



**Gonçalo Nuno Rosado Morais**

Mestre em Matemática Aplicada

## **Dinâmica de Osciladores Acoplados**

Dissertação para obtenção do Grau de Doutor em  
Matemática

Orientador : Rogério Ferreira Martins, Professor Auxiliar, FCT

Júri:

Presidente: Doutor Jorge Orestes Lasbarrères Cerdeira

Arguentes: Doutora Isabel Salgado Labouriau  
Doutor Ricardo Mariano Roque Capela Enguiça

Vogais: Doutor Alessandro Margheri  
Doutor Fábio Augusto da Costa Carvalho Chalub  
Rogério Ferreira Martins



## **Dinâmica de Osciladores Acoplados**

Copyright © Gonçalo Nuno Rosado Morais, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa

A Faculdade de Ciências e Tecnologia e a Universidade Nova de Lisboa têm o direito, perpétuo e sem limites geográficos, de arquivar e publicar esta dissertação através de exemplares impressos reproduzidos em papel ou de forma digital, ou por qualquer outro meio conhecido ou que venha a ser inventado, e de a divulgar através de repositórios científicos e de admitir a sua cópia e distribuição com objectivos educacionais ou de investigação, não comerciais, desde que seja dado crédito ao autor e editor.



*Às minhas três mulheres*

*Por tudo*



# Agradecimentos

Queria agradecer a todos os que me apoiaram durante os anos que esta tese levou a ser construída. Sempre o fizeram na certeza de uma amizade recíproca. A sua nomeação seria algo contrário ao silêncio dos mares profundos de onde nos elevamos e, disfarçados de anonimato, nos ocupamos dos afazeres quotidianos.



# Resumo

---

Nesta dissertação pretende-se dar em primeiro lugar uma teoria geral sobre a chamada *sincronização generalizada* entre osciladores acoplados. Este conceito mais geral de sincronização revela uma estrutura mais complexa da interacção de osciladores acoplados, sendo por esta razão o passo natural a ser dado face ao conceito mais tradicional de *sincronização idêntica*.

A sincronização generalizada tem uma forte componente geométrica através dos trabalhos de Wazewski e de Russel Smith. Esta teoria geral permite estudar de uma forma mais eficiente as condições de sincronização (generalizada) para sistemas com perturbações não-lineares. Neste trabalho vemos que os resultados referentes a sincronização idêntica saem como caso particular do conceito mais geral.

Por outro lado, no caso estudado, as perturbações não-lineares ocorrem dentro de domínios bem determinados. Abordamos também a possibilidade de adaptar algoritmos computacionais a estes domínios, de forma a podermos transmitir de uma maneira mais intuitiva as condições mais gerais de sincronização.

Por último, e como projecto futuro, apresentamos uma discussão de sincronização idêntica em sistemas de segunda ordem, que pretendem reproduzir a situação original de identificação de sincronização por Huygens.

**Palavras-chave:** Sincronização Generalizada, Osciladores Acoplados, Rectângulos Isotéticos.

---



# Abstract

---

In this work, first of all, we want to deliver an abstract theory of the so called *generalized synchronization* among coupled oscillators. This general concept of synchronization reveals a more complex structure about the interaction of the coupled oscillators, being this the natural step to be given from the more restrict concept of *identical synchronization*.

The generalized synchronization has a strong geometric component that comes up as something natural from the classical works of Wazewski and Russel Smith. This general theory allow us to study in a more efficient manner the conditions for the (generalized) synchronization happen. The previous results about identical synchronization come up as a particular case of this more general concept.

On the hand, and as consequence of the application of the abstract theory to a specific example, we can see that the domains where the generalized synchronization appears after a non-linear perturbation have a very good geometric properties in order to solve an optimization problem. This is the result of the efforts to give a more intuitive measure for the variation of the parameters that interfere in the non-linear perturbation.

At the end, and as future project, we present a discussion about the identical synchronization in second order systems that pretend to reproduce the original phenomena testified by Huygens.

**Keywords:** Generalized synchronization, coupled oscillators, isothetic rectangles.

---



# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Estabilidade segundo Lyapunov</b>	<b>9</b>
2.1	Principais definições e conceitos . . . . .	9
2.2	Equação de Lyapunov . . . . .	16
2.3	Estabilidade de Soluções Periódicas . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Teoria Geral das Variedades</b>	<b>27</b>
3.1	Condição de Russel Smith . . . . .	27
3.2	A Variedade Dócil. . . . .	29
3.3	Condição suficiente para a hipótese <b>(H3)</b> . . . . .	39
<b>4</b>	<b>Sincronização de Osciladores Acoplados</b>	<b>41</b>
4.1	Motivação Termodinâmica . . . . .	41
4.2	Um exemplo linear . . . . .	44
4.3	Condições gerais de sincronização . . . . .	47
4.4	Sincronização Idêntica para $f_1 = f_2$ . . . . .	52
4.5	Sobre os intervalos ótimos de $\alpha$ , $\beta$ e $\gamma$ . . . . .	53
4.6	Convexidade de $D_{k,\lambda}$ e regularidade da sua fronteira . . . . .	55
<b>5</b>	<b>Rectângulos Isotéticos</b>	<b>65</b>
5.1	Introdução Geral . . . . .	65
5.2	Noções breves de Análise Convexa . . . . .	66
5.3	Propriedades adicionais de $D_{k,\lambda}$ . . . . .	74
5.4	Topologia e Convexidade . . . . .	77
5.5	Algoritmo para encontrar o Rectângulo Maximal em $D_{k,\lambda}$ . . . . .	83

<b>6</b>	<b>Computação Científica com NUMDE</b>	<b>91</b>
6.1	Construção de Grelhas Tubulares . . . . .	93
6.2	Soluções numéricas de equações diferenciais . . . . .	98
6.3	Sincronização de Pêndulos acoplados por um meio . . . . .	101
	<b>Conclusão</b>	<b>111</b>

# Lista de Figuras

2.1	Valores Próprios da Solução da Equação Lyapunov . . . . .	19
2.2	Atractor de Lorenz . . . . .	25
3.1	Sobre e Sub-soluções . . . . .	35
4.1	O sistema formado por um êmbolo e um cilindro contendo um gás ideal. . . . .	41
4.2	Caso em que $N = 3$ . . . . .	43
4.3	Na figura da esquerda (figura 4.3(a)), a região onde $\Omega$ é definida positiva no plano $\lambda O\alpha$ . Na figura da direita (figura 4.3(b)), a região onde $\Omega$ é definida positiva no plano $\lambda O\gamma$ . . . . .	53
4.4	Vários exemplos de domínios $D_{k,\lambda}$ , para $k = 1$ e $\lambda \in (0, 1)$ . Os contornos representam a fronteira dos domínios, para $\lambda \in \{0.1, 0.2, 0.4, 0.5, 0.7, 0.9\}$ , destacando-se os $D_{k,\lambda}$ para os valores de $\lambda$ indicados. . . . .	54
4.5	Vários exemplos de domínios $D_{k,\lambda}$ , para $k = 1$ e $\lambda \in (1, 3)$ . Os contornos representam a fronteira dos domínios, para $\lambda \in \{1.1, 1.6, 1.9, 2.1, 2.5, 2.9\}$ , destacando-se os $D_{k,\lambda}$ para os valores de $\lambda$ indicados. . . . .	55
4.6	Representação de dois dos casos em que $D_{k,\lambda}$ apresenta singularidades. . . . .	61
4.7	Relação entre $m_2(\alpha, \beta) \geq 0$ e o terceiro menor. . . . .	62
5.1	A distribuição dos vários ângulos na parametrização do conjunto $\partial C$ . . . . .	70
5.2	Casos em que o problema apresenta máximos locais e em que o máximo não é único. . . . .	80
5.3	A partição da fronteira do conjunto $D$ . . . . .	80
5.4	Optimização para o caso de um rectângulo não isotético. . . . .	84
5.5	O caso mais simples em que o rectângulo maximal tem necessariamente três vértices na fronteira do conjunto. . . . .	85
5.6	Se as tangentes não forem paralelas é possível aumentar a área do rectângulo inscrito. . . . .	88

5.7	Os valores maximais para vários valores dos parâmetros $\lambda$ .	89
6.1	Modelo para computação científica com o NUMDE.	91
6.2	Figuras produzidas pelo software NUMDE.	92
6.3	Referencial de Frenet e Pontos da Grelha ao longo da linha.	96
6.4	Triângulos entre secções consecutivas de uma grelha.	97
6.5	As arestas da grelha e a representação final.	97
6.6	Simulação do fluxo geodésico em $\mathbb{T}^2$ usando a NUMDE.	101
6.7	Simulação numérica do acoplamento de dois pêndulos	109



# Introdução

Muitos amigos e pessoas conhecidas pedem-me para lhes explicar o essencial do meu trabalho, de uma forma simplificada, que passa sempre por usar uma linguagem corrente e sem qualquer tipo de maquinaria matemática. Entre eles muitos não percebem como se pode fazer um doutoramento em Matemática. Esta disciplina foi-lhes ensinada muitas vezes como uma língua morta, muito ao estilo do latim e do grego antigo. Segundo eles, tudo o que com ela poderíamos fazer é contemplar as obras passadas. Esforço-me sempre por lhes dizer que nada podia ser mais afastado da realidade. Começo sempre por lhes falar de uma das descobertas científicas que eu considero mais notáveis.

O ser humano parece estar programado para descortinar padrões, para identificar entre tudo o que parece aleatório e de certa maneira sem qualquer tipo de relação, um qualquer fenómeno que faça todo o caos informativo parecer-lhe minimamente familiar. Desde tempos distantes que os homens desciam ao fundo de grutas e nelas marcavam esses padrões, esse ritual quase mágico de fixar nas paredes de grutas profundas a nossa representação da realidade, cumprindo possivelmente também uma forma de glorificação do real.

Quando se entra na gruta de Niaux, quando deixamos para trás a infraestrutura que nos permite descer ao seu fundo, muitas coisas despertam a nossa atenção. Não conseguimos deixar de pensar em como aquele lugar é inóspito, frio, silencioso e

escuro. Munidos de lanternas potentes com baterias recarregáveis, a escuridão é facilmente ultrapassada. Bem agasalhados com roupa de montanha o frio é um mero indício que nos arrefece a ponta do nariz. As perguntas das minhas filhas sobre aquele lugar, sobre aquele estranho lugar, preenchem o silêncio profundo que depois de nós tomará conta daquela escuridão. Mas em momento algum conseguimos deixar de pensar o quão inóspito aquele lugar é.

À medida que vamos descendo, sentimo-nos reduzidos como que a simples moluscos nas entranhas da montanha, rasgadas por anos de actividade geológica que antecederam em muito os primeiros homenídeos que ali entraram. Antes de percorrer aqueles túneis, já muito tinha lido sobre esta e outras grutas na região dos Pirinéus mas nada me podia ter preparado para a emoção, uma emoção quase primordial, direi mesmo estranhamente familiar, do momento em que na galeria principal, numa escuridão quase absoluta, as luzes se acendem num instante arrepiante.

As paredes desta enorme galeria, cuja forma abobadada dá uma enlevação muito especial à sonoridade do espanto sentido por todos, ganhavam vida pela representação rupestre de animais do quotidiano dos homenídeos que habitaram aquela região há mais de doze mil anos. Ali estávamos todos, a testemunhar o ritual dos nossos antepassados que desceram a uma profundidade extraordinária, vestidos com roupas sem qualquer tipo de tecnologia e com archotes que mal iluminavam o caminho, simplesmente para representarem os padrões, para nesta forma de ritual rupestre marcarem, ao longo de quase mil anos, não só a sua actividade mas a sua própria existência.

Para lá de todas as gravuras representando um tipo de actividade que não é já o nosso, existem uma série de pormenores verdadeiramente deliciosos que nos deixam ainda mais espantados com este tipo de actividade. O primeiro prende-se com o facto de estas grutas não serem utilizadas para rituais funerários. Existem grutas em redor deste local onde, de facto, se encontraram restos mortais de homenídeos contemporâneos das imagens rupestres.

O segundo aspecto interessante prende-se com a estrutura global da distribuição das pinturas. Em outras grutas afastadas desta, tão afastadas ao ponto de ser difícil de supor que existisse uma comunicação acentuada entre as várias comunidades, as imagens representadas, a forma como as imagens eram dispostas globalmente pelas grutas, os materiais usados para as pinturas, são aspectos com um grau de semelhança quase perturbador.

Parece difícil que algum dia venhamos a ter perfeito entendimento deste fenómeno. As perguntas continuam com respostas suspensas, como que passos intermédios a caminho de um entendimento que sabemos nunca será total. Ainda assim, e este é o terceiro aspecto curioso, estamos hoje muito mais próximos de entender fenómenos deste tipo do que estávamos ainda há um século atrás.

Em muitos pontos da gruta, na mesma parede em que estão representados desenhos com mais de doze mil anos, estão nomes de pessoas que anotaram a sua passagem por este local com o respectivo ano. Sobretudo muito próximo da antiga entrada da gruta, hoje fechada devido a uma derrocada, os nomes mais variados com datas que vão desde o século XVII até muito próximo do final do século XIX.

Não deixa de ser extraordinário que, ao longo de séculos, esta gruta tenha sido percorrida por uma quantidade considerável de pessoas e que nunca, em momento algum, eles tenham conseguido perceber o que estava em seu redor. Ao lado do sítio em que eles jovialmente colocavam o nome e datavam o seu episódio, os seus antepassados distantes tinham marcado de uma forma padronizada a respectiva existência.

A verdade é que estes homens e estas mulheres que visitaram a gruta entre os séculos XVII e XIX nunca poderiam perceber o que estava em seu redor. Os padrões aí representados não tinham para eles qualquer tipo de significado para lá de imagens espalhadas ao longo de uma gruta. O que lhes faltava era um contexto em que esses padrões pudessem ter para eles um significado *per si*. Em [Lew02], o autor mostra-nos as razões para que os padrões emergentes das paredes das grutas não tivessem qualquer tipo de familiaridade para os homens e mulheres dos séculos mais próximos de nós. Uma vez dado o passo decisivo no sentido da compreensão deste fenómeno, estabeleceram-se paralelos com informações provenientes de outros locais, formaram-se padrões, o conhecimento ganhou abstracção.

Contudo, a natureza está repleta de padrões, mais ou menos profundos, mais ou menos visíveis. O assunto principal desta tese, possivelmente o assunto de qualquer tese, é a tentativa de compreender um passo mais do caminho perene do entendimento das coisas que nos cercam. Em nosso redor existe um conjunto aparentemente infundável de objectos naturais que têm uma natureza pulsante a que damos o nome de *osciladores*. Estes objectos têm um comportamento mais ou menos periódico, entre dois estados que podemos considerar como que opostos. Os pirilampos alternam entre um estado em que emitem luz e um outro em que cessam de a irradiar, as células do nó sinoatrial do coração fazem descargas eléctricas intermitentes com um ritmo que nos dá a pulsação cardíaca, os relógios de pêndulo têm um mecanismo periódico

que é preciso recarregar de tempos a tempos.

Ainda mais interessante, é compreender o fenómeno em que estes osciladores demonstram quando acoplados. Para lá do bem conhecido fenómeno da ressonância, em que dois osciladores com a mesma frequência se excitam mutuamente até ao limite das suas amplitudes, existe um fenómeno mais estranho e ao mesmo tempo mais interessante: o fenómeno da *sincronização*.

A sincronização é um fenómeno fino e delicado. Em [Str03], Steven Strogatz explica a emergência deste fenómeno numa série de exemplos. Vamo-nos deter em dois particularmente interessantes que nos permitirão perceber a diferença entre sincronização e ressonância. Os dois exemplos são de duas pontes famosas: a ponte de Tacoma no estado do Washington e a Millenium Bridge em Londres.

A ponte de Tacoma colapsou de uma forma espectacular. Atingida por ventos com uma velocidade de 64 Km/h, o seu tabuleiro começou a balançar lateralmente mantendo fixo o seu ponto central. Poucas horas depois de ter começado a baloiçar, a estrutura acabou por ceder e o tabuleiro da ponte ruiu. Todas as explicações para o acidente têm um ponto em comum: o colapso da ponte ficou a dever-se à ressonância provocada pelo vento que, ressonando com a estrutura da ponte, fez com que a amplitude de oscilação da mesma atingisse o ponto de ruptura.

No segundo caso, o da Millenium Bridge, a situação é um pouco diferente. Após a inauguração, esta ponte exclusivamente pedonal esteve aberta ao público durante dois dias. A razão aparente liga-se directamente com o que aconteceu no caso da ponte de Tacoma: a ponte baloiçava lateralmente com tal amplitude que impedia que os peões a conseguissem atravessar com uma passada natural. Como a ponte tinha um deslocamento lateral, os peões tinham de modificar a sua passada de forma a poderem manter o equilíbrio. Os vídeos da ponte filmados nestes dias mostram-na cheia de pessoas que tinham sincronizado a sua passada com o deslocamento do tabuleiro.

A grande diferença entre estes dois exemplos prende-se com o facto de, no caso da ponte de Tacoma, o vento não ter ajustado minimamente a sua frequência à frequência de oscilação do tabuleiro. No caso da Millenium Bridge foram as pessoas que fizeram a ponte oscilar. A energia transmitida à estrutura da ponte era superior àquela que esta podia dissipar. Isto fazia com que as pessoas tivessem que ajustar continuamente a sua passada ao deslocamento anómalo, excitando a oscilação da mesma, criando-se assim um sistema que se auto-regulava. A tragédia parecia iminente.

Dito de uma maneira simples, no caso da ponte de Tacoma não existiu nenhum fenómeno de sincronização pois não houve uma adaptação das frequências. No caso da Millenium Bridge, o fenómeno de sincronização é evidente. Este último exemplo tem o ingrediente essencial para o fenómeno da sincronização: é dinamicamente estável. O que pretendemos apresentar neste trabalho é a estrutura matemática da sincronização, aquilo que a permite distinguir da mais pura coincidência.

Aquilo que sabemos acerca da emergência de uma ordem espontânea a partir do caos, que Huygens em 1665 numa carta ao pai designou por sincronização, está num ponto muito semelhante aquando da identificação das primeiras pinturas rupestres descritas no início desta introdução. Apesar dos avanços significativos feitos nas últimas décadas, ainda é muito difícil descrever e sobretudo prever com toda a exactidão este fenómeno.

A forma mais comum de sincronização é a chamada *sincronização idêntica*. Basicamente, pode ser descrita como a tal emergência de uma ordem a partir de um conjunto de osciladores acoplados. A forma como esta ordem se expressa difere de caso para caso, mas essencialmente dizemos que temos sincronização idêntica quando, todos os osciladores tendem para um estado em que igualam a sua posição. Nesta dissertação tratamos de um outro tipo de sincronização: a *sincronização generalizada*.

No caso da sincronização generalizada, procuramos uma variedade de dimensão  $k$ , onde  $k$  é inferior à dimensão do sistema, e condições para que esta variedade seja globalmente estável. Neste caso, embora possa não ser imediato, a componente de cada oscilador está condicionada pelo comportamento dos restantes.

Esta dissertação tem como ponto de partida o trabalho realizado por Margheri e Martins em [MM10], tendo sido aqui introduzido o conceito de sincronização generalizada que aqui usamos. Um dos incrementos naturais presentes nesta dissertação prende-se com a necessidade de estabelecermos uma certa abstracção da teoria aí apresentada, visto que o tipo de acoplamento que aqui estudámos tem características diferentes. Ao contrário dos exemplos de acoplamento que aparecem em [MM10], todos os acoplamentos que aqui estudamos são efectuados através de um meio, tendo sido este o factor que nos levou a criar uma teoria mais abstracta baseada na que está apresentada em [MM10].

Assim, e explicando a estrutura geral desta dissertação, no capítulo 2 introduzimos os conceitos fundamentais sobre estabilidade de sistemas dinâmicos. Temos um cuidado particular de explicar a naturalidade da equação de Lyapunov neste contexto e perceber as consequências de perturbar a matriz original do sistema da forma como

mais tarde iremos empregar. Todo o material contido neste capítulo será mais tarde usado. Serve, acima de tudo, para estabelecer conceitos de forma a que esta tese seja o mais auto-contida possível.

No capítulo 3 é estabelecida a teoria abstracta de sincronização generalizada. Usando como base a condição de Russel Smith e o princípio topológico de Wazewski estabelecemos aquilo que apelidámos por Teorema de Sincronização Generalizada. Este estabelece as condições com as quais podemos garantir a existência de uma variedade globalmente estável de dimensão inferior.

No capítulo 4 usamos a teoria abstracta desenvolvida no capítulo precedente para identificarmos as várias formas de sincronização generalizada para um sistema composto por dois osciladores acoplados por um meio.

No capítulo seguinte, discutimos um problema de natureza diferente. Quando perturbámos o sistema discutido no capítulo 4 de forma não idêntica, vimos que se estas perturbações partissem de dentro de uns domínios bem definidos, a sincronização generalizada ainda ocorria. Estes domínios são convexos, compactos e, tirando um conjunto finito de casos, com fronteira regular. Pretendendo dar uma representação mais intuitiva da forma como a perturbação não-linear não destrói a sincronização estabelecida para o caso linear, mostramos que os resultados de geometria computacional sobre a forma como se pode encontrar o maior rectângulo isotético dentro de um polígono convexo pode ser estendido ao caso dos nossos domínios. Fazemos para isso uma caracterização geométrica e topológica deste problema.

No capítulo 6 discutimos sumariamente os resultados conhecidos para a sincronização de dois pêndulos acoplados através de um meio. Para além do natural interesse histórico, pois os modelos aqui discutidos são formulações matemáticas do fenómeno originalmente testemunhado por Huygens em 1665, mostra também que, por um lado, o tipo de acoplamento produzido é em tudo semelhante ao que é por nós discutido no capítulo 4. Por outro lado, expõe as lacunas do nosso modelo, mostrando que, para sistemas de dimensão muito grande, torna-se impracticável resolver a equação de Lyapunov por métodos puramente analíticos.

Sobre a sincronização, já passámos decisivamente a fase em que as pessoas entravam nas grutas e não reconheciam os padrões rupestres que para nós hoje surgem como evidentes. Contudo, ainda não conseguimos compreender o seu âmago. Como cientistas, não nos é permitido forjar respostas, mas tentar uma vez e sempre um percurso de perguntas e dúvidas recorrentes. Este trabalho, mais do que tudo, é esse caminho e a curiosidade inata de descobrir padrões, de ir até ao fim da questão sem

receio de ter de voltar atrás, nunca recuando nas dificuldades que a todo o momento vão testando a nossa perseverança. Este caminho é mais um, trilhado no enorme planeta da ciência e o seu testemunho, deveras honesto e sem misticismos. Como se costuma dizer no Judo, um cinto negro é um cinto branco que nunca desistiu. Um cientista será somente uma curiosidade inata que o tempo não domou?

*Há um piano carregado de músicas e um banco  
há uma voz baixa, agradável, ao telefone  
há retalhos de um roxo muito vivo, bocados de fitas de todas as cores  
há pedaços de neve de cristas agudas semelhantes às das cristas de água, no mar  
há uma cabeça de mulher coroada com o ouro torrencial da sua magnífica beleza  
há o céu muito escuro  
há os dois lutadores morenos e impacientes  
há novos poetas sábios químicos físicos tirando os guardanapos do pão branco do espaço  
há a armada que dança para o imperador detido de pés e mãos no seu palácio  
há a minha alegria incomensurável  
há o tufão que além disso matou treze pessoas em Kiu-Siu  
há funcionários de rosto severo e a fazer perguntas em francês  
há a morte dos outros ó minha vida  
há um sol esplendente nas coisas*

— Mário Cesariny, Manual de Prestidigitação, (1956)



# Estabilidade segundo Lyapunov

Neste capítulo introduzimos os conceitos fundamentais relacionados com o conceito de estabilidade e que posteriormente serão aplicados à análise da sincronização de osciladores. Também tem como finalidade fixar os conceitos e respectiva notação.

## 2.1 Principais definições e conceitos

O estudo da sincronização de osciladores acoplados é o tema central desta dissertação. O acoplamento é formulado através de um sistema de equações diferenciais do tipo

$$\dot{x} = f(x, t), \quad (2.1)$$

para uma condição inicial da forma  $x(t_0) = x_0$ , com  $x \in \mathbb{R}^N$  e com  $t \in \mathbb{R}$ . Ao longo da dissertação assumiremos sempre que  $f$  é contínua e tem a regularidade suficiente para a existência e unicidade de solução. Introduzimos de imediato um dos conceitos centrais na Teoria dos Sistemas Dinâmicos: o conceito de estabilidade no sentido de Lyapunov. Supomos que a origem é um ponto de equilíbrio, ou seja,  $f(0, t) = 0$  para qualquer  $t > 0$ . Podemos sempre colocar um ponto de equilíbrio na origem de um referencial por uma adequada mudança de coordenadas.

**Definição 2.1.** *O ponto de equilíbrio  $x = 0$  diz-se um ponto de equilíbrio estável para o*

sistema (2.1) se para qualquer  $t_0 \in \mathbb{R}$  e  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta = \delta(t_0, \varepsilon)$  tal que

$$\|x_0\| < \delta \implies \|x(t; t_0, x_0)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0,$$

onde  $x(t) = x(t; t_0, x_0)$  é uma solução de (2.1) que verifica a condição inicial  $x(t_0) = x_0$ . Se para além disso  $x = 0$  é atrator, i.e., se

$$\|x_0\| < \delta \text{ então } \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0,$$

o ponto  $x = 0$  diz-se assintoticamente estável. Se a escolha do parâmetro  $\delta$  for independente do  $t_0$  escolhido, a estabilidade diz-se uniforme.

A existência de um ponto de equilíbrio assintoticamente estável está relacionado com o conceito mais geral de dissipação de energia num sistema físico. Tendo em vista a formulação rigorosa deste conceito introduzimos as seguintes definições.

**Definição 2.2.** Uma função  $\alpha: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  diz-se de classe  $K$  se é contínua, estritamente crescente e verificando  $\alpha(0) = 0$ . Se para além destas propriedades verificar igualmente  $\lim_{x \rightarrow \infty} \alpha(x) = \infty$  dir-se-à uma função de classe  $KR$ .

A partir destes conceitos podemos definir convenientemente *funções definidas positivas* e as *funções decrescentes*, centrais para o desenvolvimento ulterior da teoria que iremos desenvolver.

**Definição 2.3.** Uma função contínua  $v: \mathbb{R}^N \times [t_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$  é uma função definida positiva se existir uma função  $\alpha$  de classe  $KR$  tal que para qualquer  $t \in [t_0, +\infty)$  e para qualquer  $x \in \mathbb{R}^N$  temos que

$$v(0, t) = 0 \text{ e } v(x, t) \geq \alpha(|x|).$$

**Definição 2.4.** Uma função contínua  $v: \mathbb{R}^N \times [t_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$  é uma função decrescente se existir uma função  $\beta$  de classe  $K$  tal que para qualquer  $t \in [t_0, +\infty)$  e para qualquer  $x \in \mathbb{R}^N$  temos que

$$v(x, t) \leq \beta(|x|).$$

**Exemplo 2.1.** Considere-se uma matriz simétrica  $D$  de ordem  $N$  definida positiva e a forma quadrática correspondente

$$V(x) = x^T D x.$$

Por definição sabemos que  $x^T D x \in \mathbb{R}_0^+$  e  $x^T D x = 0$  se e só se  $x = 0$ . Além disso, a condição necessária e suficiente para que  $D$  seja definida positiva é que todos os seus valores próprios sejam positivos (ver [Bha98], pag. 12, para esta e outras caracterizações de matrizes definidas positivas).

Considere-se o espectro da matriz  $D$  dado por  $\sigma(D) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  e  $\lambda_i > 0$  para  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Definindo  $\lambda_* = \min\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  e a partir deste a função  $\alpha(|x|) = \lambda_* |x|$ , verifica-se de imediato que  $V(x) \geq \alpha(|x|)$ . Assim  $V(x, t)$  é uma função definida positiva. De modo perfeitamente análogo, considerando  $\lambda^* = \max\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  e definindo  $\beta(|x|) = \lambda^* |x|$ , é imediata a relação  $V(x) \leq \beta(|x|)$ . Verifica-se assim que  $V(x, t)$  é igualmente de uma função decrescente.

A partir das funções definidas positivas podemos, sem resolver o sistema (2.1), classificar quanto à estabilidade a dinâmica por ele descrito. Para isso vamos introduzir uma forma de medir a variação de um determinado campo escalar ao longo de um fluxo definindo a derivada de Lie.

Considere-se um campo vectorial  $H: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$  e um campo escalar  $V: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  com a regularidade suficiente para as operações que vamos encetar. Define-se a derivada de Lie<sup>1</sup> do campo escalar  $V$  ao longo de  $H$  por

$$\nabla_H V(x) = \nabla V(x) \cdot H(x) = \sum_{i=1}^k H_i(x) \frac{\partial V}{\partial x_i}(x).$$

Existem várias interpretações geométricas para a derivada de Lie dependendo do contexto em que estamos. Sendo  $x(t; t_0, x_0)$  o fluxo gerado pelo campo vectorial  $H$  conclui-se sem dificuldade que

$$\nabla_H V(x(t; t_0, x_0)) = \frac{d}{dt} V(x(t; t_0, x_0)). \quad (2.2)$$

A derivada de Lie mede assim a variação de  $V$  ao longo da órbita  $x(t; t_0, x_0)$ . No Teorema de Lyapunov, que apresentaremos adiante, a forma como um campo escalar varia ao longo das soluções de uma equação diferencial é uma das propriedades centrais para poder concluir a estabilidade de um ponto de equilíbrio. Temos de clarificar

<sup>1</sup>A derivada de Lie pode ser definida com muito maior generalidade, visto que para além de campos escalares, podemos calcular a derivada de Lie de campos vectoriais e de formas diferenciais. Para todo o domínio dos detalhes, ver por exemplo [Fra04], pag.125 e seguintes.

no entanto a forma como é aplicada a derivada de Lie ao nosso problema. Considere-se novamente um sistema do tipo do apresentado em (2.1)

$$\dot{x} = f(x, t).$$

Este sistema pode ser transformado num sistema autónomo se considerarmos

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, t) \\ \dot{t} = 1. \end{cases} \quad (2.3)$$

Temos assim um novo campo vectorial  $\tilde{F}(x, t) = (f(x, t), 1)$ . Para um dado campo escalar  $V(x, t): \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , a sua derivada de Lie ao longo das soluções do sistema (2.1), que representaremos por  $\dot{V}(x, t)$ , será

$$\dot{V}(x, t) = \nabla_{\tilde{F}} V(x, t) = \nabla V(x, t) \cdot \tilde{F}(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i}(x, t) f_i(x, t) + \frac{\partial V}{\partial t}.$$

Note-se que a definição da derivada de Lie para um campo escalar ao longo das soluções do problema (2.1) é a que naturalmente se adapta à interpretação geométrica apresentada em (2.2). Este aspecto é essencial para podermos estabelecer através destas funções a estabilidade de uma determinada solução.

Considere-se uma função definida positiva  $V(x, t)$ , isto é,  $V(0, t) = 0$  para todo o  $t \geq t_0$  e para a qual existe uma função  $\alpha$  de classe KR tal que para todo o  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $t \geq t_0$  temos que  $V(x, t) \geq \alpha(|x|)$ . Vamos supor que ao longo das órbitas do sistema (2.1) temos  $\dot{V}(x, t) \leq 0$ . Para qualquer  $\varepsilon > 0$  e  $t \geq t_0$ , pela continuidade de  $V$ , podemos escolher  $\delta > 0$  tal que

$$\Omega(t_0, \delta) = \sup_{|x| \leq \delta} V(x, t_0) < \alpha(\varepsilon).$$

Vamos supor que  $|x(t_0)| < \delta$ . Para mostrar que  $|x(t_0)| < \varepsilon$  basta encadear as desigualdades

$$\alpha(|x(t_0)|) \leq V(x(t_0), t_0) < \alpha(\varepsilon).$$

Pelo facto de  $\alpha$  ser crescente concluímos  $|x(t_0)| < \varepsilon$ . Temos agora de estabelecer que a mesma situação ocorre ao longo da órbita quando  $t > t_0$ .

Para um dado  $t > t_0$  vamos supor que  $|x(t; t_0, x_0)| > \varepsilon$ , onde  $x_0 = x(t_0)$ . Usando

a propriedade de função definida positiva, podemos escrever sucessivamente

$$V(x(t; t_0, x_0), t) \geq \alpha(|x(t; t_0, x_0)|) > \alpha(\varepsilon) \geq V(x_0, t_0) = V(x(t_0; t_0, x_0), t_0).$$

Contudo, por hipótese temos  $\dot{V}(x(t; t_0, x_0), t) \leq 0$ , pelo que obtemos de imediato um absurdo, podendo finalmente afirmar a condição de estabilidade de Lyapunov

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: |x_0| < \delta \Rightarrow |x(t; t_0, x_0)| < \varepsilon,$$

para todo o  $t \geq t_0$  e onde  $\delta$  é uma função de  $t_0$ . Contudo ainda não podemos escolher o parâmetro  $\delta$  independente de  $t_0$ . Assumindo que  $V$  é uma função decrescente, existe uma função  $\beta$  de classe  $K$  tal que para qualquer  $x \in \mathbb{R}^N$  e  $t \geq t_0$  temos  $V(x, t) \leq \beta(|x|)$ . Isto permitir-nos-à para qualquer  $\varepsilon > 0$  definir  $\delta > 0$  tais que

$$\Omega(\delta) = \sup_{|x| \leq \delta} V(x, t) \leq \sup_{|x| \leq \delta} \beta(|x|) = \beta(\delta) < \alpha(\varepsilon).$$

Podemos concluir, que independente de  $t_0$ , se  $|x_0| \leq \delta$  então  $|x(t; t_0, x_0)| < \varepsilon$ .

Para termos a estabilidade assintótica temos de assumir adicionalmente que  $-\dot{V}(x, t)$  é uma função definida positiva. O nosso objectivo é demonstrar que nestas condições existe  $\delta_1 > 0$  tal que para  $\varepsilon > 0$  existirá  $T(\varepsilon) < +\infty$  tal que

$$|x_0| < \delta_1 \Rightarrow |x(t_1 + t; t_1, x_0)| < \varepsilon \text{ sempre que } t > T(\varepsilon).$$

Nas condições que estamos a assumir, já tinha sido concluído anteriormente que as órbitas do sistema são estáveis, pelo que para uma escolha apropriada sabemos que estas irão permanecer dentro de uma bola  $B(0, r)$  de centro na origem e raio  $r$ . Além disso, garantem-nos a existência das funções  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  de classe  $K$  tais que, para todo o  $t \geq t_0$  e para todo o  $x \in B(0, r)$ ,

$$\alpha(|x|) \leq V(x, t) \leq \beta(|x|) \text{ e } \dot{V}(x, t) \leq -\gamma(|x|).$$

Dado  $\varepsilon > 0$  definimos  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  e  $T$  pelas condições

$$\beta(\delta_1) < \alpha(r), \beta(\delta_2) < \min(\alpha(\varepsilon), \beta(\delta_1)) \text{ e } T = \frac{\alpha(r)}{\gamma(\delta_2)}.$$

Vamos mostrar que nestas condições existirá  $t_2 \in [t_1, t_1 + T]$  tal que  $|x(t_2; t_1, x_0)| < \delta_2$ . De modo a obtermos um absurdo, vamos supôr a negação desta última condição, ou

seja, que  $|x(t; t_1, x_0)| \geq \delta_2$  para todo o  $t \in [t_1, t_1 + T]$ . Com esta suposição iremos obter sucessivamente

$$\begin{aligned} 0 \leq \alpha(\delta_2) &\leq V(x(t_1 + T; t_1, x_0), t_1 + T) = \\ &= V(x_0, t_1) + \int_{t_1}^{t_1+T} \dot{V}(x(\tau; t_1, x_0), \tau) d\tau \\ &\leq \beta(\delta_1) - T\gamma(\delta_2) \leq \beta(\delta_1) - \alpha(r) < 0. \end{aligned}$$

Deste absurdo e porque  $\dot{V}(x, t) \leq 0$ , se  $t \geq t_1 + T$  iremos ter

$$\alpha(|x(t; t_1, x_0)|) \leq V(x(t; t_1, x_0), t) \leq V(x(t_2; t_1, x_0), t_2).$$

Podemos então finalmente concluir que

$$\alpha(|x(t; t_1, x_0)|) \leq V(x(t_2; t_1, x_0), t_2) \leq \beta(|x(t_2; t_1, x_0)|) \leq \beta(\delta_2) < \alpha(\varepsilon).$$

Logo  $|x(t; t_1, x_0)| < \varepsilon$  para todo o  $t \geq t_1 + T$ . As conclusões deduzidas anteriormente são sumarizadas no seguinte teorema.

**Teorema 2.1** (Teorema de Lyapunov). *Considere-se uma função  $V(x, t)$  definida positiva e que ao longo das soluções do sistema (2.1) verifica*

$$\dot{V}(x, t) \leq 0. \tag{2.4}$$

*Então o ponto de equilíbrio é um ponto de equilíbrio estável. Se além disso  $V$  for decrescente então a estabilidade é uniforme. Se além disso  $-\dot{V}(x, t)$  for uma função definida positiva, o ponto de equilíbrio é assintoticamente estável.*

No caso dos sistemas autónomos, a discussão da estabilidade é de alguma maneira simplificada, pois não temos a variável temporal para controlar. O Teorema de Lyapunov para sistemas autónomos é assim bastante mais simples de apresentar.

**Teorema 2.2** (Teorema de Lyapunov para sistemas autónomos). *Supondo que o sistema  $\dot{x} = F(x)$  tem um ponto de equilíbrio na origem e  $W$  uma vizinhança desse ponto, o ponto de equilíbrio será estável se  $V(x) > 0$  em  $W - 0$ ,  $V(0) = 0$  e  $\dot{V}(x) \leq 0$  ao longo de uma solução  $x(t)$  do sistema (2.1). No caso em que  $\dot{V}(x) < 0$  então o ponto de equilíbrio será assintoticamente estável.*

As funções  $V$  com as propriedades anunciadas nos teoremas anteriores são usualmente designadas por *funções de Lyapunov*. Embora não exista um método genérico

para determinar funções de Lyapunov, importa referir que as mesmas podem ser empregues para classificar a estabilidade sem que para isso seja necessário resolver o sistema de equações diferenciais. Muitas vezes a Energia é uma função de Lyapunov para o sistema em estudo. Na discussão apresentada no final deste capítulo iremos observar que as funções de Lyapunov podem ser empregues num sentido mais lato do que até aqui discutido.

**Exemplo 2.2.** *Considere-se um oscilador cujo comportamento é determinado pela equação diferencial  $\ddot{x} + \alpha\dot{x} + g(x) = 0$ , com  $\alpha > 0$  e  $g$  uma função suficientemente regular tal que  $g(0) = 0$ . Se para todo o  $x \in \mathbb{R}$  temos que  $g'(x) > 0$ , é imediato verificar que*

$$E(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \int_0^x g(u)du,$$

*é uma função definida positiva e deste modo uma função de Lyapunov para o sistema dado. Como para  $x \neq 0$  verifica-se que*

$$\dot{E}(x, \dot{x}) = \dot{x}(\ddot{x} + g(x)) = -\alpha\dot{x}^2 \leq 0.$$

*A origem é assim estável. Como não existe nenhuma órbita para lá de  $x(t) = 0$  para a qual  $\dot{E}(x, \dot{x}) = 0$ , pelo princípio de LaSalle (ver [Sas99], pag. 199), podemos garantir a estabilidade assintótica do ponto de equilíbrio.*

*No caso em que não existe atrito ( $\alpha = 0$ ) verifica-se igualmente que  $E$  representa uma quantidade conservada ao longo das órbitas, caso em que a solução não convergirá para o ponto  $x = 0$ .*

Como já foi anteriormente referido, no caso de  $V(x, t)$  ser uma função decrescente e  $\beta$  uma função de classe  $K$  tal que, para qualquer  $x \in \mathbb{R}^n$  e para qualquer  $t \geq t_0$

$$V(x, t) \leq \beta(|x|),$$

para um dado  $\varepsilon > 0$  a escolha do  $\delta$  positivo correspondente deixa de estar dependente do  $t_0$  escolhido, pois neste caso fica bem definido

$$\Omega(\delta) = \sup_{|x| \leq \delta} V(x, t) < \alpha(\varepsilon).$$

Repetindo o raciocínio apresentado para a introdução do Teorema de Lyapunov, podemos de imediato concluir a estabilidade, neste caso *uniforme*, do ponto de equilíbrio  $x = 0$ . No caso de um sistema não-autónomo, periódico na variável  $t$ , a estabilidade

de um ponto de equilíbrio é automaticamente uniforme. Se para algum  $T \in \mathbb{R}$  fixo,  $f(x, t + T) = f(x, t)$  para todo o  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $t \in \mathbb{R}$ , dizemos que  $f$  é  $T$ -periódica em  $t$ .

