



Diogo da Costa Ricardo

Licenciado em Ciências da Engenharia Mecânica

Atualização de modelos de elementos finitos utilizando lógica *fuzzy*

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em
Engenharia Mecânica

Orientador: Tiago Alexandre Narciso da Silva, Prof. Auxiliar Convidado, Faculdade de Ciências e Tecnologia – Universidade Nova de Lisboa

Júri:

Presidente: Doutor António Paulo Vale Urgueira, Professor Associado da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa

Vogais: Doutora Ana Luísa da Graça Batista Custódio, Professora Auxiliar da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa

Doutor Tiago Alexandre Narciso da Silva, Professor Auxiliar Convidado da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa



FACULDADE DE
CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Março 2018

Atualização de Modelos de Elementos Finitos Utilizando Lógica *Fuzzy*

Copyright © Diogo da Costa Ricardo, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa.

A Faculdade de Ciências e Tecnologia e a Universidade Nova de Lisboa têm o direito, perpétuo e sem limites geográficos, de arquivar e publicar esta dissertação através de exemplares impressos reproduzidos em papel ou de forma digital, ou por qualquer outro meio conhecido ou que venha a ser inventado, e de a divulgar através de repositórios científicos e de admitir a sua cópia e distribuição com objetivos educacionais ou de investigação, não comerciais, desde que seja dado crédito ao autor e editor.

É a marca de uma mente instruída ser capaz de descansar satisfeito com um grau de precisão do qual a natureza do assunto o permite, e não procurar a exatidão onde apenas uma aproximação da verdade é possível.

Aristóteles, 384-322 A.C.

Antigo Filósofo Grego

Agradecimentos

Quero agradecer primeiramente ao meu orientador, Professor Tiago Silva, pela ajuda que me prestou no desenvolvimento deste trabalho. Aos meus pais e família, por me terem dado força em todos os momentos desta etapa da minha vida. E a todos os meus amigos e colegas, que estiveram comigo nos bons e maus momentos, para a diversão e para dar o apoio que tanto precisamos, especialmente quando estamos longe de casa.

Estarão para sempre dentro do meu coração!

Resumo

O estudo do comportamento dinâmico de sistemas mecânicos e estruturas é um tema recorrente em problemas de engenharia. Devido à complexidade de alguns destes sistemas, a utilização de métodos numéricos, tais como a análise de elementos finitos, é necessária para a resolução deste tipo de problemas.

A atualização de modelos faz parte do processo de validação de modelos numéricos, sendo o seu principal objetivo assegurar que os modelos resultantes representem melhor a realidade.

Técnicas determinísticas de atualização de modelos não incluem incertezas associadas à variabilidade que ocorre em testes experimentais. Esta variabilidade aparece devido a simplificações e suposições feitas durante o desenvolvimento do modelo teórico, mas também pode surgir devido a processos de manufatura e à incerteza associada às propriedades dos materiais. A incerteza é classificada como aleatória e epistémica. Incerteza aleatória inclui todas as fontes irreduzíveis. Enquanto que a incerteza epistémica inclui todas as fontes relacionadas com a falta de conhecimento e deve ser incluída no modelo. As técnicas de atualização estocásticas incluem estas incertezas, mas são mais exigentes computacionalmente. O uso de métodos não probabilísticos, como a atualização de modelos através de aritmética de intervalos ou lógica *fuzzy*, permite reduzir o esforço computacional tipicamente associado aos métodos de atualização estocásticos.

O objetivo principal do presente trabalho é o de desenvolver uma metodologia de atualização baseada numa função de hiper pertença *fuzzy* que inclui todo o conjunto de respostas experimentais, em conjunto com uma técnica de perturbação de primeira ordem para atualizar os valores médios dos parâmetros incertos do modelo. É utilizada uma nova abordagem para estimar o raio dos intervalos dos parâmetros do modelo, ao calcular a matriz de covariância experimental da perturbação em torno da média e aplicando uma transformação utilizando a inversa da matriz de sensibilidade, obtendo assim a matriz de covariância dos parâmetros do modelo. Esta matriz permite-nos calcular a variância dos parâmetros de atualização, dando-nos uma estimativa do raio do intervalo atualizado com base no valor médio dos parâmetros de atualização. O método desenvolvido é analisado em termos de precisão de resultados dos intervalos de parâmetros estimados.

Palavras Chave: Atualização *fuzzy* de modelos; Atualização não probabilística; Aritmética de intervalos; Números *fuzzy*; Covariância; Hiper pertença.

Abstract

The study of the dynamic behavior of mechanical systems and structures is a recurring theme in engineering problems. Due to the complexity of some of these systems, numerical methods, as finite elements analysis, are required to solve this kind of problems.

Model updating is a process related to the validation of numerical models, which primary goal is to ensure a better numerical representation of reality.

Deterministic model updating techniques do not include the uncertainty associated to the variability that occurs on experimental tests. This variability results from simplifications and assumptions made during the development of the theoretical model but can also be a consequence of the manufacturing process or of uncertain material properties. Typically, the uncertainty is classified as epistemic or random. Random uncertainty includes all irreducible uncertainty sources, while epistemic uncertainty includes all the uncertainty sources related to the lack of knowledge and should be included in the model. Stochastic model updating technics include those uncertainties but are demanding at a computational level. The use of non-probabilistic methods, like interval or fuzzy model updating, allows to reduce the computational effort.

The main objective of the present work is to develop an updating method based on a fuzzy hyper membership function that includes all the experimental responses, and a first order perturbation technique to update the mean values of the uncertain model parameters. An innovative approach is used to estimate the interval radii of the model parameters, by calculating the experimental covariance matrix of the perturbation around the mean and applying a transformation using the inverse of the sensitivity matrix, it is possible to obtain the covariance matrix of the model parameters. This matrix allows us to compute the variance of the updating parameters, giving us the estimated radii of the interval of the model parameters based on the updated mean values. The developed method is evaluated in terms of result precision of the estimated parameter intervals.

Keywords: Fuzzy model updating; Non-probabilistic updating; Interval arithmetic; Fuzzy numbers; Covariance; Hyper membership.

Índice

| | |
|---|--------------|
| AGRADECIMENTOS | V |
| RESUMO | VII |
| ABSTRACT | IX |
| ÍNDICE | X |
| LISTA DE FIGURAS | XIII |
| LISTA DE TABELAS | XVIII |
| LISTA DE ABREVIATURAS E NOMENCLATURA | XXIXI |
| CAPÍTULO 1 | 1 |
| 1.1. INTRODUÇÃO E MOTIVAÇÃO | 1 |
| 1.2. OBJETIVOS E CONTRIBUIÇÃO | 2 |
| 1.3. ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO | 3 |
| CAPÍTULO 2 | 5 |
| REVISÃO BIBLIOGRÁFICA | 5 |
| CAPÍTULO 3 | 122 |
| 3.1. CONJUNTOS E NÚMEROS <i>FUZZY</i> | 122 |
| 3.1.1. <i>Características de um conjunto fuzzy</i> | 133 |
| 3.1.2. <i>Números fuzzy</i> | 144 |
| 3.2. CONCEITO DE PERTENÇA MULTIDIMENSIONAL..... | 155 |
| 3.3. FUNÇÕES DE PERTENÇA <i>FUZZY</i> | 188 |
| 3.3.1. <i>Função de pertença fuzzy triangular</i> | 188 |
| 3.3.2. <i>Funções de pertença fuzzy empíricas</i> | 199 |
| 3.4. ATUALIZAÇÃO DE MODELOS..... | 211 |
| 3.5. ATUALIZAÇÃO DA MATRIZ DE COVARIÂNCIA..... | 233 |
| 3.5.1. <i>Pequena perturbação em torno da média</i> | 244 |
| 3.6. QUANTIFICAÇÃO DA INCERTEZA NAS RESPOSTAS DE REFERÊNCIA | 266 |
| 3.7. MÉTODO DE PERTURBAÇÃO PARA A ATUALIZAÇÃO DE INTERVALOS | 277 |
| 3.7.1. <i>Atualização dos valores médios e raios</i> | 288 |
| CAPÍTULO 4 | 311 |
| 4.1. CASOS DE ESTUDO | 311 |
| 4.2. IMPLEMENTAÇÃO | 322 |
| 4.2.1. <i>Modelo numérico</i> | 322 |
| 4.2.2. <i>Otimização</i> | 333 |
| 4.2.3. <i>Algoritmos fuzzy de atualização de modelos</i> | 344 |

| | |
|---|------------|
| CAPÍTULO 5 | 37 |
| 5.1. CASO 1- SISTEMA COM MODOS DE VIBRAÇÃO BEM SEPARADOS | 37 |
| 5.1.1. <i>Funções de pertinência triangulares</i> | 37 |
| 5.1.1.1 Algoritmo 1 | 38 |
| 5.1.1.2 Algoritmo 2 | 43 |
| 5.1.2. <i>Funções de pertinência empíricas</i> | 48 |
| 5.1.2.1. Algoritmo 1 | 48 |
| 5.1.2.2. Algoritmo 2 | 54 |
| 5.2. CASO 2- SISTEMA COM MODOS DE VIBRAÇÃO PRÓXIMOS | 59 |
| 5.2.1. <i>Funções de pertinência triangulares</i> | 59 |
| 5.2.1.1. Algoritmo 1 | 59 |
| 5.2.1.2. Algoritmo 2 | 65 |
| 5.2.2. <i>Funções de pertinência empíricas</i> | 70 |
| 5.2.2.1. Algoritmo 1 | 70 |
| 5.2.2.2. Algoritmo 2 | 76 |
| 5.3. CASO 3 – MODOS DE VIBRAÇÃO PRÓXIMOS COM 10000 OBSERVAÇÕES | 81 |
| 5.3.1. <i>Funções de pertinência triangulares</i> | 81 |
| 5.3.1.1. Algoritmo 1 | 82 |
| 5.3.1.2. Algoritmo 2 | 85 |
| 5.3.2. <i>Funções de pertinência empíricas</i> | 88 |
| 5.3.2.1. Algoritmo 1 | 889 |
| 5.3.2.2. Algoritmo 2 | 91 |
| 5.4. CASO 4 - AMOSTRAS DE DIMENSÕES DIFERENTES (MODOS DE VIBRAÇÃO AFASTADOS) ... | 94 |
| 5.4.1. <i>Funções de pertinência triangulares</i> | 94 |
| 5.4.1.1. Algoritmo 1 | 94 |
| 5.4.1.2. Algoritmo 2 | 96 |
| 5.4.2. <i>Funções de pertinência empíricas</i> | 99 |
| 5.4.2.1. Algoritmo 1 | 99 |
| 5.4.2.2. Algoritmo 2 | 101 |
| CAPÍTULO 6 | 103 |
| CONCLUSÕES | 103 |
| TRABALHOS FUTUROS | 104 |
| BIBLIOGRAFIA | 105 |

Lista de figuras

| | |
|---|----|
| Figura 3.1 - Características principais de um conjunto <i>fuzzy</i> . (Adaptado de (Silva 2015)). | 13 |
| Figura 3.2 - Intervalo <i>fuzzy</i> . (Adaptado de (Silva, 2015)). | 15 |
| Figura 3.3 - Construção de funções de pertinência fuzzy triangulares a partir de histogramas de frequência (adaptado de (Silva, 2015)). | 19 |
| Figura 3.4 - Construção de funções de pertinência empíricas a partir de histogramas de frequência (adaptado de (Silva, 2015)). | 20 |
| Figura 3.5 - Conversão do vetor respostas Z na função de pertinência <i>fuzzy</i> empírica $\mu_{\bar{z}}$ (adaptado de (Silva 2015)). | 20 |
| Figura 4.1 - Sistema massa-mola três graus de liberdade (adaptado de (Khodaparast et al. 2011)). | 31 |
| Figura 5.1 - Funções de pertinência triangulares das respostas de referência, caso 1 com amostras com 10 observações). | 37 |
| Figura 5.2 – Funções de pertinência <i>fuzzy</i> triangulares iniciais, de referência e atualizadas, caso 1 com amostras de 10 observações). | 38 |
| Figura 5.3 - Funções de pertinência triangulares das respostas de referência, caso 1 com amostras com 30 observações). | 39 |
| Figura 5.4 – Funções de pertinência <i>fuzzy</i> triangulares iniciais, de referência e atualizadas, caso 1 com amostras de 30 observações). | 40 |
| Figura 5.5 - Funções de pertinência triangulares das respostas de referência, caso 1 com amostras com 100 observações. | 41 |
| Figura 5.6 - Funções de pertinência <i>fuzzy</i> triangulares iniciais, de referência e atualizadas, caso 1 com amostras de 30 observações. | 42 |
| Figura 5.7 – Funções de pertinência fuzzy triangulares iniciais, de referência e atualizadas, caso 1 com amostras de 10 observações. | 43 |
| Figura 5.8 – Funções de pertinência fuzzy triangulares iniciais, de referência e atualizadas, caso 1 com amostras de 30 observações. | 44 |
| Figura 5.9 – Funções de pertinência <i>fuzzy</i> triangulares iniciais, de referência e atualizadas, caso 1 com amostras de 100 observações. | 46 |
| Figura 5.10 - Funções de pertinência empíricas das respostas de referência, caso 1 com amostras com 10 observações. | 48 |
| Figura 5.11 – Funções de pertinência <i>fuzzy</i> empíricas iniciais, de referência e atualizadas, caso 1 com amostras de 10 observações. | 49 |
| Figura 5.12 - Funções de pertinência empíricas das respostas de referência, caso 1 com amostras com 30 observações. | 50 |
| Figura 5.13 – Funções de pertinência <i>fuzzy</i> empíricas iniciais, de referência e atualizadas, caso 1 com amostras de 30 observações. | 50 |
| Figura 5.14 - Funções de pertinência empíricas das respostas de referência, caso 1 com amostras com 100 observações. | 52 |
| Figura 5.15 – Funções de pertinência <i>fuzzy</i> empíricas iniciais, de referência e atualizadas, caso 1 com amostras de 10 observações. | 52 |
| Figura 5.16 – Funções de pertinência <i>fuzzy</i> empíricas iniciais, de referência e atualizadas, caso 2 com amostras de 10 observações. | 54 |
| Figura 5.17 – Funções de pertinência <i>fuzzy</i> empíricas iniciais, de referência e atualizadas, caso 1 com amostras de 30 observações. | 55 |
| Figura 5.18 – Funções de pertinência <i>fuzzy</i> empíricas iniciais, de referência e atualizadas, caso 1 com amostras de 100 observações. | 57 |
| Figura 5.19 - Funções de pertinência triangulares das respostas de referência, caso 2 com amostras com 10 observações. | 59 |

| | |
|--|----|
| Figura 5.20 – Funções de pertença <i>fuzzy</i> triangulares iniciais, de referência e atualizadas, caso 2 com amostras de 10 observações..... | 60 |
| Figura 5.21 – - Funções de pertença triangulares das respostas de referência, caso 2 com amostras com 30 observações. | 61 |
| Figura 5.22 - Funções de pertença <i>fuzzy</i> triangulares iniciais, de referência e atualizadas, caso 2 com amostras de 30 observações..... | 62 |
| Figura 5.23 - Funções de pertença triangulares das respostas de referência, caso 2 com amostras com 100 observações. | 63 |
| Figura 5.24 – Funções de pertença <i>fuzzy</i> triangulares iniciais, de referência e atualizadas, caso 2 com amostras de 10 observações..... | 64 |
| Figura 5.25 – Funções de pertença <i>fuzzy</i> triangulares iniciais, de referência e atualizadas (caso 2 com amostras de 10 observações). | 65 |
| Figura 5.26 – Funções de pertença <i>fuzzy</i> triangulares iniciais, de referência e atualizadas, caso 2 com amostras de 10 observações..... | 67 |
| Figura 5.27 – Funções de pertença <i>fuzzy</i> triangulares iniciais, de referência e atualizadas, caso 2 com amostras de 30 observações..... | 68 |
| Figura 5.28 - Funções de pertença empíricas das respostas de referência, caso 2 com amostras com 10 observações. | 70 |
| Figura 5.29 – Funções de pertença <i>fuzzy</i> empíricas iniciais, de referência e atualizadas, caso 2 com amostras de 10 observações..... | 70 |
| Figura 5.30 - Funções de pertença triangulares das respostas de referência, caso 1 com amostras com 10 observações. | 72 |
| Figura 5.31 – Funções de pertença <i>fuzzy</i> empíricas iniciais, de referência e atualizadas, caso 2 com amostras de 30 observações..... | 72 |
| Figura 5.32 - Funções de pertença triangulares das respostas de referência, caso 2 com amostras com 30 observações. | 74 |
| Figura 5.33 – Funções de pertença <i>fuzzy</i> empíricas iniciais, de referência e atualizadas, caso 2 com amostras de 100 observações..... | 74 |
| Figura 5.34 – Funções de pertença <i>fuzzy</i> empíricas iniciais, de referência e atualizadas, caso 2 com amostras de 10 observações..... | 76 |
| Figura 5.35 – Funções de pertença <i>fuzzy</i> empíricas iniciais, de referência e atualizadas, caso 2 com amostras de 30 observações..... | 77 |
| Figura 5.36 – Funções de pertença <i>fuzzy</i> empíricas iniciais, de referência e atualizadas, caso 2 com amostras de 100 observações..... | 79 |
| Figura 5.37 - Funções de pertença triangulares das respostas de referência para 10000 observações. | 81 |
| Figura 5.38 - Funções de pertença dos parâmetros atualizados para 10000 observações, caso 3 e funções de pertença triangulares)..... | 82 |
| Figura 5.39 - Espaço de respostas <i>fuzzy</i> previstas no nível de pertença zero, obtidas com o algoritmo 1 e funções de pertença triangulares..... | 84 |
| Figura 5.40 - Funções de pertença dos parâmetros atualizados para 10000 observações, caso 3 e funções de pertença triangulares. | 85 |
| Figura 5.41 - Espaço de respostas <i>fuzzy</i> previstas no nível de pertença zero obtidas com o algoritmo 2 e funções de pertença triangulares..... | 87 |
| Figura 5.42 - Funções de pertença empíricas das respostas de referência para 10000 observações..... | 88 |
| Figura 5.43 - Funções de pertença dos parâmetros atualizados para 10000 observações, caso 3 e funções de pertença empíricas. | 88 |
| Figura 5.44 - Espaço de respostas <i>fuzzy</i> previstas no nível de pertença zero, obtidas com o algoritmo 1 e funções de pertença empíricas..... | 90 |
| Figura 5.45 - Funções de pertença dos parâmetros atualizados para 10000 observações, caso 3 e funções de pertença empíricas). | 91 |
| Figura 5.46 - Espaço de respostas <i>fuzzy</i> previstas no nível de pertença zero, obtidas com o algoritmo 2 e funções de pertença empíricas..... | 93 |

| | |
|--|-----|
| Figura 5.47 - Funções de pertença <i>fuzzy</i> triangulares iniciais, de referência e atualizadas obtidas com o algoritmo 1 para o caso 4..... | 94 |
| Figura 5.48 - Espaço de respostas <i>fuzzy</i> previstas no nível de pertença zero, obtidas com o algoritmo 1 e funções de pertença triangulares..... | 96 |
| Figura 5.49 - Funções de pertença <i>fuzzy</i> triangulares iniciais, de referência e atualizadas obtidas com o algoritmo 2 para o caso 4..... | 96 |
| Figura 5.50 - Espaço de respostas <i>fuzzy</i> previstas no nível de pertença zero, obtidas com o algoritmo 2 e funções de pertença triangulares..... | 98 |
| Figura 5.51 - Funções de pertença <i>fuzzy</i> empíricas iniciais, de referência e atualizadas obtidas com o algoritmo 1 para o caso 4..... | 99 |
| Figura 5.52 - Espaço de respostas <i>fuzzy</i> previstas no nível de pertença zero, obtidas com o algoritmo 1 e funções de pertença empíricas..... | 100 |
| Figura 5.53 - Funções de pertença <i>fuzzy</i> empíricas iniciais, de referência e atualizadas obtidas com o algoritmo 2 para o caso 4..... | 101 |
| Figura 5.54 - Espaço de respostas <i>fuzzy</i> previstas no nível de pertença zero, obtidas com o algoritmo 2 e funções de pertença empíricas..... | 102 |

Lista de tabelas

| | |
|---|----|
| Tabela 4.1 - Intervalos de referência dos parâmetros de atualização..... | 31 |
| Tabela 4.2 -Tabela de decisão de otimização | 33 |
| Tabela 5.1 - Parâmetros <i>fuzzy</i> em cada α_{cut} , caso 1 com funções de pertença triangulares e 10 observações. | 38 |
| Tabela 5.2 - Valores médios dos parâmetros atualizados e erros relativos para 10 observações, caso 1 com funções de pertença <i>fuzzy</i> triangulares..... | 39 |
| Tabela 5.3 - Raio dos parâmetros atualizados e erros relativos para 10 observações, caso 1 com funções de pertença <i>fuzzy</i> triangulares..... | 39 |
| Tabela 5.4 - Parâmetros <i>fuzzy</i> em cada α_{cut} , caso 1 com funções de pertença triangulares e 30 observações. | 40 |
| Tabela 5.5 - Valores médios dos parâmetros atualizados e erros relativos para 30 observações, caso 1 com funções de pertença <i>fuzzy</i> triangulares..... | 40 |
| Tabela 5.6 - Raio dos parâmetros atualizados e erros relativos para 30 observações, caso 1 com funções de pertença <i>fuzzy</i> triangulares..... | 41 |
| Tabela 5.7 - Parâmetros <i>fuzzy</i> em cada α_{cut} , caso 1 com funções de pertença triangulares e 100 observações. | 42 |
| Tabela 5.8 - Valores médios dos parâmetros atualizados e erros relativos para 100 observações, caso 1 afastados com funções de pertença <i>fuzzy</i> triangulares. | 42 |
| Tabela 5.9 - Raio dos parâmetros atualizados e erros relativos para 100 observações, caso 1 com funções de pertença <i>fuzzy</i> triangulares. | 43 |
| Tabela 5.10 - Parâmetros <i>fuzzy</i> em cada α_{cut} , caso 1 com funções de pertença triangulares e 10 observações. | 43 |
| Tabela 5.11 - Valores médios dos parâmetros atualizados e erros relativos para 10 observações, caso 1 com funções de pertença <i>fuzzy</i> triangulares..... | 44 |
| Tabela 5.12 - Raio dos parâmetros atualizados e erros relativos para 10 observações, caso 1 com funções de pertença <i>fuzzy</i> triangulares. | 44 |
| Tabela 5.13 - Parâmetros <i>fuzzy</i> em cada α_{cut} , caso 1 com funções de pertença triangulares e 30 observações. | 45 |
| Tabela 5.14 - Valores médios dos parâmetros atualizados e erros relativos para 30 observações, caso 1 com funções de pertença <i>fuzzy</i> triangulares..... | 45 |
| Tabela 5.15 - Raio dos parâmetros atualizados e erros relativos para 30 observações, caso 1 com funções de pertença <i>fuzzy</i> triangulares. | 45 |
| Tabela 5.16 - Parâmetros <i>fuzzy</i> em cada α_{cut} , caso 1 com funções de pertença triangulares e 100 observações. | 46 |
| Tabela 5.17 - Valores médios dos parâmetros atualizados e erros relativos para 100 observações, caso 1 com funções de pertença <i>fuzzy</i> triangulares..... | 47 |
| Tabela 5.18 - Raio dos parâmetros atualizados e erros relativos para 100 observações, caso 1 com funções de pertença <i>fuzzy</i> triangulares. | 47 |
| Tabela 5.19 - Parâmetros <i>fuzzy</i> em cada α_{cut} , caso 1 com funções de pertença empíricas e 10 observações. | 49 |
| Tabela 5.20 - Valores médios dos parâmetros atualizados e erros relativos para 10 observações, caso 1 com funções de pertença <i>fuzzy</i> empíricas..... | 49 |
| Tabela 5.21 - Raio dos parâmetros atualizados e erros relativos para 10 observações, caso 1 com funções de pertença <i>fuzzy</i> empíricas. | 49 |

| | |
|---|----|
| Tabela 5.22 - Parâmetros <i>fuzzy</i> em cada α_{cut} , caso 1 com funções de pertença empíricas e 30 observações. | 50 |
| Tabela 5.23 - Valores médios dos parâmetros atualizados e erros relativos para 30 observações, caso 1 com funções de pertença <i>fuzzy</i> empíricas. | 51 |
| Tabela 5.24 - Raio dos parâmetros atualizados e erros relativos para 30 observações, caso 1 com funções de pertença <i>fuzzy</i> empíricas. | 51 |
| Tabela 5.25 - Parâmetros <i>fuzzy</i> em cada α_{cut} , caso 1 com funções de pertença empíricas e 100 observações. | 52 |
| Tabela 5.26 - Valores médios dos parâmetros atualizados e erros relativos para 100 observações, caso 1 afastados com funções de pertença <i>fuzzy</i> empíricas. | 53 |
| Tabela 5.27 - Raio dos parâmetros atualizados e erros relativos para 100 observações, caso 1 com funções de pertença <i>fuzzy</i> empíricas. | 53 |
| Tabela 5.28 - Parâmetros <i>fuzzy</i> em cada α_{cut} , caso 1 com funções de pertença empíricas e 10 observações. | 54 |
| Tabela 5.29 - Valores médios dos parâmetros atualizados e erros relativos para 10 observações, caso 1 com funções de pertença <i>fuzzy</i> empíricas. | 54 |
| Tabela 5.30 - Raio dos parâmetros atualizados e erros relativos para 10 observações, caso 1 com funções de pertença <i>fuzzy</i> empíricas. | 55 |
| Tabela 5.31 - Parâmetros <i>fuzzy</i> em cada α_{cut} , caso 1 com funções de pertença empíricas e 30 observações. | 56 |
| Tabela 5.32 - Valores médios dos parâmetros atualizados e erros relativos para 30 observações, caso 1 com funções de pertença <i>fuzzy</i> empíricas. | 56 |
| Tabela 5.33 - Raio dos parâmetros atualizados e erros relativos para 30 observações, caso 1 com funções de pertença <i>fuzzy</i> empíricas. | 56 |
| Tabela 5.34 - Parâmetros <i>fuzzy</i> em cada α_{cut} , caso 1 com funções de pertença empíricas e 100 observações. | 57 |
| Tabela 5.35 - Valores médios dos parâmetros atualizados e erros relativos para 100 observações, caso 1 com funções de pertença <i>fuzzy</i> empíricas. | 57 |
| Tabela 5.36 - Raio dos parâmetros atualizados e erros relativos para 100 observações, caso 1 com funções de pertença <i>fuzzy</i> empíricas. | 58 |
| Tabela 5.37 - Parâmetros <i>fuzzy</i> em cada α_{cut} , caso 2 com funções de pertença triangulares e 10 observações. | 60 |
| Tabela 5.38 - Valores médios dos parâmetros atualizados e erros relativos para 10 observações, caso 2 com funções de pertença <i>fuzzy</i> triangulares. | 60 |
| Tabela 5.39 - Raio dos parâmetros atualizados e erros relativos para 10 observações, caso 2 com funções de pertença <i>fuzzy</i> triangulares. | 61 |
| Tabela 5.40 - Parâmetros <i>fuzzy</i> em cada α_{cut} , caso 2 com funções de pertença triangulares e 30 observações. | 62 |
| Tabela 5.41 - Valores médios dos parâmetros atualizados e erros relativos para 30 observações, caso 2 com funções de pertença <i>fuzzy</i> triangulares. | 62 |
| Tabela 5.42 - Raio dos parâmetros atualizados e erros relativos para 30 observações, caso 2 com funções de pertença <i>fuzzy</i> triangulares. | 63 |
| Tabela 5.43 - Parâmetros <i>fuzzy</i> em cada α_{cut} , caso 2 com funções de pertença triangulares e 100 observações. | 64 |
| Tabela 5.44 - Valores médios dos parâmetros atualizados e erros relativos para 30 observações, caso 2 com funções de pertença <i>fuzzy</i> triangulares. | 64 |
| Tabela 5.45 - Raio dos parâmetros atualizados e erros relativos para 100 observações, caso 2 com funções de pertença <i>fuzzy</i> triangulares. | 65 |
| Tabela 5.46 - Parâmetros <i>fuzzy</i> em cada α_{cut} , caso 2 com funções de pertença triangulares e 10 observações. | 66 |
| Tabela 5.47 - Valores médios dos parâmetros atualizados e erros relativos para 10 observações, caso 2 com funções de pertença <i>fuzzy</i> triangulares. | 66 |

| | |
|--|----|
| Tabela 5.48 - Raio dos parâmetros atualizados e erros relativos para 10 observações, caso 2 com funções de pertinência <i>fuzzy</i> triangulares. | 66 |
| Tabela 5.49 - Parâmetros <i>fuzzy</i> em cada α_{cut} , caso 2 com funções de pertinência triangulares e 30 observações. | 67 |
| Tabela 5.50 - Valores médios dos parâmetros atualizados e erros relativos para 30 observações, caso 2 com funções de pertinência <i>fuzzy</i> triangulares. | 67 |
| Tabela 5.51 - Raio dos parâmetros atualizados e erros relativos para 30 observações, caso 2 com funções de pertinência <i>fuzzy</i> triangulares. | 68 |
| Tabela 5.52 - Parâmetros <i>fuzzy</i> em cada α_{cut} , caso 2 com funções de pertinência triangulares e 100 observações. | 68 |
| Tabela 5.53 - Valores médios dos parâmetros atualizados e erros relativos para 100 observações, caso 2 com funções de pertinência <i>fuzzy</i> triangulares. | 69 |
| Tabela 5.54 - Raio dos parâmetros atualizados e erros relativos para 100 observações, caso 2 com funções de pertinência <i>fuzzy</i> triangulares. | 69 |
| Tabela 5.55 - Parâmetros <i>fuzzy</i> em cada α_{cut} , caso 2 com funções de pertinência empíricas e 10 observações. | 71 |
| Tabela 5.56 - Valores médios dos parâmetros atualizados e erros relativos para 10 observações, caso 2 com funções de pertinência <i>fuzzy</i> empíricas. | 71 |
| Tabela 5.57 - Raio dos parâmetros atualizados e erros relativos para 10 observações, caso 2 com funções de pertinência <i>fuzzy</i> empíricas. | 71 |
| Tabela 5.58 - Parâmetros <i>fuzzy</i> em cada α_{cut} , caso 2 com funções de pertinência empíricas e 30 observações. | 73 |
| Tabela 5.59 - Valores médios dos parâmetros atualizados e erros relativos para 30 observações, caso 2 com funções de pertinência <i>fuzzy</i> empíricas. | 73 |
| Tabela 5.60 - Raio dos parâmetros atualizados e erros relativos para 30 observações, caso 2 com funções de pertinência <i>fuzzy</i> empíricas. | 73 |
| Tabela 5.61 - Parâmetros <i>fuzzy</i> em cada α_{cut} , caso 2 com funções de pertinência empíricas e 100 observações. | 75 |
| Tabela 5.62 - Valores médios dos parâmetros atualizados e erros relativos para 100 observações, caso 2 com funções de pertinência <i>fuzzy</i> empíricas. | 75 |
| Tabela 5.63 - Raio dos parâmetros atualizados e erros relativos para 100 observações, caso 2 com funções de pertinência <i>fuzzy</i> empíricas. | 76 |
| Tabela 5.64 - Parâmetros <i>fuzzy</i> em cada α_{cut} , caso 2 com funções de pertinência empíricas e 10 observações. | 76 |
| Tabela 5.65 - Valores médios dos parâmetros atualizados e erros relativos para 10 observações, caso 2 com funções de pertinência <i>fuzzy</i> empíricas. | 77 |
| Tabela 5.66 - Raio dos parâmetros atualizados e erros relativos para 10 observações, caso 2 com funções de pertinência <i>fuzzy</i> empíricas. | 77 |
| Tabela 5.67 - Parâmetros <i>fuzzy</i> em cada α_{cut} , caso 2 com funções de pertinência empíricas e 30 observações. | 78 |
| Tabela 5.68 - Valores médios dos parâmetros atualizados e erros relativos para 30 observações, caso 2 com funções de pertinência <i>fuzzy</i> empíricas. | 78 |
| Tabela 5.69 - Raio dos parâmetros atualizados e erros relativos para 30 observações, caso 2 com funções de pertinência <i>fuzzy</i> empíricas. | 78 |
| Tabela 5.70 - Parâmetros <i>fuzzy</i> em cada α_{cut} , caso 2 com funções de pertinência empíricas e 100 observações. | 79 |
| Tabela 5.71 - Valores médios dos parâmetros atualizados e erros relativos para 100 observações, caso 2 com funções de pertinência <i>fuzzy</i> empíricas. | 79 |
| Tabela 5.72 - Raio dos parâmetros atualizados e erros relativos para 100 observações, caso 2 com funções de pertinência <i>fuzzy</i> empíricas. | 80 |
| Tabela 5.73 - Parâmetros <i>fuzzy</i> em cada α_{cut} , caso 3 com funções de pertinência triangulares e 10000 observações. | 82 |

| | |
|---|-----|
| Tabela 5.74 - Valores médios dos parâmetros atualizados e erros relativos para 10000 observações, caso 3 com funções de pertença <i>fuzzy</i> triangulares..... | 83 |
| Tabela 5.75 - Raio dos parâmetros atualizados e erros relativos para 10000 observações, caso 3 com funções de pertença <i>fuzzy</i> triangulares..... | 83 |
| Tabela 5.76 - Parâmetros <i>fuzzy</i> em cada α_{cut} , caso 3 com funções de pertença triangulares e 10000 observações. | 85 |
| Tabela 5.77 - Valores médios dos parâmetros atualizados e erros relativos para 10000 observações, caso 3 com funções de pertença <i>fuzzy</i> triangulares..... | 86 |
| Tabela 5.78 - Raio dos parâmetros atualizados e erros relativos para 10000 observações, caso 3 com funções de pertença <i>fuzzy</i> triangulares..... | 86 |
| Tabela 5.79 - Parâmetros <i>fuzzy</i> em cada α_{cut} , caso 3 com funções de pertença empíricas e 10000 observações. | 89 |
| Tabela 5.80 - Valores médios dos parâmetros atualizados e erros relativos para 10000 observações, caso 3 com funções de pertença <i>fuzzy</i> empíricas. | 89 |
| Tabela 5.81 - Raio dos parâmetros atualizados e erros relativos para 10000 observações, caso 3 com funções de pertença <i>fuzzy</i> empíricas..... | 90 |
| Tabela 5.82 - Parâmetros <i>fuzzy</i> em cada α_{cut} , caso 3 com funções de pertença empíricas e 10000 observações. | 91 |
| Tabela 5.83 - Valores médios dos parâmetros atualizados e erros relativos para 10000 observações, caso 3 com funções de pertença <i>fuzzy</i> empíricas. | 92 |
| Tabela 5.84 - Raio dos parâmetros atualizados e erros relativos para 10000 observações, caso 3 com funções de pertença <i>fuzzy</i> empíricas..... | 92 |
| Tabela 5.85 - Parâmetros <i>fuzzy</i> em cada α_{cut} , caso 4 com funções de pertença triangulares. | 94 |
| Tabela 5.86 - Valores médios dos parâmetros atualizados e erros relativos, caso 4 com funções de pertença <i>fuzzy</i> triangulares. | 95 |
| Tabela 5.87 - Raios dos parâmetros atualizados e erros relativos, caso 4 com funções de pertença <i>fuzzy</i> triangulares..... | 95 |
| Tabela 5.88 - Parâmetros <i>fuzzy</i> em cada α_{cut} obtidos através do algoritmo 2 para o caso 4 com funções de pertença triangulares..... | 97 |
| Tabela 5.89 - Valores médios dos parâmetros atualizados e erros relativos obtidos para o caso 4 através do algoritmo 2 com funções de pertença <i>fuzzy</i> triangulares. | 97 |
| Tabela 5.90 - Raios dos parâmetros atualizados e erros relativos obtidos para o caso 4 através do algoritmo 2 com funções de pertença <i>fuzzy</i> triangulares..... | 97 |
| Tabela 5.91 - Parâmetros <i>fuzzy</i> em cada α_{cut} obtidos através do algoritmo 1 para o caso 4 com funções de pertença empíricas. | 99 |
| Tabela 5.92 - Valores médios dos parâmetros atualizados e erros relativos obtidos para o caso 4 através do algoritmo 1 com funções de pertença <i>fuzzy</i> empíricas..... | 99 |
| Tabela 5.93 - Raios dos parâmetros atualizados e erros relativos obtidos para o caso 4 através do algoritmo 1 com funções de pertença <i>fuzzy</i> empíricas. | 100 |
| Tabela 5.94 - Parâmetros <i>fuzzy</i> em cada α_{cut} obtidos através do algoritmo 2 para o caso 4 com funções de pertença empíricas. | 101 |
| Tabela 5.95 - Valores médios dos parâmetros atualizados e erros relativos obtidos para o caso 4 através do algoritmo 2 com funções de pertença <i>fuzzy</i> empíricas..... | 101 |
| Tabela 5.96 - Raios dos parâmetros atualizados e erros relativos obtidos para o caso 4 através do algoritmo 1 com funções de pertença <i>fuzzy</i> empíricas. | 102 |

Lista de abreviaturas e nomenclatura

MEF - Método de elementos finitos

FRF - Função de resposta em frequência

CDF - Função de distribuição cumulativa

PDF - Função densidade de probabilidade

\hat{P} - Conjunto *fuzzy*

\tilde{P} - Valor médio

\check{P} - Intervalo

$\delta\theta$ - Perturbação em torno do valor médio do parâmetro de atualização

$\Delta\theta$ - Raio do intervalo dos parâmetros de atualização

\mathbf{z} - Vetor de respostas dinâmicas

θ - Parâmetro de atualização

n - número de observações

np - número de parâmetros de atualização

nr - número de respostas

μ - Função de pertença *fuzzy*

α - Nível de pertença *fuzzy*

ω - Frequência natural [Hz]

ϕ - Modo de vibração

ε - Erro

K - Matriz de rigidez [N/m]

k - Constante de rigidez [N/m]

M - Matriz de massa concentrada [kg]

m - Massa [kg]

S - Matriz de sensibilidade

T - Matriz de transformação

σ^2 - Variância

σ - Desvio padrão

\underline{u}, \bar{u} - Limites inferior e superior do intervalo

Capítulo 1

1.1. Introdução e motivação

O estudo do comportamento dinâmico de sistemas é um assunto recorrente em problemas de engenharia. Por vezes estes problemas podem ter elevada complexidade, exigindo assim o uso de métodos numéricos para a resolução dos mesmos.

A modelação científica é uma atividade, cujo objetivo é facilitar a compreensão, quantificação e visualização de características do mundo real, fazendo referência a conhecimento existente de modo a que o modelo criado seja válido para representar o fenómeno de interesse.

A criação de um modelo requiere a identificação e seleção de aspetos relevantes da situação em estudo no mundo real, utilizando-se diferentes tipos de modelos para diferentes objetivos. O modelo procura então representar objetos empíricos, fenómenos e processos físicos de uma maneira lógica e objetiva. Todos os modelos são reflexões simplificadas da realidade. Apesar disto, podem ser extremamente úteis. No caso do estudo do comportamento dinâmico de sistemas, os modelos de elementos finitos são de grande utilidade na resolução destes problemas.

O método dos elementos finitos (MEF) é um método numérico que permite resolver problemas de engenharia, física e matemática. A solução analítica deste tipo de problemas geralmente requer a resolução de um sistema de equações diferenciais, sendo conhecidas as condições de fronteira. Este método produz valores aproximados para as respostas em análise num número discreto de pontos contidos no domínio espacial. A resolução do problema é feita subdividindo o modelo contínuo num conjunto de partes mais simples e de dimensão finita chamadas de elementos finitos. As equações simplificadas que modelam estes elementos finitos são depois incorporadas num sistema maior de equações que modela o problema inteiro.

A atualização de modelos é um processo que faz parte da fase de validação de modelos numéricos, tais como os obtidos pela análise de elementos finitos, e o seu objetivo é melhorar a robustez dos mesmos incorporando as incertezas associadas aos parâmetros de entrada e as variabilidades associadas às respostas do sistema em estudo.

Os métodos de atualização de modelos podem ser classificados como determinísticos ou estocásticos. Os métodos determinísticos não consideram incertezas associadas aos parâmetros de modelação ou de atualização e não têm em conta as variações que podem ocorrer em testes experimentais, o que pode resultar em modelos não representativos das estruturas em estudo. No entanto, os métodos estocásticos de atualização consideram a variabilidade associada aos testes experimentais e permitem a quantificação das

incertezas associadas aos parâmetros de modelação. Devido a isto são mais exigentes a nível computacional que os métodos determinísticos.

A atualização de modelos pode ser direcionada para vários campos de aplicação. A aplicação da atualização de modelos com vista à obtenção de protótipos virtuais, pode ser entendida como o conceito básico da atualização de modelos. No entanto, a implementação de métodos de atualização baseados na solução de um problema inverso pode permitir identificar propriedades geométricas ou materiais de estruturas ou equipamentos em uso. Para além disto, se um modelo previamente atualizado de uma dada estrutura for considerado como o modelo base dessa estrutura num dado momento no tempo, estes métodos podem ser utilizados no contexto da identificação de dano, desde a deteção à quantificação.

No contexto da atualização estocástica de modelos existem duas metodologias principais, a probabilística, baseada na teoria das probabilidades e estatística, e a não probabilística que pode ser baseada em aritmética de intervalos e teoria de conjuntos *fuzzy* para realizar a atualização de modelos.

As metodologias não probabilísticas que utilizam apenas aritmética de intervalos, tendem a sobrestimar os limites dos intervalos dos parâmetros, devido à assunção de uma distribuição uniforme dos parâmetros dentro do intervalo, tornando assim difícil distinguir e atribuir pesos diferentes a regiões dentro dos intervalos das respostas e dos parâmetros de entrada. O uso da teoria de conjuntos *fuzzy* permite atribuir pesos diferentes às várias regiões dentro dos referidos intervalos, através da definição de diferentes níveis de pertença.

A principal motivação para este trabalho está na utilização de conjuntos *fuzzy* em combinação com técnicas de perturbação de primeira ordem, de forma a resolver o problema inverso de atualização *fuzzy* e obter a estimativa da função de pertença dos parâmetros de entrada que possuem um certo grau de incerteza associada.

1.2. Objetivos e contribuição

O principal objetivo desta dissertação é o desenvolvimento de uma metodologia de atualização de modelos não probabilística, baseada na utilização do princípio de extensão de Zadeh invertido (Silva, 2015) para gerar as funções de pertença *fuzzy* das respostas de referência/experimentais. Pretende-se também desenvolver um algoritmo de atualização dos valores médios e respetivas matrizes de covariância de modo a prever os intervalos dos parâmetros de modelação. Serão desenvolvidos dois algoritmos de atualização, utilizando uma técnica que tem por base a sensibilidade dos parâmetros para atualizar os valores médios dos parâmetros e a matriz de covariância considerando o método de perturbação. O desempenho dos algoritmos será avaliado através da análise da precisão dos resultados obtidos, medida através dos erros entre os valores de referência e os valores

previstos, e também o nível de eficiência computacional através dos tempos de computação.

Este trabalho apresenta a contribuição original da utilização conjunta das técnicas de atualização de modelos com base em aritmética de intervalos apresentada por Deng et. al (2017) e a atualização da matriz de covariância proposta por Silva (2015).

1.3. Estrutura da dissertação

A dissertação será dividida em 6 capítulos. Neste primeiro capítulo foi feita uma breve contextualização acerca do tema da dissertação, motivação para o presente trabalho e descrição dos objetivos a atingir.

No segundo capítulo será feita a revisão bibliográfica e uma contextualização mais detalhada acerca dos principais desenvolvimentos que foram sendo feitos ao longo dos anos dentro da área de atualização de modelos.

O terceiro capítulo será dedicado à fundamentação teórica dos conceitos utilizados na criação do algoritmo de atualização.

No quarto capítulo serão descritos os casos de estudo e a metodologia de atualização desenvolvida. O quinto capítulo será dedicado à apresentação e análise dos resultados obtidos. Finalmente, no sexto capítulo, a partir dos resultados obtidos serão retiradas conclusões e apresentadas sugestões para trabalho futuro.

Capítulo 2

Revisão bibliográfica

Em aplicações de engenharia, na área da dinâmica estrutural, é necessário ter o conhecimento do comportamento dinâmico. Técnicas de análise modal experimental e de análise de elementos finitos, permitem obter descrições do comportamento da estrutura em estudo.

O melhoramento de modelos teóricos, através da utilização de dados obtidos em ensaios experimentais, ou atualização de modelos é um processo bastante utilizado (Mottorshead & Friswell, 1993; Friswell & Mottorshead, 1995; Marwala, 2010). Os métodos de atualização são classificados como métodos diretos ou indiretos. Podem também ser classificados consoante a natureza dos dados experimentais/referência, como modais ou de resposta em frequência.

Os métodos diretos para a atualização de modelos baseados em dados modais na sua generalidade negligenciam a existência de amortecimento nas estruturas em estudo (Carvalho et al. 2007). O uso de funções de resposta em frequência (FRF) tem várias vantagens sobre os métodos usando dados de análise modal. Primeiramente, os erros numéricos inerentes aos resultados de análise modal, causados por ajustes de curvas experimentais e termos residuais não disponíveis, são evitados. Em segundo lugar, o processamento das FRF medidas não exige esforço adicional para derivar os dados modais. A vantagem mais significativa do uso de dados FRF medidos em vez do uso de dados modais derivados reside no facto das FRF fornecerem informação abundante sobre o comportamento estrutural da estrutura (Silva & Maia, 2012)

Hemez e Farrar (2014) realizaram um estudo sobre as técnicas mais utilizadas para atualização de modelos e os seus respetivos problemas, nos primeiros 30 anos de desenvolvimento deste campo de investigação. Neste trabalho, os autores consideraram três categorias principais de métodos:

- i) Métodos de atualização da matriz ótima (Zhongdong et al. 2004), são baseados em metodologias de otimização com o objetivo de minimizar as diferenças entre os modelos teóricos e os atualizados, atuando diretamente nas matrizes do modelo e utilizando constrangimentos dados pelo modelo experimental. Estes métodos têm normalmente a desvantagem de levarem à perda da conectividade física do modelo.
- ii) Métodos de pequena perturbação (Khodaparast et al. 2008; Deng et al. 2017), consideram que os parâmetros de atualização podem ser descritos através dos seus valores médios e de uma perturbação em torno dos mesmos. Esta perturbação pode ser considerada como o raio do intervalo e a sua atualização é feita com base na sensibilidade de forma a obter o intervalo de parâmetros atualizados.

- iii) Métodos iterativos baseados na análise de sensibilidade (Mottershead et al. 2011), são baseados na linearização de relações não lineares entre respostas do sistema medidas experimentalmente, como frequências naturais e modos de vibração, e parâmetros do modelo que necessitam de ajustes. A atualização é realizada iterativamente até que a convergência entre os resultados do modelo atualizado e os de referência satisfaça o critério previamente estabelecido para o efeito.

As técnicas de atualização de elementos finitos no seu núcleo procuram aproximar resultados obtidos por análise de elementos finitos e dados medidos experimentalmente. Dito isto, estas têm três propósitos principais: i) a aplicação clássica de métodos para resolver problemas inversos; ii) o uso da solução dos problemas inversos para avaliação de danos; e iii) podem ser utilizadas como um método para obter modelos simplificados, que apresentem respostas dinâmicas equivalentes às de um modelo original com malha refinada (Silva, 2015).

Os métodos baseados em FRF são um dos subgrupos de métodos mais bem estabelecidos na atualização de modelos (Canbalo & Özgüven, 2016). Neste artigo, os autores abordaram o problema da atualização de estruturas não lineares, visto que a maior parte dos métodos utilizados em dinâmica estrutural são para sistemas lineares. No entanto, na maior parte das aplicações reais as estruturas apresentam não linearidades, o que restringe a aplicação de técnicas disponíveis para sistemas lineares. Os autores apresentam um método PRD (*Pseudo Receptance Difference*) que é utilizado para obter FRF lineares a partir de uma estrutura não linear, com múltiplas não linearidades, incluindo não linearidades friccionais, que quando existentes num sistema, juntamente com outras não linearidades de outras naturezas, são a principal causa de não se conseguir obter FRF experimentalmente através dos métodos convencionais. O método PRD calcula FRF lineares de uma estrutura não linear, ao utilizar FRF medidas em vários níveis de carregamento, e identifica simultaneamente todas as não linearidades do sistema. Assim sendo, qualquer método pode ser utilizado para atualizar a componente linear do modelo matemático.

O uso de dados provenientes de FRF também é vantajoso para a atualização de modelos de sistemas amortecidos. Lin & Zhu (2006) trouxeram novos desenvolvimentos ao método de atualização RFM (Response Function Method) desenvolvido inicialmente por Lin & Ewins (1990) de forma a este conseguir identificar matrizes de amortecimento, para além das matrizes de massa e rigidez. Os autores também desenvolveram formulações complexas de atualização, de modo a superar o problema da complexidade das FRF medidas, e identificaram coeficientes de amortecimento para os casos de amortecimento proporcional e não proporcional.

No entanto, nem sempre o uso de FRF complexas no processo de atualização do modelo é vantajoso. Quando apenas se pretende atualizar matrizes de massa e rigidez, o uso de FRF complexas não é teoricamente correto visto que as FRF complexas, para além de serem afetadas pelas matrizes de rigidez e massa, também são afetadas pela matriz de amortecimento. Dai a utilização de FRF complexas não se justificar em casos onde apenas

se pretende atualizar as matrizes de rigidez e massa da estrutura em estudo. Pradhan & Modak (2012) propuseram um método melhorado de atualização de modelos, através de FRF, utilizando o conceito de FRF normais. Este método é uma versão modificada do método de atualização RFM que é originalmente baseado em FRF complexas. O método proposto é eficaz na atualização de matrizes de massa e rigidez, em todos os casos de dados completos e incompletos e com todos os níveis e tipos de amortecimento.

