jogo da *applet*

Respostas dos alunos:

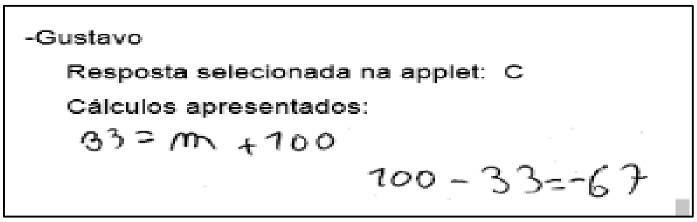


Figura 4.22.-Resposta do Gustavo; Tarefa 3; 3.ª Equação do 1.º jogo

O Gustavo depois de dar a resposta chamou a investigadora e disse:

-Stora tenho bem e sem querer carreguei mal!

O Gustavo apresentou os cálculos incorretos, 100-33=-67, no entanto, obteve o valor da opção correta. Podemos pensar que os cálculos apresentados apenas eram realizados como rascunho para responder às questões propostas pelas *applets* e/ou que o aluno embora consiga efetuar um raciocínio correto, tem dificuldades em apresentá-lo por escrito. Parece que o aluno procurava o número inteiro independentemente do sinal e que posteriormente colocou o sinal numa abordagem de concretização da variável.

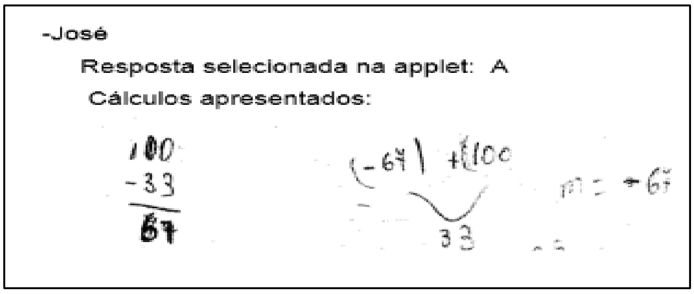


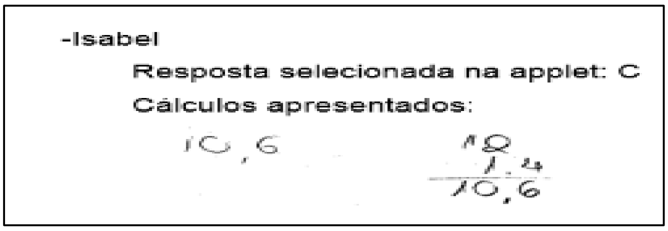
Figura 4.23.-Resposta do José; Tarefa 3; 3.ª Equação do 1.º jogo

O José escolheu a opção correta A, $m = 67$ e apresentou os cálculos corretos. Podemos verificar que apresentou o mesmo cálculo, 100-33, que o Gustavo, com a diferença que conseguiu posteriormente calcular e apresentar o raciocínio por escrito corretamente.

-4.ª Equação proposta e respetivas opções da *applet*:

Figura 4.24.- 4.ª Equação do 1.º jogo da *applet*

Respostas dos alunos:


-Isabel

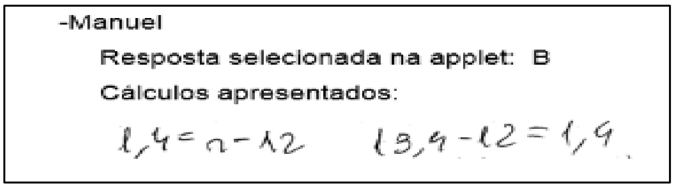
Resposta selecionada na applet: C

Cálculos apresentados:

$10,6$ $\quad$ $\begin{array}{r} 12 \\ 1.4 \\ \hline 10,6 \end{array}$

Figura 4.25.-Resposta da Isabel; Tarefa 3; 4.ª Equação do 1.º jogo

A Isabel selecionou a resposta errada e os cálculos apresentados parecem mostrar que teve dificuldades em efetuar a resolução da equação recorrendo às operações inversas. Poder-se-á também pensar que a aluna pensa que deve fazer uma conta de subtrair.


-Manuel

Resposta selecionada na applet: B

Cálculos apresentados:

$1,4 = n - 12 \quad 13,4 - 12 = 1,4$

Figura 4.26.-Resposta do Manuel; Tarefa 3; 4.ª Equação do 1.º jogo

O Manuel selecionou a resposta correta na *applet* e conseguiu apresentar por escrito o raciocínio correto. Mostrou que substituiu a incógnita por 13,4 e que verificou que ao subtrair ao valor da incógnita 12 obtinha 1,4. Saliente-se que esta foi a segunda proposta da *applet* resolvida pelo Manuel e que na primeira proposta, como foi anteriormente referido, o aluno apresentou muitas dificuldades. Podemos assim constatar que o aluno conseguiu ultrapassar a dificuldade inicial de não conseguir compreender as questões propostas pela *applet*.

O Manuel comentou:

- Agora já percebi. Vou ganhar o jogo!

Este comentário denota que o aluno ficou entusiasmado por ter conseguido compreender e responder corretamente.

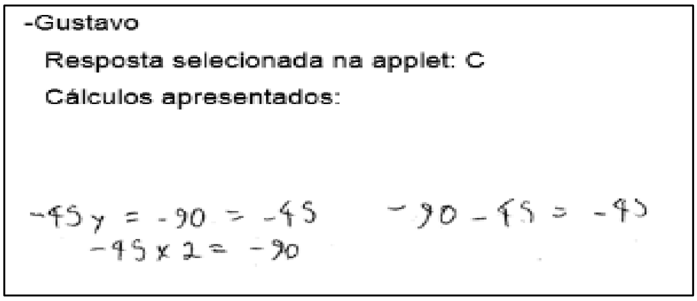
Ao longo deste jogo a investigadora foi esclarecendo dúvidas e relembrando as operações com números relativos com o objetivo de ajudar os alunos a ultrapassar as dificuldades detetadas relacionadas com o referido tópico.

O 2º jogo proposto pela *applet, as* equações foram do tipo $ax = b$, cuja resolução envolvia as operações de multiplicação ou de divisão com números relativos. Neste jogo foram apresentadas equações e opções de resposta, como por exemplo:

-1.ª Equação proposta e respetivas opções da *applet*:

Figura 4.27.- 1.ª Equação do 2.º jogo da *applet*

Respostas dos alunos:



-Gustavo

Resposta selecionada na applet: C

Cálculos apresentados:

-45y = -90 = -45   -90 - 45 = -45

-45 x 2 = -90

Figura 4.28.-Resposta do Gustavo; Tarefa 3; 1.ª Equação do 2.º jogo

Comentário do Gustavo:

-Eu queria pôr dois e escolhi a resposta errada. Não acredito! Stora! Tinha o resultado certo e coloquei a resposta errada.

O aluno substituiu corretamente o y por 2 e apresenta corretamente o cálculo -45x2= -90. No entanto ao efetuar o cálculo, que está errado, -90-45=-45, parece confuso e que está a tentar procurar um número inteiro independentemente do sinal e depois é que coloca o sinal. No seu cometário aparenta ter-se apercebido de que tinha raciocinado corretamente e que não teve consciência que tinha efetuado erros que o levaram, talvez, a escolher a opção errada, y =- 45.

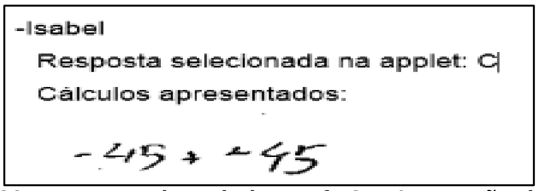

-Isabel
Resposta selecionada na applet: C
Cálculos apresentados:
$-45 + -45$

Figura 4.29.-Resposta da Isabel; Tarefa 3; 1.ª Equação do 2.º jogo

A Isabel escolheu a opção errada e ao apresentar os cálculos parece estar a efetuar a substituição de y por -45 e que teve dificuldades em entender que -45y, exige que se efetue a multiplicação de -45 por y e não -45 + y.

2.ª Equação proposta e respetivas opções da *applet*:

Figura 4.30.- 2.ª Equação do 2.º jogo da *applet*

Respostas dos alunos / resultados obtidos:

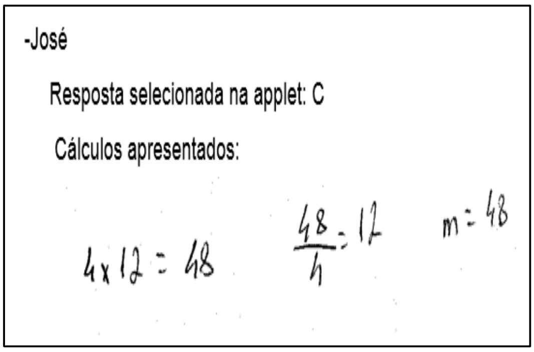
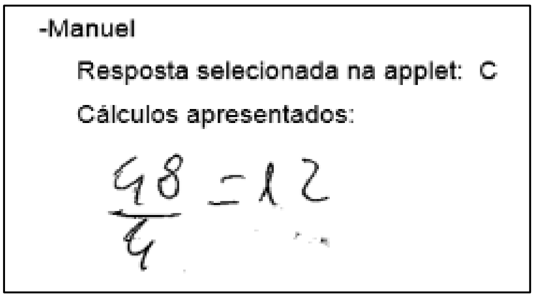

-José
Resposta selecionada na applet: C
Cálculos apresentados:
$4 \times 12 = 48$ $\frac{48}{4} = 12$ $m = 48$

Figura 4.31.-Resposta do José; Tarefa 3; 2.ª Equação do 2.º jogo

O José resolveu corretamente a equação e selecionou a resposta certa. Para o fazer substituiu a incógnita pelo valor 48 e apresentou a proposição verdadeira 48:4=12. Posteriormente indicou o valor da incógnita $m = 48$. Também apresentou o cálculo 4x12=48 que implicou a resolução através da aplicação das operações inversas.


-Manuel

Resposta selecionada na applet: C

Cálculos apresentados:

$\frac{48}{4} = 12$

Figura 4.32.-Resposta do Manuel; Tarefa 3; 2.ª Equação do 2.º jogo

O Manuel respondeu corretamente e à semelhança do que foi efetuado pelo José, recorreu à substituição da variável na equação e verificou que obtinha o valor 12.

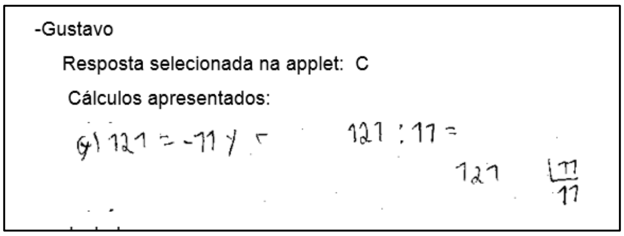
O Manuel ao observar a equação comentou: "Isto é bué da difícil! Já sei não vou perceber nada.". Posteriormente, no final da sua resolução, o Manuel exclamou " Acertei! Já estou a perceber stora!".

O aluno mostrou várias vezes insegurança, necessitando de apoio e incentivo ao longo da resolução das tarefas. Quando é confrontado com tarefas com situações novas, mostra algum nervosismo e necessita de se acalmar através de reforços positivos e de ser incentivado para a efetuar.

-3.ª Equação proposta e respetivas opções da applet:

Figura 4.33.- 3ª Equação do 2º jogo da applet

Respostas dos alunos:


-Gustavo

Resposta selecionada na applet: C

Cálculos apresentados:

9) $121 = -11y$ $121 : 11 =$

$121 \,|\, \underline{11}$
$ 11$

Figura 4.34.-Resposta do Gustavo; Tarefa 3; 3.ª Equação do 2.º jogo

O Gustavo resolveu a equação recorrendo às operações inversas e escolheu a opção correta. Apesar de apresentar apenas o cálculo 121:11 parece que a operação 121: (-11) está implícita ao optar por escolher y=-11 em vez de y=11.

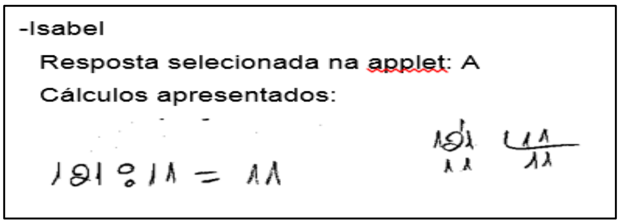

-Isabel
Resposta selecionada na applet: A
Cálculos apresentados:
121 : 11 = 11

Figura 4.35.-Resposta da Isabel; Tarefa 3; 3.ª Equação do 2.º jogo

A Isabel [da mesma forma que o Gustavo] resolveu a equação recorrendo às operações inversas. No entanto, ao indicar apenas o cálculo 121:11=11 e escolher a opção errada indicia que teve dificuldades em efetuar os cálculos com números relativos.

Para resolver a maioria das equações os alunos substituíram a incógnita por um dos valores das opções que lhes eram apresentadas tentando obter uma igualdade verdadeira e utilizaram também as operações inversas.

No início desta tarefa os alunos apresentaram muitas dificuldades, na sua maioria as dificuldades estavam relacionadas com as operações com números relativos e com a aplicação das operações inversas. Ao longo dos restantes jogos, verificou-se que os alunos foram ultrapassando algumas dificuldades, quer através dos esclarecimentos da investigadora, quer através da partilha das dúvidas com o colega (adversário). O aluno Manuel foi o que apresentou maiores dificuldades e mostrou no início algum desânimo que posteriormente se foi dissipando. Este aluno foi ganhando confiança à medida que foi conseguindo responder a algumas questões e que foi esclarecendo as suas dúvidas.

Os alunos durante os jogos falavam sobre as várias jogadas, até a aluna Isabel que normalmente era muito reservada, mostrou uma atitude diferente. Ao longo do jogo comentava as várias jogadas, emitia a sua opinião sobre as várias estratégias que podiam ser aplicadas, debatia com o colega os resultados das várias jogadas e mostrava o seu contentamento quando encestava a bola. Os alunos mostravam-se muito empenhados em resolver as várias propostas da *applet* e divertidos quando tentavam acertar a bola no cesto (figura 4.36).

Figura 4.36.- Exemplo da parte do jogo para encestar a bola.

Este tipo de tarefa foi importante para os alunos compreenderem o conceito de equação e de solução da equação. Também o facto de a mesma possibilitar o recurso a métodos tais como o da substituição da incógnita para verificar a solução da equação e a utilização das operações inversas para resolverem as equações foi essencial para que raciocinem de forma diversificada e apliquem métodos variados para as resolver as equações.

5. ANÁLISE DA TAREFA 4

Esta tarefa recorreu à utilização da *applet* “Algebra Balance Scales[12]” e teve o objetivo de proporcionar ao aluno a compreensão do significado da incógnita, do conceito de equações equivalentes e dos princípios de equivalência e ensinar a resolver equações do 1.º grau utilizando os referidos princípios. Ao longo da implementação da tarefa os alunos estavam sentados numa mesa redonda em frente ao quadro interativo. A investigadora explicou o modo de funcionamento da referida aplicação e os objetivos da mesma, tal como foi referido na descrição das aulas. Efetuou em conjunto com os alunos resolução da 1.ª proposta da *applet* (figura 4.37.) Os alunos estiveram muito atentos à explicação da professora/investigadora e apresentaram dificuldades em entender o que teriam de fazer. A investigadora estabeleceu a analogia entre o modelo a construir através da *applet* e a sua relação com a equação proposta. Os alunos foram intervindo à medida que o modelo ia sendo construído. Depois de a investigadora explicar os procedimentos que teriam que efetuar na *applet* para resolver a equação muitas das dificuldades dos alunos foram ultrapassadas. Assim, ao longo da resolução das várias propostas apresentadas pela *applet,* os alunos responderam às questões colocadas pela investigadora, colocaram questões e efetuaram propostas de resolução como podemos constatar no relato da tarefa.

Posteriormente, foi entregue a cada aluno uma ficha de trabalho (anexo 10), tendo os alunos procedido à resolução das questões que lhes eram pedidas de forma empenhada. No final recorreu-se a um PowerPoint cujo conteúdo foi o da ficha informativa - Enunciar os princípios de equivalência (anexo 11), a qual foi fornecida aos alunos.

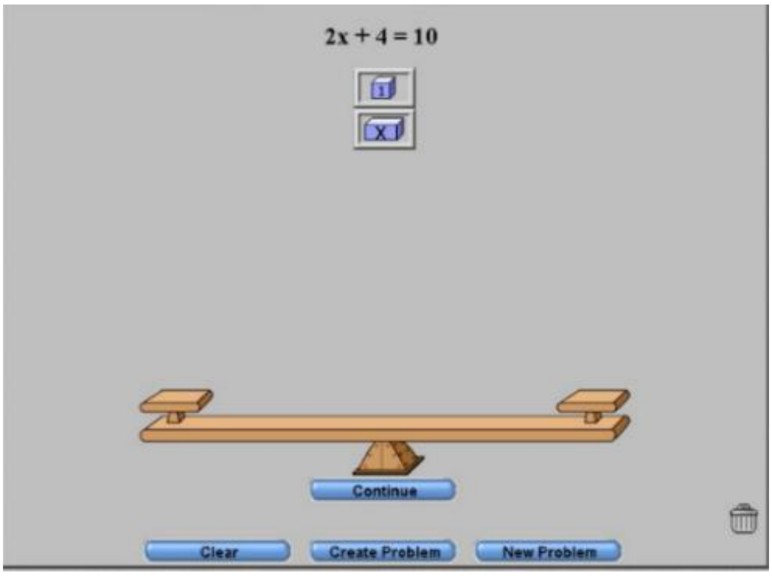


Figura 4.37.- 1.ª proposta da *applet*

[12] Disponível em http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_201_g_4_t_2.html?open=instructions

Relato da tarefa:

Relativamente à apresentação da 2ª proposta da *applet*, conforme a figura 4.38.

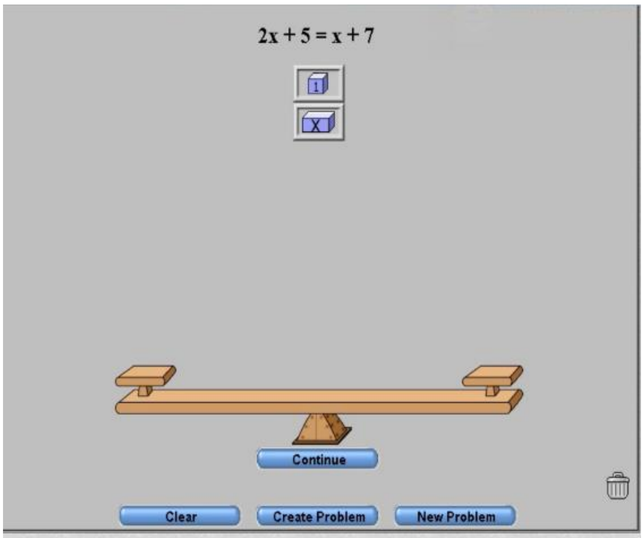


Figura 4.38.- 2.ª proposta da applet

A investigadora perguntou qual era o modelo que tinham de construir para a equação $2x + 5 = x + 7$?

Os alunos foram intervindo:

Manuel - Duas caixas de x de um lado.

Isabel - E mais cinco uns.

A investigadora perguntou o que iriam fazer depois para o 2º membro.

O Gustavo e o Manuel disseram ao mesmo tempo que era "um x e sete uns".

José - Pois é.

Obteve-se assim o seguinte ecrã da figura 4.39.

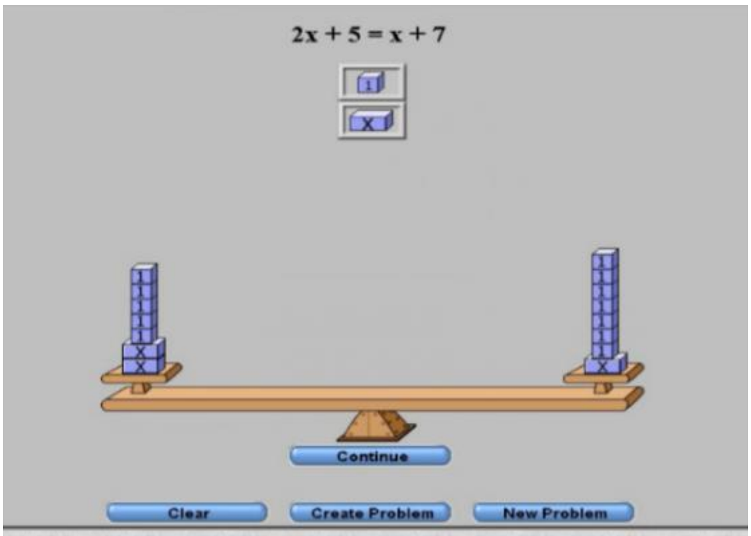


Figura 4.39.-Construção do modelo da equação;2.ª proposta da applet;

Posteriormente, continuou-se e o ecrã obtido foi o da figura 4.40.

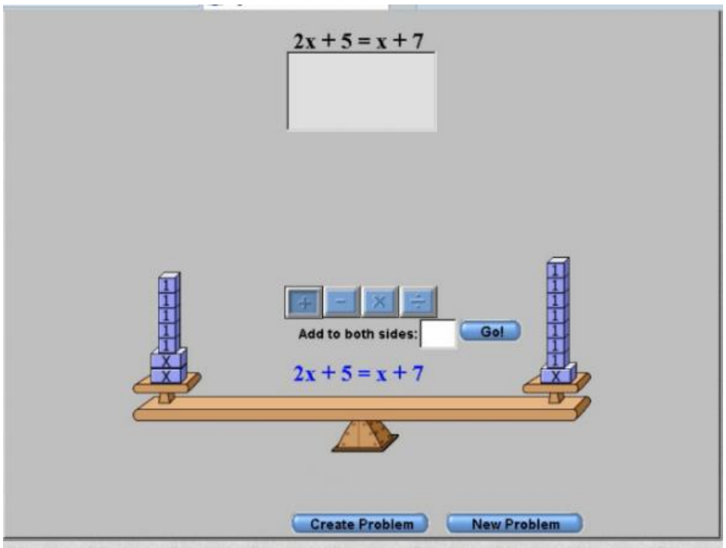


Figura 4.40.-1.º Ecrã para a resolução da equação; 2.ª proposta da applet;

Durante a resolução foi estabelecido o seguinte diálogo entre a investigadora e os alunos:

Investigadora - Qual é agora o objetivo?

