



Cláudia Sofia João de Almeida

Licenciada em Ciências da Engenharia Mecânica

**Projeto de estruturas reticuladas leves e
resistentes utilizando variáveis de área e de
seleção de material**

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em

Engenharia Mecânica

Orientador: Doutor Pedro Samuel Gonçalves Coelho
Professor Auxiliar, Faculdade de Ciências e Tecnologia
da Universidade NOVA de Lisboa

Júri:

Presidente: Prof. Doutor José Manuel Cardoso Xavier

Arguente: Prof. Doutor João Mário Burguete Botelho Cardoso

Vogal: Prof. Doutor Pedro Samuel Gonçalves Coelho

Novembro, 2020

Cláudia Sofia João de Almeida

Licenciada em Ciências da Engenharia Mecânica

**Projeto de estruturas reticuladas leves e
resistentes utilizando variáveis de área e de
seleção de material**

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em
Engenharia Mecânica

Orientador: Doutor Pedro Samuel Gonçalves Coelho

Professor Auxiliar, Faculdade de Ciências e Tecnologia
da Universidade NOVA de Lisboa

Novembro, 2020

Projeto de estruturas reticuladas leves e resistentes utilizando variáveis de área e de seleção de material

Copyright © Cláudia Sofia João de Almeida, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa.

A Faculdade de Ciências e Tecnologia e a Universidade Nova de Lisboa têm o direito, perpétuo e sem limites geográficos, de arquivar e publicar esta dissertação através de exemplares impressos reproduzidos em papel ou de forma digital, ou por qualquer outro meio conhecido ou que venha a ser inventado, e de a divulgar através de repositórios científicos e de admitir a sua cópia e distribuição com objetivos educacionais ou de investigação, não comerciais, desde que seja dado crédito ao autor e editor.

Aos meus avós

Agradecimentos

Primeiramente gostava de expressar a minha gratidão ao meu orientador, Prof. Dr. Pedro Coelho, que ao longo destes meses sempre se mostrou disponível, dedicado e paciente. Agradeço todo o apoio e motivação, sem os quais não teria conseguido desenvolver esta dissertação e por me ter desafiado a fazer mais e melhor. Quero agradecer também o excelente professor que foi ao longo da minha formação, e por me ter transmitido o gosto pela mecânica estrutural.

Em segundo lugar agradeço aos meus pais, pelo amor incondicional e por me terem dado a possibilidade de seguir para o ensino superior, apoiando-me a nível financeiro e emocional sempre que precisei. Aos meus tios e primos obrigada por todas as alegrias. Ao meu irmão, Tiago, por me fazer rir todos os dias. Obrigada por me lembrares como é feliz ser-se criança.

Aos meus amigos, a minha segunda família, obrigada por serem o meu maior apoio e alegrarem mesmo os dias mais cinzentos. Às Marianas, Cláudia e Matilde, por todas as horas de conversa que parecem nunca ser suficientes. Ao Chico e ao Filipe por todas as gargalhadas, ao Mourato por todos os anos de amizade e todas as horas de companhia, e em especial à Carolina, por todas as horas de estudo que não tive de enfrentar sozinha e todas as pausas para café. Por último ao Pedro, o meu namorado e melhor amigo, por me apoiar em todos os aspetos da minha vida. Olho para ti com orgulho e inspiração, todos os dias. Obrigada por me deixares crescer a teu lado.

Finalmente quero agradecer a todos os professores que conheci ao longo dos dezassete anos do meu percurso académico, por me fornecerem os conhecimentos técnicos e pessoais necessários para chegar onde estou hoje.

Resumo

A presente dissertação tem como principal objetivo o desenvolvimento de metodologias capazes de minimizar a massa de estruturas reticuladas planas, sujeitas a constrangimentos de tensão, de modo a otimizá-las a nível dimensional e topológico com seleção de material. Estas metodologias permitem projetar estruturas leves e resistentes.

Para o desenvolvimento desta metodologia foram utilizadas duas variáveis de projeto, otimizadas simultaneamente: densidade artificial e área das secções das barras. A variável área é encarada como a variável topológica e dimensional, ficando a variável de densidade artificial responsável pela seleção ótima de materiais para a estrutura, deixando de haver necessidade de modelar a fase de vazio recorrendo à variável de densidade artificial. Permite ainda a obtenção de estruturas em *fully stressed design*. Os problemas considerados podem ter até três fases de material sólido, para além de se considerar a fase de vazio ou de ausência de material. O leque de problemas abrangido nesta dissertação corresponde a problemas SMTO (vazio + 1 material sólido), MMTO2 (vazio + 2 materiais sólidos) e MMTO3 (vazio + 3 materiais sólidos). Para seleccionar o material recorre-se a três leis de interpolação, DMO, SIMP e SFP, com o intuito de as comparar e concluir sobre a sua eficácia. A formulação dos problemas é elaborada com recurso a funções contínuas e diferenciáveis para que possam ser utilizados métodos de optimização baseados no gradiente, nomeadamente o MMA.

A metodologia desenvolvida nesta dissertação é testada para seis exemplos numéricos de complexidade crescente. Os resultados obtidos comprovam a eficiência e viabilidade desta metodologia na obtenção de estruturas leves e resistentes. Verifica-se também que a adição das áreas como variável de projeto reduz o custo computacional, o problema converge mais depressa.

Palavras-Chave: Optimização; Topologia; Multimaterial; Constrangimentos de tensão; Treliças.

Abstract

The main goal of this dissertation is to develop a methodology able to minimize the mass of a truss structure subject to stress constraints. This implies the application of a dimensional and topological optimization, with selection of different materials. Concerning this, the developed methodology can ultimately be used in lightweight and strength truss structure's design.

To develop this methodology, two design variables were considered which were optimized simultaneously: artificial density and areas of the bar cross sections. The areas of the bars can be seen as a topological and dimensional variable, while artificial densities are responsible for the optimal distribution of different materials selected from an available pool. Furthermore, adding the area variable allows the computational cost to be reduced and a fully stressed design is approached. In view of this, the problems considered in the present framework have up to three phases of solid materials and a void phase (or absence of material). The range of problems covered in the present framework correspond to SMTO problems (void + 1 solid material), MMTO2 problems (void + 2 solid materials) and MMTO3 problems (void + 3 solid materials). To select the material's phase, three interpolation laws are used, DMO, SIMP and SFP, and a comparative study is carried out to conclude about their efficiency. The problems are formulated using continuous and differentiable functions, which can be solved by a gradient-based algorithm, namely, the MMA.

The methodology developed in this dissertation is tested for six numerical examples with increasing level of complexity. The obtained results prove how viable this methodology is in obtaining lightweight and resistant truss structures. It is observed that the addition of areas as design variables reduces the overall computational cost, speeding up problem convergence.

Keywords: Optimization; Topology; Multimaterial; Stress constraints; Truss.

Simbologia e Notações

Latim

A_e	Área do elemento e
A_i	Valor inicial da área de secção da barra
a_0, a_i, d_i	Parâmetros relativos ao MMA
c_i, c_{MMA}	Parâmetro da violação de constrangimentos do MMA
C	<i>Compliance</i>
E	Módulo de Young
E_e	Módulo de Young do elemento e
E^m	Módulo de Young da fase de material m
\mathbf{E}, E_{ijkl}	Tensor de rigidez
\mathbf{E}_e	Tensor de rigidez do elemento e
\mathbf{f}	Vetor de carregamentos
f, f_0	Função objetivo
\tilde{f}_0	Função de aproximação à função objetivo
f_i	Constrangimento de desigualdade i
\tilde{f}_i	Função de aproximação ao constrangimento de desigualdade i
G	Módulo de distorção
g	Constrangimento de desigualdade
g_e^{mat}	Constrangimento eliminação de materiais fictícios no elemento e
$g_{e,l}^\sigma$	Constrangimento de tensão no elemento e para o caso de carga l
g^ε	Constrangimento de penalização de densidades intermédias
h	Constrangimento de igualdade
I_{total}	Número de iterações total
I_1	Número de iterações no primeiro intervalo
I_2	Número de iterações no segundo intervalo
i_{start}^ε	Iteração onde se inicia a variação do valor ε
i_{end}^ε	Iteração onde termina a variação do valor ε
\mathbf{K}	Matriz de rigidez global
\mathbf{L}	Vetor das funções de forma do elemento barra

L_e	Comprimento do elemento e
LC	Número de casos de carga
m^{crit}	Número de constrangimentos críticos
n^c	Número total de constrangimentos
NE	Número de elementos finitos
N_f	Número de fases de material
n^{iter}	Número de iterações
N_{mat}	Número de fases de material sólido
n^v	Número total de variáveis de projeto
P	Carga aplicada
p	Expoente de penalização do modelo SIMP
p_1	Expoente de penalização da densidade específica
p_2	Expoente de penalização do módulo de Young
p_3	Expoente de penalização da tensão admissível
q	Expoente de penalização do modelo RAMP
s	Variável de posição espacial do domínio Ω
\mathbf{T}	Matriz transformação de coordenadas
\mathbf{u}	Vetor de deslocamentos no referencial global do elemento
\mathbf{u}'	Vetor de deslocamentos no referencial local do elemento
V^*	Volume imposto
w	Função de peso
w_i	Função de peso relativa à fase i
$w_{e,m}$	Função de peso para a seleção do material m no elemento e
\mathbf{x}	Vetor das variáveis de projeto
$\mathbf{x}^{(k)}$	Vetor das variáveis de projeto na iteração k
\mathbf{x}_A	Vetor das variáveis área das secções
x_{A_e}	Variável da área associada ao elemento e
\mathbf{x}_ρ	Vetor das variáveis densidade artificial
$\mathbf{x}_{\rho,A}$	Vetor das variáveis densidade artificial e área das secções
x_e, x_{ρ_e}	Variável de densidade artificial associada ao elemento e

$x_{e,m}, x_{\rho_{e,m}}$	Variável de densidade artificial associada à seleção da fase de material m no elemento e
x_m	Variável de densidade artificial associada à seleção da fase de material m
x^{max}, \bar{x}	Limite superior das variáveis de projeto
\bar{x}_ρ	Limite superior da variável de densidade artificial
x^{min}, \underline{x}	Limite inferior das variáveis de projeto
\underline{x}_ρ	Limite inferior da variável de densidade artificial
\mathbf{y}	Vetor das variáveis artificiais do subproblema do MMA
\mathbf{z}	Vetor de carga adjunta, <i>dummy load vector</i>
z	Variável artificial do subproblema do MMA

Grego

α	Ângulo de transformação de coordenadas
δ_0	Percentagem de iterações iniciais com parâmetros constantes
ε	Parâmetro do ε -relaxation, parâmetro do constrangimento g^ε
ε_e	Extensão no elemento e
$\boldsymbol{\varepsilon}, \varepsilon_{kl}$	Tensor das deformações
$\langle \boldsymbol{\varepsilon}_e \rangle$	Vetor de extensão macroscópica
ζ	Parâmetro do constrangimento g^ε
$\boldsymbol{\lambda}$	Vetor adjunto
ρ_e	Densidade específica do elemento e
ρ^m	Densidade específica da fase de material m
$\boldsymbol{\sigma}, \sigma_{ij}$	Tensor das tensões
σ_e	Tensão axial no elemento e
$\sigma_{e,l}$	Tensão axial no elemento e para o caso de carga l
$\bar{\sigma}_e$	Tensão admissível no elemento e
$\boldsymbol{\sigma}_e$	Tensão microscópica no elemento e
$\langle \boldsymbol{\sigma}_e \rangle$	Tensão macroscópica no elemento e
$\bar{\sigma}^m$	Tensão admissível da fase de material m
ν	Coeficiente de Poisson
φ	Função degrau

χ	Característica arbitrária do material
χ^m	Característica arbitrária da fase de material m
Ψ	Função genérica
ψ	Somatório dos termos quadráticos do constrangimento g^ε
ψ_i	Funções de forma de um elemento isoparamétrico
Ω	Domínio de projeto
Ω^{mat}	Subdomínio ocupado por material
Ω^{vaz}	Subdomínio ocupado por vazio
$ \Omega^{mat} $	Volume do subdomínio ocupado por material
$ \Omega _e$	Volume do elemento e

Abreviaturas

DMO	<i>Discrete Material Optimization</i>
DTU	<i>Danish Technical University</i>
FSD	<i>Fully Stressed Design</i>
KKT	<i>Karoush-Kuhn Tucker</i>
LSM	<i>Level-Set Function</i>
MEF	Método dos Elementos Finitos
MMA	<i>Method of Moving Asymptotes</i>
MMS	<i>Multi Material Selection</i>
MMTO	<i>Multi Material Topologu Optimization</i>
NPR	<i>Negative Poisson's Ratio</i>
NTE	<i>Negative Thermal Expansion</i>
PFM	<i>Phase-Field Method</i>
RAMP	<i>Rational Approximation of Material Properties</i>
RMMI	<i>Recursive Multiphase Materials Interpolation</i>
SFP	<i>Shape Function Parameterization</i>
SIMP	<i>Solid Isotropic Material with Penalization</i>
SMTO	<i>Single Material Topology Optimization</i>
SQP	<i>Sequential Quadratic Programming</i>
UMMI	<i>Uniform Multiphase Materials Interpolation</i>

Índice Geral

Agradecimentos	IX
Resumo	XI
Abstract	XIII
Simbologia e Notações	XV
Índice Geral.....	XIX
Índice de Figuras	XXIII
Índice de Tabelas	XXV
1. Introdução	1
1.1 Motivação	1
1.2 Objetivos.....	2
1.3 Estrutura	3
2. Estado da Arte	5
2.1 Introdução.....	5
2.1.1 Domínios da Otimização Estrutural	5
2.1.2 Formulação de Problemas de Otimização	9
2.2 Algoritmos de Otimização.....	10
2.2.1 Métodos de otimização baseados no gradiente.....	10
2.2.2 Métodos de Otimização não baseados no gradiente.....	12
2.2.3 Análise de Sensibilidades	13
2.2.3.1 Métodos Analíticos.....	13
2.2.3.2 Métodos das Diferenças Finitas.....	16
2.3 Otimização Topológica	17
2.3.1 Formulação do problema discreto	18
2.3.2 Formulação do problema relaxado	20

2.3.3	Constrangimento de tensão.....	21
2.3.3.1	ε -relaxation.....	23
2.3.3.2	<i>qp</i> -approach.....	24
2.4	Otimização Multimaterial.....	26
2.4.1	SIMP recursivo.....	27
2.4.2	DMO – <i>Discrete Material Optimization</i>	29
2.4.3	SFP – <i>Shape Function Parameterization</i>	31
3.	Leis de Interpolação.....	35
3.1	DMO.....	35
3.2	SIMP.....	37
3.3	SFP.....	39
3.4	Análise Comparativa.....	42
4.	Formulação dos Problemas.....	47
4.1	Variáveis, Função Objetivo e Constrangimentos.....	48
4.1.1	Variáveis.....	49
4.1.2	Função Objetivo.....	50
4.1.3	Constrangimentos.....	50
4.2	Categorias dos Problemas de Otimização.....	52
4.2.1	Formulação com variável densidade artificial.....	53
4.2.1.1	SMT0.....	53
4.2.1.2	MMT0 m	54
4.2.2	Formulação com variável área.....	55
4.2.3	Formulação com variável densidade artificial e área.....	56
4.2.3.1	MMT02.....	57
4.2.3.2	MMT03.....	58
4.3	Estratégia de Penalização.....	59
5.	Cálculo das Sensibilidades.....	63

5.1 Função objetivo	63
5.1.1 DMO	64
5.1.2 SIMP	64
5.1.3 SFP	66
5.2 Constrangimento de tensão.....	66
5.2.1 DMO	69
5.2.2 SIMP	69
5.2.3 SFP	71
5.3 Constrangimento para eliminação de materiais fictícios.....	71
5.4 Constrangimento de densidades intermédias.....	72
6. Resultados	73
6.1 Análise Geral dos Resultados	77
6.1.1 Resultados SMTO	77
6.1.2 Resultados MMTO2	79
6.1.3 Resultados MMTO3	81
6.1.4 Harmonização dos parâmetros de otimização	82
6.1.4.1 Variável de Projeto: Densidade Artificial, $x\rho$	84
6.1.4.2 Variável de Projeto: Área, xA	86
6.1.4.3 Variáveis de Projeto: Densidade Artificial e Área, $x\rho, A$	86
6.1.5 Discussão de resultados	87
6.2 Treliça 10 barras	89
6.3 Treliça 11 barras	90
6.4 Treliça 21 barras	91
6.5 Treliça 26 barras	92
6.6 Treliça 36 barras	93
6.7 Treliça 110 barras	94
7. Conclusões e Trabalhos Futuros	95

7.1 Conclusões.....	95
7.2 Trabalhos Futuros.....	98
Bibliografia.....	99
Anexos.....	107
Anexo A – Redução da massa da estrutura otimizada com adição das áreas e fases de material	109

Índice de Figuras

Figura 2. 1 – Exemplos de <i>Ground Structure</i> . À esquerda algumas conectividades. À direita todas as conectividades possíveis. Adaptado de [6].	6
Figura 2. 2 – a) Reforços do bordo de ataque e fuselagem interna de uma porta de um Airbus A380. b) Projeto do automóvel de Jaguar Cars Ltd [52].	7
Figura 2. 3 – Estrutura reticulada (interna) de um autocarro obtida através de otimização topológica multimaterial [9].	8
Figura 2. 4 – Relação entre as propriedades de material e a variável densidade artificial, consoante a penalização da lei SIMP. Adaptado de [43].	21
Figura 2. 5 – Espaço de projeto e ótimo singular. Adaptado de [19].	23
Figura 2. 6 – Espaço de projeto utilizando a) $\varepsilon = 0,01$ e b) $\varepsilon = 0,001$. Adaptado de [19].	24
Figura 2. 7 – Elemento isoparamétrico no referencial natural. Adaptado de [46].	31
Figura 2. 8 – Elemento isoparamétrico representado no novo referencial $Oxe, 1, xe, 2$.	32
Figura 2. 9 – Representação gráfica das funções de forma. Adaptado de [49].	32
Figura 3. 1 – Representação gráfica da lei DMO, para interpolação de três fases de material, utilizando três expoentes de penalização diferentes.	36
Figura 3. 2 – Funções de peso da lei DMO para três fases de material, com $p = 3$.	37
Figura 3. 3 – Representação gráfica da lei SIMP, para interpolação de três fases de material, utilizando três expoentes de penalização diferentes.	38
Figura 3. 4 – Funções de peso da lei SIMP para três fases de material, com $p = 3$.	39
Figura 3. 5 – Representação gráfica da lei SFP, para interpolação de quatro fases de material, utilizando três expoentes de penalização diferentes.	40
Figura 3. 6 – Funções de peso da lei SFP para quatro fases de material, com $p = 3$.	41
Figura 3. 7 – Demonstração da transição das zonas porosas (a cinzendo) para zonas de densidades 1 ou 0 (a preto ou branco), aplicando filtro das densidades [48].	42

Figura 3. 8 – Seleção da fase de material, para $p = 3$, na superfície de interpolação gerada pela lei a) DMO; b) SIMP; c) SFP.	45
Figura 4. 1 – Superfícies de interpolação das características do material, para os valores finais dos expoentes de penalização. Adaptado de [18].	60
Figura 4. 2 – Representação gráfica da estratégia de penalização [18].	61
Figura 5. 1 – Elemento finito barra arbitrário.	67
Figura 6. 1 – Dados da treliça de 10 barras.	74
Figura 6. 2 – Dados da treliça de 11 barras.	74
Figura 6. 3 – Dados da treliça de 21 barras (representada por 11 barras e condições de simetria).	75
Figura 6. 4 – Dados da treliça de 26 barras.	75
Figura 6. 5 – Dados da treliça de 36 barras.	76
Figura 6. 6 – Dados da treliça de 110 barras (representada por 55 barras e condições de simetria).	76

Índice de Tabelas

Tabela 2. 1 – Exemplos de possíveis variáveis de projeto, função objetivo e constrangimentos. Adaptado de [12].	9
Tabela 2. 2 – Classificação dos problemas de otimização topológica consoante o número de fases de material N_{mat} e o número total de fases N_f . Adaptado de [18].	26
Tabela 2. 3 – Seleção da fase de material através das funções de forma do elemento isoparamétrico, consoante as coordenadas dos vértices, $(x_{e, 1}, x_{e, 2})$	33
Tabela 3. 1 – Variáveis de projeto associadas à seleção de cada uma das três fases de material, na lei DMO.	36
Tabela 3. 2 – Variáveis de projeto associadas à seleção de cada uma das três fases de material, na lei SIMP.	38
Tabela 3. 3 – Variáveis de projeto associadas a cada uma das quatro fases de material, na lei SFP.	40
Tabela 4. 1 – Variáveis necessárias para cada categoria de problemas, por elemento finito, para a lei SIMP e DMO, para 1, 2, 3 e m fases de material sólido.	48
Tabela 4. 2 – Número de variáveis de projeto, n_v , e de constrangimento, n_c , consoante o problema considerado.	52
Tabela 4. 3 – Formulação do problema SMTO, utilizando a densidade artificial como variável de projeto.	53
Tabela 4. 4 – Propriedades do material interpoladas com a lei DMO e SIMP, para SMTO. Leia-se χ como ρ, E e σ .	54
Tabela 4. 5 – Formulação dos problemas MMTO m , utilizando a densidade artificial como variável de projeto.	54
Tabela 4. 6 – Propriedades do material interpoladas com a lei DMO, SIMP e SFP, para MMTO2 e MMTO3. Leia-se χ como ρ, E e σ .	55

Tabela 4. 7 – Formulação do problema SMTO, utilizando a área como variável de projeto.	56
Tabela 4. 8 – Formulação do problema MMTO2, utilizando a densidade artificial e a área como variáveis de projeto.....	57
Tabela 4. 9 – Propriedades do material interpoladas com as leis DMO e SIMP, para MMS2. Leia-se χ como ρ, E e σ	57
Tabela 4. 10 – Formulação do problema MMTO3, utilizando a densidade artificial e a área como variáveis de projeto.	58
Tabela 4. 11 – Propriedades do material interpoladas com a lei DMO e SIMP, para MMS3. Leia-se χ como ρ, E e σ	58
Tabela 4. 12 – Variação dos expoentes de penalização e parâmetro epsilon.	59
Tabela 4. 13 – Parâmetros considerados constantes e respectivos valores	61
Tabela 5. 1 – Sensibilidade da função objetivo em relação às variáveis de projeto.....	64
Tabela 5. 2 – Cálculo de sensibilidades do constrangimento de tensão em relação às variáveis de projeto de densidade e área	68
Tabela 6. 1 – Propriedades das fases de material consideradas.....	73
Tabela 6. 2 – Topologia final dos exemplos em estudo, SMTO, para otimização com (1) densidade e (2) área, separadamente, para cada uma das leis de interpolação, DMO e SIMP.....	77
Tabela 6. 3 – Valor da função objetivo, massa, e redução desta em resultado de se passar da variável de densidade para a variável de área.....	78
Tabela 6. 4 – Topologia e distribuição de material, MMTO2, dos exemplos em estudo, para otimização com (1) densidade e (2) densidade + área, para cada uma das leis de interpolação, DMO e SIMP.....	79
Tabela 6. 5 – Valor da função objetivo, massa, e redução desta em resultado de se passar da variável de densidade para a variável densidade + área.	80

Tabela 6. 6 – Topologia e distribuição de material, MMTO3, dos exemplos em estudo, para otimização com (1) densidade e (2) densidade + área, para cada uma das leis de interpolação, DMO, SIMP e SFP.	81
Tabela 6. 7 – Valor da função objetivo, massa, e redução desta em resultado de se passar da a variável de densidade para a variável densidade + área.....	82
Tabela 6. 8 – Parâmetros constantes da <i>continuation approach</i> utilizada.	83
Tabela 6. 9 – Parâmetros de otimização variáveis utilizados para a lei de interpolação DMO, com a densidade artificial como variável de projeto.....	84
Tabela 6. 10 – Parâmetros de otimização variáveis utilizados para a lei de interpolação SIMP, com a densidade artificial como variável de projeto.....	85
Tabela 6. 11 – Parâmetros de otimização variáveis utilizados para a lei de interpolação SFP, com a densidade artificial como variável de projeto.	85
Tabela 6. 12 – Parâmetros de otimização variáveis utilizados para a lei de interpolação DMO e SIMP, com a densidade artificial e a área como variável de projeto.	87
Tabela 6. 13 – Treliça 10 barras: Distribuição de material, distribuição da violação das tensões admissíveis, valor das áreas das barras e convergência da função objetivo.	89
Tabela 6. 14 – Treliça 11 barras: Distribuição de material, distribuição da violação das tensões admissíveis, valor das áreas das barras e convergência da função objetivo.	90
Tabela 6. 15 – Treliça 21 barras: Distribuição de material, distribuição da violação das tensões admissíveis, valor das áreas das barras e convergência da função objetivo.	91
Tabela 6. 16 – Treliça 26 barras: Distribuição de material, distribuição da violação das tensões admissíveis, valor das áreas das barras e convergência da função objetivo.	92
Tabela 6. 17 – Treliça 36 barras: Distribuição de material, distribuição da violação das tensões admissíveis, valor das áreas das barras e convergência da função objetivo.	93
Tabela 6. 18 – Treliça 110 barras: Distribuição de material, distribuição da violação das tensões admissíveis, valor das áreas das barras e convergência da função objetivo.	94

1. Introdução

1.1 Motivação

O recente desenvolvimento das tecnologias digitais e de fabrico, a diminuição dos recursos naturais e o aumento da consciencialização ambiental traduz-se em enfrentar desafios mais complexos e exigentes no mundo da engenharia. Assim, a otimização estrutural, nos tempos modernos, torna-se pertinente e verdadeiramente útil na procura por soluções construtivas mais eficientes e sustentáveis.

A estrutura reticulada, ou treliça, é o objeto de estudo nesta dissertação e que se pretende otimizar. Esta estrutura é composta por vários membros de geometria retilínea, barras, unidos através das suas extremidades. As barras ficam sujeitas apenas a esforços axiais, de tração ou compressão. Estruturas reticuladas podem ter muitas aplicações, por exemplo, podem ser aplicadas quando se requer uma distribuição de esforços ao longo de distâncias consideráveis (pontes, gruas, chassis, coberturas, etc). No entanto, o projeto deste tipo de estrutura sem qualquer metodologia de otimização pode conduzir a subaproveitamento dos recursos materiais e, conseqüentemente, a soluções mais dispendiosas e ineficientes. Esse desperdício pode ser mitigado intervindo ao nível da variação das áreas das secções transversais das barras e/ou escolhendo racionalmente diferentes materiais para as barras. Isto pode levar a uma solução construtiva mais leve, sem deixar de ser resistente através da introdução de critérios de tensão.

Estruturas de baixo peso, mas resistentes, são especialmente atraentes em aplicações nas indústrias aeronáutica e aeroespacial. A resistência mecânica é um dos requisitos mais usados na prática da engenharia das estruturas. Para tal são aplicados critérios de cedência do material, por exemplo, o critério de von Mises, que pode ser aplicado se o material tiver comportamento elástico e dúctil, que é o caso estudado nesta dissertação. Por conseguinte, no processo de otimização estrutural é importante avaliar a tensão de cada membro estrutural e garantir que este não ultrapassa a tensão de cedência do material de que é construído. Sendo assim, desenvolver no âmbito desta dissertação uma metodologia que permita projetar estruturas, dentro do domínio elástico, mais leves e resistentes terá interesse e relevância na área da engenharia das estruturas.

1.2 Objetivos

Nos últimos anos, os trabalhos desenvolvidos no âmbito da otimização topológica, têm apresentado um crescimento exponencial. Esta é uma área de grande potencial e que, por isso, continua a ter espaço para desenvolvimento e possibilidade de explorar novos desafios. Nesta dissertação são apresentadas metodologias que visam fazer face ao desafio de otimizar uma estrutura reticulada fazendo-se simultaneamente alterações ao nível das dimensões (áreas) e da topologia com seleção ótima de materiais utilizados na sua construção. O problema é formulado como a minimização da massa total da estrutura com constrangimentos de tensão, obtendo-se assim estruturas leves, mas também resistentes.

As metodologias em concreto baseiam-se na formulação do problema de otimização de topologia relaxado para que as variáveis de projeto sejam contínuas. O domínio de projeto baseia-se na definição de uma *ground structure* a partir da qual se procede à identificação das conectividades ótimas, áreas ótimas das barras e escolha ótima de materiais. Consideram-se problemas de estruturas nesta dissertação que podem ter até três fases sólidas, i.e., fases de material, isto para além da caracterização da fase de vazio ou de ausência de material. Para selecionar o material em cada membro estrutural é necessário recorrer a leis de interpolação. Serão apresentadas três destas leis com o intuito de as comparar e concluir sobre a sua eficácia. Após os problemas estarem devidamente formulados, apresentam-se vários exemplos numéricos de complexidade crescente para demonstrar a metodologia proposta nesta dissertação.

Esta dissertação representa uma contribuição para a otimização topológica de estruturas reticuladas nos seguintes diferentes aspetos:

- Incluir as áreas como variáveis de projeto a par das variáveis de seleção de material (otimização topológica multimaterial). Isto favorece a obtenção de estruturas em *fully stressed design*, sem recorrer a pós-processamento de soluções;
- Uso de constrangimentos de tensão que ainda são pouco apresentados na literatura no contexto de otimização topológica multimaterial;
- Aplicação de uma *continuation approach* para alguns dos parâmetros dos quais depende uma boa convergência do algoritmo de otimização e procura-se também encontrar uma uniformização para os valores desses parâmetros de modo a tornar o algoritmo mais independente do problema a resolver;

- Consideração de até três fases de material distintas (sem contar com o vazio) de modo a perceber-se a eficiência de cada uma das três leis de interpolação de material estudadas.

1.3 Estrutura

Esta dissertação encontra-se estruturada em sete capítulos. No presente capítulo é feita uma introdução sobre o tema apresentado.

No Capítulo 2 começa-se por fazer uma breve introdução do que é a otimização estrutural, nomeadamente as suas diferentes categorias. De seguida, aborda-se mais detalhadamente os algoritmos de otimização, dando-se maior ênfase aos utilizados nos problemas apresentados nesta dissertação. Aborda-se a otimização topológica e multimaterial. Nomeadamente, destaca-se o tratamento dos constrangimentos de tensão e também são referidas diferentes leis de interpolação de fases de material conforme apresentadas na literatura.

No Capítulo 3 são detalhadas as três leis de interpolação utilizadas na resolução dos problemas apresentados nesta dissertação. É ainda realizada uma análise comparativa, apresentando as vantagens e desvantagens de cada uma.

No Capítulo 4 são formulados os problemas de otimização com: (1) apenas a variável de densidade; (2) apenas a variável área; (3) ambas as variáveis, densidade e área. Formulam-se ainda estes problemas de modo que se considera, por um lado, apenas uma fase sólida e outra de vazio. Por outro lado, são consideradas duas e três fases sólidas (ou de material), problema multimaterial.

Visto que são utilizados algoritmos baseados no gradiente é necessário proceder ao cálculo das sensibilidades das funções objetivo e dos constrangimentos, o que é apresentado no capítulo 5.

A resolução de seis exemplos numéricos é apresentada no Capítulo 6 para demonstrar a otimização topológica multimaterial proposta.

Por fim, no Capítulo 7, são retiradas conclusões do trabalho desenvolvido e são propostos trabalhos futuros.

2. Estado da Arte

2.1 Introdução

A otimização estrutural tem como propósito otimizar uma medida de desempenho de uma estrutura, **função objetivo**, através da alteração de um conjunto de parâmetros conhecidos como **variáveis de projeto**. Este problema de otimização, não raro, inclui **constrangimentos**, que delimitam um espaço de soluções admissíveis para as variáveis de projeto. A solução ótima é alcançada recorrendo a algoritmos de otimização.

No final do século XIX surgem os primeiros trabalhos sobre a otimização estrutural, publicados por Maxwell [1], em 1890 e por Michell [2], em 1904. No entanto, foi na década de 50, do século XX, que a otimização estrutural conheceu um rápido desenvolvimento devido a três fatores principais: aparecimento dos computadores digitais; desenvolvimento dos métodos numéricos de programação matemática; método dos elementos finitos. Esta tese tira partido destas três valências.

2.1.1 Domínios da Otimização Estrutural

A otimização estrutural divide-se em três categorias: (1) dimensional, (2) de forma e (3) topológica. Dependendo do problema a resolver, as variáveis de projeto utilizadas podem ser do tipo discretas, contínuas, mistas ou booleanas.

Quanto à otimização de dimensões, tipicamente as variáveis de projeto são dimensões geométricas, como as áreas das secções das barras de uma estrutura reticulada, mantendo-se a forma e a topologia.

Em 1970 surgem as primeiras publicações focadas na otimização de forma [3, 4]. Neste tipo de otimização as variáveis estão relacionadas com a definição da fronteira (linha ou superfície) que delimita o domínio Ω ocupado pela estrutura. Apesar de nesta otimização a forma variar, a topologia permanece inalterada.

A otimização topológica é a mais recente das diferentes categorias, tendo surgido, em 1980, os trabalhos de investigação mais relevantes nesta área [1]. Este método consiste, na sua essência, em procurar, a partir de um domínio inicial, zonas de presença

e ausência de material. Assim trata-se de um problema de natureza discreta, sendo que as suas variáveis são do tipo booleano, tomando o valor de 0 (ausência) ou 1 (presença). Por permitir uma maior liberdade de projeto, as soluções alcançadas por otimização topológica podem ser as que melhores resultados apresentam. Dorn *et al.* [5], em 1967, introduziu uma nova metodologia para otimização de estruturas reticuladas designada *Ground Structure Approach*. A ideia consiste em construir uma estrutura do tipo reticulada (treliça), partindo da definição de um certo número de nós que se conectam entre si através de elementos do tipo barra ou viga. Este método utiliza variáveis do tipo booleanas onde o 0 representa a ausência de conectividade e o 1 a conectividade entre dois nós. Relativamente às conectividades, podem-se considerar apenas as dentro do mesmo quadrado representativo, ou então todas as possíveis, como representado na Figura 2.1.