A necessidade da atualização de modelos em dinâmica estrutural resulta da incerteza inerente ao conjunto das várias suposições que são necessárias para construir um modelo teórico, que represente o comportamento dinâmico da estrutura física em estudo. Na validação de modelos, a precisão do modelo deve ser avaliada de modo a determinar se o modelo proposto é adequado para o seu propósito (Schwer, 2007). Existem vários tipos de incertezas. As incertezas presentes nos resultados previstos pelo modelo podem vir de duas fontes: físicas e numéricas. As incertezas numéricas resultam do processo computacional, surgindo devido a erros de arredondamento e ruído numérico. Uma das tarefas da verificação de modelos é a minimização deste tipo de incertezas, por exemplo, através de algoritmos de otimização de modelos de elementos finitos. Assim sendo, a atualização de modelos preocupa-se em lidar com as incertezas físicas, ao ajustar uma previsão inicial nos parâmetros de modelação de modo a reduzir o erro entre respostas experimentais ou de referência e as respectivas previsões do modelo. Os tipos de incerteza referidos são geralmente divididos em duas classes: incerteza aleatória e incerteza epistémica. A incerteza aleatória engloba toda a incerteza considerada como irreduzível, tendo em conta qualquer alteração ou adaptação do modelo. A incerteza epistémica aglomera toda a incerteza que surge devido à falta de conhecimento e deve ser considerada no modelo, visto que pode ser reduzida através de ajustes no mesmo. Dito isto, a definição tradicional de atualização de modelos pode ser resumida à calibração de parâmetros de modelação de forma a reduzir a diferença entre respostas previstas e respostas experimentais. É por isto que a atualização de modelos também é referenciada como um método de reconciliação.

No entanto, com a introdução do conceito de incerteza, o objetivo da atualização de modelos tornou-se mais ambicioso, ao evoluir para a minimização da incerteza nas previsões do modelo, tomando em conta um domínio de validação, ao contrário da atualização tradicional que tem um objetivo local. Assim sendo, a variabilidade dos parâmetros de modelação precisa de ser ajustada, tomando como referência a variabilidade das respostas medidas experimentalmente. Várias abordagens foram desenvolvidas para abordar o problema de atualização de modelos de elementos finitos. Collins et al. (1974) foram dos primeiros a propor um método baseado numa abordagem estatística. No entanto, a investigação dentro deste campo científico tem-se focado principalmente em métodos determinísticos. Os métodos determinísticos são os mais utilizados em aplicações industriais, negligenciando a incerteza. Em aplicações reais esta simplificação limita grandemente a análise (Deng et al. 2017), daí o crescente interesse na investigação de métodos de atualização estocásticos. Por sua vez, estes métodos de atualização estocásticos podem ser subdivididos em duas categorias, métodos probabilísticos e não probabilísticos.

Nas últimas duas décadas, abordagens probabilísticas foram desenvolvidas de forma a incorporar incertezas nos modelos computacionais, Jacquelin et al. (2012) desenvolveram uma abordagem baseada em matrizes aleatórias, em que expressões de forma fechada são derivadas para a matriz média e a matriz de covariância da matriz de rigidez atualizada. A expressão da matriz de covariância é obtida utilizando uma técnica de perturbação para resolver o problema de dados modais incompletos. Sun & Büyüköztürk (2016), investigaram e desenvolveram uma estratégia bayesiana para a atualização de modelos. A correlação entre os valores modais medidos e previstos não é requerida no processo de atualização, que é realizado através da redução do modelo. Para gerar as amostras de modo a quantificar a incerteza nos parâmetros do modelo, é proposta uma técnica de Monte Carlo utilizando cadeias de Markov (MCMC) com passos aleatórios adaptativos. A técnica iterativa é utilizada para atualizar a previsão do erro e para calcular a função de distribuição de probabilidade no processo de amostragem.

Um dos problemas associado a este tipo de método de atualização é o grande esforço computacional associado à amostragem utilizando algoritmos MCMC. Goller et al. (2011) ultrapassaram este obstáculo ao paralelizar o algoritmo de atualização com o algoritmo transicional MCMC, que identifica regiões de parâmetros com a mais alta probabilidade de massa inferior.

Jensen et al. (2017) exploraram a viabilidade de integrar um meta-modelo adaptativo baseado em interpoladores de *Kriging*, na formulação de atualização de elementos finitos com dados de resposta dinâmica. Foi considerada uma abordagem bayesiana na atualização do modelo, baseada em um método de simulação estocástica.

O interesse no uso de abordagens não probabilísticas, utilizando aritmética de intervalos e técnicas baseadas em lógica *fuzzy*, para a quantificação de incerteza tem vindo a aumentar. Explicações detalhadas acerca de lógica, conjuntos e aritmética de intervalos *fuzzy* podem ser encontradas em (Hanss & Willner, 2000; Ross, 2004).

Massa et al. (2008) desenvolveram um método completo e eficiente para a análise de elementos finitos com lógica *fuzzy* (PAEM - Padé Approximants with Extrema Management), determinando os valores e vetores próprios *fuzzy* de um modelo de elementos finitos definido através de parâmetros *fuzzy*, introduzindo uma alternativa ao princípio de extensão de Zadeh (Zadeh, 1965) para calcular vetores e valores próprios *fuzzy* com um bom nível de precisão e tempos de processamento aceitáveis. O método desenvolvido pelos autores utiliza aproximadores de Padé como aproximações de alta ordem para limitar o esforço computacional associado com a gestão da variabilidade.

Outra aplicação popular de variáveis *fuzzy* é a propagação de incertezas em sistemas mecânicos. Adhikari & Khodaparast (2014) propõem uma abordagem baseada na expansão ortogonal da função, utilizando polinómios de Legendre e a expansão polinomial caótica, de forma a modelar as incertezas associadas aos parâmetros de modelação. Os autores representam as variáveis *fuzzy* como um conjunto de variáveis de intervalo através das funções de pertença.

Para a representação matemática de sistemas com incertezas epistêmicas, surgindo, por exemplo, de simplificações no procedimento de modelação, a utilização de modelos com parâmetros *fuzzy* prova ser uma das abordagens mais adequadas e promissoras (Haag et al., 2010). Na prática, a determinação deste tipo de parâmetros revela ser um problema não trivial. O processo de identificação para atualizar estes parâmetros tem como base um conjunto de respostas de referência, obtidas através de medições ou com recurso a modelos avançados, e requer a resolução do problema inverso, utilizando o método inverso para a computação dos valores *fuzzy* a partir de um modelo contendo incerteza epistémica. O método proposto por Haag et al. (2010) destaca-se pelo facto de só utilizar simulações *feedforward* do modelo, baseadas no método de transformação de aritmética *fuzzy* (Hanss, 2005), em conjunto com as respostas de referência, eliminando a necessidade da inversão do sistema de equações. O método proposto consiste na identificação de vários parâmetros de entrada baseados numa única resposta ou medida experimental. É utilizada a otimização de modo a resolver o problema indeterminado resultante ao minimizar a incerteza dos parâmetros. Nas regiões onde o procedimento de identificação é viável, as FRF são determinadas através da computação de um critério de viabilidade, baseado nos dados de saída do método de transformação. Para as FRF de um sistema mecânico, este critério permite a restrição do processo de identificação a um conjunto especial de frequências onde a solução pode ser garantida.

Khodaparast et al. (2011) descreveram um método de atualização de intervalos, que determina as médias dos parâmetros utilizando uma atualização de modelos determinística e constrói um hipercubo limitante sob o espaço de incertezas associadas aos parâmetros. Foi aplicado um modelo de substituição, ou meta-modelo, o preditor de *Kriging*, para aumentar a eficiência da atualização determinística de todos os pontos na “nuvem” das frequências naturais medidas. O resultado é um intervalo de parâmetros para os quais as respostas do modelo aproximam as de referência.

Fang et al. (2015) desenvolveram uma abordagem de intervalos de modelos de superfícies de resposta. A sobre estimativa que está tipicamente associada a este método de atualização de modelos, devido ao uso de aritmética de intervalos, é evitada através do uso de métodos determinísticos levando a estimativas precisas dos intervalos de parâmetros. Os autores também simplificam o estabelecimento do problema inverso de intervalos, levando à diminuição dos custos computacionais associados.

O uso de métodos não probabilísticos, como os baseados em lógica *fuzzy* e aritmética de intervalos, para a atualização de modelos com incertezas é tipicamente mais prático quando o volume de dados de teste necessário para a atualização probabilística do modelo é reduzido (Khodaparast et al., 2017). Os autores apresentam a aplicação da atualização de modelos de elementos finitos *fuzzy* na estrutura DLR AIRMOD. O método proposto é demonstrado inicialmente num sistema simulado de massa e molas com três graus de liberdade. Foram realizados testes modais com montagem e desmontagem do sistema com o intuito de recriar o efeito do processo de montagem na medição da variabilidade. Os histogramas dos dados medidos são utilizados para obter as funções de pertença *fuzzy* das respostas e para determinar as funções de pertença atualizadas dos parâmetros

indeterminados que são representados por variáveis *fuzzy*. Variáveis *fuzzy* são introduzidas com o intuito de representar um conjunto de parâmetros incertos através das suas funções de pertinência e o preditor de *Kriging* é utilizado para acelerar o processo de atualização.

Como foi descrito anteriormente, muitas vezes as PDF dos parâmetros estruturais não estão disponíveis devido à falta de informação acerca do sistema estrutural. Nestas circunstâncias, a análise de intervalos apresenta uma vantagem significativa ao lidar com problemas de incerteza visto que apenas são definidos os limites inferiores e superiores dos parâmetros. Deng et al. (2017) propõem um novo método para a identificação de intervalos dos parâmetros estruturais, utilizando o método de perturbação de primeira ordem para denotar cada variável aleatória como uma perturbação em torno do valor médio do intervalo de valores de cada parâmetro. Os autores optam por utilizar redes neurais de funções de base radial como meta-modelo para acelerar o processo de atualização. As equações de atualização de intervalos do modelo são desenvolvidas com base na técnica de perturbação e é utilizado o método de duas etapas para atualizar primeiro os valores médios dos parâmetros estruturais e depois estimar os raios dos intervalos.

Um dos desafios associados à utilização de variáveis *fuzzy* no processo de atualização não probabilístico reside na não convexidade das funções de pertinência dos dados experimentais ou de referência, levando assim a variáveis *fuzzy* que não representam com precisão os parâmetros estruturais e influenciando significativamente a solução do problema inverso. Silva (2015) propôs a construção de uma única hiper função de pertinência *fuzzy*, que contem o conjunto completo de dados experimentais. Para construir esta função *fuzzy*, o autor utilizou pela primeira vez a inversão do princípio de extensão de Zadeh (Zadeh, 1965), obtendo assim funções de pertinência convexas que modelam os dados experimentais com precisão, independentemente da convexidade ou não convexidade dos histogramas utilizados para construir as funções de pertinência *fuzzy* (Silva, 2015). Técnicas de análise de sensibilidade são utilizadas para atualizar os parâmetros indeterminados em cada nível alfa da função de pertinência. Ao utilizar este método em conjunto com um modelo substituto (*Kriging Predictor*) são obtidas estimativas precisas dos parâmetros indeterminados do modelo do sistema em estudo, garantido uma eficiência computacional satisfatória. O autor também propõe uma metodologia baseada em métodos de perturbação, à semelhança de Deng et al. (2017), para realizar a atualização da matriz de covariância dos parâmetros indeterminados.

Neste trabalho, tendo em conta o contexto descrito pela revisão bibliográfica, é desenvolvido um método de atualização não probabilístico baseado nas funções de hiper pertinência desenvolvidas por Silva (2015) e utilizando duas abordagens diferentes para realizar a atualização dos raios dos intervalos de parâmetros: utilizando a metodologia baseada em pequenas perturbações proposta por Deng et al. (2017), e a atualização da matriz de covariância proposta por Silva (2015). Com o intuito de comparar as estimativas obtidas ao nível de precisão e eficiência computacional dos algoritmos foram realizados quatro casos numéricos. Nos capítulos seguintes serão descritos com mais profundidade

os conceitos teóricos utilizados e a metodologia aplicada para a construção dos algoritmos de atualização propostos.

Capítulo 3

Fundamentos Teóricos

Neste capítulo pretende-se fazer uma análise aos principais conceitos teóricos que foram utilizados ao longo do desenvolvimento deste trabalho.

3.1. Conjuntos e números *fuzzy*

O conceito de conjunto *fuzzy* foi introduzido por Zadeh (1965) como uma extensão da teoria clássica de conjuntos. Na teoria clássica de conjuntos a avaliação da pertença de elementos a um determinado conjunto tem em conta um critério de natureza binária, o elemento pertence ou não pertence ao conjunto. Os conjuntos *fuzzy* permitem descrever situações em que a condição de pertença de um elemento a um conjunto contém alguma ambiguidade, permitindo além das opções de pertencer ou não pertencer a um conjunto específico, a possibilidade de esse elemento pertencer ao conjunto com um determinado grau de pertença. Assim sendo, a teoria dos conjuntos *fuzzy* permite que a avaliação da pertença de elementos num conjunto seja gradual. Esta característica é descrita através de uma função de pertença μ que indica qual o grau de pertença de um elemento x ao conjunto *fuzzy* \hat{P} . Os valores de pertença de um conjunto *fuzzy* variam entre zero e um, isto é, dado um conjunto *fuzzy* genérico \hat{P} com uma função de pertença $\mu_{\hat{P}}$ associada, o valor de pertença um ($\mu_{\hat{P}}(x) = 1$) indica que o elemento x pertence de certeza ao conjunto *fuzzy* \hat{P} . Por outro lado, se o valor de pertença for zero ($\mu_{\hat{P}}(x) = 0$) isto significa que o elemento x não pertence de certeza ao conjunto *fuzzy* \hat{P} . Os valores intermédios ($0 < \mu_{\hat{P}}(x) < 1$) indicam níveis graduais de pertença. Esta característica faz com que os conjuntos *fuzzy* sejam capazes de lidar com imprecisões em dados e falta de informação (Silva, 2015).

Um conjunto *fuzzy* \hat{P} pode ser expresso como (Adhikari & Khodaparast 2014):

$$\hat{P} = \{(x, \mu_{\hat{P}}(x)) | x \in \mathbb{R}, \mu_{\hat{P}}(x) \in [0,1]\} \quad (3.1)$$

No caso de x ser um vetor constituído por np parâmetros é possível definir o conjunto *fuzzy* \hat{P} como um vetor constituído pelos pares de parâmetros x_i e respetivos valores de pertença $\mu_{\hat{P}}(x_i)$.

3.1.1. Características de um conjunto *fuzzy*

Um conjunto *fuzzy* é caracterizado pelas propriedades ilustradas na figura 3.1

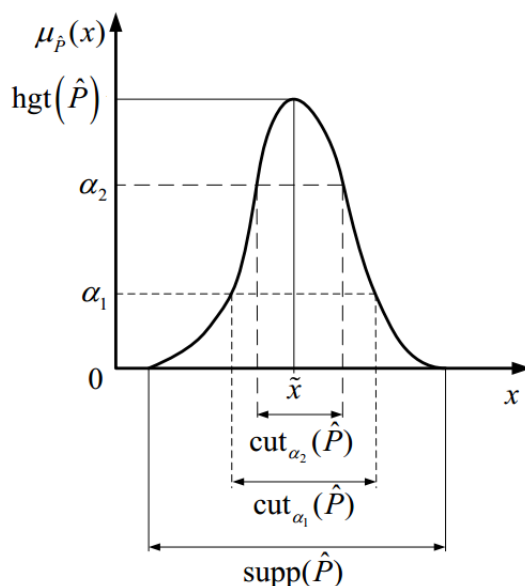


Figura 3.1 - Características principais de um conjunto *fuzzy* (adaptado de (Silva, 2015)).

A amplitude de um conjunto *fuzzy* \hat{P} , $\text{hgt}(\hat{P})$, é o supremo da função de pertinência. Se $\text{hgt}(\hat{P}) = 1$ então o conjunto *fuzzy* \hat{P} é normal. Caso esta condição não se verifique então o conjunto é definido como subnormal.

O núcleo de \hat{P} é o conjunto clássico de todos os elementos x pertencentes ao conjunto *fuzzy* \hat{P} cujo valor de pertinência é igual a um. Na figura 3.1 o núcleo é representado por \tilde{x} .

O suporte é o conjunto clássico de todos os elementos x que têm um nível de pertinência diferente de zero, ou seja, o suporte contém todos os elementos x que têm contribuição na definição do conjunto *fuzzy* \hat{P} .

O corte de nível α_i ($\text{cut}_{\alpha_i}(\hat{P})$, $i \in \mathbb{N}$) é o conjunto de todos os elementos x que pertencem ao conjunto *fuzzy* \hat{P} com um nível de pertinência maior ou igual a α_i , definido entre $[0,1]$. A decomposição de um conjunto *fuzzy* \hat{P} em vários níveis α_i é bastante importante pois permite estabelecer a ligação entre a teoria clássica de conjuntos e a teoria de conjuntos *fuzzy*, tal como será explicado em mais detalhe na seção seguinte, com a definição de convexidade de um conjunto *fuzzy*. Esta propriedade também é de grande importância na medida que nos permite reduzir a aritmética *fuzzy* à aritmética de intervalos, aquando da decomposição dos conjuntos *fuzzy* em cortes α , simplificando assim a resolução de problemas utilizando a lógica *fuzzy*.

3.1.2. Números *fuzzy*

Os números *fuzzy* são uma classe específica de conjuntos *fuzzy* que podem ser utilizados para exprimir incertezas sob a forma de números reais. Para um conjunto *fuzzy* \hat{P} ser considerado um número *fuzzy* \hat{p} têm que se verificar as seguintes condições (Hanss 2005):

1. \hat{P} é normal. Isto significa que o valor máximo que função de pertença toma é um. Este valor ocorre no núcleo do conjunto *fuzzy* (\tilde{x}).
2. \hat{P} é convexo. Para uma função ser convexa têm que se verificar a seguinte relação $\forall Z \in [a, b], \mu(Z) \geq \min(\mu(a), \mu(b))$. Ou seja, dado um determinado nível α_i se \hat{P} for convexo isto significa que todos os cortes em níveis de pertença α superiores a α_i estão contidos em cut_{α_i} . Consequentemente todos os cortes α em níveis superiores a zero são sempre subconjuntos de $supp(\hat{P})$.
3. Existe apenas um valor de $\tilde{x} \in \mathbb{R}$ com $\mu_{\hat{p}}(\tilde{x}) = 1$. Iremos denominar este valor como núcleo de \hat{p} que representa o nível máximo de pertença. O núcleo de \hat{p} também pode ser chamado de valor modal de \hat{p} . Este é o valor mais observado no conjunto de dados.
4. A função de pertença $\mu_{\hat{p}}(x)$ é pelo menos contínua por partes.

A figura 3.1 procura ilustrar as características de um número *fuzzy*. O núcleo \tilde{x} representa o ponto onde o valor de pertença é máximo, ou seja representa a observação com mais probabilidade de ocorrer, o suporte $supp(\hat{P})$ contém todos os elementos cujo nível de nível de pertença é diferente de zero e engloba assim todo o conjunto de observações da amostra em estudo e o corte de nível α_i ($cut_{\alpha_i}(\hat{P})$) representa um determinado grau de pertença associado à função de pertença $\mu_{\hat{p}}$.

Relativamente à segunda condição, um conjunto *fuzzy* é convexo se todos os cortes da função de pertença forem convexos, no sentido da definição de convexidade dos conjuntos clássicos. Assim sendo, todos os cortes da função de pertença são subconjuntos de $supp(\hat{P})$ e se for considerado que $\alpha_2 > \alpha_1$, então $cut_{\alpha_2}(\hat{P}) \subseteq cut_{\alpha_1}(\hat{P})$.

Um conjunto *fuzzy* só pode ser considerado como um número *fuzzy* só e só se as quatro condições enumeradas anteriormente forem verificadas. No entanto, quando trabalhamos com dados experimentais, a condição 3 é suscetível de ser violada. Isto pode levar a situações como a ilustrada na figura 3.2 onde o núcleo(\hat{P}) é um intervalo fechado, em vez de ser só um valor único.

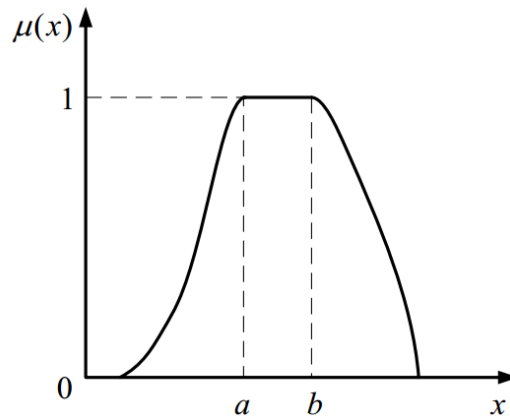


Figura 3.2 - Intervalo *fuzzy*. (Adaptado de (Silva, 2015)).

Por esta razão, quando o núcleo(\hat{P}) = $[a, b]$ o conjunto *fuzzy* é designado como um intervalo fechado *fuzzy*. Por outro lado, a convexidade de um conjunto *fuzzy* é de elevada importância dentro do contexto de atualização de modelos, visto que permite a decomposição de um número *fuzzy* em intervalos contínuos dentro cada nível α . Assim sendo, a aritmética *fuzzy* pode ser reduzida à aritmética de intervalos em cada nível α .

3.2. Conceito de pertinência multidimensional

O princípio de extensão é um dos conceitos base da teoria de conjuntos *fuzzy*. Introduzido por Zadeh (1965), este permite de forma geral estender conceitos da teoria clássica de conjuntos à teoria de conjuntos *fuzzy*, isto é, permite que o domínio da função de mapeamento seja estendido a partir de elementos clássicos para conjuntos *fuzzy* como argumentos da função.

Seja $f: X \rightarrow Z$ uma função contínua e A um subconjunto *fuzzy* de X . Então, para todo $\alpha \in [0, 1]$:

$$[\hat{f}(A)]^\alpha = f([A]^\alpha) \tag{3.2}$$

Seguindo a formulação de Zadeh, o princípio de extensão é definido considerando $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ o conjunto do produto universal e F uma função de mapeamento definida como

$$F: X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n \mapsto Z, \tag{3.3}$$

que mapeia o elemento (x_1, x_2, \dots, x_n) do conjunto do produto universal para o elemento $z = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ do conjunto universal Z (Hanss, 2005). Adicionalmente, $\hat{A}_1 \subseteq X_1, \hat{A}_2 \subseteq X_2, \dots, \hat{A}_n \subseteq X_n$ são n conjuntos *fuzzy*, definidos pelas funções de pertinência

$\mu_{\hat{A}_1}(x_1), \mu_{\hat{A}_2}(x_2), \dots, \mu_{\hat{A}_n}(x_n), x_i \in X_i, i = 1, 2, \dots, n$. Então a função de pertinência $\mu_B(Z)$, $z \in Z$, do conjunto fuzzy $\hat{B} \subseteq Z$ com

$$\hat{B} = F(\hat{A}_1, \hat{A}_2, \dots, \hat{A}_n) \quad (3.4)$$

é definida por

$$\mu_{\hat{B}} = \begin{cases} \sup_{\hat{B}=F(\hat{A}_1, \hat{A}_2, \dots, \hat{A}_n)} \min \{ \mu_{\hat{A}_1}(x_1), \mu_{\hat{A}_2}(x_2), \dots, \mu_{\hat{A}_n}(x_n) \}, & \text{se } \exists \hat{B} = F(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.5)$$

Considerando agora uma função f que mapeia o conjunto fuzzy $\hat{\Theta}$ no conjunto fuzzy \hat{Z} , é possível obter a aproximação de \hat{Z} através da projeção, por via de f , de $\hat{\Theta}$. Os elementos do conjunto fuzzy \hat{Z} são obtidos a partir de elementos do conjunto $\hat{\Theta}$ considerando

$$\hat{z} = f(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_n) \quad (3.6)$$

com $\hat{z} \in \hat{Z}$ e $\hat{\theta}_i \in \hat{\Theta}$, para $i = 1, 2, \dots, np$ parâmetros fuzzy. Se forem considerados subconjuntos fuzzy em cada nível α de $\hat{\Theta}$, cada subconjunto fuzzy tem uma função de pertinência dada por $\mu_{\alpha_j}(\hat{\theta}_i)$, para $j = 1, 2, \dots, l$ níveis de pertinência. Então a função de pertinência de \hat{z} em cada nível α é dada por

$$\mu_{\hat{z}_{\alpha_j}} = \begin{cases} \sup_{\hat{z}=f(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_n)} \min \{ \mu_{\alpha_j}(\hat{\theta}_1), \mu_{\alpha_j}(\hat{\theta}_2), \dots, \mu_{\alpha_j}(\hat{\theta}_{np}) \}, & \text{se } \exists \hat{z} = f(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_{np}) \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.7)$$

Este processo de transformação do conjunto fuzzy $\hat{\Theta}$ de parâmetros no conjunto fuzzy \hat{Z} de respostas pode ser organizado em três passos (Massa et al. 2008):

1. Discretização das funções de pertinência. Cada função de pertinência é discretizada de acordo com um dado número de cortes em níveis de pertinência, de acordo com o suporte das funções de pertinência discretizado em np , valores $\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{np}\}$ que têm um certo nível de pertinência maior ou igual a $\alpha_i \in [0, 1]$ associado.
2. Cálculo das soluções determinísticas resultantes de todas as combinações de valores dos parâmetros fuzzy. São assim determinadas as soluções em estudo e os respectivos níveis de pertinência.
3. Avaliação do nível de pertinência das soluções. As funções de pertinência são construídas considerando que o nível de pertinência das soluções é igual ao nível de pertinência mínimo das soluções em estudo. No caso de múltiplas ocorrências de uma solução, o nível de

pertença desta será igual ao nível de pertença máximo observado para as diferentes ocorrências de uma mesma solução.

Embora este método seja de fácil implementação e permita a definição do nível de pertença de cada solução quando esta está contida num conjunto *fuzzy* em muitas aplicações práticas o princípio de extensão de Zadeh acaba por ser um método demasiado exigente a nível computacional na maior parte das aplicações de elementos finitos. Neste tipo de aplicações, os modelos de elementos finitos costumam possuir um elevado número de graus de liberdade e parâmetros *fuzzy*, o que faz com o tempo de cálculo das soluções seja elevado.

Ao realizar análises modais, as respostas obtidas, frequências naturais e modos de vibração, são consideradas indissociáveis umas das outras, visto serem um conjunto de soluções do problema de valores e vetores próprios. Assim sendo, os seus valores são organizados num vetor experimental. Por conseguinte, para um número variado de experiências numa única ou em estruturas idênticas é necessário trabalhar com vários vetores experimentais de respostas.

O problema inverso de análise modal consiste na estimação de parâmetros de entrada, como constantes de rigidez de molas, a partir de um conjunto de frequências naturais e modos de vibração. Como foi dito anteriormente, estas respostas são indissociáveis, surgindo então a necessidade de agrupar as várias funções de pertença *fuzzy* dos vetores de respostas num único vetor que engloba todas as funções de pertença *fuzzy* do conjunto inteiro de respostas, permitindo assim ter uma única hiper-função de pertença *fuzzy* que representa todo o conjunto de respostas.

Se o princípio da extensão de Zadeh for aplicado no sentido inverso, tal como foi proposto por Silva (2015), torna-se possível transformar todo o conjunto de respostas do sistema numa única função de hiper-pertença *fuzzy*, relacionada com cada vetor experimental e definida como um conjunto universal de todas as respostas. Por conseguinte, o valor mínimo de pertença observado, de determinado vetor experimental, é atribuído ao vetor contido na hiperfunção de pertença. Considerando um vetor *fuzzy* experimental genérico $\hat{z} = [\hat{z}_1 \ \hat{z}_2 \ \dots \ \hat{z}_{nr}]$, composto por nr respostas, com uma função de pertença $\mu_{\hat{z}}$ associada a cada resposta, é possível atribuir um nível de pertença a cada observação no vetor de respostas da hiper-função de pertença *fuzzy*, gerada com base na inversão do princípio da extensão de Zadeh, como

$$\mu_{\hat{z}} = \begin{cases} \frac{\min\{\mu_{\hat{z}_1}, \mu_{\hat{z}_2}, \dots, \mu_{\hat{z}_{nr}}\}}{\sup_{\hat{z}=f(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_n)} \min\{\mu_{\hat{z}_1}, \mu_{\hat{z}_2}, \dots, \mu_{\hat{z}_{nr}}\}}, & \text{se } \exists \hat{z} = f(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_n) \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.8)$$

Ao utilizar a equação 3.4 é possível construir a hiper-função de pertença *fuzzy* que engloba as várias funções de pertença *fuzzy* associadas a cada respostas \hat{z} , facilitando assim a resolução do problema inverso.

3.3. Funções de pertença *fuzzy*

As funções de pertença *fuzzy* podem ser geradas de diferentes maneiras. No presente trabalho serão utilizados dois tipos de funções de pertença: as funções de pertença *fuzzy* triangulares e as funções de pertença *fuzzy* empíricas. Nesta secção será explicada a metodologia aplicada para gerar estes dois tipos de funções de pertença.

3.3.1. Função de pertença *fuzzy* triangular

Um dos tipos de funções de pertença *fuzzy* mais utilizadas para modelar conjuntos de dados são as funções de pertença triangulares. Uma maneira simples de obter uma função de pertença *fuzzy* triangular a partir de um conjunto de dados experimentais é dada por:

$$\mu_{\hat{z}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x \leq \underline{z} \\ 1 + \frac{x - \tilde{z}}{\tilde{z} - \underline{z}} & \text{para } \underline{z} < x < \tilde{z} \\ 1 - \frac{x - \tilde{z}}{\bar{z} - \tilde{z}} & \text{para } \tilde{z} \leq x < \bar{z} \\ 0 & \text{para } x \geq \bar{z} \end{cases}, \forall x \in \mathbb{R} \quad (3.9)$$

onde \underline{z} , \tilde{z} e \bar{z} são respectivamente os valores mínimo, médio e máximo do conjunto de dados experimental z . Os histogramas das variáveis devem estar normalizados de acordo com o número máximo de observações numa classe, de modo a ser comparado com a respetiva função de pertença.

Observando as funções de pertença *fuzzy* e os histogramas normalizados representados na figura 3.3, é evidente que este tipo de função de pertença *fuzzy* pode negligenciar a distribuição geral dos dados, ou seja, a função de pertença gerada não é evidentemente equivalente à distribuição dos dados experimentais.

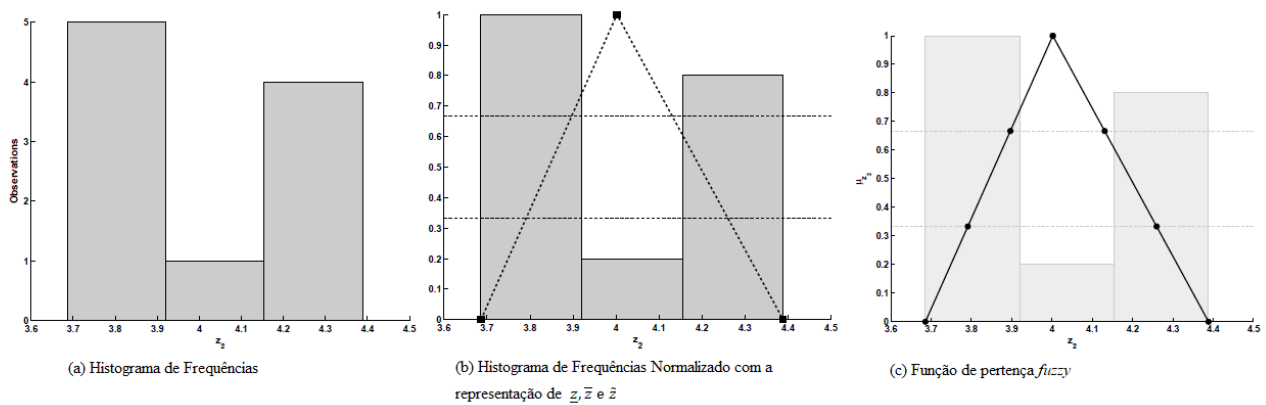


Figura 3.3 - Construção de funções de pertença *fuzzy* triangulares a partir de histogramas de frequência (adaptado de (Silva, 2015)).

Adicionalmente, os cortes de cada função de pertença, representados a tracejado na figura 3.3, determinam os intervalos em cada nível α_i . O número de cortes em níveis de pertença está dependente do número de observações e consequentemente do número de classes dos histogramas. Para definir este número são utilizadas as equações 3.10 e 3.11. A opção por esta regra na definição do número de cortes permite maximizar a possibilidade de obter conjuntos *fuzzy* convexos.

3.3.2. Funções de pertença *fuzzy* empíricas

Uma vez demonstrado que as funções *fuzzy* triangulares podem ser inadequadas para a representação de um dado conjunto de dados, torna -se necessário recorrer a outro tipo de funções de pertença *fuzzy*. Utilizando os conceitos dados por Anoop et al. (2006) e Massa et al. (2008) é possível construir funções de pertença *fuzzy* baseadas em dados estatísticos, seguindo dois caminhos distintos, tendo em conta a convexidade dos histogramas do conjunto de dados de resposta.

Considere-se o polígono resultante da ligação linear de todos os pontos centrais das classes de um histograma (figura 3.4.b). O histograma é considerado convexo, se para qualquer corte num determinado nível de pertença o segmento de reta definido pelos extremos do intervalo nesse nível de pertença for contínuo, definindo um conjunto convexo. O objetivo da classificação dos histogramas de uma resposta experimental deve-se à necessidade de gerar conjuntos *fuzzy* convexos. Assim, para histogramas convexos, a função de pertença *fuzzy* é obtida diretamente do histograma normalizado de um dado conjunto de dados. Assim sendo, o nível de pertença zero é atribuído aos valores máximo e mínimo do conjunto de dados.

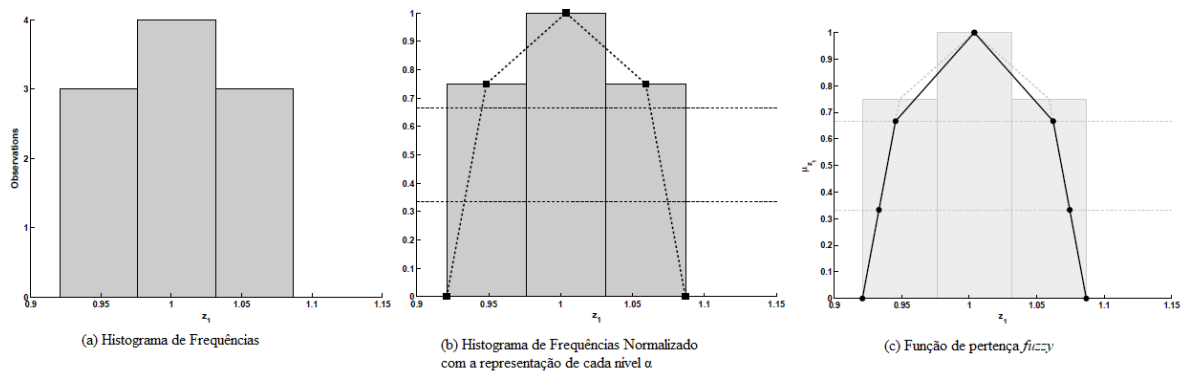


Figura 3.4 - Construção de funções de pertença empíricas a partir de histogramas de frequência (adaptado de (Silva, 2015)).

O número de classes de um histograma deve ser limitado a um número k , apesar desta escolha depender do volume de dados. De modo a aumentar a hipótese de obter um histograma convexo, deve-se apoiar a decisão do número de classes em uma de duas regras, dependendo do número de observações n . Esta opção é suportada pela definição de convexidade definida acima. Assim, para conjuntos de dados com menos de 40 observações, independentemente da distribuição, considera-se que o número de classes é dado por:

$$k = \lfloor \sqrt{n} \rfloor \tag{3.10}$$

Se o número de observações for superior ou igual a 40, é utilizada a lei de Sturges,

$$k = \lfloor 1 + \log_2 n \rfloor \tag{3.11}$$

As regras acima descritas encontram-se adaptadas de modo a aumentar a hipótese de obter um histograma de frequência convexo (Silva, 2015). Assim, em vez de utilizar uma função de arredondamento por excesso é considerada uma função de arredondamento por defeito.

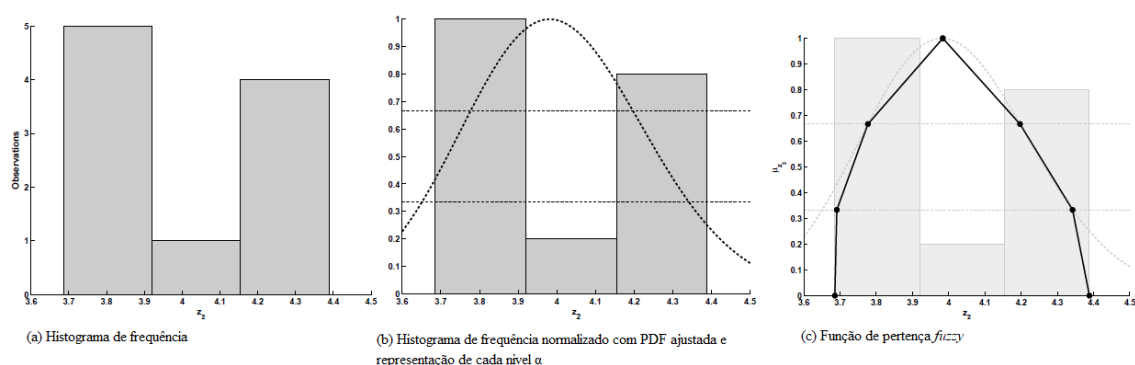


Figura 3.5 - Conversão do vetor respostas \mathbf{Z} na função de pertença *fuzzy* empírica $\hat{\mu}_{\mathbf{Z}}$ (adaptado de (Silva 2015)).

No caso de se verificar a não convexidade de um histograma de frequências, é utilizado um teste de ajuste de distribuições. Em vez de utilizar os valores centrais das classes do

histograma para construir a função de pertinência empírica, é utilizada PDF teórica ajustada (Karian e Dudewicz, 2000), obtida a partir do teste Kolmogorov - Smirnov (KS) (Massey Jr., 1951). Este teste de hipóteses compara a verosimilhança de uma CDF empírica e uma teórica. A CDF empírica é gerada diretamente a partir dos dados experimentais disponíveis, enquanto que a CDF teórica é calculada a partir de modelos probabilísticos, cujos parâmetros são estimados utilizando o critério da máxima verosimilhança. Assim sendo, o teste KS é realizado considerando diferentes CDF teóricas, nomeadamente para os modelos probabilísticos: normal, log normal, exponencial e *Weibull*. Admitindo que $F_0(x)$ é a CDF teórica de uma variável contínua x , e $F(x)$ é a CDF empírica de uma determinada amostra de dados, o teste KS é formulado como

$$H_0: F(x) = F_0(x) \text{ vs } H_1: F(x) \neq F_0(x) \quad (3.12)$$

No teste KS, sempre que não há evidência para rejeitar H_0 , significa que não existe evidência para rejeitar a semelhança entre as CDF teóricas e empíricas. Se o teste KS verificar H_0 , para mais do que um dos modelos probabilísticos as CDF são comparadas e tendo em conta os valores do *p-value* do teste é realizada a conversão da CDF numa função de pertinência *fuzzy* (de Lima e Ebecken, 2000; Anoop et al., 2006), considerando que a PDF normalizada $f(x)$ como:

$$\mu_{\hat{z}}(x) = \frac{f(x)}{\sup_{x \in \mathbb{R}} f(x)} \quad (3.13)$$

Para ambos os casos convexos e não convexos, a função de pertinência empírica *fuzzy* é obtida para os níveis de pertinência pré-definidos (níveis- α) através da interpolação linear entre os níveis de pertinência obtidos a partir do histograma normalizado.

3.4. Atualização de modelos

O método de atualização de modelos baseado na análise da sensibilidade proposto por (Mottershead et al. 2011) considera que o modelo experimental ou de referência pode ser aproximado por um modelo teórico que é atualizado iterativamente, com o objetivo de minimizar o erro entre as respostas de referência e as respostas estimadas através do modelo atualizado. Para cada iteração j , o vetor de erros é definido como,

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{z_j} = \mathbf{z}_m - \mathbf{z}(\boldsymbol{\theta}_j) \quad (3.14)$$

onde \mathbf{z}_m é o vetor de respostas experimentais ou de referência e $\mathbf{z}(\boldsymbol{\theta}_j)$ é o vetor das respostas do modelo na iteração j do processo de atualização, e por isso é função do vetor de parâmetros de atualização $\boldsymbol{\theta}_j$.

Nesta dissertação é considerado que o vetor de respostas inclui o quadrado das frequências naturais (ω_i^2) e os modos de vibração (ϕ_i) da estrutura em análise. O vetor de respostas genérico é dado por,

$$\mathbf{z} = [\omega_1^2 \quad \omega_2^2 \quad \cdots \quad \omega_{r_\omega}^2 \quad \phi_1^T \quad \phi_2^T \quad \cdots \quad \phi_{r_\phi}^T]^T \quad (3.15)$$

onde r_ω e r_ϕ denotam o número de frequências naturais e de modos de vibração, respetivamente.

O erro definido na equação (3.14) pode ser expandido através da expansão em série de Taylor de $\mathbf{z}(\boldsymbol{\theta}_j)$, como:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{z_j} = \mathbf{z}_m - \left(\mathbf{z}_j + \mathbf{S}_j(\boldsymbol{\theta}_{j+1} - \boldsymbol{\theta}_j) + O(\boldsymbol{\theta}_j^2) \right) \approx (\mathbf{z}_m - \mathbf{z}_j) - \mathbf{S}_j \Delta \boldsymbol{\theta}_j \quad (3.16)$$

onde \mathbf{S}_j representa a matriz de sensibilidade para a iteração j definida como

$$\mathbf{S}_j = \frac{\partial z_i}{\partial \theta_l} \quad (3.17)$$

para $i = 1, \dots, n$ respostas do modelo e $l = 1, \dots, k$ parâmetros de atualização. Quando a função de erro tende para zero, a equação 3.14 pode ser reformulada como

$$(\mathbf{z}_m - \mathbf{z}_j) = \mathbf{S}_j(\boldsymbol{\theta}_{j+1} - \boldsymbol{\theta}_j), \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{z_j} \rightarrow \mathbf{0} \quad (3.18)$$

A solução analítica da equação 3.17, em termos das sensibilidades das soluções do problema de valores e vetores próprios foi calculada por Fox e Kapoor (1968). A sensibilidade dos valores próprios previstos é calculada através da derivação parcial dos quadrados das frequências naturais em relação aos parâmetros de atualização, como

$$\frac{\partial \omega_i^2}{\partial \theta_l} = \phi_i^T \left[\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \theta_l} - \omega_i^2 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \theta_l} \right] \phi_i \quad (3.19)$$

onde \mathbf{K} e \mathbf{M} representam as matrizes de rigidez e massa do sistema, respetivamente. Visto que os modos de vibração são linearmente independentes, a sensibilidade dos modos previstos é encontrada através da combinação linear dos $H \leq m$ modos considerados, definida por,

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial \theta_l} = \sum_{h=1}^H a_{ilh} \phi_h \quad (3.20)$$

que resulta na seguinte expressão (Maia e Silva,1997)

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial \theta_l} = \sum_{h=1, h \neq i}^H \left(\frac{\phi_h \phi_h^T}{\omega_i^2 - \omega_h^2} \left[\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \theta_l} - \omega_i^2 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \theta_l} \right] \phi_i \right) - \frac{1}{2} \phi_i \phi_i^T \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \theta_l} \phi_i \quad (3.21)$$

Conhecendo a matriz de sensibilidade, o vetor de parâmetros atualizados é dado por

$$\boldsymbol{\theta}_{j+1} = \boldsymbol{\theta}_j + \mathbf{T}_j(\mathbf{z}_m - \mathbf{z}_j) \quad (3.22)$$

onde a matriz de transformação \mathbf{T}_j é dada por,

$$\mathbf{T}_j = (\mathbf{S}_j^T \mathbf{W}_\varepsilon \mathbf{S}_j + \mathbf{W}_\vartheta)^{-1} \mathbf{S}_j^T \mathbf{W}_\varepsilon \quad (3.23)$$

onde \mathbf{W}_ε e \mathbf{W}_ϑ são matrizes de escala e regularização, respetivamente, para permitirem a regularização de equações de sensibilidade mal condicionadas (Ahmadian et al.,1998; Friswell et al.,2001).

O vetor dos parâmetros atualizados pode ser calculado utilizando a matriz de transformação \mathbf{T}_j obtida após a atualização do vetor de valores médios $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_j$. Na seção 3.5.1 do presente documento este processo será explicado em mais detalhe.

3.5. Atualização da matriz de covariância

A matriz de covariância associada a um vetor de variáveis aleatórias é a matriz cujo elemento na posição ij é a covariância entre os elementos i e j do vetor de variáveis aleatórias. A matriz de covariância generaliza a noção de variância para várias variáveis aleatórias. Como a covariância de uma variável aleatória i consigo mesma é apenas a variância dessa variável aleatória, cada elemento da diagonal principal da matriz de covariância é a variância de cada uma das variáveis aleatórias. Num contexto de atualização estocástica, o vetor de parâmetros atualizados no contexto determinístico tendo em conta o método de perturbação descrito na equação 3.22 pode ser escrito como:

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{j+1} + \Delta \boldsymbol{\theta}_{j+1} = \tilde{\boldsymbol{\theta}}_j + \Delta \boldsymbol{\theta}_j + (\tilde{\mathbf{T}}_j + \Delta \mathbf{T}_j)(\tilde{\mathbf{z}}_m + \Delta \mathbf{z}_m - \tilde{\mathbf{z}}_j - \Delta \mathbf{z}_j) \quad (3.24)$$

onde $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ e Δ denotam a média e perturbação na média respetivamente. Ao separar os termos de ordem zero e de primeira ordem, obtém-se as seguintes expressões (Khodaparast et al. 2008):

$$O(\Delta^0): \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{j+1} = \tilde{\boldsymbol{\theta}}_j + \tilde{\mathbf{T}}_j(\tilde{\mathbf{z}}_m - \tilde{\mathbf{z}}_j) \quad (3.25)$$

$$O(\Delta^1): \Delta \boldsymbol{\theta}_{j+1} = \Delta \boldsymbol{\theta}_j + \tilde{\mathbf{T}}_j(\Delta \mathbf{z}_m - \Delta \mathbf{z}_j) + \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \tilde{\mathbf{T}}_j}{\partial \mathbf{z}_m^{(i)}} \Delta \mathbf{z}_m^{(i)} \right) (\tilde{\mathbf{z}}_m - \tilde{\mathbf{z}}_j) \quad (3.26)$$

A equação 3.26 foi rearranjada por (Khodaparast et al. 2008) de forma a construir a matriz de covariância como:

$$\text{cov}(\Delta \boldsymbol{\theta}_{j+1}, \Delta \boldsymbol{\theta}_{j+1}) = \text{cov}(\Delta \boldsymbol{\theta}_j + \tilde{\mathbf{T}}_j(\Delta \mathbf{z}_m - \Delta \mathbf{z}_j) + \mathbf{A}_j \Delta \mathbf{z}_m, \Delta \boldsymbol{\theta}_j + \tilde{\mathbf{T}}_j(\Delta \mathbf{z}_m - \Delta \mathbf{z}_j) + \mathbf{A}_j \Delta \mathbf{z}_m) \quad (3.27)$$

Onde,

$$\mathbf{A}_j = \left[\frac{\partial \tilde{\mathbf{T}}_j}{\partial \mathbf{z}_m^{(1)}} \Big|_{\mathbf{z}_m^{(1)} = \tilde{\mathbf{z}}_m^{(1)}} (\tilde{\mathbf{z}}_m - \tilde{\mathbf{z}}_j) \quad \frac{\partial \tilde{\mathbf{T}}_j}{\partial \mathbf{z}_m^{(2)}} \Big|_{\mathbf{z}_m^{(2)} = \tilde{\mathbf{z}}_m^{(2)}} (\tilde{\mathbf{z}}_m - \tilde{\mathbf{z}}_j) \quad \dots \quad \frac{\partial \tilde{\mathbf{T}}_j}{\partial \mathbf{z}_m^{(n)}} \Big|_{\mathbf{z}_m^{(n)} = \tilde{\mathbf{z}}_m^{(n)}} (\tilde{\mathbf{z}}_m - \tilde{\mathbf{z}}_j) \right] \quad (3.28)$$

No entanto, a expressão completa tem a desvantagem de introduzir termos de sensibilidade de segunda ordem que são exigentes computacionalmente.

Assim sendo, como sugerido por Silva (2015) a matriz de covariância será desenvolvida usando apenas os primeiros dois termos do lado direito da equação 3.26:

$$cov(\Delta\theta_{j+1}, \Delta\theta_{j+1}) = cov\left(\Delta\theta_j + \tilde{T}_j(\Delta z_m - \Delta z_j), \Delta\theta_j + \tilde{T}_j(\Delta z_m - \Delta z_j)\right) \quad (3.29)$$

Ao expandir esta equação obtém-se (Govers and Link, 2010):

$$cov(\Delta\theta_{j+1}, \Delta\theta_{j+1}) = cov(\Delta\theta_j, \Delta\theta_j) - cov(\Delta\theta_j, \Delta z_j)\tilde{T}_j^T - \tilde{T}_j cov(\Delta z_j, \Delta\theta_j) + \tilde{T}_j cov(\Delta z_j, \Delta z_j)\tilde{T}_j^T + \tilde{T}_j cov(\Delta z_m, \Delta z_m)\tilde{T}_j^T \quad (3.30)$$

onde as perturbações dos parâmetros atualizados $\Delta\theta_j$ e das respostas previstas Δz_j são assumidas como estatisticamente independentes das respostas medidas Δz_m . Khodaparast et al. (2008) mostrou que todos os termos da matriz A_j desaparecem ao assumir a independência entre parâmetros e respostas previstas e os valores medidos, confirmando assim que se pode omitir o terceiro termo na equação 3.26. Esta simplificação é estritamente correta apenas para a primeira iteração, visto que as previsões iniciais não têm qualquer relação com os dados medidos. Nas iterações seguintes, a simplificação torna-se inválida, mas a experiência mostra que soluções viáveis são obtidas com esta aproximação.