Gustavo - Ter só um x de um lado.

Manuel - Posso dizer?

Investigadora - Diga.

Manuel - É menos dois. Espere ai!. Não.

Isabel - Menos cinco.

José - Eu também tirava cinco.

Manuel - Sim. Acho que sim.

Investigadora - Manuel. Pensa que sim?

Manuel - Não sei.

Investigadora: Como é que fica a balança se tirar cinco?

Manuel - Dois x de um lado e x e dois uns. Já percebi!

Gustavo - O x é igual a dois.

Depois de subtrair 5 a ambos os membros, na *applet*, obteve-se o ecrã da figura 4.41.

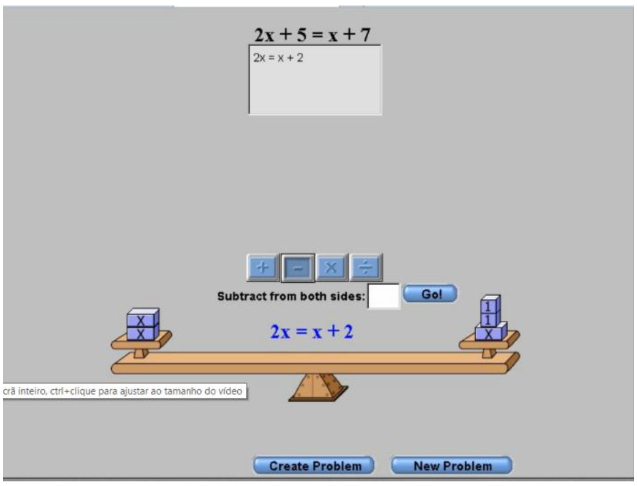


Figura 4.41. -2.º Ecrã para a resolução da equação;2.ª proposta da *applet*;

Estabeleceu-se novamente o diálogo entre a investigadora e os alunos:

Investigadora - O que é que vamos fazer agora?

Gustavo- O x é igual a dois.

Investigadora - Sim. Mas o que é que temos que fazer para obter o valor de x?

Manuel - Stora, já sei. Tiramos uma caixa de x e duas de um.

Investigadora - Não podemos. Temos que subtrair ou adicionar a mesma quantidade a ambos os lados.

Gustavo - Temos de tirar uma caixa de x em cada lado.

José - É menos x .

Obteve-se na *applet* o ecrã que consta na figura 4.42.

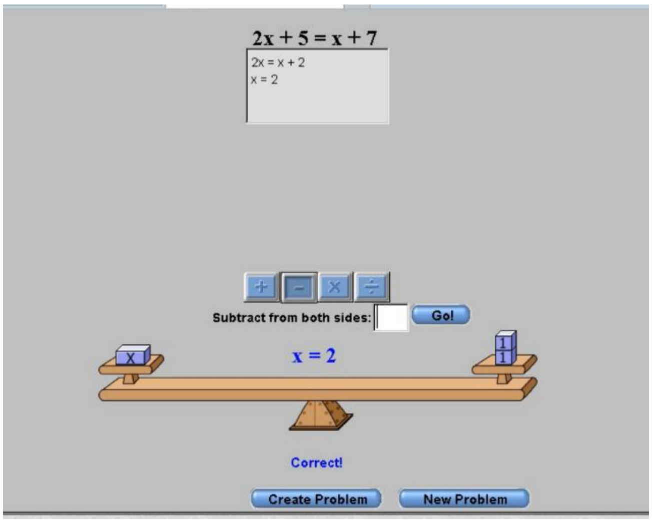


Figura 4.42. -3.º Ecrã para a resolução da equação; 2.ª proposta da applet;

Posteriormente, o Manuel comentou:

- Dois vezes dois mais cinco é igual a nove.

Gustavo- E dois mais sete é igual a nove.

Investigadora - Foram substituir na equação o x por dois?

[O Gustavo e o Manuel responderam que sim.]

Investigadora - Dois é a solução da equação.

Em seguida a investigadora voltou a falar sobre todos os procedimentos efetuados. O Gustavo, que parecia estar a refletir, perguntou:

-Temos que subtrair o valor do número mais pequeno?

Investigadora - Não. Mas porque é que pergunta isso?

Gustavo - Professora e se fosse $2x + 9 = x + 7$?

Investigadora - Vamos criar essa equação aqui na *applet*.

Foi introduzida através da *applet* a equação, tendo sido obtido o ecrã da figura 4.43.

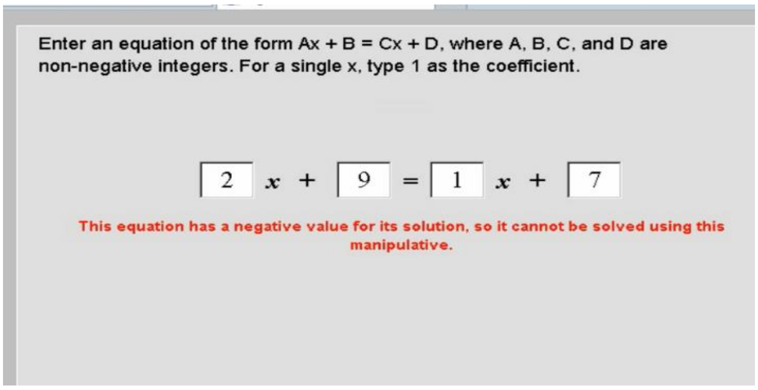


Figura 4.43. – Ecrã da *applet* com a equação proposta pelo Gustavo;

Foi então estabelecido o seguinte diálogo entre a investigadora e os alunos:

Manuel- Não se sabe se é possível!

José - É.

Gustavo - Subtrair 9 ao 7 dá negativo.

Manuel - Dá negativo!

Investigadora - Mas é possível. Esta *applet* é que não permite trabalhar com valores negativos. Podemos resolver esta equação. Como é que vamos fazer? O que é que vamos subtrair a ambos os membros?

Gustavo -Tirava-se 9.

Investigadora - E ficava?

Gustavo -Dois x igual a x menos dois.

José - x menos dois.

Manuel - Menos dois.

Investigadora - Obtínhamos a equação $2x = x - 2$. E agora o que fazíamos?

Gustavo -Tirava x.

Investigadora -E depois?

Gustavo - $x = -2$.

Investigadora - Vamos verificar?

Gustavo - Dois vezes menos dois dá menos quatro e menos quatro mais nove dá cinco.

Investigadora - E agora?

Gustavo e Miguel - Sete menos dois dá cinco.

Para finalizar, foi proposta mais uma equação através da *applet* (figura 4.44). Os alunos efetuaram corretamente todos os procedimentos, participando ativamente, indicaram o que deveria ser feito até encontrarem valor da incógnita. No final, a investigadora pediu para verificarem se a solução estava correta. Os alunos substituíram na equação dada o valor da incógnita por 3 e efetuaram corretamente e com facilidade todos os cálculos e procedimentos.

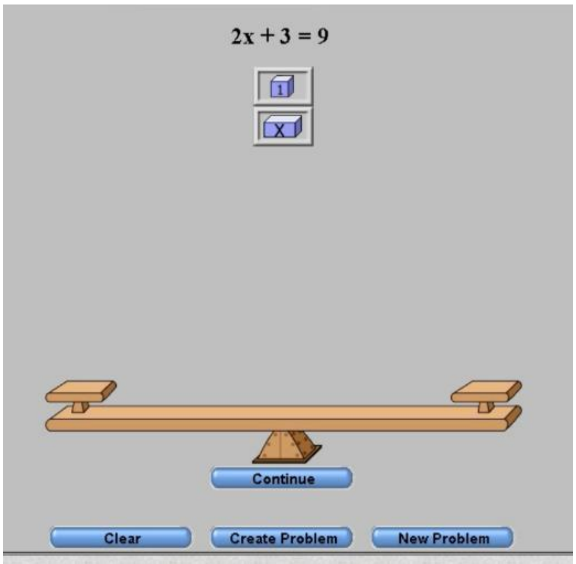


Figura 4.44.- 3.ª proposta da *applet*

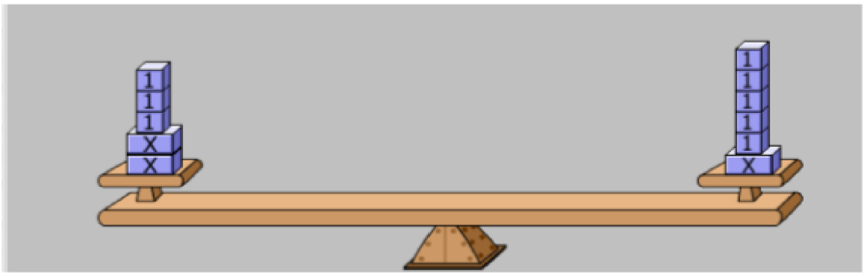
Ao analisar os diálogos estabelecidos e debates de ideias entre os alunos e entre a investigadora e os alunos, constatou-se que no decurso das propostas efetuadas os alunos conseguiram estabelecer uma relação entre as equações propostas e o modelo que construíram. Verificou-se que os alunos se apropriaram dos procedimentos que são subjacentes aos princípios de equivalência, nomeadamente, adicionar e subtrair a ambos os membros da equação a mesma quantidade e multiplicar e dividir ambos os membros pelo mesmo número diferente de zero. No entanto, esta *applet* apresenta limitações que foram ultrapassadas através da discussão que se efetuou quando o aluno Gustavo propôs a resolução de uma nova equação. Apesar da limitação desta *applet*, relacionada com a impossibilidade de trabalhar com valores negativos, ou seja, resolver equações do tipo $2x + 9 = x + 7$ (ver figura 4.43), o referido aluno conseguiu refletir e intervir de forma a proporcionar uma reflexão conjunta sobre a forma de resolver as equações que implicavam obter números negativos ao subtrair um número a ambos os membros da equação. Pensa-se que a ajuda da investigadora foi fundamental para que esta limitação se tornasse uma mais-valia na compreensão dos princípios de equivalência e na sua aplicação na resolução de outro tipo de equações não comtempladas nas propostas da *applet.*

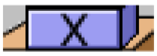
Posteriormente, a investigadora recorreu ao PowerPoint cujo conteúdo foi o da ficha informativa - Enunciar os princípios de equivalência (anexo 11), a qual foi também fornecida aos alunos. Através desta ficha foram enunciados e introduzidos formalmente os princípios de equivalência e foi também efetuada a resolução de uma equação e explicados todos os procedimentos a efetuar. Os alunos estiveram muito atentos às explicações dadas pela investigadora, participando ativamente quando era solicitados não apresentando quaisquer dúvidas.

Seguidamente, foi entregue a cada aluno a ficha de trabalho (anexo 10), com o objetivo de verificar se todos os alunos estabeleceram uma relação entre o trabalho realizado com o modelo proposto pela *applet* e a resolução de equações aplicando os princípios de equivalência.

Os alunos individualmente procederam à resolução das questões da ficha acima mencionada e que constam na figura 4.45.

1. Observa a balança em equilíbrio.





- Peso de cada caixa em kg

- 1 kg

1.1. Escreve uma equação que traduza a situação.

1.2. O que é que acontece à balança:

1.2.1. Se tirares 2 kg de cada um dos pratos da balança?

1.2.2. Se adicionares 1 kg de cada um dos pratos?

1.2.3. Se duplicares a massa em cada prato?

1.3. Qual é o peso de uma caixa? Explica como obtiveste a tua resposta.

1.4. Escreve um enunciado de um problema que traduza a situação proposta.

2. Para cada uma das seguintes equações, diz qual é o valor de x e explica como procedeste para o obteres.

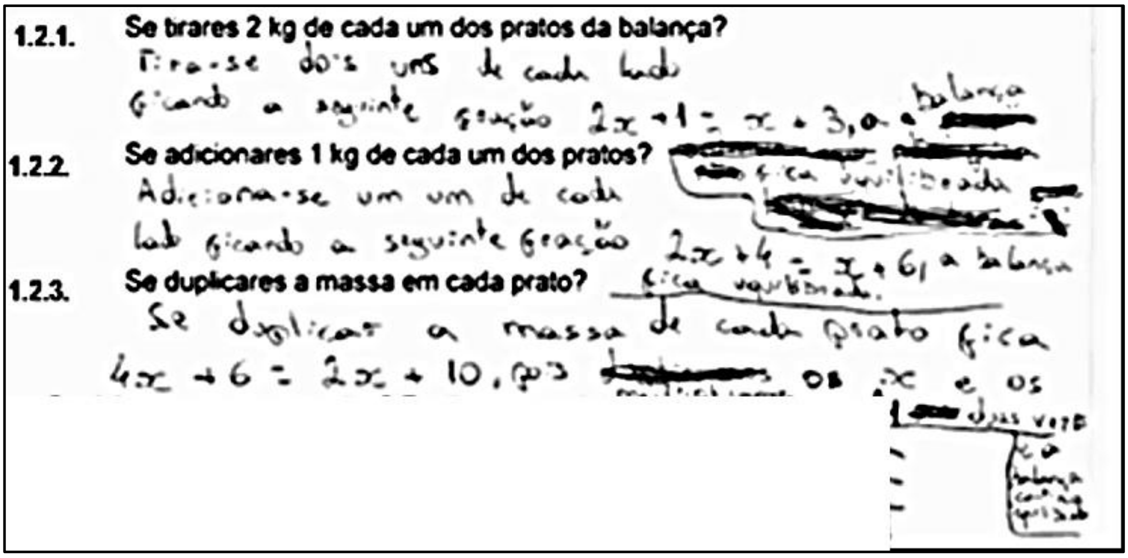
2.1. $2x+3=x+4$

2.2. $4x-2=22+2x$

Figura 4.45.-Questões da Ficha de trabalho; tarefa 4

Respostas dos alunos:

No que diz respeito à primeira questão, constatou-se que todos os alunos conseguiram, no item 1.1, escrever corretamente a equação que traduzia a situação proposta na figura, evidenciando que conseguiram estabelecer uma analogia entre o modelo proposto pelas *applets* e as equações do 1.º grau. Na questão 1.2., nenhum aluno apresentou dificuldades em compreender a mesma e todos responderam nos itens 1.2.1, 1.2.2 e 1.2.3, que a balança ficava equilibrada. Saliente-se, no entanto, que para além da resposta anterior, os alunos José e Isabel, deram respostas mais completas que constam nas figuras 4.46. e 4.47., respetivamente.



1.2.1. Se tirares 2 kg de cada um dos pratos da balança?

Tira-se dois uns de cada lado ficando a seguinte equação $2x+1 = x+3$, a balança fica equilibrada.

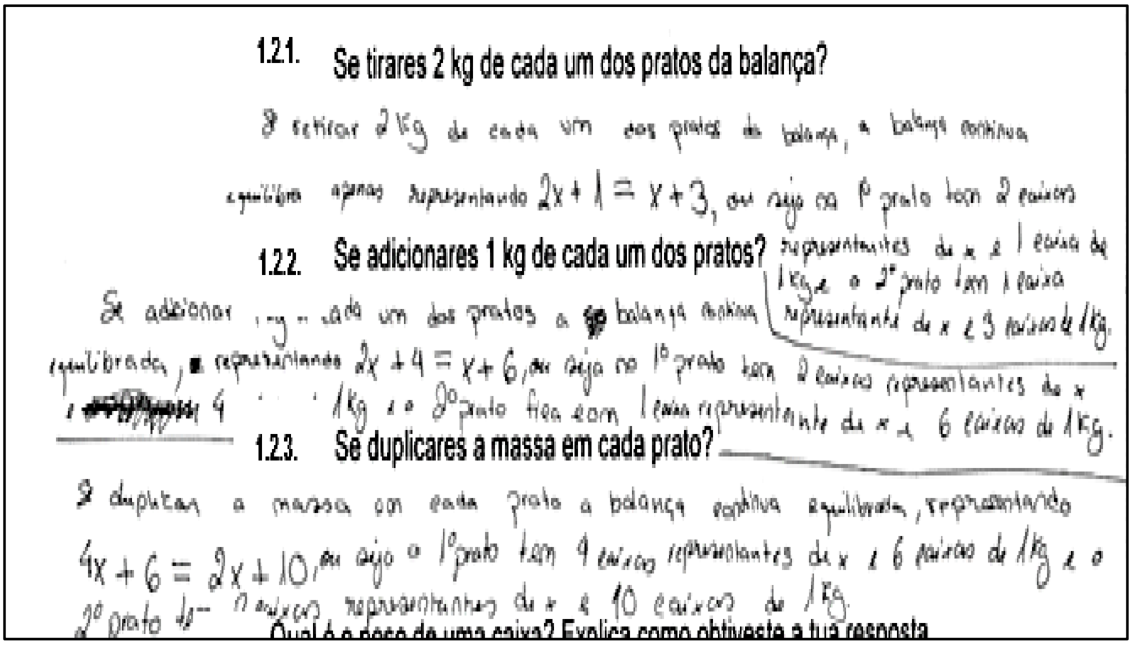
1.2.2. Se adicionares 1 kg de cada um dos pratos?

Adiciona-se um um de cada lado ficando a seguinte equação $2x+4 = x+6$, a balança fica equilibrada.

1.2.3. Se duplicares a massa em cada prato?

Se duplicar a massa de cada prato fica $4x+6 = 2x+10$, pois os x e os [illegible] duas vezes e a balança continua igual.

Figura 4.46.-Resposta do José; Questão 1.2; Ficha de trabalho; Tarefa 4;



1.2.1. Se tirares 2 kg de cada um dos pratos da balança?

Ao retirar 2 kg de cada um dos pratos da balança, a balança continua equilibrada apenas representando $2x+1 = x+3$, ou seja no 1º prato tem 2 caixas representantes de x e 1 caixa de 1kg e o 2º prato tem 1 caixa representante de x e 3 caixas de 1kg.

1.2.2. Se adicionares 1 kg de cada um dos pratos?

Se adicionar 1 kg a cada um dos pratos a balança continua equilibrada, representando $2x+4 = x+6$, ou seja no 1º prato tem 2 caixas representantes de x e 4 caixas de 1kg e o 2º prato fica com 1 caixa representante de x e 6 caixas de 1kg.

1.2.3. Se duplicares a massa em cada prato?

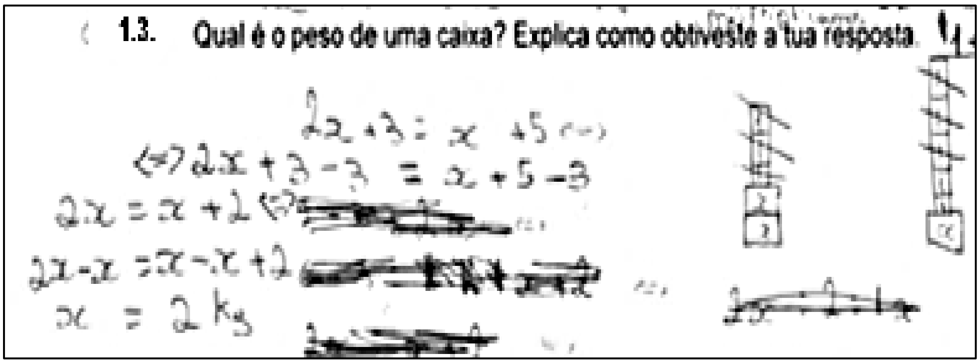
Ao duplicar a massa em cada prato a balança continua equilibrada, representando $4x+6 = 2x+10$, ou seja o 1º prato tem 4 caixas representantes de x e 6 caixas de 1kg e o 2º prato tem 2 caixas representantes de x e 10 caixas de 1kg.

Qual é o peso de uma caixa? Explica como obtiveste a tua resposta

Figura 4.47.-Resposta da Isabel; Questão 1.2; Ficha de trabalho; Tarefa 4;

O José e a Isabel associaram corretamente às novas situação proposta pelas questões, as de adicionar 2 kg, de retirar 1 kg ou duplicar a massa, em cada um dos pratos da balança, a novas equações equivalentes à inicial. Ficou assim bem patente que estes alunos entenderam as novas situações e que conseguiram traduzi-las através das equações.

Relativamente à questão 1.3., em que era pedido o peso de uma caixa e para explicar como é que o calculavam, todos os alunos optaram por resolver a equação $2x + 3 = x + 5$, da mesma forma, aplicando os princípios de equivalência. Como exemplos das resoluções apresentadas podemos observar, nas figuras 4.48 e 4.49, as efetuadas pelos alunos José e Manuel, respetivamente. Estes alunos para além da referida resolução da equação, também apresentaram outros processos que achamos importante referir.


1.3. Qual é o peso de uma caixa? Explica como obtiveste a tua resposta.

$2x+3 = x+5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x+3-3 = x+5-3$

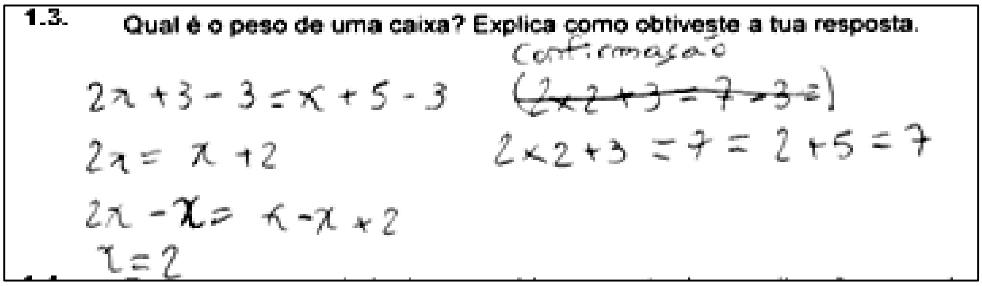
$2x = x+2 \Leftrightarrow$

$2x-x = x-x+2$

$x = 2$ kg

Figura 4.48.-Resposta do José; Questão 1.3; Ficha de trabalho; Tarefa 4;

O José para efetuar o seu raciocínio apresenta também um esquema semelhante ao modelo com que tinha trabalhado nesta tarefa através da *applet.* Podemos constatar que estava a utilizá-lo para raciocinar sobre a forma de calcular o valor de cada caixa ao observamos que este aluno riscou, no seu esboço, três dos quadrados com o número um.