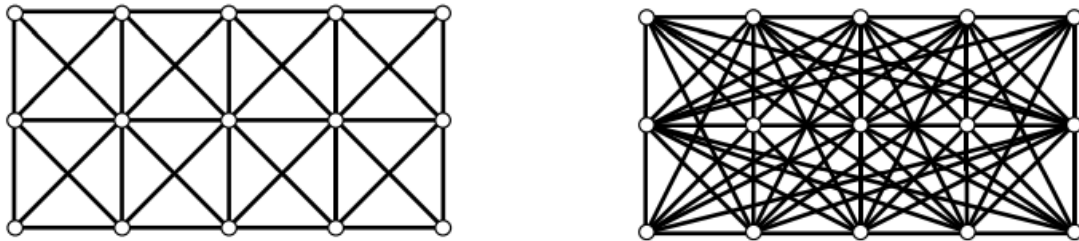


Figura 2. 1 – Exemplos de *Ground Structure*. À esquerda algumas conectividades. À direita todas as conectividades possíveis. Adaptado de [6].

No final da década de 1980 surge o trabalho pioneiro de Bendøe & Kikuchi [7], onde foi apresentada a otimização topológica recorrendo ao método da homogeneização, que resolve de forma contínua o problema de otimização de topologia que é na sua génese discreto. Este método preenche o domínio Ω com material poroso cujo valor da densidade está compreendido no intervalo contínuo $[0,1]$. O valor 0 identifica vazio, o valor 1 identifica material sólido e qualquer outro valor, intermédio, corresponde a um material poroso.

Para além das categorias principais de otimização abordadas anteriormente, surge ainda a otimização de seleção de material (multimaterial), que consiste em encontrar a distribuição ótima de material numa estrutura. Esta otimização vem usualmente também aliada a uma variação de topológica, sendo que o objetivo neste caso deixa de ser apenas o de identificar zonas de sólido e vazio, mas passa a ser também o de escolher o material que melhor se adequa a cada zona ocupada pela estrutura.

O projeto de otimização moderno tem-se tornado cada vez mais complexo devido às crescentes exigências no mundo da engenharia. Com a diminuição dos recursos naturais e o aumento da preocupação ambiental, os governos e consumidores procuram alternativas mais eficientes a nível energético e monetário. Levando em conta as indústrias aeronáutica, aeroespacial e automóvel, existe a preocupação de reduzir o peso dos componentes de modo a reduzir tanto o consumo de combustível como as emissões de carbono. Assim, o projeto de estruturas pode tirar vantagem de se aplicar otimização nomeadamente de topologia e esta aliada a variação de forma ou dimensões. Por exemplo, na DTU (Danish Technical University) um grupo de investigadores realizou várias otimizações de topologia que resultaram nas estruturas ótimas que se apresentam no website <https://www.topopt.mek.dtu.dk/>.

Por exemplo, o projeto das nervuras de bordo de ataque e das portas de fuselagem do Airbus A380 foi desenvolvido variando a topologia com o objetivo de minimizar a *compliance* (flexibilidade), com constrangimentos de deslocamento, tensão e encurvadura. Para tal foi utilizado software de otimização e no final obteve-se uma estrutura 40% mais leve que a tradicional [8], ver Fig 2.2a. No projeto do automóvel *Jaguar* o design exterior foi definido com base na sua estética, e foi realizada posteriormente a otimização topológica, ver Fig. 2.2b.

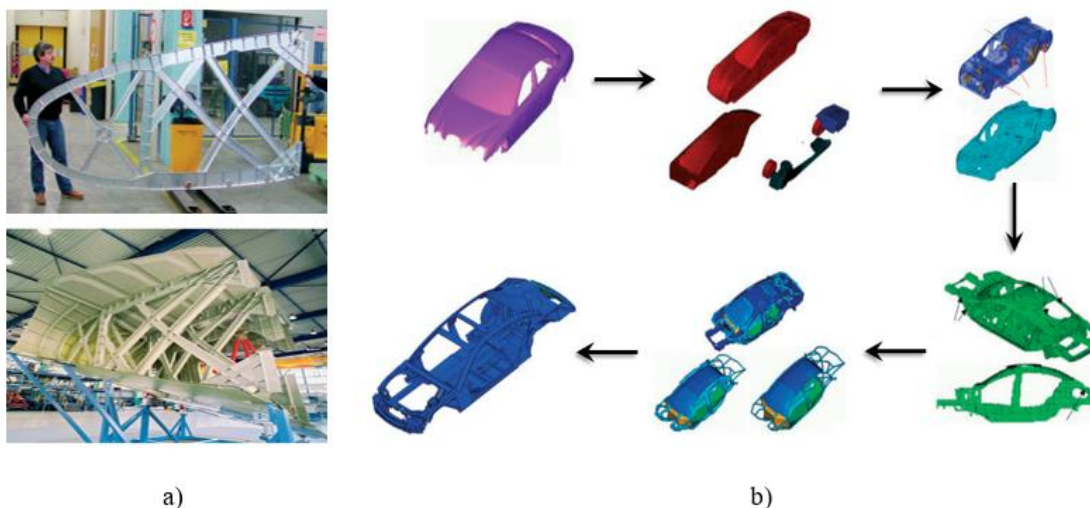


Figura 2. 2 – a) Reforços do bordo de ataque e fuselagem interna de uma porta de um Airbus A380. b) Projeto do automóvel de Jaguar Cars Ltd [52].

Muito recentemente, em 2019, Lu *et al.* [9] aplicaram otimização multimaterial à estrutura de um autocarro, utilizando variáveis de projeto para seleção de material, topologia e dimensão e dois tipos de constrangimentos, rigidez e frequências naturais,

com o objetivo de reduzir a sua massa. A resistência não foi utilizada como critério de projeto. No entanto, otimizar simultaneamente material, topologia e dimensões já tem um elevado custo computacional pelo que foram resolvidos nesse trabalho dois subproblemas. Primeiro, procedeu-se a otimização topológica multimaterial e, depois, fez-se otimização dimensional. Na primeira otimização, os autores conseguiram reduzir a massa 39,65%, onde 19 das 358 vigas iniciais foram removidas, e algumas passaram a ser de alumínio. Na segunda otimização, os autores partiram da solução ótima encontrada no primeiro problema e otimizaram a secção das vigas conseguindo reduzir ainda mais a massa anterior em 39,47%. O resultado obtido encontra-se na Figura 2.3.

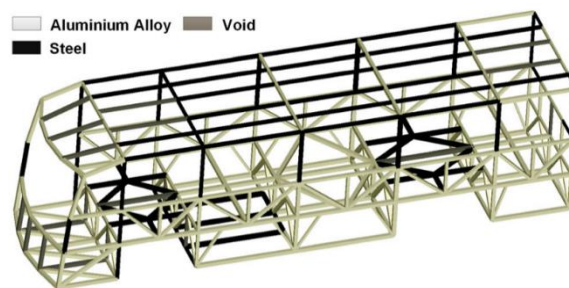


Figura 2. 3 – Estrutura reticulada (interna) de um autocarro obtida através de otimização topológica multimaterial [9].

Também em 2019, Jung *et al.* [10] realizou uma otimização multimaterial para um autocarro elétrico que tinha a necessidade de suportar o conjunto de baterias no seu tejadilho, tendo como objetivo reduzir a massa. Os autores concluíram que utilizando uma solução multimaterial, com aço e alumínio, obtinham um design 8% mais leve do que a solução utilizando apenas um material.

Este conjunto de exemplos mostra como é pertinente utilizar a otimização, nomeadamente topológica e de seleção de material aliada à variação de dimensões de membros estruturais, para conseguir benefícios significativos nas soluções estruturais encontradas para vários tipos de aplicações. O enfoque desta tese é precisamente na aplicação deste tipo de otimização que permite seleção de material, topologia e dimensões fazendo-o de forma concorrente e acrescentando critérios de tensão.

2.1.2 Formulação de Problemas de Otimização

Matematicamente e, em termos gerais, um problema de otimização estrutural apresenta a seguinte formulação *standard*:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & f(\mathbf{x}) \\ \text{s. a} \quad & \begin{cases} g_j(\mathbf{x}) \leq 0 & ; j = 1, \dots, m \\ h_k(\mathbf{x}) = 0 & ; k = 1, \dots, p \\ \bar{x}_i \leq x_i \leq \underline{x}_i & ; i = 1, \dots, n \end{cases} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Onde, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ é o vetor das n variáveis de projeto, $f(\mathbf{x})$ a função objetivo, $g_j(\mathbf{x})$ os m constrangimentos de desigualdade e $h_k(\mathbf{x})$ os p constrangimentos de igualdade. \bar{x}_i e \underline{x}_i são os limites superiores e inferiores das variáveis de projeto, respetivamente. Como se pode ver na Tabela 2.1, existem vários problemas de otimização que podem ser formulados consoante o objetivo/constrangimento(s) do problema a resolver.

Tabela 2. 1 – Exemplos de possíveis variáveis de projeto, função objetivo e constrangimentos. Adaptado de [11].

Variáveis de projeto	Função objetivo	Constrangimentos
Dimensão: Área de secções transversais;	Peso	Deslocamento
Dimensões variáveis num intervalo contínuo	Rigidez	Tensão
Forma: Coordenadas nodais	Frequência natural	Frequência natural
Topologia: Conectividade entre nós;	Estabilidade	Carga crítica
Densidade variável de material.	Custo	Fiabilidade
	...	Volume
		...

2.2 Algoritmos de Otimização

Os métodos numéricos, como o método dos elementos finitos, potenciados graças ao surgimento dos computadores digitais, permitem a resolução de problemas complexos de otimização relevantes na prática da engenharia. A otimização aliada ao método dos elementos finitos é uma ferramenta poderosa de cálculo automático de estruturas. Isto quer dizer que, uma otimização implica realizar uma série de análises de elementos finitos onde um algoritmo modifica de forma iterativa valores das variáveis de projeto associadas ao modelo numérico com vista à melhoria de uma medida de desempenho estrutural. Algoritmos de otimização dividem-se em duas categorias principais: (1) baseados no gradiente e (2) não baseados no gradiente, conforme detalhado em baixo.

2.2.1 Métodos de otimização baseados no gradiente

Estes são os métodos conhecidos por programação matemática. Exigem que o espaço de projeto seja convexo, fechado e limitado, e que as funções objetivo e constrangimentos sejam contínuas e diferenciáveis (pelo menos uma vez), o que se traduz numa limitação na aplicação a alguns problemas da vida real, aqueles que poderão ser de natureza discreta (ou não contínua). Contudo, estes métodos são bastante eficientes na pesquisa do ponto ótimo, na classe de problemas em que puderem ser aplicados.

Tipicamente, neste métodos, começa-se por identificar um ponto de partida do espaço de projeto que representa uma estimativa inicial do ponto ótimo e realiza-se uma análise da função objetivo e constrangimentos. Os resultados obtidos são avaliados e procede-se a tantas iterações quantas necessárias até que sejam satisfeitas as condições de optimalidade de KKT (Karoush-Kuhn Tucker). Em cada iteração, o algoritmo examina uma vizinhança do ponto de projeto atual e são avaliadas as funções objetivo e dos constrangimentos bem como o declive e a curvatura dessas mesmas funções. O algoritmo utiliza esta informação para escolher um novo ponto no espaço de projeto (ou das soluções admissíveis) que melhore a função objetivo.

Alguns exemplos de métodos baseados no gradiente de programação matemática (não linear) são os seguintes: Método do Declive mais Acentuado; Método do Gradiente Conjugado; Método de Newton; Algoritmo de Programação Linear Sequencial; Método de Programação Quadrática Sequencial (SQP); Método das Direções Admissíveis;

Método das Assíntotas Móveis (MMA). Este último foi o algoritmo escolhido para resolver os problemas apresentados nesta dissertação, pelo que será abordado de seguida de forma mais detalhada.

Em 1987, Svanberg [12] propõe o Método das Assíntotas Móveis (MMA – *Method of Moving Asymptotes*). Este algoritmo resolve o problema de otimização original aproximando-o através de uma sequência de subproblemas mais simples, com propriedades atraentes de convexidade e separabilidade. Com o decorrer das iterações a solução destes subproblemas deve convergir para a solução do problema original.

Para melhor detalhar o MMA, o subproblema de otimização que este método resolve está enunciado em (2.2) e também pode ser visto em [13], com m constrangimentos e n variáveis de projeto, sendo estas $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)^T$ e z .

$$\begin{aligned} \min \quad & f_0(\mathbf{x}) + a_0 z + \sum_{i=1}^m \left(c_i y_i + \frac{1}{2} d_i y_i^2 \right) \\ \text{s. a} \quad & \begin{cases} f_i(\mathbf{x}) - a_i z - y_i \leq 0 & ; i = 1, \dots, m \\ x_j^{\min} \leq x_j \leq x_j^{\max} & ; j = 1, \dots, n \\ y_i \geq 0 & ; i = 1, \dots, m \\ z \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.2)$$

As funções $f_0(\mathbf{x})$ e $f_i(\mathbf{x})$ representam as funções objetivo e dos constrangimentos originais, respetivamente, e são funções reais, contínuas e diferenciáveis. A variável \mathbf{x} é a variável de projeto original, sendo \mathbf{y} e z variáveis artificiais criadas pelo algoritmo. Os parâmetros a_0 , a_i , c_i e d_i são valores reais, e devem satisfazer as condições $a_0 > 0$, $a_i \geq 0$, $c_i \geq 0$, $d_i \geq 0$ e $c_i + d_i > 0$.

Em cada iteração k o MMA cria um subproblema onde as funções originais $f_0(\mathbf{x})$ e $f_i(\mathbf{x})$ são substituídas pelas funções de aproximação (convexas) $\tilde{f}_0^{(k)}(\mathbf{x})$ e $\tilde{f}_i^{(k)}(\mathbf{x})$, ver (2.3). Estas novas funções são assintóticas e são definidas a partir da informação do gradiente das funções originais na iteração atual, mas também levando em conta informação das iterações anteriores (histórico de otimização). Partindo do ponto $(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{y}^{(k)}, z^{(k)})$, resolve-se o subproblema e a solução ótima da interação k torna-se o ponto de partida da iteração seguinte, $(\mathbf{x}^{(k+1)}, \mathbf{y}^{(k+1)}, z^{(k+1)})$, e assim sucessivamente.

$$\begin{aligned}
\min \quad & \tilde{f}_0^{(k)}(\mathbf{x}) + a_0 z + \sum_{i=1}^m \left(c_i y_i + \frac{1}{2} d_i y_i^2 \right) \\
\text{s. a} \quad & \begin{cases} \tilde{f}_i^{(k)}(\mathbf{x}) - a_i z - y_i \leq 0 & ; i = 1, \dots, m \\ \alpha_j^{(k)} \leq x_j \leq \beta_j^{(k)} & ; j = 1, \dots, n \\ y_i \geq 0 & ; i = 1, \dots, m \\ z \geq 0 \end{cases} \quad (2.3)
\end{aligned}$$

Em (2.3) os limites $\alpha_j^{(k)}$ e $\beta_j^{(k)}$ asseguram que as variáveis de projeto podem variar dentro de um intervalo onde não se encontra nenhuma assíntota da função de aproximação. O parâmetro c_i penaliza a função objetivo de modo a que os constrangimentos sejam satisfeitos. No entanto, uma penalização demasiado elevada pode provocar instabilidades numéricas, prejudicando a convergência do algoritmo. Assim, a escolha de valores de c_i deve ser criteriosa, começando-se geralmente com um valor baixo e, depois, se esse não for suficiente para permitir que os constrangimentos sejam satisfeitos, então aumenta-se o seu valor.

2.2.2 Métodos de Otimização não baseados no gradiente

Apesar dos métodos baseados no gradiente serem bastante eficientes, na classe de problemas que conseguem resolver (contínuos e diferenciáveis), convém chamar a atenção para problemas de engenharia onde surge a necessidade de utilizar métodos capazes de resolver problemas discretos e mistos, i.e. com funções e/ou variáveis cuja continuidade e diferenciabilidade não são garantidas (não é o caso desta tese que resolve problemas no contínuo).

Entre os métodos não baseados no gradiente encontram-se as meta-heurísticas, capazes de procurar soluções quase ótimas a custo computacional razoável [14]. No entanto, estes métodos de pesquisa são comparativamente menos exatos. As meta-heurísticas são processos iterativos de geração de soluções, a partir de uma pesquisa numa vizinhança de soluções promissoras. Apesar de serem classificadas como métodos de otimização local, existem várias estratégias que se podem aplicar com a vantagem de escapar a ótimos locais e continuar o processo iterativo. No entanto, o alcance do ótimo global nunca é garantido, e o processo de avaliação da função objetivo nos vários pontos do domínio traduz-se muitas vezes em custos computacionais elevados pois torna-se

necessário muitas avaliações da função objetivo. *Tabu Search*, *Simulated Annealing*, *Genetic Algorithms*, *Evolutionary Methods*, *Scatter Search*, *Neural Networks*, *Variable Neighborhood Search* e *Ant Colonies* são alguns exemplos de meta-heurísticas encontradas na literatura.

2.2.3 Análise de Sensibilidades

Esta análise consiste no cálculo da sensibilidade (ou variação) de uma função em relação à variação das variáveis de projeto. Pode recorrer-se essencialmente a dois métodos para cálculo das sensibilidades: analítico (exato) ou diferenças finitas. O primeiro é mais elaborado ou trabalhoso matematicamente. O segundo é muito simples de implementar. O custo computacional ou de implementação associado à resolução de um problema de otimização deve-se em grande medida ao cálculo das sensibilidades, pelo que é essencial para cada problema ponderar que método usar no cálculo das sensibilidades. O desenvolvimento deste subcapítulo é baseado no livro de Haug *et al.* [15].

2.2.3.1 Métodos Analíticos

Na maioria das formulações dos problemas de otimização estrutural leva-se em conta que o domínio da estrutura encontra-se discretizado por elementos finitos. Assim, por exemplo, o problema de elementos finitos requerido para a análise estática de uma estrutura resume-se a um sistema de equações que pode escrever-se no seguinte formato matricial:

$$\mathbf{K}(x)\mathbf{u} = \mathbf{f}(x) \quad (2.4)$$

A variável x é a variável de projeto. Na verdade, com interesse prático, escrever-se-ia vetor, \mathbf{x} , das variáveis de projeto, mas para simplificar considera-se nesta secção apenas como se se tivesse uma variável de projeto. $\mathbf{K}(x)$ é a matriz de rigidez global, $\mathbf{f}(x)$ o vetor de cargas aplicadas e \mathbf{u} o vetor dos deslocamentos. Assumindo então uma formulação de elementos finitos, i.e., observando as equações da elasticidade na forma discretizada em vez de contínua, mostram-se de seguida as expressões para a sensibilidade de funções utilizando o método discreto de derivação das equações em vez do método contínuo (este último não assumiria qualquer discretização das equações).

Considere-se assim uma função genérica Ψ em (2.5) que representa um objetivo ou constrangimento no problema de otimização, por exemplo, pode representar a função da tensão numa estrutura. Note-se que Ψ é, na verdade, um funcional pois é uma função de funções, i.e., neste caso é uma função da variável x e da função \mathbf{u} dependente de x .

$$\Psi = \Psi(x, \mathbf{u}(x)) \quad (2.5)$$

A dependência da função Ψ na variável x é de dois tipos. A dependência é explícita pois, por um lado, esta variável figura na função Ψ de forma independente. Por outro lado, a dependência é implícita pois a função Ψ varia com uma função \mathbf{u} , chamada também de variável dependente, que é solução do problema de equilíbrio em (2.4) e que, por sua vez, depende de x . Pretende-se então calcular a dependência ou derivada total da função Ψ relativamente às variáveis de projeto x , $d\Psi/dx$.

Utiliza-se a regra da cadeia para escrever a derivada total, que contempla a dependência explícita e implícita da função Ψ relativamente à variável de projeto.

$$\frac{d\Psi}{dx} = \frac{\partial\Psi}{\partial x} + \frac{\partial\Psi}{\partial \mathbf{u}} \frac{d\mathbf{u}}{dx} \quad (2.6)$$

A dependência explícita da função, $\partial\Psi/\partial x$, é normalmente fácil de obter através da derivada analítica simples. A maior dificuldade reside no cálculo da parte implícita (2º termo) nomeadamente a derivada $d\mathbf{u}/dx$. Derivando a equação (2.4) em ordem a x , resolvendo-a em ordem a $d\mathbf{u}/dx$ e substituindo na equação (2.6), obtém-se:

$$\frac{d\Psi}{dx} = \frac{\partial\Psi}{\partial x} + \frac{\partial\Psi}{\partial \mathbf{u}} \left(\mathbf{K}^{-1}(x) \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{K}(x)}{\partial x} \mathbf{u} \right] \right) \quad (2.7)$$

No entanto, o cálculo direto da matriz de rigidez inversa, $\mathbf{K}^{-1}(x)$, é impraticável, o que põe em causa a utilidade da equação (2.7). Contudo, existem dois métodos que podem ser utilizados para contornar esta dificuldade: (1) método da diferenciação direta e (2) método adjunto.

Método da diferenciação direta:

Faz-se a diferenciação em ordem a x de ambos os membros na equação de equilíbrio (2.4) pelo que depois é obtida a solução \mathbf{du}/dx através da resolução do seguinte sistema de equações:

$$\mathbf{K} \left(\frac{d\mathbf{u}}{dx} \right) = \mathbf{q}, \quad \text{onde } \mathbf{q} = \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x} \mathbf{u} \right) \quad (2.8)$$

Resolvendo a equação (2.8) em ordem a \mathbf{du}/dx , substitui-se o resultado depois na equação anterior (2.6).

O custo computacional deste método reside essencialmente no facto de ser necessário resolver o sistema de equações (2.8) para cada variável de projeto, existindo mais do que uma variável de projeto. Assim, num problema com n variáveis é necessário resolver n sistemas de equações.

Método adjunto:

Este método consiste em definir um vetor ou variável adjunto(a) $\boldsymbol{\lambda}$, solução do seguinte sistema de equações (problema adjunto):

$$\mathbf{K}(x)\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{z}, \quad \text{onde } \mathbf{z} = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{u}} \right)^T \quad (2.9)$$

Onde \mathbf{z} é denominado *dummy-load vector* (vetor de carga fictícia). Cada entrada deste vetor corresponde à derivada da função Ψ relativamente aos deslocamentos, u_i . Resolvendo a equação (2.9) em ordem à variável adjunta e substituindo o seu resultado em (2.7) obtém-se:

$$\frac{d\Psi}{dx} = \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \boldsymbol{\lambda}^T \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{K}(x)}{\partial x} \mathbf{u} \right] \quad (2.10)$$

Neste caso, a nível de custo computacional, o método exige a definição de um vetor adjunto e, por conseguinte, a solução de um problema adjunto por cada função diferente do tipo Ψ que figurar na formulação do problema de otimização. Supondo que o problema contenha m constrangimentos dados por funções deste tipo então, para cada

constrangimento é necessário resolver um problema adjunto resultando num total de m problemas adjuntos (ou sistemas de equações) do tipo (2.9) para resolver.

Em face do exposto, pode concluir-se que quando $n < m$ é preferível usar o método de diferenciação direta, enquanto para $n > m$ o método adjunto. Em problemas onde $n \simeq m$, os métodos mostram-se igualmente eficientes. Contudo, em termos práticos, um engenheiro projetista pode levar em conta, de entre todos os constrangimentos com funções do tipo Ψ figurando na formulação do problema, apenas aqueles que são críticos (i.e., que estão ativos ou próximos de estarem ativos). Neste último cenário, justificar-se-ia então usar o método adjunto porque $m^{crit} < (m \simeq n)$.

Quando é necessário considerar vários casos de carga, LC , o custo associado a cada um dos métodos aumenta proporcionalmente com LC . No entanto, considerando novamente apenas os constrangimentos críticos, mesmo com $LC \cdot m$ constrangimentos verifica-se a condição $m^{crit} \ll LC \cdot m \simeq LC \cdot n$. Perante este cenário, é preferível a utilização do método adjunto.

Finalmente, conforme mostrado adiante nesta tese, a possibilidade de seleção de múltiplos materiais para a estrutura requer o aumento do número n de variáveis do problema mantendo-se o número m de constrangimentos. Portanto, isto é claramente a favor da utilização do método adjunto no contexto de otimização de topologia com seleção de material e com constrangimentos de tensão.

2.2.3.2 Métodos das Diferenças Finitas

Os métodos referidos anteriormente requerem a solução do sistema de equações (2.8) e (2.9) que se percebe que tem impacto a nível do custo computacional. Contudo, a forma fatorizada da matriz \mathbf{K} está disponível na solução dessas equações. Assim, o valor aproximado de $d\mathbf{u}/dx$ pelo método de diferenças finitas progressivas é dado por:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dx} \approx \frac{\mathbf{u}(x + \Delta x) - \mathbf{u}(x)}{\Delta x} \quad (2.11)$$

Onde se avalia o valor do deslocamento $\mathbf{u}(x + \Delta x)$ resolvendo a seguinte equação de equilíbrio:

$$\mathbf{K}(x + \Delta x)\mathbf{u}(x + \Delta x) = \mathbf{f}(x + \Delta x) \quad (2.12)$$

No entanto, o custo computacional associado a calcular a factorização da matriz de rigidez é mais elevado do que utilizar a matriz rigidez obtida em (2.8) e (2.9). O problema é também muito dependente da escolha do valor de Δx . Caso este seja muito reduzido pode causar problemas de instabilidade numérica e caso seja muito elevado podem levar a aproximações grosseiras no cálculo das sensibilidades. Posto isto, só compensa utilizar este método quando o número de variáveis de projeto é bastante reduzido, o que não é o caso nesta dissertação.

2.3 Otimização Topológica

Como abordado anteriormente, a otimização topológica consiste em procurar dentro de um domínio de projeto zonas de presença e ausência de material. Assim trata-se de um problema de natureza discreta, pois as suas variáveis tomam o valor de 0 ou 1 para identificar ausência ou presença de material, respetivamente. Sendo as variáveis de natureza discreta seria necessário recorrer a algoritmos não baseados no gradiente para resolver problemas de otimização topológica. Contudo, a utilização destes métodos é ineficiente para um elevado número de variáveis de projeto. Com o intuito de solucionar este problema foram desenvolvidas técnicas que permitem reformular o problema de otimização de topologia de modo a que este passe a estar definido no contínuo. Transformam-se as variáveis do problema original, do tipo discreto, em variáveis contínuas, possibilitando-se assim a utilização de métodos de programação matemática.

O trabalho de Bendsøe & Kikuchi, em 1988 [7] foi pioneiro na introdução de um modelo de material compósito poroso em otimização de topologia, onde se utiliza uma distribuição de material com densidade variável, sendo esta densidade definida como uma variável de projeto contínua. Para além deste método, conhecido como o método de homogeneização, surgiram alternativas baseadas na penalização de valores intermédios da variável de densidade. Destaca-se o método SIMP (*Solid Isotropic Material with Penalization*), proposto por Bendsøe em 1989 [16], um dos mais populares que utilizam a variável densidade. Outro método é o RAMP (*Rational Approximation of Material Properties*) [17]. Para além destes métodos baseados na variável de densidade, existem outros métodos usados para otimização topológica como o *level-set method* (LSM), o *phase-field method* (PFM), o método baseado na variável topológica, entre outros [18].

De seguida, apresenta-se a génese do problema de otimização topológica. Depois é apresentado o método baseado na variável de densidade para resolver problemas de otimização topológica no contínuo. Posteriormente, observa-se como os constrangimentos de tensão são tratados em otimização de topologia e, por último, aborda-se a otimização topológica multimaterial sendo apresentadas diferentes leis de interpolação de material conforme encontradas na literatura.

2.3.1 Formulação do problema discreto

A relação entre o tensor das tensões, σ_{ij} , e o tensor das deformações, ε_{kl} , é dada pela seguinte lei constitutiva do material (Lei de Hooke generalizada):

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad (2.13)$$

Onde E_{ijkl} é o tensor da elasticidade ou rigidez, de 4ª ordem, e os seus coeficientes são uma medida de como as propriedades do material dependem das direções espaciais. Considerando materiais isotrópicos com comportamento linear elástico, existem apenas duas constantes independentes a fornecer ao tensor para que este fique completamente definido. Estas constantes são o módulo de Young, E , e o coeficiente de Poisson, ν . Em particular, a análise de cada barra de uma treliça permite usar uma relação entre a tensão e a deformação ainda mais simplificada pois ambas podem estar apenas definidas na direção axial, i.e., eixo da barra, sendo o módulo de Young a constante elástica que as relaciona.

Considere-se agora um domínio de projeto Ω , o qual poderá estar ocupado com um determinado volume fixo de material, V^* . Portanto, dentro deste domínio reconhecem-se dois subdomínios, um de material Ω^{mat} e outro de vazio Ω^{vaz} , onde $\Omega = \Omega^{\text{mat}} \cup \Omega^{\text{vaz}}$. A solução ótima será a escolha do tensor de rigidez $E_{ijkl}(\mathbf{s})$, ao longo de todo o domínio Ω , que minimiza uma dada função objetivo, sendo \mathbf{s} a variável de posição espacial. Por outras palavras, pretende-se descobrir a que subdomínio pertence cada ponto \mathbf{s} do domínio inicial Ω [16].

A resolução deste problema de distribuição de material realiza-se tipicamente de forma iterativa com recurso a análises computacionais, i.e., discretizando o domínio do problema em NE elementos finitos e correndo uma série de análises de elementos finitos.

Introduz-se assim uma função degrau $\varphi(\mathbf{s})$ (2.14), que atribui a um dado elemento finito e , a existência ou ausência de material.

$$\varphi(\mathbf{s}) = \begin{cases} 1, & \text{se } \mathbf{s} \in \Omega^{mat} \\ 0, & \text{se } \mathbf{s} \in \Omega^{vaz} \end{cases} \quad (2.14)$$

O tensor de rigidez admissível, designado aqui de forma simplificada por E_e e que se assume constante no elemento finito e , é dependente do valor da função degrau no elemento e , φ_e , de acordo com (2.15).

$$E_e = E^0 + \varphi_e(E^1 - E^0) \quad (2.15)$$

Onde E^1 representa o tensor de rigidez de um material sólido isotrópico e E^0 representa uma rigidez muito baixa atribuída à fase de vazio.

O problema está ainda sujeito a um valor máximo de volume de material que pode ser usado dentro do domínio Ω , V^* . Assim, o volume de Ω ocupado com material, $|\Omega^{mat}|$, pode ser calculado através de (2.16), onde $|\Omega|_e$ representa o volume do elemento finito e .

$$|\Omega^{mat}| = \sum_{e=1}^{NE} \varphi_e |\Omega|_e \leq V^* \quad (2.16)$$

O problema da elasticidade, de equilíbrio, pode ser apresentado na forma discretizada através do sistema de equações (2.17).

$$\mathbf{K}(\mathbf{E}_e(\varphi_e))\mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad \text{onde } \mathbf{K}(\mathbf{E}_e(\varphi_e)) = \sum_{e=1}^{NE} \mathbf{K}_e(\mathbf{E}_e(\varphi_e)) \quad (2.17)$$

Onde \mathbf{u} é o vetor dos deslocamentos nodais e \mathbf{f} o vetor das cargas aplicadas. A matriz de rigidez global do sistema \mathbf{K} , depende da rigidez no elemento e , \mathbf{E}_e , e é obtida a partir da assemblagem das matrizes de rigidez de cada elemento, \mathbf{K}_e .

Como exemplo de problema de otimização de topologia, considere-se o problema clássico de minimização da *compliance*, \mathcal{C} , com constrangimento de volume, V^* , ver (2.18). Este problema procura encontrar a estrutura mais rígida, ou com menor valor global de energia de deformação, para um determinado conjunto de cargas e condições de apoio previamente definidas.

$$\begin{aligned}
& \min_{\varphi_e} && C = \mathbf{f}^T \mathbf{u} \\
& s. a && \begin{cases} \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}, \mathbf{K} = \mathbf{K}(\mathbf{E}_e(\varphi_e)) \\ \sum_{e=1}^{NE} \varphi_e |\Omega|_e - V^* \leq 0 \\ \varphi_e \in \{0,1\} \end{cases} \quad (2.18)
\end{aligned}$$

Este problema (2.18) pode ser resolvido recorrendo a algoritmos de otimização que lidam com variáveis do tipo discretas. No entanto, como referido anteriormente, estes métodos podem tornar-se desinteressantes dada a dimensão elevada do problema a resolver sendo assim preferível recorrer antes a algoritmos baseados no gradiente. Para isso relaxa-se o problema (2.18) ao contínuo conforme mostrado na secção seguinte.

2.3.2 Formulação do problema relaxado

O problema formulado no contínuo enuncia-se da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
& \min_{x_e \in]0,1]} && C = \mathbf{f}^T \mathbf{u} \\
& s. a && \begin{cases} \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}, \mathbf{K} = \mathbf{K}(E_e(x_e)) \\ \sum_{e=1}^{NE} x_e |\Omega|_e - V^* \leq 0 \end{cases} \quad (2.19)
\end{aligned}$$

A transformação de um problema discreto num problema contínuo faz-se com recurso à introdução de variáveis de densidade artificial, x_e .

A relaxação do problema de otimização de topologia a variáveis contínuas, como a densidade, permitirá a utilização de algoritmos baseados no gradiente.

A função degrau anterior φ_e , de carácter discreto, é substituída por uma função contínua. Esta função depende de uma variável de densidade fictícia x_e que toma valores no intervalo entre 0 e 1. Valores intermédios de densidade corresponderiam a soluções de material de rigidez intermédia que não fazem parte da solução discreta do problema e, por isso, para garantir que a solução do problema contínuo é análoga à solução do

problema discreto, aplicam-se estratégias de penalização que devem desfavorecer a seleção dos valores intermédios. Por exemplo, a estratégia de penalização SIMP (*Solid Isotropic Material with Penalization*) é uma das mais populares e eficientes utilizadas na otimização topológica, ver Bendsøe [16]. Esta estratégia é uma lei de potência, i.e., utiliza a variável contínua de densidade levantada a um expoente p conforme se observa em (2.20).

$$E_e = E^0 + x_e^p(E^1 - E^0), \quad \text{onde } \begin{cases} p \geq 1 \\ x_e \in]0,1] \\ E^1 > E^0 \geq 0 \end{cases} \quad (2.20)$$

Em (2.20) E^1 e E^0 mantêm o significado conforme visto na equação anterior (2.15). A variável x_e não pode tomar o valor nulo para evitar problemas de singularidade do modelo de elementos finitos, a menos que E^0 não seja mesmo zero. Quanto ao expoente de penalização p , este toma um valor superior a 1 para tornar a escolha de valores intermédios menos vantajosa. Escolhendo um expoente grande o suficiente (usualmente $p \geq 3$), mas não tão elevado que resulte em instabilidades numéricas, é possível obter soluções muito próximas das discretas. Observe-se na Figura 2.4 a relação entre as propriedades do material e a variável densidade (2.20) consoante o valor de p .