3.5.1. Pequena perturbação em torno da média

Assumindo pequenas perturbações nos parâmetros, θ_j pode ser aproximado pela perturbação na média como:

$$\theta_j = \tilde{\theta}_j + T(\tilde{\theta}_j)(z_j - z(\tilde{\theta}_j)) \quad (3.31)$$

Ou,

$$\Delta\theta_j = T(\tilde{\theta}_j)(z_j - z(\tilde{\theta}_j)) \quad (3.32)$$

Quando é assumido que

$$\tilde{T}_j = T(\tilde{\theta}_j) \quad e \quad \tilde{z}_j = z(\tilde{\theta}_j) \quad (3.33)$$

Então

$$\Delta\theta_j = \tilde{T}_j(z_j - \tilde{z}_j) = \tilde{T}_j\Delta z_j \quad (3.34)$$

E assim os termos da equação 3.30 podem ser reformulados, obtendo-se,

$$cov(\Delta\theta_j, \Delta z_j)\tilde{T}_j^T = \tilde{T}_j cov(\Delta z_j, \Delta z_j)\tilde{T}_j^T \quad (3.35)$$

e

$$\tilde{\mathbf{T}}_j \text{cov}(\Delta \mathbf{z}_j, \Delta \boldsymbol{\theta}_j) = \tilde{\mathbf{T}}_j \text{cov}(\Delta \mathbf{z}_j, \Delta \mathbf{z}_j) \tilde{\mathbf{T}}_j^T \quad (3.36)$$

A substituição das equações 3.35 e 3.35 na equação 3.30 leva a

$$\text{cov}(\Delta \boldsymbol{\theta}_{j+1}, \Delta \boldsymbol{\theta}_{j+1}) = \text{cov}(\Delta \boldsymbol{\theta}_j, \Delta \boldsymbol{\theta}_j) + \tilde{\mathbf{T}}_j [\text{cov}(\Delta \mathbf{z}_m, \Delta \mathbf{z}_m) - \text{cov}(\Delta \mathbf{z}_j, \Delta \mathbf{z}_j)] \tilde{\mathbf{T}}_j^T, \quad (3.37)$$

que é igual à equação 3.29, dada por Govers & Link (2010)

Usando as mesmas suposições e a relação dada na equação 3.36,

$$\tilde{\mathbf{T}}_j \text{cov}(\Delta \mathbf{z}_j, \Delta \mathbf{z}_j) \tilde{\mathbf{T}}_j^T = \text{cov}(\Delta \boldsymbol{\theta}_j, \Delta \boldsymbol{\theta}_j) \quad (3.38)$$

$$\text{cov}(\Delta \boldsymbol{\theta}_j, \Delta \mathbf{z}_j) \tilde{\mathbf{T}}_j^T = \text{cov}(\Delta \boldsymbol{\theta}_j, \Delta \boldsymbol{\theta}_j) \quad (3.39)$$

$$\tilde{\mathbf{T}}_j \text{cov}(\Delta \mathbf{z}_j, \Delta \boldsymbol{\theta}_j) = \text{cov}(\Delta \boldsymbol{\theta}_j, \Delta \boldsymbol{\theta}_j) \quad (3.40)$$

A substituição das equações 3.38 a 3.40 na equação 3.30, ou a substituição da equação 3.38 em 3.37, leva à seguinte expressão dada por (Govers & Link 2010)

$$\text{cov}(\Delta \boldsymbol{\theta}_{j+1}, \Delta \boldsymbol{\theta}_{j+1}) = \tilde{\mathbf{T}}_j \text{cov}(\Delta \mathbf{z}_m, \Delta \mathbf{z}_m) \tilde{\mathbf{T}}_j^T \quad (3.41)$$

A equação 3.41 permite determinar as covariâncias dos parâmetros, usando a matriz $\tilde{\mathbf{T}}_j$ obtida no passo final da atualização determinística das médias usando a equação 3.25, eliminando a necessidade de utilizar “*forward propagation*”, para estimar a matriz de covariância, pois não é necessário calcular a covariância das respostas do modelo.

Com a matriz de covariância é possível obter a variância dos parâmetros $\boldsymbol{\theta}_{j+1}$, a partir da diagonal principal da matriz. Assumindo uma distribuição uniforme em cada nível de pertença *fuzzy*, é possível obter uma estimativa do raio do intervalo em cada nível α .

A variância de uma variável aleatória $\boldsymbol{\theta}_{j+1}$ com distribuição uniforme contínua no intervalo $[\underline{\boldsymbol{\theta}}_{j+1}, \bar{\boldsymbol{\theta}}_{j+1}]$ é calculada pela seguinte fórmula:

$$\sigma^2 = \frac{(\bar{\boldsymbol{\theta}}_{j+1} - \underline{\boldsymbol{\theta}}_{j+1})^2}{12} \quad (3.42)$$

O termo $(\bar{\boldsymbol{\theta}}_{j+1} - \underline{\boldsymbol{\theta}}_{j+1})$ é igual ao dobro do raio ($\delta \boldsymbol{\theta}_{j+1}$). Substituindo na equação 3.42 e resolvendo em ordem ao termo $(\bar{\boldsymbol{\theta}}_{j+1} - \underline{\boldsymbol{\theta}}_{j+1})$ é possível calcular o raio através de,

$$\delta \boldsymbol{\theta}_{j+1} = \sqrt{3} \sigma \quad (3.43)$$

Utilizando este resultado é possível derivar a expressão que é utilizada para obter uma estimativa do intervalo parâmetros atualizados $\check{\boldsymbol{\theta}}_{j+1}$ em cada nível α_i . A metodologia utilizada para a atualização do intervalo será explicada em mais detalhe na seção 3.8.

3.6. Quantificação da incerteza nas respostas de referência

As incertezas nas respostas medidas \mathbf{z}_i^m ($i = 1, 2, \dots, n$) surgem de várias fontes, como sejam tolerâncias de manufatura e/ou variações nas propriedades dos materiais, constituindo um espaço de parâmetros com n -dimensões, o vetor de respostas de referência \mathbf{Z}^m é dado por,

$$\mathbf{Z}^m = [\mathbf{z}_1^m \quad \mathbf{z}_2^m \quad \dots \quad \mathbf{z}_n^m]^T \in \mathbb{R}^n \quad (3.44)$$

onde n denota o número de parâmetros modais experimentais. Admitindo que a informação limitada nestes parâmetros modais é representada por uma amostragem de M pontos, nomeadamente \mathbf{z}_{is}^m ($s = 1, 2, \dots, M$), estas medições incertas são descritas através de intervalos.

O vetor dos valores médios é calculado como

$$\tilde{\mathbf{Z}}^m = \frac{1}{2} \left[\max_{1 \leq s \leq M} \mathbf{z}_s^m + \min_{1 \leq s \leq M} \mathbf{z}_s^m \right] \quad (3.45)$$

Ou, sob a forma de componentes,

$$\tilde{z}_i^m = \frac{1}{2} \left[\max_{1 \leq s \leq M} z_{is}^m + \min_{1 \leq s \leq M} z_{is}^m \right] \quad 1 \leq i \leq n \quad (3.46)$$

E o vetor de raios (ou erro máximo) de \mathbf{Z}^m é calculado como

$$\Delta \mathbf{Z}^m = \frac{1}{2} \left[\max_{1 \leq s \leq M} \mathbf{z}_s^m - \min_{1 \leq s \leq M} \mathbf{z}_s^m \right] \quad (3.47)$$

ou sob a forma de componentes

$$\Delta z_i^m = \frac{1}{2} \left[\max_{1 \leq s \leq M} z_{is}^m - \min_{1 \leq s \leq M} z_{is}^m \right] \quad 1 \leq i \leq n \quad (3.48)$$

Assim sendo, a incerteza nos parâmetros modais experimentais pode ser descrita como

$$\mathbf{z}^m = \tilde{\mathbf{z}}^m \pm \delta \mathbf{z}^m \quad (3.49)$$

ou então sob a forma de componentes

$$z_i^m = \tilde{z}_i^m \pm \delta z_i^m \quad 1 \leq i \leq n \quad (3.50)$$

em que δz_i^m representa o raio da variável z_i^m .

3.7. Método de perturbação para a atualização de intervalos

O método desenvolvido por Deng et al. (2017) incorpora a técnica de perturbação de primeira ordem e a função de custo utilizada na atualização determinística.

Segundo Khodaparast et al. (2011), o processo de atualização é considerado não-probabilístico visto que envolve a análise dos intervalos de respostas e dos parâmetros de atualização. Os métodos tradicionais de atualização determinística de modelos de elementos finitos envolvem sempre a minimização de uma função objetivo que consiste na soma dos quadrados das diferenças das respostas estruturais experimentais e do modelo, para identificar e corrigir os parâmetros estruturais:

$$\min_{\theta} r(\theta) = \sum_{i=1}^n (z_i(\theta) - z_i^m)^2 \quad (3.51)$$

De forma a contabilizar a variabilidade existente nas respostas medidas experimentalmente, que podem resultar de tolerâncias de manufatura e/ou propriedades dos materiais, o intervalo de parâmetros de atualização é escrito como,

$$\check{\theta} = \tilde{\theta} \pm \delta\theta \quad (3.52)$$

Assim sendo, também o i -ésimo parâmetro modal do modelo $z_i(\theta)$ e a função custo $r(\theta)$ deverão conter uma pequena variação determinística que é afetada por $\tilde{\theta}$ e $\delta\theta$ respectivamente:

$$z_i(\theta) = \check{z}_i(\tilde{\theta}) \pm \delta z_i(\delta\theta) \quad (3.53)$$

$$r(\theta) = \check{r}(\tilde{\theta}) \pm \delta r(\delta\theta) \quad (3.54)$$

A substituição das equações 3.50 e 3.53 na equação 3.51 permite reformular o problema de atualização não probabilística de intervalos do MEF como

$$\min_{\tilde{\theta} + \delta\theta} \check{r}(\tilde{\theta}) \pm \delta r(\delta\theta) = \sum_{i=1}^n \left[(\check{z}_i(\tilde{\theta}) \pm \delta z_i(\delta\theta)) - (\check{z}_i^m \pm \delta z_i^m) \right]^2 \quad (3.55)$$

Utilizando a técnica de perturbação de 1ª ordem, separando o termo de ordem zero e o termo de primeira ordem, é possível obter as seguintes formulações:

$$\min_{\tilde{\theta}} \check{r}(\tilde{\theta}) = \sum_{i=1}^n (\check{z}_i(\tilde{\theta}) - \check{z}_i^m)^2 \quad (3.56)$$

$$\min_{\delta\theta} \delta r(\delta\theta) = \sum_{i=1}^n \left[(\delta z_i(\delta\theta) - \delta z_i^m)^2 + 2(\check{z}_i(\tilde{\theta}) - \check{z}_i^m)(\delta z_i(\delta\theta) - \delta z_i^m) \right] \quad (3.57)$$

Após a convergência no valor médio dos parâmetros de atualização, o termo $(\tilde{\mathbf{z}}_i(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) - \tilde{\mathbf{z}}_i^m)$ tende para zero. Devido a isto o 2º termo da equação 2 $(\tilde{\mathbf{z}}_i(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) - \tilde{\mathbf{z}}_i^m)$ tende também para zero. Assim sendo a equação 3.57 pode ser simplificada como

$$\min_{\delta\boldsymbol{\theta}} \delta\mathbf{r}(\delta\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^n (\delta\mathbf{z}_i(\delta\boldsymbol{\theta}) - \delta\mathbf{z}_i^m)^2 \quad |\delta\mathbf{z}_i^m| \leq \Delta\mathbf{z}_i^m \quad (3.58)$$

Resolvendo o problema de minimização da equação 3.56 torna-se possível obter uma estimativa dos valores médios dos parâmetros incertos. A equação 3.58 permite encontrar os intervalos “verdadeiros” dos raios dos parâmetros de atualização. Ao substituir o termo $\delta\mathbf{z}_i^m$ por $\Delta\mathbf{z}_i^m$ encontramos o intervalo “verdadeiro” dos parâmetros de atualização e a equação 3.57 pode ser rescrita como

$$\min_{\delta\boldsymbol{\theta}} \delta\mathbf{r}(\delta\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^n (\delta\mathbf{z}_i(\delta\boldsymbol{\theta}) - \Delta\mathbf{z}_i^m)^2 \quad (3.59)$$

Ao estabelecer e resolver os problemas de minimização das equações 3.56 e 3.59, os intervalos dos parâmetros de atualização podem ser obtidos e expressos por propriedades dos intervalos como o valor médio e o raio.

3.7.1. Atualização dos valores médios e raios

A amostra de parâmetros de entrada é gerada utilizando o método do hipercubo latino, por forma a obter uma melhor cobertura do espaço de variáveis pelos valores amostrados. Posteriormente as respostas são calculadas pelo modelo computacional de modo a obter os dados de treino do meta-modelo. Ao treinar o meta-modelo é possível obter uma função de mapeamento entre os parâmetros $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1 \ \theta_2 \ \dots \ \theta_m]^T$ e os parâmetros modais analíticos $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}(\boldsymbol{\theta}) = [\mathbf{z}_1 \ \mathbf{z}_2 \ \dots \ \mathbf{z}_n]^T$ que pode ser construída e assumida como

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}(\boldsymbol{\theta}) = [\mathbf{z}_1(\boldsymbol{\theta}) \ \mathbf{z}_2(\boldsymbol{\theta}) \ \dots \ \mathbf{z}_n(\boldsymbol{\theta})]^T \quad (3.60)$$

A relação entre os parâmetros $\boldsymbol{\theta}$ e os parâmetros modais analíticos $\mathbf{Z}(\boldsymbol{\theta})$ também pode ser calculada através do modelo de elementos finitos. No entanto, neste caso é necessário fazer a análise de elementos finitos n vezes, em que n é o número de observações na amostra de parâmetros de entrada e, dependendo do tamanho da amostra e da complexidade do sistema em estudo, esta opção é mais exigente a nível computacional do que o uso de um meta-modelo para calcular a relação entre parâmetros de entrada e os respetivos parâmetros modais analíticos. A função erro do vetor de valores médios das respostas estruturais é implementada entre os dados analíticos $\tilde{\mathbf{Z}}(\tilde{\boldsymbol{\theta}})$ e os dados experimentais $\tilde{\mathbf{Z}}^m$.

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \tilde{\mathbf{Z}}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) - \tilde{\mathbf{Z}}^m \quad (3.61)$$

A relação $\tilde{\mathbf{Z}}(\tilde{\boldsymbol{\theta}})$ é determinada a partir a média dos parâmetros modais analíticos.

O algoritmo de atualização dos valores médios dos parâmetros incertos pode ser escrito como um problema de otimização.

$$\begin{cases} \min_{\tilde{\boldsymbol{\theta}}} \boldsymbol{\varepsilon}_1^T \boldsymbol{\varepsilon}_1 \\ \text{s. a. } \tilde{\boldsymbol{\theta}}_l \leq \tilde{\boldsymbol{\theta}} \leq \tilde{\boldsymbol{\theta}}_u \end{cases} \quad (3.62)$$

onde os índices l e u representam os limites inferiores e superiores do espaço de atualização respetivamente. Ao minimizar a função objetivo, os valores médios dos parâmetros de atualização são obtidos.

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}} = [\tilde{\theta}_1 \quad \tilde{\theta}_2 \quad \cdots \quad \tilde{\theta}_m]^T \quad (3.63)$$

Ao substituir estes valores na equação obtida pelo meta-modelo, resulta o vetor \mathbf{Z}_c correspondente a $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$

$$\tilde{\mathbf{Z}} = \mathbf{Z}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) = [\tilde{z}_1 \quad \tilde{z}_2 \quad \cdots \quad \tilde{z}_n]^T \quad (3.64)$$

Utilizando a mesma lógica que para os valores médios, também é possível aproximar a relação entre $\delta\boldsymbol{\theta}$ e $\delta\mathbf{Z}$:

$$\delta\mathbf{Z} = \delta\mathbf{Z}(\delta\boldsymbol{\theta}) = [\delta z_1(\delta\boldsymbol{\theta}) \quad \delta z_2(\delta\boldsymbol{\theta}) \quad \cdots \quad \delta z_n(\delta\boldsymbol{\theta})]^T \quad (3.65)$$

com

$$\delta\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta} - \tilde{\boldsymbol{\theta}} = [\theta_1 - \tilde{\theta}_1 \quad \theta_2 - \tilde{\theta}_2 \quad \cdots \quad \theta_m - \tilde{\theta}_m]^T \quad (3.66)$$

$$\delta\mathbf{Z} = \mathbf{Z} - \tilde{\mathbf{Z}} = [z_1 - \tilde{z}_1 \quad z_2 - \tilde{z}_2 \quad \cdots \quad z_n - \tilde{z}_n]^T \quad (3.67)$$

A função de erro no raio dos vetores de respostas estruturais da equação 3.68 é implementada para estimar as diferenças entre $\delta\mathbf{Z}$ e $\Delta\mathbf{Z}^m$:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_2 = \delta\mathbf{Z}(\delta\boldsymbol{\theta}) - \Delta\mathbf{Z}^m \quad (3.68)$$

O problema de determinação do raio do intervalo dos parâmetros de atualização pode ser formulado como o seguinte problema de otimização.

$$\begin{cases} \min_{\delta\boldsymbol{\theta}} \boldsymbol{\varepsilon}_2^T \boldsymbol{\varepsilon}_2 \\ \text{s. a. } \Delta\boldsymbol{\theta}_l \leq \delta\boldsymbol{\theta} \leq \Delta\boldsymbol{\theta}_u \end{cases} \quad (3.69)$$

Ao minimizar a função objetivo descrita na equação 3.69 do problema de otimização é possível obter o vetor de raios dos intervalos dos parâmetros de atualização.

$$\Delta\boldsymbol{\theta} = [\Delta\theta_1 \quad \Delta\theta_2 \quad \cdots \quad \Delta\theta_m]^T \quad (3.70)$$

O vetor atualizado dos intervalos dos parâmetros incertos é calculado como:

$$\Theta = [\tilde{\theta} - \Delta\theta, \tilde{\theta} + \Delta\theta] \quad (3.71)$$

Os algoritmos desenvolvidos utilizando os conceitos teóricos explicitados neste capítulo são apresentados em anexo. Os algoritmos 1 e 2 são baseados respectivamente nas técnicas de perturbação de primeira ordem, com a aplicação sucessiva em cada nível de pertinência *fuzzy* das equações descritas nas secções 3.7 a 3.9, e nas técnicas baseadas no cálculo da matriz de sensibilidade dos valores médios em cada nível de pertinência *fuzzy* para realizar a atualização da matriz de covariância dos parâmetros atualizados de forma a obter a estimativa dos intervalos dos parâmetros em cada nível de pertinência descritas nas secções 3.5 e 3.6.

Capítulo 4

4.1. Casos de estudo

Os casos de estudo para testar a metodologia proposta são os descritos por Khodaparast et al. (2011). O sistema em estudo é um sistema massa-mola com três graus de liberdade ilustrado na fig.4.1. São analisados 4 casos. No caso 1 é considerado um sistema com modos bem separados, os parâmetros de atualização são $\theta = [\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3]^T = [k_1 \ k_2 \ k_5]^T$. No caso 2 é considerado o mesmo sistema, mas com modos de vibração próximos sendo que neste caso os parâmetros de atualização são $\theta = [\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3]^T = [k_2 \ k_4 \ k_5]^T$. Nestes dois casos são feitos testes para amostras com 10, 30 e 100 observações, considerando funções de pertinência *fuzzy* do tipo triangular e empírico para modelar as respostas de referência do sistema. No caso 3 o sistema e parâmetros de atualização são os mesmos que os do caso 1, e os testes são realizando considerando amostras de referência e iniciais com 10000 observações. No caso 4 o sistema e parâmetros são os mesmos que os do caso 1, sendo que os testes são realizados considerando uma amostra de referência com 30 observações e uma amostra inicial com 10000 observações.

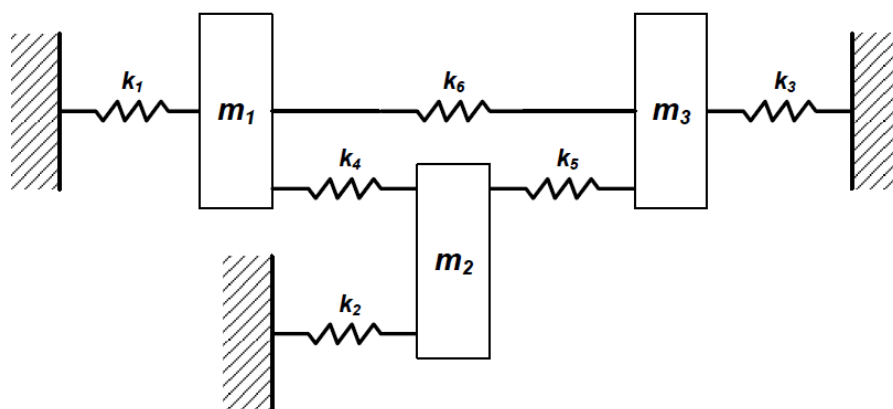


Figura 4.1 - Sistema massa-mola três graus de liberdade (adaptado de (Khodaparast et al. 2011)).

As amostras de referência são geradas utilizando o hipercubo latino e considerando uma distribuição normal dos parâmetros.

Nas tabelas abaixo estão representados os intervalos de referência em $\alpha_{0.0}$ para os casos de estudo 1 e 2.

Tabela 4.1- Intervalos de referência dos parâmetros de atualização.

| Caso 1 | | | Caso 2 | | |
|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| k_1 | k_2 | k_5 | k_2 | k_4 | k_5 |
| [0.8, 1.2] | [0.8, 1.2] | [0.8, 1.2] | [7.5, 8.5] | [1.8, 2.2] | [1.8, 2.2] |

4.2. Implementação

4.2.1. Modelo numérico

O sistema em estudo é relativamente simples, logo a utilização de análise de elementos finitos não é justificada, visto que o problema pode ser modelado considerando parâmetros concentrados. No entanto, o desenvolvimento com modelos de elementos finitos é em tudo semelhante.

A equação de equilíbrio dinâmico do sistema em estudo pode ser escrita como:

$$\mathbf{M}\ddot{u} + \mathbf{C}\dot{u} + \mathbf{K}u = \mathbf{F} \quad (4.1)$$

O sistema é não amortecido logo o 2º termo da equação (4.1) pode ser desprezado. Para vibrações harmónicas e na ausência de forças exteriores aplicadas ($\mathbf{F} = 0$), a expressão pode ser simplificada. Considerando que,

$$u = \bar{u} \sin \omega t \quad (4.2)$$

$$\dot{u} = \bar{u}\omega \cos \omega t \quad (4.3)$$

$$\ddot{u} = -\bar{u}\omega^2 \sin \omega t \quad (4.4)$$

a amplitude de vibração sinusoidal de liberdade correspondente u é representada por \bar{u} . Substituindo na equação (4.1) obtém-se

$$(-\omega^2 \mathbf{M}\bar{u} + \mathbf{K}\bar{u}) \sin \omega t = 0 \quad (4.5)$$

ou,

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\bar{u}_K = 0 \quad (4.6)$$

\mathbf{K} e \mathbf{M} representam respetivamente as matrizes de rigidez e massa do sistema. A equação 4.6 é a formulação de um sistema de valores e vetores próprios. Ao resolver este sistema é possível determinar as frequências naturais (valores próprios) e os modos de vibração (vetores próprios) do sistema em análise.

A matriz de rigidez do sistema é formulada como

$$\mathbf{K}_{(DOF,DOF)} = \begin{bmatrix} K_1 + K_4 + K_6 & -K_4 & -K_6 \\ -K_4 & K_2 + K_4 + K_5 & -K_5 \\ -K_6 & -K_5 & K_3 + K_5 + K_6 \end{bmatrix} (N/m) \quad (4.7)$$

A matriz massa

$$\mathbf{M}_{(DOF,DOF)} = \begin{bmatrix} M_1 & 0 & 0 \\ 0 & M_2 & 0 \\ 0 & 0 & M_3 \end{bmatrix} (Kg) \quad (4.8)$$

Tendo as respostas modais do sistema $\mathbf{Z}(\boldsymbol{\theta})$ é possível construir o vetor de respostas $\mathbf{z} = [z_1 \ z_2 \ \dots \ z_{nr}]$ que contém o hiper-espaço de respostas do sistema para as n observações da amostra de parâmetros incertos.

Com este vetor de respostas são construídas as funções de pertinência das nr respostas consideradas para os casos em estudo. Será considerado que \mathbf{Z} é composto por,

$$\mathbf{Z} = [\omega_{n_1}^2 \quad \omega_{n_2}^2 \quad \omega_{n_3}^2 \quad |\phi_{1,1}|] \quad (4.9)$$

Este vetor é utilizado para construir as funções de pertinência *fuzzy* das respostas. Após a construção das funções de pertinência *fuzzy* é possível obter a aproximação do valor médio e do raio nos intervalos *fuzzy* em cada α_{cut} utilizando as equações 3.45 e 3.47, respetivamente.

4.2.2. Otimização

De modo a resolver o problema de otimização dos valores médios e raios dos parâmetros incertos foram utilizadas as funções de otimização da toolbox OptimTool do MATLAB.

Para escolher a função mais adequada para resolver as formulações dos problemas de minimização a resolver foi consultado o manual do MATLAB (The Mathworks, Inc., 2015). A escolha do *solver* deve ser feita tendo em conta a tabela 4.2, fornecida no manual do MATLAB.

Tabela 4.2-Tabela de decisão de otimização

| Constraint Type | Objective Type | | | | |
|--------------------------------|--|-----------|--|--------------------------|------------|
| | Linear | Quadratic | Least Squares | Smooth Nonlinear | Nonsmooth |
| None | n/a ($f = \text{const}$, or $\text{min} = -\infty$) | quadprog | mldivide, lsqcurvefit, lsqnonlin | fminsearch, fminunc | fminsearch |
| Bound | linprog | quadprog | lsqcurvefit, lsqin, lsqnonlin, lsqnonneg | fminbnd, fmincon, fsemif | fminbnd |
| Linear | <u>linprog</u> | quadprog | lsqin | fmincon, fsemif | |
| General Smooth | <u>fmincon</u> , | fmincon | <u>fmincon</u> | fmincon, fsemif | |
| Discrete, with Bound or Linear | intlinprog | | | | |

O tipo de constrangimento do problema em estudo é um constrangimento de limites, ou seja, o valor ótimo dos parâmetros, valor médio e raio, estão dentro dos limites do espaço de procura.

As funções objetivo do problema são não lineares em relação aos parâmetros de atualização. Assim sendo o solver mais adequado para resolver o problema de otimização será o *fmincon*, não é possível utilizar o *fminbnd* visto que este solver apenas permite trabalhar com problemas com apenas uma variável.

Quanto ao algoritmo de otimização, é recomendado numa primeira iteração utilizar o algoritmo *interior-point*, em iterações seguintes deverá ser utilizado um dos dois algoritmos *sqp* ou *active-set*. O algoritmo *interior-point* apresenta bom desempenho para problemas de grande escala, mas no caso específico deste trabalho, visto que o problema não é de grande escala, a utilização deste algoritmo não é necessária, pois a função de barreira mantém as iteradas longe das restrições de desigualdade. O algoritmo *sqp* satisfaz os limites do problema em todas as iterações, mas, por observação empírica, verificou-se que o algoritmo *active-set* produz resultados mais precisos, tendo-se optado por utilizar o algoritmo *active-set*.

Este tipo de algoritmos geralmente têm a seguinte estrutura:

Algoritmo Genérico de otimização *active-set*

1. Encontrar um ponto inicial admissível, dentro do espaço de respostas
 2. **Repeat:** até suficientemente ótimo
 3. Resolver o problema de igualdade definido pelo *active-set* (aproximadamente)
 4. Calcular os multiplicadores de Lagrange no *active-set*
 5. Remover um subconjunto de constrangimentos com multiplicadores de Lagrange negativos
 6. Procurar os constrangimentos não admissíveis
 7. **End Repeat**
-

4.2.3. Algoritmos *fuzzy* de atualização de modelos

Como foi descrito anteriormente foram desenvolvidos dois algoritmos de atualização de modelos utilizando técnicas distintas para a obtenção da estimativa dos raios dos intervalos de parâmetros.

A atualização dos valores médios nos algoritmos 1 e 2, é realizada através da resolução do problema de minimização dos valores médios em cada α_{cut} (equação 3.62). Ao resolver este problema obtém-se uma estimativa do valor médio dos parâmetros atualizados.

Relativamente à atualização dos raios dos intervalos de parâmetros atualizados, nos algoritmos desenvolvidos são utilizadas duas abordagens distintas após a atualização dos valores médios dos parâmetros. No caso do algoritmo 1 é resolvido o problema de minimização descrito na equação 3.69, enquanto que no algoritmo 2 a atualização do raio do intervalo de parâmetros é feita através da atualização da matriz de covariância realizada utilizando a equação 3.41, sendo que, a estimativa do raio do intervalo de parâmetros atualizados é calculada através da equação 3.43.

Após a atualização dos valores médios e raios dos intervalos de parâmetros de atualização, são construídas as funções de pertinência dos parâmetros atualizados tendo em conta os limites dos intervalos em cada α_{cut} .

Os dois algoritmos desenvolvidos são expostos abaixo.

Algoritmo 1 Atualização *fuzzy* de modelos com técnica de perturbação de 1ª ordem

Requer: Conjunto de respostas de referência Z_{ref}

1. **For:** Cada resposta
2. Construir função de pertinência *fuzzy*
3. **End for**
4. Selecionar intervalo inicial de parâmetros e número de parâmetros a atualizar
5. Gerar amostra inicial (LHS)
6. Propagar a amostra inicial pelo modelo teórico para obter $Z(\theta)$
7. *Fuzzy* $Z(\theta)$
8. **For:** todos os α -cuts
9. Calcular $Z(\tilde{\theta})$
10. Correr otimização dos valores médios dos parâmetros
11. Estimativa de $\tilde{\theta}^{(\alpha)}$
12. **End for**
13. **For:** todos os α -cuts
14. Calcular $\Delta Z^{(\alpha)}$;
15. Correr otimização dos raios dos intervalos de parâmetros;
16. Estimativa de $\Delta \theta^{(\alpha)}$;
17. **End for**
18. Calcular Intervalo $\check{\theta}^{(\alpha)} = [\tilde{\theta}^{(\alpha)} \pm \Delta \theta^{(\alpha)}]$;
19. Medir erros no nível 0 de pertinência *fuzzy*;
20. Construir função de pertinência dos parâmetros atualizados;

Algoritmo 2 Atualização *fuzzy* de modelos através da atualização da matriz de covariância

Requer: Conjunto de respostas de referência \mathbf{Z}_{ref}

1. **For:** Cada resposta
2. Construir função de pertença *fuzzy*
3. **End for**
4. Selecionar intervalo inicial de parâmetros e número de parâmetros a atualizar
5. Gerar amostra inicial (LHS)
6. Propagar a amostra inicial pelo modelo teórico para obter $\mathbf{Z}(\boldsymbol{\theta})$
7. *Fuzzy* $\mathbf{Z}(\boldsymbol{\theta})$
8. **For:** todos os α -cuts
9. Calcular $\mathbf{Z}(\tilde{\boldsymbol{\theta}})$
10. Correr otimização dos valores médios dos parâmetros
11. Estimativa de $\tilde{\boldsymbol{\theta}}^{(\alpha)}$
12. Propagar pelo modelo calcular $\mathbf{Z}(\tilde{\boldsymbol{\theta}})^{(\alpha)}$;
13. Construir a matriz de sensibilidade $\mathbf{S}_j^{(\alpha)}(\tilde{\boldsymbol{\theta}})$ e $\mathbf{T}_j^{(\alpha)}(\tilde{\boldsymbol{\theta}})$;
14. Estimar $cov(\Delta\theta_{j+1}, \Delta\theta_{j+1})$
15. Calcular $\Delta\boldsymbol{\theta}_{j+1}$;
16. Calcular Intervalo $\tilde{\boldsymbol{\theta}}^{(\alpha)} = [\tilde{\boldsymbol{\theta}}^{(\alpha)} \pm \Delta\boldsymbol{\theta}^{(\alpha)}]$;
17. **End for**
18. Medir erros no nível 0 de pertença *fuzzy*;
19. Construir função de pertença dos parâmetros atualizados;

Capítulo 5

Resultados

Como referido no capítulo anterior, os casos de estudo que são apresentados, são iguais aos descritos em Khodaparast et al. (2011). Os dois algoritmos desenvolvidos são analisados utilizando as funções de pertinência triangulares e empíricas descritas na seção 3.3 para amostras com diferentes números de observações. Os resultados dos intervalos de parâmetros atualizados são tabelados e é calculado o erro relativo no nível 0 da função de pertinência dos parâmetros atualizados relativamente ao mesmo valor nos parâmetros de referência. Também são representados os respectivos valores médios e raios dos parâmetros atualizados em cada nível *fuzzy* e mais uma vez é calculado o erro relativo entre os resultados atualizados e de referência.

5.1. Caso 1- Sistema com modos de vibração bem separados

Este caso é obtido considerando K_1, K_2 e K_5 como parâmetros de atualização incertos. Os dois algoritmos são analisados utilizando funções de pertinência triangulares e empíricas no conjunto respostas de referência, para amostras iniciais e de referência com dez, trinta e cem observações.

5.1.1. Funções de pertinência triangulares

As funções de pertinência triangulares das respostas de referência com dez observações são apresentadas na figura 5.1.

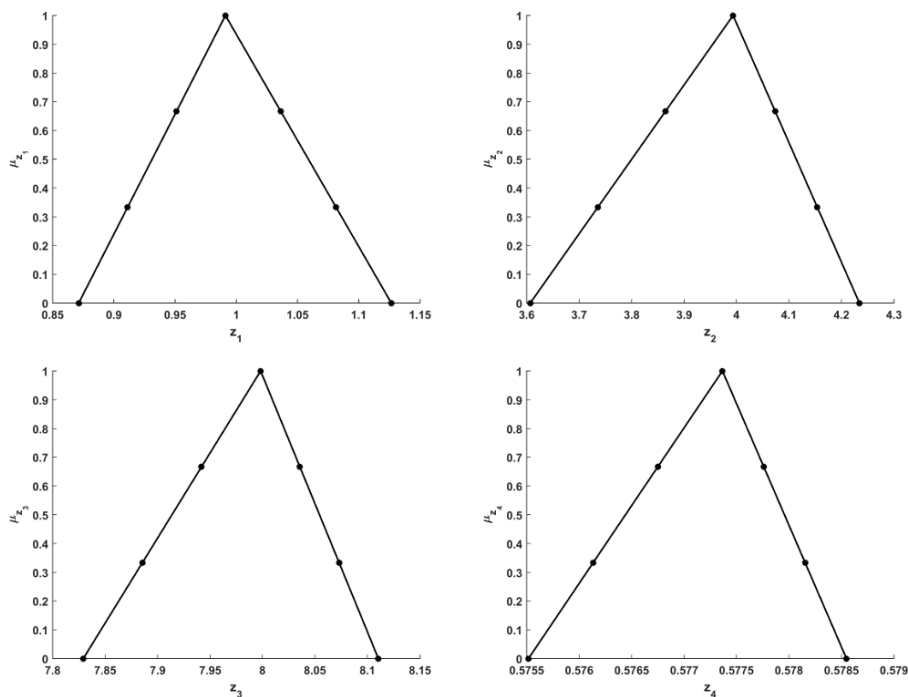


Figura 5.1 - Funções de pertinência triangulares das respostas de referência (Caso 1 com amostras com 10 observações).

5.1.1.1 Algoritmo 1

As funções de pertinência dos parâmetros atualizados para o caso 1, com amostras de referência e iniciais com dez observações são apresentadas na figura 5.2.

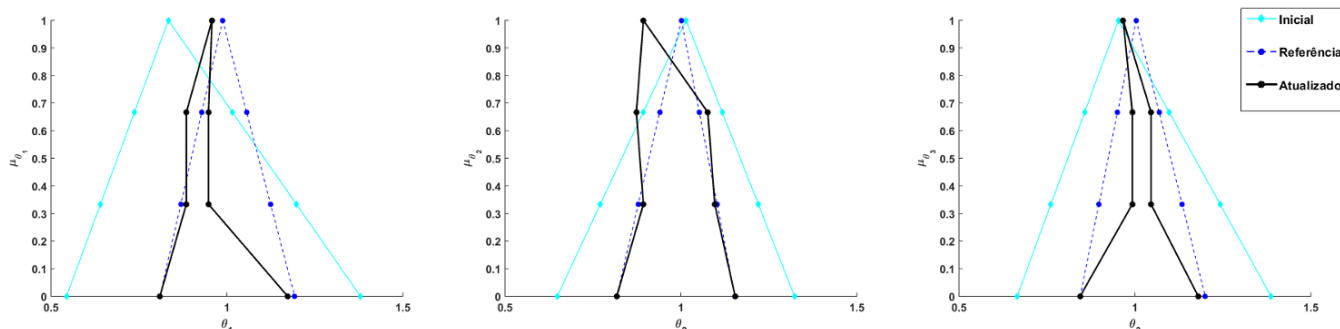


Figura 5.2 – Funções de pertinência *fuzzy* triangulares iniciais, de referência e atualizadas (caso 1 com amostras de 10 observações).

Os intervalos, valores médios e raios obtidos através do algoritmo 1 para cada nível de pertinência α são apresentados nas tabelas 5.1, 5.2 e 5.3, respectivamente.

Tabela 5.1 - Parâmetros *fuzzy* em cada α_{cut} (Caso 1 com funções de pertinência triangulares e 10 observações).

| | $\underline{\theta}_1$ | $\overline{\theta}_1$ | $\underline{\theta}_2$ | $\overline{\theta}_2$ | $\underline{\theta}_3$ | $\overline{\theta}_3$ |
|--------------------------------------|------------------------|-----------------------|------------------------|-----------------------|------------------------|-----------------------|
| Inicial | 0.5000 | 1.5000 | 0.5000 | 1.5000 | 0.5000 | 1.5000 |
| $\alpha_{1.0000}$ | 0.9576 | 0.9576 | 0.8933 | 0.8933 | 0.9666 | 0.9666 |
| $\alpha_{0.6667}$ | 0.8846 | 0.9476 | 0.8733 | 1.0763 | 0.9926 | 1.0458 |
| $\alpha_{0.3333}$ | 0.8846 | 0.9476 | 0.8933 | 1.0962 | 0.9925 | 1.0458 |
| $\alpha_{0.0000}$ | 0.8094 | 1.1724 | 0.8175 | 1.1539 | 0.8443 | 1.1798 |
| Ref $\alpha_{0,0}$ | 0.8095 | 1.1924 | 0.8174 | 1.1537 | 0.8443 | 1.1998 |
| Erro (%) | -0.0124 | -1,6773 | 0,0122 | 0,0173 | 0.0000 | -1,6670 |

Na tabela 5.1 são apresentados os valores dos intervalos atualizados utilizando o algoritmo 1. Como se pode observar o valor dos erros no nível zero de pertinência não ultrapassa os 2%. No entanto as funções de pertinência obtidas não são válidas visto que existem múltiplas correspondências *fuzzy* nos resultados obtidos

Relativamente aos raios dos parâmetros atualizados estes apresentam erros mais significativos na casa dos 5%.

Tabela 5.2 - Valores médios dos parâmetros atualizados e erros relativos para 10 observações (Caso 1 com funções de pertinência *fuzzy* triangulares).

| | $\tilde{\theta}_1$ | $\tilde{\theta}_2$ | $\tilde{\theta}_3$ |
|--------------------------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| $\alpha_{1.0000}$ | 0.9576 | 0.8933 | 0.9666 |
| $\alpha_{0.6667}$ | 0.9161 | 0.9748 | 1.0192 |
| $\alpha_{0.3333}$ | 0.9161 | 0.9948 | 1.0191 |
| $\alpha_{0.0000}$ | 0.9909 | 0.9857 | 1.0121 |
| Ref $\alpha_{0,0}$ | 1.0009 | 0.9855 | 1.0221 |
| Erro (%) | -0.9991 | 0.0203 | -0.9784 |

Tabela 5.3 - Raio dos parâmetros atualizados e erros relativos para 10 observações (Caso 1 com funções de pertinência *fuzzy* triangulares).

| | $\Delta\theta_1$ | $\Delta\theta_2$ | $\Delta\theta_3$ |
|--------------------------------------|------------------|------------------|------------------|
| $\alpha_{1.0000}$ | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| $\alpha_{0.6667}$ | 0.0315 | 0.1015 | 0.0266 |
| $\alpha_{0.3333}$ | 0.0315 | 0.1014 | 0.0266 |
| $\alpha_{0.0000}$ | 0.1815 | 0.1682 | 0.1677 |
| Ref $\alpha_{0,0}$ | 0.1915 | 0.1682 | 0.1777 |
| Erro (%) | -5.2227 | 0.0000 | -5.6275 |

As funções de pertinência dos parâmetros atualizados para o caso 1, com amostras de referência e iniciais com trinta observações são apresentadas na figura 5.3.

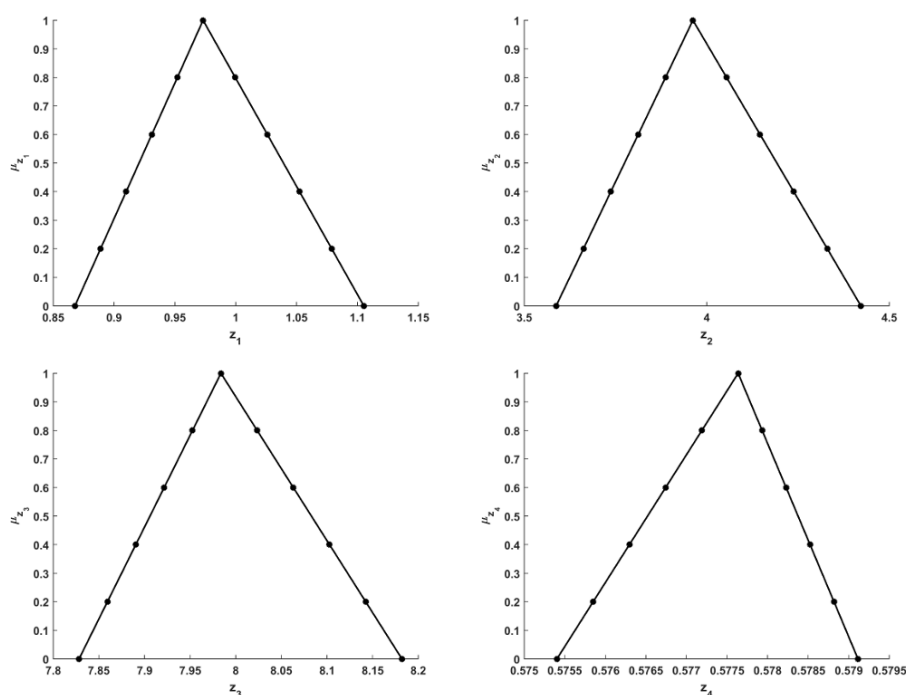


Figura 5.3- Funções de pertinência triangulares das respostas de referência (Caso 1 com amostras com 30 observações).

As funções de pertinência dos parâmetros atualizados obtidas através do algoritmo 1 para amostras iniciais e de referência com trinta observações são apresentadas na figura 5.4.

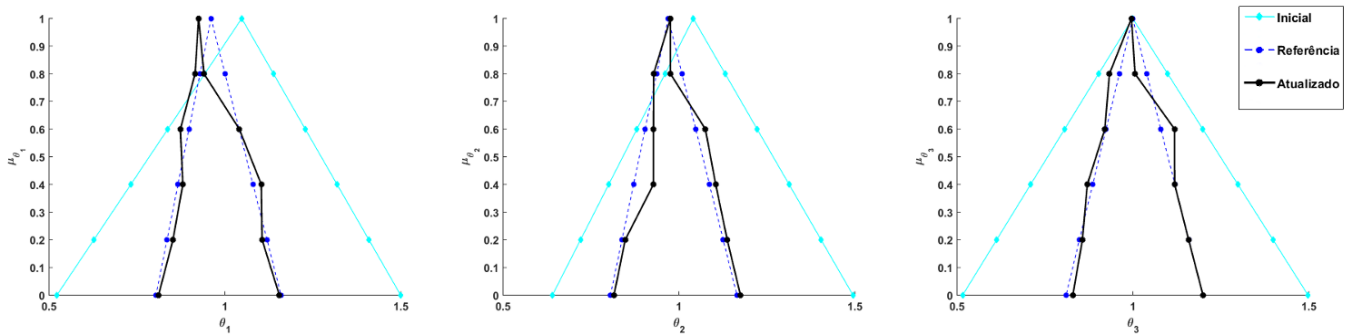


Figura 5.4 – Funções de pertinência *fuzzy* triangulares iniciais, de referência e atualizadas (caso 1 com amostras de 30 observações).

Nas tabelas 5.4, 5.5 e 5.6 são apresentados respectivamente os resultados obtidos para o intervalo, valor médio e raio em cada nível de pertinência α_i .

Tabela 5.4 - Parâmetros *fuzzy* em cada α_{cut} , caso 1 com funções de pertinência triangulares e 30 observações.

| | $\underline{\theta}_1$ | $\overline{\theta}_1$ | $\underline{\theta}_2$ | $\overline{\theta}_2$ | $\underline{\theta}_3$ | $\overline{\theta}_3$ |
|---------------------------------------|------------------------|-----------------------|------------------------|-----------------------|------------------------|-----------------------|
| Inicial | 0.5 | 1.5 | 0.5 | 1.5 | 0.5 | 1.5 |
| $\alpha_{1.0000}$ | 0.9251 | 0.9251 | 0.9758 | 0.9758 | 0.9959 | 0.9959 |
| $\alpha_{0.8000}$ | 0.9151 | 0.9405 | 0.9282 | 0.9758 | 0.9332 | 1.0059 |
| $\alpha_{0.6000}$ | 0.8733 | 1.0408 | 0.9276 | 1.0751 | 0.9201 | 1.1184 |
| $\alpha_{0.4000}$ | 0.8803 | 1.1034 | 0.9276 | 1.1045 | 0.8703 | 1.1185 |
| $\alpha_{0.2000}$ | 0.8523 | 1.1056 | 0.8474 | 1.1373 | 0.8564 | 1.1583 |
| $\alpha_{0.0000}$ | 0.8113 | 1.1546 | 0.8153 | 1.1748 | 0.8293 | 1.1991 |
| Ref. $\alpha_{0,0}$ | 0.8041 | 1.1594 | 0.8053 | 1.1648 | 0.8101 | 1.1998 |
| Erro (%) | 0.8954 | -0.4140 | 1.2418 | 0.8585 | 2.3701 | -0.0583 |

Tabela 5.5 - Valores médios dos parâmetros atualizados e erros relativos para 30 observações, caso 1 com funções de pertinência *fuzzy* triangulares.

| | $\tilde{\theta}_1$ | $\tilde{\theta}_2$ | $\tilde{\theta}_3$ |
|---------------------------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| $\alpha_{1.0000}$ | 0.9251 | 0.9758 | 0.9959 |
| $\alpha_{0.8000}$ | 0.9278 | 0.9520 | 0.9696 |
| $\alpha_{0.6000}$ | 0.9571 | 1.0014 | 1.0193 |
| $\alpha_{0.4000}$ | 0.9918 | 1.0161 | 0.9944 |
| $\alpha_{0.2000}$ | 0.9790 | 0.9923 | 1.0074 |
| $\alpha_{0.0000}$ | 0.9830 | 0.9951 | 1.0142 |
| Ref. $\alpha_{0,0}$ | 0.9818 | 0.9851 | 1.0049 |
| Erro (%) | 0.1222 | 1.0151 | 0.9255 |

Tabela 5.6 - Raio dos parâmetros atualizados e erros relativos para 30 observações, caso 1 com funções de pertinência *fuzzy* triangulares.

| | $\Delta\theta_1$ | $\Delta\theta_2$ | $\Delta\theta_3$ |
|--------------------------------------|------------------|------------------|------------------|
| $\alpha_{1.0000}$ | 0 | 0 | 0 |
| $\alpha_{0.8000}$ | 0.0127 | 0.0238 | 0.0364 |
| $\alpha_{0.6000}$ | 0.0838 | 0.0738 | 0.0991 |
| $\alpha_{0.4000}$ | 0.1115 | 0.0884 | 0.1241 |
| $\alpha_{0.2000}$ | 0.1266 | 0.1450 | 0.1510 |
| $\alpha_{0.0000}$ | 0.1717 | 0.1798 | 0.1849 |
| Ref $\alpha_{0,0}$ | 0.1776 | 0.1798 | 0.1949 |
| Erro (%) | -3.3221 | 0.0000 | -5.1308 |

Com o aumento do número de observações nas amostras de referência e inicial, verifica-se um ligeiro aumento dos erros nos intervalos dos parâmetros atualizados, como pode ser verificado na tabela 5.4. Apesar de este aumento no valor dos erros, os intervalos continuam a apresentar um valor de erro aceitável. Outro aspeto a considerar é o aumento da semelhança geométrica das funções de pertinência atualizadas com as respetivas funções de pertinência dos parâmetros de referência.

Na figura 5.5. são apresentadas as funções de pertinência das respostas amostra de dados de referência contendo cem observações.