1.3. Qual é o peso de uma caixa? Explica como obtiveste a tua resposta.

$2x+3-3 = x+5-3$

$2x = x+2$

$2x-x = x-x+2$

$x = 2$

confirmação

$(\cancel{2\times 2+3 = 7-3=})$

$2\times 2+3 = 7 = 2+5 = 7$

Figura 4.49.-Resposta do Manuel; Questão 1.3; Ficha de trabalho; Tarefa 4;

O Manuel, como já foi referido, resolveu a equação através dos princípios de equivalência. No entanto, pensamos que pela necessidade de confirmar os cálculos, recorreu também ao método de substituição como se pode denotar através da substituição da variável por 2 na equação inicial $2x + 3 = x + 5$, e dos cálculos apresentados.

Na questão 1.4, os alunos apresentaram inicialmente algumas dificuldades em interpretar a pergunta e compreender o que era pedido. No entanto, depois de refletirem sobre a mesma e de a investigadora informar que teriam de escrever um problema em que pudesse ser aplicado o modelo que estava na balança, a maioria dos alunos conseguiu escrever um enunciado que se adaptasse ao modelo proposto. Os dos problemas criados pelos alunos, com exceção do apresentado pelo Manuel, estavam de acordo com a situação proposta. Podemos constatar este facto através da análise das figuras 4.50, 4.51, 4.52 e 4.53 seguidamente apresentadas.

Enunciado do problema apresentado pelo José:

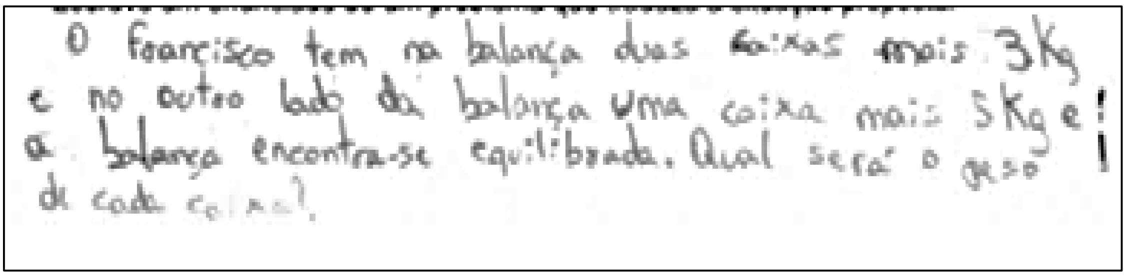
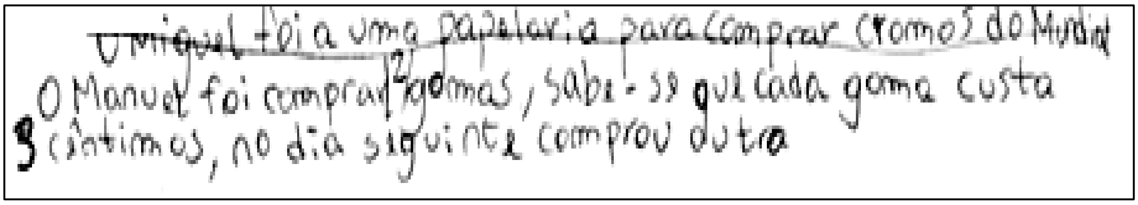

O Francisco tem na balança duas caixas mais 3Kg e no outro lado da balança uma caixa mais 5Kg e a balança encontra-se equilibrada. Qual será o peso de cada caixa?

Figura 4.50.-Resposta do José; Questão 1.4; Ficha de trabalho; Tarefa 4;

O José demonstra que conseguiu entender a situação e explicitá-la por escrito.

Enunciado do problema apresentado pelo Manuel:

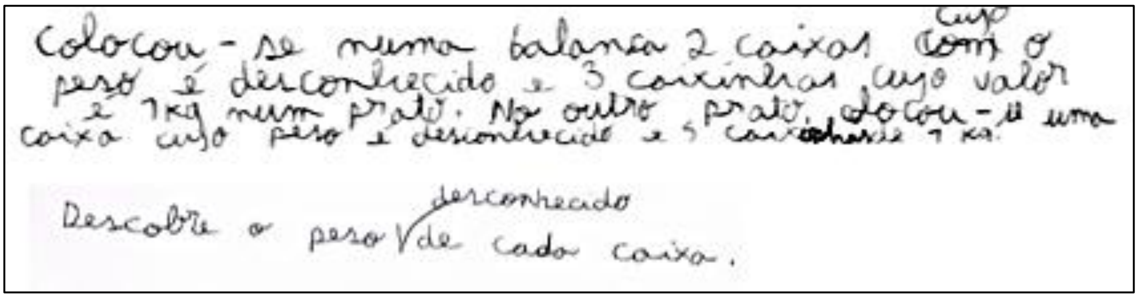


~~O miguel foi a uma papelaria para comprar cromos do Mundial~~
O Manuel foi comprar 12 gomas, sabe-se que cada goma custa 8 cêntimos, no dia seguinte comprou outra

Figura 4.51.-Resposta do Manuel; Questão 1.4; Ficha de trabalho; Tarefa 4;

O Manuel quando se confrontou com esta questão ficou muito agitado e disse que não era capaz de a efetuar. Podemos observar que não completou a sua resposta e que parecia confuso ao acrescentar e emendar a resposta.

Enunciado do problema apresentado pelo Gustavo:



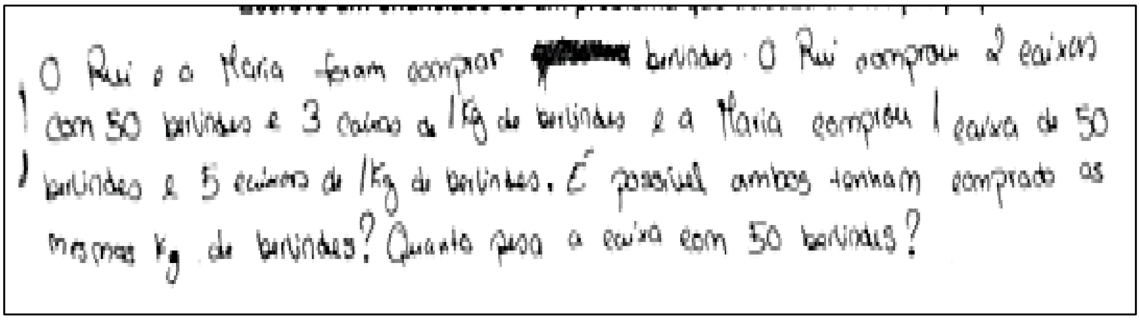
Colocou-se numa balança 2 caixas cujo o peso é desconhecido e 3 caixinhas cujo valor é 1kg num prato. No outro prato, colocou-se uma caixa cujo peso é desconhecido e 5 caixinhas de 1 kg.

Descobre o peso desconhecido de cada caixa.

Figura 4.52.-Resposta do Gustavo; Questão 1.4; Ficha de trabalho; Tarefa 4;

O enunciado do problema apresentado pelo Gustavo está de acordo com a situação apresentada. No entanto, saliente-se que este aluno reproduziu o que observava através do modelo e que apenas escreveu a frase "Descobre o peso desconhecido de cada caixa" depois de a investigadora o informar que tinha o enunciado incompleto.

Enunciado do problema apresentado pela Isabel:

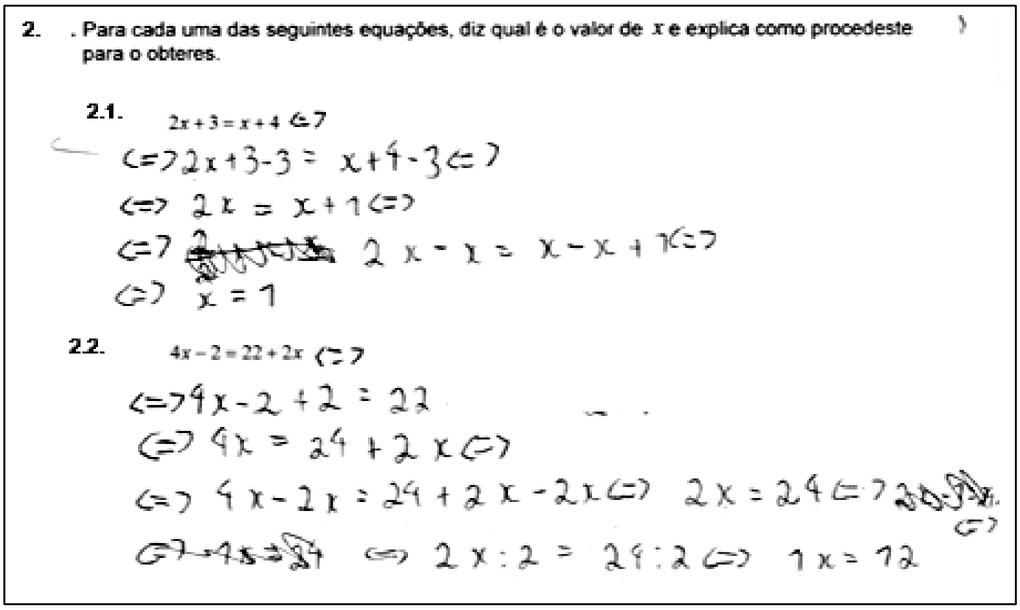


O Rui e a Maria foram comprar [redacted] berlindes. O Rui comprou 2 caixas com 50 berlindes e 3 caixas de 1Kg de berlindes e a Maria comprou 1 caixa de 50 berlindes e 5 caixas de 1Kg de berlindes. É possível ambos tenham comprado os mesmos Kg de berlindes? Quanto pesa a caixa com 50 berlindes?

Figura 4.53.-Resposta da Isabel; Questão 1.4; Ficha de trabalho; Tarefa 4;

A Isabel conseguiu escrever um enunciado muito completo e que se adaptou corretamente à situação proposta. Saliente-se que esta aluna mostrou que compreendeu bem a situação proposta e que teve a capacidade de imaginar uma situação da vida real mais concreta, do que os restantes colegas. Também mostrou um bom raciocínio quando efetuou a pergunta de forma mais complexa " É possível ambos terem comprado os mesmos kg de berlindes?".

Em relação à questão 2, esta teve como objetivo especifico investigar qual seria o processo que os alunos escolheriam para calcularem o valor da incógnita, x, e se o aplicavam de forma correta. Ao resolverem a referida questão todos os alunos optaram por aplicar os princípios de equivalência. Fizeram-no da mesma forma e resolveram corretamente as duas equações. Como exemplo apresenta-se a resposta dada, à referida questão, pelo Gustavo e que consta na figura 4.54. Salienta-se também a resposta dada pelo José que para além de apresentar a mesma resolução que os restantes alunos, recorre a um esquema que consta na figura 4.55 e que pensamos que deverá ser alvo de reflexão.



2. . Para cada uma das seguintes equações, diz qual é o valor de x e explica como procedeste para o obteres.

2.1. $2x+3=x+4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x+3-3 = x+4-3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x = x+1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x - x = x - x + 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 1$

2.2. $4x-2=22+2x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4x-2+2 = 22$

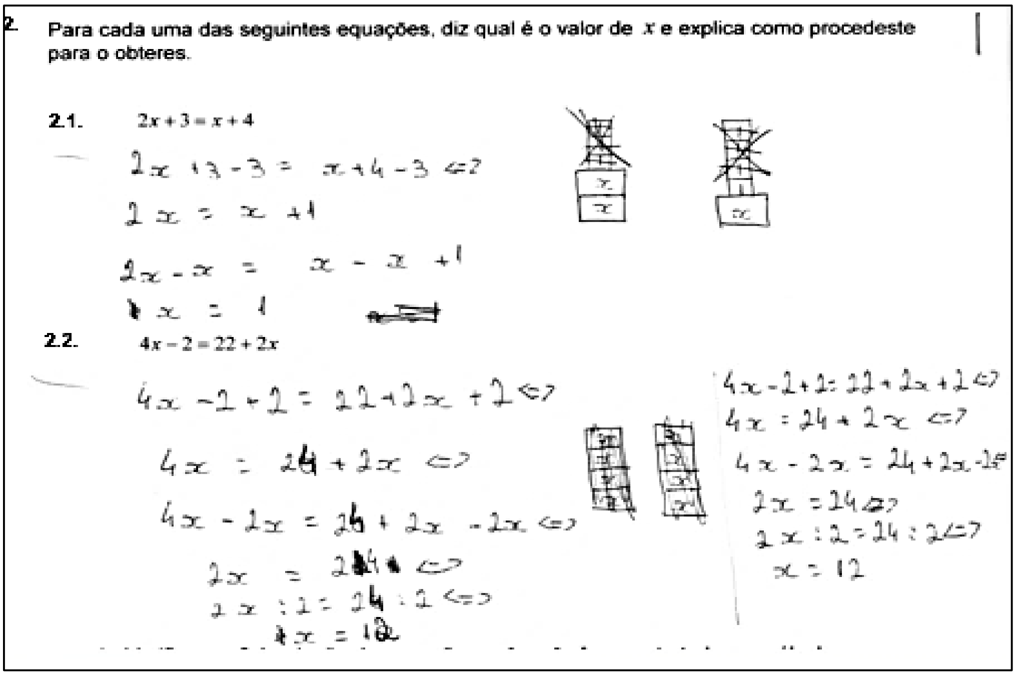
$\Leftrightarrow 4x = 24 + 2x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4x - 2x = 24 + 2x - 2x \Leftrightarrow 2x = 24 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x : 2 = 24 : 2 \Leftrightarrow 1x = 12$

Figura 4.54.-Resposta do Gustavo; Questão 2; Ficha de trabalho; Tarefa 4

O Gustavo resolveu corretamente as duas equações optando por utilizar os princípios de equivalência.



2. Para cada uma das seguintes equações, diz qual é o valor de x e explica como procedeste para o obteres.

2.1. $2x+3=x+4$

$2x+3-3 = x+4-3 \Leftrightarrow$

$2x = x+1$

$2x - x = x - x + 1$

$x = 1$

2.2. $4x-2=22+2x$

$4x-2+2 = 22+2x+2 \Leftrightarrow$

$4x = 24+2x \Leftrightarrow$

$4x - 2x = 24 + 2x - 2x \Leftrightarrow$

$2x = 24 \Leftrightarrow$

$2x : 2 = 24 : 2 \Leftrightarrow$

$x = 12$

$4x-2+2=22+2x+2 \Leftrightarrow$

$4x = 24 + 2x \Leftrightarrow$

$4x - 2x = 24 + 2x - 2x$

$2x = 24 \Leftrightarrow$

$2x : 2 = 24 : 2 \Leftrightarrow$

$x = 12$

Figura 4.55.-Resposta do José; Questão 2; Ficha de trabalho; Tarefa 4;

O José, da mesma forma que os restantes alunos, para calcular o valor da incógnita em cada uma das equações utilizou corretamente os princípios de equivalência. Também podemos constatar que utilizou um esquema semelhante ao modelo, com que tinha trabalhado nesta tarefa através da *applet* e que este foi utilizado para o auxiliar para raciocinar sobre os procedimentos que teria de efetuar para calcular o valor x.

O trabalho realizado através da *applet* permitiu que os alunos desenvolvessem o conceito de incógnita ao associar este conceito ao peso desconhecido de uma caixa e também o conceito de equação ao permitir estabelecer a analogia entre este conceito e a situação representada através da balança. Esta *applet* permitiu também a apropriação do conceito de equações equivalentes através de processos informais.

Pensamos que a *applet* utilizada nesta tarefa funcionou como um instrumento mediador ao proporcionar que os alunos estabelecessem uma relação entre os procedimentos efetuados para resolver uma situação concreta, calcular o peso de uma caixa numa determinada circunstância, e os procedimentos algébricos que devem efetuar para resolver equações aplicando os princípios de equivalência

Ao utilizar a referida *applet,* podemo-nos aperceber de uma forma mais evidente, que a mesma se insere no tipo de aplicações referido por Figueiredo e Palha (2005) como as que "…apelam fundamentalmente ao conhecimento informal dos alunos torna possível tratar os conceitos de uma forma natural e intuitiva, constituindo, desta forma, uma base sólida para um trabalho, posterior, mais formal." (p.7).

Parece também importante referir, que no que diz respeito aos mediadores simbólicos Vygotsky (1978) refere " Como as palavras, os instrumentos e os signos não-verbais dão aos alunos formas de tornar mais eficientes os seus esforços de adaptação e solução de problemas." (p. 127). Também se afigurar apropriado referir que Kozulin (2003) menciona que, de acordo com Vygotsky, o desenvolvimento cognitivo depende do domínio de "…mediadores simbólicos pela criança e na sua apropriação e internalização na forma de ferramentas internalizadas." (p. 24).

6. ANÁLISE DA TAREFA 5

Nesta tarefa foi utilizada a *applet* "*Solving equations with balance-strategy: game*[13]", com o objetivo de aplicar os princípios de equivalência em equações do 1.º grau mais complexas, ou seja, com parêntesis e denominadores. Em sala de aula, os alunos foram divididos em grupos de dois elementos. O Gustavo e o Manuel formaram o grupo A e o grupo B foi constituído pela Isabel e o José. Cada um dos grupos estava numa mesa com um computador. A investigadora procedeu à explicação sobre o modo como funcionava a *applet* e quais os objetivos da tarefa, projetando um PowerPoint (anexo 12) a qual foi acompanhado com muita atenção pelos alunos. Seguidamente, foi instalada a *applet* em cada um dos computadores acima referidos e os alunos começaram a resolver no computador, de forma alternada, cada uma das primeiras quinze

[13] http://www.fi.uu.nl/toepassingen/02018/toepassing_wisweb.en.html

equações propostas na *applet* e registaram na ficha (anexo 12) todos os procedimentos efetuados, para todas as equações propostas. Ao longo da resolução das equações os alunos esclareceram dúvidas entre si. Tendo-se constatado que nas primeiras treze equações, não foram apresentadas grandes dificuldades ao resolvê-las. Quando apareceu a primeira equação com parênteses, surgiram as primeiras dificuldades que foram facilmente ultrapassadas, através de uma breve explicação da investigadora sobre a forma como se procedia para desembaraçar de parênteses. No entanto, é necessário referir que para resolver as referidas treze equações os alunos não necessitavam de desembaraçar de denominadores.

Alguns exemplos das resoluções apresentadas nas treze primeiras equações foram:

-5.ª Equação

-Resolução efetuada no computador pelo grupo A:

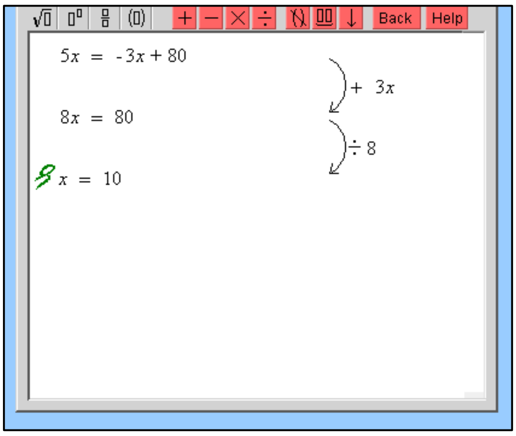


Figura 4.56.-Exemplo da resolução no computador da 5.ª equação; Grupo A; Tarefa 5

- Resolução apresentada na ficha por cada um dos elementos do grupo A:

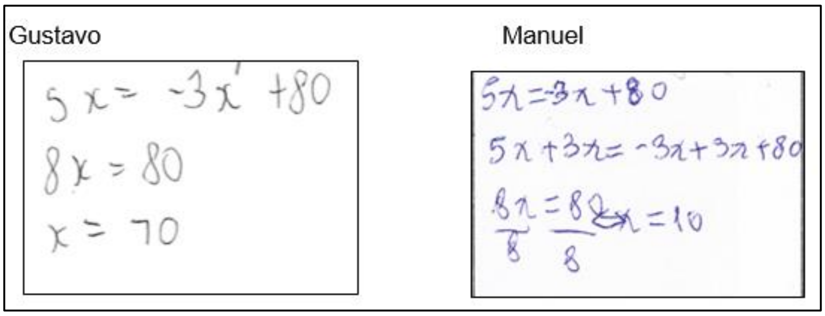


Figura 4.57. – Resolução da 5.ª equação; Grupo A; Tarefa 5

O Gustavo resolveu corretamente a 5ª equação na ficha, no entanto, não mostrou todos os procedimentos que efetuou ao aplicar os princípios de equivalência. Pensamos que este aluno não necessitou de explicitar todos os procedimentos porque tem um bom raciocínio. O Manuel ao resolver a equação mostrou todos os procedimentos que efetuou e não se limitou a copiar a resolução do computador. Os dois alunos resolveram corretamente a equação conseguindo apropriar-se da utilização dos princípios de equivalência.

