



Emanuel Henrique Silva Semedo

(Licenciado em Ciências de Engenharia Mecânica)

ESTUDO NUMÉRICO DE MÉTODOS DE REDUÇÃO DE SISTEMAS DINÂMICOS

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em
Engenharia Mecânica

Orientadora: Raquel Albuquerque Soares Brás de Almeida,
Prof. Auxiliar, FCT-UNL

Co-orientador: António Paulo Vale Urgueira, Prof. Associado,
FCT-UNL

Júri:

Presidente: Prof. Doutor João Mário Burguete Cardoso

Arguente: Prof. Doutor Tiago Alexandre Narciso da Silva

Vogal: Prof. Doutor António Paulo Vale Urgueira

Estudo Numérico de Métodos de Redução de Sistemas Dinâmicos

Copyright© 2015 Emanuel Henrique Silva Semedo, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa.

A Faculdade de Ciências e Tecnologia e a Universidade Nova de Lisboa têm o direito, perpétuo e sem limites geográficos, de arquivar e publicar esta dissertação através de exemplares impressos reproduzidos em papel ou de forma digital, ou por qualquer outro meio conhecido ou que venha a ser inventado, e de a divulgar através de repositórios científicos e de admitir a sua cópia e distribuição com objetivos educacionais ou de investigação, não comerciais, desde que seja dado crédito ao autor e editor.

Este trabalho foi redigido segundo o novo acordo ortográfico em vigor.

Aos meus queridos pais,

Henrique e Filomena...

Agradecimentos

Quero expressar aqui os meus sinceros agradecimentos a todos que de alguma forma contribuíram, direta ou indiretamente, para a realização da presente dissertação. Não podendo mencionar todos, destaco os seguintes:

À professora Raquel Almeida, pela orientação do presente trabalho, pelas importantes sugestões e pela revisão do texto, que sem ela, este trabalho não podia ser realizado com sucesso. Agradeço também o seu constante apoio, motivação e paciência demonstrada ao longo deste trabalho e também por ter sempre acreditado em mim em todos os momentos.

Ao professor António Urgueira, pela co-orientação, pelas sugestões apresentadas, pelos seus ensinamentos e valiosos conselhos, e sobre tudo pela enorme disponibilidade demonstrada. Agradeço também pela revisão do texto e pelo esclarecimento de dúvidas pontuais que conduziram ao sucesso na obtenção de resultados.

A todos o meus amigos sem exceção, colegas e professores o meu muito obrigado especialmente ao Pedro Riscado por todo apoio e companheirismo demonstrado ao longo deste tempo no laboratório do DEMI. Reservo ainda uma palavra de reconhecimento ao meu colega Dilson Almeida pela amizade, confiança e companheirismo demonstrada em todos os momentos.

Deixo ainda uma palavra de agradecimento muito especial ao meu grande amigo Moisés Brito pela sua amizade, companheirismo e pelo seu apoio incondicional demonstrado ao longo de todo o meu percurso académico.

À Núria Inácio, pelo apoio incondicional e incentivo dado ao longo destes anos e sem o qual seria bem mais difícil o sucesso neste trabalho, obrigada por tudo.

Por fim, gostaria de agradecer a minha família, aos meus irmãos Mário e Eveline, e em especial aos meus pais, Henrique e Filomena, os grandes obreiros do meu percurso académico, a quem devo tudo na vida e em que, sem estes, nada disto seria possível.

Resumo

Quando uma determinada estrutura é estudada recorrendo ao Método de Elementos Finitos (MEF), verificamos que facilmente é obtido um conjunto muito vasto de informação, com matrizes de elevada ordem. A manipulação numérica de tais matrizes, torna os cálculos necessários demasiado morosos, reduzindo desta forma a eficiência computacional. No entanto, em determinados tipos de estudos, de que são exemplo o Acoplamento Estrutural, o *Model Updating* ou a Identificação do Dano em estruturas, pode não ser necessário utilizar toda a informação disponível. Em alternativa foram desenvolvidos os denominados Métodos de Redução de Sistemas Dinâmicos (MRSD), que vão condensar a informação em determinadas graus de liberdade, tidas como principais (ativos), permitindo desta forma otimizar os recursos computacionais e compatibilizar dados provenientes das vias, teórica e experimental.

O trabalho desenvolvido nesta dissertação tem como principais objetivos: i) a validação de um modelo numérico de viga livre-livre utilizando dados recolhidos pela via experimental através da Análise Modal Experimental (AME); ii) e a aplicação ao modelo numérico de diversos MRSD tentando identificar quais as suas principais vantagens e limitações.

Palavras-chave: MEF, MRSD, validação do modelo numérico, AME, vantagens, limitações.

Abstract

When a particular structure is studied using the Finite Element Method (FEM), we find that is easily obtained a very broad range of information, with high order matrices. The numerical manipulation of such matrices, becomes the necessary calculations too slow, thereby reducing the computational efficiency. However, in certain types of studies, examples of which are Structural Coupling, Model Updating or Damage Identification in structures, it may not be necessary to use all available information. Alternatively have been developed the so-called Dynamic Systems Reduction Methods (DSRM), the aiming at condensing the information in certain coordinates, defined as major (active), thus allowing to optimize the computing resources and to make compatible data from different sources, theoretical and experimental ones.

The work in this thesis has two main objectives: the validation of a numerical model of a free-free beam using the experimental data collected via Experimental Modal Analysis (EMA) and the application to the numerical model of various DSRM trying to identify what are their main strengths and weakness.

Keywords: *FEM, DSRM, validation of the numerical model, EMA, strengths, weakness.*

Índice de Matérias

Agradecimentos.....	i
Resumo.....	ii
Abstract.....	iii
Índice de Matérias.....	iv
Índice de Figuras.....	vi
Índice de Tabelas.....	ix
Simbologias e Notações.....	xii
Abreviaturas.....	xiv
1 Introdução.....	1
1.1 Motivação.....	1
1.2 Enquadramento.....	2
1.3 Descrição Sumária das Características Dinâmicas de um Sistema	3
1.3.1 Modelo Espacial	4
1.3.2 Modelo Modal	5
1.3.3 Modelo de Resposta	7
1.3.4 Resumo.....	9
1.4 Validação e Correlação do Modelo Numérico	9
1.5 Revisão Bibliográfica	9
1.6 Objetivos e Metodologia	11
1.7 Estrutura do Trabalho.....	12
2 Métodos de Redução de Sistemas Dinâmicos (MRSD)	13
2.1 Introdução.....	13
2.2 Seleção de graus de liberdade ativos/inativos	14
2.3 Equação do Movimento.....	15
2.4 Métodos de Redução de Sistemas Dinâmicos	16
2.4.1 Método de Redução de Guyan ou Condensação Estática.....	18
2.4.2 Sistema Reduzido Melhorado (IRS).....	19
2.4.3 Sistema Reduzido Melhorado (Processo Iterativo)	25
2.4.4 Processo de Redução/Expansão do Sistema Equivalente (SEREP)	27
2.4.5 Método de Redução Híbrida.....	30
2.4.6 Método de Redução Dinâmica	32
2.5 Resumo dos Métodos de Redução de Sistemas Dinâmicos	35
3 Validação do Modelo Numérico	36
3.1 Procedimento Experimental	36
3.2 Procedimento Numérico.....	38
3.3 Critério de Correlação MAC	42

3.4	Validação do Modelo Numérico	43
3.4.1	Comparação dos resultados numéricos com os dados obtidos no ensaio experimental	43
3.4.2	Validação do Modelo Numérico usando o critério de correlação FRAC	49
3.5	Conclusões	51
4	Estudo Numérico	53
4.1	Descrição sumária do procedimento numérico	53
4.2	Resultados Numéricos	59
4.2.1	Método de Guyan	59
4.2.2	Método IRS	67
4.2.3	SEREP	75
4.2.4	IRS (Processo Iterativo)	83
4.2.5	Método de Redução Híbrido	94
4.2.6	Método de Redução Dinâmica	102
4.3	Vantagens e Limitações dos MRSD	111
4.4	Resumos	112
5	Conclusões	113
5.1	Conclusões e trabalho futuro	113
Referências Bibliográficas		115
Anexos		119

Índice de Figuras

Figura 1.1- Inter-relação entre modelos dinâmicos (sistema não amortecido), adaptado de [4].....	9
Figura 3.1 Esquema da viga com a localização dos 23 acelerómetros.	36
Figura 3.2 Esquema de montagem experimental utilizada em laboratório	37
Figura 3.3 Esquema da viga representando os quatro pontos de excitação.....	37
Figura 3.4 Equipamentos usados para análise modal em laboratório.....	38
Figura 3.5 Esquema da viga simulada numericamente	38
Figura 3.6 Elemento viga	39
Figura 3.7 Comparação de FRF H_{99} entre o sistema completo e os vários MRSD.....	41
Figura 3.8 Comparação de curvas, numérica e experimental para FRF H_{33}	44
Figura 3.9 Comparação de curvas, numérica e experimental para FRF H_{77}	45
Figura 3.10 Comparação de curvas, numérica e experimental para FRF H_{1212}	46
Figura 3.11 Comparação de curvas, numérica e experimental para FRF H_{1919}	47
Figura 3.12 FRF H_{33} Experimental vs Numérico, com e sem amortecimento.....	49
Figura 3.13 Comparação de FRFs experimentais H_{37} e H_{73}	51
Figura 4.1 Esquema da viga simulada numericamente	54
Figura 4.2 FRF H_{99} para o sistema completo.....	55
Figura 4.3 Representação dos quatro primeiros modos flexíveis de vibração da estrutura global.....	56
Figura 4.4 Comparação de FRFs do sistema completo com as resultantes do método de Guyan para as várias situações (Caso 1).....	60
Figura 4.5 Comparação de FRFs entre sistema completo com as resultantes do método de Guyan para as várias situações (Caso 2).....	61
Figura 4.6 Comparação de FRFs sem adição de massa nas graus de liberdade ativos para o método de Guyan (Caso 3).....	63
Figura 4.7 Comparação de FRFs com adicção de 50g nas graus de liberdade ativos para o método de Guyan (Caso 3).....	63
Figura 4.8 Comparação de FRFs com adicção de 200g nas graus de liberdade ativos para o método de Guyan (Caso 3).....	64
Figura 4.9 Comparação de FRFs com adicção de 100g nas graus de liberdade inativos para o método de Guyan (Caso 3).....	65

Figura 4.10 Comparação de FRFs com adição de 200g nas graus de liberdade inativos para o método de Guyan (Caso 3).....	66
Figura 4.11 Comparação das curvas da FRF do sistema completo com as resultantes do método de IRS para as várias situações (Caso 1).....	68
Figura 4.12 Comparação de FRFs do sistema completo com as resultantes do método IRS para as várias situações (Caso 2).....	69
Figura 4.13 Comparação de FRFs sem adição de massa nas graus de liberdade ativos para o método de IRS (Caso 3).....	71
Figura 4.14 Comparação de FRFs com adição de 50g nas graus de liberdade ativos para o método de IRS (Caso 3).....	71
Figura 4.15 Comparação de FRFs com adição de 200g nas graus de liberdade ativos para o método de IRS (Caso 3).....	72
Figura 4.16 Comparação de FRFs com adição de 100g nas graus de liberdade inativos para o método de IRS (Caso 3).....	74
Figura 4.17 Comparação de FRFs com adição de 200g nas graus de liberdade inativos para o método de IRS (Caso 3).....	74
Figura 4.18 Comparação das curvas da FRF do sistema completo com as resultantes do método de SEREP para as várias situações (Caso 1).....	76
Figura 4.19 FRFs para diferentes situações usando o método SEREP (Caso 2).....	77
Figura 4.20 Comparação de FRFs sem adição nas graus de liberdade ativos para o método SEREP.....	79
Figura 4.21 Comparação de FRFs com adição de 100g nas graus de liberdade ativos para o método SEREP.....	79
Figura 4.22 Comparação de FRFs com adição de 200g nas graus de liberdade ativos para o método SEREP.....	80
Figura 4.23 Comparação de FRFs com adição de 100g nas graus de liberdade inativos para o método de SEREP (Caso 3).....	81
Figura 4.24 Comparação de FRFs com adição de 200g nas graus de liberdade inativos para o método de SEREP (Caso 3).....	82
Figura 4.25 Comparação das curvas da FRF do sistema completo com as resultantes do método IRS iterativo para as várias situações.....	85
Figura 4.26 FRFs para diferentes situações usando o método IRS Iterativo.....	87
Figura 4.27 Comparação de FRFs sem adição de massa nas graus de liberdade ativos para o método IRS iterativo (Caso 3).....	89
Figura 4.28 Comparação de FRFs com adição de 50g nas graus de liberdade ativos para o método IRS iterativo (Caso 3).....	89
Figura 4.29 Comparação de FRFs com adição de 200g nas graus de liberdade ativos para o método IRS iterativo (Caso 3).....	90

Figura 4.30 Comparação de FRFs com adição de 100g nas graus de liberdade inativos para o método IRS Iterativo (Caso 3).....	92
Figura 4.31 Comparação de FRFs com adição de 100g nas graus de liberdade inativos para o método IRS Iterativo (Caso 3).....	92
Figura 4.32 Comparação das curvas da FRF do sistema completo com as resultantes do método de Híbrido para as várias situações (Caso 1).....	95
Figura 4.33 FRFs para diferentes situações usando o método de redução Híbrido.....	96
Figura 4.34 Comparação de FRFs sem adição de massa nas graus de liberdade ativos para o método Híbrido (caso 3).....	97
Figura 4.35 Comparação de FRFs com adição de 50g nas graus de liberdade ativos para o método Híbrido (caso 3).....	98
Figura 4.36 Comparação de FRFs com adição de 200g nas graus de liberdade ativos para o método Híbrido (Caso 3).....	98
Figura 4.37 Comparação de FRFs com adição de 100g nas graus de liberdade inativos para o método de SEREP (Caso 3)	100
Figura 4.38 Comparação de FRFs com adição de 200g nas graus de liberdade inativos para o método de SEREP (Caso 3)	100
Figura 4.39 Comparação de FRFs do sistema completo com as resultantes do método de Redução Dinâmica para as várias situações (Caso 1).	102
Figura 4.40 Comparação de FRFs do sistema completo com as resultantes do método de Redução Dinâmica para as várias situações (Caso 2).	104
Figura 4.41 Comparação de FRFs sem adição de massa nas graus de liberdade ativos para o método de redução Dinâmico (Caso 3).	106
Figura 4.42 Comparação de FRFs com adição de 50g nas graus de liberdade ativos para o método de redução Dinâmico (Caso 3).....	106
Figura 4.43 Comparação de FRFs com adição de 200g nas graus de liberdade ativos para o método de redução Dinâmico (Caso 3).	107
Figura 4.44 Comparação de FRFs com adição de 100 gramas nas graus de liberdade inativos para o método de Redução Dinâmica (Caso 3)	108
Figura 4.45 Comparação de FRFs com adição de 200g nas graus de liberdade inativos para o método de Redução Dinâmica (Caso 3).....	109

Índice de Tabelas

Tabela 1.1 Formas alternativas de obter FRFs e as respectivas inversas	8
Tabela 2.1 Resumo dos MRSD e as respectivas matrizes de transformação	35
Tabela 3.1 Dados da estrutura simulada numericamente	39
Tabela 3.2 Pontos de medição da viga, as graus de liberdade correspondentes	40
Tabela 3.3 Comparação de resultados entre o modelo completo e o reduzido usando vários MRSD ..	41
Tabela 3.4 Resultados usando o critério MAC	42
Tabela 3.5 Comparação dos resultados entre o modelo numérico e experimental para H_{33}	45
Tabela 3.6 Comparação dos resultados entre os modelos, numérico e experimental para H_{77}	46
Tabela 3.7 Comparação dos resultados entre o modelo numéricos e experimental para H_{1212}	47
Tabela 3.8 Comparação dos resultados entre o modelo numéricos e experimental para H_{1919}	48
Tabela 3.9 Resultados da aplicação do critério FRAC	50
Tabela 4.1 Tabela representativa dos 23 pontos e as graus de liberdade correspondetes em termos numéricos.	54
Tabela 4.2 Frequências naturais dos primeiro 4 modos.	55
Tabela 4.3 Comparação de resultados do sistema completo com os obtidos com o método de Guyan (caso 1)	60
Tabela 4.4 Comparação de resultados entre sistema completo e os obtidos pelo método de Guyan (Caso 2)	62
Tabela 4.5 Correlação entre modos usando o critério MAC (Caso 2)	62
Tabela 4.6 Resultados referentes a primeira situação (sem massa) pelo método de Guyan (Caso 3)..	64
Tabela 4.7 Resultados referentes a segunda situação (adição de 50g) pelo método de Guyan (Caso 3)	65
Tabela 4.8 Resultados referentes a terceira situação (adição de 200g) pelo método de Guyan (Caso 3)	65
Tabela 4.9 Resultados referentes a quarta situação pelo método de Guyan (Caso 3)	66
Tabela 4.10 Resultados referentes a quinta situação pelo método de Guyan (Caso 3)	67
Tabela 4.11 Comparação de resultados usando o método IRS (Caso 1)	68
Tabela 4.12 Comparação de resultados entre o sistema completo e o métodos IRS (Caso 2)	70
Tabela 4.13 Resultados usando o critério MAC para o método IRS (caso 2)	70
Tabela 4.14 Resultados numéricos referentes a segunda situação do método IRS	73
Tabela 4.15 Resultados numéricos referentes a terceira situação do método IRS	73
Tabela 4.16 Resultados numéricos referentes a quarta situação do método IRS	75
Tabela 4.17 Resultados numéricos referentes a quinta situação do método IRS	75

Tabela 4.18 Comparação de resultados do sistema completo com os obtidos usando o método SEREP (caso 1).....	76
Tabela 4.19 Comparação resultados obtidos com o método SEREP (Caso 2).....	77
Tabela 4.20 Correlação entre modos usando o critério MAC (Caso 2)	78
Tabela 4.21 Resultados numéricos referentes a primeira situação	80
Tabela 4.22 Resultados numéricos referentes a segunda situação	80
Tabela 4.23 Resultados numéricos referentes a terceira situação	81
Tabela 4.24 Resultados numéricos referentes a quarta situação	82
Tabela 4.25 Resultados numéricos referentes a terceira situação	83
Tabela 4.26 Comparação de resultados entre, o sistema completo e o reduzido (IRS iterativo)	85
Tabela 4.27 Correlação entre modos do sistema completo e reduzido para cada uma das situações usando o critério MAC	86
Tabela 4.28 N° de graus de liberdade preservadas vs tempo de convergência.....	86
Tabela 4.29 Freqüências naturais para cada uma das situações.	87
Tabela 4.30 Correlação entre modos usando o critério MAC	88
Tabela 4.31 N° de graus de liberdade preservadas vs tempo de convergência.....	88
Tabela 4.32 Resultados numéricos referentes a primeira situação com método IRS iterativo.....	90
Tabela 4.33 Resultados numéricos referentes a segunda situação com método IRS iterativo	91
Tabela 4.34 Resultados numéricos referentes a terceira situação com método IRS iterativo	91
Tabela 4.35 Resultados numéricos referentes a quarta situação	93
Tabela 4.36 Resultados numéricos referentes a quinta situação	93
Tabela 4.37 Comparação de tempos de cálculo para cada um das situações do caso 3	93
Tabela 4.38 Resultados numéricos obtidos com o método Híbrido	95
Tabela 4.39 Freqüências naturais para cada uma das situações.	96
Tabela 4.40 Correlação entre modos usando o critério MAC	97
Tabela 4.41 Resultados numéricos referentes a primeira situação com o método Híbrido.....	99
Tabela 4.42 Resultados numéricos referentes a segunda situação com o método Híbrido	99
Tabela 4.43 Resultados numéricos referentes a terceira situação com método Híbrido	99
Tabela 4.44 Resultados numéricos referentes a quarta situação	101
Tabela 4.45 Resultados numéricos referentes a terceira situação	101
Tabela 4.46 Comparação de resultados do sistema completo com os obtidos usando o método de Guyan (caso 1)	103
Tabela 4.47 Freqüências naturais para cada uma das situações.	104
Tabela 4.48 Correlação entre modos usando o critério MAC	105
Tabela 4.49 Resultados referentes a primeira situação pelo método de Redução Dinâmica (Caso 3).....	107
Tabela 4.50 Resultados referentes a segunda situação pelo método de Redução Dinâmica (Caso 3)	108
Tabela 4.51 Resultados referentes a terceira situação pelo método de Redução Dinâmica (Caso 3)	108

Tabela 4.52 Resultados numéricos referentes a quarta situação	109
Tabela 4.53 Resultados numéricos referentes a terceira situação	110
Tabela 4.54 Vantagens e limitações dos MRSD	111
Tabela 4.55 Seleção de graus de liberdade ativos	112

Simbologias e Notações

$[A(\omega)]$	matriz de aceleração ou inércia
$[C]$	matriz de amortecimento viscoso
$[D]$	matriz de amortecimento histerético
$\{f(t)\}$	vetor de forças
$[H(\omega)]$	matriz de receptância
$[I]$	matriz identidade
$[K]$	matriz de rigidez
$[\hat{k}_r]$	matriz de rigidez modal
$[K^R]$	matriz de rigidez reduzida
$[M]$	matriz de massa
$[M^R]$	matriz de massa reduzida
$[M(\omega)]$	matriz de massa aparente
$[\hat{m}_r]$	matriz de massa modal
m_{acel}	massa do acelerómetro
N	número total de graus de liberdade (graus de liberdade) do sistema global (completo)
$[Q(\omega)]$	impedância mecânica
$\{q\}$	vetor de deslocamento associado às graus de liberdade modais
$[T]$	matriz de transformação de graus de liberdade
$\{\bar{X}\}$	vetor de amplitude complexa
$\{x(t)\}$	vetor de deslocamento

$\{\dot{x}(t)\}$	vetor de velocidade
$\{\ddot{x}(t)\}$	vetor de aceleração
$\{x_N\}$	vetor de graus de liberdade globais
$\{x_a\}$	vetor de graus de liberdade ativos
$\{x_i\}$	vetor de graus de liberdade inativos
$[Y(\omega)]$	matriz de mobilidade
$[Z(\omega_i)]$	matriz de rigidez dinâmica
$[Z^R]$	matriz de rigidez dinâmica reduzida
$[]^T$	matriz transposta
$[]^{-1}$	matriz inversa
$[]^g$	matriz inversa generalizada
$\{ \}^H$	vetor complexo conjugado transposto (hermitiana)
$[]^H$	matriz complexa conjugada transposta (hermitiana)
ω_i	frequência natural
$[\omega^2]_{N \times N}$	matriz diagonal contendo todas as frequências naturais do sistema
$[\Psi]$	matriz modal
$\{\Psi\}$	vetor modal
$[\Phi]$	matriz modal normalizada em relação a matriz de massa
$\{\phi_C\}$	vetor modal contendo os modos do sistema completo
$\{\phi_R\}$	vetor modal contendo os modos do sistema reduzido

Abreviaturas

AME	Análise Modal Experimental
CMS	<i>Component Mode Synthesis</i>
DEMI	Departamento de Engenharia Mecânica e Industrial
FRF	Função de Resposta em Frequência
FRAC	<i>Frequency Response Assurance Criterion</i>
IRS	<i>Improved Reduced System</i>
MEF	Método dos Elementos Finitos
MRSR	Métodos de Redução de Sistemas Dinâmicos
MAC	<i>Modal Assurance Criterion</i>
SEREP	<i>System Equivalent Reduction and Expansion Process</i>
DSRM	<i>Dynamic Systems Reduction Methods</i>
EMA	<i>Experimental Modal Analysis</i>
FEM	<i>Finite Element Method</i>

Capítulo 1

1 Introdução

Com o presente capítulo pretende-se proporcionar uma visão global sobre o trabalho desenvolvido começando por apresentar a motivação e o enquadramento, seguindo-se a descrição sumária dos modelos que descrevem um sistema dinâmico e a apresentação do critério usado na validação e correlação de modelos. Posteriormente é feita a revisão bibliográfica e a explicitação dos objetivos propostos para o presente trabalho. Na parte final é descrita a estrutura do trabalho especificando de uma forma resumida o conteúdo de cada capítulo.

1.1 Motivação

A principal motivação que conduziu à elaboração da presente dissertação deve-se às dificuldades sentidas por parte dos utilizadores/projetistas, sempre que é necessário recorrer ao **Método dos Elementos Finitos (MEF)** [1, 2] para modelar uma determinada estrutura onde, devido à discretização, é obtido um conjunto muito vasto de informação, com matrizes de elevada ordem, o que por sua vez origina um volume e tempos de cálculo apreciáveis. A manipulação numérica de tais matrizes, torna os cálculos necessários demasiado morosos, reduzindo desta forma, a eficiência computacional. Para tentar colmatar estas dificuldades foram desenvolvidos os chamados **Métodos de Redução de Sistemas Dinâmicos (MRSD)** [3, 4].

A possibilidade de utilizar dados experimentais obtidos através da **Análise Modal Experimental (AME)** [5, 6] para validar o modelo numérico, uma vez que a generalidade dos casos têm sido aplicados apenas a estudos numéricos, constituiu uma motivação suplementar.

Para além do referido anteriormente, tem-se também por objetivo dar a conhecer alguns dos MRSD existentes bem como as vantagens e limitações inerentes à sua utilização.

1.2 Enquadramento

A execução de um projeto em Engenharia de Estruturas é sempre sujeita a um processo iterativo de análises e alterações, visando uma solução que vá de encontro aos objetivos, pré-definidos, tendo de ser levados em consideração aspetos como: o custo, a capacidade de resposta em tempo útil, a funcionalidade, entre outros aspetos tidos como regras base em qualquer projeto de engenharia. Neste sentido, ao longo dos tempos têm vindo a ser desenvolvidos, de forma contínua, métodos de análise cada vez mais eficientes e capazes de corresponder às exigências do problema.

Antes do aparecimento dos computadores, a resolução de problemas de análise de estruturas era realizada por via analítica, baseada na resolução de equações diferenciais e integrais que regem o fenómeno, sem nunca prescindir das indispensáveis condições fronteira. Devido à crescente e elevada complexidade dos problemas da engenharia, a via analítica só era aplicável a modelos de geometria simples, sendo que para modelos de geometria complexa a solução era difícil chegando mesmo a ser impossível de se obter. Por isso, na tentativa de ultrapassar este inconveniente, era comum proceder a sucessivas simplificações de forma a obter soluções por esta via, simplificações estas que tinham influência direta na solução, podendo comprometer todo o projeto, pondo em o risco a segurança da própria estrutura. Contudo, o aparecimento dos computadores veio a possibilitar, em conjunto com os métodos numéricos, a resolução de problemas de análise de estruturas da engenharia moderna aumentando significativamente não só a sua eficiência mas também a sua eficácia. O aparecimento desta nova via, designada por via numérica, fez com que a resolução de problemas de análise de estruturas pela via analítica fosse descartada uma vez que não permitia obter soluções credíveis, nem dar respostas rápidas, quando aplicada a problemas complexos. Neste contexto, surge destacado dos outros métodos numéricos (exemplo: método das diferenças finitas ou dos volumes finitos), o MEF, uma ferramenta poderosa e versátil, capaz de resolver diversos problemas da engenharia, de que são exemplo, determinação de estados de tensão e deformação, análises vibrações, entre outro tipo de análises. O método consiste na discretização de uma dada estrutura (viga, pórtico, treliça, etc.), decompondo-a em várias (quantas forem convenientes) subestruturas, denominadas por elementos, elementos estes que posteriormente são ligados uns aos outros através das suas extremidades por pontos, denominados nós. Cada um destes nós pode possuir vários graus de liberdade (máximo 6 por nó, 3 translações e 3 rotações). Ao processo de ligação dos diversos elementos denomina-se montagem. Atualmente, a resolução de problemas de análise de estruturas pelo MEF revela-se fundamental, pois permite estudar detalhadamente estruturas complexas com um conjunto muito vasto de elementos finitos.

No entanto, quando uma determinada estrutura é estudada recorrendo ao MEF, verifica-se que facilmente é obtido um conjunto muito vasto de informação, com matrizes de elevada ordem. A manipulação numérica de tais matrizes, torna os cálculos necessários demasiado morosos, reduzindo desta forma a eficiência computacional. Em determinados tipos de estudos, de que são exemplo o

Acoplamento Estrutural, o *Model Updating* ou a Identificação do Dano em Estruturas, pode não ser necessário utilizar toda a informação disponível. Neste sentido, foram então desenvolvidos os denominados MRSD, cujo objetivo é reduzir a ordem das matrizes envolvidas nos cálculos, permitindo desta forma otimizar os recursos computacionais. A metodologia dos MRSD consiste em condensar a informação em um número reduzido de graus de liberdade tidos como ativos (entenda-se como os que são preservados no sistema), descartando todos os outros considerando-os inativos (a eliminar do sistema), preservando no entanto as características dinâmicas do sistema físico em estudo. Entretanto, o uso do MEF não passa de uma abordagem teórica, obrigando muitas vezes a uma comparação com os resultados provenientes de outras vias tendo como objetivo que a segurança da estrutura em análise não seja comprometida.

Neste sentido, recorreu-se à via experimental como via complementar, tendo como objetivo não só complementar e compatibilizar dados provenientes de ambas as vias, mas também, a validação do modelo numérico, assegurando assim uma maior credibilidade nos resultados obtidos pela via numérica. A via experimental é fundamental podendo ser mesmo determinante uma vez que oferece a possibilidade de simular fenómenos muito próximos do que seria o comportamento da estrutura na realidade.

Posto isto, pode-se dizer então que a análise dinâmica da estrutura para o presente trabalho será efetuada por estas duas vias:

- Via experimental, recorrendo à AME através de recolha de dados por meio de **Funções de Resposta em Frequência (FRF)** para a validação do modelo numérico.
- Via numérica, recorrendo ao MEF usando o *software MATLAB*.

A combinação dos resultados proveniente das duas vias, experimental e numérica, aumenta de forma acentuada a credibilidade nos resultados obtidos.

1.3 Descrição Sumária das Características Dinâmicas de um Sistema

Na análise dinâmica de estruturas, as suas características dinâmicas normalmente resumem-se ao conhecimento dos parâmetros modais, nomeadamente as suas frequências naturais, modos de vibração e os fatores de amortecimento. Os referidos parâmetros modais podem ser obtidos através da modelação matemática da estrutura, fundamental na análise de vibrações, de três formas diferentes [5,6]:

- i) Modelo Espacial
- ii) Modelo Modal
- iii) Modelo de Resposta

As características dinâmicas de um sistema encontram-se já referenciadas em literatura diversa, da qual se destacam [5,6,7], mas os princípios serão aqui novamente abordados a fim de estabelecer uma terminologia para os capítulos subsequentes de modo a possibilitar um maior entendimento sobre o trabalho desenvolvido.

1.3.1 Modelo Espacial

O modelo espacial constitui uma parte importante na descrição das propriedades espaciais de um sistema dinâmico e é composto pelas matrizes de massa, rigidez e amortecimento (viscoso ou histerético). A partir do conhecimento destas matrizes, que caracterizam a estrutura em estudo, são definidas as suas equações de equilíbrio.

Matriz de massa $[M]_{N \times N}$ permite definir as forças de inércia em cada grau de liberdade quando o sistema está sujeito a uma dada aceleração.

Matriz de rigidez $[K]_{N \times N}$ pode ser definida como uma constante de proporcionalidade que relaciona as forças de restituição com o deslocamento de um determinado grau de liberdade.

Matriz de amortecimento viscoso $[C]_{N \times N}$ ou histerético $[D]_{N \times N}$ constante de proporcionalidade que relaciona as forças dissipativas com as velocidades no caso de amortecimento viscoso e deslocamentos no caso de amortecimento histerético, associados a cada grau de liberdade.

O índice N representa em simultâneo, o número total de graus de liberdade do sistema em estudo e a ordem total das matrizes obtidas através do MEF.

Conhecendo o modelo espacial e fazendo o equilíbrio de forças, a equação de equilíbrio para um sistema dinâmico com N graus de liberdade pode ser descrito na sua forma condensada por:

$$[M]_{N \times N} \{\ddot{x}(t)\}_{N \times 1} + [C]_{N \times N} \{\dot{x}(t)\}_{N \times 1} + [K]_{N \times N} \{x(t)\}_{N \times 1} = \{f(t)\}_{N \times 1} \quad (1.1)$$

Onde $\{\ddot{x}(t)\}$, $\{\dot{x}(t)\}$ e $\{x(t)\}$ são os vetores de aceleração, velocidade e deslocamento, respetivamente, e $\{f(t)\}$ é o vetor de forças externas.

1.3.2 Modelo Modal

O modelo modal de um determinado sistema dinâmico não amortecido é caracterizado através das frequências naturais e modos de vibração associados.

A matriz das frequências naturais (matriz dos valores próprios) $[\omega^2]_{N \times N}$ é uma matriz diagonal contendo as N frequências naturais de um dado sistema dinâmico não amortecido com N graus de liberdade. Para cada grau de liberdade existe uma frequência natural a ele associado, e são denominados por frequências naturais por serem determinadas sem que o sistema esteja sujeito a qualquer força exterior, sendo representada a matriz destas frequências da seguinte forma:

$$[\omega^2]_{N \times N} = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \omega_N^2 \end{bmatrix}_{N \times N} \quad (1.2)$$

Os modos de vibração $\{\Psi_K\}_{N \times 1}$ são representados por vetores em que cada elemento do modelo representa a deflexão de um grau de liberdade N relativamente ao outro ($N-1$), à frequência natural correspondente, o índice K representa o número do modo e varia entre ($1 \dots N$) graus de liberdade do sistema.

A matriz modal $[\Psi]_{N \times m}$ é uma matriz composta pelos modos de vibração em que as linhas representam os N graus de liberdade do sistema enquanto as colunas representam os m modos de vibração.

$$[\Psi]_{N \times m} = [\{\Psi_1\} \quad \{\Psi_2\} \quad \cdots \quad \{\Psi_K\}] \quad (1.3)$$

A obtenção das frequências e dos modos naturais de vibração está sujeita à resolução de um problema de valores e vetores próprios. Admitindo um sistema dinâmico com N graus de liberdade descrito pela equação (1.1) na situação de vibrações livre $\{f(t)\} = \{0\}$, não amortecida $[C] = [0]$, a solução do conjunto de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem de coeficientes constantes é dada por:

$$\{x(t)\} = \{\bar{X}\} \cdot e^{i\omega t} \quad (1.4)$$

Substituindo a equação (1.4) em (1.1) a equação reduz-se a:

$$[[K] - \omega^2 \cdot [M]]\{\bar{X}\} = \{0\} \quad (1.5)$$

Onde $\{\bar{X}\}$ representa o vetor de amplitude invariante no tempo. Conclui-se que a equação (1.5) possui N soluções reais positivas do tipo $\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_N^2$. A ω^2 chama-se valor próprio do sistema não amortecido e os valores de $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N$ são as denominadas por frequências naturais do sistema.

Substituindo agora cada uma das N frequências naturais na equação (1.5) resulta um conjunto de equações tendo como incógnita o vetor $\{\bar{X}\}$, de onde se obtêm as N soluções vetoriais possíveis $\{\Psi_1\}, \{\Psi_2\}, \dots, \{\Psi_N\}$. O vetor $\{\Psi\}$ é denominado por vetor próprio do sistema não amortecido. Cada valor próprio tem um vetor próprio associado constituindo um par ω_N e $\{\Psi_N\}$, o qual é denominado por modo de vibração do sistema.

Propriedades de ortogonalidade

O modelo modal possui propriedades importantes inerentes às matrizes de massa e rigidez, conhecidas como propriedades de ortogonalidade, descritas por:

$$[\hat{m}_r]_{m \times m} = [\Psi]_{m \times N}^T \cdot [M]_{N \times N} \cdot [\Psi]_{N \times m} \quad (1.6)$$

$$[\hat{k}_r]_{m \times m} = [\Psi]_{m \times N}^T \cdot [K]_{N \times N} \cdot [\Psi]_{N \times m} \quad (1.7)$$

Sendo $[\hat{m}_r]$ e $[\hat{k}_r]$ as matrizes diagonal de massa e rigidez modal, podendo cada elemento destas matrizes serem relacionados da seguinte forma:

$$\omega_r^2 = \frac{k_r}{m_r} \quad (1.8)$$

Onde ω_r^2 é a frequência natural associada ao modo r .

As propriedades de ortogonalidade da matriz modal normalizada em relação à matriz de massa é descrita por:

$$[\Phi]_{m \times N}^T \cdot [M]_{N \times N} \cdot [\Phi]_{N \times m} = [\hat{I}]_{m \times m} \quad (1.9)$$

$$[\Phi]_{m \times N}^T \cdot [K]_{N \times N} \cdot [\Phi]_{N \times m} = [\hat{\omega}_r^2]_{m \times m} \quad (1.10)$$

$[I]$ - Matriz identidade

$[\Phi]$ - Matriz modal normalizada em relação a matriz de massas obtida a partir dos vetores modais.

1.3.3 Modelo de Resposta

O modelo de resposta é obtido recorrendo à AME através da recolha de dados por meio de FRFs como referido anteriormente. Assim sendo, é efetuada uma breve descrição teórica sobre o conceito de FRF e as diversas formas de a obter.

Considerando a equação (1.1), e admitindo agora uma estrutura sujeita a uma excitação harmónica por um conjunto de forças aplicadas à mesma frequência com amplitudes e fases variadas, resulta:

$$\{f(t)\} = \{\bar{F}\} \cdot e^{j\omega t} \quad (1.11)$$

Em que a solução particular tem a seguinte forma

$$\{x(t)\} = \{\bar{X}\} \cdot e^{j\omega t} \quad (1.12)$$

Onde, $\{\bar{F}\}$ e $\{\bar{X}\}$ são os vetores de ordem $N \times 1$ contendo as amplitudes complexas da força e do deslocamento invariantes no tempo. Substituindo as equações (1.11) e (1.12) na equação (1.1) resulta

$$[[K] - \omega^2 \cdot [M] + i\omega \cdot [C]] \{\bar{X}\} \cdot e^{j\omega t} = \{\bar{F}\} \cdot e^{j\omega t} \quad (1.13)$$

Rearranjando resulta

$$\{\bar{X}\} = [[K] - \omega^2 \cdot [M] + i\omega \cdot [C]]^{-1} \cdot \{\bar{F}\} = [H(\omega)] \cdot \{\bar{F}\} \quad (1.14)$$

Em que:

$$[H(\omega)] = [[K] - \omega^2 \cdot [M] + i\omega \cdot [C]]^{-1} \quad (1.15)$$

A matriz $[H(\omega)]$ designa-se por matriz de receptância ou matriz das FRFs de ordem N , contendo informação das características dinâmicas do sistema sendo definida pelo quociente entre o deslocamento observado devido a uma força aplicada sobre a estrutura a uma dada frequência ω , sendo matematicamente descrita por:

$$H_{ij}(\omega) = \frac{X_i(\omega)}{F_j(\omega)} \quad (1.16)$$

Cada elemento da matriz $H_{ij}(\omega)$ representa a resposta observada no grau de liberdade i devido à aplicação de uma força no grau de liberdade j , a uma dada frequência.

A matriz das FRFs $[H(\omega)]$ está relacionada com a matriz $[Z(\omega)]$, denominada por matriz de rigidez dinâmica, da seguinte forma:

$$[H(\omega)] = [Z(\omega)]^{-1} \quad (1.17)$$

Experimentalmente, a FRF é obtida através de medições diretas sobre a estrutura, fazendo o quociente entre a resposta ou *output* (deslocamento, velocidade ou aceleração) e o *input* (força) aplicada em qualquer parte da estrutura. Na tabela abaixo apresentam-se as várias formas alternativas de FRFs para as diferentes respostas e o significado das respectivas inversas.

Tabela 1.1 Formas alternativas de obter FRFs e as respectivas inversas

Resposta	FRF	Inversa
	$FRF = \frac{Resposta}{Força}$	$\frac{Força}{Resposta}$
Deslocamento $X(\omega)$	Receptância $H(\omega)$	Rigidez Dinâmica $Z(\omega)$
Velocidade $\dot{X}(\omega)$	Mobilidade $Y(\omega)$	Impedância Mecânica $Q(\omega)$
Aceleração $\ddot{X}(\omega)$	Acelerância $A(\omega)$	Massa Aparente $M(\omega)$

1.3.4 Resumo

Com base no que já tinha sido referido anteriormente conclui-se que os modelos inter-relacionam-se entre si conforme mostra o esquema abaixo indicado.

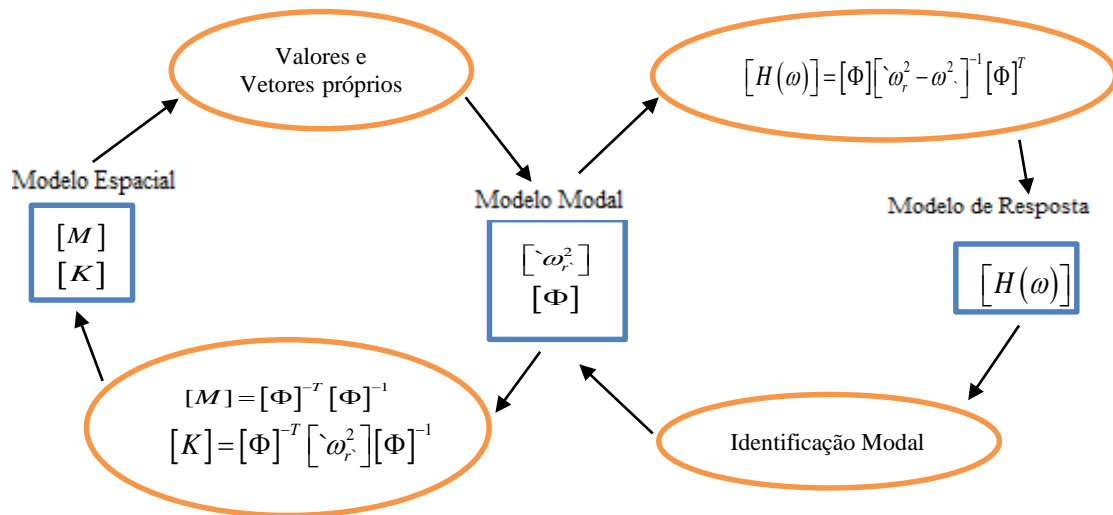


Figura 1.1- Inter-relação entre modelos dinâmicos (sistema não amortecido), adaptado de [6]

1.4 Validação do Modelo Numérico

Por forma a validar o modelo numérico, desenvolvido recorrendo ao MEF, com os dados experimentais de uma viga existente no laboratório de mecânica estrutural, foi utilizado o *software* de programação *MATLAB*. Os resultados obtidos através da simulação numérica foram analisados e validados por comparação com os dados obtidos através dos ensaios experimentais. Para tal foi utilizado o critério de correlação *Frequency Response Assurance Criterion (FRAC)* [8] que correlaciona as respostas do modelo experimental com as respostas do modelo numérico.

1.5 Revisão Bibliográfica

Na análise dinâmica de estruturas usando o MEF, normalmente é necessária uma grande quantidade de graus de liberdade (dezenas, centenas ou até milhares) para descrever corretamente o sistema em estudo, originando matrizes (de massa, rigidez e amortecimento) de elevada ordem para a caracterização das propriedades dinâmicas de uma estrutura, nomeadamente no cálculo dos valores próprios (frequências naturais) e vetores próprios (modos de vibração), ou até no cálculo das FRFs. A elevada ordem dessas matrizes traduz-se numa baixa eficiência computacional. Neste sentido, foram desenvolvidos os MRSD de modo a reduzir a ordem das matrizes envolvidas nos cálculos, tendo como objetivo aumentar a

eficiência computacional da análise dinâmica preservando as propriedades dinâmicas do sistema que o caracterizam. A redução de sistemas é realizada através de uma matriz de transformação sendo que esta varia consoante o método utilizado.