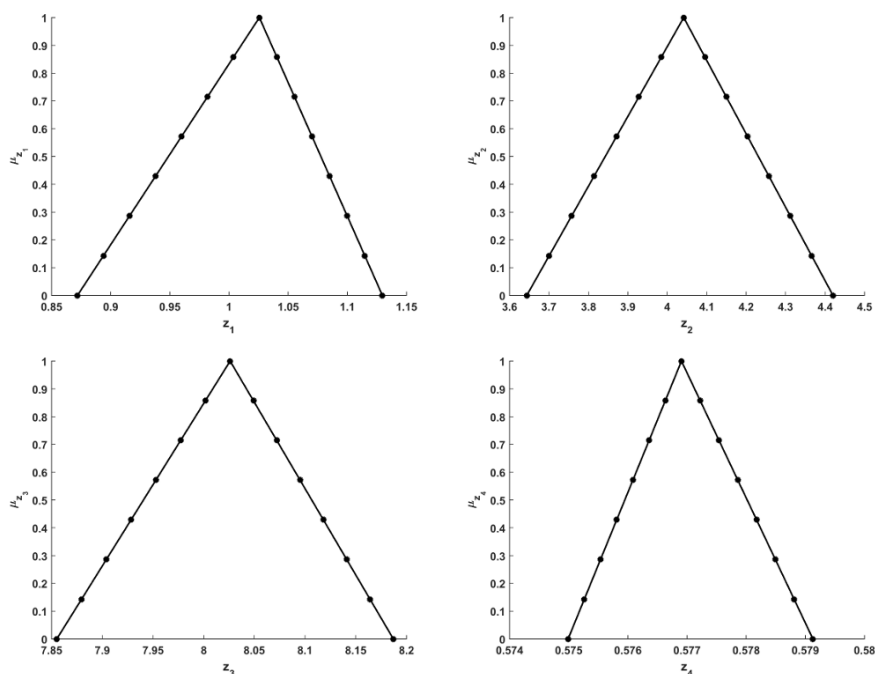


Figura 5.5 - Funções de pertinência triangulares das respostas de referência, caso 1 com amostras com 100 observações.

As funções de pertença dos parâmetros atualizados para as amostras de referência e iniciais com 100 observações são apresentadas na figura 5.6.

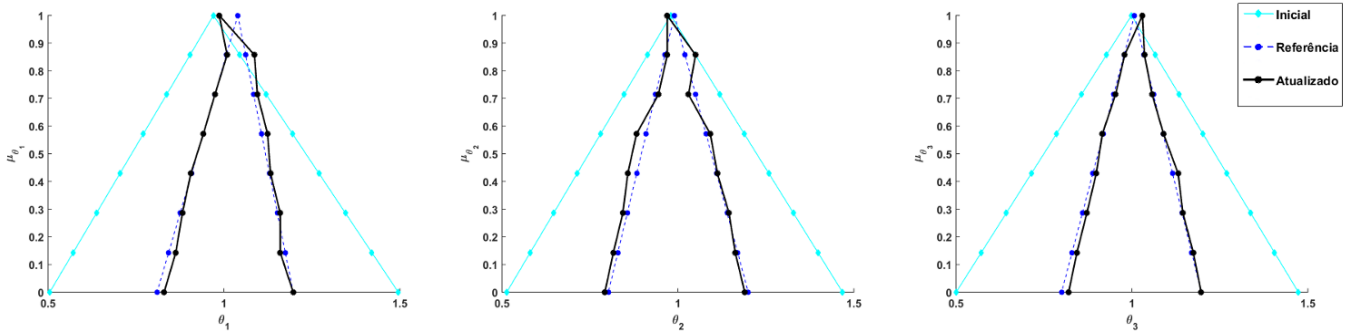


Figura 5.6 - Funções de pertença *fuzzy* triangulares iniciais, de referência e atualizadas, caso 1 com amostras de 100 observações.

Tabela 5.7 - Parâmetros *fuzzy* em cada α_{cut} , caso 1 com funções de pertença triangulares e 100 observações).

| | $\underline{\theta}_1$ | $\overline{\theta}_1$ | $\underline{\theta}_2$ | $\overline{\theta}_2$ | $\underline{\theta}_3$ | $\overline{\theta}_3$ |
|--------------------------------------|------------------------|-----------------------|------------------------|-----------------------|------------------------|-----------------------|
| Inicial | 0.5 | 1.5 | 0.5 | 1.5 | 0.5 | 1.5 |
| $\alpha_{1.0000}$ | 0.9868 | 0.9868 | 0.9696 | 0.9696 | 1.0298 | 1.0298 |
| $\alpha_{0.8571}$ | 1.0090 | 1.0868 | 0.9696 | 1.0499 | 0.9794 | 1.0356 |
| $\alpha_{0.7143}$ | 0.9744 | 1.0951 | 0.9445 | 1.0299 | 0.9534 | 1.0574 |
| $\alpha_{0.5714}$ | 0.9415 | 1.1241 | 0.8821 | 1.0920 | 0.9159 | 1.0899 |
| $\alpha_{0.4286}$ | 0.9059 | 1.1323 | 0.8575 | 1.1122 | 0.8986 | 1.1314 |
| $\alpha_{0.2857}$ | 0.8819 | 1.1600 | 0.8434 | 1.1451 | 0.8718 | 1.1448 |
| $\alpha_{0.1429}$ | 0.8632 | 1.1600 | 0.8165 | 1.1629 | 0.8436 | 1.1745 |
| $\alpha_{0.0000}$ | 0.8301 | 1.1969 | 0.7923 | 1.1897 | 0.8201 | 1.1967 |
| Ref $\alpha_{0,0}$ | 0.8101 | 1.1969 | 0.8023 | 1.1997 | 0.8001 | 1.1967 |
| Erro (%) | 2.4688 | 0.0000 | -1.2464 | -0.8335 | 2.4997 | 0.0000 |

Tabela 5.8 - Valores médios dos parâmetros atualizados e erros relativos para 100 observações, caso 1 com funções de pertença *fuzzy* triangulares.

| | $\tilde{\theta}_1$ | $\tilde{\theta}_2$ | $\tilde{\theta}_3$ |
|--------------------------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| $\alpha_{1.0000}$ | 0.9868 | 0.9696 | 1.0298 |
| $\alpha_{0.8571}$ | 1.0479 | 1.0098 | 1.0075 |
| $\alpha_{0.7143}$ | 1.0347 | 0.9872 | 1.0054 |
| $\alpha_{0.5714}$ | 1.0328 | 0.9871 | 1.0029 |
| $\alpha_{0.4286}$ | 1.0191 | 0.9848 | 1.0150 |
| $\alpha_{0.2857}$ | 1.0210 | 0.9943 | 1.0083 |
| $\alpha_{0.1429}$ | 1.0088 | 0.9897 | 1.0090 |
| $\alpha_{0.0000}$ | 1.0056 | 0.9910 | 1.0084 |
| Ref $\alpha_{0,0}$ | 1.0035 | 1.0010 | 0.9984 |
| Erro (%) | 0.2093 | -0.9990 | 1.0016 |

Tabela 5.9 - Raio dos parâmetros atualizados e erros relativos para 100 observações, caso 1 com funções de pertinência *fuzzy* triangulares.

| | $\Delta\theta_1$ | $\Delta\theta_2$ | $\Delta\theta_3$ |
|--------------------------------------|------------------|------------------|------------------|
| $\alpha_{1.0000}$ | 0 | 0 | 0 |
| $\alpha_{0.8571}$ | 0.0389 | 0.0402 | 0.0281 |
| $\alpha_{0.7143}$ | 0.0604 | 0.0427 | 0.0520 |
| $\alpha_{0.5714}$ | 0.0913 | 0.1049 | 0.0870 |
| $\alpha_{0.4286}$ | 0.1132 | 0.1273 | 0.1164 |
| $\alpha_{0.2857}$ | 0.1390 | 0.1509 | 0.1365 |
| $\alpha_{0.1429}$ | 0.1484 | 0.1732 | 0.1654 |
| $\alpha_{0.0000}$ | 0.1834 | 0.1987 | 0.1883 |
| Ref $\alpha_{0,0}$ | 0.1934 | 0.1987 | 0.1983 |
| Erro (%) | -5.1706 | 0.0000 | -5.0429 |

Observando as tabelas 5.7 a 5.9, para amostras com 100 observações, verifica-se a mesma tendência que no caso com 30 observações. Apesar do ligeiro aumento dos erros nos limites dos intervalos de parâmetros atualizados, os valores dos erros relativos continuam a apresentar valores aceitáveis.

Quanto às funções de pertinência dos parâmetros atualizados, como se pode observar na figura 5.6, estão bastante próximas das funções de pertinência de referência, apesar de existirem alguns desvios nos níveis α superiores.

5.1.1.2 Algoritmo 2

Na figura 5.7 são apresentadas as funções de pertinência triangulares obtidas através do algoritmo 2 para amostras contendo 10 observações.

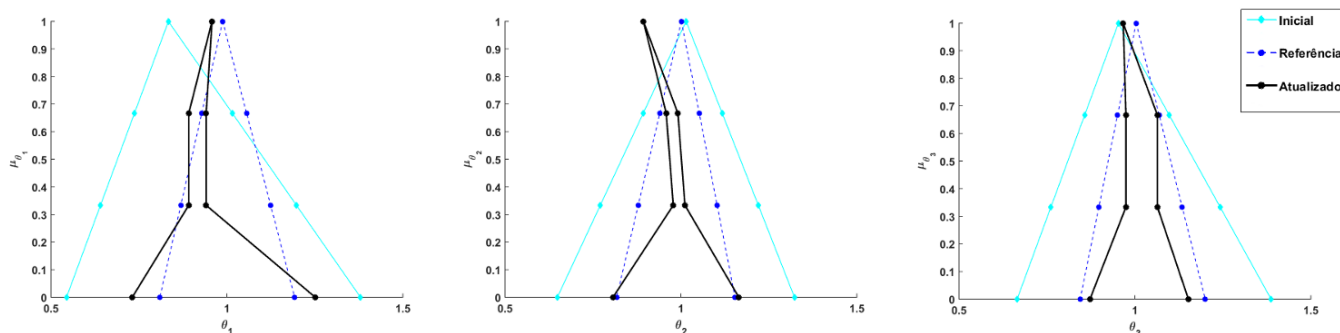


Figura 5.7 – Funções de pertinência *fuzzy* triangulares iniciais, de referência e atualizadas, caso 1 com amostras de 10 observações.

Tabela 5.10 - Parâmetros *fuzzy* em cada α_{cut} , caso 1 com funções de pertinência triangulares e 10 observações.

| | $\underline{\theta}_1$ | $\overline{\theta}_1$ | $\underline{\theta}_2$ | $\overline{\theta}_2$ | $\underline{\theta}_3$ | $\overline{\theta}_3$ |
|--------------------------------------|------------------------|-----------------------|------------------------|-----------------------|------------------------|-----------------------|
| Inicial | 0.5000 | 1.5000 | 0.5000 | 1.5000 | 0.5000 | 1.5000 |
| $\alpha_{1.0000}$ | 0.9576 | 0.9576 | 0.8933 | 0.8933 | 0.9666 | 0.9666 |
| $\alpha_{0.6667}$ | 0.8915 | 0.9408 | 0.9582 | 0.9914 | 0.9745 | 1.0639 |
| $\alpha_{0.3333}$ | 0.8915 | 0.9408 | 0.9782 | 1.0114 | 0.9744 | 1.0639 |
| $\alpha_{0.0000}$ | 0.7310 | 1.2508 | 0.8070 | 1.1645 | 0.8723 | 1.1518 |
| Ref $\alpha_{0,0}$ | 0.8095 | 1.1924 | 0.8174 | 1.1537 | 0.8443 | 1.1998 |
| Erro (%) | -9.6973 | 4.8977 | -1.2723 | 0.9361 | 3.3164 | -4.0007 |

Tabela 5.11 - Valores médios dos parâmetros atualizados e erros relativos para 10 observações, caso 1 com funções de pertinência *fuzzy* triangulares.

| | $\tilde{\theta}_1$ | $\tilde{\theta}_2$ | $\tilde{\theta}_3$ |
|--------------------------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| $\alpha_{1.0000}$ | 0.9576 | 0.8933 | 0.9666 |
| $\alpha_{0.6667}$ | 0.9161 | 0.9748 | 1.0192 |
| $\alpha_{0.3333}$ | 0.9161 | 0.9948 | 1.0191 |
| $\alpha_{0.0000}$ | 0.9909 | 0.9857 | 1.0121 |
| Ref $\alpha_{0,0}$ | 1.0009 | 0.9855 | 1.0221 |
| Erro (%) | -0.9991 | 0.0203 | -0.9784 |

Tabela 5.12 - Raio dos parâmetros atualizados e erros relativos para 10 observações, caso 1 com funções de pertinência *fuzzy* triangulares.

| | $\Delta\theta_1$ | $\Delta\theta_2$ | $\Delta\theta_3$ |
|--------------------------------------|------------------|------------------|------------------|
| $\alpha_{1.0000}$ | 0 | 0 | 0 |
| $\alpha_{0.6667}$ | 0.0247 | 0.0166 | 0.0447 |
| $\alpha_{0.3333}$ | 0.0247 | 0.0166 | 0.0447 |
| $\alpha_{0.0000}$ | 0.2599 | 0.1787 | 0.1398 |
| Ref $\alpha_{0,0}$ | 0.1915 | 0.1682 | 0.1777 |
| Erro (%) | 35.7180 | 6.2426 | -21.3281 |

Como se pode observar nas tabelas 5.10 a 5.12, verificou-se um aumento nos erros relativos no nível de pertinência zero, relativamente aos resultados obtidos com o algoritmo 1. A estimativas dos raios calculadas através da matriz de covariância apresentam erros bastante significativos (acima dos 10%) para os parâmetros θ_1 e θ_3 . No entanto, os erros dos valores médios atualizados estão satisfatórios, permitindo obter estimativas dos intervalos no nível zero de pertinência com erros abaixo dos 10%.

Relativamente às funções de pertinência dos parâmetros θ_1 e θ_2 , estas não respeitam a condição de convexidade dos números *fuzzy*, enunciadas na seção 3.1.2 do presente documento.

As funções de pertinência triangulares para amostras de trinta observações obtidas através do algoritmo 2 são apresentadas na figura 5.8.

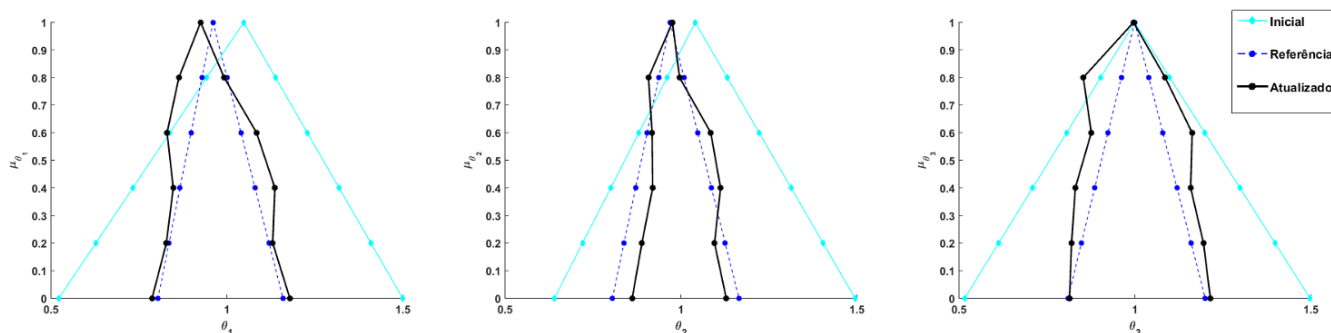


Figura 5.8 – Funções de pertinência *fuzzy* triangulares iniciais, de referência e atualizadas, caso 1 com amostras de 30 observações.

Tabela 5.13 - Parâmetros *fuzzy* em cada α_{cut} , caso 1 com funções de pertinência triangulares e 30 observações.

| | $\underline{\theta}_1$ | $\overline{\theta}_1$ | $\underline{\theta}_2$ | $\overline{\theta}_2$ | $\underline{\theta}_3$ | $\overline{\theta}_3$ |
|---------------------------------------|------------------------|-----------------------|------------------------|-----------------------|------------------------|-----------------------|
| Inicial | 0.5 | 1.5 | 0.5 | 1.5 | 0.5 | 1.5 |
| $\alpha_{1.0000}$ | 0.9251 | 0.9251 | 0.9758 | 0.9758 | 0.9959 | 0.9959 |
| $\alpha_{0.8000}$ | 0.8635 | 0.9922 | 0.9079 | 0.9961 | 0.8532 | 1.0859 |
| $\alpha_{0.6000}$ | 0.8299 | 1.0843 | 0.9179 | 1.0848 | 0.8760 | 1.1625 |
| $\alpha_{0.4000}$ | 0.8475 | 1.1361 | 0.9196 | 1.1125 | 0.8305 | 1.1583 |
| $\alpha_{0.2000}$ | 0.8279 | 1.1301 | 0.8892 | 1.0954 | 0.8199 | 1.1948 |
| $\alpha_{0.0000}$ | 0.7872 | 1.1787 | 0.8615 | 1.1287 | 0.8141 | 1.2143 |
| Ref. $\alpha_{0,0}$ | 0.8041 | 1.1594 | 0.8053 | 1.1648 | 0.8101 | 1.1998 |
| Erro (%) | -2.1017 | 1.6647 | 6.9787 | -3.0992 | 0.4938 | 1.2085 |

Tabela 5.14 - Valores médios dos parâmetros atualizados e erros relativos para 30 observações, caso 1 com funções de pertinência *fuzzy* triangulares.

| | $\tilde{\theta}_1$ | $\tilde{\theta}_2$ | $\tilde{\theta}_3$ |
|---------------------------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| $\alpha_{1.0000}$ | 0.9251 | 0.9758 | 0.9959 |
| $\alpha_{0.8000}$ | 0.9278 | 0.9520 | 0.9696 |
| $\alpha_{0.6000}$ | 0.9571 | 1.0014 | 1.0193 |
| $\alpha_{0.4000}$ | 0.9918 | 1.0161 | 0.9944 |
| $\alpha_{0.2000}$ | 0.9790 | 0.9923 | 1.0074 |
| $\alpha_{0.0000}$ | 0.9830 | 0.9951 | 1.0142 |
| Ref. $\alpha_{0,0}$ | 0.9818 | 0.9851 | 1.0049 |
| Erro (%) | 0.1222 | 1.0151 | 0.9255 |

Tabela 5.15 - Raio dos parâmetros atualizados e erros relativos para 30 observações, caso 1 com funções de pertinência *fuzzy* triangulares.

| | $\Delta\theta_1$ | $\Delta\theta_2$ | $\Delta\theta_3$ |
|---------------------------------------|------------------|------------------|------------------|
| $\alpha_{1.0000}$ | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| $\alpha_{0.8000}$ | 0.0644 | 0.0441 | 0.1163 |
| $\alpha_{0.6000}$ | 0.1272 | 0.0835 | 0.1432 |
| $\alpha_{0.4000}$ | 0.1443 | 0.0964 | 0.1639 |
| $\alpha_{0.2000}$ | 0.1511 | 0.1031 | 0.1875 |
| $\alpha_{0.0000}$ | 0.1957 | 0.1336 | 0.2001 |
| Ref. $\alpha_{0,0}$ | 0.1776 | 0.1798 | 0.1949 |
| Erro (%) | 10.1914 | -25.6952 | 2.6680 |

Os resultados obtidos após a atualização com o algoritmo 2 são apresentados nas tabelas 5.13 a 5.15.

Com 30 observações a geometria das funções de pertinência dos parâmetros atualizados altera-se, verificando-se uma maior semelhança entre estas e as funções de pertinência dos parâmetros de referência. O valor dos erros dos intervalos de parâmetros atualizados continua abaixo dos 10% e verifica-se a diminuição do erro nos raios dos intervalos para os parâmetros θ_1 e θ_3 , embora haja um aumento no parâmetro θ_2 .

As funções de pertença obtidas através do algoritmo 2 para o caso de estudo 1, com amostras de 100 observações e funções de pertença *fuzzy* triangulares são apresentadas na figura 5.9.

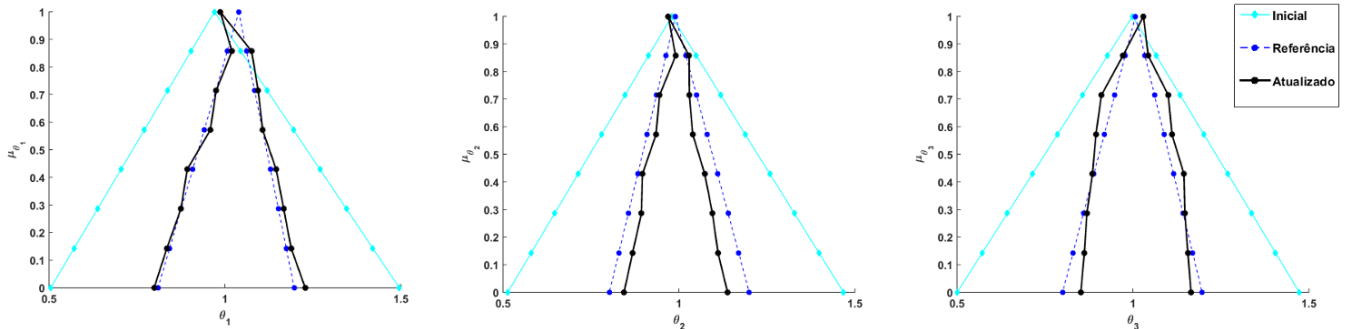


Figura 5.9 – Funções de pertença *fuzzy* triangulares iniciais, de referência e atualizadas, caso 1 com amostras de 100 observações.

Tabela 5.16 - Parâmetros *fuzzy* em cada α_{cut} , caso 1 com funções de pertença triangulares e 100 observações.

| | $\underline{\theta}_1$ | $\overline{\theta}_1$ | $\underline{\theta}_2$ | $\overline{\theta}_2$ | $\underline{\theta}_3$ | $\overline{\theta}_3$ |
|--------------------------------------|------------------------|-----------------------|------------------------|-----------------------|------------------------|-----------------------|
| Inicial | 0.5 | 1.5 | 0.5 | 1.5 | 0.5 | 1.5 |
| $\alpha_{1.0000}$ | 0.9868 | 0.9868 | 0.9696 | 0.9696 | 1.0298 | 1.0298 |
| $\alpha_{0.8571}$ | 1.0199 | 1.0759 | 0.9907 | 1.0289 | 0.9714 | 1.0436 |
| $\alpha_{0.7143}$ | 0.9750 | 1.0945 | 0.9449 | 1.0295 | 0.9104 | 1.1005 |
| $\alpha_{0.5714}$ | 0.9584 | 1.1072 | 0.9348 | 1.0394 | 0.8948 | 1.1110 |
| $\alpha_{0.4286}$ | 0.8927 | 1.1455 | 0.8963 | 1.0733 | 0.8849 | 1.1451 |
| $\alpha_{0.2857}$ | 0.8749 | 1.1670 | 0.8933 | 1.0952 | 0.8691 | 1.1475 |
| $\alpha_{0.1429}$ | 0.8349 | 1.1883 | 0.8683 | 1.1110 | 0.8619 | 1.1562 |
| $\alpha_{0.0000}$ | 0.7990 | 1.2280 | 0.8440 | 1.1381 | 0.8519 | 1.1649 |
| Ref $\alpha_{0,0}$ | 0.8101 | 1.1969 | 0.8023 | 1.1997 | 0.8001 | 1.1967 |
| Erro (%) | -1.3702 | 2.5984 | 5.1976 | -5.1346 | 6.4741 | -2.6573 |

Tabela 5.17 - Valores médios dos parâmetros atualizados e erros relativos para 100 observações, caso 1 com funções de pertinência *fuzzy* triangulares.

| | $\tilde{\theta}_1$ | $\tilde{\theta}_2$ | $\tilde{\theta}_3$ |
|--------------------------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| $\alpha_{1.0000}$ | 0.9868 | 0.9696 | 1.0298 |
| $\alpha_{0.8571}$ | 1.0479 | 1.0098 | 1.0075 |
| $\alpha_{0.7143}$ | 1.0347 | 0.9872 | 1.0054 |
| $\alpha_{0.5714}$ | 1.0328 | 0.9871 | 1.0029 |
| $\alpha_{0.4286}$ | 1.0191 | 0.9848 | 1.0150 |
| $\alpha_{0.2857}$ | 1.0210 | 0.9943 | 1.0083 |
| $\alpha_{0.1429}$ | 1.0116 | 0.9897 | 1.0090 |
| $\alpha_{0.0000}$ | 1.0135 | 0.9910 | 1.0084 |
| Ref $\alpha_{0,0}$ | 1.0035 | 1.0010 | 0.9984 |
| Erro (%) | 0.9965 | -0.9990 | 1.0016 |

Tabela 5.18 - Raio dos parâmetros atualizados e erros relativos para 100 observações, caso 1 com funções de pertinência *fuzzy* triangulares.

| | $\Delta\theta_1$ | $\Delta\theta_2$ | $\Delta\theta_3$ |
|--------------------------------------|------------------|------------------|------------------|
| $\alpha_{1.0000}$ | 0 | 0 | 0 |
| $\alpha_{0.8571}$ | 0.0280 | 0.0191 | 0.0361 |
| $\alpha_{0.7143}$ | 0.0597 | 0.0423 | 0.0950 |
| $\alpha_{0.5714}$ | 0.0744 | 0.0523 | 0.1081 |
| $\alpha_{0.4286}$ | 0.1264 | 0.0885 | 0.1301 |
| $\alpha_{0.2857}$ | 0.1460 | 0.1009 | 0.1392 |
| $\alpha_{0.1429}$ | 0.1767 | 0.1214 | 0.1471 |
| $\alpha_{0.0000}$ | 0.2145 | 0.1471 | 0.1565 |
| Ref $\alpha_{0,0}$ | 0.1934 | 0.1987 | 0.1983 |
| Erro (%) | 10.9100 | -25.9687 | -21.0792 |

Os resultados obtidos através do algoritmo 2 para amostras com cem observações são apresentados nas tabelas 5.16 a 5.18. Neste caso, continua a se verificar erros nos intervalos de parâmetros atualizados abaixo dos 10%, a fonte deste erro vem sobretudo da estimativa do raio dos intervalos de parâmetros atualizados, tal como aconteceu nos casos com 10 e 30 observações, visto que os parâmetros médios atualizados apresentam valores de erros aceitáveis.

5.1.2. Funções de pertença empíricas

De seguida são apresentados os resultados obtidos com os algoritmos 1 e 2, utilizando funções de pertença *fuzzy* empíricas. Os parâmetros de atualização (K_1 , K_2 e K_5) são os mesmos que no caso anterior, para amostras contendo dez, trinta e cem observações.

5.1.2.1. Algoritmo 1

Na figura 5.10 podem ser observadas as funções de pertença empíricas das respostas obtidas para a amostra de referência contendo dez observações.

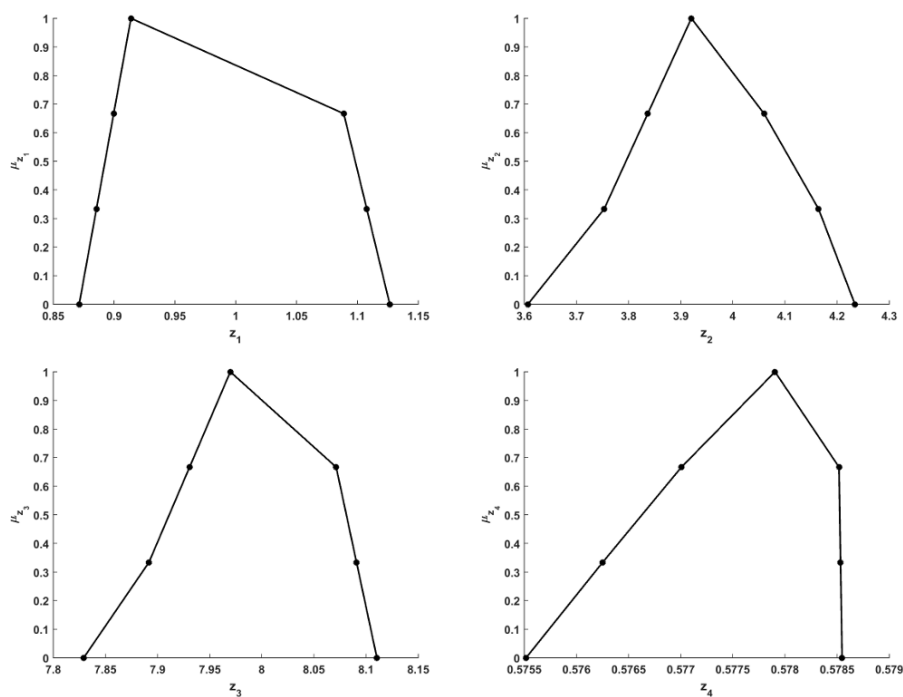


Figura 5.10 - Funções de pertença empíricas das respostas de referência, caso 1 com amostras com 10 observações.

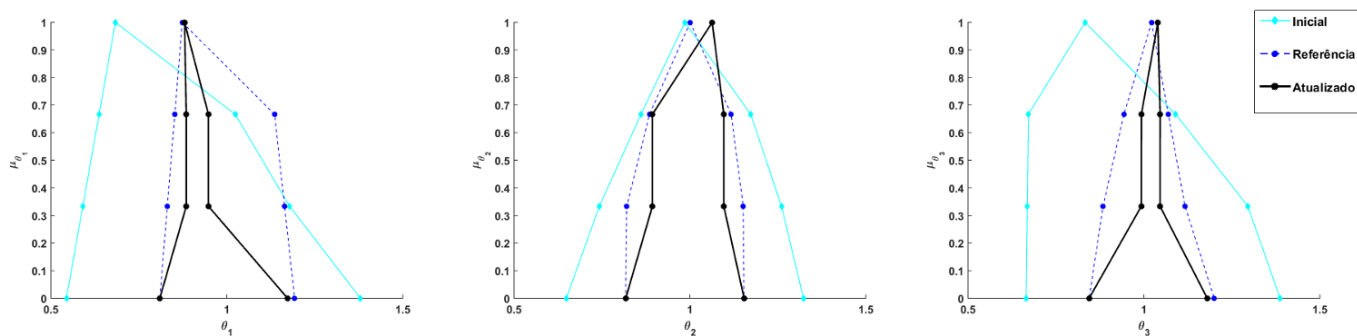


Tabela 5.19 - Parâmetros *fuzzy* em cada α_{cut} , caso 1 com funções de pertença empíricas e 10 observações.

| | $\underline{\theta}_1$ | $\overline{\theta}_1$ | $\underline{\theta}_2$ | $\overline{\theta}_2$ | $\underline{\theta}_3$ | $\overline{\theta}_3$ |
|--------------------------------------|------------------------|-----------------------|------------------------|-----------------------|------------------------|-----------------------|
| Inicial | 0.5000 | 1.5000 | 0.5000 | 1.5000 | 0.5000 | 1.5000 |
| $\alpha_{1.0000}$ | 0.8798 | 0.8798 | 1.0633 | 1.0633 | 1.0396 | 1.0396 |
| $\alpha_{0.6667}$ | 0.8846 | 0.9476 | 0.8933 | 1.0963 | 0.9927 | 1.0459 |
| $\alpha_{0.3333}$ | 0.8846 | 0.9476 | 0.8933 | 1.0962 | 0.9925 | 1.0458 |
| $\alpha_{0.0000}$ | 0.8094 | 1.1724 | 0.8175 | 1.1539 | 0.8443 | 1.1798 |
| Ref $\alpha_{0,0}$ | 0.8095 | 1.1924 | 0.8174 | 1.1537 | 0.8443 | 1.1998 |
| Erro (%) | -0.0124 | -1.6773 | 0.0122 | 0.0173 | 0.0000 | -1.6669 |

Figura 5.11 – Funções de pertença *fuzzy* empíricas iniciais, de referência e atualizadas, caso 1 com amostras de 10 observações.

Tabela 5.20 - Valores médios dos parâmetros atualizados e erros relativos para 10 observações, caso 1 com funções de pertença *fuzzy* empíricas.

| | $\tilde{\theta}_1$ | $\tilde{\theta}_2$ | $\tilde{\theta}_3$ |
|--------------------------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| $\alpha_{1.0000}$ | 0.8798 | 1.0633 | 1.0396 |
| $\alpha_{0.6667}$ | 0.9161 | 0.9948 | 1.0193 |
| $\alpha_{0.3333}$ | 0.9161 | 0.9948 | 1.0191 |
| $\alpha_{0.0000}$ | 0.9909 | 0.9857 | 1.0121 |
| Ref $\alpha_{0,0}$ | 1.0009 | 0.9855 | 1.0221 |
| Erro (%) | -0.9991 | 0.0203 | -0.9784 |

Tabela 5.21 - Raio dos parâmetros atualizados e erros relativos para 10 observações, caso 1 com funções de pertença *fuzzy* empíricas.

| | $\Delta\theta_1$ | $\Delta\theta_2$ | $\Delta\theta_3$ |
|--------------------------------------|------------------|------------------|------------------|
| $\alpha_{1.0000}$ | 0 | 0 | 0 |
| $\alpha_{0.6667}$ | 0.0315 | 0.1015 | 0.0266 |
| $\alpha_{0.3333}$ | 0.0315 | 0.1014 | 0.0266 |
| $\alpha_{0.0000}$ | 0.1815 | 0.1682 | 0.1677 |
| Ref $\alpha_{0,0}$ | 0.1915 | 0.1682 | 0.1777 |
| Erro (%) | -5.2219 | 0.0000 | -5.6275 |

Utilizando funções de pertença empíricas com o algoritmo 1, os erros nos intervalos de parâmetros atualizados continuam a apresentar valores aceitáveis, e bastante próximos dos resultados obtidos com as funções de pertença triangulares.

Nas figuras 5.12 e 5.13 são apresentadas respetivamente as funções de pertença empíricas das respostas de referência e dos parâmetros atualizados obtidas através do algoritmo 1, para uma amostra de referência contendo trinta observações.

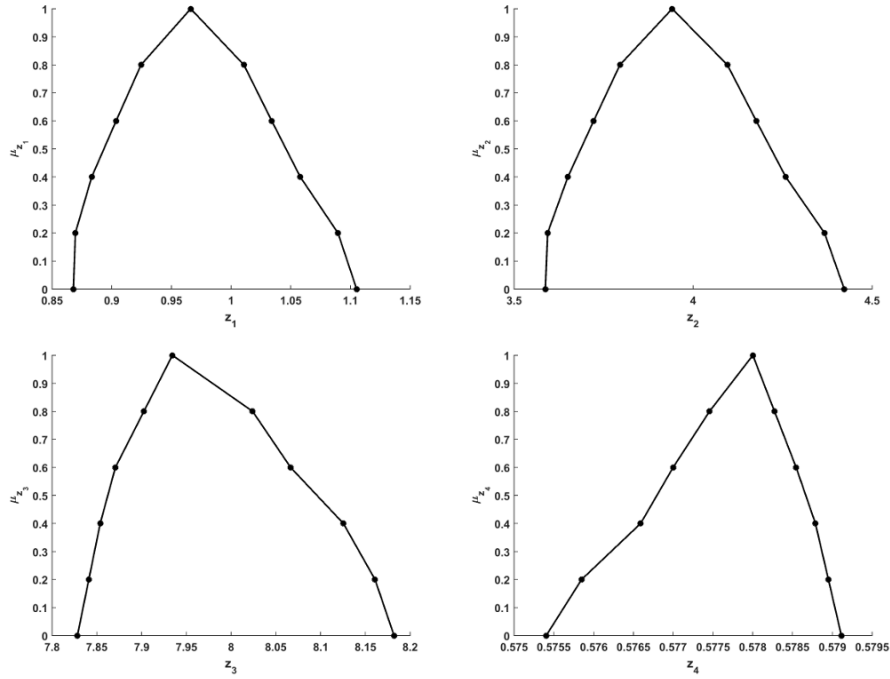


Figura 5.12 - Funções de pertinência empíricas das respostas de referência, caso 1 com amostras com 30 observações.

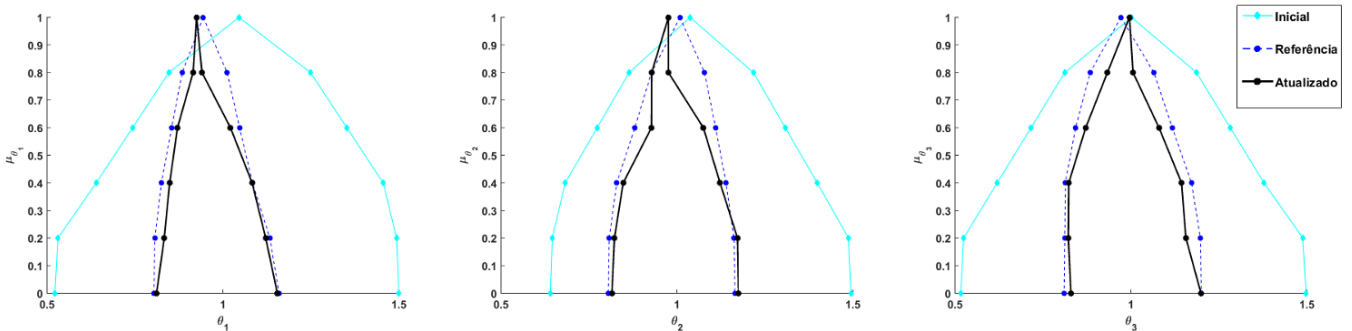


Figura 5.13 – Funções de pertinência fuzzy empíricas iniciais, de referência e atualizadas, caso 1 com amostras de 30 observações.

Tabela 5.22 - Parâmetros fuzzy em cada α_{cut} , caso 1 com funções de pertinência empíricas e 30 observações.

| | $\underline{\theta}_1$ | $\overline{\theta}_1$ | $\underline{\theta}_2$ | $\overline{\theta}_2$ | $\underline{\theta}_3$ | $\overline{\theta}_3$ |
|--------------------------------------|------------------------|-----------------------|------------------------|-----------------------|------------------------|-----------------------|
| Inicial | 0.5000 | 1.5000 | 0.5000 | 1.5000 | 0.5000 | 1.5000 |
| $\alpha_{1.0000}$ | 0.9251 | 0.9251 | 0.9758 | 0.9758 | 0.9959 | 0.9959 |
| $\alpha_{0.8000}$ | 0.9151 | 0.9405 | 0.9282 | 0.9758 | 0.9332 | 1.0059 |
| $\alpha_{0.6000}$ | 0.8708 | 1.0214 | 0.9276 | 1.0751 | 0.8715 | 1.0797 |
| $\alpha_{0.4000}$ | 0.8486 | 1.0829 | 0.8473 | 1.1226 | 0.8233 | 1.1438 |
| $\alpha_{0.2000}$ | 0.8332 | 1.1215 | 0.8224 | 1.1721 | 0.8220 | 1.1562 |
| $\alpha_{0.0000}$ | 0.8113 | 1.1546 | 0.8153 | 1.1748 | 0.8293 | 1.1991 |
| Ref $\alpha_{0,0}$ | 0.8095 | 1.1924 | 0.8174 | 1.1537 | 0.8443 | 1.1998 |
| Erro (%) | 0.2224 | -3.1701 | -0.2569 | 1.8288 | -1.7766 | -0.0583 |

Tabela 5.23 - Valores médios dos parâmetros atualizados e erros relativos para 30 observações, caso 1 com funções de pertinência *fuzzy* empíricas.

| | $\tilde{\theta}_1$ | $\tilde{\theta}_2$ | $\tilde{\theta}_3$ |
|--------------------------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| $\alpha_{1,0000}$ | 0.9251 | 0.9758 | 0.9959 |
| $\alpha_{0,8000}$ | 0.9278 | 0.9520 | 0.9696 |
| $\alpha_{0,6000}$ | 0.9461 | 1.0014 | 0.9756 |
| $\alpha_{0,4000}$ | 0.9657 | 0.9849 | 0.9836 |
| $\alpha_{0,2000}$ | 0.9774 | 0.9972 | 0.9891 |
| $\alpha_{0,0000}$ | 0.9830 | 0.9951 | 1.0142 |
| Ref $\alpha_{0,0}$ | 0.9818 | 0.9851 | 1.0049 |
| Erro (%) | 0.1222 | 1.0151 | 0.9255 |

Tabela 5.24 - Raio dos parâmetros atualizados e erros relativos para 30 observações, caso 1 com funções de pertinência *fuzzy* empíricas.

| | $\Delta\theta_1$ | $\Delta\theta_2$ | $\Delta\theta_3$ |
|--------------------------------------|------------------|------------------|------------------|
| $\alpha_{1,0000}$ | 0 | 0 | 0 |
| $\alpha_{0,8000}$ | 0.0127 | 0.0238 | 0.0364 |
| $\alpha_{0,6000}$ | 0.0753 | 0.0737 | 0.1041 |
| $\alpha_{0,4000}$ | 0.1172 | 0.1376 | 0.1603 |
| $\alpha_{0,2000}$ | 0.1442 | 0.1749 | 0.1671 |
| $\alpha_{0,0000}$ | 0.1717 | 0.1798 | 0.1849 |
| Ref $\alpha_{0,0}$ | 0.1776 | 0.1798 | 0.1949 |
| Erro (%) | -3.3221 | 0.0000 | -5.1308 |

Os resultados obtidos através do algoritmo 1, com funções de pertinência empíricas e amostras com 30 observações são apresentados nas tabelas 5.22 a 5.24.

Com amostras de referência e iniciais contendo 30 observações obtêm-se, mais uma vez, valores dos erros no nível zero de pertinência abaixo dos 4%. Comparando estes resultados com os obtidos a partir de funções de pertinência *fuzzy* triangulares existe uma diminuição dos erros no limite inferior do parâmetro θ_1 , θ_2 e θ_3 , e um aumento para os limites superiores dos parâmetros θ_1 e θ_2 , o valor do erro no limite superior do parâmetro θ_3 .

Relativamente à convexidade das funções de pertinência obtidas, estas respeitam as condições enunciadas na seção 3.1.2. No entanto, a função de pertinência do parâmetro θ_2 não é válida visto que existem múltiplas ocorrências de valores nos níveis de pertinência superiores.

Na figura 5.14 podem se observar as funções de pertinência empíricas das respostas de referência, obtidas para a amostra de referência com 100 observações.

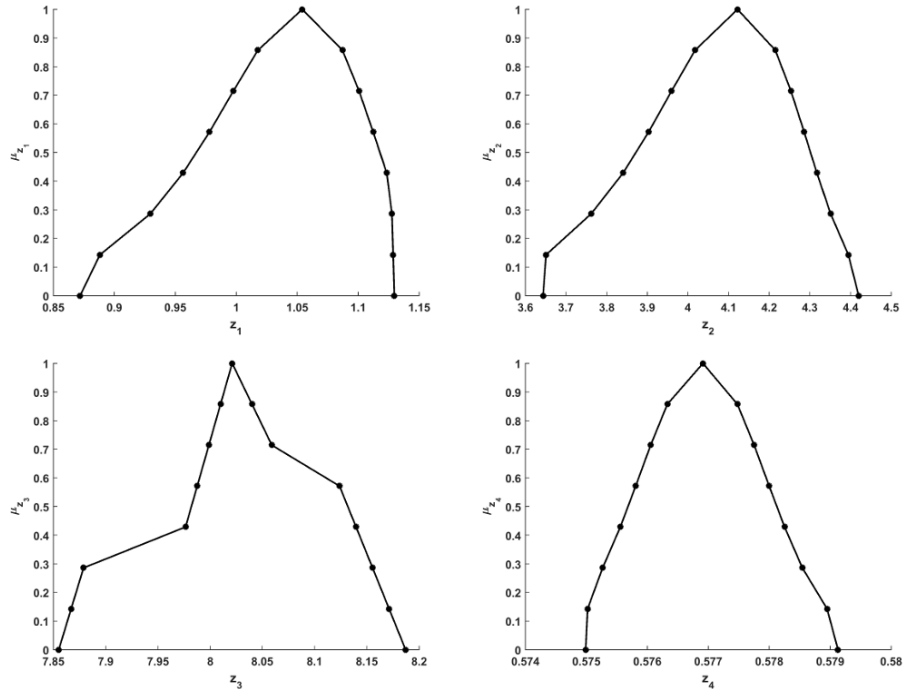


Figura 5.15 - Funções de pertinência empíricas das respostas de referência, caso 1 com amostras com 100 observações.

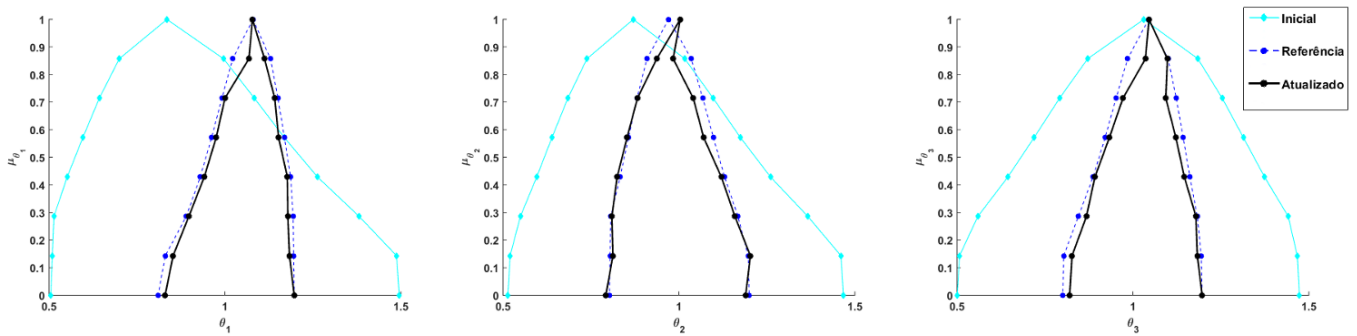


Figura 5.14 – Funções de pertinência *fuzzy* empíricas iniciais, de referência e atualizadas, caso 1 com amostras de 100 observações.

Tabela 5.25 - Parâmetros *fuzzy* em cada α_{cut} , caso 1 com funções de pertinência empíricas e 100 observações.

| | $\underline{\theta}_1$ | $\overline{\theta}_1$ | $\underline{\theta}_2$ | $\overline{\theta}_2$ | $\underline{\theta}_3$ | $\overline{\theta}_3$ |
|---------------------------------------|------------------------|-----------------------|------------------------|-----------------------|------------------------|-----------------------|
| Inicial | 0.5000 | 1.5000 | 0.5000 | 1.5000 | 0.5000 | 1.5000 |
| $\alpha_{1.0000}$ | 1.0781 | 1.0781 | 1.0036 | 1.0036 | 1.0456 | 1.0456 |
| $\alpha_{0.8571}$ | 1.0681 | 1.1125 | 0.9369 | 0.9836 | 1.0356 | 1.0979 |
| $\alpha_{0.7143}$ | 1.0000 | 1.1415 | 0.8821 | 1.0407 | 0.9717 | 1.0933 |
| $\alpha_{0.5714}$ | 0.9751 | 1.1525 | 0.8526 | 1.0703 | 0.9330 | 1.1220 |
| $\alpha_{0.4286}$ | 0.9413 | 1.1774 | 0.8244 | 1.1206 | 0.8919 | 1.1461 |
| $\alpha_{0.2857}$ | 0.8973 | 1.1789 | 0.8094 | 1.1591 | 0.8679 | 1.1791 |
| $\alpha_{0.1429}$ | 0.8526 | 1.1835 | 0.8123 | 1.2030 | 0.8269 | 1.1830 |
| $\alpha_{0.0000}$ | 0.8301 | 1.1969 | 0.7923 | 1.1897 | 0.8201 | 1.1967 |
| Ref. $\alpha_{0,0}$ | 0.8101 | 1.1969 | 0.8023 | 1.1997 | 0.8001 | 1.1967 |
| Erro (%) | 2.4688 | 0.0000 | -1.2464 | -0.8335 | 2.4997 | 0.0000 |

Tabela 5.26 - Valores médios dos parâmetros atualizados e erros relativos para 100 observações, caso 1 afastados com funções de pertinência *fuzzy* empíricas.

| | $\tilde{\theta}_1$ | $\tilde{\theta}_2$ | $\tilde{\theta}_3$ |
|--------------------------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| $\alpha_{1.0000}$ | 1.0903 | 1.0036 | 1.0456 |
| $\alpha_{0.8571}$ | 1.0903 | 0.9603 | 1.0668 |
| $\alpha_{0.7143}$ | 1.0708 | 0.9614 | 1.0325 |
| $\alpha_{0.5714}$ | 1.0638 | 0.9615 | 1.0275 |
| $\alpha_{0.4286}$ | 1.0593 | 0.9725 | 1.0190 |
| $\alpha_{0.2857}$ | 1.0381 | 0.9843 | 1.0235 |
| $\alpha_{0.1429}$ | 1.0180 | 1.0077 | 1.0049 |
| $\alpha_{0.0000}$ | 1.0135 | 0.9910 | 1.0084 |
| Ref $\alpha_{0,0}$ | 1.0035 | 1.0010 | 0.9984 |
| Erro (%) | 0.9965 | -0.9990 | 1.0016 |

Tabela 5.27 - Raio dos parâmetros atualizados e erros relativos para 100 observações, caso 1 com funções de pertinência *fuzzy* empíricas.

| | $\Delta\theta_1$ | $\Delta\theta_2$ | $\Delta\theta_3$ |
|--------------------------------------|------------------|------------------|------------------|
| $\alpha_{1.0000}$ | 0 | 0 | 0 |
| $\alpha_{0.8571}$ | 0.0222 | 0.0234 | 0.0312 |
| $\alpha_{0.7143}$ | 0.0707 | 0.0793 | 0.0608 |
| $\alpha_{0.5714}$ | 0.0887 | 0.1089 | 0.0945 |
| $\alpha_{0.4286}$ | 0.1181 | 0.1481 | 0.1271 |
| $\alpha_{0.2857}$ | 0.1408 | 0.1749 | 0.1556 |
| $\alpha_{0.1429}$ | 0.1654 | 0.1954 | 0.1781 |
| $\alpha_{0.0000}$ | 0.1834 | 0.1987 | 0.1883 |
| Ref $\alpha_{0,0}$ | 0.1934 | 0.1987 | 0.1983 |
| Erro (%) | -5.1706 | 0.0000 | -5.0429 |

As funções de pertinência e resultados obtidos através do algoritmo 1 são apresentados respetivamente na figura 5.15 e nas tabelas 5.25 a 5.27.