**Teorema 2.3.** *Considere-se o sistema de equações diferenciais  $\dot{x} = f(x, t)$  tal que  $f$  é  $T$ -periódica. Se existir uma função de Lyapunov  $V(x, t)$ , i.e.  $V(x, t)$  é uma função definida positiva e  $\dot{V}(x, t) \leq 0$  ao longo das soluções do sistema,  $T$ -periódica em  $t$  para o sistema considerado, então*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: |x(t_0)| < \delta \Rightarrow |x(t; t_0, x_0)| < \varepsilon,$$

onde  $\delta$  é independente de  $t_0$ .

*Demonstração.* Pelo facto de  $V$  ser uma função contínua, sabemos que para qualquer  $\varepsilon > 0$  podemos encontrar  $\delta > 0$  tal que

$$\Omega(\delta) = \sup_{|x| \leq \delta} \sup_{t \in [0, T]} V(x, t) < \alpha(\varepsilon). \quad (2.5)$$

Caso contrário poderíamos definir uma sucessão  $x_n \rightarrow 0$  e  $t_n \in [0, T]$  para a qual  $V(x_n, t_n) > \alpha(\varepsilon)$ , por compacidade podemos garantir a existência de uma sub-sucessão convergente  $(x_n^*, t_n^*) \rightarrow (0, t_0)$  o que, por continuidade, implicaria necessariamente  $V(x_n^*, t_n^*) \rightarrow V(0, t_0) = 0$ , obtendo assim um absurdo.

Falta-nos estudar o que se passa para  $t_0 \notin [0, T]$ . Obviamente que para este caso vamos usar o facto de  $V(x, t)$  ser  $T$ -periódica na variável  $t$ . De facto, para qualquer  $t_0 \in \mathbb{R}$  existe um  $k \in \mathbb{Z}$  e um  $t_0^* \in [0, T]$  tal que  $t_0 = t_0^* + kT$  pelo que

$$\Omega(\delta) = \sup_{|x| < \delta} \sup_{t \in [0, T]} V(x, t) = \sup_{|x| < \delta} \sup_{t \in \mathbb{R}} V(x, t) < \alpha(\varepsilon).$$

Basta agora repetir o raciocínio apresentado para a introdução do Teorema de Lyapunov para concluir o resultado pretendido.  $\square$

## 2.2 Equação de Lyapunov

Num curso introdutório de equações diferenciais estuda-se a estabilidade de um sistema linear

$$\dot{x} = Ax, \quad (2.6)$$

determinando os valores próprios da matriz quadrada  $A$ . Uma caracterização importante para o problema da estabilidade que estamos a discutir prende-se com a inércia de uma matriz.

**Definição 2.5.** Dada uma matriz  $A \in M_n$  representa-se por  $i_+(A)$ ,  $i_0(A)$  e por  $i_-(A)$  respectivamente o número de valores próprios de  $A$ , contados com as devidas multiplicidades, com parte real positiva, com parte real nula e com parte real negativa. O vector

$$i(A) = (i_+(A), i_-(A), i_0(A)),$$

tem o nome de inércia da matriz  $A$ .

Podemos em alternativa considerar uma matriz definida positiva  $P$  e a correspondente forma quadrática, naturalmente também definida positiva, dada por

$$V(x) = x^T P x. \quad (2.7)$$

Para que  $V$  seja uma função de Lyapunov é necessário que a sua derivada de Lie ao longo das órbitas do problema seja por sua vez uma função definida negativa. Sendo  $x(t)$  uma solução do sistema (2.6), calculando a derivada de Lie do campo escalar  $V(x)$ , obtemos imediatamente

$$\dot{V}(x) = x^T (A^T P + P A) x.$$

No caso de existir uma matriz  $Q$ , quadrada de ordem  $n$  e definida positiva para a qual  $P$  seja solução da chamada *equação de Lyapunov*

$$A^T P + P A = -Q, \quad (2.8)$$

então  $V$  é uma função de Lyapunov para a equação (2.6). Admitindo uma função de Lyapunov, mostrámos que o sistema de equações lineares é assintoticamente estável, pois no caso contrário, algum dos valores próprios da matriz  $P$  teria parte real nula (no caso em que a estabilidade não seria assintótica) ou positiva (caso em que o equilíbrio não era estável). Neste caso poderemos concluir inequivocamente que todos os valores próprios da matriz  $A$  têm parte real negativa. Como observação, note-se que mostrando que  $V$  é uma função definida positiva, mostrámos (in)directamente que os  $n$  valores próprios da matriz  $P$  são todos positivos, enquanto que os  $n$  valores próprios da matriz  $A$  têm necessariamente a parte real negativa.

Existem no entanto dois pontos fundamentais referentes à equação de Lyapunov (2.8). O primeiro aspecto prende-se naturalmente com a existência de solução. A resposta a esta questão é estabelecida pelo Teorema 2.4, que resulta como corolário do Teorema (4.4.6) de [HJ90], adaptado adequadamente à presente discussão.

**Teorema 2.4.** *Dada uma matriz quadrada  $A$ , para qualquer matriz quadrada  $Q$  a equação de Lyapunov tem solução única se e só se*

$$\sigma(A) \cap \sigma(-A) = \emptyset.$$

Note-se que o resultado apresentado no teorema anterior é trivialmente verificado se os valores próprios da matriz  $A$  forem todos positivos.

O segundo ponto que importa discutir é perceber o que acontece numa situação intermédia em que a matriz  $A$ , digamos, possui  $k$  valores próprios com parte real positiva e  $n - k$  com parte real negativa. A resposta é rigorosamente explicitada no Teorema Geral da Inércia.

**Teorema 2.5** (Teorema Geral da Inércia). *Considere-se  $A \in M_n$ . Então existe uma matriz simétrica  $G \in M_n$  e uma matriz definida positiva  $H \in M_n$  tais que  $GA + A^T G = H$  se e apenas se  $i_0(A) = 0$ . Neste caso  $i(A) = i(G)$ .*

*Demonstração.* Ver [HJ90], pag. 105. □

Note-se que no caso de a matriz  $H$  ser definida negativa, tudo se mantém inalterado no enunciado do teorema à excepção da igualdade das inércias das matrizes. Neste caso verifica-se  $i(A) = i(-G)$ . O exemplo seguinte ilustra este ponto.

**Exemplo 2.3.** *Considere-se a equação diferencial  $\ddot{x} + c\dot{x} = g(x, t)$ , onde  $g$  é uma função contínua  $T$ -periódica na variável  $t$ , de forma a termos a existência e unicidade de soluções e a dependência contínua em relação às condições iniciais. O problema pode ser equivalentemente equacionado através do sistema*

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ g(x, t) \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

*Representando simbolicamente o sistema (2.9) por*

$$\dot{X} = D \cdot X + L(x, t),$$

*repare-se que  $D$  tem um valor próprio igual a 0, falhando assim as condições do teorema 2.4. Sendo  $I$  a matriz identidade de ordem 2 e  $\lambda > 0$ , considere-se a perturbação da parte linear do sistema (2.9)*

$$\dot{X} = (D + \lambda I) \cdot X + (L(x, t) - \lambda IX).$$

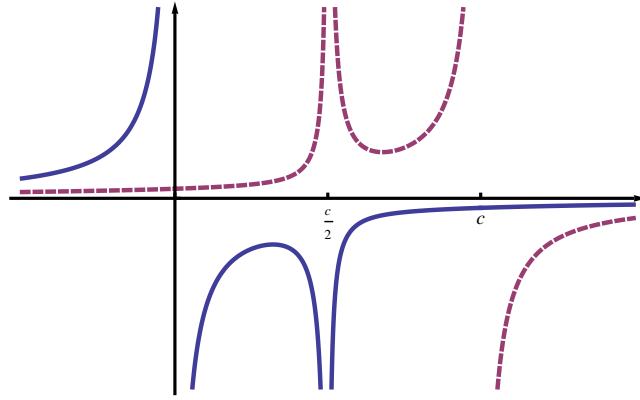


Figura 2.1: Sinal dos valores próprios da matriz  $P$ .

A matriz  $P$ , solução da equação de Lyapunov

$$(D + \lambda I)^T P + P(D + \lambda I) = -I$$

que pode ser escrita de forma menos condensada por

$$\begin{bmatrix} 2\lambda p_{11} & p_{11} - (c - 2\lambda)p_{12} \\ p_{11} - (c - 2\lambda)p_{12} & 2(p_{12} + (-c + \lambda)p_{22}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

está bem definida para  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, \frac{c}{2}, c\}$ , sendo estes precisamente os valores para os quais a matriz  $D + \lambda I$  admite valores próprios com parte real nula. Nestas condições teremos

$$P = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2\lambda} & \frac{1}{2\lambda(2\lambda - c)} \\ \frac{1}{2\lambda(2\lambda - c)} & -\frac{1 - c\lambda + 2\lambda^2}{2\lambda(\lambda - c)(2\lambda - c)} \end{bmatrix}.$$

É imediato verificar que para  $\lambda = c$  a solução da equação de Lyapunov não é única. É também imediato verificar que para  $\lambda \in \{\frac{c}{2}, 0\}$  a equação é impossível. Para os restantes valores de  $\lambda$ , os valores próprios  $\sigma_k$ , com  $k \in \{1, 2\}$ , da matriz  $P$  são dados por

$$\sigma_k = \frac{((2\lambda - c)^2 + 1) + (-1)^k \sqrt{(1 + c)^2((2\lambda - c)^2 + 1)}}{4\lambda(\lambda - 2c)(\lambda - c)}.$$

Na figura 2.1 podemos perceber de que forma varia o sinal dos valores próprios da matriz  $P$ . Dado que  $\sigma(D + \lambda I) = \{\lambda, \lambda - c\}$ , note-se que se  $0 < \lambda < c$ , a matriz  $D + \lambda I$  tem um valor próprio positivo e outro negativo. Para  $\lambda > c$  os dois valores próprios passam a ser positivos, precisamente o oposto do que acontece com o sinal dos valores próprios da matriz  $P$ .

O exemplo anterior permitiu-nos ilustrar num caso simples o Teorema Geral da Inércia. A relação entre as inércias das matrizes na equação de Lyapunov será central no desenvolvimentos da nossa teoria nos capítulos seguintes.

## 2.3 Estabilidade de Soluções Periódicas

O passo natural a dar em seguida no estudo da estabilidade do sistema (2.1) é passar do estudo da estabilidade de um ponto de equilíbrio para a estabilidade de uma órbita periódica do sistema. Vamos em primeiro lugar precisar o que entendemos por estabilidade de uma órbita para um sistema autónomo

$$\dot{x} = f(x). \quad (2.10)$$

**Definição 2.6.** *Considere-se uma solução  $\gamma: I \subset [t_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$  da equação (2.10). Dados  $\varepsilon > 0$ , se existir  $\delta > 0$  tal que para qualquer  $|\gamma(t_0) - x_0| < \delta$  temos  $|x(t; t_0, x_0) - \gamma(t)| < \varepsilon$ , para todo o  $t \geq t_0$ , então a órbita  $\gamma$  diz-se estável. Se além disso  $\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t) - \gamma(t)| = 0$  então  $\gamma$  diz-se assintoticamente estável.*

Relembramos que uma órbita  $x(t)$  da equação (2.10) é periódica se estiver definida em  $\mathbb{R}$  e se existir  $T > 0$  tal que para qualquer  $t \in \mathbb{R}$  temos  $x(t+T) = x(t)$ . Além disso, ao assumirmos a regularidade necessária de forma a termos existência e unicidade, podemos considerar uma nova solução da equação (2.10) definida a partir de uma perturbação  $\xi$  da solução periódica  $\gamma$  por

$$\alpha(t) = \gamma(t) + \xi(t).$$

Como  $\alpha$  é também solução da equação (2.10), usando a expansão de Taylor de  $f$  para  $t$  fixo em torno de  $\gamma(t)$ , teremos de imediato

$$\dot{\gamma}(t) + \dot{\xi}(t) = f(\gamma(t) + \xi(t)) = f(\gamma(t)) + J_f(\gamma(t))\xi(t) + R(\gamma(t), \theta), \quad (2.11)$$

onde naturalmente  $J_f$  é a matriz jacobiana de  $f$  e  $R(\gamma(t), \theta)$  o respectivo resto de Lagrange. Como estamos preocupados essencialmente em estudar um problema de estabilidade, consideramos a parte linear da equação 2.11

$$\dot{\xi}(t) = J_f(\gamma(t))\xi(t). \quad (2.12)$$

A equação linear (2.12) é usualmente denominada por *equação variacional* e a matriz

$J_f(y(t))$  por *matriz variacional*. Note-se que embora o sistema (2.12) não seja um sistema autónomo, a matriz variacional é uma matriz periódica com período  $T$ .

Consideremos por momentos um sistema periódico genérico da forma do sistema (2.12)

$$\dot{x} = A(t)x, \quad (2.13)$$

com  $A(t + T) = A(t)$ . Considere-se  $\Phi(t)$  uma matriz fundamental do sistema (2.13). Pelo facto de  $A$  ser uma matriz periódica verifica-se que  $\Phi(t + T)$  é igualmente uma matriz fundamental para o mesmo sistema. A proposição seguinte relata-nos duas propriedades fundamentais (que de tão fundamentais perdoa-se o pleonasma) das matrizes fundamentais. Para uma referência completa dos resultados que se seguem ver por exemplo [Chi06] ou [Bet10].

**Proposição 2.1.** *Seja  $\Phi$  uma matriz fundamental do sistema  $\dot{x} = A(t)x$  e  $C$  uma matriz quadrada de ordem  $n$  com entradas reais, constante e com determinante não-nulo. Então são verificadas as seguintes proposições*

1. *A matriz  $\Phi(t)C$  ainda é uma matriz fundamental do sistema;*
2. *Dada uma qualquer matriz fundamental  $\Psi(t)$  do sistema considerado, existe uma matriz real quadrada  $D$ , constante e com determinante não-nulo tal que para qualquer  $t$ ,  $\Psi(t) = \Phi(t)D$ .*

Pela proposição anterior podemos então garantir a existência de uma matriz real  $C_\Phi$  invertível tal que para qualquer  $t \in \mathbb{R}$

$$\Phi(t + T) = \Phi(t)C_\Phi.$$

A matriz  $C_\Phi$  designa-se por *matriz de monodromia* associada a  $\Phi$ . Dada uma matriz  $\Psi(t)$  que seja ainda uma matriz fundamental do sistema (2.13), pela proposição 2.1, sabemos da existência de uma matriz invertível  $D$  tal que para qualquer  $t \in \mathbb{R}$

$$\Psi(t) = \Phi(t)D.$$

Deste modo obtemos sucessivamente

$$\Psi(t + T) = \Phi(t + T)D = \Phi(t)C_\Phi D.$$

De um modo perfeitamente análogo

$$\Psi(t + T) = \Psi(t)C_{\Psi} = \Phi(t)DC_{\Psi}.$$

Como  $\Phi(t)$  é uma matriz invertível obtemos directamente das duas igualdades anteriores

$$C_{\Phi}D = DC_{\Psi},$$

ou seja, matrizes de monodromia associadas a matrizes fundamentais do mesmo sistema são matrizes semelhantes. Isto significa que o seu espectro é igual. Os valores próprios de uma matriz de monodromia merecem assim a designação especial de *multiplicadores característicos* pois são invariantes para o sistema (2.13). O teorema seguinte mostra-nos que a partir dos multiplicadores característicos podemos retirar conclusões qualitativas em relação às soluções do sistema.

**Teorema 2.6.** *Dado um qualquer  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $\lambda$  é um multiplicador característico de (2.13) se e apenas se existir uma solução de (2.13) não identicamente nula  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$  tal que, para qualquer  $t \in \mathbb{R}$*

$$\varphi(t + T) = \lambda\varphi(t).$$

**Corolário 2.6.1.** *O sistema (2.13) admite soluções periódicas não triviais se e apenas se 1 for um seu multiplicador característico. Além disso se  $-1$  for um multiplicador característico então existe uma solução  $2T$ -periódica do sistema que não é  $T$ -periódica.*

Não sendo as órbitas periódicas em geral assintoticamente estáveis, a próxima definição estabelece as condições em que estas são (*assintoticamente*) *orbitalmente estáveis*.

**Definição 2.7.** *Considere-se  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma órbita periódica do sistema (2.10) e o conjunto  $\Gamma = \gamma(\mathbb{R})$ . A órbita  $\gamma$  diz-se orbitalmente estável se para qualquer  $\varepsilon > 0$  existe um  $\delta > 0$  tal que, para qualquer  $t > 0$*

$$d(x_0, \Gamma) < \delta \text{ então } d(x(t; 0, t_0), \Gamma) < \varepsilon.$$

*Se além do verificado anteriormente, tivermos conjuntamente*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(x(t; 0, t_0), \Gamma) = 0,$$

*a órbita  $\gamma$  diz-se assintoticamente orbitalmente estável.*

O próximo resultado sintetiza em si toda a motivação para a introdução dos multiplicadores característicos.

**Teorema 2.7.** *Considere-se uma solução periódica  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  do sistema (2.10). Supondo que  $n - 1$  multiplicadores característicos  $\lambda_i$  são em módulo menores do que 1, então  $\gamma$  é assintoticamente orbitalmente estável. Além disso, supondo que*

$$|\lambda_i| < a < 1; \quad i = 2, \dots, n;$$

sendo  $T$  o período de  $\gamma$  e  $c = \gamma(0)$ , então existem  $\delta > 0$  e  $L > 0$  tais que para qualquer  $x_0 \in B(c, \delta)$  existe  $\tau \in \mathbb{R}$  tal que  $x(\tau) = x_0$  e

$$|x(t + \tau; x_0, \tau) - \gamma(t)| \leq La^{t/T}.$$

*Demonstração.* Ver [Har64], pag. 254. □

Uma ferramenta fundamental para estudar a estabilidade de uma órbita periódica é a chamada *aplicação de Poincaré*. Esta será usada no capítulo 3 para demonstrar a convergência das soluções de um sistema para a aí denominada *variedade dócil*. A demonstração da proposição seguinte pode ser encontrada em [Bet10], página 308.

**Proposição 2.2.** *Dado um campo vectorial  $f$ , vamos supôr que  $\gamma$  é uma solução periódica de (2.10) com período  $T$ . Considerando  $\gamma(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ , definimos o hiperplano ortogonal a  $f(x)$  em  $x_0$  por*

$$M_{x_0} = \{x \in \mathbb{R}^n : (x - x_0) \cdot f(x_0) = 0\}.$$

Então existe uma vizinhança  $U$  de  $x_0$  e uma aplicação  $\tau: U \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  tal que  $\tau(x_0) = T$  e  $x(\tau(x)) \in M_{x_0}$  para todo o  $x \in U$ . A aplicação  $\mathcal{P}: U \cap M_{x_0} \rightarrow M_{x_0}$  definida por  $\mathcal{P}(x) = x(\tau(x))$  designa-se por aplicação de Poincaré.

No caso de a matriz  $\mathcal{P}'(x_0)$  ter todos os valores próprios com módulo inferior a 1, mostra-se que  $\mathcal{P}$  é uma contracção e para qualquer  $x \in U \cap M_{x_0}$  verifica-se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{P}^n(x) = x_0,$$

demonstrando-se assim a estabilidade de  $\gamma$ , pois significa que pequenas perturbações desta órbita convergem assintoticamente para a órbita  $\gamma$ .

Nos casos que vamos tratar nos capítulos seguintes, as equações são regra geral não-autónomas. Isto significa que o campo vectorial também depende explicitamente

da variável  $t$ . Nestas condições a aplicação de Poincaré fica mal definida, visto que o vector normal varia ao longo do tempo. Contudo, no caso em que o campo vectorial é  $T$ -periódico, podemos considerar o quociente  $\mathbb{R}/T\mathbb{Z}$ , o que equivale a transformar o espaço num cilindro. Considerando no cilindro o hiperplano  $t = T$ , poderemos neste definir a aplicação de Poincaré. Esta aplicação tem o nome de *aplicação estroboscópica de Poincaré*. Será esta aplicação que será usada no caso em que o campo vectorial não é autónomo.

Terminamos este capítulo com uma visita breve ao exemplo clássico do chamado sistema de Lorenz.

**Exemplo 2.4.** *Até Edward Lorenz introduzir em 1963 uma simplificação das equações de convecção apresentadas no ano anterior por Saltzman, os únicos atractores conhecidos em equações diferenciais eram os pontos de equilíbrio e as órbitas periódicas. Foi com o sistema de equações apresentado por Lorenz em [Lor63]*

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = \rho x - y - xz \\ \dot{z} = xy - \beta z, \end{cases} \quad (2.14)$$

onde dos três parâmetros positivos,  $\sigma$  representa o número de Prandtl,  $\rho$  o número de Rayleigh e  $\beta$  um parâmetro relacionado com o tamanho do sistema, que se conheceu o primeiro exemplo daquilo que mais tarde foi cunhado por atractor estranho por Ruelle e Takens em [RT71]. Embora o sistema (2.14) tenha propriedades extraordinárias do ponto de vista topológico (ver [HSD04] ou [GW79] para todos os detalhes), aqui estaremos apenas interessados em estudar o comportamento do sistema de Lorenz segundo o ponto de vista da estabilidade.

O sistema (2.14) pode ser representado de uma forma abreviada por  $\dot{X} = \mathcal{L}(X)$ . Os pontos de equilíbrio serão a solução do sistema  $\mathcal{L}(X) = 0$ . É imediato verificar que a origem é um ponto de equilíbrio. Os outros pontos de equilíbrio serão representados por

$$Q_{\pm} = \left( \pm\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \pm\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \rho - 1 \right).$$

Estes estão bem definidos em  $\mathbb{R}$  apenas no caso em que  $\rho > 1$ . A linearização do

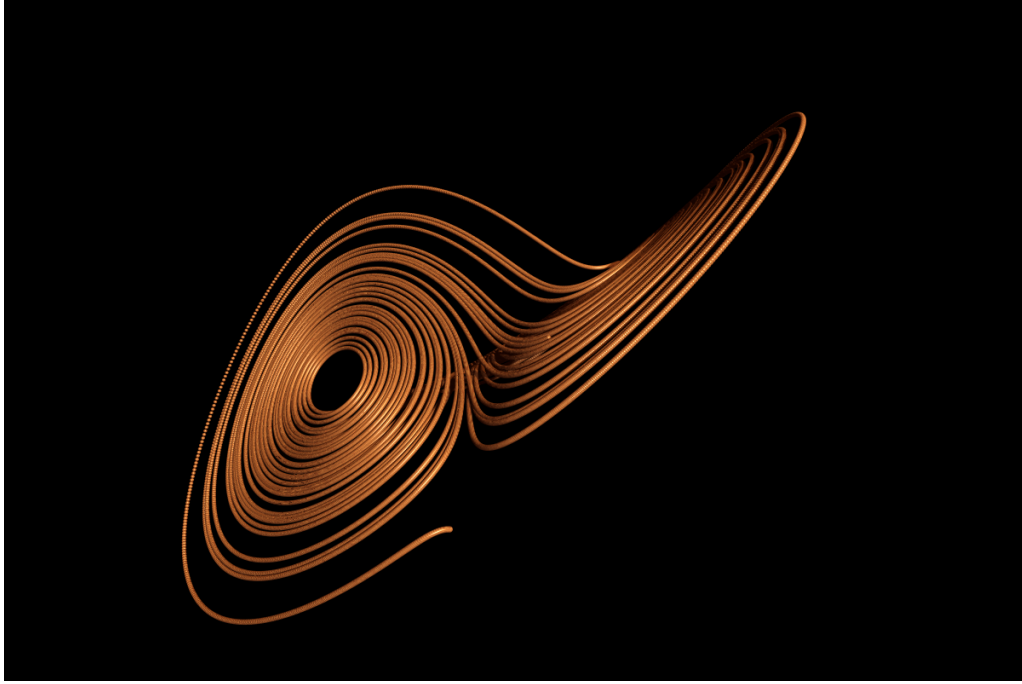


Figura 2.2: Atrator de Lorenz para os valores clássicos dos parâmetros  $\sigma = 10$ ,  $\beta = 8/3$  e  $\rho = 33$ . Imagem produzido por NUMDE.

sistema (2.14) dá origem ao sistema de equações diferenciais

$$\dot{Y} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho - z & -1 & -x \\ y & x & -\beta \end{pmatrix} Y.$$

Na origem os valores próprios da matriz serão  $-\beta$  e  $\lambda_{\pm}$  dados por

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left( -(\sigma + 1) \pm \sqrt{(\sigma + 1)^2 - 4\sigma(1 - \rho)} \right).$$

Quando  $\rho \in [0, 1)$ , os valores próprios  $\lambda_{\pm}$  são ambos negativos o que mostra que neste caso a origem é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável. Contudo quando  $\rho > 1$  a origem perde esta propriedade. No entanto em [HSD04] é demonstrada a proposição seguinte.

**Proposição 2.3.** Os pontos de equilíbrio  $Q_{\pm}$  são assintoticamente estáveis quando o parâmetro  $\rho$  verifica as desigualdades

$$1 < \rho < \rho^* = \sigma \left( \frac{\sigma + \beta + 3}{\sigma - \beta - 1} \right).$$

Podemos mostrar sumariamente que ainda assim existe um compacto  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^3$  que

suga todas as órbitas do sistema de Lorenz. Considerando a função

$$\Lambda(x, y, z) = x^2 + y^2 + (z - \sigma - \rho)^2,$$

a derivada de Lie de  $\Lambda(X)$  em relação ao campo vectorial  $\mathcal{L}(X)$  é dada por

$$\nabla_{\mathcal{L}(X)}\Lambda(X) = -2 \left( \sigma x^2 + y^2 + \beta \left( z - \frac{\rho + \sigma}{2} \right)^2 - \beta \left( \frac{\rho + \sigma}{2} \right)^2 \right).$$

Assim, para um elipsóide definido pela equação

$$\sigma x^2 + y^2 + \beta \left( z - \frac{\rho + \sigma}{2} \right)^2 = \mu,$$

para valores de  $\mu > \beta(\rho + \sigma)^2/4$  temos que a derivada de Lie da função  $\Lambda(X)$  é negativa. Sendo imediato demonstrar que  $\Lambda(X)$  é positiva para todos os pontos diferentes de  $(0, 0, \sigma + \rho)$  verifica-se que  $\Lambda(X)$  é de facto uma função de Lyapunov para o sistema de Lorenz. Note-se que o sentido dado aqui ao conceito de função de Lyapunov é diferente do sentido empregue anteriormente. Foi demonstrado que as órbitas do sistema de Lorenz são atraídas para dentro de uma caixa que contém os pontos de equilíbrio. Pelo facto de esta função  $\Lambda$  ser uma função de Lyapunov, fica garantido que essas órbitas não mais poderão deixar essa caixa. Para os valores dos parâmetros,  $\sigma = 10$ ,  $\rho = 33$  e  $\beta = 8/3$  (ver fig. 2.2), nenhum dos pontos de equilíbrio é estável. Estes dois factores juntos, os pontos de equilíbrio serem repulsores e a existência de uma caixa que os contém que aprisiona as órbitas, formam as condições para o aparecimento do atractor de Lorenz.

*a minha cidade tinha um rio  
donde sobe hoje o cheiro a corações de lodo  
e um eflúvio de enxofre e de moscas cercando  
as cabeças dos vivos*

— AL BERTO, Horto de Incêndio, (1997)

*Morning found us calmly unaware,  
Noon burn gold into our hair,  
At night we swam in laughing sea,  
When summer's gone, where will we be?*

— JIM MORRISSON, Summer's almost gone, (1969)



# Teoria Geral das Variedades Centrais

## Estáveis Invariantes

### 3.1 Condição de Russel Smith

Considere-se um sistema de equações diferenciais representado por

$$\dot{x} = f(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}. \quad (3.1)$$

Vamos em todos os momentos assumir, e caso nada seja dito em contrário, que as soluções do sistema (3.1) verificam as seguintes propriedades:

- (H1)** A equação (3.1) verifica a existência e a unicidade de soluções e estas estão definidas em  $\mathbb{R}$ ;
- (H2)** Existe uma constante  $T > 0$  tal que  $f(x, T + t) = f(x, t)$ , para todo o  $t \in \mathbb{R}$  e para todo o  $x \in \mathbb{R}^n$ ;
- (H3)** Existe uma matriz simétrica  $P \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ , com  $j$  valores próprios negativos e com  $n - j$  valores próprios positivos, e constantes  $\lambda > 0$  e  $\varepsilon > 0$  tais que

$$(x - z)^T P [f(x, t) - f(z, t) + \lambda(x - z)] \leq -\varepsilon \|x - z\|^2,$$

para todo o  $x, z \in \mathbb{R}^n$  e para todo o  $t \in \mathbb{R}$ .

A hipótese **(H3)** foi introduzida por Russel Smith em [Smi84] para um sistema autónomo. A forma como é aqui apresentada foi reescrita pelo mesmo autor em [Smi86]. Considere-se a forma quadrática  $V(x) = x^T P x$  e duas quaisquer soluções da equação (3.1),  $x(t)$  e  $z(t)$ . Sem dificuldades, podemos concluir que

$$\frac{d}{dt} \{e^{2\lambda t} V(x - z)\} = 2e^{2\lambda t} (x - z)^T P [f(x, t) - f(z, t) + \lambda(x - z)],$$

demonstrando-se assim que a hipótese **(H3)** é equivalente a termos

$$\frac{d}{dt} \{e^{2\lambda t} V(x - z)\} \leq -2e^{2\lambda t} \varepsilon \|x - z\|^2. \quad (3.2)$$

De forma a controlarmos o comportamento de  $V(x - z)$  quando  $t \rightarrow -\infty$ , integrando por partes ambos os membros da desigualdade (3.2), iremos obter

$$e^{2\lambda t} V(x(t) - z(t)) - e^{2\lambda t_0} V(x(t_0) - z(t_0)) \geq 2\varepsilon \int_t^{t_0} e^{2\lambda t} \|x(t) - z(t)\|^2 dt.$$

Assim, de forma a controlarmos o comportamento de  $V(x - z)$  quando  $t \rightarrow -\infty$ , é natural introduzirmos a definição seguinte.

**Definição 3.1.** Um ponto  $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  diz-se dócil se a solução  $x(t; t_0, x_0)$  da equação (3.1), para qualquer  $\tau \in \mathbb{R}$  verifica

$$\int_{-\infty}^{\tau} e^{2\lambda t} \|x(t; t_0, x_0)\|^2 dt < \infty.$$

Neste caso  $x(t; t_0, x_0)$  designa-se por solução dócil.

Obviamente, qualquer solução limitada é dócil. Um exemplo de uma função que não seria uma solução dócil é  $x(t) = e^{t^2}$ . Note-se também que assumindo como hipótese que as soluções da equação (3.1) existem para todo o  $t \in \mathbb{R}$ , se uma determinada solução for dócil então todos os pontos da forma  $(x(t; t_0, x_0), t)$ , com  $t \in \mathbb{R}$ , serão também pontos dóceis.

Embora em **(H3)** se imponha que a matriz  $P$  não tem valores próprios nulos, tal não era necessário visto que surge como implicação directa da própria desigualdade. De facto, se  $P$  admitisse um valor próprio nulo então existiria  $v_1 \in \mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}$  tal que  $Pv_1 = 0$ . Substituindo  $x - z = v_1$  em **(H3)** obtemos

$$0 \leq -\varepsilon \|v_1\|^2,$$

o que é absurdo. Assim, para os valores próprios da matriz  $P$ , escritos com as possíveis repetições por  $\lambda_1^-, \dots, \lambda_j^-, \lambda_{j+1}^+, \dots, \lambda_n^+$ , com  $\lambda_i^- < 0$  e  $\lambda_i^+ > 0$ , temos os respectivos vectores próprios  $v_1^-, \dots, v_j^-, v_{j+1}^+, \dots, v_n^+$ . Define-se então  $\mathcal{V}_-$ , o subespaço gerado por todos os vectores próprios associados aos valores próprios negativos

$$\mathcal{V}_- = \text{span} \{v_1^-, \dots, v_j^-\}.$$

Para cada  $t_0 \in \mathbb{R}$  definimos o conjunto

$$\mathcal{A}_{t_0} = \{x_0 \in \mathbb{R}^n : (x_0, t_0) \text{ é um ponto dócil}\}.$$

Podemos agora apresentar o teorema fundamental deste capítulo.

**Teorema 3.1** (Teorema da Sincronização Generalizada). *Nas condições (H1)-(H3), se existir pelo menos um ponto dócil para (3.1) então, para todo o  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{A}_t$  é uma variedade de dimensão  $j$  e é o gráfico de uma função definida em  $\mathcal{V}_-$ . Além disso, se  $x(t)$  é uma solução de (3.1) limitada em  $\mathbb{R}^+$  então  $d(x(t), \mathcal{A}_t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow +\infty$ .*

A demonstração do Teorema 3.1 será feita ao longo da secção 3.2. Por forma a percebermos todos os detalhes e ganharmos mais intuição sobre o mesmo, vamos dividir esta demonstração em vários lemas. A demonstração deste resultado tem como base a demonstração feita por Margheri e Martins em [MM10]. A diferença significativa prende-se com a mudança de variável operada inicialmente que de algum modo a simplifica.

## 3.2 A Variedade Dócil.

Começamos por notar que, sem perda de generalidade, podemos considerar a origem um ponto dócil. De facto, se  $(\bar{x}_0, \bar{t}_0)$  é um ponto dócil, considere-se a mudança de variáveis  $\tilde{x}(t) = x(t) - \bar{x}(t)$ , com  $\bar{x}(t) = x(t; \bar{x}_0, \bar{t}_0)$ . Temos que  $x(t; t_0, x_0)$  é uma solução da equação (3.1) se e só se  $\tilde{x}(t; t_0, x_0)$ , com  $\tilde{x}_0 = x_0 - \bar{x}_0$ , é uma solução da equação

$$\dot{\tilde{x}}(t) = f(\tilde{x}(t) + \bar{x}(t), t) - \dot{\bar{x}}(t) := \tilde{f}(\tilde{x}(t), t) \quad (3.3)$$

É imediato observar que a equação (3.3) verifica a condição de Russel Smith (H3), exactamente para a mesma matriz  $P$  e para os mesmos parâmetros  $\varepsilon$  e  $\lambda$  utilizados para a equação (3.1).

**Lema 3.1.** *O ponto  $(\tilde{x}_0, t_0)$  é um ponto dócil para a equação (3.3) se e só se  $(x_0, t_0) = (\tilde{x}_0 + \bar{x}(t_0), t_0)$  é um ponto dócil para a equação (3.1). Em particular, temos que*

$$\tilde{\mathcal{A}}_{t_0} = \mathcal{A}_{t_0} - \bar{x}(t_0).$$

*Demonstração.* Usando a desigualdade  $\|A \pm B\|^2 \leq 2\|A\|^2 + 2\|B\|^2$  e referindo novamente a mudança de variáveis  $\tilde{x}(t) = x(t) - \bar{x}(t)$  podemos de imediato escrever a desigualdade

$$\int_{-\infty}^{t_0} e^{2\lambda t} \|x(t; x_0, t_0)\|^2 dt \leq 2 \int_{-\infty}^{t_0} e^{2\lambda t} \|\tilde{x}(t; \tilde{x}_0, t_0)\|^2 dt + 2 \int_{-\infty}^{t_0} e^{2\lambda t} \|\bar{x}(t)\|^2 dt,$$

o que nos permite garantir de imediato que se  $(\tilde{x}_0, t_0)$  é um ponto dócil para a equação (3.3) então  $(x_0, t_0) = (\tilde{x}_0 + \bar{x}_0, t_0)$  é um ponto dócil para a equação (3.1). No sentido contrário, podemos escrever ao invés

$$\int_{-\infty}^{t_0} e^{2\lambda t} \|\tilde{x}(t; \tilde{x}_0, t_0)\|^2 dt \leq 2 \int_{-\infty}^{t_0} e^{2\lambda t} \|x(t; x_0, t_0)\|^2 dt + 2 \int_{-\infty}^{t_0} e^{2\lambda t} \|\bar{x}(t)\|^2 dt,$$

o que permite mostrar a implicação recíproca.  $\square$

A primeira observação que fazemos, e tendo em atenção as conclusões do lema anterior, é que  $\mathcal{A}_{t_0}$  é o gráfico de uma função sobre  $\mathcal{V}_-$  se e só se  $\tilde{\mathcal{A}}_{t_0}$  também o for. Em segundo lugar, note-se que se a origem for um ponto de equilíbrio, i.e.  $f(0, t) = 0$  para todo o  $t \in \mathbb{R}$ , então necessariamente qualquer  $(0, t)$  com  $t \in \mathbb{R}$  será um ponto dócil. Podemos assim, e sem perda de generalidade, assumir que a origem é um ponto dócil para a equação (3.1). Isto irá acima de tudo simplificar imenso a notação usada. Neste caso, a desigualdade (3.2) mostra que

$$\frac{d}{dt} \{e^{2\lambda t} V(x)\} \leq -e^{2\lambda t} \varepsilon \|x\|^2, \quad (3.4)$$

para qualquer solução  $x(t)$  de (3.1). Note-se igualmente que no caso de a matriz  $P$  ser definida positiva, então  $V$  é uma função de Lyapunov para a equação (3.1) visto que

$$\frac{d}{dt} \{V(x)\} \leq -2\varepsilon \|x\|^2 - 2\lambda V(x) < 0.$$

**Lema 3.2.** *Supondo que (H3) é válida, então dado um ponto dócil  $(\alpha_0, t_0)$ , outro qualquer ponto  $(\alpha_1, t_0)$  é dócil se e só se  $V(x_1(t; \alpha_1, t_0) - x_0(t; \alpha_0, t_0)) < 0$  para todo o  $t \in \mathbb{R}$ .*

*Demonstração.* Integrando (3.2) no intervalo  $(\alpha, \tau)$  obtemos

$$e^{2\lambda\tau}V(x_1(\tau) - x_0(\tau)) \leq e^{2\lambda\alpha}V(x_1(\alpha) - x_0(\alpha)) - 2\varepsilon \int_{\alpha}^{\tau} e^{2\lambda t} \|x_1(t) - x_0(t)\|^2 dt, \quad (3.5)$$

com  $x_1(t) = x_1(t; \alpha_1, t_0)$  e  $x_0(t) = x_0(t; \alpha_0, t_0)$ . Vamos então supor que o ponto  $(\alpha_1, t_0)$  é um ponto dócil. Note-se que

$$\int_{-\infty}^{t_0} e^{2\lambda t} \|x_1(t) - x_0(t)\|^2 dt \leq 2 \int_{-\infty}^{t_0} e^{2\lambda t} \|x_1(t)\|^2 dt + 2 \int_{-\infty}^{t_0} e^{2\lambda t} \|x_0(t)\|^2 dt < \infty,$$

pelo que existe necessariamente uma sucessão  $t_n \rightarrow -\infty$  tal que

$$e^{2\lambda t} \|x_1(t_n) - x_0(t_n)\|^2 \rightarrow 0.$$

Fazendo  $\alpha = t_n$  em (3.5) e fazendo  $n \rightarrow \infty$  vamos obter

$$e^{2\lambda\tau}V(x_1(\tau) - x_0(\tau)) \leq -2\varepsilon \int_{-\infty}^{\tau} e^{2\lambda t} \|x_1(t) - x_0(t)\|^2 dt$$

pelo que  $V(x_1(t) - x_0(t)) < 0$  para todo o  $t \in \mathbb{R}$ .