O primeiro método diretamente aplicado à redução de sistemas dinâmicos surgiu na década de sessenta onde, Guyan [9] propôs o até hoje conhecido como método de condensação estática ou método de Guyan, assim denominado por este ser considerado o precursor do método. De acordo com este método os termos de inércia não são contabilizados no processo de redução, fazendo com que este seja exato apenas para análise estática. Estudos realizados por vários investigadores [10-15] concluem que quando aplicado a problemas de análise dinâmica os resultados obtidos não são os pretendidos pondo em causa a sua aplicação nestas condições. Anos mais tarde e na tentativa de desenvolver um método que incluísse os efeitos de inércia até então não contabilizados por Guyan e, ao mesmo tempo gerasse qualitativamente e quantitativamente melhores resultados, vários foram os métodos propostos ao longo dos anos. Três anos mais tarde (1968) Craig e Bampton [16] apresentaram o método denominado “*Component Mode Synthesis*” (CMS) que combina a redução de Guyan com os modos de Craig-Bampton numa única matriz de transformação, sendo os referidos modos determinados considerando apenas os graus de liberdade inativos do sistema. Vários foram os trabalhos apresentados com base no presente método dado que este produz qualitativamente melhores resultados que o método anterior. Atualmente é muito utilizado em várias aplicações [10,14,17] exemplificando alguns casos mais recentes. Contudo o método revela algumas limitações que se prendem com facto de este depender do método de Guyan na composição da sua matriz de transformação [18]. Em 1978, Leung [19] e pouco tempo depois Paz [20] propuseram o Método de Redução ou Condensação Dinâmica. O método consiste em substituir a matriz de rigidez utilizada na condensação estática pela matriz de rigidez dinâmica em que este inclui automaticamente termos de inércia no seu processo de redução até então não considerados por Guyan. No entanto, o método revelou-se limitado dado que apenas consegue preservar um modo de cada vez [12], ainda assim, apresenta uma melhoria relativamente ao método de Guyan [10-12,15]. Friswell *et al* [21], Qu e Fu [22], Liu e Wu [23] propuseram ainda uma variante do método em que a matriz da transformação é gerada através de um processo iterativo, cuja grande limitação segundo Lin e Xia [24] reside no facto dos vetores e valores próprios serem calculados uma de cada vez reduzindo a eficiência do método. Almeida [13] propôs ainda a redução dinâmica sem o conhecimento prévio da matriz de massa e rigidez. Quase dez anos mais tarde (1987) e com uma metodologia diferente Kammer [25] propôs o método de Redução Modal cuja filosofia consiste em construir a matriz de transformação a partir da matriz modal obtida no cálculo dos vetores e valores próprios do sistema global. O sistema global define-se aqui como o sistema que contém todos os graus de liberdade sem exceção. Dois anos mais tarde O’Callahan *et al* [26] propõem o método denominado *System Equivalent Reduction Expansion Process* (SEREP), o método é em quase tudo semelhante ao anterior proposto por Kammer cuja única diferença reside na forma como é apresentada matriz de transformação (Capítulo 2) [27].

Satry *et al* [28] propuseram ainda um método iterativo para o método SEREP. O método ganhou importância devido à sua precisão sendo usado em várias aplicações [10,29-33], exemplificando alguns deles. Em simultâneo O'Callahan [34], individualmente, propôs o método conhecido como *Improved Reduced System* (IRS) que tem como base o método de Guyan, em que este é usado como uma estimativa de aproximação ao modelo reduzido sendo depois efetuados ajustamentos visando a compensação dos efeitos de inércia não considerados na condensação estática. Numa análise mais profunda ao método, Gordis [35] conclui que o método realmente produz melhores resultados que a condensação estática. Ainda na tentativa de melhorar o método de Guyan, Koutsouvasilis e Beitelshmidt [18], propuseram um novo método combinando o método CMS e o IRS. Com este método obteve-se qualitativamente melhores resultados do que com o método de Guyan dado que o método IRS inclui efeitos de inércia não contabilizados por Guyan na sua matriz de transformação. Dois anos mais tarde, um outro método foi tentado por Kammer [36] e denominado de Redução Híbrida por combinar os métodos de Guyan e SEREP. Segundo Kammer o método visava resolver o problema das matrizes mal condicionadas do método SEREP, facto também referido anteriormente por O'Callahan [37]. No mesmo período Blair *et al* [38] apresentaram um processo iterativo para o método IRS, mas este viria a não apresentar grandes resultados devido a não atualização da matriz de transformação de uma iteração para a outra subsequente (ver Capítulo 2). Ciente deste facto, quatro anos mais tarde (1995) e na tentativa de minimizar o erro na aproximação ao sistema global através do método IRS, Friswell *et al* [21,39] apresentaram o método IRS obtido através de um processo iterativo cuja matriz de transformação é modificada através de sucessivas iterações até ser alcançada a convergência pretendida [40]. O método revelou ser preciso na aproximação ao sistema global apesar de nem sempre a convergência ser alcançada com a rapidez desejada. Neste sentido Xia e Lin [41], Choi *et al* [42] propuseram um esquema alternativo para a determinação da matriz de transformação em que, segundo eles, a rapidez da convergência é superior ao anteriormente apresentado por Friswell *et al* [21,39].

Uma pesquisa mais profunda sobre os MRSD pode ser consultada nas referências [3, 4]. De salientar ainda que o método SEREP pode ser usado num outro contexto nomeadamente na expansão de graus de liberdade do modelo experimental para comparação com o modelo numérico [12, 31,]. A expansão, não sendo o objetivo do presente trabalho, não será aqui abordada.

1.6 Objetivos e Metodologia

O presente trabalho tem como objetivo a validação de um modelo numérico de viga livre-livre utilizando dados recolhidos pela via experimental. Após esta validação serão aplicados ao modelo numérico diversos métodos de redução (MRSD). De entre os MRSD identificados, na revisão bibliográfica, foram selecionados vários tentando identificar quais as suas principais vantagens e limitações.

Primeiramente é efetuada a validação do modelo numérico gerado pelo MEF realizando uma comparação entre os valores das frequências naturais e FRFs, obtidos pela via numérica com os obtidos experimentalmente e de seguida é avaliado o nível de correlação entre os dados obtidos por ambas as vias através do critério de correlação FRAC.

O plano de trabalho é dividido em duas partes:

- i) Modelação e Validação do modelo numérico;
- ii) Aplicação de diversos MRSD e análise de resultados visando identificar vantagens e limitações dos métodos em estudo.

1.7 Estrutura do Trabalho

A presente dissertação é composta por cinco capítulos. Nesta secção será feita uma descrição sumária do conteúdo de cada capítulo.

Capítulo 1 – Introdução. Neste capítulo é introduzido o tema e objetivo da dissertação.

Capítulo 2 - Métodos de Redução de Sistema Dinâmicos (MRSD). Neste capítulo efetuou-se a apresentação detalhada dos métodos selecionados para o presente trabalho dando a conhecer todos os detalhes inerentes ao processo de redução bem como as suas matrizes de transformação.

Capítulo 3 – Validação do Modelo Numérico, recorre-se a utilização de dados obtidos através de ensaios experimentais para a comparação com os obtidos na modelação numérica (Viga livre-livre) com o objetivo de validar o modelo numérico.

Capítulo 4- Aplicação de diversos MRSD ao Modelo Numérico, é feita a recolha de dados obtidos através da modelação numérica para implementação dos métodos escolhidos. Para o efeito foi utilizada uma viga na condição livre-livre modelada em *MATLAB*. Os resultados obtidos do estudo numérico permitirão concluir sobre os mesmos.

Capítulo 5 - Conclusão, onde é efetuada a discussão dos resultados obtidos bem como apresentadas sugestões para trabalhos futuros.

Anexos - Na parte final apresenta-se um conjunto de anexos respeitantes aos resultados numéricos bem como alguns códigos desenvolvidos em *MATLAB* com os MRSD estudados.

Capítulo 2

2 Métodos de Redução de Sistemas Dinâmicos (MRSD)

Neste capítulo é efetuada uma breve introdução sobre os MRSD. Dedicar-se ainda uma secção à discussão sobre como é feita a seleção de graus de liberdade a preservar no sistema, o que antecede o processo de redução. Seguidamente é apresentada a forma como devem ser organizadas as matrizes de massa e rigidez do sistema em estudo, antes de serem aplicados os métodos de redução. Posteriormente são apresentados detalhadamente os vários métodos de redução seleccionados para estudo. Finaliza-se o capítulo com um resumo das matrizes de transformação de cada um dos MRSD seleccionados.

2.1 Introdução

A utilização do MEF na resolução de problemas estáticos e/ou dinâmicos, pode implicar um volume de cálculo apreciável devido à discretização da estrutura em estudo, que origina matrizes de elevada ordem. Esta situação obriga a elevados recursos computacionais sempre que existe a necessidade de compatibilizar dados numéricos com os dados obtidos experimentalmente, ou a sua baixa eficiência quando apenas se pretende conhecer as FRFs em alguns pontos da estrutura. A razão principal para utilização dos MRSD reside no facto de estes permitirem otimizar os recursos computacionais reduzindo a ordem das matrizes envolvidas nos cálculos e assim sendo o tempo despendido nos mesmos, tentando que não sejam comprometidas as características dinâmicas do sistema em estudo.

A utilização destes métodos é importante em aplicações, tais como:

- Condensação dos modelos obtidos pelo MEF com o objetivo de os tornar compatíveis com os graus de liberdade utilizados experimentalmente;
- Validação de modelos;
- Acoplamento de Estruturas;
- *Model Updating*;
- Identificação do Dano.

No presente trabalho, a utilização destes métodos centra-se na determinação dos valores e vetores próprios do sistema em estudo, obtenção das FRFs em determinados graus de liberdade considerados relevantes e a condensação de modelos obtidos pelo MEF com o objetivo de os tornar compatíveis com os graus de liberdade utilizados experimentalmente.

Os MRSD têm tido um papel fundamental, na análise dinâmica de estruturas quando se utiliza o MEF, dado a elevada ordem das matrizes que este método origina. Tal facto dificulta a compatibilização de dados obtidos através do modelo numérico com os obtidos através do modelo experimental, uma vez que os graus de liberdade deste último são limitados a um número muito reduzido quando comparados com os do modelo numérico. Para que a comparação entre os dois modelos seja possível será então necessário efetuar uma das duas alternativas a seguir descritas:

- Que o modelo numérico obtido pelo MEF seja reduzido a um número restrito de graus de liberdade considerados ativos (graus de liberdade considerados de interesse), sendo os restantes eliminados, considerados inativos, ou seja, o objetivo passa por reduzir a ordem das matrizes (N) do sistema global para um reduzido número de graus de liberdade (na) ditos ativos, tendo sempre como objetivo preservar as características dinâmicas do sistema em estudo;
- Ou, a expansão do modelo experimental de modo a torná-lo compatível com o modelo numérico. Como mencionado anteriormente a teoria sobre a expansão está fora do âmbito deste trabalho, assim sendo não será aqui abordado.

2.2 Seleção de graus de liberdade ativos/inativos

A seleção de graus de liberdade a preservar ou a eliminar de um determinado sistema constitui o primeiro passo no processo de redução das matrizes do sistema. A decisão sobre qual ou quais os graus de liberdade a serem preservados (ativos) no sistema reduzido é sempre tomada pelo utilizador, sendo esta determinante e com influência direta nos resultados obtidos em alguns dos MRSD aqui abordados, nomeadamente os métodos de Guyan, IRS, Redução Dinâmica e IRS Iterativo (Capítulo 4). Nos três primeiros métodos, uma seleção inadequada de graus de liberdade a preservar/eliminar do sistema

conduz a uma aproximação deficiente ao sistema global, sendo isto especialmente crítico nos métodos de Guyan e Redução Dinâmica (Capítulo 4). Já no método IRS Iterativo, cuja redução é conseguida através de um processo iterativo, uma seleção inadequada de graus de liberdades ativos não afeta de forma tão drástica a aproximação ao sistema global, porém, conduz a um elevado tempo de cálculo para que se verifique a convergência [39,41,42], podendo esta tentativa de convergência demorar dias ou até semanas, sendo mesmo em alguns casos obtidos resultados inconclusivos (Capítulo 4). Portanto, nestes casos a decisão sobre quais os graus de liberdade a preservar/eliminar de um sistema, não sendo trivial, exige sempre alguma experiência por parte do utilizador. Contudo, existem critérios específicos [43,44] que ajudam a definir quais os graus de liberdade a preservar/eliminar do sistema conforme o rácio k_{ii} / m_{ii} , onde, k_{ii} e m_{ii} , representam os elementos da diagonal das matrizes de rigidez e massa, respetivamente, com $i = 1 \dots N$ graus de liberdade do sistema.

O método de seleção de graus de liberdade aconselha a escolha a considerar como graus de liberdade ativos aqueles onde haja uma grande concentração da massa e rigidez reduzida ou, a escolha de graus de liberdade inativos onde a rigidez seja elevada e a massa muito reduzida. O algoritmo é simples e fácil de implementar, em que os elementos com menor rácio ficam retidos enquanto os de maior rácio são eliminados, sendo o limite do rácio definido pelo utilizador.

Para o presente trabalho o critério só foi utilizado para o método de Guyan e de Redução Dinâmica dado que para os restantes métodos, mesmo com uma escolha aleatória, não se notou diferença nos resultados obtidos.

2.3 Equação do Movimento

A equação do movimento em conjunto com MEF constituem a base dos MRSD. A equação de movimento de sistemas não amortecidos possuindo N graus de liberdade é descrita por uma equação diferencial de segunda ordem, através do seu modelo espacial podemos defini-la por:

$$[M] \cdot \{\ddot{x}(t)\} + [K] \cdot \{x(t)\} = \{f(t)\} \quad (2.1)$$

Depois de seleccionados os graus de liberdade a preservar no sistema reduzido, as matrizes de massa e rigidez devem ser reorganizadas, caso contrário o modelo produz erros na aproximação ao sistema global. Neste sentido, existe a necessidade de reorganizar as matrizes de forma adequada, decompondo-as em sub-matrizes de acordo com a equação (2.2).

$$\begin{bmatrix} [M_{aa}] & [M_{ai}] \\ [M_{ia}] & [M_{ii}] \end{bmatrix}_{N \times N} \cdot \begin{Bmatrix} \{\ddot{x}_a\} \\ \{\ddot{x}_i\} \end{Bmatrix}_{N \times 1} + \begin{bmatrix} [K_{aa}] & [K_{ai}] \\ [K_{ia}] & [K_{ii}] \end{bmatrix}_{N \times N} \cdot \begin{Bmatrix} \{x_a\} \\ \{x_i\} \end{Bmatrix}_{N \times 1} = \begin{Bmatrix} \{f_a\} \\ \{f_i\} \end{Bmatrix}_{N \times 1} \quad (2.2)$$

$\{x_a\}$ e $\{x_i\}$ - representam os vetores de deslocamento contendo os graus de liberdade ativos e inativos.

$\{\ddot{x}_a\}$ e $\{\ddot{x}_i\}$ - representam os vetores de aceleração contendo os graus de liberdade ativos e inativos.

$\{f_a\}$ e $\{f_i\}$ - representam os vetores de forças contendo os graus de liberdade ativos e inativos.

A ordem de cada uma das sub-matrizes é dada pelos respectivos índices (aa , ai , ia , ii) sendo então a matriz representada da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} []_{na \times na} & []_{na \times ni} \\ []_{ni \times na} & []_{ni \times ni} \end{bmatrix}_{N \times N} \Rightarrow [] = (K, M, Z).$$

Onde o índice na é o número de graus de liberdade ativos e ni o número de graus de liberdade inativos.

É de notar ainda que para o presente trabalho o amortecimento não é contabilizado, embora já existem trabalhos desenvolvidos no âmbito dos MRSD que incluem o amortecimento no processo de redução [29,30,45,46] ilustrando os casos mais recentes.

2.4 Métodos de Redução de Sistemas Dinâmicos

Como já foi referido anteriormente, os MRSD destinam-se à redução da ordem das matrizes de massa, rigidez e amortecimento (se considerado), obtidas na análise numérica efetuada através do MEF para as várias aplicações a que se destinam. Isto é conseguido, para cada método, através da definição de uma matriz, denominada matriz de transformação $[T]$. O objetivo desta matriz é a de relacionar os graus de liberdade do sistema global e os graus de liberdade ativos do sistema reduzido, permitindo desta forma efetuar a redução da ordem das matrizes de massa e rigidez do sistema a ser sujeito ao processo de redução de graus de liberdade.

O Modelo Espacial foi primeiramente considerado nos processos de redução. Os processos de redução são compostos por duas fases distintas:

- O estabelecimento da matriz de transformação $[T]$, nesta matriz são definidas a relação entre os graus de liberdade ativos e os inativos do sistema

$$\{x\}_{N \times 1} = [T]_{N \times na} \cdot \{x_a\}_{na \times 1} \quad (2.3)$$

Onde $\{x_N\}$ representa o vetores de deslocamento dos graus de liberdade totais do sistema.

- Efetuar a redução do modelo global para um reduzido

$$[M^R]_{na \times na} = [T]_{na \times N}^T \cdot [M]_{N \times N} \cdot [T]_{N \times na} \quad (2.4)$$

$$[K^R]_{na \times na} = [T]_{na \times N}^T \cdot [K]_{N \times N} \cdot [T]_{N \times na} \quad (2.5)$$

Onde $[M]$ e $[K]$ representam as matrizes de, massa e rigidez, do sistema global e $[K^R]$ e $[M^R]$ representam as matrizes de massa e rigidez, do sistema reduzido.

Valores e vetores próprios do sistema reduzido

Conhecendo as matrizes de massa e rigidez do sistema reduzido, o cálculo dos valores e vetores próprios serão determinados através da seguinte equação:

$$[[K^R] - \omega^2 \cdot [M^R]] \cdot \{X\} = 0 \quad (2.6)$$

Os valores e vetores próprios do sistema reduzido serão representados, respetivamente, por $[\omega^2]_{na \times na}$ e $[\Psi]_{na \times m}$.

Função de Resposta em Frequência (FRF)

A matriz de rigidez dinâmica do sistema reduzido é definida por $[Z^R]$, e é determinada através da seguinte formulação,

$$[Z^R]_{na \times na} = [K^R]_{na \times na} - \omega_i^2 \cdot [M^R]_{na \times na} \quad \omega_i = 0, 1, 2, 3 \dots n \quad (2.7)$$

Após a determinação da matriz de rigidez dinâmica, para cada frequência, através das matrizes de massa e rigidez, reduzidas pode então ser determinada para cada frequência a matriz de receptância reduzida $[H^R]$ descrita por

$$[H^R]_{na \times na} = [Z^R]_{na \times na}^{-1} \quad (2.8)$$

Em seguida serão apresentados e posteriormente estudados, com maior detalhe alguns dos métodos de redução implementadas durante a realização do presente trabalho.

2.4.1 Método de Redução de Guyan ou Condensação Estática

O método de redução de Guyan [9], conhecido como o mais antigo e popular método redução no panorama científico, é também referenciado em todos os trabalhos inerentes aos MRSD. Esta técnica é também conhecida como método de condensação estática, por apenas considerar na sua análise a matriz de rigidez desprezando os efeitos produzidos pelas forças de inércia. O seu resultado surge através da resolução da equação do movimento não amortecido onde são desprezadas as forças de inércia como demonstrado de seguida.

Então, reescrevendo a equação (2.2) apenas considerando a matriz de rigidez resulta:

$$\begin{bmatrix} [K_{aa}] & [K_{ai}] \\ [K_{ia}] & [K_{ii}] \end{bmatrix}_{N \times N} \cdot \begin{Bmatrix} \{x_a\} \\ \{x_i\} \end{Bmatrix}_{N \times 1} = \begin{Bmatrix} \{f_a\} \\ \{f_i\} \end{Bmatrix}_{N \times 1} \quad (2.9)$$

Resolvendo a equação (2.9), considerando apenas as forças atuando sobre os graus de liberdade ativos, $\{f_i\} = 0$, resulta um sistema de duas equações a duas incógnitas, $\{x_a\}$ e $\{x_i\}$, cuja primeira equação é associada aos graus de liberdade ativos resultando em

$$[K_{aa}] \cdot \{x_a\} + [K_{ai}] \cdot \{x_i\} = \{f_a\} \quad (2.10)$$

E a segunda associada aos graus de liberdade inativos

$$[K_{ia}] \cdot \{x_a\} + [K_{ii}] \cdot \{x_i\} = \{0\} \quad (2.11)$$

Resolvendo a equação (2.11) em função $\{x_a\}$ resulta em

$$\{x_i\} = -[K_{ii}]^{-1} \cdot [K_{ia}] \cdot \{x_a\} \quad (2.12)$$

Estabelecendo a relação entre os graus de liberdade ativos e inativos tem-se

$$\{x\}_{N \times 1} = \begin{Bmatrix} \{x_a\}_{na \times 1} \\ \{x_i\}_{ni \times 1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{x_a\} \\ -[K_{ii}]^{-1} \cdot [K_{ia}] \cdot \{x_a\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [I]_{na \times na} \\ -[K_{ii}]^{-1} \cdot [K_{ia}] \end{bmatrix}_{ni \times na} \cdot \{x_a\} \quad (2.13)$$

Reescrevendo a equação (2.13) na sua forma compacta resulta

$$\{x\}_{N \times 1} = [T_G]_{N \times na} \cdot \{x_a\}_{na \times 1} \quad (2.14)$$

Onde $[T_G]$ é designada por matriz de transformação de Guyan descrita por,

$$[T_G]_{N \times na} = \begin{bmatrix} I \\ -[K_{ii}]^{-1} \cdot [K_{ia}] \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Uma vez conhecida a matriz de transformação, as matrizes de massa e rigidez reduzidas na sua forma compacta serão definidas por:

$$[M_G^R]_{na \times na} = [T_G]_{na \times N}^T \cdot [M]_{N \times N} \cdot [T_G]_{N \times na} \quad (2.16)$$

$$[K_G^R]_{na \times na} = [T_G]_{na \times N}^T \cdot [K]_{N \times N} \cdot [T_G]_{N \times na} \quad (2.17)$$

A matriz de rigidez dinâmica reduzida $[Z^R]$ resultará em:

$$[Z^R]_{na \times na} = [K_G^R] - \omega^2 \cdot [M_G^R] \quad \omega=0,1,2,3,\dots,n \quad (2.18)$$

E a matriz de receptância $[H^R]$ reduzida:

$$[H^R] = [Z^R]^{-1} \quad (2.19)$$

Como se pode constatar o método acima apresentado é de fácil implementação, no entanto, como já tinha sido referido anteriormente, o método é exato apenas para a análise estática. Para análise dinâmica a precisão é reduzida dado que, para além de não contabilizar os efeitos de inércia na sua matriz de transformação, um bom resultado é completamente dependente da seleção de graus de liberdade a preservar no sistema reduzido. No entanto, este método é tido como referência para o desenvolvimento de quase todos os restantes métodos aqui abordados.

2.4.2 Sistema Reduzido Melhorado (IRS)

O método IRS [34] constitui uma extensão ao método de Guyan, apresentando-se como uma versão melhorada uma vez que contabiliza no seu processo de redução, os efeitos das forças que atuam sobre os graus de liberdade inativos desprezados por Guyan na definição da sua matriz de transformação. O seu desenvolvimento teórico resume-se nos seguintes passos:

- Condensação estática de um sistema de forças
- Referência aos valores e vetores próprios
- Modelo reduzido de Guyan/Irons [9,47]

- Aproximação levando em linha de conta as forças de inércia nos graus de liberdade inativos
- Sistema Reduzido Melhorado

Condensação estática de um sistema de forças

Resolvendo a equação (2.9) e considerando agora forças atuando sobre os graus de liberdade inativos, resulta um sistema de duas equações a duas incógnitas $\{x_a\}$ e $\{x_i\}$, definidas por

$$[K_{aa}] \cdot \{x_a\} + [K_{ai}] \cdot \{x_i\} = \{f_a\} \quad (2.20)$$

$$[K_{ia}] \cdot \{x_a\} + [K_{ii}] \cdot \{x_i\} = \{f_i\} \quad (2.21)$$

Resolvendo a equação (2.21) em função de $\{x_a\}$ resulta,

$$\{x_i\} = -[K_{ii}]^{-1} \cdot [K_{ia}] \cdot \{x_a\} + [K_{ii}]^{-1} \cdot \{f_i\} \quad (2.22)$$

A relação entre o vetor de graus de liberdade globais e o vetor com os graus de liberdades ativos é descrita por

$$\{x\}_{N \times 1} = \begin{Bmatrix} x_a \\ x_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_a \\ -[K_{ii}]^{-1} \cdot [K_{ia}] \cdot x_a \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ [K_{ii}]^{-1} \cdot f_i \end{Bmatrix} \quad (2.23)$$

Podendo ainda ser reescrita na sua forma compacta, resultando em

$$\{x\}_{N \times 1} = [T_G]_{N \times na} \cdot \{x_a\}_{na \times 1} + \{x\}_{N \times 1}^* \quad (2.24)$$

Onde, $[T_G]$ representa a matriz de transformação do método de Guyan descrita pela equação (2.15) e $\{x\}^*$ representa o vetor que traduz o efeito das forças exteriores que atuam sobre os graus de liberdade inativos não consideradas no método de Guyan e, que é definido por

$$\{x\}^* = \begin{Bmatrix} 0 \\ [K_{ii}]^{-1} \cdot f_i \end{Bmatrix} \quad (2.25)$$

Podendo ainda ser representado na forma alternativa como:

$$\{x\}_{N \times 1}^* = [K_f]_{N \times N}^{-1} \cdot \{f\}_{N \times 1} \quad (2.26)$$

Onde $[K_f]^{-1}$ representa a matriz de flexibilidades associada apenas aos graus de liberdade inativos do sistema global descrita por

$$[K_f]^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & [K_{ii}]^{-1} \end{bmatrix}_{N \times N} \quad (2.27)$$

Escrevendo a equação (2.9) na sua forma condensada resulta em:

$$[K]_{N \times N} \cdot \{x\}_{N \times 1} = \{f\}_{N \times 1} \quad (2.28)$$

Substituindo a equação (2.24) na de equação (2.28) e pré-multiplicando a equação resultante pela matriz de transformação de Guyan transposta $[T_G]^T$ resulta

$$[T_G]^T \cdot [K] \cdot [T_G] \cdot \{x_a\} + \{x\}^* = [T_G]^T \cdot \{f\}_{N \times 1} \quad (2.29)$$

A partir da equação (2.29) obtém-se a equação para o sistema reduzido descrita por

$$[K_G^R] \cdot \{x_a\} = \{f_G^R\} \quad (2.30)$$

Em que $[K_G^R]$ e $\{f_G^R\}$ representam respetivamente, a matriz de rigidez e o vetor de forças, reduzidos descritas por

$$[K_G^R] = [T_G]^T \cdot [K] \cdot [T_G] \quad (2.31)$$

E

$$\{f_G^R\} = [T_G]^T \cdot \{f\}_{N \times 1} = \{f_a\}_{na \times 1} + \left[-[K_{ii}]^{-1} \cdot [K_{ia}] \right]^T \cdot \{f_i\}_{mi \times 1} \quad (2.32)$$

Admitindo que

$$[T_G]^T \cdot [K] \cdot \{x\}^* = \{0\} \quad (2.33)$$

Esta constitui a primeira aproximação para o sistema reduzido, obtido por Guyan no seu processo de redução, pois $\{f_i\} = 0$.

Referência aos valores e vetores próprios

A equação do movimento não amortecido em regime livre é descrita por

$$[M]_{N \times N} \cdot \{\ddot{x}\}_{N \times 1} + [K]_{N \times N} \cdot \{x\}_{N \times 1} = 0 \quad (2.34)$$

Onde $\{\ddot{x}\}$ e $\{x\}$ representam os vetores de aceleração e de deslocamento, respetivamente, do sistema global, sendo a sua equação característica descrita por

$$[[K] - \omega_i^2 \cdot [M]] \cdot \{\Psi_i\} = 0 \quad (2.35)$$

Onde ω_i^2 e $\{\Psi_i\}$ representam os valores e vetores próprios do sistema global. Agrupando os pares modais numa equação compacta, resulta

$$[K] \cdot [\Psi] = [M] \cdot [\Psi] \cdot [\omega^2] \quad (2.36)$$

Onde $[\Psi]_{N \times N}$ é a matriz modal contendo todos os vetores próprios e $[\omega^2]_{N \times N}$ é a matriz diagonal contendo todos os valores próprios. A equação (2.36) será utilizada futuramente para uma estimativa das forças de inércia.

Modelo Reduzido de Guyan /Irons

A aproximação de primeira ordem do sistema reduzido de graus de liberdade pode ser obtida através da condensação de Guyan/Irons, tendo como base o primeiro termo da equação (2.24) definida por

$$\{x\}_{N \times 1} = [T_G]_{N \times na} \cdot \{x_a\}_{na \times 1}$$

Fazendo com que a condensação seja estática, uma vez que a matriz de transformação de Guyan (equação (2.15)) apenas contabiliza os termos relativos à rigidez do sistema e é usada para obter a matriz de rigidez reduzida definida na equação (2.17). De salientar que, tanto Guyan como Irons sugerem a mesma matriz de transformação, para a obtenção da matriz de massa reduzida descrita por,

$$[M^R] = [T_G]^T \cdot [M]_{N \times N} \cdot [T_G] \quad (2.37)$$

Substituindo a equação (2.14) na equação (2.34) e multiplicando a resultante pela matriz transposta $[T_G]$ obtém-se uma aproximação para as equações do movimento do sistema reduzido. Tal como descrito na equação (2.36), o sistema de valores e vetores próprios do modelo reduzido pode ser descrito por,

$$[K^R] \cdot [\Psi^R] = [M^R] \cdot [\Psi^R] \cdot [\omega^2] \quad (2.38)$$

Onde $[\Psi^R]$ e $[\omega^2]$ correspondem as matrizes, dos vetores e dos valores próprios, respetivamente do sistema reduzido. Assim como na equação (2.14), pode-se agora obter uma aproximação dos vetores modais do sistema global.

$$[\Psi^r] = [T_G] \cdot [\Psi^R] \quad (2.39)$$

De salientar que a solução obtida não representa uma aproximação correta dos efeitos de inércia associada aos graus de liberdade inativos, dado que apenas contém informação acerca da energia de deformação. Em seguida, descreve-se a formulação que permite obter um refinamento do sistema reduzido.

Aproximação levando em linha de conta as forças de inércia nos graus de liberdade inativos

Utilizando as equações (2.28) e (2.36), surge uma nova aproximação do vetor de forças que também contabiliza o efeito das forças distribuídas de inércia associadas aos graus de liberdade inativos do sistema desprezados por Guyan no seu processo de redução, ou seja

$$[K] \cdot [\Psi^{rr}] = [F^r] = [M] \cdot [\Psi^r] \cdot [\Omega^2] \quad (2.40)$$

Onde $[\Psi^{rr}]$ e $[\Psi^r]$ são as aproximações da matriz modal $[\Psi]$ e $[\Omega^2]$ é usada como uma aproximação da matriz dos valores próprios $[\omega^2]$. Usando agora a equação (2.40) pode-se obter uma aproximação do vetor de deslocamentos, a partir das equações (2.26) e (2.39) resultando em,

$$\{x\}^* = [K_f]^{-1} \cdot \{F^r\} \quad (2.41)$$

Está-se agora em condições de determinar os vetores modais melhorados utilizando para tal as equações (2.24), (2.39) e (2.41) respetivamente, resultando em

$$[\Psi^i] = [T_G] \cdot [\Psi^R] + [K_f]^{-1} \cdot [M] \cdot [T_G] \cdot [\Psi^R] \cdot [\omega^2] \quad (2.42)$$

Onde $[\Psi^i]$ representa a matriz de vetores melhorados (ou vetores modais alterados), que inclui o efeito das forças de inércia distribuídas associadas aos graus de liberdade inativos.

Sistema reduzido melhorado (IRS)

Usando agora os dois últimos termos da equação (2.42) e a equação (2.38) visando o desenvolvimento de uma expressão aproximada para a matriz de transformação, que inclua a solução da equação (2.42) resulta

$$[\Psi^R] \cdot [\omega^2] = [M_G^R]^{-1} \cdot [K_G^R] \cdot [\Psi^R] \quad (2.43)$$

A equação (2.42) pode então ser reescrita da seguinte forma

$$\begin{aligned} [\Psi^i] &= [T_G] \cdot [\Psi^R] + [K_f]^{-1} \cdot [M] \cdot [T_G] \cdot [\Psi^R] \cdot [\omega^2] \\ &= [T_G] \cdot [\Psi^R] + [K_f]^{-1} \cdot [M] \cdot [T_G] \cdot [M_G^R]^{-1} \cdot [K_G^R] \cdot [\Psi^R] \\ &= \left[[T_G] + [K_f]^{-1} \cdot [M] \cdot [T_G] \cdot [M_G^R]^{-1} \cdot [K_G^R] \right] \cdot [\Psi^R] \end{aligned} \quad (2.44)$$

A equação (2.44) pode ainda ser representada na sua forma compacta por

$$[\Psi^i] = [T_{IRS}] \cdot [\Psi^R] \quad (2.45)$$

Onde $[T_{IRS}]$ representa a matriz de transformação para o Sistema Reduzido Melhorado e é descrita pela seguinte expressão na sua forma condensada por

$$[T_{IRS}]_{N \times na} = [T_G] + [K_f]^{-1} \cdot [M] \cdot [T_G] \cdot [M_G^R]^{-1} \cdot [K_G^R] \quad (2.46)$$

As matrizes de, massa e rigidez, reduzidas que descrevem o modelo reduzido *IRS* são agora dadas por:

$$[M_{IRS}^R]_{na \times na} = [T_G]_{na \times N}^T \cdot [M]_{N \times N} \cdot [T_G]_{na \times N} \quad (2.47)$$

$$[K_{IRS}^R]_{na \times na} = [T_G]_{na \times N}^T \cdot [K]_{N \times N} \cdot [T_G]_{na \times N} \quad (2.48)$$

A matriz de rigidez dinâmica virá então dada por

$$[Z^R]_{na \times na} = [K_{IRS}^R] - \omega^2 \cdot [M_{IRS}^R] \quad \omega = 1, 2, 3 \dots n \quad (2.49)$$

E a matriz de receptância

$$[H^R]_{na \times na} = [Z^R]_{na \times na}^{-1} \quad (2.50)$$

Este método gera melhores resultados na aproximação ao sistema global relativamente ao método anterior devido a introdução das forças de inércia. Contudo, o sucesso nos resultados obtidos é dependente da seleção de graus de liberdade a preservar no sistema reduzido (ver Capítulo 4).

2.4.3 Sistema Reduzido Melhorado IRS (Processo Iterativo)

O método IRS Iterativo [21,39] constitui uma variante do método IRS clássico (Secção anterior) e tem como objetivo minimizar o erro produzido na aproximação ao sistema global pelo método IRS. O método consiste em modificar a matriz de transformação obtida pelo método IRS clássico através de iterações sucessivas até que seja alcançada a convergência [40] desejada.

Como já foi referido na secção anterior a matriz de transformação obtida pelo método IRS clássico é descrita na sua forma compacta por

$$[T_{IRS}] = [T_G] + [K_f]^{-1} \cdot [M] \cdot [T_G] \cdot [M_G^R]^{-1} \cdot [K_G^R]$$

Enquanto as matrizes de, massa e rigidez, reduzidas são descritas por

$$[M_{IRS}^R] = [T_{IRS}]^T \cdot [M] \cdot [T_{IRS}] \quad (2.51)$$

$$[K_{IRS}^R] = [T_{IRS}]^T \cdot [K] \cdot [T_{IRS}] \quad (2.52)$$

A equação (2.46) juntamente com as equações (2.51) e (2.52) constituem a primeira iteração, ou seja,

$$[T_{IRS,i}] = [T_{IRS}]$$

$$[M_{IRS,i}^R] = [M_{IRS}^R]$$

$$[K_{IRS,i}^R] = [K_{IRS}^R]$$

Para as iterações subsequentes a matriz de transformação $[T_{IRS,i+1}]$ é descrita por:

$$[T_{IRS,i+1}] = [T_G] + [K_f]^{-1} \cdot [M] \cdot [T_{IRS,i}] \cdot [M_{IRS,i}^R]^{-1} \cdot [K_{IRS,i}^R] \quad (2.53)$$

Onde o índice “ i ” representa a “ i -ésima” iteração e, as novas matrizes de, massa e rigidez, reduzidas descritas por,

$$\left[M_{IRS,i+1}^R \right]_{na \times na} = \left[T_{IRS,i+1} \right]_{na \times N}^T \cdot \left[M \right]_{N \times N} \cdot \left[T_{IRS,i+1} \right]_{N \times na} \quad (2.54)$$

$$\left[K_{IRS,i+1}^R \right]_{na \times na} = \left[T_{IRS,i+1} \right]_{na \times N}^T \cdot \left[K \right]_{N \times N} \cdot \left[T_{IRS,i+1} \right]_{N \times na} \quad (2.55)$$

Contudo, existe uma outra versão da matriz de transformação obtida através do processo iterativo apresentado por Blair *et al* [38], em que no segundo termo da equação (2.53) a matriz de transformação mantém-se inalterada. Dito por outras palavras a matriz de transformação do segundo termo continua sendo a matriz de transformação do método de Guyan $\left[T_G \right]$ não sofrendo nenhuma alteração resultando em,

$$\left[T_{IRS,i+1} \right] = \left[T_G \right] + \left[K_f \right]^{-1} \cdot \left[M \right] \cdot \left[T_G \right] \cdot \left[M_{IRS,i}^R \right]^{-1} \cdot \left[K_{IRS,i}^R \right] \quad (2.56)$$

A não atualização desta matriz de transformação no segundo termo da equação (2.56) faz com que o método proposto por Blair *et al*, não seja eficiente e por consequência a redução não produza o efeito desejado tendo-se por este motivo optado por testar a primeira solução iterativa descrita.

Processo de Convergência

O processo de convergência é bastante complexo pelo que não será abordado neste trabalho podendo no entanto, ser consultado na referência [40]. Segundo Friswell *et al* [40] a convergência é garantida quando, de uma iteração para outra não for verificada qualquer variação nos elementos da matriz de transformação ou seja, assegurando que $\left[T_i \right] = \left[T_{i+1} \right]$, sendo a matriz de transformação apresentada na sua versão final descrita por

$$\left[T_{IRS,iter} \right] = \left[T_G \right] + \left[K_f \right]^{-1} \cdot \left[M \right] \cdot \left[T_{IRS,i} \right] \cdot \left[M_{IRS,i}^R \right]^{-1} \cdot \left[K_{IRS,i}^R \right] \quad (2.57)$$

De salientar que a rapidez na convergência [21] depende fundamentalmente da escolha dos graus de liberdade a preservar no sistema. Por outras palavras, uma escolha apropriada de graus de liberdade a preservar no sistema conduz a um reduzido número de iterações, ao passo que o contrário pode demorar horas, dias, semanas ou até mesmo serem obtidos resultados inconclusivos (Secção 4.2.4).

Lin e Xia [41] apresentam uma nova teoria da convergência onde, concluem ser mais eficiente que o apresentado por Friswell *et al* [40]. Dongsoo et al [42] propõe ainda um outro método de convergência baseado no erro relativo resultante da comparação entre as frequências naturais do sistema global e o reduzido.

$$\frac{|\omega_{reduzido} - \omega_{global}|}{\omega_{global}} \leq \varepsilon \quad (2.58)$$

Para o presente trabalho foi utilizado o método proposto por Friswell *et al* [40].

Alcançada a convergência as matrizes de, massa e rigidez, reduzidas vêm descritas na sua versão final por,

$$[M_{IRS,iter}^R]_{na \times na} = [T_{IRS,iter}]_{na \times N}^T \cdot [M]_{N \times N} [T_{IRS}]_{N \times na} \quad (2.59)$$

$$[K_{IRS,iter}^R]_{na \times na} = [T_{IRS,iter}]_{na \times N}^T \cdot [K]_{N \times N} [T_{IRS}]_{N \times na} \quad (2.60)$$

A matriz de rigidez dinâmica será então dada por

$$[Z_{IRS,iter}^R]_{na \times na} = [K_{IRS,iter}^R] - \omega^2 \cdot [M_{IRS,iter}^R] \quad \omega=0,1,2,3 \dots n \quad (2.61)$$

E a matriz das receptâncias dada por

$$[H_{IRS,iter}^R]_{na \times na} = [Z_{IRS,iter}^R]_{na \times na}^{-1} \quad (2.62)$$

2.4.4 Processo de Redução/Expansão do Sistema Equivalente (SEREP)

O método de redução *SEREP* [26], ao contrário dos outros métodos já mencionados faz uma abordagem diferente na obtenção das matrizes de massa e rigidez reduzidas. A metodologia consiste em construir a matriz de transformação, a partir dos vetores próprios previamente calculados com as matrizes de massa e rigidez do sistema global sendo, posteriormente, selecionados um conjunto de modos de um modelo previamente especificados pelo utilizador e que é caracterizado através das suas propriedades dinâmicas.

A equação base para o desenvolvimento da matriz de transformação para o presente método é descrita pela equação (2.34) da secção anterior, sendo solução dos valores e vetores próprios com base em “*m*” vetores modais descrita por

$$\{x\}_{N \times 1} = [\Psi]_{N \times m} \cdot \{q\}_{m \times 1} \quad (2.63)$$

Onde $[\Psi]$ representa a matriz modal do sistema, cujas linhas (N) correspondem aos “*N*” graus de liberdade e as colunas (m) correspondem aos “*m*” vetores modais do sistema enquanto, $\{q\}$ representa o vetor dos deslocamentos associados aos graus de liberdade modais do sistema.

A equação (2.63) pode ser reescrita subdividindo, o vetor de graus de liberdade globais $\{x\}$ e a matriz modal global $[\Psi]$ em duas partes distintas sendo, a primeira respeitante aos graus de liberdade ativos a preservar no sistema e as restantes inativos a excluir do sistema resultando em

$$\{x\}_{N \times 1} = \begin{Bmatrix} \{x_a\}_{na \times 1} \\ \{x_i\}_{ni \times 1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\Psi_a]_{na \times nm} \\ [\Psi_i]_{ni \times nm} \end{bmatrix}_{N \times nm} \cdot \{q\}_{nm \times 1} \quad (2.64)$$

Onde, “ nm ” representa o número de modos. Considerando somente os graus de liberdade ativos da equação (2.64) resulta:

$$\{x\}_{na \times 1} = [\Psi_a]_{na \times nm} \cdot \{q\}_{nm \times 1} \quad (2.65)$$

Onde $[\Psi_a]$ é a matriz modal contendo apenas os graus de liberdade ativos de ordem $(na \times nm)$ geralmente não quadrada uma vez que, o número de graus de liberdade ativos (“ na ”) pode ser menor, igual ou maior do que o número de modos (“ nm ”). Portanto, a resolução da equação (2.65) em ordem ao vetor de graus de liberdade $\{q\}$ requer a formulação da matriz inversa generalizada de $[\Psi_a]$. Na referência [26] é demonstrado todas as condições referidas anteriormente. No presente trabalho, considerou-se apenas a situação em que $na \geq nm$ uma vez que, na maioria das aplicações práticas o número de graus de liberdade ativos “ na ” é maior ou igual ao número de modos “ nm ”. Quando esta condição se verifica, a inversa generalizada é descrita da seguinte forma

$$[\Psi_a]^g = \left[[\Psi_a]^T \cdot [\Psi_a] \right]^{-1} \cdot [\Psi_a]^T \quad (2.66)$$

Enquanto para a condição $na < nm$ tem-se

$$[\Psi_a]^g = [\Psi_a]^T \cdot \left[[\Psi_a] \cdot [\Psi_a]^T \right]^{-1} \quad (2.67)$$

Onde $[\Psi_a]^g$ representa a inversa generalizada de $[\Psi_a]$. Determinada a inversa generalizada de $[\Psi_a]$ através da equação (2.66) a solução da equação (2.65) em ordem ao vetor dos deslocamentos modais virá descrita por:

$$\{q\}_{nm \times 1} = \left[[\Psi_a]_{nm \times na} \right]^g \cdot \{x\}_{na \times 1} \quad (2.68)$$

Substituindo a equação (2.68) em (2.64) obtém-se a seguinte expressão do vetor de deslocamentos global, em função do vetor de deslocamentos reduzidos.

$$\{x\}_{N \times 1} = \begin{bmatrix} \Psi_a \\ \Psi_i \end{bmatrix}_{N \times nm} \cdot [\Psi_a]_{nm \times na}^g \cdot \{x\}_{na \times 1} \quad (2.69)$$

A equação (2.69) pode ainda ser descrita por

$$\{x\}_{N \times 1} = [T]_{N \times na} \cdot \{x\}_{na \times 1} \quad (2.70)$$

Portanto, a matriz de transformação que relaciona as graus de liberdade ativos com as graus de liberdade globais, é descrita por

$$[T_{SEREP}]_{N \times na} = \begin{bmatrix} \Psi_a \\ \Psi_i \end{bmatrix}_{N \times nm} \cdot \left[\left[[\Psi_a]^T \cdot [\Psi_a] \right]^{-1} \cdot [\Psi_a]^T \right]_{nm \times na} \quad (2.71)$$

ou

$$[T_{SEREP}]_{N \times na} = \begin{bmatrix} [\Psi_a] \cdot [\Psi_a]^g \\ [\Psi_i] \cdot [\Psi_a]^g \end{bmatrix} \quad (2.72)$$

Onde $[T_{SEREP}]$ representa a matriz de transformação para o método *SEREP*.