Para as amostras contendo 100 observações, a forma das funções de pertinência atualizadas aproxima-se bastante à forma das funções de pertinência dos parâmetros de referência. Os valores dos erros no nível zero de pertinência estão dentro do que é considerado admissível sendo que o erro máximo observado tem o valor aproximado de 2,5 % e ocorre no limite inferior do intervalo do parâmetro θ_3 .

5.1.2.2. Algoritmo 2

As funções de pertinência *fuzzy* empíricas dos parâmetros atualizados, obtidas através do algoritmo 2 podem ser observadas na figura 5.16

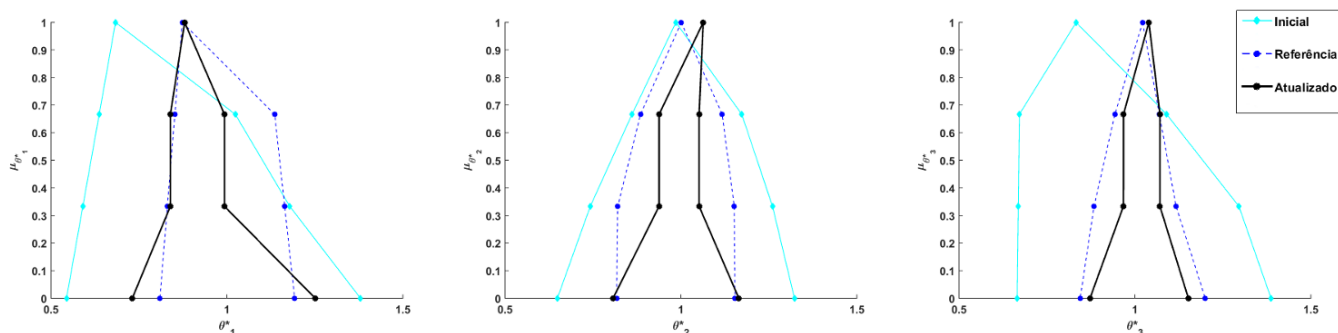


Figura 5.16 – Funções de pertinência *fuzzy* empíricas iniciais, de referência e atualizadas, caso 2 com amostras de 10 observações.

Os resultados obtidos neste caso de estudo são apresentados nas tabelas 5.28 a 5.30.

Tabela 5.28 - Parâmetros *fuzzy* em cada α_{cut} , caso 1 com funções de pertinência empíricas e 10 observações.

| | $\underline{\theta}_1$ | $\overline{\theta}_1$ | $\underline{\theta}_2$ | $\overline{\theta}_2$ | $\underline{\theta}_3$ | $\overline{\theta}_3$ |
|--------------------------------------|------------------------|-----------------------|------------------------|-----------------------|------------------------|-----------------------|
| Inicial | 0.5000 | 1.5000 | 0.5000 | 1.5000 | 0.5000 | 1.5000 |
| $\alpha_{1.0000}$ | 0.8798 | 0.8798 | 1.0633 | 1.0633 | 1.0396 | 1.0396 |
| $\alpha_{0.6667}$ | 0.8393 | 0.9929 | 0.9379 | 1.0516 | 0.9675 | 1.0711 |
| $\alpha_{0.3333}$ | 0.8393 | 0.9929 | 0.9379 | 1.0516 | 0.9674 | 1.0709 |
| $\alpha_{0.0000}$ | 0.7310 | 1.2508 | 0.8070 | 1.1645 | 0.8723 | 1.1518 |
| Ref $\alpha_{0,0}$ | 0.8095 | 1.1924 | 0.8174 | 1.1537 | 0.8443 | 1.1998 |
| Erro (%) | -9.6973 | 4.8977 | -1.2672 | 0.9361 | 3.3164 | -4.0007 |

Tabela 5.29 - Valores médios dos parâmetros atualizados e erros relativos para 10 observações, caso 1 com funções de pertinência *fuzzy* empíricas.

| | $\tilde{\theta}_1$ | $\tilde{\theta}_2$ | $\tilde{\theta}_3$ |
|--------------------------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| $\alpha_{1.0000}$ | 0.8798 | 1.0633 | 1.0396 |
| $\alpha_{0.6667}$ | 0.9161 | 0.9948 | 1.0193 |
| $\alpha_{0.3333}$ | 0.9161 | 0.9948 | 1.0191 |
| $\alpha_{0.0000}$ | 0.9909 | 0.9857 | 1.0121 |
| Ref $\alpha_{0,0}$ | 1.0009 | 0.9855 | 1.0221 |
| Erro (%) | -0.9991 | 0.0203 | -0.9784 |

Tabela 5.30 - Raio dos parâmetros atualizados e erros relativos para 10 observações, caso 1 com funções de pertença *fuzzy* empíricas.

| | $\Delta\theta_1$ | $\Delta\theta_2$ | $\Delta\theta_3$ |
|--------------------------------------|------------------|------------------|------------------|
| $\alpha_{1,0000}$ | 0 | 0 | 0 |
| $\alpha_{0,6667}$ | 0.0768 | 0.0568 | 0.0518 |
| $\alpha_{0,3333}$ | 0.0768 | 0.0568 | 0.0518 |
| $\alpha_{0,0000}$ | 0.2599 | 0.1787 | 0.1398 |
| Ref $\alpha_{0,0}$ | 0.1915 | 0.1682 | 0.1777 |
| Erro (%) | 35.7180 | 6.2426 | -21.3281 |

Para amostras de referência iniciais com 10 observações, como se pode observar na tabela 5.28, existe um erro bastante significativo no limite inferior do parâmetro θ_1 . Tal como ocorreu no caso com funções de pertença triangulares (seção 5.1.1.1.) temos valores de erro acima dos 10 % nos raios dos parâmetros θ_1 e θ_2 , como se pode observar na tabela 5.30.

Na figura 5.17 são apresentadas as funções de pertença obtidas através do algoritmo 2, para o caso 1 com amostras de referência e iniciais com 30 observações

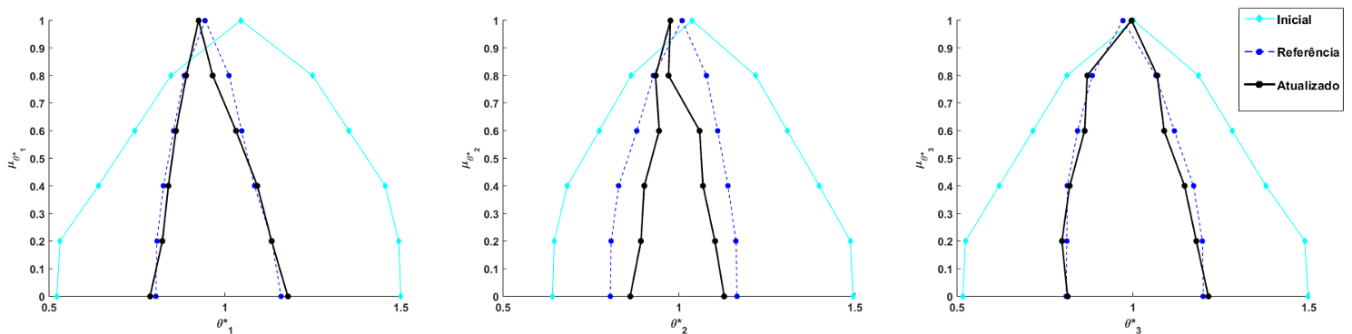


Figura 5.17 – Funções de pertença *fuzzy* empíricas iniciais, de referência e atualizadas, caso 1 com amostras de 30 observações.

Tabela 5.31 - Parâmetros *fuzzy* em cada α_{cut} , caso 1 com funções de pertinência empíricas e 30 observações.

| | $\underline{\theta}_1$ | $\overline{\theta}_1$ | $\underline{\theta}_2$ | $\overline{\theta}_2$ | $\underline{\theta}_3$ | $\overline{\theta}_3$ |
|--------------------------------------|------------------------|-----------------------|------------------------|-----------------------|------------------------|-----------------------|
| Inicial | 0.5000 | 1.5000 | 0.5000 | 1.5000 | 0.5000 | 1.5000 |
| $\alpha_{1.0000}$ | 0.9251 | 0.9251 | 0.9758 | 0.9758 | 0.9959 | 0.9959 |
| $\alpha_{0.8000}$ | 0.8903 | 0.9653 | 0.9336 | 0.9704 | 0.8701 | 1.0690 |
| $\alpha_{0.6000}$ | 0.8610 | 1.0313 | 0.9439 | 1.0588 | 0.8627 | 1.0885 |
| $\alpha_{0.4000}$ | 0.8393 | 1.0921 | 0.9014 | 1.0685 | 0.8203 | 1.1468 |
| $\alpha_{0.2000}$ | 0.8222 | 1.1326 | 0.8922 | 1.1022 | 0.7981 | 1.1801 |
| $\alpha_{0.0000}$ | 0.7872 | 1.1787 | 0.8615 | 1.1287 | 0.8141 | 1.2143 |
| Ref $\alpha_{0,0}$ | 0.8095 | 1.1924 | 0.8174 | 1.1537 | 0.8443 | 1.1998 |
| Erro (%) | -2.7548 | 1.1489 | 5.3952 | -2.1669 | -3.5769 | 1.2085 |

Tabela 5.32 - Valores médios dos parâmetros atualizados e erros relativos para 30 observações, caso 1 com funções de pertinência *fuzzy* empíricas.

| | $\tilde{\theta}_1$ | $\tilde{\theta}_2$ | $\tilde{\theta}_3$ |
|--------------------------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| $\alpha_{1.0000}$ | 0.9251 | 0.9758 | 0.9959 |
| $\alpha_{0.8000}$ | 0.9278 | 0.9520 | 0.9696 |
| $\alpha_{0.6000}$ | 0.9461 | 1.0014 | 0.9756 |
| $\alpha_{0.4000}$ | 0.9657 | 0.9849 | 0.9836 |
| $\alpha_{0.2000}$ | 0.9774 | 0.9972 | 0.9891 |
| $\alpha_{0.0000}$ | 0.9830 | 0.9951 | 1.0142 |
| Ref $\alpha_{0,0}$ | 0.9818 | 0.9851 | 1.0049 |
| Erro (%) | 0.1222 | 1.0151 | 0.9255 |

Tabela 5.33 - Raio dos parâmetros atualizados e erros relativos para 30 observações, caso 1 com funções de pertinência *fuzzy* empíricas.

| | $\Delta\theta_1$ | $\Delta\theta_2$ | $\Delta\theta_3$ |
|--------------------------------------|------------------|------------------|------------------|
| $\alpha_{1.0000}$ | 0 | 0 | 0 |
| $\alpha_{0.8000}$ | 0.0375 | 0.0184 | 0.0995 |
| $\alpha_{0.6000}$ | 0.0851 | 0.0575 | 0.1129 |
| $\alpha_{0.4000}$ | 0.1264 | 0.0835 | 0.1633 |
| $\alpha_{0.2000}$ | 0.1552 | 0.1050 | 0.1910 |
| $\alpha_{0.0000}$ | 0.1957 | 0.1336 | 0.2001 |
| Ref $\alpha_{0,0}$ | 0.1776 | 0.1798 | 0.1949 |
| Erro (%) | 10.1914 | -25.6952 | 2.6680 |

Os resultados obtidos com amostras contendo 30 observações apresentam uma melhoria quando comparados com os resultados obtidos no caso com 10 observações. A condição de convexidade é respeitada nos parâmetros θ_1 e θ_2 . Os valores dos erros para os raios dos parâmetros θ_1 e θ_3 diminuem. No entanto, o valor do erro para $\Delta\theta_2$ aumenta quando comparados com os resultados obtidos para amostras contendo 10 observações.

Na figura 5.18 são apresentadas as funções de pertinência empíricas obtidas com o algoritmo 2, para amostras com 100 observações

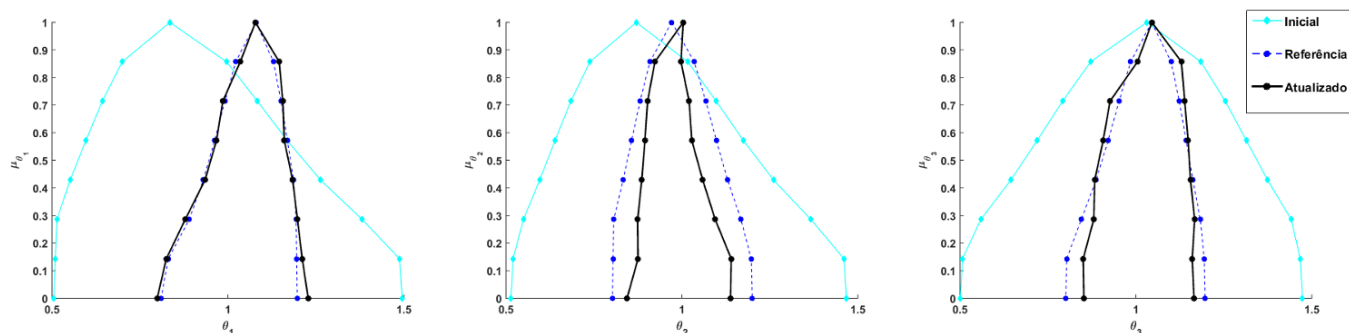


Figura 5.18 – Funções de pertinência *fuzzy* empíricas iniciais, de referência e atualizadas, caso 1 com amostras de 100 observações.

Tabela 5.34 - Parâmetros *fuzzy* em cada α_{cut} , caso 1 com funções de pertinência empíricas e 100 observações.

| | $\underline{\theta}_1$ | $\overline{\theta}_1$ | $\underline{\theta}_2$ | $\overline{\theta}_2$ | $\underline{\theta}_3$ | $\overline{\theta}_3$ |
|---------------------------------------|------------------------|-----------------------|------------------------|-----------------------|------------------------|-----------------------|
| Inicial | 0.5000 | 1.5000 | 0.5000 | 1.5000 | 0.5000 | 1.5000 |
| $\alpha_{1.0000}$ | 1.0781 | 1.0781 | 1.0036 | 1.0036 | 1.0456 | 1.0456 |
| $\alpha_{0.8571}$ | 1.0351 | 1.1456 | 0.9232 | 0.9973 | 1.0043 | 1.1292 |
| $\alpha_{0.7143}$ | 0.9855 | 1.1561 | 0.9024 | 1.0204 | 0.9265 | 1.1386 |
| $\alpha_{0.5714}$ | 0.9674 | 1.1602 | 0.8948 | 1.0282 | 0.9067 | 1.1484 |
| $\alpha_{0.4286}$ | 0.9348 | 1.1838 | 0.8858 | 1.0591 | 0.8830 | 1.1551 |
| $\alpha_{0.2857}$ | 0.8787 | 1.1975 | 0.8741 | 1.0944 | 0.8802 | 1.1668 |
| $\alpha_{0.1429}$ | 0.8248 | 1.2112 | 0.8752 | 1.1401 | 0.8500 | 1.1599 |
| $\alpha_{0.0000}$ | 0.7990 | 1.2280 | 0.8440 | 1.1381 | 0.8519 | 1.1649 |
| Ref. $\alpha_{0,0}$ | 0.8101 | 1.1969 | 0.8023 | 1.1997 | 0.8001 | 1.1967 |
| Erro (%) | -1.3702 | 2.5984 | 5.1976 | -5.1346 | 6.4742 | -2.6573 |

Tabela 5.35 - Valores médios dos parâmetros atualizados e erros relativos para 100 observações, caso 1 com funções de pertinência *fuzzy* empíricas.

| | $\tilde{\theta}_1$ | $\tilde{\theta}_2$ | $\tilde{\theta}_3$ |
|--------------------------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| $\alpha_{1.0000}$ | 1.0781 | 1.0036 | 1.0456 |
| $\alpha_{0.8571}$ | 1.0903 | 0.9603 | 1.0668 |
| $\alpha_{0.7143}$ | 1.0708 | 0.9614 | 1.0325 |
| $\alpha_{0.5714}$ | 1.0638 | 0.9615 | 1.0275 |
| $\alpha_{0.4286}$ | 1.0593 | 0.9725 | 1.0190 |
| $\alpha_{0.2857}$ | 1.0381 | 0.9843 | 1.0235 |
| $\alpha_{0.1429}$ | 1.0180 | 1.0077 | 1.0049 |
| $\alpha_{0.0000}$ | 1.0135 | 0.9910 | 1.0084 |
| Ref $\alpha_{0,0}$ | 1.0035 | 1.0010 | 0.9984 |
| Erro (%) | 0.9965 | -0.9991 | 1.0016 |

Tabela 5.36 - Raio dos parâmetros atualizados e erros relativos para 100 observações, caso 1 com funções de pertinência *fuzzy* empíricas.

| | $\Delta\theta_1$ | $\Delta\theta_2$ | $\Delta\theta_3$ |
|--------------------------------------|------------------|------------------|------------------|
| $\alpha_{1.0000}$ | 0 | 0 | 0 |
| $\alpha_{0.8571}$ | 0.0553 | 0.0371 | 0.0624 |
| $\alpha_{0.7143}$ | 0.0853 | 0.0590 | 0.1061 |
| $\alpha_{0.5714}$ | 0.0964 | 0.0667 | 0.1208 |
| $\alpha_{0.4286}$ | 0.1245 | 0.0866 | 0.1360 |
| $\alpha_{0.2857}$ | 0.1594 | 0.1102 | 0.1433 |
| $\alpha_{0.1429}$ | 0.1932 | 0.1325 | 0.1550 |
| $\alpha_{0.0000}$ | 0.2145 | 0.1471 | 0.1565 |
| Ref $\alpha_{0,0}$ | 0.1934 | 0.1987 | 0.1983 |
| Erro (%) | 10.9100 | -25.9688 | -20.2751 |

Para este caso, como pode ser observado na figura 5.18 para o parâmetro θ_1 os resultados obtidos com a atualização são bastante satisfatórios. No entanto, os parâmetros θ_2 e θ_3 apresentam algumas discrepâncias relativamente aos valores de referência. Outro aspeto a apontar também é mais uma vez o valor dos erros obtidos para os raios de parâmetros atualizados.

5.2. Caso 2- Sistema com modos de vibração próximos

Neste segundo caso de estudo também serão analisados os intervalos, valores médios e raios dos parâmetros de atualização, que neste caso são K_2 , K_4 e K_5 . O caso é analisado utilizando funções de pertinência triangulares e empíricas, para amostras de respostas referencia com dez, trinta e cem observações.

Em todos os casos são apresentados os erros relativos aos valores de referência no nível zero de pertinência.

5.2.1. Funções de pertinência triangulares

5.2.1.1. Algoritmo 1

Na figura 5.19 são apresentadas as funções de pertinência triangulares das respostas de referência do caso 2, para uma amostra com 10 observações.

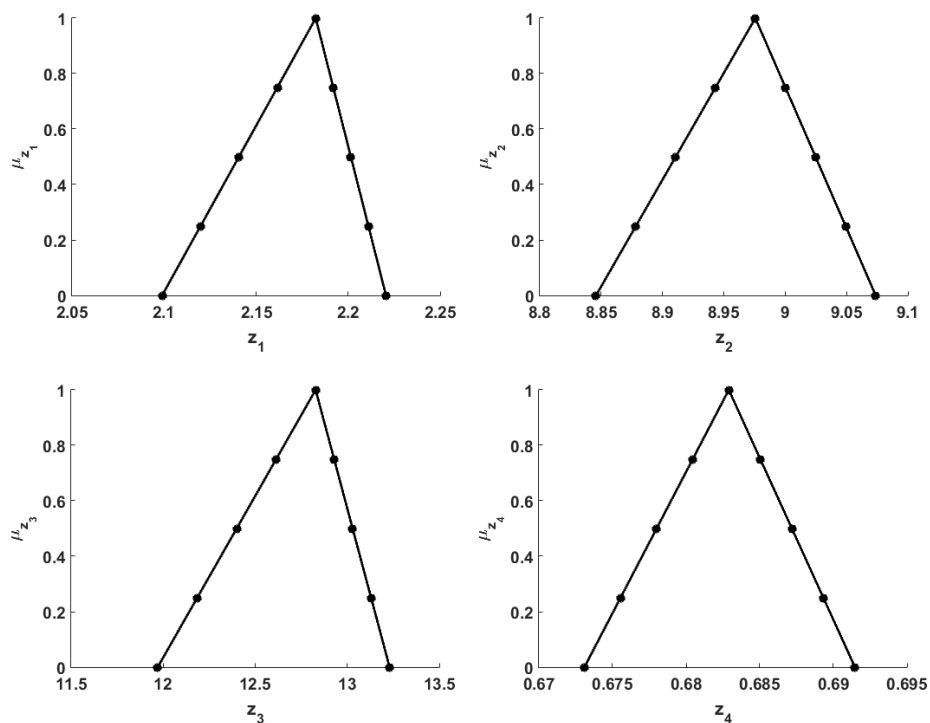


Figura 5.19 - Funções de pertinência triangulares das respostas de referência, caso 2 com amostras com 10 observações.

Na figura 5.20 são apresentadas as funções de pertinência triangulares dos parâmetros atualizados obtidas com o algoritmo 1, para o caso 2 com amostras de referência e iniciais com 10 observações.

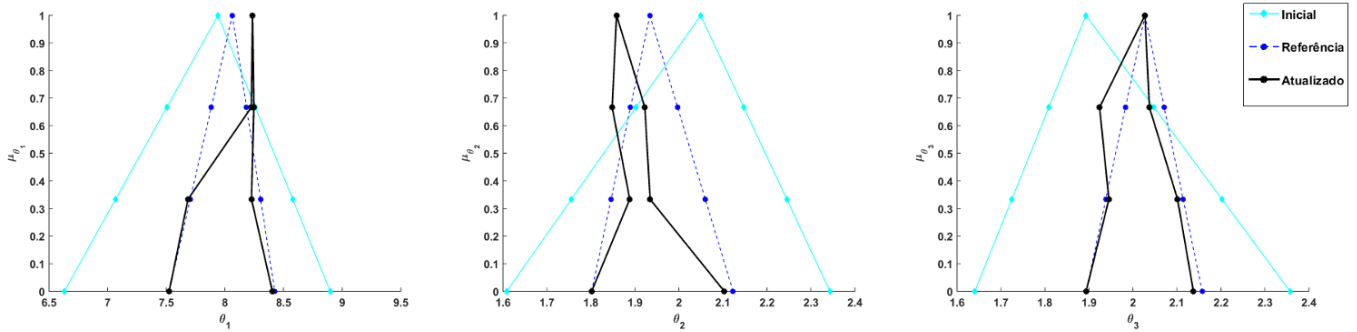


Figura 5.20 – Funções de pertinência *fuzzy* triangulares iniciais, de referência e atualizadas, caso 2 com amostras de 10 observações.

Os resultados obtidos para este caso de estudo podem ser observados nas tabelas 5.37 a 5.39.

Tabela 5.37 - Parâmetros *fuzzy* em cada α_{cut} , caso 2 com funções de pertinência triangulares e 10 observações.

| | $\underline{\theta}_1$ | $\overline{\theta}_1$ | $\underline{\theta}_2$ | $\overline{\theta}_2$ | $\underline{\theta}_3$ | $\overline{\theta}_3$ |
|--------------------------------------|------------------------|-----------------------|------------------------|-----------------------|------------------------|-----------------------|
| Inicial | 6.5000 | 9.5000 | 1.6000 | 2.4000 | 1.6000 | 2.4000 |
| $\alpha_{1.0000}$ | 8.2352 | 8.2352 | 1.8582 | 1.8582 | 2.0274 | 2.0274 |
| $\alpha_{0.6667}$ | 8.2252 | 8.2464 | 1.8482 | 1.9225 | 1.9242 | 2.0374 |
| $\alpha_{0.3333}$ | 7.6850 | 8.2264 | 1.8881 | 1.9344 | 1.9453 | 2.1014 |
| $\alpha_{0.0000}$ | 7.5248 | 8.4045 | 1.8016 | 2.1030 | 1.8936 | 2.1375 |
| Ref $\alpha_{0,0}$ | 7.5248 | 8.4245 | 1.8016 | 2.1230 | 1.8936 | 2.1574 |
| Erro (%) | 0.0000 | -0.2374 | 0.0000 | -0.9421 | 0.0000 | -0.9224 |

Tabela 5.38 - Valores médios dos parâmetros atualizados e erros relativos para 10 observações, caso 2 com funções de pertinência *fuzzy* triangulares.

| | $\tilde{\theta}_1$ | $\tilde{\theta}_2$ | $\tilde{\theta}_3$ |
|--------------------------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| $\alpha_{1.0000}$ | 8.2352 | 1.8582 | 2.0274 |
| $\alpha_{0.6667}$ | 8.2358 | 1.8853 | 1.9808 |
| $\alpha_{0.3333}$ | 7.9557 | 1.9113 | 2.0234 |
| $\alpha_{0.0000}$ | 7.9647 | 1.9523 | 2.0155 |
| Ref $\alpha_{0,0}$ | 7.9747 | 1.9623 | 2.0255 |
| Erro (%) | -0.1254 | -0.5096 | -0.4937 |

Tabela 5.39 - Raio dos parâmetros atualizados e erros relativos para 10 observações, caso 2 com funções de pertinência *fuzzy* triangulares.

| | $\Delta\theta_1$ | $\Delta\theta_2$ | $\Delta\theta_3$ |
|--------------------------------------|------------------|------------------|------------------|
| $\alpha_{1.0000}$ | 0 | 0 | 0 |
| $\alpha_{0.6667}$ | 0.0106 | 0.0372 | 0.0566 |
| $\alpha_{0.3333}$ | 0.2707 | 0.0231 | 0.0781 |
| $\alpha_{0.0000}$ | 0.4399 | 0.1507 | 0.1219 |
| Ref $\alpha_{0,0}$ | 0.4499 | 0.1607 | 0.1319 |
| Erro (%) | -2.2227 | -6.2228 | -7.5815 |

Neste caso de estudo, apesar de os valores no nível zero de pertinência dos intervalos de parâmetros atualizados serem satisfatórios, as funções de pertinência obtidas não são válidas devido à existência de múltiplas ocorrências de valores.

Na figura 5.21 são apresentadas as funções de pertinência triangulares das respostas obtidas com uma amostra de referência contendo 30 observações.

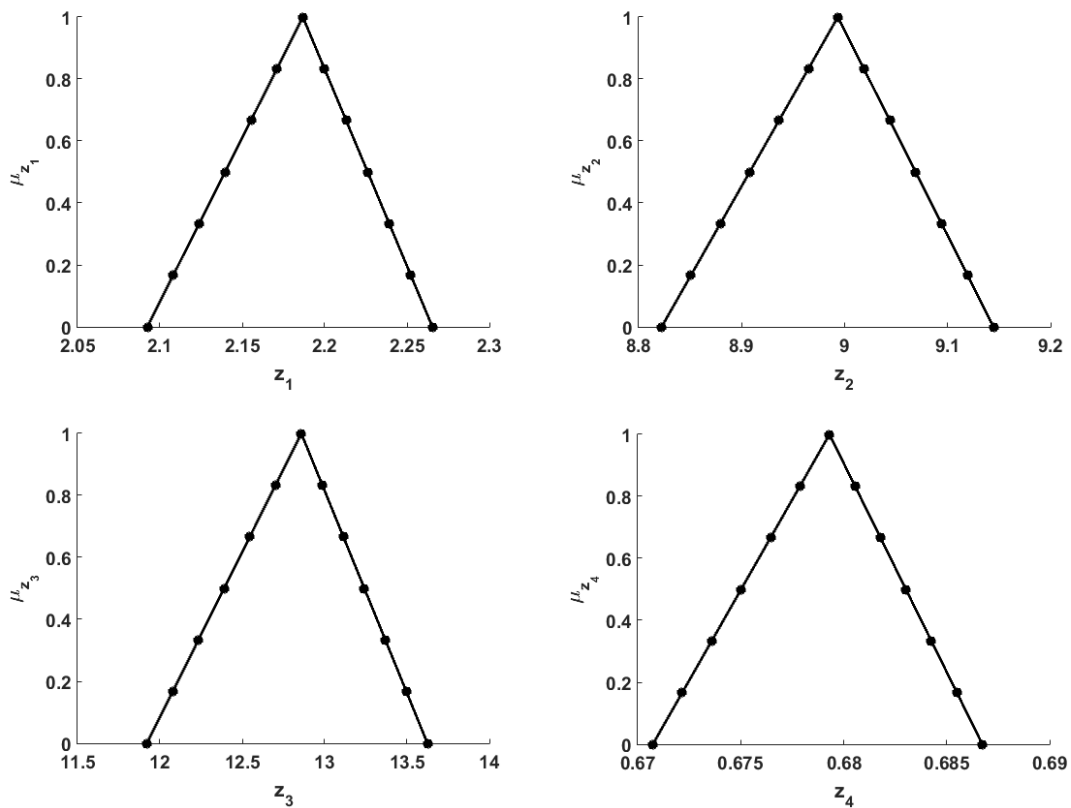


Figura 5.21 – Funções de pertinência triangulares das respostas de referência, caso 2 com amostras com 30 observações.

Na figura 5.22 são apresentadas as funções de pertinência triangulares obtidas através do algoritmo 1 para o presente caso de estudo

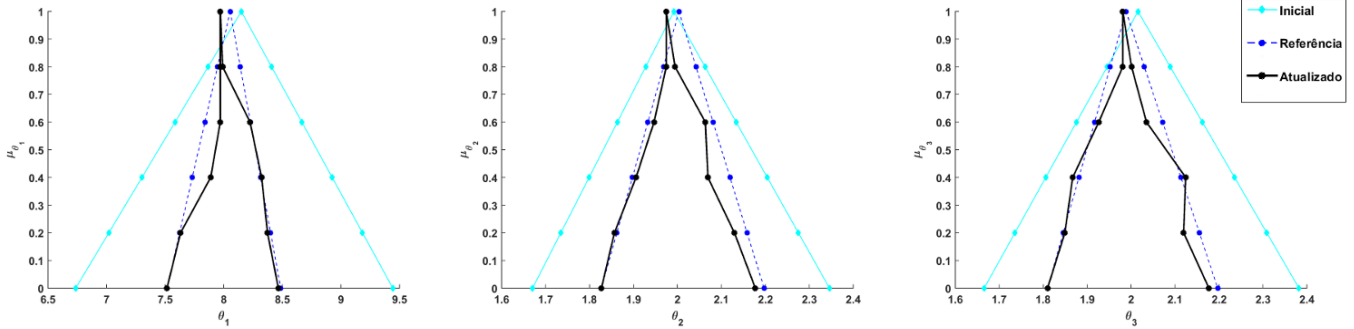


Figura 5.22 - Funções de pertinência *fuzzy* triangulares iniciais, de referência e atualizadas, caso 2 com amostras de 30 observações.

Tabela 5.40 - Parâmetros *fuzzy* em cada α_{cut} , caso 2 com funções de pertinência triangulares e 30 observações.

| | $\underline{\theta}_1$ | $\overline{\theta}_1$ | $\underline{\theta}_2$ | $\overline{\theta}_2$ | $\underline{\theta}_3$ | $\overline{\theta}_3$ |
|--------------------------------------|------------------------|-----------------------|------------------------|-----------------------|------------------------|-----------------------|
| Inicial | 6.5000 | 9.5000 | 1.6000 | 2.4000 | 1.6000 | 2.4000 |
| $\alpha_{1.0000}$ | 7.9704 | 7.9704 | 1.9746 | 1.9746 | 1.9811 | 1.9811 |
| $\alpha_{0.8000}$ | 7.9703 | 7.9903 | 1.9746 | 1.9946 | 1.9811 | 2.0011 |
| $\alpha_{0.6000}$ | 7.9703 | 8.2243 | 1.9468 | 2.0635 | 1.9263 | 2.0350 |
| $\alpha_{0.4000}$ | 7.8883 | 8.3231 | 1.9058 | 2.0694 | 1.8671 | 2.1243 |
| $\alpha_{0.2000}$ | 7.6316 | 8.3732 | 1.8567 | 2.1296 | 1.8493 | 2.1195 |
| $\alpha_{0.0000}$ | 7.5123 | 8.4868 | 1.7864 | 2.1565 | 1.8099 | 2.1770 |
| Ref $\alpha_{0,0}$ | 7.5153 | 8.4858 | 1.8271 | 2.1972 | 1.8099 | 2.1970 |
| Erro (%) | -0.0399 | 0.0118 | -2.2276 | -1.8524 | 0.0000 | -0.9103 |

Tabela 5.41 - Valores médios dos parâmetros atualizados e erros relativos para 30 observações, caso 2 com funções de pertinência *fuzzy* triangulares.

| | $\tilde{\theta}_1$ | $\tilde{\theta}_2$ | $\tilde{\theta}_3$ |
|--------------------------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| $\alpha_{1.0000}$ | 7.9704 | 1.9746 | 1.9811 |
| $\alpha_{0.8000}$ | 7.9803 | 1.9846 | 1.9911 |
| $\alpha_{0.6000}$ | 8.0973 | 2.0051 | 1.9807 |
| $\alpha_{0.4000}$ | 8.1057 | 1.9876 | 1.9957 |
| $\alpha_{0.2000}$ | 8.0024 | 1.9932 | 1.9844 |
| $\alpha_{0.0000}$ | 8.0016 | 1.9715 | 1.9955 |
| Ref $\alpha_{0,0}$ | 8.0006 | 2.0121 | 2.0035 |
| Erro (%) | 0.0125 | -2.0177 | -0.3993 |

Tabela 5.42 - Raio dos parâmetros atualizados e erros relativos para 30 observações, caso 2 com funções de pertença *fuzzy* triangulares.

| | $\Delta\theta_1$ | $\Delta\theta_2$ | $\Delta\theta_3$ |
|--------------------------------------|------------------|------------------|------------------|
| $\alpha_{1.0000}$ | 0 | 0 | 0 |
| $\alpha_{0.8000}$ | 0.0100 | 0.0100 | 0.0100 |
| $\alpha_{0.6000}$ | 0.1270 | 0.0584 | 0.0543 |
| $\alpha_{0.4000}$ | 0.2174 | 0.0818 | 0.1286 |
| $\alpha_{0.2000}$ | 0.3708 | 0.1365 | 0.1351 |
| $\alpha_{0.0000}$ | 0.4752 | 0.1751 | 0.1835 |
| Ref $\alpha_{0,0}$ | 0.4850 | 0.1851 | 0.1935 |
| Erro (%) | -2.0206 | -5.4025 | -5.1680 |

Com amostras contendo 30 observações verifica-se um ligeiro aumento do erro no nível zero de pertença quando comparado com os resultados obtidos para amostras com 10 observações.

Na figura 5.23 são apresentadas as funções de pertença *fuzzy* triangulares das respostas para uma amostra com 100 observações.

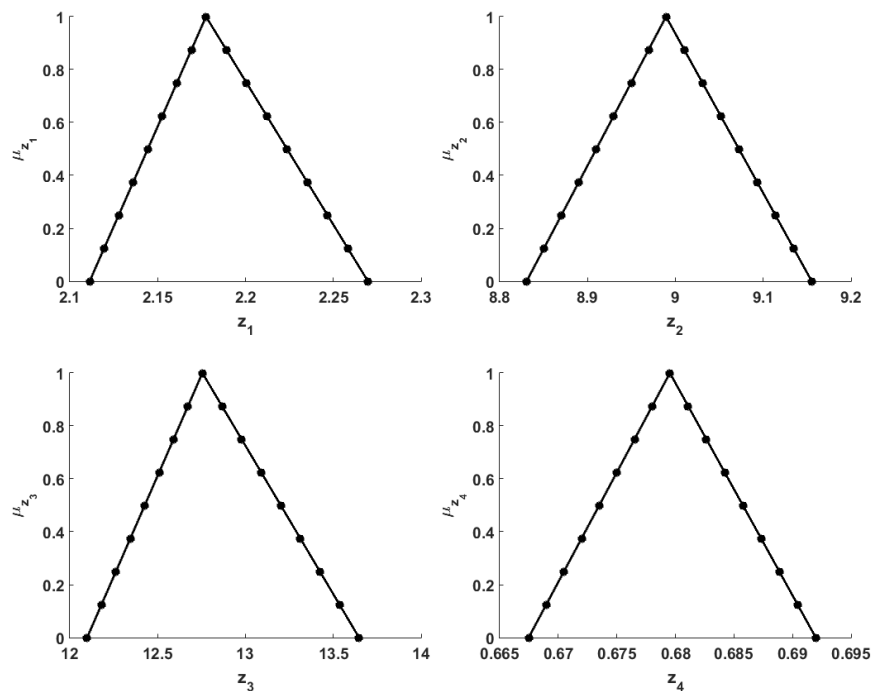


Figura 5.23 - Funções de pertença triangulares das respostas de referência caso 2 com amostras com 100 observações.

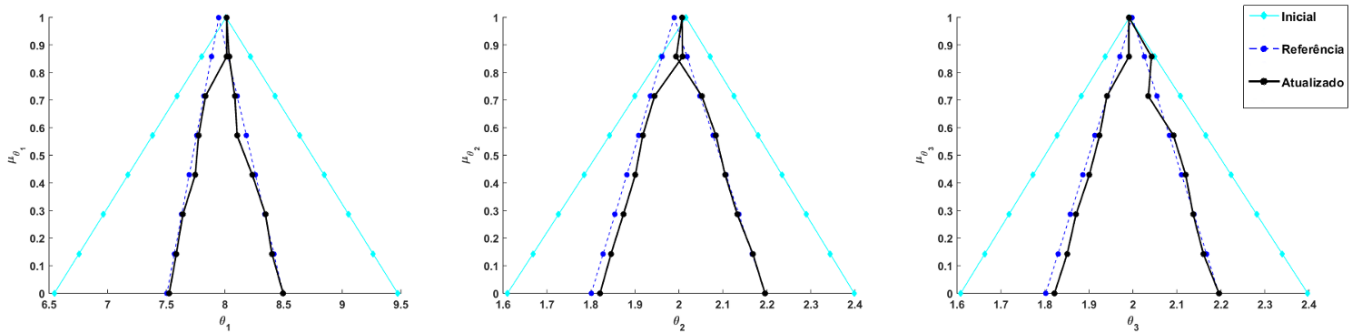


Figura 5.24 – Funções de pertinência *fuzzy* triangulares iniciais, de referência e atualizadas, caso 2 com amostras de 100 observações.

Tabela 5.43 - Parâmetros *fuzzy* em cada α_{cut} , caso 2 com funções de pertinência triangulares e 100 observações.

| | $\underline{\theta}_1$ | $\overline{\theta}_1$ | $\underline{\theta}_2$ | $\overline{\theta}_2$ | $\underline{\theta}_3$ | $\overline{\theta}_3$ |
|--------------------------------------|------------------------|-----------------------|------------------------|-----------------------|------------------------|-----------------------|
| Inicial | 6.5000 | 9.5000 | 1.6000 | 2.4000 | 1.6000 | 2.4000 |
| $\alpha_{1.0000}$ | 8.0151 | 8.0151 | 2.0072 | 2.0072 | 1.9909 | 1.9909 |
| $\alpha_{0.8571}$ | 8.0142 | 8.0355 | 2.0082 | 1.9938 | 1.9907 | 2.0422 |
| $\alpha_{0.7143}$ | 7.8340 | 8.0842 | 1.9446 | 2.0521 | 1.9409 | 2.0351 |
| $\alpha_{0.5714}$ | 7.7755 | 8.1042 | 1.9176 | 2.0842 | 1.9240 | 2.0922 |
| $\alpha_{0.4286}$ | 7.7467 | 8.2334 | 1.9008 | 2.1052 | 1.9007 | 2.1201 |
| $\alpha_{0.2857}$ | 7.6413 | 8.3457 | 1.8737 | 2.1327 | 1.8706 | 2.1370 |
| $\alpha_{0.1429}$ | 7.5854 | 8.4010 | 1.8456 | 2.1680 | 1.8506 | 2.1601 |
| $\alpha_{0.0000}$ | 7.5254 | 8.4962 | 1.8208 | 2.1956 | 1.8217 | 2.1955 |
| Ref $\alpha_{0,0}$ | 7.5054 | 8.4962 | 1.8008 | 2.1956 | 1.8017 | 2.1955 |
| Erro (%) | 0.2665 | 0.0000 | 1.1106 | 0.0000 | 1.1101 | 0.0000 |

Tabela 5.44 - Valores médios dos parâmetros atualizados e erros relativos para 100 observações, caso 2 com funções de pertinência *fuzzy* triangulares.

| | $\tilde{\theta}_1$ | $\tilde{\theta}_2$ | $\tilde{\theta}_3$ |
|--------------------------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| $\alpha_{1.0000}$ | 8.0151 | 2.0072 | 1.9909 |
| $\alpha_{0.8571}$ | 8.0249 | 2.0010 | 2.0164 |
| $\alpha_{0.7143}$ | 7.9591 | 1.9983 | 1.9880 |
| $\alpha_{0.5714}$ | 7.9398 | 2.0009 | 2.0081 |
| $\alpha_{0.4286}$ | 7.9900 | 2.0030 | 2.0104 |
| $\alpha_{0.2857}$ | 7.9935 | 2.0032 | 2.0038 |
| $\alpha_{0.1429}$ | 7.9932 | 2.0068 | 2.0054 |
| $\alpha_{0.0000}$ | 8.0108 | 2.0082 | 2.0086 |
| Ref $\alpha_{0,0}$ | 8.0008 | 1.9982 | 1.9986 |
| Erro (%) | 0.1250 | 0.5005 | 0.5004 |

Tabela 5.45 - Raio dos parâmetros atualizados e erros relativos para 100 observações, caso 2 com funções de pertinência *fuzzy* triangulares.

| | $\Delta\theta_1$ | $\Delta\theta_2$ | $\Delta\theta_3$ |
|--------------------------------------|------------------|------------------|------------------|
| $\alpha_{1.0000}$ | 0 | 0 | 0 |
| $\alpha_{0.8571}$ | 0.0106 | -0.0072 | 0.0257 |
| $\alpha_{0.7143}$ | 0.1251 | 0.0538 | 0.0471 |
| $\alpha_{0.5714}$ | 0.1643 | 0.0833 | 0.0841 |
| $\alpha_{0.4286}$ | 0.2433 | 0.1022 | 0.1097 |
| $\alpha_{0.2857}$ | 0.3522 | 0.1295 | 0.1332 |
| $\alpha_{0.1429}$ | 0.4078 | 0.1612 | 0.1548 |
| $\alpha_{0.0000}$ | 0.4854 | 0.1874 | 0.1869 |
| Ref $\alpha_{0,0}$ | 0.4954 | 0.1974 | 0.1969 |
| Erro (%) | -2.0186 | -5.0659 | -5.0787 |

Na figura 5.24 são apresentadas as funções de pertinência dos parâmetros atualizados. Os resultados obtidos com o algoritmo 1 para o presente caso de estudo estão expostos nas tabelas 5.43 a 5.45.

Para 100 observações os resultados dos intervalos são bastante satisfatórios, visto que o erro relativo no nível de pertinência 0 não ultrapassa os 1%.

5.2.1.2. Algoritmo 2

Na figura 5.25 são apresentadas as funções de pertinência *fuzzy* dos parâmetros atualizados, obtidas através do algoritmo 2, para a amostra contendo 10 observações.

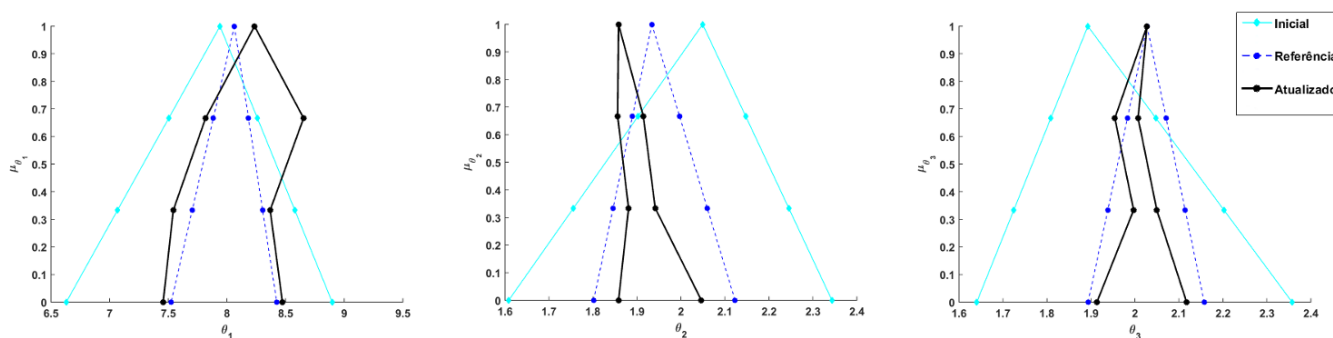


Figura 5.25 – Funções de pertinência *fuzzy* triangulares iniciais, de referência e atualizadas (caso 2 com amostras de 10 observações).

Os resultados obtidos através do algoritmo 2, para o segundo caso de estudo com amostras de dez observações são apresentados nas tabelas 5.46 a 5.48.

Tabela 5.46 - Parâmetros *fuzzy* em cada α_{cut} , caso 2 com funções de pertinência triangulares e 10 observações.

| | $\underline{\theta}_1$ | $\overline{\theta}_1$ | $\underline{\theta}_2$ | $\overline{\theta}_2$ | $\underline{\theta}_3$ | $\overline{\theta}_3$ |
|--------------------------------------|------------------------|-----------------------|------------------------|-----------------------|------------------------|-----------------------|
| Inicial | 6.5000 | 9.5000 | 1.6000 | 2.4000 | 1.6000 | 2.4000 |
| $\alpha_{1.0000}$ | 8.2352 | 8.2352 | 1.8582 | 1.8582 | 2.0274 | 2.0274 |
| $\alpha_{0.6667}$ | 7.8179 | 8.6536 | 1.8561 | 1.9146 | 1.9544 | 2.0072 |
| $\alpha_{0.3333}$ | 7.5429 | 8.3685 | 1.8809 | 1.9416 | 1.9970 | 2.0497 |
| $\alpha_{0.0000}$ | 7.4562 | 8.4732 | 1.8581 | 2.0464 | 1.9136 | 2.1174 |
| Ref $\alpha_{0,0}$ | 7.5248 | 8.4245 | 1.8016 | 2.1230 | 1.8936 | 2.1574 |
| Erro (%) | -0.9117 | 0.5780 | 3.1361 | -3.6081 | 1.0562 | -1.8541 |

Tabela 5.47 - Valores médios dos parâmetros atualizados e erros relativos para 10 observações, caso 2 com funções de pertinência *fuzzy* triangulares.

| | $\tilde{\theta}_1$ | $\tilde{\theta}_2$ | $\tilde{\theta}_3$ |
|--------------------------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| $\alpha_{1.0000}$ | 8.2352 | 1.8582 | 2.0274 |
| $\alpha_{0.6667}$ | 8.2358 | 1.8853 | 1.9808 |
| $\alpha_{0.3333}$ | 7.9557 | 1.9113 | 2.0234 |
| $\alpha_{0.0000}$ | 7.9647 | 1.9523 | 2.0155 |
| Ref $\alpha_{0,0}$ | 7.9747 | 1.9623 | 2.0255 |
| Erro (%) | -0.1254 | -0.5096 | -0.4937 |

Tabela 5.48 - Raio dos parâmetros atualizados e erros relativos para 10 observações, caso 2 com funções de pertinência *fuzzy* triangulares.

| | $\Delta\theta_1$ | $\Delta\theta_2$ | $\Delta\theta_3$ |
|--------------------------------------|------------------|------------------|------------------|
| $\alpha_{1.0000}$ | 0 | 0 | 0 |
| $\alpha_{0.6667}$ | 0.4178 | 0.0292 | 0.0264 |
| $\alpha_{0.3333}$ | 0.4128 | 0.0303 | 0.0264 |
| $\alpha_{0.0000}$ | 0.5085 | 0.0941 | 0.1019 |
| Ref $\alpha_{0,0}$ | 0.4499 | 0.1607 | 0.1319 |
| Erro (%) | 13.0251 | -41.4437 | -22.7445 |

Para o presente caso de estudo, os resultados obtidos com o algoritmo 2 não são satisfatórios, pois apesar de os erros no nível zero de pertinência serem baixos, existem grandes discrepâncias nos níveis de pertinência superiores, para além da violação da definição de convexidade observada nas funções de pertinência obtidas (figura 5.25).

Na figura 5.26 são apresentadas as funções de pertinência triangulares dos parâmetros atualizados, obtidas através do algoritmo 2, considerando 30 observações.