Reciprocamente, novamente por (3.5) podemos concluir que

$$0 \leq 2\varepsilon \int_{-\infty}^{t_0} e^{2\lambda t} \|x_1(t) - x_0(t)\|^2 dt \leq -e^{2\lambda t_0}V(x_1(t_0) - x_0(t_0)).$$

Deste modo vamos ter necessariamente  $\int_{-\infty}^{t_0} e^{2\lambda t} \|x_1(t) - x_0(t)\|^2 dt < \infty$ , pelo que

$$\int_{-\infty}^{t_0} e^{2\lambda t} \|x_1(t)\|^2 dt \leq 2 \int_{-\infty}^{t_0} e^{2\lambda t} \|x_1(t) - x_0(t)\|^2 dt + 2 \int_{-\infty}^{t_0} e^{2\lambda t} \|x_0(t)\|^2 dt \leq \infty,$$

de onde se pode concluir que  $(\alpha_1, t_0)$  é um ponto dócil.  $\square$

Como é habitual em Matemática, procura-se a forma mais simples para representar um determinado objecto. Seguindo este princípio geral, vamos procurar a forma mais simples de representar a forma quadrática  $V$ . Como  $P$  é uma matriz simétrica,

podemos assumir que a base de vectores próprios

$$v_1^-, \dots, v_j^-, v_{j+1}^+, \dots, v_n^+$$

é uma base ortonormada. Assim  $M = [v_1^- \dots v_j^- v_{j+1}^+ \dots v_n^+]$  é uma matriz ortogonal, i.e.,  $M^T = M^{-1}$ . Deste modo

$$Q = M^T P M = \text{diag} \{ \lambda_1^-, \dots, \lambda_j^-, \lambda_{j+1}^+, \dots, \lambda_n^+ \}.$$

De maneira a que possamos escrever a forma quadrática  $V$  usando a matriz  $Q$ , teremos de proceder à mudança de coordenadas

$$M^T X = \Xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}.$$

De notar que as coordenadas de  $\mathcal{V}_-$  associadas à base  $v_1^-, \dots, v_j^-$  são precisamente  $(\xi_1 \dots \xi_j)^T$ . Podemos então, sem mais delongas, definir a projecção de  $\mathbb{R}^{nm}$  sobre  $\mathcal{V}_-$  por

$$\begin{aligned} \pi_- : \mathbb{R}^{nm} &\rightarrow \mathcal{V}_- \\ \pi_-(X) &= (\xi_1 \dots \xi_j \ 0 \dots 0)^T. \end{aligned}$$

Nestas novas variáveis  $\Xi$ , a forma quadrática  $V$  tem uma representação muito simples. De facto

$$\begin{aligned} V(X) &= X^T P X = X^T M M^T P M M^T X = \\ &= (M^T X)^T M^T P M (M^T X) = \lambda_1^- \xi_1^2 + \dots + \lambda_n^+ \xi_n^2. \end{aligned}$$

**Lema 3.3.** *Para a mudança de coordenadas definida anteriormente, existem  $\delta > 0$  e  $\bar{\lambda}$  tais que, para todo o  $X \in \mathbb{R}^n$*

$$\bar{\lambda} [\delta V(X) + \|\pi_-(X)\|^2] > \|\Xi\|^2 \geq \|\pi_-(X)\|^2.$$

*Demonstração.* Tomando um número real  $\delta$  suficientemente pequeno de tal forma que se verifique

$$-1 < \delta \lambda_i^- < 0 < \delta \lambda_k^+$$

e um outro número real  $\bar{\lambda}$  verificando as desigualdades

$$\bar{\lambda} > \frac{1}{1 + \delta\lambda_i^-} \quad \text{e} \quad \bar{\lambda} > \frac{1}{\delta\lambda_k^+}$$

para  $i = 1, \dots, j$  e  $k = j + 1, \dots, n$ , iremos obter sucessivamente

$$\begin{aligned} & \bar{\lambda} [\delta V(X) + \|\pi_-(X)\|^2] = \\ & = \bar{\lambda} \left[ (1 + \delta\lambda_1^-)\xi_1^2 + \dots + (1 + \delta\lambda_j^-)\xi_j^2 + \delta\lambda_{j+1}^+\xi_{j+1}^2 + \dots + \delta\lambda_n^+\xi_n^2 \right] > \\ & > \xi_1^2 + \dots + \xi_j^2 + \xi_{j+1}^2 + \dots + \xi_n^2 = \|\Xi\|^2 \geq \\ & \geq \xi_1^2 + \dots + \xi_j^2 = \|\pi_-(X)\|^2, \end{aligned}$$

que era precisamente o que se pretendia demonstrar.  $\square$

A desigualdade demonstrada no lema anterior é fundamental para estabelecer o lema seguinte.

**Lema 3.4.** *Dado  $t_0 \in \mathbb{R}$  e o correspondente  $\mathcal{A}_{t_0}$ , a função  $\pi_-$ , definida esquematicamente por*

$$\pi_- : \mathcal{A}_{t_0} \rightarrow \pi_-(\mathcal{A}_{t_0}) \subset \mathcal{V}_-,$$

*é injectiva, contínua e globalmente Lipchitz.*

*Demonstração.* Sabemos à partida que uma projecção num espaço vectorial, usando a topologia usual, é uma aplicação contínua. Dados dois pontos  $x_1 \neq x_2$  em  $\mathcal{A}_{t_0}$ , i.e., dados dois pontos dóceis  $(x_1, t_0)$  e  $(x_2, t_0)$ , pelo lema 3.2 podemos concluir que  $V(x_1 - x_2) < 0$ . Pelo lema 3.3 e estabelecendo a correspondência  $M^T x_i = \Xi_i$ , iremos obter as desigualdades

$$\bar{\lambda} \|\pi_-(x_1 - x_2)\|^2 > \|\Xi_1 - \Xi_2\|^2 \geq \|\pi_-(x_1 - x_2)\|^2,$$

mostrando-se assim de imediato que  $\pi_-(x_1) \neq \pi_-(x_2)$ , pois de outro modo teríamos de ter  $\Xi_1 = \Xi_2$  e  $x_1 = x_2$ . Por outro lado, pela mesma desigualdade podemos ainda escrever

$$\|\pi_-(x_1 - x_2)\| \leq \|\Xi_1 - \Xi_2\| \leq \|M\| \|x_1 - x_2\|,$$

pelo que se conclui que  $\pi_- : \mathcal{A}_{t_0} \rightarrow \mathcal{V}_-$  é uma função  $\|M\|$ -Lipchitz.  $\square$

Por forma a podermos prosseguir no caminho que estamos a trilhar para conseguirmos demonstrar o teorema 3.1, precisamos de introduzir o chamado *Princípio*

*Topológico de Wazewski.* Porém, antes de introduzirmos o resultado propriamente dito, precisamos de estabelecer alguns conceitos.

**Definição 3.2.** *Considere-se um espaço topológico  $X$  e um conjunto  $A \subset X$ . A uma aplicação contínua  $r: X \rightarrow A$  tal que  $r(a) = a$  para todo o  $a \in A$  dá-se o nome de retracção. O conjunto  $A$  diz-se um retracto de  $X$  se existir uma retracção  $r: X \rightarrow A$ .*

Um resultado clássico de Topologia Algébrica mostra que em  $\mathbb{R}^n$  a fronteira  $\partial D^n = \{x \in \mathbb{R}^n: |x| = 1\}$  não é uma retracção da bola  $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n: |x| \leq 1\}$  (ver [Hat02], pag. 114 para todos os detalhes). Considere-se um campo vectorial contínuo  $v$  definido como habitualmente num conjunto aberto  $A \subset \mathbb{R}^n$  e um problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, t) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (3.6)$$

para o qual assumimos, como habitualmente, a existência e a unicidade de soluções. Vamos designar o fluxo de  $f$  por  $x(t; t_0, x_0)$  e seja  $\Omega$  um conjunto aberto em  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ .

**Definição 3.3.** *Um ponto  $(t_0, x_0) \in \partial\Omega$  diz-se um ponto de ingresso para a equação (3.6) se existir  $\varepsilon > 0$  tal que  $(x(t; t_0, x_0), t) \in \Omega$  para todo o  $t \in (t_0, t_0 + \varepsilon]$ . Se para além disso,  $(x(t; t_0, x_0), t) \notin \bar{\Omega}$  para qualquer  $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0)$  então  $(t_0, x_0)$  diz-se um ponto de ingresso estrito.*

Vamos representar por  $\Omega_i$  e  $\Omega_{si}$ , respectivamente, o conjunto dos pontos de ingresso e o conjunto de todos os pontos de ingresso estrito. É imediato comprovar as inclusões

$$\Omega_{si} \subset \Omega_i \subset \partial\Omega.$$

Estamos agora em condições de apresentar o chamado *Princípio Topológico de Wazewski*, introduzido por este em [Waz47].

**Teorema 3.2** (Princípio Topológico de Wazewski). *Assumindo que  $\Omega_i = \Omega_{si}$ , seja  $S \subset \Omega \cup \Omega_i$  tal que  $S \cap \Omega_i$  é um retracto de  $\Omega_i$  e  $S \cap \Omega_i$  não é um retracto de  $S$ . Então existe necessariamente um ponto  $(t_0, x_0) \in S \cap \Omega$  tal que a respectiva solução de (3.6) verifica  $(t, x(t; t_0, x_0)) \in \Omega$  para todo o  $t \in (\alpha(t_0, x_0), t_0]$ , onde  $\alpha(t_0, x_0)$  é o limite inferior do intervalo máximo de existência da solução  $x(t; t_0, x_0)$ .*

Este resultado topológico pode de facto ser aplicado ao estudo qualitativo de equações diferenciais. Considere-se uma sobre-solução  $x_+(t)$  e uma sub-solução  $x_-(t)$ ,

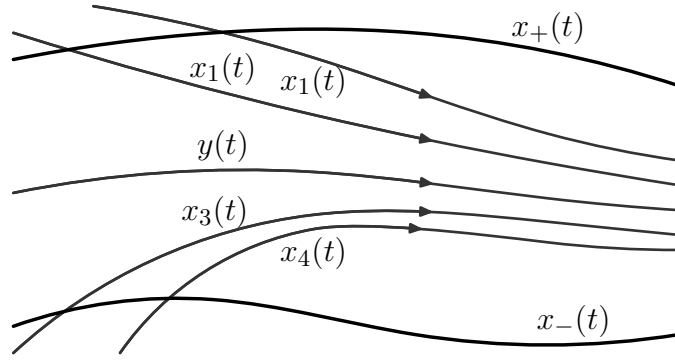


Figura 3.1: Comportamento das soluções numa vizinhança das sobre e sub-soluções.

com  $x_+(t) > x_-(t)$  para todo o  $t \in \mathbb{R}$ , do problema de Cauchy (3.6), i.e.

$$x_+(t) > f(x_+(t), t) \text{ e } x_-(t) < f(x_-(t), t),$$

para todo o  $t \in \mathbb{R}$ . Considere-se igualmente

$$\Omega = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : x_-(t) < x < x_+(t)\}.$$

Pela definição de sobre-solução e de sub-solução podemos garantir que  $\Omega_{si} = \Omega_i$ . Dado  $t_0 \in \mathbb{R}$ , definimos

$$S = \{(t, x) \in \Omega \cup \Omega_i : t = t_0\}$$

Pela figura 3.1 é imediato perceber que  $S \cap \Omega_i$  não é uma retracção de  $S$ , sendo no entanto uma retracção de  $\Omega_i$ . Nestas condições pelo Princípio Topológico de Wazewski, podemos garantir a existência de uma solução  $y(t)$  de (3.6) tal que, para todo o  $t \in (-\infty, t_0]$ , verificar-se-ão as desigualdades

$$x_-(t) < y(t) < x_+(t).$$

Na verdade  $\Omega$  é positivamente invariante pelo que as desigualdades também são válidas em  $[t_0, +\infty)$ . Estamos agora em condições para mostrar que os conjuntos  $\mathcal{A}_{t_0}$  e  $\mathcal{V}_-$  são de facto homeomorfos.

**Lema 3.5.** *Dados os conjuntos  $\mathcal{A}_{t_0}$  e  $\mathcal{V}_-$  conforme definidos anteriormente, a aplicação  $\pi_- : \mathcal{A}_{t_0} \rightarrow \mathcal{V}_-$  é sobrejectiva.*

*Demonstração.* Começamos por definir o cone  $C$  associado à forma quadrática  $V$

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) < 0\} = \{x \in \mathbb{R}^n : \lambda_1^- \xi_1^2 + \dots + \lambda_n^+ \xi_n^2 < 0\},$$

o conjunto  $\Omega$  definido em  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  por

$$\Omega = \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : V(x) < 0\}$$

e  $\Omega_{t_0} = \{(x, t) \in \Omega : t = t_0\}$ . Se  $(x_0, t_0) \in \partial\Omega$  e  $x_0 = 0$  então  $(x_0, t_0) \notin \Omega_i$ . Alternativamente, se  $(x_0, t_0) \in \partial\Omega$  e  $x_0 \neq 0$ , por (3.4) vamos obter

$$\left. \frac{d}{dt} \{e^{2\lambda t} V(x(t; x_0, t_0))\} \right|_{t=t_0} \leq -2e^{2\lambda t_0} \varepsilon \|x_0\|^2 < 0.$$

Assim, numa vizinhança de  $t_0$ , com  $t < t_0$  temos  $V(x(t)) > 0$  e  $x(t) \notin \Omega$  e numa vizinhança de  $t_0$ , com  $t > t_0$  temos  $V(x(t)) < 0$  e  $x(t) \in \Omega$ . Podemos então concluir que

$$\Omega_i = \Omega_{s_i} = \partial\Omega \setminus \{(0, t) : t \in \mathbb{R}\}. \quad (3.7)$$

Dado  $\bar{\xi} \in \mathcal{V}_-$ , a nossa tarefa consiste em encontrar  $x_0 \in \mathcal{A}_{t_0}$  tal que

$$\pi_-(x_0) = \bar{\xi} = (\bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_j, 0, \dots, 0).$$

Para criarmos a estrutura necessária para aplicarmos o Princípio Topológico de Ważewski, vamos definir o conjunto  $S$  por

$$\begin{aligned} S &= \{(x, t_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \pi_-(x) = \bar{\xi} \text{ e } V(x) \leq 0\} = \\ &= \{(x, t_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \lambda_{j+1}^+ \xi_{j+1}^2 + \dots + \lambda_n^+ \xi_n^2 \leq -\lambda_1^- \bar{\xi}_1^2 - \dots - \lambda_j^- \bar{\xi}_j^2 \wedge \pi_-(x) = \bar{\xi}\} \end{aligned}$$

É fácil comprovar que  $S$  é homeomorfo a  $D^{n-j}$ . Por outro lado temos que

$$S \cap \partial\Omega = \{(x, t_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \lambda_{j+1}^+ \xi_{j+1}^2 + \dots + \lambda_n^+ \xi_n^2 = -\lambda_1^- \bar{\xi}_1^2 - \dots - \lambda_j^- \bar{\xi}_j^2 \wedge \pi_-(x) = \bar{\xi}\}$$

é homeomorfo a  $S^{n-j-1} = \partial D^{n-j}$ . Assim,  $S \cap \partial\Omega$  não é uma retracção de  $S$ .

Por outro lado, o conjunto dos pontos de ingresso pode-se escrever na forma

$$\Omega_i = \left\{ (x, t_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \lambda_1^- \bar{\xi}_1^2 + \dots + \lambda_n^+ \xi_n^2 = 0 \wedge \sum_{k=1}^n \xi_k^2 > 0 \right\}$$

Já foi demonstrado anteriormente que  $S \cap \Omega_i = S \cap \partial\Omega$ . Vamos agora mostrar que  $S \cap \Omega_i$  é um retracto de  $\Omega_i$ .

Resumimos os argumentos apresentados em [MM10], adaptados devidamente às nossas condições. É fácil encontrar uma retracção  $r_1 : \Omega_i \rightarrow \partial(\Omega_{t_0} \setminus \{(0, t_0)\})$ . Considere-se de seguida o conjunto  $T = \{x \in \partial\Omega_{t_0} : V(\pi_-(x)) = V(\bar{\xi})\}$ . É imediato mostrar que

$r_2: \partial(\Omega_{t_0} \setminus \{(0, t_0)\}) \rightarrow T$  definida por

$$r_2(x) = \frac{V(\bar{\xi})}{V(\pi_-(x))} x$$

é uma retracção. Definindo  $\pi_+ := I - \pi_-$ , o conjunto  $T$  pode ser igualmente definido pelas igualdades

$$V(\pi_-(x)) = V(\bar{\xi}) \text{ e } V(\pi_+(x)) = -V(\bar{\xi}).$$

A primeira igualdade define um conjunto que é difeomorfo a  $\mathbb{S}^{j-1} \subset \mathcal{V}_-$  e o segundo um conjunto difeomorfo a  $\mathbb{S}^{n-j-1} \subset \mathcal{V}_+$ , pelo que  $T$  pode ser definido como o produto cartesiano  $T_1 \times T_2$  difeomorfo a  $\mathbb{S}^{j-1} \times \mathbb{S}^{n-j-1}$ . Podemos finalmente definir uma retracção  $r_3: T \rightarrow S \cap \partial\Omega_i$  por  $r_3(x) := \bar{\xi} + \pi_+(x)$ . Segue de imediato que  $r_3 \circ r_2 \circ r_1$  é uma retracção de  $\Omega_i$  em  $S \cap \Omega_i$ .

Pelo Princípio topológico de Wazewski existirá um ponto  $(x_0, t_0) \in S \cap \Omega$  tal que a solução  $x(t; x_0, t_0)$  verifica necessariamente  $x(t; x_0, t_0) \in \Omega$  para todo o  $t \in \mathbb{R}$ , ou dito por outras palavras,  $V(x(t; x_0, t_0)) < 0$  para todo o  $t \in \mathbb{R}$ . Pelo lemma 3.2 concluímos que o ponto  $(x_0, t_0)$  é dócil e por definição temos  $\pi_-(x_0) = \bar{\xi}$ .  $\square$

Para concluirmos a demonstração do teorema 3.1, precisamos apenas de mostrar que a variedade dócil  $\mathcal{A}_t$  é o limite assintótico para todas as órbitas limitadas.

**Lema 3.6.** *Se  $x(t)$  é uma solução de (3.1) limitada para todo o  $t$  positivo então*

$$d(x(t), \mathcal{A}_t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0.$$

*Demonstração.* Assumindo nós desde o início que o sistem 3.1 é  $T$ -periódico, a aplicação estroboscópica de Poincaré  $\mathcal{P}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\mathcal{P}(x_0) = x(T; x_0, 0)$$

está bem definida. Dado que a sucessão  $\{x(kT; 0, x_0)\}_{k \in \mathbb{N}}$  é limitada, o respectivo  $\omega$ -limite, que representamos pelo conjunto  $A$ , será não vazio, compacto e invariante para a aplicação de Poincaré. Considere-se uma solução  $y(t) = y(t; y_0, 0)$  tal que  $y_0 \in A$ . Como  $y(t)$  está contida no conjunto compacto

$$\{x(t; A, 0): t \in [0, T]\},$$

então  $y(t)$  é uma solução limitada, logo temos que  $(y_0, 0)$  é um ponto dócil. Na

verdade, por um argumento perfeitamente análogo poderíamos concluir que o  $\omega$ -limite da sucessão  $\{x(kT + t)\}_{k \in \mathbb{N}}$  é um subconjunto de  $\mathcal{A}_t$  para todo o  $t \in \mathbb{R}$ .

De modo a obtermos um contradição, vamos supor que existe uma sucessão  $t_k \rightarrow +\infty$  tal que

$$d(x(t_k), \mathcal{A}_t) > \varepsilon > 0.$$

Fazendo  $t_k = l_k + h_k T$ , com  $l_k \in [0, T]$  e  $h_k \in \mathbb{Z}$ , visto que  $\{l_k\}$  e  $\{x(t_k)\}$  são ambas limitadas, podemos assumir que existirão  $l \in [0, T]$  e  $P \in \mathbb{R}^n$  tais que  $l_k \rightarrow l$  e  $x(t_k) \rightarrow P$ . Deste modo iremos obter

$$\begin{aligned} \|x(h_k T + l) - P\| &\leq \|x(t_k - l_k + l) - x(t_k)\| + \|x(t_k) - P\| \\ &\leq \max_{t > 0} \|x'(t)\| \|l_k - l\| + \|x(t_k) - P\| \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0. \end{aligned}$$

Concluimos então que  $x(h_k T + l) \rightarrow P$  e necessariamente  $P \in \mathcal{A}_l$ . Por outro lado, como o sistema (3.1) é  $T$ -periódico, verifica-se a igualdade  $\mathcal{A}_{t_0+T} = \mathcal{A}_{t_0}$  pelo que

$$0 < \varepsilon < d(x(t_k), \mathcal{A}_{t_k}) = d(x(t_k), \mathcal{A}_{l_k}).$$

No entanto, temos também que

$$d(x(t_k), \mathcal{A}_{l_k}) < \|x(l_k; P, l) - x(t_k)\| \leq \|x(l_k; P, l) - P\| + \|P - x(t_k)\| \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$$

o que é uma contradição. Concluimos finalmente que  $d(x(t), \mathcal{A}_t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$ .  $\square$

Com a demonstração do lema 3.6 concluímos a demonstração do teorema 3.1, o resultado central deste capítulo. Podemos agora formalizar de forma conveniente o conceito de *Sincronização Generalizada*.

**Definição 3.4.** *Dado um conjunto de  $n$  osciladores acoplados de dimensão  $k$ , regidos por um sistema de equações diferenciais como em (3.1), dizemos que ocorre sincronização generalizada entre os osciladores quando as órbitas do sistema convergem para uma variedade  $\mathcal{A}_t$ , com  $t \in \mathbb{R}$ , de dimensão estritamente menor do que  $nk$ .*

Podemos colocar em perspectiva o conceito de sincronização generalizada perante aquilo que habitualmente aparece na literatura como sincronização. Nesta, para o caso de um sistema como o que estamos a considerar, existe sincronização quando existe uma variedade atractiva do tipo

$$\mathcal{A} = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1 = \dots = x_n\}.$$

Neste caso dizemos que ocorre *sincronização idêntica* entre os osciladores. Basicamente, sabendo o comportamento de um dos osciladores podemos conhecer o estado ou o comportamento de todo o sistema. Claro que poderemos fazer variações mais ou menos triviais deste tipo de sincronização, mas em qualquer um dos casos toda a informação do sistema é idêntica àquela que está contida em cada um dos osciladores.

A sincronização generalizada, como o próprio nome indica, é uma generalização da sincronização idêntica, contendo naturalmente esta, i.e., sempre que ocorre sincronização idêntica ocorre sincronização generalizada não sendo o recíproco verdadeiro. Neste caso, pela necessidade de existência de uma variedade dócil atractiva, toda a informação acerca do sistema está contida nesta. Sincronização generalizada liga-se então a termos toda a informação concentrada numa variedade de dimensão inferior à dimensão total do sistema. A existência de sincronização é assim equivalente à possibilidade de compactar a informação do sistema numa dimensão inferior. A estrutura interna do sistema, no caso de ocorrer sincronização, é o que permite esta compactificação da informação total. Como teremos oportunidade de ver no capítulo 4, esta nova visão permite-nos identificar sincronização em sistemas cuja estrutura interna é mais complicada do que os habitualmente tratados, no caso da sincronização idêntica, e assim estabelecer resultados que revelam uma estrutura mais rica do ponto de vista da dinâmica.

### 3.3 Condição suficiente para a hipótese (H3)

Como vimos no capítulo 2, tendo um sistema de equações diferenciais

$$\dot{x} = f(x, t) + Dx, \quad (3.8)$$

com  $D \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ , podemos perturbar a parte linear do sistema (3.8) com  $\lambda > 0$  tal que

$$\sigma(D + \lambda I) \cap \overline{\sigma(-D - \lambda I)} = \emptyset, \quad (3.9)$$

de tal forma que, pelo Teorema Geral da Inércia, a equação de Lyapunov

$$(D + \lambda I)^T P + P(D + \lambda I) = -I \quad (3.10)$$

tenha uma solução única. Além disso, podemos concluir que a solução  $P$  é uma matriz simétrica visto que  $P^T$  também é solução (sendo esta única) da equação

$$(D + \lambda I)^T P^T + P^T (D + \lambda I) = -I^T = -I.$$

A distribuição do sinal dos valores próprios da matriz da matriz  $P$  está relacionada com a distribuição dos valores próprios da matriz  $D + \lambda I$  conforme estabelecido pelo mesmo teorema. O próximo teorema, apresentado em [MM10], dá-nos uma condição suficiente para que, com a solução  $P$  da equação de Lyapunov (3.10), o sistema (3.8) satisfaça a condição de Russel Smith **(H3)**.

**Teorema 3.3.** *Dado  $\lambda > 0$  satisfazendo (3.9) e  $P$  a respectiva solução da equação de Lyapunov (3.10), se existe  $\varepsilon > 0$  tal que:*

$$(x - y)^T P [F(x, t) - F(y, t)] \leq \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right) \|x - y\|^2,$$

*então a equação (3.8) satisfaz a condição **(H3)**, para os parâmetros  $\lambda$  e  $\varepsilon$  e para a matriz  $P$ .*

*Demonstração.* A demonstração é imediata. Por (3.10) obtemos sucessivamente

$$\begin{aligned} & (x - y)^T P [F(x, t) - F(y, t) + (D + \lambda I)(x - y)] \\ &= \frac{1}{2}(x - y)^T [(D + \lambda I)^T P + P(D + \lambda I)] + (x - y)^T P [F(x, t) - F(y, t)] \\ &\leq -\varepsilon \|x - y\|^2, \end{aligned}$$

o que nos permite de imediato estabelecer o resultado pretendido.  $\square$

Ao longo deste capítulo criámos uma estrutura geral que nos permite identificar um conceito mais geral de sincronização. A sincronização generalizada aqui estabelecida, permite-nos especificar uma estrutura mais fina de sincronização e que, naturalmente, inclui a sincronização idêntica.

*All our stories burnt  
Our films lost in the rushes  
We can't paint any pictures  
As the moon had all our brushes*

— Bauhaus, Who killed Mr. Moonlight, (1983)

# 4

## Sincronização de Osciladores acoplados por um meio

### 4.1 Motivação Termodinâmica de osciladores acoplados.

Considere-se um cilindro com área da base igual a 1, contendo um gás ideal e termicamente isolado. No interior do cilindro move-se um êmbolo de tal forma que não existe passagem de gás entre o interior do cilindro e o êmbolo. Vamos também assumir que em equilíbrio assintótico, o êmbolo encontra-se a uma altura  $h$ .

As propriedades macroscópicas do gás são estabelecidas pela conhecida equação  $PV = nRT$ , onde,  $P$  é a pressão,  $V$  o volume,  $T$  a temperatura,  $n$  o número de moles e  $R$  uma constante universal do gás. Por definição, sabemos que a pressão  $P$  é dada pelo quociente da força  $F$  actuando no sistema pela área  $A$ .

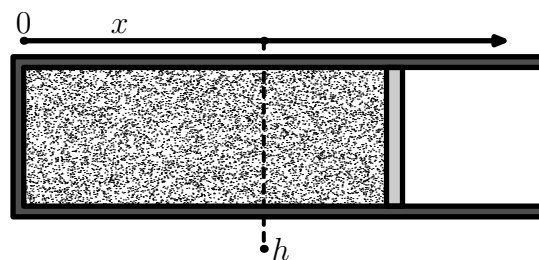


Figura 4.1: O sistema formado por um êmbolo e um cilindro contendo um gás ideal.

Existem duas forças a actuar no nosso sistema: a força  $F_1$  que resulta da pressão

exterior exercida na superfície do êmbolo e a força  $F_2$ , resultado da pressão do gás no interior do cilindro.

Seja  $x(t)$  a posição do êmbolo em relação ao fundo do cilindro, i.e. quando  $x(t) = 0$ , dado que a área da base do cilindro vale 1,  $x(t)$  coincide com o volume  $V(t)$ . Pela lei dos gases ideais, a força  $F_2$  exercida pelo gás na superfície do êmbolo é dada por

$$F_2 = \frac{nRT}{x(t)}.$$

Assumido que  $F_1$  permanece constante ao longo do tempo, que a massa do êmbolo é igual a  $m$  e desprezando o atrito do êmbolo ao longo do deslocamento, a força total exercida na superfície do êmbolo é dada por  $F_2 - F_1$ . Pela segunda lei de Newton, o movimento do êmbolo é regido pela equação

$$\ddot{x} = \frac{nRT}{m} \frac{1}{x(t)} - \frac{1}{m} F_1. \quad (4.1)$$

Pela relação entre força e pressão referida anteriormente, a força  $F_1$  é igual ao produto da pressão exterior  $P_e$  e a área do êmbolo, i.e.,  $P_e = F_1$ . Tendo nós assumido que existe um ponto de equilíbrio quando  $x = h$ , pela equação (4.1) deduz-se que

$$P_e = \frac{nRT}{h},$$

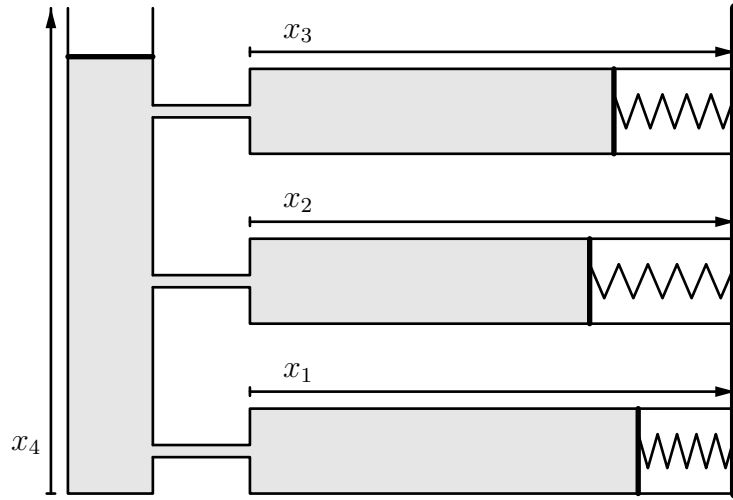
de onde se poderá concluir que a equação (4.1) pode ser escrita na forma

$$\ddot{x} = \frac{nRT}{m} \left( \frac{1}{x(t)} - \frac{1}{h} \right). \quad (4.2)$$

Neste capítulo vamos considerar um sistema de  $N$  osciladores acoplados por um meio. Consideramos então um sistema da forma

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, y, t) \\ \vdots \\ \dot{x}_N = f_N(x_N, y, t) \\ \dot{y} = g(x_1, \dots, x_N, y, t), \end{cases} \quad (4.3)$$

onde  $x_i$  descreve o estado de cada oscilador,  $x_i \in \mathbb{R}^n$ , para  $i = 1, \dots, N$  e  $y \in \mathbb{R}^p$  descreve o estado do meio. Vamos supôr que o sistema é  $T$ -periódico em  $t$  e que  $f_1, \dots, f_N, g$  são suficientemente regulares para termos existência e unicidade de soluções e que estas estão definidas em todo o  $\mathbb{R}$ .

Figura 4.2: Caso em que  $N = 3$ 

Vamos dizer que temos sincronização generalizada sempre que existir uma variedade  $\mathcal{A}_t$ , de dimensão inferior a  $nN + p$ , dependente de  $t$ , que seja invariante e que atraia as órbitas limitadas no futuro, i.e., para toda a solução

$$z(t) = (x_1, \dots, x_N, y)^T \quad (4.4)$$

do sistema (4.3) temos  $d(z(t), \mathcal{A}_t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow +\infty$ , com  $d$  a métrica usual. Neste caso chamamos a  $\mathcal{A}_t$  variedade de sincronização.

A existência de uma variedade de sincronização com certas características permite conhecer o comportamento assintótico de alguns osciladores a partir do estado dos restantes. Por exemplo, a existência de uma variedade de sincronização do tipo

$$\mathcal{A}_t = \{x_1 = x_2 = \dots = x_N\}$$

é um caso especial de sincronização a que chamamos sincronização idêntica. Neste caso podemos prever o comportamento assintótico dos vários osciladores a partir da informação de um único oscilador. A existência da variedade de sincronização vai, em geral, ser obtida a partir da teoria desenvolvida no capítulo 3.

Vamos de seguida considerar um exemplo natural do sistema geral definido em (4.3), formado por  $N$  cilindros idênticos ao caso anterior e todos ligados a um reservatório como o da figura 4.2. Cada um dos êmbolos está ligado a uma mola de tal forma que quando  $x_i(t) = h$  a mola fica em equilíbrio. O reservatório é constituído por um sistema cilindro/êmbolo semelhante aos anteriores, actuando contudo neste cilindro uma força exterior  $F_3(t)$ . A posição de cada um dos êmbolos é medida por  $x_i(t)$ ,

para  $i = 1, \dots, N$  e a posição do êmbolo do reservatório é medida por  $x_{N+1}$ , tal como indicado na figura 4.2.

Considerando  $y(t) = x_1(t) + \dots + x_N(t) + x_{N+1}(t)$ , e de forma análogo ao caso em que temos um sistema formado por apenas um êmbolo, teremos

$$\ddot{x}_{N+1} = \frac{n(N+1)rT}{my} - \frac{1}{m}F_1 - \frac{1}{m}F_3(t).$$

Obtemos assim um sistema de osciladores acoplados por um meio do tipo do sistema (4.3), com  $k$  uma constante de amortecimento de cada um dos êmbolos,

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = \frac{n(N+1)rT}{my} - \frac{1}{m}F_1 - k(x_1(t) - h) \\ \vdots \\ \ddot{x}_N = \frac{n(N+1)rT}{my} - \frac{1}{m}F_1 - k(x_N(t) - h) \\ \ddot{y} = \ddot{x}_1 + \dots + \ddot{x}_N + \frac{n(N+1)rT}{my} - \frac{1}{m}F_1 - \frac{1}{m}F_3(t). \end{cases}$$

No restante do capítulo, vamos procurar as condições em que ocorre sincronização para um sistema do tipo do sistema (4.3), para o qual o sistema anterior é um exemplo natural. Vamos começar por estudar um caso mais simples.

## 4.2 Um exemplo linear

Nesta secção vamos começar por tratar de um sistema de equações do tipo (4.3) quando este é um sistema linear. Nestas condições podemos resolvê-lo através de métodos directos. Nas secções seguintes iremos adicionando perturbações não-lineares e percebendo de que forma é que este factor nos fará adaptar as nossas conclusões.

Vamos considerar um sistema formado por três reservatórios, a que chamaremos 1, 2 e 3. Vamos igualmente supor que todos os contentores têm a mesma capacidade, para simplificar supomos  $1l$ , e que os contentores 1 e 2 não estão ligados entre si, mas ambos estão ligados ao terceiro contentor através de uma membrana semi-permeável. Existe igualmente um solução química diluída no líquido de cada um dos contentores, sendo esta medida pelas variáveis  $x_1$ ,  $x_2$  e  $y$ , respectivamente. A evolução das várias concentrações é descrito pelo sistema linear de equações diferenciais

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = k(y - x_1) \\ \dot{x}_2 = k(y - x_2) \\ \dot{y} = k(x_1 - y) + k(x_2 - y), \end{cases} \quad (4.5)$$

onde  $k$  é uma constante que depende da permeabilidade da membrana. Podemos escrever este sistema em notação matricial na forma

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{y} \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y \end{pmatrix}$$

ou de uma forma mais condensada por

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = kA \begin{pmatrix} X \\ y \end{pmatrix}$$

A matriz  $A$  tem valores próprios  $-3$ ,  $-1$ , e  $0$ , sendo os respectivos vectores próprios dados por

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Deste modo, a estrutura do retractor fase deste sistema é bastante clara: existe uma variedade central estável, unidimensional, gerada pelo vector  $(1, 1, 1)$  e uma bidimensional estável, gerado pelos vectores  $(1, -1, 0)$  e  $(1, 1, 1)$ .

Este sistema, tratando-se de um sistema linear, pode ser facilmente integrado pelos métodos habituais. Contudo, vamos estudá-lo na perspectiva das técnicas introduzidas no capítulo 3. Para lá de poder dar uma visibilidade sobre as ideias aí introduzidas, permitir-nos-à igualmente ter uma intuição mais forte quando introduzirmos perturbações no sistema.

Como vimos no capítulo 3, a matriz  $P$ , necessária para podermos escrever a condição de Russel-Smith, é a solução da equação de Lyapunov

$$D^T P + P D = -I.$$

Por outro lado, vimos no capítulo 2 que  $P$  é a única solução se e apenas se podermos garantir  $\sigma(D) \cap \overline{\sigma(-D)} = \emptyset$ . Por forma a garantirmos que a matriz  $D$  na equação de Lyapunov não tem nenhum valor próprio com parte real nula, introduzimos o parâmetro  $\lambda$  e substituímos a matrix  $kA$  pela matrix perturbada  $kA + \lambda I$  na referida equação. Vamos assumir que  $\lambda$  é escolhido de tal forma que esteja garantido que  $\sigma(kA + \lambda I) \cap \overline{\sigma(-kA - \lambda I)} = \emptyset$ . Garantidas todas estas condições, podemos assegurar

que existe uma matriz  $P$  que é a única solução da equação

$$(kA + \lambda I)^T P + P(kA + \lambda I) = -I. \quad (4.6)$$

É fácil de comprovar que  $P^T$  também é solução da equação (4.6). Pelo facto de termos assegurado que a solução desta equação é única, temos necessariamente que a matriz  $P$  é simétrica. Por outro lado, o Teorema Geral da Inércia (2.5) permite-nos dizer que o número de valores próprios de  $P$  com parte real positiva é igual ao número de valores próprios com parte real negativa da matriz  $kA + \lambda I$ , visto que ao contrário do que acontecia no caso do teorema 2.5, a matriz  $-I$  é definida negativa. A matriz  $kA + \lambda I$  tem os valores próprios  $-3k + \lambda$ ,  $-k + \lambda$ , e  $\lambda$ . Vamos estudar os casos em que um e em que dois dos seus valores próprios são positivos. Por forma a que  $P$  esteja bem definida, escolhemos  $\lambda$  tal que  $\sigma(kA + \lambda I) \cap \overline{\sigma(-kA - \lambda I)} = \emptyset$ . Temos assim dois cenários qualitativos diferentes: se  $\lambda \in (0, k) \setminus \{\frac{k}{2}\}$  então  $kA + \lambda I$  tem um valor próprio positivo e dois negativos; se  $\lambda \in (k, 3k) \setminus \{\frac{3}{2}k, 2k\}$  então  $kA + \lambda I$  tem dois valores próprios positivos e um negativo. Em ambos os casos podemos calcular a solução  $P$  da equação (4.6) para o  $\lambda$  escolhido, obtendo

$$P = \begin{pmatrix} -\frac{k^2 - 3k\lambda + \lambda^2}{2\lambda(\lambda - 3k)(\lambda - k)} & -\frac{k^2}{2\lambda(\lambda - 3k)(\lambda - k)} & \frac{k}{2\lambda(\lambda - 3k)} \\ -\frac{k^2}{2\lambda(\lambda - 3k)(\lambda - k)} & -\frac{k^2 - 3k\lambda + \lambda^2}{2\lambda(\lambda - 3k)(\lambda - k)} & \frac{k}{2\lambda(\lambda - 3k)} \\ \frac{k}{2\lambda(\lambda - 3k)} & \frac{k}{2\lambda(\lambda - 3k)} & \frac{k - \lambda}{2\lambda(\lambda - 3k)} \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

Embora os resultados de teoria das matrizes apenas nos possam garantir a existência e a unicidade da solução da equação de Lyapunov para  $\lambda \in (0, k) \setminus \{\frac{k}{2}\}$  e  $\lambda \in (k, 3k) \setminus \{\frac{3}{2}k, 2k\}$ , podemos ver que a matriz  $P$  dada na expressão acima está bem definida para  $\lambda \in (0, k)$  e  $\lambda \in (k, 3k)$ . Deste modo vamos considerar a solução da equação (4.6) para  $\lambda$  escolhido em cada um destes intervalos. Calculando os valores próprios da matriz  $P$  iremos obter

$$-\frac{1}{2(\lambda - 3k)}, -\frac{1}{2(\lambda - k)}, -\frac{1}{2\lambda},$$

com os vectores próprios correspondentes

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Em qualquer um dos casos, fazendo a substituição

$$\begin{pmatrix} F(X, \mathcal{Y}, t) \\ \mathcal{G}(X, \mathcal{Y}, t) \end{pmatrix} = kA$$

obtemos

$$\begin{pmatrix} X - Q \\ \mathcal{Y} - w \end{pmatrix}^T P(kA + \lambda I) \begin{pmatrix} X - Q \\ \mathcal{Y} - w \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} X - Q \\ \mathcal{Y} - w \end{pmatrix} \right\|^2$$

pelo que a condição **(H3)** é verificada para  $\varepsilon = 1/2$ . Então o Teorema 3.1, com  $\lambda \in (0, k)$  diz-nos que existe uma variedade invariante de sincronização unidimensional, que sabemos ser a variedade central gerada por  $(1, 1, 1)^T$ . Por outro lado, se  $\lambda \in (k, 3k)$  obtemos uma variedade de sincronização bidimensional que sabemos ser o subespaço gerado por  $(1, 1, 1)^T$  e  $(1, -1, 0)^T$ .