Um método semelhante foi apresentado por *Kammer* [25] cuja filosofia é a mesma do método *SEREP* em que a única diferença reside na forma como é apresentada a matriz de transformação [27]. Para a redução Modal a referida matriz de transformação é dada por

$$[T_M]_{N \times na} = \begin{bmatrix} I \\ [\Psi_i] \cdot [\Psi_a]^g \end{bmatrix} \quad (2.73)$$

Onde $[T_M]$ representa matriz de transformação da redução modal.

As matrizes de, massa e rigidez, reduzidas serão então descritas por:

$$[M_{SEREP}^R]_{na \times na} = [T_{SEREP}]_{na \times N}^T \cdot [M]_{N \times N} \cdot [T_{SEREP}]_{N \times na} \quad (2.74)$$

$$[K_{SEREP}^R]_{na \times na} = [T_{SEREP}]_{na \times N}^T \cdot [K]_{N \times N} \cdot [T_{SEREP}]_{N \times na} \quad (2.75)$$

A matriz de rigidez dinâmica virá então descrita por,

$$\left[Z^R \right]_{na \times na} = \left[K_{SEREP}^R \right] - \omega^2 \cdot \left[M_{SEREP}^R \right] \quad \omega=0,1,2,3 \dots n \quad (2.76)$$

E por consequência a matriz de receptância virá então descrita por,

$$\left[H^R \right]_{na \times na} = \left[Z^R \right]_{na \times na}^{-1} \quad (2.77)$$

O método SEREP revela-se eficiente na aproximação ao sistema global sendo-lhe no entanto apresentadas duas limitações: primeiro, matrizes mal condicionadas (condição em que $na < nm$) na construção da matriz inversa generalizada e segundo, o facto de ser exato apenas para os modos escolhidos não permitindo saber qual o resultado para os restantes.

2.4.5 Método de Redução Híbrida

Desenvolvido por Kammer [36], resulta da combinação entre os métodos de Guyan e SEREP, tendo como objetivo tentar colmatar as limitações apresentadas por ambos.

Para um dado sistema, os graus de liberdade globais podem ser definidas por,

$$\{x\}_{N \times 1} = \{x_G\}_{N \times 1} + \{x_{SEREP}\}_{N \times 1} \quad (2.78)$$

Onde $\{x\}$ representa o vetor de deslocamentos contendo os graus de liberdade globais do sistema, enquanto $\{x_G\}$ e $\{x_{SEREP}\}$ representam, respetivamente, os vetores de deslocamentos contendo os graus de liberdade globais obtidos pelos métodos de Guyan e SEREP, sendo os últimos dois vetores definidos por,

$$\{x_G\}_{N \times 1} = [T_G] \cdot \{x_a^G\} \quad (2.79)$$

$$\{x_{SEREP}\}_{N \times 1} = [T_{SEREP}] \cdot \{x_a^{SEREP}\} \quad (2.80)$$

Substituindo as equações (2.79) e (2.80) na equação (2.78) resulta,

$$\{x\}_{N \times 1} = [T_{SEREP}] \cdot \{x_a^{SEREP}\} + [T_G] \cdot \{x_a^G\} \quad (2.81)$$

Assumindo que, uma matriz de projeção $[P]$ idem-potente existe tal que o seu espaço pode ser dividido em dois subespaços complementares. Então por definição tem-se que,

$$[P]^2 = [P] \quad (2.82)$$

E admitindo que

$$[P_c] = [I] - [P] \quad (2.83)$$

Estabelecendo agora uma relação entre os vetores deslocamentos e a matriz $[P]$ resulta,

$$\{x_a^{SEREP}\} = [P] \cdot \{x_a\} \quad (2.84)$$

$$\{x_a^G\} = [P_c] \cdot \{x_a\} \quad (2.85)$$

Substituindo a equação (2.83) na equação (2.85) vem que,

$$\{x_a^G\} = ([I] - [P]) \cdot \{x_a\} \quad (2.86)$$

Reescrevendo a equação (2.81) e substituindo as equações (2.84) e (2.86) resulta em,

$$\begin{aligned} \{x\}_{N \times 1} &= [T_{SEREP}] \cdot [P] \{x_a\} + [T_G] \cdot ([I] - [P]) \cdot \{x_a\} \\ &= [[T_{SEREP}] \cdot [P] + [T_G] - [T_G] \cdot [P]] \cdot \{x_a\} \\ &= [[T_G] + [[T_{SEREP}] - [T_G]] \cdot [P]] \cdot \{x_a\} \end{aligned} \quad (2.87)$$

Podendo ainda ser reescrito como,

$$\{x\}_{N \times 1} = [T_H]_{N \times na} \cdot \{x_a\}_{na \times 1} \quad (2.88)$$

Onde $[T_H]$ representa a matriz de transformação descrita por,

$$[T_H] = [T_G] + [[T_{SEREP}] - [T_G]] \cdot [P] \quad (2.89)$$

A matriz $[P]$ é obtida fazendo a seguinte operação,

$$[P] = [\Psi_a] \cdot [\Psi_a]^T \cdot [M_{SEREP}^R] \quad (2.90)$$

Uma vez determinada a matriz de transformação, as matrizes de, massa e rigidez, reduzidas serão definidas por,

$$\left[M_H^R \right]_{na \times na} = \left[T_H \right]_{na \times N}^T \cdot \left[M \right]_{N \times N} \cdot \left[T_H \right]_{N \times na} \quad (2.91)$$

$$\left[M_H^R \right]_{na \times na} = \left[T_H \right]_{na \times N}^T \cdot \left[M \right]_{N \times N} \cdot \left[T_H \right]_{N \times na} \quad (2.92)$$

A matriz de rigidez dinâmica reduzida será então dada por,

$$\left[Z_H^R \right]_{na \times na} = \left[K_H^R \right] - \omega^2 \cdot \left[M_H^R \right] \quad \omega=0,1,2,3\dots \quad (2.93)$$

Por consequência a matriz de receptâncias é descrita por,

$$\left[H_H^R \right]_{na \times na} = \left[Z_H^R \right]_{na \times na}^{-1} \quad (2.94)$$

Este método apresenta os mesmos resultados que o método SEREP (Secção 2.4.4), embora seja capaz de ultrapassar as matrizes mal condicionadas do método SEREP, quando $na > nm$ os resultados obtidos são semelhantes.

2.4.6 Método de Redução Dinâmica

Método de Redução Dinâmica, desenvolvido com o objetivo de ultrapassar as limitações impostas pelo método de Guyan, que como se sabe não contabiliza os efeitos de inércia no seu processo de redução. Vários foram os autores que tentaram arranjar formas de melhorar o método de condensação estática de modo a se poder contabilizar os efeitos de inércia até então desprezados por Guyan. De entre os vários trabalhos apresenta-se a metodologia apresentada por Leung [19] e Paz [20] que utilizam o conceito de Matriz de Rigidez Dinâmica $[Z]$ no processo de redução. A equação resultante é dada por

$$\left[Z \right]_{N \times N} \cdot \{x\}_{N \times 1} = \{f\}_{N \times 1} \quad (2.95)$$

A matriz de rigidez dinâmica na sua forma compacta é dada por:

$$\left[Z(\omega) \right]_{N \times N} = \left[K \right]_{N \times N} - \omega^2 \cdot \left[M \right]_{N \times N} \quad (2.96)$$

Podendo ainda ser representada por:

$$\left[Z(\omega) \right]_{N \times N} = \begin{bmatrix} K_{aa} & K_{ai} \\ K_{ia} & K_{ii} \end{bmatrix}_{N \times N} - \omega^2 \cdot \begin{bmatrix} M_{aa} & M_{ai} \\ M_{ia} & M_{ii} \end{bmatrix}_{N \times N} \quad (2.97)$$

Tendo em conta a equação (2.97), a equação (2.95) pode ser reescrita por

$$\begin{bmatrix} Z_{aa} & Z_{ai} \\ Z_{ia} & Z_{ii} \end{bmatrix}_{N \times N} \cdot \begin{Bmatrix} x_a \\ x_i \end{Bmatrix}_{N \times 1} = \begin{Bmatrix} f_a \\ f_i \end{Bmatrix} \quad (2.98)$$

Seguindo o mesmo procedimento no método de Guyan, e considerando não haver forças exteriores atuando sobre os graus de liberdade inativos ($f_i = 0$) obtém-se um sistema de duas equações a duas incógnitas, em que a primeira está relacionado com os graus de liberdade ativos

$$[Z_{aa}] \cdot \{x_a\} + [Z_{ai}] \cdot \{x_i\} = \{f_a\} \quad (2.99)$$

E a segunda está relacionada com os graus de liberdade inativos

$$[Z_{ia}] \cdot \{x_a\} + [Z_{ii}] \cdot \{x_i\} = \{0\} \quad (2.100)$$

Resolvendo a equação (2.100) em função de $\{x_a\}$

$$\{x_i\} = -[Z_{ii}]^{-1} \cdot [Z_{ia}] \cdot \{x_a\} \quad (2.101)$$

Relacionando os graus de liberdade globais com os graus de liberdade ativos dos sistema tem-se que

$$\{x\}_{N \times 1} = \begin{Bmatrix} x_a \\ x_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{x_a\} \\ -[Z_{ii}]^{-1} \cdot [Z_{ia}] \cdot \{x_a\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{na \times na} \\ -[Z_{ii}]^{-1} \cdot [Z_{ia}] \end{bmatrix}_{ni \times na} \cdot \{x_a\} \quad (2.102)$$

$$\{x\}_{N \times 1} = [T_{DIN}]_{N \times na} \cdot \{x_a\}_{na \times 1} \quad (2.103)$$

Onde $[T_{DIN}]$ representa a matriz e transformação, descrita por

$$[T_{DIN}]_{N \times na} = \begin{bmatrix} I_{na \times na} \\ -[Z_{ii}]^{-1} \cdot [Z_{ia}] \end{bmatrix}_{ni \times na} \quad (2.104)$$

Então vem que a matriz de rigidez e massa, na forma reduzida, serão descritas por

$$\left[K_{DIN}^R \right]_{na \times na} = \left[T_{DIN} \right]_{na \times N}^T \cdot \left[K \right]_{N \times N} \cdot \left[T_{DIN} \right]_{N \times na} \quad (2.105)$$

e

$$\left[M_{DIN}^R \right]_{na \times na} = \left[T_{DIN} \right]_{na \times N}^T \cdot \left[M \right]_{N \times N} \cdot \left[T_{DIN} \right]_{N \times na} \quad (2.106)$$

A matriz de rigidez dinâmica reduzida vem então

$$\left[Z_{DIN}^R \right]_{na \times na} = \left[K_{DIN}^R \right] - \omega^2 \cdot \left[M_{DIN}^R \right] \quad \omega=0,1,2,3 \dots n \quad (2.107)$$

Sendo a receptância reduzida descrita por:

$$\left[H_{DIN}^R \right] = \left[Z_{DIN}^R \right]^{-1} \quad (2.108)$$

De realçar duas notas importantes:

- Na construção da matriz de rigidez dinâmica usa-se uma frequência natural do sistema global [11,12,15];
- Se essa frequência natural for nula, o método reduz-se ao método estático ou de Guyan.

O método revelou alguma melhoria ainda que seja exato apenas para a frequência natural do sistema global utilizada na construção da matriz de rigidez dinâmica revelando baixa precisão para as restantes.

2.5 Resumo dos Métodos de Redução de Sistemas Dinâmicos

Como referido anteriormente, o objetivo do estudo em detalhe dos MRSD é encontrar as respetivas matrizes de transformação de modo a tornar possível o processo de redução. Na tabela 2.1 apresenta-se para cada um dos métodos a matriz de transformação de graus de liberdade.

Tabela 2.1 Resumo dos MRSD e as respetivas matrizes de transformação

MRSD	Matriz de Transformação
Guyan	$[T_G]_{N \times na} = \begin{bmatrix} I \\ -[K_{ii}]^{-1} \cdot [K_{ia}] \end{bmatrix}$
IRS	$[T_{IRS}] = [T_G] + [K_f]^{-1} \cdot [M] \cdot [T_G] \cdot [M_G^R]^{-1} \cdot [K_G^R]$
IRS (Iterativo)	$[T_{IRS,i+1}] = [T_G] + [K_f]^{-1} \cdot [M] \cdot [T_{IRS,i}] \cdot [M_{IRS,i}^R]^{-1} \cdot [K_{IRS,i}^R]$
SEREP	$[T_{SEREP}]_{N \times na} = \begin{bmatrix} [\Psi_a] \cdot [\Psi_a]^g \\ [\Psi_i] \cdot [\Psi_a]^g \end{bmatrix}$
Redução Híbrida	$[T_H] = [T_G] + [P] \cdot ([T_{SEREP}] - [T_G])$
Redução Dinâmica	$[T_{DIN}]_{N \times na} = \begin{bmatrix} I \\ -[Z_{ii}]^{-1} \cdot [Z_{ia}] \end{bmatrix}$

Capítulo 3

3 Validação do Modelo Numérico

Este capítulo tem início com a apresentação do procedimento experimental adotado na recolha de dados experimentais, sendo especificados de uma forma sumária, a montagem e os equipamentos usados no laboratório de mecânica estrutural do DEMI. Posteriormente, será apresentado o desenvolvimento do modelo numérico, cujos resultados serão validados com os dados obtidos por via experimental.

3.1 Procedimento Experimental

Para o estudo experimental foi utilizada uma viga metálica na condição livre-livre, de comprimento $L = 1000mm$, possuindo uma massa total de $1,618kg$ com a massa dos acelerómetros já incluídos ($m_{acel} = 4,8g$) e uma área de secção transversal retangular de $36 \times 6mm^2$. A resposta (FRF) foi obtida em 23 pontos de medição igualmente espaçados ao longo da estrutura como se encontra indicada na figura 3.1.

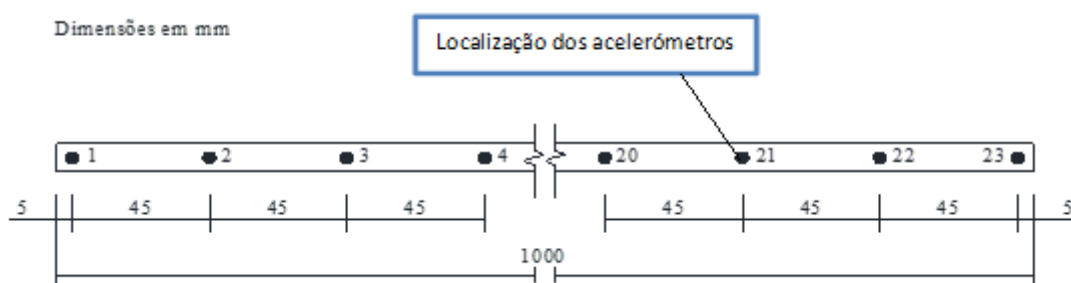


Figura 3.1 Esquema da viga com a localização dos 23 acelerómetros.

A viga foi suspensa por cabos colocados em ambos os extremos de modo a ser simulada a condição de apoio livre no espaço (Fig. 3.2).

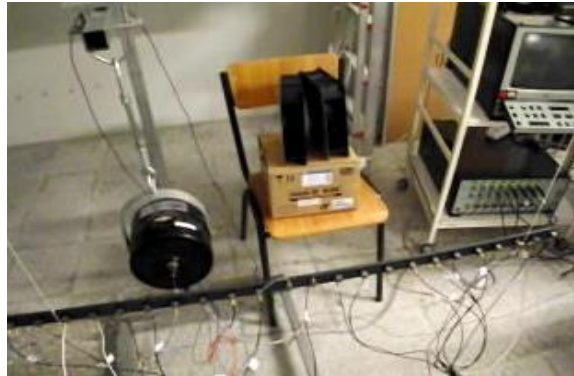


Figura 3.2 Esquema de montagem experimental utilizada em laboratório

A excitação pseudo aleatória foi aplicada com recurso à utilização de um vibrador, Bruel & Kjaer 4809, ligado a um amplificador Bruel e Kajer 2706, em quatro pontos diferentes da estrutura devidamente assinalados na figura 3.3.

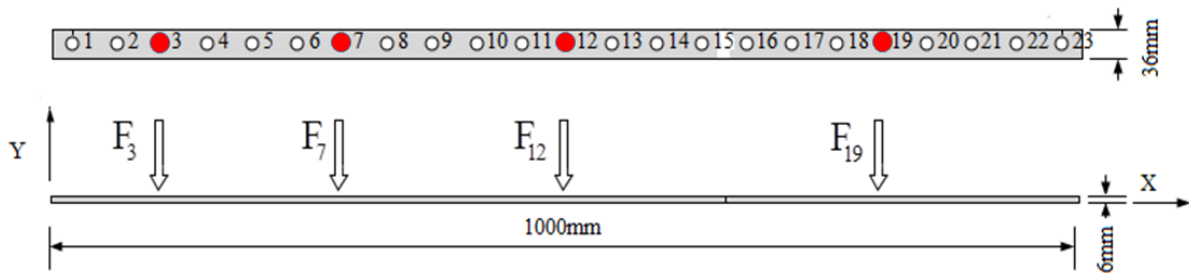


Figura 3.3 Esquema da viga representando os quatro pontos de excitação

Na tabela 3.1 estão indicados as respectivas distâncias à origem a que cada força é aplicada à estrutura.

Tabela 3.1 Distância à origem das forças aplicadas à estrutura

Forças	Distância à origem (mm)
F_3	95
F_7	275
F_{12}	500
F_{19}	815

Relativamente às respostas, estas foram obtidas através da utilização de 23 acelerómetros, Bruel & Kjaer 4507/08, igualmente espaçados ao longo da estrutura e localizados do lado oposto em que a excitação é aplicada. Os sinais obtidos foram transmitidos à unidade de aquisição de dados *Multi-Channel* Bruel e Kjaer 2816 (*pulse*) e analisados pelo *software Labshop 6.1* instalado num computador portátil, *Dell series 400*. A seguir é apresentado um esquema ilustrativo de uma montagem contendo todos os equipamentos anteriormente mencionados.

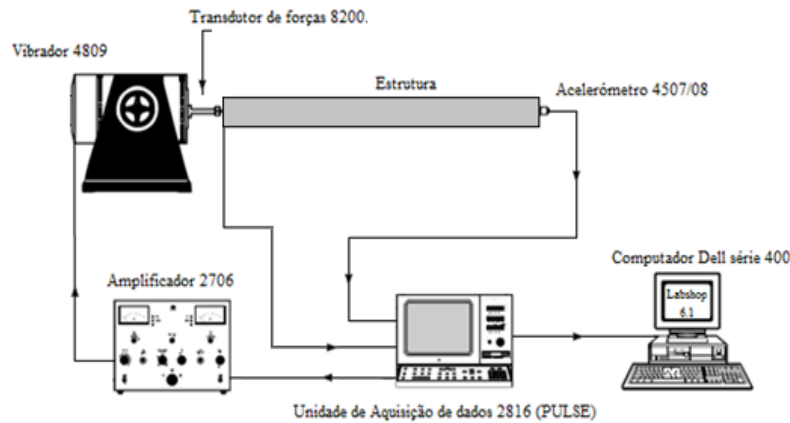


Figura 3.4 Equipamentos usados para análise modal em laboratório, adaptado de [48].

3.2 Procedimento Numérico

Como referido anteriormente, a modelação numérica para o presente trabalho foi realizada recorrendo ao *software MATLAB*. O modelo de elementos finitos a analisar numericamente é uma viga na condição livre-livre, com as mesmas características da viga analisada experimentalmente, apresentada na figura 3.5. Na mesma figura são também assinalados os 23 pontos de medição, com os graus de liberdade a serem consideradas como ativos no presente capítulo.

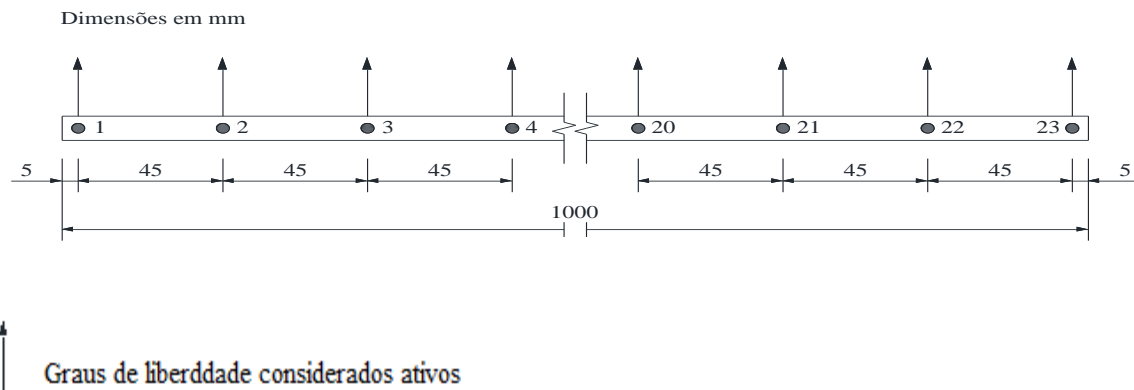


Figura 3.5 Esquema da viga simulada numericamente

A estrutura foi discretizada em 200 elementos de viga, segundo a teoria de vigas de Bernoulli-Euler, possuindo estes o mesmo comprimento ($L = 5mm$), massa e rigidez. Cada um dos elementos possui dois nós e dois graus de liberdade em cada nó, translação e rotação, (u_y, θ_z) respetivamente. De notar ainda que foram consideradas apenas flexões transversais no plano sendo então a viga estudada a duas dimensões (plano X-Y).

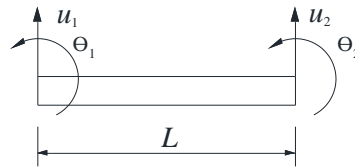


Figura 3.6 Elemento viga

Relativamente aos dados da estrutura, seguidamente é apresentada uma tabela contendo todos os dados considerados relevantes para o presente trabalho.

Tabela 3.2 Dados da estrutura simulada numericamente

Dados	Valor
Área da secção transversal (A)	$36 \times 6mm^2$
Comprimento total	$1000mm$
Coefficiente de Poisson (ν)	0,3
Densidade do material (ρ)	$7850kg / m^3$
Segundo momento de área (I_{zz})	$6,3 \times 10^{-10} mm^4$
Módulo de Young (E)	$210 GPa$
Massa	$1,618kg$

As propriedades dinâmicas da estrutura foram caracterizadas pelo seu modelo espacial através das suas matrizes de massa e rigidez dadas por:

$$[M] = \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix}_{4 \times 4} \quad [K] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}_{4 \times 4}$$

Depois de realizada a discretização, foi efetuada a assemblagem das matrizes de massa e rigidez gerando estes uma matriz final de ordem elevada. Portanto, para validar o modelo numérico tornou-se necessário a sua redução isto é, a redução das suas matrizes, de modo a torná-las compatíveis com os pontos de medição do modelo experimental, possibilitando assim a comparação entre os dois modelos. Para que isso fosse possível recorreu-se aos MRSD apresentados no Capítulo 2. Desta forma foi possível identificar qual ou quais os métodos que melhor preservam as características dinâmicas do sistema global (completo). O sistema completo foi então reduzido para doze graus de liberdade consideradas ativos (tabela 3.3) permitindo assim, a comparação entre as frequências naturais resultantes do mesmo com as obtidas pelos vários MRSD.

A gama de frequências estudada variou entre [0, 800] Hz, uma vez que foi esta a gama de frequências analisada nos ensaios experimentais.

De realçar ainda que dos 23 pontos assinalados na figura 3.5 como graus de liberdade ativos, foram utilizadas apenas doze para a redução do sistema completo. Os doze pontos estão apresentados na figura 3.7 e na tabela 3.3.

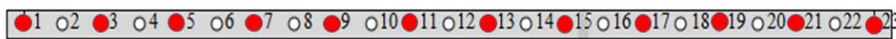


Figura 3.7 Pontos preservados no modelo numérico reduzido

Tabela 3.3 Pontos de medição da viga e os graus de liberdade correspondentes

Ponto	Graus de liberdade correspondentes
1	3
3	39
5	75
7	111
9	147
12	201
13	219
15	257
17	291
19	327
21	363
23	399

De notar que os graus de liberdade preservados foram selecionadas de forma a serem coincidentes com os pontos de medição e excitação do modelo experimental.

Na tabela 3.4 apresentam-se os resultados obtidos com o sistema completo e os obtidos com cada um dos MRSD permitindo assim efetuar a respectiva comparação.

Tabela 3.4 Comparação de resultados entre o modelo completo e o reduzido usando vários

MRSD

Modos	Frequência (Sistema Completo Hz)	Frequências Naturais obtidas com os MRSD em Hz					
		Guyan	IRS	IRS (Iterativo)	SEREP	Dinâmico	Hibrido
1	30,184	30,185	30,184	30,184	30,184	30,184	30,184
2	83,173	83,197	83,173	83,173	83,173	83,191	83,183
3	162,98	163,16	162,98	162,98	162,98	163,15	162,97
4	269,28	270,11	269,28	269,28	269,28	270,08	269,25
5	402,01	404,89	402,01	402,01	402,01	404,86	401,96
6	561,1	569,44	561,12	561,1	561,1	569,4	561,01
7	746,45	767,29	746,61	746,45	746,45	767,23	746,45

A comparação de resultados apresentada na tabela 3.4 permite concluir que os MRSD que apresentaram resultados mais aproximados ao sistema completo para a gama de frequências estudada foram os seguintes: método *IRS* (Iterativo), *SEREP* e Híbrido, os restantes métodos apresentaram um erro maior nos resultados obtidos.

É ainda ilustrada no gráfico da figura 3.8 a comparação de curvas das FRFs entre os sistemas, completo e reduzido, usando os três métodos que apresentaram resultados mais aproximados ao sistema completo.

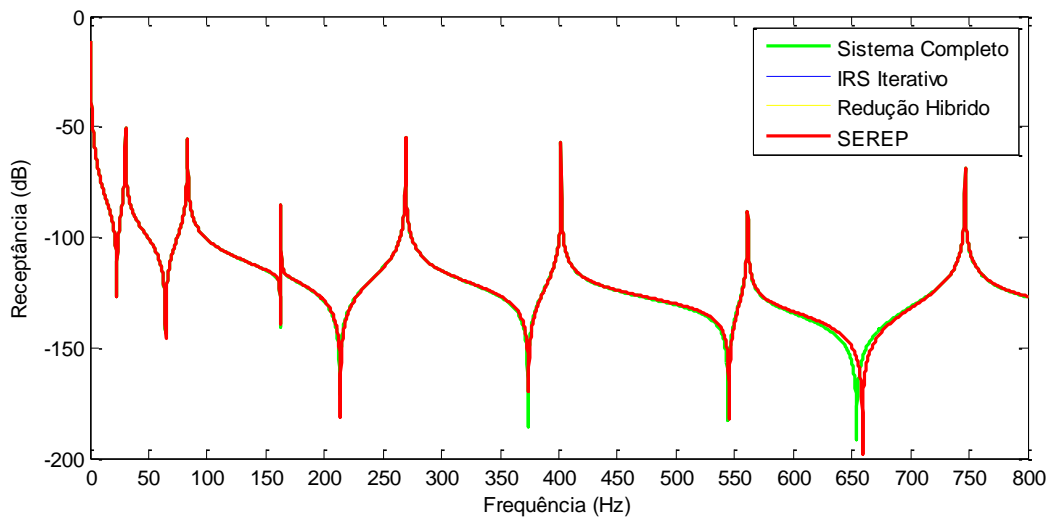


Figura 3.8 Comparação de FRF H_{99} entre o sistema completo e os vários MRSD

A análise gráfica às curvas da figura 3.8 permite concluir que para qualquer um dos três métodos de redução há correspondência absoluta de ressonâncias, entre as curvas dos modelos reduzidos com os do

modelo completo. Para os restantes três métodos (a saber: método de Guyan, *IRS* e Redução Dinâmica) a comparação das suas respostas com a resposta do modelo completo apresentam um ligeiro desvio nos modos mais elevados (ver Anexo I) não sendo por isso escolhidos.

Com o objetivo de confirmar os resultados obtidos recorreu-se a um critério de correlação modal a seguir apresentado, por forma a determinar o nível de correlação verificado entre os modos do sistema completo e do modelo reduzido utilizando cada um dos MRSDD estudados.

3.2.1 Critério de Correlação MAC

O critério de correlação *Modal Assurance Criterion* (MAC) [49] destina-se a comparar pares modais provenientes de diferentes vias aplicadas à mesma estrutura. Para o presente estudo a sua aplicação restringe-se ao de correlacionar pares modais entre os sistemas, completo e reduzido, respetivamente e é descrito por:

$$MAC(\phi_C, \phi_R) = \frac{|\{\phi_C\}_i^T \{\phi_R\}_j|^2}{(\{\phi_C\}_i^T \{\phi_R\}_j)(\{\phi_R\}_j^T \{\phi_R\}_j)} \quad (3.1)$$

Onde $\{\phi_C\}_i$ diz respeito ao modo i do sistema completo e $\{\phi_R\}_j$ representa o modo j do sistema reduzido. Para o modo i igual ao modo j o resultado é igual à unidade indicando correlação perfeita e zero indica ausência de correlação.

Na tabela 3.5 apresentam-se os resultados das correlações entre os modos do sistema completo com os obtidos usando cada um dos MRSDD.

Tabela 3.5 Resultados usando o critério MAC

Modo	Critério MAC					
	Completo-Guyan	Completo-IRS	Completo-IRS Iterativo	Completo-SEREP	Completo-Dinâmico	Completo-Híbrido
1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	1
3	0,999999	1	1	1	0,999999	1
4	0,999995	1	1	1	0,999995	1
5	0,999980	1	1	1	0,999981	1
6	0,999956	0,999999	1	1	0,999956	1
7	0,999892	0,999996	1	1	0,999893	1

Da comparação de resultados apresentada na tabela 3.5 confirmam-se os resultados já verificados anteriormente, para os métodos IRS Iterativo, SEREP e Redução Híbrida. Observa-se que existe correspondência total para a gama de frequências estudada enquanto para os métodos de Guyan, IRS e Redução Dinâmica tal não é de todo verificado. Parece assim que os métodos, IRS Iterativo, SEREP e Híbrido são as escolhas mais adequadas pois, estes apresentam resultados exatos para a gama de frequências estudada.

Importa referir que dos três métodos considerados adequados para a redução do modelo completo e compatibilização com dados experimentais, o método escolhido foi o SEREP embora podiam ter sido escolhidos os outros dois.

3.3 Validação do Modelo Numérico

A validação do modelo numérico obtido recorrendo ao MEF foi realizada utilizando os dados provenientes da via experimental. Estes assumem um papel de relevo uma vez que, descrevem com realismo o comportamento real da estrutura.

A validação do modelo numérico foi efetuada em duas etapas distintas, obedecendo à seguinte ordem:

- i) Comparação dos resultados obtidos numericamente com os dados recolhidos no ensaio experimental.
- ii) Utilização do critério de correlação, *Frequency Response Assurance Criterion* (FRAC) [8], de modo a verificar o nível de correlação entre os resultados obtidos pela via numérica com os dados recolhidos no ensaio experimental.

3.3.1 Comparação dos resultados numéricos com os dados obtidos no ensaio experimental

A comparação dos resultados numéricos com os dados obtidos no ensaio experimental é feita através da sobreposição de curvas das FRFs obtidas pelas vias anteriormente mencionadas, sendo isso feito recorrendo à representação gráfica e por comparação das suas frequências naturais. As frequências naturais obtidas numérica e experimentalmente encontram-se apresentadas nas tabelas 3.6-3.9, sendo que nas mesmas tabelas são apresentadas os erros relativos associados e calculados através da equação (3.2). A comparação foi realizada através da redução do modelo numérico gerado pelo MEF usando os MRSD, com o objetivo de tornar os dados compatíveis com os graus de liberdade utilizados experimentalmente.

As representações gráficas das curvas de quatro FRFs diretas (H_{33} , H_{77} , H_{1212} e H_{1919}), ou seja FRFs medidas em pontos onde a estrutura foi excitada diretamente (Fig. 3.3), encontram-se apresentadas nas figuras (3.9-3.12).

Com o procedimento proposto, pretende-se verificar se os resultados numéricos são consistentes com os dados obtidos no ensaio experimental. O erro relativo resultante da comparação das frequências naturais foi obtido recorrendo à seguinte equação:

$$\varepsilon = \frac{|\omega_{numérico} - \omega_{experimental}|}{\omega_{experimental}} \times 100 \quad (3.2)$$

Onde, $\omega_{numérico}$ e $\omega_{experimental}$ representam as frequências naturais em [Hz] dos modelos, numérico e experimental, respetivamente e ε representa o erro relativo associado. A gama de frequências considerada para a validação em todos os casos é de [0, 800] Hz.

De seguida serão apresentados os gráficos das FRFs correspondentes aos quatro casos selecionados (fig. 3.3) para a validação dos resultados numéricos. Após cada um dos gráficos é apresentada uma tabela com a comparação entre as frequências naturais obtidas pelas vias numérica e experimental.

1º Caso

Comparação da curva numérica e experimental obtida para o acelerómetro colocado no ponto de medição 3 quando a força é aplicada no mesmo ponto.

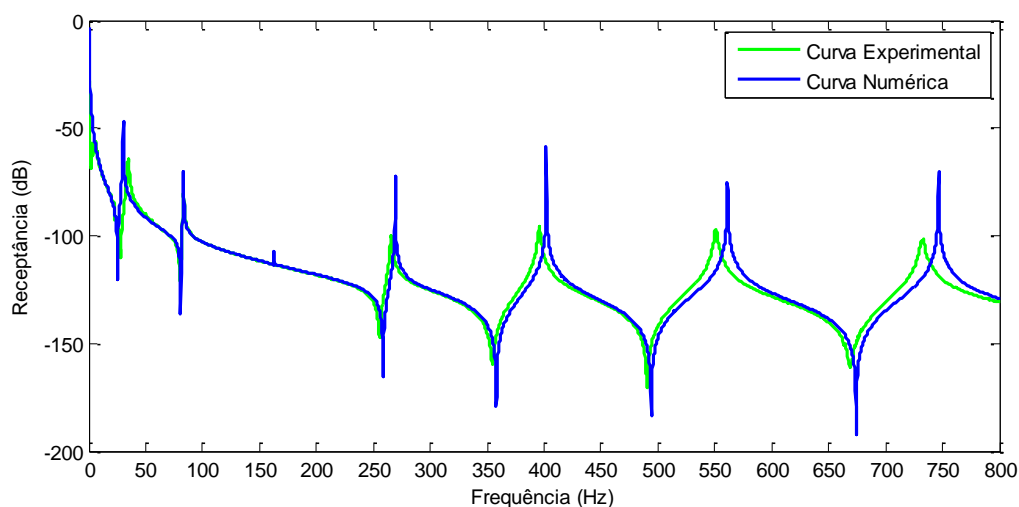


Figura 3.9 Comparação de curvas, numérica e experimental para FRF H_{33}

Na tabela 3.6 comparam-se as respectivas frequências naturais obtidas com o modelo numérico e experimental, inerentes ao gráfico da figura 3.8, bem como o erro relativo associado.

Tabela 3.6 Comparação dos resultados entre o modelo numérico e experimental para H_{33}

Modos	Frequências Naturais (Hz)		
	Modelo Numérico	Modelo Experimental	Erro (%)
1	30,184	32	5,6
2	83,173	83	0,2
3	162,98	-	-
4	269,28	267	0,84
5	402,01	396	1,51
6	561,1	550	2
7	746,45	734	1,67

(-) Significa a existência de um nodo.

2º Caso

Comparação da curva numérica e experimental obtida para o acelerómetro colocado no ponto de medição 7 quando a força é aplicada no mesmo ponto.

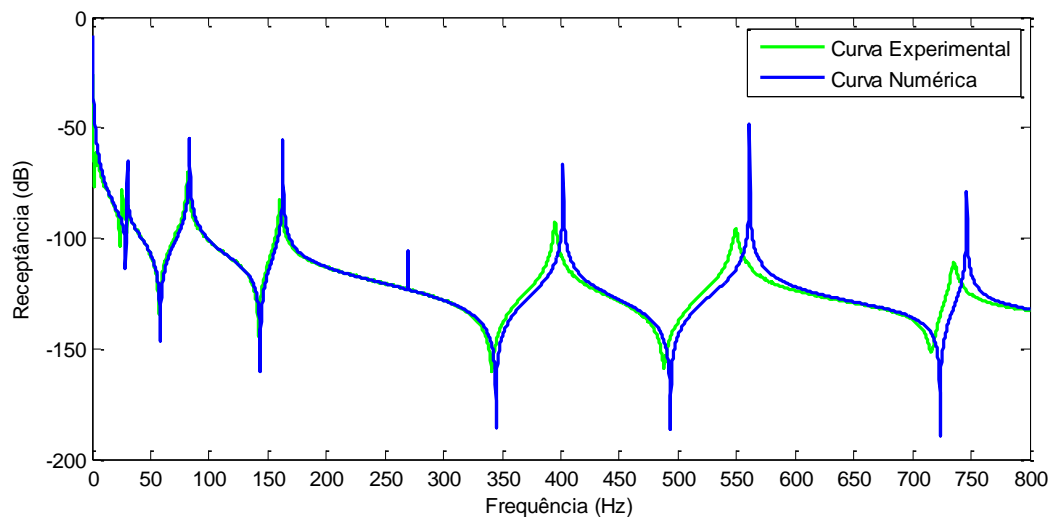


Figura 3.10 Comparação de curvas, numérica e experimental para FRF H_{77}

Na tabela 3.7 comparam-se as respectivas frequências naturais obtidas com o modelo numérico e experimental, inerentes ao gráfico da figura 3.9, bem como o erro relativo associado.

Tabela 3.7 Comparação dos resultados entre os modelos, numérico e experimental para H_{77}

Modos	Frequências Naturais (Hz)		
	Modelo Numérico	Modelo Experimental	Erro (%)
1	30,184	29	4,08
2	83,173	83	0,2
3	162,98	160	1,86
4	269,28	-	-
5	402,01	396	1,5
6	561,1	550	2
7	746,45	736	1,4

(-) Significa a existência de um nodo.

3º Caso

Comparação da curva numérica e experimental obtida para o acelerómetro colocado no ponto de medição 12 quando a força é aplicada no mesmo ponto.

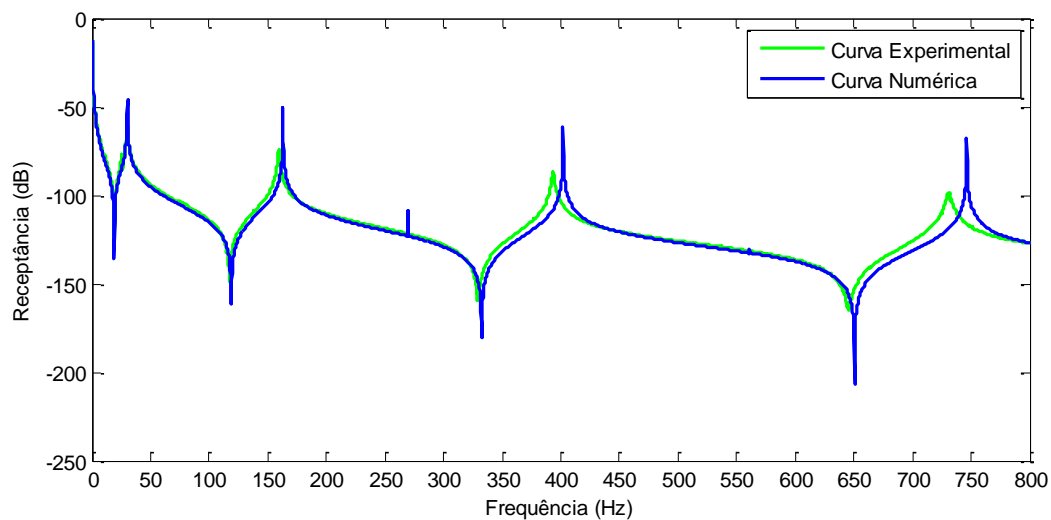


Figura 3.11 Comparação de curvas, numérica e experimental para FRF H_{1212}

Na tabela 3.8 comparam-se as respectivas frequências naturais obtidas com o modelo numérico e experimental, inerentes ao gráfico da figura 3.10, bem como o erro relativo associado.

Tabela 3.8 Comparação dos resultados entre o modelo numéricos e experimental para H_{1212}

Modos	Frequências Naturais (Hz)		
	Modelo Numérico	Modelo Experimental	Erro (%)
1	30,184	30	0,61
2	83,173	-	-
3	162,98	160	1,86
4	269,28	-	-
5	402,01	396	1,5
6	561,1	-	-
7	746,45	731	2,093

(-) Significa a existência de um nodo.

4º Caso

Comparação da curva numérica e experimental obtida para o acelerómetro colocado no ponto de medição 19 quando a força é aplicada no mesmo ponto.

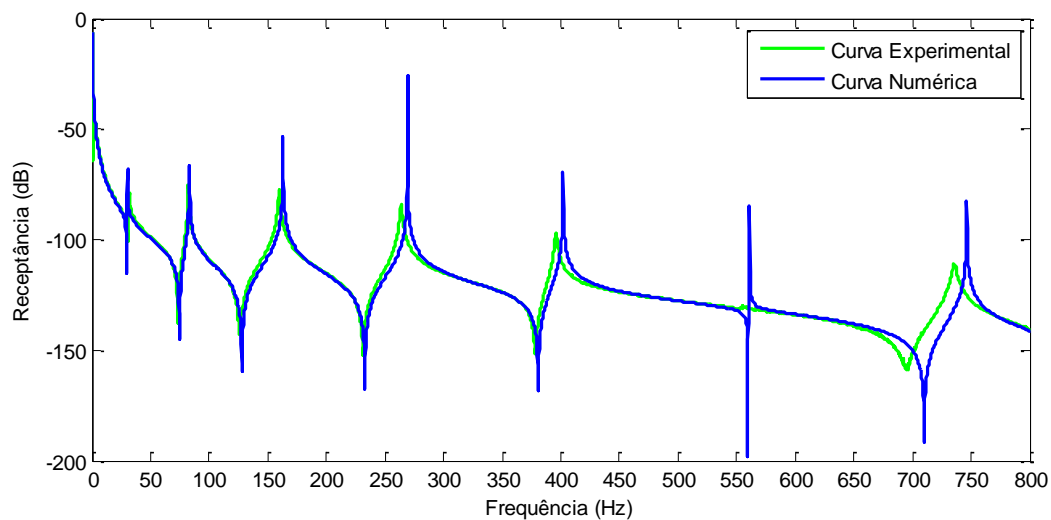


Figura 3.12 Comparação de curvas, numérica e experimental para FRF H_{1919}

Na tabela 3.9 comparam-se as respetivas frequências naturais obtidas com o modelo numérico e experimental, inerentes ao gráfico da figura 3.11, bem como o erro relativo associado.