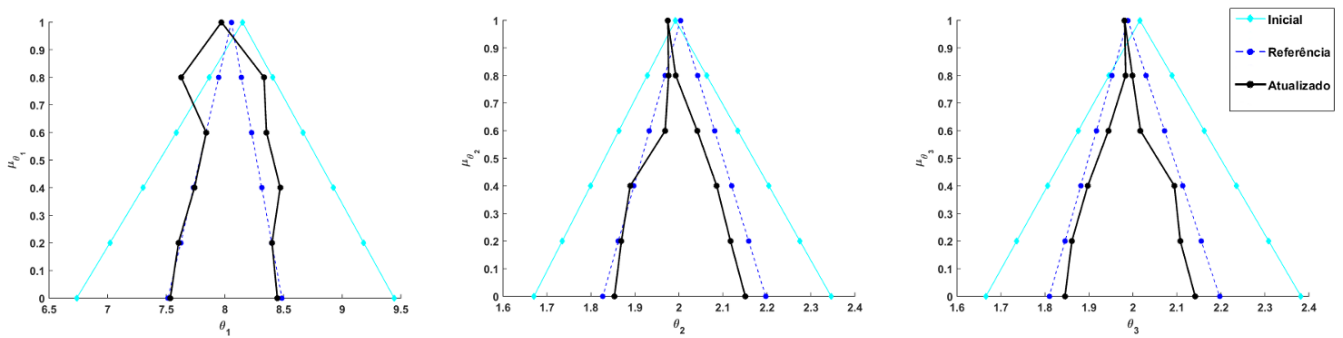


Figura 5.26 – Funções de pertinência *fuzzy* triangulares iniciais, de referência e atualizadas, caso 2 com amostras de 30 observações.

Tabela 5.49 - Parâmetros *fuzzy* em cada α_{cut} , caso 2 com funções de pertinência triangulares e 30 observações.

| | $\underline{\theta}_1$ | $\overline{\theta}_1$ | $\underline{\theta}_2$ | $\overline{\theta}_2$ | $\underline{\theta}_3$ | $\overline{\theta}_3$ |
|--------------------------------------|------------------------|-----------------------|------------------------|-----------------------|------------------------|-----------------------|
| Inicial | 6.5000 | 9.5000 | 1.6000 | 2.4000 | 1.6000 | 2.4000 |
| $\alpha_{1.0000}$ | 7.9704 | 7.9704 | 1.9746 | 1.9746 | 1.9811 | 1.9811 |
| $\alpha_{0.8000}$ | 7.6277 | 8.3330 | 1.9765 | 1.9928 | 1.9835 | 1.9986 |
| $\alpha_{0.6000}$ | 7.8404 | 8.3543 | 1.9688 | 2.0414 | 1.9442 | 2.0171 |
| $\alpha_{0.4000}$ | 7.7402 | 8.4712 | 1.8892 | 2.0859 | 1.8972 | 2.0942 |
| $\alpha_{0.2000}$ | 7.6038 | 8.4011 | 1.8692 | 2.1172 | 1.8612 | 2.1077 |
| $\alpha_{0.0000}$ | 7.5344 | 8.4468 | 1.8534 | 2.1508 | 1.8455 | 2.1414 |
| Ref $\alpha_{0,0}$ | 7.5153 | 8.4858 | 1.8271 | 2.1972 | 1.8099 | 2.1970 |
| Erro (%) | 0.2541 | -0.4596 | 1.4394 | -2.1118 | 1.9669 | -2.5307 |

Tabela 5.50 - Valores médios dos parâmetros atualizados e erros relativos para 30 observações, caso 2 com funções de pertinência *fuzzy* triangulares.

| | $\tilde{\theta}_1$ | $\tilde{\theta}_2$ | $\tilde{\theta}_3$ |
|--------------------------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| $\alpha_{1.0000}$ | 7.9704 | 1.9746 | 1.9811 |
| $\alpha_{0.8000}$ | 7.9803 | 1.9846 | 1.9911 |
| $\alpha_{0.6000}$ | 8.0973 | 2.0051 | 1.9807 |
| $\alpha_{0.4000}$ | 8.1057 | 1.9876 | 1.9876 |
| $\alpha_{0.2000}$ | 8.0024 | 1.9932 | 1.9932 |
| $\alpha_{0.0000}$ | 7.9906 | 2.0021 | 2.0021 |
| Ref $\alpha_{0,0}$ | 8.0006 | 2.0121 | 2.0035 |
| Erro (%) | -0.1250 | -0.4970 | -0.0699 |

Tabela 5.51 - Raio dos parâmetros atualizados e erros relativos para 30 observações, caso 2 com funções de pertinência *fuzzy* triangulares.

| | $\Delta\theta_1$ | $\Delta\theta_2$ | $\Delta\theta_3$ |
|--------------------------------------|------------------|------------------|------------------|
| $\alpha_{1.0000}$ | 0 | 0 | 0 |
| $\alpha_{0.8000}$ | 0.3527 | 0.0082 | 0.0075 |
| $\alpha_{0.6000}$ | 0.2570 | 0.0363 | 0.0364 |
| $\alpha_{0.4000}$ | 0.3655 | 0.0984 | 0.0985 |
| $\alpha_{0.2000}$ | 0.3987 | 0.1240 | 0.1232 |
| $\alpha_{0.0000}$ | 0.4562 | 0.1487 | 0.1479 |
| Ref $\alpha_{0,0}$ | 0.4850 | 0.1851 | 0.1935 |
| Erro (%) | -5.9381 | -19.6650 | -23.5659 |

Os resultados obtidos podem ser consultados nas tabelas 5.49 a 5.51. Com 30 observações existe uma ligeira melhoria nos resultados, no entanto continuam a verificar-se valores elevados de erro.

Na figura 5.27 são apresentadas as funções de pertinência *fuzzy* triangulares obtidas com algoritmo 2 para o caso 2 com a amostra de 100 observações.

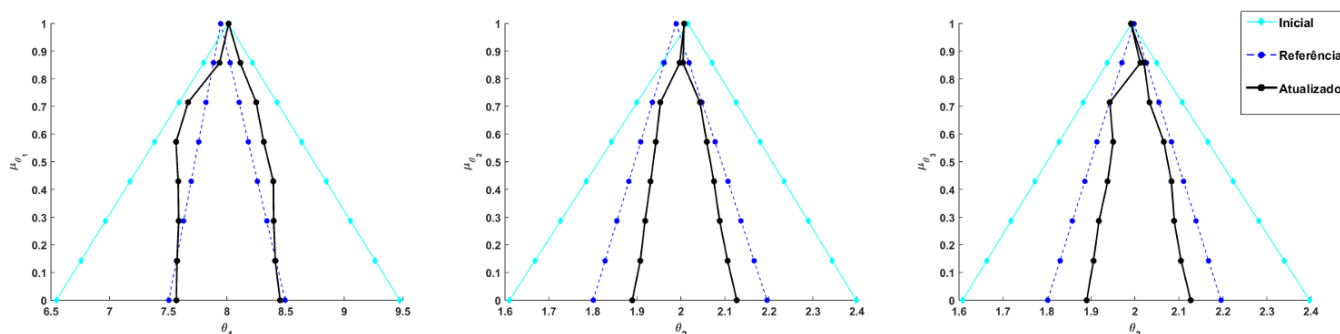


Figura 5.27 – Funções de pertinência *fuzzy* triangulares iniciais, de referência e atualizadas, caso 2 com amostras de 100 observações.

Tabela 5.52 - Parâmetros *fuzzy* em cada α_{cut} , caso 2 com funções de pertinência triangulares e 100 observações.

| | $\underline{\theta}_1$ | $\overline{\theta}_1$ | $\underline{\theta}_2$ | $\overline{\theta}_2$ | $\underline{\theta}_3$ | $\overline{\theta}_3$ |
|--------------------------------------|------------------------|-----------------------|------------------------|-----------------------|------------------------|-----------------------|
| Inicial | 6.5000 | 9.5000 | 1.6000 | 2.4000 | 1.6000 | 2.4000 |
| $\alpha_{1.0000}$ | 8.0151 | 8.0151 | 2.0072 | 2.0072 | 1.9909 | 1.9909 |
| $\alpha_{0.8571}$ | 7.9368 | 8.1129 | 1.9973 | 2.0047 | 2.0122 | 2.0207 |
| $\alpha_{0.7143}$ | 7.6684 | 8.2498 | 1.9533 | 2.0433 | 1.9428 | 2.0331 |
| $\alpha_{0.5714}$ | 7.5659 | 8.3138 | 1.9431 | 2.0587 | 1.9504 | 2.0658 |
| $\alpha_{0.4286}$ | 7.5841 | 8.3959 | 1.9311 | 2.0749 | 1.9379 | 2.0829 |
| $\alpha_{0.2857}$ | 7.5884 | 8.3986 | 1.9183 | 2.0881 | 1.9182 | 2.0893 |
| $\alpha_{0.1429}$ | 7.5748 | 8.4116 | 1.9077 | 2.1059 | 1.9058 | 2.1049 |
| $\alpha_{0.0000}$ | 7.5685 | 8.4530 | 1.8894 | 2.1270 | 1.8904 | 2.1268 |
| Ref $\alpha_{0,0}$ | 7.5054 | 8.4962 | 1.8008 | 2.1956 | 1.8017 | 2.1955 |
| Erro (%) | 0.8407 | -0.5085 | 4.9200 | -3.1244 | 4.9231 | -3.1291 |

Tabela 5.53 - Valores médios dos parâmetros atualizados e erros relativos para 100 observações, caso 2 com funções de pertinência *fuzzy* triangulares.

| | $\tilde{\theta}_1$ | $\tilde{\theta}_2$ | $\tilde{\theta}_3$ |
|--------------------------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| $\alpha_{1.0000}$ | 8.0151 | 2.0072 | 1.9909 |
| $\alpha_{0.8571}$ | 8.0249 | 2.0010 | 2.0164 |
| $\alpha_{0.7143}$ | 7.9591 | 1.9983 | 1.9880 |
| $\alpha_{0.5714}$ | 7.9398 | 2.0009 | 2.0081 |
| $\alpha_{0.4286}$ | 7.9900 | 2.0030 | 2.0104 |
| $\alpha_{0.2857}$ | 7.9935 | 2.0032 | 2.0038 |
| $\alpha_{0.1429}$ | 7.9932 | 2.0068 | 2.0054 |
| $\alpha_{0.0000}$ | 8.0108 | 2.0082 | 2.0086 |
| Ref $\alpha_{0,0}$ | 8.0008 | 1.9982 | 1.9986 |
| Erro (%) | 0.1250 | 0.5005 | 0.5004 |

Tabela 5.54 - Raio dos parâmetros atualizados e erros relativos para 100 observações, caso 2 com funções de pertinência *fuzzy* triangulares.

| | $\Delta\theta_1$ | $\Delta\theta_2$ | $\Delta\theta_3$ |
|--------------------------------------|------------------|------------------|------------------|
| $\alpha_{1.0000}$ | 0 | 0 | 0 |
| $\alpha_{0.8571}$ | 0.0881 | 0.0037 | 0.0043 |
| $\alpha_{0.7143}$ | 0.2907 | 0.0450 | 0.0451 |
| $\alpha_{0.5714}$ | 0.3740 | 0.0578 | 0.0577 |
| $\alpha_{0.4286}$ | 0.4059 | 0.0719 | 0.0725 |
| $\alpha_{0.2857}$ | 0.4051 | 0.0849 | 0.0855 |
| $\alpha_{0.1429}$ | 0.4184 | 0.0991 | 0.0995 |
| $\alpha_{0.0000}$ | 0.4423 | 0.1188 | 0.1182 |
| Ref $\alpha_{0,0}$ | 0.4954 | 0.1974 | 0.1969 |
| Erro (%) | -10.7186 | -39.8176 | -39.9695 |

Para amostras com 100 observações ocorre um aumento do erro nos limites dos intervalos de parâmetros atualizados, como pode ser observado na tabela 5.52. Outro aspecto a apontar é a ausência de observações nos níveis α superiores para os parâmetros θ_2 e θ_3 . Os resultados atualizados dos valores médios e raios de intervalo são apresentados nas tabelas 5.53 e 5.54, respectivamente.

5.2.2. Funções de pertença empíricas

Nesta seção serão utilizadas funções de pertença *fuzzy* empíricas. Tal como na seção anterior, os resultados produzidos através dos dois algoritmos desenvolvidos serão analisados para amostras com dez, trinta e cem observações.

5.2.2.1. Algoritmo 1

Na figura 5.28 são apresentadas as funções de pertença empíricas das respostas de referência do caso 2, para uma amostra com 10 observações.

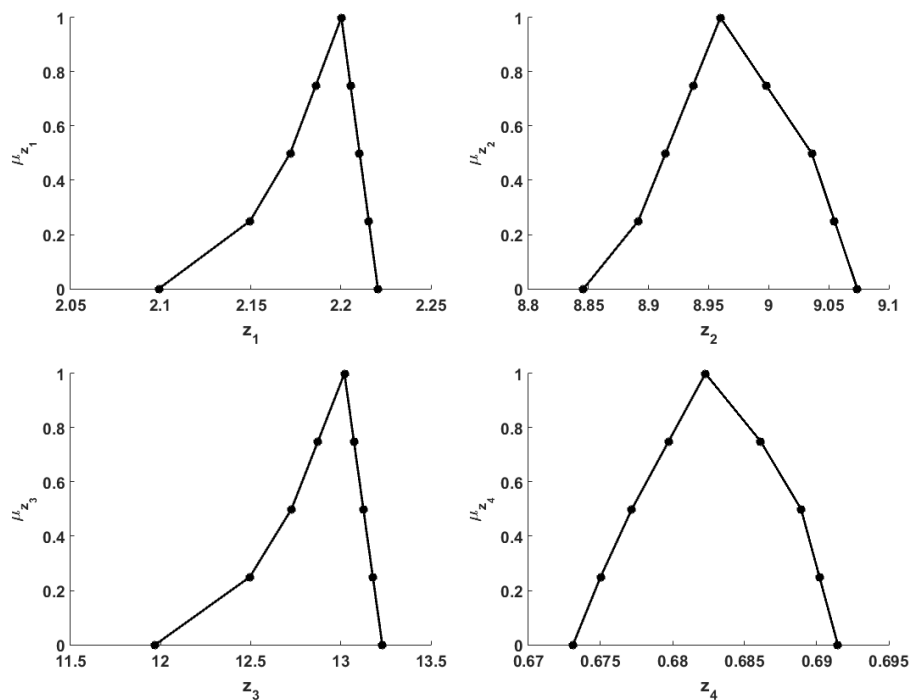


Figura 5.28 – Funções de pertença *fuzzy* empíricas iniciais, de referência e atualizadas, caso 2 com amostras de 10 observações.

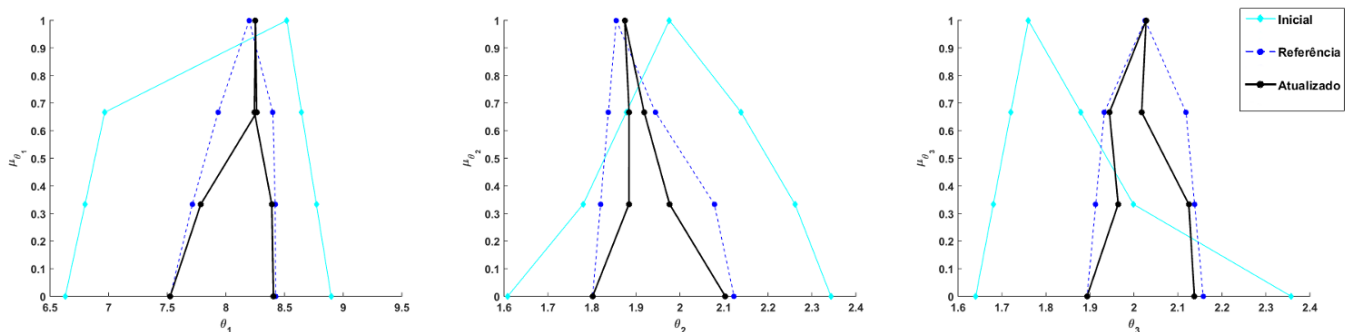


Figura 5.29 - Funções de pertença empíricas das respostas de referência, caso 2 com amostras com 10 observações.

Na figura 5.29 podem ser observadas as funções de pertinência dos parâmetros atualizados obtidas com amostras contendo 10 observações. Nas tabelas 5.55 a 5.57 são apresentados os resultados obtidos com o algoritmo 1.

Tabela 5.55 - Parâmetros fuzzy em cada α_{cut} , caso 2 com funções de pertinência empíricas e 10 observações.

| | $\underline{\theta}_1$ | $\overline{\theta}_1$ | $\underline{\theta}_2$ | $\overline{\theta}_2$ | $\underline{\theta}_3$ | $\overline{\theta}_3$ |
|--------------------------------------|------------------------|-----------------------|------------------------|-----------------------|------------------------|-----------------------|
| Inicial | 6.5000 | 9.5000 | 1.6000 | 2.4000 | 1.6000 | 2.4000 |
| $\alpha_{1.0000}$ | 8.2514 | 8.2514 | 1.8744 | 1.8744 | 2.0276 | 2.0276 |
| $\alpha_{0.6667}$ | 8.2619 | 8.2431 | 1.8844 | 1.9187 | 1.9443 | 2.0176 |
| $\alpha_{0.3333}$ | 7.7855 | 8.3910 | 1.8840 | 1.9766 | 1.9641 | 2.1248 |
| $\alpha_{0.0000}$ | 7.5248 | 8.4045 | 1.8016 | 2.1030 | 1.8936 | 2.1375 |
| Ref $\alpha_{0,0}$ | 7.5248 | 8.4245 | 1.8016 | 2.1230 | 1.8936 | 2.1574 |
| Erro (%) | 0.0000 | -0.2374 | 0.0000 | -0.9421 | 0.0000 | -0.9224 |

Tabela 5.56 - Valores médios dos parâmetros atualizados e erros relativos para 10 observações, caso 2 com funções de pertinência fuzzy empíricas.

| | $\tilde{\theta}_1$ | $\tilde{\theta}_2$ | $\tilde{\theta}_3$ |
|--------------------------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| $\alpha_{1.0000}$ | 8.2514 | 1.8744 | 2.0276 |
| $\alpha_{0.6667}$ | 8.2525 | 1.9015 | 1.9810 |
| $\alpha_{0.3333}$ | 8.0883 | 1.9303 | 2.0444 |
| $\alpha_{0.0000}$ | 7.9647 | 1.9523 | 2.0155 |
| Ref $\alpha_{0,0}$ | 7.9747 | 1.9623 | 2.0255 |
| Erro (%) | -0.1254 | -0.5096 | -0.4937 |

Tabela 5.57 - Raio dos parâmetros atualizados e erros relativos para 10 observações, caso 2 com funções de pertinência fuzzy empíricas.

| | $\Delta\theta_1$ | $\Delta\theta_2$ | $\Delta\theta_3$ |
|--------------------------------------|------------------|------------------|------------------|
| $\alpha_{1.0000}$ | 0 | 0 | 0 |
| $\alpha_{0.6667}$ | -0.0094 | 0.0172 | 0.0366 |
| $\alpha_{0.3333}$ | 0.3028 | 0.0463 | 0.0803 |
| $\alpha_{0.0000}$ | 0.4399 | 0.1507 | 0.1219 |
| Ref $\alpha_{0,0}$ | 0.4499 | 0.1607 | 0.1319 |
| Erro (%) | -2.2227 | -6.2228 | -7.5815 |

Com 10 observações e funções de pertinência empíricas observa-se a não convexidade das funções de pertinência fuzzy dos parâmetros de atualização θ_1 e θ_3 , apesar de os valores para os limites dos intervalos no nível de pertinência 0 apresentarem erros bastante pequenos.

Na figura 5.30 são apresentadas as funções de pertinência *fuzzy* empíricas das respostas para o caso 2, para a amostra com 30 observações.

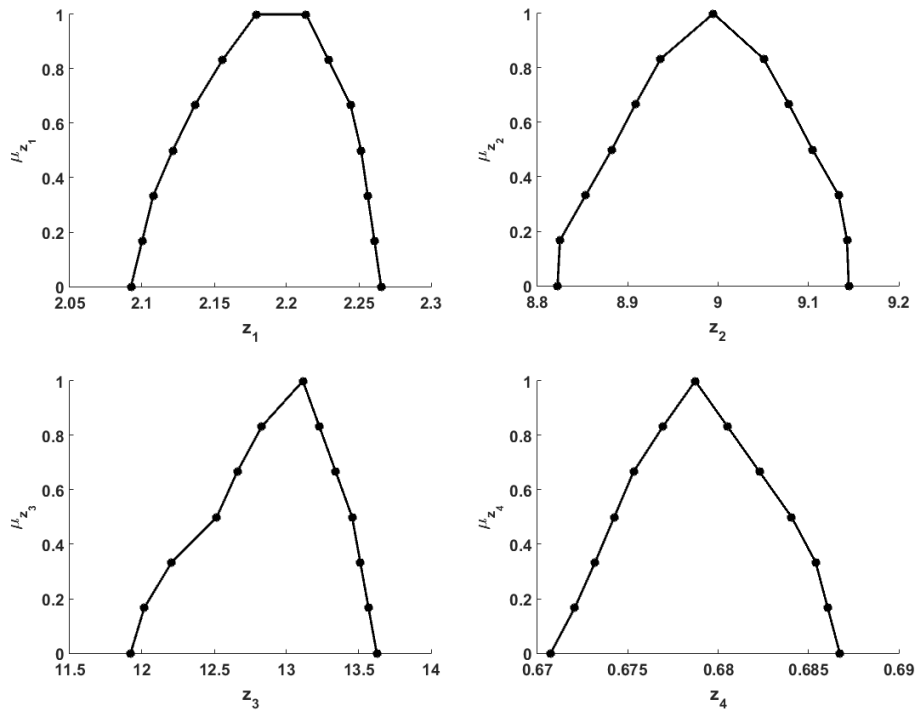


Figura 5.30 - Funções de pertinência empíricas das respostas de referência, caso 1 com amostras com 30 observações.

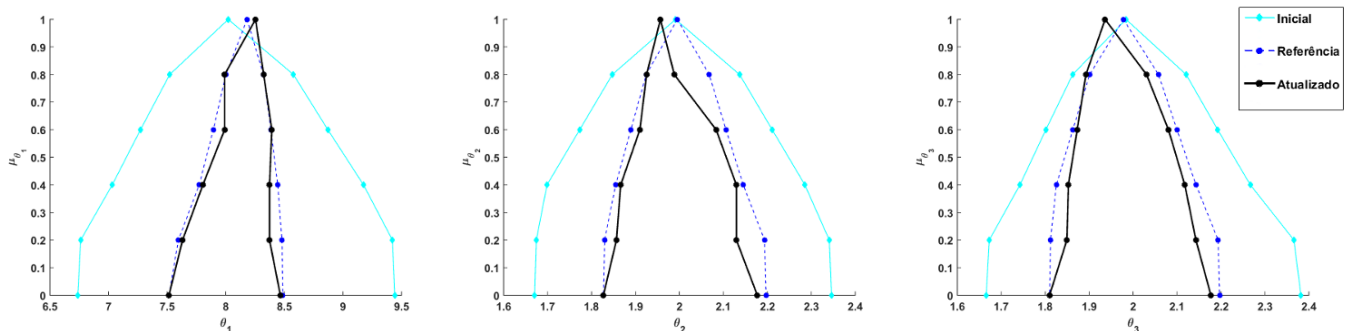


Figura 5.31 – Funções de pertinência *fuzzy* empíricas iniciais, de referência e atualizadas, caso 2 com amostras de 30 observações.

Na figura 5.31 são apresentadas as funções de pertinência empíricas dos parâmetros atualizados. Neste caso os resultados obtidos são bastante satisfatórios. No entanto, a função de pertinência *fuzzy* do parâmetro θ_1 não é convexa. Também se observou uma ligeira redução do erro nos intervalos estimados no nível zero de pertinência, ao utilizar funções de pertinência *fuzzy* empíricas. Os resultados obtidos podem ser consultados nas tabelas 5.58 a 5.60.

Tabela 5.58 - Parâmetros *fuzzy* em cada α_{cut} , caso 2 com funções de pertinência empíricas e 30 observações.

| | $\underline{\theta}_1$ | $\overline{\theta}_1$ | $\underline{\theta}_2$ | $\overline{\theta}_2$ | $\underline{\theta}_3$ | $\overline{\theta}_3$ |
|--------------------------------------|------------------------|-----------------------|------------------------|-----------------------|------------------------|-----------------------|
| Inicial | 6.5000 | 9.5000 | 1.6000 | 2.4000 | 1.6000 | 2.4000 |
| $\alpha_{1.0000}$ | 8.2543 | 8.2543 | 1.9568 | 1.9568 | 1.9363 | 1.9363 |
| $\alpha_{0.8000}$ | 7.9903 | 8.3231 | 1.9253 | 1.9883 | 1.8926 | 2.0305 |
| $\alpha_{0.6000}$ | 7.9903 | 8.3932 | 1.9100 | 2.0835 | 1.8728 | 2.0805 |
| $\alpha_{0.4000}$ | 7.8048 | 8.3732 | 1.8664 | 2.1296 | 1.8528 | 2.1177 |
| $\alpha_{0.2000}$ | 7.6351 | 8.3732 | 1.8284 | 2.1296 | 1.8493 | 2.1430 |
| $\alpha_{0.0000}$ | 7.5153 | 8.4658 | 1.8271 | 2.1772 | 1.8099 | 2.1770 |
| Ref $\alpha_{0,0}$ | 7.5153 | 8.4858 | 1.8271 | 2.1972 | 1.8099 | 2.1970 |
| Erro (%) | 0.0000 | -0.2357 | 0.0000 | -0.9102 | 0.0000 | -0.9103 |

Tabela 5.59 - Valores médios dos parâmetros atualizados e erros relativos para 30 observações, caso 2 com funções de pertinência *fuzzy* empíricas.

| | $\tilde{\theta}_1$ | $\tilde{\theta}_2$ | $\tilde{\theta}_3$ |
|--------------------------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| $\alpha_{1.0}$ | 8.2543 | 1.9568 | 1.9363 |
| $\alpha_{1.0000}$ | 8.1567 | 1.9568 | 1.9616 |
| $\alpha_{0.8000}$ | 8.1918 | 1.9967 | 1.9766 |
| $\alpha_{0.6000}$ | 8.0890 | 1.9980 | 1.9852 |
| $\alpha_{0.4000}$ | 8.0024 | 1.9932 | 1.9961 |
| $\alpha_{0.2000}$ | 7.9906 | 2.0021 | 1.9935 |
| Ref $\alpha_{0,0}$ | 8.0990 | 2.0080 | 2.0079 |
| Erro (%) | -1.3384 | -0.2938 | -0.7172 |

Tabela 5.60 - Raio dos parâmetros atualizados e erros relativos para 30 observações, caso 2 com funções de pertinência *fuzzy* empíricas.

| | $\Delta\theta_1$ | $\Delta\theta_2$ | $\Delta\theta_3$ |
|--------------------------------------|------------------|------------------|------------------|
| $\alpha_{1.0000}$ | 0 | 0 | 0 |
| $\alpha_{0.8000}$ | 0.1664 | 0.0315 | 0.0690 |
| $\alpha_{0.6000}$ | 0.2014 | 0.0867 | 0.1038 |
| $\alpha_{0.4000}$ | 0.2842 | 0.1316 | 0.1324 |
| $\alpha_{0.2000}$ | 0.3708 | 0.1365 | 0.1468 |
| $\alpha_{0.0000}$ | 0.4752 | 0.1751 | 0.1835 |
| Ref $\alpha_{0,0}$ | 0.4852 | 0.1851 | 0.1935 |
| Erro (%) | -2.0610 | -5.4025 | -5.1680 |

Na figura 5.32 são apresentadas as funções de pertinência *fuzzy* empíricas das respostas para o caso 2, para a amostra com 100 observações.

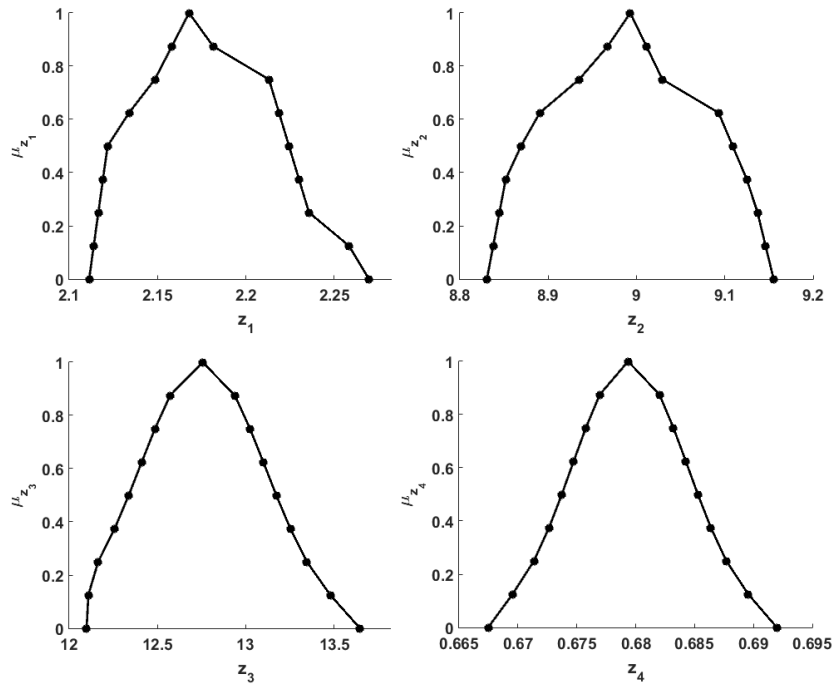


Figura 5.32 - Funções de pertinência triangulares das respostas de referência, caso 2 com amostras com 100 observações.

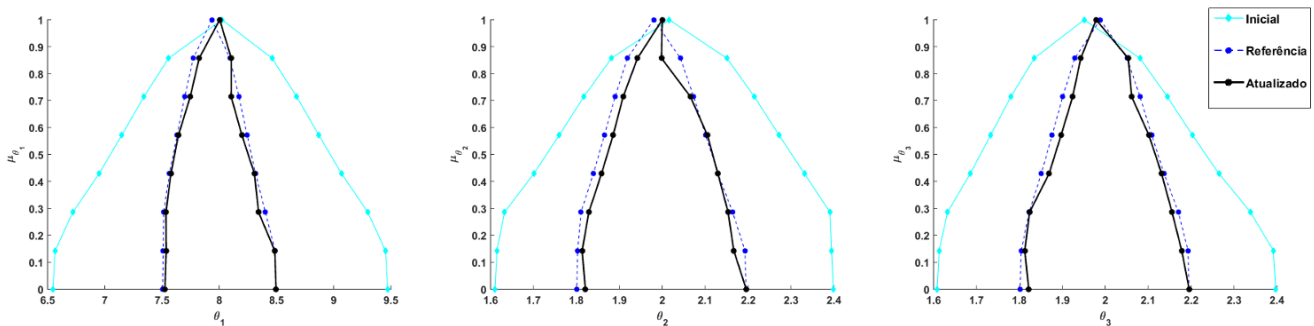


Figura 5.33 – Funções de pertinência *fuzzy* empíricas iniciais, de referência e atualizadas, caso 2 com amostras de 100 observações.

As funções de pertinência *fuzzy* empíricas dos parâmetros atualizados, obtidas com o algoritmo 1 podem ser observadas na figura 5.33

Os resultados obtidos com o algoritmo para a amostra com 100 observações são expostos nas tabelas 5.61 a 5.63. Neste caso, pode-se observar uma melhoria dos resultados obtidos, relativamente aos casos com 10 e 30 observações.

Tabela 5.61 - Parâmetros *fuzzy* em cada α_{cut} , caso 2 com funções de pertença empíricas e 100 observações.

| | $\underline{\theta}_1$ | $\overline{\theta}_1$ | $\underline{\theta}_2$ | $\overline{\theta}_2$ | $\underline{\theta}_3$ | $\overline{\theta}_3$ |
|--------------------------------------|------------------------|-----------------------|------------------------|-----------------------|------------------------|-----------------------|
| Inicial | 6.5000 | 9.5000 | 1.6000 | 2.4000 | 1.6000 | 2.4000 |
| $\alpha_{1.0000}$ | 8.0042 | 8.0042 | 2.0001 | 2.0001 | 1.9789 | 1.9789 |
| $\alpha_{0.8571}$ | 7.8246 | 8.1052 | 1.9423 | 1.9983 | 1.9430 | 2.0536 |
| $\alpha_{0.7143}$ | 7.7467 | 8.1042 | 1.9089 | 2.0657 | 1.9240 | 2.1017 |
| $\alpha_{0.5714}$ | 7.6432 | 8.1980 | 1.8855 | 2.1052 | 1.8971 | 2.1313 |
| $\alpha_{0.4286}$ | 7.5775 | 8.3074 | 1.8584 | 2.1297 | 1.8691 | 2.1201 |
| $\alpha_{0.2857}$ | 7.5344 | 8.3436 | 1.8289 | 2.1534 | 1.8237 | 2.1556 |
| $\alpha_{0.1429}$ | 7.5365 | 8.4989 | 1.8134 | 2.1668 | 1.8126 | 2.1782 |
| $\alpha_{0.0000}$ | 7.5254 | 8.4962 | 1.8208 | 2.1956 | 1.8217 | 2.1955 |
| Ref $\alpha_{0,0}$ | 7.5054 | 8.4962 | 1.8008 | 2.1956 | 1.8017 | 2.1955 |
| Erro (%) | 0.2665 | 0.0000 | 1.1106 | 0.0000 | 1.1101 | 0.0000 |

Tabela 5.62 - Valores médios dos parâmetros atualizados e erros relativos para 100 observações, caso 2 com funções de pertença *fuzzy* empíricas.

| | $\tilde{\theta}_1$ | $\tilde{\theta}_2$ | $\tilde{\theta}_3$ |
|--------------------------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| $\alpha_{1.0000}$ | 8.0042 | 2.0001 | 1.9789 |
| $\alpha_{0.8571}$ | 7.9649 | 1.9703 | 1.9983 |
| $\alpha_{0.7143}$ | 7.9254 | 1.9873 | 1.9928 |
| $\alpha_{0.5714}$ | 7.9206 | 1.9954 | 1.9994 |
| $\alpha_{0.4286}$ | 7.9425 | 1.9941 | 2.0002 |
| $\alpha_{0.2857}$ | 7.9390 | 1.9912 | 1.9897 |
| $\alpha_{0.1429}$ | 8.0107 | 1.9901 | 1.9954 |
| $\alpha_{0.0000}$ | 8.0108 | 2.0082 | 2.0086 |
| Ref $\alpha_{0,0}$ | 8.0008 | 1.9982 | 1.9986 |
| Erro (%) | 0.1250 | 0.5005 | 0.5004 |

Tabela 5.63 - Raio dos parâmetros atualizados e erros relativos para 100 observações, caso 2 com funções de pertença *fuzzy* empíricas.

| | $\Delta\theta_1$ | $\Delta\theta_2$ | $\Delta\theta_3$ |
|--------------------------------------|------------------|------------------|------------------|
| $\alpha_{1.0000}$ | 0 | 0 | 0 |
| $\alpha_{0.8571}$ | 0.1403 | 0.0280 | 0.0553 |
| $\alpha_{0.7143}$ | 0.1787 | 0.0784 | 0.0688 |
| $\alpha_{0.5714}$ | 0.2774 | 0.1099 | 0.1023 |
| $\alpha_{0.4286}$ | 0.3650 | 0.1357 | 0.1311 |
| $\alpha_{0.2857}$ | 0.4046 | 0.1623 | 0.1659 |
| $\alpha_{0.1429}$ | 0.4742 | 0.1767 | 0.1828 |
| $\alpha_{0.0000}$ | 0.4854 | 0.1874 | 0.1869 |
| Ref $\alpha_{0,0}$ | 0.4954 | 0.1974 | 0.1969 |
| Erro (%) | -2.0186 | -5.0659 | -5.0787 |

5.2.2.2. Algoritmo 2

Nesta seção são expostos os resultados obtidos com o algoritmo 2 para o caso 2 utilizando funções de pertença *fuzzy* empíricas.

Na figura 5.34 podem ser observadas as funções de pertença empíricas dos parâmetros atualizados, para a amostra com 10 observações.

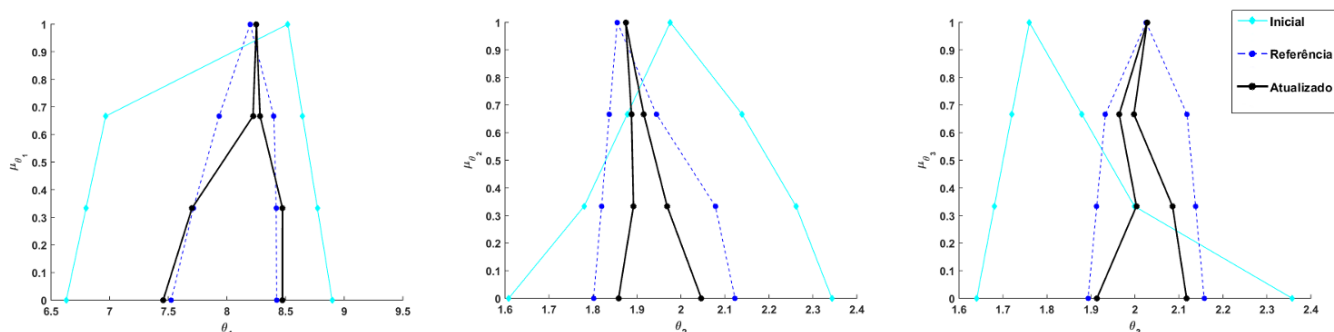


Figura 5.34 – Funções de pertença *fuzzy* empíricas iniciais, de referência e atualizadas, caso 2 com amostras de 10 observações.

Tabela 5.64 - Parâmetros *fuzzy* em cada α_{cut} , caso 2 com funções de pertença empíricas e 10 observações.

| | $\underline{\theta}_1$ | $\overline{\theta}_1$ | $\underline{\theta}_2$ | $\overline{\theta}_2$ | $\underline{\theta}_3$ | $\overline{\theta}_3$ |
|--------------------------------------|------------------------|-----------------------|------------------------|-----------------------|------------------------|-----------------------|
| Inicial | 6.5000 | 9.5000 | 1.6000 | 2.4000 | 1.6000 | 2.4000 |
| $\alpha_{1.0000}$ | 8.2514 | 8.2514 | 1.8744 | 1.8744 | 2.0276 | 2.0276 |
| $\alpha_{0.6667}$ | 8.2227 | 8.2823 | 1.8875 | 1.9156 | 1.9643 | 1.9977 |
| $\alpha_{0.3333}$ | 7.7027 | 8.4738 | 1.8920 | 1.9686 | 2.0034 | 2.0855 |
| $\alpha_{0.0000}$ | 7.4562 | 8.4732 | 1.8581 | 2.0464 | 1.9136 | 2.1174 |
| Ref $\alpha_{0,0}$ | 7.5248 | 8.4245 | 1.8016 | 2.1230 | 1.8936 | 2.1574 |
| Erro (%) | -0.9117 | 0.5781 | 3.1361 | -3.6081 | 1.0562 | -1.8541 |

Tabela 5.65 - Valores médios dos parâmetros atualizados e erros relativos para 10 observações, caso 2 com funções de pertença *fuzzy* empíricas.

| | $\tilde{\theta}_1$ | $\tilde{\theta}_2$ | $\tilde{\theta}_3$ |
|--------------------------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| $\alpha_{1.0000}$ | 8.2514 | 1.8744 | 2.0276 |
| $\alpha_{0.6667}$ | 8.2525 | 1.9015 | 1.9810 |
| $\alpha_{0.3333}$ | 8.0883 | 1.9303 | 2.0444 |
| $\alpha_{0.0000}$ | 7.9647 | 1.9523 | 2.0155 |
| Ref $\alpha_{0,0}$ | 7.9747 | 1.9623 | 2.0255 |
| Erro (%) | -0.1254 | -0.5096 | -0.4937 |

Tabela 5.66 - Raio dos parâmetros atualizados e erros relativos para 10 observações, caso 2 com funções de pertença *fuzzy* empíricas.

| | $\Delta\theta_1$ | $\Delta\theta_2$ | $\Delta\theta_3$ |
|--------------------------------------|------------------|------------------|------------------|
| $\alpha_{1.0000}$ | 0 | 0 | 0 |
| $\alpha_{0.6667}$ | 0.0298 | 0.0140 | 0.0167 |
| $\alpha_{0.3333}$ | 0.3855 | 0.0383 | 0.0410 |
| $\alpha_{0.0000}$ | 0.5085 | 0.0941 | 0.1019 |
| Ref $\alpha_{0,0}$ | 0.4499 | 0.1607 | 0.1319 |
| Erro (%) | 13.0351 | -41.4437 | -22.7445 |

Os resultados obtidos podem ser consultados nas tabelas 5.64 a 5.66. Relativamente aos valores atualizados dos parâmetros no nível de pertença 0 obtidos com o algoritmo 2, estes são satisfatórios, sendo que, o maior desvio observado em relação aos valores de referência ocorre no limite superior do parâmetro θ_2 . Os raios dos intervalos de parâmetros apresentam erros bastante significativos tal como se verificou nos casos anteriores.

As funções de pertença *fuzzy* dos parâmetros atualizados são apresentadas na figura 5.35, para a amostra com 30 observações.

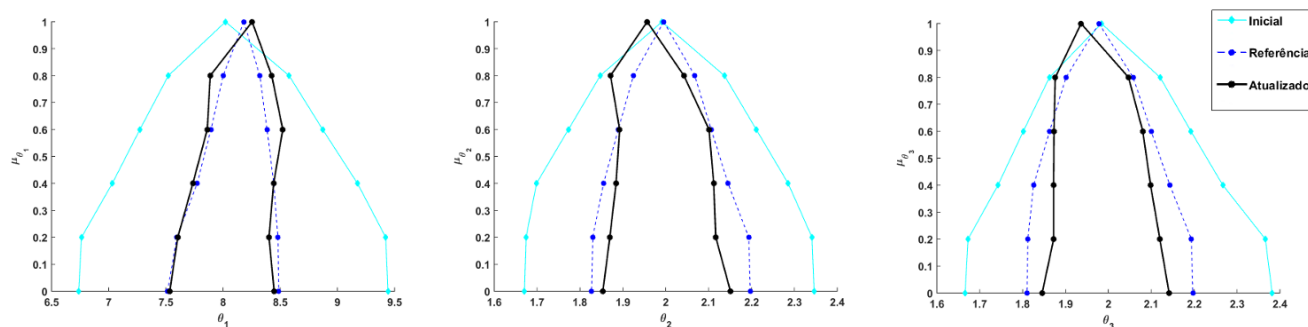


Figura 5.35 – Funções de pertença *fuzzy* empíricas iniciais, de referência e atualizadas, caso 2 com amostras de 30 observações.

Os resultados obtidos podem ser consultados nas tabelas 5.67 a 5.69.

Tabela 5.67 - Parâmetros *fuzzy* em cada α_{cut} , caso 2 com funções de pertença empíricas e 30 observações.

| | $\underline{\theta}_1$ | $\overline{\theta}_1$ | $\underline{\theta}_2$ | $\overline{\theta}_2$ | $\underline{\theta}_3$ | $\overline{\theta}_3$ |
|--------------------------------------|------------------------|-----------------------|------------------------|-----------------------|------------------------|-----------------------|
| Inicial | 6.5000 | 9.5000 | 1.6000 | 2.4000 | 1.6000 | 2.4000 |
| $\alpha_{1.0000}$ | 8.2543 | 8.2543 | 1.9568 | 1.9568 | 1.9363 | 1.9363 |
| $\alpha_{0.8000}$ | 7.8879 | 8.4256 | 1.8712 | 2.0423 | 1.8761 | 2.0471 |
| $\alpha_{0.6000}$ | 7.8615 | 8.5221 | 1.8925 | 2.1010 | 1.8731 | 2.0802 |
| $\alpha_{0.4000}$ | 7.7357 | 8.4423 | 1.8841 | 2.1119 | 1.8722 | 2.0983 |
| $\alpha_{0.2000}$ | 7.6038 | 8.4011 | 1.8696 | 2.1167 | 1.8723 | 2.1200 |
| $\alpha_{0.0000}$ | 7.5344 | 8.4468 | 1.8534 | 2.1508 | 1.8455 | 2.1414 |
| Ref $\alpha_{0,0}$ | 7.5153 | 8.4858 | 1.8271 | 2.1972 | 1.8099 | 2.1970 |
| Erro (%) | 0.2541 | -0.4596 | 1.4394 | -2.1118 | 1.9670 | -2.5307 |

Tabela 5.68 - Valores médios dos parâmetros atualizados e erros relativos para 30 observações, caso 2 com funções de pertença *fuzzy* empíricas.

| | $\tilde{\theta}_1$ | $\tilde{\theta}_2$ | $\tilde{\theta}_3$ |
|--------------------------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| $\alpha_{1.0000}$ | 8.2543 | 1.9568 | 1.9363 |
| $\alpha_{0.8000}$ | 8.1567 | 1.9568 | 1.9616 |
| $\alpha_{0.6000}$ | 8.1918 | 1.9967 | 1.9766 |
| $\alpha_{0.4000}$ | 8.0890 | 1.9980 | 1.9852 |
| $\alpha_{0.2000}$ | 8.0024 | 1.9932 | 1.9961 |
| $\alpha_{0.0000}$ | 7.9906 | 2.0021 | 1.9935 |
| Ref $\alpha_{0,0}$ | 8.0990 | 2.0080 | 2.0079 |
| Erro (%) | -1.3384 | -0.2938 | -0.7172 |

Tabela 5.69 - Raio dos parâmetros atualizados e erros relativos para 30 observações, caso 2 com funções de pertença *fuzzy* empíricas.

| | $\Delta\theta_1$ | $\Delta\theta_2$ | $\Delta\theta_3$ |
|--------------------------------------|------------------|------------------|------------------|
| $\alpha_{1.0000}$ | 0 | 0 | 0 |
| $\alpha_{0.8000}$ | 0.2689 | 0.0856 | 0.0855 |
| $\alpha_{0.6000}$ | 0.3303 | 0.1043 | 0.1036 |
| $\alpha_{0.4000}$ | 0.3533 | 0.1139 | 0.1131 |
| $\alpha_{0.2000}$ | 0.3986 | 0.1235 | 0.1235 |
| $\alpha_{0.0000}$ | 0.4562 | 0.1487 | 0.1479 |
| Ref $\alpha_{0,0}$ | 0.4852 | 0.1851 | 0.1935 |
| Erro (%) | -5.9769 | -19.6650 | -23.5659 |

Com 30 observações o valor dos erros nos raios dos intervalos de parâmetros diminui, mas estes ainda apresentam valores que não são admissíveis.

De seguida são apresentados os resultados obtidos para amostras com 100 observações, as funções de pertinência *fuzzy* para este caso são apresentadas na figura 5.36, e os resultados obtidos podem ser consultados nas tabelas 5.70 a 5.72.

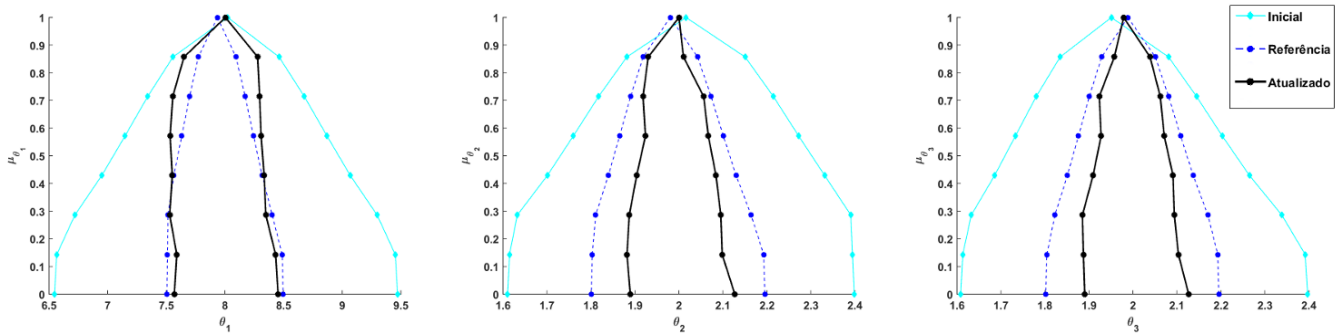


Figura 5.36 – Funções de pertinência *fuzzy* empíricas iniciais, de referência e atualizadas, caso 2 com amostras de 100 observações.