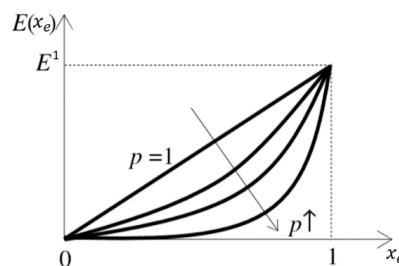


Figura 2. 4 – Relação entre as propriedades de material e a variável densidade artificial, consoante a penalização da lei SIMP. Adaptado de [43].

2.3.3 Constrangimento de tensão

O critério de falha do material utilizado no âmbito desta dissertação é o critério de von-Mises. No entanto, a imposição dos constrangimentos de tensão na formulação dos problemas de otimização de estruturas reticuladas representa um grande desafio [19]. De facto, verifica-se em otimização topológica que existem muito menos trabalhos publicados onde se apliquem constrangimentos de tensão do que aqueles onde apenas se

otimiza a rigidez com constrangimento de volume, problema clássico em otimização topológica [20].

A natureza local dos constrangimentos de tensão traduz-se num elevado custo computacional, pois não se conhece à partida em que pontos do domínio a tensão é crítica. Assim, num cenário extremo, pode ser necessário aplicar os constrangimentos em todos os pontos do domínio, pelo menos numa fase inicial do processo iterativo da otimização. Em termos de formulação de elementos finitos, este cenário significa ter tantos constrangimentos quanto o número de variáveis de projeto, assumindo densidade e tensão constantes em cada elemento finito.

A variação da tensão no domínio da estrutura pode também ser altamente não linear, o que normalmente acontece, sobretudo, em regiões com furos ou variações bruscas de geometria. Para melhor captar os valores da tensão, que são críticos quando associados a estas regiões, é importante aplicar refinamento da malha de elementos finitos o que se traduz também num aumento do custo computacional.

Na sua forma mais geral, e normalizada, um constrangimento de tensão é definido de acordo com a equação (2.21).

$$g = \frac{\sigma_e}{\bar{\sigma}_e} - 1 \leq 0 \quad (2.21)$$

Em (2.21) σ_e e $\bar{\sigma}_e$ são a tensão lida e a tensão admissível no elemento e , respetivamente. No entanto, no caso de membros estruturais como as barras de uma treliça, as tensões podem variar de sinal dependendo se a barra está sujeita a compressão ou tração. Poder-se-ia pensar em aplicar a função módulo em (2.21) para evitar variação de sinal, mas as funções do problema a tratar devem ser contínuas e diferenciáveis em todos os pontos do domínio para serem utilizados algoritmos de otimização baseados no gradiente [27]. Para se ter a garantia de continuidade e diferenciabilidade utiliza-se a função quadrado da tensão, ficando o constrangimento definido de acordo com a equação (2.22).

$$g = \left(\frac{\sigma_e}{\bar{\sigma}_e} \right)^2 - 1 \leq 0 \quad (2.22)$$

Com este tipo de constrangimentos surgem também os problemas de singularidade [19]. Uma solução ótima singular corresponde a um ponto singular no espaço de projeto

que é muito difícil ou impossível de alcançar utilizando os métodos baseados no gradiente [21], uma vez que esta se situa numa zona degenerada no espaço de soluções admissíveis. Este fenómeno foi demonstrado pela primeira vez em 1968 por Sved & Ginos [22] e mais tarde por Kirsch [23] e prende-se com o facto da solução ótima estar conectada ao resto do espaço de projeto por variáveis com valores perto de zero, que correspondem a ausência de material [24, 25, 26]. Pode observar-se este efeito na Figura 2.5 onde a área a sombreado representa o espaço de projeto, e A_1 e A_2 as variáveis de projeto que podem variar entre 0 e 2. O ponto D, onde $(A_1, A_2) = (1, 0)$, é o ótimo singular.

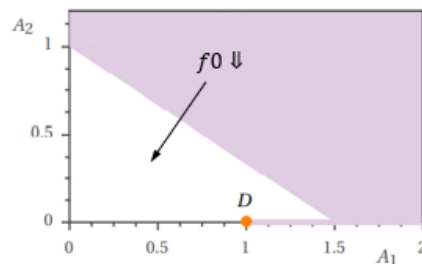


Figura 2. 5 – Espaço de projeto e ótimo singular. Adaptado de [19].

No entanto existem técnicas de relaxamento que se podem aplicar aos constrangimentos de tensão de modo a que a zona degenerada do domínio passe a ser acessível pelos métodos de otimização baseados no gradiente. Duas das técnicas mais abordadas na literatura são o ε -relaxation [28] e o *qp-approach* [29], conforme resumidas de seguida.

2.3.3.1 ε -relaxation

Esta técnica foi proposta por Cheng & Guo, em 1997 [28], para otimização de treliças e foi adotada mais tarde em problemas de otimização topológica de estruturas contínuas [30, 31]. Consiste em perturbar ligeiramente o constrangimento de tensão utilizando o parâmetro ε de valor muito baixo, i.e., $0 < \varepsilon \ll 1$. Por exemplo, considerando o constrangimento de tensão definido em (2.22), o constrangimento é reescrito como se mostra em (2.23) [29].

$$g = \left(\frac{\sigma_e}{\bar{\sigma}_e} \right)^2 - 1 \leq \varepsilon \quad (2.23)$$

Assim, relaxa-se a região admissível do problema, de modo a tornar alcançável o ótimo singular.

Esta técnica permite o relaxamento dos constrangimentos e, conseqüentemente, o aumento da região de projeto admissível. No entanto, ao resolver o problema relaxado o ponto ótimo não é exatamente o ponto D da Fig. 2.5, mas sim um ponto próximo deste. Sendo assim, pode aplicar-se uma estratégia contínua (*continuation approach*) onde o parâmetro ε tende gradualmente para zero, fazendo-se assim com que o problema relaxado convirja para a formulação inicial [30]. Na Figura 2.6 pode observar-se a variação da região admissível com o valor de ε , onde as linhas a tracejado representam dois constrangimentos de tensão genéricos (não relaxados) e as linhas sólidas representam as linhas dos constrangimentos relaxados.

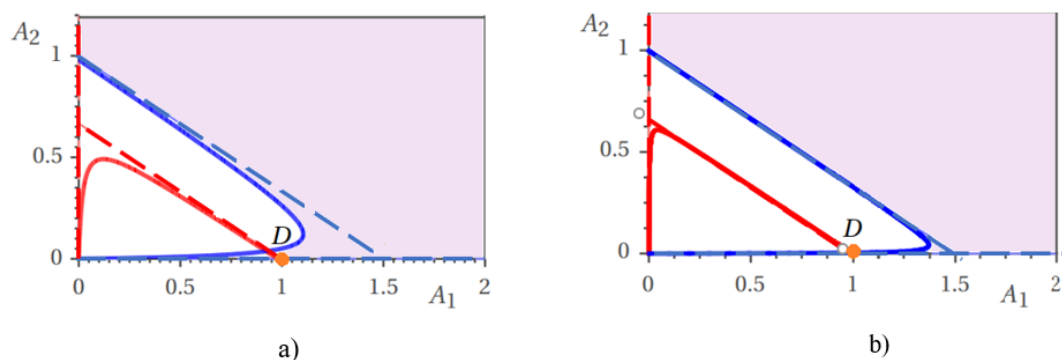


Figura 2. 6 – Espaço de projeto utilizando a) $\varepsilon = 0,01$ e b) $\varepsilon = 0,001$. Adaptado de [19].

Stolpe & Svanberg [32] demonstraram que a trajetória para encontrar o ponto ótimo global pode não ser contínua, ou seja, encontrar o ótimo no problema relaxado e diminuir gradualmente ε não garante encontrar o verdadeiro ótimo global. Estes autores demonstraram também que este método é pouco eficaz quando se lida com problemas com mínimos locais.

2.3.3.2 *qp-approach*

Em 2008, Bruggi & Venini [33] apresentaram uma alternativa ao ε -relaxation denominada de *qp-approach*. Esta metodologia é baseada num modelo de material compósito laminado poroso, material com microestrutura, onde os valores intermédios de densidade estão relacionados com a espessura das lâminas dessa microestrutura. A tensão local verificada no interior dessa microestrutura σ_e é amplificada a partir da tensão macroscópica $\langle \sigma_e \rangle$, tensão média, através da variável de densidade artificial. Para tal, a

tensão deve satisfazer duas condições: (1) ser inversamente proporcional à densidade e (2) convergir para um valor finito quando a densidade tende para zero.

Para satisfazer a primeira condição a tensão local expressa-se de acordo com (2.24).

$$\boldsymbol{\sigma}_e = \frac{\langle \boldsymbol{\sigma}_e \rangle}{\rho_e^q} = \rho_e^{p-q} \mathbf{E}_e \langle \boldsymbol{\varepsilon}_e \rangle \quad (2.24)$$

Onde $\langle \boldsymbol{\sigma}_e \rangle$ é a tensão macroscópica, média, \mathbf{E}_e é o tensor de rigidez e $\langle \boldsymbol{\varepsilon}_e \rangle$ é a extensão. Para que a segunda condição seja satisfeita, deve ter-se $q = p$. Contudo, a obtenção de uma tensão diferente de 0 quando a densidade é igual a 0, configura uma situação de singularidade. No entanto, para qualquer $q < p$ tem-se o resultado em (2.25) e conforme se pode observar, a tensão tende para zero quando a densidade tende para zero.

$$\lim_{\rho_e \rightarrow 0} \rho_e^{p-q} \mathbf{E}_e \langle \boldsymbol{\varepsilon}_e \rangle = 0 \quad (2.25)$$

Assim, ao invés de utilizar o constrangimento do problema original (2.22), substitui-se pela versão relaxada (2.26).

$$g = \left(\frac{\sigma_e}{\rho_e^{p-q} \bar{\sigma}_e} \right)^2 - 1 \leq 0 \quad (2.26)$$

Utilizando esta estratégia de penalização, $q < p$, o ótimo global do problema relaxado não coincide com o ótimo do problema original. No entanto, pode considerar-se que $\varepsilon_{qp} = p - q$ é um parâmetro análogo ao ε do ε -relaxation e pode aplicar-se também uma *continuation approach* para fazer variar o seu valor de forma gradual de modo a tender para zero.

2.4 Otimização Multimaterial

A otimização abordada até agora determina que pontos do domínio de projeto correspondem a material ou vazio, sendo esse material sempre o mesmo. No entanto, pode estender-se esta abordagem à utilização de diferentes materiais, e como é que estes devem estar distribuídos no domínio ocupado pela estrutura de modo a melhorar ainda mais o valor da função objetivo [34]. Surge assim a otimização multimaterial, ou MMTO (*Multi Material Topology Optimization*), onde o algoritmo procura atingir a distribuição ótima de diferentes materiais, para além de identificar as zonas de vazio. Ao possibilitar a escolha de vários materiais, existe maior potencial de melhoria do projeto, ficando os materiais mais resistentes atribuídos apenas às zonas mais solicitadas da estrutura. No entanto, aumenta-se também a complexidade de resolução do problema, devido ao aumento da dimensão do espaço de pesquisa.

Os problemas de otimização multimaterial podem ser enquadrados em três classes diferentes: SMTO, MMS e MMTO m , com ($m > 1$), conforme sistematizado na Tabela 2.2. Nesta tabela N_f representa o número total de fases consideradas no problema (fases sólidas mais a de vazio caso exista) e N_{mat} o número de fases consideradas apenas de material sólido.

Tabela 2. 2 – Classificação dos problemas de otimização topológica consoante o número de fases de material N_{mat} e o número total de fases N_f . Adaptado de [18].

Tipo de problema	N_{mat}	N_f
SMTO (<i>Single Material Topology Optimization</i>)	1	2
MMSm (<i>Multi Material Selection</i>)	≥ 2	N_{mat}
MMTOm (<i>Multi Material Topology Optimization</i>)		$N_{mat} + 1$

O problema SMTO é o problema clássico de otimização topológica. Na classe de problemas MMTO, o algoritmo vai escolher entre N_{mat} fases solidas e uma fase de vazio. Assim, o problema de otimização, para além de ser multimaterial, é também topológico. No entanto, olhando para a classe MMS, nenhuma das fases de material consideradas corresponde ao vazio, e por isso tem-se puramente um problema de seleção de material.

Para determinar o material atribuído a cada ponto do domínio de projeto utilizam-se as chamadas leis de interpolação de material. Estas são leis que tipicamente utilizam mais do que uma variável de densidade em cada ponto do domínio para se conseguir localmente escolher uma fase de material entre várias fases de material possíveis. Exemplos destas leis são a extensão do SIMP (*Solid Isotropic Material with Penalization*), proposta por Sigmund & Torquato em 1997 [35] e por Gibiansky & Sigmund em 2000 [36], e o DMO (*Discrete Material Optimization*) proposto por Stegmann em 2005 [37, 38, 39]. Em 2011, no trabalho de Gao & Zang [40], fez-se pela primeira vez a distinção entre *Recursive Multiphase Materials Interpolation* (RMMI), onde se enquadram as leis SIMP e *Uniform Multiphase Materials Interpolation* (UMMI) onde se enquadram as leis DMO. Estas leis fazem a seleção do material consoante o valor da variável de densidade artificial. Esta variável idealmente é de natureza discreta, escolhendo assim as propriedades de um dos materiais disponíveis. No entanto, nas abordagens contínuas, a obtenção de um material faz-se penalizando a variável de modo a que esta tome um dos valores limites, 0 ou 1. No caso desta penalização não ser feita, o algoritmo estaria a atribuir propriedades de um material fictício, ou seja, a junção de dois ou mais materiais. Tipicamente, o número de variáveis de projeto vai ser maior quanto mais fases de material se quiserem interpolar, apesar de também depender da lei de interpolação que se esteja concretamente a utilizar.

2.4.1 SIMP recursivo

Em 1997, Sigmund & Torquato [35] otimizaram uma microestrutura recorrendo a duas fases de material sólido e uma fase de vazio. Em 2000, Gibiansky & Sigmund [36] desenvolveram um trabalho semelhante.

Para duas fases de material, $N_f = 2$, considere-se a lei de interpolação expressa de acordo com (2.27).

$$E_e = \underbrace{x_{e,1}^p}_{w_1} E^1 + \underbrace{(1 - x_{e,1}^p)}_{w_2} E^2 \quad (2.27)$$

A variável de densidade fictícia $x_{e,1}$ toma valores no intervalo entre 0 e 1 e o expoente de penalização, p , toma valores iguais ou superiores a 1.

A forma como as funções de peso w_i estão construídas garante que ao favorecer uma fase de material, a outra é automaticamente desfavorecida, levando mais facilmente

as variáveis de projeto aos seus valores limites, 0 ou 1. A introdução da potência p também penaliza os valores intermédios das variáveis de projeto [38].

Note-se que esta lei (2.27) permite interpolar ou entre uma fase de material sólido e uma fase de vazio, i.e. se $E^2 = 0$ e então $N_{mat} = 1$ e $N_f = 2$, ou entre duas fases de material sólido, i.e. se $E^2 \neq 0$ e então $N_{mat} = N_f = 2$. Veja-se agora como se constrói a lei de interpolação para três fases de material, $N_f = 3$ (2.28).

$$\begin{aligned} E_e &= x_{e,1}^p [x_{e,2}^p E^1 + (1 - x_{e,2}^p) E^2] + (1 - x_{e,1}^p) E^3 \\ &= \underbrace{x_{e,1}^p x_{e,2}^p}_{w_1} E^1 + \underbrace{x_{e,1}^p (1 - x_{e,2}^p)}_{w_2} E^2 + \underbrace{(1 - x_{e,1}^p)}_{w_3} E^3 \end{aligned} \quad (2.28)$$

Para fazer puramente uma otimização de seleção de material (otimização multimaterial), considera-se que as três fases correspondem a materiais sólidos, e $N_f = N_{mat}$. Caso se considere uma fase de vazio e duas fases de material, a otimização é de seleção de material e também topológica, e neste caso $N_f = N_{mat} + 1$.

Num problema com NE elementos finitos e N_f fases (pelo menos duas fases, uma sólida e outra vazia ou duas sólidas), o número total de variáveis de projeto é $NE(N_f - 1)$. Isto acontece no SIMP recursivo independentemente de se considerar um problema MMS ou MMTO. O termo recursivo aqui resulta da generalização da lei de interpolação SIMP para um número de fases de material arbitrárias superiores a 3 (2.29).

$$\begin{aligned} E_e &= \sum_{m=1}^{N_f} \left[(1 - \xi_{e,m} x_{e,m}^p) \left(\prod_{i=1}^{m-1} x_{e,i}^p \right) E^{(N_f - m + 1)} \right], \\ \xi_{e,m} &= \begin{cases} 1, & m \neq N_f \\ 0, & m = N_f \end{cases} \quad \begin{cases} p \geq 1 \\ x_{e,m} \in]0,1] \end{cases} \end{aligned} \quad (2.29)$$

O aumento do número de fases de material aumenta a complexidade da lei de interpolação, fazendo com que a sua implementação seja bastante desafiante. Para além da dificuldade associada ao cálculo de sensibilidades, existe ainda o risco das variáveis de projeto penalizadas, ao aproximarem-se do seu valor inferior, poderem facilmente atingir valores que provoquem instabilidades numéricas, por serem quantidades muito pequenas. No entanto, para um número de fases relativamente baixo, esta lei apresenta bons resultados e é amplamente utilizada na resolução de problemas de otimização [41, 42, 43, 44, 45].

2.4.2 DMO – *Discrete Material Optimization*

Em 2005, Stegmann [39] apresentou uma nova lei de interpolação, o DMO (*Discrete Material Optimization*) que, à semelhança do SIMP, baseia-se na variável de densidade artificial e o objetivo é encontrar, para todos os elementos estruturais, um material a partir de um conjunto de candidatos, de modo a minimizar a função objetivo [38]. Esta metodologia foi aplicada pela primeira vez na determinação da orientação ótima das fibras de materiais compósitos laminados, procurando minimizar a *compliance* [39].

Na sua essência, o DMO deriva de métodos de otimização multimaterial, tal como o SIMP, visto que a propriedade de rigidez, por exemplo, atribuída a um elemento finito, E_e , é obtida através da soma ponderada das propriedades de cada fase de material disponível. Na sua forma mais geral, a lei de interpolação DMO é definida de acordo com a equação (2.30).

$$E_e = \sum_{i=1}^{N_{mat}} w_i E^i = w_1 E^1 + \dots + w_{N_{mat}} E^{N_{mat}} \quad (2.30)$$

Para que as propriedades resultantes tenham significado físico, as funções de peso devem assumir valores de 0 ou 1. É por isso indispensável que, à semelhança da lei SIMP, sejam aplicadas estratégias de penalização para garantir que a solução do problema contínuo é análoga à solução do problema discreto.

A partir desta formulação geral derivam versões diferentes do DMO, apresentadas de seguida, que diferem nas funções de peso consideradas. Comparativamente à lei SIMP, apresentam a vantagem de poderem ser generalizadas para qualquer número de fases de material sem aumentar significativamente a sua complexidade em termos de formulação matemática.

DMO 1:

O DMO 1 apresenta as funções de peso mais simples, adicionando uma variável de projeto por cada fase sólida ou de material, e pode ser generalizado de acordo com a equação (3.21):

$$E_e = \sum_{m=1}^{N_{mat}} x_{e,m}^p E^m = x_{e,1}^p E^1 + \dots + x_{e,N_{mat}}^p E^{N_{mat}}, \quad x_{e,m} \in]0,1] \quad (2.31)$$

Como cada função de peso é influenciada apenas por uma variável de projeto, isto traduz-se numa fácil implementação computacional desta lei e torna o cálculo de sensibilidades mais simples. Independentemente de se considerar um problema MMS ou MMTO, tendo NE elementos e N_{mat} fases de material ou sólidas, o número total de variáveis de projeto é $NE \times N_{mat}$.

Note-se que, caso não se imponha nenhuma restrição no somatório das funções de peso, nada impede que sejam selecionadas várias fases de material para o mesmo elemento, resultando numa mistura ou propriedade total sem significado real. Assim, é necessário restringir a soma das funções de peso para que não seja superior à unidade, i.e., $\sum_{m=1}^{N_{mat}} x_{e,m}^p \leq 1$. Note-se que sendo este um constrangimento de desigualdade, torna-se possível a identificação da fase de vazio e, por conseguinte, a topologia ótima, quando todas as variáveis assumem o valor nulo. Se fosse apenas um constrangimento de igualdade ter-se-ia um problema apenas de seleção de material.

DMO 4:

Esta variante é essencialmente uma extensão do DMO1, com a particularidade de todas as variáveis de projeto afetarem as funções de peso. Para $N_f = 3$ e $N_{mat} = 2$, a variante DMO4 expressa-se de acordo com (2.32):

$$E_e = x_{e,1}^p (1 - x_{e,2}^p) E^1 + x_{e,2}^p (1 - x_{e,1}^p) E^2, \quad x_{e,m} \in]0,1] \quad (2.32)$$

A vantagem desta lei relativamente ao DMO1 está na soma das funções de peso ser sempre igual ou inferior a 1, ou seja, a propriedade resultante de um elemento finito nunca corresponde à soma de várias fases de material sólido.

Independentemente da variante da lei DMO considerada, é recomendável que o ponto de partida para os valores das variáveis de densidade seja uniforme, tipicamente a unidade a dividir pelo número de fases presentes, de modo a garantir que não há, à partida, seleção privilegiada de fases.

2.4.3 SFP – *Shape Function Parameterization*

Em 2011, Bruyneel [46] propôs uma nova forma de interpolar propriedades de material, baseada nas funções de forma de um elemento finito quadrilátero, que denominou SFP (*Shape Function Parameterization*). Esta metodologia tem a vantagem de conseguir interpolar um dado número de fases de material, recorrendo a menos variáveis de projeto do que as leis apresentadas anteriormente. Não obstante, continua a ser necessário penalizar as variáveis de projeto de modo a que estas tomem um dos valores limites, 0 ou 1. A estratégia de penalização é feita com recurso ao expoente p , à semelhança do que foi apresentado anteriormente.

Atendendo a um elemento isoparamétrico quadrangular no seu referencial natural, ver Fig 2.7, os vértices são tais que as suas coordenadas são $(-1, -1)$, $(+1, -1)$, $(+1, +1)$ e $(-1, +1)$ e correspondem respetivamente aos nós 1, 2, 3 e 4.

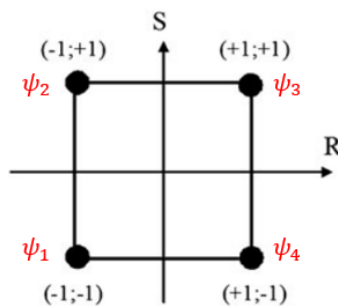


Figura 2. 7 – Elemento isoparamétrico no referencial natural. Adaptado de [46].

As funções de forma são expressas de acordo com (2.33).

$$\begin{cases} \psi_1 = \frac{1}{4}(1 - R)(1 - S) \\ \psi_2 = \frac{1}{4}(1 + R)(1 - S) \\ \psi_3 = \frac{1}{4}(1 + R)(1 + S) \\ \psi_4 = \frac{1}{4}(1 - R)(1 + S) \end{cases} \quad (2.33)$$

O elemento representado na Figura 2.8 corresponde à translação do elemento isoparamétrico representado na Figura 2.7, de modo a que as suas características R e S passem a variar agora entre 0 e 1, e correspondam respetivamente a $x_{e,1}$ e $x_{e,2}$.

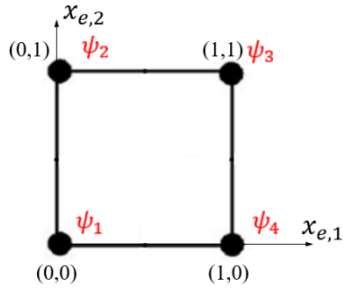


Figura 2. 8 – Elemento isoparamétrico representado no novo referencial $O_{x_{e,1},x_{e,2}}$.

Reescrevendo-se as funções de forma (2.33) para o novo referencial (2.34).

$$\begin{cases} \psi_1 = (1 - x_{e,1})(1 - x_{e,2}) \\ \psi_2 = x_{e,1}(1 - x_{e,2}) \\ \psi_3 = x_{e,1}x_{e,2} \\ \psi_4 = x_{e,2}(1 - x_{e,1}) \end{cases} \quad (2.34)$$

Com base nas funções de forma do elemento isoparamétrico, e considerando que cada uma das funções ψ_i corresponde à função de peso associada a cada propriedade i que se pretende interpolar é possível selecionar uma propriedade diferente consoante os valores das variáveis x , i.e., identifica-se um vértice diferente do quadrilátero. Em cada vértice, uma função de peso é igual à unidade e as restantes são nulas. Observe-se, na Figura 2.9, a representação gráfica das funções de interpolação usadas na seleção das propriedades das diferentes fases de material.

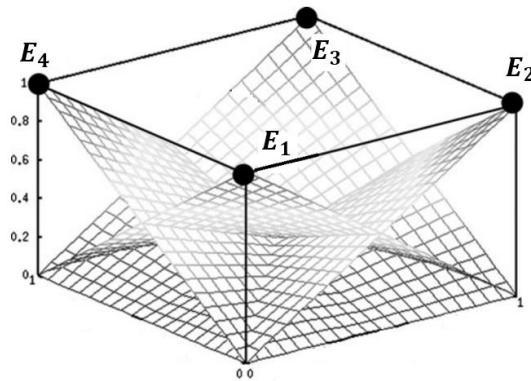


Figura 2. 9 – Representação gráfica das funções de forma. Adaptado de [49].

Assim, consoante o vértice do elemento isoparamétrico, ou seja, as coordenadas do ponto $(x_{e,1}, x_{e,2})$, é possível, através das funções de forma, selecionar um material diferente, como sistematizado na Tabela 2.3.

Tabela 2. 3 – Seleção da fase de material através das funções de forma do elemento isoparamétrico, consoante as coordenadas dos vértices, $(x_{e,1}, x_{e,2})$

	(0,0)	(1,0)	(1,1)	(0,1)
$\psi_1 = (1 - x_{e,1})(1 - x_{e,2})$	E^4	0	0	0
$\psi_2 = x_{e,1}(1 - x_{e,2})$	0	E^2	0	0
$\psi_3 = x_{e,1}x_{e,2}$	0	0	E^1	0
$\psi_4 = x_{e,2}(1 - x_{e,1})$	0	0	0	E^3

Logo, a propriedade resultante de um elemento pode ser obtida pelo somatório das funções de forma a multiplicar pela propriedade do material associada a cada fase, ou seja, a cada função ψ (2.35).

$$\begin{aligned}
 E_e(x_{e,1}, x_{e,2}) &= x_{e,1}x_{e,2}E^1 + x_{e,1}(1 - x_{e,2})E^2 + x_{e,2}(1 - x_{e,1})E^3 \\
 &\quad + (1 - x_{e,1})(1 - x_{e,2})E^4 \\
 &= x_{e,1}[x_{e,2}E^1 + (1 - x_{e,2})E^2] + (1 - x_{e,1})[x_{e,2}E^3 + (1 - x_{e,2})E^4]
 \end{aligned} \tag{2.35}$$

A vantagem desta lei relativamente às apresentadas anteriormente é que é possível interpolar mais fases de material recorrendo a menos variáveis de projeto. Considerando um problema com NE elementos, onde se pretende interpolar entre quatro fases de material, $N_f = 4$, são apenas necessárias $2NE$ variáveis de projeto, duas por cada elemento.

Por último, deixa-se aqui apenas a nota de que Bruyneel *et al.* [47] extrapolou esta lei para interpolar entre oito fases de material, onde as funções de peso de cada fase (2.35) passaram a ser expressas de acordo com (2.36). Na presente dissertação ir-se-á utilizar a lei de interpolação até quatro fases.

$$\psi_i = \frac{1}{8}[(1 \pm R)(1 \pm S)(1 \pm T)]^p, \quad i = 1, \dots, 8 \tag{2.36}$$

3. Leis de Interpolação

Para realizar uma otimização topológica multimaterial é necessário determinar a que pontos do domínio de projeto é atribuído uma fase de vazio ou um material sólido. Para tal utilizam-se as chamadas leis de interpolação de material. Para resolver os problemas apresentados nesta dissertação foram consideradas três leis de interpolação distintas, DMO, SIMP e SFP. Ao longo deste capítulo será feita uma análise detalhada das mesmas. Estas são analisadas aqui na condição de terem até duas variáveis de projeto, x_1, x_2 com o objetivo de se conseguir fazer uma representação gráfica das mesmas. Este número de variáveis permite, no caso do DMO e SIMP, interpolar entre três fases ($N_f = 3$) e, para o caso do SFP, interpolar entre quatro fases ($N_f = 4$).

3.1 DMO

Escolhe-se aqui a primeira variante da lei DMO, DMO 1, visando tirar partido da sua simplicidade de implementação. A função de peso w_m de cada fase de material sólido m depende apenas de uma variável de projeto, $x_{e,m}$. No entanto, é necessário garantir que a soma das funções de peso não é superior à unidade, traduzindo-se isto na necessidade de adicionar mais um constrangimento por cada elemento finito onde se considera definidas as variáveis de densidade.

Para analisar o funcionamento desta lei, considera-se um vetor (3.1) com as propriedades (módulos de Young) para três fases distintas, $N_f = 3$: duas de material sólido, $N_{mat} = 2$, aço e alumínio, e outra de vazio. De forma semelhante, poderiam ser definidos outros vetores para as outras propriedades como a densidade específica, ρ , e a tensão admissível, $\bar{\sigma}$.

$$E = [205 \quad 70 \quad 0] \text{ GPa} \quad (3.1)$$

A primeira entrada do vetor corresponde ao aço, $E^1 = E^{aço}$, a segunda ao alumínio, $E^2 = E^{alumínio}$ e a última à fase de vazio, $E^3 = E^0$. Considerando a fase de vazio estamos perante um problema de otimização topológica e multimaterial, com duas

fases de material sólidas (MMTO2). No entanto, caso se considere uma terceira fase sólida em vez do vazio, $E^3 = E^{mat3}$, então o problema passa a ser de otimização multimaterial, ou de seleção de material, com três fases de material sólidas (MMS3).

A rigidez do elemento e é definida pela lei de interpolação DMO de acordo com a equação (3.2).

$$E(x_1, x_2) = E^3 + x_1^p E^1 + x_2^p E^2 \quad (3.2)$$

A seleção do material depende do valor das variáveis de projeto (x_1, x_2) , conforme esquematizado na Tabela 3.1.

Tabela 3. 1 – Variáveis de projeto associadas à seleção de cada uma das três fases de material, na lei DMO.

x_1	x_2	$E(x_1, x_2)$
0	0	$E^3 \Rightarrow$ vazio
0	1	$E^2 \Rightarrow$ alumínio
1	0	$E^1 \Rightarrow$ aço
1	1	$E^1 + E^2 \Rightarrow$ Mat. Fictício

Na Figura 3.1 é possível observar a superfície de interpolação gerada pela lei DMO (3.1). Consideram-se três expoentes de penalização diferentes, $p = 1$, $p = 3$ e $p = 4$, de modo a aumentar a penalização (curvatura) da superfície de interpolação, i.e., a superfície de interpolação torna-se mais concava.

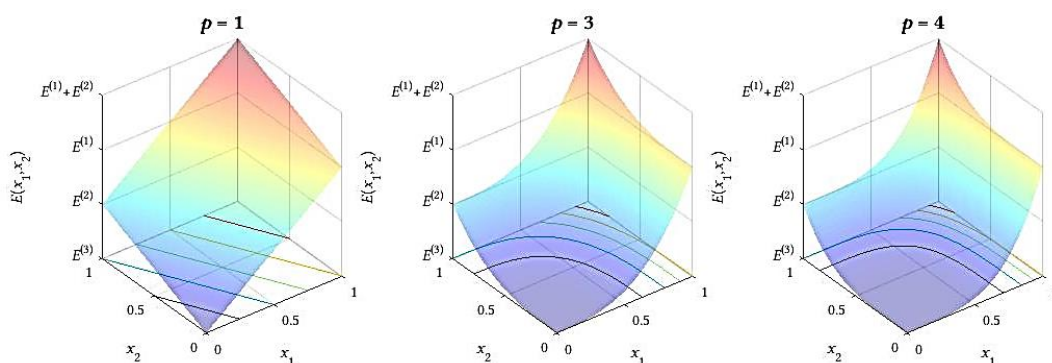


Figura 3. 1 – Representação gráfica da lei DMO, para interpolação de três fases de material, utilizando três expoentes de penalização diferentes.

Assim, a função de peso da primeira fase de material é $w_1 = x_1^p$ e da segunda fase de material é $w_2 = x_2^p$. Observe-se na Figura 3.2 a representação gráfica das funções de peso de cada fase, assim como o seu somatório.

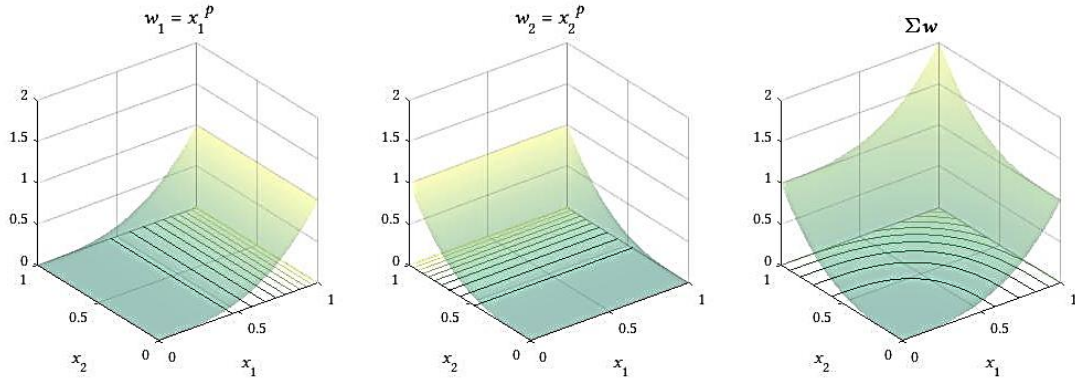


Figura 3. 2 – Funções de peso da lei DMO para três fases de material, com $p = 3$.