-10.ª Equação

-Resolução efetuada no computador pelo grupo B:

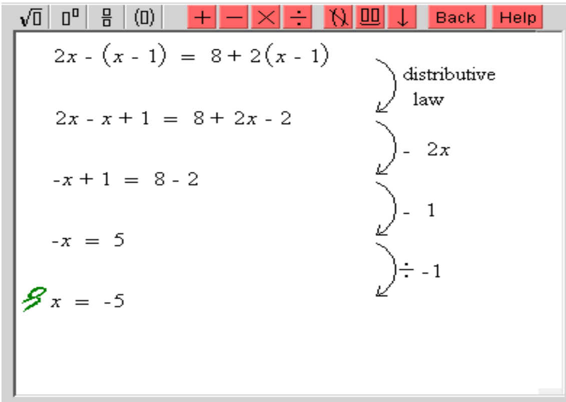


Figura 4.58.-Exemplo da resolução da 10.ª equação; Grupo B; Tarefa 5

- Resolução apresentada na ficha por cada um dos elementos do grupo A:

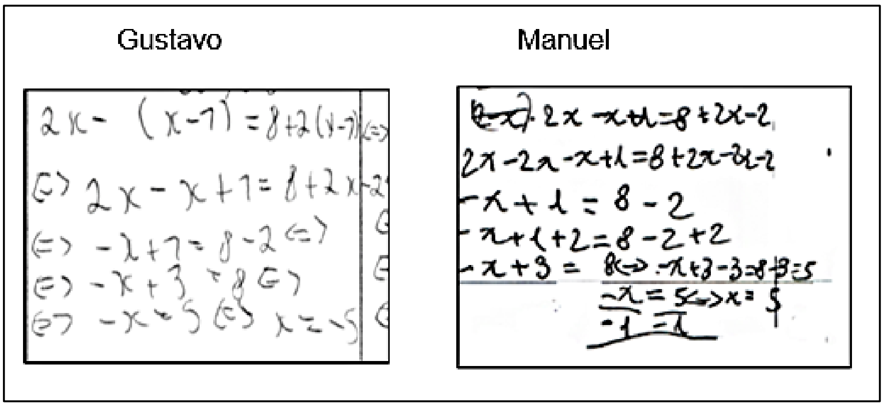


Figura 4.59. - Resolução da 10.ª equação; Grupo A; Tarefa 5

No início da resolução da equação o grupo apresentou dificuldades devido ao facto de não saberem desembaraçar de parênteses no 1º membro, ou seja, como simplificar $2x-(x-1)$. A investigadora explicou como deveriam proceder e os alunos ultrapassaram esta dificuldade. Efetuaram corretamente a aplicação dos princípios de equivalência e só no final é que voltaram a sentir dificuldades quando obtiveram $-x=5$. Com o objetivo de ajudar os alunos a superar as dificuldades foi estabelecido o seguinte diálogo entre os alunos deste grupo e a investigadora:

Gustavo- Vou dividir por $-x$?

Investigadora- O melhor é pensar mais um pouco.

Manuel- Esta está difícil!

Gustavo- Pois está.

[Depois de um momento de silêncio, a investigadora perguntou.]

- E se dividirem por -1?

Gustavo- Sim, vai dar!

Manuel- Já dá.

Os alunos acabaram a de resolver a equação, no entanto podemos constatar que o Manuel cometeu um erro no final fazendo $\frac{-x}{-1} = \frac{5}{-1} <=> x = 5$. Este erro poderá ser de distração dado que o aluno, no 1º membro, conseguiu calcular corretamente $\frac{-x}{-1}$.

- Resolução apresentada na ficha por cada um dos elementos do grupo B:

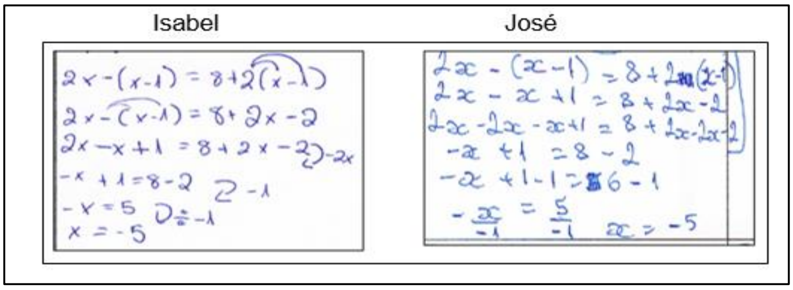


Figura 4.60. - Resolução da 10.ª equação; Grupo B; Tarefa 5

No início da resolução da 10.º equação os alunos deste grupo também apresentaram as mesmas dificuldades que os alunos do grupo A, e que foram acima referidas. A investigadora também explicou, de forma análoga à que foi efetuada aos alunos do outro grupo. Estes alunos conseguiram ultrapassar as dificuldades e resolveram corretamente a equação.

-13.ª Equação

-Exemplo da resolução efetuada no computador pelo grupo A:

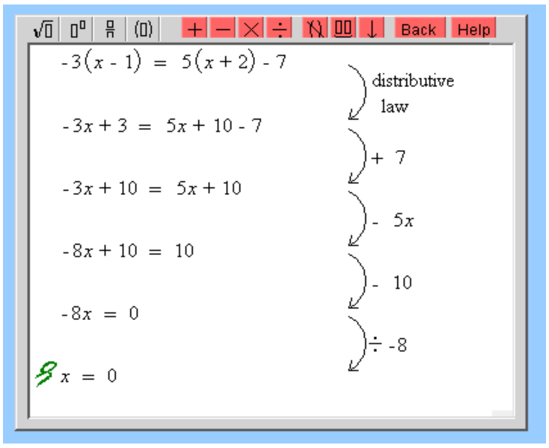


Figura 4.61.-Exemplo da resolução da 13.ª equação; Grupo A Tarefa 5

-Resolução apresentada na ficha por cada um dos elementos do grupo A:

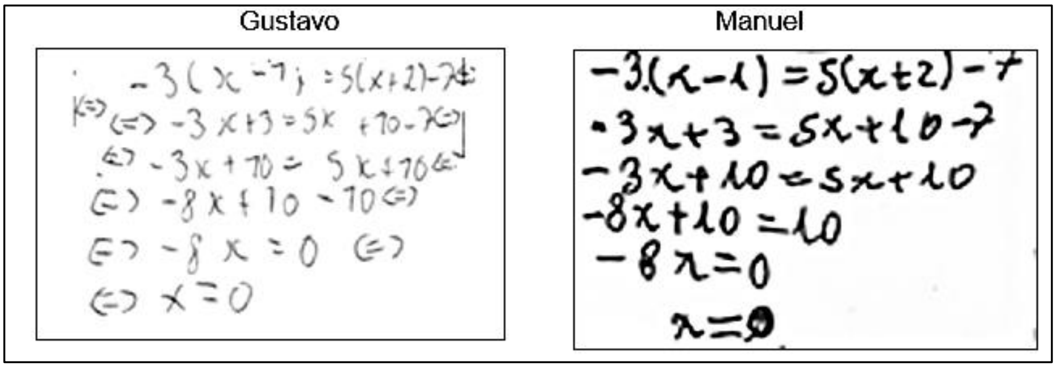


Figura 4.62. - Resolução da 13.ª equação; Grupo A; Tarefa 5

Os alunos conseguiram resolver corretamente a equação e não necessitaram de esclarecimentos. Salienta-se o facto de nenhum dos alunos apresentarem todos os procedimentos ao aplicarem os princípios de equivalência. Fizeram mentalmente os cálculos o que está patente, por exemplo, na apresentação da 2.ª e 3.ª equação equivalente apresentada. Podemos pensar que o Gustavo e o Manuel não sentiram a necessidade de apresentar os cálculos intermédios devido ao facto de ao trabalharem com a *applet* terem também omitido os cálculos intermédios.

-Resolução apresentada na ficha por cada um dos elementos do grupo B:

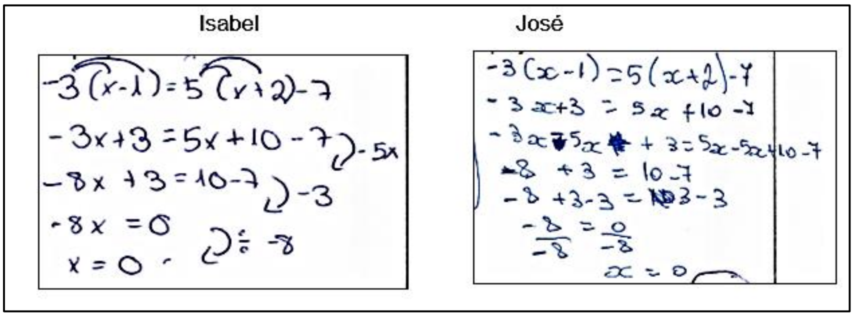


Figura 4.63. - Resolução da 13.ª equação; Grupo B; Tarefa 5

Estes alunos também conseguiram resolver a equação corretamente e também não colocaram dúvidas. A Isabel, da mesma forma do que fizeram o Gustavo e o Manuel, não apresentou todos os procedimentos ao aplicar os princípios de equivalência. Ao contrário de José que apresentou todos os procedimentos a efetuar ao resolver a equação.

-14.ª Equação

As maiores dificuldades surgiram quando os alunos começaram a resolver a 14.ª equação (figura 4.64), esta necessitava que os mesmos soubessem desembaraçar de denominadores. Como os alunos ainda não tinham sido confrontados com este tipo de equações e não tinham sido explicados os procedimentos a efetuar para desembaraçarem de denominadores. Começaram a debater entre eles possíveis estratégias para resolverem a equação e posteriormente começaram a chamar a investigadora.

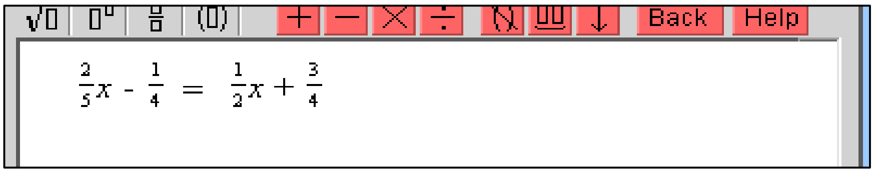


Figura 4.64.-14.ª equação; Tarefa 5

Foi então estabelecido o seguinte diálogo entre os alunos do grupo B e a investigadora:

Isabel- Não temos de pôr os denominadores iguais?

Investigadora- Porquê?

Isabel- Não consigo fazer operações com frações sem ter os denominadores iguais.

Investigadora- Pois é.

José- Estava a fazer$-\frac{1}{2}x$.

Investigadora- E o que é que deu?

José- Não sei. Tenho que pôr o denominador igual.

Investigadora- E como é que vai pôr o denominador igual? Já aprendeu a fazer isso nas equações?

José- Nas equações, não.

Investigadora- Temos de conseguir pôr todas as frações com o mesmo denominador.

O José começou a resolver a equação na ficha, tendo apresentado a resolução que consta na figura 4.65., apenas necessitou da ajuda da investigadora no final quando chegou à equação$-\frac{1}{10}x=\frac{10}{10}$.

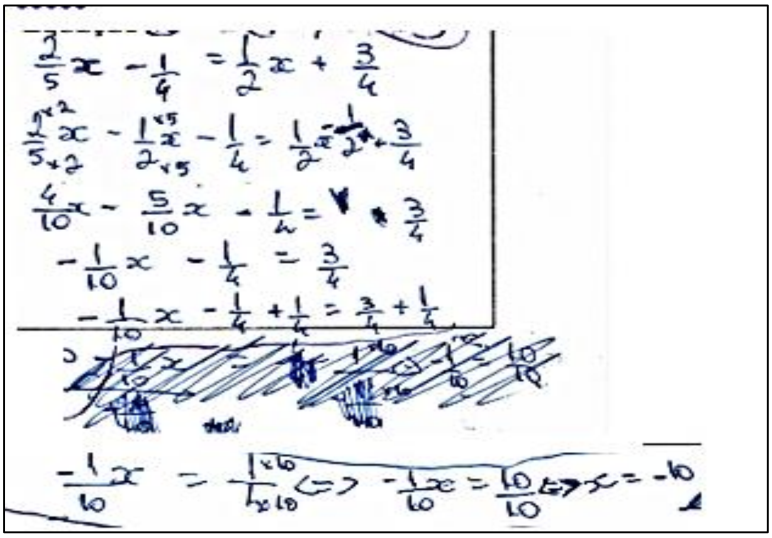


Figura 4.65. - Resolução da 14.ª equação efetuada pelo José; Grupo B; Tarefa 5

Podemos constatar que o José conseguiu, sem saber o processo formal de desembaraçar de denominadores, refletir e aplicar uma estratégia correta para resolver as equações, baseando-se nas operações com frações. No entanto, no final ao obter a equação $-\frac{1}{10}x=\frac{10}{10}$, este aluno não conseguiu aplicar os princípios de equivalência e acabar de a resolver sem a ajuda da investigadora. Esta dificuldade, em resolver a equação no final, parece estar relacionada com o facto de o aluno ainda não sido confrontado com a necessidade aplicar os princípios de equivalência numa equação com denominadores. Depois de a investigadora informar que podia multiplicar ambos os membros por 10, o aluno conseguiu concluir a resolução da equação.

A Isabel também começou a resolver a equação na ficha, sendo esta a apresentada na figura 4.66. Esta aluna, da mesma forma que o José apenas necessitou da ajuda da investigadora depois de ter obtido no final a equação $\frac{-2}{20}x=\frac{20}{20}$.

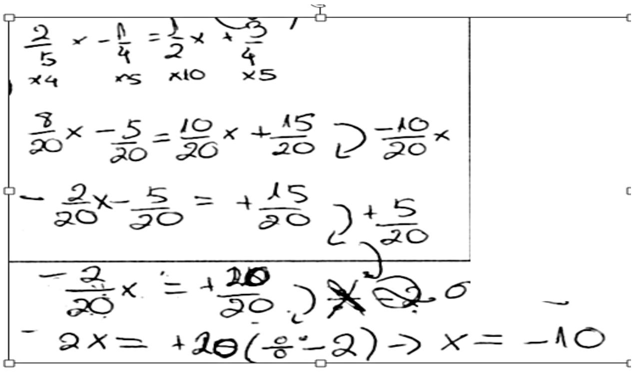


Figura 4.66. - Resolução da 14.ª equação efetuada pela Isabel; Grupo B; Tarefa 5

A Isabel ao resolver a equação optou por reduzir todos os termos ao mesmo denominador, apesar de não ter conhecimento do processo formal de desembaraçar de denominadores. Refira-se que a aluna resolveu corretamente a equação e que, da mesma forma que o José, apresentou dificuldades no final. Assim ao obter a equação $-\frac{1}{10}x = \frac{10}{10}$ não conseguiu aplicar os princípios de equivalência e acabar de resolver a equação sem a ajuda da investigadora. Esta dificuldade é do mesmo tipo da apresentada acima pelo José e parece dever-se ao mesmo facto, que anteriormente foi referido, o de os alunos ainda não terem sido confrontados com a necessidade aplicar os princípios de equivalência numa equação com denominadores. Depois de a investigadora mostrar que a aluna podia multiplicar ambos os membros por 20, ela conseguiu acabar de resolver a equação.

Os alunos do grupo A estiveram com atenção ao diálogo anteriormente referido e às explicações dadas pela investigadora ao grupo B. O Gustavo comentou:

- Vou tirar $\frac{1}{2}x$ mas depois tenho que ter o mesmo denominador para calcular.

Ao longo da resolução da equação o Manuel comentou:

- Isto até é fácil. Dá é muito trabalho.

As resoluções da equação apresentadas pelos alunos do grupo B, nas respetivas fichas, foram as que constam na figura 4.67.

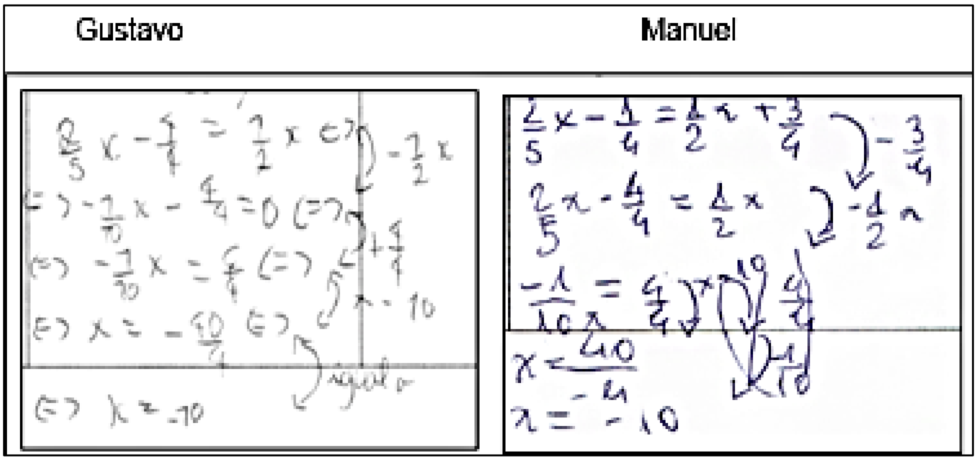


Figura 4.67. - Resolução da 14.ª equação efetuada pelo Grupo A; Tarefa 5

O Gustavo e o Manuel da mesma forma que o José optaram por aplicar os princípios de equivalência. Resolveram a equação corretamente e quando aplicavam os referidos princípios registaram, como auxiliares, os cálculos que envolviam a adição ou subtração dos termos semelhantes com denominadores.

No fim de resolver a equação o Gustavo disse:

-Isto é uma grande confusão com as frações.

A Investigadora informou todos os alunos que poderiam ter resolvido a equação de outra forma, desembaraçando de denominadores. Ensinou a reduzir todos os termos ao mesmo denominador e posteriormente explicou que multiplicando ambos os membros da equação pelo mesmo valor simplificavam a equação. No final da explicação vários alunos comentaram:

Isabel- Afinal já consigo! É fácil.

Gustavo- Bué da fácil! Já aprendi com denominadores, agora estou preparado para equações do 2º grau.

Manuel- Pois é. Yes! Tive certo.

Os alunos depois de apresentarem os cálculos na ficha efetuaram a resolução da equação através da *applet* utilizada nesta tarefa. Como exemplo apresenta-se a resolução da equação efetuada pelo grupo B que conta na figura 4.68.

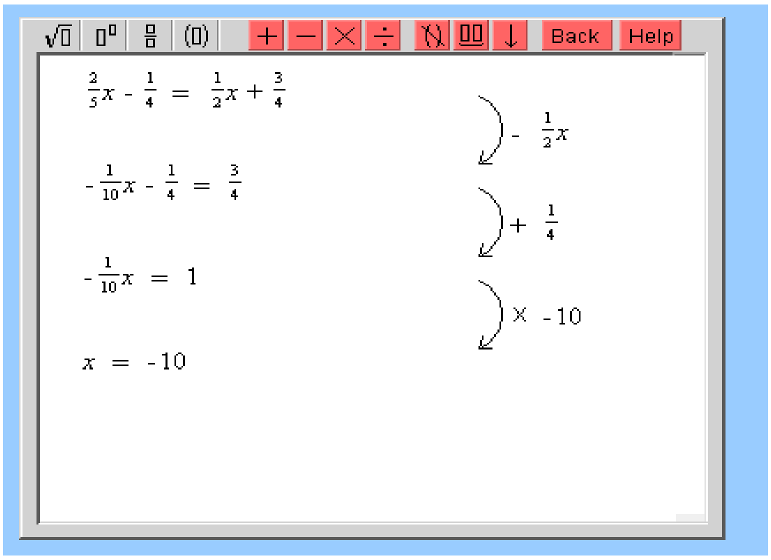


Figura 4.68.-Exemplo da resolução da 14.ª equação; Grupo B; Tarefa 5

Saliente-se que os alunos conseguiram resolver esta equação através da aplicação dos princípios de equivalência e da analogia que estabeleceram com o processo de adicionar e subtrair frações, sem que tivessem sido ensinados de forma formal a desembaraçar de denominadores.

-15.ª Equação

Todos os alunos resolveram a equação corretamente e da mesma forma, quer na ficha quer no computador através da *applet* e não colocaram nenhuma dúvida. Como exemplo apresenta-se a resolução da equação efetuada pelo grupo A no computador (figura 4.69) e a resolução da equação apresentada na ficha pelo aluno José (figura 4.70).

-Exemplo da resolução efetuada no computador pelo grupo A:

:

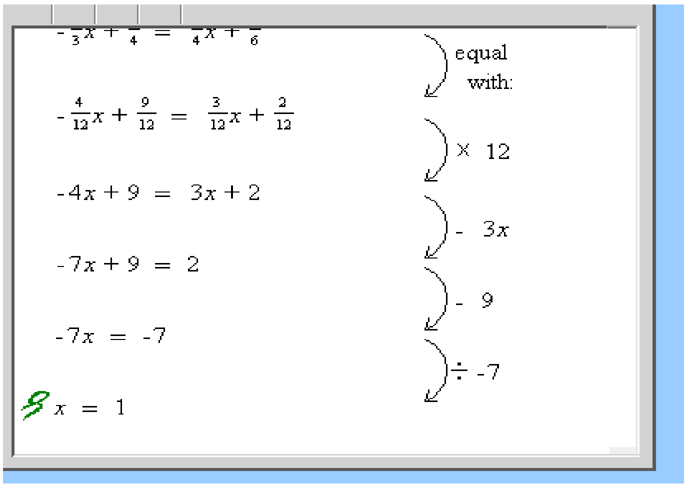


Figura 4.69.-Exemplo da resolução da 15.ª equação; grupo A; Tarefa 5

A resolução efetuada no computador está correta mostrando que os alunos não tiveram dificuldades em compreender a aplicação dos princípios de equivalência em equações com denominadores.

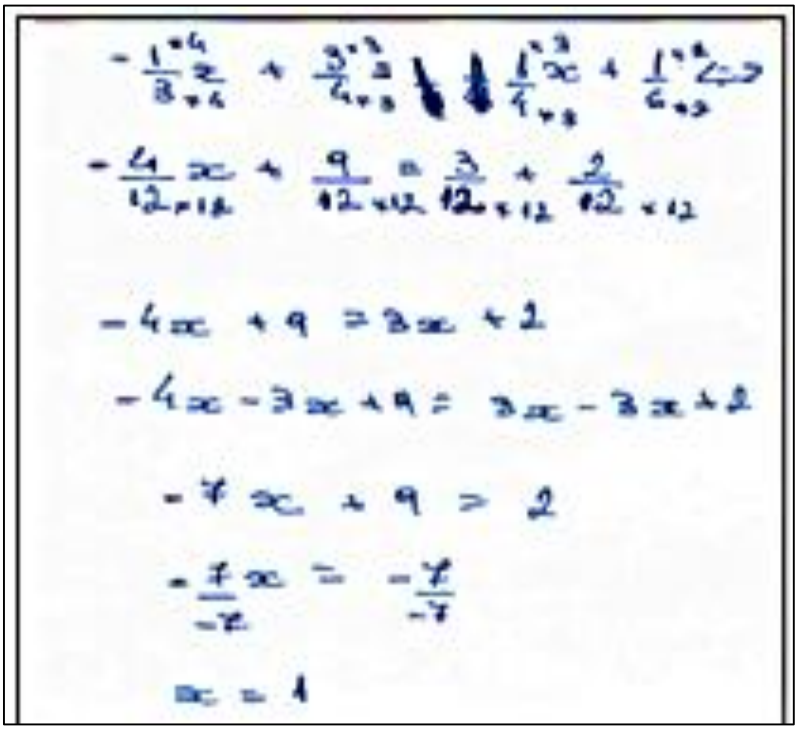


Figura 4.70. - Resolução da 15.ª equação efetuada pelo José; Tarefa 5

O aluno no início opta por reduzir todos os termos ao mesmo denominador, desembaraça-se dos mesmos. Ao longo da resolução mostra que se apropriou dos princípios de equivalência ao aplica-los corretamente.