Tabela 3.9 Comparação dos resultados entre o modelo numéricos e experimental para H_{1919}

Modos	Frequências Naturais (Hz)		
	Modelo Numérico	Modelo Experimental	Erro (%)
1	30,184	30	0,61
2	83,173	83	0,2
3	162,98	160	1,86
4	269,28	264	1,98
5	402,01	397	1,25
6	561,1	-	-
7	746,45	737	1,26

(-) Significa a existência de um nodo.

Como se pode constatar a partir das FRFs das figuras 3.9-3.12 existe uma ligeira diferença entre os resultados numéricos e os resultantes do procedimento experimental. Ainda assim, pode-se dizer que os resultados são bastante satisfatórios. As pequenas variações observadas resultam dos procedimentos utilizados para a obtenção dos resultados e, podem ser justificadas com:

- O facto de não se conhecer corretamente as propriedades do material em estudo;
- Do próprio ruído existente na realização das medições experimentais que pode afetar os dados experimentais.

Observa-se ainda nas tabelas 3.6-3.9 que para alguns modos não constam valores das frequências naturais do modelo experimental. A ausência desses valores justifica-se com a existência de nodos em alguns modos, que é um problema frequente na obtenção de dados experimentais. De facto pode acontecer que os pontos escolhidos para a excitação/medição da estrutura coincidam com um nodo do modelo experimental, que pode não ser o caso para o modelo numérico.

Importa referir ainda que no modelo numérico estudado até agora não foi considerada a existência de amortecimento.

3.3.2 Validação do Modelo Numérico usando o critério de correlação FRAC

Na presente secção é abordada o mesmo problema de elementos finitos agora considerando a existência de amortecimento. O procedimento proposto prende-se com o facto de os dados experimentais obtidos conterem informação associada ao amortecimento, encontrando-se esta informação na parte complexa das FRFs medidas. Neste sentido, foram realizadas simulações numéricas considerando o amortecimento e os seus resultados serão discutidos, em termos de correlação, com os dados obtidos experimentalmente.

3.4.2.1 Implementação do Amortecimento

Com o objetivo de obter FRFs numéricas onde fosse considerada a existência de amortecimento, foi considerado para tal a existência de amortecimento proporcional. O presente amortecimento é definido através da equação (3.3), e é dito proporcional porque depende das matrizes de massa e rigidez, assim como dos valores atribuídos às constantes α e β .

O referido amortecimento proporcional é então definido por:

$$[C]_{N \times N} = \alpha \cdot [M]_{N \times N} + \beta \cdot [K]_{N \times N} \quad (3.3)$$

Onde, α e β são constantes de proporcionalidade. A seleção dos valores a atribuir às constantes foi efetuada depois de várias tentativas, tendo-se finalmente atribuído os valores $\alpha = \beta = 1 \times 10^{-6}$, sendo o efeito provocado pelos mesmos ilustrado no gráfico da figura 3.13.

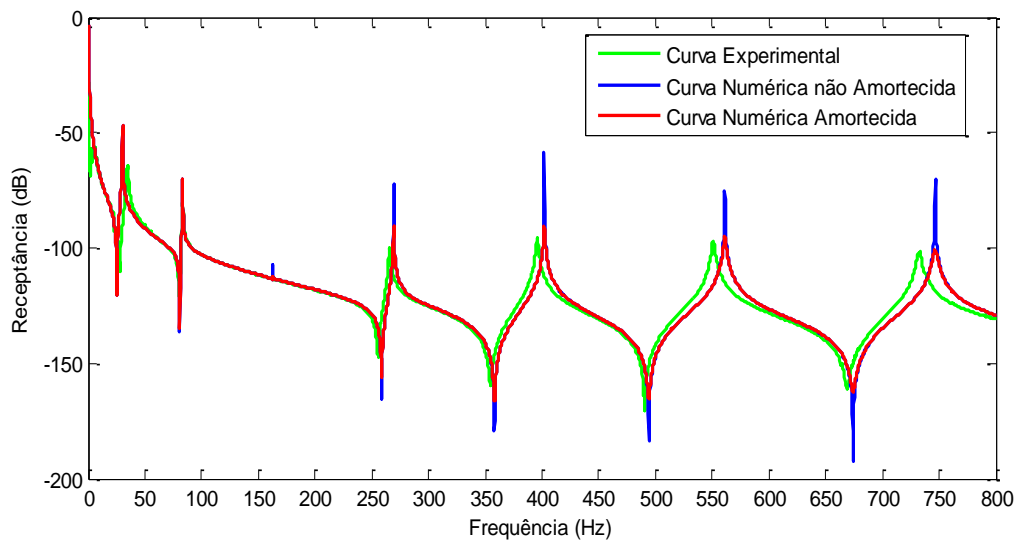


Figura 3.13 FRF H_{33} Experimental vs Numérico, com e sem amortecimento.

3.4.2.2 Critério de correlação FRAC

O presente critério destina-se a correlacionar as FRFs obtidas através das vias, experimental e numérica. Para o efeito foi escolhido o *Frequency Response Assurance Criterion* (FRAC) desenvolvido por Heylen e Lammens [8]:

$$FRAC(i, j) = \frac{\left| \{H_{ij}^X(\omega)\}^H \{H_{ij}^A(\omega)\} \right|^2}{\left(\{H_{ij}^X(\omega)\}^H \{H_{ij}^X(\omega)\} \right) \left(\{H_{ij}^A(\omega)\}^H \{H_{ij}^A(\omega)\} \right)} \quad (3.4)$$

Onde o FRAC é definido para um par de FRFs, $\{H_{ij}(\omega)\}$, (X para experimental, A para numérica) representando a resposta na coordenada i devido a força aplicada na coordenada j . Convém referir ainda que, o critério de correlação FRAC assume valores no intervalo $[0,1]$ onde, o valor 1 indica, correlação perfeita e 0 ausência de correlação.

Na tabela 3.10 apresentam-se os resultados obtidos utilizando o critério de correlação FRAC. Para a correlação foram utilizadas as FRFs diretas e transferidas entre os pontos onde a estrutura foi excitada.

Tabela 3.10 Resultados da aplicação do critério FRAC

FRAC $H(i, j)$	3	7	12	19	Média
3	0,80	0,9	0,89	0,84	0,85
7	0,58	0,87	0,96	0,97	0,85
12	0,94	0,94	0,94	0,91	0,93
19	0,81	0,91	0,94	0,87	0,88
Média	0,77	0,90	0,93	0,89	

Os dados observados na tabela 3.10 podem ser interpretados como se de uma matriz se tratasse em que, i e j representam as linhas e colunas respetivamente. Chama-se à atenção para o facto de a matriz não ser simétrica. Isto deve-se ao facto de no caso experimental as FRFs $H_{i,j}$ serem ligeiramente diferentes das FRFs $H_{j,i}$ ($H_{i,j} \neq H_{j,i}$) ou seja, a resposta obtida na coordenada i provocada pela força j no procedimento experimental é ligeiramente diferente da resposta obtida na coordenada j provocada pela força i , exceção feita à FRFs H_{73} em que essa diferença é notória.

Com base nos resultados apresentados na tabela 3.10 pode-se verificar um bom nível de correlação exceção feita apenas para a receptância H_{73} . Embora o $FRAC$ tenha um valor de 0,9 para o caso de se utilizar a FRF H_{37} , o mesmo não se verifica quando se utiliza a FRF H_{73} . Do ponto de vista numérico estas funções são iguais mas em termos experimentais verifica-se que há uma ligeira diferença como se pode verificar no gráfico da figura 3.14.

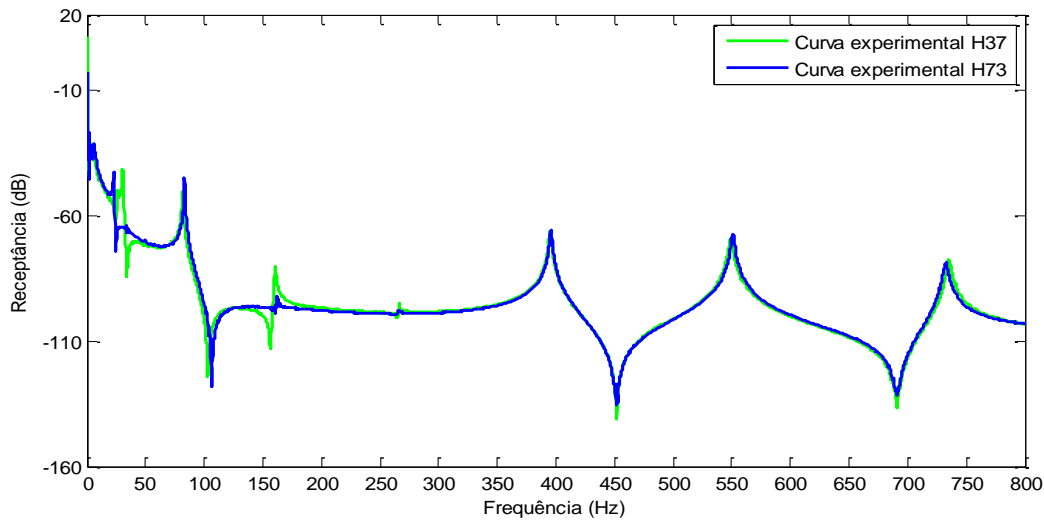


Figura 3.14 Comparação de FRFs experimentais H_{37} e H_{73}

A explicação para este facto baseia-se no tipo de excitação usada no modelo experimental. Ao mudar a posição do vibrador do ponto 3 para o ponto 7 estamos a alterar, embora ligeiramente, as propriedades dinâmicas do modelo experimental.

3.4 Conclusões

Para o presente capítulo tinha-se como objetivo a validação do modelo numérico com os dados obtidos experimentalmente. Antes da validação foram descritos os procedimentos experimentais e numéricos considerando relevantes para a mesma. Seguidamente foram implementados MRSD para a redução do modelo numérico de modo a torná-lo compatível com os pontos de medição do procedimento experimental e posteriormente foram realizadas os processos de validação do modelo numérico.

Através dos resultados obtidos podem tirar-se as seguintes conclusões:

- Dos MRSD selecionados para a redução do sistema completo, os métodos mais adequados foram SEREP, IRS Iterativo e Redução Híbrido, uma vez que estes apresentam resultados iguais aos do modelo completo para a gama de frequência estudada;
- O método utilizado para a redução do modelo numérico foi o método SEREP embora poderiam ter sido selecionados os outros dois métodos, nomeadamente, IRS Iterativo ou Redução Híbrido.
- Da comparação das FRFs obtidas com modelo numérico com as obtidas experimentalmente nos 4 casos apresentados, verifica-se que as FRFs obtidas com o modelo numérico se encontram muito próximas das do modelo experimental podendo concluir-se que os resultados são bastante consistentes;
- Observando a tabela respeitante aos resultados obtidos através utilização do critério de correlação *FRAC*, verifica-se que estes apresentam resultados bastante satisfatórios, confirmando assim a consistência nos resultados obtidos.

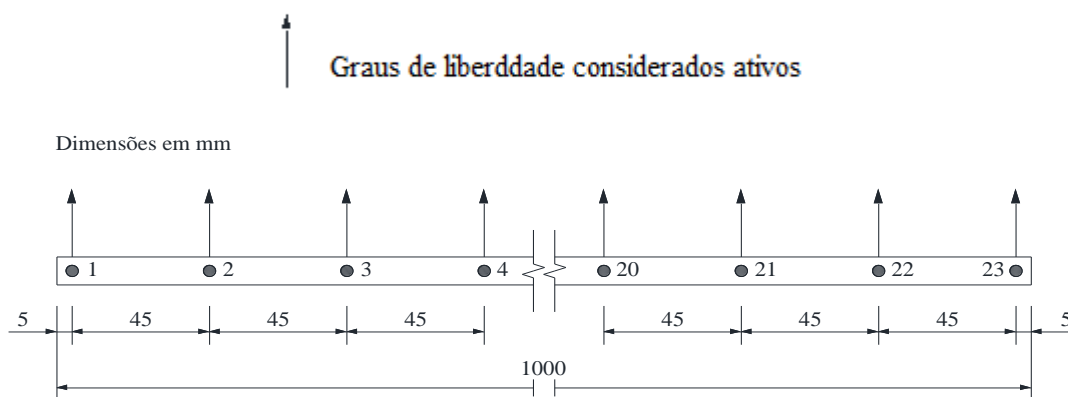
Capítulo 4

4 Aplicação de diversos MRSD ao Modelo Numérico

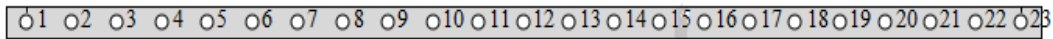
Este capítulo tem início com uma breve apresentação do procedimento numérico considerado, seguindo-se a discussão dos resultados das simulações numéricas para os diferentes casos em estudo utilizando os MRSD. Posteriormente serão apresentadas as vantagens e limitações dos MRSD e por fim apresenta-se um breve resumo do capítulo.

4.1 Descrição sumária do procedimento numérico

O procedimento numérico adotado para o presente capítulo é o mesmo utilizado na secção 3.2 (Capítulo 3). A estrutura simulada numericamente é uma viga na condição de apoio livre-livre apresentada na figura 4.1a de onde também constam os 23 pontos e os respetivos graus de liberdade a figurarem como ativos no modelo reduzido.



a)



b)

Figura 4.1 Esquema da viga simulada numericamente a) representando os graus de liberdade ativos; b) representando a localização dos 23 pontos preservados

Na tabela 4.1 apresentam-se os 23 pontos devidamente identificados na figura 4.1b e os graus de liberdade correspondentes no modelo numérico. Importa referir que esses serão os graus de liberdade considerados ativos que serão usados na obtenção do modelo reduzido, podendo ou não serem usados em simultâneo.

Tabela 4.1 Tabela representativa dos 23 pontos e os graus de liberdade correspondentes no modelo numérico.

Pontos sobre a viga	Graus de liberdade
1	3
2	21
3	39
4	57
5	75
6	93
7	111
8	129
9	147
10	165
11	183
12	201
13	219
14	237
15	255
16	273
17	291
18	309
19	327
20	345
21	363
22	381
23	399

De salientar ainda que os graus de liberdade a figurarem como ativos no sistema reduzido foram selecionados levando em linha de conta o igual espaçamento entre si embora, podiam ter sido selecionados outros graus de liberdade sobre a viga que não os indicados na tabela 4.1.

4.2 Sistema Global

Sistema global define-se aqui como um sistema que contém todos os graus de liberdade (ativos e inativos) depois de realizada a discretização e a consequente assemblagem das matrizes que o caracterizam.

Validado o modelo numérico, está-se em condições de se poder utilizar qualquer ponto sobre a viga para a apresentação de resultados. A figura 4.2 mostra a FRF H_{99} do sistema global tomada como referência para a comparação com as FRFs do modelo reduzido em todos os casos de estudo a partir de agora.

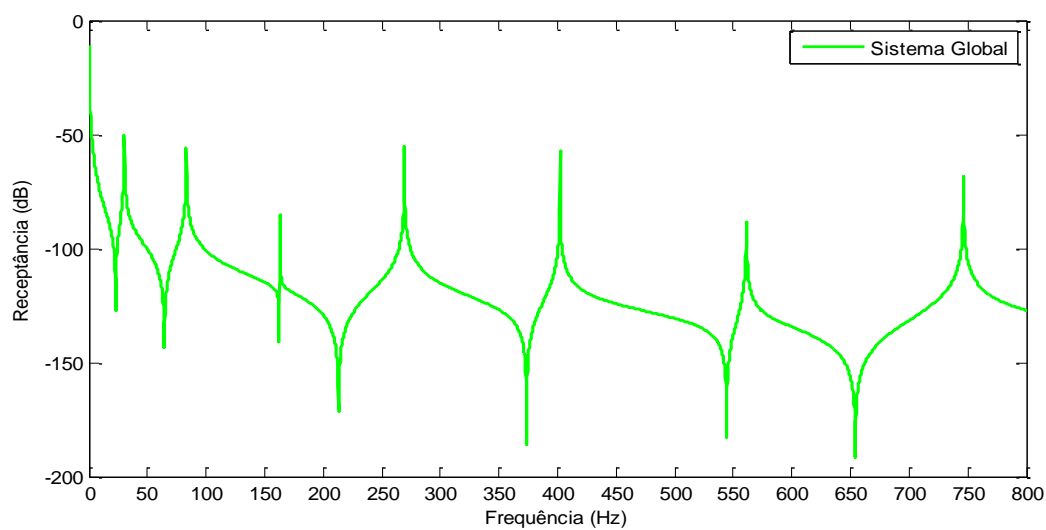


Figura 4.2 FRF H_{99} para o sistema global

Em relação à gama de frequências estudada, todos os resultados apresentados encontram-se na mesma gama de frequências, [0, 800] Hz. Na tabela 4.2 apresentam-se as frequências naturais do sistema global para a gama de frequências estudada.

Tabela 4.2 Frequências naturais da estrutura em estudo.

Modos	Frequências Naturais (Hz)
1	30,184
2	83,173
3	162,98
4	269,28
5	402,01
6	561,1
7	746,45

Na figura 4.3 apresentam-se os primeiros quatro modos flexíveis de vibração do sistema.



Figura 4.3 Representação dos quatro primeiros modos flexíveis de vibração da estrutura em estudo.

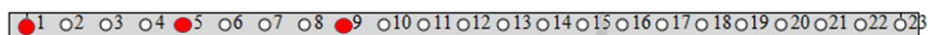
4.3 Descrição dos casos de estudo

Caso 1

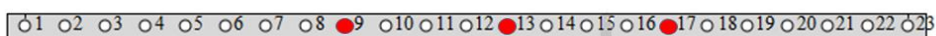
O primeiro caso de estudo consiste em avaliar se a localização dos graus de liberdade ativos na estrutura afeta a precisão dos resultados obtidos. Foram estudadas três situações em que, em cada uma delas os graus de liberdade ativos encontram-se localizados em pontos e regiões diferentes da viga. Os pontos selecionados para cada uma das situações consideradas foram os seguintes:

- a) Situação 1, os pontos 1, 5 e 9 que se encontram localizados no extremo esquerdo da viga;
- b) Situação 2, os pontos 9, 13 e 17 que se encontram localizados no centro da viga;
- c) Situação 3, os pontos 1, 9 e 23 que se encontram localizados da seguinte forma: primeiro ponto no extremo esquerdo, segundo ponto mais próximo do meio e terceiro ponto no extremo direito da viga.

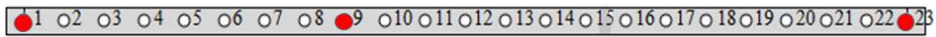
Os pontos preservados no modelo reduzido nas três situações referidas anteriormente estão devidamente assinaladas na figura 4.4.



a)



b)



c)

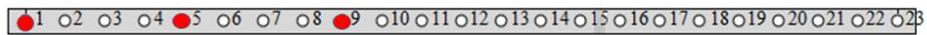
Figura 4.4 Pontos preservados no modelo reduzido a) Situação 1; b) Situação 2; c) Situação 3.

Caso 2

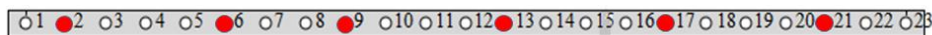
Em seguida, realiza-se um estudo que tem por objetivo verificar se um aumento progressivo do número de graus de liberdade a preservar no sistema melhora a precisão dos resultados obtidos. Considerou-se três situações em que o número de graus de liberdade é aumentado sempre para o dobro da anterior. Os pontos selecionados para cada uma das situações consideradas foram os seguintes:

- d) Situação 4, os pontos 1, 5 e 9 que se encontram localizados no extremo esquerdo da viga;
- e) Situação 5, os pontos 2, 6, 9, 13, 17 e 21 em que os primeiros três pontos se encontram localizados no extremo esquerdo da viga e os restantes no extremo direito.
- f) Situação 6, os pontos 3, 4, 7, 8, 9, 11, 12, 15, 18, 19, 22 e 23 em que os primeiros seis pontos encontram-se localizados no extremo esquerdo da viga, o sétimo ponto encontra-se localizado no centro da viga e os restantes no extremo direito da viga.

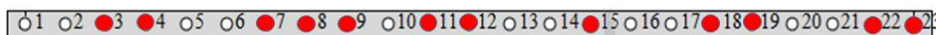
Os pontos preservados no modelo reduzido nas três situações referidas anteriormente estão devidamente assinaladas na figura 4.5.



d)



e)



f)

Figura 4.5 Pontos preservados no modelo reduzido d) Situação 4; e) Situação 5; f) Situação 6.

Caso 3

O terceiro caso de estudo tem por objetivo determinar qual a influência da adição de massa nos graus de liberdade ativos no sistema reduzido. Os pontos selecionadas como ativos foram os seguintes: 1, 5, 9, 13, 17 e 21, sendo que os três primeiros se encontram localizados no extremo esquerdo da viga e os restantes no extremo direito, estes estão igualmente espaçados entre si. As situações simuladas numericamente foram as seguintes:

- g) Situação 7, sem massa adicionada nos pontos considerados ativos;
- h) Situação 8, adição de 50 gramas nos pontos considerados ativos;
- i) Situação 9, adição de 200 gramas nos pontos considerados ativos.

Em todas as situações referentes ao terceiro caso de estudo, a massa foi adicionada apenas nos elementos da diagonal da matriz de massa do sistema global, nos graus de liberdade referidos anteriormente. Os pontos preservados no modelo reduzido nas três situações referidas anteriormente estão devidamente assinaladas na figura 4.6.



Figura 4.6 Pontos preservados no modelo: g) Situação 7; h) Situação 8; i) Situação 9.

Caso 4

Por fim, o quarto caso de estudo em que é simulado o processo inverso ao do caso 3, ou seja, a adição de massa nos graus de liberdade inativos a saber: 3, 7, 11, 15, 19, e 23 mantendo como ativos os mesmos pontos considerados para as três situações anteriores. Os pontos considerados inativos encontram-se localizados ao longo da viga sendo que os três primeiros encontram-se no extremo esquerdo da viga e os restantes no extremo direito, estes estão igualmente espaçados entre si. Foram simuladas numericamente mais duas situações seguintes:

- j) Situação 10, onde foram adicionados 100 gramas nos graus de liberdade inativos
- k) Situação 11, onde foram adicionadas 200 gramas nos graus de liberdade inativos.

Em todas as situações referentes ao quarto caso de estudo, a massa foi adicionada apenas nos elementos da diagonal da matriz de massa do sistema global, nos graus de liberdade referidos anteriormente. Os pontos preservados no modelo reduzido nas duas situações referidas anteriormente estão devidamente assinaladas na figura 4.7. De notar ainda que os pontos da cor vermelha representam os pontos preservados no modelo reduzido, e os pontos de cor azul representam, os pontos onde foram adicionadas massas.

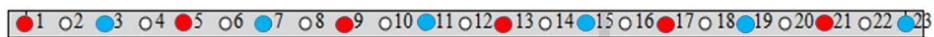


Figura 4.7 Pontos preservados no modelo reduzido: j) Situação 10; k) Situação 11.

4.4 Resultados Numéricos

Nesta secção apresentam-se os resultados numéricos obtidos para os diferentes casos de estudo considerados, utilizando cada um dos MRSD anteriormente identificados (Capítulo 2). Para cada caso de estudo, comparam-se os resultados provenientes do sistema global com os resultados obtidos do sistema reduzido utilizando cada um dos MRSD. A comparação de resultados é feita através da sobreposição de curvas das FRFs obtidas pelos sistemas anteriormente mencionados, sendo isso feito recorrendo à representação gráfica e por comparação das suas frequências naturais. As representações gráficas das curvas das FRFs diretas (H_{99}) encontram-se apresentadas nas várias figuras das secções subsequentes. Quanto às frequências naturais obtidas tanto com o sistema global como o sistema reduzido, estas encontram-se apresentadas sob forma de tabela nas secções subsequentes, sendo que na mesma tabela é apresentado o erro relativo associado. Este erro resultante da comparação das frequências naturais foi calculado recorrendo à seguinte equação:

$$\varepsilon = \frac{|\omega_{reduzido} - \omega_{completo}|}{\omega_{completo}} \times 100 \quad (4.1)$$

Onde $\omega_{completo}$ e $\omega_{reduzido}$ representam as frequências naturais em [Hz] dos sistemas, global e reduzido, respetivamente, e ε representa o erro relativo associado.

Para além do anteriormente referido, recorre-se ainda ao critério de correlação MAC apresentado na secção 3.3 (Capítulo 3) de modo a se poder avaliar o grau de correlação existente entre os modos do sistema global com os modos do sistema reduzido utilizando cada um dos MRSD.

Convém referir que para todos os casos em que o número de graus de liberdade ativos (na) for “ na ”, apenas se consegue identificar $na-2$ modos flexíveis. Isto deve-se a existência de dois modos de corpo rígido relacionadas com o tipo de condições de fronteira utilizada para a estrutura. Exceção feita ao método SEREP já que este oferece a possibilidade de serem escolhidos os modos pretendidos, podendo ou não serem seleccionados modos de corpo rígido (ver Anexo II).

4.4.1 Método de Guyan

A utilização do presente método é sujeita a várias condicionantes resultantes da formulação da sua matriz de transformação, que como referido anteriormente, não contabiliza os efeitos de inércia. Estas condicionantes serão identificadas e estudadas numericamente permitindo concluir sobre as mesmas nos vários casos de estudo abordados em seguida.

1º Caso

Na figura 4.8 verifica-se que para a situação 1, existe um grande desvio da primeira frequência natural do sistema reduzido relativamente à primeira frequência natural do sistema global.

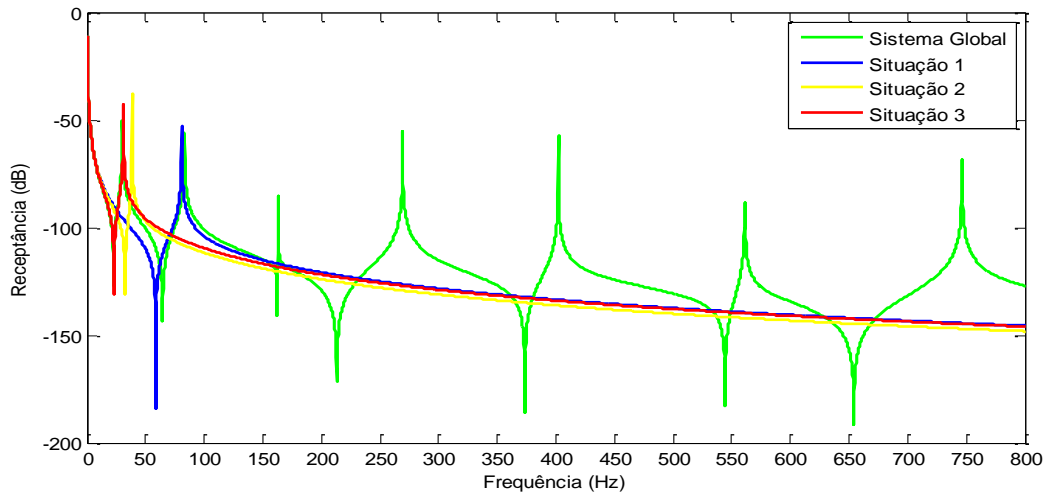


Figura 4.8 Comparação de FRFs do sistema global com as resultantes do método de Guyan para as várias situações (Caso 1).

Este desvio torna-se cada vez menor nas situações 2 e 3, à medida que vão sendo selecionados graus de liberdade ativos que se encontram melhor localizados ao longo da estrutura (Fig. 4.4). Isto permite concluir que a seleção de graus de liberdade mais adequada foi a da situação 3 produzindo este qualitativamente melhores resultados.

Na tabela 4.3 apresentam-se os valores numéricos das frequências naturais observadas no gráfico da figura 4.8 permitindo assim quantificar as mesmas e também calcular o erro relativo associado. Na mesma tabela é também apresentada a correlação modal utilizando o critério MAC.

Tabela 4.3 Comparação de resultados do sistema global com os obtidos com o método de Guyan (caso 1)

Casos	MAC	Frequência (Hz)	Erro (%)
Situação 1	0,875756	80,577	166,9
Situação 2	0,965227	38,515	27,6
Situação 3	0,994759	31,032	2,8
Sistema Global	-	30,184	-

Observa-se da tabela 4.3 que para as várias situações consideradas, o erro relativo é tanto menor quanto melhor localizadas estiverem os pontos (graus de liberdade) a figurarem como ativos no sistema. Em

simultâneo verifica-se também que sucede o mesmo com os coeficientes de correlação que apresentam melhores resultados para a situação 3.

A análise conjunta às curvas da figura 4.8 e aos resultados da tabela 4.3 permite concluir que a localização de graus de liberdade ativos no sistema assume importância decisiva na qualidade da aproximação do sistema reduzido ao sistema global.

Caso 2

Na figura 4.9 constata-se que o aumento progressivo de graus de liberdade a preservar no sistema reduzido tende a melhorar significativamente os resultados obtidos, ainda que estes apenas se verifiquem para os primeiros modos. Este aumento torna-se mais significativo quanto maior for o número de graus de liberdade ativos, como mostra a comparação de curvas entre o sistema reduzido de cada uma das situações consideradas com a curva do sistema global.

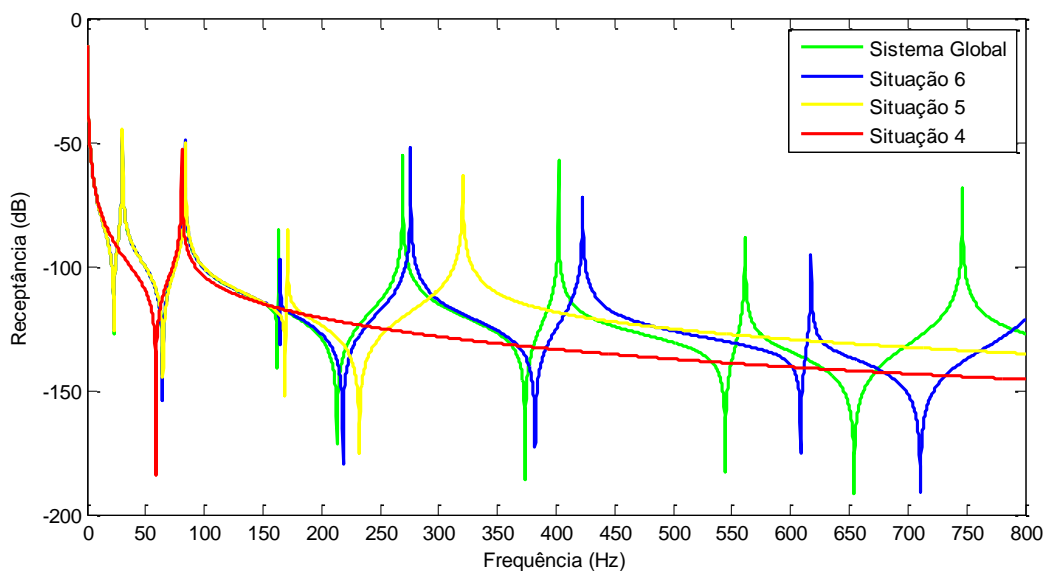


Figura 4.9 Comparação de FRFs entre sistema global com as resultantes do método de Guyan para as várias situações (Caso 2).

A análise às curvas da figura 4.9 permite concluir que quanto maior for o número de graus de liberdade ativos melhor a aproximação para os primeiros modos, sendo a situação 6 aquela que produz qualitativamente melhores resultados uma vez que é também, a situação onde se preservam maior número de graus de liberdade. Os resultados apresentados nas tabelas 4.4 e 4.5 evidenciam isso mesmo.

Na tabela 4.4 apresentam-se o valor numérico das frequências naturais observadas na figura 4.9 permitindo assim quantificá-las e ao mesmo tempo estimar o respetivo erro relativo associado.

Tabela 4.4 Comparação das frequências naturais entre sistema global e os obtidos pelo método de Guyan (Caso 2) .

Modos	Frequências Naturais (Hz)						
	Sistema Global	Situação 4	Erro (%)	Situação 5	Erro (%)	Situação 6	Erro (%)
1	30,184	80,577	166,9	30,215	0,103	30,201	0,06
2	83,173	-	-	83,959	0,94	83,464	0,35
3	162,98	-	-	171,05	4,95	164,96	1,21
4	269,28	-	-	320,37	18,97	275,98	2,5
5	402,01	-	-	-	-	422,6	5,12
6	561,01	-	-	-	-	617,4	10

Da comparação de resultados apresentada na tabela 4.4 constata-se que o erro relativo é tanto menor quanto maior for o número de graus de liberdade ativos.

Na tabela 4.5 apresenta-se o resultado da correlação modal utilizando o critério MAC.

Tabela 4.5 Correlação usando o critério MAC (Caso 2)

Modos	MAC		
	Global-Situação 4	Global-Situação 5	Global-Situação 6
1	0,8757756	0,999999	0,999999
2	-	0,999721	0,999919
3	-	0,990106	0,998732
4	-	0,875903	0,992562
5	-	-	0,987521
6	-	-	0,952268

Os resultados observados na tabela 4.5 vêm a confirmar o anteriormente observado na figura 4.9 e na tabela 4.4. Verifica-se que as situações, 5 e 6, apresentam melhores resultados para os dois primeiros modos enquanto para a situação 4, o resultado fica abaixo do esperado, não atingindo sequer os 90%.

Apesar de se conseguir demonstrar que o aumento de graus de liberdade ativos aumenta a precisão dos resultados obtidos, o número daqueles graus de liberdade na situação 6 é insuficiente para os primeiros modos, considerados os mais importantes na análise de vibrações. Por isso, se o objetivo for um erro de 0% nos primeiros modos, o número de graus de liberdade teria de ser aumentada para pelo menos o dobro da situação 6, ou seja, 24 graus de liberdade (ver Anexo III). Posto isto conclui-se que a utilização deste método só é aconselhável em situações onde se pretende obter um sistema reduzido com um número considerável de graus de liberdade ativos.

Caso 3

Nas figuras seguintes (Fig. 4.10-4.12), apresentam-se os resultados respeitantes ao aumento de massa nos graus de liberdade ativos no sistema considerando três situações seguintes: sem massa, adição de 50 e 200 gramas, respetivamente, preservando sempre os mesmos graus de liberdade no sistema reduzido. Os resultados obtidos estão ilustrados nos gráficos e tabelas que se seguem.

a) Situação 7, sem adição de massa nos graus de liberdade ativos

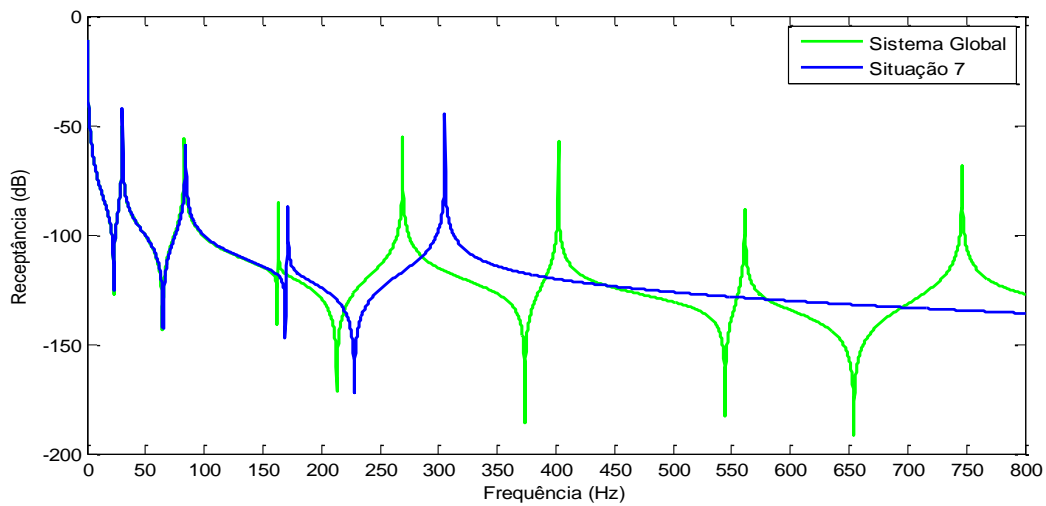


Figura 4.10 Comparação de FRFs sem adição de massa nas graus de liberdade ativos para o método de Guyan (Caso 3)

b) Situação 8, adição de massa 50 gramas nos graus de liberdade ativos

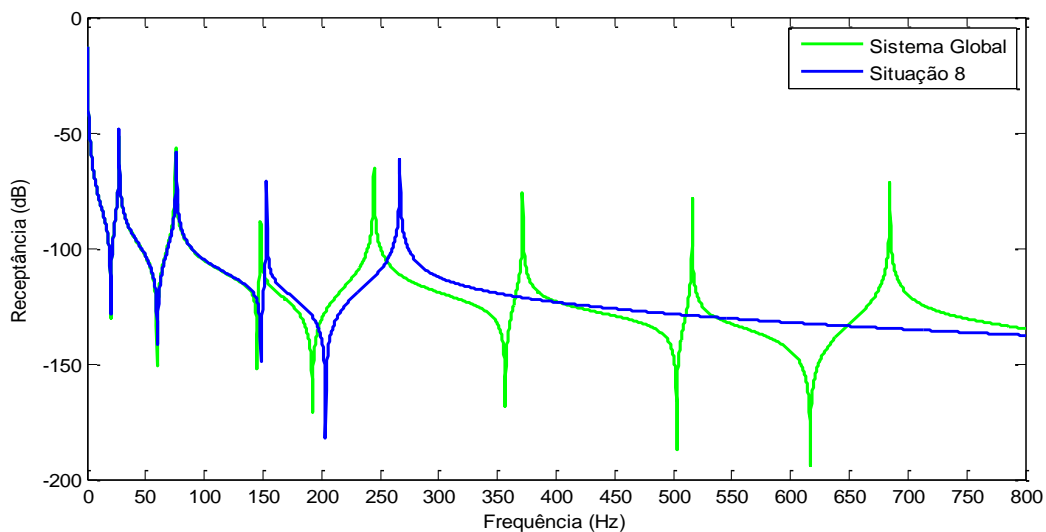


Figura 4.11 Comparação de FRFs com 50g nas graus de liberdade ativos para o método de Guyan (Caso 3)

c) Situação 9, adição de 200g nos graus de liberdade ativos

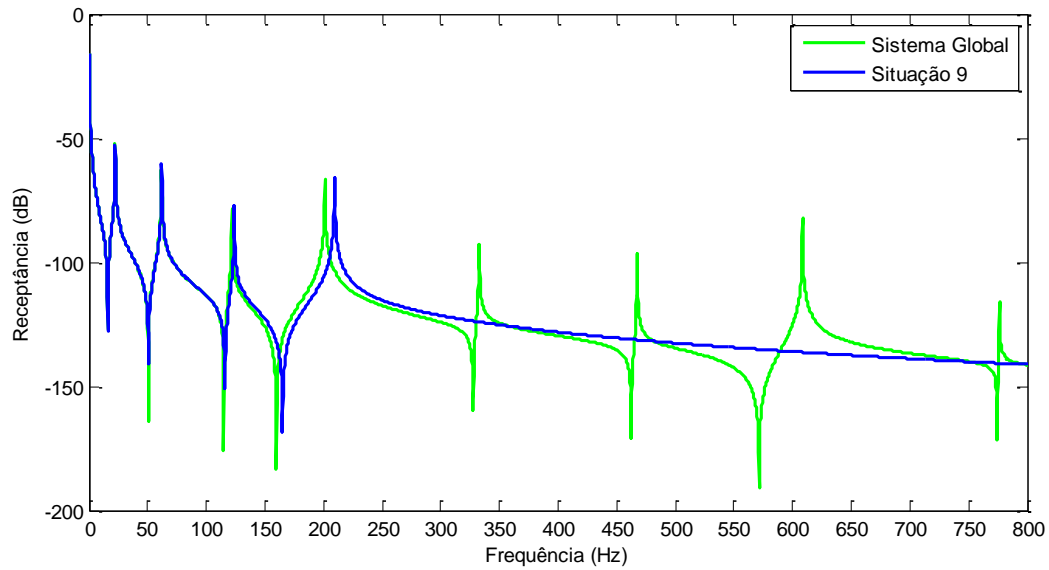


Figura 4.12 Comparação de FRFs com 200g nas graus de liberdade ativos para o método de Guyan (Caso 3)

Da análise gráfica às curvas das figuras (4.10- 4.12), verifica-se uma melhoria substancial à medida que se aumenta a massa nos graus de liberdade ativos no sistema reduzido. Esta melhoria torna-se cada vez mais significativa quanto maior for a massa nesses graus de liberdade. Contudo a melhoria verificada é mais significativa na terceira e quarta frequência natural.

Nas tabelas 4.6-4.8 apresentam-se os valores numéricos das frequências naturais observadas nos gráficos de onde também consta o correspondente erro relativo. Na mesma tabela é também apresentada a correlação modal utilizando o critério MAC. Chama-se especial atenção para a terceiro e quarto modos onde a diferença nos resultados é significativa.

Tabela 4.6 Resultados referentes à situação 7 pelo método de Guyan (Caso 3)

Modos	MAC	Frequências Naturais (Hz)		
		Sistema Global	Situação 7	Erro (%)
1	0,999999	30,184	30,224	0,13
2	0,999825	83,173	84,137	1,14
3	0,994023	162,98	171,31	5,04
4	0,915119	269,28	305,24	13,24

Tabela 4.7 Resultados referentes a situação 8 pelo método de Guyan (Caso 3)

Modos	MAC	Frequências Naturais (Hz)		
		Sistema Global	Situação 8	Erro (%)
1	1	27,422	27,447	0,087
2	0,999895	75,569	76,163	0,78
3	0,996040	148,11	153,23	3,41
4	0,942186	244,65	266,83	9

Tabela 4.8 Resultados referentes a situação 9 pelo método de Guyan (Caso 3)

Modos	MAC	Frequências Naturais (Hz)		
		Sistema Global	Situação 9	Erro (%)
1	1	22,327	22,366	0,04
2	0,999970	61,854	62,077	0,354
3	0,998744	121,84	123,84	1,62
4	0,984435	201,11	209,39	4,08

Da comparação de resultados apresentada nas tabelas (4.6-4.8), pode-se concluir que a retenção de graus de liberdade com maior massa tem um papel preponderante nos resultados obtidos quando se utiliza o método de Guyan. Nota-se uma diminuição do erro relativo, com especial realce na terceira e quarta frequência natural e conseqüentemente um aumento no valor do MAC.