### 4.3 Condições gerais de sincronização para uma perturbação não-linear

Vamos de seguida estudar uma perturbação do caso linear apresentado na secção 4.2 e iremos ver o que a teoria de Russel-Smith, desenvolvida no capítulo 3, nos permite concluir. Considere-se a perturbação não-linear e não-autónoma do sistema (4.5)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = k(\mathcal{Y} - x_1) + f_1(x_1, t) \\ \dot{x}_2 = k(\mathcal{Y} - x_2) + f_2(x_2, t) \\ \dot{\mathcal{Y}} = k(x_1 - \mathcal{Y}) + k(x_2 - \mathcal{Y}) + h(\mathcal{Y}, t). \end{cases} \quad (4.8)$$

Como habitualmente assume-se que as funções  $f_1$ ,  $f_2$ , e  $h$  tem regularidade suficiente para que a existência e unicidade de soluções se verifique e que todas as soluções estejam definidas em  $\mathbb{R}$ . Além disso são  $T$ -periódicas em  $t$  para algum  $T > 0$ .

O nosso objectivo será ver em que condições o sistema perturbado ainda verifica a condição de Russel Smith para a matriz  $P$  calculada na secção anterior. O problema pode ser escrito na sua forma matricial por

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{\mathcal{Y}} \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \mathcal{Y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(x_1, t) \\ f_2(x_2, t) \\ h(\mathcal{Y}, t) \end{pmatrix}$$

Para duas soluções quaisquer do sistema anterior

$$\begin{pmatrix} X \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} Q \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ w \end{pmatrix},$$

A condição de Russel Smith é escrita na forma

$$\begin{pmatrix} X - Q \\ y - w \end{pmatrix}^T P \left[ \begin{pmatrix} f_1(x_1, t) - f_1(q_1, t) \\ f_2(x_2, t) - f_2(q_2, t) \\ h(y, t) - h(w, t) \end{pmatrix} + (kA + \lambda I) \begin{pmatrix} X - Q \\ y - w \end{pmatrix} \right] \leq -\varepsilon \left\| \begin{pmatrix} X - Q \\ y - w \end{pmatrix} \right\|^2$$

Considerando-se a forma bilinear associada à matriz  $P(kA + \lambda I)$ , e assumindo que  $P$  é a solução da equação de Lyapunov  $(kA + \lambda I)^T P + P(kA + \lambda I) = -I$ , podemos reescrever a última desigualdade de forma equivalente por

$$\left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right) \left\| \begin{pmatrix} X - Q \\ y - w \end{pmatrix} \right\|^2 - \begin{pmatrix} X - Q \\ y - w \end{pmatrix}^T P \begin{pmatrix} f_1(x_1, t) - f_1(q_1, t) \\ f_2(x_2, t) - f_2(q_2, t) \\ h(y, t) - h(w, t) \end{pmatrix} \geq 0$$

Por outro lado, se  $x_1 \neq q_1$ ,  $x_2 \neq q_2$  e  $y \neq w$ , definindo

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha(x_1, q_2, t) = \frac{f_1(x_1, t) - f_1(q_1, t)}{x_1 - q_1} \\ \beta &= \beta(x_2, q_2, t) = \frac{f_2(x_2, t) - f_2(q_2, t)}{x_2 - q_2} \\ \gamma &= \gamma(y, w, t) = \frac{h(y, t) - h(w, t)}{y - w}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

podemos reescrever o segundo termo do primeiro membro da desigualdade anterior como

$$\begin{pmatrix} X - Q \\ y - w \end{pmatrix}^T P \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X - Q \\ y - w \end{pmatrix}.$$

Deste modo, a condição de Russel Smith é equivalente a

$$\begin{pmatrix} X - Q \\ y - w \end{pmatrix}^T \left[ \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right) I - P \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} X - Q \\ y - w \end{pmatrix} \geq 0. \quad (4.10)$$

Consideremos a matriz  $\Omega$ , a matriz simétrica da forma quadrática associada

$$\Omega = \frac{1}{2} \left( \left[ \left( \frac{1}{2} - \varepsilon \right) I - P \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \right]^T + \left( \frac{1}{2} - \varepsilon \right) I - P \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \right). \quad (4.11)$$

Esta matriz pode ser dada explicitamente por

$$\Omega = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \varepsilon + \frac{\alpha(k^2 - 3k\lambda + \lambda^2)}{2\lambda(\lambda - 3k)(\lambda - k)} & \frac{(\alpha + \beta)k^2}{4\lambda(\lambda - 3k)(\lambda - k)} & \frac{(\alpha + \gamma)k}{4\lambda(3k - \lambda)} \\ \frac{(\alpha + \beta)k^2}{4\lambda(\lambda - 3k)(\lambda - k)} & \frac{1}{2} - \varepsilon + \frac{\beta(k^2 - 3k\lambda + \lambda^2)}{2\lambda(\lambda - 3k)(\lambda - k)} & \frac{(\beta + \gamma)k}{4\lambda(3k - \lambda)} \\ \frac{(\alpha + \gamma)k}{4\lambda(3k - \lambda)} & \frac{(\beta + \gamma)k}{4\lambda(3k - \lambda)} & \frac{1}{2} - \varepsilon + \frac{\gamma(k - \lambda)}{2\lambda(3k - \lambda)} \end{pmatrix}.$$

Toda a discussão acerca da validade da condição de Russel Smith é assim equivalente a sabermos sob que condições a forma quadrática definida pela matriz  $\Omega$  é definida positiva. Esta observação fica perfeitamente fixada no Teorema seguinte. Como se pode comprovar facilmente, este é uma consequência natural do Teorema 3.1 apresentado no capítulo 3.

**Teorema 4.1.** *Vamos supor que existe  $\lambda \in (0, k) \cup (k, 3k)$  e  $\varepsilon > 0$  para os quais  $\Omega$  é definida positiva para todos os  $x_1, x_2, \gamma, q_1, q_2, w$ ,  $x_1 \neq x_2$ ,  $q_1 \neq q_2$ ,  $\gamma \neq w$ , onde  $P$  é a solução única da equação de Lyapunov  $(kA + \lambda I)^T P + P(kA + \lambda I) = -I$  dada por (4.7). Então existe sincronização generalizada para o sistema (4.8). Se  $\lambda \in (0, k)$ , a variedade de sincronização  $\mathcal{A}_t$  é unidimensional e pode ser visto como o gráfico sobre o subespaço gerado por  $(1, 1, 1)^T$ . Por outro lado, se  $\lambda \in (k, 3k)$ , a variedade de sincronização  $\mathcal{A}_t$  será bidimensional e pode ser vista como o gráfico sobre o subespaço gerado pelos vectores  $(1, -1, 0)^T$  e  $(1, 1, 1)^T$*

Nas aplicações existe muitas vezes um conjunto que atrai as soluções limitadas no futuro. Quando todas as soluções deste tipo são atraídas para a variedade invariante diz-se que existe *sincronização generalizada limitada*.

O nosso objectivo imediato passou assim a ser saber em que condições a matriz  $\Omega$  é definida positiva. Isto pode ser feito de duas formas distintas: calculando os respectivos valores próprios e ver em que condições eles são todos positivos ou estudando o sinal dos seus menores. A primeira alternativa revela-se impraticável pelo que optamos pela segunda via. Para isso considere-se os coeficientes  $a, b, c$  e  $d$ , dados como

funções dos parâmetros  $\lambda$  e  $k$

$$\begin{aligned} a &= \frac{(k^2 - 3k\lambda + \lambda^2)}{2\lambda(\lambda - 3k)(\lambda - k)}, & b &= \frac{k^2}{4\lambda(\lambda - 3k)(\lambda - k)}, \\ c &= \frac{k}{4\lambda(3k - \lambda)}, & d &= \frac{\lambda - k}{2\lambda(\lambda - 3k)}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Então a matriz  $\Omega$  pode ser escrita de uma forma mais concentrada por

$$\Omega = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \varepsilon + \alpha a & (\alpha + \beta)b & (\alpha + \gamma)c \\ (\alpha + \beta)b & \frac{1}{2} - \varepsilon + \beta a & (\beta + \gamma)c \\ (\alpha + \gamma)c & (\beta + \gamma)c & \frac{1}{2} - \varepsilon + \gamma d \end{pmatrix},$$

sendo os respectivos menores por sua vez definidos através das expressões

$$\begin{aligned} m_1(\alpha) &= \frac{1}{2} - \varepsilon + \alpha a; \\ m_2(\alpha, \beta) &= \left( \frac{1}{2} - \varepsilon + \alpha a \right) \left( \frac{1}{2} - \varepsilon + \beta a \right) - b^2(\alpha + \beta)^2; \\ m_3(\alpha, \beta, \gamma) &= \left( \frac{1}{2} - \varepsilon + \gamma d \right) m_2(\alpha, \beta) + 2c^2b(\alpha + \beta)(\alpha + \gamma)(\beta + \gamma) \\ &\quad - c^2(m_1(\alpha)(\beta + \gamma)^2 + m_1(\beta)(\alpha + \gamma)^2), \end{aligned} \quad (4.13)$$

A nossa intuição parece dizer-nos que se os quocientes  $\alpha$ ,  $\beta$ , e  $\gamma$  são limitados e que  $k$  é suficientemente grande então o sistema sincroniza exactamente da mesma maneira que a parte linear. Estas ideias são explicitamente fixadas (e demonstradas) no teorema seguinte.

**Teorema 4.2.** *Vamos supor que, para  $x_1 \neq q_1$ ,  $x_2 \neq q_2$  e  $y \neq w$ , os quocientes  $\alpha = \alpha(x_1, q_2, t)$ ,  $\beta = \beta(x_2, q_2, t)$ ,  $\gamma = \gamma(y, w, t)$  definidos em (4.9) são limitados. Então para  $k$  suficientemente grande existe sincronização generalizada (limitada) para o sistema (4.8), com uma variedade de sincronização unidimensional  $\mathcal{A}_t$  que pode ser vista como o gráfico sobre o espaço gerado por  $(1, 1, 1)^T$ , ou uma variedade de sincronização bidimensional que pode ser vista como o gráfico sobre o espaço gerado por  $(1, -1, 0)^T$ , e  $(1, 1, 1)^T$*

*Demonstração.* Dando valores particulares a  $\lambda$  em (4.13), as expressões tornam-se mais tratáveis. Vamos assim escolher  $\lambda = k/2$ , que irá gerar uma variedade unidimensional e  $\lambda = 2k$  que irá, por sua vez, gerar uma variedade bidimensional. Estes valores foram escolhidos de forma arbitrária mas ainda assim de modo a crescerem

linearmente com  $k$ . Para o primeiro valor de  $\lambda$ , as expressões em (4.12) são dadas por

$$a = \frac{2}{5k}, \quad b = \frac{2}{5k}, \quad c = \frac{1}{5k}, \quad d = \frac{1}{5k}.$$

Os primeiro menor da matriz definido em (4.13) será

$$m_1(\alpha) = \frac{1}{2} - \varepsilon + \alpha \frac{2}{5k}.$$

Da mesma maneira os segundo e terceiro menores serão dados por

$$\begin{aligned} m_2(\alpha, \beta) &= \left( \frac{1}{2} - \varepsilon + \alpha \frac{2}{5k} \right) \left( \frac{1}{2} - \varepsilon + \beta \frac{2}{5k} \right) - \frac{4}{25k^2} (\alpha + \beta)^2; \\ m_3(\alpha, \beta, \gamma) &= \left( \frac{1}{2} - \varepsilon + \frac{\gamma}{5k} \right) m_2(\alpha, \beta) + \frac{4}{125k^2} (\alpha + \beta)(\alpha + \gamma)(\beta + \gamma) \\ &\quad - \frac{1}{25k^2} (m_1(\alpha)(\beta + \gamma)^2 + m_1(\beta)(\alpha + \gamma)^2). \end{aligned}$$

É agora suficientement claro que se  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  são limitados, podemos encontrar  $k$  suficientemente grande e  $\varepsilon$  suficientemente pequeno que fará com que os menores sejam sempre positivos. Para estes valores de  $k$  e  $\varepsilon$ ,  $\Omega$  é definida positiva e o resultado segue do Teorema 4.1.

No caso em que  $\lambda = 2k$  a demonstração é perfeitamente similar. Neste caso as expressões em (4.12) são dadas por

$$a = \frac{1}{12k}, \quad b = -\frac{1}{8k}, \quad c = \frac{1}{8k}, \quad d = -\frac{1}{4k}.$$

Os menores da matriz  $\Omega$  conforme definidos em (4.13) serão transformados em

$$\begin{aligned} m_1(\alpha) &= \frac{1}{2} - \varepsilon + \frac{\alpha}{12k}; \\ m_2(\alpha, \beta) &= \left( \frac{1}{2} - \varepsilon + \frac{\alpha}{12k} \right) \left( \frac{1}{2} - \varepsilon + \frac{\beta}{12k} \right) - \frac{1}{64k^2} (\alpha + \beta)^2; \\ m_3(\alpha, \beta, \gamma) &= \left( \frac{1}{2} - \varepsilon - \frac{\gamma}{4k} \right) m_2(\alpha, \beta) + \frac{1}{256k^2} (\alpha + \beta)(\alpha + \gamma)(\beta + \gamma) \\ &\quad - \frac{1}{68k^2} (m_1(\alpha)(\beta + \gamma)^2 + m_1(\beta)(\alpha + \gamma)^2). \end{aligned}$$

Usando o mesmo raciocínio usado no caso em que  $\lambda = k/2$  podemos estabelecer da mesma forma o resultado pretendido.  $\square$

#### 4.4 Sincronização Idêntica para $f_1 = f_2$

Nesta secção vamos considerar o caso especial em que as perturbações são idênticas em ambos osciladores, i.e., vamos assumir que  $f_1 = f_2 = f$ . De facto, quando a perturbação não-linear é idêntica em ambos os osciladores, do ponto de vista qualitativo o comportamento do sistema é relativamente simples.

Esta simetria permite-nos encontrar explicitamente funções de Lyapunov para o sistema em causa. Em primeiro lugar fazemos notar que neste caso o subespaço unidimensional gerado por  $(1, 1, 1)^T$  e o bidimensional gerado por  $(1, 1, 1)^T$  e  $(1, -1, 0)^T$  não são espaços invariantes. Contudo, o espaço bidimensional que resulta no complemento ortogonal de  $(1, -1, 0)^T$ , o subespaço  $S = \{(x_1, x_2, y) \in \mathbb{R}^3: x_1 = x_2\}$ , é ainda um espaço invariante. Na verdade, podemos dar as condições segundo as quais este subespaço é atractivo para as soluções do nosso sistema. Se fizermos  $z = x_1 - x_2$  e  $x_1 \neq x_2$  então

$$\begin{aligned}\dot{z} &= -k(x_1 - x_2) + \frac{f(x_1, t) - f(x_2, t)}{x_1 - x_2}(x_1 - x_2) \\ &= -(k - \alpha(x_1, x_2, t))z_1,\end{aligned}$$

com  $\alpha(x_1, x_2, t) = (f(x_1, t) - f(x_2, t))/(x_1 - x_2)$ . Deste modo, se  $|\alpha| < k$ , para quaisquer  $x_1, x_2$  e  $t$ , com  $x_1 \neq x_2$  então  $z(t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow +\infty$ , o que é equivalente a dizermos que  $S$  é uma variedade de sincronização.

**Teorema 4.3.** *Se  $f_1 = f_2 = f$  e se se verificar*

$$\left| \frac{f(x_1, t) - f(x_2, t)}{x_1 - x_2} \right| < k$$

*para quaisquer  $x_1, x_2$  e  $t$ , com  $x_1 \neq x_2$ , então o sistema (4.8) sincroniza, onde a variedade de sincronização é dada por  $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3: x_1 = x_2\}$ .*

Quando as perturbações são idênticas ocorre aquilo que apelidámos por sincronização idêntica. Neste caso o comportamento assintótico do primeiro oscilador pode ser totalmente determinado pelo comportamento do segundo e vice-versa. Note-se ainda que neste caso podemos provar que todas as órbitas, limitadas ou não, convergem para a variedade de sincronização. Por outro lado, a variedade bidimensional cuja existência é assegurada pelo Teorema 4.2 é um gráfico sobre o subespaço gerado por  $(1, -1, 0)^T$  e  $(1, 1, 1)^T$ , pelo que em geral trata-se de outro tipo de sincronização.

## 4.5 Sobre os intervalos óptimos de $\alpha$ , $\beta$ e $\gamma$ .

Vimos no Teorema 4.2 que se  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  são limitados podemos assegurar a existência de sincronização para um  $k$  suficientemente grande. Procuramos nesta secção encontrar os valores óptimos para os intervalos que  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  e  $k$  podem percorrer. Como teremos oportunidade de ver, não é de todo fácil encontrar analiticamente este tipo de optimabilidade. Recorremos também neste caso a métodos numéricos que nos permitam dar algum tipo de clarividência sobre os mesmos.

Para podermos dar algum tipo de representação gráfica temos de considerar algum tipo de restrições sobre os parâmetros. Começamos por nos focar no caso em que  $f_1 = f_2 = f$  e  $h = 0$ . Neste caso  $\Omega$  só depende de  $\varepsilon$ ,  $\alpha$ ,  $\lambda$  e  $k$ . Pelo facto de  $\varepsilon$  introduzir apenas uma pequena perturbação na matriz  $\Omega$ , significando isto que  $\Omega$  é definida positiva para  $\varepsilon = 0$  então também é definida positiva para valores de  $\varepsilon$  suficientemente pequenos. Deste modo, nas figuras seguintes vamos considerar sempre que  $\varepsilon = 0$ . Na figura 4.3(a), fazemos  $k = 1$  e desenhamos a região no plano  $\lambda O \alpha$  onde  $\Omega$  é definida positiva. Esta figura foi obtida através de métodos numéricos que nos permitem encontrar o contorno do domínio usando as expressões em (4.13).

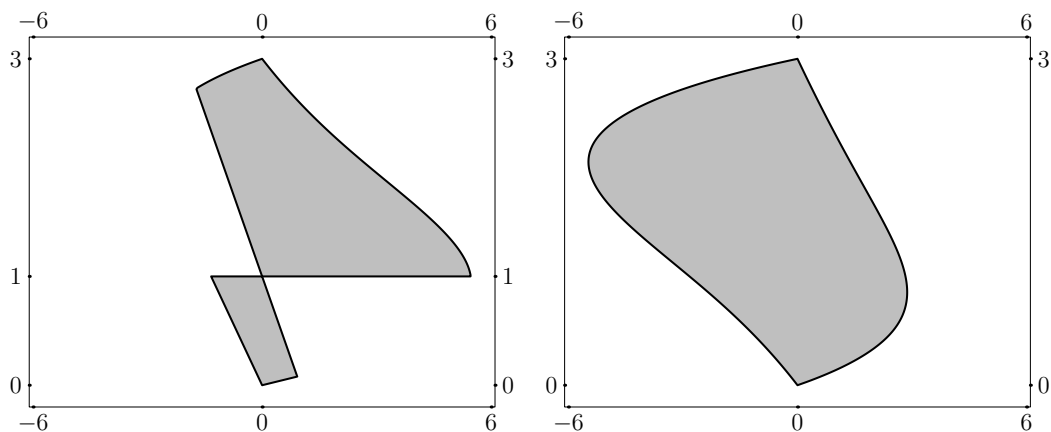


Figura 4.3: Na figura da esquerda (figura 4.3(a)), a região onde  $\Omega$  é definida positiva no plano  $\lambda O \alpha$ . Na figura da direita (figura 4.3(b)), a região onde  $\Omega$  é definida positiva no plano  $\lambda O \gamma$ .

Desenhámos estas figuras para  $\lambda \in (0, 3k)$  porque este é o intervalo relevante para a condição de Russel Smith. Por um lado, se  $\lambda \in (0, k)$ , se os valores de  $\alpha$  caem dentro da região sombreada para este  $\lambda$  então temos um variedade de sincronização unidimensional de acordo com o Teorema 4.1. Por outro, para  $\lambda \in (k, 3k)$ , para os valores de  $\alpha$  que por sua vez caem na região sombreada para este  $\lambda$  então, de acordo com o mesmo Teorema, temos uma variedade de sincronização bidimensional.

Esta imagem dá-nos uma ideia que tipo de valores podem ser percorridos por  $\alpha$  por forma a que possamos garantir sincronização. Note-se que em geral este intervalo varia consoante o valor de  $\lambda$ , significando em particular que não podemos encontrar um intervalo comum para qualquer valor de  $\lambda$  no intervalo  $(0, 3k)$ . Quando  $k$  cresce, estas regiões aumentam proporcionalmente mantendo sempre o seu aspecto. Isto significa que valores maiores de  $\alpha$  poderão ser considerados para os mesmos valores de  $\lambda$ . É essencialmente este facto observável que foi estabelecido no Teorema 4.2.

Usando o mesmo método, podemos encontrar a figura análoga para o caso em que existe apenas perturbação no meio e nenhuma perturbação nos osciladores, ou seja,  $f_1 = f_2 = 0$ . A figura 4.3(b) representa esta situação no plano  $\lambda O\gamma$ . Todas as observações feitas no caso anterior podem, *mutatis mutandis*, ser adaptadas de forma óbvia a este caso.

Quando as perturbações não-lineares nos osciladores não são idênticas, o tratamento do problema deixa de ser tão simples, visto que precisamos de uma dimensão extra. Nas figuras 4.4(a)–4.4(c) fizémos  $h = 0$  e calculámos a região sombreada onde a matriz  $\Omega$  é definida positiva no plano  $\alpha O\beta$ , para  $k = 1$  e para uma amostra de valores de  $\lambda$  no intervalo  $(0, k)$ . No caso das figuras 4.5(a)–4.5(c) os valores amostrais de  $\lambda$

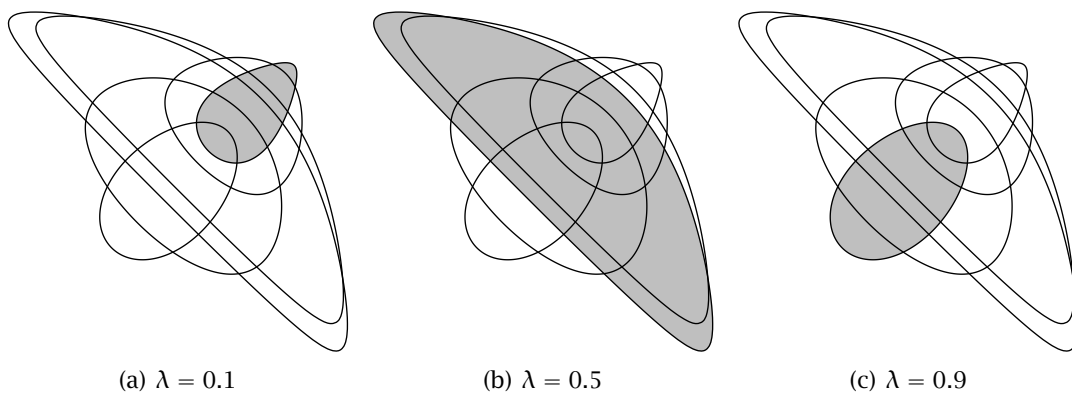


Figura 4.4: Vários exemplos de domínios  $D_{k,\lambda}$ , para  $k = 1$  e  $\lambda \in (0, 1)$ . Os contornos representam a fronteira dos domínios, para  $\lambda \in \{0.1, 0.2, 0.4, 0.5, 0.7, 0.9\}$ , destacando-se os  $D_{k,\lambda}$  para os valores de  $\lambda$  indicados.

foram tomados no intervalo  $(k, 3k)$ . Como gostaríamos de fazer um estudo mais detalhado para estes casos, i.e. as regiões onde a matriz  $\Omega$  é definida positiva no plano  $\alpha O\beta$ , vamos denotá-los por  $D_{k,\lambda}$ . Em ambos conjuntos de figuras podemos comprovar que os vários domínios  $D_{k,\lambda}$  não estão contidos sucessivamente uns nos outros à medida que fazemos variar o valor de  $\lambda$ . Em geral, dados dois intervalos que contêm os valores percorridos por  $\alpha$  e  $\beta$ , obtemos um rectângulo e o sistema sincroniza

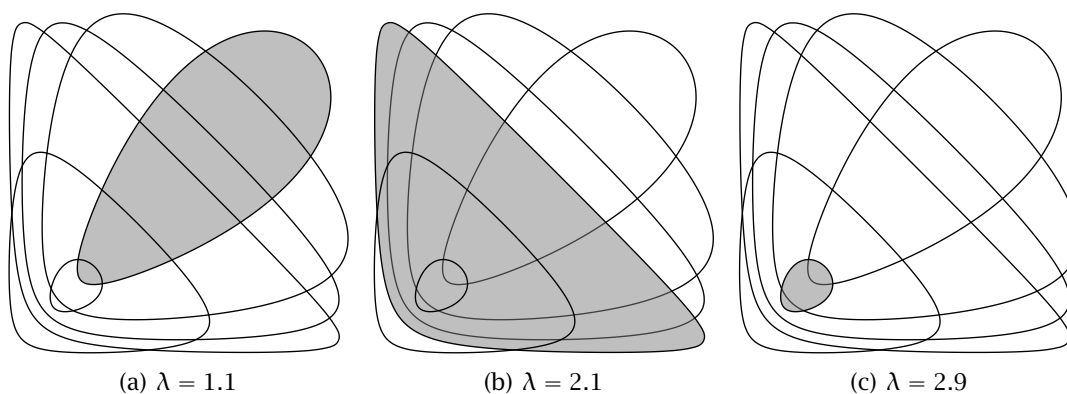


Figura 4.5: Vários exemplos de domínios  $D_{k,\lambda}$ , para  $k = 1$  e  $\lambda \in (1, 3)$ . Os contornos representam a fronteira dos domínios, para  $\lambda \in \{1.1, 1.6, 1.9, 2.1, 2.5, 2.9\}$ , destacando-se os  $D_{k,\lambda}$  para os valores de  $\lambda$  indicados.

precisamente se este está contido dentro da região sombreada para um determinado valor de  $k$  e  $\lambda$ . Novamente, estas regiões crescem proporcionalmente à medida que  $k$  cresce. Esta é novamente uma representação visual do Teorema 4.2.

Note-se também que se  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  estão contidos dentro de um conjunto compacto que está por sua vez contido dentro de um destes domínios  $D_{k,\lambda}$ , então podemos encontrar  $\varepsilon$  suficientemente pequeno para o qual a condição de Russel Smith seja verificada, pelo que não existe perda de generalidade se considerarmos estes domínios para  $\varepsilon = 0$ . Prosseguiremos de acordo com este preceito.

## 4.6 Convexidade de $D_{k,\lambda}$ e regularidade da sua fronteira

Nesta secção apresentamos alguns resultados analíticos sobre os domínios  $D_{k,\lambda}$ . Vamos em primeiro lugar mostrar que eles são sempre convexos. De seguida, iremos mostrar que a sua fronteira é regular para todos os valores de  $\lambda \in (0, 3k)$  excepto num número finito de valores bem determinados. No capítulo 5 vamos usar estes resultados para mostrar que podemos encontrar o maior rectângulo isotético, i.e., com lados paralelos aos eixos coordenados, que está contido em cada um destes domínios. Isto permitir-nos-à, dado um valor de  $k$ , determinar de uma forma concreta os limites para as não-linearidades, por forma a que possamos garantir a existência de sincronização.

**Teorema 4.4.** *Fixemos um valor para  $\lambda$ ,  $\varepsilon \geq 0$  e  $k$  e consideremos  $h = 0$ . A região  $D_{k,\lambda}$  do plano  $\alpha O \beta$  onde  $\Omega$  é definida positiva é um conjunto convexo.*

*Demonstração.* Fixados valores para  $\lambda$ ,  $\varepsilon$  e  $k$ , considere-se o conjunto  $D_{k,\lambda}$ . Para quaisquer  $(\alpha_1, \beta_1)$  e  $(\alpha_2, \beta_2)$  em  $D_{k,\lambda}$ , vamos mostrar que para qualquer  $\xi \in (0, 1)$  tal que

$$(\alpha, \beta) = (1 - \xi)(\alpha_1, \beta_1) + \xi(\alpha_2, \beta_2)$$

então  $(\alpha, \beta) \in D_{k,\lambda}$ . Note-se que um ponto  $(\alpha, \beta)$  é elemento de  $D_{k,\lambda}$  se e só se a condição em (4.10) é verificada. Para este caso particular, temos de mostrar que

$$\begin{pmatrix} X - Q \\ y - w \end{pmatrix}^T \left[ \left( \frac{1}{2} - \varepsilon \right) I - P \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} X - Q \\ y - w \end{pmatrix} \geq 0.$$

Dados  $\begin{pmatrix} X \\ y \end{pmatrix}$  e  $\begin{pmatrix} Q \\ w \end{pmatrix}$  em  $\mathbb{R}^3$ , pela forma como definimos  $(\alpha, \beta)$ , teremos

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} X - Q \\ y - w \end{pmatrix}^T \left[ \left( \frac{1}{2} - \varepsilon \right) I - P \begin{pmatrix} (1 - \xi)\alpha_1 + \xi\alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & (1 - \xi)\beta_1 + \xi\beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} X - Q \\ y - w \end{pmatrix} \\ &= (1 - \xi) \begin{pmatrix} X - Q \\ y - w \end{pmatrix}^T \left[ \left( \frac{1}{2} - \varepsilon \right) I - P \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} X - Q \\ y - w \end{pmatrix} \\ &+ \xi \begin{pmatrix} X - Q \\ y - w \end{pmatrix}^T \left[ \left( \frac{1}{2} - \varepsilon \right) I - P \begin{pmatrix} \alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} X - Q \\ y - w \end{pmatrix} \geq 0 \end{aligned}$$

Concluimos que  $(\alpha, \beta)$  verifica a condição (4.10), pelo que pertence ao conjunto  $D_{k,\lambda}$ . Acabámos assim de mostrar que para qualquer  $\xi \in (0, 1)$  e para quaisquer  $(\alpha_1, \beta_1)$ ,  $(\alpha_2, \beta_2) \in D_{k,\lambda}$  temos necessariamente  $(\alpha, \beta) = (1 - \xi)(\alpha_1, \beta_1) + \xi(\alpha_2, \beta_2) \in D_{k,\lambda}$ , o que é equivalente a dizermos que  $D_{k,\lambda}$  é um conjunto convexo.  $\square$

O próximo conjunto de lemas irá preparar o outro resultado central desta secção: que a fronteira de  $D_{k,\lambda}$  é regular excepto para um conjunto finito de valores de  $\lambda$ . Considerando  $y = 0$  e  $\varepsilon = 0$ , o conjunto  $D_{k,\lambda}$  pode ser visto como a intersecção das três regiões onde os menores são positivos:

$$\begin{aligned} m_1(\alpha) &= \frac{1}{2} + \alpha a; \\ m_2(\alpha, \beta) &= \left( \frac{1}{2} + \alpha a \right) \left( \frac{1}{2} + \beta a \right) - b^2(\alpha + \beta)^2; \\ m_3(\alpha, \beta) &= \frac{1}{2} m_2(\alpha, \beta) + c^2 \left( (2b - a)(\alpha + \beta)\alpha\beta - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} \right), \end{aligned} \tag{4.14}$$

com os parâmetros definidos em (4.12). Em geral, se intersectarmos três domínios regulares podem ser gerados pontos singulares. No caso que estamos a estudar, como teremos oportunidade de ver com todo o rigor, os três domínios estão sequencialmente contidos uns nos outros. Isto significa em particular que as eventuais singularidades apenas surgirão nos casos em que o terceiro menor, visto ser uma variedade algébrica de grau 3, seja um conjunto cuja fronteira contenha ela própria singularidades.

O comportamento do primeiro menor  $m_1(\alpha)$  é extremamente simples. Das equações em (4.14) podemos observar que  $m_1(\alpha) > 0$  é genericamente um semi-plano. Se  $a \neq 0$ , i.e. se  $\lambda \neq \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}k$  então a fronteira do semi-plano é dada por  $\alpha = -\frac{1}{2a}$ . Quando  $\lambda = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}k$ , então a condição  $m_1(\alpha) > 0$  é verificada em todo o plano.

Focando a nossa atenção no segundo menor, reparamos de imediato que se trata de uma forma quadrática de segundo grau e portanto iremos estudá-la da maneira habitual. Em primeiro lugar fazemos notar que  $m_2(\alpha, \beta) > 0$  é não vazia visto conter a origem, pelo que a cónica associada é não-degenerada. Expandindo a expressão em (4.14), a matriz  $M$ , associada à forma quadrática  $m_2(\alpha, \beta)$ , pode ser escrita por

$$M = \begin{bmatrix} -b^2 & \frac{a^2 - 2b^2}{2} \\ \frac{a^2 - 2b^2}{2} & -b^2 \end{bmatrix}.$$

Sem grandes problemas podemos ver que o determinante de  $M$  é dado por

$$|M| = a^2(4b^2 - a^2)/4 = \frac{(\lambda - 2k)(k^2 - 3k\lambda + \lambda^2)^2}{64\lambda^3(3k - \lambda)^3(\lambda - k)^3},$$

ou seja, é estritamente positivo se  $\lambda \in (0, k) \setminus \{(3 - \sqrt{5})k/2\}$  ou  $\lambda \in (2k, 3k) \setminus \{(3 + \sqrt{5})k/2\}$  e negativo se  $\lambda \in (k, 2k)$ . Isto significa que  $m_2(\alpha, \beta) = 0$  é uma elipse no primeiro caso e uma hipérbole no segundo. Para  $\lambda = k$ ,  $a$  e  $b$  não estão definidos. Finalmente para  $\lambda = 2k$ , a condição  $m_2(\alpha, \beta) = 0$  forma uma parábola. É trivial mostrar que a linha  $\alpha = -1/2a$ , para  $\lambda \neq \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}k$ , é tangente à curva  $m_2(\alpha, \beta) = 0$ .

Vamos definir  $D_{k,\lambda,m_i} = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : m_i(\alpha, \beta) > 0\}$  para  $i = 1, 2, 3$ . Para os casos em que  $m_1(0, 0) > 0$  e  $m_2(0, 0) > 0$ , pela tangência entre as respectivas fronteiras, conforme apontado anteriormente, e pelo facto de  $D_{k,\lambda,m_2}$  ter uma única componente conexa ou ser a união de várias componentes conexas, mostra-nos que a componente conexa de  $D_{k,\lambda,m_2}$  que contém a origem está totalmente contida em  $D_{k,\lambda,m_1}$ . Este facto é fixado no seguinte lema.

**Lema 4.1.** *Se  $\lambda \in (0, k) \setminus \left\{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}k\right\}$ ,  $D_{k,\lambda,m_2}$  é o interior de um conjunto cuja fronteira é*

uma elipse e  $D_{k,\lambda,m_2} \subset D_{k,\lambda,m_1}$ . Se  $\lambda \in (k, 2k)$ ,  $D_{k,\lambda,m_2}$  é composto por duas componentes conexas, cuja fronteira é uma hipérbole. Neste caso, uma das componentes conexas está totalmente contida no conjunto  $D_{k,\lambda,m_1}$ . Se  $\lambda \in (2k, 3k) \setminus \left\{ \frac{3+\sqrt{5}}{2}k \right\}$  então  $D_{k,\lambda,m_2}$  é novamente o interior de um conjunto cuja fronteira é uma elipse e  $D_{k,\lambda,m_2} \subset D_{k,\lambda,m_1}$ . Se  $\lambda = \frac{3+\sqrt{5}}{2}k$ ,  $D_{k,\lambda,m_2}$  é a região contida entre as linhas  $\alpha + \beta = \pm \frac{1}{2b}$  e  $D_{k,\lambda,m_1} = \mathbb{R}^2$ , pelo que claramente  $D_{k,\lambda,m_2} \subset D_{k,\lambda,m_1}$ .

Se até ao momento a estrutura geométrica entre os dois primeiros menores tem sido de uma naturalidade simpática, tudo se torna mais complicado no momento em que introduzimos o terceiro menor. Esta dificuldade, para lá de todas as outras inerentes e já referidas, tem a ver com o facto de a fronteira de  $D_{k,\lambda,m_3}$  ser uma variedade algébrica de grau 3. Começemos por estudar os pontos de intersecção das fronteiras de  $D_{k,\lambda,m_2}$  e de  $D_{k,\lambda,m_3}$ , i.e. os pontos que são solução do sistema não-linear

$$\begin{cases} \frac{a(\alpha+\beta)}{2} + a^2\alpha\beta - b^2(\alpha + \beta)^2 + \frac{1}{4} = 0 \\ (2b - a)\alpha\beta(\alpha + \beta) - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} = 0. \end{cases} \quad (4.15)$$

Este sistema não é fácil de resolver pelo que vamos proceder à mudança de variáveis  $\alpha = \xi - \eta$ ,  $\beta = \xi + \eta$ , que o transformará, nas novas variáveis, em

$$\begin{cases} (a^2 - 4b^2)\xi^2 + a\xi - a^2\eta^2 + \frac{1}{4} = 0 \\ 2(2b - a)\xi^3 - 2(2b - a)\eta^2\xi - \xi^2 - \eta^2 = 0. \end{cases} \quad (4.16)$$

Para resolver o sistema 4.16, vamos começar por procurar soluções para as quais  $\eta = 0$ . Descobrimos então

$$(\alpha_0, \beta_0) = \left( \frac{1}{2(2b - a)}, \frac{1}{2(2b - a)} \right).$$

Note-se que  $2b - a = \frac{1}{2(k-\lambda)} \neq 0$ . Então, resolvendo a primeira equação em ordem a  $\eta^2$  e implicando as respectivas consequências na segunda obtemos

$$8(2b - a)b^2\xi^3 - 4b(a - b)\xi^2 - \frac{2b - a}{2}\xi - \frac{1}{4} = 0.$$

Tendo agora uma raiz desta equação,  $\xi = \frac{1}{2(2b - a)}$ , podemos-la factorizar de forma a obtermos

$$8b^2 \left( \xi - \frac{1}{2(2b - a)} \right) \left( \xi + \frac{1}{4b} \right)^2 (2b - a) = 0.$$

Para  $\xi = -\frac{1}{4b}$ , obtemos  $\eta^2 = \frac{a(a-4b)}{4b^2a^2}$ , e mais duas soluções

$$\begin{aligned}(\alpha_1, \beta_1) &= \left( \frac{-a - \sqrt{a(a-4b)}}{4ab}, \frac{-a + \sqrt{a(a-4b)}}{4ab} \right), \\(\alpha_2, \beta_2) &= \left( \frac{-a + \sqrt{a(a-4b)}}{4ab}, \frac{-a - \sqrt{a(a-4b)}}{4ab} \right).\end{aligned}$$

para  $a > 0$ , i.e., para  $\lambda \in \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}k, k\right)$  e  $\lambda \in \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}k, k\right)$ . Na verdade pode-se mostrar numericamente que  $a - 4b > 0$  para todo o  $\lambda \in (0, 3k) \setminus \{k\}$ . No caso especial em que temos  $a = 0$ ,  $\lambda = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}k$ , existe também uma única solução

$$(\alpha_0, \beta_0) = \left( \frac{1}{4b}, \frac{1}{4b} \right).$$

A solução  $(\alpha_0, \beta_0)$  pertence em qualquer dos casos à linha  $\alpha = \beta$ . As soluções  $(\alpha_1, \beta_1)$  e  $(\alpha_2, \beta_2)$  são a reflexão uma da outra pela mesma linha. Isto está longe de ser surpreendente visto que o sistema é simétrico em relação a esta linha. Sendo a simetria uma propriedade importante, e que mais à frente terá uma papel importante no desenrolar do nosso estudo, vamos fixá-la desde já no lema seguinte.

**Lema 4.2.** *O domínio  $D_{k,\lambda}$ , onde a matriz  $\Omega$  é definida positiva, é simétrico em relação à recta  $\alpha = \beta$ .*

Vamos de seguida mostrar que nos pontos  $(\alpha_i, \beta_i)$ , com  $i \in \{0, 1, 2\}$ , as variedades algébricas  $m_2(\alpha, \beta) = 0$  e  $m_3(\alpha, \beta) = 0$  são tangentes entre si. O cálculo directo mostra que

$$\nabla m_3(\alpha_0, \beta_0) = \left( \frac{1}{2} - \frac{c^2}{4b(2b-a)} \right) \nabla m_2(\alpha_0, \beta_0),$$

comprovando-se assim que em  $(\alpha_0, \beta_0)$  os gradientes a ambas as linhas são paralelos. Necessariamente as variedades algébricas são tangentes em  $(\alpha_0, \beta_0)$ . Usando o mesmo método, para  $i = 1, 2$ , teremos por sua vez

$$\nabla m_3(\alpha_i, \beta_i) = \left( \frac{1}{2} + \frac{c^2}{2ab} \right) \nabla m_2(\alpha_i, \beta_i).$$

Deste modo também nos pontos  $(\alpha_1, \beta_1)$  e  $(\alpha_2, \beta_2)$  as variedades algébricas são tangentes entre si. Podemos condensar toda esta informação no seguinte lema.