A análise da forma como os alunos resolveram as equações [14.º e 15.º] foi muito importante, na 14ª equação, para averiguar se os alunos conseguem recorrer a estratégias diversificadas para resolver equações com denominadores e na 15.º equação, para verificar que, depois de a investigadora ensinar os procedimentos para desembaraçarem de denominadores, os alunos facilmente os entenderam modificaram a forma de resolver as equações com denominadores.

No que diz respeito ao trabalho realizado nesta tarefa e concretamente ao trabalho realizado através da utilização da *applet* este insere-se na etapa referida por Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) como aquela em que " … a ênfase deve recair sobre o transformismo, isto é, sobre o modo como uma expressão algébrica transforma-se em outra equivalente e sobre os procedimentos que legitimam essas transformações.". (p. 90). Também o trabalho realizado através da *applet* permitiu que os alunos tivessem desenvolvido o conceito de equações equivalentes.

Pensamos que foi fundamental a intervenção da investigadora como professora para que os alunos pudessem ultrapassar as dificuldades e conseguissem aplicar os princípios de equivalência em equações com denominadores. Nesta tarefa é importante destacar o papel da investigadora como o que Kozulin (2003) refere como mediador humano e com o referido por Oliveira (2000) que é o de "…interferir na zona de desenvolvimento proximal dos alunos, provocando avanços que não ocorreriam espontaneamente." (p. 62).

O papel de mediador da *applet* está patente no trabalho realizado nesta tarefa ao observarmos que a utilização da mesma proporcionou aos alunos um melhor entendimento da aplicação dos princípios de equivalência em diferentes tipos de equações e que permitiu que através dela os alunos refletissem sobre vários procedimentos para resolverem as equações.

7. ANÁLISE DA TAREFA 6

Nesta tarefa recorreu-se à *applet* "*Escape Planet X* [14]" e teve como objetivo o desenvolvimento da linguagem matemática. Durante o trabalho efetuado em sala de aula com a referida aplicação foi implementado como estratégia um jogo, cujas regras foram referidas no capítulo anterior. Devido ao facto da *apple*t estar escrita em inglês, como podemos constatar na figura 4.71., foi necessário traduzir e adaptar cada um dos enunciados dos problemas nela propostos. Assim, a Investigadora foi projetando os vários problemas propostos pela *apple*t e procedendo à sua tradução. À medida que foram propostos os problemas os alunos foram anotando na ficha de trabalho (anexo 14) os enunciados, ditados pela investigadora, e as equações que escolheram para os traduzir em linguagem matemática. Posteriormente, foi selecionada na *applet* a equação escolhida pela maioria dos alunos depois de debatida e validada. O primeiro problema apresentado foi o que consta na figura 4.71.

[14] Disponível em http://www.harcourtschool.com/activity/escape_planet_6/

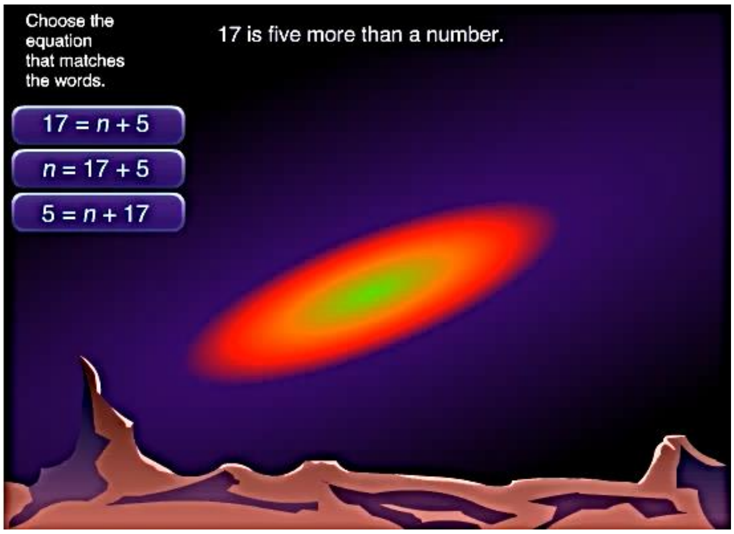


Figura 4.71. – 1.º problema da Applet "Escape Planet X"

Neste primeiro problema proposto, o José e o Manuel apresentaram algumas dificuldades em interpretar os enunciados e em entender o que era pedido, tendo sido necessário a ajuda da investigadora. Assim, a mesma propiciou o debate ideias sobre a referida proposta, tendo-se efetuado uma análise mais aprofundada das respostas dadas. Durante esta tarefa os alunos mostraram-se empenhados e nas restantes propostas, não foram apresentadas dúvidas, os alunos escreveram os enunciados dos problemas e escolheram corretamente a equação apresentando-se muito concentrados. Como exemplo refere-se o segundo problema proposto pela *applet* que consta na figura 4.72.

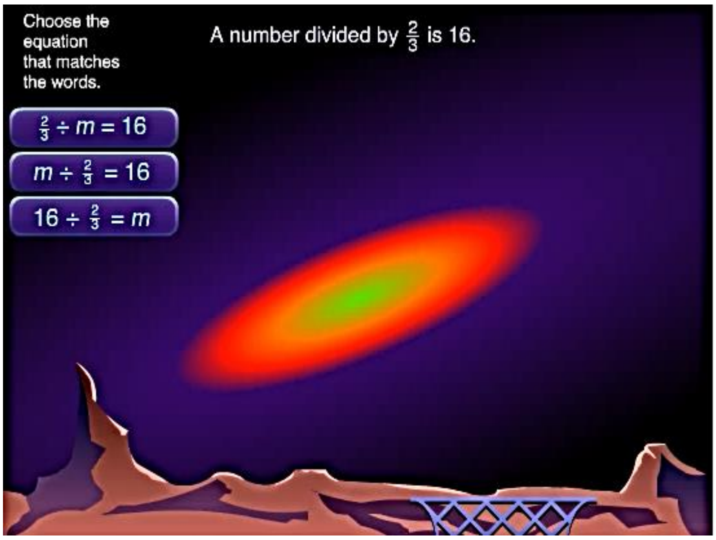
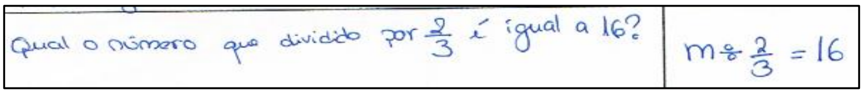


Figura 4.72. – 2.º problema da Applet "Escape Planet X"

A investigadora traduziu este problema colocando a questão "Qual é o número que dividido por $\frac{2}{3}$ é igual a 16?". Em seguida, pediu aos alunos escolhessem a equação que traduzia o problema. Todos os alunos escreveram na ficha de trabalho a equação correta, $m \div \frac{2}{3} = 16$. Como exemplo apresenta-se a resposta dada pela Isabel que consta na figura 4.73.



Qual o número que dividido por $\frac{2}{3}$ é igual a 16?	$m \div \frac{2}{3} = 16$

Figura 4.73. - Resolução da Isabel; Problema 2; Tarefa 6

Podemos constatar que os alunos conseguiram traduzir através de uma equação o problema, evidenciando que conseguiram apropriar-se do conceito de incógnita e de equação.

Conforme foram surgindo os vários ecrãs da *applet*, os alunos mostravam entusiasmo, referindo as várias peças que foram sendo acrescentadas ao foguetão. No final, quando o foguetão partiu (figura 4.74.), os alunos manifestaram contentamento, sorrindo, imitando o som ou falando sobre onde poderia ir.

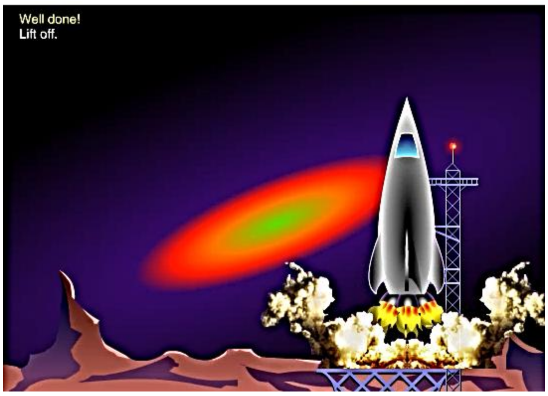


Figura 4. 74.-Imagem da *applet*; Partida do foguetão; tarefa 6

Pensamos que esta tarefa possibilitou que os alunos desenvolvessem a capacidade de efetuarem a tradução para linguagem matemática dos vários problemas de forma divertida. Como foi anteriormente mencionado, ao referir as potencialidades das *appplets* no ensino e aprendizagem da matemática, Figueiredo e Palha (2005) referiram que "Este tipo de recursos permite trabalhar os conceitos matemáticos de uma forma diferente, estimulante para os alunos…" (p. 6).

8. ANÁLISE DO QUESTIONÁRIO E DA ENTREVISTA

No final do trabalho realizado com as *applets,* os alunos responderam ao questionário (anexo 14) e foi também efetuada uma entrevista que conta no anexo 15. Seguidamente, apresenta-se a análise das respostas dadas pelos alunos ao referido questionário e na entrevista.

Questionário

O questionário foi realizado com o intuito de recolher dados complementares de forma a compreender melhor de que forma é que os alunos, depois de finalizada a implementação de todas as tarefas, aplicavam os conhecimentos adquiridos na resolução de problemas semelhantes aos propostos na 1ª tarefa através da *applet* "Algebric Reasonig".

Em relação à primeira questão, que conta na figura 4.75., esta foi colocada tendo como objetivo específico o de recolher mais elementos sobre a forma como os alunos traduzem através de uma equação um problema semelhante, mas menos complexo, ao proposto pela *applet* acima referida e como o resolviam aplicando os princípios de equivalência.

1. Observa a figura:

a) Considerando x o valor de cada presente. Escreve a equação que traduz a situação.

b) Calcula o valor de cada presente, resolvendo a equação usando os princípios de equivalência.

Figura 4.75. - Questão 1 do questionário

Depois de analisar todas as respostas dadas pelos alunos, a esta questão, constatou-se que todos responderam corretamente e da mesma forma. Na alínea a), apresentaram a equação $4x = 36$ e na alínea b), todos efetuaram os mesmos procedimentos ao resolverem a equação aplicando os princípios de equivalência. Como exemplo das respostas dadas pelos alunos na alínea b), apresenta-se na figura 4.76 a resolução do Gustavo.

$$4x=36 \Leftrightarrow \frac{4x}{4}=\frac{36}{4} \Leftrightarrow x=9$$

$$S=\{9\}$$

Figura 4.76- Resposta do Gustavo; alínea b); Questão1

Nesta questão, o Gustavo e os outros alunos conseguiram equacionar o problema e resolver corretamente a equação utilizando os princípios de equivalência. Podemos constatar que neste problema os alunos não revelaram nenhuma dificuldade em resolver algebricamente o que já tinham resolvido através da aplicação das operações inversas.

Na segunda questão (ver figura 4.77.), o objetivo foi análogo ao da primeira questão, o de recolher mais elementos sobre a forma como os alunos traduzem, através aplicação das equações, um dos problemas propostos pela primeira *applet* e como o resolviam aplicando os princípios de equivalência.

2. Observa a figura:

Considerando x o valor de cada caneta e y o valor de cada carro. Através da resolução de equações, calcula o valor de cada caneta e de cada carro.

Figura 4.77. - Questão 2 do questionário

Depois de efetuada a análise das respostas dadas pelos alunos verificou-se que o José e a Isabel resolveram de igual forma a questão, que o Gustavo apresentou um erro de cálculo mas que também efetuou os mesmos procedimentos que os referidos alunos e que a resposta dada pelo Manuel foi diferente. Com o intuito de analisar as respostas dadas apresentam-se seguidamente as figuras 4.78, 4.79 e 4.80.

Respostas dadas pelo José e pela Isabel:

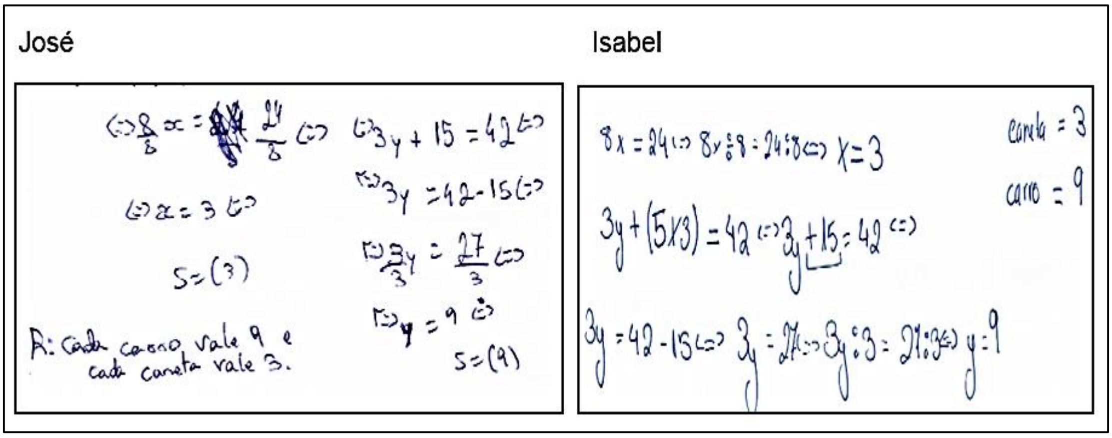


Figura 4.78.-Respostas dadas pelo José e pela Isabel; Questão 2

Podemos constatar que o José e a Isabel conseguiram equacionar o problema e resolvê-lo corretamente. Primeiramente, traduziram através da equação $8x = 24$ a situação apresentada na segunda "plataforma", ou seja, onde estão as oito canetas e o valor 24. Depois calcularam o valor de cada caneta resolvendo a referida equação aplicando os princípios de equivalência. Obtiveram o valor da incógnita x, ou seja, no contexto do problema o valor de cada caneta. Posteriormente, substituído por 3 o valor de cada caneta traduziram a situação apresentada na primeira "plataforma", onde estão três carros e cinco canetas, através da equação $3y+15 = 42$.

Resolveram esta equação aplicando também os princípios de equivalência e obtiveram o valor da incógnita y, 9, que representava o valor de cada carro.

Resposta dada pelo Gustavo:

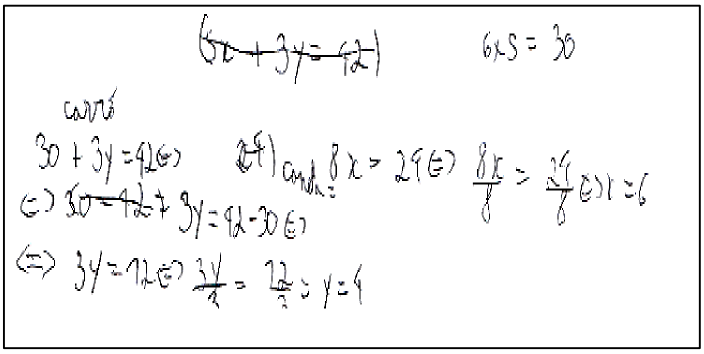


Figura 4.79.-Resposta do Gustavo; Questão 2

O Gustavo no início da resolução apresentou a equação $5x + 3y = 42$ riscada. Esta equação traduz corretamente a situação representada pela primeira “plataforma. No entanto podemos pensar que o aluno perece ter-se apercebido que não conseguia resolver esta equação e por isso riscou-a. Em seguida apresentou os mesmos procedimentos que o José e a Isabel, mas ao resolver a equação $8x = 24$ cometeu um erro ao calcular o valor de 24:8, como podemos constatar quando apresentou o valor de x igual a 6. Posteriormente apresentou a equação $30 + 3y = 42$, que é a tradução da situação apresentada na primeira “plataforma” e que está errada apenas por ter calculado mal o valor de cada caneta. No entanto podemos constatar que o aluno raciocinou corretamente. Logo em seguida resolveu bem a equação aplicando os princípios de equivalência e obteve o valor da incógnita y que representava o valor de cada carro.

Resposta dada pelo Manuel:

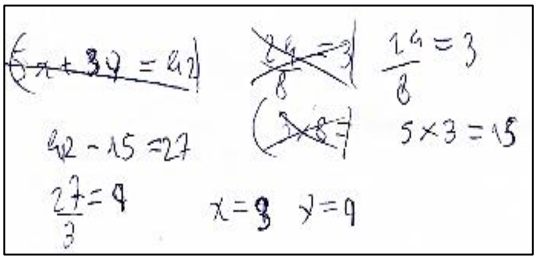


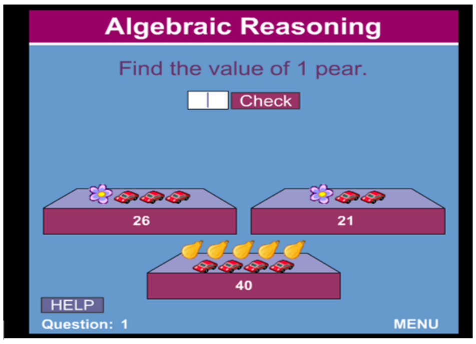
Figura 4.80.- Resposta do Manuel; Questão 2

O Manuel da mesma forma que o Gustavo no início da resolução apresentou a equação $5x + 3y = 42$ riscada e que, como já referi, traduz corretamente a situação representada pela primeira “plataforma. Também este aluno perece ter-se apercebido que não conseguia resolver esta equação e mudou de estratégia. No entanto o Manuel, ao contrário dos outros alunos, não conseguiu traduzir a situação apresentada aplicando as equações do 1.º grau com uma incógnita e recorreu a procedimentos aritméticos para resolver o problema. Os cálculos apresentados estão corretos e conseguiu obter o valor de cada caneta e de cada carro como se pode constatar quando o aluno apresenta no final x=3 e y=9.

Os alunos, com a exceção do Manuel, conseguiram traduzir através aplicação das equações o problema proposto e resolve-lo aplicando os princípios de equivalência. O Manuel pode não ter conseguido aplicar as equações à resolução deste problema devido ao facto do mesmo envolver duas incógnitas.

Relativamente à questão 3, que consta na figura 4.81, a investigadora ao colocar esta questão teve o intuito de entender como é que os alunos conseguiam resolver problemas mais complexos, depois de terem sido confrontados com situações problemáticas mais simples da mesma espécie, tais como os propostos pela *applet* na tarefa 1. Para o efeito foi colocado nesta questão um problema de nível 3, simulado da referida *applet* "Algebric Reasonig[15]". Podemos constatar que todos os alunos resolveram corretamente o problema apresentado.

3. Observa a figura:



Determina o valor da pera. Explica como o fizeste.

Figura 4.81. - Questão 3 do questionário

As respostas dadas pelos alunos foram semelhantes tendo todos apresentado o mesmo raciocínio. Assim, como exemplo dos procedimentos efetuados, iremos analisar a resposta dada pelo Manuel (figura 4.82) que ilustra os procedimentos realizados por todos os alunos.

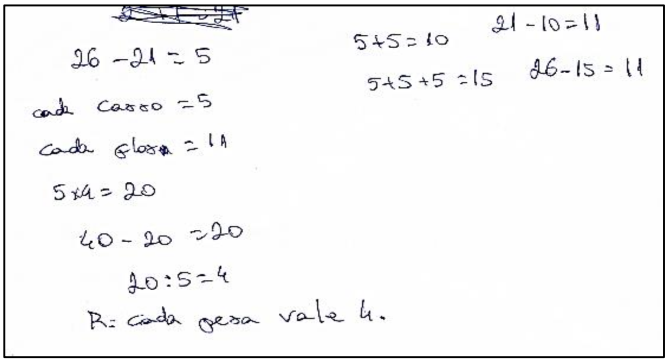


Figura 4.88.- Resposta do Manuel; Questão 3

Ao observarmos a resolução apresentada pelo Manuel, podemos constatar que o aluno determinou o valor de cada carro ao apresentar o cálculo 26-21=5. Este cálculo foi efetuado devido ao facto de no contexto do problema estar a retirar dois carros e uma flor da "plataforma" com três carros e uma flor, obtendo assim apenas um carro que iria ter o valor 5. Ao apresentar 5x4=20, o aluno estava a calcular o valor dos quatro carros da "plataforma" que continha quatro carros e cinco peras. Posteriormente, foi determinar o valor das cinco peras realizando a

[15] Disponível em: http://www.mathplayground.com/algebraic_reasoning.html

operação 40-20=20, ou seja, no contexto do problema, retirou ao valor total, 40, o valor dos cinco carros, 20, obtendo o valor das cinco peras. No final fazendo 20:5=4 o aluno obteve o valor de cada pera. Podemos ainda constatar que o aluno calculou ainda o valor de cada flor ao apresentar 21-10=11, ou seja, subtraiu ao total, 21, da "plataforma" com dois carros e uma flor, o valor dos dois carros, 10 e obteve o valor da flor.

Na questão 3, como anteriormente referi, todos os alunos resolveram corretamente o problema e apresentaram o mesmo raciocínio. Podemos assim refletir sobre a importância que pode ter tido o trabalho realizado com os alunos na tarefa 1. Todos conseguiam resolver um problema mais complexo, depois de terem sido confrontados com os problemas parecidos, mais simples, propostos pela *applet* na tarefa 1. Pensamos que a referida *applet* funcionou assim como um instrumento de mediação.