A maior vantagem de utilizar esta lei prende-se na simplicidade associada à construção da mesma. No entanto, tal como pode ser observado na Tabela 3.1, quando $(x_1, x_2) = (1,1)$, o material escolhido corresponde a um material fictício cujas propriedades são a soma das propriedades das duas fases sólidas. Quando não é colocada nenhuma restrição no somatório das funções de peso, este pode tomar um valor superior à unidade, ver Fig. 3.2 (lado direito), logo é necessário constranger o problema de modo a que $\sum_{m=1}^{N_{\text{mat}}} w_m \leq 1$. Em problemas onde se exija a interpolação de fases em muitos elementos finitos, o incremento do custo computacional associado a este constrangimento pode ser significativo.

3.2 SIMP

Considere-se novamente o vetor (3.1) com as propriedades de material para três fases de material, $N_f = 3$, e dois materiais sólidos, $N_{\text{mat}} = 2$, aço e alumínio. A interpolação do rigidez do elemento e , recorrendo à lei de interpolação SIMP, é feita de acordo com a equação (3.3).

$$E(x_1, x_2) = x_2^p [x_1^p E^1 + (1 - x_1^p) E^2] + (1 - x_2^p) E^3 \quad (3.3)$$

Note-se que nesta formulação a variável x_2 pode ser vista como uma variável topológica, uma vez que permite selecionar a presença ou ausência de material, ficando a variável x_1 responsável pela seleção da fase sólida. Na Tabela 3.2 estão apresentados os valores das variáveis de projeto (x_1, x_2) que permitem selecionar as diferentes fases de material.

Tabela 3. 2 – Variáveis de projeto associadas à seleção de cada uma das três fases de material, na lei SIMP.

x_1	x_2	$E(x_1, x_2)$
0	0	$E^3 \Rightarrow$ vazio
1	0	$E^3 \Rightarrow$ vazio
0	1	$E^2 \Rightarrow$ alumínio
1	1	$E^1 \Rightarrow$ aço

A Figura 3.3 representa a superfície de interpolação produzida pela lei de interpolação SIMP para três expoentes de penalização, $p = 1, p = 3$ e $p = 4$ e três fases de material.

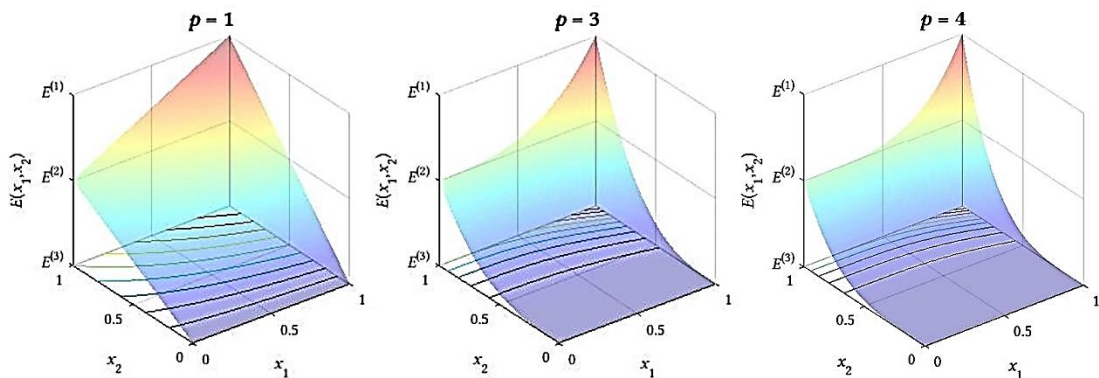


Figura 3. 3 – Representação gráfica da lei SIMP, para interpolação de três fases de material, utilizando três expoentes de penalização diferentes.

Reescrevendo (3.3), obtém-se as funções de peso associadas a cada fase de material (3.4).

$$E(x_1, x_2) = x_2^p x_1^p E^1 + x_2^p (1 - x_1^p) E^2 + (1 - x_2^p) E^3 \quad (3.4)$$

Assim, a função de peso associada a cada uma das três fases de material é, respectivamente, $w_1 = x_2^p x_1^p$, $w_2 = x_2^p (1 - x_1^p)$ e $w_3 = (1 - x_2^p)$. As funções de peso w_1 e w_2 , associadas às fases de material sólido, dependem de ambas as variáveis de projeto x_1 e x_2 , tornando a lei de interpolação mais não linear comparativamente ao DMO.

Observe-se na Figura 3.4 a representação gráfica das funções de peso de cada fase, assim como o seu somatório, para a lei SIMP.

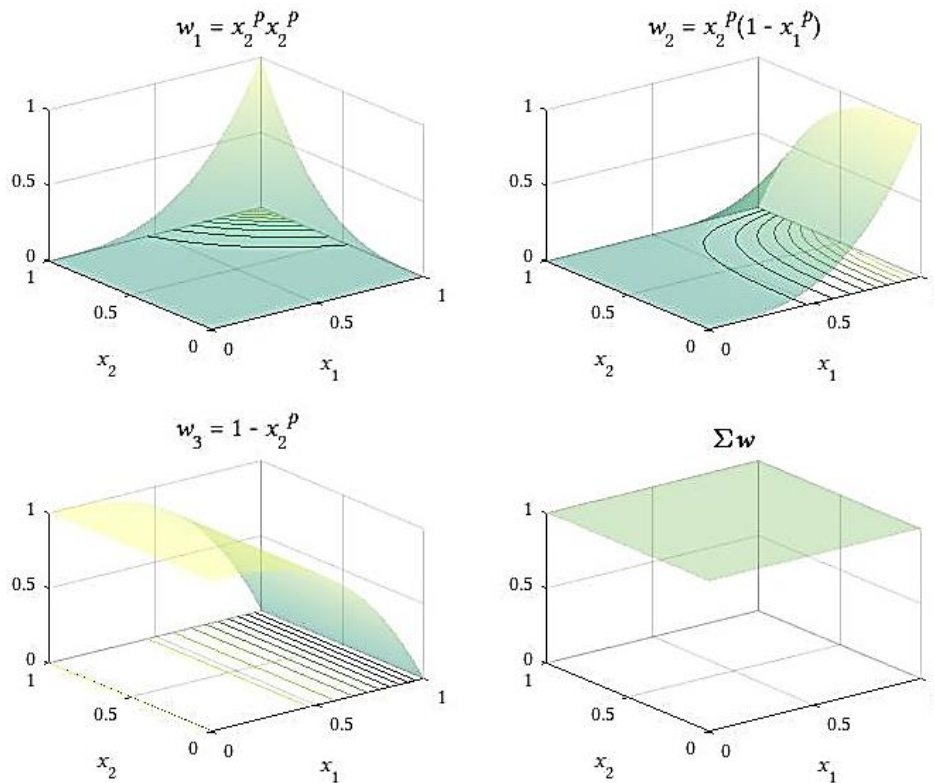


Figura 3. 4 – Funções de peso da lei SIMP para três fases de material, com $p = 3$.

Contrariamente à lei DMO, o somatório das funções de peso na utilização da lei SIMP é sempre igual a 1, ver Fig. 3.4. Assim, para qualquer combinação de valores das variáveis de projeto, desde que estes se encontrem nos seus valores limites de 0 ou 1, a propriedade interpolada corresponde sempre a uma das fases de material consideradas, dispensando-se assim qualquer tipo de restrição associada ao somatório das funções de peso.

3.3 SFP

Considere-se novamente um vetor (3.5) com as propriedades do material, mas agora para quatro fases, $N_f = 4$, três de materiais sólidos, $N_{mat} = 3$, aço, alumínio e magnésio, e uma de vazio. A primeira entrada corresponde ao aço, $E^1 = E^{aço}$, a segunda ao alumínio, $E^2 = E^{alumínio}$, a terceira ao magnésio, $E^3 = E^{magnésio}$, e a última ao vazio, $E^4 = E^0 = 0$.

$$E = [205 \quad 70 \quad 44 \quad 0] \text{ GPa} \quad (3.5)$$

A interpolação da rigidez no elemento e , recorrendo à lei de interpolação SFP, é feita de acordo com a equação (3.6).

$$E(x_1, x_2) = x_1^p [x_2^p E^1 + (1 - x_2^p) E^2] + (1 - x_1^p) [x_2^p E^3 + (1 - x_2^p) E^4] \quad (3.6)$$

A formulação desta lei permite que, para cada valor das variáveis de projeto (x_1, x_2) , seja possível selecionar uma fase de material diferente, como apresentado na Tabela 3.3.

Tabela 3.3 – Variáveis de projeto associadas a cada uma das quatro fases de material, na lei SFP.

x_1	x_2	$E(x_1, x_2)$
0	0	$E^4 \Rightarrow$ vazio
0	1	$E^3 \Rightarrow$ magnésio
1	0	$E^2 \Rightarrow$ alumínio
1	1	$E^1 \Rightarrow$ aço

A Figura 3.5 representa a superfície de interpolação produzida pela lei de interpolação SFP, para três expoentes de penalização, $p = 1, p = 3$ e $p = 4$ e quatro fases de material. Cada um dos quatro vértices no plano O_{x_1, x_2} corresponde a uma fase das quatro fases disponíveis.

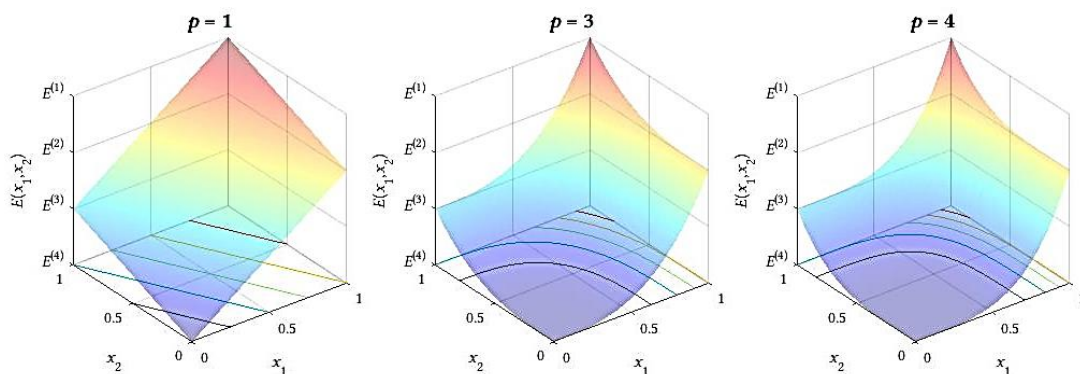


Figura 3.5 – Representação gráfica da lei SFP, para interpolação de quatro fases de material, utilizando três expoentes de penalização diferentes.

Reescrevendo (3.6), obtém-se as funções de peso associadas a cada fase de material (3.7).

$$E(x_1, x_2) = x_1^p x_2^p E^1 + x_1^p (1 - x_2^p) E^2 + (1 - x_1^p) x_2^p E^3 + (1 - x_1^p)(1 - x_2^p) E^4 \quad (3.7)$$

A função de peso associada a cada uma das quatro fases de material é, respetivamente, $w_1 = x_1^p x_2^p$, $w_2 = x_1^p (1 - x_2^p)$, $w_3 = (1 - x_1^p) x_2^p$ e $w_4 = (1 - x_1^p)(1 - x_2^p)$. À semelhança da lei SIMP, as funções de peso dependem de ambas as variáveis de projeto. Na Figura 3.6 observa-se a representação gráfica de cada uma destas funções de peso, assim como o seu somatório.

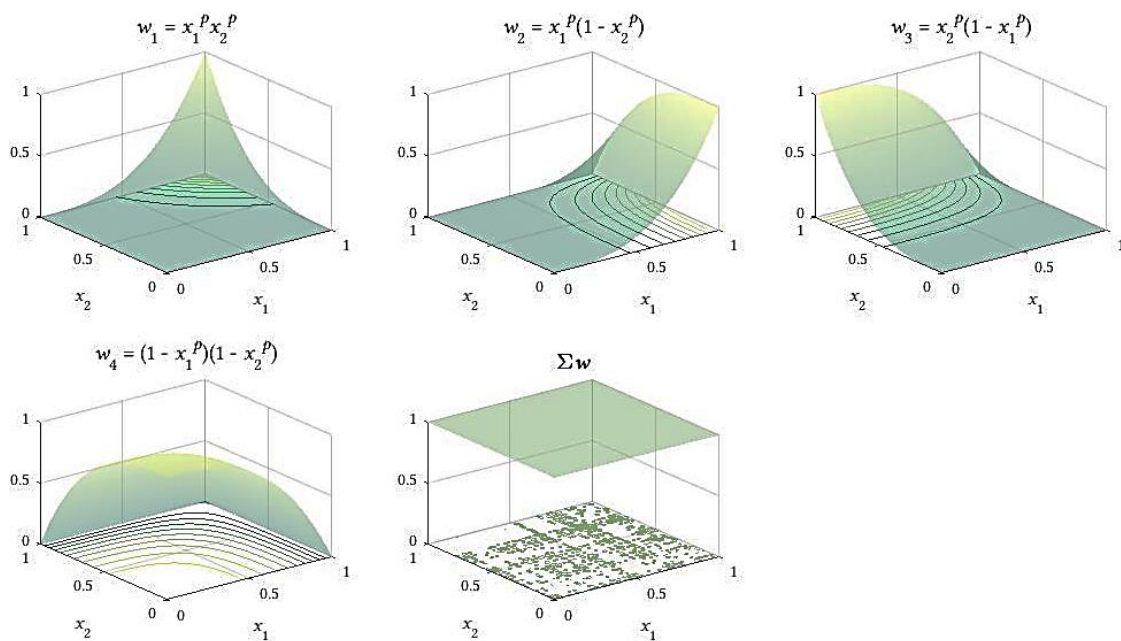


Figura 3. 6 – Funções de peso da lei SFP para quatro fases de material, com $p = 3$.

3.4 Análise Comparativa

A seleção de cada fase de material é grandemente influenciada pela superfície de interpolação associada à lei que se considere. De seguida pretende-se evidenciar o andamento da variação das propriedades quando se interpola entre as fases presentes, ver Fig. 3.8. Especificamente, é interessante observar o “caminho” seguido pela interpolação entre cada duas das várias fases presentes pois isso pode ter impacto na qualidade das soluções obtidas conforme comentado de seguida.

Quando se faz uma otimização de uma estrutura reticulada (tipo treliça), utilizando uma *Ground Structure Approach*, cada elemento finito da estrutura (barra) no final terá inequivocamente uma propriedade associada de entre aquelas que se interpolaram. No entanto, caso o problema a resolver exija utilizar um filtro (por exemplo de densidades) para obter uma topologia, o efeito do filtro corresponde a uma zona de cinzento (densidades intermédias) na solução final conforme se observa no exemplo da Figura 3.7.



Figura 3. 7 – Demonstração da transição das zonas porosas (a cinzendo) para zonas de densidades 1 ou 0 (a preto ou branco), aplicando filtro das densidades [48].

No caso de haver várias fases de material sólidas envolvidas, o filtro traduz-se numa zona de cinzento associada à transição de fases. Essa transição pretende-se que seja gradual entre cada duas fases, e apenas entre essas duas, vizinhas uma da outra. Em problemas sem filtro (como o da treliça) qualquer lei de interpolação no final dá um resultado consistente em termos das fases de material entre as quais se interpola, sendo a seleção das mesmas inequívoca. Contudo, caso seja usada uma filtragem num problema, vão surgir densidades intermédias que fazem uma determinada interpolação entre fases que pode ser diferente de acordo com a lei de interpolação em causa. Por exemplo, neste tipo de situações, a lei SFP pode resultar em valores sem sentido. Veja-se a Fig. 3.8 c), na transição entre a fase de material 2 e a fase de material 3, o “caminho” vermelho representa uma menor diminuição da rigidez da estrutura do que o “caminho” representado a azul. Assim, caso se pretenda uma solução de máxima rigidez, o algoritmo pode escolher fazer uma transição tal que, ao se transitar da fase de material 2 para a 3, passa-se pela fase 1 de material (mais rígida) e isso não tem qualquer sentido físico. O

resultado é uma modelação pobre da zona de interface entre fases discretas de material. Consequentemente, esta lei pode efetivamente não produzir bons resultados na otimização topológica de estruturas contínuas baseadas na variável de densidade onde uma técnica de filtragem seja utilizada. Este aspeto, em particular, não se verifica para a lei SIMP, ver Fig. 3.8 b).

Relativamente à superfície de interpolação produzida pela lei DMO, ver Fig. 3.8 a), apenas a “metade” inferior é considerada, devido à restrição imposta ao somatório das funções de peso. Como o somatório tem de ser obrigatoriamente igual ou inferior à unidade, a “metade” de cima da superfície de interpolação não está ao alcance do algoritmo de otimização, pois considerar pontos naquela zona representaria uma violação do constrangimento $\sum_{m=1}^{N_{mat}} w_m \leq 1$. Apesar do incremento no custo computacional associado à introdução de muitos constrangimentos deste tipo no problema, a linearidade das funções de peso faz com que a sua implementação seja simples e sem grandes dificuldades para o algoritmo de otimização tratar. No entanto, não deixa de ser curioso que na transição entre as duas fases de material, segue-se o trajeto com valores de densidade intermédios (veja-se a linha diagonal representada) e encontra-se na função de interpolação um mínimo local, para o valor da penalização p escolhida. No entanto, note-se que ao aplicar uma *continuation approach* à estratégia de penalização, parte-se de um expoente $p = 1$, ou seja, de uma superfície não penalizada (plana, sem curvatura, ver Fig 3.1). O valor de p aumenta gradualmente até ao seu valor final, e só se verifica a formação de um mínimo local numa direção da superfície de interpolação a partir de $p = 1,2$. Até este valor, a superfície de interpolação apresenta uma variação monótona. A possibilidade de o algoritmo ficar retido nesse mínimo não sucede, pois, as variáveis de densidade são forçadas a tomar os seus valores limite.

Na utilização da lei DMO, à semelhança do que foi observado para a lei SFP, ao otimizar problemas onde seja usada uma filtragem de densidades, podem resultar valores de densidades intermédias sem sentido. Note-se ainda que na maior parte dos problemas apresentados na literatura onde se utiliza a lei DMO, o objetivo é descobrir a orientação ótima das fibras entre camadas de um compósito laminado. Neste caso, não é pertinente a utilização de filtragem evitando-se os problemas associados conforme explicado aqui.

Em suma, caso se utilize as leis DMO e SFP, é especialmente necessário garantir que se aplique uma *continuation approach* na estratégia de penalização, i.e., os expoentes vão aumentando gradualmente para que os resultados não sejam tão

influenciados pela existência de mínimos locais ao longo de determinadas direções no espaço das superfícies de interpolação. No entanto, para a lei SIMP verifica-se que a transição entre quaisquer duas fases de material se faz através de uma superfície de interpolação que tem variação monótona o que é um aspeto a favor da utilização desta lei.

Atendendo agora à superfície de interpolação produzida pela lei SIMP, ver Fig. 3.8 b), veja-se que não se impõe qualquer constrangimento de somatório de pesos. Contudo, o que se observou no desenvolver dos problemas resolvidos nesta dissertação, é que a escolha do ponto de partida (*design* inicial) influencia mais o caminho que o algoritmo percorre até encontrar a solução ótima, principalmente para mais de duas fases de material, comparativamente ao DMO. Por exemplo, se o ponto inicial for $(x_1, x_2) = (0,5; 0,5)$, os pesos na lei de interpolação assumem os seguintes valores: $E = 0,25E^1 + 0,25E^2 + 0,5E^3$. Portanto, à partida, favorece-se mais uma das fases do que as restantes. Este é um aspecto desfavorável na aplicação desta lei. O mesmo acontece para a lei de interpolação SFP, onde, para um número de fases de material sólido superior a 3, o ponto de partida tem uma grande influência na solução final encontrada pelo algoritmo

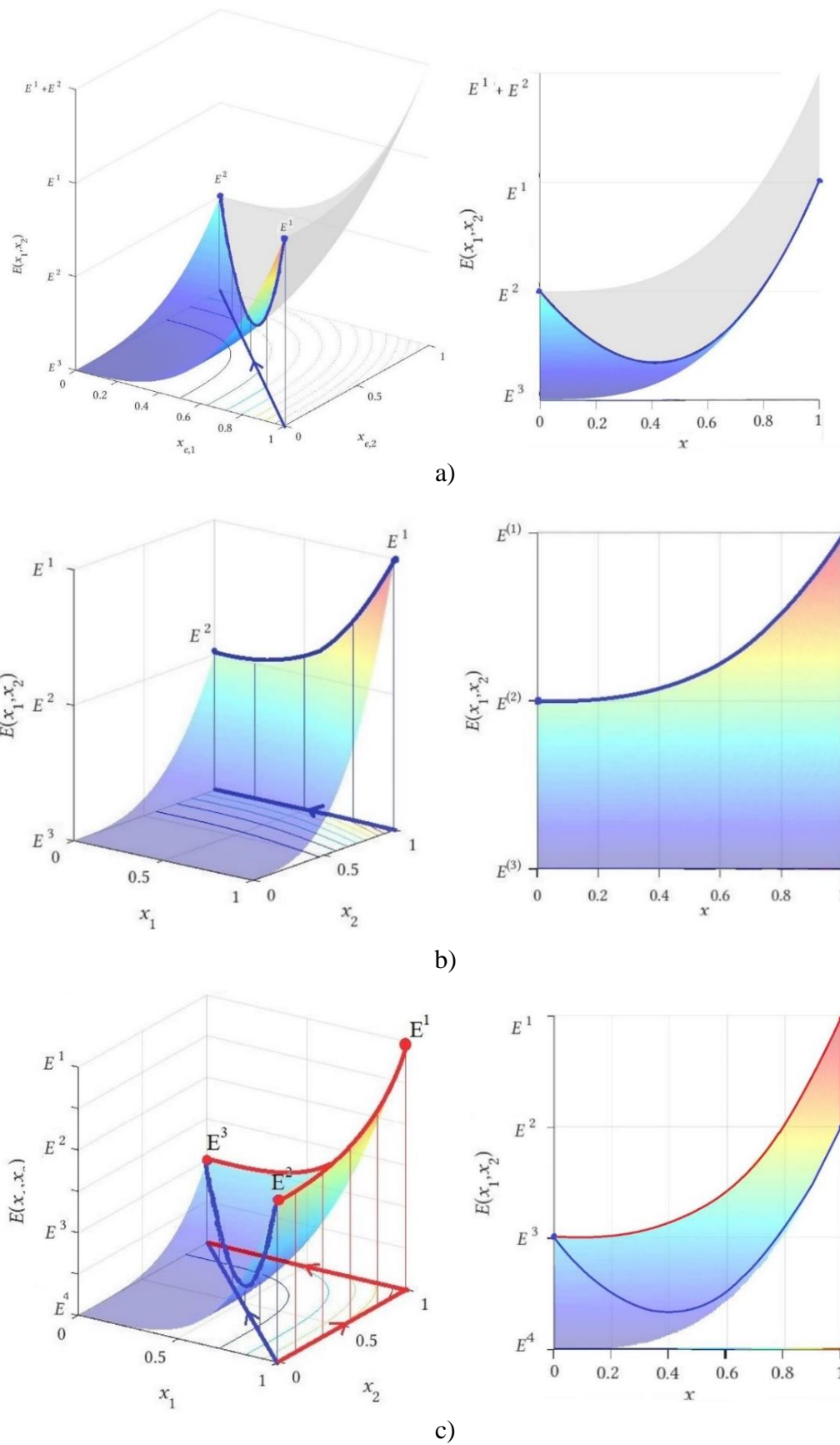


Figura 3. 8 – Seleção da fase de material, para $p = 3$, na superfície de interpolação gerada pela lei a) DMO; b) SIMP; c) SFP.

4. Formulação dos Problemas

O propósito desta dissertação é o desenvolvimento de uma metodologia capaz de reduzir o peso de estruturas reticuladas variando as dimensões das áreas das secções com identificação de topologia ótima e também com seleção ótima de material, utilizando-se constrangimentos de tensão. A resolução dos problemas apresentados é feita com recurso a algoritmos de otimização baseados no gradiente. Os problemas dividem-se essencialmente em três categorias, consoante a variável de projeto escolhida: (1) densidade artificial, (2) área da secção da barra, (3) ambas as variáveis, densidade artificial e área. Serão ainda utilizadas uma, duas e três fases de material sólido distintas, e três leis de interpolação, DMO, SIMP e SFP.

Primeiro, é apresentada a formulação do problema utilizando a densidade artificial como variável de projeto, que é baseada em Pratas (2019) [18]. Consideram-se uma, duas e três fases de materiais sólidos, correspondendo isto a um problema de SMTO, MMTO2 e MMTO3, respetivamente. São ainda utilizadas as leis de interpolação DMO, SIMP e SFP.

Segundo, é apresentada a formulação utilizando as áreas das secções das barras da *ground structure* como variáveis de projeto. Neste caso, pretende-se fazer uma otimização meramente topológica (SMTO), onde a variável área é encarada como uma variável topológica que define a presença ($A \neq 0$) ou ausência ($A = 0$) de material. Assim deixa de ser necessário recorrer às lei de interpolação.

Terceiro, é apresentada a formulação que utiliza a densidade artificial e a área como variáveis de projeto, que permite fazer otimização dimensional, topológica e multimaterial. A variável área é encarada novamente como a variável topológica, ficando a variável de densidade artificial responsável pela seleção ótima de materiais para a estrutura, deixando de haver necessidade de modelar a fase de vazio recorrendo à variável de densidade artificial. Nesta formulação são consideradas duas e três fases de material sólido, e utilizadas as leis de interpolação DMO e SIMP. Neste caso o SFP redundava no SIMP porque na equação (3.6) $E^3 = E^0 = E^{mat3}$. Só seria útil considerar o SFP caso se estivessem a considerar quatro fases sólidas.

As áreas enquanto variáveis de projeto apresentam as seguintes vantagens na resolução do problema:

- A topologia da estrutura passa a estar definida através da variável área, em vez da densidade, e encontra-se assim uma melhor racionalização do material;
- Com o mesmo número de variáveis de densidade artificial pode-se interpolar mais uma fase sólida se a área for utilizada como variável de projeto. De facto, deixa de existir a necessidade de modelar a fase de vazio à custa da densidade. As densidades artificiais passam a ser encaradas apenas como variáveis de seleção de material;
- As soluções obtidas são próximas de um *fully stressed design*;
- Ao contrário da variável de densidade, a variável de área não precisa de ser penalizada e está sujeita a menos constrangimentos, sendo as soluções obtidas com recurso a menos iterações e mais independentes dos parâmetros de penalização.

Na Tabela 4.1 são apresentadas as variáveis necessárias, nas formulações só com a variável artificial, só com as áreas, ou com ambas as variáveis. Neste caso são as variáveis necessárias por elemento finito, para a lei SIMP, DMO e SFP, dependendo das fases de material sólido que se pretende utilizar.

Tabela 4. 1 – Variáveis necessárias para cada categoria de problemas, por elemento finito, para a lei SIMP e DMO, para 1, 2, 3 e m fases de material sólido.

		SMT0	MMTO2	MMTO3	MMTO4
\mathbf{x}_ρ	DMO	$[x_{\rho_1}]$	$[x_{\rho_1} \ x_{\rho_2}]$	$[x_{\rho_1} \ x_{\rho_2} \ x_{\rho_3}]$	$[x_{\rho_1} \ x_{\rho_2} \ x_{\rho_3} \ x_{\rho_4}]$
	SIMP				
	SFP	$\equiv SIMP$	$\equiv SIMP$	$[x_{\rho_1} \ x_{\rho_2}]$	$[x_{\rho_1} \ x_{\rho_2} \ x_{\rho_3}]$
\mathbf{x}_A		$[x_A]$		N/A	
$\mathbf{x}_{\rho,A}$	DMO		$[x_A \ x_{\rho_1}]$	$[x_A \ x_{\rho_1} \ x_{\rho_2}]$	$[x_A \ x_{\rho_1} \ x_{\rho_2} \ x_{\rho_3}]$
	SIMP	N/A			
	SFP		$\equiv SIMP$	$\equiv SIMP$	$[x_A \ x_{\rho_1} \ x_{\rho_2}]$

4.1 Variáveis, Função Objetivo e Constrangimentos

Pretende-se formular o problema de minimização de massa, com constrangimentos de tensão. Para ser possível utilizar um algoritmo baseado no gradiente,

nomeadamente o MMA, as funções objetivo e constrangimentos devem ser contínuas e diferenciáveis em todos os pontos do domínio. Para seleccionar a variável de densidade artificial foram utilizadas três leis de interpolação do material, DMO, SIMP e SFP, detalhadas no capítulo 3. É necessário adicionar dois constrangimentos que visam garantir que a solução contínua da variável densidade tende para a sua solução discreta, ou seja, toma valores de 0 ou 1. Estes constrangimentos serão abordados adiante. A variável área, por sua vez, é comparativamente menos exigente em termos dos valores que pode tomar e, portanto, constrangimentos que tem de verificar.

4.1.1 Variáveis

A variável densidade artificial $x_{\rho_{e,m}}$ é de natureza discreta, e selecciona, para cada elemento finito e , uma fase de material m . Para a lei DMO e SIMP é necessário definir, por elemento, uma variável para cada fase de material sólido disponível, sendo necessárias $n^v = NE \cdot N_{mat}$ variáveis de projeto, onde NE representa o número de elementos e N_{mat} o número de fases de material sólido. No entanto, utilizando a lei SFP é possível interpolar entre quatro fases utilizando apenas duas variáveis, sendo necessárias, para três fases sólidas, $n^v = 2NE$ variáveis de projeto. A utilização da lei SFP apenas se torna vantajosa nos problemas desta dissertação designados por MMTO3. Veja-se como se define o vetor das variáveis de projeto quando se utilizam apenas as densidades artificiais (4.1):

$$\mathbf{x}_\rho = [x_{\rho_{1,1}}, \dots, x_{\rho_{1,m}}, \dots, x_{\rho_{e,1}}, \dots, x_{\rho_{e,m}}] \quad (4.1)$$

A utilização das áreas das secções das barras como variáveis de projeto, x_{A_e} , torna possível identificar “inexistência” de material (barra) pois é possível que a área seja nula, na verdade, um valor suficientemente baixo. Assim, para fazer uma otimização apenas topológica, deixa de ser necessário recorrer às densidades. Utilizar a área como variável topológica representa uma vantagem a nível computacional, por ser de natureza contínua e não estar sujeita aos constrangimentos que as densidades artificiais exigem, conforme se verá adiante. O vetor das variáveis de projeto áreas define-se de acordo com a equação (4.2).

$$\mathbf{x}_A = [x_{A_1}, \dots, x_{A_e}] \quad (4.2)$$

Utilizando ambas as variáveis, as áreas são responsáveis pela definição da topologia ótima e as densidades responsáveis pela distribuição ótima de material pela estrutura. Nestes problemas o vetor das variáveis de projeto define-se de acordo com a equação (4.3).

$$\mathbf{x}_{\rho,A} = [x_{\rho_{1,1}}, \dots, x_{\rho_{1,m}}, x_{A_1}, \dots, x_{\rho_{e,1}}, \dots, x_{\rho_{e,m}}, x_{A_e}] \quad (4.3)$$

4.1.2 Função Objetivo

Os problemas que se pretendem resolver no decorrer desta otimização têm como objetivo a redução da massa da estrutura reticulada. A equação (4.4) permite calcular a função objetivo.

$$M(\mathbf{x}_\rho, \mathbf{x}_A) = \sum_{e=1}^{NE} \rho_e(\mathbf{x}_\rho) L_e x_{A_e} \quad (4.4)$$

Onde ρ_e é a densidade específica do material no elemento e e depende das variáveis de densidade artificial, \mathbf{x}_ρ , através de uma lei de interpolação. L_e é o comprimento de cada barra da estrutura, que corresponde ao comprimento do elemento finito. Por último x_{A_e} é a variável da área da secção do elemento e .

4.1.3 Constrangimentos

As tensões nas barras da treliça não podem ultrapassar os valores admissíveis ou de cedência do material. No entanto este tipo de constrangimentos requer um tratamento especial. Conforme foi referido no capítulo 2.3.3, aplicam-se algumas estratégias que permitem obter um constrangimento contínuo e diferenciável, definido de acordo com a equação (4.5):

$$g_{e,l}^\sigma = \left(\frac{\sigma_e}{\bar{\sigma}_e} \right)^2 - 1 \leq 0 \quad (4.5)$$

Para garantir que a solução do problema contínuo é análoga à solução do problema discreto, deve-se penalizar a seleção dos valores intermédios de densidade artificial, de modo levar as variáveis para os seus valores limite, 0 ou 1. Para tal foi introduzido um

constrangimento g^ε que consiste no somatório de termos quadráticos, ψ , normalizado e controlado por um parâmetro ε . Este constrangimento é aplicado qualquer que seja a lei de interpolação, e é definido de acordo com a equação (4.6).

$$g^\varepsilon = \frac{\psi - \varepsilon}{\varepsilon} = \frac{\sum_{e=1}^{NE} \sum_{m=1}^{N_{mat}} \left[(\bar{x}_\rho - x_{\rho_{e,m}}) (x_{\rho_{e,m}} - \underline{x}_\rho) \right] - \varepsilon}{\varepsilon} \leq 0 \quad (4.6)$$

Quanto mais intermédio for o valor de $x_{\rho_{e,m}}$, mais se tende a violar o constrangimento. A tolerância deste constrangimento é ajustada pelo parâmetro ε . Quando este toma valores perto de 0, não existe tolerância relativamente a valores intermédios, o que faz com que as soluções admissíveis sejam tendencialmente 0 ou 1, i.e., idênticas às do problema discreto. Pelo contrário, caso se queira considerar este constrangimento sempre inativo, o valor de ε tem de ser superior a ψ_{max} , definido em (4.7), ou seja $\varepsilon = \zeta \psi_{max}$, com $\zeta > 1$. Neste caso as soluções do problema admitem densidades intermédias.

$$\psi_{max} = NE \left[\left(\bar{x}_\rho - \frac{\bar{x}_\rho - \underline{x}_\rho}{2} \right) \left(\frac{\bar{x}_\rho - \underline{x}_\rho}{2} - \underline{x}_\rho \right) \right] \simeq NE [(\bar{x}_\rho - 0,5)(0,5 - \underline{x}_\rho)] \quad (4.7)$$

Relativamente à seleção das propriedades do material, serão utilizadas as leis de interpolação DMO, SIMP e SFP. Para a lei DMO, caso não seja imposta nenhuma restrição no somatório das funções de peso, esta pode extrapolar as propriedades em vez de interpolar devidamente entre as propriedades dos materiais existentes. Por isso, é necessário introduzir um constrangimento por elemento, g^{mat} (4.8) tal que,

$$g_e^{mat}(\mathbf{x}_\rho) = \sum_{m=1}^{N_{mat}} x_{\rho_{e,m}} \leq 1 \quad (4.8)$$

Desta forma garante-se que apenas uma das fases de material é seleccionada, ou pode também resultar vazio. No entanto, para evitar singularidades nas matrizes de rigidez, a variável de densidade tem um limite inferior próximo de 0. Assim, a soma das variáveis é sempre ligeiramente superior a 1. O constrangimento passa então a ser definido de acordo com a equação (4.9).

$$g_e^{mat}(\mathbf{x}_\rho) = \sum_{m=1}^{N_{mat}} x_{\rho_{e,m}} \leq (1 + (N_{mat} - 1)\underline{x}_\rho) \quad (4.9)$$

Este constrangimento apenas é adicionado quando se utiliza a lei DMO para três ou mais fases, ou seja, quando são necessárias mais de duas variáveis de densidade artificial.