**Lema 4.3.** *As variedades algébricas  $m_2(\alpha, \beta) = 0$  e  $m_3(\alpha, \beta) = 0$  são tangentes em todos os pontos não singulares onde elas se intersectam.*

Com o lema anterior acabámos de demonstrar que a mais que eventual possibilidade de aparecerem singularidades nos pontos de intersecção dos domínios  $D_{k,\lambda,m_2}$  e  $D_{k,\lambda,m_3}$  onde ambas as fronteiras são regulares fica definitivamente afastada. Assim as singularidades poderão aparecer unicamente pelo facto de os referidos domínios apresentarem eles próprios singularidades. Dito de outro modo, se a intersecção apresentar uma singularidade então necessariamente um dos domínios tem uma singularidade. Este não é obviamente o caso do domínio  $D_{k,\lambda,m_2}$ , pois como já vimos anteriormente, para  $\lambda \in (0, 3k) \setminus \{k\}$ , trata-se em qualquer dos casos de uma cónica não degenerada. Por outro lado, o domínio  $D_{k,\lambda,m_3}$  é composto por várias componentes conexas, das quais apenas estamos interessados naquela que contém a origem.

Vamos de seguida estudar a regularidade da variedade algébrica  $m_3(\alpha, \beta) = 0$ . Para nos facilitar as contas vamos continuar a considerar a mudança de variáveis  $\alpha = \xi - \eta$  e  $\beta = \xi + \eta$ . Nestas coordenadas,  $m_2$  e  $m_3$  são escritas por

$$\begin{aligned} m_2(\xi, \eta) &= (a^2 - 4b^2)\xi^2 + a\xi - a^2\eta^2 + \frac{1}{4}, \\ m_3(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}m_2(\xi, \eta) + 2c^2(2b - a)\xi^3 - 2c^2(2b - a)\eta^2\xi - c^2\xi^2 - c^2\eta^2. \end{aligned}$$

Para determinar os pontos onde  $m_3$  é não singular (ver [Har77], pag. 33), temos de encontrar os pontos onde  $\nabla m_3(\xi, \eta) = (0, 0)$ . Dito isto, a última condição é equivalente a termos

$$\begin{cases} (a^2 - 4b^2 - 2c^2)\xi + 2c^2(2b - a)(3\xi^2 - \eta^2) + \frac{a}{2} = 0 \\ (a^2 + 2c^2)\eta + 4c^2(2b - a)\eta\xi = 0. \end{cases} \quad (4.17)$$

Note-se que ao longo da linha  $\eta = 0$ , as soluções do sistema são as soluções

$$\frac{\partial m_3}{\partial \xi}(\xi, 0) = 6c^2(2b - a)\xi^2 + (a^2 - 4b^2 - 2c^2)\xi + \frac{a}{2} = 0. \quad (4.18)$$

Obtemos um ponto singular se a solução de (4.18) é igualmente solução de  $m_3(\xi, 0) = 0$ , i.e.

$$m_3(\xi, 0) = 2c^2(2b - a)\xi^3 + \frac{1}{2}(a^2 - 4b^2 - 2c^2)\xi^2 + \frac{a}{2}\xi + \frac{1}{8} = 0.$$

As raízes desta equação são

$$\xi_1 = -\frac{1}{2(a - 2b)}, \quad \xi_{\pm} = \frac{a + 2b \pm \sqrt{(a + 2b)^2 + 8c^2}}{8c^2}$$

É fácil mostrar que as soluções de (4.18) estão entre estas três raízes. Assim sendo, as soluções de  $\nabla m_3(\xi, \eta) = (0, 0)$  na linha  $\eta = 0$  são os valores de  $\xi$  onde duas das

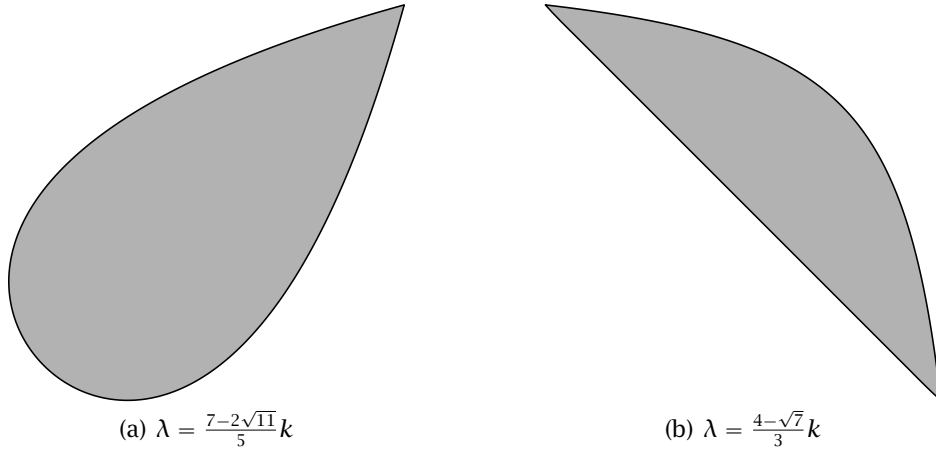


Figura 4.6: Representação de dois dos casos em que  $D_{k,\lambda}$  apresenta singularidades.

raízes anteriores coincidem. Como  $c \neq 0$ , então  $\xi_+ \neq \xi_-$  para todo o  $\lambda \in (0, 3k) \setminus \{k\}$ . Por outro lado, simplificando as expressões no Mathematica, podemos concluir que

$$\xi_1 = \xi_{\pm} \Leftrightarrow c^2 + 2b(a - 2b) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \left( \frac{7 \pm 2\sqrt{11}}{5} \right) k.$$

Resta-nos agora descobrir as soluções onde  $\eta \neq 0$ . Voltando ao sistema (4.17), da segunda equação obtemos de imediato

$$\xi_s = \frac{a^2 + 2c^2}{4c^2(a - 2b)}. \quad (4.19)$$

Transportando esta informação para a primeira equação do sistema (4.17) iremos obter

$$2(a - 2b)c^2\eta^2 - \frac{(a^2 + 2c^2)(a^2 + 8b^2 + 10c^2)}{8(a - 2b)c^2} + \frac{a}{2} = 0.$$

Não é surpreendente que o valor de  $\xi_s$  encontrado em (4.19) vá produzir dois valores simétricos para  $\eta$  dados por

$$\eta_{\pm} = \pm \sqrt{\frac{(a^2 + 2c^2)(a^2 - 8b^2 - 10c^2)}{16c^2(a - 2b)^2} + \frac{a}{4c^2(a - 2b)}}.$$

Isto é obviamente resultado da simetria dos domínios estabelecida no lema 4.2. A mudança de variáveis apenas induziu uma mudança no eixo de simetria dos domínios. Esta simetria implica que  $m_3(\xi_s, \eta_-) = m_3(\xi_s, \eta_+)$ . De novo, para os pontos  $(\xi_s, \eta_{\pm})$  em  $\partial D_{k,\lambda,m_3}$  é necessário que  $m_3(\xi_s, \eta_+) = 0$ . Escrevendo a última equação

nas variáveis  $(k, \lambda)$  obtemos (recorrendo novamente ao Mathematica)

$$m_3(\xi_s, \eta_+) = -\frac{(3k^2 - 8k\lambda + 3\lambda^2)^2(2k^4 - 8k^3\lambda + 12k^2\lambda^2 - 6k\lambda^3 + \lambda^4)}{8\lambda^2(k - \lambda)^4(\lambda - 3k)^2} = 0.$$

Então as soluções da equação  $m_3(\xi_s, \eta_+) = 0$  serão igualmente soluções de

$$3k^2 - 8k\lambda + 3\lambda^2 = 0 \quad \vee \quad 2k^4 - 8k^3\lambda + 12k^2\lambda^2 - 6k\lambda^3 + \lambda^4 = 0.$$

É possível mostrar que as únicas soluções da última equação são

$$\lambda = \left(\frac{4 \pm \sqrt{7}}{3}\right)k.$$

Na figura 4.6 estão representados dois casos em que o domínio apresenta singularidades. Em todos os restantes casos, o teorema da função implícita dá-nos a garantia que a fronteira dos domínios é de classe  $C^\infty$ . Até agora, provámos que os nossos do-

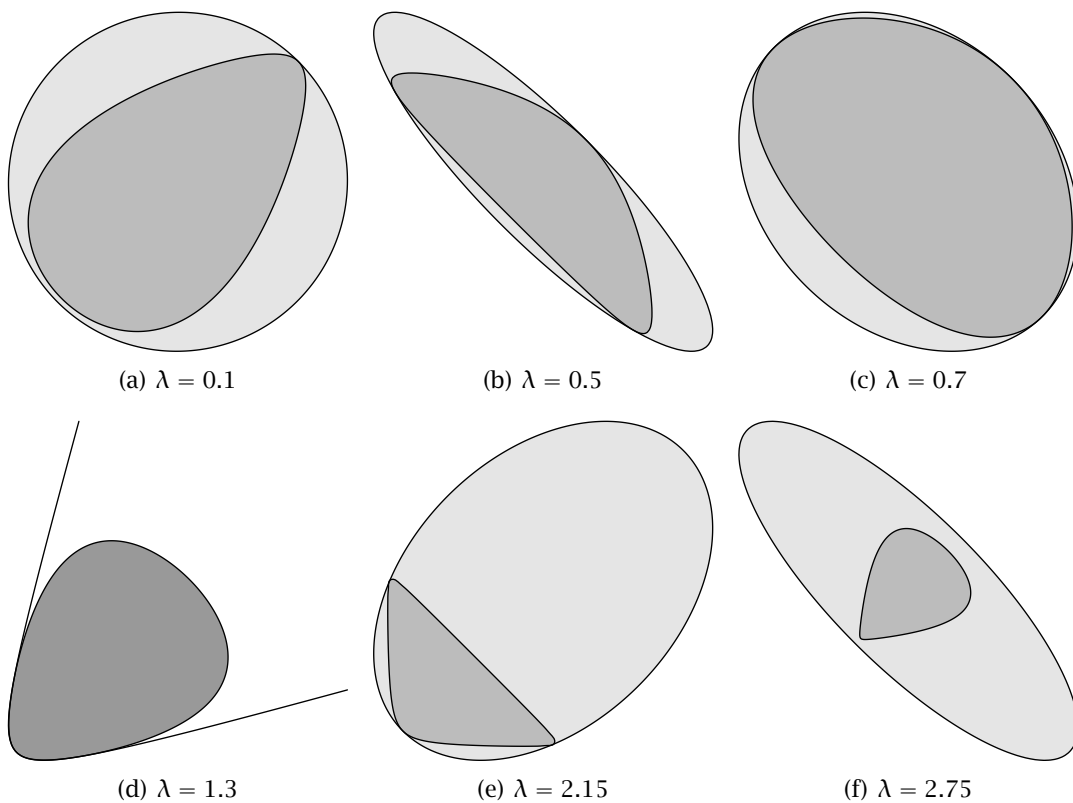


Figura 4.7: Relação entre  $m_2(\alpha, \beta) \geq 0$  e o terceiro menor.

mínios são convexos e mostrámos em que situações a sua fronteira é regular. Temos uma última propriedade que surge de uma forma um pouco surpreendente. Como foi

referido anteriormente, a origem está contida nos domínios  $D_{k,\lambda,m_1}$ ,  $D_{k,\lambda,m_2}$  e  $D_{k,\lambda,m_3}$ . Também mostrámos que nos pontos onde a fronteira se intersecta, que não são pontos singulares, as fronteiras são tangentes entre si. O que é mais surpreendente, como pode ser observado na figura 4.7, é que a componente conexa de  $D_{k,\lambda,m_3}$  que contém a origem está totalmente contida em  $D_{k,\lambda,m_2}$ . O próximo teorema estabelece este facto.

**Teorema 4.5.** *Se  $\lambda \in (0, 3k) \setminus \left\{k, \frac{4 \pm \sqrt{7}}{3}k, \frac{7 \pm 2\sqrt{11}}{5}k\right\}$  a fronteira de  $D_{k,\lambda}$  é de classe  $C^\infty$ . Além disso, se  $D_{k,\lambda,m_3}^0$  é a componente conexa de  $D_{k,\lambda,m_3}$  que contém  $(0, 0)$ , então  $D_{k,\lambda,m_3}^0 = D_{k,\lambda}$ .*

*Demonstração.* Já foi mostrado anteriormente que a variedade algébrica  $m_3 = 0$  é de classe  $C^\infty$ . Também de observações anteriores, existem duas situações distintas:  $\partial D_{k,\lambda,m_3}$  e  $\partial D_{k,\lambda,m_2}$  intersectam-se em um ou em três pontos. Concentremo-nos em primeiro lugar no caso em que a intersecção se dá em três pontos distintos. Usando as coordenadas  $(\xi, \eta)$ , quando  $\xi = 0$  e  $m_2(\xi, \eta) = 0$  teremos  $\eta = \pm \frac{1}{2a}$ , pelo que obtemos o ponto de intersecção  $(\xi^*, \eta^*) = (0, \frac{1}{2a})$  e um segundo que é simétrico a este. Por outro lado, o ponto de intersecção  $(\xi_1, \eta_1)$  é dado por

$$(\xi_1, \eta_1) = \left( -\frac{1}{4b}, \frac{\sqrt{a(a-4b)}}{2ab} \right).$$

Sabendo que  $-\frac{1}{4b} = -\frac{(k-\lambda)(3k-\lambda)\lambda}{k^2}$  e que o valor de  $\xi$  para  $(\alpha_0, \beta_0)$  é  $\frac{1}{2(2b-a)} = k - \lambda$ , é imediato que temos

$$\begin{cases} -\frac{1}{4b} < 0 \wedge \frac{1}{2(2b-a)} > 0, & \lambda \in (0, k) \\ -\frac{1}{4b} > 0 \wedge \frac{1}{2(2b-a)} < 0, & \lambda \in (k, 3k). \end{cases}$$

Cálculos simples permitem-nos mostrar que

$$m_3(\xi^*, \eta^*) = m_3\left(0, \frac{1}{2a}\right) = -\frac{c^2}{4a^4} < 0. \quad (4.20)$$

Juntando tudo, mostrámos que o ponto  $(\xi^*, \eta^*)$  está entre  $(\alpha_0, \beta_0)$  e  $(\alpha_1, \beta_1)$  e que  $(\xi^*, \eta^*) \notin D_{k,\lambda,m_3}$ . Isto mostra que para  $\xi$  entre  $-\frac{1}{2a}$  e  $\frac{1}{2(2b-a)}$ , a componente conexa de  $D_{k,\lambda,m_3}$  que contém  $(0, 0)$  não sai de  $D_{k,\lambda,m_2}$ . Por simetria, sabemos que a mesma situação ocorre entre os pontos  $(\alpha_0, \beta_0)$  e  $(\alpha_2, \beta_2)$ . Um argumento semelhante, feito ao longo da linha  $\eta = 0$  poderia ser usado para mostrar que a mesma situação ocorre igualmente entre os pontos  $(\alpha_2, \beta_2)$  e  $(\alpha_1, \beta_1)$ .

No caso em que a intersecção ocorre em apenas um ponto, através de um argumento semelhante, usando a simetria da linha  $\eta = 0$ , poderíamos igualmente mostrar que a componente conexa  $D_{k,\lambda,m_3}^0$  está totalmente contida em  $D_{k,\lambda,m_2}$ .  $\square$

Com este teorema, completámos uma primeira caracterização da geometria dos domínios  $D_{k,\lambda}$ . A propriedade que ele exhibe, a inclusão

$$D_{k,\lambda,m_3}^0 \subset D_{k,\lambda,m_2} \subset D_{k,\lambda,m_1}$$

é sob todos os pontos de vista notável. No capítulo 5, onde iremos resolver um problema geométrico relacionado com estes domínios em directa correspondência com as equações diferenciais que aqui estudámos, estas propriedades serão centrais.

*Hemingway studied the bullfights for form and meaning and courage and failure and the way. I go to boxing matches and attend horse races for the same reason. There is a feeling at the wrists and the shoulders and the temples. There is a manner of watching and recording that grows into the line and the form and the act and the fact and the flower, and the dog walking and the dirty panties under the bed, and the sound of the typewriter as you're sitting there, that's the big sound, the biggest sound in the world, when you're getting it down in your way, the right way, and no beautiful woman counts before it and nothing that you could paint or sculpt counts before it; it is the final art, this writing down of the word, and the reason for valor is all there, it is the finest gamble ever arranged and not many win.*

— C. Bukowski, Upon The Mathematics Of The Breath And The Way, (1973)



# Rectângulos Isotéticos Inscritos em Domínios Regulares

## 5.1 Introdução Geral

No capítulo 4 mostrámos que para o sistema de equações diferenciais (4.5), composto por dois osciladores e um meio que os acopla, existe uma variedade dócil para a qual todas as soluções convergem, demonstrando assim a existência de sincronização generalizada. De seguida, apresentámos as condições para que o mesmo sistema, após ter sofrido uma perturbação não-linear nos osciladores, ainda sincronize. Mostrámos então a existência de subconjuntos compactos e convexos de  $\mathbb{R}^2$ , que denotámos por  $D_{k,\lambda}$ , que nos davam condições para que a sincronização ainda ocorresse após a referida perturbação. Concluímos o capítulo 4 com uma caracterização da geometria destes conjuntos, onde para lá da convexidade que resultava da condição de Russel-Smith, mostrámos que em apenas alguns casos bem identificados esse domínios não são regulares. Mostrámos ainda que estes conjuntos apresentavam todos uma simetria em relação à recta  $y = x$ .

Este conjunto de resultados são os ingredientes fundamentais para o presente capítulo. Aqui iremos estabelecer um algoritmo para encontrar o maior rectângulo isotético, i.e., um rectângulo cujos lados são paralelos aos eixos coordenados, contido em cada um dos conjuntos  $D_{k,\lambda}$ . Estes rectângulos dar-nos-ão uma medida mais intuitiva

acerca da sensibilidade da variação do parâmetro  $\lambda$  na permanência da sincronização após ser efectuada uma perturbação não linear, dando-nos assim uma relação mais natural entre as grandezas  $\alpha$  e  $\beta$  definidas no capítulo 4.

O tipo de problemas como o que aqui tratamos aparece habitualmente no âmbito da Geometria Computacional, existindo vários algoritmos no caso em que o domínio é um polígono (ver [AHS95] e [SFW98]). Não descurando que a implementação computacional de uma solução para qualquer problema cairá sempre num dos casos citados, a nossa abordagem e os nossos objectivos são essencialmente distintos. De facto, ao tratarmos de domínios regulares, o tipo de problema torna-se automaticamente mais difícil, pois no caso de termos polígonos convexos, estes apresentam essencialmente um problema finito.

Surge assim natural questionarmos, em primeiro lugar, se este problema está bem posto para o caso regular. Naturalmente a resposta a esta questão passará por uma formalização do problema recorrendo sobretudo a resultados de análise convexa. Desta caracterização, poderemos ver em que medida o caso discreto já estudado na literatura, dá-nos algum tipo de intuição para o análogo regular e se a partir desta analogia podemos construir uma solução para o problema regular.

Como é habitual na literatura sobre este assunto (ver por exemplo [AHS95]), e porque isso não contradiz os exemplos dos domínios  $D_{k,\lambda}$  definidos no capítulo 4, vamos supor que os domínios considerados estão em posição genérica ou, dito por outras palavras, os domínios convexos considerados não têm nenhum lado paralelo aos eixos coordenados com comprimento positivo. Como teremos oportunidade de ver no teorema 5.2, esta condição é satisfeita pelos domínios  $D_{k,\lambda}$ .

## 5.2 Noções breves de Análise Convexa

Naturalmente começamos por definir conjunto convexo, a noção mais elementar em Análise Convexa. Para simplificar a notação, dados dois pontos  $x, y$  do mesmo espaço vectorial topológico localmente convexo, iremos representar a combinação linear convexa por

$$[x, y] = \{p : p = (1 - \lambda)x + \lambda y, \lambda \in [0, 1]\}.$$

**Definição 5.1.** *Um conjunto  $C$  é convexo se para quaisquer  $x, y \in C$  então  $[x, y] \subset C$ . Um ponto  $a \in C$  diz-se um ponto extremo se para todos os  $a_1, a_2 \in C$  tais que  $a \in [a_1, a_2]$  então  $a = a_1 \vee a = a_2$ . Um conjunto convexo  $C$  diz-se estritamente convexo se para quaisquer  $a, b \in \partial C$  então  $[a, b] \cap \partial C = \{a, b\}$ .*

Intuitivamente, um ponto extremo de um conjunto convexo  $D$  é todo o ponto que não está contido no interior de qualquer segmento de recta contido nesse conjunto. Dito de outra forma, se  $D$  for um conjunto compacto e convexo, o conjunto dos pontos extremo forma o subconjunto minimal do conjunto  $D$  cujo envólucro convexo coincide com o próprio  $D$ . Por exemplo, pelo teorema de Krein–Milman (ver [KD40]), no caso de um polígono convexo, os pontos extremos são os seus vértices.

Um exemplo não trivial de conjunto convexo é apresentado de seguida. Sejam  $X$  um espaço métrico compacto e  $\mathcal{M}(X)$  o conjunto das medidas de probabilidade de Borel em  $X$ . Sendo  $C(X)$  o conjunto das transformações contínuas  $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}$  munimos  $\mathcal{M}(X)$  com a topologia fraca\*, da seguinte forma: declaramos que  $\mu_n \rightarrow \mu$  se

$$\int_X \varphi d\mu_n \rightarrow \int_X \varphi d\mu$$

para qualquer  $\varphi \in C(X)$ . Mostra-se que  $\mathcal{M}(X)$  é metrizável e compacto em relação a esta topologia (ver por exemplo [Bar12]). Mostra-se também que se  $f: X \rightarrow X$  é uma transformação contínua então o conjunto  $\mathcal{M}(X, f)$  de todas medidas de probabilidade invariantes para a transformação  $f$ , i.e., das medidas  $\mu \in \mathcal{M}(X)$  tais que  $\mu(f^{-1}A) = \mu(A)$  para todo o  $A \subset X$  mensurável, é não-vazio. Este resultado é o conhecido Teorema de Krylov–Bugolubov (ver por exemplo [Bar12]). De um modo geral mostra-se que sendo  $f: X \rightarrow X$  uma transformação contínua num espaço métrico compacto então  $\mathcal{M}(X, f)$  é um subconjunto compacto e convexo de  $\mathcal{M}(X)$ . Além disso, uma medida  $\mu \in \mathcal{M}(X, f)$  é um ponto extremo se e só se  $\mu$  é ergódica em relação a  $f$ , i.e., os conjuntos invariantes para a transformação  $f$  ou têm medida nula ou os seus complementares têm medida nula. A demonstração detalhada destes resultados pode ser encontrada em [Wal81], página 152.

Um hiperplano  $\mathcal{P}$  em  $\mathbb{R}^n$  pode ser definido a partir de um vector não-nulo  $a \in \mathbb{R}^n$  e por real  $b$  por  $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n: \langle a, x \rangle = b\}$  ou de modo equivalente, fixado  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , por  $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n: \langle a, (x - x_0) \rangle = 0\}$ . De maneira semelhante podemos definir um semi-espaço  $S \subset \mathbb{R}^n$  por

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n: \langle a, (x - x_0) \rangle \leq 0\}.$$

**Definição 5.2.** *Considere-se um conjunto convexo  $C$ . Dado um ponto  $x_0 \in \partial C$  e  $a \in \mathbb{R}^n$  tal que para todo o  $x \in C$  temos  $\langle a, x - x_0 \rangle \leq 0$  então a  $\{x \in \mathbb{R}^n: \langle a, x - x_0 \rangle = 0\}$  dá-se o nome de hiperplano de suporte de  $C$  em  $x_0$ .*

A existência dos hiperplanos de suporte para um determinado conjunto convexo

surge como consequência natural do teorema do hiperplano de separação (ver [BV04], pag 46-51).

Na literatura podemos encontrar variados exemplos de transformações que preservam a convexidade. Aqui estamos particularmente interessados num destes tipos de transformações, a chamada *transformação projectiva*.

**Exemplo 5.1.** *Considere-se a transformação  $P: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  definida por*

$$P(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = \left( \frac{x_1}{x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{x_{n+1}} \right).$$

*Dado um conjunto convexo  $C \subset \mathbb{R}^n$ ,  $x, y \in C$  e os reais positivos  $x_{n+1}$  e  $y_{n+1}$ , designamos por  $\tilde{x} = (x, x_{n+1})$  e  $\tilde{y} = (y, y_{n+1})$ . Para  $\lambda \in (0, 1)$  teremos então*

$$P((1 - \lambda)\tilde{x} + \lambda\tilde{y}) = \frac{(1 - \lambda)x + \lambda y}{(1 - \lambda)x_{n+1} + \lambda y_{n+1}} = (1 - \lambda')P(\tilde{x}) + \lambda'P(\tilde{y}),$$

*com  $\lambda' = (\lambda y_{n+1}) / ((1 - \lambda)x_{n+1} + \lambda y_{n+1})$  o que mostra que  $[P(\tilde{x}), P(\tilde{y})] = P([\tilde{x}, \tilde{y}])$ . Isto mostra que, dado  $C \in \mathbb{R}^n$ ,  $P^{-1}(C)$  é convexo se e só se  $C$  também o for.*

**Definição 5.3.** *Vamos designar um conjunto compacto, estritamente convexo e cuja fronteira é localmente regular de classe  $C^k$  por conjunto hiper-regular<sup>1</sup> de classe  $C^k$ .*

A partir da aplicação projectiva, restrita em primeiro lugar aos triplos ordenados da forma  $(x, y, \|(x, y)\|)$ , com  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , podemos sem dificuldade encontrar uma parametrização global para a fronteira  $\partial C$  de um conjunto convexo e compacto, contido em  $\mathbb{R}^2$ , cujo interior é não vazio. Dado  $(x_0, y_0) \in \text{int } C$ , existe uma bola de raio  $r > 0$  centrada neste ponto e contida no  $\text{int } C$ . Para qualquer ponto  $(x, y) \in \partial C$  definimos  $P^*(x, y) = r(x - x_0, y - y_0) / \|(x - x_0, y - y_0)\| \in \mathbb{S}((x_0, y_0), r)$ , onde  $\mathbb{S}((x_0, y_0), r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: (x, y) = \gamma(\theta) = (x_0 + r \cos \theta, y_0 + r \sin \theta), \theta \in (0, 2\pi]\}$ . Obteremos assim uma parametrização  $\gamma_{\partial C}(\theta) = (x_0 + r(\theta) \cos \theta, y_0 + r(\theta) \sin \theta)$  de  $\partial C$ , onde para cada  $(x, y) \in \partial C$ ,  $\theta = \gamma^{-1}(P^*(x, y))$  e  $r(\theta) = \|(x - x_0, y - y_0)\|$ . No próximo lema, construímos detalhadamente esta parametrização da fronteira de um conjunto convexo e compacto, e mostramos que a regularidade desta parametrização é igual à regularidade da fronteira do conjunto considerado.

<sup>1</sup>Não iremos detalhar demasiado este ponto. No entanto podendo ser mais rigorosos, iremos sempre assumir que as fronteiras dos nossos conjuntos convexos são variedades diferenciáveis sem bordo, naturalmente de dimensão  $n - 1$ , admitindo localmente uma carta de classe  $C^k$ . Quando nos referirmos à regularidade da fronteira do conjunto estamos naturalmente a referir-nos implicitamente à regularidade do atlas que lhe está associado.

**Lema 5.1.** *Se  $C$  é um conjunto hiper-regular com interior não-vazio de classe  $C^k$  então  $\partial C$  admite uma parametrização global  $\gamma$  de classe  $C^k$ . i.e.,  $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \partial C$  é injectiva em  $[0, 2\pi]$  e verifica  $\gamma_t^{(n)}(0) = \gamma_t^{(n)}(2\pi)$  para todo o  $n \leq k$ .*

*Demonstração.* Vamos assumir que a origem é um ponto interior do conjunto  $C$ . Caso contrário podemos sempre fazer uma adequada mudança de coordenadas. Sendo um ponto interior vamos considerar a circunferência  $\mathbb{S}(0, r) \subset C$ , com  $r > 0$ . Vamos considerar a restrição  $\tilde{P}$  da aplicação  $P^*: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}(0, r)$  definida por  $P^*(x, y) = r(x, y)/\|(x, y)\|$  ao conjunto  $\partial C$ . Vamos começar por mostrar que  $\tilde{P}$  é bijectiva. Considere-se um ponto  $(x_2, y_2) \in \mathbb{S}(0, r)$ . Como  $C$  é um conjunto compacto, existe um ponto  $(x', y')$  exterior a  $C$  que pertence à recta  $r_0$  que passa pela origem e pelo ponto  $(x_2, y_2)$ . Podemos mostrar que existe um ponto  $(x_1, y_1) \in \partial C$  tal que  $(x_1, y_1) \in \partial C \cap r_0$ . É imediato verificar que  $\tilde{P}(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ . Assim  $\tilde{P}$  é sobrejectiva.

Dados  $(x_3, y_3), (x_4, y_4) \in \partial C$  vamos supôr que  $\tilde{P}(x_3, y_3) = \tilde{P}(x_4, y_4)$ . Como  $(x_3, y_3) \in \partial C$  e a origem é colinear a estes dois pontos, existe uma recta de suporte  $r_0$  a  $C$  que passa em  $(x_3, y_3)$ . Supondo que o ponto  $(x_3, y_3)$  está contido no segmento de recta que une a origem e o ponto  $(x_4, y_4)$ , necessariamente a origem e o ponto  $(x_4, y_4)$  têm de estar do mesmo lado da recta  $r_0$ . Sendo colineares então a origem pertence a esta recta. Deste absurdo podemos assumir que  $(x_3, y_3) = (x_4, y_4)$  o que demonstra que  $\tilde{P}$  é uma aplicação injectiva.

Dado um ponto  $(x_0, y_0) \in \mathbb{S}(0, r)$  vamos proceder a uma mudança de coordenadas de tal modo que a recta tangente a  $\mathbb{S}(0, r)$  em  $(x_0, y_0)$  é horizontal. No novo referencial as coordenadas deste ponto são  $(0, r)$  e a matriz Jacobiana da aplicação  $P^*$  neste ponto é dada por

$$J_{(0,r)}P^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Mostrámos anteriormente que  $\tilde{P}$  é invertível. Como  $\partial C$  por hipótese é uma variedade de classe  $C^k$  então a recta tangente em todos os pontos está bem definida. Por um argumento semelhante ao empregue anteriormente para mostrar que a aplicação  $\tilde{P}$  é injectiva, pode-se mostrar que a recta tangente no ponto  $(x_1, y_1) \in \partial C$  tal que  $\tilde{P}(x_1, y_1) = (0, r)$  não pode ser vertical. Usando o facto de  $\partial C$  ser uma variedade sem bordo imersa em  $\mathbb{R}^2$  com dimensão 1, e como a dimensão da imagem da aplicação tangente  $D_{(x_1, y_1)}\tilde{P}^{-1}: T_{(x_1, y_1)}\partial C \rightarrow T_{(0,r)}\mathbb{S}(0, r)$  de  $\tilde{P}^{-1}$  em  $(x_1, y_1)$  é igual à dimensão da imagem da matriz  $J_{(0,r)}P^*$  (ver [Mac97], pag 13), é imediato mostrar que  $D_{(x_1, y_1)}\tilde{P}$  é um isomorfismo. Pelo Teorema da Função Inversa sabemos que  $\tilde{P}$  é invertível e que

$\tilde{P}^{-1}$  é de classe  $C^k$ . Como  $\mathbb{S}(0, r)$  admite uma parametrização global de classe  $C^\infty$  definida para  $\theta \in [0, 2\pi]$  por  $\gamma(\theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ , através de  $\tilde{P}$  podemos transportar esta parametrização para  $\partial C \equiv \gamma_{\partial C}(\theta) = (r(\theta) \cos \theta, r(\theta) \sin \theta)$ , onde para qualquer  $(x, y) \in \partial C$  teremos  $\theta = \gamma^{-1}(\tilde{P}(x, y))$  e  $r(\theta) = \|(\tilde{P})^{-1}(\gamma(\theta))\|$ .  $\square$

A partir da parametrização encontrada no lema anterior, poderemos mostrar que a fronteira de um conjunto hiper-regular tem uma determinada rigidez. Em primeiro lugar fazemos notar que, a parametrização  $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \partial C$ , pelo facto de  $\partial C \subset \mathbb{R}^2$ , é escrita na forma  $\gamma(\theta) = (\gamma_1(\theta), \gamma_2(\theta))$ . Também pelo facto de  $C$  ser um conjunto hiper-regular, que assumimos de classe  $C^k$ , é fácil mostrar que existem apenas dois pontos em  $\partial C$  para os quais o hiperplano de suporte é horizontal e também apenas dois onde o hiperplano de suporte é vertical. A existência destes quatro pontos implica a existência de  $\theta_{m_1}, \theta_{M_1} \in [0, 2\pi]$  tais que  $\gamma'_1(\theta_{m_1}) = \gamma'_1(\theta_{M_1}) = 0$  e para todo o  $\theta \in [0, 2\pi]$  temos  $\gamma_1(\theta_{m_1}) \leq \gamma_1(\theta) \leq \gamma_1(\theta_{M_1})$ , e de  $\theta_{m_2}, \theta_{M_2} \in [0, 2\pi]$  tais que  $\gamma'_2(\theta_{m_2}) = \gamma'_2(\theta_{M_2}) = 0$  e para todo o  $\theta \in [0, 2\pi]$  temos  $\gamma_2(\theta_{m_2}) \leq \gamma_2(\theta) \leq \gamma_2(\theta_{M_2})$ . Visto que estamos a considerar o caso em que o conjunto  $C$  é hiper-regular, podemos concluir de imediato que, além disso, para  $i = 1, 2$ ,

$$\gamma_i(\theta) = \gamma_i(\theta_{m_i}) \Leftrightarrow \theta = \theta_{m_i} \wedge \gamma_i(\theta) = \gamma_i(\theta_{M_i}) \Leftrightarrow \theta = \theta_{M_i}.$$

O próximo lema estabelece uma primeira propriedade central sobre aquilo que apelidamos de rigidez da fronteira de um conjunto hiper-regular. A partir das observações anteriores, a demonstração do mesmo é elementar (ver figura 5.1).

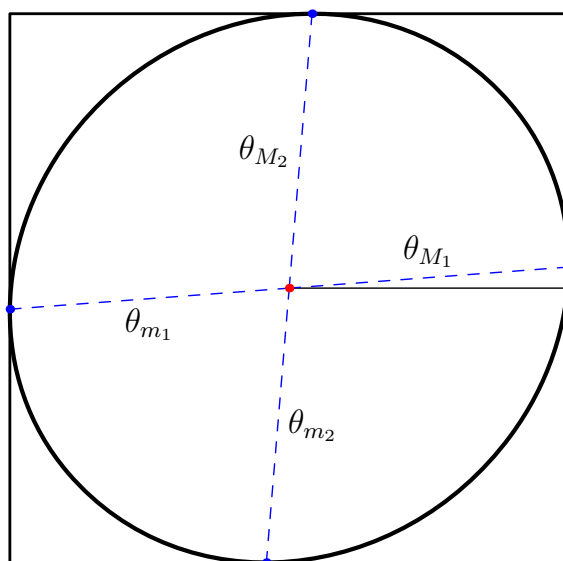


Figura 5.1: A distribuição dos vários ângulos na parametrização do conjunto  $\partial C$ .

**Lema 5.2.** *Dado um conjunto hiper-regular  $C$  e a parametrização da respectiva fronteira  $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \partial C$  dada no lema 5.1, se necessário após uma reparametrização, teremos  $0 \leq \theta_{M_1} < \theta_{M_2} < \theta_{m_1} < \theta_{m_2}$ .*

A partir deste lema e pela regularidade admitida para  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ , podemos concluir que o declive das rectas de suporte no interior de cada um destes intervalos tem sempre o mesmo sinal. Assim, para os intervalos  $(\theta_{M_1}, \theta_{M_2})$  e  $(\theta_{m_1}, \theta_{m_2})$ , se  $m$  for o declive da recta de suporte de  $\partial C$  em cada um dos pontos, então  $m < 0$ , tendo o sinal contrário no interior dos restantes intervalos.

**Definição 5.4.** *Considere-se um conjunto convexo  $C$  e uma função  $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ . A função  $f$  diz-se convexa se para todo  $x, y \in C$  e para todo  $\lambda \in (0, 1)$*

$$f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y).$$

*A função  $f$  diz-se côncava se  $-f$  é convexa.*

No caso de uma função côncava ser diferenciável, esta terá uma caracterização equivalente recorrendo ao gradiente. Existem caracterizações de ordem superior. Uma condição necessária e suficiente para que  $f$  seja uma função côncava, garantido que ela é de classe  $C^2$  sobre o seu domínio (convexo), é que a Hessiana seja definida negativa. Como não vamos usar este e outros resultados em desenvolvimentos posteriores, não os iremos aqui aprofundar. Começemos por introduzir um resultado necessário para demonstrar a proposição 5.1.

**Lema 5.3.** *Dada uma função  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e dados  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , considere-se a função  $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por*

$$g(\lambda) = f((1 - \lambda)x + \lambda y).$$

*A função  $f$  é convexa se e só se, para qualquer escolha de  $x, y \in \mathbb{R}^n$  a função  $g$  é convexa.*

*Demonstração.* Começemos por assumir que  $f$  é convexa. Dados  $\xi, \lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1]$ , pela convexidade de  $f$  é imediato mostrar que

$$\begin{aligned} (1 - \xi)g(\lambda_1) + \xi g(\lambda_2) &= (1 - \xi)f((1 - \lambda_1)x + \lambda_1 y) + \xi f((1 - \lambda_2)x + \lambda_2 y) \\ &\geq f(((1 - \xi)\lambda_1 + \xi\lambda_2)y + ((1 - \xi)(1 - \lambda_1) + \xi(1 - \lambda_2))x) \\ &= g((1 - \xi)\lambda_1 + \xi\lambda_2), \end{aligned}$$

concluindo-se assim a convexidade de  $g$ . Reciprocamente, assumindo que  $g$  é uma função convexa para quaisquer  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , para concluir a convexidade de  $f$  basta considerar

$$\begin{aligned} f((1-\lambda)x + \lambda y) &= g(\lambda) = g((1-\lambda)0 + \lambda \cdot 1) \\ &\leq (1-\lambda)g(0) + \lambda g(1) = (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y), \end{aligned}$$

de onde se conclui o resultado desejado.  $\square$

O resultado deste lema é imediatamente empregue na demonstração da seguinte proposição.

**Proposição 5.1.** *Dado um conjunto convexo  $C$  contido em  $\mathbb{R}^n$  e uma função diferenciável  $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  é convexa se e só se  $f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle$ , para todo o  $x, y \in C$ .*

*Demonstração.* Começamos por fazer a demonstração para  $n = 1$ . Se  $f$  é uma função convexa, para todo o  $x, y \in C$  e para todo o  $\lambda \in (0, 1)$  teremos

$$f(y) \geq f(x) + \frac{f((1-\lambda)x + \lambda y) - f(x)}{\lambda}.$$

Fazendo  $\lambda \rightarrow 0$  obtemos  $f(y) \geq f(x) + f'(x)(y - x)$ . Reciprocamente, fazendo  $z = (1-\lambda)x + \lambda y$ , obtemos por hipótese as condições

$$\begin{aligned} f(y) &\geq f(z) + f'(z)(y - z) \\ f(x) &\geq f(z) + f'(z)(x - z). \end{aligned}$$

De imediato obter-se-à

$$(1-\lambda)f(x) + \lambda f(y) \geq f((1-\lambda)x + \lambda y),$$

do que podemos concluir que  $f$  é uma função convexa. Para  $n > 1$ , basta mostrar que a propriedade é verificada ao longo de  $[x, y]$  para qualquer  $x, y \in C$ . Considere-se  $g(\lambda) = f((1-\lambda)x + \lambda y)$ . De imediato concluímos que

$$g'(\lambda) = \langle \nabla f((1-\lambda)x + \lambda y), y - x \rangle.$$

Assumindo que  $f$  é convexa temos  $g(1) \geq g(0) + g'(0)$ , de onde concluímos de imediato o resultado. Reciprocamente, dados  $(1 - \lambda_i)x + \lambda_i y \in C$ , para  $i = 1, 2$  teremos

$$f((1 - \lambda_1)x + \lambda_1 y) \geq f((1 - \lambda_2)x + \lambda_2 y) + (\lambda_1 - \lambda_2) \langle \nabla f((1 - \lambda_2)x + \lambda_2 y), y - x \rangle,$$

o que é equivalente a termos

$$g(\lambda_1) \geq g(\lambda_2) + g'(\lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_2),$$

pelo que  $g$  é convexa, podendo-se assim concluir o resultado desejado.  $\square$

Pela proposição anterior ficou estabelecida uma condição necessária e suficiente para que uma função diferenciável seja côncava. De facto, dado um conjunto convexo  $C$ ,  $f: C \rightarrow \mathbb{R}$  é côncava se e só se  $f(y) \leq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle$ , para todo o  $x, y \in C$ . Sobre um conjunto convexo existem resultados que mostram que as funções convexas são apetecíveis para problemas de minimização e as funções côncavas para problemas de maximização. No entanto, por vezes as funções que se pretende otimizar não verificam as condições necessárias para cada uma destas. Assim existem condições mais fracas, que por isso mesmo se aplicam a um maior conjunto de casos.