Entrevista

A entrevista efetuada e que consta no anexo 15, teve como objetivo proporcionar uma melhor reflexão sobre de que forma é que o trabalho desenvolvido, aplicando as *applets,* contribuiu para a motivação dos alunos e para a sua aprendizagem.

Em relação às respostas dadas pelos alunos, quando a investigadora colocou a questão "O que gostaste mais durante estas aulas? Porquê?" obteve respostas diversificadas. A Isabel e o José referiram que gostaram do Jogo de Basquetebol, tendo a primeira mencionado também que "Juntou um jogo que adoro com a matemática.". O José referiu que gostou do referido jogo porque "…foi informativo e divertido.". O Gustavo respondeu à questão dizendo que o que gostou mais foi de "resolver equações em aplicações interativas" e justificou a sua resposta mencionando "…é como se jogássemos e aprendêssemos ao mesmo tempo.". O Manuel referiu que gostou de todas as aulas porque entendeu as equações.

Depois de efetuada a análise das respostas dadas pelos alunos às 2.ª e 3.ª questões, constatou-se que os mesmos ao serem questionados sobre o que gostaram menos durante as aulas, mencionaram que gostaram de tudo. Quando foram inquiridos sobre se houve alguma tarefa que gostaram mais, referiram as tarefas que utilizaram as *applets "Escape Planet X*" e *"One Step Equation Game".* Apontando, na sua maioria, como razão da sua escolha ao facto de as mesmas envolverem um jogo. Através das respostas dadas quando foi colocada a 4.ª questão, constatou-se que todos alunos consideraram que aprenderam mais com este tipo de aulas, tendo apresentado diversas razões, tais como:

-Aprenderem de forma divertida;

-Não existir tanto barulho;

-Terem sido realizados jogos;

-Entender melhor;

-Esclarecerem melhor as dúvidas;

-Conseguir estar com mais atenção.

Em relação à utilização das aplicações interativas na aula de matemática, todos os alunos referiram que esta utilização tinha vantagens. A Isabel e o João referiram como vantagem a forma divertida de aprender. O Gustavo referiu que a vantagem era "…ajuda-nos a perceber por que razão resolvemos os problemas e as equações.". O Manuel respondeu " As *applets* têm vantagens, pois interagem melhor com o cérebro e fazem com que a pessoa perceba melhor.".

Ao analisar as respostas dadas pelos alunos na entrevista, constatou-se que todos mencionaram que aprenderam mais com este género de aulas. Relativamente às vantagens da utilização das aplicações interativas, para os alunos, estas estavam na sua maioria relacionadas com a forma divertida com que aprenderam e com o facto de entender melhor.

Ao longo de todo o trabalho foi estabelecido um diálogo constante entre a investigadora e a professora de matemática da turma. Efetuando-se assim, entrevistas informais que contribuíram para que se realizasse um acompanhamento sistemático da evolução dos alunos ao longo de todo o processo de aprendizagem.

No final, depois de lecionado o tema em questão, equações do 1.º grau, os alunos alvo deste estudo realizaram uma ficha individual de avaliação efetuada pela professora de matemática da turma. Esta ficha foi dada a todos os alunos da turma, em contexto de sala de aula, e foi corrigida pela referida professora. Todos os alunos que participaram no estudo obtiveram a classificação qualitativa de excelente, tendo a professora de matemática referido que estava muito satisfeita com o desempenho dos mesmos, salientando a evolução do aluno Manuel.

CAPÍTULO V – CONCLUSÃO

Neste capítulo procura-se responder às questões da investigação com base na análise dos dados e tendo em consideração a fundamentação teórica e a experiência da investigadora como professora de matemática. Também são tecidas consideração finais sobre a utilização das *applets* e sobre possíveis caminhos que podem contribuir para ajudar os alunos a ultrapassarem as dificuldades na aprendizagem das equações do 1.º grau com uma incógnita.

Esta investigação teve como objetivo, em termos gerais, refletir sobre o ensino e a aprendizagem das equações do 1.º grau com uma incógnita, através da utilização das *applets.* Em relação aos objetivos específicos definidos estes foram os seguintes:

a) Analisar como é que os alunos efetuaram a passagem da aritmética para a álgebra através do recurso a *applets.*
b) Analisar como foi desenvolvido nos alunos o conceito de equação e de incógnita recorrendo a tarefas que envolvem o recurso a *applets*.
c) Refletir sobre a forma como as tarefas que envolveram a utilização das *applets*, contribuíram para a compreensão dos princípios de equivalência das equações do 1.º grau.
d) Compreender de que forma é que as *applets* funcionam como mediadores da aprendizagem.

1. CONCLUSÕES DO ESTUDO

Em relação à passagem da aritmética para a álgebra através do recurso a *applets*, parece que a tarefa1, em que foi utilizada a applet "*Algebric Reasonig",* e a tarefa 2, foram muito importantes para que os alunos efetuassem a referida passagem. O facto de se ter recorrido a um problema que foi resolvido inicialmente através de processos aritméticos, com os quais os alunos já estavam familiarizados com os procedimentos, e de ter sido, posteriormente, estabelecida a analogia entre o problema proposto e os conceitos de incógnita e de equação, parece ter contribuído para o entendimento dos referidos conceitos. Estas tarefas inserem-se nas atividades referidas por Kieran (2004) como essenciais, as "the global meta-level", e que foram mencionadas neste estudo no capítulo II, fundamentação teórica. Relembre-se que autora refere que ao rejeitarmos este tipo de atividades remove-se qualquer contexto ou necessidade para a utilização de álgebra. Também como já foi referido, Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) sustentam que a primeira etapa será o trabalho com situações-problema cujo "…objetivo é chegar às expressões simbólicas através da análise de situações concretas" (p. 90). Para os referidos autores, através deste trabalho possibilita-se "…a construção de uma linguagem simbólica que seja significativa para o estudante." (Fiorentini, Miorim e Miguel,1993, p. 90).

Relativamente ao conceito de equação e de incógnita desenvolvido nos alunos recorrendo a tarefas que envolvem o recurso a *applets*, o trabalho realizado através da aplicação da *applet* "*Algebric Reasonig",* parece ter sido essencial. O mesmo possibilitou que fossem introduzidos os conceitos de incógnita como valor desconhecido e de equação como forma de traduzir um problema. A associação que foi efetuada entre o valor desconhecido de um objeto, o qual se pretendia descobrir, e o conceito de incógnita, pensamos que foi importante para que os alunos se apropriassem também do referido conceito.

O trabalho desenvolvido através da *applet* "Algebra Balance Scales", permitiu que os alunos desenvolvessem o conceito de incógnita através da associação que fez do mesmo com o peso desconhecido de uma caixa. Também através da referida aplicação interativa o conceito de equação foi desenvolvido ao ser estabelecida uma analogia entre este e a situação representada através da balança. Esta *applet* permitiu ainda que os alunos se apropriassem do conceito de equações equivalentes através de processos informais.

Pensamos que a tradução efetuada de um problema através de uma equação foi relevante para que os alunos entendessem a aplicação das equações a problemas da vida real. Em relação à utilização da *applet* "One Step Equation Game" pensamos que esta proporcionou a apropriação do conceito de solução da equação. No trabalho realizado através da utilização da *applet* "*Escape Planet X* ", que possibilitou que os alunos desenvolvessem a capacidade de efetuarem a tradução para linguagem matemática dos vários problemas, parece poder-se observar que os alunos interiorizaram o conceito de equação e de incógnita.

Relativamente aos processos utilizados pelos alunos para resolverem as equações do 1.º grau, a utilização da applet "One Step Equation Game" proporcionou o desenvolvimento de métodos de resolução das equações. Os alunos utilizaram os métodos referidos por Kieran (1992) como os do tipo "desfazer" e de substituição. Através da utilização da applet "Algebra Balance Scales", os alunos resolveram as equações apresentadas aplicando os princípios de equivalência, antes de os mesmos terem sido ensinados formalmente. Verificou-se que os alunos entenderam os procedimentos que estão subjacentes aos princípios de equivalência.

Pensamos que a realização da tarefa que aplicou a *applet* "*Solving equations with balance-strategy: game*", permitiu que os alunos aplicassem os princípios de equivalência em vários tipos de equações e também que tivessem a confirmação sistemática dos procedimentos que efetuaram. Esta *applet* foi útil na medida em que os alunos puderam confirmar se os procedimentos que foram realizando estavam corretos e refletir sobre os erros que foram cometendo ao longo da resolução de cada uma das equações. O trabalho realizado nesta tarefa parece inserir-se na terceira etapa referida por Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) na qual mencionam " … a ênfase deve recair sobre o transformismo, isto é, sobre o modo como uma expressão algébrica transforma-se em outra equivalente e sobre os procedimentos que legitimam essas transformações.". (p. 90).

Relativamente ao papel desempenhado pelas *applets* na motivação dos alunos para a aprendizagem das equações. Pensa-se que este papel ficou patente ao serem utilizadas as *applets "Escape Planet X*" e *"One Step Equation Game"*. Os alunos, apesar de algumas dificuldades, ao trabalharem com as *applets*, mostravam-se sempre motivados para a aprendizagem e divertidos a realizar as tarefas propostas.

Ao refletir sobre todo o trabalho realizado com as aplicações interativas parece oportuno voltar a referir que Figueiredo e Palha (2005) a propósito o das potencialidades das mesmas, no ensino e aprendizagem da matemática, mencionam

> Este tipo de recursos permite trabalhar os conceitos matemáticos de uma forma diferente, estimulante para os alunos, possibilitando a diferenciação na sala de aula. De facto, o carácter interactivo destes applets, aliado a um contexto de resolução de problemas, onde não é o professor mas o computador, ou o próprio aluno com ajuda do computador, a validar as respostas, cria um ambiente onde o aluno se sente à vontade para arriscar, experimentar e explorar, sendo convidado a analisar as suas tentativas. (p. 6).

De modo geral, ao aplicar as *applets* neste estudo a investigadora sentiu e parece-lhe que se pode constatar através deste estudo que

> A facilidade de compreensão destes applets que apelam fundamentalmente ao conhecimento informal dos alunos torna possível tratar os conceitos de uma forma natural e intuitiva, constituindo, desta forma, uma base sólida para um trabalho, posterior, mais formal. (Figueiredo e Palha, 2005, p.7).

Refletindo sobre o pensamento de Vygotsky, nomeadamente, sobre a atividade mediada e sobre o trabalho realizado com os alunos aplicando as *applets*. Pensamos que estas funcionaram como instrumento mediador em diversas situações, nomeadamente, quando os alunos conseguiram refletir e apropriar-se dos conceitos matemáticos que lhes eram inerentes. Segundo Oliveira (2000), "Mediação em termos genéricos, é o processo de intervenção de um elemento intermediário numa relação; a relação deixa, então, de ser direta e passa a ser mediada por esse elemento. " (p. 26). Parece também importante voltar a referir, que no que diz respeito aos mediadores simbólicos Vygotsky (1978) refere " Como as palavras, os instrumentos e os signos não-verbais dão aos alunos formas de tornar mais eficientes os seus esforços de adaptação e solução de problemas." (p. 127). Também se afigura apropriado referir que Kozulin (2003) menciona que, de acordo com Vygotsky, o desenvolvimento cognitivo depende do domínio de "…mediadores simbólicos pela criança e na sua apropriação e internalização na forma de ferramentas internalizadas." (p. 24).

Continuando a refletir sobre o pensamento de Vygotsky, consideramos importante referir o papel da investigadora enquanto professora. A sua intervenção estabelecendo a analogia entre situações da vida real e os conceitos matemáticos que lhes eram subjacentes foi importante para permitir que os alunos se apropriassem de conceitos como os de equação e de incógnita e que fosse estabelecida a ligação entre a aritmética e a álgebra. Ao ser utilizada a *applet* "*Algebra Balance Scales"* que apresentou limitações que parecem terem sido ultrapassadas através da discussão, relatada na análise de dados, que se efetuou quando o aluno Gustavo interveio. O referido aluno ao intervir propiciou uma reflexão conjunta sobre a forma de resolver equações que não estavam contempladas na referida *applet.* Parece que a intervenção da investigadora como professora foi fundamental para que a limitação se tornasse uma mais-valia, na compreensão dos princípios de equivalência e na sua aplicação na resolução de outro tipo de equações não comtempladas. A investigadora enquanto professora ao intervir em diversas situações de forma proporcionar a compreensão de diversos conceitos, assumiu o papel referido por Oliveira (2000) em que “ O professor tem o papel explícito de interferir na zona de desenvolvimento proximal dos alunos, provocando avanços que não ocorreriam espontaneamente.” (p. 62). Por sua vez, também parece importante referir o papel desempenhado pelos alunos em situações em que os mais capazes auxiliaram os restantes. A investigadora pensa que o papel desempenhado pela investigadora como professora e por alguns alunos foi muito importante para o desenvolvimento dos conceitos matemáticos na medida em que, como já foi referido, A Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP) é definida por Vygotsky (1978) como

> a distância entre o nível de desenvolvimento atual, é determinado pela resolução de problema independente e o nível de desenvolvimento potencial determinado através da resolução de problema sob auxílio do adulto ou em colaboração com colegas mais capazes (p. 86).

2. CONSIDERAÇÕES FINAIS

No início do trabalho a investigadora confrontou-se com a difícil mas aliciante tarefa de escolher as *applets*. A maioria das mesmas disponíveis na internet estavam escritas em inglês, existindo a necessidade de efetuar a adequação das estratégias aquando da sua implementação em sala de aula. Por vezes, as aplicações interativas apresentavam limitações no seu funcionamento, sendo necessário realizar uma série de simulações antes de as escolher e de as aplicar. Foi também necessário efetuar a triagem das *applets* de forma a tentar escolher as que melhor se adequavam, na opinião da investigadora, ao ensino e aprendizagem das equações do 1.º grau. Assim é fundamental ter em consideração o que o NCTM (2007) refere:

> A utilização eficaz da tecnologia, durante as aulas de matemática, depende do professor. A tecnologia não é uma panaceia. Como qualquer ferramenta de ensino, pode ser usada de forma adequada ou ineficaz. (p.27).

Ao realizar este estudo a investigadora pode constatar que ao desenvolver o trabalho em sala de aula recorrendo às *applets* que a sua utilização, como o que foi referido por Ponte e Canavarro (1997), em relação ensino da Matemática, que as novas tecnologias “potenciam uma reformulação do trinómio saber-aluno-professor, de modo a que: O professor veja reconhecido e valorizado o papel fundamental que só ele pode desempenhar na criação, condução e contínuo aperfeiçoamento de situações de aprendizagem.” (p.33).

Este estudo parece reforçar alguns caminhos que podem contribuir para ajudar os alunos a ultrapassarem as dificuldades na aprendizagem das equações do 1.º grau com uma incógnita. Parece importante dar destaque a tarefas que permitem ao aluno efetuar a passagem da aritmética para a álgebra e que envolvam os princípios de equivalência de forma que sejam aplicados com compreensão. Existe a necessidade de efetuar uma constante reflexão sobre a forma como os alunos aprendem, a forma como ensinamos e sobre as tarefas que são propostas em sala de aula. Como foi mencionado anteriormente, os alunos de hoje, são diferentes dos que tivemos e dos que teremos. O trabalho de reflexão sobre as tecnologias que utilizamos e o seu contributo para o ensino e aprendizagem é um trabalho interminável e que deve ser efetuado sistematicamente. É importante que se reflita sobre a forma como são ensinadas as equações do 1º grau e sobre as metodologias e estratégias aplicadas e se apontem caminhos que permitam ultrapassar as dificuldades sentidas pelos alunos.

Bibliografia

Arcavi, A., Gómez, B., Guimarães, F., Ponte, J., Silva, J. (2006). O ensino e aprendizagem dos Números e da Álgebra: que problemas, que desafios? In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos & P. Canavarro (Orgs.), *Números e Álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores* (pp. 361- 379). Lisboa: SEM-SPCE.

Arcavi, A. (2006a). *El desarrollo y el uso del sentido de los símbolos*. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos & P. Canavarro (Eds.), Números e Álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores (pp. 29- 48). Lisboa: SEM-SPCE.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). Investigação Qualitativa em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto Editora.

Booth, L. R. (1988). Children‟s difficulties in beginning algebra. In A. F. Coxford (Ed.), *The ideas of algebra*, K-12 (pp. 20-32). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Bussi, M., & Mariotti, M. A. (2008). *Semiotic mediation in the mathematics classroom: artfacts and signs after a vygotskian perspective. .* New York: Handbook of international research in mathematics education.

Duarte, J. A. (2012). Applets*. Educação e Matemática*, *120*, 30-31.

Figueiredo, N., & Palha, S. (2005). Aplicações na Internet para a Matemática: um recurso por explorar na sala de aula. *Educação e Matemática, 81*, pp. 4-8.

Fino, C. N. (Ed.). (2001). *Vygotsky e a Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP): três implicações pedagógicas.* Acedido em 12 de dezembro de 2014, de http://www3.uma.pt/carlosfino/publicacoes.htm

Fiorentini, D., Miorim, A. & Miguel, A. (1993). Contribuição para um repensar… a educação algébrica elementar. *Pro-posições, 4(1),* 78-90.

Fiorentini, D., Fernandes, F. L. P., & Cristóvão E. (2005). Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico. In Seminário Luso-Brasileiro: *Investigações matemáticas no currículo e na formação de professores*. Acedido em 15 de feverieiro de 2014, de http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/seminario_lb.htm

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra. In E. Fennema & T. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-155). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390- 419). New York, NY: Macmillan

Kieran, C. (2004). *Algebraic thinking in the early grades: What is it? The Mathematics Educator*, 8(1), 139-151.

Kozulin, A. (2003). Psychological tools and mediated learning. in A. Kozulin, B. Gindis, V. Ageyev, & S. M. Miler, *Vygotsky's educational theory in cultural context*. Cambridge University Press.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar*. Lisboa: APM (obra original em inglês, publicada em 2000).

Oliveira, M. K. (1992). Vygotsky e o Processo de Formação de Conceitos. in: Taille, Y.; Oliveira, M. K.; Dantas, H., *Piaget, Vygotsky, Wallon: Teorias Psicogenéticas em Discussão*. São Paulo: Summus.

Oliveira, M. K.(2000). *Vigotsky: Aprendizado e desenvolvimento; Um processo sócio-histórico*. São Paulo: Scipione.

Peixoto, J. & Carvalho, R. (2011). Mediação Pedagógica Midiatizada pelas Tecnologias? In: *Teoria e Prática da Educação*, v. 14, n. 1, p. 31-38, jan./abr.2011.

Ponte, J. P. (1994). O estudo de caso na investigação em educação matemática. *Quadrante*, Vol.3, nº 1, 3-18.

Ponte, J. P., & Canavarro, P. (1997). *Matemática e novas tecnologias*. Lisboa: Universidade Aberta.

Ponte, J. P. (2004*). Pesquisar para compreender e transformar a nossa própria prática*. Acedido dia 4 de março de 2014, de http://repositorio.ul.pt/handle/10451/3983

Ponte, J. P. (2004a). *As equações nos manuais escolares*. Revista Brasileira de História da Matemática, 4 (8), 149-170.

Ponte, J. P. (2006). Números e álgebra no currículo escolar. Acedido dia 2 de fevereiro de 2014, de http://repositorio.ul.pt/handle/10451/4525

Ponte, J. P. (2006a). *Estudos de caso em educação matemática*. Acedido dia 4 de março de 2014, de http://repositorio.ul.pt/handle/10451/3007

Ponte, J. P., Branco, N., & Matos, A. (2009). *Álgebra no Ensino Básico*. Lisboa: DGIDC.

Stake, R. E. (2007). *A Arte da Investigação com Estudos de Caso*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Cole, M., et al., LS Vygotsky. Harvard University Press, Cambridge.

Windsor. W., (2010). Algebraic Thinking: A Problem Solving Approach. In Sparrow, L., Kissane, B., & Hurst, C., (Eds.). *Shaping the future of mathematics education: Proceedings of the 33rd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*, (pp.665-672). Fremantle, WA: MERGA.

ANEXOS

ANEXO 1: PEDIDO DE AUTORIZAÇÃO À DIREÇÃO DA ESCOLA

Exmo. Senhor [redacted]

Eu, Eduarda Maria Vieira dos Santos Nunes de Oliveira, docente neste estabelecimento de ensino, estando a elaborar a minha Tese de Mestrado e necessitando para a elaborar de recolher dados. Venho por este meio, solicitar a vossa autorização para lecionar e recolher dados dos alunos em algumas aulas do segundo período da turma [redacted] do 7.º ano. Agradeço desde já a atenção dispensada.

Atenciosamente,

Pede deferimento

____

21/02/2014

ANEXO 2- INFORMAÇÃO E PEDIDO DE AUTORIZAÇÃO DOS ENCARREGADOS DE EDUCAÇÃO

Exmo. Encarregado de Educação do(a) aluno(a) [redacted] do 7º__

No tópico " Equações do 1º grau", irei trabalhar em colaboração com a professora Eduarda Oliveira. Assim, o seu educando irá ter algumas aulas (cerca de 6 aulas) com a referida professora que está a efetuar uma Tese de Mestrado. Para dar seguimento à sua Tese a referida professora irá recolher dados sobre o modo como essas aulas decorrem e sobre os processos de aprendizagem dos alunos. Assim, é necessário recolher dados, gravar a forma com os alunos realizam as tarefas propostas, recolher questionários e efetuar algumas entrevistas. Todo o material recolhido pela professora Eduarda Oliveira, não servirá para a avaliação do seu educando, apenas para tentar compreender de que forma é que o trabalho realizado pode contribuir para que os alunos apreenderam os conteúdos. Em caso de transcrição das entrevistas e da publicação dos questionários e da realização das tarefas propostas <u>será sempre preservado o anonimato do aluno (nunca constando o nome, a voz ou a imagem do seu educando).</u>

Com os melhores cumprimentos,

Lavradio, __ de Março de 2014

____________________ _________________________

(Eduarda Oliveira) ([redacted])

Eu, ______________________________________, encarregado(a) de educação do(a) aluno(a) ______________________________________, n.º ____, da turma ____ do 7.º ano de escolaridade, tomei conhecimento da realização da investigação e autorizo / não autorizo (riscar o que não interessa) a participação do meu educando.