Caso 4

Seguidamente apresentam-se duas situações em que se adicionam massa em graus de liberdade inativos e se preservam os mesmos graus de liberdade das três situações anteriores. Foram realizadas simulações numéricas permitindo concluir sobre os mesmos conforme mostram as figuras 4.13 e 4.14.

d) Situação 10, adição de 100 gramas nos graus de liberdade inativos

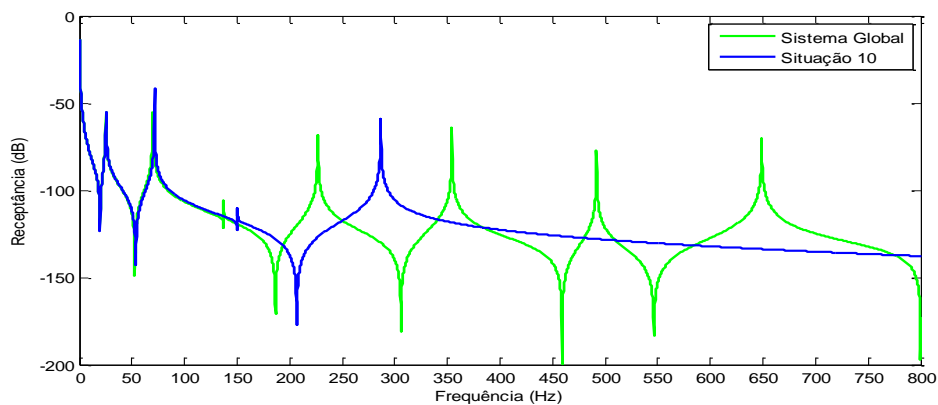


Figura 4.13 Comparação de FRFs com 100g nas graus de liberdade inativos para o método de Guyan (Caso 3)

e) Situação 11, adição de 200 gramas nos graus de liberdade inativos

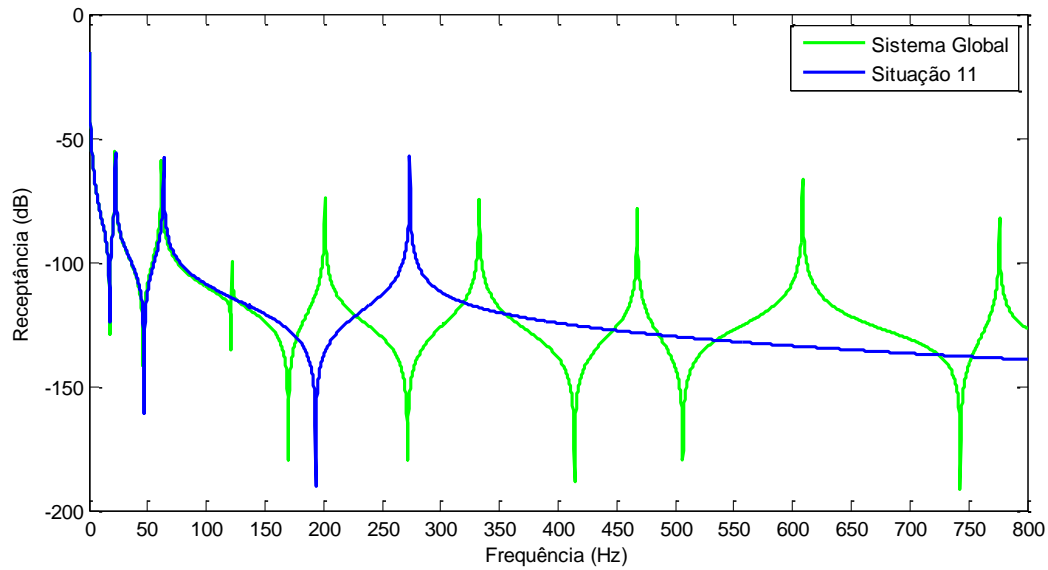


Figura 4.14 Comparação de FRFs com 200g nas graus de liberdade inativos para o método de Guyan (Caso 3)

Da observação das curvas das figuras 4.13 e 4.14 constata-se um grande desvio nas frequências naturais do sistema reduzido e do sistema global. O desvio é tanto maior quanto maior for a massa nos graus de liberdade inativos. Verifica-se ainda que na situação 10 existe um desvio significativo no terceiro e quarto modo. Já na situação 11 o cenário é ainda pior visto que só se consegue preservar apenas três modos ou seja, o método revela-se incapaz de preservar as características dinâmicas do sistema original.

Nas tabelas 4.9 e 4.10 apresentam-se os resultados numéricos permitindo quantificar e comparar as frequências naturais observadas nos gráficos das situações 10 e 11. Na mesma tabela é também apresentada a correlação modal utilizando o critério MAC.

Tabela 4.9 Resultados referentes à situação 10 pelo método de Guyan (Caso 3)

Modos	MAC	Frequências Naturais (Hz)		
		Sistema Global	Situação 10	Erro (%)
1	0,999990	25,337	25,41	0,28
2	0,998777	69,929	71,515	2,27
3	0,976371	137,28	150,11	9,3
4	0,804348	226,83	286,56	26,33

Tabela 4.10 Resultados referentes à situação 11 pelo método de Guyan (Caso 3)

Modos	MAC	Frequências Naturais (Hz)		
		Sistema Global	Situação 11	Erro (%)
1	0,999978	22,327	22,414	0,39
2	0,997847	61,854	63,662	2,92
3	0,966565	121,84	136,3	12,4
4	0,772090	201,11	273,54	36,01

Da comparação de resultados apresentados nas tabelas 4.9 e 4.10, conclui-se que eliminar graus de liberdade com massa elevada conduz à obtenção de resultados pouco credíveis uma vez que o método revela-se incapaz de preservar as características dinâmicas do sistema global quando aplicado nestas condições, com especial atenção para a situação 11 em que a massa adicionada aos graus de liberdade inativos é maior.

A análise global ao terceiro e quarto caso de estudo permite concluir que o uso do método de Guyan em situações onde a distribuição de massa não é uniforme deve-se preservar sempre os graus de liberdade que possuem maior massa, resultado também referido na bibliografia [43,44].

4.4.2 Método IRS

O método IRS, como foi referido anteriormente, é uma melhoria do método de Guyan uma vez que, ao contrário deste, contabiliza os efeitos de inércia na obtenção da matriz de transformação. Com este método obteve-se uma melhoria substancial nos resultados, ficando isto a dever-se à inclusão dos efeitos de inércia na sua matriz de transformação.

Caso 1

Na figura 4.15 verifica-se que em todas as situações simuladas numericamente, existe uma ligeira diferença nos resultados obtidos.

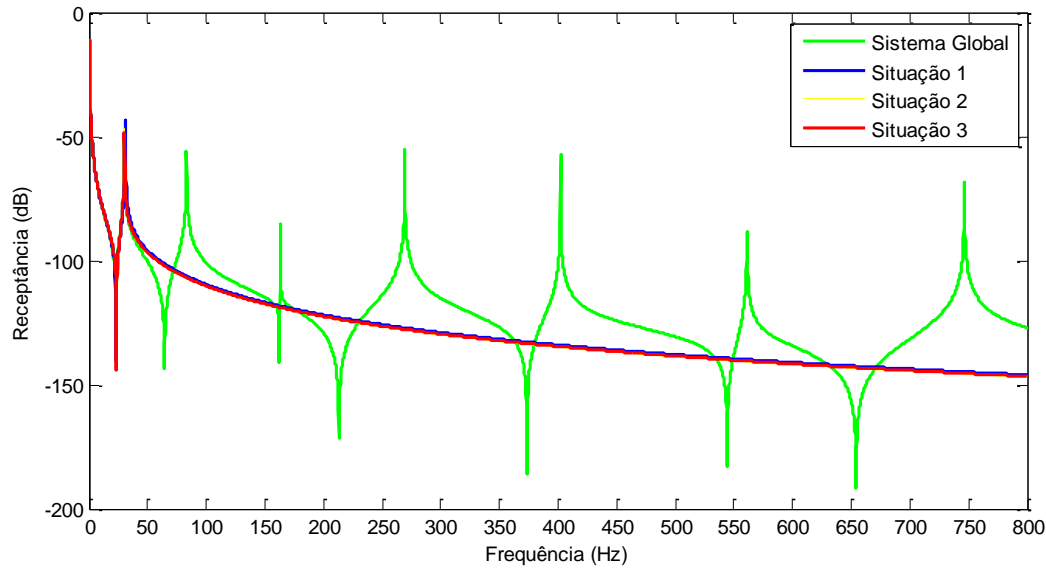


Figura 4.15 Comparação das curvas da FRF do sistema global com as resultantes do método de IRS para as várias situações (Caso 1)

Esta variação torna-se menos evidente quanto melhor estiverem localizados os graus de liberdade ativos. Parece assim que todas as situações simuladas numericamente geraram qualitativamente bons resultados fazendo crer que as variações não têm relevância quando comparadas com a curva do sistema global.

Na tabela 4.11 apresentam-se os valores numéricos das frequências naturais observadas na figura 4.15 permitindo assim quantificá-las e concluir sobre as diferenças das mesmas relativamente ao sistema global. Na mesma tabela é também apresentada a correlação modal utilizando o critério MAC.

Tabela 4.11 Comparação de resultados usando o método IRS (Caso 1)

Casos	MAC	Frequência (Hz)	Erro (%)
Situação 1	0,998049	30,965	2,6
Situação 2	0,999749	30,209	0,08
Situação 3	0,999895	30,195	0.036
Sistema Global	-	30,184	-

Da comparação de resultados apresentada na tabela 4.11 constata-se que a variação é inferior a 3% em todas as situações consideradas, sendo a situação 3 aquela que apresenta menor erro e conseqüentemente melhor grau de correlação por ser a situação onde os graus de liberdade preservados se encontram melhor localizados na estrutura.

Embora apresente melhorias substanciais relativamente ao método de Guyan, considera-se que o método IRS é inadequado quando o número de graus de liberdade preservados for reduzido devido ao facto de

este não garantir a precisão nos resultados obtidos em todas as situações consideradas, quando comparados com os resultados do sistema global.

Conclusão, o método IRS também depende da localização de graus de liberdade a preservar no sistema reduzido apesar da melhoria verificada quando comparada com o método de Guyan.

Caso 2

Da observação da figura 4.16 constata-se um ligeiro desvio nas curvas de cada uma das situações consideradas quando comparadas com a curva do sistema completo. No entanto, esta diferença torna-se menos significativa quanto maior for o número de graus de liberdade ativos no sistema reduzido.

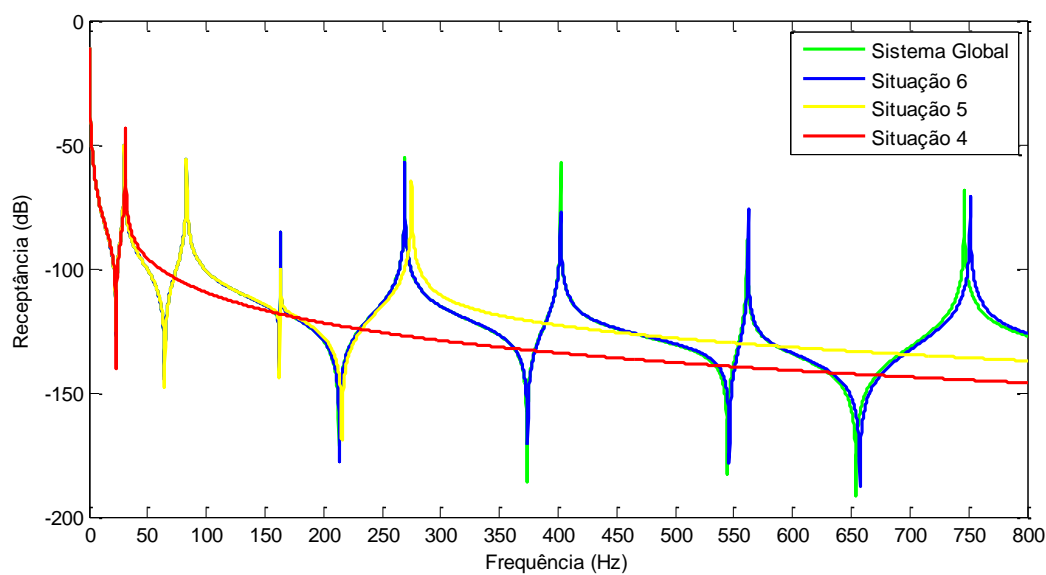


Figura 4.16 Comparação de FRFs do sistema global com as resultantes do método IRS para as várias situações (Caso 2).

A análise às curvas da figura 4.16 permite concluir que em todas as situações simuladas numericamente, os resultados obtidos com o presente método aparentam ser muito próximos dos resultados obtidos com o sistema global embora sejam, ainda assim, dependentes da seleção do número de graus de liberdade ativos.

De modo a se poder quantificar os valores das frequências naturais observados na figura 4.16 em cada uma das situações, apresenta-se na tabela 4.12, os valores numéricos das frequências naturais bem como o erro relativo associado.

Tabela 4.12 Comparação de resultados entre o sistema global e o métodos IRS (Caso 2)

Modos	Frequências Naturais (Hz)						
	Sistema Global	Situação 4	Erro (%)	Situação 5	Erro (%)	Situação 6	Erro (%)
1	30,184	30,965	2,59	30,184	0	30,184	0
2	83,173	-	-	83,174	0	83,173	0
3	162,98	-	-	163,14	0,1	162,98	0
4	269,28	-	-	275,11	1,97	269,29	0
5	402,01	-	-	-	-	402,13	0,03
6	561,1	-	-	-	-	562,02	0,16
7	746,45	-	-	-	-	751,43	0,66

Atendendo aos resultados apresentados na tabela 4.12, conclui-se que a situação 4 é a única em que o erro relativo associado tem maior relevância enquanto para a situação 5, o sistema preserva os dois primeiros modos verificando-se um erro maior apenas no quarto modo. Já na situação 6 em que o número de graus de liberdade preservado é maior, o método revela maior precisão e é exato para os primeiros modos considerados os mais importantes na análise de vibrações, registando-se um erro relativo, não nulo, só a partir do quinto modo. Posto isto, pode-se dizer que o método é aconselhável apenas para as situações em que se pretende preservar um número considerável de graus de liberdade. Este facto pode ainda ser confirmado através da tabela 4.13 onde estão indicados os valores das correlações entre os modos dos sistemas, reduzidos e global, para cada uma das situações estudadas.

Tabela 4.13 Resultados usando o critério MAC para o método IRS (caso 2)

Modos	MAC		
	Global-Situação 4	Global-Situação 5	Global-Situação 6
1	0,998049	1	1
2	-	1	1
3	-	0,999815	1
4	-	0,971144	0,999998
5	-	-	0,999969
6	-	-	0,999476
7	-	-	0,995914

Observa-se da tabela 4.13 que os modos estão muito bem correlacionados chegando mesmo à unidade nas situações 5 e 6. De acordo com os resultados da situação 6 pode-se confirmar o referido anteriormente em que se aconselha a utilização deste método apenas em situações onde se pretende preservar um número considerável de graus de liberdade.

Caso 3

Nas figuras seguintes (Fig. 4.17-4.19), apresentam-se os resultados respeitantes ao aumento de massa nos graus de liberdade ativos no sistema considerando três situações seguintes: sem massa, adição de 50 e 200 gramas respetivamente preservando sempre os mesmos graus de liberdade no sistema reduzido. Os resultados obtidos estão ilustrados nos gráficos e tabelas que se seguem.

a) Situação 7, sem adição de massa nos graus de liberdade ativos

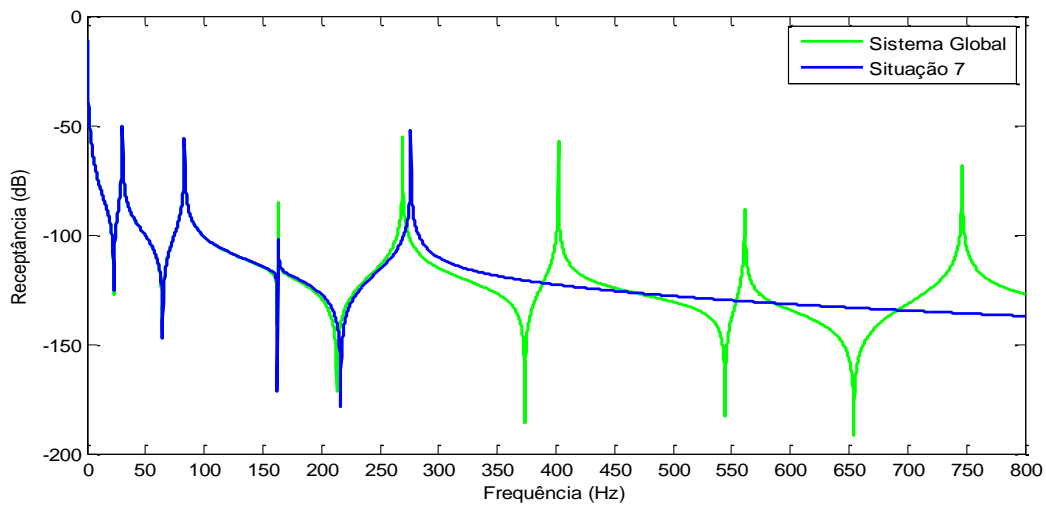


Figura 4.17 Comparação de FRFs sem adição de massa nas graus de liberdade ativos para o método de IRS (Caso 3)

b) Situação 8, adição 50 gramas graus de liberdade ativos

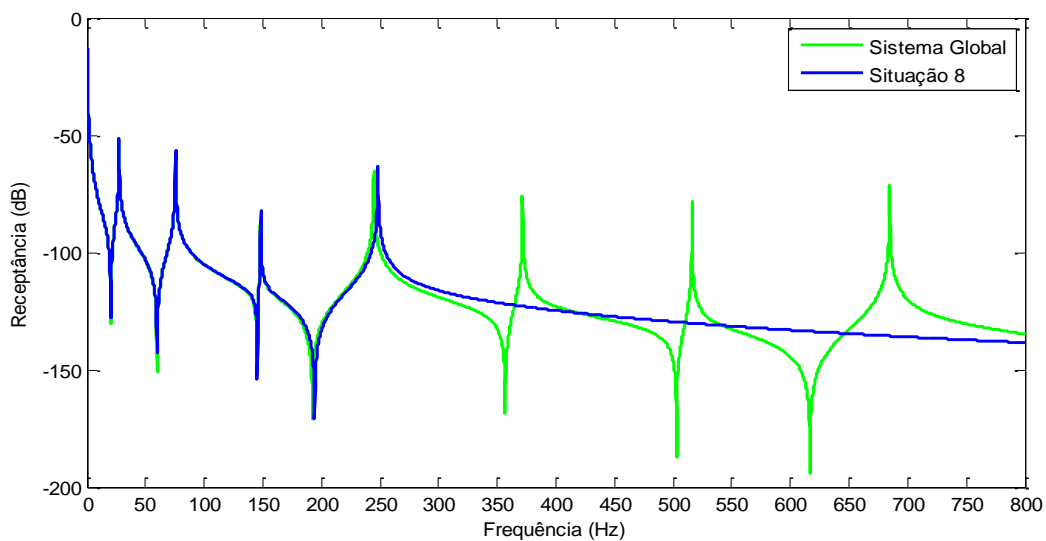


Figura 4.18 Comparação de FRFs com 50g nas graus de liberdade ativos para o método de IRS (Caso 3)

c) Situação 9, adição de 200 gramas nos graus de liberdade ativos

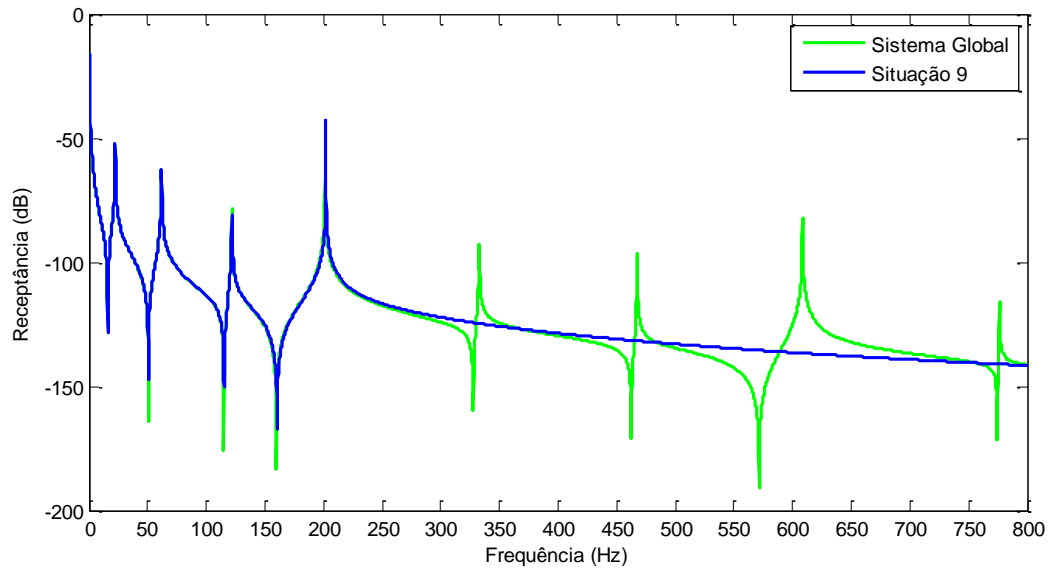


Figura 4.19 Comparação de FRFs com 200g nas graus de liberdade ativos para o método de IRS (Caso 3)

Da análise gráfica às curvas das figuras (4.17-4.19), verifica-se uma melhoria à medida que se aumenta a massa nos graus de liberdade ativos. Esta melhoria torna-se cada vez mais significativa quanto maior for a massa nesses graus de liberdade. Contudo a melhoria verificada é mais significativa no quarto modo em comparação com os restantes.

É possível ainda quantificar esses valores numéricos observados nos gráficos através das tabelas (4.14-4.16). Na mesma tabela é também apresentada a correlação modal utilizando o critério MAC.

Tabela 4.14 Comparação de resultados referentes a situação 7 do método IRS (Caso 3)

Modos	MAC	Frequências Naturais (Hz)		
		Sistema Global	Situação 7	Erro (%)
1	1	30,184	30,184	0
2	1	83,173	83,174	0
3	0,999872	162,98	163,11	0,08
4	0,985299	269,28	276,28	2,6

Tabela 4.15 Resultados numéricos referentes a situação 8 do método IRS

Modos	MAC	Frequências Naturais (Hz)		
		Sistema Global	Situação 8	Erro (%)
1	1	27,422	27,422	0
2	1	75,569	75,569	0
3	0,999927	148,11	148,19	0,05
4	0,991850	244,65	248,16	1,43

Tabela 4.16 Resultados numéricos referentes a situação 9 do método IRS

Modos	MAC	Frequências Naturais (Hz)		
		Sistema Global	Situação 9	Erro (%)
1	1	22,327	22,327	0
2	1	61,854	61,854	0
3	0,999984	121,84	121,87	0,025
4	0,998449	201,11	201,99	0,44

A partir das tabelas 4.14, 4.15 e 4.16 verifica-se que à medida que as massas vão sendo aumentadas os erros na aproximação tornam-se menores, sobre tudo no quarto modo onde se verifica a maior diferença da situação 7 (sem massa) para a situação 9 (aumento de 200g em graus de liberdade ativos).

Caso 4

Seguidamente apresentam-se duas situações em que se adicionam massa nos graus de liberdade inativos e se mantêm os mesmos graus de liberdade ativos das três situações anteriores. Foram realizadas simulações numéricas permitindo concluir sobre os mesmos conforme mostram as figuras 4.20 e 4.21.

d) Situação 10, adição de 100 gramas nos graus de liberdade inativos

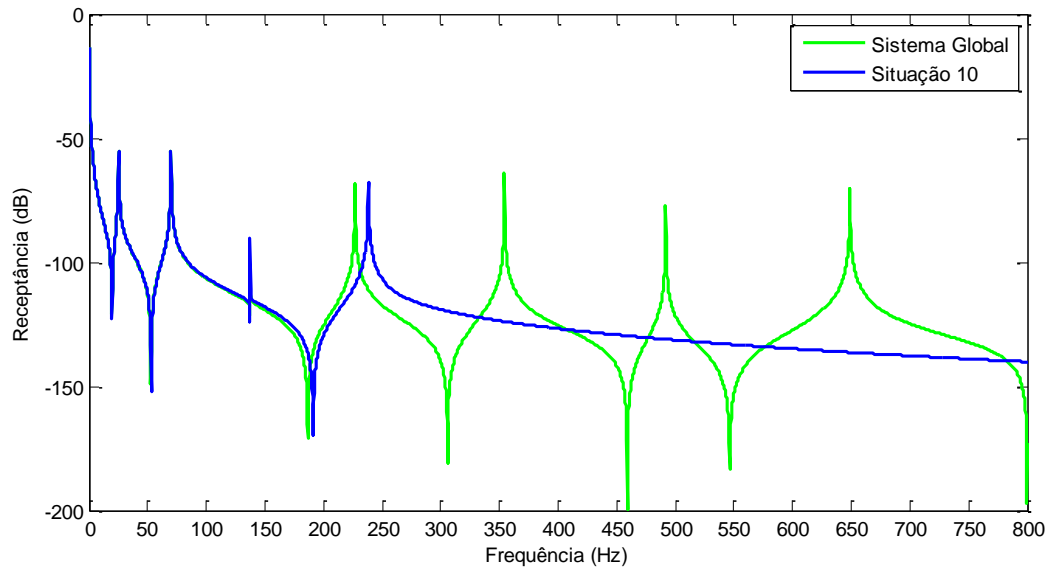


Figura 4.20 Comparação de FRFs com 100g nos graus de liberdade inativos para o método de IRS (Caso 3)

e) Situação 11, adição de 200 gramas nos graus de liberdade inativos

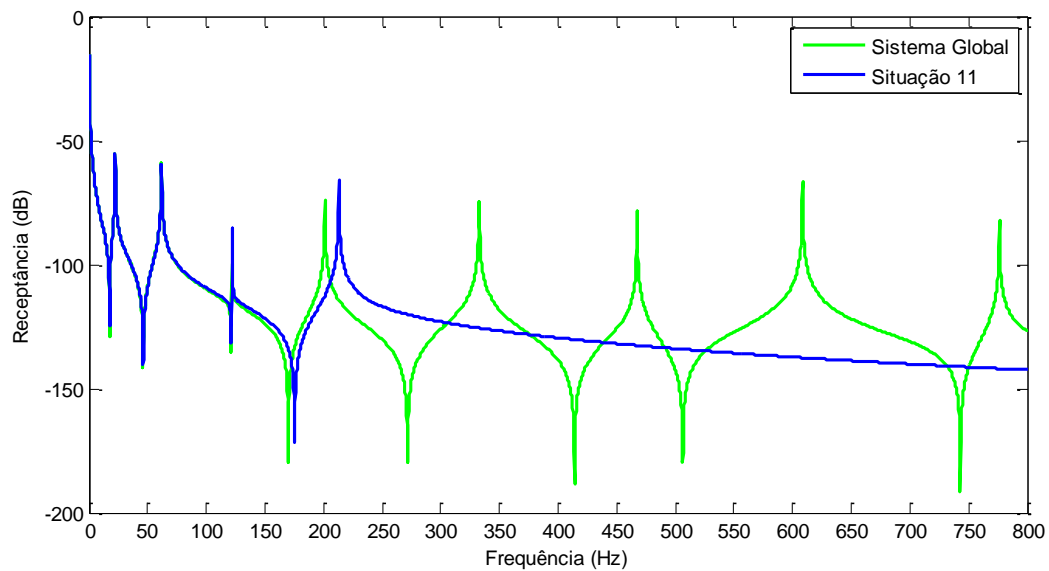


Figura 4.21 Comparação de FRFs com 200g nos graus de liberdade inativos para o método de IRS (Caso 3)

Da análise às curvas das figuras 4.20 e 4.21 constata-se que existe um desvio no quarto modo, nas situações 10 e 11. Este desvio torna-se mais significativo quanto maior for o valor da massa nos graus

de liberdade inativos. No entanto a diferença constatada é muito inferior se comparado com as situações 10 e 11 do terceiro caso de estudo utilizando o método de Guyan (Secção 4.2.2).

Nas tabelas 4.17 e 4.18 apresentam-se os resultados das frequências naturais observadas nas situações 10 e 11, respetivamente. Na mesma tabela é também apresentada a correlação modal utilizando o critério MAC.

Tabela 4.17 Resultados numéricos referentes à situação 10 do método IRS

Modos	MAC	Frequências Naturais (Hz)		
		Sistema Global	Situação 10	Erro (%)
1	1	25,337	25,337	0
2	0,999998	69,929	69,932	0
3	0,999516	137,28	137,49	0,15
4	0,957571	226,83	238,37	5

Tabela 4.18 Resultados numéricos referentes à situação 11 do método IRS

Modos	MAC	Frequências Naturais (Hz)		
		Sistema Global	Situação 11	Erro (%)
1	1	22,327	22,327	0
2	0,999997	61,854	61,856	0,03
3	0,999458	121,84	122,02	0,15
4	0,950666	201,11	213,07	5,9

Da comparação de resultados apresentada nas tabelas 4.17 e 4.18 confirma-se o que já tinha sido observado nos gráficos. Os resultados tendem a piorar quanto maior for o valor da massa adicionada nos graus de liberdade inativos, sendo esta variação notória no quarto modo.

A análise conjunta dos resultados obtidos nos casos 3 e 4, respetivamente, permite concluir que em situações onde a distribuição de massas ao longo da estrutura não é uniforme deve-se preservar sempre graus de liberdade com maior massa, resultado também referido na bibliografia [43,44].

4.4.3 SEREP

O método SEREP faz uma abordagem diferente de todos os outros métodos de redução aqui abordados. Conforme mostram os resultados obtidos, este método revela-se exato independentemente das condições em que sejam realizadas as reduções. Como prova disso mesmo, são os resultados obtidos nos vários casos de estudo abordados nesta secção.

Caso 1

Da observação da figura 4.22 constata-se que não existe qualquer desvio das curvas de cada uma das situações apresentadas quando comparadas com a curva do sistema global.

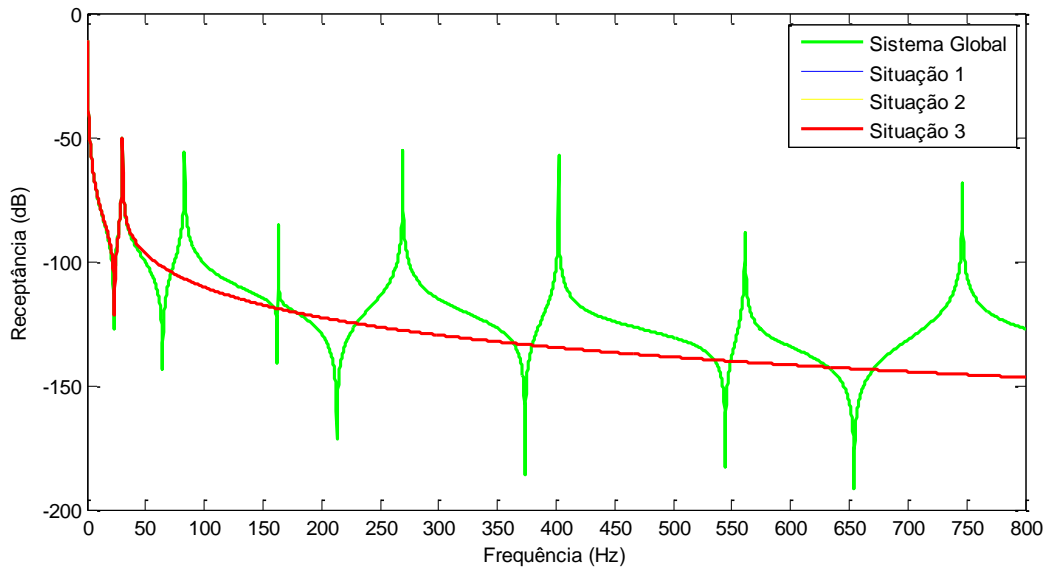


Figura 4.22 Comparação das curvas das FRF do sistema global com as resultantes do método de SEREP para as várias situações (Caso 1).

Verifica-se através das curvas da figura 4.22 que para qualquer uma das três situações simuladas numericamente o resultado é sempre o mesmo ou seja, independentemente da localização dos graus de liberdade ativos, o sistema reduzido reproduz as propriedades dinâmicas do sistema original.

Na tabela 4.19 apresentam-se os valores numéricos das frequências naturais observadas no gráfico para todas as situações consideradas e o erro relativo associado. Na mesma tabela é também apresentada a correlação modal utilizando o critério MAC.

Tabela 4.19 Comparação de resultados do sistema global com os obtidos usando o método SEREP (caso 1)

Casos	MAC	Frequência (Hz)	Erro (%)
Situação 1	1	30,184	0
Situação 2	1	30,184	0
Situação 3	1	30,184	0
Sistema Global	-	30,184	-

Observa-se na tabela 4.19 que o método SEREP reproduz as frequências naturais do sistema completo independentemente dos graus de liberdade selecionados como ativos, o que permite concluir que o método é exato para qualquer que sejam os graus de liberdade selecionados. Como prova disso mesmo

é o indicador de correlação que mostra que de facto, os modos estão bem correlacionadas, indicando em todas as situações o valor 1. Conclusão, o método SEREP é preciso, independentemente da localização de graus de liberdade ativos na estrutura.

Caso 2

Na figura 4.23, verifica-se que em qualquer uma das situações simuladas numericamente os resultados são exatos quando comparados com a curva do sistema global.

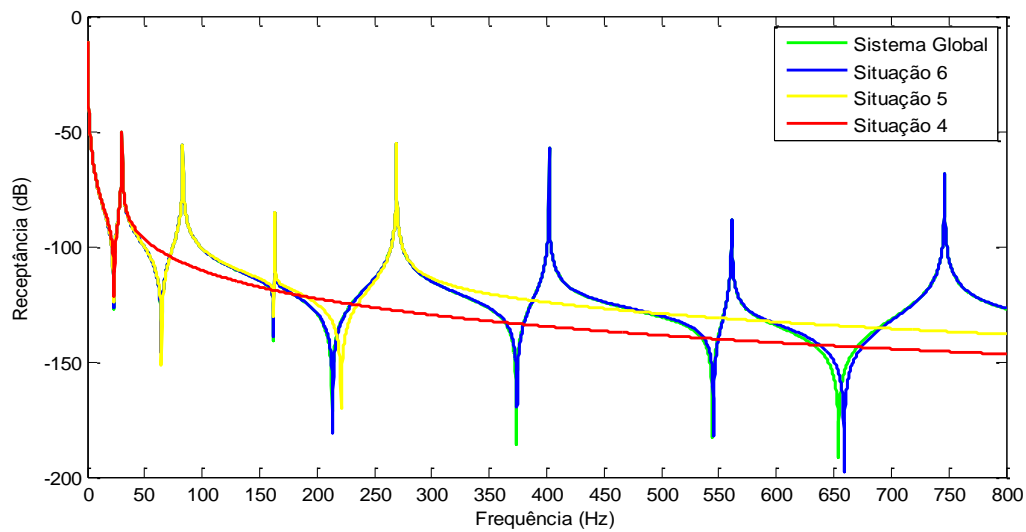


Figura 4.23 FRFs para diferentes situações usando o método SEREP (Caso 2)

A análise às curvas do gráfico da figura 4.23 permite concluir que as frequências naturais do sistema reduzido são exatamente iguais às do sistema global, independentemente do número de graus de liberdade considerados ativos no sistema reduzido. Na tabela 4.20 estão quantificados os valores da frequências naturais observadas na figura 4.23 e o erro relativo resultante da comparação entre os mesmos.

Tabela 4.20 Comparação resultados obtidos com o método SEREP (Caso 2).

Modos	Frequências Naturais (Hz)						
	Sistema Global	Situação 4	Erro (%)	Situação 5	Erro (%)	Situação 6	Erro (%)
1	30,184	30,184	0	30,184	0	30,184	0
2	83,173	-	-	83,173	0	83,173	0
3	162,98	-	-	162,98	0	162,98	0
4	269,28	-	-	269,28	0	269,28	0
5	402,01	-	-	-	-	402,01	0
6	561,1	-	-	-	-	561,1	0
7	746,45	-	-	-	-	746,45	0

Da comparação de resultados apresentada na tabela 4.20, constata-se que independentemente das situações simuladas numericamente o método revelou-se exato. Quer isto dizer que, o método SEREP é exato independentemente do número de graus de liberdade ativos no sistema reduzido. No entanto, pode-se constatar um ligeiro desvio nas anti-ressonâncias para as frequências naturais elevadas, ou seja, as anti-ressonâncias não são de todo preservadas.

Seguidamente são apresentados os resultados da correlação obtida com o critério MAC que confirmam o que foi referido anteriormente.

Tabela 4.21 Correlação entre modos usando o critério MAC (Caso 2)

Modos	MAC		
	Global-Situação 4	Global-Situação 5	Global-Situação 6
1	1	1	1
2	-	1	1
3	-	1	1
4	-	1	1
5	-	-	1
6	-	-	1
7	-	-	1

Em termos de correlação, observa-se através da tabela 4.21 que em todas as situações consideradas, os modos apresentam uma correlação perfeita (valor 1), independentemente do número de graus de liberdade selecionados.

A análise conjunta aos resultados obtidos neste caso de estudo permite concluir que o método SEREP é preciso, independentemente do número de graus de liberdade ativos.

Caso 3

Nas figuras seguintes (Fig. 4.24-4.26), apresentam-se os resultados respeitantes ao aumento de massa nos graus de liberdade ativos no sistema reduzido considerando três situações seguintes: sem massa, adição de 50 e 200 gramas respetivamente preservando sempre os mesmos graus de liberdade no sistema reduzido. Os resultados obtidos estão ilustrados nos gráficos e tabelas que se seguem.

a) Situação 7, sem adição de massa nos graus de liberdade ativos

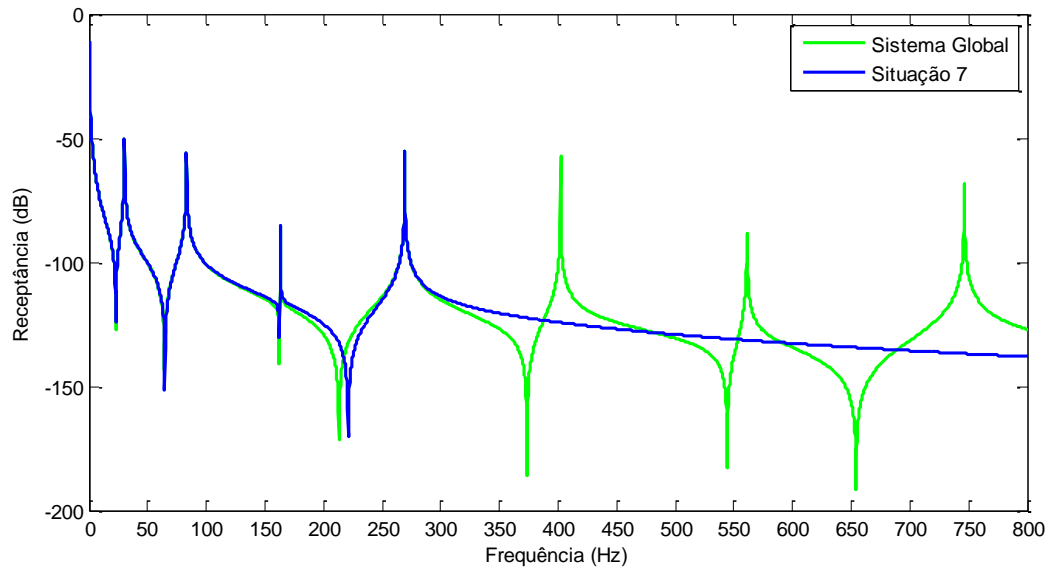


Figura 4.24 Comparação de FRFs sem massa nas graus de liberdade ativos para o método SEREP

b) Situação 8, adição 50 gramas nos graus de liberdade ativos

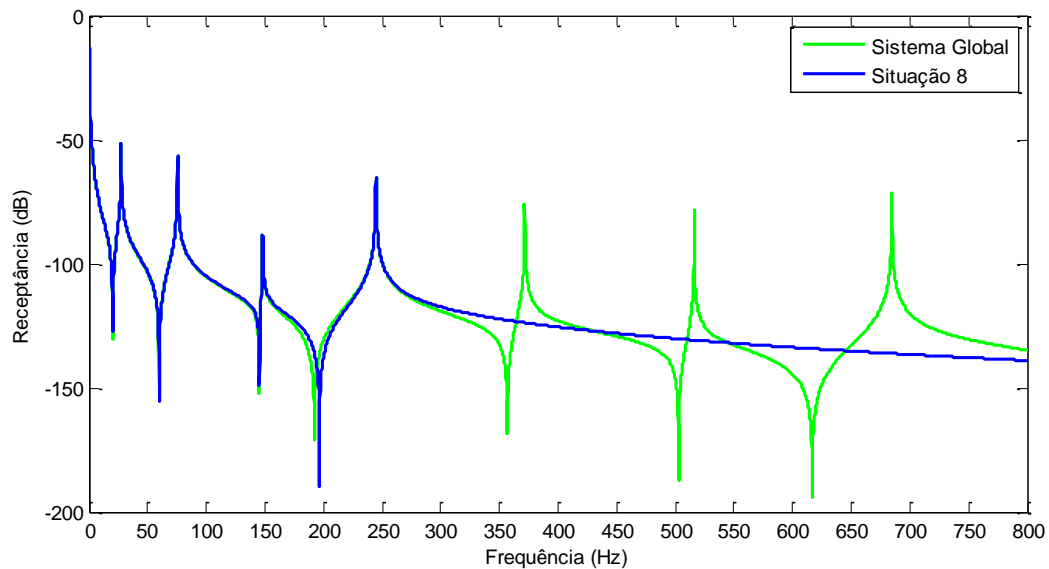


Figura 4.25 Comparação de FRFs com 100g nas graus de liberdade ativos para o método SEREP

c) Situação 9, adição de 200 gramas nos graus de liberdade ativos

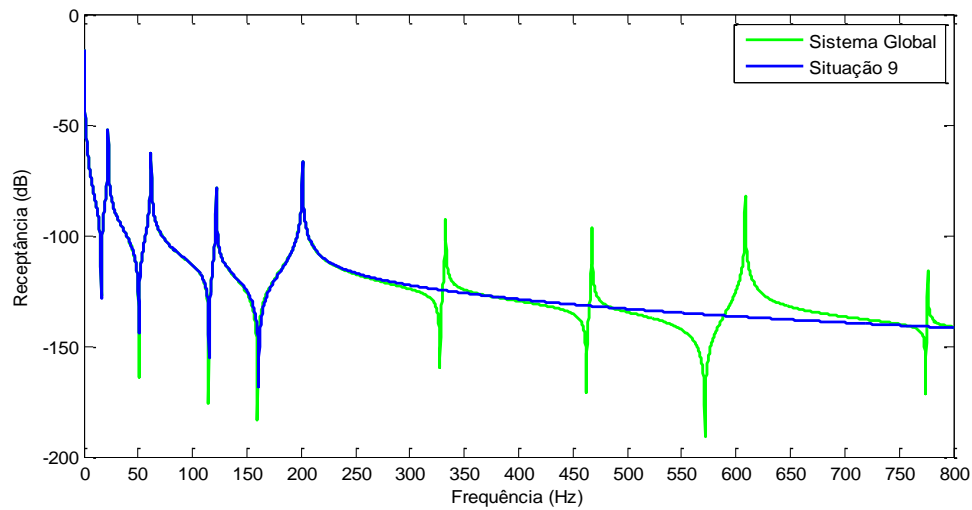


Figura 4.26 Comparação de FRFs com 200g nas graus de liberdade ativos para o método SEREP

Através das figuras (4.24-4.26) pode-se verificar que os resultados se mantêm inalterados em todas as situações consideradas. De notar apenas uma ligeira melhoria nas anti-ressonâncias entre o terceiro e o quarto modo, em que este se sobrepõe na totalidade a curva do sistema global na situação 9 onde a massa adicionada aos graus de liberdade ativos é maior. Importa também referir que esta situação não altera o valor das frequências naturais nas restantes situações como se pode constatar nas tabelas subsequentes.