**Definição 5.5.** *Dado um conjunto convexo  $C$ , para uma função real  $f: C \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , e  $\alpha \in \mathbb{R}$  definimos os conjuntos de sobre-nível por  $S_\alpha = \{x \in D: f(x) \geq \alpha\}$ . A função  $f$  diz-se (estritamente) quasi-côncava se os seus conjuntos de sobre-nível são conjuntos (estritamente) convexos.*

As funções quasi-côncavas que são diferenciáveis têm uma caracterização de algum modo semelhante à que foi estabelecida na proposição 5.1 para as funções côncavas. A demonstração segue a mesma linha de raciocínio.

**Proposição 5.2.** *Dado um conjunto convexo  $C$  e uma função diferenciável  $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  é quasi-côncava se e só se  $f(y) \geq f(x) \Rightarrow \langle \nabla f(x), y - x \rangle \geq 0$ , para todo o  $x, y \in C$ .*

O próximo lema estabelece duas propriedades que nos irão ser de extrema utilidade no desenvolvimento do nosso estudo.

**Lema 5.4.** *Seja  $C$  um conjunto convexo e  $f: C \rightarrow \mathbb{R}$  uma função quasi-côncava. Nestas condições teremos*

1. *Para todo o  $x, y \in C$  e para qualquer  $z \in [x, y]$ ,  $f(z) \geq \min\{f(x), f(y)\}$ ;*
2. *Se  $f$  tem um máximo global em  $C$  então o conjunto dos seus maximizantes globais é um conjunto convexo.*

*Demonstração.* Para demonstrarmos o primeiro ponto, fazemos  $\alpha = \min\{f(x), f(y)\}$ . Se para algum  $z \in [x, y]$  tivermos  $f(z) < \alpha$  então  $S_\alpha$  não seria um conjunto convexo. Relativamente ao segundo ponto, vamos supôr que  $\alpha$  é o máximo global de  $f$  em  $C$ . Então para todo o  $x \in C$  temos  $f(x) \leq \alpha$ . Por  $\alpha$  ser o máximo global da função  $f$  em  $C$  então não existem em  $S^\alpha$  outros elementos que não os maximizantes desta. Logo o conjunto de todos os maximizantes de  $f$  no conjunto  $C$  forma um conjunto convexo.  $\square$

### 5.3 Propriedades adicionais de $D_{k,\lambda}$ .

Os dois resultados que apresentamos de seguida completam a caracterização dos conjuntos  $D_{k,\lambda}$ . O primeiro teorema mostra que a geometria de  $D_{k,\lambda}$  não depende do valor de  $k$ . Com este resultado, podemos centrar toda a nossa atenção nos conjuntos  $D_{1,\lambda}$  e destes extrapolar os resultados para  $k \neq 1$ .

**Teorema 5.1.** *Considere-se  $D_{k,\lambda}$ . Então para todo o  $k > 0$  e para qualquer  $\lambda \in (0, 3k) \setminus \{k\}$   $D_{k,\lambda}$  é uma homotetia de  $D_{1,\lambda/k}$  com centro na origem.*

*Demonstração.* Dados  $a(\lambda, k)$ ,  $b(\lambda, k)$  e  $c(\lambda, k)$  definidos em (4.12), é imediato mostrar que

$$a(\lambda, k) = \frac{1}{k} a\left(\frac{\lambda}{k}, 1\right), b(\lambda, k) = \frac{1}{k} b\left(\frac{\lambda}{k}, 1\right), c(\lambda, k) = \frac{1}{k} c\left(\frac{\lambda}{k}, 1\right).$$

Considerando  $m_2(\alpha, \beta, \lambda, k)$  e  $m_3(\alpha, \beta, \lambda, k)$  definidas por

$$\begin{aligned} m_2(\alpha, \beta, \lambda, k) &= \left(\frac{1}{2} + a(\lambda, k) \cdot \alpha\right) \left(\frac{1}{2} + a(\lambda, k) \cdot \beta\right) - b(\lambda, k)^2 (\alpha + \beta)^2; \\ m_3(\alpha, \beta, \lambda, k) &= \frac{1}{2} m_2(\alpha, \beta, \lambda, k) + \\ &\quad c(\lambda, k)^2 \left( (2b(\lambda, k) - a(\lambda, k))(\alpha + \beta)\alpha\beta - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} \right), \end{aligned}$$

é imediato verificar-se que

$$m_3(\alpha, \beta, \lambda, k) = m_3\left(\frac{\alpha}{k}, \frac{\beta}{k}, \frac{\lambda}{k}, 1\right).$$

Como  $D_{k,\lambda}$  é uma das componentes conexas de  $m_3(\alpha, \beta, \lambda, k) > 0$ , mostra-se assim que  $D_{k,\lambda}$  é uma homotetia de  $D_{1,\lambda/k}$  centrada na origem.  $\square$

Podemos de agora em diante centrar o nosso estudo para o caso em que  $k = 1$ . De seguida mostramos que para certos valores do parâmetro  $\lambda$  os conjuntos  $D_{k,\lambda}$  são

estritamente convexos. Antes de apresentarmos o caso mais geral, vamos mostrar que os conjuntos  $D_{k,\lambda}$  não contêm segmentos de recta paralelos ou perpendiculares ao eixo de simetria de comprimento positivo. No capítulo anterior vimos que o conjunto  $D_{k,\lambda}$  coincide com a componente conexa do conjunto  $D_{k,\lambda,m_3}$  que contém a origem. Por seu lado  $m_3(\alpha, \beta)$  conforme definido em (4.14) é dado por

$$m_3(\alpha, \beta) = \frac{1}{2}m_2(\alpha, \beta) + c^2 \left( (2b - a)(\alpha + \beta)\alpha\beta - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} \right),$$

onde  $m_2(\alpha, \beta) = \left(\frac{1}{2} + a\alpha\right) \left(\frac{1}{2} + a\beta\right) - b^2(\alpha + \beta)^2$  e  $a, b$  e  $c$  como definidos em (4.12). Considerando a função

$$g(\alpha, \beta) = \frac{1}{4}(a + 2a^2\beta - 4b^2(\alpha + \beta) - 4c^2(\alpha + 2(a - 2b)\alpha\beta + (a - 2b)\beta^2)),$$

podemos mostrar sem dificuldades que  $\nabla m_3(\alpha, \beta) = (g(\alpha, \beta), g(\beta, \alpha))$ . Dado  $u \in \mathbb{R}$ , se  $\partial D_{k,\lambda}$  contivesse um segmento de recta da forma  $\beta = \alpha + u$ , i.e. , paralela ao eixo de simetria, ao longo desta teríamos  $g(\alpha, \beta) + g(\beta, \alpha) = 0$ . Usando um sistema computacional como o Mathematica para proceder às devidas simplificações, em função do parâmetro  $\lambda$  pode mostrar-se que

$$g(\alpha, \beta) + g(\beta, \alpha) = \frac{-\alpha^2 - \beta^2 - 4\alpha\beta + h_1(\lambda)(\alpha + \beta) + h_0(\lambda)}{m(\lambda)},$$

onde  $h_1(\lambda) = 4\lambda^3 - 20\lambda^2 + 22\lambda + 2$ ,  $h_0(\lambda) = 8\lambda(\lambda^3 - 6\lambda^2 + 10\lambda - 3)$  e  $m(\lambda) = 32(\lambda - 3)^2(\lambda - 1)\lambda^2$ . Claramente, visto tratar-se de uma cónica não-degenerada, não existe nenhum valor do parâmetro  $\lambda$  para o qual a equação  $g(\alpha, \beta) + g(\beta, \alpha) = 0$  contenha um segmento de recta, pelo que  $\partial D_{k,\lambda}$  não irá conter nenhuma recta da forma  $\beta = \alpha + u$ . Por outro lado, no caso de  $\partial D_{k,\lambda}$  conter uma recta perpendicular ao eixo de simetria, ou seja um segmento de recta da forma  $y = -x + u$ , verificar-se-ia  $g(\alpha, \beta) - g(\beta, \alpha) = 0$ . As soluções desta última equação, através de manipulação computacional das expressões, em função de  $\alpha, \beta$  e  $\lambda$  são

$$\beta = \alpha \quad \vee \quad \beta = -\alpha + \frac{6 + 2(-2 + \lambda)\lambda(7 + 2(-4 + \lambda)\lambda)}{\lambda - 1}. \quad (5.1)$$

Sendo ambas as soluções rectas, estamos apenas interessados na segunda. Se ao longo desta recta  $m_3(\alpha, \beta)$  se anular, significa que  $D_{k,\lambda}$  contém um segmento de recta. Para  $(\alpha, \beta)$  encontrados em (5.1), mostra-se que  $m_3(\alpha, \beta) = 0$  apenas no caso em  $\lambda = (4 \pm \sqrt{7})/3$ . Este método não é praticável no caso mais geral de saber se os domínios  $D_{k,\lambda}$

contêm segmentos de recta da forma  $\beta = m\alpha + u$ , pois a equação  $g(\alpha, \beta) + mg(\beta, \alpha)$  é extremamente complicada. As expressões são despropositadamente grandes para poderem ser aqui apresentadas.

**Teorema 5.2.** *Para  $\lambda \neq (4 \pm \sqrt{7})k/3$ , o conjunto  $\partial D_{k,\lambda}$  não contém nenhum segmento de recta, i.e.,  $D_{k,\lambda}$  é um conjunto estritamente convexo para  $\lambda \neq (4 \pm \sqrt{7})k/3$ .*

*Demonstração.* O caso em que  $m = \pm 1$  já foi estudado anteriormente. Vamos mostrar que, para  $u \in \mathbb{R}$  e  $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ , ao longo das linhas da forma  $\beta = m\alpha + u$  o gradiente  $\nabla m_3(\alpha, \beta)$  não é constante. Teremos

$$\nabla m_3(\alpha, m\alpha + u) = (g(\alpha, m\alpha + u), g(m\alpha + u, \alpha)).$$

Usando a derivada da função composta, se o gradiente fosse constante então

$$\frac{d}{d\alpha} \nabla m_3(\alpha, m\alpha + u) = \left( \frac{\partial g}{\partial \alpha} + m \frac{\partial g}{\partial \beta}, m \frac{\partial g}{\partial \alpha} + \frac{\partial g}{\partial \beta} \right) = \begin{bmatrix} 1 & m \\ m & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial g}{\partial \beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Como  $m \neq \pm 1$  a matriz do sistema é não singular, pelo que a única solução do mesmo é  $\frac{\partial g}{\partial \alpha} = \frac{\partial g}{\partial \beta} = 0$ . Podemos resolver facilmente este sistema em função de  $\alpha$  e  $\beta$  obtendo

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial \alpha} = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial \beta} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2(a-2b)} \left[ \frac{a^2-2b^2}{2c^2} + b^2 + c^2 \right] \\ \beta = -\frac{b^2+c^2}{2(a-2b)}. \end{cases}$$

A partir desta solução podemos obter ainda

$$\beta = -\alpha + \frac{a^2 - 2b^2}{2c^2(a - 2b)},$$

pelo que a única solução da forma  $\beta = m\alpha + u$  é obtida quando  $m = -1$ . Nas condições consideradas este caso não pode ocorrer, pelo que o sistema não admite nenhuma solução da forma  $\beta = m\alpha + u$  para  $m \neq \pm 1$ . Daqui obtemos o resultado pretendido.  $\square$

Mostrámos assim que para  $\lambda \neq (4 \pm \sqrt{7})k/3$  os conjuntos  $D_{k,\lambda}$  são conjuntos estritamente convexos.

## 5.4 Topologia e Convexidade

No resto deste capítulo iremos considerar um conjunto hiper-regular estritamente convexo abstracto  $D$  de classe  $C^\infty$ , coincidindo com a caracterização geométrica dos conjuntos  $D_{k,\lambda}$ , para  $\lambda \in (0, 3k) \setminus \{k, (4 \pm \sqrt{7})k/3, (7 \pm 2\sqrt{11})k/5\}$ .

Considere-se o conjunto  $\mathcal{H}$  formado por todos os rectângulos isotéticos contidos no conjunto  $D$ . Os elementos de  $\mathcal{H}$  podem ser definidos pelo triplo ordenado  $(x, h, v) \in D \times \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+$ , com centro em  $x$ , cujo comprimento horizontal é dado por  $h$ , sendo  $v$  naturalmente o comprimento vertical. Quando  $h = 0$  ou  $v = 0$ , temos rectângulos degenerados com área nula. O próximo resultado estabelece o elo essencial entre a topologia e a geometria dos conjuntos  $D$  e  $\mathcal{H}$ . Apresentamo-lo em termos mais gerais do que a discussão particular em que estamos interessados.

**Teorema 5.3.** *Considere-se um conjunto  $D \subset \mathbb{R}^2$  e o conjunto de todos os rectângulos isotéticos  $\mathcal{H}$  nele contidos. O conjunto  $D$  é convexo e compacto se e apenas se  $\mathcal{H}$  for também compacto e convexo.*

*Demonstração.* Vamos supôr que  $D$  é convexo e compacto. Considere-se uma sequência  $(x_n, h_n, v_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ . Pela compacidade de  $D$  podemos encontrar uma subsucessão convergente  $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Pela mesma propriedade, existe uma constante  $L > 0$  tal que, para todo o  $(x, h, v) \in \mathcal{H}$ , temos  $h \leq L$  e  $v \leq L$ . Desta observação é possível encontrar uma subsucessão  $(x_n^*, h_n^*, v_n^*)_{n \in \mathbb{N}} \subset (x_n, h_n, v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  e um rectângulo  $(x, h, v)$  tais que

$$(x_n^*, h_n^*, v_n^*) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (x, h, v).$$

Precisamos de mostrar que  $(x, h, v) \in \mathcal{H}$ . Essencialmente isto é equivalente a mostrar que  $\mathcal{H}$  é um conjunto fechado. Vamos fazê-lo demonstrando que o complementar de  $\mathcal{H}$ , representado por  $\mathcal{H}^C$ , é um conjunto aberto. Considere-se  $(\chi, \theta, \nu) \in \mathcal{H}^C$ . Existirá pelo menos um dos vértices de  $(\chi, \theta, \nu)$  que não está contido no em  $D$ . Devido a  $D$  ser um conjunto fechado, com uma escolha apropriada de  $\varepsilon$ , podemos encontrar uma bola de raio  $\varepsilon$  centrada neste vértice contida em  $D^C$ . Assim toda a vizinhança de  $(\chi, \theta, \nu)$  dos rectângulos com vértice nessa bola está contida em  $\mathcal{H}^C$ . Isto mostra que  $\mathcal{H}^C$  é um conjunto aberto, o que implica necessariamente que  $(x, h, v) \in \mathcal{H}$ . Deste modo mostra-se que  $\mathcal{H}$  é um conjunto compacto. A convexidade de  $\mathcal{H}$  segue directamente da convexidade de  $D$ . De facto, dados dois rectângulos  $R_0, R_1 \in \mathcal{H}$ , centrados em  $C_0$  e  $C_1$ , com alturas  $v_0$  e  $v_1$  e com larguras  $h_0$  e  $h_1$  respectivamente,

qualquer dos seus vértices será dado por

$$v_i^k = C_i + \gamma_k \left( \frac{h_i}{2}, 0 \right) + \delta_k \left( 0, \frac{v_i}{2} \right),$$

para  $k \in I_4 = \{1, \dots, 4\}$ , com  $\gamma_k = -1$  se  $k \in \{2, 3\}$  e 1 para os restantes casos e com  $\delta_k = -1$  se  $k \in \{3, 4\}$  e 1 para os restantes casos. Sendo  $R_\lambda = (1 - \lambda)R_0 + \lambda R_1$ , por um lado, o centro de  $R_\lambda$  será  $C_\lambda = (1 - \lambda)C_0 + \lambda C_1$ . Por outro lado, é imediato que para  $k \in I_4$  temos

$$v_\lambda^k = (1 - \lambda) \left[ C_0 \pm \left( \frac{h_0}{2}, 0 \right) \pm \left( 0, \frac{v_0}{2} \right) \right] + \lambda \left[ C_1 \pm \left( \frac{h_1}{2}, 0 \right) \pm \left( 0, \frac{v_1}{2} \right) \right].$$

Assim os vértices do rectângulo  $R_\lambda$  serão combinações linear convexas dos vértices correspondentes dos rectângulos  $R_0$  e  $R_1$ . Pela convexidade de  $D$  obtemos o resultado desejado.

Reciprocamente, vamos supôr que  $\mathcal{H}$  é convexo e compacto. A convexidade de  $D$  segue imediatamente. Para demonstrar a compacidade, considere-se uma sucessão  $(x_n) \subset D$ . Pode-se então encontrar uma sucessão  $(x_n, h_n, v_n) \in \mathcal{H}$ . Pela compacidade de  $\mathcal{H}$ , existe uma subsucessão convergente  $(x_k, h_k, v_k) \subset (x_n, h_n, v_n)$  para um rectângulo  $(x, h, v) \in \mathcal{H}$ . Necessariamente  $x_k \rightarrow x \in D$ .  $\square$

Dado um rectângulo centrado no ponto  $x$ ,  $R = (x, h, v)$ , com  $h > 0$ , definimos *proporção geométrica* de  $R$  como o quociente

$$\sigma(R) = \frac{v}{h}.$$

É fácil mostrar  $\partial\mathcal{H}$  coincide com o conjunto cujos rectângulos têm pelo menos um vértice em  $\partial D$ . Naturalmente é neste conjunto que iremos encontrar a solução maximal para o nosso problema. Definindo a aplicação  $\mu: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  que mede a área de um rectângulo  $(x, h, v) \in \mathcal{H}$  pela forma habitual

$$\mu(x, h, v) = hv,$$

tratando-se  $\mu$  de uma aplicação contínua em  $\mathcal{H}$ , pelo teorema de Weirstrass ela tem necessariamente um máximo em  $\mathcal{H}$ . O melhor que poderíamos desejar era que esta aplicação fosse côncava. Podemos no entanto encontrar facilmente exemplos que mostram que esta propriedade não se verifica (ver fig. 5.2(b)). A proposição seguinte mostra que  $\mu$  é uma função quasi-côncava. A unicidade da solução não pode ser

concluída de imediato, mas existem outras propriedades que juntamente com a geometria específica dos domínios  $D$  serão suficientes para demonstrar tanto a desejada unicidade, como a monotonia da convergência.

**Proposição 5.3.** *A função  $\mu: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  definida pela expressão  $\mu(x, h, v) = hv$  é uma função quasi-côncava.*

*Demonstração.* Pela proposição 5.2 uma função diferenciável  $\mu$  é quasi-côncava se o seu domínio é convexo e para quaisquer pontos  $(x_0, h_0, v_0)$  e  $(x_1, h_1, v_1)$  em  $\mathcal{H}$  verifica-se

$$\mu(x_1, h_1, v_1) \geq \mu(x_0, h_0, v_0) \Rightarrow \langle \nabla \mu(x_0, h_0, v_0), (x_1 - x_0, h_1 - h_0, v_1 - v_0) \rangle \geq 0.$$

Mostrámos anteriormente que  $\mathcal{H}$  é um conjunto convexo. Vamos assumir que para os rectângulos considerados temos  $\mu(x_1, h_1, v_1) \geq \mu(x_0, h_0, v_0)$ . Teremos então

$$\langle \nabla \mu(x_0, h_0, v_0), (x_1 - x_0, h_1 - h_0, v_1 - v_0) \rangle = v_0 h_1 + h_0 v_1 - 2v_0 h_0. \quad (5.2)$$

Quando  $v_1 \geq v_0$  e  $h_1 \geq h_0$  a desigualdade (5.2) segue imediatamente. Vamos supôr que  $v_1 \geq v_0$  e que  $h_1 < h_0$ . Existirão então constantes  $\delta_0 \geq 0$  e  $\varepsilon_0 > 0$  tais que

$$v_1 = v_0 + \delta_0 \quad \wedge \quad h_1 = h_0 - \varepsilon_0.$$

Devido ao facto de  $\mu(x_1, h_1, v_1) \geq \mu(x_0, h_0, v_0)$  teremos  $\delta_0 h_0 - \varepsilon_0(v_0 + \delta_0) \geq 0$ , pelo que

$$v_0 h_1 + h_0 v_1 - 2v_0 h_0 = \delta_0 h_0 - \varepsilon_0 v_0 > \delta_0 h_0 - \varepsilon_0(v_0 + \delta_0) \geq 0,$$

o que mostra a desigualdade (5.2). Por simetria em  $h$  e  $v$  a mesma desigualdade será válida no caso em que  $v_1 < v_0$  e  $h_1 \geq h_0$ . Isto é o suficiente para demonstrar a quasi-concavidade de  $\mu$  quando definida sobre  $\mathcal{H}$ .  $\square$

Para  $(x_0, h_0, v_0) \neq (x_1, h_1, v_1)$ , a função  $\mu$  seria estritamente quasi-côncava se

$$\mu(x_1, h_1, v_1) \geq \mu(x_0, h_0, v_0) \Rightarrow \langle \nabla \mu(x_0, h_0, v_0), (x_1 - x_0, h_1 - h_0, v_1 - v_0) \rangle > 0.$$

Fazendo  $v_0 = h_0 = v_1 = h_1$  e  $x_0 \neq x_1$  teremos

$$\langle \nabla \mu(x_0, h_0, v_0), (x_1 - x_0, h_1 - h_0, v_1 - v_0) \rangle = 2v_0(v_1 - v_0) = 0,$$

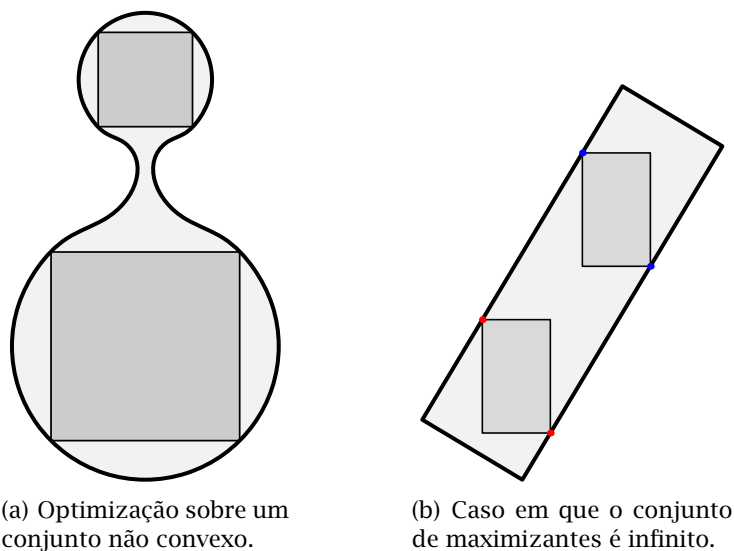


Figura 5.2: Casos em que o problema apresenta máximos locais e em que o máximo não é único.

o que contraria a condição estrita. Todos estes resultados sobre o conjunto  $\mathcal{H}$  e sobre a função  $\mu$  são ainda assim suficientes para mostrar que o conjunto dos valores maximais globais de  $\mu$  sobre  $\mathcal{H}$ , embora possa conter mais de um ponto, é ainda assim convexo. A unicidade terá de vir necessariamente da geometria particular do conjunto  $D$ .

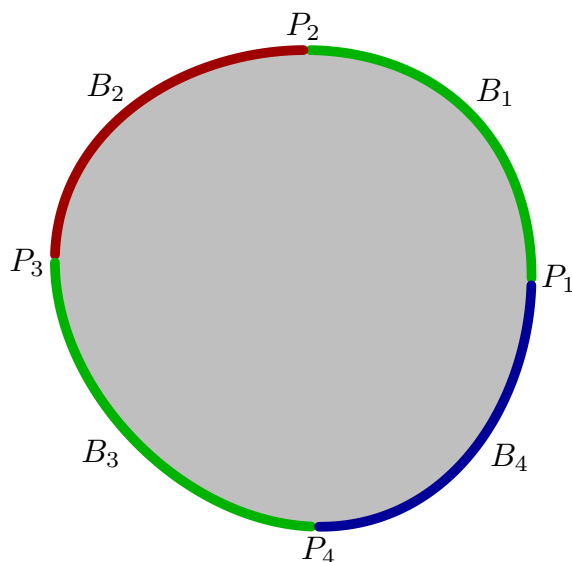


Figura 5.3: A partição da fronteira do conjunto  $D$ .

Para um ponto  $P = (a, b) \in \mathbb{R}^2$  seja  $x(P) = a$  e  $y(P) = b$ . Se  $D$  é um conjunto

hiper-regular, ficam bem definidos os pontos  $P_i$ , com  $i = 1, \dots, 4$ ,

$$\begin{aligned} x(P_1) &= \max_{(\alpha, \beta) \in \partial D} \{\alpha\}, & y(P_2) &= \max_{(\alpha, \beta) \in \partial D} \{\beta\}, \\ x(P_3) &= \min_{(\alpha, \beta) \in \partial D} \{\alpha\}, & y(P_4) &= \min_{(\alpha, \beta) \in \partial D} \{\beta\}. \end{aligned}$$

Pelo lema 5.1 sabemos que existe uma parametrização  $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \partial D$  de classe  $C^\infty$  de  $\partial D$ . Pelo lema 5.2, para os pontos  $P_i$  definidos acima, podemos associar, com uma reparametrização se necessária,  $\theta_i \in (0, 2\pi)$ , tais que  $\gamma(\theta_i) = P_i$  e  $\theta_i \leq \theta_{i+1}$ . Podemos então definir a partição  $\partial D = \cup_{i=1}^4 B_i$ , onde

$$\begin{aligned} B_i &= \{(x, y) \in \partial D : (x, y) = \gamma(\theta) \wedge \theta_i \leq \theta \leq \theta_{i+1}\}, \text{ para } i = 1, 2, 3; \\ B_4 &= \{(x, y) \in \partial D : (x, y) = \gamma(\theta) \wedge \theta \in [\theta_4, 2\pi] \cup [0, \theta_1]\}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Uma representação destas partições é dada na figura 5.3. Precisamos ainda fixar um pouco mais de notação. Para qualquer rectângulo  $R \in \mathcal{H}$  definimos

$$\begin{aligned} a(R) &= \left( \max_x(R), \max_y(R) \right), & b(R) &= \left( \min_x(R), \max_y(R) \right), \\ c(R) &= \left( \min_x(R), \min_y(R) \right), & d(R) &= \left( \max_x(R), \min_y(R) \right). \end{aligned} \quad (5.4)$$

Para quaisquer rectângulos  $R_1, R_2 \in \mathcal{H}$  dizemos que  $a(R_1)$  e  $a(R_2)$  são vértices correspondentes. A mesma relação é facilmente extendida para os restantes vértices. Sempre que não houver risco de confusão escrevemos  $a(R) = a$ . A proposição seguinte mostra que a partição  $\{B_k\}$  separa os vértices dos rectângulos.

**Proposição 5.4.** *Dado um conjunto hiper-regular  $D$  e a partição  $\{B_k\}_{k \in I_4}$  de  $\partial D$  conforme definida em (5.3), os elementos desta partição separam os vértices de qualquer rectângulo não-degenerado  $R \in \mathcal{H}$ , i.e.,  $\#(R \cap B_i) \leq 1$ , para qualquer  $i \in I_4$ .*

*Demonstração.* Considere-se o rectângulo não degenerado  $R = (x, h, v) \in \mathcal{H}$ , com vértices  $\{a, b, c, d\}$ , conforme definidos em (5.4). Vamos mostrar que se  $a \in \partial D$  então  $a \in B_1$ . Pelo facto de  $D$  ser um conjunto hiper-regular então em cada ponto de  $\partial D$  está definido um hiperplano (no nosso caso uma recta) de suporte. Começemos por supor que  $a \in B_3$ . Existirá então um ponto  $\alpha$  no exterior de  $D$  tal que a recta de suporte que passa em  $a$  é definida por todos os pontos  $p$  em  $\mathbb{R}^2$  tais que  $\langle \overrightarrow{p\alpha}, \overrightarrow{\alpha a} \rangle = 0$ . Sem perda de generalidade vamos supôr que esta recta não é paralela a nenhum dos eixos coordenados. Além disso, para qualquer  $q \in D$  temos que  $\langle \overrightarrow{q\alpha}, \overrightarrow{\alpha a} \rangle < 0$ . Como  $R$  é um rectângulo não degenerado, temos necessariamente que  $a \neq d$ . Como  $a \in B_3$  então,

sendo  $m$  o declive do segmento de recta que une os pontos  $a$  e  $\alpha$ , perpendicular ao hiperplano de suporte de  $\partial D$  em  $a$ , pelo lema 5.2 e discussão sobre sequente podemos concluir que  $m < 0$ . Se  $m = \tan(\theta)$  então  $\theta \in (0, \pi/2)$ . Por construção  $\angle(\vec{a\alpha}, \vec{a\alpha}) \in (0, \pi/2)$  o que implica  $\langle \vec{a\alpha}, \vec{a\alpha} \rangle > 0$ , o que é equivalente a dizermos que  $d \notin D$ . Deste absurdo podemos concluir que  $a \notin B_3$ . De modo análogo poderíamos mostrar que  $a \notin B_2 \cup B_4$  o que implica que  $a \in B_1$ . No caso da recta de suporte ser paralela a um dos eixos coordenados então poderíamos repetir todo o raciocínio uma vez que estamos a assumir que o domínio não tem lados paralelos aos eixos coordenados. Ainda do mesmo modo mostra-se que se  $b \in \partial D$  então  $b \in B_2$ , se  $c \in \partial D$  então  $c \in B_3$  e se  $d \in \partial D$  então  $d \in B_4$ .  $\square$

Vamos agora definir o conjunto de todos os rectângulos que têm pelo menos as extremidades de uma diagonal em  $\partial D$ .

**Definição 5.6.** *Dado um conjunto hiper-regular  $D$ , para a partição  $\{B_k\}_{k \in I_4}$  definida em (5.3) definimos o conjunto  $\mathcal{H}_2$  como o conjunto de todos os rectângulos de  $\mathcal{H}$  com dois vértices diagonalmente opostos em  $\partial D$ ,*

$$\mathcal{H}_2 = \{R \in \mathcal{H} : (a(R) \in B_1 \wedge c(R) \in B_3) \vee (b(R) \in B_2 \wedge d(R) \in B_4)\}. \quad (5.5)$$

De seguida vamos dar uma caracterização topológica dos elementos de  $\mathcal{H}$ , que nos permite identificar o conjunto onde os valores maximais serão encontrados. Essencialmente, removendo todos os rectângulos degenerados, mostramos na proposição seguinte que as soluções do nosso problema encontram-se necessariamente em  $\mathcal{H}_2$ .

**Proposição 5.5.** *Seja  $D$  um conjunto convexo em posição genérica. Se um rectângulo  $R$  é um ponto interior de  $\mathcal{H}$  então existe um outro  $R^* \in \mathcal{H}$  tal que  $R \subset R^*$ . Além disso,  $R \in \mathcal{H}_2$  se e só se não existe  $R^* \in \mathcal{H} \setminus \{R\}$  tal que  $R \subsetneq R^*$ .*

*Demonstração.* Usando a métrica induzida de  $\mathbb{R}^4$  em  $\mathcal{H}$ , é fácil mostrar que se  $R \in \text{int } \mathcal{H}$  então necessariamente  $R \cap \partial D = \emptyset$ . É então possível construir por homotetia um outro rectângulo  $R^* \in \text{int } \mathcal{H}$  tal que  $R \subset R^*$ .

Para demonstrar a segunda parte da proposição, comecemos por supôr que  $R \in \mathcal{H}_2$ . Sem perda de generalidade vamos supôr que  $\{a(R), c(R)\} \subset \partial D$ . Pela proposição 5.4 sabemos que  $a(r) \in B_1$ . Isto permite-nos concluir imediatamente que o declive da sua recta de suporte é negativo ou nulo. Se existir  $R^* \in \mathcal{H}$  tal que  $R \subsetneq R^*$ , então se  $a = a(R) \neq a(R^*) = a^*$  teremos

$$x(a(R)) < x(a(R^*)) \text{ ou } y(a(R)) < y(a(R^*)). \quad (5.6)$$

Considere-se um vector  $v \in \mathbb{R}^2$  perpendicular à recta de suporte no ponto  $a$ . No referencial centrado em  $a$  e com os eixos paralelos aos eixos coordenados, por o declive da recta de suporte ser negativo,  $v$  irá pertencer ao primeiro quadrante deste referencial. Por (5.6) sabemos que  $\langle v, \overrightarrow{aa^*} \rangle \geq 0$ , pois o ângulo formado pelos dois vectores pertence ao intervalo  $[0, \pi/2]$ , o que mostra imediatamente que  $a^* \notin \partial D \cup D$ . Do absurdo resulta que as desigualdades em (5.6) não podem ser válidas, mostrando-se assim que não existe nenhum rectângulo  $R^*$  que contenha  $R$ . No caso de  $a(R) = a(R^*)$  poderíamos deduzir resultados análogos para os vértices  $c(R)$  e  $c(R^*)$ . O recíproco é imediato. Basta notar que se  $R \notin \mathcal{H}_2$  é possível construir um rectângulo que o contenha.  $\square$

O resultado anterior mostra que o(s) rectângulo(s) maximal(ais) são necessariamente elementos de  $\mathcal{H}_2$ .

## 5.5 Algoritmo para encontrar o Rectângulo Maximal em $D_{k,\lambda}$

Depois de termos construído uma base teórica, estamos em condições de começar a abordar o nosso problema. Começamos por ilustrar os resultados já conhecidos relativamente ao problema de encontrarmos o rectângulo isotético de maior área no caso em que o domínio é limitado por um polígono convexo. De seguida veremos que estes resultados generalizam-se para o caso regular e concluímos com uma caracterização do elemento maximal para este caso.

Designaremos por  $\partial D_{[v_0, v_1]}$  a porção de  $\partial D$  contida em  $B_k$  que une os pontos  $v_0$  e  $v_1$  de  $\partial D$ . Dado  $p \in \partial D$ , vamos designar o vector normal a  $\partial D$  em  $p$  por  $\nabla_p \partial D$ .

### 5.5.1 Discussão do caso discreto.

Vamos trabalhar um pouco no caso discreto e começamos pelo caso mais simples, quando o domínio  $D$  é um rectângulo não-isotético. Na figura 5.4 apresenta-se um esboço do problema. Dado  $(x_0, y_0) \in l_0$ , para uma dada proporção geométrica  $\sigma$ , com  $m \neq \sigma$ , queremos encontrar o vértice  $(x_1, y_1)$  da respectiva diagonal em  $l_1$ , ou seja, encontrar o vértice que, para uma dada proporção geométrica, o rectângulo seja um possível elemento de  $\mathcal{H}_2$ . Por  $l_0$  e  $l_1$  serem paralelos, estes são dados por

$$l_0 \equiv y = mx + b_0 \quad \wedge \quad l_1 \equiv y = mx + b_1.$$

Por outro lado,  $(x_1, y_1)$  também pertence à linha  $l$  que passa por  $(x_0, y_0)$  na direcção

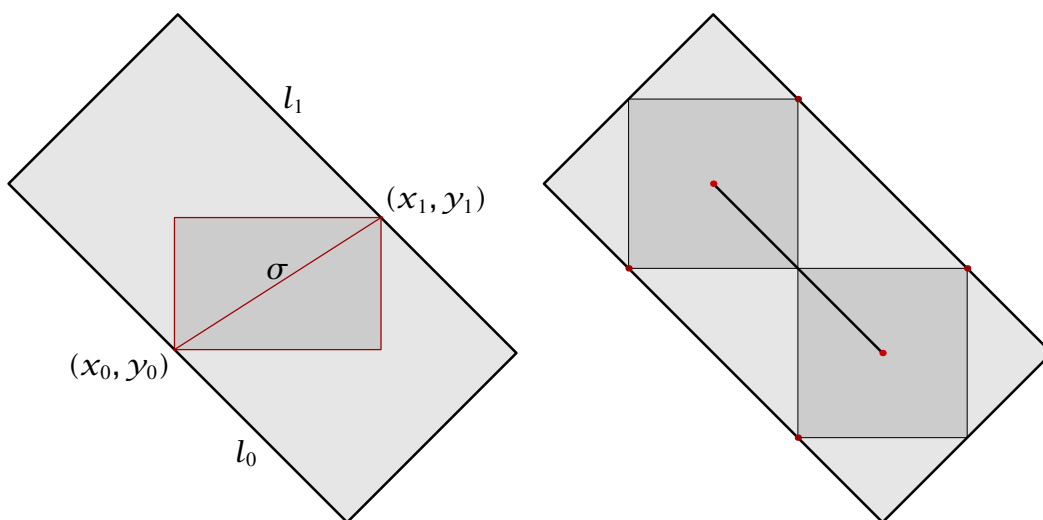


Figura 5.4: Optimização para o caso de um rectângulo não isotético.

do vector  $(1, \sigma)$

$$(x_1, y_1) \in l \equiv y = \sigma(x - x_0) + y_0.$$

Então o ponto  $(x_1, y_1)$  é a solução do sistema linear

$$\begin{cases} y_1 = mx_1 + b_1 \\ y_1 = \sigma(x_1 - x_0) + y_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{m-\sigma}(y_0 - b_1 - \sigma x_0) \\ y_1 = \frac{1}{m-\sigma}(m y_0 - m \sigma x_0 - \sigma b_1). \end{cases}$$

Destas equações e para uma proporção geométrica  $\sigma$ , podemos deduzir uma fórmula para a área deste rectângulo  $A(\sigma)$ . Uma vez que  $x_0$  está fixo, esta dependerá apenas do parâmetro  $\sigma$ . Sendo  $(x_0, y_0)$  e  $(x_1, y_1)$  os vértices da diagonal, a fórmula será dada por

$$A(\sigma) = \frac{\sigma}{(m-\sigma)^2}(y_0 - mx_0 - b_1)^2 = \frac{\sigma}{(m-\sigma)^2}(b_0 - b_1)^2.$$

Resolvendo a equação  $A'(\sigma) = 0$  e analisando o sinal da segunda derivada, podemos concluir que a área máxima é-nos dado para  $\sigma = -m$ , com o valor correspondente  $A(-m) = (b_0 - b_1)^2/4m$ . Contudo, nem todos os pontos  $(x_0, y_0)$  são admissíveis para suportarem uma das diagonais do rectângulo maximal com proporção geométrica  $\sigma = -m$  conforme obtido anteriormente. Notoriamente, para certos pontos, algum dos vértices do rectângulo respeitando esta proporção geométrica poderia não ser um ponto do domínio  $D$ . Os vértices da outra diagonal são dados por  $(x_0, y_1)$  e  $(x_1, y_0)$ . Para encontrarmos os rectângulos extremos, teremos de recorrer novamente ao facto de cada um dos lados admitir um hiperplano de suporte, tendo cada um dos vértices dos rectângulos de verificar as respectivas desigualdades. Na figura 5.4

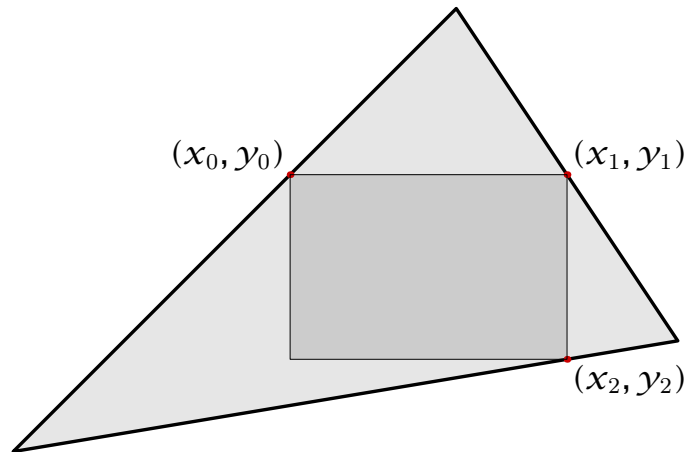


Figura 5.5: O caso mais simples em que o rectângulo maximal tem necessariamente três vértices na fronteira do conjunto.

são apresentados os dois casos limites. Ao longo da linha que une os centros, existem outros rectângulos maximais com a mesma proporção geométrica  $\sigma = -m$ . Este exemplo, para lá de nos indicar as condições necessárias para que um rectângulo seja maximal, mostra-nos que este máximo pode ser atingido em mais do que um ponto de  $\mathcal{H}_2$ . Este facto revela a existência de um conjunto convexo de  $\mathcal{H}$  que contém todos os rectângulos maximais. A não unicidade do máximo advém do facto de existirem dois lados paralelos (com comprimento não nulo) no domínio convexo. O próximo lema diz-nos que no caso de o nosso domínio  $D$  ser um polígono convexo, e se o rectângulo maximal tiver só dois vértices em  $\partial D$ , este terá um vértice num vértice do domínio ou dois vértices em lados paralelos. Esta caracterização é formulada no lema seguinte. A demonstração do mesmo pode ser encontrada em [AHS95].