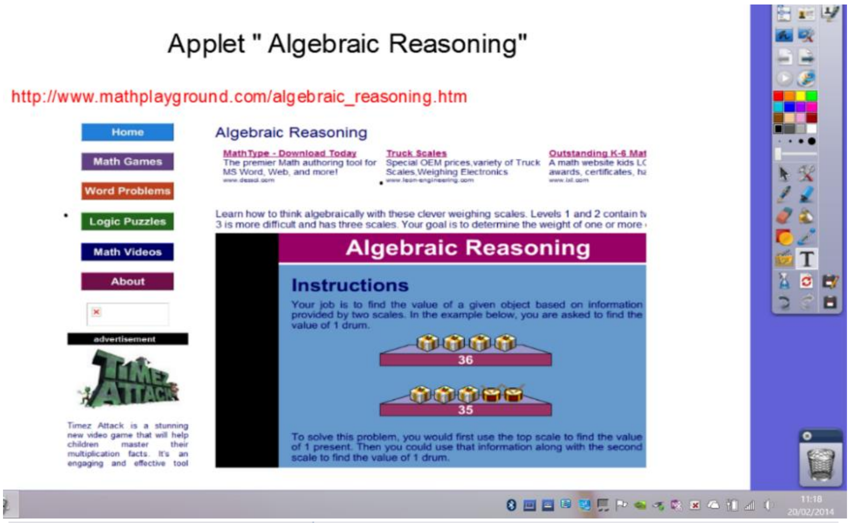
[redacted], _____ de ____________ de 2014

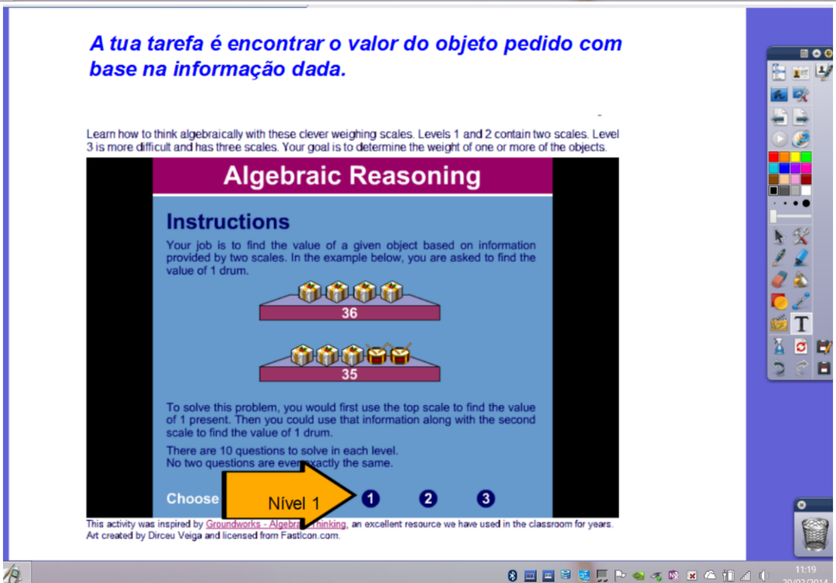
O(A) Encarregado(a) de Educação

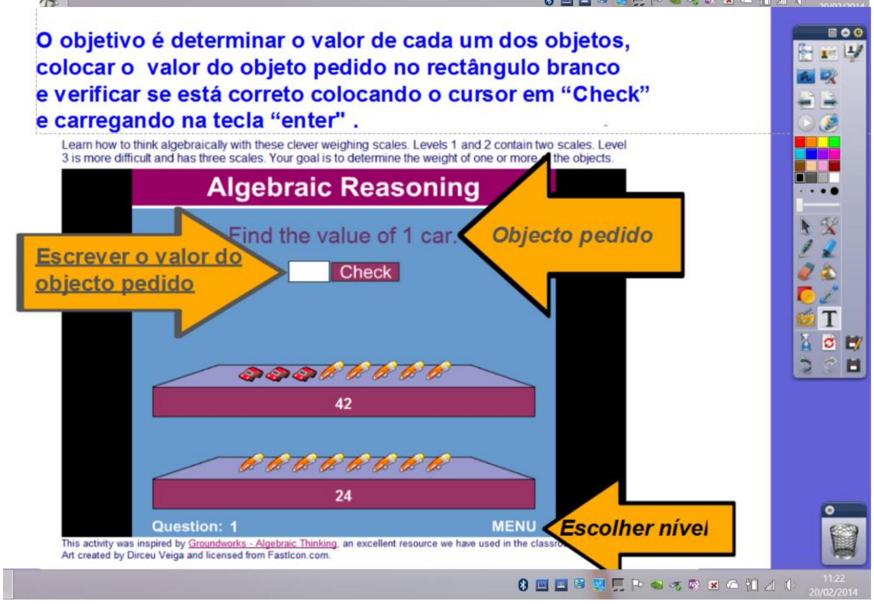
____

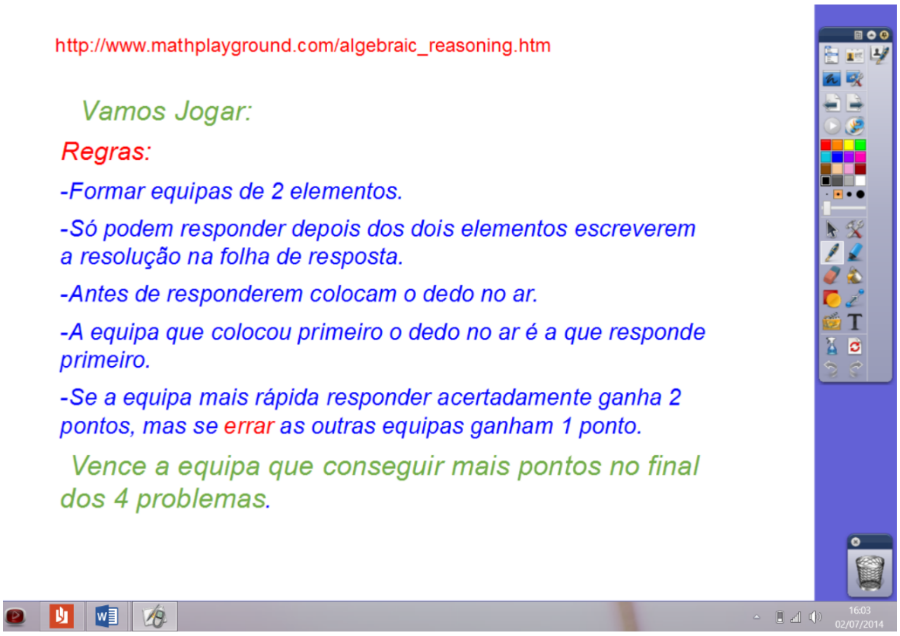
ANEXO 3 - FLIPCHART COM INSTRUÇÕES PARA REALIZAR A TAREFA 1 (APPLET 1 – “ALGEBRIC REASONIG”)

Endereço da applet http://www.mathplayground.com/algebraic_reasoning.html

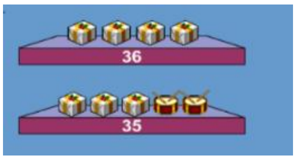







http://www.mathplayground.com/algebraic_reasoning.htm
Vamos Jogar:
Regras:
-Formar equipas de 2 elementos.
-Só podem responder depois dos dois elementos escreverem a resolução na folha de resposta.
-Antes de responderem colocam o dedo no ar.
-A equipa que colocou primeiro o dedo no ar é a que responde primeiro.
-Se a equipa mais rápida responder acertadamente ganha 2 pontos, mas se errar as outras equipas ganham 1 ponto.
Vence a equipa que conseguir mais pontos no final dos 4 problemas.
16:03
02/07/2014

ANEXO 4 -TAREFA 1- PROBLEMAS UTILIZANDO A *APPLET* – "*ALGEBRIC REASONIG*"



Nome: ____

nº:________

1ª Parte

1. Observa cada um dos problemas que te são apresentados na *applet* e em conjunto com os elementos do teu grupo resolve-os, registando sempre todos os procedimentos que efetuares.

1.1. Resolução do problema 1:

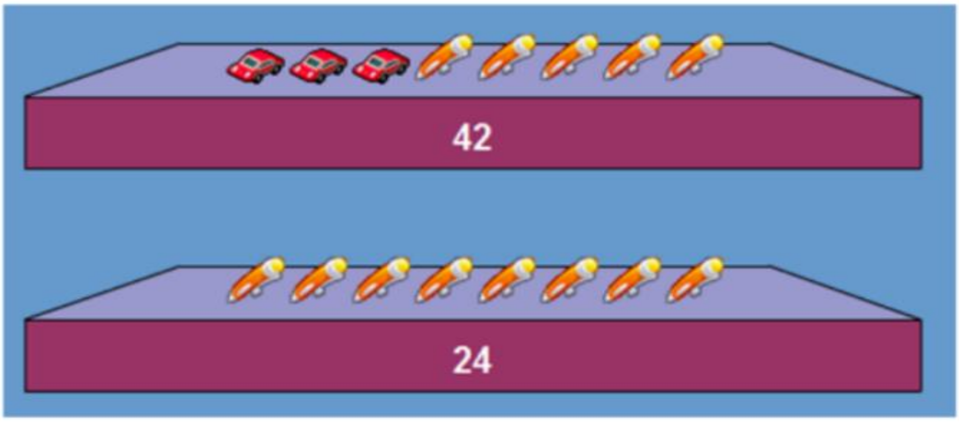
1.2. Resolução do problema 2:

1.3. Resolução do problema 3:

1.4. Resolução do problema 4:

2ª Parte

2. Observa a figura e responde às questões:



2.1. Qual o primeiro objeto cujo valor vais determinar? Porquê?
2.2. Explica como é que irás calcular o valor do objeto que referiste?
2.3. Calcula o seu valor.
2.4. Qual o segundo objeto cujo valor vais determinar? Porquê?
2.5. Explica como é que irás calcular o valor do segundo objeto?
2.6. Calcula o seu valor.

Obrigada pela tua colaboração!

ANEXO 5 – DIPLOMA DE PARTICIPAÇÃO

DIPLOMA DE PARTICIPAÇÃO

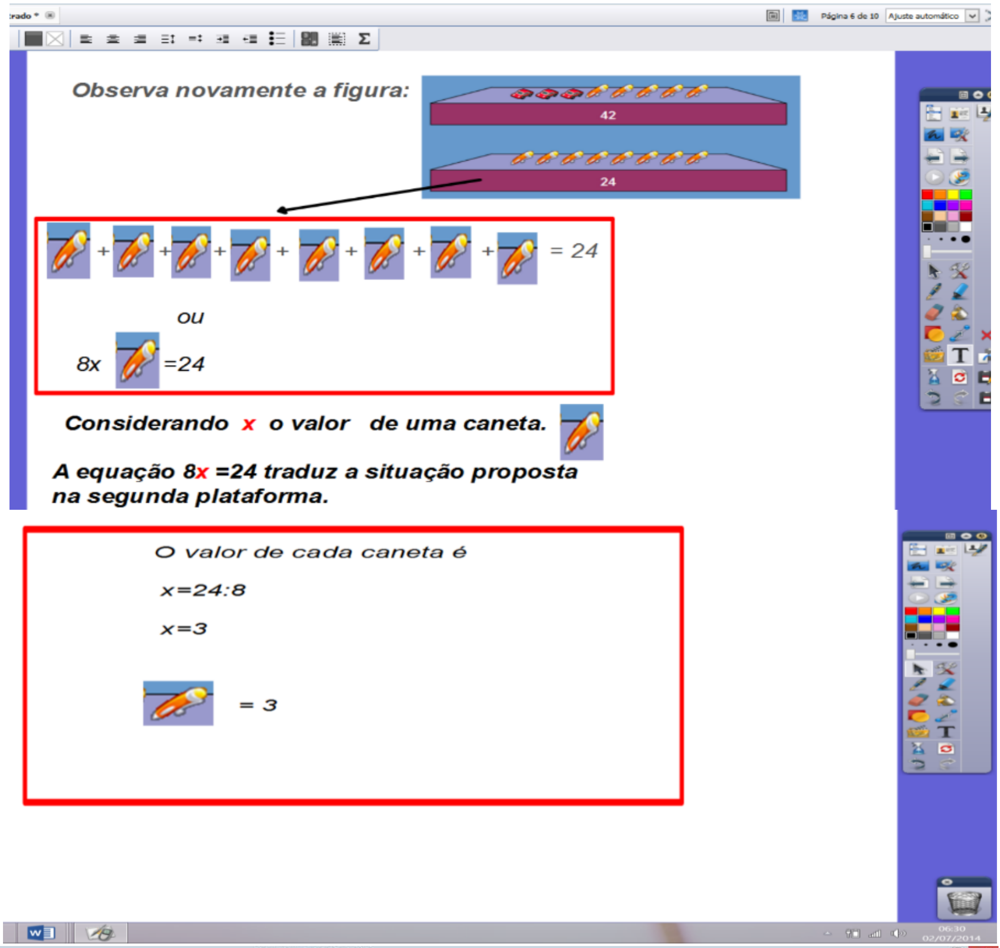
Declaro que o aluno(a) ______________________________ participou com entusiasmo e empenho no jogo desenvolvido pelas Professoras Eduarda Oliveira e [redacted], no dia 24 de abril de 2014. Tendo obtido o 1º lugar.

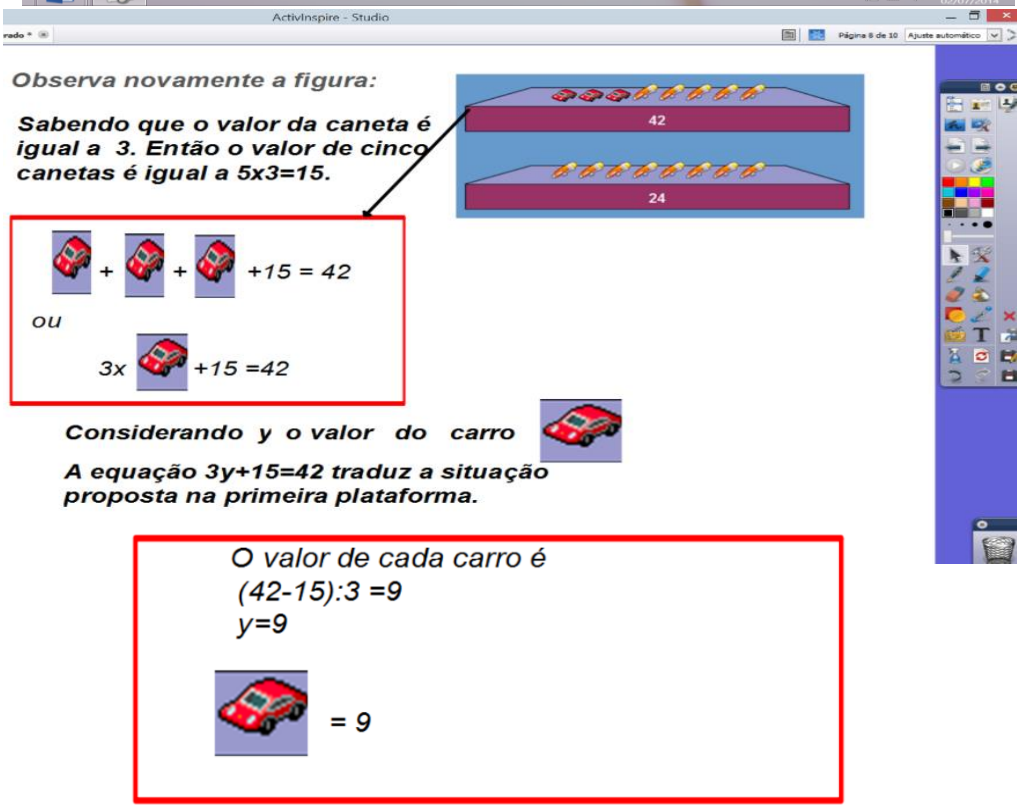
As Professoras,

____

____

ANEXO 6 - FLIPCHART - TAREFA 2 - TRANSIÇÃO DA ARITMÉTICA PARA A ÁLGEBRA





ANEXO 7 – QUESTÕES DA TAREFA 2

Nome: ____ nº:________

1. Observa a figura:

1.1. Considerando x o valor de cada presente. Escreve uma equação que traduza a situação.

1.2. Calcula o valor de x.

2. Para cada uma das seguintes equações, diz qual é o valor de x e explica como procedeste para o obteres.

2.1. $4x = 8$

2.2. $2x - 2 = 10$

2.3. $4x + 2 = 22$

2.4. $\frac{x}{2} = 4$

2.5. $4x = -8$

Obrigada pela tua colaboração!

ANEXO 8 – TAREFA 3 (APPLET 2 – “ONE STEP EQUATION GAME”)

Nome: ____ nº:________

1ª Parte- Guião da applet 2 – “One Step Equation Game”

Para acederes a esta *applet* tens de colocar o seguinte endereço:

http://www.math-play.com/One-Step-Equation-Game.html

Obténs o ecrã seguinte com dois jogos:

1.º jogo 

e 2.º jogo 

Joga o primeiro jogo e em seguida o segundo. A forma de jogar é a mesma para os dois jogos. Para jogares segue as seguintes instruções:

1. Caso estejas num grupo de 2 elementos escolhe 

   Se jogares sozinho escolhe a opção 

2. Agora tens este novo ecrã onde podes colocar o teu primeiro nome e escolher uma cor para o teu jogador.

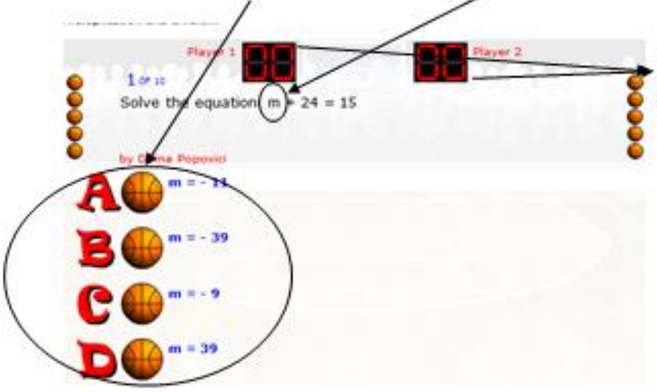
- **Caso estejas a jogar em grupo** carrega em  e volta a pôr o nome e a cor do outro jogador. Posteriormente, inicia o jogo carregando em 

- **Caso estejas a jogar sozinho** inicia o jogo carregando em 

3. - **Caso estejas a jogar em grupo**, aparece no 

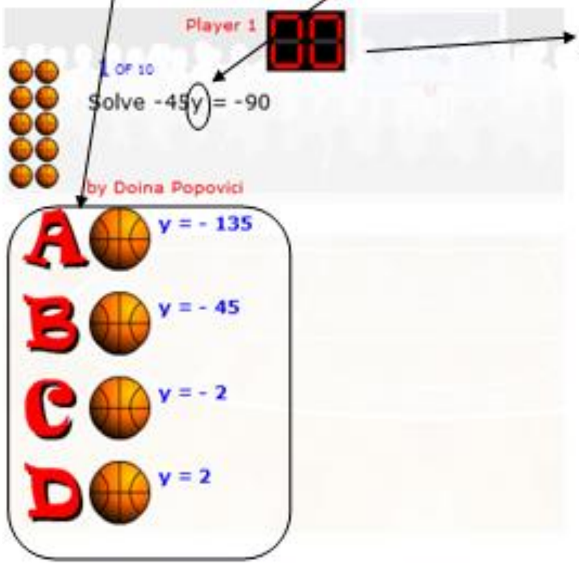
e em seguida este novo ecrã para dar inicio ao jogo do 1.º jogador.

A tarefa de cada jogador é a de encontrar o valor da incógnita para cada equação dada. Selecionando para o efeito A, B, C ou D.



Pontuação de cada jogador

- **Caso estejas a jogar sozinho,** aparece o ecrã que se segue.
A tua tarefa é a de encontrar o valor da incógnita para cada equação dada. Selecionando para o efeito A, B, C ou D.



4. Este é o novo ecrã que aparece. Podes movimentar, com o "rato", o jogador e depois fazer *click* para encestares.

Nota: Para um só jogador o ecrã só tem uma pontuação.

5. Ganhas pontos quando selecionas a resposta certa e quando encestas.

2ª Parte – Ficha de Registo da tarefa 3

6. Seleciona o primeiro jogo e sempre que te são apresentadas as equações, regista os procedimentos que efetuaste para escolher o valor da incógnita.

6.1. Equação 1:

6.2. Equação 2:

6.3. Equação 3:

6.4. Equação 4:

6.5. Equação 5:

7. Seleciona o segundo jogo e sempre que te são apresentadas as equações, regista os procedimentos que efetuaste para escolher o valor da incógnita.

7.1. Equação 1:

7.2. Equação 2:

7.3. Equação 3:

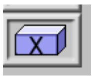
7.4. Equação 4:

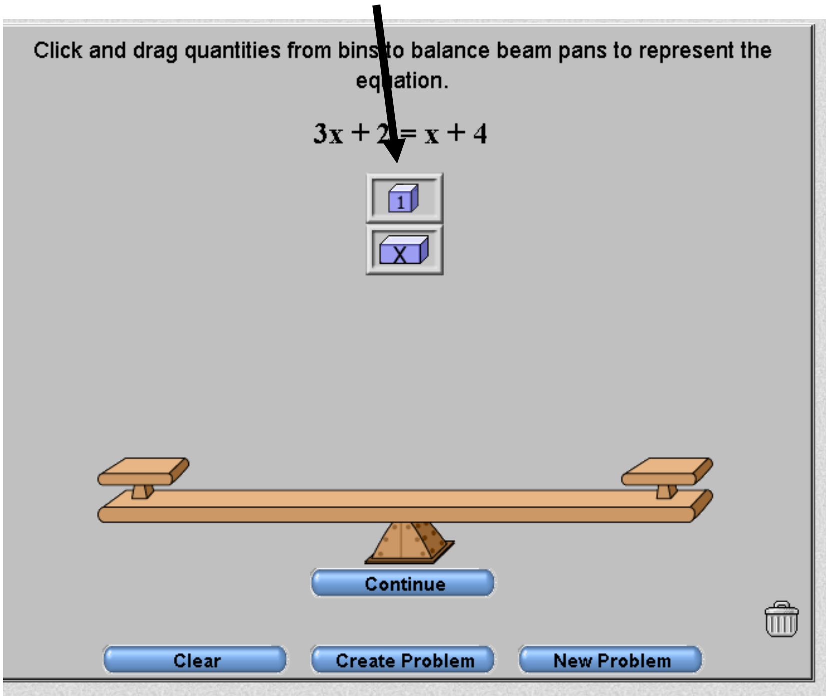
7.5. Equação 5:

Obrigada pela tua colaboração!