Tabela 4.22 Resultados numéricos referentes à situação 7

Modos	MAC	Frequências Naturais (Hz)		
		Sistema Global	Situação 7	Erro (%)
1	1	30,184	30,184	0
2	1	83,173	83,173	0
3	1	162,98	162,98	0
4	1	269,28	269,28	0

Tabela 4.23 Resultados numéricos referentes à situação 8

Modos	MAC	Frequências Naturais (Hz)		
		Sistema Global	Situação 8	Erro (%)
1	1	27,422	27,422	0
2	1	75,569	75,569	0
3	1	148,11	148,11	0
4	1	244,65	244,65	0

Tabela 4.24 Resultados numéricos referentes à situação 9

Modos	MAC	Frequências Naturais (Hz)		
		Sistema Global	Situação 9	Erro (%)
1	1	22,327	22,327	0
2	1	61,854	61,854	0
3	1	121,84	121,84	0
4	1	201,11	201,11	0

Observa-se a partir das tabelas (4.22-4.24) que nas três situações simuladas numericamente o aumento de massa não influencia os resultados obtidos. Os resultados obtidos com o sistema reduzido são exatamente os mesmos do sistema global. Relativamente a correlação, estes indicam o valor 1 o que significa correspondência total em todos os modos dos sistemas reduzidos com os do sistema global.

Caso 4

Seguidamente apresentam-se duas situações em que se adicionam massa em alguns graus de liberdade inativos e preservam-se os mesmos graus de liberdade das três situações anteriores do terceiro caso de estudo. Foram realizadas simulações numéricas permitindo concluir sobre os mesmos conforme mostram as figuras 4.27 e 4.28.

d) Situação 10, adição de 100 gramas nos graus de liberdade inativos

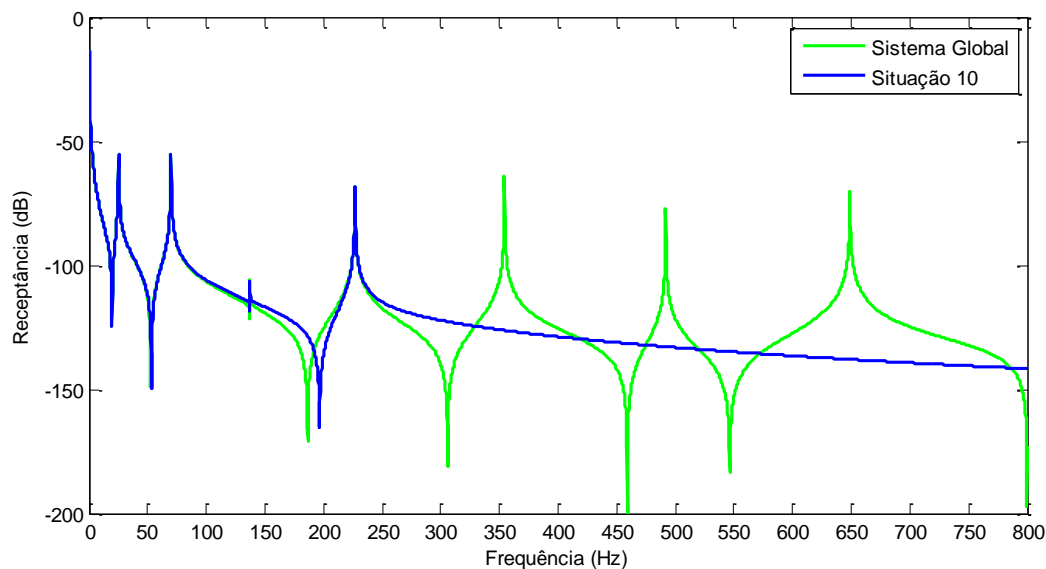


Figura 4.27 Comparação de FRFs com 100g nas graus de liberdade inativos para o método de SEREP (Caso 3)

e) Situação 11, adição de 200 gramas nos graus de liberdade inativos

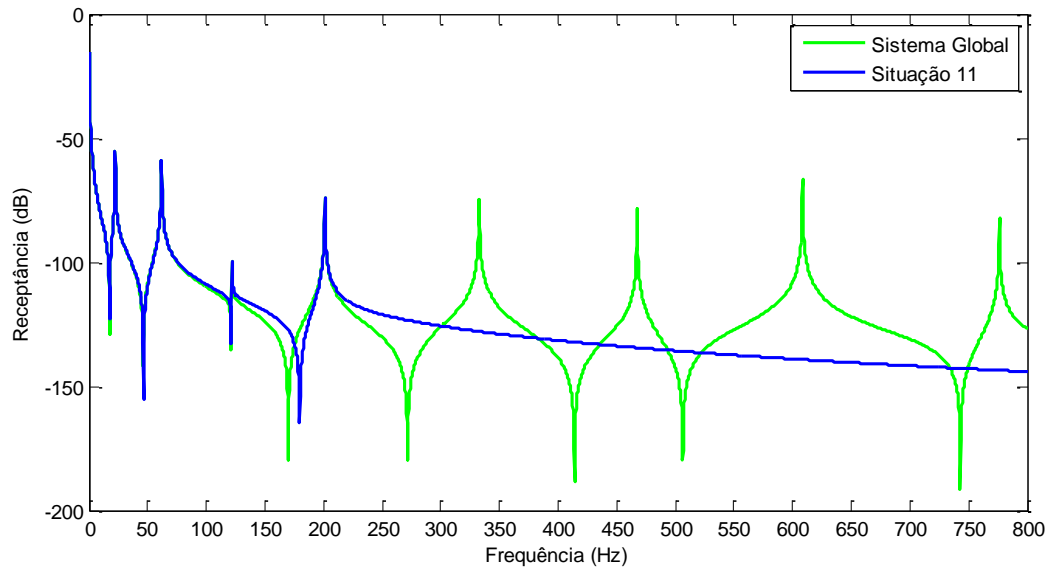


Figura 4.28 Comparação de FRFs com 200g nas graus de liberdade inativos para o método de SEREP (Caso 3)

De acordo com as curvas observadas nas figuras 4.27 e 4.28, constata-se uma certa instabilidade nas anti-ressonâncias, com estas a desviarem consideravelmente das anti-ressonâncias do modelo completo em ambas as figuras. Porém, não se verifica qualquer desvio nas ressonâncias, mantendo-se estas inalteradas. Nota-se ainda que a sobreposição destes com a ressonância do sistema global é perfeita.

Nas tabelas 4.25 e 4.26 apresentam-se os resultados observados nos gráficos que confirmam o que foi afirmado anteriormente.

Tabela 4.25 Resultados numéricos referentes à situação 10

Modos	MAC	Frequências Naturais (Hz)		
		Sistema Global	Situação 10	Erro (%)
1	1	25,337	25,337	0
2	1	69,929	69,929	0
3	1	137,28	137,28	0
4	1	226,83	226,83	0

Tabela 4.26 Resultados numéricos referentes à situação 11

Modos	MAC	Frequências Naturais (Hz)		
		Sistema Global	Situação 11	Erro (%)
1	1	22,327	22,327	0
2	1	61,854	61,854	0
3	1	121,84	121,84	0
4	1	201,11	201,11	0

Da comparação de resultados apresentados nas tabelas 4.25 e 4.26 confirma-se o referido anteriormente. Observa-se que em ambas as situações os resultados são exatamente os mesmos do sistema global e em simultâneo que os modos estão muito bem correlacionados indicando valor máximo, 1.

A análise conjunta ao caso 4 desta secção permite concluir que apesar da instabilidade na resposta verificada nas situações 10 e 11, o método é exato, ou seja, preserva as características dinâmicas do sistema original.

Conclusão, os resultados obtidos dão confiança para utilizar o método em várias aplicações práticas a que se destinam.

4.4.4 IRS (Processo Iterativo)

O presente método é uma melhoria do método IRS clássico (Secção 2.4.3) em que a sua matriz de transformação é obtida através de um processo iterativo. Os resultados obtidos com este método indicam que o método é exato quando comparado com os resultados do sistema global. Porém, este é um método iterativo, e por este motivo, apresenta várias condicionantes consideradas determinantes para a sua convergência. Estas condicionantes serão identificadas e estudadas em cada um dos casos de estudo apresentados nesta secção. Além do referido, tem-se também por objetivo confirmar o que foi referido por Friswell *et. al.* [21], relativamente à convergência do método, em que, segundo os autores após convergência, a matriz de transformação é a mesma da matriz do método de redução SEREP (Secção 4.2.3).

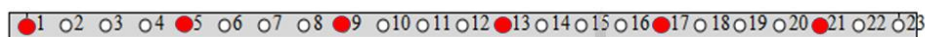
Caso 1

Depois de inúmeras tentativas, no sentido de verificar se o método convergia, utilizando o critério de convergência proposto por Friswell *et. al.*[21], reduzindo o sistema a três graus de liberdade, constatou-se que o método é sensível a um número muito reduzido de graus de liberdade. Foram simuladas numericamente várias situações em que o número de graus de liberdades preservadas foram 3, 4, 5 e 6, respetivamente. A convergência só foi alcançada com um mínimo de 6 graus de liberdade mantidas como ativos no sistema reduzido enquanto para número de graus de liberdade ativos inferiores a 6, os

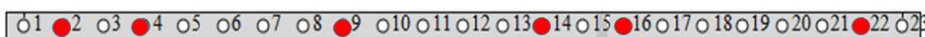
resultados foram inconclusivos. Portanto, para simular numericamente o problema em casos onde o número de graus de liberdade era inferior a 6, foi necessário impor uma condição de convergência de modo a se proceder a simulação numérica reduzindo o sistema para apenas 3, 4 e 5 graus de liberdade. Considerou-se que as simulações numéricas atingiam a convergência quando o número de iterações fosse igual a 100 milhões, correspondentes a 125 horas de tempo de cálculo. Com este procedimento foram obtidos resultados exatos quando comparados com os resultados do sistema completo (Anexo IV). No entanto, não permite concluir sobre o primeiro caso de estudo dado que quando se preservam 3, 4 ou 5 graus de liberdade os resultados foram sempre os mesmos em termos de tempo de convergência.

Com o objetivo de estudar a influência que a localização de graus de liberdade ativos têm nos resultados obtidos, efetuou-se a redução para 6 graus de liberdade ativos. Considerou-se as seguintes situações:

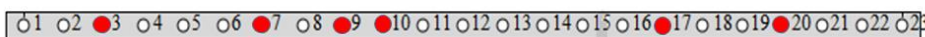
- a) Situação 1, os pontos 1, 5, 9, 13, 17 e 21 em que os 3 primeiros pontos encontram-se localizados no extremo esquerdo da viga e os restantes no extremo direito, igualmente espaçados;
- b) Situação 2, os pontos 2, 4, 9, 14, 16 e 22 em que os 3 primeiros pontos encontram-se localizados no extremo esquerdo da viga e os restantes no extremo direito com espaçamentos diferentes entre si;
- c) Situação 3, os pontos 3, 7, 9, 10, 17 e 20 em que os 4 primeiros pontos encontram-se localizados no extremo esquerdo da viga e os restantes no extremo direito.



a)



b)



c)

Figura 4.29 Pontos preservados como ativo: a) Situação 1; b) Situação 2; c) Situação 3.

Os resultados obtidos estão apresentados na figura 4.30 e na tabela 4.27 permitindo concluir sobre os mesmos.

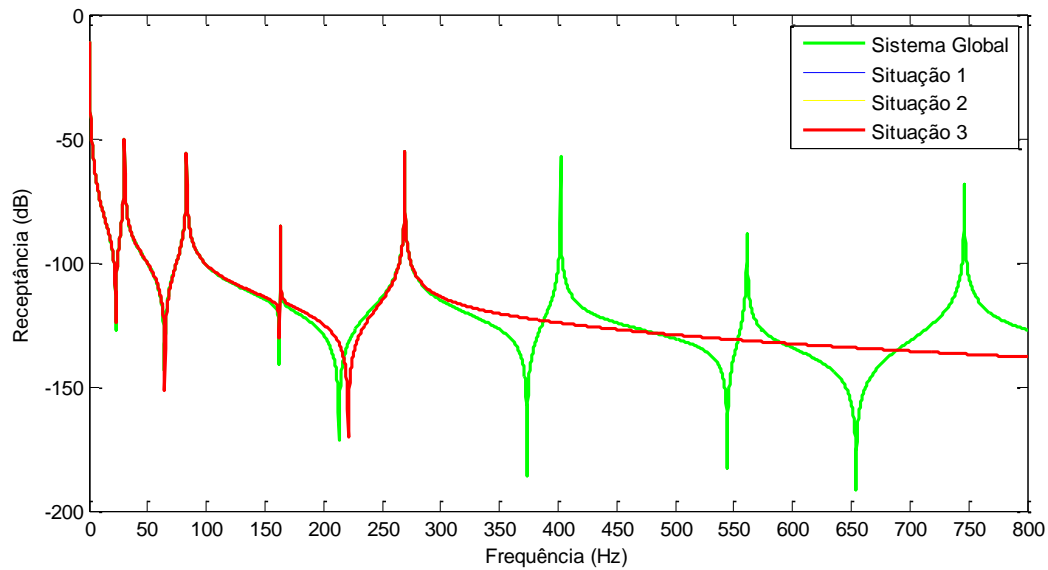


Figura 4.30 Comparação das curvas da FRF do sistema global com as resultantes do método IRS iterativo para as várias situações. (Caso 1).

Da comparação de curvas apresentada na figura 4.30 constata-se que o método é exato em todas as situações simuladas numericamente apesar da instabilidade observada na anti-ressonância situada entre a terceira e a quarta frequência natural, significando isto que a localização de graus de liberdade a preservar no sistema é irrelevante uma vez que será sempre garantida a precisão nos resultados obtidos.

Na tabela 4.27 apresentam-se os resultados numéricos observados na figura 4.30, permitindo assim quantificar e estimar o erro relativo associado.

Tabela 4.27 Comparação de resultados entre, o sistema completo e o reduzido (IRS iterativo)

Modos	Frequências Naturais (Hz)						
	Sistema Global	Situação 1	Erro (%)	Situação 2	Erro (%)	Situação 3	Erro (%)
1	30,184	30,184	0	30,184	0	30,184	0
2	83,173	83,184	0	83,173	0	83,173	0
3	162,98	162,98	0	162,98	0	162,98	0
4	269,28	269,28	0	269,28	0	269,28	0

Da comparação de resultados apresentada na tabela 4.27 observa-se que os resultados do sistema reduzido, em todas as situações simuladas numericamente, são iguais aos resultados do sistema completo apresentando um erro nulo.

Na tabela 4.28 é apresentada a correlação modal utilizando o critério MAC.

Tabela 4.28 Correlação entre modos do sistema global e reduzido para cada uma das situações usando o critério MAC

Modos	MAC		
	Global-Situação 1	Global-Situação 2	Global-Situação 3
1	1	1	1
2	1	1	1
3	1	1	1
4	1	1	1

Observa-se na tabela 4.28 que os modos estão bem correlacionados indicando valor 1 em todos os casos comparados ou seja, há correspondência total entre os modos do sistemas global com os do sistema reduzido em todas as situações simuladas numericamente.

Conclusão, a precisão nos resultados é garantida independentemente da localização dos graus de liberdade ativos na estrutura. Contudo, existe um outro aspecto muito importante a ter em linha de conta, que está relacionado com o tempo de convergência do método. Neste caso, a localização dos graus de liberdade ativos na estrutura é determinante para um maior ou menor tempo de convergência e, conseqüentemente um menor tempo de cálculo como mostram os resultados apresentados na tabela 4.29.

Tabela 4.29 N° de graus de liberdade ativos vs tempo de convergência

Situação	N° de graus de liberdade ativos	Tempo (horas)	N° de iterações
1	6	7,16	5715312
2	6	10,78	8639304
3	6	79,9	63515072

Da observação dos resultados apresentados na tabela 4.29 constata-se que apesar do número de graus de liberdade preservados em todas as situações serem iguais, o tempo despendido nas simulações numéricas correspondentes não são os mesmos, havendo uma diferença substancial entre as situações simuladas numericamente. Isto deve-se à localização dos graus de liberdade ativos na estrutura em cada uma das situações consideradas. Parece assim que a situação 1 foi a seleção mais adequada por ser aquela que apresenta menor tempo convergência e conseqüentemente menor tempo de cálculo.

A análise conjunta ao presente caso de estudo permite concluir que apesar de se conseguir obter a precisão nos resultados independente da localização de graus de liberdade, esta continua a ser muito importante na eficiência com que os resultados são obtidos.

Caso 2

No presente caso de estudo, a simulação numérica para a situação 4 foi realizada utilizando o critério de convergência referido no primeiro caso de estudo desta secção. Para as situações 5 e 6 o critério de convergência usado foi o proposto por Friswel *et. al* [21] dado que o número de graus de liberdade ativos é superior a 5. Na figura 4.31 apresenta-se os resultados obtidos para as simulações numéricas correspondentes.

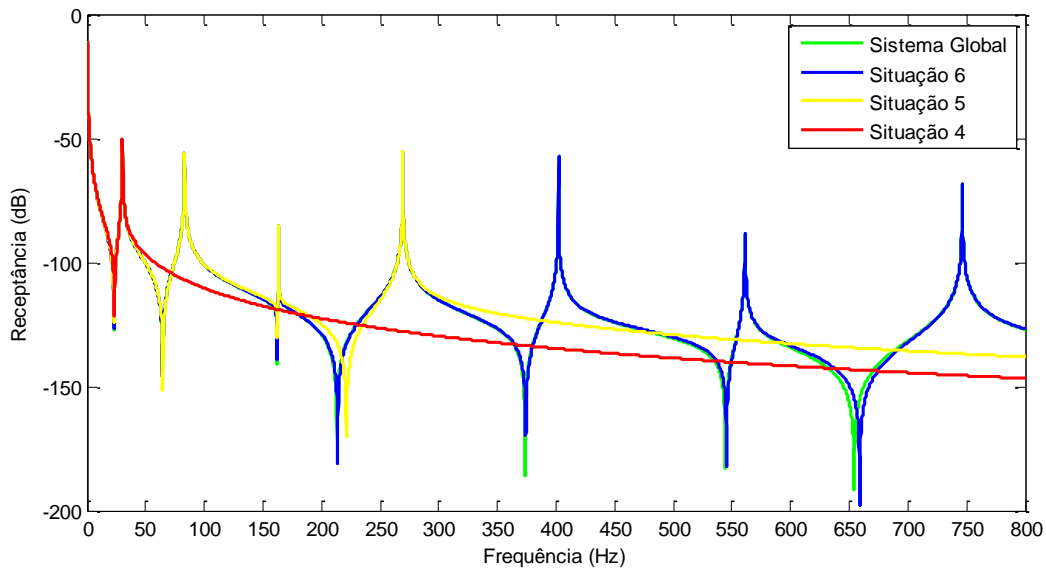


Figura 4.31 FRFs para diferentes situações usando o método IRS Iterativo

Da comparação de curvas entre os sistemas reduzidos e o sistema global da figura 4.31 constata-se que número de graus de liberdade a preservar no sistema é irrelevante uma vez que para os modos pretendidos, o sistema preserva as características dinâmicas do sistema original, reproduzindo as mesmas frequências naturais do sistema global como se pode constatar na tabela 4.30.

Tabela 4.30 Frequências naturais para cada uma das situações (Caso 2).

Modos	Frequências Naturais (Hz)						
	Sistema Global	Situação 4	Erro (%)	Situação 5	Erro (%)	Situação 6	Erro (%)
1	30,184	30,184	0	30,184	0	30,184	0
2	83,173	-	-	83,173	0	83,173	0
3	162,98	-	-	162,98	0	162,98	0
4	269,28	-	-	269,28	0	269,28	0
5	402,01	-	-	-	-	402,01	0
6	561,1	-	-	-	-	561,1	0
7	746,45	-	-	-	-	746,45	0

No sentido de confirmar o observado na tabela 4.30 apresenta-se na tabela 4.31 os resultados das correlações utilizando o critério MAC.

Tabela 4.31 Correlação entre modos usando o critério MAC

Modos	MAC		
	Global-Situação 4	Global-Situação 5	Global-Situação 6
1	1	1	1
2	-	1	1
3	-	1	1
4	-	1	1
5	-	-	1
6	-	-	1
7	-	-	1

Os dados da tabela 4.31 só vêm confirmar o que já tinha sido observada na figura 4.31 e na tabela 4.30 ou seja a correlação é perfeita.

A análise global a este caso de estudo permite concluir que o método é exato, independentemente do número de graus de liberdade preservados no sistema reduzido e que quanto maior o número de graus de liberdade ativos maior a rapidez da convergência como mostram os resultados da tabela 4.32.

Tabela 4.32 N° de graus de liberdade ativos vs tempo de convergência

Situação	N° de graus de liberdade ativos	Tempo (horas)	N° de iterações
4	3	125	100000000
5	6	7,13	5715312
6	12	5,68	4372336

Observa-se da tabela 4.32 que o aumento do número de graus de liberdade ativos traduz-se num menor tempo de cálculo, sendo a situação 6 aquela que apresenta menor tempo, uma vez que também é a situação com maior número de graus de liberdade ativos. Conclusão, o número de graus de liberdade ativos é determinante para um maior ou menor tempo de convergência.

Caso 3

Neste caso os graus de liberdade utilizadas foram sempre as mesmas pelo que manteve-se o mesmo critério de convergência proposta por Frisweel *et. al.* [21]. Os resultados das simulações numéricas realizadas para todas as situações estão representadas nas figuras e tabelas seguintes.

a) Situação 7, sem adição de massa nos graus de liberdade ativos

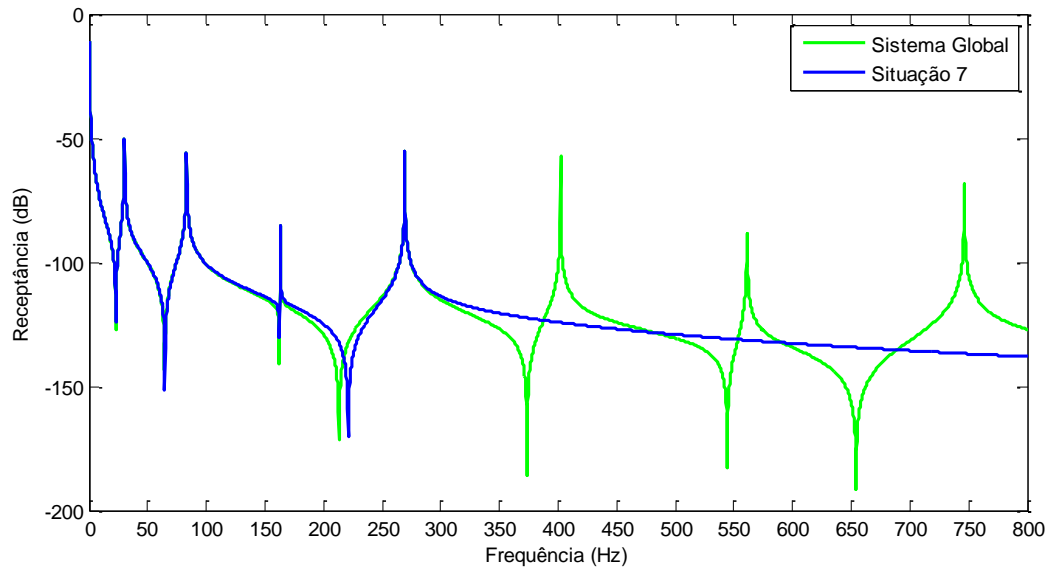


Figura 4.32 Comparação de FRFs sem adição de massa nas graus de liberdade ativos para o método IRS iterativo (Caso 3)

b) Situação 8, adição de 50 gramas nos graus de liberdade ativos

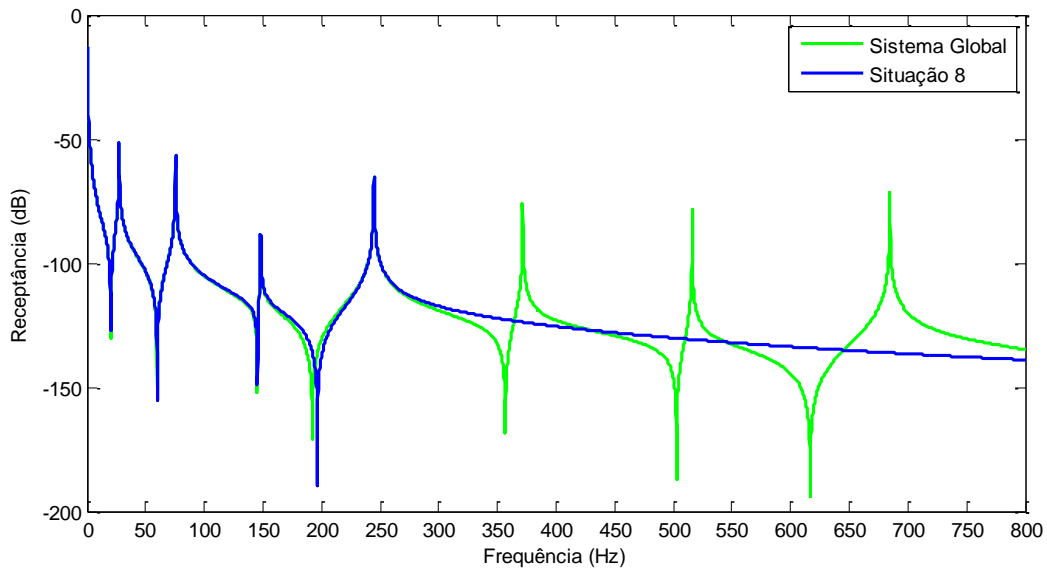


Figura 4.33 Comparação de FRFs com 50g nas graus de liberdade ativos para o método IRS iterativo (Caso 3)

c) Situação 9, adição de 200 gramas nos graus de liberdade ativos

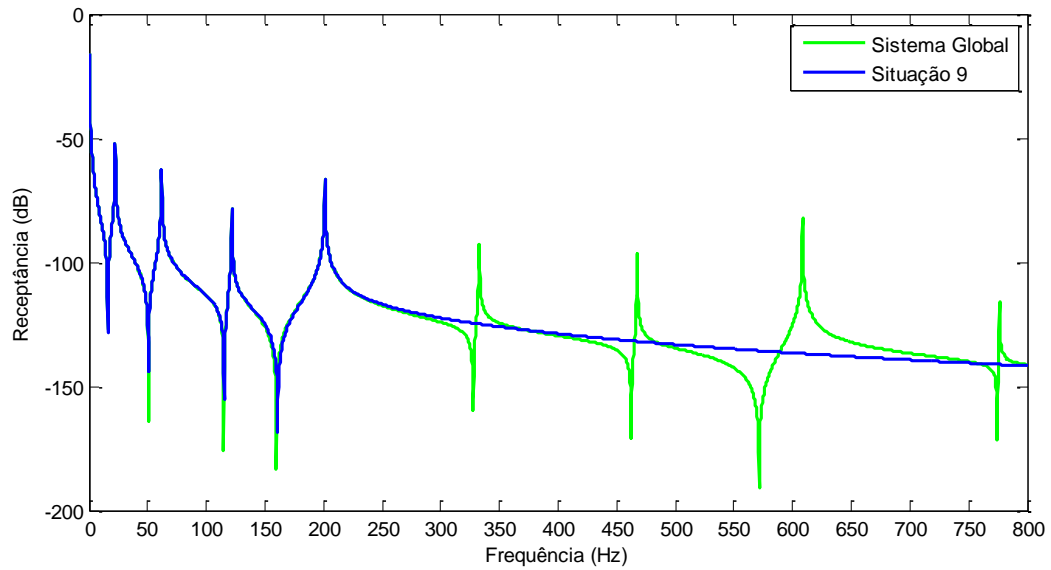


Figura 4.34 Comparação de FRFs com 200g nas graus de liberdade ativos para o método IRS iterativo (Caso 3)

A análise às curvas das figuras (4.32- 4.34) permite concluir que sucede-se o mesmo que no terceiro caso de estudo com método SEREP apresentado anteriormente, os resultados mantiveram-se inalterados em todas as situações consideradas. De notar apenas uma diferença nas anti-ressonâncias entre o terceiro e o quarto modo, em que este se sobrepõe na totalidade para a terceira situação de maior massa. Importa referir também que com o presente método, esta situação não altera o valor das frequências naturais nas situações restantes como se pode constatar nas tabelas subsequentes.

Tabela 4.33 Resultados numéricos referentes à situação 7

Modos	MAC	Frequências Naturais (Hz)		
		Sistema Global	Situação 7	Erro (%)
1	1	30,183	30,183	0
2	1	83,169	83,169	0
3	1	162,97	162,97	0
4	1	269,28	269,28	0

Tabela 4.34 Resultados numéricos referentes à situação 8

Modos	MAC	Frequências Naturais (Hz)		
		Sistema Completo	Situação 8	Erro (%)
1	1	27,424	27,424	0
2	1	75,577	75,577	0
3	1	148,14	148,14	0
4	1	244,71	244,71	0

Tabela 4.35 Resultados numéricos referentes à situação 9

Modos	MAC	Frequências Naturais (Hz)		
		Sistema Global	Situação 9	Erro (%)
1	1	22,329	22,329	0
2	1	61,868	61,868	0
3	1	121,88	121,88	0
4	1	201,19	201,19	0

Da comparação de resultados apresentados nas tabelas (4.33-4.35) constata-se que não existe variação entre as frequências naturais do sistema reduzido quando comparado com os do sistema completo. O critério MAC vem também a confirmar isso mesmo, apresentando correlação perfeita para todos os modos correlacionados.

Caso 4

Nas situações seguintes apresentam-se os resultados, fazendo agora o processo inverso ou seja, adicionando massa em alguns graus de liberdade inativos e preservar os mesmos graus de liberdade das 3 situações anteriores. Os resultados das simulações numéricas estão apresentados nas figuras e tabelas seguintes.

d) Situação 10, adição de 100 gramas nos graus de liberdade inativos

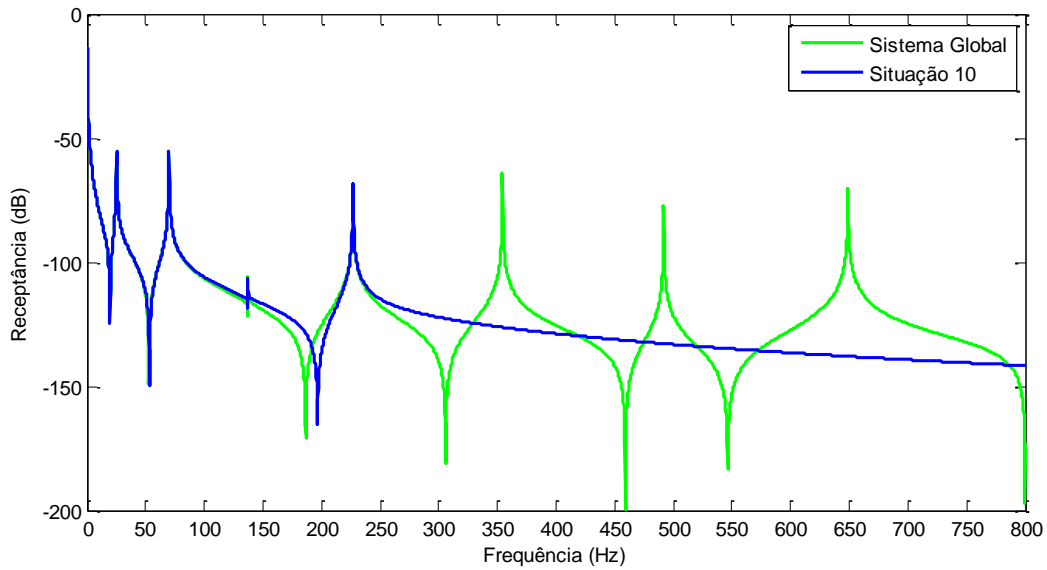


Figura 4.35 Comparação de FRFs com 100g nas graus de liberdade inativos para o método IRS Iterativo (Caso 3)

e) Situação 11, adição de 200 gramas nos graus de liberdade inativos

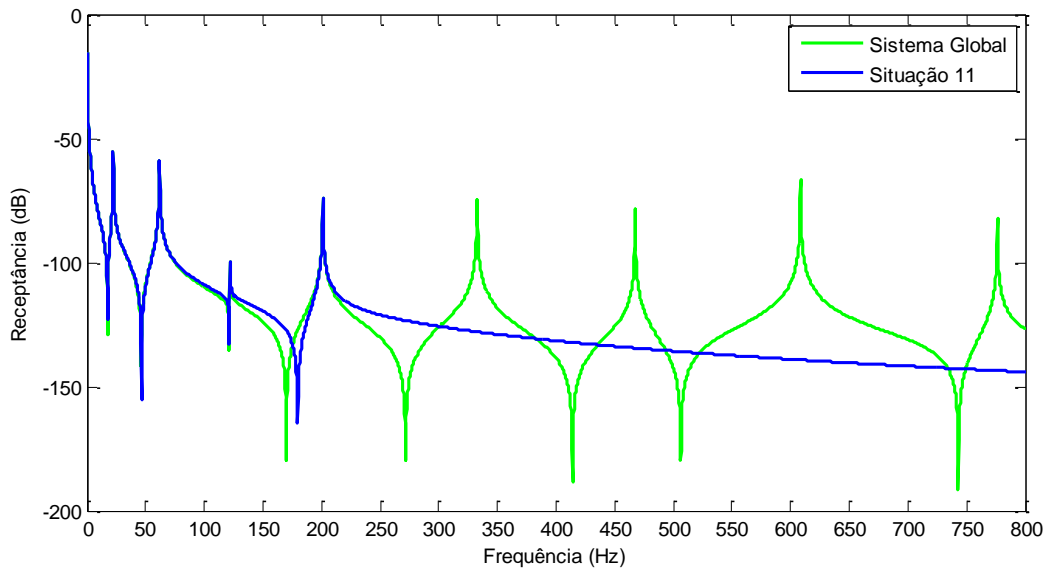


Figura 4.36 Comparação de FRFs com 200g nas graus de liberdade inativos para o método IRS Iterativo (Caso 3)

Observa-se a partir das figuras 4.35 e 4.36 que a retenção de graus de liberdade com menor massa provoca uma instabilidade na resposta, nomeadamente nas anti-ressonâncias. Contudo esta instabilidade não provoca nenhuma alteração nas frequências naturais mantendo-se estas inalteradas.

Nas tabelas 4.36 a 4.37 apresentam-se os resultados das frequências naturais observados nos gráficos e a comparação entre os seus valores numéricos.

Tabela 4.36 Resultados numéricos referentes à situação 10

Modos	MAC	Frequências Naturais (Hz)		
		Sistema Global	Situação 10	Erro (%)
1	1	25,337	25,337	0
2	1	69,929	69,929	0
3	1	137,28	137,28	0
4	1	226,83	226,83	0

Tabela 4.37 Resultados numéricos referentes à situação 11

Modos	MAC	Frequências Naturais (Hz)		
		Sistema Global	Situação 11	Erro (%)
1	1	22,327	22,327	0
2	1	61,854	61,854	0
3	1	121,84	121,84	0
4	1	201,11	201,11	0

Da comparação de resultados observados nas tabelas 4.36 a 4.37, verifica-se que os resultados não se alteram apesar da instabilidade verificada nas respostas, provocada pelo aumento de massa nos graus de liberdade inativos.

A análise conjunta aos resultados apresentados no presente caso mostram que apesar de haver uma ligeira alteração na resposta os resultados obtidos mantêm-se inalterados. Isto permite concluir que, mesmo em situações onde a distribuição de massa não é uniforme os resultados obtidos mantêm-se inalterados mesmo que sejam preservados graus de liberdade de menor massa. Contudo, existe um outro aspeto importante a ter em conta, que está relacionada com o tempo de cálculo despendido se não forem levadas em linha conta certas situações.

Na tabela 4.38 apresentam-se em conjunto, os tempos de convergência para as situações do terceiro e quarto caso de estudo, para cada uma das situações simuladas numericamente.

Tabela 4.38 Comparação de tempos de cálculo para cada um das situações do caso 3

Situação	Nº de graus de liberdade ativos	Tempo (horas)	Nº de iterações
7	6	7,13	5715312
8	6	6,56	5240414
9	6	4,58	3650406
10	6	10,11	8064192
11	6	13,814	10645046

Observa-se na tabela 4.38 que em todas as situações o número de graus de liberdade preservados mantém-se igual e são preservadas sempre os mesmos graus de liberdade no sistema reduzido em todas as situações consideradas, sendo a única alteração, a massa nos graus de liberdade dos mesmos. Observa-se que existe uma diminuição dos tempos de cálculo e conseqüentemente do número de iterações da situação 7 para situação 9, uma vez que nestas situações foram sendo adicionadas massa nos graus de liberdade preservados, sendo os tempos de cálculos cada vez menor quanto maior for o valor da massa adicionada. Já da situação 9 para a situação 11 constata-se um aumento nos tempos de cálculo e conseqüentemente do número de iterações uma vez que nas situações 10 e 11 foram adicionadas massas nos graus de liberdade inativos, aumentando por isso os tempos de cálculo.

Isto permite concluir que em situações onde a estrutura não tem uma distribuição uniforme de massa, convém preservar sempre os graus de liberdade de maior massa, caso contrário conduz a uma baixa eficiência computacional, sendo neste caso sugerido a utilização do critério citado nas referências [43,44]. Também foi possível verificar e comparar, os resultados obtidos utilizando o método IRS iterativo com os resultados obtidos com o método SEREP de onde se concluiu que de facto, na convergência os resultados são os mesmos [21].

4.4.5 Método de Redução Híbrido

O método de Redução Híbrido como o próprio nome indica, trata-se de uma combinação de dois métodos anteriormente apresentados (Guyan e SEREP), e tem por objetivo ultrapassar as matrizes mal condicionadas do método SEREP. Apesar da vantagem de ultrapassar as matrizes mal condicionadas, no que aos resultados diz respeito, o método produz resultados semelhantes aos obtidos com o método SEREP na condição em que o número de graus de liberdade ativos (na) é superior ao número de modos (nm) como mostram os resultados apresentados em seguida nos gráficos e tabelas seguintes.

Caso 1

Na figura 4.37 apresentam-se a comparação de curvas entre o sistema global e o obtido para cada uma das situações consideradas utilizando o método de redução Híbrido.

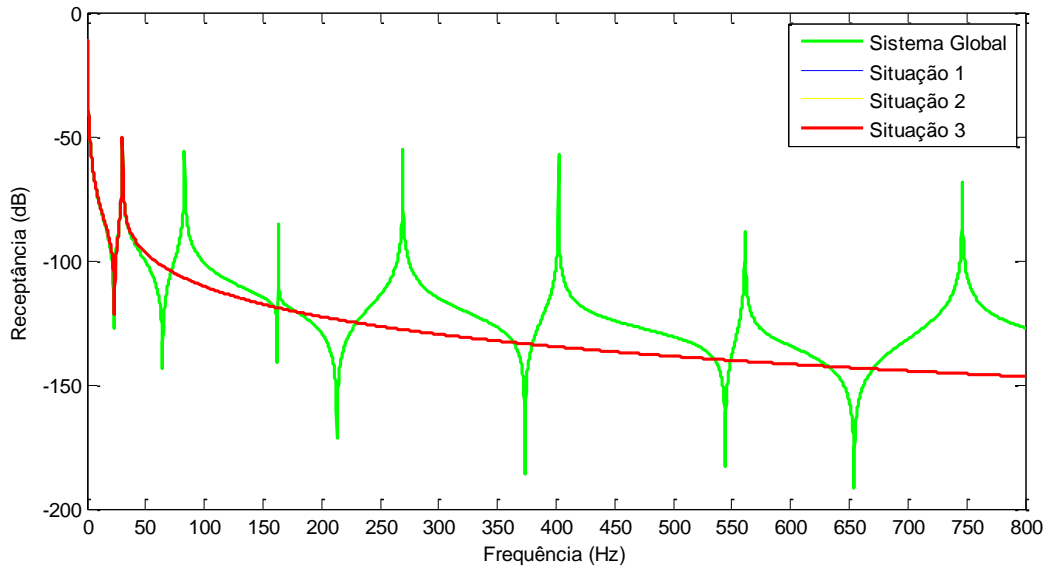


Figura 4.37 Comparação das curvas da FRF do sistema global com as resultantes do método de Híbrido para as várias situações (Caso 1).

Observando a figura 4.37 conclui-se que em todas as situações simuladas numericamente, os resultados foram exatamente os mesmos do sistema global para a primeira frequência natural. Na tabela 4.39 apresentam-se os valores numéricos das frequências naturais observadas na figura 4.37, bem como o erro relativo associado. Na mesma tabela é também apresentada a correlação modal utilizando o critério MAC.

Tabela 4.39 Resultados numéricos obtidos com o método Híbrido

Casos	MAC	Frequência (Hz)	Erro (%)
Situação 1	1	30,184	0
Situação 2	1	30,184	0
Situação 3	1	30,184	0
Sistema Global	-	30,184	-

Como se pode verificar da tabela 4.39 os resultados não sofrem nenhum tipo de alteração em nenhuma das situações apresentadas. Isto permite concluir que independentemente da localização dos graus de liberdade preservados, o método é sempre exato para os modos pretendidos, resultado também confirmado com o critério MAC, com este a indicar correlação perfeita (valor 1).

Caso 2

Da observação da figura 4.38 constata-se que os resultados se mantêm inalterados independentemente do número de graus de liberdade retidos no sistema reduzido em todas as situações simuladas numericamente.

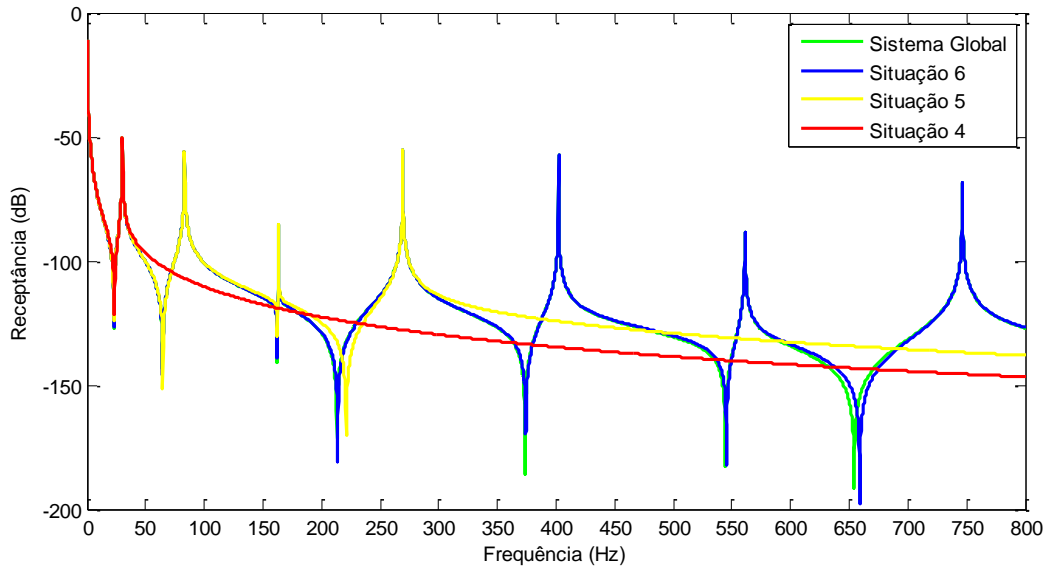


Figura 4.38 FRFs para diferentes situações usando o método de redução Híbrido

Como se pode verificar na figura 4.38 o método preserva sempre os modos selecionados. O número de graus de liberdade selecionadas não influencia em nada os resultados obtidos como se pode constatar da tabela 4.40.

Tabela 4.40 Frequências naturais para cada uma das situações.

Modos	Frequências Naturais (Hz)						
	Sistema Global	Situação 4	Erro (%)	Situação 5	Erro (%)	Situação 6	Erro (%)
1	30,184	30,184	0	30,184	0	30,184	0
2	83,173	-	-	83,173	0	83,173	0
3	162,98	-	-	162,98	0	162,98	0
4	269,28	-	-	269,28	0	269,28	0
5	402,1	-	-	-	-	402,01	0
6	561,1	-	-	-	-	561,1	0
7	746,45	-	-	-	-	746,45	0

Verifica-se da tabela 4.40 que a aproximação ao sistema global é exata como indica o erro relativo não deixando dúvidas de que o método de redução Híbrido é exato para qualquer que seja o número de graus

de liberdade selecionadas. Ainda para efeitos de confirmação é apresentada na tabela 4.41 o resultado da correlação modal obtido para cada uma das situações simuladas numericamente.