Tabela 5.70 - Parâmetros *fuzzy* em cada α_{cut} , caso 2 com funções de pertinência empíricas e 100 observações).

| | $\underline{\theta}_1$ | $\overline{\theta}_1$ | $\underline{\theta}_2$ | $\overline{\theta}_2$ | $\underline{\theta}_3$ | $\overline{\theta}_3$ |
|--------------------------------------|------------------------|-----------------------|------------------------|-----------------------|------------------------|-----------------------|
| Inicial | 6.5000 | 9.5000 | 1.6000 | 2.4000 | 1.6000 | 2.4000 |
| $\alpha_{1.0000}$ | 8.0042 | 8.0042 | 2.0001 | 2.0001 | 1.9789 | 1.9789 |
| $\alpha_{0.8571}$ | 7.6511 | 8.2788 | 1.9302 | 2.0104 | 1.9577 | 2.0389 |
| $\alpha_{0.7143}$ | 7.5552 | 8.2956 | 1.9183 | 2.0562 | 1.9235 | 2.0621 |
| $\alpha_{0.5714}$ | 7.5328 | 8.3085 | 1.9238 | 2.0669 | 1.9276 | 2.0711 |
| $\alpha_{0.4286}$ | 7.5509 | 8.3340 | 1.9039 | 2.0842 | 1.9093 | 2.0911 |
| $\alpha_{0.2857}$ | 7.5293 | 8.3487 | 1.8871 | 2.0952 | 1.8852 | 2.0941 |
| $\alpha_{0.1429}$ | 7.5892 | 8.4321 | 1.8819 | 2.0983 | 1.8874 | 2.1035 |
| $\alpha_{0.0000}$ | 7.5685 | 8.4530 | 1.8894 | 2.1270 | 1.8904 | 2.1268 |
| Ref $\alpha_{0,0}$ | 7.5054 | 8.4962 | 1.8008 | 2.1956 | 1.8017 | 2.1955 |
| Erro (%) | 0.8407 | -0.5085 | 4.9200 | -3.1244 | 4.9231 | -3.1291 |

Tabela 5.71 - Valores médios dos parâmetros atualizados e erros relativos para 100 observações, caso 2 com funções de pertinência *fuzzy* empíricas.

| | $\tilde{\theta}_1$ | $\tilde{\theta}_2$ | $\tilde{\theta}_3$ |
|--------------------------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| $\alpha_{1.0000}$ | 8.0042 | 2.0001 | 1.9789 |
| $\alpha_{0.8571}$ | 7.9649 | 1.9703 | 1.9983 |
| $\alpha_{0.7143}$ | 7.9254 | 1.9873 | 1.9928 |
| $\alpha_{0.5714}$ | 7.9206 | 1.9954 | 1.9994 |
| $\alpha_{0.4286}$ | 7.9425 | 1.9941 | 2.0002 |
| $\alpha_{0.2857}$ | 7.9390 | 1.9912 | 1.9897 |
| $\alpha_{0.1429}$ | 8.0107 | 1.9901 | 1.9954 |
| $\alpha_{0.0000}$ | 8.0108 | 2.0082 | 2.0086 |
| Ref $\alpha_{0,0}$ | 8.0008 | 1.9982 | 1.9986 |
| Erro (%) | 0.1250 | 0.5005 | 0.5004 |

Tabela 5.72 - Raio dos parâmetros atualizados e erros relativos para 100 observações, caso 2 com funções de pertença *fuzzy* empíricas.

| | $\Delta\theta_1$ | $\Delta\theta_2$ | $\Delta\theta_3$ |
|--------------------------------------|------------------|------------------|------------------|
| $\alpha_{1.0000}$ | 0 | 0 | 0 |
| $\alpha_{0.8571}$ | 0.3138 | 0.0401 | 0.0406 |
| $\alpha_{0.7143}$ | 0.3702 | 0.0689 | 0.0693 |
| $\alpha_{0.5714}$ | 0.3879 | 0.0715 | 0.0718 |
| $\alpha_{0.4286}$ | 0.3916 | 0.0902 | 0.0909 |
| $\alpha_{0.2857}$ | 0.4097 | 0.1041 | 0.1045 |
| $\alpha_{0.1429}$ | 0.4214 | 0.1082 | 0.1081 |
| $\alpha_{0.0000}$ | 0.4423 | 0.1188 | 0.1182 |
| Ref $\alpha_{0,0}$ | 0.4954 | 0.1974 | 0.1969 |
| Erro (%) | -10.7186 | -39.8176 | -39.9695 |

Com 100 observações observou-se um ligeiro aumento do erro no nível zero de pertença dos intervalos de parâmetros previstos. O mesmo acontece para os valores dos raios dos intervalos.

5.3. Caso 3 – Modos de Vibração Próximos com 10000 observações

Este caso é analisado com o intuito de verificar a influência do número de observações do conjunto de dados de referência na convexidade das funções de pertinência dos parâmetros incertos, obtidas após a atualização do modelo de elementos finitos nos dois algoritmos desenvolvidos. O estudo foi realizado para funções de pertinência triangulares e empíricas a partir de um conjunto de dados de referência gerados através do método de amostragem hipercubo latino tal como nos casos analisados nas seções 5.1 e 5.2 deste presente trabalho.

São apresentadas tabelas contendo os intervalos dos parâmetros atualizados em cada nível de pertinência α , e respectivos valores médios e raios. São também apresentadas imagens com as funções de pertinência obtidas e de referência, os hiperespaços de respostas são ilustrados para o nível de pertinência 0, que contém todas as observações do conjunto de dados.

5.3.1. Funções de Pertinência Triangulares

Na figura 5.37 são apresentadas as funções de pertinência triangulares para o caso de estudo 3 com amostras de referência e iniciais contendo 10000 observações.

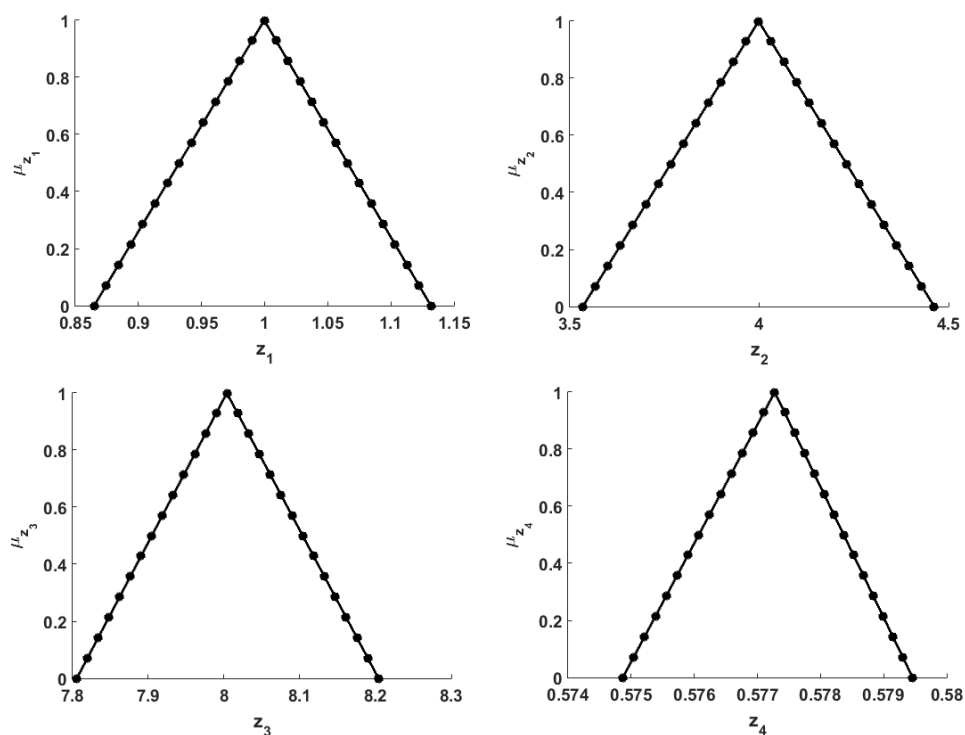


Figura 5.37 - Funções de pertinência triangulares das respostas de referência para 10000 observações.

5.3.1.1. Algoritmo 1

As funções de pertença dos parâmetros atualizados são representadas na figura 5.38.

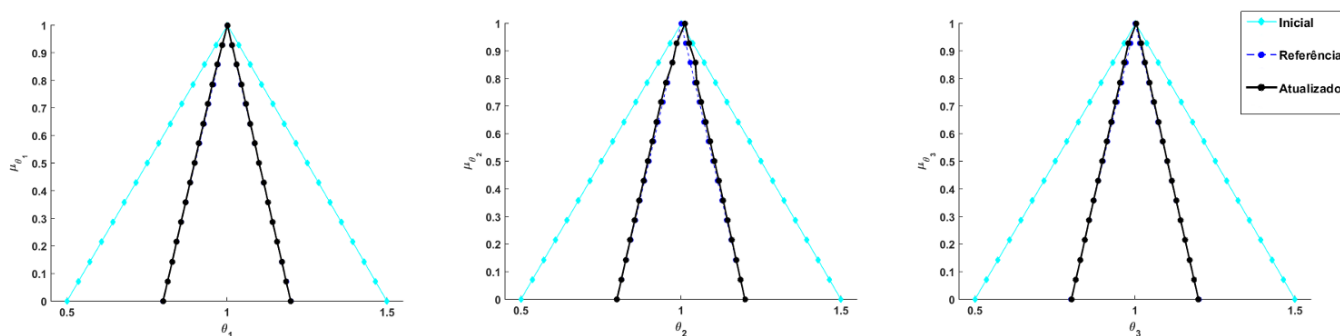


Figura 5.38 - Funções de pertença dos parâmetros atualizados para 10000 observações, caso 3 e funções de pertença triangulares.

Como pode ser observado as funções de pertença obtidas respeitam a condições de convexidade dos números *fuzzy*, e os erros obtidos nos intervalos, valores médios e raios dos parâmetros atualizados são satisfatórios.

Os resultados obtidos podem ser consultados nas tabelas 5.73 a 5.75.

Tabela 5.73 - Parâmetros *fuzzy* em cada α_{cut} , caso 3 com funções de pertença triangulares e 10000 observações.

| | $\underline{\theta}_1$ | $\bar{\theta}_1$ | $\underline{\theta}_2$ | $\bar{\theta}_2$ | $\underline{\theta}_3$ | $\bar{\theta}_3$ |
|--------------------------------------|------------------------|------------------|------------------------|------------------|------------------------|------------------|
| Inicial | 0.5 | 1.5 | 0.5 | 1.5 | 0.5 | 1.5 |
| $\alpha_{1.0000}$ | 1.0015 | 1.0015 | 1.0130 | 1.0130 | 1.0045 | 1.0045 |
| $\alpha_{0.9286}$ | 0.9854 | 1.0158 | 0.9869 | 1.0252 | 0.9796 | 1.0190 |
| $\alpha_{0.8571}$ | 0.9696 | 1.0303 | 0.9737 | 1.0452 | 0.9664 | 1.0317 |
| $\alpha_{0.7857}$ | 0.9543 | 1.0455 | 0.9529 | 1.0491 | 0.9533 | 1.0456 |
| $\alpha_{0.7143}$ | 0.9404 | 1.0592 | 0.9376 | 1.0639 | 0.9393 | 1.0597 |
| $\alpha_{0.6429}$ | 0.9265 | 1.0732 | 0.9238 | 1.0778 | 0.9257 | 1.0736 |
| $\alpha_{0.5714}$ | 0.9123 | 1.0872 | 0.9103 | 1.0914 | 0.9120 | 1.0874 |
| $\alpha_{0.5000}$ | 0.8984 | 1.1003 | 0.8963 | 1.1048 | 0.8981 | 1.1013 |
| $\alpha_{0.4286}$ | 0.8844 | 1.1152 | 0.8829 | 1.1189 | 0.8844 | 1.1151 |
| $\alpha_{0.3571}$ | 0.8706 | 1.1289 | 0.8692 | 1.1323 | 0.8705 | 1.1291 |
| $\alpha_{0.2857}$ | 0.8566 | 1.1428 | 0.8552 | 1.1455 | 0.8566 | 1.1429 |
| $\alpha_{0.2143}$ | 0.8424 | 1.1570 | 0.8413 | 1.1593 | 0.8432 | 1.1569 |
| $\alpha_{0.1429}$ | 0.8290 | 1.1717 | 0.8275 | 1.1728 | 0.8296 | 1.1708 |
| $\alpha_{0.0714}$ | 0.8145 | 1.1849 | 0.8138 | 1.1864 | 0.8152 | 1.1846 |
| $\alpha_{0.0000}$ | 0.8004 | 1.1996 | 0.8000 | 1.1999 | 0.8014 | 1.1987 |
| Ref $\alpha_{0,0}$ | 0.8001 | 1.2000 | 0.8000 | 1.2000 | 0.8000 | 1.1999 |
| Erro(%) | 0.0375 | -0.0333 | -0.0065 | -0.0083 | 0.1750 | -0.1000 |

Tal como nos dois casos apresentados anteriormente, a fonte de erro está no raio estimado para o parâmetro θ_2 , visto que os valores médios atualizados estão muito próximos dos valores de referência com erros quase inexistentes.

Tabela 5.74 - Valores médios dos parâmetros atualizados e erros relativos para 10000 observações, caso 3 com funções de pertença *fuzzy* triangulares.

| | $\tilde{\theta}_1$ | $\tilde{\theta}_2$ | $\tilde{\theta}_3$ |
|--------------------------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| $\alpha_{1.0000}$ | 1.0015 | 1.0130 | 1.0045 |
| $\alpha_{0.9286}$ | 1.0006 | 1.0061 | 0.9993 |
| $\alpha_{0.8571}$ | 0.9999 | 1.0095 | 0.9990 |
| $\alpha_{0.7857}$ | 0.9999 | 1.0010 | 0.9994 |
| $\alpha_{0.7143}$ | 0.9998 | 1.0007 | 0.9995 |
| $\alpha_{0.6429}$ | 0.9998 | 1.0008 | 0.9996 |
| $\alpha_{0.5714}$ | 0.9997 | 1.0008 | 0.9997 |
| $\alpha_{0.5000}$ | 0.9994 | 1.0005 | 0.9997 |
| $\alpha_{0.4286}$ | 0.9998 | 1.0009 | 0.9997 |
| $\alpha_{0.3571}$ | 0.9997 | 1.0007 | 0.9998 |
| $\alpha_{0.2857}$ | 0.9997 | 1.0004 | 0.9997 |
| $\alpha_{0.2143}$ | 0.9997 | 1.0003 | 1.0000 |
| $\alpha_{0.1429}$ | 1.0003 | 1.0001 | 1.0002 |
| $\alpha_{0.0714}$ | 0.9997 | 1.0001 | 0.9999 |
| $\alpha_{0.0000}$ | 1.0000 | 0.9999 | 1.0001 |
| Ref $\alpha_{0,0}$ | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| Erro(%) | 0.0000 | -0.0100 | 0.0100 |

Tabela 5.75 - Raio dos parâmetros atualizados e erros relativos para 10000 observações, caso 3 com funções de pertença *fuzzy* triangulares.

| | $\Delta\theta_1$ | $\Delta\theta_2$ | $\Delta\theta_3$ |
|--------------------------------------|------------------|------------------|------------------|
| $\alpha_{1.0000}$ | 0 | 0 | 0 |
| $\alpha_{0.9286}$ | 0.0152 | 0.0192 | 0.0197 |
| $\alpha_{0.8571}$ | 0.0304 | 0.0358 | 0.0327 |
| $\alpha_{0.7857}$ | 0.0456 | 0.0481 | 0.0462 |
| $\alpha_{0.7143}$ | 0.0594 | 0.0631 | 0.0602 |
| $\alpha_{0.6429}$ | 0.0734 | 0.0770 | 0.0739 |
| $\alpha_{0.5714}$ | 0.0875 | 0.0906 | 0.0877 |
| $\alpha_{0.5000}$ | 0.1010 | 0.1043 | 0.1016 |
| $\alpha_{0.4286}$ | 0.1154 | 0.1180 | 0.1153 |
| $\alpha_{0.3571}$ | 0.1292 | 0.1316 | 0.1293 |
| $\alpha_{0.2857}$ | 0.1431 | 0.1452 | 0.1431 |
| $\alpha_{0.2143}$ | 0.1573 | 0.1590 | 0.1569 |
| $\alpha_{0.1429}$ | 0.1713 | 0.1726 | 0.1706 |
| $\alpha_{0.0714}$ | 0.1852 | 0.1863 | 0.1847 |
| $\alpha_{0.0000}$ | 0.1996 | 0.2000 | 0.1986 |
| Ref $\alpha_{0,0}$ | 0.1999 | 0.2000 | 0.1999 |
| Erro(%) | -0.1501 | 0.0000 | -0.6503 |

Observando as nuvens de pontos dos espaços de respostas representadas na figura 5.39, pode-se verificar que os resultados obtidos através dos parâmetros atualizados estão bastante próximos dos de referência.

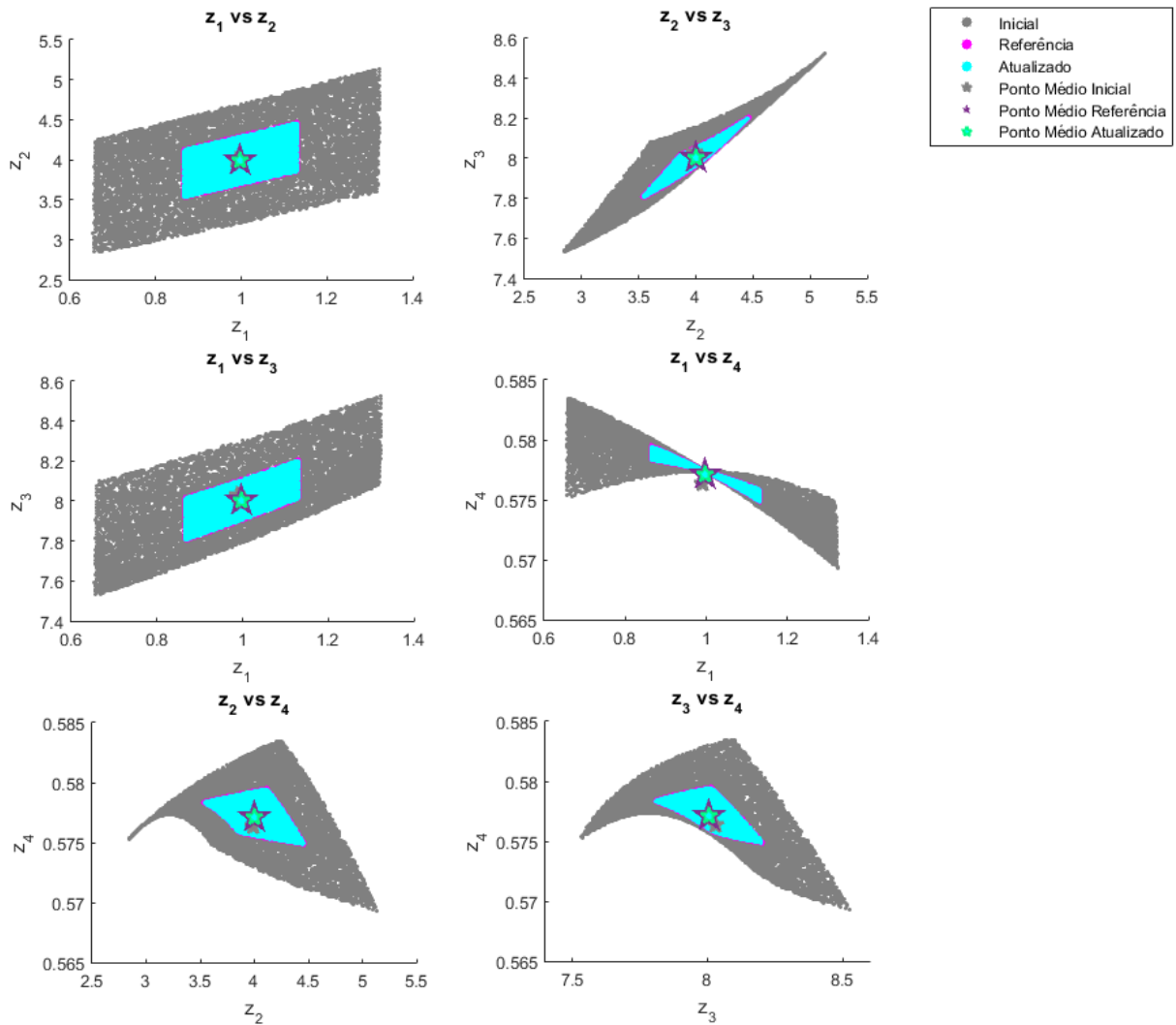


Figura 5.39 - Espaço de respostas *fuzzy* previstas no nível de pertinência zero, obtidas com o algoritmo 1 e funções de pertinência triangulares.

5.3.1.2. Algoritmo 2

As funções de pertença para os parâmetros atualizados a partir do algoritmo 2 são representadas na figura 5.40.

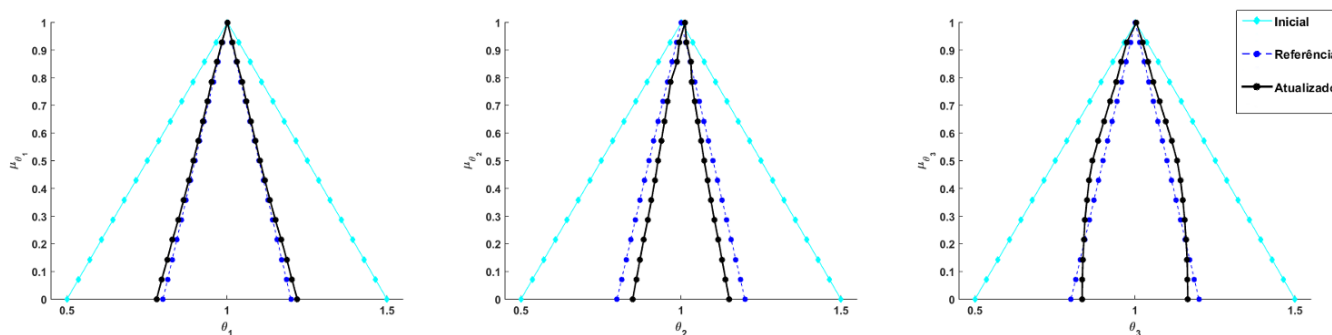


Figura 5.40 - Funções de pertença dos parâmetros atualizados para 10000 observações, caso 3 e funções de pertença triangulares.

Os resultados obtidos podem ser consultados nas tabelas 5.76 a 5.78. À semelhança dos resultados obtidos com o algoritmo 1, também se observa que a condição de convexidade das funções de pertença dos parâmetros atualizados é respeitada, se o número de observações no conjunto de referência for suficientemente grande. Quanto aos valores dos erros nos intervalos de parâmetros atualizados, continua a verificar-se a mesma tendência que nos casos anteriores, com erros bastante significativos na estimativa dos raios de parâmetros.

Tabela 5.76 - Parâmetros *fuzzy* em cada α_{cut} , caso 3 com funções de pertença triangulares e 10000 observações.

| | $\underline{\theta}_1$ | $\bar{\theta}_1$ | $\underline{\theta}_2$ | $\bar{\theta}_2$ | $\underline{\theta}_3$ | $\bar{\theta}_3$ |
|--------------------------------------|------------------------|------------------|------------------------|------------------|------------------------|------------------|
| Inicial | 0.5 | 1.5 | 0.5 | 1.5 | 0.5 | 1.5 |
| $\alpha_{1.0000}$ | 1.0015 | 1.0015 | 1.0130 | 1.0130 | 1.0045 | 1.0045 |
| $\alpha_{0.9286}$ | 0.9843 | 1.0169 | 0.9948 | 1.0173 | 0.9748 | 1.0237 |
| $\alpha_{0.8571}$ | 0.9687 | 1.0311 | 0.9879 | 1.0310 | 0.9572 | 1.0409 |
| $\alpha_{0.7857}$ | 0.9521 | 1.0477 | 0.9680 | 1.0340 | 0.9416 | 1.0573 |
| $\alpha_{0.7143}$ | 0.9389 | 1.0606 | 0.9586 | 1.0429 | 0.9220 | 1.0770 |
| $\alpha_{0.6429}$ | 0.9250 | 1.0747 | 0.9488 | 1.0528 | 0.9031 | 1.0960 |
| $\alpha_{0.5714}$ | 0.9102 | 1.0893 | 0.9387 | 1.0629 | 0.8845 | 1.1149 |
| $\alpha_{0.5000}$ | 0.8953 | 1.1034 | 0.9284 | 1.0727 | 0.8674 | 1.1319 |
| $\alpha_{0.4286}$ | 0.8807 | 1.1188 | 0.9187 | 1.0832 | 0.8568 | 1.1427 |
| $\alpha_{0.3571}$ | 0.8646 | 1.1348 | 0.9077 | 1.0937 | 0.8498 | 1.1498 |
| $\alpha_{0.2857}$ | 0.8478 | 1.1515 | 0.8963 | 1.1047 | 0.8438 | 1.1556 |
| $\alpha_{0.2143}$ | 0.8296 | 1.1698 | 0.8836 | 1.1170 | 0.8403 | 1.1597 |
| $\alpha_{0.1429}$ | 0.8135 | 1.1872 | 0.8720 | 1.1283 | 0.8372 | 1.1632 |
| $\alpha_{0.0714}$ | 0.7963 | 1.2030 | 0.8606 | 1.1395 | 0.8355 | 1.1643 |
| $\alpha_{0.0000}$ | 0.7801 | 1.2199 | 0.8491 | 1.1508 | 0.8348 | 1.1653 |
| Ref $\alpha_{0.0}$ | 0.8001 | 1.2000 | 0.8000 | 1.2000 | 0.8000 | 1.1999 |
| Erro(%) | -2.4997 | 1.6583 | 6.1375 | -4.1000 | 4.3500 | -2.8836 |

Tabela 5.77 - Valores médios dos parâmetros atualizados e erros relativos para 10000 observações, caso 3 com funções de pertinência *fuzzy* triangulares.

| | $\bar{\theta}_1$ | $\bar{\theta}_2$ | $\bar{\theta}_3$ |
|--------------------------------------|------------------|------------------|------------------|
| $\alpha_{1.0000}$ | 1.0015 | 1.0130 | 1.0045 |
| $\alpha_{0.9286}$ | 1.0006 | 1.0061 | 0.9993 |
| $\alpha_{0.8571}$ | 0.9999 | 1.0095 | 0.9990 |
| $\alpha_{0.7857}$ | 0.9999 | 1.0010 | 0.9994 |
| $\alpha_{0.7143}$ | 0.9998 | 1.0007 | 0.9995 |
| $\alpha_{0.6429}$ | 0.9998 | 1.0008 | 0.9996 |
| $\alpha_{0.5714}$ | 0.9997 | 1.0008 | 0.9997 |
| $\alpha_{0.5000}$ | 0.9994 | 1.0005 | 0.9997 |
| $\alpha_{0.4286}$ | 0.9998 | 1.0009 | 0.9997 |
| $\alpha_{0.3571}$ | 0.9997 | 1.0007 | 0.9998 |
| $\alpha_{0.2857}$ | 0.9997 | 1.0004 | 0.9997 |
| $\alpha_{0.2143}$ | 0.9997 | 1.0003 | 1.0000 |
| $\alpha_{0.1429}$ | 1.0003 | 1.0001 | 1.0002 |
| $\alpha_{0.0714}$ | 0.9997 | 1.0001 | 0.9999 |
| $\alpha_{0.0000}$ | 1.0000 | 0.9999 | 1.0001 |
| Ref $\alpha_{0,0}$ | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| Erro(%) | 0.0000 | -0.0100 | 0.0100 |

Tabela 5.78 - Raio dos parâmetros atualizados e erros relativos para 10000 observações, caso 3 com funções de pertinência *fuzzy* triangulares.

| | $\Delta\theta_1$ | $\Delta\theta_2$ | $\Delta\theta_3$ |
|--------------------------------------|------------------|------------------|------------------|
| $\alpha_{1.0000}$ | 0 | 0 | 0 |
| $\alpha_{0.9286}$ | 0.0163 | 0.0112 | 0.0245 |
| $\alpha_{0.8571}$ | 0.0312 | 0.0216 | 0.0418 |
| $\alpha_{0.7857}$ | 0.0478 | 0.0330 | 0.0578 |
| $\alpha_{0.7143}$ | 0.0609 | 0.0422 | 0.0775 |
| $\alpha_{0.6429}$ | 0.0749 | 0.0520 | 0.0964 |
| $\alpha_{0.5714}$ | 0.0895 | 0.0621 | 0.1152 |
| $\alpha_{0.5000}$ | 0.1041 | 0.0721 | 0.1323 |
| $\alpha_{0.4286}$ | 0.1191 | 0.0822 | 0.1429 |
| $\alpha_{0.3571}$ | 0.1351 | 0.0930 | 0.1500 |
| $\alpha_{0.2857}$ | 0.1518 | 0.1043 | 0.1559 |
| $\alpha_{0.2143}$ | 0.1701 | 0.1167 | 0.1597 |
| $\alpha_{0.1429}$ | 0.1869 | 0.1280 | 0.1630 |
| $\alpha_{0.0714}$ | 0.2034 | 0.1395 | 0.1644 |
| $\alpha_{0.0000}$ | 0.2199 | 0.1509 | 0.1652 |
| Ref $\alpha_{0,0}$ | 0.1999 | 0.2000 | 0.1999 |
| Erro(%) | 10.0050 | -24.5500 | -17.3587 |

Tal como nos resultados obtidos através do algoritmo 1 também as nuvens de pontos das respostas atualizadas representadas na figura 5.41 estão bastante próximas das nuvens de pontos de referência.

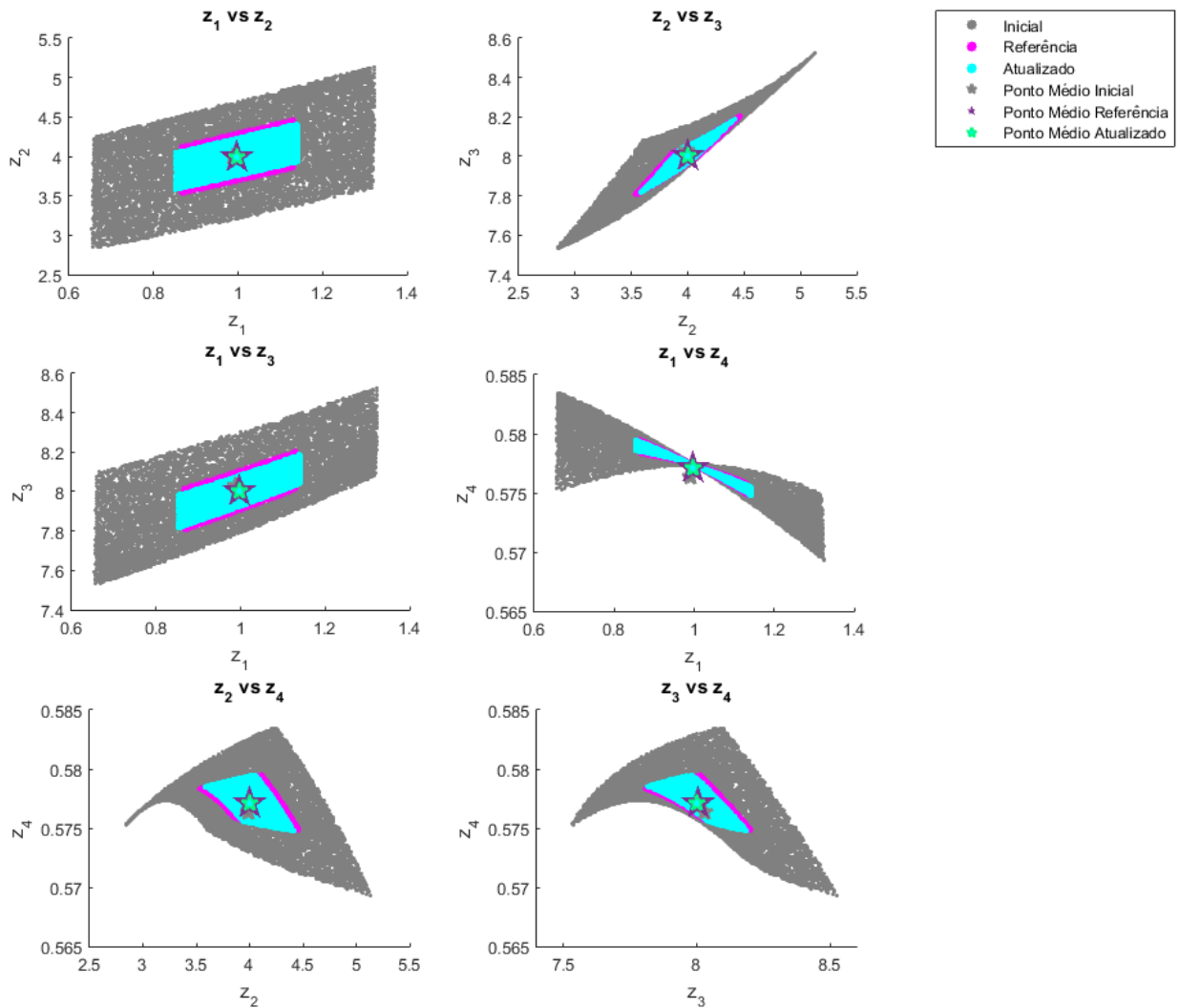


Figura 5.41 - Espaço de respostas *fuzzy* previstas no nível de pertença zero obtidas com o algoritmo 2 e funções de pertença triangulares.

Como se pode observar na figura 5.41 as nuvens de pontos das respostas estão bastante próximas das de referência, apesar de se verificarem erros elevados nos raios intervalos de parâmetros estimados, isto deve-se sobretudo à formulação do problema de otimização, como o problema de minimização é resolvido tendo em conta as respostas do sistema este converge quando as respostas atualizadas estão suficientemente próximas das respostas de referência, tornando possível então obter nuvens de respostas atualizadas bastante próximas das de referência.

5.3.2. Funções de Pertença Empíricas

Nas figuras 5.42 são apresentadas as funções de pertinência empíricas das respostas obtidas para a amostra contendo 10000 observações.

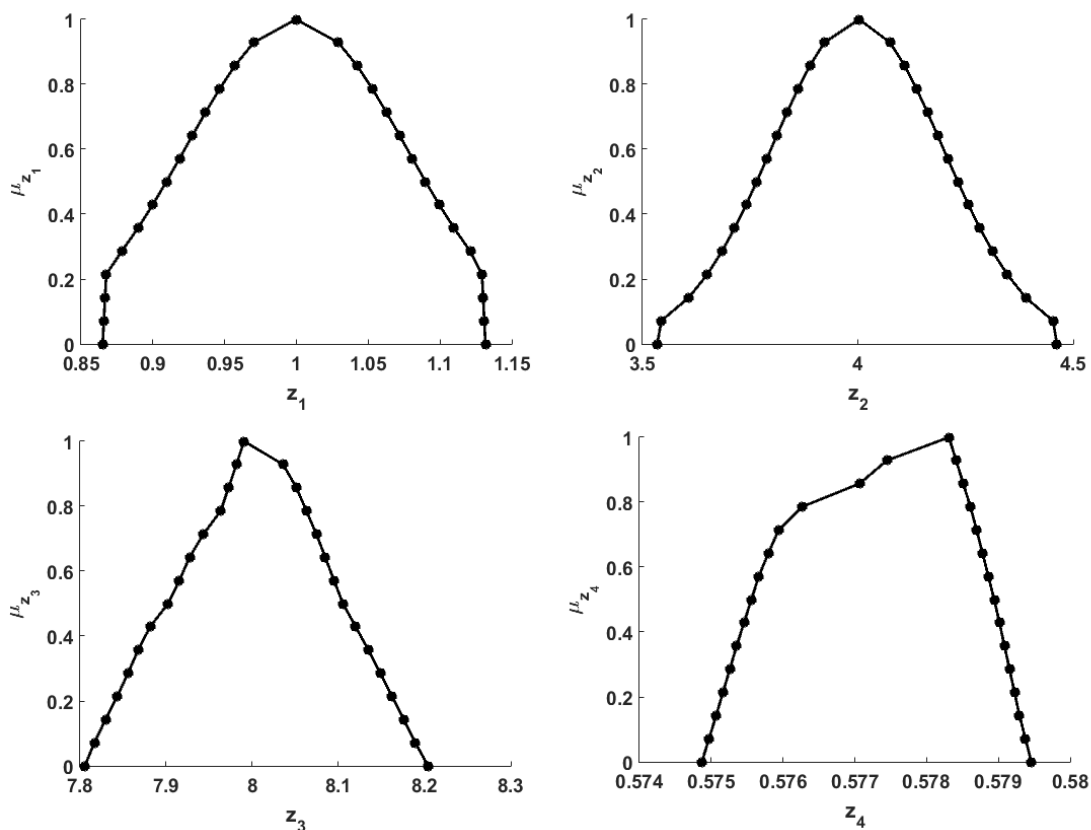


Figura 5.42 - Funções de pertinência empíricas das respostas de referência para 10000 observações.

5.3.2.1. Algoritmo 1

Na figura 5.43 são apresentadas as funções de pertinência dos parâmetros atualizados. As condições de convexidade são mais uma vez respeitadas tal como no caso com funções de pertinência triangulares.

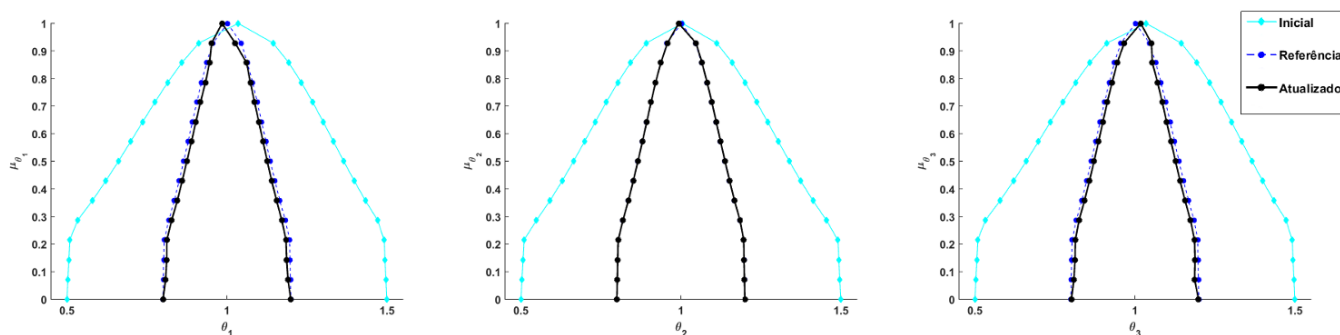


Figura 5.43 - Funções de pertinência dos parâmetros atualizados para 10000 observações, caso 3 e funções de pertinência empíricas.

Os resultados obtidos através do algoritmo 1 são apresentados nas tabelas 5.79 a 5.81.

Tabela 5.79 - Parâmetros *fuzzy* em cada α_{cut} , caso 3 com funções de pertença empíricas e 10000 observações.

| | $\underline{\theta}_1$ | $\bar{\theta}_1$ | $\underline{\theta}_2$ | $\bar{\theta}_2$ | $\underline{\theta}_3$ | $\bar{\theta}_3$ |
|--------------------------------------|------------------------|------------------|------------------------|------------------|------------------------|------------------|
| Inicial | 0.5 | 1.5 | 0.5 | 1.5 | 0.5 | 1.5 |
| $\alpha_{1.0000}$ | 0.9848 | 0.9848 | 0.9930 | 0.9930 | 1.0181 | 1.0181 |
| $\alpha_{0.9286}$ | 0.9521 | 1.0258 | 0.9578 | 1.0473 | 0.9664 | 1.0515 |
| $\alpha_{0.8571}$ | 0.9456 | 1.0613 | 0.9372 | 1.0659 | 0.9447 | 1.0544 |
| $\alpha_{0.7857}$ | 0.9329 | 1.0734 | 0.9207 | 1.0818 | 0.9285 | 1.0708 |
| $\alpha_{0.7143}$ | 0.9172 | 1.0862 | 0.9066 | 1.0968 | 0.9135 | 1.0853 |
| $\alpha_{0.6429}$ | 0.9029 | 1.0997 | 0.8932 | 1.1104 | 0.8998 | 1.0990 |
| $\alpha_{0.5714}$ | 0.8891 | 1.1129 | 0.8796 | 1.1239 | 0.8862 | 1.1128 |
| $\alpha_{0.5000}$ | 0.8747 | 1.1260 | 0.8656 | 1.1380 | 0.8721 | 1.1268 |
| $\alpha_{0.4286}$ | 0.8600 | 1.1400 | 0.8510 | 1.1522 | 0.8577 | 1.1412 |
| $\alpha_{0.3571}$ | 0.8448 | 1.1553 | 0.8357 | 1.1676 | 0.8422 | 1.1567 |
| $\alpha_{0.2857}$ | 0.8271 | 1.1716 | 0.8185 | 1.1847 | 0.8251 | 1.1738 |
| $\alpha_{0.2143}$ | 0.8122 | 1.1847 | 0.8038 | 1.1963 | 0.8138 | 1.1864 |
| $\alpha_{0.1429}$ | 0.8117 | 1.1866 | 0.8025 | 1.1974 | 0.8127 | 1.1877 |
| $\alpha_{0.0714}$ | 0.8081 | 1.1908 | 0.8013 | 1.1987 | 0.8090 | 1.1866 |
| $\alpha_{0.0000}$ | 0.8004 | 1.1996 | 0.8000 | 1.1999 | 0.8014 | 1.1987 |
| Ref $\alpha_{0.0}$ | 0.8001 | 1.2000 | 0.8000 | 1.2000 | 0.8000 | 1.1999 |
| Erro(%) | 0.0375 | -0.0333 | 0.0000 | -0.0083 | 0.1750 | -0.1000 |

Tabela 5.80 - Valores médios dos parâmetros atualizados e erros relativos para 10000 observações, caso 3 com funções de pertença *fuzzy* empíricas.

| | $\bar{\theta}_1$ | $\bar{\theta}_2$ | $\bar{\theta}_3$ |
|--------------------------------------|------------------|------------------|------------------|
| $\alpha_{1.0000}$ | 0.9848 | 0.9930 | 1.0181 |
| $\alpha_{0.9286}$ | 0.9890 | 1.0025 | 1.0090 |
| $\alpha_{0.8571}$ | 1.0034 | 1.0016 | 0.9995 |
| $\alpha_{0.7857}$ | 1.0032 | 1.0013 | 0.9997 |
| $\alpha_{0.7143}$ | 1.0017 | 1.0017 | 0.9994 |
| $\alpha_{0.6429}$ | 1.0013 | 1.0018 | 0.9994 |
| $\alpha_{0.5714}$ | 1.0010 | 1.0017 | 0.9995 |
| $\alpha_{0.5000}$ | 1.0003 | 1.0018 | 0.9994 |
| $\alpha_{0.4286}$ | 1.0000 | 1.0016 | 0.9995 |
| $\alpha_{0.3571}$ | 1.0001 | 1.0016 | 0.9994 |
| $\alpha_{0.2857}$ | 0.9993 | 1.0016 | 0.9994 |
| $\alpha_{0.2143}$ | 0.9984 | 1.0000 | 1.0001 |
| $\alpha_{0.1429}$ | 0.9991 | 0.9999 | 1.0002 |
| $\alpha_{0.0714}$ | 0.9994 | 1.0000 | 0.9978 |
| $\alpha_{0.0000}$ | 1.0000 | 0.9999 | 1.0001 |
| Ref $\alpha_{0.0}$ | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| Erro(%) | 0.0000 | -0.0100 | 0.0100 |

Tabela 5.81 - Raio dos parâmetros atualizados e erros relativos para 10000 observações, caso 3 com funções de pertinência *fuzzy* empíricas.

| | $\Delta\theta_1$ | $\Delta\theta_2$ | $\Delta\theta_3$ |
|---------------------------------------|------------------|------------------|------------------|
| $\alpha_{1,0000}$ | 0 | 0 | 0 |
| $\alpha_{0,9286}$ | 0.0369 | 0.0447 | 0.0426 |
| $\alpha_{0,8571}$ | 0.0578 | 0.0644 | 0.0549 |
| $\alpha_{0,7857}$ | 0.0702 | 0.0806 | 0.0712 |
| $\alpha_{0,7143}$ | 0.0845 | 0.0951 | 0.0859 |
| $\alpha_{0,6429}$ | 0.0984 | 0.1086 | 0.0996 |
| $\alpha_{0,5714}$ | 0.1119 | 0.1221 | 0.1133 |
| $\alpha_{0,5000}$ | 0.1257 | 0.1362 | 0.1274 |
| $\alpha_{0,4286}$ | 0.1400 | 0.1506 | 0.1417 |
| $\alpha_{0,3571}$ | 0.1552 | 0.1659 | 0.1573 |
| $\alpha_{0,2857}$ | 0.1723 | 0.1831 | 0.1743 |
| $\alpha_{0,2143}$ | 0.1862 | 0.1963 | 0.1863 |
| $\alpha_{0,1429}$ | 0.1875 | 0.1975 | 0.1875 |
| $\alpha_{0,0714}$ | 0.1914 | 0.1987 | 0.1888 |
| $\alpha_{0,0000}$ | 0.1996 | 0.2000 | 0.1986 |
| Ref. $\alpha_{0,0}$ | 0.1999 | 0.2000 | 0.1999 |
| Erro(%) | -0.1501 | 0.0000 | -0.6503 |

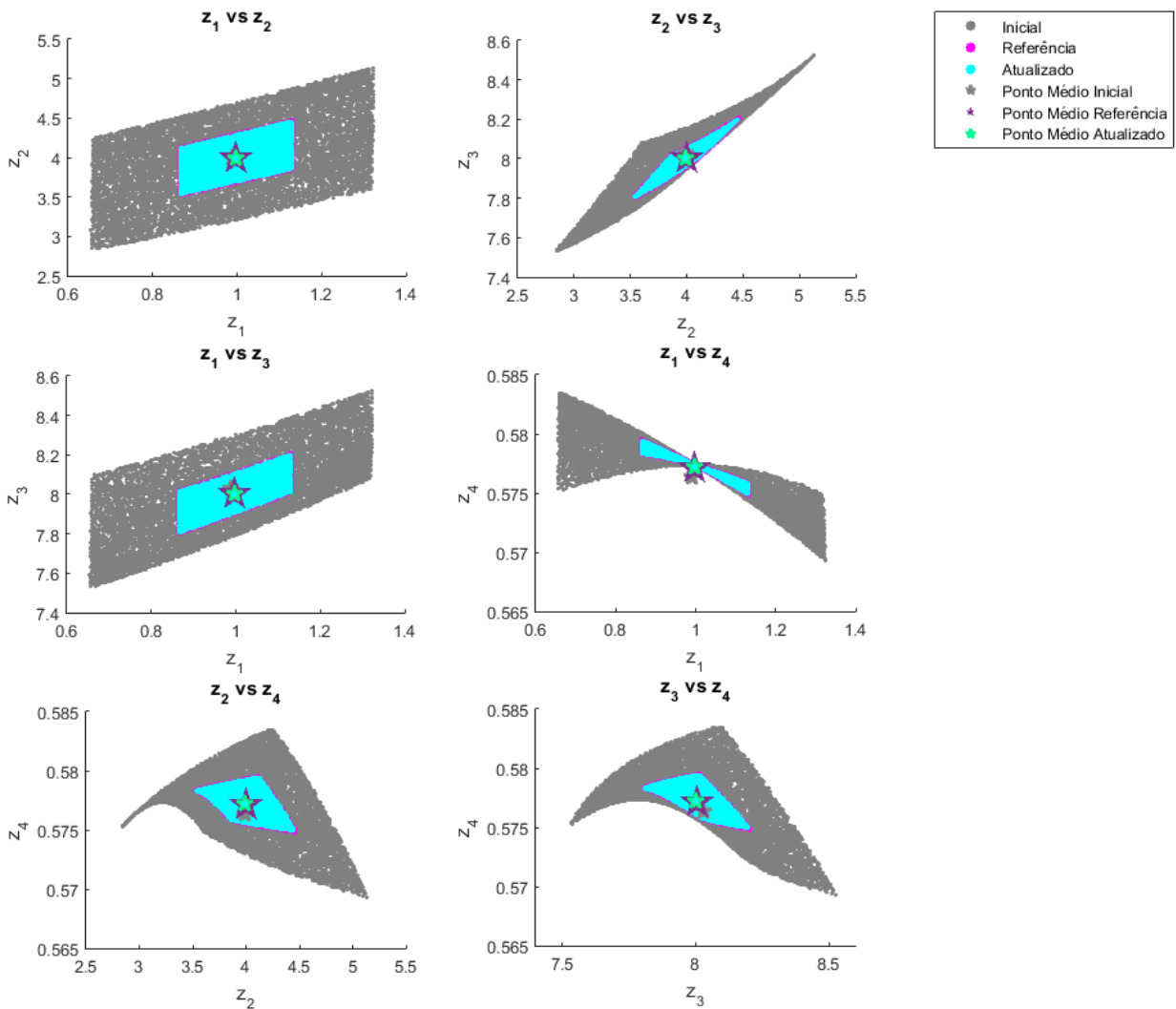


Figura 5.44 - Espaço de respostas *fuzzy* previstas no nível de pertinência zero obtidas com o algoritmo 1 e funções de pertinência empíricas.

Os valores dos erros nos parâmetros atualizados utilizando o algoritmo 1 são bastante satisfatórios e permitem obter respostas bastante próximas dos valores de referência, como pode ser observado na figura 5.44.

5.3.2.2. Algoritmo 2

Na figura 5.45 são apresentadas as funções de pertinência dos parâmetros atualizados obtidas através do algoritmo 2

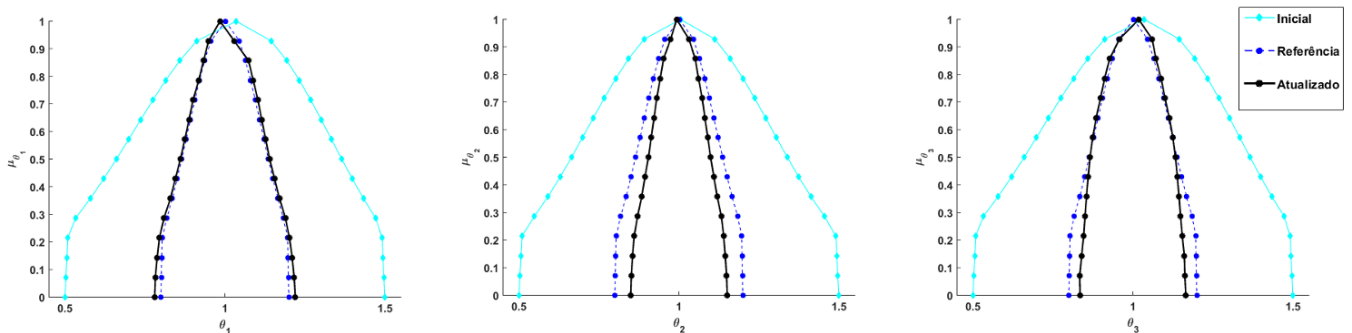


Figura 5.45 - Funções de pertinência dos parâmetros atualizados para 10000 observações, caso 3 e funções de pertinência empíricas.

As condições de convexidade são respeitadas e os erros observados no nível zero de pertinência são inferiores a 7%. Os resultados obtidos são apresentados nas tabelas 5.82 a 5.84 e as nuvens de respostas dos parâmetros atualizados podem ser observadas na figura 5.46.