4.2 Categorias dos Problemas de Otimização

Como referido anteriormente, há três grandes categorias onde se vão inserir as formulações analisadas no decorrer deste capítulo: (1) problemas formulados com a variável densidade, (2) problemas formulados com a variável área, (3) problemas formulados com as variáveis densidade e área. Apesar das diferentes categorias, o problema apresentado é sempre o de minimização de massa com constrangimentos de tensão.

Na primeira categoria, serão resolvidos problemas do tipo SMTO, MMTO2 e MMTO3. Nos dois primeiros problemas serão utilizadas duas leis de interpolação diferentes, DMO e SIMP, e para três materiais sólidos utiliza-se para além destas leis ainda a lei de interpolação SFP. Na segunda categoria, apenas se resolve um problema SMTO, não havendo necessidade de recorrer às leis de interpolação. Na terceira categoria, resolvem-se problemas do tipo MMTO2 e MMTO3, recorrendo às leis de interpolação DMO e SIMP, onde estas farão a interpolação apenas de fases sólidas.

Na Tabela 4.2 está apresentado um resumo com o número de variáveis, n^v , e o número de constrangimentos, n^c , de cada categoria, dependendo da lei de interpolação utilizada. NE e LC são o número de elementos e de casos de carga do problema, respetivamente.

Tabela 4. 2 – Número de variáveis de projeto, n^v , e de constrangimento, n^c , consoante o problema considerado.

		SMTO		MMTO2		MMTO3		
		DMO	SIMP	DMO	SIMP	DMO	SIMP	SFP
\mathbf{x}_ρ	n^v	NE		$2NE$		$3NE$		$2NE$
	n^c	$NE \times LC + 1$		$NE \times LC + NE + 1$	$NE \times LC + 1$	$NE \times LC + NE + 1$	$NE \times LC + 1$	
\mathbf{x}_A	n^v	NE		N/A				
	n^c	$NE \times LC$						
$\mathbf{x}_{\rho,A}$	n^v	N/A		$2NE$		$3NE$		\equiv SIMP
	n^c			$NE \times LC + 1$	$NE \times LC + NE + 1$	$NE \times LC + 1$		

4.2.1 Formulação com variável densidade artificial

Nestes problemas o número de fases consideradas é o número de fases sólidas mais a fase de vazio, ou seja $N_f = N_{mat} + 1$.

4.2.1.1 SMTO

Para problemas de *single material* a formulação do problema de otimização com as leis de interpolação DMO e SIMP escreve-se da mesma maneira, e está apresentada na Tabela 4.3.

Tabela 4. 3 – Formulação do problema SMTO, utilizando a densidade artificial como variável de projeto.

$$\begin{array}{l}
 \min_{\mathbf{x}_\rho, x_{\rho_e} \in]0,1]} M(\mathbf{x}_\rho) = \sum_{e=1}^{NE} \rho_e(\mathbf{x}_\rho) L_e A_e \\
 s. a. \\
 \mathbf{K} \mathbf{u}_l = \mathbf{f}_l \\
 g_{e,l}^\sigma(\mathbf{x}_\rho, \mathbf{u}(\mathbf{x}_\rho)) = \left(\frac{\sigma_{e,l}(\mathbf{u})}{\bar{\sigma}_e(\mathbf{x}_\rho)} \right)^2 - 1 \leq 0 \\
 g^\varepsilon(\mathbf{x}_\rho) = \frac{\psi - \varepsilon}{\varepsilon} \leq 0, \quad \varepsilon \in]0, +\infty[\\
 \text{Onde:} \\
 \mathbf{K} = \sum_{e=1}^{NE} \mathbf{K}_e; \quad \mathbf{K}_e = \mathbf{K}_e(\mathbf{E}_e(\mathbf{x}_\rho)) \\
 \psi(\mathbf{x}_\rho) = \sum_{e=1}^{NE} \sum_{m=1}^{N_{mat}} \left[(\bar{x}_\rho - x_{\rho_{e,m}}) (x_{\rho_{e,m}} - \underline{x}_\rho) \right] \\
 e = 1, \dots, NE \quad m = 1, \dots, N_{mat} \quad l = 1, \dots, LC
 \end{array}$$

Onde e é o número de elementos finitos que discretiza a estrutura reticulada, m o número de fases de material sólidas e l o número de casos de carga. Para um problema de SMTO existe apenas uma fase sólida pelo que se considera $m = 1$. Em *single material* existe apenas uma variável, x_{ρ_e} , por cada elemento, pelo que não é necessário considerar o constrangimento g_e^{mat} no caso da lei DMO.

As quantidades a interpolar são ρ_e , E_e e $\bar{\sigma}_e$. As leis de interpolação utilizadas para definir estas propriedades estão apresentadas na Tabela 4.4. Onde $\chi = \rho, E, \bar{\sigma}$ com $p =$

p_1, p_2, p_3 , respetivamente. χ^0 representa as propriedades da fase de vazio e χ^1 as propriedades da fase sólida.

Tabela 4. 4 – Propriedades do material interpoladas com a lei DMO e SIMP, para SMTO. Leia-se χ como ρ, E e $\bar{\sigma}$.

Lei	Classe	Interpolação
DMO	SMTO	$\chi_e(x_{\rho_{e,1}}) = \chi^0 + x_{\rho_{e,1}}^p (\chi^1 - \chi^0)$
SIMP	SMTO	$\chi_e(x_{\rho_{e,1}}) = x_{\rho_{e,1}}^p \chi^1 + (1 - x_{\rho_{e,1}}^p) \chi^0$

4.2.1.2 MMTOM

Para os problemas *multimaterial* com lei DMO surge a necessidade de adicionar mais um constrangimento por cada elemento finito. Na Tabela 4.5 é apresentada a formulação para problemas *multimaterial*, com a variável densidade artificial, para a lei DMO e para as leis SIMP/SFP (estas duas últimas escrevem-se da mesma maneira).

Tabela 4. 5 – Formulação dos problemas MMTOM, utilizando a densidade artificial como variável de projeto.

	DMO	SIMP/SFP
	$\min_{\mathbf{x}_\rho, x_{\rho_e} \in]0,1]} M(\mathbf{x}_\rho) = \sum_{e=1}^{NE} \rho_e(\mathbf{x}_\rho) L_e A_e$ <p>s. a.</p> $\mathbf{K}\mathbf{u}_l = \mathbf{f}_l$ $g_{e,l}^\sigma(\mathbf{x}_\rho, \mathbf{u}(\mathbf{x}_\rho)) = \left(\frac{\sigma_{e,l}(\mathbf{u})}{\bar{\sigma}_e(\mathbf{x}_\rho)} \right)^2 - 1 \leq 0$ $g^\varepsilon(\mathbf{x}_\rho) = \frac{\psi - \varepsilon}{\varepsilon} \leq 0, \quad \varepsilon \in]0, +\infty[$	
	$g_e^{mat}(\mathbf{x}_\rho) = \sum_{m=1}^{N_{mat}} x_{\rho_{e,m}} - (1 + (N_{mat} - 1)x_\rho) \leq 0$	N/A
	Onde:	
	$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^{NE} \mathbf{K}_e; \quad \mathbf{K}_e = \mathbf{K}_e(\mathbf{E}_e(\mathbf{x}_\rho))$	
	$\psi(\mathbf{x}_\rho) = \sum_{e=1}^{NE} \sum_{m=1}^{N_{mat}} [(\bar{x}_\rho - x_{\rho_{e,m}})(x_{\rho_{e,m}} - x_\rho)]$	
	$e = 1, \dots, NE \quad m = 1, \dots, N_{mat} \quad l = 1, \dots, LC$	

As formulações para duas ou três fases de material sólido, MMTO2 e MMTO3, são análogas, alterando-se apenas a interpolação dos materiais para incluir mais termos. Utilizando a lei DMO e SIMP é possível escrever as expressões para N_{mat} fases de material arbitrárias, sendo que para a lei SFP o mesmo já não é possível. A lei SFP é adaptada para resolver problemas apenas com um determinado número de fases.

As quantidades ρ_e, E_e e $\bar{\sigma}_e$ são interpoladas de maneira diferente consoante a lei de interpolação utilizada, apresentadas na Tabela 4.6, onde $\chi = \rho, E, \bar{\sigma}$ com $p = p_1, p_2, p_3$, respetivamente. χ^0 representa as propriedades da fases de vazio, χ^1 as propriedades da fase sólida 1 e χ^2 as propriedades da fase sólida 2.

Tabela 4. 6 – Propriedades do material interpoladas com a lei DMO, SIMP e SFP, para MMTO2 e MMTO3. Leia-se χ como ρ, E e $\bar{\sigma}$.

Lei	Classe	Interpolação
DMO	MMTO m	$\chi_e(\mathbf{x}_\rho) = \chi^0 + \sum_{m=1}^{N_{mat}} x_{\rho_{e,m}}^p (\chi^m - \chi^0)$
	MMTO2	$\chi_e(\mathbf{x}_\rho) = x_{\rho_{e,2}}^p [x_{\rho_{e,1}}^p \chi^1 + (1 - x_{\rho_{e,1}}^p) \chi^2] + (1 - x_{\rho_{e,2}}^p) \chi^0$
SIMP	MMTO3	$\chi_e(\mathbf{x}_\rho) = x_{\rho_{e,3}}^p [x_{\rho_{e,2}}^p [x_{\rho_{e,1}}^p \chi^1 + (1 - x_{\rho_{e,1}}^p) \chi^2] + (1 - x_{\rho_{e,2}}^p) \chi^3] + (1 - x_{\rho_{e,3}}^p) \chi^0$
SFP	MMTO3	$\chi_e(\mathbf{x}_\rho) = x_{\rho_{e,1}}^p [x_{\rho_{e,2}}^p \chi^1 + (1 - x_{\rho_{e,2}}^p) \chi^2] + (1 - x_{\rho_{e,1}}^p) [x_{\rho_{e,2}}^p \chi^3 + (1 - x_{\rho_{e,2}}^p) \chi^0]$

4.2.2 Formulação com variável área

A variável de projeto agora é a área da secção do elemento e , x_{A_e} , e considera-se todo o domínio de projeto com o mesmo material sólido. Quanto aos constrangimentos, agora apenas se aplica o constrangimento de tensão, $g_{e,l}^\sigma$, já que os constrangimentos anteriores, g_e^{mat} e g_e^ε , dependem apenas da variável densidade fictícia. Como as características do material são constantes, não há necessidade de recorrer a leis de interpolação. Note-se que se trata de um problema SMTO pois é uma otimização

meramente topológica. A Tabela 4.7 apresenta a formulação final do problema com as áreas como variável de projeto.

Tabela 4.7 – Formulação do problema SMTO, utilizando a área como variável de projeto.

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\mathbf{x}_A, x_{A_e} \in]0, A_i]} M(\mathbf{x}_A) = \sum_{e=1}^{NE} \rho_e L_e x_{A_e} \\ s. a. \\ \mathbf{K}\mathbf{u}_l = \mathbf{f}_l \\ g_{e,l}^{\sigma}(\mathbf{u}(\mathbf{x}_A)) = \left(\frac{\sigma_{e,l}(\mathbf{u})}{\bar{\sigma}_e} \right)^2 - 1 \leq 0 \\ e = 1, \dots, NE \quad l = 1, \dots, LC \end{array} \right.$$

4.2.3 Formulação com variável densidade artificial e área

Esta formulação permite otimizar estruturas reticuladas a nível dimensional, topológico (partindo de uma *ground structure*) e com seleção de material. O problema está ainda sujeito a constrangimentos de tensão. Esta formulação é a que apresenta nesta dissertação o maior potencial. Os problemas resolvidos são sempre MMTO pois tem-se a seleção no mínimo de dois materiais (através da variável de densidade artificial) sendo a topologia definida a partir da variável de área. Comparativamente ao caso de existir apenas variável de densidade, o presente caso tem a vantagem de poder utilizar-se uma variável de densidade a menos para interpolar entre o mesmo número de fases sólidas porque a topologia é definida pela variável de área. São utilizadas as leis DMO e SIMP para efeitos comparativos. Com duas variáveis de densidade interpolam-se com estas duas leis até três materiais diferentes. A lei SFP, também com duas variáveis de densidade, teria vantagem apenas se fosse necessário interpolar entre quatro materiais o que não é o caso considerado nesta dissertação.

4.2.3.1 MMTO2

As leis DMO e SIMP vão interpolar entre duas fases sólidas (problema tipo MMS), utilizando apenas uma variável de densidade, não havendo por isso necessidade de adicionar o constrangimento g_e^{mat} ao utilizar a lei DMO. Na Tabela 4.8 é apresentada a formulação com a densidade artificial e a área como variáveis de projeto, para problemas com duas fases sólidas disponíveis.

Tabela 4. 8 – Formulação do problema MMTO2, utilizando a densidade artificial e a área como variáveis de projeto.

$$\begin{array}{l}
 \min_{\substack{\mathbf{x}_\rho, \mathbf{x}_A \\ x_{\rho_e} \in]0,1] \\ x_{A_e} \in]0,A_i]}} M(\mathbf{x}_\rho, \mathbf{x}_A) = \sum_{e=1}^{NE} \rho_e(\mathbf{x}_\rho) L_e x_{A_e} \\
 \text{s. a.} \\
 \mathbf{K}\mathbf{u}_l = \mathbf{f}_l \\
 g_{e,l}^\sigma(\mathbf{x}_\rho, \mathbf{u}(\mathbf{x}_\rho, \mathbf{x}_A)) = \left(\frac{\sigma_{e,l}(\mathbf{u})}{\bar{\sigma}_e(\mathbf{x}_\rho)} \right)^2 - 1 \leq 0 \\
 g^\varepsilon(\mathbf{x}_\rho) = \frac{\psi - \varepsilon}{\varepsilon} \leq 0, \quad \varepsilon \in]0, +\infty[\\
 \text{Onde:} \\
 \mathbf{K} = \sum_{e=1}^{NE} \mathbf{K}_e; \quad \mathbf{K}_e = \mathbf{K}_e(\mathbf{E}_e(\mathbf{x}_\rho)) \\
 \psi(\mathbf{x}_\rho) = \sum_{e=1}^{NE} \sum_{m=1}^{N_{mat}} \left[(\bar{x}_\rho - x_{\rho_{e,m}}) (x_{\rho_{e,m}} - x_\rho) \right] \\
 e = 1, \dots, NE \quad m = 1, \dots, N_{mat} \quad l = 1, \dots, LC
 \end{array}$$

As quantidades ρ_e, E_e e $\bar{\sigma}_e$ são interpoladas de maneira diferente consoante a lei de interpolação escolhida, veja-se a Tabela 4.9, onde $\chi = \rho, E, \bar{\sigma}$ com $p = p_1, p_2, p_3$, respetivamente.

Tabela 4. 9 – Propriedades do material interpoladas com as leis DMO e SIMP, para MMS2. Leia-se χ como ρ, E e $\bar{\sigma}$.

Lei	Classe	Interpolação
DMO	MMS2 ¹	$\chi_e(\mathbf{x}_\rho) = \chi^2 + x_{\rho_{e,1}}^p (\chi^1 - \chi^2)$
SIMP	MMS2	$\chi_e(\mathbf{x}_\rho) = x_{\rho_{e,1}}^p \chi^1 + (1 - x_{\rho_{e,1}}^p) \chi^2$

¹ A classe é MMS2, i.e., *Multi Material Selection* com 2 fases de material sólido, porque não existe fase de vazio na interpolação.

4.2.3.2 MMTO3

Neste problema, à semelhança do problema MMTO2, as densidades são responsáveis pela seleção apenas de fases sólidas, neste caso a escolha é feita de entre três fases disponíveis (problema MMS3). Neste caso, como se utilizam duas variáveis de densidade, é necessário acrescentar o constrangimento g_e^{mat} quando se utiliza a lei DMO, isto para garantir que não há extrapolação de propriedades. Na Tabela 4.10 é apresentada a formulação para este caso.

Tabela 4. 10 – Formulação do problema MMTO3, utilizando a densidade artificial e a área como variáveis de projeto.

	DMO	SIMP
$\min_{\substack{\mathbf{x}_\rho, \mathbf{x}_A \\ x_\rho \in]0,1] \\ x_A \in]0,A_i]}} M(\mathbf{x}_\rho, \mathbf{x}_A) = \sum_{e=1}^{NE} \rho_e(\mathbf{x}_\rho) L_e x_{A_e}$ <p style="text-align: center;"><i>s. a.</i></p> $\mathbf{K}\mathbf{u}_l = \mathbf{f}_l$ $g_{e,l}^\sigma(\mathbf{x}_\rho, \mathbf{u}(\mathbf{x}_\rho, \mathbf{x}_A)) = \left(\frac{\sigma_{e,l}(\mathbf{u})}{\bar{\sigma}_e(x_\rho)} \right)^2 - 1 \leq 0$ $g^\varepsilon(\mathbf{x}_\rho) = \frac{\psi - \varepsilon}{\varepsilon} \leq 0, \quad \varepsilon \in]0, +\infty[$ $g_e^{mat}(\mathbf{x}_\rho) = \sum_{m=1}^{N_{mat}} x_{\rho_{e,m}} - (1 + (N_{mat} - 1)x_\rho) \leq 0$ <p style="text-align: center;">Onde:</p> $\mathbf{K} = \sum_{e=1}^{NE} \mathbf{K}_e; \quad \mathbf{K}_e = \mathbf{K}_e(\mathbf{E}_e(\mathbf{x}_\rho))$ $\psi(\mathbf{x}_\rho) = \sum_{e=1}^{NE} \sum_{m=1}^{N_{mat}} [(\bar{x}_\rho - x_{\rho_{e,m}})(x_{\rho_{e,m}} - x_\rho)]$ <p style="text-align: center;">$e = 1, \dots, NE \quad m = 1, \dots, N_{mat} \quad l = 1, \dots, LC$</p>		N/A

As quantidades ρ_e, E_e e $\bar{\sigma}_e$ são calculadas consoante a lei de interpolação utilizada, veja-se a Tabela 4.11, onde $\chi = \rho, E, \bar{\sigma}$ com $p = p_1, p_2, p_3$, respetivamente.

Tabela 4. 11 – Propriedades do material interpoladas com a lei DMO e SIMP, para MMS3. Leia-se χ como ρ, E e $\bar{\sigma}$.

Lei	Classe	Interpolação
DMO	MMS3	$\chi_e(\mathbf{x}_\rho) = \chi^3 + x_{\rho_{e,1}}^p (\chi^1 - \chi^3) + x_{\rho_{e,2}}^p (\chi^2 - \chi^3)$
SIMP	MMS3	$\chi_e(\mathbf{x}_\rho) = x_{\rho_{e,2}}^p [x_{\rho_{e,1}}^p \chi^1 + (1 - x_{\rho_{e,1}}^p) \chi^2] + (1 - x_{\rho_{e,2}}^p) \chi^3$

4.3 Estratégia de Penalização

A estratégia de penalização consiste num conjunto de técnicas que visam garantir que a solução do problema relaxado tende para a solução do problema discreto. Por outras palavras, estas técnicas são responsáveis por encostar as variáveis nos seus valores limite, 0 ou 1, i.e., desfavorecem os valores de densidade intermédios. A variação dos expoentes de penalização utilizados nas leis de interpolação fazem parte destas técnicas assim como também o constrangimento g^ε . Tanto a variação dos expoentes de penalização como o constrangimento g^ε serão aplicados utilizando uma *continuation approach*, o que também ajuda o algoritmo a escapar mais facilmente a mínimos locais. Assim os expoentes vão variar gradualmente com as iterações, de um valor inferior, onde o problema não está penalizado, até a um valor superior de variação. Pelo contrário, ε vai começar num valor suficientemente elevado de modo a que o constrangimento esteja inativo e, depois, vai sendo gradualmente reduzido até ao valor mínimo especificado. A construção da estratégia de penalização proposta nesta dissertação é inspirada em Pratas (2019) [18]. Como valor acrescentado ao trabalho já realizado anteriormente, destaca-se a elaboração de uma estratégia mais consolidada e mais independente dos problemas a resolver. De seguida, descreve-se de forma mais detalhada em que consiste esta estratégia.

O intervalo de iterações total, I_{total} , é dividido em dois intervalos, I_1 e I_2 . No primeiro intervalo apenas vão variar os expoentes p que constam na lei de interpolação usada de modo que os seus valores partem de um valor mínimo especificado até alcançarem um valor máximo definido e, depois, ficam constantes durante o segundo intervalo de iterações. O constrangimento g^ε apenas é ativado no segundo intervalo, e durante estas restantes iterações o parâmetro ε vai descer até ser atingido o seu valor mínimo especificado. O valores inicial e final dos expoentes p_1, p_2, p_3 e ε , conforme usados nesta dissertação, estão apresentados na Tabela 4.12.

Tabela 4. 12 – Variação dos expoentes de penalização e parâmetro epsilon.

Expoente	p_1	p_2	p_3	ε
Valor inicial	1	1,0 a 1,1	1	$(1 + \delta)\psi_{i_{start}^\varepsilon - 1}$
Valor final	1	4	3,5	0,001

No primeiro intervalo, I_1 , os expoentes mantêm-se constantes durante uma percentagem de iterações iniciais $\delta\%$ de modo a que o algoritmo se ajuste ao problema não penalizado. Estipulou-se o valor de 5%, i.e. $\delta\% = 0,05I_1$. A ativação do constrangimento g^ε é feita na iteração $i = i_{start}^\varepsilon$, onde o valor de ε toma o seu valor inicial, que é o valor ψ da iteração anterior, com uma pequena folga, ou seja $(1 + \delta)\psi_{i_{start}-1}^\varepsilon$. Considera-se suficiente $\delta = 0,001$. Esse parâmetro ε reduz-se até ao seu valor mínimo na iteração i_{end}^ε . Considerou-se também $i_{start}^\varepsilon = I_1 + 1$, e $i_{end}^\varepsilon = I_1 + 0,7I_2$. Assim dá-se uma margem ao algoritmo para se ajustar aos valores finais.

O expoente p_1 é responsável por penalizar a densidade específica. Este mantém-se constante ao longo das iterações pois valores superiores a 1 iriam valorizar valores de densidade intermédia, o que não é o pretendido. O expoente p_2 penaliza a rigidez para valores intermédios de densidade e para a maior parte dos exemplos partiu-se de 1,1, salvo raras exceções de onde se partiu de 1,0 ou 1,05. Como valor final considerou-se 4. O expoente p_3 é usado na interpolação da tensão admissível e varia entre 1 e 3,5. Considera-se $p_3 < p_2$ para obter uma relaxação apropriada dos constrangimentos de tensão, isto surge aqui como uma variante do *qp-approach*. No decorrer das iterações esta desigualdade é garantida. É de notar que mesmo que ambos os expoentes partam de 1, p_2 aumenta mais rapidamente que p_3 , pelo que se mantém a desigualdade.

Na Figura 4.1 pode observar-se as superfícies de interpolação das propriedades do material, para duas fases de material, para a lei DMO, com os valores finais do expoente p de penalização.

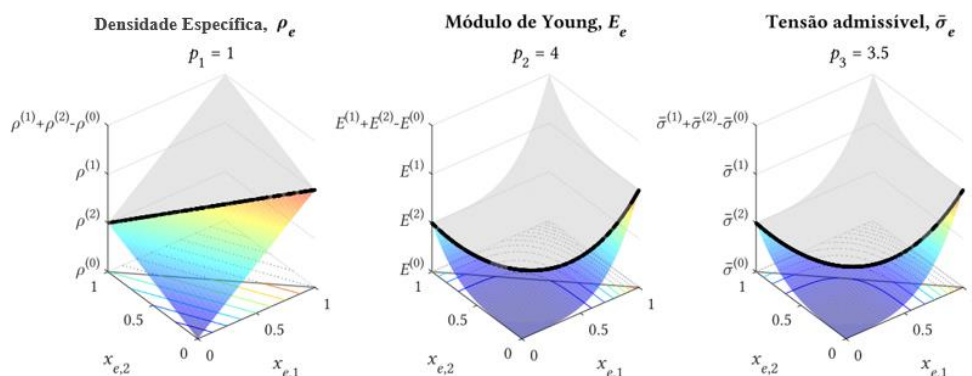


Figura 4. 1 – Superfícies de interpolação das características do material, para os valores finais dos expoentes de penalização. Adaptado de [18].

Perante esta estratégia de penalização existem vários parâmetros que podem ser alterados caso os resultados obtidos não sejam satisfatórios. Para a resolução dos problemas apresentados nesta dissertação optou-se por uniformizar os valores dos parâmetros da estratégia de penalização sempre que possível. Na Tabela 4.13 são apresentados os parâmetros que foram considerados constantes em todos os problemas resolvidos nesta dissertação e os seus respetivos valores. Qualquer um destes valores pode ser ajustado caso os resultados obtidos em outros problemas assim o exijam. Na Figura 4.2 pode observar-se graficamente a estratégia de variação dos expoentes de penalização e do constrangimento g^ϵ , ao longo das iterações (*continuation approach* proposta).

Tabela 4. 13 – Parâmetros considerados constantes e respetivos valores.

I_2	$\delta\%$	i_{start}^ϵ	i_{end}^ϵ
$I_1/2,5$	0,05	$I_1 + 1$	$I_1 + 0,7 I_2$

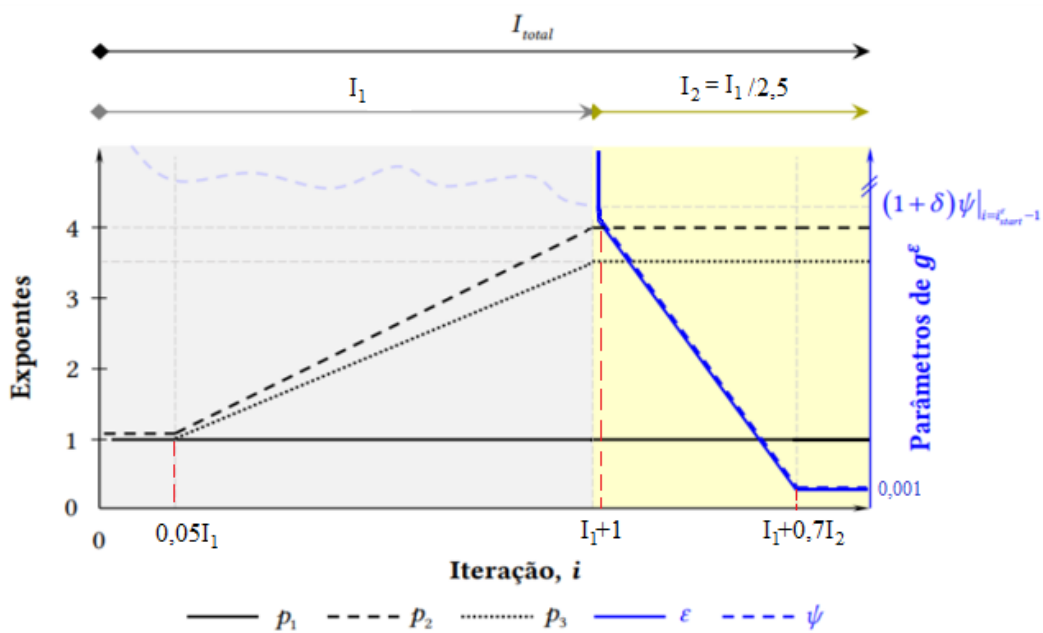


Figura 4. 2 – Representação gráfica da estratégia de penalização. Adaptado de [18].

5. Cálculo das Sensibilidades

Um algoritmo de otimização baseado no gradiente depende das propriedades de continuidade e diferenciabilidade das funções objetivo e dos constrangimentos. A informação de declive e curvatura das funções obtém-se através do estudo das derivadas das funções. Assim, quando se resolve um problema de otimização utilizando este tipo de algoritmo, é necessário calcular as sensibilidades destas funções em relação às variáveis de projeto do problema.

As sensibilidades da função objetivo, massa, e dos constrangimentos g^{mat} e g^{ε} , definidos no capítulo anterior, serão calculadas utilizando as regras de derivação direta pois as expressões analíticas estão disponíveis e são simples. O caso do constrangimento de tensão não é tão simples pois existe dependência implícita e explícita das variáveis de projeto. A tensão é função do campo de deslocamentos que, por sua vez, é solução das equações de equilíbrio do problema da elasticidade. Estes deslocamentos, por sua vez, dependem das variáveis de projeto, as densidades fictícias \mathbf{x}_ρ que são utilizadas nas leis de interpolação das propriedades elásticas dos materiais e as áreas das barras \mathbf{x}_A . Sendo assim, utiliza-se a regra da cadeia na diferenciação da tensão e introduz-se também uma variável adjunta (método adjunto) no cálculo dessa derivada. Este método analítico simplifica o cálculo de sensibilidades pois o número de constrangimentos de tensão no problema, embora seja elevado, é inferior ao número total de variáveis de projeto.

Neste capítulo utiliza-se uma formulação do problema de otimização onde as equações surgem na sua forma discretizada pressupondo-se assim a utilização de uma malha de elementos finitos para a resolução do problema.

5.1 Função objetivo

A função objetivo é a massa total da estrutura reticulada obtida através do somatório da massa de cada barra (5.1). Como cada barra da *ground structure* é discretizada por um elemento finito, esse somatório vai até ao número total de elementos finitos, NE .

$$M(\mathbf{x}_\rho, \mathbf{x}_A) = \sum_{e=1}^{NE} \rho_e(\mathbf{x}_\rho) L_e x_{Ae} \quad (5.1)$$

Onde $\rho_e(\mathbf{x}_\rho)$ e L_e são a densidade específica do material e o comprimento do elemento finito e , respetivamente. É necessário calcular a derivada em função da densidade artificial x_{ρ_e} e da área x_{Ae} . A expressão da derivada da função objetivo em função de cada uma das variáveis de projeto está apresentada na Tabela 5.1.

Tabela 5. 1 – Sensibilidade da função objetivo em relação às variáveis de projeto.

Densidades, $\frac{dM}{dx_\rho}$	Áreas, $\frac{dM}{dx_A}$
$\frac{\partial M}{\partial x_{\rho_{e,m}}} = \frac{\partial \rho_e(\mathbf{x}_\rho)}{\partial x_{\rho_{e,m}}} L_e x_{Ae}$	$\frac{\partial M}{\partial x_{Ae}} = \rho_e(\mathbf{x}_\rho) L_e$

A densidade específica $\rho_e(\mathbf{x}_\rho)$ a atribuir a cada barra depende da lei de interpolação de material utilizada e, conseqüentemente, a expressão da derivada $\partial \rho_e(\mathbf{x}_\rho) / \partial x_{\rho_{e,m}}$ depende dessa lei escolhida conforme se sistematiza de seguida.

5.1.1 DMO

Para a lei de interpolação DMO a densidade específica do material é calculada de acordo com a equação (5.2), sendo a sua derivada calculada de acordo com (5.3).

$$\rho_e(\mathbf{x}_\rho) = \rho^0 + \sum_{m=1}^{N_{mat}} x_{\rho_{e,m}}^{p_1} (\rho^m - \rho^0) \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial \rho_e(\mathbf{x}_\rho)}{\partial x_{\rho_{e,m}}} = p_1 x_{\rho_{e,m}}^{p_1-1} (\rho^m - \rho^0) \quad (5.3)$$

5.1.2 SIMP

Utilizando a lei de interpolação SIMP não é claro definir a densidade específica para um número arbitrário de fases de material.