**Lema 5.5.** *Vamos supor que  $D$  é um polígono convexo e que um rectângulo isotético com área máxima  $R$  tem exactamente dois vértices, por exemplo  $a$  e  $c$ , da mesma diagonal em  $\partial D$  do polígono  $D$  e estes pontos  $a$  e  $c$  não estão num vértice de  $D$ . Então  $D$  tem tangentes paralelas nestes pontos com declive  $m$  e a diagonal tem declive  $m_{ac}$  verificando-se que  $m = -m_{ac}$ .*

Para lá das soluções encontradas anteriormente, poderão existir rectângulos maximais com pelo menos três vértices nos lados do polígono, cuja distinção no caso computacional é de extrema importância. De forma semelhante ao que foi feito para o caso anterior, vamos estudar o exemplo mais simples de um polígono convexo cuja solução seja deste tipo. Neste caso o nosso polígono será um triângulo conforme esboçado na figura 5.5.

Vamos supôr que os lados do triângulo  $D$  são dados pelos segmentos de recta

$l_i \equiv y = m_i x + b_i$ , para  $i = 1, 2, 3$ . Dado um vértice  $(x_0, y_0) \in l_0$ , para um rectângulo cuja diagonal contenha este ponto e um ponto  $(x_2, y_2) \in l_2$  com proporção geométrica  $\sigma$  (ver figura 5.5), o ponto  $(x_2, y_2)$  verifica as equações, se  $\sigma \neq m_2$ ,

$$\begin{cases} y_2 = \sigma(x_2 - x_0) + b_0 \\ y_2 = m_2 x_2 + b_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{b_0 - b_2 - \sigma x_0}{m_2 - \sigma} \\ y_2 = \frac{b_0 m_2 - (b_2 + m_2 x_0) \sigma}{m_2 - \sigma}. \end{cases}$$

Sem dificuldade mostra-se que a área deste rectângulo, em função de  $x_0$  e de  $\sigma$  que representaremos por  $A(\sigma, x_0)$ , será dada por

$$A(\sigma, x_0) = \left| \left( \frac{b_0 - b_2 - \sigma x_0}{m_2 - \sigma} - x_0 \right) \left( \frac{b_0 m_2 - (b_2 + m_2 x_0) \sigma}{m_2 - \sigma} - m_0 x_0 - b_0 \right) \right|. \quad (5.7)$$

Para que  $(x_1, y_1) = (x_2, y_0)$  seja um ponto de  $l_1$ , fixados um ponto  $Q^1 = (Q_x^1, Q_y^1) \in l_1$  e o seu vector normal  $v^1 = (v_x^1, v_y^1)$ , é necessário que

$$g(\sigma, x_0) = v_x^1 (x_2 - Q_x^1) + v_y^1 (y_0 - Q_y^1) = 0. \quad (5.8)$$

Deste modo, o problema de encontrar o rectângulo de maior área com três vértices contidos nos lados do triângulo é equivalente ao problema de extremos condicionados

$$\begin{cases} \nabla A(\sigma, x_0) = \lambda \nabla g(\sigma, x_0) \\ g(\sigma, x_0) = 0. \end{cases} \quad (5.9)$$

A manipulação simbólica destas expressões é impracticável manualmente. Recorrendo ao Mathematica, é possível verificar que o declive da diagonal do rectângulo maximal, inscrita nos lados do triângulo, para os valores maximais  $x_0$  e  $\sigma$ , não depende do ponto  $Q^1$  e fazendo  $v^1 = (1, -1/m_1)$  iremos obter

$$\frac{y_0 - y_2}{x_0 - x_2} = -m_0 \frac{m_2 - m_1}{m_0 - m_1}.$$

Este resultado é generalizado para um polígono convexo qualquer em [AHS95]. A aparente questão acerca dos declives dos lados pode ser imediatamente resolvida ao considerarmos um problema equivalente, transformando o domínio através de uma isometria. O rectângulo maximal será assim o transformado por essa isometria da solução do problema equivalente. Um ponto curioso na demonstração do lema 5.6 em [AHS95] é o facto de ser utilizada uma aproximação regular do polígono  $P$ , onde as aproximações dos vértices são dadas por circunferências de raio tão pequeno quanto

se queira. Isto indica-nos que a demonstração do caso regular segue exactamente os mesmos passos.

**Lema 5.6.** *Vamos supor que  $D$  é um polígono e que um rectângulo isotético de área máxima  $R$  tem exactamente três vértices  $a$ ,  $b$  e  $c$  em  $\partial D$  do polígono  $D$  e que estes vértices não estão nos vértices de  $D$ . Então, eventualmente após rotação, existem tangentes com declives  $m_a < 0$ ,  $m_b > 0$  e  $m_c < 0$ , respectivamente, satisfazendo*

$$-m_a \geq m_{ac} \geq -m_c > 0 \quad e \quad m_{ac} = -m_a \frac{m_c - m_b}{m_a - m_b},$$

com  $m_{ac}$  o declive da diagonal que une os vértices  $a$  e  $c$ .

Uma nota final sobre o problema discreto. Os resultados apresentados anteriormente mostram-nos que o problema discreto é essencialmente um problema de combinatória. De facto, no caso discreto os lados do polígono convexo estão totalmente contidos em um dos elementos da partição  $\{B_i\}$ , separando-se assim os vértices dos possíveis rectângulos localmente maximais. De entre todos estes máximos, restringindo a nossa atenção apenas aos casos admissíveis, podemos escolher facilmente o rectângulo de maior área.

### 5.5.2 Generalização para o caso regular.

Dados os domínios regulares apresentados na secção 4.6, mostrámos então que os domínios são convexos e em que condições podemos assumir a regularidade dos mesmos. Mostrámos igualmente que os esses domínios são simétricos em relação à recta  $y = x$ . Na primeira parte desta secção ilustrámos os resultados já conhecidos para o caso discreto. Pretendemos aqui estendê-los para o caso regular. Uma vez demonstrada a regularidade, com a possibilidade de calcular as tangentes ao longo de toda a fronteira do domínio, será um factor determinante para a elegância das demonstrações dos resultados que apresentamos de seguida. Independentemente de tudo, convém no entanto reafirmar que qualquer implementação computacional destes domínios será sempre através de um polígono convexo. Começamos por dar o resultado análogo ao do lema 5.5 para o caso discreto.

**Proposição 5.6.** *Dado um conjunto hiper-regular  $D$ , vamos supor que o rectângulo de área maximal  $R^*$  só tem dois vértices  $Q_0$  e  $Q_1$  no conjunto  $\partial D$ . Então as tangentes nestes pontos são paralelas com declive  $m$ . Se  $m'$  é o declive da diagonal que une  $Q_0$  e  $Q_1$  então  $m = -m'$ .*

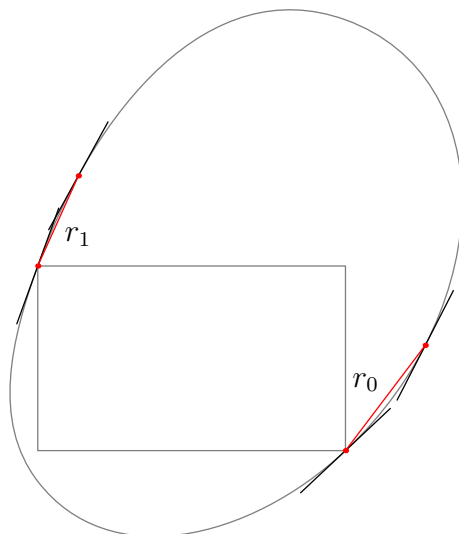


Figura 5.6: Se as tangentes não forem paralelas é possível aumentar a área do rectângulo inscrito.

*Demonstração.* Em primeiro lugar,  $\nabla_{Q_0}\partial D$  e  $\nabla_{Q_1}\partial D$  têm de ser paralelos. De outra forma  $R^*$  poderia ser aumentado. Isto advém do facto de  $\partial D$  ser de classe  $C^\infty$ , pois no caso de não haver paralelismo entre os vectores normais, numa vizinhança de cada um desses pontos os vectores normais em todos os pontos dessas vizinhanças não serão ainda paralelas. Poderemos então encontrar duas rectas concorrentes  $r_0$  e  $r_1$ , passando pelos pontos  $Q_0$  e  $Q_1$  respectivamente, que não são tangentes a  $\partial D$  e verificando  $\angle(r_0, \nabla_{Q_0}\partial D) > \pi/2$  e  $\angle(r_1, \nabla_{Q_1}\partial D) > \pi/2$ , de tal forma que movendo os vértices de  $R^*$  ao longo de  $r_0$  e de  $r_1$  poderíamos aumentá-lo. Assim, isto equivale a dizermos que as rectas tangentes a  $\partial D$  em  $Q_0$  e  $Q_1$  são necessariamente paralelas. Vamos supôr que o declive de cada uma destas rectas é igual a  $m$ .

Começando por fazer uma mudança de referencial de forma a que o centro do novo referencial seja o ponto  $Q_0$ , com  $Q_1 = (x_1, y_1)$  neste referencial, considere-se a hipérbole (centrada em  $Q_0$ ) dada por  $h(x, y) = xy = A$ , onde  $A$  é igual à área do rectângulo  $R^*$ . Como este é o rectângulo de maior área, por  $h(x_1, y_1) = A$  e por  $Q_1 \in \partial D$  então  $h(x, y) = A$  é tangente a  $\partial D$  em  $Q_1$ . De outro modo, a hipérbole intersectaria  $\partial D$  em dois pontos  $Q_0$  e  $Q_1$ , pelo que para qualquer  $Q \in \partial_{[Q_0, Q_1]}D$  o rectângulo cujos vértices da diagonal pertencentes a  $\partial D$  fossem  $Q_0$  e  $Q$  teria necessariamente uma área maior. Deste modo, existe  $\beta \neq 0$  tal que

$$\nabla h(x_1, y_1) = \beta \nabla_{Q_1} \partial D.$$

Por um lado, por  $Q_0$  ser o centro do referencial, o declive da diagonal que une os

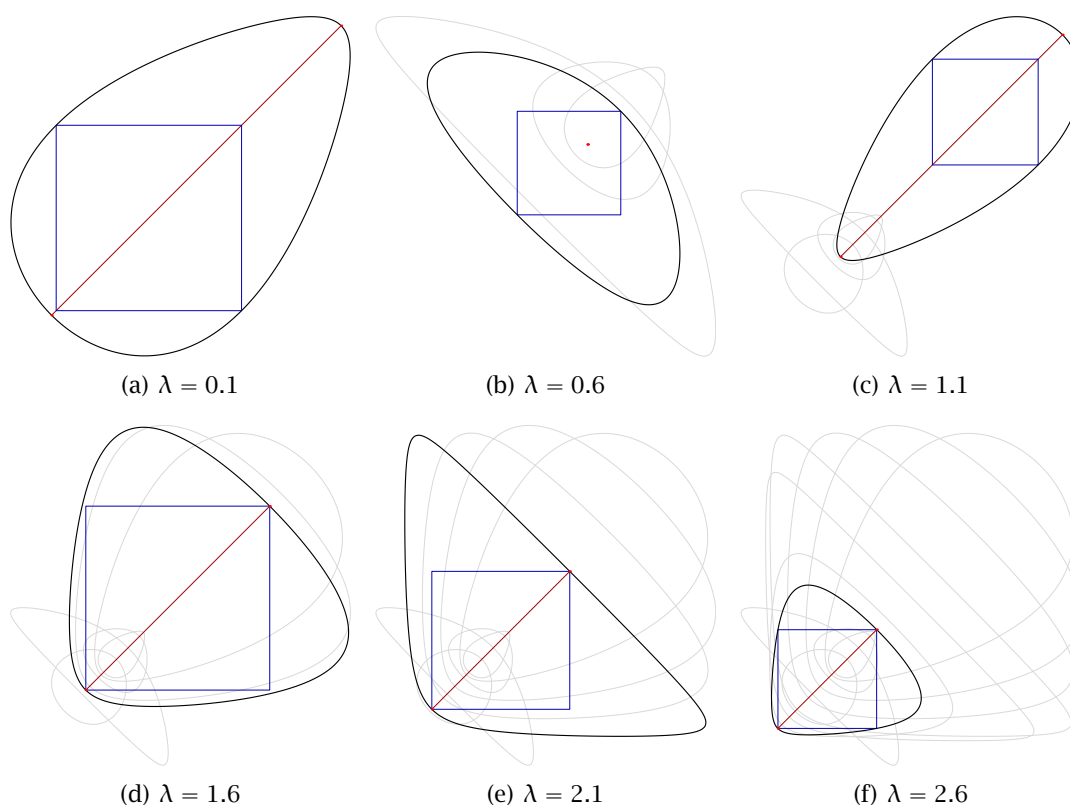


Figura 5.7: Os valores maximais para vários valores dos parâmetros  $\lambda$ .

pontos  $Q_0$  e  $Q_1$  será

$$m' = \frac{y_1}{x_1} = \frac{A}{x_1^2}.$$

Por outro lado  $\nabla h(x_1, y_1) = (y_1, x_1)$  o que significa que o vector tangente a  $\partial D$  em  $Q_1$  é paralelo ao vector  $(-x_1, y_1) = (-x_1, A/x_1)$ . Assim  $m = -A/x_1^2$  o que mostra que  $m' = -m$ .  $\square$

Estamos agora em condições de formular o teorema fundamental deste capítulo. Mostra-nos que os rectângulos máximas são quadrados, que o maximizante é único e que o seu centro está bem localizado!

**Teorema 5.4.** *O conjunto hiper-regular e estritamente convexo  $D$ , simétrico em relação à recta  $y = x$ , admite um rectângulo maximal único, com centro no eixo de simetria e com  $\sigma = 1$ .*

*Demonstração.* Representando a reflexão sobre a recta  $y = x$  por  $\tau$ , é fácil mostrar que  $\mathcal{H}_2$  é um conjunto fechado para  $\tau$ . Dado um rectângulo isotético  $R$ , este foi definido por  $(C, h, v) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , onde  $C$  são as coordenadas do centro,  $h$  o comprimento horizontal e  $v$  o comprimento vertical. Assim, qualquer vértice  $v$  do

rectângulo  $(C, h, v)$  é dado por

$$v = C \pm \left( \frac{h}{2}, 0 \right) \pm \left( 0, \frac{v}{2} \right).$$

Dado um rectângulo maximal  $R$  a sua reflexão  $\tau(R) = (C_\tau, h_\tau, v_\tau)$  também será um rectângulo maximal para a função  $\mu$ . Como  $\mu$  é uma função quasi-côncava, então para todo o  $\lambda \in (0, 1)$ , o rectângulo

$$R(\lambda) = (C_\lambda, h_\lambda, v_\lambda) = (1 - \lambda)R + \lambda\tau(R),$$

também será um rectângulo maximal. É imediato que  $R(\lambda) \in \mathcal{H}_2$  para todo o  $\lambda \in (0, 1)$ . Por seu lado, qualquer vértice  $v_\lambda \in R(\lambda)$  pode ser escrito pela expressão

$$v_\lambda = (1 - \lambda) \left[ C \pm \left( \frac{h}{2}, 0 \right) \pm \left( 0, \frac{v}{2} \right) \right] + \lambda \left[ C_\tau \pm \left( \frac{h_\tau}{2}, 0 \right) \pm \left( 0, \frac{v_\tau}{2} \right) \right].$$

Então qualquer vértice do rectângulo  $R(\lambda)$  é dado como combinação linear convexa dos vértices correspondentes de  $R$  e de  $\tau(R)$ . Como  $R(\lambda)$  é um rectângulo maximal então os vértices de pelo menos uma das diagonais são pontos de  $\partial D$ , o que implica que este contém pelo menos um desses segmentos de recta. Isto contradiz o facto de  $D$  ser estritamente convexo. Se  $R$  é um rectângulo maximal então necessariamente  $\tau(R) = R$ . Como  $\sigma(\tau(R)) = 1/\sigma(R)$ , se  $R$  é um rectângulo maximal então  $\sigma(R) = 1$ . Além disso, uma das diagonais do quadrado maximal é invariante pela transformação  $\tau$  o que significa que o respectivo centro é um ponto do eixo de simetria.  $\square$

Pelo facto de um rectângulo maximal ser invariante para  $\tau$ , no caso desse rectângulo ter três vértices em  $\partial D$ , é fácil mostrar que se  $v \in \partial D$  é o único vértice da sua diagonal pertencente a  $\partial D$ , então  $v$  é um ponto da recta  $y = x$ .

*Now this is not the end. It is not even the beginning of the end.  
But it is, perhaps, the end of the beginning.*

— Winston Churchill, Discurso no final da Batalha de Inglaterra, (1940)

# 6

## Computação Científica com NUMDE

Sob todo este trabalho de natureza profundamente analítica, existe um outro que corre em paralelo. Existem formas diferentes compreender os conceitos mais profundos da Matemática. A forma que mais aprecio é fazer experiências. Perceber de que forma os vários parâmetros de uma equação poderão influenciar as respectivas soluções. Existe nesta linguagem visual não formalizada uma quantidade de informação aparentemente incoerente. Voltando ao princípio, à introdução desta dissertação, a nossa vontade de descortinar padrões tem muitas vezes resultados surpreendentes. Para isso precisamos de um simples computador, algoritmos numéricos e vontade de programar. O resultado de toda esta vontade de ter uma representação da dinâmica dos modelos que estudámos tem um nome: NUMDE.

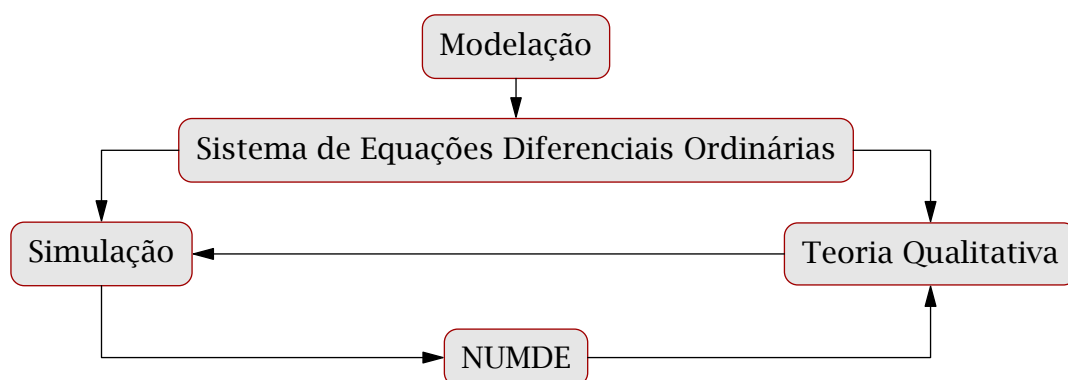


Figura 6.1: Modelo para computação científica com o NUMDE.

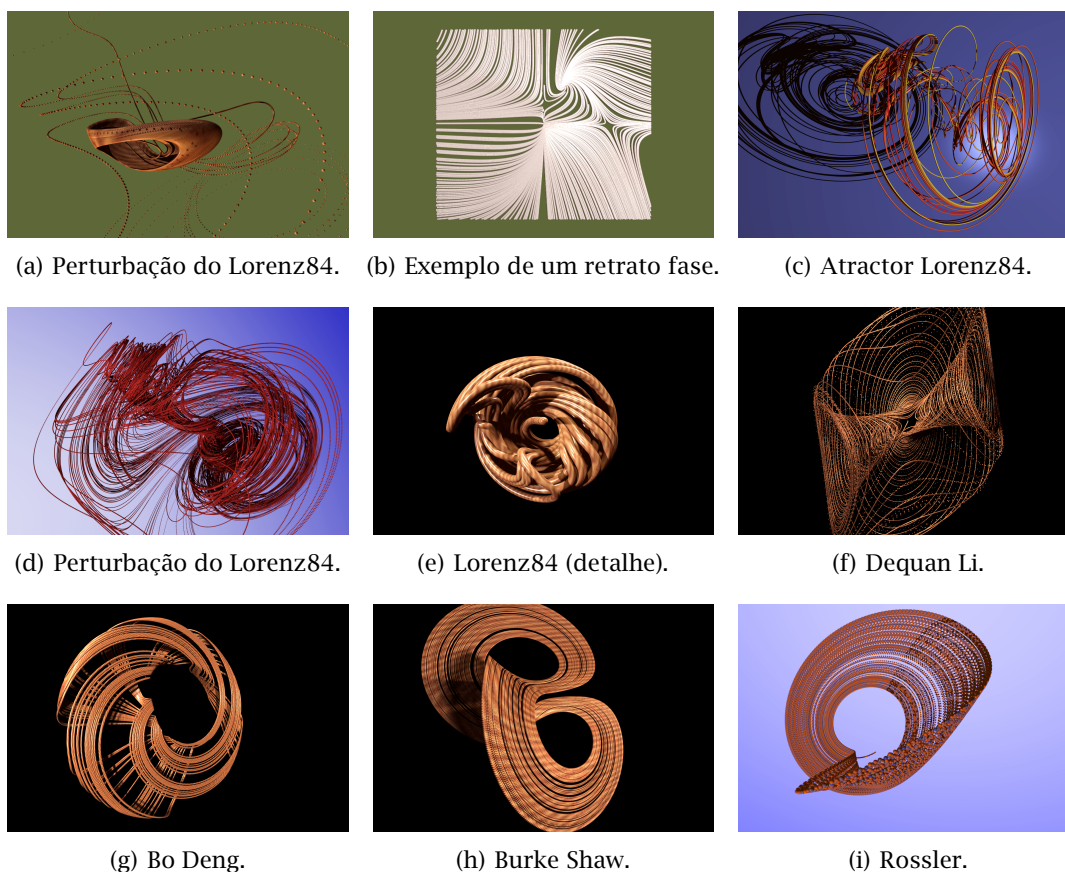


Figura 6.2: Figuras produzidas pelo software NUMDE.

NUMDE significava inicialmente Numerical Differential Equations. O nome ficou. Contudo, ao longo do percurso evoluiu de forma quase autónoma e, aquilo que começou como um simples conjunto de algoritmos numéricos para equações diferenciais, tomou a sua própria direcção, podendo hoje representar, de uma forma ainda bastante básica, é certo, figuras relacionadas com campos vectoriais, nós topológicos, retratos fase e num futuro próximo outros aspectos relacionados com a teoria qualitativa das equações diferenciais. Ainda está numa forma bastante embrionária, mas tem desde já pequenas vitórias, pois o livro [Strar] contém várias imagens geradas por esta biblioteca. Quando estiver numa forma em que possa vir a ser utilizado por outras pessoas, livre dos maneirismos recorrentes da pessoa que o programou será libertado como software livre com a licença GPL.

De uma forma geral, conforme apontado na figura 6.1, o processo de computação científica passa em primeiro lugar por obter uma equação diferencial (ou qualquer outro objecto matemático) que modele o comportamento que pretendemos estudar. Classicamente a Teoria Qualitativa de Equações Diferenciais permite encontrar muitos

dos aspectos mais relevantes de um determinado sistema. A maneira de reproduzir estes resultados é proceder a uma simulação do sistema. Para isso precisamos de um método numérico que nos permita calcular uma aproximação daquilo que o nosso sistema prediz. O mais relevante é posteriormente fazer uma análise dos dados ou encontrar uma forma de proceder a uma representação gráfica dos mesmos. A NUMDE providencia isto, pois nela estão implementados alguns dos algoritmos numéricos mais importantes para resolver problemas numéricos relacionados com Equações Diferenciais Ordinárias. As estruturas de dados empregues foram pensadas de raiz para que seja relativamente simples traduzir esses dados numa linguagem gráfica. Neste momento foram criados três interfaces principais para POV-Ray (ficheiros .pov), para WaveFront Object (ficheiros .obj) usados na maior parte dos programas de CAD e para Asymptote. Esta última, não tendo a robustez das anteriores do ponto de vista gráfico, é especialmente adaptada para a sua utilização em  $\text{T}_\text{E}\text{X}$ . Existem outras bibliotecas livres que fazem algo semelhante ao que foi implementado na NUMDE com objectivos mais vastos. Existem duas razões principais que me levaram ainda assim a implementar estes algoritmos.

Em primeiro lugar, as bibliotecas de computação científica são na maior parte das vezes demasiado gerais e por isso pouco flexíveis para resolver os tipos de problemas específicos que surgiram originalmente. Contudo, o interface gráfico implementado na NUMDE é suficientemente flexível para ser adaptado a estas bibliotecas. Por outro lado, implementar de raiz estes algoritmos permitiu-me ter uma visão mais profunda sobre os mesmos, pois parafraseando Donald Knuth, só aprendemos realmente uma coisa quando a ensinamos a um computador. Foi de facto um desafio que coloquei a mim próprio e o resultado final, após mais de quinze mil linhas de código, é de facto reconhecido, não só pela sua eficiência, em grande parte devido ao facto de ser um programa pequeno, consegue fazer representações gráficas de qualidade superior. Estas revelam muitas vezes os aspectos mais recôndidos que uma abordagem mais clássica é incapaz de fazer sobressair. Neste capítulo iremos descrever, em primeiro lugar, duas aplicações não triviais desta biblioteca. De seguida iremos aplicá-la na simulação numérica do acoplamento de dois pêndulos através de um meio.

## 6.1 Construção de Grelhas Tubulares

O problema de gerar grelhas tubulares é um problema clássico de computação gráfica. Uma das aplicações mais básicas consiste em gerar uma noção de volume em torno de uma linha definida em  $\mathbb{R}^3$ . A construção de tal grelha requer o cálculo de dois

elementos fundamentais: os nós da grelha e as faces da superfície tubular. Existem várias possibilidades para as faces. Habitualmente são definidas por triângulos.

Adicionalmente podem ser dados outros elementos para melhorar a qualidade do rendering, como vectores normais para melhor lidar com a iluminação e elementos de textura. Na implementação desta biblioteca neste momento apenas são dados os vectores normais de uma grelha. Para melhor compreendermos os detalhes matemáticos e computacionais deste tipo de trabalho, iremos apresentar o algoritmo que serve de base da implementação deste tipo de grelhas a um nó topológico.

Uma linha  $\mathcal{L}$  em  $\mathbb{R}^3$  pode ser definida por uma parametrização  $\phi: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$  através da expressão  $\phi(t) = (x(t), y(t), z(t))$ . Não havendo uma parametrização única para uma determinada linha, as diferenças entre elas não são despreciables do ponto de vista computacional. A má representação de uma linha prende-se com o facto de esta ser interpolada por polinómios, cujo comportamento pode variar de forma importante. Assim sendo, a parametrização por comprimento de arco surge como a melhor solução possível para que esse equilíbrio se dê (ver [Hob86] para um algoritmo 2D e [Bow07] para a respectiva generalização tridimensional). Com este tipo de parametrização os pontos encontram-se igualmente espaçados, o que influencia positivamente a posterior interpolação.

Do ponto de vista teórico é sempre possível encontrar para uma determinada linha  $\mathcal{L}$  uma parametrização pelo comprimento do arco. Para uma determinada parametrização  $\phi(t)$ , saber se respeita ou não este requisito, basta verificar se  $\|\dot{\phi}(t)\| = 1$  para todo o  $t \in (a, b)$ . Neste caso, sendo  $C_\phi(t)$  o comprimento da linha  $\phi$  definida em  $(a, t)$ , teremos

$$C_\phi(t) = \int_a^t \sqrt{\dot{x}(\tau)^2 + \dot{y}(\tau)^2 + \dot{z}(\tau)^2} d\tau = t - a. \quad (6.1)$$

Quando esta situação não se verifica, é teoricamente possível fazer uma reparametrização da linha, considerando o parâmetro  $s = C_\phi(t)$ . A nova parametrização

$$\phi(s) = \left( x \left( C_\phi^{-1}(s) \right), y \left( C_\phi^{-1}(s) \right), z \left( C_\phi^{-1}(s) \right) \right)$$

será então uma parametrização pelo comprimento de arco. Como teremos oportunidade de ver mais à frente, na prática esta inversão nem sempre é possível fazer porque o integral (6.1) nem sempre tem uma forma fechada. Na literatura este tipo de parametrização é habitualmente usada para derivar as propriedades mais importantes de uma linha, como por exemplo a curvatura e a torsão (ver [Car76] para todos os

detalhes).

O aspecto mais interessante relacionado com o facto de uma parametrização poder ser dada pelo comprimento de arco, ou seja  $\|\dot{\phi}(t)\| = 1$ , resulta que  $\ddot{\phi}(t) \cdot \dot{\phi}(t) = 0$  para todo o  $t \in (a, b)$ . Poderemos assim sem qualquer dificuldade encontrar um vector unitário  $n(t)$ , perpendicular a  $\dot{\phi}(t)$ , tal que  $\ddot{\phi}(t) = \kappa(t)n(t)$ . A quantidade escalar  $\kappa(t)$  designa-se por curvatura da linha  $\mathcal{L}$  no ponto  $P = \phi(t)$ . O vector  $n(t)$  designa-se por vector normal. A partir do vector tangente e do vector normal podemos encontrar um terceiro vector, designado por vector binormal,  $b(t) = \dot{\phi}(t) \times n(t)$ . Num ponto qualquer da linha  $\mathcal{L}$  estes três vectores formam o que se costuma designar por referencial de Frenet. A importância deste referencial é óbvia: ele permite-nos construir um referencial ortonormado em todos os pontos da linha  $\mathcal{L}$ .

A partir daqui é fácil gerar os pontos da grelha. Em primeiro lugar geramos os pontos no referencial ortonormado de  $\mathbb{R}^3$ . Para isso temos de fazer uma escolha do plano em que os pontos são gerados, no nosso caso no plano  $yOz$ , sendo depois transladados para o plano no referencial de Frenet em cada ponto da linha que é perpendicular ao vector tangente (ver fig. 6.3(b)). Supondo que cada secção da grelha tem  $n$  pontos, a diferença angular entre eles será  $2\pi/n$ . Estes serão da forma

$$w_{\theta_i} = (x(\theta_i), y(\theta_i), z(\theta_i)) = (0, \cos \theta_i, \sin \theta_i),$$

onde  $\theta_i = (2i\pi)/n$ , com  $i = 0, \dots, n - 1$ . Representando por  $T$  a aplicação linear que transporta estes pontos do referencial canónico para o referencial de Frenet, é imediato verificar que esta é definida pela matriz

$$M_T(t) = \begin{bmatrix} v_x(t) & n_x(t) & b_x(t) \\ v_y(t) & n_y(t) & b_y(t) \\ v_z(t) & n_z(t) & b_z(t) \end{bmatrix},$$

onde  $v(t) = (v_x(t), v_y(t), v_z(t))$  é o vector tangente,  $n(t) = (n_x(t), n_y(t), n_z(t))$  o vector normal e  $b(t) = (b_x(t), b_y(t), b_z(t))$  o vector binormal ao ponto  $\phi(t)$ . Os pontos da grelha  $P(t, \theta)$  serão assim dados pela expressão

$$P(t, \theta) = \phi(t) + M_T(t)w_{\theta} = \phi(t) + \cos(\theta) \begin{bmatrix} n_x(t) \\ n_y(t) \\ n_z(t) \end{bmatrix} + \sin(\theta) \begin{bmatrix} b_x(t) \\ b_y(t) \\ b_z(t) \end{bmatrix}.$$

Para centrarmos a nossa discussão em algo de concreto, de forma a vermos as

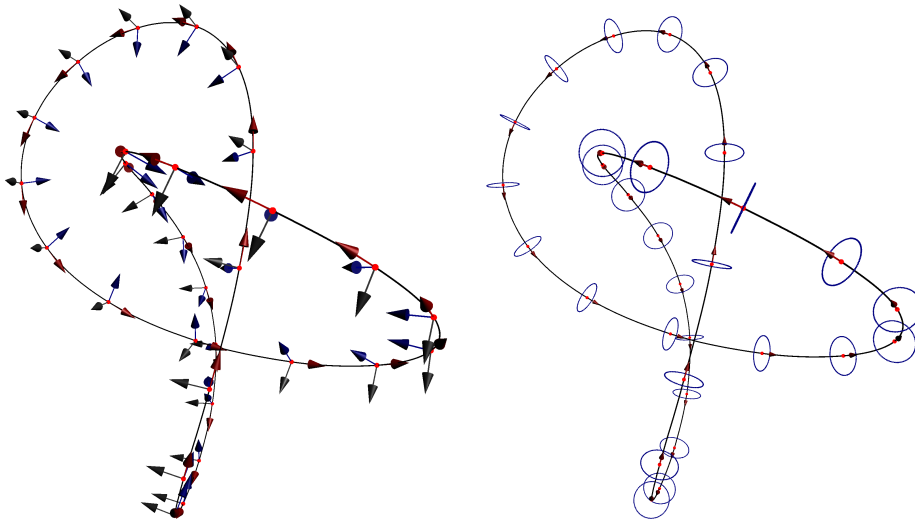


Figura 6.3: Referencial de Frenet e Pontos da Grelha ao longo da linha.

dificuldades reais de uma implementação deste tipo, vamos considerar uma parametrização do Trifoil dada por

$$\phi(t) = \begin{cases} x(t) = \sin t + 2 \sin(2t) \\ y(t) = \cos t - 2 \cos(2t) \\ z(t) = -\sin(3t), \end{cases}$$

com  $t \in (0, 2\pi)$ . Sem dificuldades concluímos em primeiro lugar que

$$\|\dot{\phi}(t)\| = \sqrt{\frac{43}{2} + 8 \cos(3t) + \frac{9}{2} \cos(6t)} \neq 1.$$

Em segundo lugar, é inútil procurar uma fórmula fechada para o comprimento de arco expresso pela integral

$$C_{\phi}(t) = \int_0^t \sqrt{\frac{43}{2} + 8 \cos(3\tau) + \frac{9}{2} \cos(6\tau)} d\tau.$$

Ao invés vamos usar as seguintes fórmulas para encontrar o referencial de Frenet (ver [Spi99])

$$v(t) = \frac{\dot{\phi}(t)}{\|\dot{\phi}(t)\|}, \quad n(t) = \frac{\dot{\phi}(t) \times (\ddot{\phi}(t) \times \dot{\phi}(t))}{\|\dot{\phi}(t)\| \|\ddot{\phi}(t) \times \dot{\phi}(t)\|}, \quad b(t) = \frac{\dot{\phi}(t) \times \ddot{\phi}(t)}{\|\ddot{\phi}(t) \times \dot{\phi}(t)\|}.$$

A construção das arestas e das faces da grelha é essencialmente um exercício de

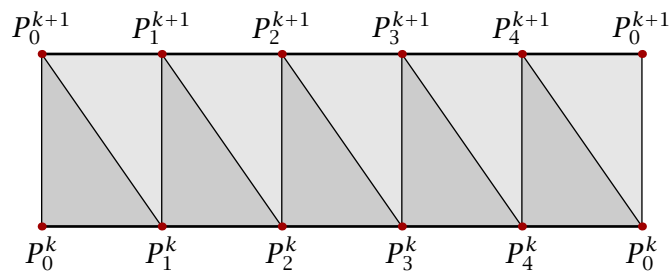


Figura 6.4: Triângulos entre seções consecutivas de uma grelha.

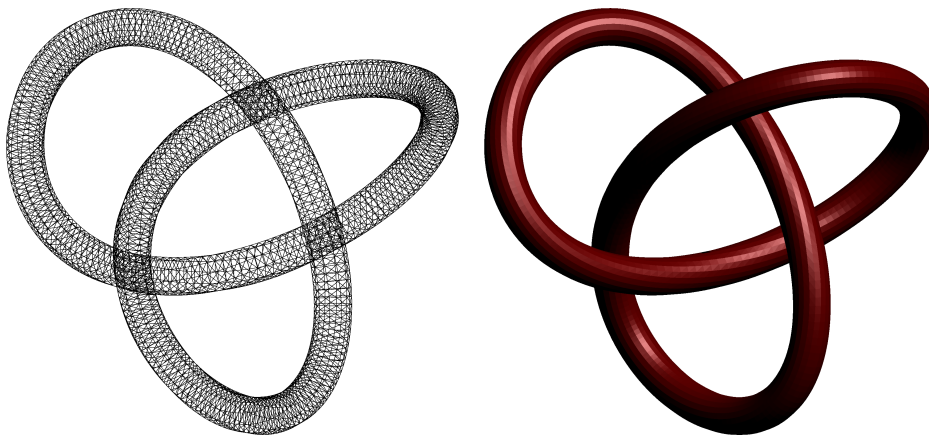


Figura 6.5: As arestas da grelha e a representação final.

combinatória. Entre duas seções adjacentes  $k$  e  $k + 1$ , cada uma com  $n$  vértices  $P_j^i$ , com  $i \in \{k, k + 1\}$  e  $j = 0, \dots, n - 1$ , a grelha triangular será preenchida por dois tipos de triângulos  $\{P_i^k, P_{i+1}^k, P_i^{k+1}\}$  e  $\{P_{i+1}^k, P_{i+1}^{k+1}, P_i^{k+1}\}$ . Um cuidado adicional que temos de ter é preservar a orientação das faces. Para isso os vértices dos triângulos têm de ser percorridos no sentido anti-horário.

A aplicação deste algoritmo é imediata para sistemas integráveis. De notar que para uma representação tridimensional de uma órbita de uma equação diferencial basta que para o sistema exista apenas uma quantidade conservada. A aplicação de uma grelha tubular para neste tipo de situação é imediata. Nos restantes casos, o problema é mais complicado, pois requer que tenhamos em atenção a torção da órbita.

## 6.2 Soluções numéricas de equações diferenciais

Vamos apresentar uma série de pormenores relacionados com a implementação computacional de problemas relacionados com equações diferenciais. Este exemplo servirá para mostrar o processo desde a formulação do problema até se obter uma simulação numérica das respectivas soluções.

### 6.2.1 Fluxo Geodésico

Considere-se uma superfície regular  $S \equiv \Phi(u, v)$ . Dado um ponto  $p \in S$  podemos definir o espaço tangente  $T_p(S)$  a  $S$  em  $p$  como o espaço gerado por  $\text{span}\{\Phi_u, \Phi_v\}$ . Dado uma linha  $\alpha(t) = \Phi(u(t), v(t))$  em  $S$  tal que  $\alpha(0) = p$ , o vector tangente a  $\alpha(0)$  será definido por  $\alpha'(0) = u'(0)\Phi_u + v'(0)\Phi_v$ . Definido o produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ , cujo índice vamos deixar cair sempre que seja claro o sentido da afirmação, podemos concluir sem dificuldades que

$$\begin{aligned} \langle \alpha'(0), \alpha'(0) \rangle &= (u'(0))^2 \langle \Phi_u, \Phi_u \rangle + 2u'(0)v'(0) \langle \Phi_u, \Phi_v \rangle + (v'(0))^2 \langle \Phi_v, \Phi_v \rangle \\ &= (u'(0))^2 E + 2u'(0)v'(0)F + (v'(0))^2 G. \end{aligned}$$

De uma forma mais geral, dados dois vectores  $w_1, w_2 \in T_p(S)$ , o respectivo produto interno definido no espaço tangente pode ser assim definido por

$$I_p(w_1, w_2) = w_1^T \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} w_2.$$

A  $I_p$  dá-se o nome de *primeira forma fundamental*. Apesar de termos usado uma parametrização para definir a primeira forma fundamental, poderíamos concluir exactamente a mesma expressão para uma variedade abstracta de dimensão 2, definindo como habitualmente o espaço tangente como o conjunto de todas as derivações, o que por sua vez implicaria  $T_p(S) = \text{span}\{\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\}$ . Isto mostra-nos que a primeira forma fundamental não depende da parametrização escolhida.