Tabela 4.41 Correlação entre modos usando o critério MAC

Modos	MAC		
	Global-Situação 4	Global-Situação 5	Global-Situação 6
1	1	1	1
2	-	1	1
3	-	1	1
4	-	1	1
5	-	-	1
6	-	-	1
7	-	-	1

Observa-se da tabela 4.41 que correlação é perfeita para todas as situações consideradas. Isto só vem a confirmar os resultados observados na tabela e no gráfico anteriormente apresentado.

Pode-se dizer então que o método de redução Híbrido é exato independentemente do número de graus de liberdade ativos no modelo reduzido.

Caso 3

Nas figuras 4.39-4.41 apresentam-se as curvas respeitantes às três situações simuladas numericamente, situação 7, situação 8 e 9 com adição de, 50 e 200 gramas, respetivamente.

- a) Situação 7, sem adição de massa nos graus de liberdade ativos

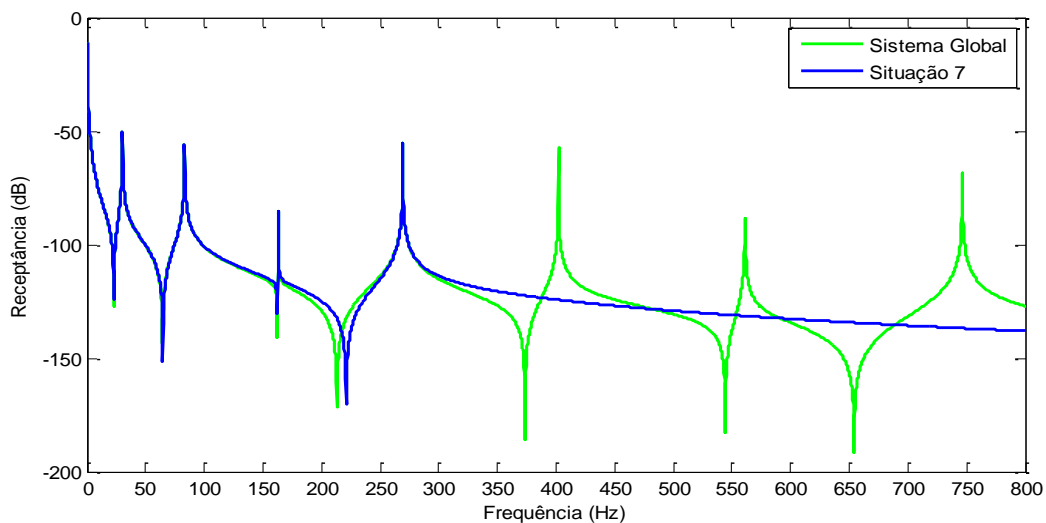


Figura 4.39 Comparação de FRFs sem massa adicionada às graus de liberdade ativos para o método Híbrido (caso 3)

b) Situação 8, adição de massa (50g) nos graus de liberdade ativos

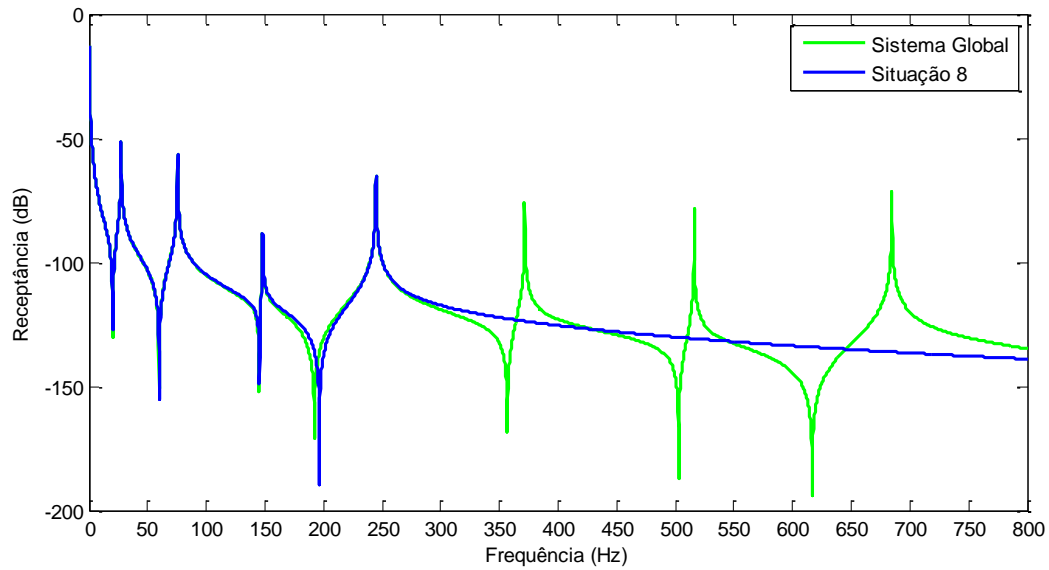


Figura 4.40 Comparação de FRFs com 50g nas graus de liberdade ativos para o método Híbrido (caso 3)

c) Situação 9, adição de massa (200g) nos graus de liberdade ativos

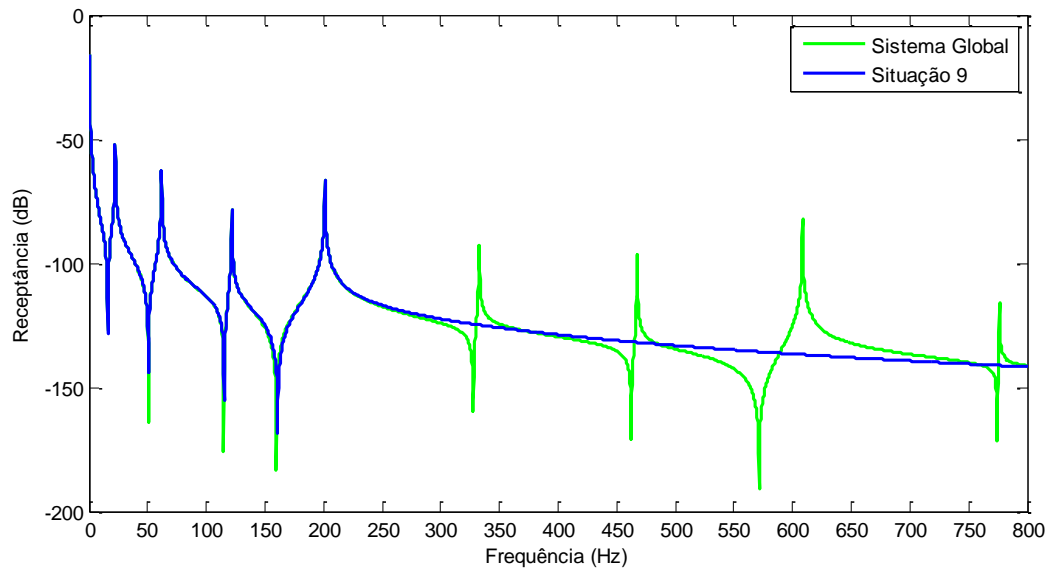


Figura 4.41 Comparação de FRFs com 200g nas graus de liberdade ativos para o método Híbrido (Caso 3)

Com base nas três situações ilustradas nas figuras 4.39-4.41, conclui-se que o aumento de massa nos graus de liberdade ativos do sistema reduzido, não influencia em nada os resultados das frequências naturais obtidas. De notar apenas um acerto nas anti-ressonâncias entre o terceiro e quarto modo, em que

estes são cada vez mais precisos quanto maior for o valor da massa nos graus de liberdade preservados, situação também verificada com métodos, SEREP e IRS Iterativo.

Nas tabelas 4.42-4.44 apresentam-se os resultados numéricos que confirmam o referido anteriormente. Na mesma tabela é também apresentada a correlação modal utilizando o critério MAC.

Tabela 4.42 Resultados numéricos referentes à situação 7

Modos	MAC	Frequências Naturais (Hz)		
		Sistema Global	Situação 7	Erro (%)
1	1	30,184	30,184	0
2	1	83,173	83,173	0
3	1	162,98	162,98	0
4	1	269,28	269,28	0

Tabela 4.43 Resultados numéricos referentes à situação 8

Modos	MAC	Frequências Naturais (Hz)		
		Sistema Global	Situação 8	Erro (%)
1	1	27,422	27,422	0
2	1	75,569	76,569	0
3	1	148,11	148,11	0
4	1	244,65	244,65	0

Tabela 4.44 Resultados numéricos referentes à situação 9

Modos	MAC	Frequências Naturais (Hz)		
		Sistema Global	Situação 9	Erro (%)
1	1	22,327	22,327	0
2	1	61,854	61,854	0
3	1	121,84	121,84	0
4	1	201,11	201,11	0

Os resultados observados nas tabelas 4.42-4.44 permitem concluir que o aumento de massa nos graus de liberdade ativos não altera o valor das frequências naturais em nenhuma das situações simuladas numericamente e mostra ainda que os modos tem correlação perfeita.

Caso 4

Nas figuras seguintes apresentam-se duas situações em que se adicionam massa em alguns graus de liberdade inativos e preservam-se os mesmos graus de liberdade das 3 situações consideradas anteriormente. Os resultados obtidos estão apresentados nas figuras e tabelas seguintes.

d) Situação 10, adição de 100 gramas nos graus de liberdade inativos

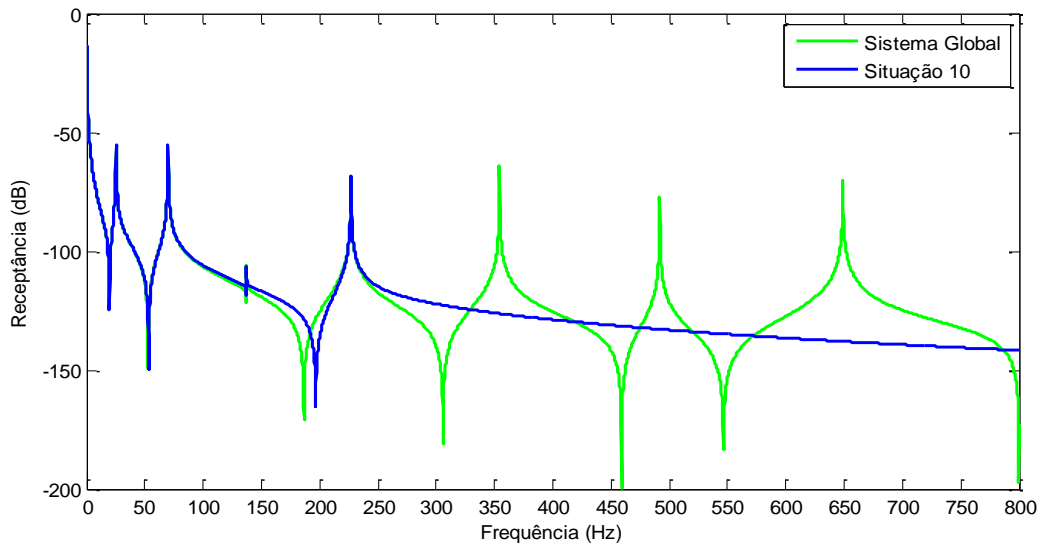


Figura 4.42 Comparação de FRFs com 100g nas graus de liberdade inativos para o método de redução Híbrido (Caso 3)

e) Situação 11, adição de 200 gramas nos graus de liberdade inativos

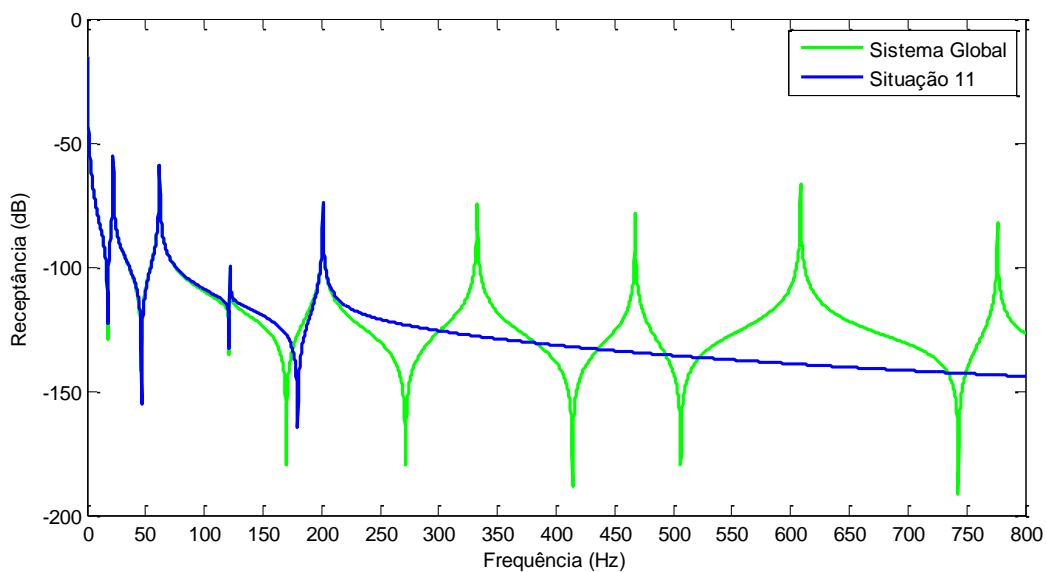


Figura 4.43 Comparação de FRFs com 200g nas graus de liberdade inativos para o método de redução Híbrido (Caso 3)

Da observação das curvas nas figuras 4.42 e 4.43, constata-se uma certa instabilidade nas anti-ressonâncias, com estas a desviarem consideravelmente das antirressonâncias do modelo completo em ambas as figuras. Verifica-se ainda que estes desvios tornam-se mais significativos quanto maior for o valor da massa adicionada nos graus de liberdade inativos. Porém, não se verifica qualquer desvio nas ressonâncias mantendo-se estes inalterados.

Nas tabelas 4.45 e 4.46 apresentam-se os resultados observados nos gráficos onde também efetua-se a comparação entre os mesmos. Na mesma tabela é também apresentada a correlação modal utilizando o critério MAC.

Tabela 4.45 Resultados numéricos referentes à situação 10

Modos	MAC	Frequências Naturais (Hz)		
		Sistema Global	Situação 10	Erro (%)
1	1	25,337	25,337	0
2	1	69,929	69,929	0
3	1	137,28	137,28	0
4	1	226,83	226,83	0

Tabela 4.46 Resultados numericos referentes à situação 11

Modos	MAC	Frequências Naturais (Hz)		
		Sistema Global	Situação 11	Erro (%)
1	1	22,327	22,327	0
2	1	61,854	61,854	0
3	1	121,84	121,84	0
4	1	201,11	201,11	0

A comparação de resultados apresentados nas tabelas 4.45 e 4.46 só vêm a confirmar o referido anteriormente. Observa-se que em ambas as situações os resultados são exatamente os mesmos do sistema global, com os modos destes a indicarem correlação perfeita (valor 1).

Da análise conjunta ao caso 3 desta secção permite concluir que apesar da instabilidade na resposta verificada nas situações 10 e 11, o método é exato em qualquer que seja a condição imposta preservando sempre todas as características dinâmicas do sistema original, resultado também obtido com o método SEREP (Secção 4.2.4).

Conclusão, os resultados obtidos dão confiança para utilizar o método em várias aplicações práticas.

4.4.6 Método de Redução Dinâmica

O presente método é em tudo semelhante ao método de Guyan. A única diferença reside no facto de este incluir a matriz de massa na construção da sua matriz de transformação, através da matriz de rigidez dinâmica a uma dada frequência natural do sistema global. Os resultados obtidos com este método têm uma ligeira melhoria quando comparados com os resultados obtidos pelo método de Guyan. Apesar de usar a matriz de massa no seu processo de redução, a precisão só é garantida para a frequência utilizada na construção da matriz de rigidez dinâmica que neste estudo foi a primeira frequência natural 30 [Hz] do sistema global [11,12,15].

Caso 1

Na figura 4.44 apresenta-se a comparação de curvas entre o sistema global e o reduzido para as várias situações simuladas numericamente.

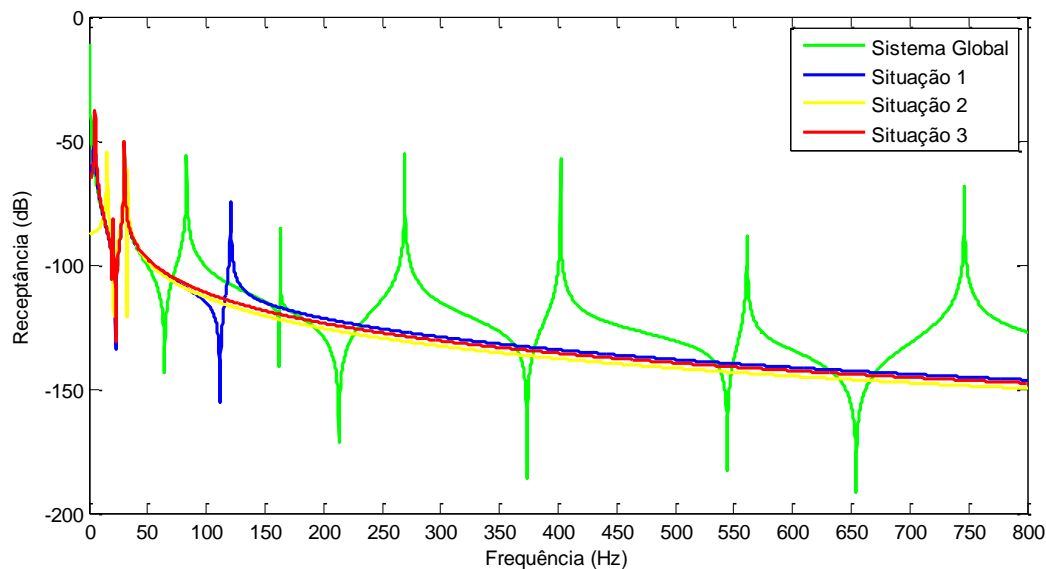


Figura 4.44 Comparação de FRFs do sistema global com as resultantes do método de Redução Dinâmica para as várias situações (Caso 1).

Da análise às curvas da figura 4.44, constata-se que existe uma melhoria na aproximação da primeira frequência natural do sistema reduzido à primeira frequência natural do sistema global. Esta melhoria é tanto melhor quanto melhor localizados estiverem os graus de liberdade ativos. Porém, observa-se ainda a existência de outras frequências naturais (Situações 1 e 2), ao contrário do observado com os outros MRSD para o primeiro caso de estudo. A existência desses modos pode ser explicada com o reduzido número de graus de liberdade ativos no sistema reduzido. Para situações em que o número de graus de liberdade ativos é inferior a 5, o método é sensível, originando com isso, frequências naturais

inexistentes ('fictícios') no sistema global (ver Anexo V) pondo em causa a sua aplicação nestas condições.

Nos casos subsequentes, em que o número de graus de liberdade é igual ou superior a 5 os mesmos já não se verificam como se poderá constatar mais à frente.

Na tabela 4.47 apresentam-se os valores numéricos das frequências naturais observadas no gráfico (Fig. 4.44) para o primeiro modo do sistema global e reduzido. Na mesma tabela é apresentada o erro relativo associado e os resultados obtidos com o critério de correlação MAC.

Tabela 4.47 Comparação de resultados do sistema global com os obtidos usando o método de Redução Dinâmica (caso 1)

Casos	MAC	Frequência (Hz)	Erro (%)
Situação 1	1	30,184	0
Situação 2	1	30,184	0
Situação 3	1	30,184	0
Sistema Global	-	30,184	-

Da comparação de resultados apresentada na tabela 4.47, observa-se que o método é exato na aproximação para a primeira frequência natural, onde também indica correlação perfeita (valor 1). Confirma-se o referido anteriormente ou seja, o método é exato apenas para a frequência natural usada na construção da matriz de rigidez dinâmica, resultado também referido por outros autores [11,12,15]. Este facto será notado em todos os casos de estudo desta secção.

A análise conjunta de resultados permite concluir que, apesar do método se revelar exato para o modo pretendido, é sensível à redução de um número muito reduzido de graus de liberdade originando com isso frequências naturais inexistentes no sistema global pondo em causa a sua validade, pelo que não se aconselha a sua utilização nestas condições.

Caso 2

Na figura 4.45 apresentam-se as curvas resultantes da comparação entre o sistema global e as curvas do sistema reduzido para cada uma das situações consideradas.

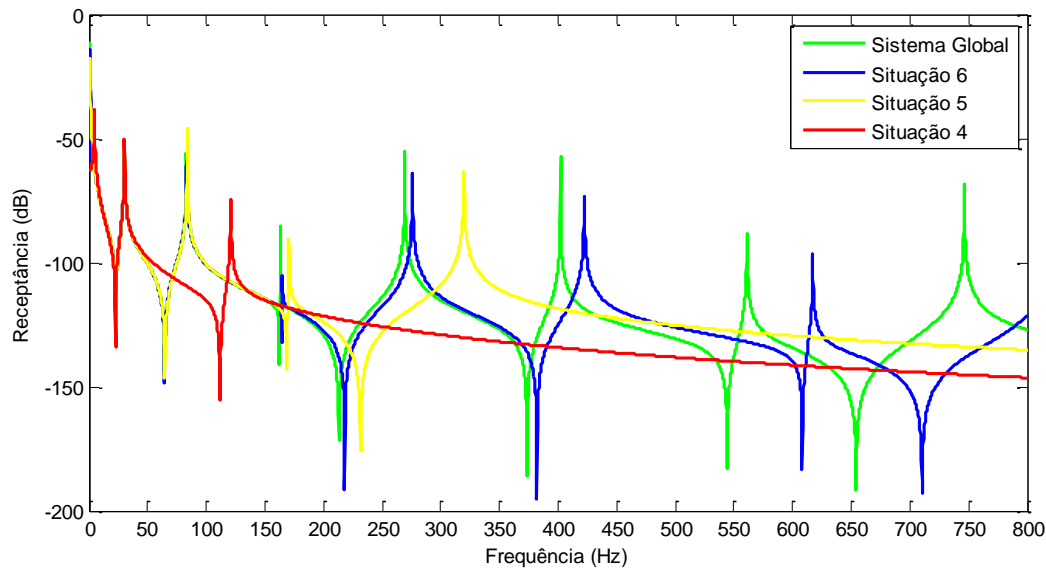


Figura 4.45 Comparação de FRFs do sistema global com as resultantes do método de Redução Dinâmica para as várias situações (Caso 2).

Observa-se na figura 4.45 que o aumento progressivo de graus de liberdade ativos não só melhora a aproximação ao sistema global como também anula o aparecimento de modos ‘fictícios’. Estes apenas se verificam na situação 4 devido ao reduzido número de graus de liberdade ativos (3 graus de liberdade) no sistema reduzido como foi referido anteriormente. Verifica-se que nas situações 5 e 6 em que o número de graus de liberdades preservado é maior os modos ‘fictícios’ já não aparecem.

Na tabela 4.48 estão apresentados os valores numéricos das frequências naturais observados no gráfico da figura 4.45, onde também consta o erro relativo associado.

Tabela 4.48 Frequências naturais para cada uma das situações.

Modos	Frequências Naturais (Hz)						
	Sistema Global	Situação 4	Erro (%)	Situação 5	Erro (%)	Situação 6	Erro (%)
1	30,184	30,184	0	30,184	0	30,184	0
2	83,173	-		83,774	0,72	83,394	0,26
3	162,98	-		170,58	4,66	164,83	1,14
4	269,28	-		319,62	18,69	275,83	2,43
5	402,01	-				422,39	5,06
6	561,1	-				617,14	9,98

De acordo com o observado na tabela 4.48, constata-se que a redução é exata apenas para a frequência natural do sistema global usada na construção da rigidez dinâmica, já para as restantes situações o erro produzido na aproximação é tanto menor quanto maior for o número de graus de liberdade preservados.

Na tabela 4.49 apresentam-se ainda os resultados da correlação entre os modos do sistema global com os modos do sistema reduzido para cada uma das situações consideradas.

Tabela 4.49 Correlação entre modos usando o critério MAC

Modos	MAC		
	Global-Situação 4	Global-Situação 5	Global-Situação 6
1	1	1	1
2	-	0,999827	0,999955
3	-	0,99762	0,998927
4	-	0,873917	0,993082
5	-	-	0,987875
6	-	-	0,952658

Atendendo aos resultados apresentados na tabela 4.49 confirma-se o observado na tabela 4.48, o MAC indica valor igual à unidade apenas para a frequência natural usada para a construção da matriz de rigidez dinâmica. Já para as restantes frequências esse valor é tanto melhor quanto maior o número de graus de liberdade preservados. Contudo, apesar do método apresentar melhorias quanto se aumenta o número de graus de liberdade ativos, em situações onde se pretende conhecer os quatro primeiros modos com alguma exatidão, o número de graus de liberdade teria de ser de pelo menos 21 (Anexo VI) caso contrário os resultados não seriam exatos.

Conclusão, o método gera melhores resultados em situações onde é preservada um maior número de graus de liberdade, o que significa que é dependente do número de graus de liberdade ativos selecionados.

Caso 3

Nas figuras 4.46-4.48 apresentam-se as curvas respeitantes às três situações simuladas numericamente, situação 7 (sem massa adicionada), situação 8 e 9 com adição de, 50 e 200 gramas, respetivamente.

a) Situação 7, sem adição de massa nos graus de liberdade ativos

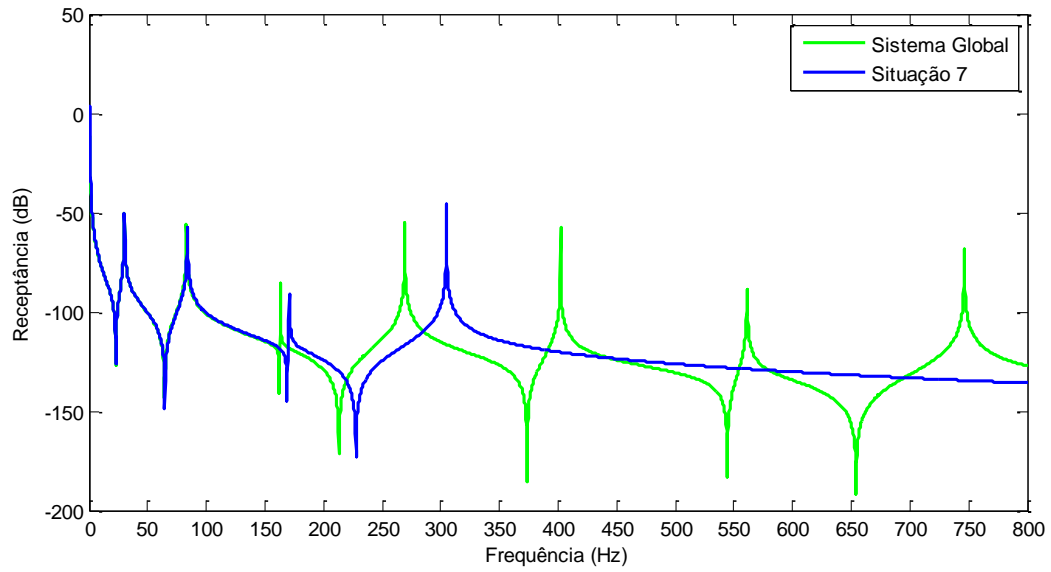


Figura 4.46 Comparação de FRFs sem adição de massa nas graus de liberdade ativos para o método de redução Dinâmica (Caso 3).

b) Situação 8, com adição de 50g nos graus de liberdade ativos

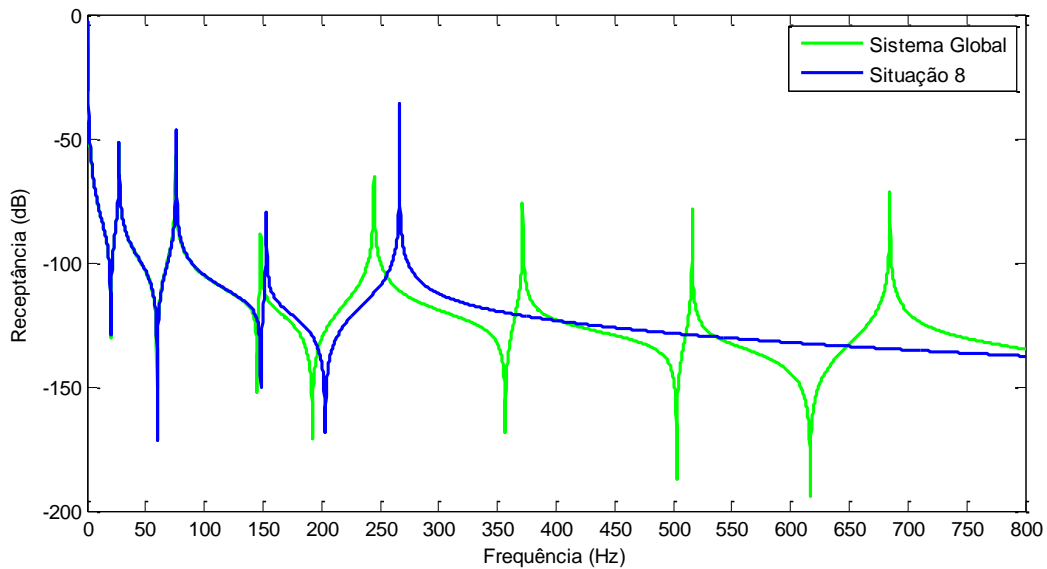


Figura 4.47 Comparação de FRFs com 50g nas graus de liberdade ativos para o método de redução Dinâmica (Caso 3).

c) Situação 9, com adição de 200g nos graus de liberdade ativos

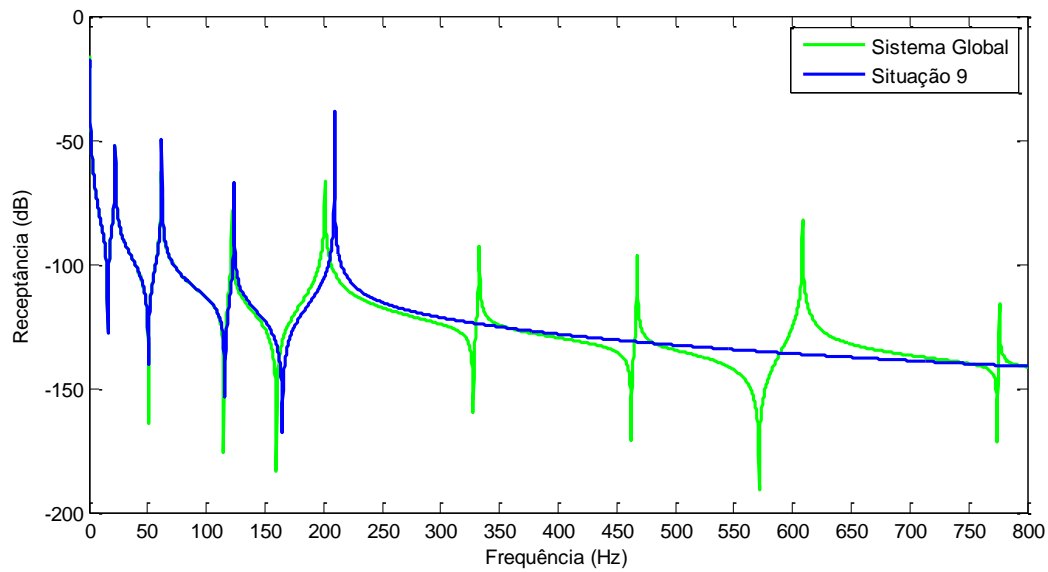


Figura 4.48 Comparação de FRFs com 200g nas graus de liberdade ativos para o método de redução Dinâmica (Caso 3).

Da observação das curvas apresentadas nas figuras 4.46-4.48, constata-se que o aumento de massa nos graus de liberdade ativos melhora significativamente os resultados obtidos especialmente no terceiro e quarto modos. Esta melhoria é cada vez mais significativa quanto maior for o valor da massa adicionada nas graus de liberdade ativos.

Nas tabelas seguintes (tabela 4.50-4.52) apresentam-se os valores numéricos das frequências naturais observadas nos gráficos (Fig. 4.46-4.48). Nas mesmas tabelas apresenta-se o erro relativo associado resultante da comparação entre os sistemas, global e reduzido, bem como o respetivo valor de correlação usando o critério MAC.

Tabela 4.50 Resultados referentes à situação 7

Modos	MAC	Frequências Naturais (Hz)		
		Sistema Global	Situação 7	Erro (%)
1	1	30,184	30,224	0
2	0,999892	83,173	83,908	0,88
3	0,994446	162,98	170,84	4,82
4	0,915869	269,28	304,76	13,17

Tabela 4.51 Resultados referentes à situação 8

Modos	MAC	Frequências Naturais (Hz)		
		Sistema Global	Situação 8	Erro (%)
1	1	27,422	27,422	0
2	0,999935	75,569	76,022	0,6
3	0,996331	148,11	152,93	3,25
4	0,942394	244,65	266,5	8,93

Tabela 4.52 Resultados referentes à situação 9

Modos	MAC	Frequências Naturais (Hz)		
		Sistema Global	Situação 9	Erro (%)
1	1	22,327	22,327	0
2	0,999981	61,854	62,024	0,27
3	0,998834	121,84	123,72	1,54
4	0,984373	201,11	209,25	4,04

Da observação dos resultados nas tabelas 4.50-4.52, confirma-se o resultado observado nas curvas das figuras anteriores. Existe uma diminuição do erro com especial realce no terceiro e quarto modos da situação 9 por ser aquela que possui maior valor de massa nos graus de liberdade ativos.

Caso 4

Nas situações seguintes, apresentam-se as situações inversas ou seja, adição de massa nos graus de liberdade inativos, preservando os mesmos graus de liberdade das situações anteriores. Os resultados das simulações numéricas estão ilustradas nas figuras e tabelas seguintes.

- d) Situação 10, adição de 100 gramas nos graus de liberdade inativos

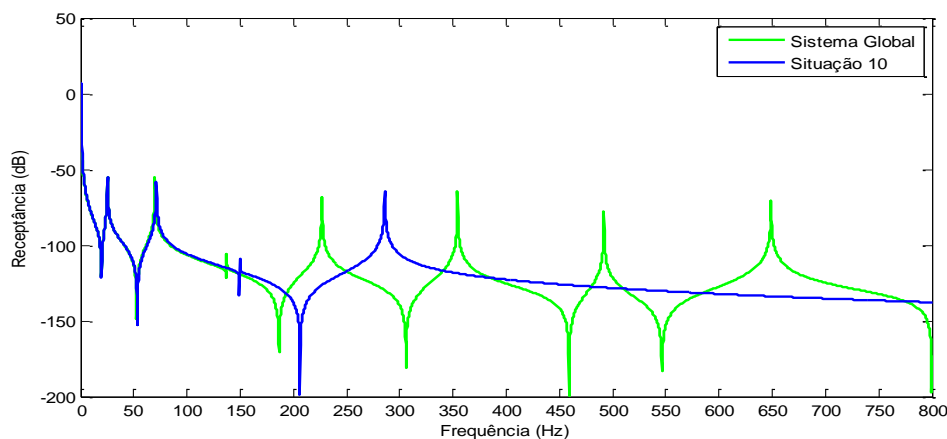


Figura 4.49 Comparação de FRFs com 100 gramas nas graus de liberdade inativos para o método de Redução Dinâmica (Caso 3)

e) Situação 11, adição de 200 gramas nos graus de liberdade inativos

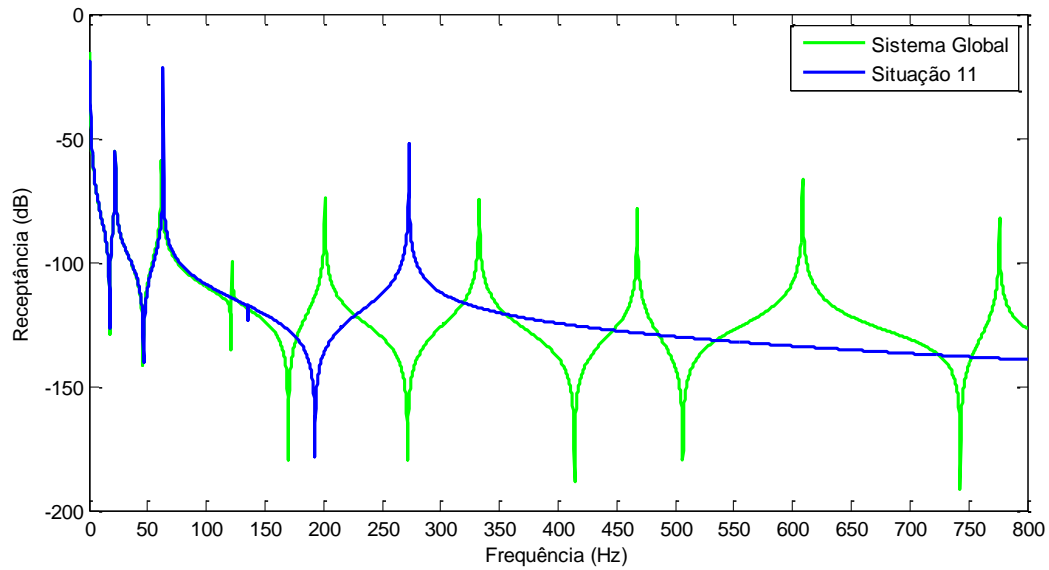


Figura 4.50 Comparação de FRFs 200g nas graus de liberdade inativos para o método de Redução Dinâmica (Caso 3)

Da análise às curvas apresentadas nas figuras 4.49 e 4.50 observa-se que o método é sensível quando se preserva graus de liberdade de menor massa e agrava-se ainda mais, quanto maior for o valor das massas nos graus de liberdade inativos.

Nas tabelas seguintes (tabela 4.53 e 4.54) apresentam-se os valores numéricos das frequências naturais observadas nos gráficos (Fig. 4.49 e 4.50). Nas mesmas tabelas apresentam-se o erro relativo associado resultante da comparação entre os sistemas, global e reduzido, bem como o respetivo valor do MAC.

Tabela 4.53 Resultados numéricos referentes à situação 10

Modos	MAC	Frequências Naturais (Hz)		
		Sistema Global	Situação 10	Erro (%)
1	1	25,337	25,337	0
2	0,999260	69,929	71,147	1,74
3	0,978520	137,28	149,42	8,84
4	0,808319	226,83	285,86	26,02

Tabela 4.54 Resultados numéricos referentes situação 11

Modos	MAC	Frequências Naturais (Hz)		
		Sistema Global	Situação 11	Erro (%)
1	1	22,327	22,327	0
2	0,998685	61,854	63,249	2,25
3	0,969510	121,84	135,53	11,23
4	0,776405	201,11	272,72	35,6

Das tabelas 4.53 e 4.54, constata-se um aumento no erro relativo devido ao aumento de massa nos graus de liberdade inativos com maior expressão no terceiro e quarto modo. O valor do MAC vem a confirmar isso mesmo ou seja deve-se preservar sempre graus de liberdade de maior massa [43,44].

4.5 Vantagens e Limitações dos MRSD

Concluído o estudo numérico procede-se à apresentação das vantagens e limitações que cada um destes métodos oferece na redução de sistemas dinâmicos, encontrando-se estes apresentados na tabela 4.55.

Tabela 4.55 Vantagens e limitações dos MRSD

Métodos	Vantagens	Limitações
Guyan	Exato para a redução estática. Elevada eficiência numérica.	Qualidade da redução dependente da localização de graus de liberdade ativos. Devem ser sempre preservadas graus de liberdade com maior valor de massa em situações onde a distribuição de massa não é uniforme. Só é garantida precisão de resultados para os primeiros modos, se forem preservadas um número considerável de graus de liberdade.
IRS	Exato para baixas frequências. Melhores resultados quando comparado com o método de Guyan. Elevada eficiência numérica.	Dependente da seleção do número de graus de liberdade e do valor de massa nos graus de liberdade ativos. Qualidade de redução dependente da localização de graus de liberdade ativos.
SEREP	A precisão é garantida independentemente, do número de graus de liberdade preservadas, da sua localização ou valor de massa nos graus de liberdade ativos. Exato para quaisquer que sejam os modos pretendidos. Elevada eficiência numérica.	Matrizes mal condicionadas se o número de graus de liberdade ativos for menor que o número de modos selecionados. Não preserva as anti-ressonancias para frequências mais elevadas.
IRS Iterativo	Não existe o problema das matrizes mal condicionadas. Elevada precisão.	A seleção inadequada de graus de liberdade conduz a um elevado tempo de convergência. É muito sensível a um número muito reduzido de graus de liberdade. Tempo de convergência dependente do valor de massa nas graus de liberdade ativos ou seja preservar graus de liberdade com maior massa conduz a um tempo de cálculo reduzido ao passo que o contrário pode demorar horas, dias, semanas ou até meses, sendo em alguns casos inconclusivos. Baixa eficiência numérica.
Redução Híbrido	Exato independentemente do número de graus de liberdade preservadas. Para número de graus de liberdade ativos inferior ao número de modos não existe problema das matrizes mal condicionadas. Não depende nem da localização nem do valor de massa nos graus de liberdade ativos e inativos.	Baixa eficiência numérica quando comparado com o método SEREP.
Redução Dinâmica	Exato para a frequência utilizada na construção do modelo reduzido.	A precisão é garantida apenas para uma frequência do sistema global, os restantes modos podem não ser iguais aos do sistema reduzido. Não é válido para situações onde se pretende apenas um número muito reduzido de graus de liberdade. Apesar de contabilizar inércia na sua matriz de transformação os resultados são dependente do valor da massa nos graus de liberdade ativos. Só é eficiente para um número considerável de graus de liberdade ativos.

4.6 Resumos

O estudo numérico realizado utilizando os MRSD permitiu concluir que existem três parâmetros importantes e fundamentais para uma implementação bem-sucedida dos métodos de redução que são:

- ✓ Localização dos graus de liberdade – este parâmetro revelou-se determinante para o processo de redução uma vez que permite obter resultados francamente melhores em quase todos os MRSD, exceção feita aos métodos SEREP e Híbrido. Para o método IRS Iterativo revelou-se mesmo fundamental para uma rápida convergência do método reduzindo drasticamente os tempos de cálculo.
- ✓ Massa nos graus de liberdade – é extremamente importante que, em estruturas onde a distribuição de massa não seja uniforme, sejam preservados graus de liberdade de maior massa, caso contrário não se consegue preservar as características dinâmicas do sistema reduzido.
- ✓ Número de graus de liberdade ativos – apesar de ser menos expressivo, revelou-se determinante em alguns métodos, nomeadamente Guyan, redução Dinâmica e IRS em que, um aumento no número de graus de liberdade preservados faz com que o sistema se torne preciso para os primeiros modos e ao mesmo tempo revelou-se também determinante na redução dos tempos de cálculo usando o método IRS Iterativo.

Na tabela 4.56 apresenta-se ainda o efeito produzido nos resultados relativamente a seleção de graus de liberdade preservados no sistema, à sua eficiência e precisão.

Tabela 4.56 Resumo

MRSD	Seleção de graus de liberdade ativos		Eficiência	Precisão
	Aleatória	Não aleatória		
Guyan	Não aconselhável	Aconselhável	Muito Boa	Baixa
IRS	Não aconselhável	Aconselhável	Muito Boa	Boa
SEREP	Indiferente	Indiferente	Muito Boa	Elevada
IRS Iterativo	Não aconselhável	Aconselhável	Baixa	Elevada
Híbrido	Indiferente	Indiferente	Boa	Elevada
Dinâmico	Não aconselhável	Aconselhável	Boa	Razoável

Capítulo 5

5 Conclusões

Neste capítulo apresentam-se as conclusões sobre o trabalho desenvolvido e de seguida é apresentada a sugestão para trabalhos futuros.