Assim, para duas fases de material, $N_f = 2$, a densidade calcula-se de acordo com a equação (5.4) e a sua derivada de acordo com a equação (5.5).

$$\rho_e(x_{\rho_{e,1}}) = x_{\rho_{e,1}}^{p_1} \rho^1 + (1 - x_{\rho_{e,1}}^{p_1}) \rho^2 \quad (5.4)$$

$$\frac{\partial \rho_e(x_{\rho_{e,1}})}{\partial x_{\rho_{e,1}}} = p_1 x_{\rho_{e,1}}^{p_1-1} (\rho^1 - \rho^2) \quad (5.5)$$

Para três fases de material, $N_f = 3$, a densidade calcula-se de acordo com a equação (5.6) e as suas derivadas de acordo com as equações (5.7) e (5.8).

$$\rho_e(\mathbf{x}_\rho) = x_{\rho_{e,2}}^{p_1} [x_{\rho_{e,1}}^{p_1} \rho^1 + (1 - x_{\rho_{e,1}}^{p_1}) \rho^2] + (1 - x_{\rho_{e,2}}^{p_1}) \rho^3 \quad (5.6)$$

$$\frac{\partial \rho_e(\mathbf{x}_\rho)}{\partial x_{\rho_{e,1}}} = p_1 x_{\rho_{e,1}}^{p_1-1} [x_{\rho_{e,2}}^{p_1} (\rho^1 - \rho^2)] \quad (5.7)$$

$$\frac{\partial \rho_e(\mathbf{x}_\rho)}{\partial x_{\rho_{e,2}}} = p_1 x_{\rho_{e,2}}^{p_1-1} [x_{\rho_{e,1}}^{p_1} \rho^1 + (1 - x_{\rho_{e,1}}^{p_1}) \rho^2 - \rho^3] \quad (5.8)$$

Para quatro fases de material, $N_f = 4$, a densidade calcula-se de acordo com a equação (5.9) e as suas derivadas de acordo com as equações (5.10), (5.11) e (5.12).

$$\rho_e(\mathbf{x}_\rho) = x_{\rho_{e,3}}^{p_1} [x_{\rho_{e,2}}^{p_1} [x_{\rho_{e,1}}^{p_1} \rho^1 + (1 - x_{\rho_{e,1}}^{p_1}) \rho^2] + (1 - x_{\rho_{e,2}}^{p_1}) \rho^3] + (1 - x_{\rho_{e,3}}^{p_1}) \rho^4 \quad (5.9)$$

$$\frac{\partial \rho_e(\mathbf{x}_\rho)}{\partial x_{\rho_{e,1}}} = p_1 x_{\rho_{e,1}}^{p_1-1} [x_{\rho_{e,2}}^{p_1} x_{\rho_{e,3}}^{p_1} (\rho^1 - \rho^2)] \quad (5.10)$$

$$\frac{\partial \rho_e(\mathbf{x}_\rho)}{\partial x_{\rho_{e,2}}} = p_1 x_{\rho_{e,2}}^{p_1-1} x_{\rho_{e,3}}^{p_1} [x_{\rho_{e,1}}^{p_1} \rho^1 + (1 - x_{\rho_{e,1}}^{p_1}) \rho^2 - \rho^3] \quad (5.11)$$

$$\frac{\partial \rho_e(\mathbf{x}_\rho)}{\partial x_{\rho_{e,3}}} = p_1 x_{\rho_{e,3}}^{p_1-1} [x_{\rho_{e,2}}^{p_1} (x_{\rho_{e,1}}^{p_1} \rho^1 + (1 - x_{\rho_{e,1}}^{p_1}) \rho^2) + (1 - x_{\rho_{e,2}}^{p_1}) \rho^3 - \rho^4] \quad (5.12)$$

5.1.3 SFP

Para a lei de interpolação SFP a densidade do material é calculada de acordo com a equação (5.13), sendo as suas derivadas calculadas de acordo com as equações (5.14) e (5.15).

$$\begin{aligned} \rho_e(\mathbf{x}_\rho) = & x_{\rho_{e,1}}^{p_1} [x_{\rho_{e,2}}^{p_1} \rho^1 + (1 - x_{\rho_{e,2}}^{p_1}) \rho^2] \\ & + (1 - x_{\rho_{e,1}}^{p_1}) [x_{\rho_{e,2}}^{p_1} \rho^3 + (1 - x_{\rho_{e,2}}^{p_1}) \rho^4] \end{aligned} \quad (5.13)$$

$$\frac{\partial \rho_e(\mathbf{x}_\rho)}{\partial x_{\rho_{e,1}}} = p_1 x_{\rho_{e,1}}^{p_1-1} [x_{\rho_{e,2}}^{p_1} (\rho^1 - \rho^3) + (1 - x_{\rho_{e,2}}^{p_1}) (\rho^2 - \rho^4)] \quad (5.14)$$

$$\frac{\partial \rho_e(\mathbf{x}_\rho)}{\partial x_{\rho_{e,2}}} = p_1 x_{\rho_{e,2}}^{p_1-1} [x_{\rho_{e,1}}^{p_1} (\rho^1 - \rho^2) + (1 - x_{\rho_{e,1}}^{p_1}) (\rho^3 - \rho^4)] \quad (5.15)$$

5.2 Constrangimento de tensão

O cálculo das sensibilidades do constrangimento de tensão é feito utilizando o método adjunto que é definido de acordo com a equação (5.16), recorde-se também (2.10).

$$\frac{dg_{e,l}^\sigma}{dx_{e,m}} = \frac{\partial g_{e,l}^\sigma}{\partial x_{e,m}} + \boldsymbol{\lambda}_{e,l}^\top \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_{e,m}} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_{e,m}} \mathbf{u}_l \right] \quad (5.16)$$

O vetor de carga \mathbf{f} é definido a partir das forças externas aplicadas que nesta dissertação são assumidas constantes, i.e., não têm dependência das variáveis de projeto. Por isso, a equação (5.16) simplifica-se e tem-se:

$$\frac{dg_{e,l}^\sigma}{dx_{e,m}} = \frac{\partial g_{e,l}^\sigma}{\partial x_{e,m}} - \boldsymbol{\lambda}_{e,l}^\top \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_{e,m}} \mathbf{u}_l \quad (5.17)$$

onde $\boldsymbol{\lambda}_{e,l}$ é o vetor adjunto que é determinado recorrendo à resolução de um problema adjunto, por cada constrangimento, definido de acordo com (5.18):

$$\mathbf{K} \boldsymbol{\lambda}_{e,l} = \mathbf{z}_{e,l}, \quad \mathbf{z}_{e,l} = \left(\frac{\partial g_{e,l}^\sigma}{\partial \mathbf{u}_l} \right)^\top \quad (5.18)$$

O vetor de carga fictícia, $\mathbf{z}_{e,l}$ consiste na derivada explícita do constrangimento de tensão em ordem aos deslocamentos do elemento ao qual o constrangimento diz respeito, no sistema de coordenadas global.

O constrangimento de tensão é definido de acordo com (5.19).

$$g_{e,l}^{\sigma}(\mathbf{x}_{\rho}, \mathbf{u}(\mathbf{x}_{\rho}, \mathbf{x}_A)) = \left(\frac{\sigma_{e,l}(\mathbf{u})}{\bar{\sigma}_e(\mathbf{x}_{\rho})} \right)^2 - 1 \leq 0 \quad (5.19)$$

Onde $\bar{\sigma}_e$ é a tensão de cedência do material, que depende explicitamente da variável de densidade fictícia, e varia consoante a lei de interpolação utilizada. Já a tensão $\sigma_{e,l}$ é a tensão lida no elemento finito, para um determinado caso de carga.

Considerando um elemento finito de barra arbitrário em coordenadas globais, representado na Figura 5.1.

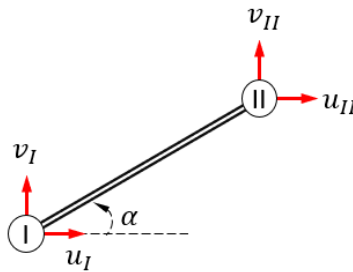


Figura 5. 1 – Elemento finito barra arbitrário.

A tensão no elemento pode ser calculada de acordo com a expressão:

$$\sigma_{e,l} = E_e(\mathbf{x}_{\rho}) \varepsilon_e(\mathbf{u}) \quad (5.20)$$

Onde a extensão axial no elemento, ε_e , é calculada fazendo uma transformação de coordenadas de acordo com:

$$\begin{aligned} \varepsilon_e(\mathbf{u}) &= [\mathbf{L}]\{u'\} = [\mathbf{L}][\mathbf{T}]\{u\} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix} \{u_I \quad v_I \quad u_{II} \quad v_{II}\} \\ \Leftrightarrow \varepsilon_e(\mathbf{u}) &= \frac{(u_I - u_{II})\cos\alpha + (v_I - v_{II})\sin\alpha}{L_e} \end{aligned} \quad (5.21)$$

Logo, substituindo este resultado em (5.20) obtém-se a tensão no elemento de acordo com:

$$\sigma_{e,l} = E_e(\mathbf{x}_{\rho}) \frac{(u_I - u_{II})\cos\alpha + (v_I - v_{II})\sin\alpha}{L_e} \quad (5.22)$$

e o constrangimento de tensão passa estar definido como:

$$g_{e,l}^{\sigma} = \left(\frac{E_e(\mathbf{x}_{\rho}) \varepsilon_e(\mathbf{u})}{\bar{\sigma}_e(\mathbf{x}_{\rho})} \right)^2 - 1 \quad (5.23)$$

É necessário o cálculo da parte implícita e explícita da derivada do constrangimento de tensão relativamente às variáveis de projeto, primeiro e segundo termos do segundo membro da equação (5.17), respetivamente. O vetor adjunto ou de carga fictícia será o mesmo no cálculo da derivada em relação às densidades ou áreas porque depende do deslocamento \mathbf{u} . Já a derivada da matriz de rigidez global \mathbf{K} e a derivada explícita de g são diferentes dependendo da variável de projeto, densidade ou área. Na Tabela 5.2 está apresentado o cálculo das sensibilidades do constrangimento de tensão em função das variáveis de projeto, com um formato que dá para qualquer uma das leis de interpolação que se escolha.

Tabela 5. 2 – Sensibilidades do constrangimento de tensão em relação às variáveis de projeto de densidade e área.

	Densidades, $\frac{dg_{e,l}^{\sigma}}{dx_{\rho}}$	Áreas, $\frac{dg_{e,l}^{\sigma}}{dx_A}$
Implícita	Vetor de carga fictícia, $\mathbf{z}_{e,l}$:	
	$\mathbf{K}\lambda_{e,l} = \mathbf{z}_{e,l} = \left(\frac{\partial g_{e,l}^{\sigma}}{\partial \mathbf{u}_l} \right)^T, \quad \frac{\partial g_{e,l}^{\sigma}}{\partial u} = 2\varepsilon_e(\mathbf{u}) \left(\frac{E_e(\mathbf{x}_{\rho})}{\bar{\sigma}_e(\mathbf{x}_{\rho})} \right)^2 \frac{\partial \varepsilon_e(\mathbf{u})}{\partial u}, \quad \frac{\partial \varepsilon_e(\mathbf{u})}{\partial u} = \frac{1}{L} \begin{Bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \\ -\cos\alpha \\ -\sin\alpha \end{Bmatrix}$	
	Matriz rigidez global em relação às variáveis de projeto, $\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_e}$	
	$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_{\rho_{e,m}}} = \frac{\partial E_e(\mathbf{x}_{\rho})}{\partial x_{\rho_{e,m}}} \frac{x_{A_e}}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_{A_e}} = \frac{E_e(\mathbf{x}_{\rho})}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$
Explícita	Derivada explícita da tensão em relação às variáveis de projeto, $\frac{\partial g_{e,l}^{\sigma}}{\partial x_e}$	
	$\frac{\partial g_{e,l}^{\sigma}}{\partial x_{\rho_{e,m}}} = 2 \frac{E_e(\mathbf{x}_{\rho})}{\bar{\sigma}_e(\mathbf{x}_{\rho})} \varepsilon_e^2 \frac{\frac{\partial E_e(\mathbf{x}_{\rho})}{\partial x_{\rho_{e,m}}} \bar{\sigma}_e(\mathbf{x}_{\rho}) - E_e(\mathbf{x}_{\rho}) \frac{\partial \bar{\sigma}_e(\mathbf{x}_{\rho})}{\partial x_{\rho_{e,m}}}}{\bar{\sigma}_e(\mathbf{x}_{\rho})^2}$	$\frac{\partial g_{e,l}^{\sigma}}{\partial x_{A_e}} = 0$

À semelhança do que se observa para a densidade específica, que consta da função objetivo, o módulo de Young $E_e(\mathbf{x}_{\rho})$ e a tensão admissível $\bar{\sigma}_e(\mathbf{x}_{\rho})$ também dependem da lei utilizada na interpolação do material. Assim, concordemente com a lei utilizada, são apresentadas de seguida as derivadas $\partial E_e(\mathbf{x}_{\rho})/\partial x_{\rho_{e,m}}$ e $\partial \bar{\sigma}_e(\mathbf{x}_{\rho})/\partial x_{\rho_{e,m}}$.

5.2.1 DMO

Para a lei de interpolação DMO o módulo de Young e a tensão admissível do material são calculadas de acordo com a equação (5.24), e as suas derivadas calculadas de acordo com (5.25)

$$\begin{cases} E_e(\mathbf{x}_\rho) = E^0 + \sum_{m=1}^{N_{mat}} x_{\rho_{e,m}}^{p_2} (E^m - E^0) \\ \bar{\sigma}_e(\mathbf{x}_\rho) = \bar{\sigma}^0 + \sum_{m=1}^{N_{mat}} x_{\rho_{e,m}}^{p_3} (\bar{\sigma}^m - \bar{\sigma}^0) \end{cases} \quad (5.24)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial E_e(\mathbf{x}_\rho)}{\partial x_{\rho_{e,m}}} = p_2 x_{\rho_{e,m}}^{p_2-1} (E^m - E^0) \\ \frac{\partial \bar{\sigma}_e(\mathbf{x}_\rho)}{\partial x_{\rho_{e,m}}} = p_3 x_{\rho_{e,m}}^{p_3-1} (\bar{\sigma}^m - \bar{\sigma}^0) \end{cases} \quad (5.25)$$

5.2.2 SIMP

Utilizando a lei de interpolação SIMP não é claro como definir o módulo de Young e a tensão admissível do material para um número arbitrário de fases de material.

Assim, para duas fases de material, $N_f = 2$, E_e e $\bar{\sigma}_e$ calculam-se de acordo com a equação (5.26) e as suas derivadas de acordo com a equação (5.27).

$$\begin{cases} E_e(x_{\rho_{e,1}}) = x_{\rho_{e,1}}^{p_2} E^1 + (1 - x_{\rho_{e,1}}^{p_2}) E^2 \\ \bar{\sigma}_e(x_{\rho_{e,1}}) = x_{\rho_{e,1}}^{p_3} \bar{\sigma}^1 + (1 - x_{\rho_{e,1}}^{p_3}) \bar{\sigma}^2 \end{cases} \quad (5.26)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial E_e(x_{\rho_{e,1}})}{\partial x_{\rho_{e,1}}} = p_2 x_{\rho_{e,1}}^{p_2-1} (E^1 - E^2) \\ \frac{\partial \bar{\sigma}_e(x_{\rho_{e,1}})}{\partial x_{\rho_{e,1}}} = p_3 x_{\rho_{e,1}}^{p_3-1} (\bar{\sigma}^1 - \bar{\sigma}^2) \end{cases} \quad (5.27)$$

Para três fases de material, $N_f = 3$, E_e e $\bar{\sigma}_e$ calculam-se de acordo com a equação (5.28) e as suas derivadas de acordo com as equações (5.29) e (5.30).

$$\begin{cases} E_e(\mathbf{x}_\rho) = x_{\rho_{e,2}}^{p_2} \left[x_{\rho_{e,1}}^{p_2} E^1 + (1 - x_{\rho_{e,1}}^{p_2}) E^2 \right] + (1 - x_{\rho_{e,2}}^{p_2}) E^3 \\ \bar{\sigma}_e(\mathbf{x}_\rho) = x_{\rho_{e,2}}^{p_3} \left[x_{\rho_{e,1}}^{p_3} \bar{\sigma}^1 + (1 - x_{\rho_{e,1}}^{p_3}) \bar{\sigma}^2 \right] + (1 - x_{\rho_{e,2}}^{p_3}) \bar{\sigma}^3 \end{cases} \quad (5.28)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial E_e(\mathbf{x}_\rho)}{\partial x_{\rho_{e,1}}} = p_2 x_{\rho_{e,1}}^{p_2-1} \left[x_{\rho_{e,2}}^{p_2} (E^1 - E^2) \right] \\ \frac{\partial \bar{\sigma}_e(\mathbf{x}_\rho)}{\partial x_{\rho_{e,1}}} = p_3 x_{\rho_{e,1}}^{p_3-1} \left[x_{\rho_{e,2}}^{p_2} (\bar{\sigma}^1 - \bar{\sigma}^2) \right] \end{cases} \quad (5.29)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial E_e(\mathbf{x}_\rho)}{\partial x_{\rho_{e,2}}} = p_2 x_{\rho_{e,2}}^{p_2-1} \left[x_{\rho_{e,1}}^{p_2} E^1 + (1 - x_{\rho_{e,1}}^{p_2}) E^2 - E^3 \right] \\ \frac{\partial \bar{\sigma}_e(\mathbf{x}_\rho)}{\partial x_{\rho_{e,2}}} = p_3 x_{\rho_{e,2}}^{p_3-1} \left[x_{\rho_{e,1}}^{p_3} \bar{\sigma}^1 + (1 - x_{\rho_{e,1}}^{p_3}) \bar{\sigma}^2 - \bar{\sigma}^3 \right] \end{cases} \quad (5.30)$$

Para quatro fases de material, $N_f = 4$, a densidade calcula-se de acordo com a equação (5.31) e as suas derivadas de acordo com as equações (5.32), (5.33) e (5.34).

$$\begin{cases} E_e(\mathbf{x}_\rho) = x_{\rho_{e,3}}^{p_2} \left[x_{\rho_{e,2}}^{p_2} \left[x_{\rho_{e,1}}^{p_2} E^1 + (1 - x_{\rho_{e,1}}^{p_2}) E^2 \right] + (1 - x_{\rho_{e,2}}^{p_2}) E^3 \right] \\ \quad + (1 - x_{\rho_{e,3}}^{p_2}) E^4 \\ \bar{\sigma}_e(\mathbf{x}_\rho) = x_{\rho_{e,3}}^{p_3} \left[x_{\rho_{e,2}}^{p_3} \left[x_{\rho_{e,1}}^{p_3} \bar{\sigma}^1 + (1 - x_{\rho_{e,1}}^{p_3}) \bar{\sigma}^2 \right] + (1 - x_{\rho_{e,2}}^{p_3}) \bar{\sigma}^3 \right] \\ \quad + (1 - x_{\rho_{e,3}}^{p_3}) \bar{\sigma}^4 \end{cases} \quad (5.31)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial E_e(\mathbf{x}_\rho)}{\partial x_{\rho_{e,1}}} = p_2 x_{\rho_{e,1}}^{p_2-1} \left[x_{\rho_{e,3}}^{p_2} x_{\rho_{e,2}}^{p_2} (E^1 - E^2) \right] \\ \frac{\partial \bar{\sigma}_e(\mathbf{x}_\rho)}{\partial x_{\rho_{e,1}}} = p_3 x_{\rho_{e,1}}^{p_3-1} \left[x_{\rho_{e,3}}^{p_3} x_{\rho_{e,2}}^{p_3} (\bar{\sigma}^1 - \bar{\sigma}^2) \right] \end{cases} \quad (5.32)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial E_e(\mathbf{x}_\rho)}{\partial x_{\rho_{e,2}}} = p_2 x_{\rho_{e,2}}^{p_2-1} x_{\rho_{e,3}}^{p_2} \left[x_{\rho_{e,1}}^{p_2} E^1 + (1 - x_{\rho_{e,1}}^{p_2}) E^2 - E^3 \right] \\ \frac{\partial \bar{\sigma}_e(\mathbf{x}_\rho)}{\partial x_{\rho_{e,2}}} = p_3 x_{\rho_{e,2}}^{p_3-1} x_{\rho_{e,3}}^{p_3} \left[x_{\rho_{e,1}}^{p_3} \bar{\sigma}^1 + (1 - x_{\rho_{e,1}}^{p_3}) \bar{\sigma}^2 - \bar{\sigma}^3 \right] \end{cases} \quad (5.33)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial E_e(\mathbf{x}_\rho)}{\partial x_{\rho_{e,3}}} = p_2 x_{\rho_{e,3}}^{p_2-1} \left[x_{\rho_{e,2}}^{p_2} \left(x_{\rho_{e,1}}^{p_2} E^1 + (1 - x_{\rho_{e,1}}^{p_2}) E^2 \right) + (1 - x_{\rho_{e,2}}^{p_2}) E^3 - E^4 \right] \\ \frac{\partial \bar{\sigma}_e(\mathbf{x}_\rho)}{\partial x_{\rho_{e,3}}} = p_3 x_{\rho_{e,3}}^{p_3-1} \left[x_{\rho_{e,2}}^{p_3} \left(x_{\rho_{e,1}}^{p_3} \bar{\sigma}^1 + (1 - x_{\rho_{e,1}}^{p_3}) \bar{\sigma}^2 \right) + (1 - x_{\rho_{e,2}}^{p_3}) \bar{\sigma}^3 - \bar{\sigma}^4 \right] \end{cases} \quad (5.34)$$

5.2.3 SFP

Para a lei de interpolação SFP o módulo de Young e a tensão admissível do matéria são calculados de acordo com a equação (5.35), sendo as suas derivadas calculadas de acordo com as equações (5.36) e (5.37).

$$\begin{cases} E_e(\mathbf{x}_\rho) = x_{\rho_{e,1}}^{p_2} \left[x_{\rho_{e,2}}^{p_2} E^1 + (1 - x_{\rho_{e,2}}^{p_2}) E^2 \right] \\ \quad + (1 - x_{\rho_{e,1}}^{p_2}) \left[x_{\rho_{e,2}}^{p_2} E^3 + (1 - x_{\rho_{e,2}}^{p_2}) E^4 \right] \\ \bar{\sigma}_e(\mathbf{x}_\rho) = x_{\rho_{e,1}}^{p_3} \left[x_{\rho_{e,2}}^{p_3} \bar{\sigma}^1 + (1 - x_{\rho_{e,2}}^{p_3}) \bar{\sigma}^2 \right] \\ \quad + (1 - x_{\rho_{e,1}}^{p_3}) \left[x_{\rho_{e,2}}^{p_3} \bar{\sigma}^3 + (1 - x_{\rho_{e,2}}^{p_3}) \bar{\sigma}^4 \right] \end{cases} \quad (5.35)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial E_e(\mathbf{x}_\rho)}{\partial x_{\rho_{e,1}}} = p_2 x_{\rho_{e,1}}^{p_2-1} \left[x_{\rho_{e,2}}^{p_2} (E^1 - E^3) + (1 - x_{\rho_{e,2}}^{p_2}) (E^2 - E^4) \right] \\ \frac{\partial \bar{\sigma}_e(\mathbf{x}_\rho)}{\partial x_{\rho_{e,1}}} = p_3 x_{\rho_{e,1}}^{p_3-1} \left[x_{\rho_{e,2}}^{p_3} (\bar{\sigma}^1 - \bar{\sigma}^3) + (1 - x_{\rho_{e,2}}^{p_3}) (\bar{\sigma}^2 - \bar{\sigma}^4) \right] \end{cases} \quad (5.36)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial E_e(\mathbf{x}_\rho)}{\partial x_{\rho_{e,2}}} = p_2 x_{\rho_{e,2}}^{p_2-1} \left[x_{\rho_{e,1}}^{p_2} (E^1 - E^2) + (1 - x_{\rho_{e,1}}^{p_2}) (E^3 - E^4) \right] \\ \frac{\partial \bar{\sigma}_e(\mathbf{x}_\rho)}{\partial x_{\rho_{e,2}}} = p_3 x_{\rho_{e,2}}^{p_3-1} \left[x_{\rho_{e,1}}^{p_3} (\bar{\sigma}^1 - \bar{\sigma}^2) + (1 - x_{\rho_{e,1}}^{p_3}) (\bar{\sigma}^3 - \bar{\sigma}^4) \right] \end{cases} \quad (5.37)$$

5.3 Constrangimento para eliminação de materiais fictícios

O constrangimento g^{mat} para eliminação de materiais fictícios, i.e., que evita a extrapolação de propriedades, é exclusivo de problemas onde a lei de interpolação DMO seja usada. Por ser independente da área, $\partial g^{mat} / \partial x_A$ é zero. O cálculo da derivada em função da variável densidade fictícia (5.38) é feito utilizando as regras de derivação direta, devido à sua simplicidade.

$$\frac{\partial g_e^{mat}}{\partial x_{\rho_{e,m}}} = \frac{\partial}{\partial x_{\rho_{e,m}}} \left(\sum_{m=1}^{N_{mat}} x_{\rho_{e,m}} - \bar{x}_\rho + x_\rho \right) = 1 \quad (5.38)$$

5.4 Constrangimento de densidades intermédias

O constrangimento usado para a eliminação de densidades intermédias também é independente da área, sendo $\partial g^\varepsilon / \partial x_{\rho_{e,m}} = 0$. No entanto, este é agora utilizado por todas as leis de interpolação. Devido à sua simplicidade também é possível utilizar regras de derivação direta (5.39).

$$\begin{aligned} \frac{\partial g^\varepsilon}{\partial x_{\rho_{e,m}}} &= \frac{\partial}{\partial x_{\rho_{e,m}}} \left(\left(\sum_{e=1}^{NE} \sum_{m=1}^{N_{mat}} [(\bar{x}_\rho - x_{\rho_{e,m}})(x_{\rho_{e,m}} - \underline{x}_\rho)] - \varepsilon \right) \frac{1}{\varepsilon} \right) \\ &= - \frac{2x_{\rho_{e,m}} + \bar{x}_\rho + \underline{x}_\rho}{\varepsilon} \end{aligned} \quad (5.39)$$

6. Resultados

Neste capítulo, as metodologias desenvolvidas são testadas para seis exemplos de estruturas reticuladas, com nível crescente de complexidade. Numa primeira fase de testes os exemplos utilizam como variáveis de projeto ou a densidade artificial, \mathbf{x}_ρ , ou a área, \mathbf{x}_A . As três leis de interpolação SIMP, DMO e SFP são investigadas. Como principal foco desta dissertação destacam-se os resultados obtidos com a formulação que utiliza como variável de projeto a área e a densidade artificial, $\mathbf{x}_{\rho,A}$ combinadas. Consideram-se até três fases de material sólido e uma fase de vazio, cujas propriedades estão apresentadas na Tabela 6.1.

Tabela 6. 1 – Propriedades das fases de material consideradas.

Material	Densidade específica, ρ [kg/m ³]	Módulo de Young, E [Pa]	Tensão Admissível, $\bar{\sigma}$ [Pa]	Cor
Vazio	0	0	0	○
Aço	7850	205 x 10 ⁹	425 x 10 ⁶	●
Alumínio	2700	70 x 10 ⁹	310 x 10 ⁶	●
Magnésio	1700	44 x 10 ⁹	220 x 10 ⁶	●

Nos problemas SMTO a fase de material sólida corresponde ao aço, em MMTO2 acrescenta-se o alumínio e em MMTO3 consideram-se as três fases sólidas, aço, alumínio e magnésio. Os exemplos numéricos apresentados variam de uma treliça de 10 barras até uma treliça de 110 barras. Num dos exemplos são ainda aplicados dois casos de carga diferentes. Estes exemplos também são utilizados no trabalho de Pratas (2019) [18]. Considera-se também que a variável área pode variar entre 0,001 mm² (*lower bound*) e o valor de área inicial, A_i , considerado em cada exemplo (*upper bound*).

O primeiro exemplo é adaptado de [21] e representa uma treliça com 10 barras, sujeita a dois carregamentos P . O domínio está discretizado em 10 elementos finitos e 6 nós. Na Figura 6.1 estão apresentados os dados relativamente a este exemplo.

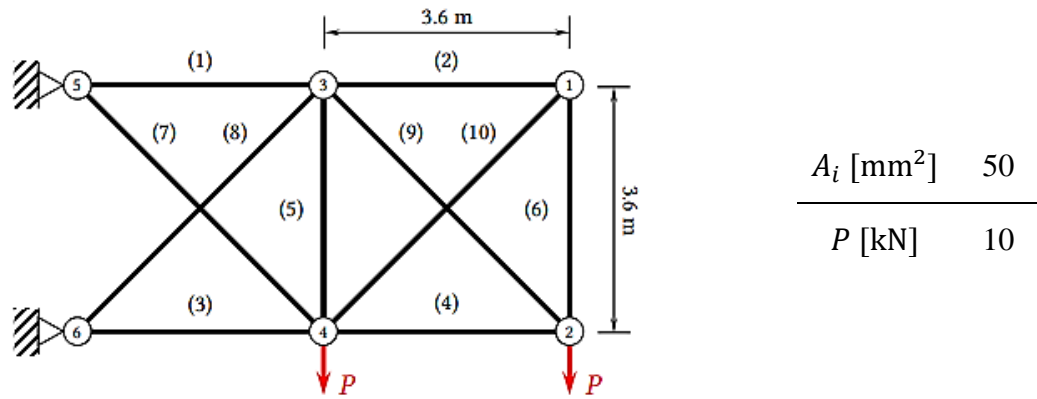


Figura 6. 1 – Dados da treliça de 10 barras.

O segundo exemplo apresentado consiste numa treliça de 11 barras, também adaptada de [21], com a particularidade de ter dois casos de carga. O domínio é discretizado por 11 elementos finitos e 6 nós. As características relativas a este exemplo estão apresentadas na Figura 6.2.

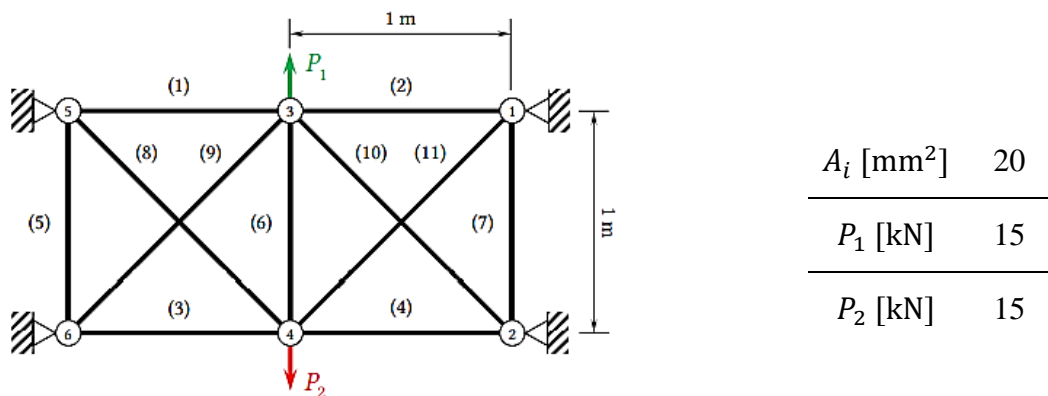


Figura 6. 2 – Dados da treliça de 11 barras.

O terceiro exemplo consiste numa treliça de 21 barras, adaptada de [48]. No entanto, por ser simétrica, é possível representar apenas metade da estrutura. Assim serão utilizados 11 elementos finitos, 6 nós e três pontos de apoio. Na Figura 6.3 são apresentadas as características relativas a este exemplo.

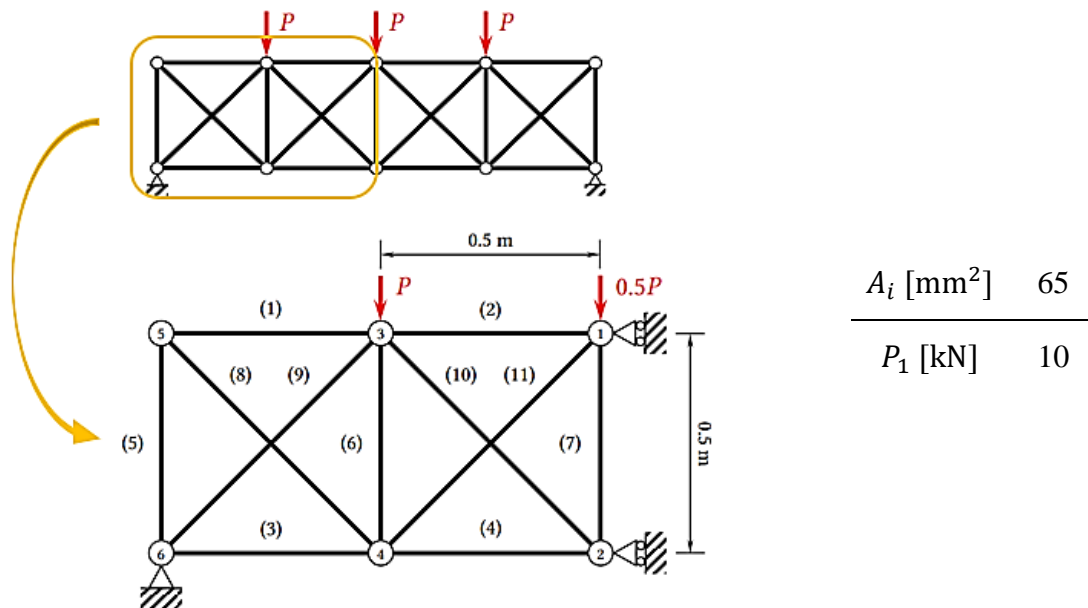


Figura 6. 3 – Dados da treliça de 21 barras (representada por 11 barras e condições de simetria).

O quarto exemplo é uma treliça de 26 barras, exemplo conhecido também por gancho ou *L-Bracket*. Existem 26 elementos conectados por 12 nós, com dois apoios e uma carga aplicada. Na Figura 6.4 estão apresentados os dados relativos a este exemplo.

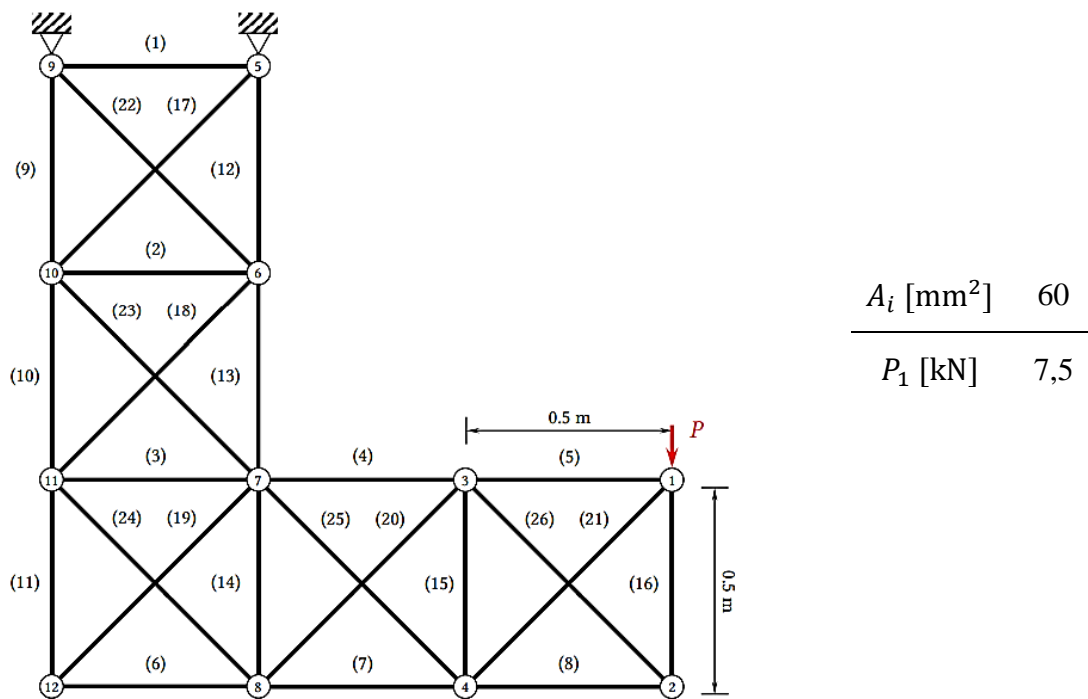
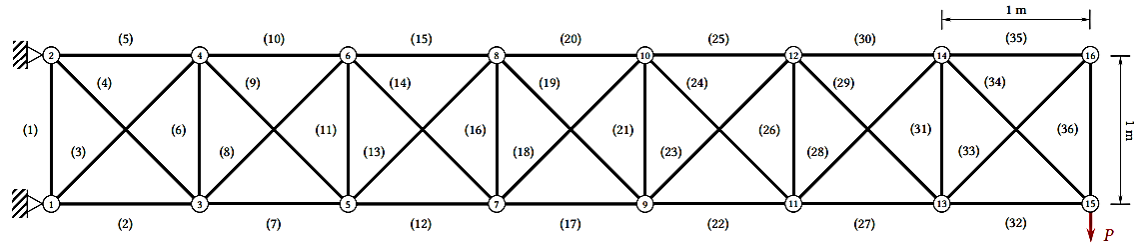


Figura 6. 4 – Dados da treliça de 26 barras.