**Exemplo 6.1.** Considere-se uma parametrização  $\Phi(u, v)$  do toro  $\mathbb{T}^2$  dada por

$$\mathbb{T}^2 \equiv \Phi(u, v) = ((a + b \cos(u)) \cos(v), (a + b \cos(u)) \sin(v), b \sin(u)).$$

Podemos concluir sem dificuldade que a matriz da primeira forma fundamental será

dada por

$$M(I_p) = \begin{bmatrix} b^2 & 0 \\ 0 & (a + b \cos(u))^2 \end{bmatrix}.$$

De forma a estabelecermos uma estrutura semelhante ao referencial de Frenet em cada um dos pontos da superfície  $S$  precisamos de introduzir a chamada *aplicação de Gauss*. Dada a superfície esférica de raio um em  $\mathbb{R}^3$  definida por

$$\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 + z^2 = 1\},$$

a aplicação de Gauss  $N: S \rightarrow \mathbb{S}^2$  associa a cada ponto  $p \in S$ , o vector unitário  $N(p)$  que respeita a orientação de  $S$ . O facto de a aplicação de Gauss e respectiva aplicação tangente  $dN_p: T_p(S) \rightarrow T_p(S)$  estarem bem definidas, decorre imediatamente da definição de superfície regular. Pode-se mostrar que  $dN_p$  é uma matriz simétrica em todos os pontos  $p \in S$ , pelo que se pode associar a esta uma forma quadrática definida em  $T_p(S)$  por

$$II_p(w) = -\langle dN_p(w), w \rangle.$$

Pela simetria de  $dN_p$ , sabemos que esta matriz é diagonalizável, com valores próprios  $k_1 \leq k_2$ . A curvatura de Gauss é assim definida pelo produto  $k_1 k_2$ . Os valores próprios  $k_1$  e  $k_2$  são chamados *curvaturas principais* de  $S$ .

Usando esta estrutura, estamos agora em condições de medir a variação de um campo vectorial ao longo (de um caminho) da superfície  $S$ . Dado um campo vectorial  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow T(S)$ , onde  $T(S)$  representa o fibrado tangente de  $S$ , este fica definido pela expressão

$$F(u, v) = a(u, v)\Phi_u + b(u, v)\Phi_v.$$

Considerando um caminho  $\alpha(t) = \Phi(u(t), v(t))$ , para  $t \in (a, b)$ , a variação do campo vectorial  $F$  ao longo do caminho  $\alpha$  é naturalmente dado por

$$\frac{d}{dt}F(\alpha(t)) = \frac{da}{dt} \cdot \Phi_u + a(\Phi_{uu}u' + \Phi_{uv}v') + \frac{db}{dt} \cdot \Phi_v + b(\Phi_{vu}u' + \Phi_{vv}v').$$

Nada obriga a que os vectores  $\Phi_{uu}$ ,  $\Phi_{uv}$  e  $\Phi_{vv}$  sejam elementos de  $T_p(S)$ , para cada  $p \in S$ . De facto, temos apenas a garantia que eles podem ser expressos em cada um dos referenciais  $\{\Phi_u, \Phi_v, N\}$ , onde  $N$  pode em cada ponto ser descrito por  $N(u, v) =$

$\Phi_u \times \Phi_v / \|\Phi_u \times \Phi_v\|$ . Assim, podemos encontrar coeficientes  $\Gamma_{ij}^k$  e  $L_i$  tais que

$$\begin{aligned}\Phi_{uu} &= \Gamma_{11}^1 \Phi_u + \Gamma_{11}^2 \Phi_v + L_1 N, \\ \Phi_{uv} &= \Gamma_{12}^1 \Phi_u + \Gamma_{12}^2 \Phi_v + L_2 N, \\ \Phi_{vv} &= \Gamma_{22}^1 \Phi_u + \Gamma_{22}^2 \Phi_v + L_3 N.\end{aligned}\tag{6.2}$$

Os coeficientes  $\Gamma_{ij}^k$  têm o nome de *símbolos de Christoffel*. Podemos agora definir convenientemente a *derivada covariante*  $DF/dt$  como a projecção de  $dF/dt$  no espaço tangente a cada ponto através da expressão

$$\begin{aligned}\frac{DF}{dt} &= \left( \frac{da}{dt} + a(\Gamma_{11}^1 u' + \Gamma_{12}^1 v') + b(\Gamma_{12}^1 u' + \Gamma_{22}^1 v') \right) \Phi_u \\ &\quad + \left( \frac{db}{dt} + a(\Gamma_{11}^2 u' + \Gamma_{12}^2 v') + b(\Gamma_{12}^2 u' + \Gamma_{22}^2 v') \right) \Phi_v.\end{aligned}\tag{6.3}$$

Dizemos que  $\alpha(t) \subset S$  é *geodésica* se a derivada covariante de  $\alpha'(t)$  fôr nula para todo o  $t \in (a, b)$ . Por (6.3) é imediato verificar que se  $\alpha(u(t), v(t))$  é uma geodésica então é solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} u'' + u'(\Gamma_{11}^1 u' + \Gamma_{12}^1 v') + v'(\Gamma_{12}^1 u' + \Gamma_{22}^1 v') = 0 \\ v'' + u'(\Gamma_{11}^2 u' + \Gamma_{12}^2 v') + v'(\Gamma_{12}^2 u' + \Gamma_{22}^2 v') = 0. \end{cases}\tag{6.4}$$

É necessária um nota breve sobre o cálculo dos símbolos de Christoffel. Da maneira como estes foram definidos em (6.2), podemos sem dificuldades mostrar que

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F = \langle \Phi_{uu}, \Phi_u \rangle = \frac{1}{2} E_u \\ \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 G = \langle \Phi_{uu}, \Phi_v \rangle = F_u - \frac{1}{2} E_v. \end{cases}$$

De forma perfeitamente análoga teremos

$$\begin{cases} \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F = \langle \Phi_{uv}, \Phi_u \rangle = \frac{1}{2} E_v & \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F = \langle \Phi_{vv}, \Phi_u \rangle = F_v - \frac{1}{2} G_u \\ \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 G = \langle \Phi_{uv}, \Phi_v \rangle = \frac{1}{2} G_u, & \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 G = \langle \Phi_{vv}, \Phi_v \rangle = \frac{1}{2} G_v. \end{cases}$$

Estas últimas expressões mostram, para lá de uma forma de calcular os símbolos de Christoffel, que estes apenas dependem dos coeficientes da primeira forma fundamental e das respectivas derivadas. São assim uma propriedade intrínseca de uma superfície, não dependendo da parametrização da linha.

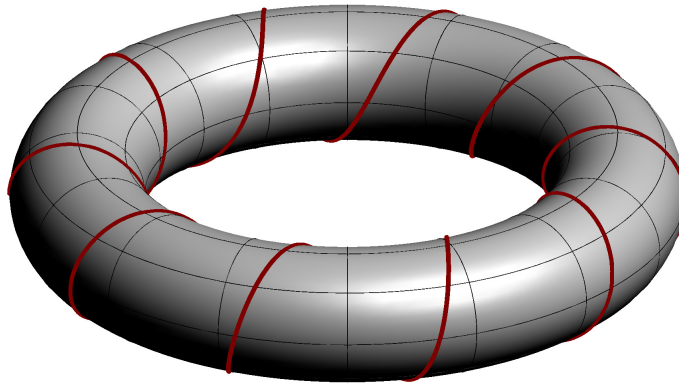


Figura 6.6: Simulação do fluxo geodésico em  $\mathbb{T}^2$  usando a NUMDE.

**Exemplo 6.2.** Usando a primeira forma fundamental para  $\mathbb{T}^2$  já deduzida no exemplo 6.1, podemos concluir sem dificuldades que os símbolos de Christoffel são todos nulos excepto

$$\Gamma_{12}^2 = -\frac{2 \sin(u)}{a + b \cos(u)} \quad \wedge \quad \Gamma_{22}^1 = \frac{(a + b \cos(u)) \sin(u)}{b^2}.$$

O fluxo geodésico é assim o conjunto de todas as soluções em  $\mathbb{T}^2$  do sistema

$$\begin{cases} u'' + \frac{(a+b \cos(u)) \sin(u)}{b^2} (v')^2 = 0 \\ v'' - \frac{2 \sin(u)}{a+b \cos(u)} u' v' = 0. \end{cases}$$

Como é óbvio, não é possível encontrar uma expressão para as soluções deste sistema. Por isso temos de recorrer a um método numérico para aproximar o comportamento destas soluções, neste caso Adams-Bashforth Adams-Moulton (ver [BF04]) para fazermos uma simulação das mesmas. A figura 6.6 faz uma representação do tipo mais comum de geodésicas que podemos encontrar em  $\mathbb{T}^2$ .

### 6.3 Sincronização de Pêndulos acoplados por um meio

Os casos de acoplamento tratados até aqui, e de modo a evidenciarem com todo o detalhe a estrutura fina daquilo que apelidámos por sincronização generalizada, são de baixa dimensão. Contudo é possível vislumbrar uma série de outros casos em que possamos aplicar a mesma teoria a exemplos de dimensão superior. Este capítulo pretende somente apresentar um caso em que se perceba que a estrutura de acoplamento apresentada antes pode ser generalizada para dimensões superiores. Para isso apresentamos um exemplo que deriva directamente do primeiro caso de sincronização

apresentada por Huygens. Ao invés deste caso, em que os osciladores são pesados relógios de pêndulo, apresentamos uma simplificação por pêndulos mais simples. Contudo, o caso apresentado, com notórias simplificações analíticas e mecânicas, não difere do ponto de vista qualitativo do original. Conforme é apresentado na literatura, a diferença mais notória prende-se com o facto de os relógios terem um mecanismo para contrariar o atrito. Este dispositivo será substituído, no nosso caso, por uma expressão analítica que permita reproduzir este facto sem mais detalhes.

### 6.3.1 Dedução das equações do movimento

Como em [Dil09a], vamos supôr que os pêndulos estão suspensos num suporte e que a única interacção entre eles é gerada pela oscilação do suporte. Vamos considerar 2 pêndulos idênticos com massas  $m_1$  e  $m_2$  e comprimentos  $l_1$  e  $l_2$  respectivamente, acoplados por uma mola com constante  $k$ . Vamos igualmente supôr que as perturbações propagadas ao longo da mola são amortecidas, sendo a constante de amortecimento dada por  $\rho$ , e que o amortecimento é proporcional à velocidade dos pontos de fixação dos pêndulos. Vamos considerar que os pontos de fixação dos pêndulos têm massas iguais  $M$  e as respectivas posições dadas pelas variáveis  $x_1$  e  $x_2$ . Ao mesmo tempo vamos considerar que a posição dos pêndulos é dada pelos pares  $(h_1, v_1)$  e  $(h_2, v_2)$ , onde  $h_i$  e  $v_i$  medem os respectivos deslocamentos horizontais e verticais. Vamos também representar os deslocamentos angulares dos dois pêndulos pelas variáveis  $\theta_1$  e  $\theta_2$  respectivamente. A relação entre estas variáveis é dada por

$$\begin{cases} h_i = x_i + l_i \sin \theta_i \\ v_i = l_i \cos \theta_i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{h}_i = \dot{x}_i + l_i \dot{\theta}_i \cos \theta_i \\ \dot{v}_i = -l_i \dot{\theta}_i \sin \theta_i. \end{cases}$$

Assim sendo, a energia cinética do sistema, representada por  $K$ , é dada por

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 m_i (\dot{h}_i^2 + \dot{v}_i^2) + \frac{1}{2} M (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2).$$

o que pode, usando a relação entre as respectivas variáveis, ser reescrita na forma

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 m_i \left[ (\dot{x}_i + l_i \dot{\theta}_i \cos \theta_i)^2 + (l_i \dot{\theta}_i \sin \theta_i)^2 \right] + \frac{1}{2} M (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2). \quad (6.5)$$

Por outro lado, a energia potencial do sistema é o resultado da soma das energias potenciais dos pêndulos com a energia potencial da mola. A energia potencial  $U$ ,

onde  $g$  representa a aceleração da gravidade, será assim

$$U = -m_1gl_1 \cos \theta_1 - m_2gl_2 \cos \theta_2 + \frac{1}{2}k(x_2 - x_1)^2. \quad (6.6)$$

Sabendo que o Lagrangeano  $L$  do sistema é dado pela diferença entre a energia cinética  $K$  e a energia potencial  $U$ , teremos

$$L = \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^2 m_i \left[ \dot{x}^2 + 2l_i \dot{x} \dot{\theta}_i \cos \theta_i + l_i^2 \dot{\theta}_i^2 + 2gl_i \cos \theta_i \right] + M(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - k(x_2 - x_1)^2 \right) \quad (6.7)$$

As equações de Euler-Lagrange (ver [CH89], pag. 183 e seguintes) para as coordenadas  $\theta_i$  e  $x_i$  são formalmente dadas por

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \theta_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0, \end{cases} \quad (6.8)$$

o que conduz ao sistema de equações, que regula a dinâmica do sistema formado pelos dois pêndulos e pelos respectivos suportes,

$$\begin{cases} m_i l_i \ddot{\theta}_i + m_i g \sin \theta_i = -m_i \ddot{x}_i \cos \theta_i \\ (M + m_i) \ddot{x}_i + m_i l_i \ddot{\theta}_i \cos \theta_i = m_i l_i \dot{\theta}_i^2 \sin \theta_i + (-1)^{i+1} k(x_2 - x_1). \end{cases} \quad (6.9)$$

Depois de introduzirmos o atrito, visto que este está ausente do lagrangeano do sistema, a partir das equações em (6.9) iremos obter por fim

$$\begin{cases} m_i l_i \ddot{\theta}_i + f_i(\theta_i, \dot{\theta}_i) + m_i g \sin \theta_i = -m_i \ddot{x}_i \cos \theta_i \\ (M + m_i) \ddot{x}_i + 2\rho \dot{x}_i + m_i l_i \ddot{\theta}_i \cos \theta_i = m_i l_i \dot{\theta}_i^2 \sin \theta_i + (-1)^{i+1} k(x_2 - x_1) \end{cases} \quad (6.10)$$

para  $i = 1, 2$ , onde  $f_i(\theta_i, \dot{\theta}_i)$  representam o mecanismos necessárias para contrariar o atrito sentido pelos pêndulos e  $\rho$  é a constante de amortecimento já antes referida. Em [Pan02] são apresentadas equações equivalentes a estas, onde explicitamente é fixado que, para um determinado  $\theta_0 > 0$  e para  $\varepsilon > 0$ , o mecanismo usado para contrariar o atrito é o termo de Van der Pol

$$f(\theta, \dot{\theta}) = \varepsilon \left[ \left( \frac{\theta}{\theta_0} \right)^2 - 1 \right] \dot{\theta}.$$

Por sua vez, em [FA07] as equações deduzidas são perfeitamente análogas às de [Dil09a], com a nuance de os pêndulos serem excitados por uma força exterior  $u(t)$ , actuando somente na componente angular de um dos osciladores, e dada por

$$u(t) = \gamma \operatorname{sign} \dot{\theta}_1.$$

Retomando as equações (6.10), procedendo à habitual hipótese de oscilações de pequena amplitude para o caso de dois pêndulos, podemos simplificar as expressões obtendo assim

$$\begin{cases} m_1 l_1 \ddot{\theta}_1 + f_1(\theta_1, \dot{\theta}_1) + m_1 g \theta_1 = -m_1 \ddot{x}_1 \\ m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 + f_2(\theta_2, \dot{\theta}_2) + m_2 g \theta_2 = -m_2 \ddot{x}_2 \\ (M + m_1) \ddot{x}_1 + 2\rho \dot{x}_1 + m_1 l_1 \ddot{\theta}_1 = m_1 l_1 \dot{\theta}_1^2 \theta_1 + k(x_2 - x_1) \\ (M + m_2) \ddot{x}_2 + 2\rho \dot{x}_2 + m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 = m_2 l_2 \dot{\theta}_2^2 \theta_2 - k(x_2 - x_1). \end{cases} \quad (6.11)$$

Podemos simplificar algebricamente as equações anteriores, obtendo o sistema equivalente

$$\begin{cases} m_1 l_1 \ddot{\theta}_1 + f_1(\theta_1, \dot{\theta}_1) + m_1 g \theta_1 = -m_1 \ddot{x}_1 \\ m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 + f_2(\theta_2, \dot{\theta}_2) + m_2 g \theta_2 = -m_2 \ddot{x}_2 \\ M \ddot{x}_1 + 2\rho \dot{x}_1 - f_1(\theta_1, \dot{\theta}_1) - m_1 \theta_1 (l_1 \dot{\theta}_1^2 + g) = k(x_2 - x_1) \\ M \ddot{x}_2 + 2\rho \dot{x}_2 - f_2(\theta_2, \dot{\theta}_2) - m_2 \theta_2 (l_2 \dot{\theta}_2^2 + g) = -k(x_2 - x_1). \end{cases} \quad (6.12)$$

As equações anteriores podem ser vistas dentro do esquema apresentado anteriormente. Assim, cada um dos pêndulos, regulado pelas variáveis  $\theta_1$  e  $\theta_2$ , tem o seu comportamento excitado por uma força exterior  $F_1 = -m_1 \ddot{x}_1$  e  $F_2 = -m_2 \ddot{x}_2$ , respectivamente. Cada uma destas forças exteriores podem ser entendidas como o comportamento de um meio que tem um acoplamento muito semelhante, com as devidas peculiaridades, ao apresentado em (4.5).

Existem óbvias diferenças entre os dois casos. Estas prendem-se com a ordem das equações. Do ponto de vista da teoria da sincronização generalizada, isto fará de imediato que a dimensão do problema aumente proporcionalmente à ordem de cada uma das equações. Assim, sendo cada uma das variáveis regulada por uma equação de segunda ordem, no espaço das soluções isto irá gerar um subespaço de dimensão dois. Tudo junto, e para o caso em que temos apenas dois pêndulos acoplados da forma aqui tratada, o espaço fase de todo o sistema será um espaço de dimensão 8.

Isto, por um lado, acarreta uma dificuldade substancial pois o caso em que temos sincronização idêntica (como teremos oportunidade de ver a seguir), implica à partida a existência de uma variedade invariante de dimensão 2. Por outro lado, o incremento da dimensão, e podemos generalizar facilmente as equações (6.12) para um número verdadeiramente arbitrário de pêndulos, poderá criar casos de sincronização generalizada muito mais interessantes. Isso será sem dúvida motivo de desenvolvimento futuro deste trabalho.

### 6.3.2 Existência de sincronização idêntica

Nesta secção vamos apresentar uma série de resultados de natureza qualitativa sobre os sistemas de equações anteriores, seguindo o exposto em [Dil09b] e [Dil09a]. Começamos por proceder a uma série de simplificações no sistema (6.12) de forma a nos podermos centrar nos parâmetros essenciais acerca da estabilidade do sistema. Para isso, começamos por considerar constantes positivas  $\sigma$  e  $\tilde{\theta}$  e a função  $f$  definida por

$$f(\theta; \sigma, \tilde{\theta}) = \begin{cases} -2\sigma & \text{se } |\theta| < \tilde{\theta} \\ 2\sigma & \text{se } |\theta| \geq \tilde{\theta}. \end{cases}$$

Mostra-se em [Dil09b] que, com a função  $f$  definida desta forma, a equação diferencial

$$ml\ddot{\theta} + f(\theta; \sigma, \tilde{\theta})\dot{\theta} + mg\theta = 0$$

tem um ciclo limite estável. Além disso esse ciclo limite é único. A demonstração deste ponto passa essencialmente em reduzir a equação anterior ao sistema de Liénard (ver [Har64], pag 179-181)

$$\begin{cases} \dot{\theta} = x - F(\theta; \sigma, \tilde{\theta}) \\ \dot{x} = -\omega^2\theta, \end{cases}$$

onde  $\omega^2 = g/l$  e  $F(\theta; \sigma, \tilde{\theta})$  a função definida por

$$F(\theta; \sigma, \tilde{\theta}) = \frac{1}{ml} \int_0^\theta f(s; \sigma, \tilde{\theta}) ds.$$

Este modelo replica o sistema mecânico usado em alguns relógios para contrariarem o atrito. Conforme foi referido anteriormente, existem outros modelos mais complexos para simular o comportamento do mecanismo de um relógio mas, do ponto de vista

qualitativo, o modelo aqui referido e apresentado em [Dil09b] tem todas as características de outros modelos mais complexos. Do ponto de vista qualitativo esta observação é importante pois estamos a acoplar dois pêndulos que assintoticamente revelam um comportamento periódico, com período estritamente positivo.

Voltando ao sistema (6.12) vamos procurar perceber do ponto de vista qualitativo o comportamento das soluções do mesmo. Considerando a respectiva parte linear e  $m = m_1, m_2$  e  $f = f_1 = f_2$ , após simplificações algébricas, podemos escrevê-lo de maneira equivalente

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 + \left(\frac{1}{ml} + \frac{1}{Ml}\right) f(\theta_1; \sigma, \tilde{\theta}_1) \dot{\theta}_1 + \omega^2 \left(1 + \frac{m}{M}\right) \theta_1 - 2\frac{\rho}{Ml} \dot{x}_1 = -\frac{k}{Ml}(x_2 - x_1) \\ \ddot{\theta}_2 + \left(\frac{1}{ml} + \frac{1}{Ml}\right) f(\theta_2; \sigma, \tilde{\theta}_2) \dot{\theta}_2 + \omega^2 \left(1 + \frac{m}{M}\right) \theta_2 - 2\frac{\rho}{Ml} \dot{x}_2 = \frac{k}{Ml}(x_2 - x_1) \\ \ddot{x}_1 - \frac{1}{M} f(\theta_1; \sigma, \tilde{\theta}_1) \dot{\theta}_1 - \frac{m}{M} g \theta_1 + 2\frac{\rho}{M} \dot{x}_1 = \frac{k}{M}(x_2 - x_1) \\ \ddot{x}_2 - \frac{1}{M} f(\theta_2; \sigma, \tilde{\theta}_2) \dot{\theta}_2 - \frac{m}{M} g \theta_2 + 2\frac{\rho}{M} \dot{x}_2 = -\frac{k}{M}(x_2 - x_1). \end{cases} \quad (6.13)$$

Fazendo a habitual redução de ordem  $\dot{\theta}_i = \xi_i$  e  $\dot{x}_i = v_i$ , supondo que  $|\theta_1| < \tilde{\theta}$  e  $|\theta_2| < \tilde{\theta}$ , podemos reescrever o sistema (6.13) na forma matricial

$$\begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \xi_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \xi_2 \\ \dot{x}_1 \\ v_1 \\ \dot{x}_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A & B & 0 & 0 & \frac{k}{Ml} & \frac{2\rho}{Ml} & -\frac{k}{Ml} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & B & -\frac{k}{Ml} & 0 & \frac{k}{Ml} & \frac{2\rho}{Ml} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{mg}{M} & -\frac{2\sigma}{M} & 0 & 0 & -\frac{k}{M} & -\frac{2\rho}{M} & \frac{k}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{mg}{M} & -\frac{2\rho}{M} & \frac{k}{M} & 0 & -\frac{k}{M} & -\frac{2\rho}{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \xi_1 \\ \theta_2 \\ \xi_2 \\ x_1 \\ v_1 \\ x_2 \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad (6.14)$$

onde  $A = -\omega^2(1 + m/M)$  e  $B = 2\sigma(1/(Ml) + 1/(ml))$ . Em [Dil09b] (Proposição 10.2) mostra-se que, para  $\rho > 0$  suficientemente pequeno, o subespaço

$$\mathcal{I} = \{(\theta_1, \xi_1, \theta_2, \xi_2, x_1, v_1, x_2, v_2) : \theta_1 = \theta_2 = \xi_1 = \xi_2 = v_1 = v_2 = 0 \wedge x_1 = x_2\}$$

é formado por pontos fixos instáveis para o sistema (6.13). Além disso, não existirão outros pontos fixos para além destes. A demonstração deste facto é elementar. Este resultado mostra de imediato que as soluções em que a sincronização se dá em fase são instáveis. Naturalmente, se pretendemos procurar identificar algum tipo de sincronização é natural que nos voltemos para a sincronização em oposição de fase. Este pode ser visto como um exemplo de sincronização generalizada, visto que a variedade

de sincronização irá conter o conjunto de  $\mathbb{R}^4$

$$\mathcal{A} = \{(x_1, x_2, \theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^4: \theta_1 = -\theta_2\}.$$

A partir das equações (6.13), usando as igualdades  $\theta = \theta_1 + \theta_2$  e  $x = x_1 + x_2$ , podemos escrever o sistema mais condensado

$$\begin{cases} \ddot{\theta} - 2\sigma \left( \frac{1}{ml} + \frac{1}{Ml} \right) \dot{\theta} + \omega^2 \left( \frac{m}{M} + 1 \right) \theta - \frac{2\rho}{Ml} \dot{x} = 0 \\ \ddot{x} + \frac{2\sigma}{M} \dot{\theta} + -\frac{mg}{M} \theta + \frac{2\rho}{M} \dot{x} = 0, \end{cases} \quad (6.15)$$

quando são verificadas as desigualdades  $|\theta_1| < \tilde{\theta}$  e  $|\theta_2| < \tilde{\theta}$ . Dito de outra forma, para oscilações dos pêndulos em que tenhamos a amplitude controlada pelo parâmetro  $\tilde{\theta}$ , as soluções dos sistemas (6.12) e (6.15) estão obviamente relacionadas. Esta simplificação das expressões permitir-nos-à, de uma forma mais simples, identificar a ocorrência de sincronização em anti-fase. De facto, se mostrarmos que  $\theta = 0$  é uma solução estável do sistema (6.15), isto significa em particular que o sistema (6.12) admite como variedade (na verdade subespaço) invariante estável uma subvariedade de

$$S = \{(\theta_1, \theta_2, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^4: \theta_1 = -\theta_2\},$$

significando isto que as soluções do sistema (6.12) sincronizam em anti-fase. Para provarmos este ponto temos de mostrar que a solução nula do sistema (6.15) é assintoticamente estável.

Começamos por escrever o sistema (6.15) na forma matricial, fazendo como habitualmente  $\dot{\theta} = \xi$  e  $\dot{x} = v$ , obtendo assim

$$\begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\xi} \\ \dot{x} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ A & B & 0 & \frac{2\rho}{Ml} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{mg}{M} & -\frac{2\sigma}{M} & 0 & -\frac{2\rho}{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ \xi \\ x \\ v \end{pmatrix}, \quad (6.16)$$

onde  $A$  e  $B$  são conformes ao que foi definido anteriormente para o sistema (6.14). O polinómio característico da matriz do sistema (6.16) será dado por

$$\begin{aligned} p(\chi) &= \chi(mMl\chi^3 + (2ml\rho - 2\sigma(m + M))\chi^2 \\ &\quad + (m^2l\omega^2 + mMl\omega^2 - 4\sigma\rho)\chi + 2mg\rho) \\ &= \chi p_1(\chi). \end{aligned} \quad (6.17)$$

O polinómio  $p(\chi)$  tem naturalmente um valor próprio nulo, cuja direcção própria corresponde à direcção própria de todos os pontos fixos do sistema (6.14). Para provarmos que existe sincronização idêntica em anti-fase para o sistema (6.15) temos de mostrar que as raízes do polinómio  $p_1(\chi)$  têm todas parte real negativa. Para provarmos este resultado, vamos recorrer ao critério de Routh-Hurwitz (ver [Sér00], pág 281), onde esta teoria é exposta de uma forma diferente da original mas mais adequada para o caso em que estamos a trabalhar, conforme exposto originalmente em [Str77]. Este resultado estabelece que dado o polinómio

$$A(\chi) = \chi^3 + a\chi^2 + b\chi + c$$

é estável, i.e. todas as suas raízes têm parte real negativa se e apenas se os coeficientes de  $A(\chi)$  e do polinómio

$$B(\chi) = \chi^3 + 2a\chi^2 + (a^2 + b)\chi + (ab - c)$$

são todos positivos. Aplicando este resultado ao polinómio  $p_1(\chi)$ , é fácil de mostrar que para valores apropriados de  $\sigma > 0$  e de  $\rho > 0$ , todos os seus coeficientes serão positivos. Dos coeficientes do polinómio  $B(\chi)$ , o único que não segue directamente é o termo independente, i.e. temos apenas de nos debruçar sobre  $ab - c > 0$ . Esta inequação é equivalente a estudarmos a equação quadrática em  $\rho$ , com a concavidade voltada para baixo, dada por

$$\left(2\rho - 2\sigma \left(\frac{1}{Ml} + \frac{1}{ml}\right)\right) \left(\frac{m\omega^2}{Ml} + \omega^2 - \frac{4\sigma\rho}{mMl}\right) - \frac{2g\rho}{Ml} > 0. \quad (6.18)$$

Pode-se então demonstrar, sem dificuldade, a existência de valores  $\rho_0$ ,  $\rho_1$  e  $\rho_2$ , onde  $\rho_1 < \rho_2$  são raízes do polinómio do membro esquerdo da inequação (6.18), tais que, se

$$\begin{aligned} \rho_1 < \rho < \rho_2 \\ \rho > \rho_0 &= \frac{\sigma}{l} \left(\frac{1}{M} + \frac{1}{m}\right) \end{aligned}$$

então  $p_1(\chi)$  tem todas as raízes com parte real negativa. Assim, fixado o valor de  $\sigma > 0$ , podemos encontrar valores para  $\rho > 0$  tais que as soluções que não pertencem ao espaço próprio associado ao valor próprio  $\chi = 0$  convergem para a solução  $\theta = 0$  e  $x = 0$ . Podemos assim garantir que esta solução é assintoticamente estável o que nos mostra a existência de sincronização em oposição de fase para o sistema (6.13).

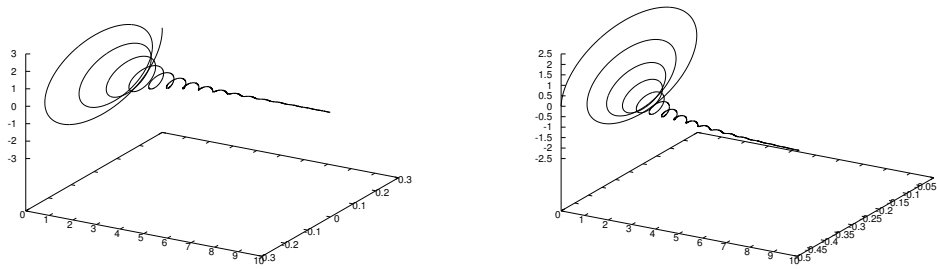


Figura 6.7: Simulação numérica do acoplamento de dois pêndulos usando a equação (6.15) através da NUMDE. Na figura da esquerda estão representadas as variáveis  $(t, \theta, \dot{\theta})$ , enquanto na figura da direita representa o comportamento das variáveis  $(t, x, \dot{x})$ . Ilustra-se que o sistema produz um ponto de equilíbrio assintoticamente estável em que  $x = \theta = 0$ . Na simulação foram considerados os valores dos parâmetros  $m = 1$ ,  $M = 0.1$ ,  $l = 1$ ,  $\sigma = 0.1$  e  $\rho = 0.2$ .

Poderíamos pensar, neste momento, em tentar recuperar todos os resultados obtidos através das deduções anteriores usando a teoria de Russel Smith. Contudo, mesmo para o caso do sistema (6.15) em que o número de dimensões foi reduzido substancialmente, encontrar uma solução da equação de Lyapunov é uma tarefa simbolicamente impossível. Assim sendo, toda a caracterização das soluções deste sistema passará inevitavelmente por métodos numéricos, para que possamos encontrar todos os valores de  $\lambda$  que nos permitam separar, de forma clara, as várias variedades invariantes para que, deste modo, possamos perceber toda a estrutura de sincronização generalizada que aqui possa ocorrer. Do mesmo modo, e repetindo o que foi feito no capítulo 4, perceber de que modo as perturbações não lineares do sistema (6.12) possam ainda assim preservar toda a estrutura inerente do caso linear, são pontos que só um desenvolvimento posterior desta teoria poderá abarcar.

*Não pretendo ir mais longe. De momento só quero falar de um mundo onde os pensamentos são privados de futuro, tal como as vidas. Tudo o que faz o homem trabalhar e agitar-se utiliza a esperança. O único pensamento que não é enganador é, portanto, um pensamento estéril. No mundo absurdo, o valor de uma noção ou de uma vida mede-se pela sua infecundidade.*

— Albert Camus, O mito de Sísifo, (1942)

## Conclusão

Ao longo desta dissertação, pela análise exaustiva dos problemas aqui tratados, surgiram naturalmente questões que, quer por limites temporais, quer por limites físicos, não poderiam ser aqui imediatamente tratadas.

A primeira questão prende-se com o uso da teoria geral, onde são estabelecidas as condições em que podemos garantir a existência de sincronização generalizada, para um número elevado de osciladores. Esta teoria introduzida no capítulo 3 e depois aplicada no capítulo 4, de forma a obtermos o resultado o mais geral possível sobre a sincronização dos osciladores, baseia-se na possibilidade de resolver a equação de Lyapunov para valores abstractos do parâmetro  $\lambda$ . Contudo, mesmo para um número reduzido de osciladores, a equação de Lyapunov torna-se intratável por métodos analíticos. Este problema pode ser na prática resolvido sem dificuldades por métodos numéricos, perdendo-se no entanto a perspectiva geral do comportamento do sistema para toda a gama de valores admissíveis do parâmetro.

Uma segunda questão decorre dos resultados alcançados no capítulo 5. Neste capítulo, os domínios considerados e que vinham do capítulo precedente possuíam simetria. Esta propriedade veio-se a revelar determinante para podermos concluir a unicidade do rectângulo isotético maximal. No caso dos domínios hiper-regulares não possuírem esta propriedade, o problema parece ser mais complicado. No entanto, os métodos empregues poderão ser facilmente aplicados ao caso mais geral, significando que a unicidade da solução, à primeira vista, dependerá da geometria do conjunto em análise. Ainda relacionado com os resultados acerca dos rectângulos isotéticos maximais, fica em aberto a questão de classificar mais profundamente o conjunto  $\mathcal{H}_2$ . Conjecturamos que este é um conjunto conexo nos casos estudados. No entanto, ao longo do tempo, uma demonstração cabal deste resultado sempre se foi escapando. Resta saber se por invisibilidade ou se por uma capacidade furtiva assaz eficiente.

*I think and think for months and years. Ninety-nine times, the conclusion is false. The hundredth time I am right.*

— Albert Einstein, *The World as I See It*, (1934)

# Bibliografia

- [AHS95] H. Alt, D. Hsu e J. Snoeyink. “Computing the largest inscribed isothetic rectangle”. Em: *Proc. 7th Canad. Conf. Comput. Geom.* 1995, pp. 67–72.
- [Bar12] L. Barreira. *Ergodic Theory, Hyperbolic Dynamics and Dimension Theory*. Universitext. Springer, 2012.
- [Bet10] D. Betounes. *Differential Equations: Theory and Applications*. Second Edition. Springer, 2010.
- [Bha98] R. Bhatia. *Positive Definite Matrices*. Princeton University Press, 1998.
- [Bow07] J. C. Bowman. “The 3D asymptote generalization of MetaPost Bézier interpolation”. Em: *PAMM* 7.1 (2007), pp. 2010021–2010022.
- [BV04] S. Boyd e L. Vandenberghe. *Convex Optimization*. Cambridge University Press, 2004.
- [BF04] R. Burden e J. D. Faires. *Numerical Analysis*. 8<sup>a</sup> ed. Cengage Learning, 2004.
- [Car76] M. d. Carmo. *Differential Geometry Of Curves And Surfaces*. PRENTICE HALL, 1976.
- [Chi06] C. Chicone. *Ordinary Differential Equations with Applications*. Texts in Applied Mathematics. Springer, 2006.
- [CH89] R. Courant e D. Hilbert. *Methods of Mathematical Physics*. Vol. 1. Wiley Classics. John Wiley & Sons, 1989.
- [Dil09a] R. Dilão. “Anti-phase and in-phase synchronization of nonlinear oscillators: The Huygen’s clocks system”. Em: *Chaos* 19.2 (2009). 023118, p. 5.

- [Dil09b] R. Dilão. “On the Problem of Synchronization of Identical Dynamical Systems: The Huygens’s Clocks”. English. Em: *Variational Analysis and Aerospace Engineering*. Vol. 33. Springer Optimization and Its Applications. Springer New York, 2009, pp. 163–181.
- [FA07] A. L. Fradkov e B. Andrievsky. “Synchronization and phase relations in the motion of two-pendulum system”. Em: *International Journal of Non-Linear Mechanics* 42.6 (2007), pp. 895–901.
- [Fra04] T. Frankel. *The Geometry of Physics: An Introduction*. Second Edition. Cambridge University Press, 2004.
- [GW79] J. Guckenheimer e R. Williams. “Structural stability of Lorenz attractors”. Em: *Publications Mathématiques de l’Institut des Hautes Études Scientifiques* 50.1 (1979), pp. 59–72.
- [Har64] P. Hartman. *Ordinary Differential Equations*. John Wiley & Sons, Inc., 1964.
- [Har77] R. Hartshorne. *Algebraic Geometry*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1977.
- [Hat02] A. Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2002. ISBN: 9780521795401.
- [HSD04] M. W. Hirsh, S. Smale e R. Devaney. *Differential Equations, Dynamical Systems & an Introduction to Chaos*. Elsevier Academic Press, 2004.
- [Hob86] J. D. Hobby. “Smooth, easy to compute interpolating splines”. Em: *Discrete Comput. Geometry* 1 (1986), pp. 123–140.
- [HJ90] R. Horn e C. Johnson. *Topics in Matrix Analysis*. Cambridge University Press, 1990.
- [KD40] M. Krein e D. Milman. “On extreme points of regular convex sets”. Em: *Studia Mathematica* 9 (1940), pp. 133–138.
- [Lew02] D. Lewis-Williams. *The Mind in the Cave*. Thames e Hudson, 2002.
- [Lor63] E. Lorenz. “Deterministic nonperiodic flow”. Em: *Journal of the Atmospheric Sciences* 20 (1963), pp. 130–141.
- [Mac97] A. Machado. *Geometria Diferencial, Uma Introdução Fundamental*. Departamento de Matemática, FCUL, 1997.
- [MM10] A. Margheri e R. Martins. “Generalized synchronization in linearly coupled time periodic systems”. Em: *J. Differential Equations* 249 (2010), pp. 3215–3232.

- [Pan02] J. Pantaleone. "Synchronization of metronomes". Em: *American Journal of Physics* 2002 - Volume 70, Issue 10, pp. 992-1000 (out. de 2002), pp. 902-1000.
- [RT71] D. Ruelle e F. Takens. "On the nature of turbulence". Em: *Commun. Math. Phys.* 20 (1971), pp. 167-192.
- [Sas99] S. Sastry. *Nonlinear Systems: Analysis, Stability and Control*. Interdisciplinary Applied Mathematics. Springer, 1999.
- [SFW98] O. Schwarzkopf, U. Fuchs e E. Welzl. "Approximation of convex figures by pairs of rectangles". Em: 77-87; also in *STACS 1990, LNCS 415*. Springer-Verlag, 1998, pp. 240-249.
- [Sér00] R. Séroul. *Programming for Mathematicians*. Universitext. Springer, 2000.
- [Smi84] R. A. Smith. "Poincaré Index Theorem Concerning Periodic Orbits of Differential Equations". Em: *Proc. London Math. Soc.* s3-48(2) (1984), pp. 341-362.
- [Smi86] R. A. Smith. "Massera's Convergence Theorem for Periodic Nonlinear Differential Equations". Em: *J. Math. Anal. Appl.* 120 (1986), pp. 679-708.
- [Spi99] M. Spivack. *A comprehensive introduction to Differential Geometry*. Vol. 2. Publish or Perish, Inc, 1999.
- [Strar] G. Strang. *Linear Algebra and Differential Equations*. Wellesley-Cambridge Press, to appear.
- [Str77] S. Strelitz. "On the Routh-Hurwitz Problem". Em: *The American Mathematical Monthly* 84.7 (ago. de 1977), pp. 542-544.
- [Str03] S. Strogatz. *Sync: The Emerging Science of Spontaneous Order*. Hyperion, 2003.
- [Wal81] P. Walters. *An Introduction to Ergodic Theory*. Graduate Texts in Mathematics 9. Springer, 1981.
- [Waz47] T. Wazewski. "Sur un principe topologique de l'examen de l'allure asymptotique des integrales des Equations differentielles ordinaires". Em: *Ann. Soc. Polon Math.* 20 (1947), pp. 279-313.