5.1 Conclusões e trabalho futuro

O presente estudo teve como objetivo a validação do modelo numérico onde foi utilizado os MRSD para a compatibilização do modelo numérico com dados experimentais permitindo a sua validação e a aplicação de diversos MRSD ao modelo numérico.

Para a compatibilização do modelo numérico com o experimental verificou-se que o recurso aos MRSD permite reduzir de uma forma ótima o modelo numérico possibilitando a sua comparação /compatibilização com modelo experimental.

A análise global aos resultados obtidos com a aplicação ao modelo numérico dos vários MRSD permitiu concluir que:

1. Os métodos de redução Híbrida e SEREP (para a condição $na \geq m$) têm inequivocamente capacidade para serem implementadas em quaisquer que sejam as condições de aplicação.
2. A validade dos métodos de redução Dinâmica e IRS Iterativo é dependente do número de graus de liberdade consideradas ativos no sistema reduzido. Verificou-se que no primeiro método a redução para um número muito reduzido de graus de liberdade conduz ao aparecimento de modos não verificados no sistema global, enquanto no segundo método os resultados foram inconclusivos.

3. Os métodos de redução de Guyan, Redução Dinâmica, IRS e IRS Iterativo são completamente dependentes da localização de graus de liberdade selecionadas como ativos no sistema reduzido. Constatou-se que nos dois primeiros métodos a redução só é bem-sucedida se se preservar os graus de liberdade que se encontrem melhor localizadas ao longo da estrutura, enquanto para o terceiro método apesar de a precisão nos resultados ser garantida a eficiência na convergência é muito reduzida.

4. As simulações numéricas permitiram concluir ainda que, em situações onde a distribuição de massa não é uniforme os métodos de redução Guyan, IRS, Redução Dinâmica e IRS Iterativo mostram melhorias significativas se forem preservados graus de liberdade de maior massa caso contrário revelam-se incapazes de preservar as características dinâmicas do sistema original. Nos três primeiros métodos verificou-se que a preservação de graus de liberdade com maior massa traduz-se em resultados melhores quer em termos de resposta (FRF), frequências naturais e coeficiente de correlação (MAC) ao passo que o contrário, os resultados são catastróficos sobretudo nos métodos de Guyan e Redução Dinâmica. Já para o método IRS Iterativo, apesar de garantida a precisão nos resultados obtidos, a preservação de graus de liberdade de maior massa conduz a uma mais rápida convergência ao passo que o contrário depende demasiado tempo.

Para além do estudo aqui realizado seria interessante:

- Avaliar o desempenho dos MRSD em sistemas amortecidos. Seria ainda interessante avaliar o desempenho dos métodos de redução aplicados a caso de estudo experimental em que as matrizes de massa, rigidez e amortecimento seriam construídas com base na resposta experimental do sistema e de seguida comparar os resultados obtidos com os do modelo numérico para o mesmo Sistema;
- Desenvolver métodos que permitam expandir os graus de liberdade utilizados no modelo experimental de modo permitir a comparação com o modelo numérico.

Referências Bibliográficas

- [1] J. M. B. Cardoso e P. G. Coelho, “*Apontamentos de Métodos Computacionais em Engenharia Mecânica*” Faculdade de Ciências e Tecnologias (DEMI-FCT) - Universidade Nova de Lisboa, 2012.
- [2] O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, and J. Z. Zhu, “*The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals*”, 6th Edition. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2005.
- [3] Z.-Q. Qu, “*Model Order Reduction Techniques: with Applications in Finite Element Analysis*” 1st Edition, Springer-Verlag, U.S.A, 2004.
- [4] P. Koutsovasilis, “Model order reduction in structural mechanics: Coupling de rigid and elastic multi body dynamics” Ph.D. Thesis, Technische Universität Dresden, 2009.
- [5] D. J. Ewins, “*Modal Testing: Theory, Practice, and Application*”, Research Studies Press 2nd Edition LTD, 2000.
- [6] N. M. M. Maia e J. M. M. e Silva, “*Theoretical and Experimental Modal Analysis*”, Mechanical Engineering Series, Research Studies Press Limited, 1997.
- [7] Z.-F. Fu e J. He, “*Modal Analysis*”, 1st Edition. Oxford ; Boston: Butterworth-Heinemann, 2001.
- [8] W. Heylen, S. Lammens, “FRAC: A consistent way of comparing frequency response functions”, *presented at the Proceedings of the Conference on Identification in Engineering Systems, Swansea, U.K.*, pp. 48–57, Mar. 1996.
- [9] R. J. Guyan, “Reduction of stiffness and mass matrices”, *AIAA Journal*, vol. 3, no. 2, pp. 380–380, 1965.
- [10] P. Koutsovasilis e M. Beitelschmidt, “Comparison of model reduction techniques for large mechanical systems- A study on an elastic rod”, *Multibody Syst Dyn*, vol. 20, no. 2, pp. 111–128, 2008.
- [11] C. C. Flanigan, “Correlations Considerations- Part 1, Model reduction using Guyan, IRS and Dynamic methods”, *presented at the Proceedings of the 16th International Modal Analysis Conference (IMAC XV)*, Santa Barbara, California, U.S.A., Feb. 1998.
- [12] P. Avitabile “Model Reduction and Model Expansion and their applications – part 1 theory”, *presented at the Proceedings of the 23th International Modal Analysis Conference (IMAC XXIII)*, Orlando, Florida, U.S.A, 2005.
- [13] R. A. S. B. Almeida “Métodos de Condensação em Acoplamento Estrutural”, Instituto Superior Técnico (IST), Dissertação de Mestrado, Lisboa, Set. 1999.
- [14] P. Koutsovasilis e M. Beitelschmidt, “Model Reduction comparison for the elastic crankshaft mechanism”, *presented at the Proc. Int. Operational Modal Analysis Conference (IOMAC XXIV)*, Compenhagen, Denamark, vol 1, pp 95-106, 2007.
- [15] N. Bouhaddi e R. Fillod, “MODEL REDUCTION BY A SIMPLIFIED VARIANT OF DYNAMIC CONDENSATION”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 191, n. 2, pp. 233–250, Mar. 1996.

-
- [16]M. C. C. BAMPTON and R. R. CRAIG JR., “Coupling of substructures for dynamic analyses”, *AIAA Journal*, vol. 6, no. 7, pp. 1313–1319, July 1968.
- [17]A. Butland and P. Avitabile, “A reduced order, test verified Component Mode Synthesis approach for systems modeling applications”, *presented at the Proceedings of the 26th International Modal Analysis Conference (IMAC XXV)*, Orlando, Florida, U.S.A., Feb. 2008.
- [18]P. Koutsovasilis e M. Beitelshmidt, “Model order reduction of finite element models: improved component mode synthesis”, *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems*, vol. 16, no. 1, pp. 57–73, 2010.
- [19]A. Y.-T. Leung, “An accurate method of dynamic condensation in structural analysis”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 12, no. 11, pp. 1705–1715, 1978.
- [20]M. Paz, “Dynamic Condensation”, *AIAA Journal*, vol. 22, no. 5, pp. 724–727, 1984.
- [21]M. I. Friswell, S. D. Garvey, and J. E. T. Penny, “Model reduction using Dynamic and iterated IRS techniques”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 186, no. 2, pp. 311–323, 1995.
- [22]Z.-Q. QU e Z.-F. FU, “An iterative method for Dynamic Condensation of structural matrices”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 14, no. 4, pp. 667–678, Jul. 2000.
- [23]Z.-S. Liu e Z.-G. Wu, “Iterative-Order-Reduction Substructuring Method for Dynamic Condensation of Finite Element Models”, *AIAA Journal*, vol. 49, no. 1, pp. 87–96, 2011.
- [24]R. Lin e Y. Xia, “A new eigensolution of structures via dynamic condensation”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 266, no. 1, pp. 93–106, Set. 2003.
- [25]D. C. Kammer, “Test-Analysis Model Development using an Exact Modal Reduction”, *International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis*, vol. 2, no. 4, pp. 174–179, 1987.
- [26]J. O’Callaghan, P. Avitabile and R. Riemer “System Equivalent Reduction Expansion Process (SEREP)”, *presented at the Proceedings of the 7th International Modal Analysis Conference (IMAC VII)*, Las Vegas, Nevada, U.S.A, pp. 17-21, 1989.
- [27]D. C. Kammer, “Correlations Considerations-Part 2, Model Reduction using Modal, SEREP and Hybrid methods”, *presented at the Proceedings of the 16th International Modal Analysis Conference (IMAC XV)*, Santa Barbara, California, U.S.A., Feb. 1998.
- [28]C. V. S. Sastry, D. Roy Mahapatra, S. Gopalakrishnan, e T. S. Ramamurthy, “An iterative system equivalent reduction expansion process for extraction of high frequency response from reduced order finite element model”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 192, no. 15, pp. 1821–1840, Abr. 2003.
- [29]A. S. Das e J. K. Dutt, “Reduced model of a rotor-shaft system using modified SEREP”, *Mechanics Research Communications*, vol. 35, no. 6, pp. 398–407, Set. 2008.
- [30]A. S. Das, J. K. Dutt, “A reduced rotor model using modified SEREP approach for vibration control of rotors”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 26, pp. 167–180, Jan. 2012.
- [31]P. Avitabile and J. O’ Callahan, “Frequency Response Function Expansion for unmeasured translational and rotational dofs for impedance modelling applications ”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 17, no. 4, pp. 723–745, Jul. 2003.
-

- [32] T. Van Zandt, N. Wirkkala, P. Avitabile, “Development of efficient reduced models for rigid body dynamics simulation for helicopter missile wing combinations”, *presented at the Proceedings of the 24th International Modal Analysis Conference (IMAC XXIV)*, St. Louis, Missouri, U.S.A., 2006.
- [33] P. Avitabile, T. Van Zandt, N. Wirkkala, “Development of efficient reduced models for flexible body dynamics simulation”, *presented at the Proceedings of the 25th International Modal Analysis Conference (IMAC XXV)*, Orlando, Florida, U.S.A., Feb. 2007.
- [34] J. O’Callaghan, “A procedure for an Improved Reduced System (IRS) model”, *presented at the Proceedings of the 7th International Modal Analysis Conference (IMAC VII)*, Las Vegas, Nevada, U.S.A., pp. 17-21, 1989.
- [35] J. H. Gordis, “An analysis of the Improved Reduced System (IRS) model reduction procedure”, *presented at the Proceedings of the 10th International Modal Analysis Conference (IMAC X)*, vol. 1, pp. 471–479, 1992.
- [36] D. C. Kammer, “A Hybrid Approach to Test-Analysis-Model Development for Large Space Structures”, *Journal of Vibration and Acoustics*, vol. 113, no. 3, pp. 325–332, Jul. 1991.
- [37] J. O’ Callahan “In search of the IRS”, *presented at the Proceedings of the 23th International Modal Analysis Conference (IMAC XXIII)*, Orlando, Florida, U.S.A., 2005.
- [38] M. A. Blair, T. S. Camino, and J. M. Dickens, “An iterative approach to a reduced mass matrix”, *presented at the Proceedings of the 9th International Modal Analysis Conference (IMAC XV)*, Florence, Italy, pp. 621-626, 1991.
- [39] M. I. Friswell, S. D. Garvey, and J. E. T. Penny, “Using Iterated IRS model Reduction Techniques to Calculate Eigensolutions”, *presented at the Proceedings of the 15th International Modal Analysis Conference (IMAC XV)*, Orlando, Florida, U.S.A. pp. 1537-1543, 1997.
- [40] M. I. Friswell, S. D. Garvey, and J. E. T. Penny, “The convergence of the Iterated IRS Method”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 211, no. 1, pp. 123–132, Mar. 1998.
- [41] Y. Xia e R. Lin, “Improvement on the iterated IRS method for structural eigensolutions”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 270, no. 4–5, pp. 713–727, Mar. 2004.
- [42] D. Choi, H. Kim, e M. Cho, “Iterative method for dynamic condensation combined with substructuring scheme”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 317, no. 1–2, pp. 199–218, Out. 2008.
- [43] P. Salvini, F. Vivio, “Master d.o.f.s choice for new approaches to condense mas matrix”, *presented at the Proceedings of the 24th International Modal Analysis Conference (IMAC XXIV)*, St. Louis, Missouri, U.S.A., 2006.
- [44] R. D. Henshell e J. H. Ong, “Automatic masters for eigenvalue economization”, *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, vol. 3, no. 4, pp. 375–383, 1974.
- [45] J. Jeong, S. Baek, e M. Cho, “Dynamic condensation in a damped system through rational selection of primary degrees of freedom”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 331, no. 7, pp. 1655–1668, Mar. 2012.
- [46] M. I. Friswell, J. E. T. Penny and S. D. Garvey, “Model reduction for structures with damping and gyroscopic effects”, *presented at the Proceedings of the ISMA-25*, Leuven, Belgium, pp.1151–1158, September 2000.
- [47] B. M. Irons, “Structural eigenvalue problems-elimination of unwanted variables”, *AIAA Journal*, vol. 3, no. 5, pp. 961–962, 1965.

- [48]Morais, J. “Detecção e localização de dano em estruturas”, Faculdade de Ciências e Tecnologias (FCT-UNL), Dissertação de Mestrado, Caparica, Setembro de 2014.
- [49]Allemang, R. J. “The Modal Assurance Criterion- Twenty years of use and abuse”, *presented at the Proceedings of the 20th International Modal Analysis Conference (IMAC XX)*, Los Angeles, California, U.S.A., Feb. 2002.

Anexos

Em complemento do trabalho já desenvolvido serão apresentadas aqui em anexo todos os casos considerados relevantes para o mesmo.

Anexo I

Na figura I.1 apresenta-se a comparação de curvas obtidas entre o sistema global/completo e o obtido com os MRSD a saber: Método de Guyan, Método IRS e Método de Redução Dinâmica.

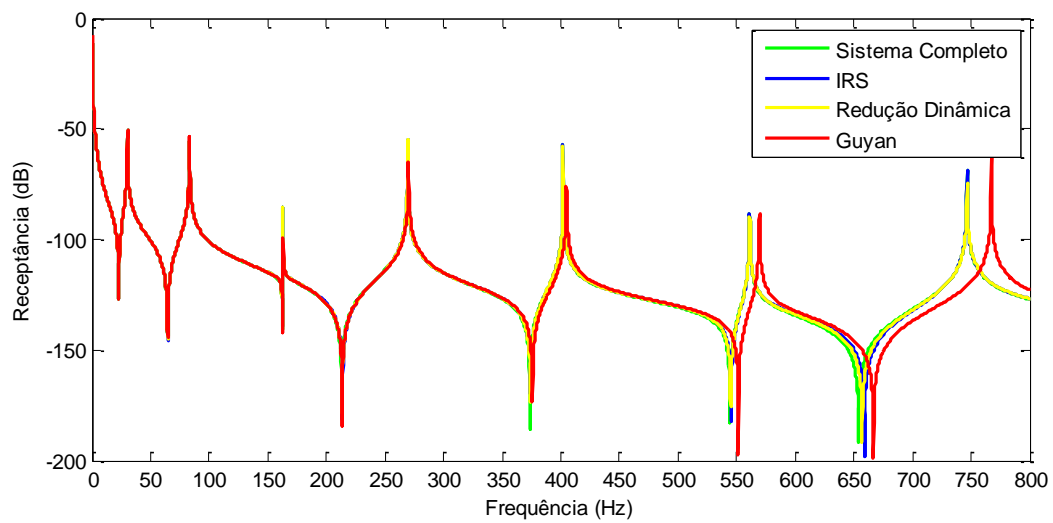


Figura I.1 Comparação de FRFs do sistema completo com os vários MRSD

Anexo II

Nas figuras II.1 e II.2 apresentam-se a comparação de curvas entre o sistema global e o reduzido usando o método SEREP. Em ambas as figuras a redução foi feita considerando as mesmos graus de liberdade ativos, seguintes: 1, 5, 9, 13, 17 e 21. O objetivo é demonstrar que o método SEREP oferece a possibilidade de serem escolhidos os modos pretendidos, podendo ou não serem seleccionados modos de corpo rígido.

Na figura II.1 foram seleccionados os primeiros 6 modos em que dois deles eram modos de corpo rígido. Por este motivo só poderão ser visualizados 4 frequências naturais referentes aos modos flexíveis.

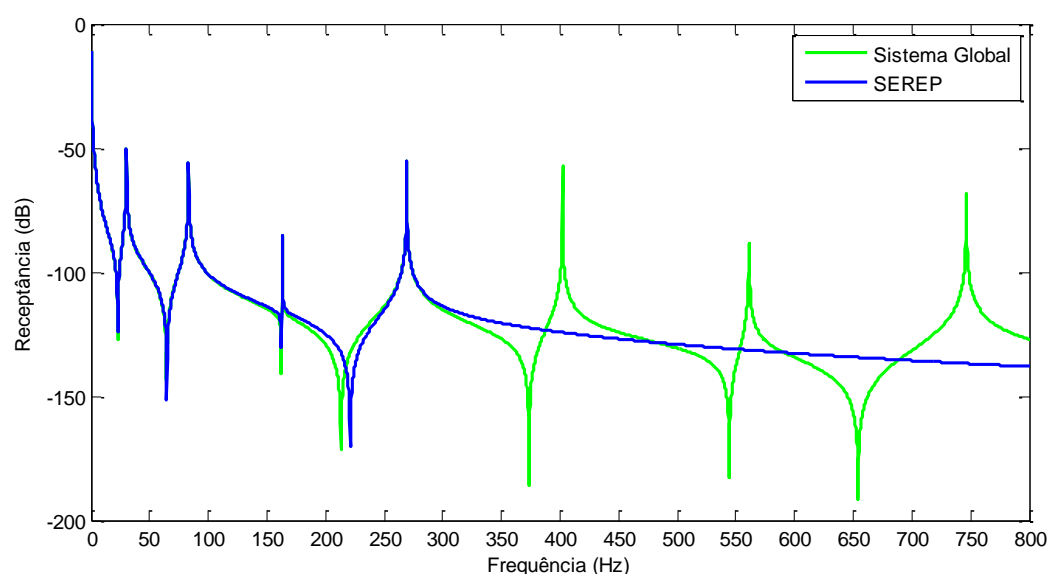


Figura II.5.1 Comparação de FRFs entre o método SEREP e o sistema global

Tabela II.1 Resultados numéricos referentes ao gráfico II.1

Modos	MAC	Frequências Naturais (Hz)		
		Sistema Completo	Situação 7	Erro (%)
1	1	30,184	30,184	0
2	1	83,173	83,173	0
3	1	162,98	162,98	0
4	1	269,28	269,28	0

Na figura II.2 foram selecionados os primeiros 6 modos em que nenhum deles eram modos de corpo rígido. Por este motivo serão visualizados 6 frequências naturais referentes aos modos flexíveis.

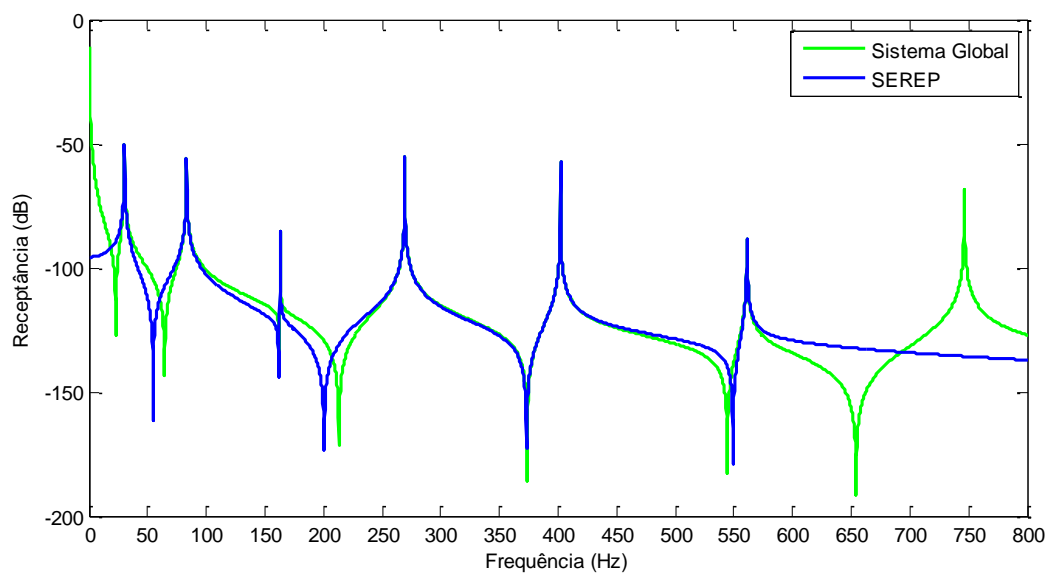


Figura II.5.2 Comparação de FRFs entre o método SEREP e o sistema global

Tabela II.2 Resultados numéricos referentes ao gráfico II.2

Modos	MAC	Frequências Naturais (Hz)		
		Sistema Completo	Situação 7	Erro (%)
1	1	30,184	30,184	0
2	1	83,173	83,173	0
3	1	162,98	162,98	0
4	1	269,28	269,28	0
5	1	402,01	402,01	0
6	1	561,1	561,1	0

Anexo III

Na figura III.1 apresenta-se a comparação de curvas entre o sistema global/completo e o modelo reduzido usando o método de Guyan. A redução foi efetuada considerando 24 graus de liberdade ativos.

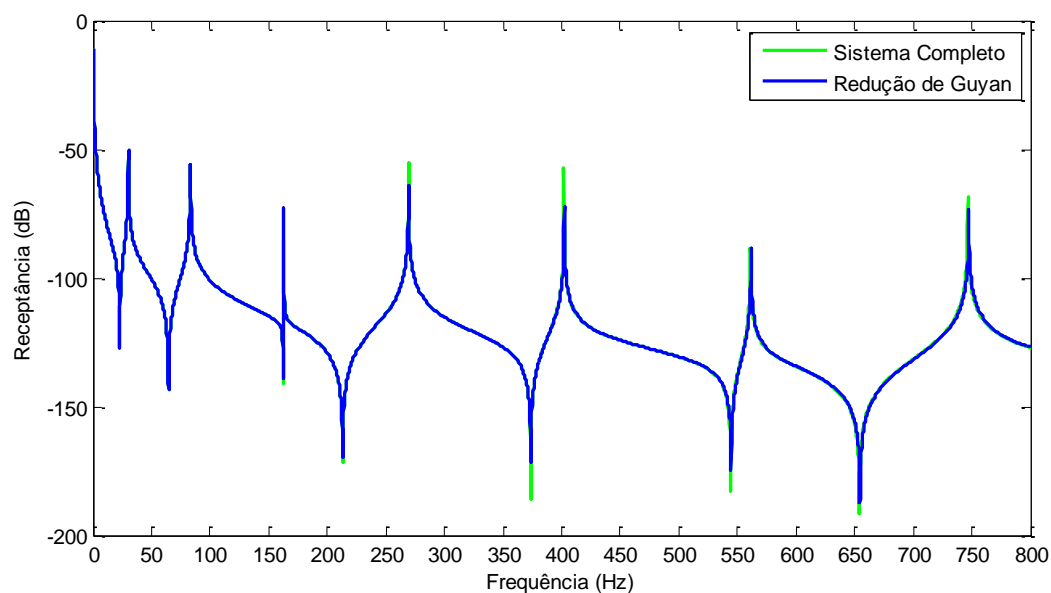


Figura III.1 Comparação de FRF resultantes entre o sistema completo e o método de Guyan

Na tabela III.1 apresentam-se os resultados observados no gráfico da figura II.1 bem como o erro relativo associado. É também apresentado o resultado da correlação usando o critério MAC.

Tabela III.2 Comparação de resultados do sistema completo com o método de Guyan

Modos	Frequências Naturais (Hz)			
	MAC	Sistema Global	Redução de Guyan	Erro (%)
1	1	30,184	30,184	0
2	1	83,173	83,174	0
3	1	162,98	163	0,012
4	1	269,28	269,33	0,019
5	0,999999	402,01	402,18	0,042
6	0,999995	561,01	561,65	0,11
7	0,999994	746,45	747,34	0,12

Anexo IV

Na figura seguinte apresentam-se os resultados obtidos com o método de redução usando apenas três graus de liberdade ativos usando o método *IRS* Iterativo.

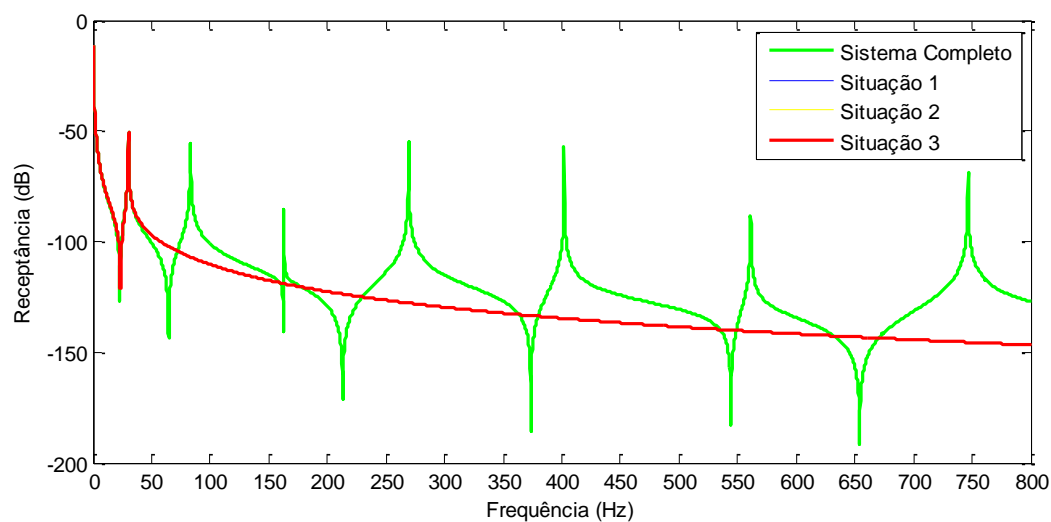


Figura IV.5.3 Comparação de FRFs entre o sistema completo e o método IRS Iterativos

Na tabela IV.1 apresentam-se os resultados observados nos gráficos da figura IV.1 bem como o erro resultante da comparação das mesmas. É também apresentado o resultado da correlação usando o critério MAC.

Tabela IV.1 Comparação de resultados entre o sistema completo e os obtidos com o método IRS Iterativo

Casos	MAC	Frequência (Hz)	Erro (%)
Situação 1	1	30,184	0
Situação 2	1	30,184	0
Situação 3	1	30,184	0
Sistema Global	-	30,184	-

Anexo V

Nas figuras seguintes apresentam-se os resultados obtidos com o método de redução Dinâmica para três situações seguintes: primeira situação (Situação 1) com seleção de três graus de liberdade ativos (a saber: pontos 1, 5 e 9), segunda situação (situação 2) com a seleção de quatro graus de liberdade ativos (a saber: 2, 6, 9 e 23) e terceira e última situação (Situação 3) com a seleção de cinco graus de liberdade ativos (a saber: 3, 9, 14, 16, 21).

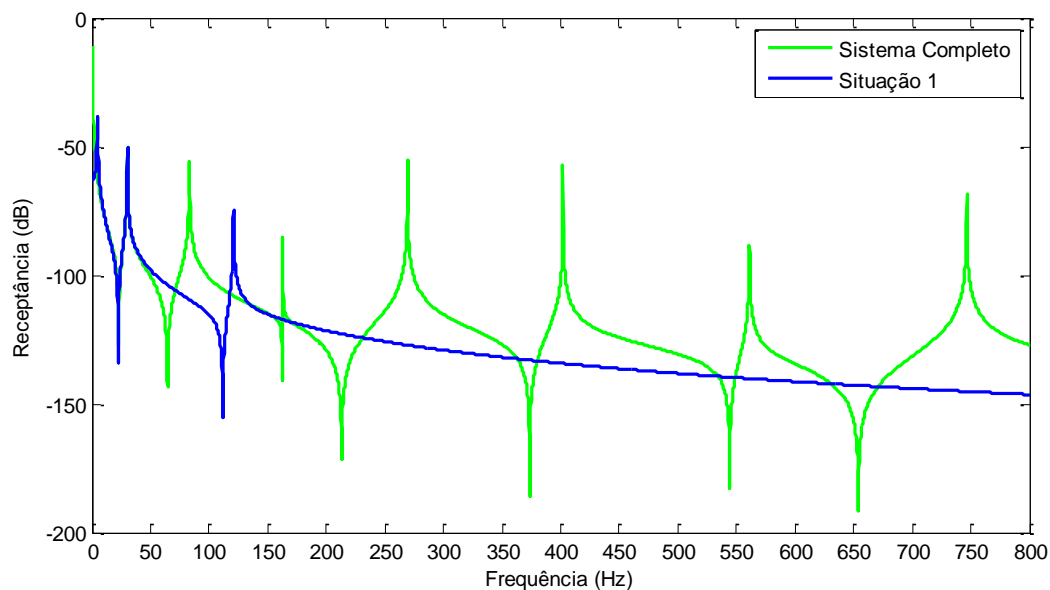


Figura V.1 Comparação de FRFs entre o sistema completo e reduzido (Situação 1)

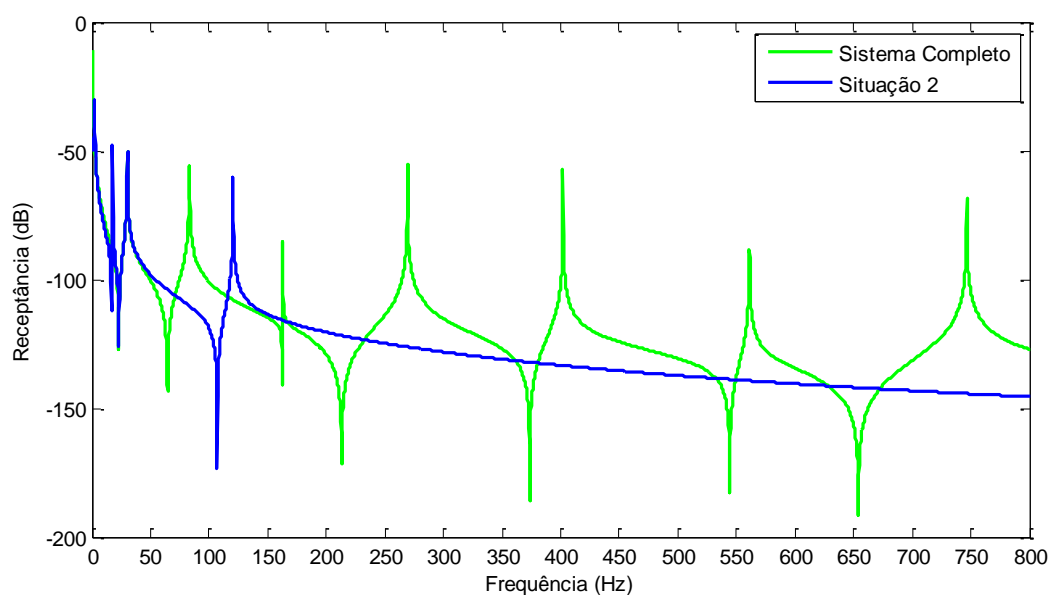


Figura V.2 Comparação de FRFs entre o sistema completo e reduzido (Situação 2)

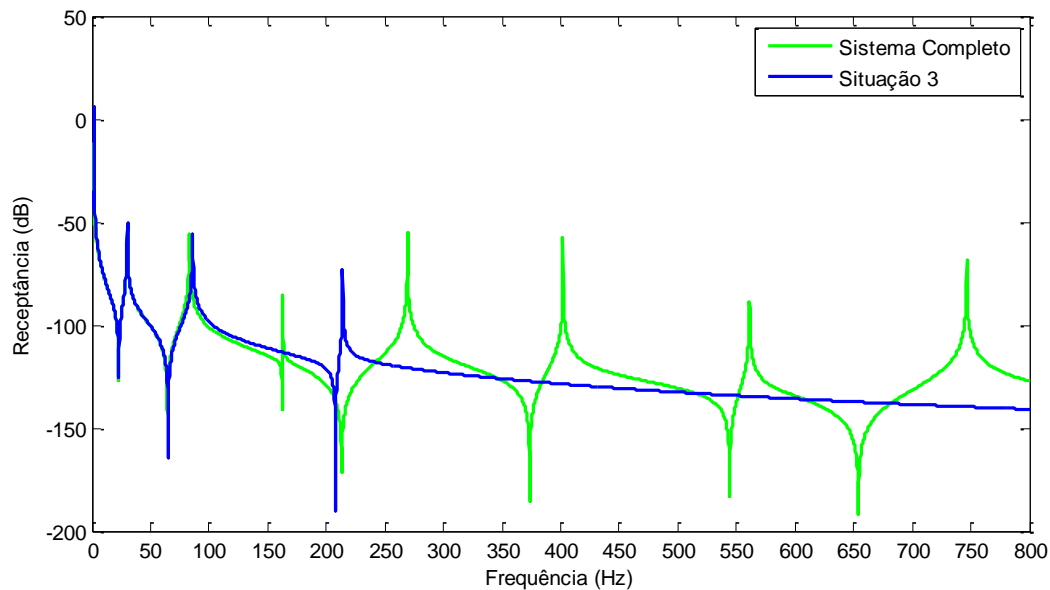


Figura V.3 Comparação de FRFs entre o sistema completo de reduzido (Situação 3)

Anexo VI

Na figura VI.1 apresenta-se a comparação de curvas entre o sistema completo e o modelo reduzido usando o método de Redução Dinâmica. A redução foi efetuada considerando 21 graus de liberdade ativos.

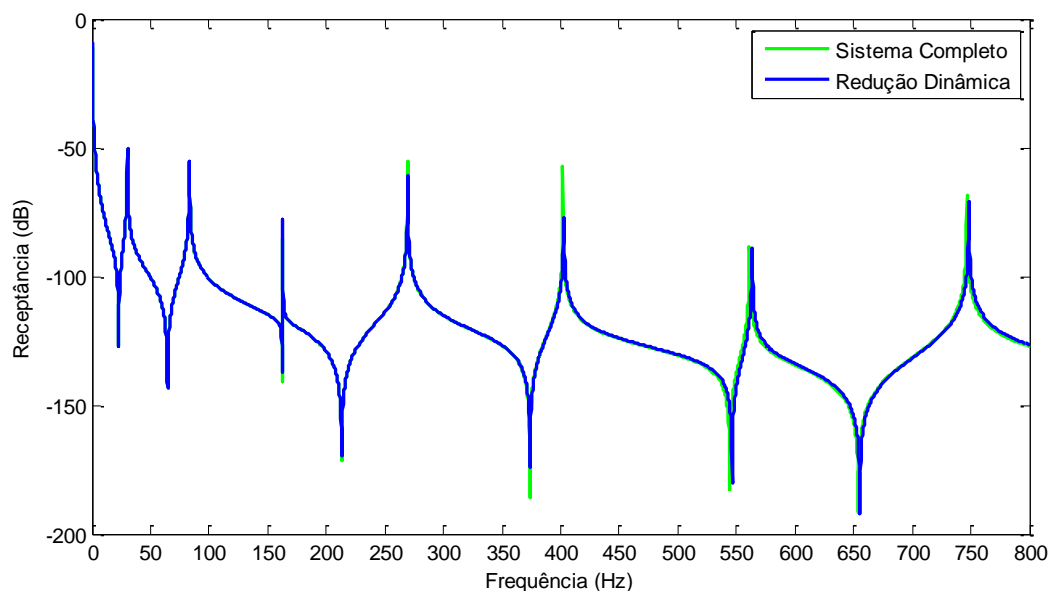


Figura VI.1 Comparação de FRFs entre o sistema completo e o metodo de redução Dinâmica

Anexo VII

MATLAB m-files

%Mf - matriz de massas do sistema global.

%Kf - matriz de rigidez do sistema global.

[U,w]= eig(Kf,Mf);% Calculo dos valores e vetores próprios do sistema global

Guyan Reduction

```
%-----%
%           Métodos de Redução de Sistemas Dinâmicos           %
%           (Redução Estática ou de Guyan)                       %
%-----%
%Redução estática ou de Guyan como é conhecido (despreza efeitos de inércia)
%é um método de redução de sistemas dinâmicos que tem como objetivo reduzir
%as graus de liberdade do sistema global/completo reproduzindo frequências
naturais aproximadamente iguais aos do sistema global.
%Objetivo: determinar a matriz de transformação (T) para o método (Guyan) e
chegar a matriz de massa e rigidez reduzidas ou seja:
%  $K_r=T'*K_f*T$  &  $M_r=T'*M_f*T$ , onde  $K_r$  e  $M_r$  são as matrizes de rigidez e massa
% reduzidas.
% os índices "a" e "i" representam as graus de liberdade ativos (a preservar
no sistema)e inativos (a eliminar do sistema)respectivamente.
%c_inativa - representa o vetor com as coordenadas inativos do sistema.
%c_ativos - representa o vetor com as graus de liberdade ativos do sistema.

[fid,msg]=fopen('FRF_Guyan.dat','w');
c_ativos=input('Introduza um vetor com as graus de liberdade a preservar no
sistema?:');
totaldofs=length(Kf); %nº total de graus de liberdade do sistema global
c_ativos=sort(c_ativos);%ordena os elementos do vector de por ordem crescente
C_inativos=1:totaldofs;
c_inativos(c_ativos)=[]; % cria um vector com as graus de liberdade inativos
a serem excluidas do sistema ficando apenas as graus de liberdade activas.
%Reorganização das matrizes de Massa e Rigidez.
%Matrizes de rigidez
Kaa=zeros (length(c_ativos));% matriz contendo graus de liberdade ativos
Kai=zeros (length(c_ativos),length(c_inativos)); %matriz de rigidez das graus
de liberdade activas (linha) e inativos (coluna)
Kii=zeros (length(c_inativos));%matriz de rigidez que contem apenas graus de
liberdade inactivas
Kia=zeros (length(c_inativos),length(c_ativos)); %matriz de rigidez das graus
de liberdade inativos (linha) e ativos (coluna).
%Matrizes de massa
Maa=zeros(length(c_ativos));
Mai=zeros(length(c_ativos),length(c_inativos));
Mia=zeros(length(c_inativos),length(c_ativos));
Mii=zeros(length(c_inativos));
for i=1:length(c_ativos)
    for j=1:length(c_ativos)
```

```

        Kaa(i,j)=Kf(c_ativos(i),c_ativos(j));
        Maa(i,j)=Mf(c_ativos(i),c_ativos(j));
    end
end
for i=1:length(c_ativos)
    for j=1:length(c_inativos)
        Kai(i,j)=Kf(c_ativos(i),c_inativos(j));
        Mai(i,j)=Mf(c_ativos(i),c_inativos(j));
    end
end
for i=1:length(c_inativos)
    for j=1:length(c_ativos)
        Kia(i,j)=Kf(c_inativos(i),c_ativos(j));
        Mia(i,j)=Mf(c_inativos(i),c_ativos(j));
    end
end
for i=1:length(c_inativos)
    for j=1:length(c_inativos)
        Kii(i,j)=Kf(c_inativos(i),c_inativos(j));
        Mii(i,j)=Mf(c_inativos(i),c_inativos(j));
    end
end
%Reorganização das matrizes massa e rigidez global
K=[Kaa,Kai;Kia,Kii];
M=[Maa,Mai;Mia,Mii];
%Obtenção da matriz de transformação
D = - inv(Kii)* Kia;
n=totaldofs-length(c_inativos);
Tg=[eye(n);D]; %matriz de tranformação de Guayan
%Matriz de rigidez e massa reduzida
Kr = Tg'*K*Tg; %matriz de rigidez reduzida
Mr = Tg'*M*Tg; %matriz de massa reduzida

```

IRS Reduction

```

%-----%
%           Métodos de Redução de Sistemas Dinâmicos           %
%           (Melhoria do Sistema Reduzido (IRS))                %
%-----%
%IRS (Improved Reduced System)-ao contrario do método de Guyan este método
%contabiliza os efeitos de inércia produzindo resultados melhores que as
%obtidas por Guyan.

Kss=inv(Kii);%determinação da inversa da da matriz das graus de liberdade
inativos
p=length(Kss);
Kfi=zeros(size(M)); %matriz de flexibilidade
m=size(Kfi,1);
if p==1
    Kfi(m,m)=Kss;
else
    x=(m+1)-p;

```

```

    Kfi(x:m,x:m)=Kss;
end
Tirs=Tg + Kfi*M*Tg*(inv(Mr))*Kr; % matriz de transformação pelo metodo IRS
Kirs=Tirs'*K*Tirs; %matriz de rigidez reduzida pelo metodo IRS
Mirs=Tirs'*M*Tirs; %matriz de massa reduzida pelo metodo IRS

```

IRS (Iterativo)

```

%-----%
%           Métodos de Redução de Sistemas Dinâmicos           %
%           (Melhoria do Sistema Reduzido (IRS))                %
%           Processo Iterativo                                  %
%-----%
%IRS-Processo iterativo (Improved Reduced System)- ao contrário do método de
Guyan e do IRS clássico este método revela ser muito mais eficientes
produzindo resultados significativamente melhores que as obtidas por Guyan e
IRS clássico.
Tg1=Tg;
iter=0;
T1=Tg + Kfi*M*Tg*(inv(Mr))*Kr; %matriz de transformação correspondente a 1º
iteração
M1=T1'*M*T1;
K1=T1'*K*T1;
T2=Tg + Kfi*M*T1*(inv(M1))*K1; % matriz de transformação relativo a 2º
iteração
M2=T2'*M*T2;
K2=T2'*K*T2;
for i=1:length(T1)
    while T1(i,:)~=T2(i,:)
        T1=Tg + Kfi*M*Tg1*(inv(Mr))*Kr;
        M1=T1'*M*T1;
        K1=T1'*K*T1;
        T2=Tg + Kfi*M*T1*(inv(M1))*K1;
        M2=T2'*M*T2;
        K2=T2'*K*T2;
        Tg1=T2;
        Mr=M2;
        Kr=K2;
        iter=iter+2;%contabiliza o nº de iterações
    end
end
end
Display ('Matriz de Transformação obtida pelo método IRS Iterativo:')
%display (T2)
Display (iter)
Mi=T2'*M*T2;
Ki=T2'*K*T2;

```

SEREP Reduction

```

%-----%
%           Métodos de Redução de Sistemas Dinâmicos           %
%           (Processo de Redução do Sistema Equivalente)         %
%-----%
%Processo de Redução do Sistema Equivalente (SEREP) - faz uma bordagem
diferente dos outros métodos de redução, ou seja em vez de recorrer as
matrizes de massa e rigidez do sistema global, usa os modos de vibração para
a obtenção da matriz de transformação e conseqüentemente as matrizes de massa
e rigidez reduzidas.
%-----%
%           II.***Operações sobre a matriz modal***           %
%-----%
Un=U(:,1:length(c_ativos));%Un matriz com o conjunto de modos especificados
para a redução pelo método SEREP.
Uii=Un(c_inativos,:);%matriz modal com as graus de liberdade inativos (a
serem eliminadas do sistema)
Uaa=Un(c_ativos,:);%matriz modal com as graus de liberdade ativos (a serem
preservadas no sistema)
[m n]=size(Uaa);
%m --> representa o n° de graus de liberdade ativos da matriz modal
%n--> representa o n° de modos na matriz modal
if m >= n
    Ug=(inv(Uaa'*Uaa))*Uaa';%matriz inversa generalizada, também pode -se
usar Ug=pinv(Uaa)
else
    Ug=Uaa'*(inv(Uaa*Uaa'));
end
Tserep=[Uaa;Uii]*Ug; %matriz de transformação para o método SEREP
Kserep=Tserep'*K*Tserep;
Mserep=Tserep'*M*Tserep;

```