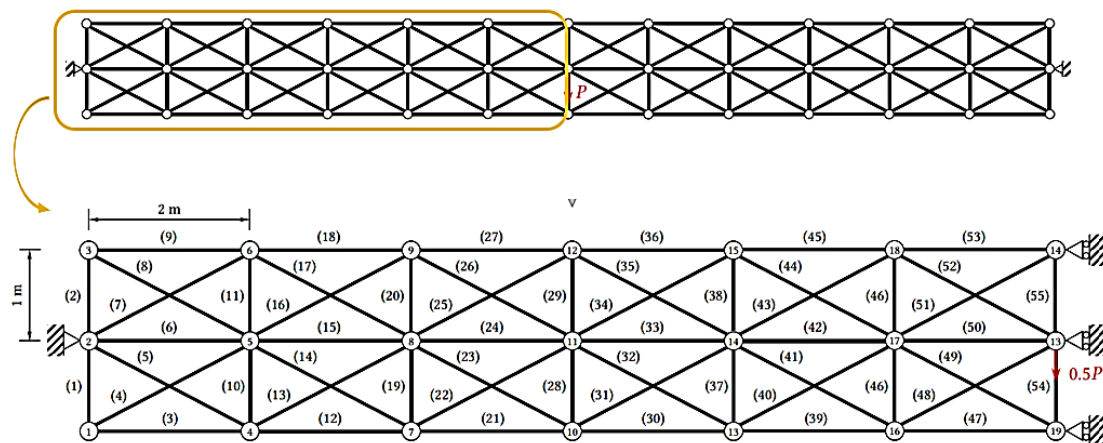
O quinto exemplo numérico trata-se de uma treliça de 36 barras, adaptada de [49], constituída por 36 elementos conectados por 16 nós. Tem uma carga aplicada e dois apoios. Os dados relativos a este exemplo estão apresentados na Figura 6.5.



$$\frac{A_i \text{ [mm}^2\text{]} \quad 100}{P_1 \text{ [kN]} \quad 6}$$

Figura 6. 5 – Dados da treliça de 36 barras.

O sexto e último exemplo numérico considerado é uma treliça de 110 barras, adaptado de [50]. Novamente, por ser simétrico, é possível reduzir este exemplo a um modelo composto por 55 barras e 21 nós. Veja-se este modelo e as suas características na Figura 6.6.



$$\frac{A_i \text{ [mm}^2\text{]} \quad 150}{P_1 \text{ [kN]} \quad 20}$$

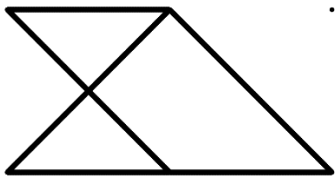
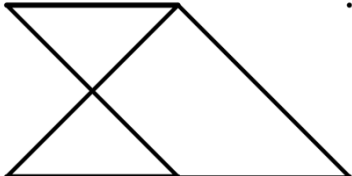


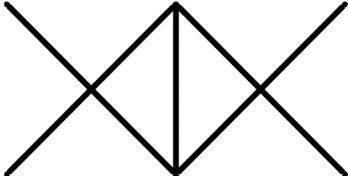
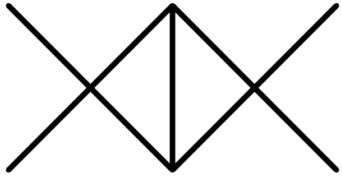



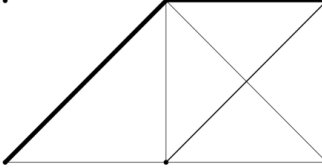


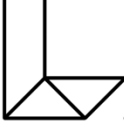








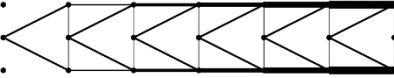


Figura 6. 6 – Dados da treliça de 110 barras (representada por 55 barras e condições de simetria).

6.1 Análise Geral dos Resultados

6.1.1 Resultados SMTO

Na Tabela 6.2 pode-se observar a topologia obtida para cada um dos exemplos, para uma otimização *single material*, onde a fase de material sólido é o aço, recorrendo às variáveis de projeto ora de densidade artificial ora de área.

Tabela 6. 2 – Topologia final dos exemplos em estudo, SMTO, para otimização com (1) densidade e (2) área, separadamente, para cada uma das leis de interpolação, DMO e SIMP.

Exemplo	Lei	Densidade	Área
10 barras	DMO		
	SIMP		
11 barras	DMO		
	SIMP		
21 barras	DMO		
	SIMP		
26 barras	DMO		
	SIMP		
36 barras	DMO		
	SIMP		
110 barras	DMO		
	SIMP		

Relativamente às leis de interpolação utilizadas, o *layout* final obtido é semelhante para as duas leis DMO e SIMP, com exceção do exemplo das 26 barras. Nos exemplos das 21 e 26 barras a topologia encontrada através da otimização das densidades é diferente da topologia encontrada através da otimização das áreas.

No exemplo das 26 barras com áreas otimizadas, apesar da massa ser inferior, a solução apresentada pode não ser tão apelativa de um ponto de vista de construção, pois são necessárias mais barras para suportar o mesmo carregamento.

No exemplo das 21 barras, algumas das barras na estrutura final com área otimizada, revelam valores muito baixos ($\sim 6 \text{ mm}^2$). Apesar de nenhuma delas ultrapassar a tensão de cedência, esta solução pode não ser viável do ponto de vista duma análise de encurvadura. Uma estratégia que poder-se-ia aplicar, sem introduzir para já constrangimentos relacionados com a encurvadura, seria atribuir na formulação do problema um valor mínimo para a variação da área que fosse suficientemente afastado de zero. No entanto, tal levaria a que fosse necessário recorrer à variável de densidade artificial para conseguir fazer a otimização topológica, i.e., para ser possível identificar ausência de material (ou vazio). Nesse cenário, as variáveis de área serviriam apenas para efetuar uma otimização dimensional. Todavia, esta estratégia sai fora do âmbito desta dissertação, mas fica aqui a nota de este ser assunto pertinente e que pode ser levado em consideração num trabalho futuro que considere a análise de encurvadura.

Na Tabela 6.3 apresenta-se a massa das treliças otimizada dependendo da variável de projeto utilizada. Também é apresentada a redução de massa que se consegue alcançar passando da otimização com as densidades para a otimização com as áreas. Como se pode verificar, em todos os exemplos há uma melhoria significativa na função objetivo, conseguindo-se reduções de massa entre 21% e 61% dependendo do exemplo.

Tabela 6.3 – Valor da função objetivo, massa, e redução desta em resultado de se passar da variável de densidade para a variável de área.

Treliça	Massa total dependendo da variável de projeto utilizada [kg]		Redução massa Em %
	Densidade	Área	
10 barras	10,2381	7,3143	29
11 barras	1,0458	0,8224	21
21 barras	2,4670	1,2209	51
26 barras	3,1223	1,8447	41
36 barras	17,9901	6,9877	61
110 barras	49,7248	17,7344	64

6.1.2 Resultados MMTO2

Na Tabela 6.4 pode observar-se a topologia e distribuição óptima de material obtida para cada um dos exemplos ora recorrendo às variáveis de densidade (apenas) ora recorrendo às variáveis de densidade e de área combinadas. As fases de material sólido são o aço (a vermelho) e o alumínio (a azul).

Tabela 6. 4 – Topologia e distribuição de material, MMTO2, dos exemplos em estudo, para otimização com (1) densidade e (2) densidade + área, para cada uma das leis de interpolação, DMO e SIMP.

Exemplo	Lei	Densidade	Densidade + Área
10 barras	DMO		
	SIMP		
11 barras	DMO		
	SIMP		
21 barras	DMO		
	SIMP		
26 barras	DMO		
	SIMP		
36 barras	DMO		
	SIMP		
110 barras	DMO		
	SIMP		

Para a otimização feita apenas com a variável de densidade artificial, os resultados obtidos utilizando diferentes leis de interpolação são diferentes para metade dos exemplos, ou seja, adicionando mais uma fase de material o algoritmo fica mais suscetível à lei de interpolação utilizada. No entanto, para a otimização feita com variáveis de densidade e a área combinadas, $\mathbf{x}_{\rho,A}$, consegue-se uma harmonização notável entre resultados obtidos pelas duas leis de interpolação e, para além disso, é ainda possível obter estruturas mais leves.

Tal como para o problema de *single material*, ao otimizar a área da secção das barras, é possível que algumas apresentem áreas muito reduzidas. Apesar destas conseguirem resistir aos esforços nelas aplicadas evitando a cedência do material podem correr o risco de encurvar. Caso isto aconteça, como já foi referido anteriormente, o projetista pode optar por atribuir um valor diferente de 0 para a área mínima das barras, e recorrer à fase de vazio nas densidades artificiais para realizar a otimização topológica. Esta estratégia pode ter a desvantagem de não obter estruturas em FSD e, todavia, não dispensaria uma análise de encurvadura necessária.

Na Tabela 6.5 apresenta-se a massa otimizada para cada exemplo, assim como a redução de massa que se consegue alcançar fazendo a otimização quando as variáveis de densidade e a área são combinadas. Como se pode verificar, em todos os exemplos consegue-se uma melhoria da função objetivo, i.e., reduções de massa entre 10% e 43%.

Tabela 6.5 – Valor da função objetivo, massa, e redução desta em resultado de se passar da variável de densidade para a variável densidade + área.

Treliça	Lei	Massa total dependendo da variável de projeto utilizada [kg]		Redução massa Em %
		Densidade	Densidade + Área	
10 barras		5,3893	4,8590	10
11 barras		0,4647	0,4167	10
21 barras	DMO	1,3275	0,8590	35
	SIMP	1,4989		43
26 barras	DMO	1,6080	1,0702	33
	SIMP	1,6615		36
36 barras		7,8635	4,6297	40
110 barras	DMO	26,8808	11,2515	58
	SIMP	26,3148		57

6.1.3 Resultados MMTO3

Na Tabela 6.6 pode-se observar a topologia e distribuição de material obtida para cada um dos exemplos, para uma otimização *multimaterial*, onde as fases de material sólido são o aço (a vermelho), o alumínio (a azul) e o magnésio (a verde).

Tabela 6. 6 – Topologia e distribuição de material, MMTO3, dos exemplos em estudo, para otimização com (1) densidade e (2) densidade + área, para cada uma das leis de interpolação, DMO, SIMP e SFP.

Exemplo	Lei	Densidade	Densidade + Área
10 barras	DMO		
	SFP		
	SIMP		
21 barras	DMO		
	SFP		
	SIMP		
26 barras	DMO		
	SFP		
	SIMP		
36 barras	DMO		
	SFP		
	SIMP		
110 barras	DMO		
	SFP		
	SIMP		

Verifica-se, mais uma vez, que a adição das áreas às variáveis de projeto harmoniza os resultados obtidos utilizando as diferentes leis de interpolação. No entanto, a estrutura obtida no exemplo de 21 barras continua a apresentar barras de espessura muito reduzida, estrutura essa que pode ser inviável do ponto de vista prático.

Quantas mais fases de material são disponibilizadas ao problema, mais perto de um *fully stressed design* se encontram as soluções, visto que o material menos resistente é atribuído aos membros estruturais menos solicitados. Ainda assim, a adição das áreas reflete-se numa melhoria da função objetivo. Na Tabela 6.7 apresenta-se a massa das estruturas otimizadas, assim como a redução de massa que se consegue alcançar fazendo a otimização com as variáveis de densidade e as área combinadas.

Tabela 6. 7 – Valor da função objetivo, massa, e redução desta em resultado de se passar da a variável de densidade para a variável densidade + área.

Treliça	Lei	Massa total dependendo da variável de projeto utilizada [kg]		Redução massa Em %
		Densidade	Densidade + Área	
10 barras		5,2141	4,8250	7
21 barras	DMO/SFP	1,0765	0,7035	35
	SIMP	0,9771		40
26 barras		1,3182	1,0196	23
36 barras		6,6974	4,2600	36
110 barras	DMO	21,0576	11,0645	47
	SIMP/SFP	24,0855		54

6.1.4 Harmonização dos parâmetros de otimização

Ao longo das iterações do algoritmo de otimização foi adotada uma *continuation approach*, que resulta numa penalização progressiva do problema, com o intuito de melhorar a convergência do algoritmo para uma solução ótima e também de evitar mínimos locais. Procurou-se fazer uma harmonização dos valores dos parâmetros do problema e do algoritmo de otimização. Isto visa tornar o problema e o algoritmo mais independentes um do outro, i.e., tem-se uma maior robustez na metodologia proposta.

Os expoentes p_1 , p_2 e p_3 penalizam respetivamente a densidade específica, o módulo de Young e a tensão admissível. O parâmetro p_1 é constante e igual à unidade,

em todos os exemplos. Também o valor inicial e final do parâmetro p_3 tomam sempre os mesmos valores i.e. 1 e 3,5, respetivamente. O valor inicial do parâmetro p_2 foi ligeiramente alterado, em casos muito particulares. O intervalo do número total de iterações é dividido em dois intervalos, I_1 e I_2 , e propõe-se nesta dissertação fazer $I_2 = I_1/2,5$. Os expoentes de penalização p_1 e p_2 só começam a aumentar após uma percentagem inicial de iterações, e estipulou-se essa percentagem em $\delta\% = 0,05$ que se mantém em todos os exemplos aqui resolvidos. Estipulou-se ainda que parâmetro ε começa a diminuir a partir da iteração $i_{start}^\varepsilon = I_1 + 1$ e alcança o seu valor mínimo na iteração $i_{end}^\varepsilon = I_1 + 0,7 I_2$. Em resumo, os parâmetros considerados constantes e os valores por eles tomados estão apresentados na Tabela 6.8.

Tabela 6. 8 – Parâmetros constantes da *continuation approach* utilizada.

I_2	$\delta\%$	i_{start}^ε	i_{end}^ε	p_1	p_3
$I_1/2,5$	0,05	$I_1 + 1$	$I_1 + 0,7 I_2$	1	$1 \rightarrow 3,5$

Consoante o exemplo, varia-se o valor do parâmetro c_{MMA} de penalização do subproblema MMA. Podem Considerar-se três valores diferentes deste parâmetro de penalização, i.e. c_1 , c_2 e c_3 , que penalizam cada um dos constrangimentos g^σ , g^{mat} e g^ε , respetivamente. Na utilização das leis SIMP e SFP, não se considera g^{mat} , pelo que também não se utiliza c_2 . Desta forma consegue-se penalizar apenas cada tipo de constrangimento separadamente quando é necessário, i.e., quando este não for satisfeito aumenta-se o valor da constante de penalização. Para além da variação do parâmetro c_{MMA} , é importante também adaptar consoante o problema a resolver o número de iterações do intervalo I_1 assim como o ponto de partida do algoritmo, x_0 .

Nos problemas onde apenas é utilizada a densidade artificial como variável de projeto não é possível fazer uma harmonização total dos parâmetros de otimização. No entanto, utilizando a área (em SMT0) ou a área e a densidade artificial (em MMTO), o algoritmo fica mais independente dos parâmetros e não necessita de tantas iterações para convergir para a solução.

6.1.4.1 Variável de Projeto: Densidade Artificial, \mathbf{x}_ρ

Considerando unicamente a densidade artificial como variável de projeto, foram utilizadas as leis de interpolação DMO e SIMP para problemas com uma, duas e três fases de material, e a lei SFP apenas para três fases de material.

Na Tabela 6.9 estão apresentados os parâmetros de otimização considerados em cada um dos exemplos, para a lei DMO. O ponto de partida considerado foi o mesmo para todos os problemas, ou seja, $\mathbf{x}_0 = 1/N_{mat}$.

Tabela 6.9 – Parâmetros de otimização variáveis utilizados para a lei de interpolação DMO, com a densidade artificial como variável de projeto.

Exemplo	c_1	c_2	c_3	p_2	I_1
10					100
11		10^2		$1,1 \rightarrow 4$	100
21					150
					250
26		10^3			150
		10^8		$1,05 \rightarrow 4$	250
		10^2			
36	10^3	10^4	10^3		150
		10^6		$1,1 \rightarrow 4$	250
					150
		10^2			240
110	10^4	10^4	10^3		300
	10^3	10^4	10^4		350

Na Tabela 6.10 estão apresentados os parâmetros de otimização considerados em cada um dos exemplos, para a lei SIMP. Nesta lei verificou-se que o ponto de partida influencia a convergência do algoritmo, pelo que não pode ser considerado o mesmo ponto de partida para todos os exemplos.

Tabela 6. 10 – Parâmetros de otimização variáveis utilizados para a lei de interpolação SIMP, com a densidade artificial como variável de projeto.

Exemplo	c_1	c_3	p_2	x_0	I_1	
10 SMTO MMTO2 MMTO3	10^2		$1,1 \rightarrow 4$	$1/N_{mat}$	50	
11 SMTO MMTO2						
21 SMTO MMTO2 MMTO3						
26 SMTO MMTO2 MMTO3	10^6				250	
	10^8	10^2				
	10^3					
36 SMTO MMTO2 MMTO3	10^3	10^4		0,4	150	
	10^2			[0,4 0,5]		
			$1,0 \rightarrow 4$	[0,4 0,4 0,7]		
110 SMTO MMTO2 MMTO3	10^4	10^2	$1,1 \rightarrow 4$	0,5	250	
	10^2				[0,5 0,4]	350
						[0,5 0,5 0,4]

A lei de interpolação SFP foi utilizada apenas na resolução de problemas MMTO3, e os parâmetros de otimização utilizados estão apresentados na Tabela 6.11. O ponto de partida considerado foi o mesmo para todos os problemas, $x_0 = [0,4 \ 0,5]$.

Tabela 6. 11 – Parâmetros de otimização variáveis utilizados para a lei de interpolação SFP, com a densidade artificial como variável de projeto.

Exemplo	c_1	c_2	p_2	I_1
10 MMTO3	10^2		$1,1 \rightarrow 4$	100
21 MMTO3				150
26 MMTO3				250
36 MMTO3	10^3	10^2	$1,0 \rightarrow 4$	150
110 MMTO3				400

6.1.4.2 Variável de Projeto: Área, \mathbf{x}_A

Os problemas que utilizam apenas as áreas como variáveis de projeto são problemas de otimização topológica, SMTO. Nestes problemas, como se utiliza apenas um constrangimento, g^σ , só é necessário utilizar o parâmetro c_1 do MMA. Também não se consideram os expoentes de penalização p , pois não está envolvida nenhuma lei de interpolação neste caso. Considerou-se $c_1 = 10^2$ em todos os exemplos, com exceção do exemplo das 36 barras, onde foi utilizado $c_1 = 10^6$. A variável área parte do valor inicial das barras, A_i (conforme o exemplo), e diminui ao longo das iterações até alcançar o valor ótimo. O número de iterações no primeiro intervalo foi constante em todos os exemplos em $I_1 = 20$. Verifica-se assim que ao utilizar as áreas como variável de projeto são necessárias apenas 20 iterações para o algoritmo convergir para a solução ótima.

6.1.4.3 Variáveis de Projeto: Densidade Artificial e Área, $\mathbf{x}_{\rho,A}$

Considerando ambas as variáveis consegue-se resolver problemas de otimização topológica (definida pelas áreas) e, simultaneamente, de seleção de duas ou três fases de material nesta dissertação (através das densidades artificiais). Para o efeito, foram utilizadas as leis de interpolação DMO e SIMP. Verifica-se que utilizando as áreas como variáveis de projeto chega-se a soluções mais independentes dos parâmetros de penalização, conseguindo-se uma maior harmonização dos mesmos. Os parâmetros de penalização p_1 , p_2 e p_3 foram iguais em todos os exemplos, para as duas leis de interpolação, considerando-se $p_2 = 1,1 \rightarrow 4$. Foram também consideradas 50 iterações em todos os exemplos, ou seja, $I_1 = 50$. Também o ponto de partida das densidades artificiais considerado foi o mesmo para todos os problemas, $x_0 = 1/N_{mat}$, para ambas as leis e o da variável área foi o valor inicial das barras, A_i (conforme o exemplo). Verificou-se que para os quatro primeiros exemplos, o valor de c_{MMA} é constante e igual a 10^2 . Só para 36 e 110 barras se utilizaram valores de c_{MMA} diferentes, sumariados na Tabela 6.12, dependendo da lei DMO ou SIMP.

Tabela 6. 12 – Parâmetros de otimização variáveis utilizados para a lei de interpolação DMO e SIMP, com a densidade artificial e a área como variável de projeto.

Exemplo	DMO			SIMP	
	c ₁	c ₂	c ₃	c ₁	c ₂
36	MMTO2	10 ⁸	10 ²	10 ²	10 ²
	MMTO3		10 ⁶		
110	MMTO2		10 ²	10 ⁶	
	MMTO3				

6.1.5 Discussão de resultados

Conforme seria de esperar, a adição das áreas às variáveis de projeto permitiu reduzir a massa das estruturas comparativamente às estruturas otimizadas apenas com a variável de densidade artificial. Ao variar as áreas torna-se assim possível obter estruturas em FSD, independentemente das fases de material consideradas. Para além deste ganho a nível da função objetivo, os problemas ficam mais independentes dos parâmetros de penalização e a solução ótima é obtida com recurso a menos iterações. Verifica-se também que a solução encontrada por ambas as leis de interpolação utilizadas, DMO ou SIMP, foi coincidente.

Apesar de todas as vantagens que se ganha ao incluir as áreas como variáveis de projeto, as soluções obtidas podem não ser viáveis do ponto de vista prático quando a área ótima do elemento é muito reduzida pois pode ocorrer o fenómeno da encurvadura. No entanto, em todos os exemplos numéricos testados, apenas se verificaram áreas de valor muito reduzido na treliça de 21 barras. Este aspeto pode ser devidamente tratado impondo um $A_{min} \gg 0$. No entanto, ao fazer esta alteração, volta a haver necessidade de modelar a fase de vazio recorrendo à variável de densidade artificial. Alternativamente, impõem-se constrangimentos de encurvadura no problema.

De seguida, serão apresentados em detalhe as otimizações feitas com a densidade artificial e a área como variáveis de projeto. Nomeadamente, é mostrada a distribuição ótima de material na estrutura, a distribuição de tensão, o valor final das áreas das barras e o histórico convergência da função objetivo. É de notar que os resultados obtidos utilizando a lei de interpolação DMO ou SIMP são os mesmos, diferindo apenas os

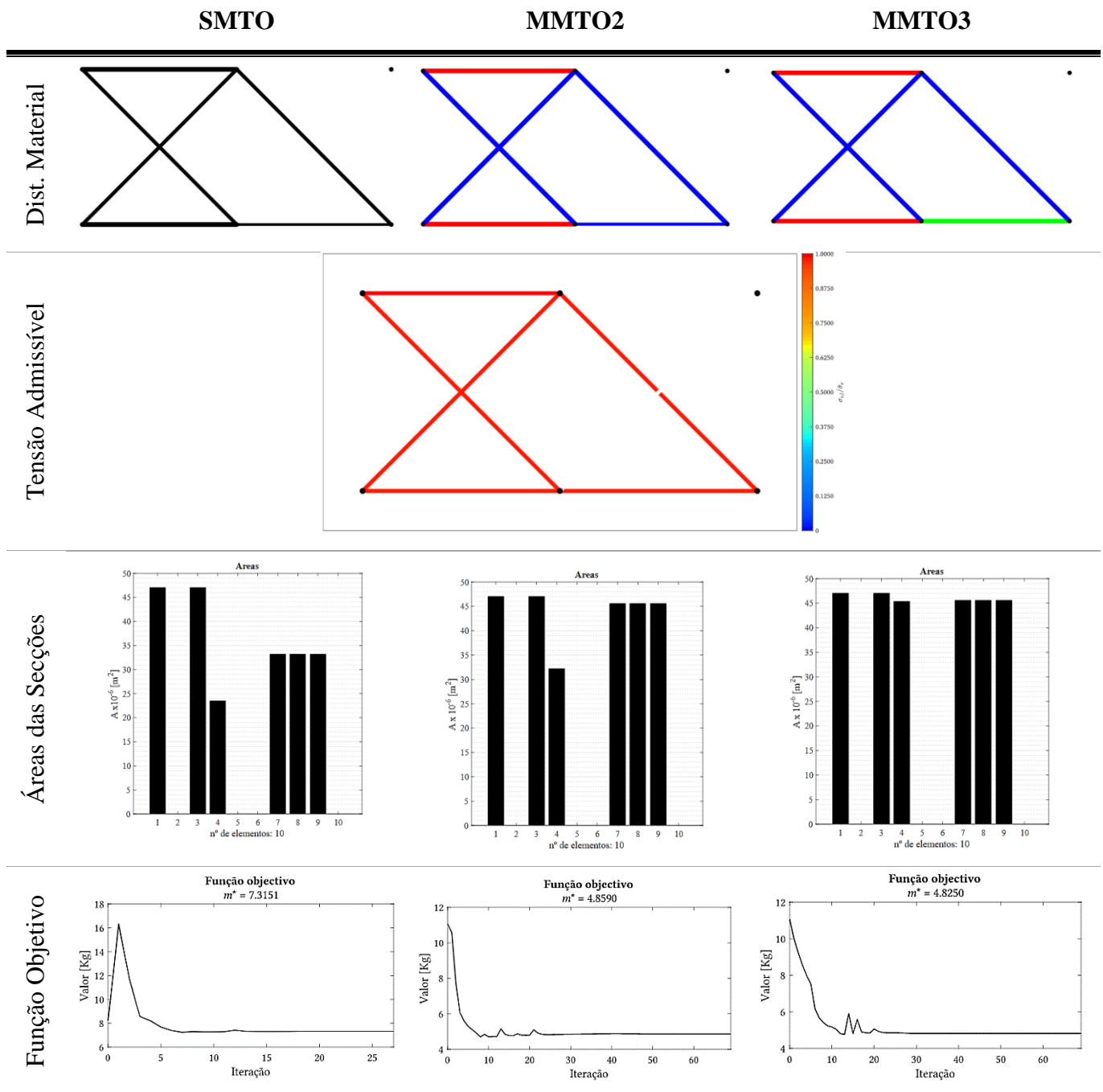
valores no parâmetro c de penalização do MMA, conforme apresentado anteriormente na Tabela 6.12.

Verifica-se para todos os exemplos que, independentemente das fases de material consideradas, a estrutura otimizada encontra-se em FSD, ou muito perto disso. No entanto, com a adição de duas e três fases de fases de material, consegue-se obter reduções muito interessantes do valor da massa. Em particular, no Anexo A, estão apresentados gráficos com o valor da massa da estrutura, otimizada ora só com a densidade artificial, ora com a densidade artificial juntamente com a área, para cada categoria de material, SMTO, MMTO2 e MMTO3. Nestes gráficos pode-se observar que a adição das áreas e das fases de material traduz-se numa melhoria significativa da função objetivo.

6.2 Treliza 10 barras

A Tabela 6.13 apresenta a distribuição de material e de tensão pela estrutura de 10 barras, assim como o valor das áreas das secções e o histórico convergência da função objetivo. Note-se que qualquer que seja o problema (SMTO, MMTO2 ou MMTO3), a estrutura encontra-se sempre em FSD.

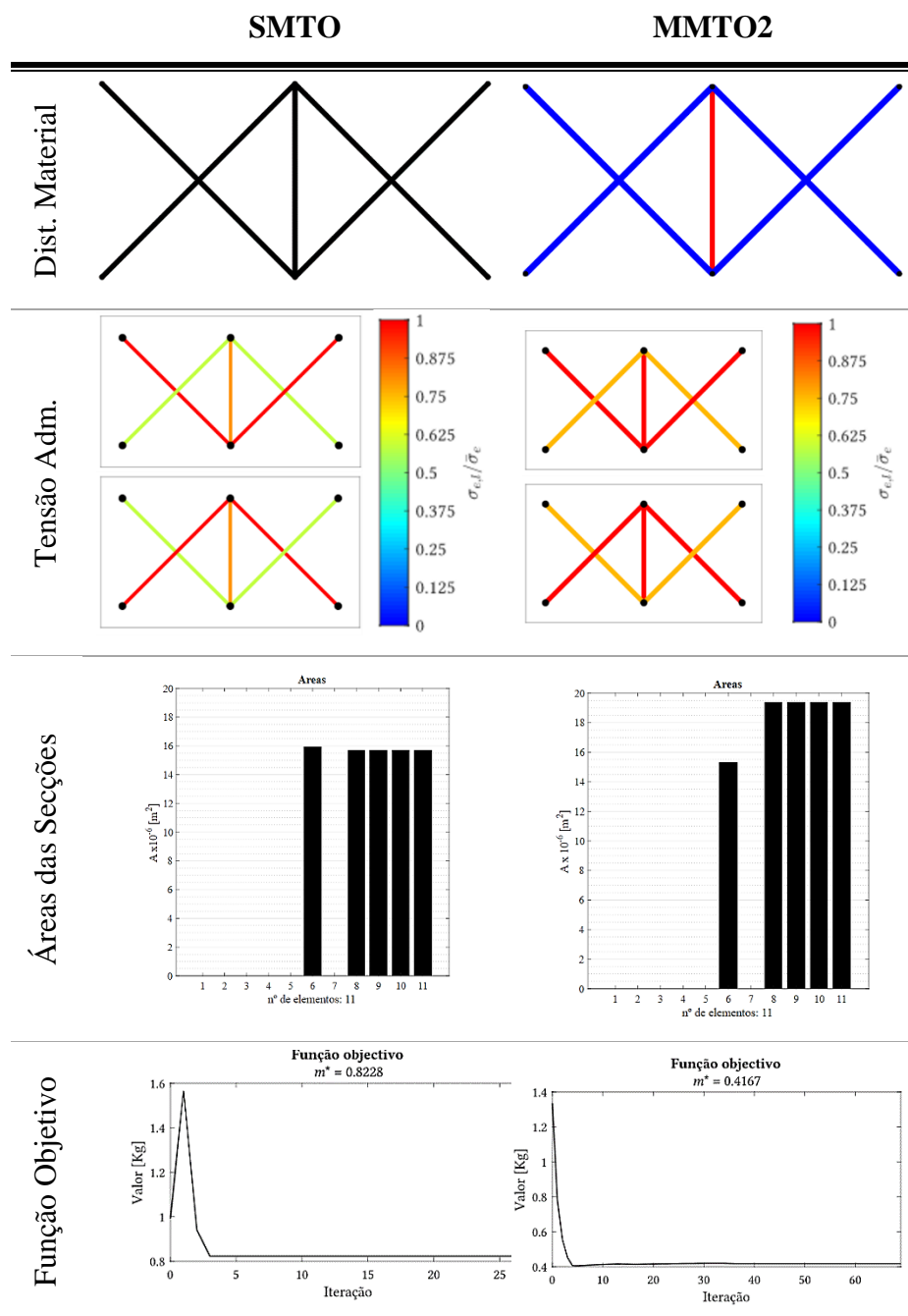
Tabela 6. 13 – Treliza 10 barras: Distribuição de material, distribuição da violação das tensões admissíveis, valor das áreas das barras e convergência da função objetivo.



6.3 Treliza 11 barras

A Tabela 6.14 apresenta a distribuição de material e de tensão pela estrutura de 11 barras, assim como o valor das áreas das secções e o histórico de convergência da função objetivo. Este problema está sujeito a dois casos de carga, e apenas foram resolvidos os problemas SMTO e MMT02. Neste caso, a utilização de duas fases de material produz uma estrutura mais próxima de um FSD.