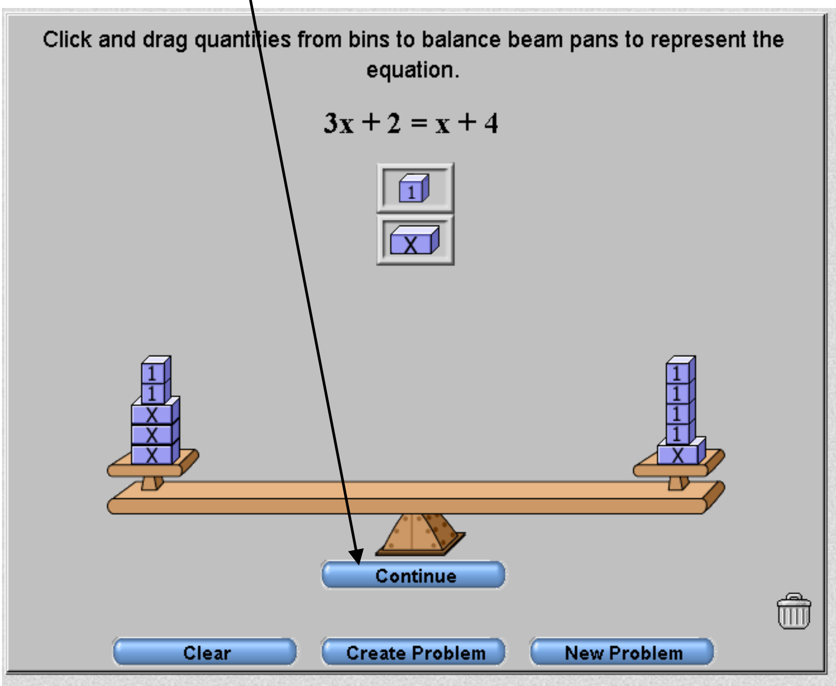
ANEXO 9 – TAREFA 4 -INSTRUÇÕES PARA REALIZAR A TAREFA COM O APPLET “ALGEBRA BALANCE SCALES”

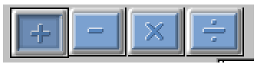
http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_201_g_4_t_2.html?open=instructions

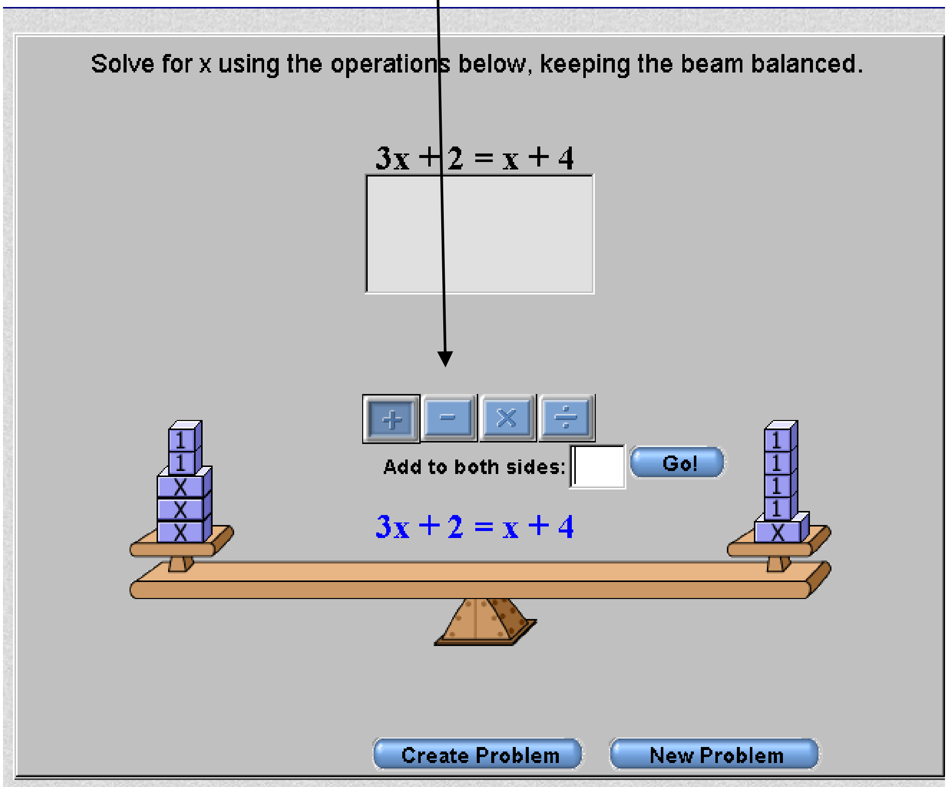
Selecione as figuras (  número e incógnita) **e arraste-as para cada um dos** pratos da balança de forma a representar a equação.



Depois do modelo da equação estar correto que se verifica quando a balança estiver em equilíbrio.  Clica em

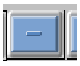


Para calcular o valor de x,  use as operações matendo sempre a balança em equilibrio.

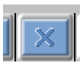


- Caso selecione  introduza no quadrado branco a 

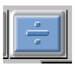
quantidade que deseja adicionar a ambos os membros da equação e clica em 

- Caso selecione  introduza no quadrado branco a 

quantidade que deseja subtrair a ambos os membros da equação e clica em 

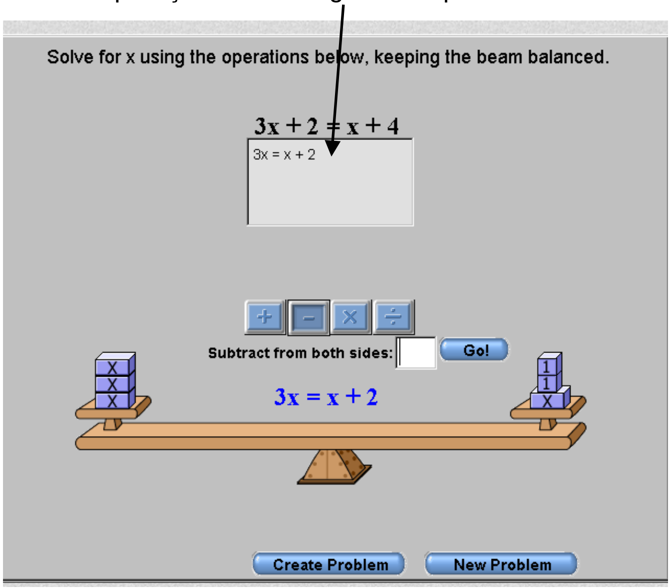
- Caso selecione  introduza no quadrado branco o 

número pelo qual deseja multiplicar ambos os membros da equação e clica em 

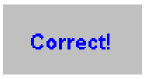
- Caso selecione  introduza no quadrado branco o 

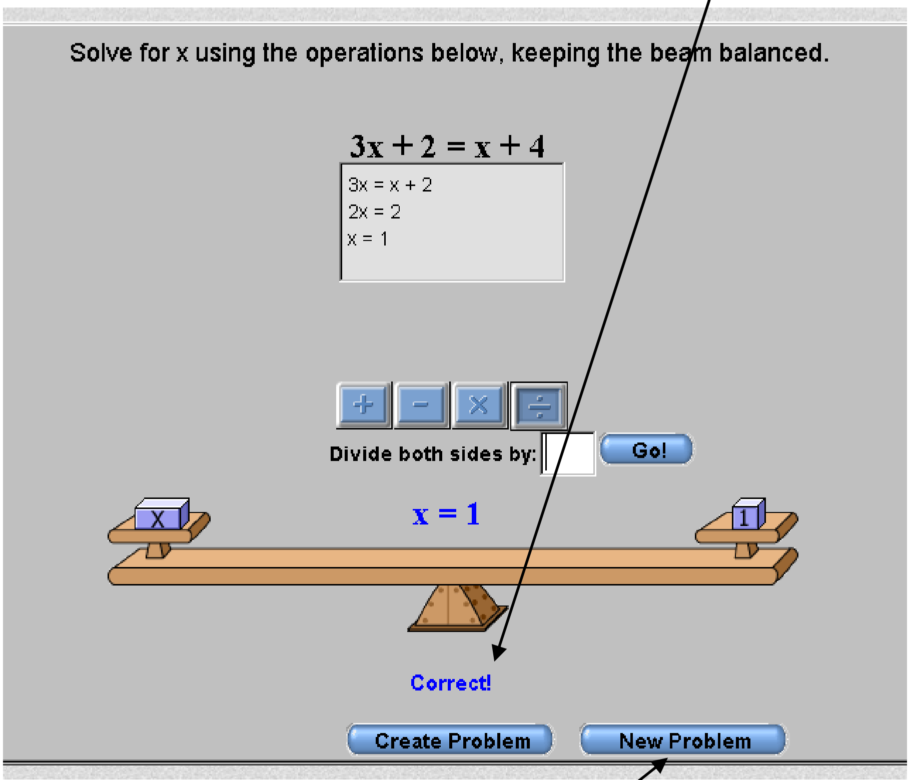
número pelo qual deseja multiplicar ambos os membros da equação e clica em 

Ao efetuares as operações no retângulo vai aparecendo uma nova equação.



Quando consegues obter o valor de x, aparece a expressão



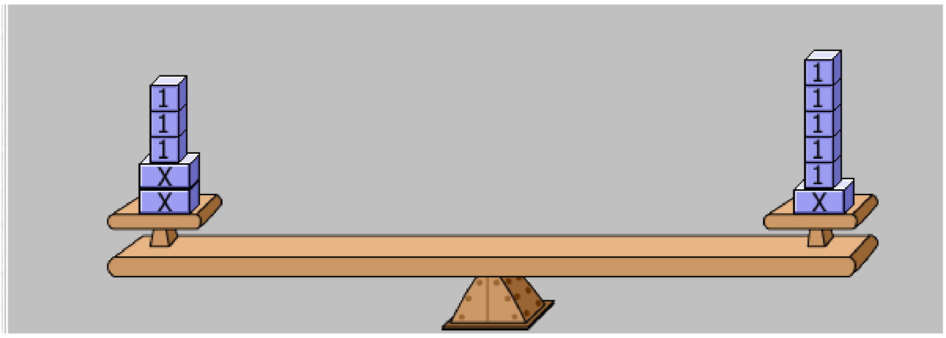


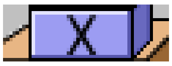
Para escolher um problema novo clica em

ANEXO 10 – TAREFA 4 – FICHA DE TRABALHO

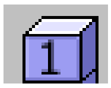
Nome: ____ nº:________

1. Observa a balança em equilíbrio.





- Peso de cada caixa em kg



- 1 kg

1.1. Escreve uma equação que traduza a situação.

1.2. O que é que acontece à balança:

1.2.1. Se tirares 2 kg de cada um dos pratos da balança?

1.2.2. Se adicionares 1 kg de cada um dos pratos?

1.2.3. Se duplicares a massa em cada prato?

1.3. Qual é o peso de uma caixa? Explica como obtiveste a tua resposta.

1.4. Escreve um enunciado de um problema que traduza a situação proposta.

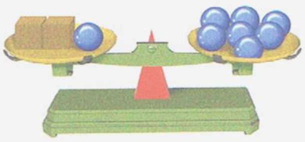
2. Para cada uma das seguintes equações, diz qual é o valor de x e explica como procedeste para o obteres.

2.1. $2x+3=x+4$

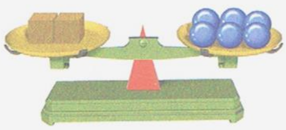
2.2. $4x-2=22+2x$

Obrigada pela tua colaboração!

ANEXO 11- FICHA INFORMATIVA-PRINCÍPIOS DE EQUIVALÊNCIA

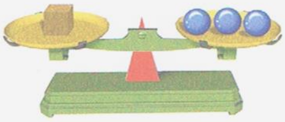


$2x + 1 = 7$



$2x + 1 - 1 = 7 - 1$

$2x = 6$



$\frac{2x}{2} = \frac{6}{2}$

$x = 3$

Princípios de equivalência

Como já vimos, a balança em equilíbrio da actividade anterior sugere a equação $2x + 1 = 7$.

A balança manteve-se em equilíbrio quando tiraste 1 kg a cada prato da balança, adicionaste 2 kg a cada prato da balança ou quando duplicaste a massa em cada prato. Os membros de uma equação funcionam como os pratos de uma balança, o que permite compreender os princípios em que se baseia a resolução de equações.

Princípio da adição

Se adicionarmos ou subtrairmos a mesma quantidade a ambos os membros de uma equação, obtemos uma equação equivalente.

Se $a = b$, então
$a + c = b + c$ e
$a - c = b - c$,
sendo a, b e c números quaisquer.

Princípio da multiplicação

Se multiplicarmos ou dividirmos ambos os membros de uma equação pelo mesmo número, diferente de zero, obtemos uma equação equivalente.

Se $a = b$ então
$a \times c = b \times c$
$\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$
Sendo a, b e $c \neq 0$ números quaisquer.

Os princípios da adição e da multiplicação permitem passar de uma equação para outra mais simples, que lhe é equivalente.
Dizem-se, por isso, **princípios de equivalência**.

Como resolver uma equação aplicando os princípios de equivalência?

Exemplos

1 **Como resolver a equação $5x - 7 = 13$?**

Para, nesta equação, determinar o valor de x, é conveniente começar por identificar o termo com a incógnita e isolar esse termo num dos membros.

$5x - 7 = 13 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow 5x - 7 + 7 = 13 + 7$

Para isolar o termo $5x$ no 1.º membro, basta somar 7 aos dois membros da equação (Princípio da adição).

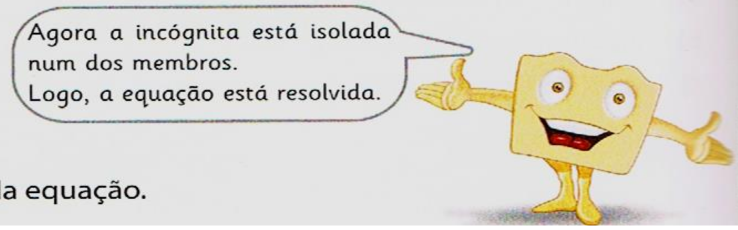
$\Longleftrightarrow 5x = 20$

$\Longleftrightarrow \frac{5x}{5} = \frac{20}{5}$

Como $5x = 5 \times x$, para isolar x basta dividir os dois membros da equação por 5 (Princípio da multiplicação).

$\Longleftrightarrow 1x = 4$

$\Longleftrightarrow x = 4$



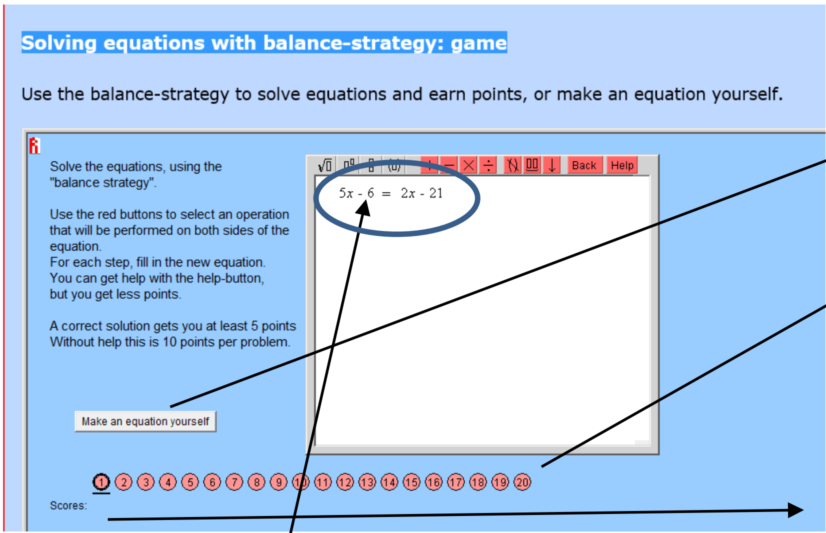
Logo, 4 é a solução da equação.

Retirado de *Matemática em acção 7- (2010) – Iolanda Passos, Olga Correia –Lisboa Editora*

ANEXO12 – TAREFA 5 - APPLET " "SOLVING EQUATIONS WITH BALANCE-STRATEGY: GAME"

Nome: ____ nº:________

1. Instruções para trabalhar com a applet:
Aceder à applet em http://www.fi.uu.nl/toepassingen/02018/toepassing_wisweb.en.html

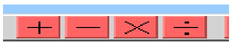


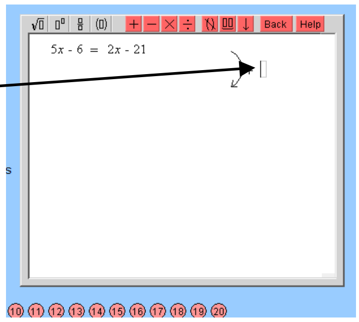
Para colocares uma equação à tua escolha.

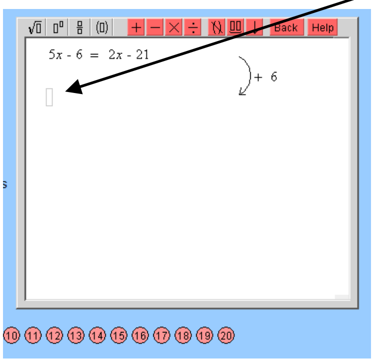
Para escolher a equação.

Pontuação obtida.

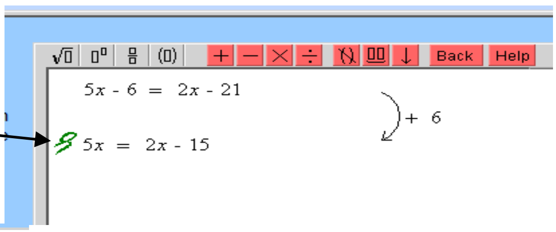
O objetivo é resolver a equação dada usando os princípios de equivalência.

- Usando os botões  selecionas a operação que queres efetuar em ambos os membros da equação.
- Depois de selecionares a operação obténs no ecrã um retângulo para colocar a quantidade que desejas adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir em ambos os membros da equação.
- Posteriormente vais obter no ecrã um outro retângulo onde deves colocar a equação equivalente que vais obter.





- Caso a nova equação esteja correta obténs no ecrã este símbolo: 



-Caso esteja errada então podes clicar em  e voltar a efetuar novos procedimentos para resolver a equação.

2. Resolve as primeiras 15 equações e regista nesta folha, para cada uma das equações todos os procedimentos que efetuaste.

Equação 1	Equação 2	Equação 3
Equação 4	Equação 5	Equação 6
Equação 7	Equação 8	Equação 9
Equação 10	Equação 11	Equação 12
Equação 13	Equação 14	Equação 15

ANEXO13 – TAREFA 6 - - APPLET4: "*ESCAPE PLANET X*"

Nome: ____ nº:_________

1. Folha de Registo:

1.º Jogo

Enunciado do problema	Equação que traduz o problema
1)	
2)	
3)	
4)	
5)	
6)	
7)	

2.º Jogo

Enunciado do problema	Equação que traduz o problema
1)	
2)	
3)	
4)	
5)	
6)	
7)	

2. Resolve os problemas 1) e 4) do 1.ºjogo e 3) e 5) do 2.º jogo.

ANEXO14 – QUESTIONÁRIO

Nome: ____ nº:________

1. Observa a figura:

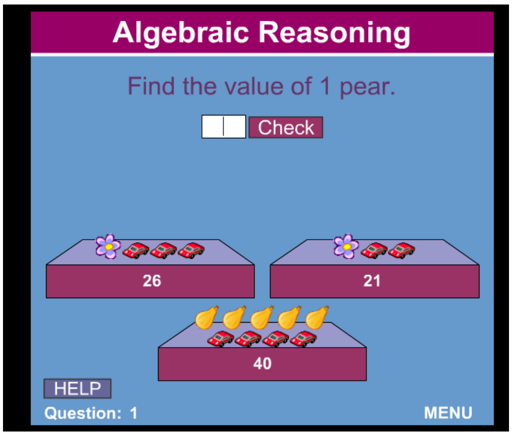
a) Considerando x o valor de cada presente. Escreve a equação que traduz a situação.

b) Calcula o valor de cada presente, resolvendo a equação usando os princípios de equivalência.

2. Observa a figura:

Considerando x o valor de cada caneta e y o valor de cada carro. Através da resolução de equações, calcula o valor de cada caneta e de cada carro.

3. Observa a figura:



Determina o valor da pera. Explica como o fizeste.

ANEXO15 – ENTREVISTA AOS ALUNOS

Objetivo Geral: Recolher informação sobre a opinião dos alunos relativa às tarefas aplicadas recorrendo às *applets*.

Nome: ____ nº:________

Com esta entrevista questionário pretendo saber o que pensas do trabalho que realizamos recorrendo às aplicações interativas (applets).

1. O que gostaste mais durante estas aulas? Porquê?

2. O que gostaste menos durante estas aulas? Porquê?

3. Das tarefas que realizaste, houve alguma que gostasses mais? Porquê?

4. Consideras que aprendes mais, menos ou o mesmo neste tipo de aulas? Porquê?

5. Consideras que a utilização das aplicações interativas (applets) na aula de matemática tem vantagens? Porquê?

Obrigada pela colaboração!