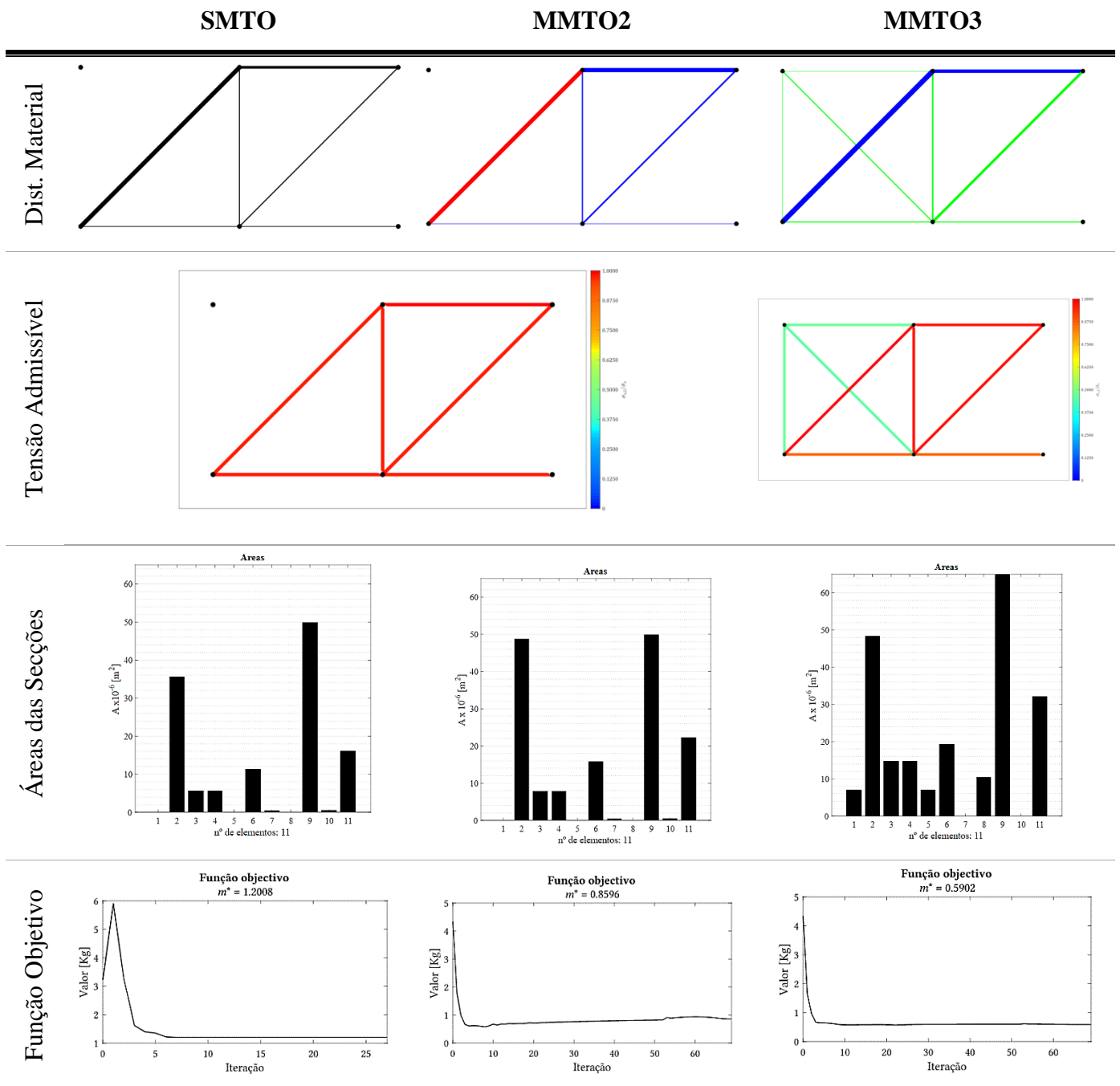
Tabela 6. 14 – Treliza 11 barras: Distribuição de material, distribuição da violação das tensões admissíveis, valor das áreas das barras e convergência da função objetivo.



6.4 Treliza 21 barras

A Tabela 6.15 apresenta a distribuição de material e de tensão na estrutura de 21 barras, assim como o valor das áreas das secções e o histórico de convergência da função objetivo. A estrutura obtida apresenta valores de área das secções muito reduzidos, podendo o seu funcionamento ser inviável do ponto de vista prático.

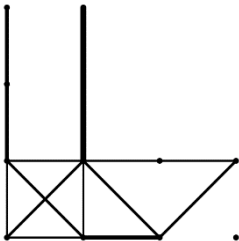
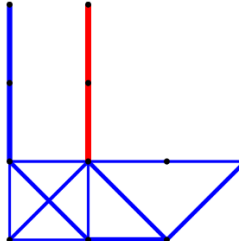
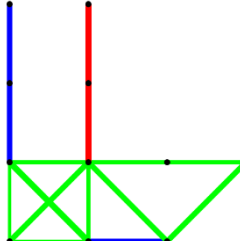
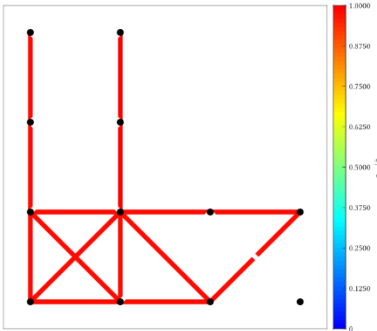
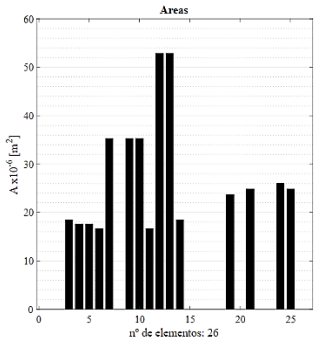
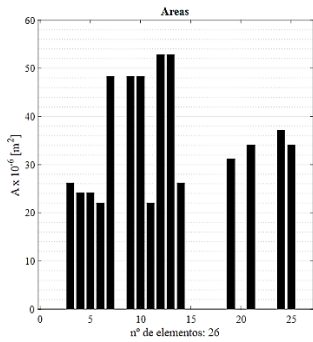
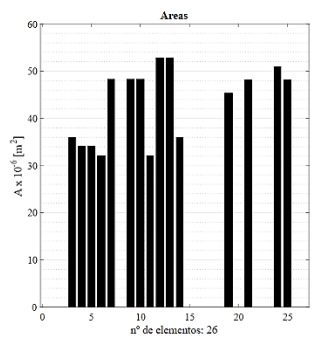
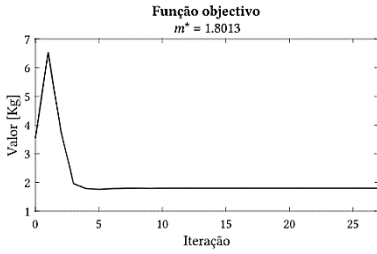
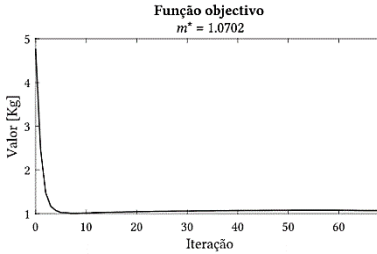
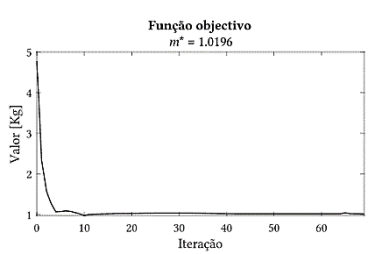
Tabela 6. 15 – Treliza 21 barras: Distribuição de material, distribuição da violação das tensões admissíveis, valor das áreas das barras e convergência da função objetivo.



6.5 Treliza 26 barras

A Tabela 6.16 apresenta a distribuição de material e de tensão na estrutura de 26 barras, assim como o valor das áreas das secções e o histórico de convergência da função objetivo. Apesar de em todos os problemas (SMTO, MMTO2 e MMTO3) se terem obtido estruturas em FSD pode ser mais interessante, também de um ponto de vista prático, utilizar soluções que impliquem a utilização de menos barras.

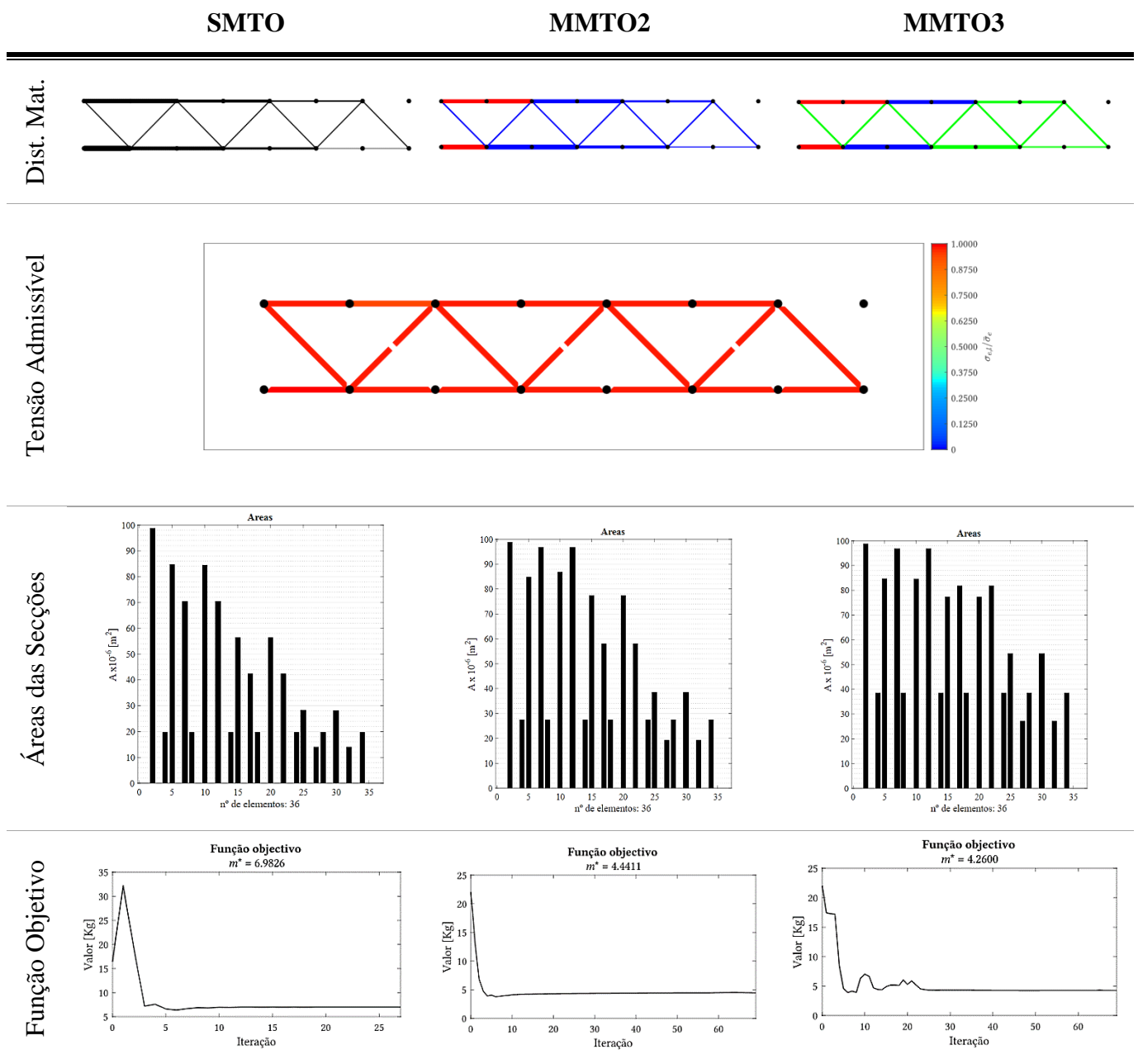
Tabela 6. 16 – Treliza 26 barras: Distribuição de material, distribuição da violação das tensões admissíveis, valor das áreas das barras e convergência da função objetivo.

	SMTO	MMTO2	MMTO3
Dist. Material			
Tensão Admissível			
Áreas das Secções			
Função Objectivo			

6.6 Treliza 36 barras

A Tabela 6.17 apresenta a distribuição de material e de tensão na estrutura de 36 barras, assim como o valor das áreas das secções e o histórico de convergência da função objetivo. Também, neste exemplo, foi conseguido um FSD independentemente das fases de material utilizadas e verifica-se novamente que a adição de mais fases de material melhora o valor da função objetivo.

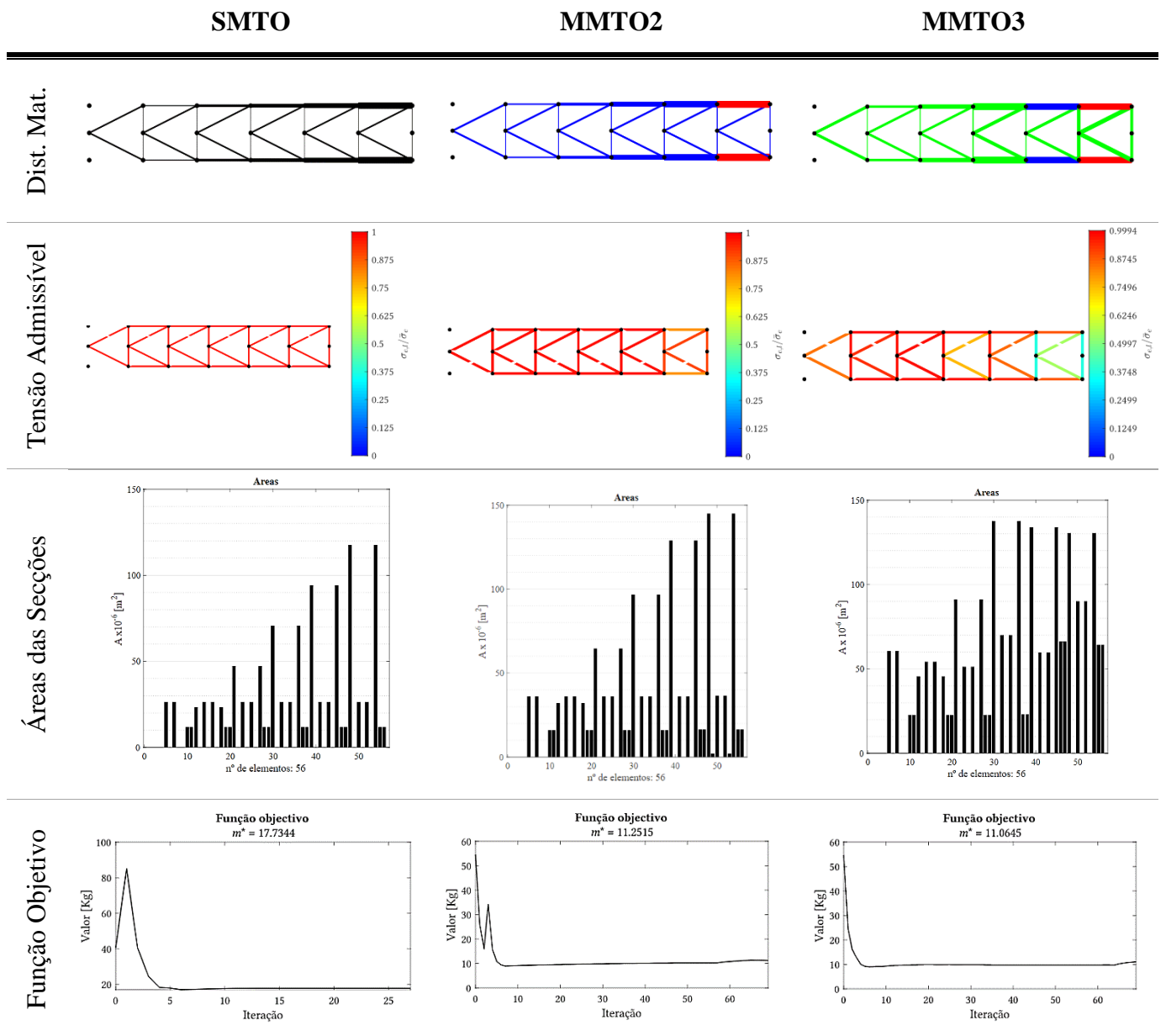
Tabela 6. 17 – Treliza 36 barras: Distribuição de material, distribuição da violação das tensões admissíveis, valor das áreas das barras e convergência da função objetivo.



6.7 Treliça 110 barras

A Tabela 6.18 apresenta a distribuição de material e de tensão na estrutura de 110 barras, assim como o valor das áreas das secções e o histórico de convergência da função objetivo. Neste exemplo, não se conseguiu obter um FSD em nenhum dos problemas, no entanto, a adição de mais fases de material aproximou a estrutura de um FSD.

Tabela 6. 18 – Treliça 110 barras: Distribuição de material, distribuição da violação das tensões admissíveis, valor das áreas das barras e convergência da função objetivo.



7. Conclusões e Trabalhos Futuros

7.1 Conclusões

Esta dissertação teve como principal objetivo contribuir para o avanço do conhecimento científico na área da otimização topológica multimaterial através do desenvolvimento de uma metodologia capaz de projetar estruturas reticuladas leves e resistentes, utilizando variáveis de área e de seleção de material e também constrangimentos de tensão.

Inicialmente, fez-se uma breve revisão bibliográfica sobre os principais temas de otimização estrutural relevantes para o desenvolvimento desta dissertação. Nomeadamente, o tratamento dos constrangimentos de tensão, onde foram estudadas as principais dificuldades inerentes à utilização destes, como a sua natureza local, a não-linearidade e o fenómeno da singularidade, e as estratégias de resolução destas dificuldades foram resumidas. Como variável de projeto foi introduzida a variável de densidade artificial, pelo que se abordou também os conceitos que permitem a utilização desta variável, nomeadamente a formulação dos problemas relaxados e as leis de interpolação.

Na formulação de problemas de otimização topológica e multimaterial, as leis de interpolação representam um papel fundamental na obtenção da distribuição ótima dos materiais num determinado domínio de projeto. Realizou-se um estudo de três leis de interpolação distintas: DMO, SIMP e SFP, comparando-as de modo a concluir sobre a sua eficácia.

Conclui-se que, as superfícies de interpolação das propriedades do material produzidas pelas leis DMO e SFP podem apresentar uma fragilidade que pode influenciar a qualidade dos resultados obtidos. Isto prende-se com o facto de surgirem mínimos locais em determinadas direções de pesquisa quando se penaliza demasiado a superfície de interpolação, ficando esta com uma variação não monotonamente decrescente. Quer isto dizer que, quando o algoritmo pesquisa valores de densidade para passar de uma fase de material para outra, pode passar por valores de propriedades sem qualquer sentido físico. Quando se faz uma otimização de uma estrutura reticulada (tipo treliça), utilizando uma

Ground Structure Approach, cada elemento finito da estrutura (barra) no final terá inequivocamente uma propriedade associada de entre aquelas que se interpolaram. No entanto, caso uma filtragem de densidades seja usada como acontece em problemas com domínios contínuos discretizados, vão surgir densidades intermédias no final que podem resultar em estimar propriedades sem sentido físico por causa da fragilidade da lei de interpolação mencionada. No entanto, a aplicação de uma *continuation approach*, conforme proposta nesta dissertação, pode ajudar a resolver este tipo de problemas, pelo menos ao longo das iterações do algoritmo. Isto quer dizer que a otimização começa com uma superfície de interpolação plana, não penalizada, e gradualmente penaliza-se o problema de modo a que as superfícies de interpolação só se tornam mais não-lineares quando as variáveis de projeto já estão perto dos seus valores discretos numa fase adiantada das iterações do algoritmo.

Na lei de interpolação SIMP este fenómeno não se verifica, sendo o valor da propriedade a interpolar entre cada duas fases sempre monotonamente crescente ou decrescente, qualquer que seja o expoente de penalização da superfície. No entanto, tanto o SIMP como a SFP, apresentam no âmbito desta dissertação a desvantagem de serem mais dependentes do ponto de partida.

Depois de estudadas as leis de interpolação e os constrangimentos de tensão, iniciou-se a formulação dos problemas para uma, duas e três fases de material, ou seja, SMTO, MMTO2 e MMTO3, respetivamente. Primeiramente, formulou-se os problemas apenas com a variável densidade artificial e, posteriormente, foram adicionadas as áreas às variáveis de projeto. Assim, a variável área é encarada como a variável topológica, ficando a variável de densidade artificial responsável pela seleção ótima de materiais para a estrutura, deixando de haver necessidade de modelar a fase de vazio recorrendo à variável de densidade artificial. Esta estratégia apresenta várias vantagens, nomeadamente: possibilidade de obter estruturas em *fully stressed design* independentemente das fases de material consideradas; redução do custo computacional; facilidade de convergência do algoritmo; soluções mais independentes dos parâmetros de penalização; interpolação através da densidade apenas entre fases de material sólido.

A estratégia de penalização utilizada nesta dissertação foi aplicada de acordo com uma *continuation approach*, para garantir que o algoritmo converge suavemente para a solução ótima e diminuindo assim a chance de ficar retido em mínimos locais. As variáveis de densidade intermédias foram penalizadas implicitamente, recorrendo a um

expoente de penalização p , e explicitamente, através da ativação de um constrangimento, g^e , que obriga as variáveis a tenderem para os seus valores limite, 0 ou 1. Começa-se a otimização com um valor não penalizado ($p = 1$) e aumenta-se a penalização até ao valor máximo. Apenas quando a penalização implícita está concluída é que se ativa o constrangimento g^e . As variáveis de área são de natureza contínua, tendo os valores intermédios sentido físico, pelo que não necessitam de qualquer tipo de penalização. Pelas razões apresentadas também se verifica que o custo computacional associado a otimizar com as áreas é muito mais reduzido do que otimizar apenas com as densidades.

Após ter os problemas devidamente formulados, testou-se a metodologia desenvolvida para seis exemplos numéricos, com complexidade crescente, com recurso a programação em linguagem MATLAB. Primeiro, testaram-se os problemas onde apenas se utiliza a densidade artificial como variável de projeto, para uma, duas e três fases de material, com a lei DMO, SIMP e SFP. Depois foi resolvido o problema onde a variável de projeto é apenas a área das secções transversais das barras. Este é apenas um problema SMTO pois não há interpolação de fases de material. Também por isso não se utiliza qualquer lei de interpolação. Finalmente, testam-se os problemas que combinam a área e a densidade artificial nas variáveis de projeto. Estes problemas pertencem às classes MMTO2 e MMTO3. Verificou-se que a inclusão das áreas nas variáveis de projeto reduz substancialmente o custo computacional do problema. É também possível obter um resultado em FSD sem ter de recorrer exclusivamente a diferentes fases de material, e conseguiram-se reduções de massa até 64 %.

Em geral, conseguiu-se harmonizar os parâmetros de otimização utilizados na resolução dos problemas. Em particular, nos problemas que utilizam a densidade artificial como variável de projeto não foi possível harmonizar os parâmetros c_{MMA} , I_1 e p_2 . Nos problemas que incluem a área nas variáveis de projeto esta uniformização foi possível, tendo sido apenas necessário alterar o parâmetro de penalização do MMA, c_{MMA} , em dois dos seis exemplos, mantendo-se todos os outros constantes.

Após a avaliação dos resultados obtidos, conclui-se que foi desenvolvida nesta dissertação, com sucesso, uma metodologia capaz de projetar estruturas reticuladas leves e resistentes utilizando variáveis de área e de seleção de material.

7.2 Trabalhos Futuros

A curto prazo seria interessante testar esta metodologia para exemplos numéricos mais complexos, e considerar mais do que três fases de material. Seria também uma mais valia explorar a introdução de critérios de estabilidade na metodologia desenvolvida, especialmente devido à introdução das áreas das secções das barras como variáveis de projeto. Com o trabalho desenvolvido é possível calcular o valor mínimo que a barra teria de ter para não sofrer encurvadura. No entanto, era interessante futuramente tornar o cálculo de encurvadura parte integrante da formulação do problema de otimização. Depois, colocar um algoritmo a encontrar soluções de estruturas reticuladas não só leves, mas também resistentes tanto do ponto de vista de não exceder-se a tensão de cedência do material como também da estabilidade.

Para além das estruturas reticuladas encaradas como macroestruturas no âmbito desta dissertação, tem interesse projetar microestruturas reticuladas. Nomeadamente, abre-se uma porta de oportunidade aqui para trabalho futuro no âmbito dos metamateriais. Estes são materiais artificiais, criados pelo homem para obter propriedades mecânicas que os materiais convencionais não possuem. Por exemplo, coeficiente de Poisson negativo (NPR) e/ou coeficiente de expansão térmica negativo (NTE). Estes materiais começaram a ser desenvolvidos em 2007 e apresentam um grande interesse por parte da comunidade científica, pois têm muito potencial num leque vasto de aplicações como, por exemplo, na área da engenharia biomédica, aeroespacial, desporto, microeletrónica, etc.

A obtenção de índices de propriedades de material negativos, como NPR ou NTE, está relacionado com a arquitetura interna desses materiais já que são materiais caracterizados por terem uma microestrutura interna passível de ser projetada. Estas microestruturas podem ser encaradas como estruturas do tipo reticuladas (*ground structure*). Note-se ainda que, para obter o comportamento termo-auxético, ou seja, coeficiente de expansão térmica negativo, é necessário utilizar dois materiais distintos nas microestruturas. Assumindo microestruturas do tipo reticulado, os estudos realizados a nível computacional até à data de hoje procuram essencialmente otimizar alguns parâmetros, como o comprimento das barras ou os ângulos entre elas. Assim, seria de todo interesse conseguir aplicar a metodologia desenvolvida nesta dissertação para sistematizar o projeto destes materiais, tornando-o num processo automático não assumindo à partida qualquer topologia de microestrutura ou geometria pré-definida.

Bibliografia

- [1] J. C. Maxwell, "On reciprocal figures, frames and diagrams of forces," vol. 2, Sci Pap, 1890, pp. 175-177.
- [2] A. G. M. Mitchell, "The limit of economy of material in frame structures," vol. 6, Philosophical Mag, 1904, pp. 589-597.
- [3] A. Francavilla e C. V. Ramakrishnan, "Optimization of shape to minimize stress concentration," vol. 10, Strain. Anal. Eng. Des., 1975, pp. 63-70.
- [4] R. T. Haftka e R. V. Grandhi, "Structural shape optimization - A survey," 1 ed., vol. 57, Appl. Mech. Eng., 1986, pp. 91-106.
- [5] W. S. Dorn, R. E. Gomory e H. J. Greenberg, "Automatic design of optimal structures," vol. 3, J. Mech, 1964, pp. 25-52.
- [6] M. P. Bendøe e O. Sigmund, *Topology Optimization: Theory, Methods and Applications*, 2 ed., Springer Berlin Heidelberg, 2003.
- [7] M. P. Bendsoe e N. Kikuchi, "Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method," em *Computer method*, vol. 71, Appl. Mech. Eng., 1988, pp. 197-224.
- [8] L. Krog, A. Tucker, M. Kemp e R. Boyd, "Topology Optimization of Aircraft Wing Box Ribs," *10h AIAA/ISSMO Multidisciplinary Analysis and Optimization Conference*, 2004.
- [9] S. Lu, H. Ma, L. Xin e W. Zuo, "Lightweight design of bus frames from multi-material topology optimization to cross-sectional size optimization," vol. 51, Eng. Optim., 2019, pp. 961-977.
- [10] Y. Jung, S. Lim, J. Kim e S. Min, "Lightweight design of electric bus roof structure using multi-material topology optimisation," *Industrial application paper*, 2019.
- [11] P. Coelho, *Tópicos Avançados em Mecânica Estrutural*, FCT/UNL, 2017/2018.
- [12] K. Svanberg, "The method of moving asymptotes - a new method for structural optimization," vol. 24, Int. J. Numer. Methods Eng., 1987, pp. 359-373.
- [13] K. Svanberg, *The Method of Moving Asymptotes*, Royal Institute of Technology (KTH), 1998.

- [14] F. Glover, "Future paths for integer programming and links to artificial intelligence," vol. 13, *Comput. Oper. Res.*, 1986, pp. 533-549.
- [15] E. Haug, K. Choi e V. Komkov, *Design Sensitivity Analysis of Structural Systems*, Academic Press, Inc, 1986.
- [16] M. P. Bendsoe, *Optimal shape design as a material distribution problem*, 4 ed., vol. 1, *Struct. Optim.*, 1989, pp. 193-202.
- [17] M. Stolpe e K. Svanberg, An alternative interpolation scheme for minimum compliance topology optimization, 2 ed., vol. 22, *Struct. Multidiscip. Optim.*, 2001, pp. 116-124.
- [18] T. M. L. Pratas, *Otimização topológica multimaterial de estruturas reticuladas com constrangimentos de tensão*, Faculdade de Ciências e Tecnologias, Universidade Nova de Lisboa, 2019.
- [19] A. Verbart, *Topology Optimization with Stress Constraints*, TU Delft, 2015.
- [20] P. Duysinx, L. Van Miegroet, E. Lemaire, O. Brüls e M. Bruyneel, Topology and generalized shape optimization: Why stress constraints are so important, 4 ed., vol. 2, *Int J Simul Multidiscip Des Optim*, 2008, pp. 253-258.
- [21] U. Kirsch, On singular topologies in optimum structural design, vol. 2, *Struct. Optim.*, 1990, pp. 133-142.
- [22] G. Sved e Z. Ginos, Structural optimization under multiple loading, vol. 10, *Int. J. Mech. Sci.*, 1968, pp. 803-805.
- [23] U. Kirsch, Optimal Topologies of Structures, vol. 42, *Appl. Mech. Rev.*, Aug 1989, pp. 223-239.
- [24] X. Guo, G. Cheng e K. Yamazaki, A new approach for the solution of singular optima in truss topology optimization with stress and local buckling constraints, vol. 22, *Struct Multidisc Optim*, 2001, pp. 364-372.
- [25] M. Bruyneel e P. Duysinx, Note on singular optima in laminate design problems, vol. 31, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2006, pp. 156-159.
- [26] G. Cheng e Z. Jiang, Study on topology optimization with stress constraints, vol. 20, *Eng. Opt.*, 1992, pp. 129-148.

- [27] J. S. Arora, Introduction to optimum design, vol. 3, Academic Press, 2012.
- [28] G. D. Cheng e X. Guo, ε -relaxed approach in structural topology optimization, vol. 13, Structural Optimization, 1997, pp. 258-266.
- [29] M. Bruggi, On an alternative approach to stress constraints relaxation in topology optimization, vol. 36, Struct Multidisc Optim, 2008, pp. 125-141.
- [30] P. Duysinx e M. P. Bendsoe, Topology optimization of continuum structures with local stress constraints, vol. 43, Int J Numer Methods Eng, 1998, pp. 1453-1478.
- [31] P. Duysinx e O. Sigmund, New development in handling stress constraints in optimal material distribution, vol. 3, American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1998, pp. 1501-1509.
- [32] M. Stolpe e K. Svanberg, On the trajectories of the epsilon-relaxation approach for stress-constrained truss topology optimization, vol. 21, Struct Multidisc Optim, 2001, pp. 140-151.
- [33] M. Bruggi e P. Venini, A mixed FEM approach to stress-constrained topology optimization, vol. 73, Int. J. Numer. Meth. Engng, 2008, pp. 1693-1714.
- [34] C. Li e I. Y. Kim, "Multi-material topology optimization for automotive design problems," *Proc IMechE Part D: J Automobile Engineering*, 2017.
- [35] C. F. Hvejsel e E. Lund, Material interpolation schemes for unified topology and multi-material optimization, vol. 43, Struct Multidisc Optim, 2011, pp. 811-825.
- [36] O. Sigmund e S. Torquato, Design of materials with extreme thermal expansion using a three-phase topology optimization method, 6 ed., vol. 45, J. Mech. Phys. Solids, 1997, pp. 1037-1067.
- [37] L. V. Gibiansky e O. Sigmund, Multiphase composites with extremal bulk modulus, vol. 48, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2000, pp. 461-498.
- [38] E. Lund e J. Stegmann, On Structural Optimization of Composite Shell Structures Using a Discrete Constitutive Parametrization, vol. 8, Wind Energ., 2005, pp. 109-124.
- [39] J. Stegmann e E. Lund, Discrete material optimization of general composite shell structures, vol. 62, Int. J. Numer. Meth. Engng, 2005, pp. 2009-2027.

- [40] J. Stegmann, Analysis and optimization of laminated composite shell structures. PhD thesis, Department of Mechanical Engineering, Aalborg University, 2004.
- [41] T. Gao e W. Zhang, A massa constraint formulation for structural topology optimization with multiphase materials, vol. 88, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 2011, pp. 774-796.
- [42] J. Kato, A. Lipka e E. Ramm, Multiphase material optimization for fiber reinforced composites with strain softening, vol. 39, *Struct Multidisc Optim*, 2009, pp. 63-81.
- [43] D. Li e I. Y. Kim, Multi-material topology optimization for practical lightweight design, vol. 58, *Struct. Multidiscip. Optim.*, 2018, pp. 1081-1094.
- [44] K. Long, X. Wang e X. Gu, Local optimum in multi-material topology optimization and solution by reciprocal variables, *Struct. Multidisc. Optim.*, 2017, pp. 1283-1295.
- [45] J.-H. Zhu, W.-H. Zhang e L. Xia, Topology Optimization in Aircraft and Aerospace Structures Design, vol. 23, *Arch. Comput. Methods Eng.*, 2015, pp. 595-622.
- [46] M. Bruyneel, SFP - a new parameterization based on shape functions for optimal material selection: application to conventional composite plies, vol. 43, *Struct Multidisc Optim*, 2011, pp. 71-27.
- [47] M. Bruyneel, P. Duysinx, C. Fleury e T. Gao, Extensions of the Shape Functions with Penalization Parameterization for Composite-Ply Optimization, vol. 49, *AIAA Journal*, 2011, pp. 2325-2329.
- [48] G. B. Dantzig e M. N. Thapa, "Linear Programming," em *New York: Springer-Verlag*, vol. 1, 1997.
- [49] K. Schittkowski, "NLPQL: A fortran subroutine solving constrained nonlinear programming problems," vol. 5, *Ann. Oper. Res.*, 1986, pp. 485-500.
- [50] O. Sigmund e M. P. Bendsoe, "Topology optimization: from airplanes to nano-optics," em *Eds. Kgs. Lyngby: Technical University of Denmark (DTU)*, BT-Bridging from technology to society, 2004, pp. 40-51.
- [51] P. Hajela e E. Lee, Genetic algorithms in truss topological optimization, 22 ed., vol. 32, *Int. J. Solids Structures*, 1995, pp. 3341-3357.

-
- [52] W. Zuo e K. Saitou, Multi-material topology optimization using ordered SIMP interpolation, vol. 55, Struct Multidisc Optim, 2017, pp. 477-491.
- [53] P. G. Coelho, A few note for TAME classes, Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa, 2017.
- [54] M. P. Bendsøe e O. Sigmund, Material interpolation schemes in topology optimization, vol. 69, Arch. Appl. Mech., 1999, pp. 635-654.
- [55] M. Zhou e G. I. N. Rozvany, The COC Algorithm, Part II: Topological geometrical and generalized shape optimization., vol. 89, Comput. Methods Appl. Mech. Eng., 1991, pp. 309-336.
- [56] J. Stegmann e M. Stolpe, Discrete Material Optimization of Laminated Composites - SIMP vs. Global Optimization, III European Conference on Computational Mechanics, Jan 2006, p. 732.
- [57] R. Courant, Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations, 1 ed., vol. 49, Bull. Amer. Math. Soc, 1943, pp. 1-23.

Anexos

Anexo A – Redução da massa da estrutura otimizada com adição das áreas e fases de material