Tabela 5.82 - Parâmetros fuzzy em cada α_{cut} , caso 3 com funções de pertinência empíricas e 10000 observações.

| | θ_1 | $\bar{\theta}_1$ | θ_2 | $\bar{\theta}_2$ | θ_3 | $\bar{\theta}_3$ |
|---------------------------------------|---------------|------------------|---------------|------------------|---------------|------------------|
| Inicial | 0.5 | 1.5 | 0.5 | 1.5 | 0.5 | 1.5 |
| $\alpha_{1.0000}$ | 0.9848 | 0.9848 | 0.9930 | 0.9930 | 1.0181 | 1.0181 |
| $\alpha_{0.9286}$ | 0.9490 | 1.0290 | 0.9740 | 1.0311 | 0.9579 | 1.0600 |
| $\alpha_{0.8571}$ | 0.9332 | 1.0737 | 0.9521 | 1.0510 | 0.9272 | 1.0719 |
| $\alpha_{0.7857}$ | 0.9180 | 1.0883 | 0.9414 | 1.0612 | 0.9114 | 1.0879 |
| $\alpha_{0.7143}$ | 0.9002 | 1.1032 | 0.9307 | 1.0727 | 0.8986 | 1.1002 |
| $\alpha_{0.6429}$ | 0.8878 | 1.1148 | 0.9223 | 1.0813 | 0.8851 | 1.1137 |
| $\alpha_{0.5714}$ | 0.8745 | 1.1275 | 0.9133 | 1.0902 | 0.8742 | 1.1248 |
| $\alpha_{0.5000}$ | 0.8608 | 1.1398 | 0.9046 | 1.0990 | 0.8658 | 1.1331 |
| $\alpha_{0.4286}$ | 0.8449 | 1.1550 | 0.8939 | 1.1093 | 0.8601 | 1.1388 |
| $\alpha_{0.3571}$ | 0.8296 | 1.1705 | 0.8836 | 1.1196 | 0.8547 | 1.1442 |
| $\alpha_{0.2857}$ | 0.8094 | 1.1893 | 0.8705 | 1.1327 | 0.8502 | 1.1487 |
| $\alpha_{0.2143}$ | 0.7952 | 1.2016 | 0.8602 | 1.1399 | 0.8459 | 1.1543 |
| $\alpha_{0.1429}$ | 0.7881 | 1.2102 | 0.8550 | 1.1449 | 0.8396 | 1.1608 |
| $\alpha_{0.0714}$ | 0.7824 | 1.2164 | 0.8512 | 1.1488 | 0.8334 | 1.1621 |
| $\alpha_{0.0000}$ | 0.7801 | 1.2199 | 0.8491 | 1.1508 | 0.8348 | 1.1653 |
| Ref. $\alpha_{0.0}$ | 0.8001 | 1.2000 | 0.8000 | 1.2000 | 0.8000 | 1.1999 |
| Erro(%) | -2.4997 | 1.6583 | 6.1375 | -4.1000 | 4.3500 | -2.8836 |

Tabela 5.83 - Valores médios dos parâmetros atualizados e erros relativos para 10000 observações, caso 3 com funções de pertença *fuzzy* empíricas.

| | $\bar{\theta}_1$ | $\bar{\theta}_2$ | $\bar{\theta}_3$ |
|--------------------------------------|------------------|------------------|------------------|
| $\alpha_{1.0000}$ | 0.9848 | 0.9930 | 1.0181 |
| $\alpha_{0.9286}$ | 0.9890 | 1.0025 | 1.0090 |
| $\alpha_{0.8571}$ | 1.0034 | 1.0016 | 0.9995 |
| $\alpha_{0.7857}$ | 1.0032 | 1.0013 | 0.9997 |
| $\alpha_{0.7143}$ | 1.0017 | 1.0017 | 0.9994 |
| $\alpha_{0.6429}$ | 1.0013 | 1.0018 | 0.9994 |
| $\alpha_{0.5714}$ | 1.0010 | 1.0017 | 0.9995 |
| $\alpha_{0.5000}$ | 1.0003 | 1.0018 | 0.9994 |
| $\alpha_{0.4286}$ | 1.0000 | 1.0016 | 0.9995 |
| $\alpha_{0.3571}$ | 1.0001 | 1.0016 | 0.9994 |
| $\alpha_{0.2857}$ | 0.9993 | 1.0016 | 0.9994 |
| $\alpha_{0.2143}$ | 0.9984 | 1.0000 | 1.0001 |
| $\alpha_{0.1429}$ | 0.9991 | 0.9999 | 1.0002 |
| $\alpha_{0.0714}$ | 0.9994 | 1.0000 | 0.9978 |
| $\alpha_{0.0000}$ | 1.0000 | 0.9999 | 1.0001 |
| Ref $\alpha_{0,0}$ | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| Erro(%) | 0.0000 | -0.0100 | 0.0100 |

Tabela 5.84 - Raio dos parâmetros atualizados e erros relativos para 10000 observações, caso 3 com funções de pertença *fuzzy* empíricas.

| | $\Delta\theta_1$ | $\Delta\theta_2$ | $\Delta\theta_3$ |
|--------------------------------------|------------------|------------------|------------------|
| $\alpha_{1.0000}$ | 0 | 0 | 0 |
| $\alpha_{0.9286}$ | 0.0400 | 0.0286 | 0.0510 |
| $\alpha_{0.8571}$ | 0.0702 | 0.0495 | 0.0723 |
| $\alpha_{0.7857}$ | 0.0851 | 0.0599 | 0.0883 |
| $\alpha_{0.7143}$ | 0.1015 | 0.0710 | 0.1008 |
| $\alpha_{0.6429}$ | 0.1135 | 0.0795 | 0.1143 |
| $\alpha_{0.5714}$ | 0.1265 | 0.0884 | 0.1253 |
| $\alpha_{0.5000}$ | 0.1395 | 0.0972 | 0.1337 |
| $\alpha_{0.4286}$ | 0.1551 | 0.1077 | 0.1394 |
| $\alpha_{0.3571}$ | 0.1705 | 0.1180 | 0.1448 |
| $\alpha_{0.2857}$ | 0.1900 | 0.1311 | 0.1492 |
| $\alpha_{0.2143}$ | 0.2032 | 0.1399 | 0.1542 |
| $\alpha_{0.1429}$ | 0.2111 | 0.1450 | 0.1606 |
| $\alpha_{0.0714}$ | 0.2170 | 0.1488 | 0.1643 |
| $\alpha_{0.0000}$ | 0.2199 | 0.1509 | 0.1652 |
| Ref $\alpha_{0,0}$ | 0.1999 | 0.2000 | 0.1999 |
| Erro(%) | 10.0050 | -24.5500 | -17.3587 |

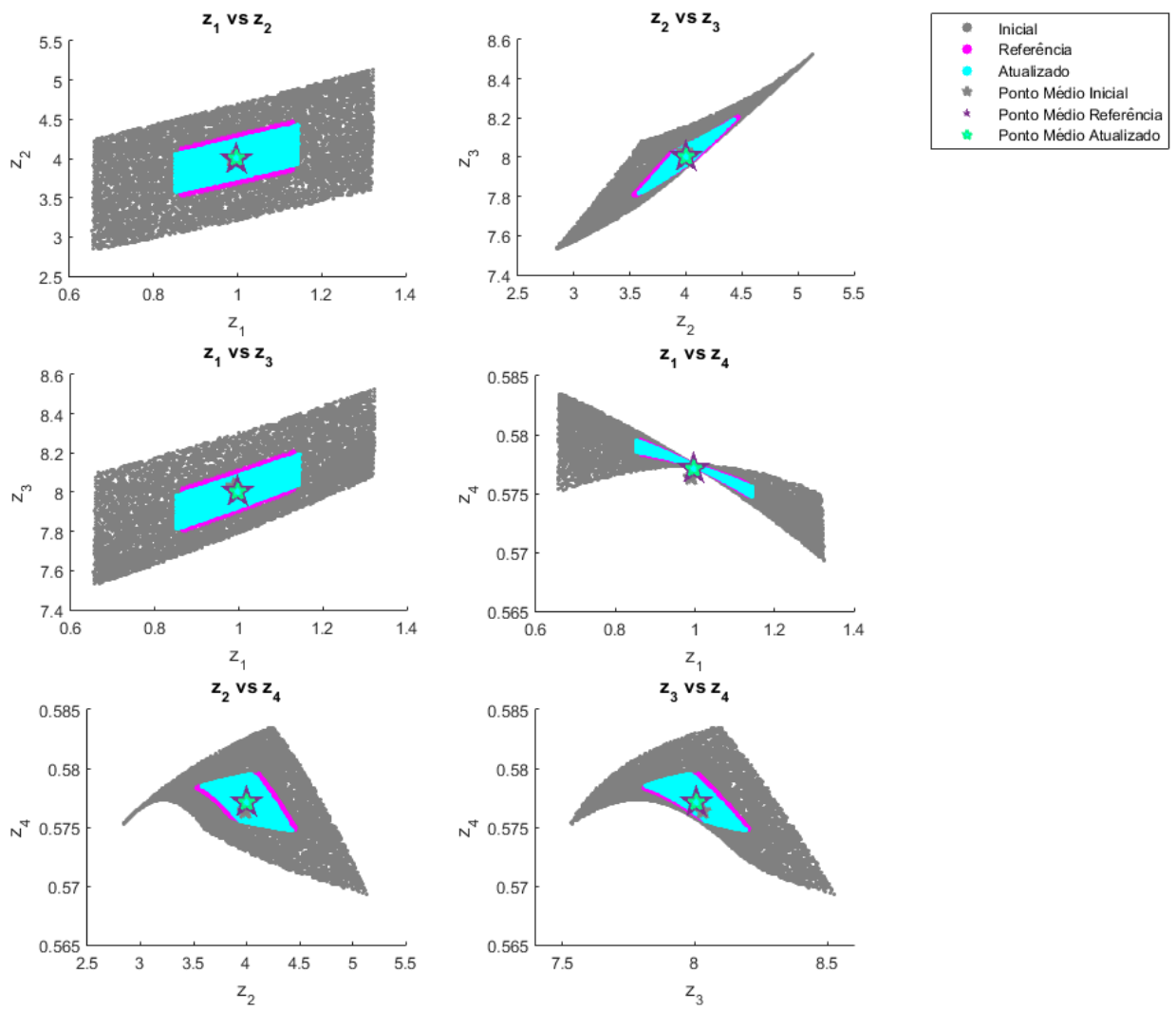


Figura 5.46 - Espaço de respostas *fuzzy* previstas no nível de pertinência zero, obtidas com o algoritmo 2 e funções de pertinência empíricas.

5.4. Caso 4 - Amostras de dimensões diferentes (modos de vibração afastados)

Neste caso de estudo a atualização é realizada para o sistema descrito no caso 1 com modos de vibração afastados (seção 5.1), o número de níveis de pertinência *fuzzy* é definido pela amostra de referência, a atualização é realizada considerando uma amostra de dados iniciais com 10000 observações. Tal como no caso anterior os dois algoritmos são analisados utilizando funções de pertinência triangulares e empíricas, e serão ilustradas as respectivas funções de pertinência e espaços de respostas atualizados.

5.4.1. Funções de pertinência triangulares

Visto que neste caso se utiliza a mesma amostra de referência com 30 observações que no caso 1 (seção 5.1) as funções de pertinência das respostas serão iguais para os casos 1 e 4. Estas funções de pertinência podem ser observadas na figura 5.1.

5.4.1.1. Algoritmo 1

Na figura 5.47 são apresentadas as funções de pertinência *fuzzy* triangulares dos parâmetros atualizados.

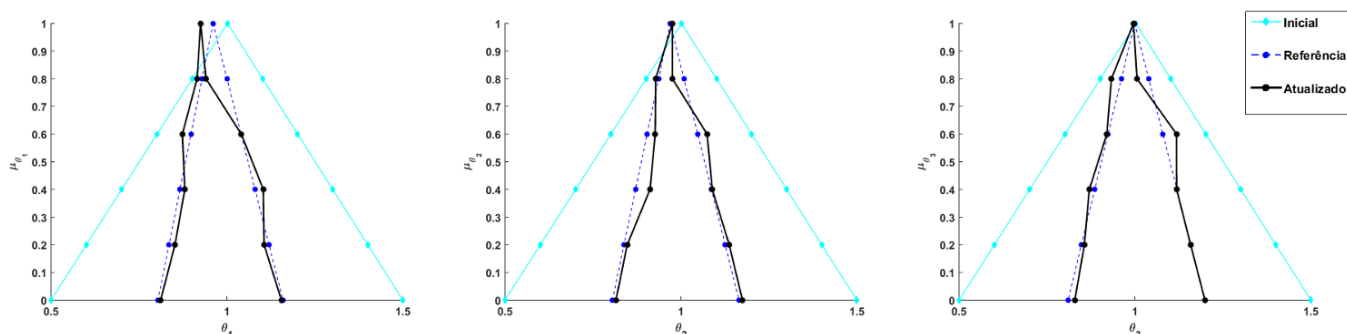


Figura 5.47 - Funções de pertinência *fuzzy* triangulares iniciais, de referência e atualizadas obtidas com o algoritmo 1 para o caso 4.

Os resultados obtidos são apresentados nas tabelas 5.85 a 5.87.

Tabela 5.85 - Parâmetros *fuzzy* em cada α_{cut} , caso 4 com funções de pertinência triangulares.

| | $\underline{\theta}_1$ | $\overline{\theta}_1$ | $\underline{\theta}_2$ | $\overline{\theta}_2$ | $\underline{\theta}_3$ | $\overline{\theta}_3$ |
|--------------------------------------|------------------------|-----------------------|------------------------|-----------------------|------------------------|-----------------------|
| Inicial | 0.5 | 1.5 | 0.5 | 1.5 | 0.5 | 1.5 |
| $\alpha_{1.0}$ | 0.9251 | 0.9251 | 0.9758 | 0.9758 | 0.9959 | 0.9959 |
| $\alpha_{0.8000}$ | 0.9151 | 0.9405 | 0.9282 | 0.9758 | 0.9332 | 1.0059 |
| $\alpha_{0.6000}$ | 0.8733 | 1.0408 | 0.9269 | 1.0744 | 0.9201 | 1.1184 |
| $\alpha_{0.4000}$ | 0.8803 | 1.1034 | 0.9122 | 1.0891 | 0.8703 | 1.1185 |
| $\alpha_{0.2000}$ | 0.8523 | 1.1056 | 0.8474 | 1.1373 | 0.8564 | 1.1583 |
| $\alpha_{0.0000}$ | 0.8115 | 1.1549 | 0.8153 | 1.1748 | 0.8292 | 1.1990 |
| Ref $\alpha_{0,0}$ | 0.8041 | 1.1594 | 0.8053 | 1.1648 | 0.8101 | 1.1998 |
| Erro (%) | 0.9203 | -0.3881 | 1.2418 | 0.8585 | 2.3577 | -0.0667 |

Tabela 5.86 - Valores médios dos parâmetros atualizados e erros relativos, caso 4 com funções de pertença *fuzzy* triangulares.

| | $\tilde{\theta}_1$ | $\tilde{\theta}_2$ | $\tilde{\theta}_3$ |
|--------------------------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| $\alpha_{1.0000}$ | 0.9251 | 0.9758 | 0.9959 |
| $\alpha_{0.8000}$ | 0.9278 | 0.9520 | 0.9696 |
| $\alpha_{0.6000}$ | 0.9571 | 1.0006 | 1.0193 |
| $\alpha_{0.4000}$ | 0.9918 | 1.0006 | 0.9944 |
| $\alpha_{0.2000}$ | 0.9790 | 0.9923 | 1.0073 |
| $\alpha_{0.0000}$ | 0.9832 | 0.9951 | 1.0141 |
| Ref $\alpha_{0,0}$ | 0.9818 | 0.9851 | 1.0049 |
| Erro (%) | 0.1426 | 1.0151 | 0.9155 |

Tabela 5.87 - Raios dos parâmetros atualizados e erros relativos, caso 4 com funções de pertença *fuzzy* triangulares.

| | $\Delta\theta_1$ | $\Delta\theta_2$ | $\Delta\theta_3$ |
|--------------------------------------|------------------|------------------|------------------|
| $\alpha_{1.0000}$ | 0 | 0 | 0 |
| $\alpha_{0.8000}$ | 0.0127 | 0.0238 | 0.0364 |
| $\alpha_{0.6000}$ | 0.0838 | 0.0738 | 0.0991 |
| $\alpha_{0.4000}$ | 0.1115 | 0.0884 | 0.1241 |
| $\alpha_{0.2000}$ | 0.1266 | 0.1450 | 0.1510 |
| $\alpha_{0.0000}$ | 0.1717 | 0.1798 | 0.1849 |
| Ref $\alpha_{0,0}$ | 0.1776 | 0.1798 | 0.1949 |
| Erro (%) | -3.3221 | 0.0000 | -5.1308 |

Comparando os resultados obtidos no presente caso de estudo com os obtidos na seção 5.1.1, verifica-se uma grande semelhança, existindo pequenas flutuações nos valores dos erros para o nível de pertença zero nos intervalos de parâmetros atualizados, isto porque a informação ou dados de referência são os mesmos.

Observando a figura 5.48 também se pode verificar, que o espaço de respostas atualizado contém o conjunto de respostas de referência.

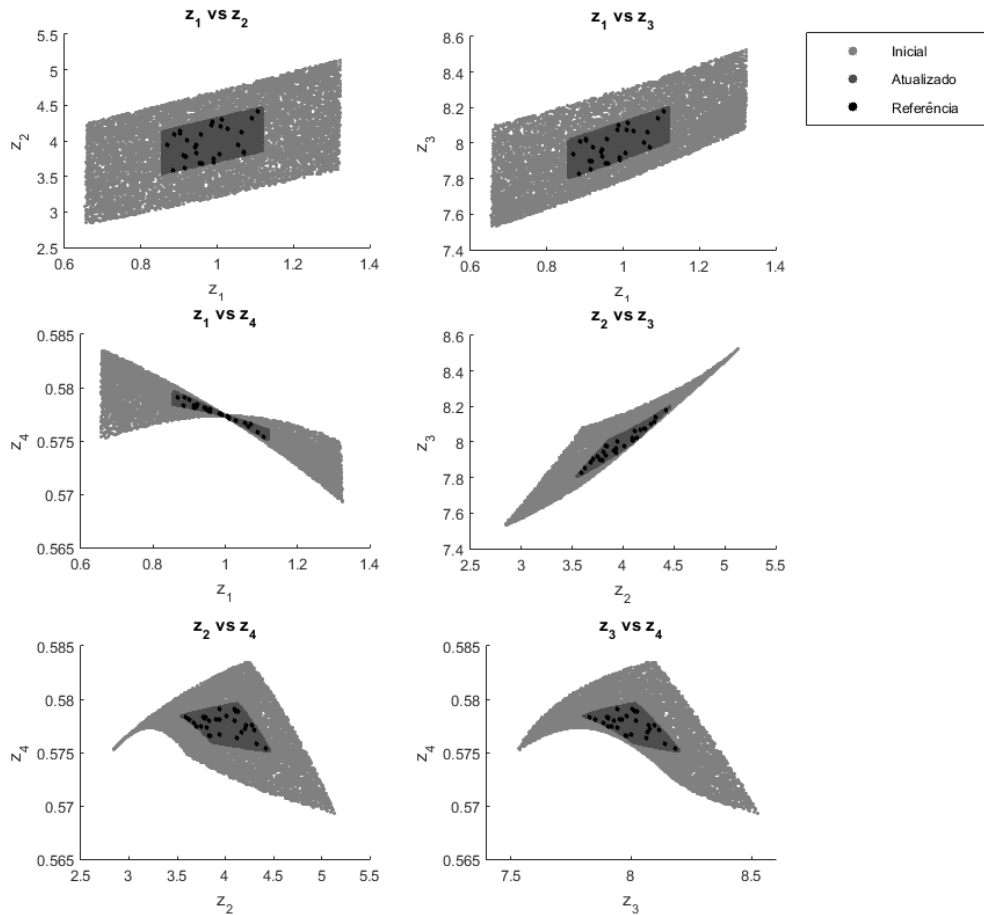


Figura 5.48 - Espaço de respostas *fuzzy* previstas no nível de pertença zero, obtidas com o algoritmo 1 e funções de pertença triangulares.

5.4.1.2. Algoritmo 2

As funções de pertença *fuzzy* triangulares dos parâmetros atualizados são apresentadas na figura 5.49 e os resultados obtidos podem ser consultados nas tabelas 5.88 a 5.90.

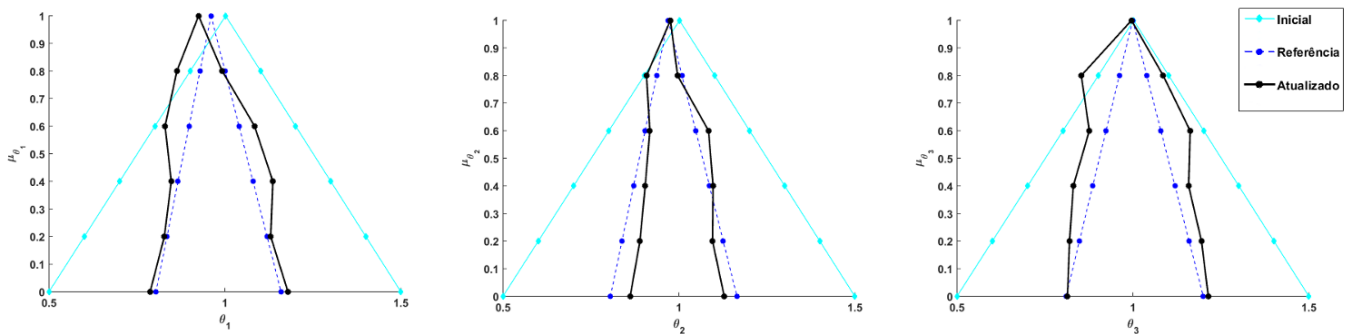


Figura 5.49 - Funções de pertença *fuzzy* triangulares iniciais, de referência e atualizadas obtidas com o algoritmo 2 para o caso 4.

Tabela 5.88 - Parâmetros *fuzzy* em cada α_{cut} obtidos através do algoritmo 2 para o caso 4 com funções de pertinência triangulares.

| | $\underline{\theta}_1$ | $\overline{\theta}_1$ | $\underline{\theta}_2$ | $\overline{\theta}_2$ | $\underline{\theta}_3$ | $\overline{\theta}_3$ |
|--------------------------------------|------------------------|-----------------------|------------------------|-----------------------|------------------------|-----------------------|
| Inicial | 0.5 | 1.5 | 0.5 | 1.5 | 0.5 | 1.5 |
| $\alpha_{1.0000}$ | 0.9251 | 0.9251 | 0.9758 | 0.9758 | 0.9959 | 0.9959 |
| $\alpha_{0.8000}$ | 0.8635 | 0.9922 | 0.9079 | 0.9961 | 0.8532 | 1.0859 |
| $\alpha_{0.6000}$ | 0.8299 | 1.0843 | 0.9172 | 1.0841 | 0.8760 | 1.1625 |
| $\alpha_{0.4000}$ | 0.8475 | 1.1361 | 0.9042 | 1.0970 | 0.8305 | 1.1583 |
| $\alpha_{0.2000}$ | 0.8279 | 1.1301 | 0.8892 | 1.0954 | 0.8199 | 1.1948 |
| $\alpha_{0.0000}$ | 0.7875 | 1.1790 | 0.8615 | 1.1287 | 0.8139 | 1.2142 |
| Ref $\alpha_{0,0}$ | 0.8041 | 1.1594 | 0.8053 | 1.1648 | 0.8101 | 1.1998 |
| Erro (%) | -2.0644 | 1.6905 | 6.9788 | -3.0992 | 0.4691 | 1.2002 |

Tabela 5.89 - Valores médios dos parâmetros atualizados e erros relativos obtidos para o caso 4 através do algoritmo 2 com funções de pertinência *fuzzy* triangulares.

| | $\tilde{\theta}_1$ | $\tilde{\theta}_2$ | $\tilde{\theta}_3$ |
|--------------------------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| $\alpha_{1.0000}$ | 0.9251 | 0.9758 | 0.9959 |
| $\alpha_{0.8000}$ | 0.9278 | 0.9520 | 0.9696 |
| $\alpha_{0.6000}$ | 0.9571 | 1.0006 | 1.0193 |
| $\alpha_{0.4000}$ | 0.9918 | 1.0006 | 0.9944 |
| $\alpha_{0.2000}$ | 0.9790 | 0.9923 | 1.0073 |
| $\alpha_{0.0000}$ | 0.9832 | 0.9951 | 1.0141 |
| Ref $\alpha_{0,0}$ | 0.9818 | 0.9851 | 1.0049 |
| Erro (%) | 0.1425 | 1.0151 | 0.9155 |

Tabela 5.90 - Raios dos parâmetros atualizados e erros relativos obtidos para o caso 4 através do algoritmo 2 com funções de pertinência *fuzzy* triangulares.

| | $\Delta\theta_1$ | $\Delta\theta_2$ | $\Delta\theta_3$ |
|--------------------------------------|------------------|------------------|------------------|
| $\alpha_{1.0000}$ | 0 | 0 | 0 |
| $\alpha_{0.8000}$ | 0.0644 | 0.0441 | 0.1163 |
| $\alpha_{0.6000}$ | 0.1272 | 0.0835 | 0.1432 |
| $\alpha_{0.4000}$ | 0.1443 | 0.0964 | 0.1639 |
| $\alpha_{0.2000}$ | 0.1511 | 0.1031 | 0.1875 |
| $\alpha_{0.0000}$ | 0.1957 | 0.1336 | 0.2001 |
| Ref $\alpha_{0,0}$ | 0.1776 | 0.1798 | 0.1949 |
| Erro (%) | 10.1914 | -25.6952 | 2.6680 |

À semelhança do que foi observado com o algoritmo 1, os resultados obtidos com o algoritmo 2 também apresentam ligeiras flutuações dos erros no nível zero de pertinência, quando comparados com os resultados obtidos no caso 1. As nuvens de resposta dos parâmetros atualizados são apresentadas na figura 5.50.

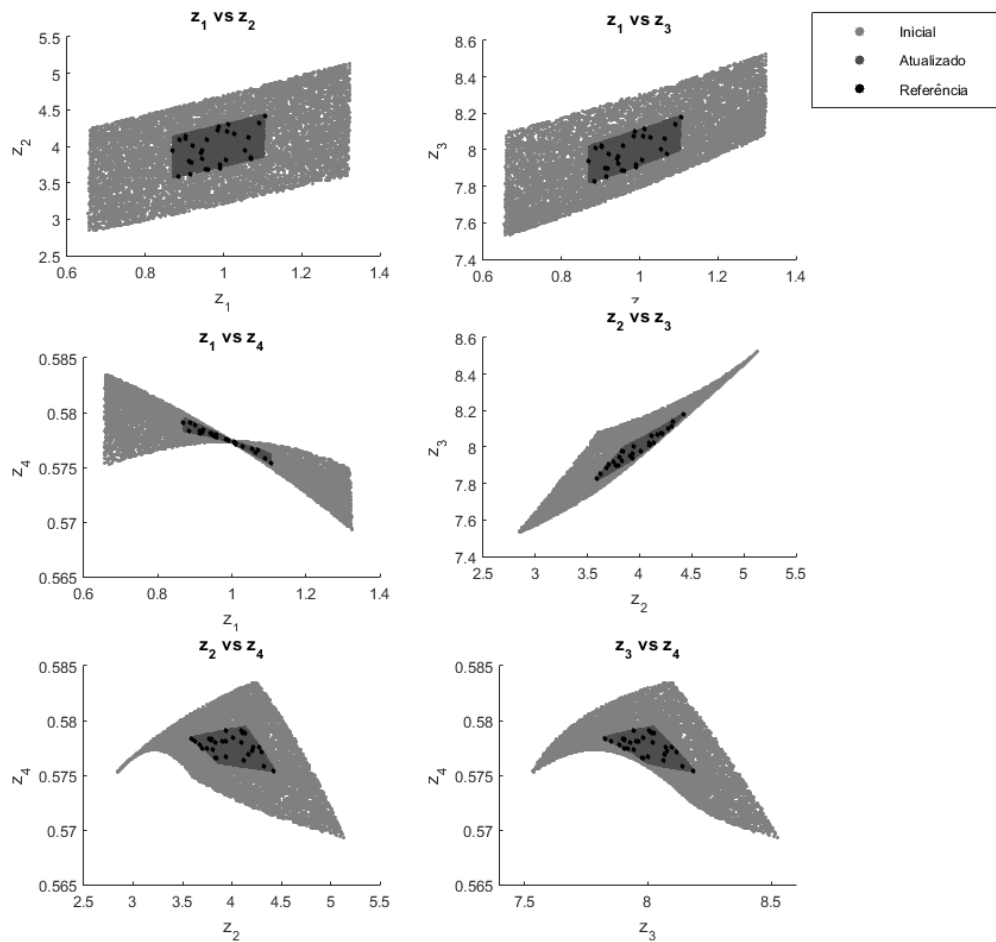


Figura 5.50 - Espaço de respostas *fuzzy* previstas no nível de pertinência zero, obtidas com o algoritmo 2 e funções de pertinência triangulares.

5.4.2. Funções de pertença empíricas

As funções de pertença das respostas de referência podem ser observadas na figura 5.12 apresentada na seção 5.1.2 do presente documento (30 observações).

5.4.2.1. Algoritmo 1

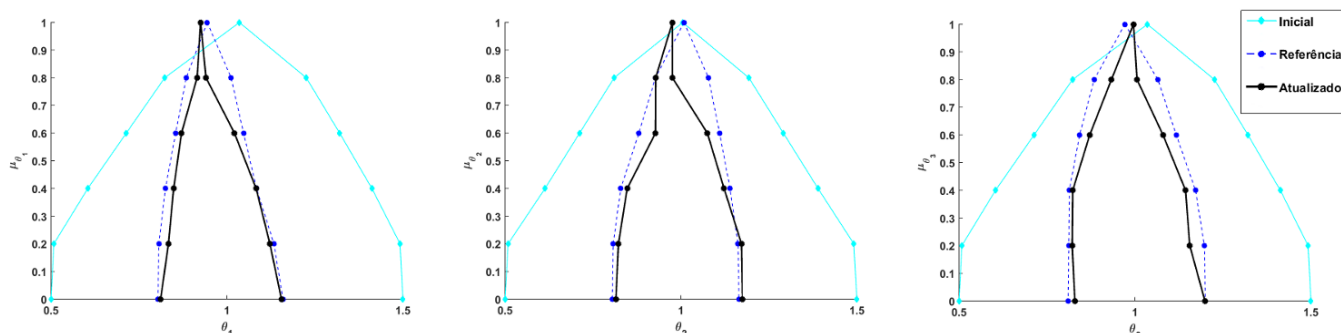


Figura 5.51 - Funções de pertença *fuzzy* empíricas iniciais, de referência e atualizadas obtidas com o algoritmo 1 para o caso 4.

Tabela 5.91 - Parâmetros fuzzy em cada α_{cut} obtidos através do algoritmo 1 para o caso 4 com funções de pertença empíricas.

| | $\underline{\theta}_1$ | $\overline{\theta}_1$ | $\underline{\theta}_2$ | $\overline{\theta}_2$ | $\underline{\theta}_3$ | $\overline{\theta}_3$ |
|--------------------------------------|------------------------|-----------------------|------------------------|-----------------------|------------------------|-----------------------|
| Inicial | 0.5 | 1.5 | 0.5 | 1.5 | 0.5 | 1.5 |
| $\alpha_{1.0000}$ | 0.9251 | 0.9251 | 0.9758 | 0.9758 | 0.9959 | 0.9959 |
| $\alpha_{0.8000}$ | 0.9151 | 0.9405 | 0.9282 | 0.9758 | 0.9332 | 1.0059 |
| $\alpha_{0.6000}$ | 0.8708 | 1.0214 | 0.9276 | 1.0751 | 0.8715 | 1.0797 |
| $\alpha_{0.4000}$ | 0.8486 | 1.0829 | 0.8473 | 1.1226 | 0.8233 | 1.1438 |
| $\alpha_{0.2000}$ | 0.8338 | 1.1221 | 0.8224 | 1.1721 | 0.8217 | 1.1558 |
| $\alpha_{0.0000}$ | 0.8115 | 1.1549 | 0.8153 | 1.1748 | 0.8292 | 1.1990 |
| Ref $\alpha_{0,0}$ | 0.8041 | 1.1594 | 0.8053 | 1.1648 | 0.8101 | 1.1998 |
| Erro (%) | 0.9203 | -0.3881 | 1.2418 | 0.8585 | 2.3577 | -0.0667 |

Tabela 5.92 - Valores médios dos parâmetros atualizados e erros relativos obtidos para o caso 4 através do algoritmo 1 com funções de pertença *fuzzy* empíricas.

| | $\tilde{\theta}_1$ | $\tilde{\theta}_2$ | $\tilde{\theta}_3$ |
|--------------------------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| $\alpha_{1.0000}$ | 0.9251 | 0.9758 | 0.9959 |
| $\alpha_{0.8000}$ | 0.9278 | 0.9520 | 0.9696 |
| $\alpha_{0.6000}$ | 0.9461 | 1.0014 | 0.9756 |
| $\alpha_{0.4000}$ | 0.9657 | 0.9849 | 0.9836 |
| $\alpha_{0.2000}$ | 0.9779 | 0.9972 | 0.9887 |
| $\alpha_{0.0000}$ | 0.9832 | 0.9951 | 1.0141 |
| Ref $\alpha_{0,0}$ | 0.9818 | 0.9851 | 1.0049 |
| Erro (%) | 0.1426 | 1.0151 | 0.9155 |

Tabela 5.93 - Raios dos parâmetros atualizados e erros relativos obtidos para o caso 4 através do algoritmo 1 com funções de pertinência *fuzzy* empíricas.

| | $\Delta\theta_1$ | $\Delta\theta_2$ | $\Delta\theta_3$ |
|--------------------------------------|------------------|------------------|------------------|
| $\alpha_{1.0000}$ | 0 | 0 | 0 |
| $\alpha_{0.8000}$ | 0.0127 | 0.0238 | 0.0364 |
| $\alpha_{0.6000}$ | 0.0753 | 0.0737 | 0.1041 |
| $\alpha_{0.4000}$ | 0.1172 | 0.1376 | 0.1603 |
| $\alpha_{0.2000}$ | 0.1442 | 0.1749 | 0.1671 |
| $\alpha_{0.0000}$ | 0.1717 | 0.1798 | 0.1849 |
| Ref $\alpha_{0,0}$ | 0.1776 | 0.1798 | 0.1949 |
| Erro (%) | -3.3221 | 0.0000 | -5.1308 |

As funções de pertinência *fuzzy* empíricas dos parâmetros atualizados e respectivas nuvens de respostas são apresentadas nas figuras 5.51 e 5.52. Os resultados obtidos podem ser consultados nas tabelas 5.91 a 5.93.

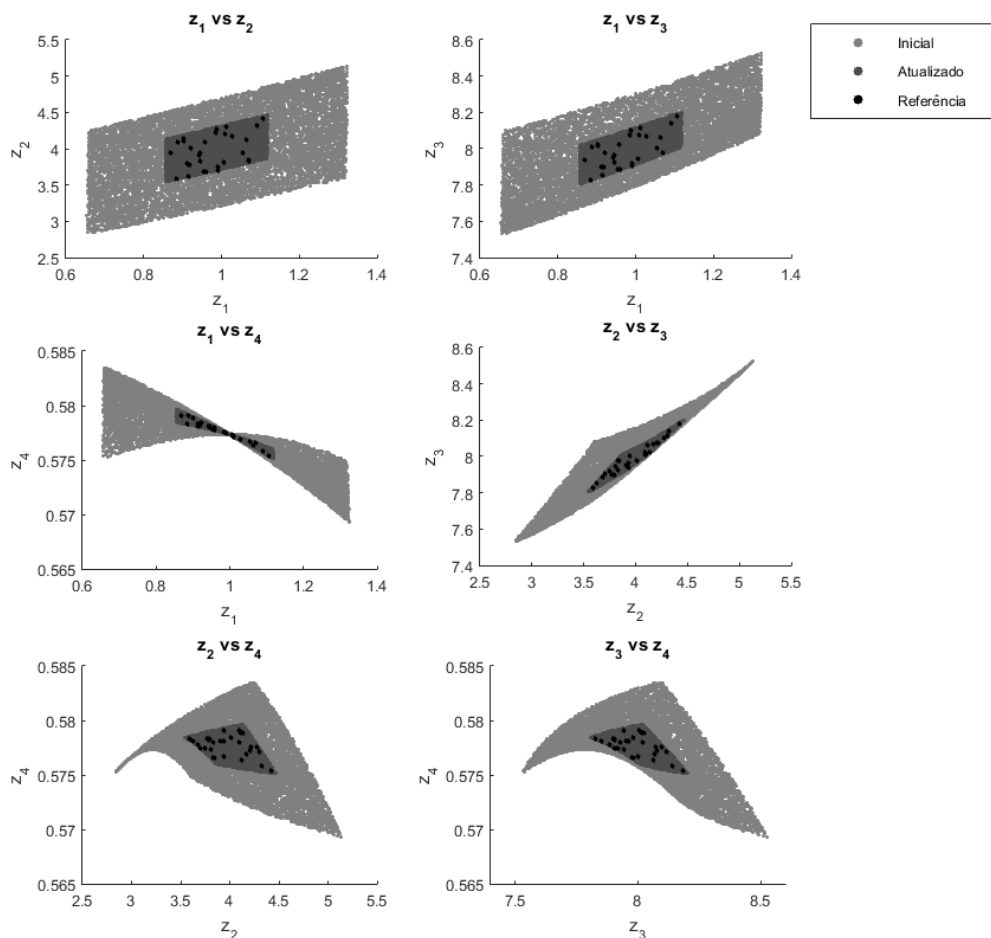


Figura 5.52 - Espaço de respostas *fuzzy* previstas no nível de pertinência zero, obtidas com o algoritmo 1 e funções de pertinência empíricas.

5.4.2.2. Algoritmo 2

As funções de pertinência *fuzzy* empíricas dos parâmetros atualizados são apresentados na figura 5.53.

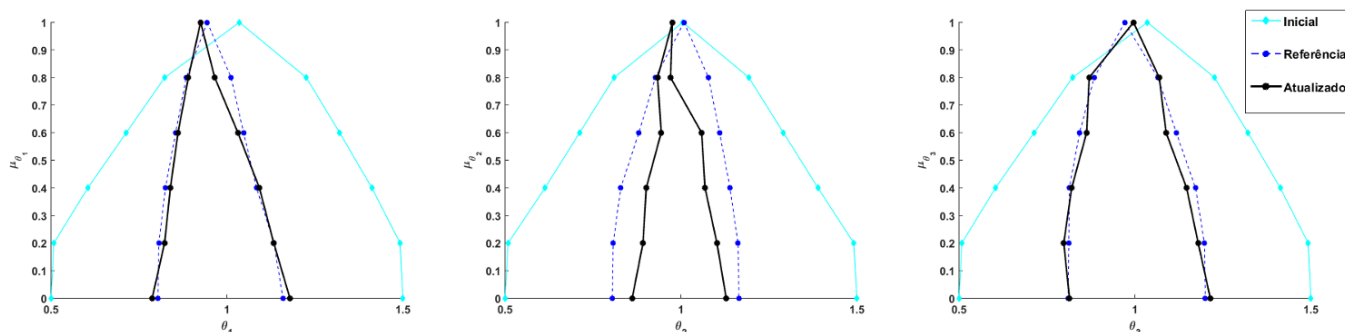


Figura 5.53 - Funções de pertinência *fuzzy* empíricas iniciais, de referência e atualizadas obtidas com o algoritmo 2 para o caso 4.

Tabela 5.94 - Parâmetros *fuzzy* em cada α_{cut} obtidos através do algoritmo 2 para o caso 4 com funções de pertinência empíricas.

| | $\underline{\theta}_1$ | $\overline{\theta}_1$ | $\underline{\theta}_2$ | $\overline{\theta}_2$ | $\underline{\theta}_3$ | $\overline{\theta}_3$ |
|--------------------------------------|------------------------|-----------------------|------------------------|-----------------------|------------------------|-----------------------|
| Inicial | 0.5 | 1.5 | 0.5 | 1.5 | 0.5 | 1.5 |
| $\alpha_{1.0000}$ | 0.9251 | 0.9251 | 0.9758 | 0.9758 | 0.9959 | 0.9959 |
| $\alpha_{0.8000}$ | 0.8903 | 0.9653 | 0.9336 | 0.9704 | 0.8701 | 1.0690 |
| $\alpha_{0.6000}$ | 0.8610 | 1.0313 | 0.9439 | 1.0588 | 0.8627 | 1.0885 |
| $\alpha_{0.4000}$ | 0.8393 | 1.0921 | 0.9014 | 1.0685 | 0.8203 | 1.1468 |
| $\alpha_{0.2000}$ | 0.8227 | 1.1331 | 0.8922 | 1.1022 | 0.7977 | 1.1798 |
| $\alpha_{0.0000}$ | 0.7875 | 1.1790 | 0.8615 | 1.1287 | 0.8139 | 1.2142 |
| Ref $\alpha_{0,0}$ | 0.8041 | 1.1594 | 0.8053 | 1.1648 | 0.8101 | 1.1998 |
| Erro (%) | -2.0644 | 1.6905 | 6.9787 | -3.0992 | 0.4691 | 1.2002 |

Tabela 5.95 - Valores médios dos parâmetros atualizados e erros relativos obtidos para o caso 4 através do algoritmo 2 com funções de pertinência *fuzzy* empíricas.

| | $\tilde{\theta}_1$ | $\tilde{\theta}_2$ | $\tilde{\theta}_3$ |
|--------------------------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| $\alpha_{1.0000}$ | 0.9251 | 0.9758 | 0.9959 |
| $\alpha_{0.8000}$ | 0.9278 | 0.9520 | 0.9696 |
| $\alpha_{0.6000}$ | 0.9461 | 1.0014 | 0.9756 |
| $\alpha_{0.4000}$ | 0.9657 | 0.9849 | 0.9836 |
| $\alpha_{0.2000}$ | 0.9779 | 0.9972 | 0.9887 |
| $\alpha_{0.0000}$ | 0.9832 | 0.9951 | 1.0141 |
| Ref $\alpha_{0,0}$ | 0.9818 | 0.9851 | 1.0049 |
| Erro (%) | 0.1426 | 1.0151 | 0.9155 |

Tabela 5.96 - Raios dos parâmetros atualizados e erros relativos obtidos para o caso 4 através do algoritmo 2 com funções de pertença *fuzzy* empíricas.

| | $\Delta\theta_1$ | $\Delta\theta_2$ | $\Delta\theta_3$ |
|--------------------------------------|------------------|------------------|------------------|
| $\alpha_{1.0000}$ | 0 | 0 | 0 |
| $\alpha_{0.8000}$ | 0.0375 | 0.0184 | 0.0995 |
| $\alpha_{0.6000}$ | 0.0851 | 0.0575 | 0.1129 |
| $\alpha_{0.4000}$ | 0.1264 | 0.0835 | 0.1633 |
| $\alpha_{0.2000}$ | 0.1552 | 0.1050 | 0.1910 |
| $\alpha_{0.0000}$ | 0.1957 | 0.1336 | 0.2001 |
| Ref $\alpha_{0,0}$ | 0.1776 | 0.1798 | 0.1949 |
| Erro (%) | 10.1915 | -25.6952 | 2.6680 |

Os resultados obtidos podem ser consultados nas tabelas 5.94 a 5.96. As nuvens de respostas dos parâmetros atualizados são apresentadas na figura 5.54.

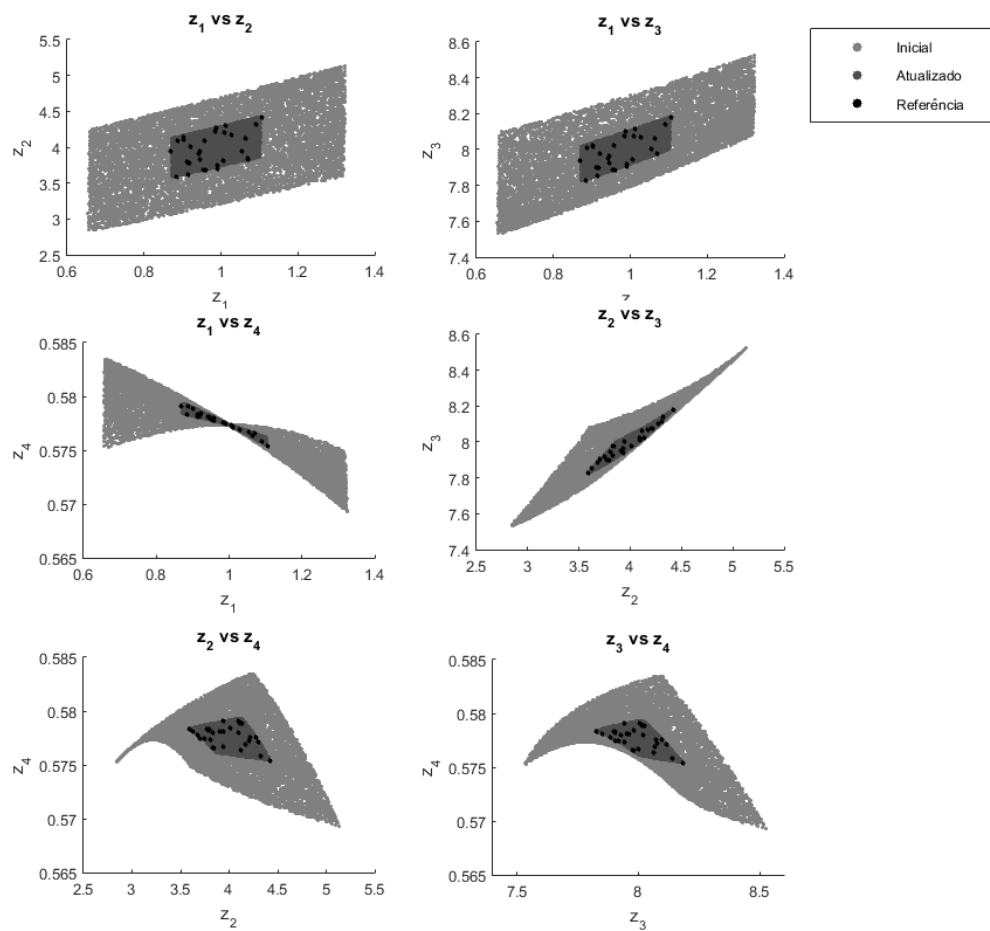


Figura 5.54 - Espaço de respostas *fuzzy* previstas no nível de pertença zero, obtidas com o algoritmo 2 e funções de pertença empíricas.

Capítulo 6

Conclusões

Os métodos de atualização de modelos de elementos finitos desenvolvidos nesta dissertação procuram ambos solucionar o problema inverso, estimando os intervalos de parâmetros através das respostas dinâmicas do sistema, com base no conceito de hiper pertença *fuzzy* que é utilizado para construir a função de pertença *fuzzy* do conjunto de dados de referência/experimentais. A aplicação sucessiva em cada nível de pertença *fuzzy* dos princípios propostos por Deng et al. (2017) e Silva (2015) apresentam resultados satisfatórios e permite ultrapassar os problemas associados à atualização estocástica, como tempos de computação elevados, ao realizar uma atualização determinística em cada nível α .

No algoritmo 1, os resultados obtidos são satisfatórios, permitindo obter estimativas bastante boas com tempos de computação reduzidos. No entanto, o tamanho da amostra influencia bastante a convexidade das funções de pertença obtidas, sendo que, para amostras de grande dimensão é possível obter estimativas bastante precisas, tal como era expectável. A definição do número de níveis α das funções de pertença *fuzzy* também tem alguma influência na precisão dos resultados obtidos. Caso o número de níveis α seja excessivo, pode ocorrer que alguns dos níveis α não contenham observações, causando assim a violação da condição de convexidade dos números *fuzzy*, invalidando os resultados obtidos. Tal é aplicável nos dois algoritmos desenvolvidos.

Relativamente ao algoritmo 2, os resultados obtidos não são tão precisos quando comparados com os resultados obtidos através do algoritmo 1. Os erros presentes nos intervalos de parâmetros devem-se sobretudo à estimativa do raio dos intervalos. Estes erros podem ser uma consequência do método utilizado para obter a estimativa do raio dos intervalos de parâmetros. O método proposto usa a diagonal principal da matriz de covariância dos parâmetros atualizados, que contém as variâncias dos parâmetros para estimar o raio. É possível que as simplificações introduzam erros nesta estimativa, visto que é assumida uma distribuição uniforme em cada nível α de forma a conseguir aplicar a fórmula que nos permite obter o raio do intervalo. No entanto, os erros no nível zero de pertença dos intervalos estimados não chegam a ultrapassar os 10% nos casos estudados.

Em termos de exigência computacional, ambos os algoritmos utilizados são pouco exigentes, permitindo obter resultados satisfatórios com tempos de computação bastante reduzidos. Os modelos utilizados são bastante simples, mas no caso do modelo ser mais complexo há a possibilidade de integrar meta-modelos, como o preditor de *Kriging* ou redes neuronais de base radial, para reduzir o nível de exigência computacional associado ao processo de atualização.

O caso de estudo número 4 (seção 5.4) serve para mostrar a viabilidade da aplicação de metodologias de atualização de modelos em situações reais, simulando um caso em que são realizadas 30 experiências e 10000 simulações. Os resultados obtidos provaram ser satisfatórios, podendo ser melhorados através do ajuste de níveis α utilizados. Nesta dissertação é utilizado um modelo numérico relativamente simples. Em casos reais, os modelos utilizados são bastante mais complexos e a análise dos mesmos é bastante exigente a nível de tempo e exigência computacional. Neste caso, tal como foi referido anteriormente, o ideal seria a aplicação de meta-modelos de forma a acelerar o processo de atualização, visto que nos algoritmos desenvolvidos, para cada nível α , o modelo numérico é chamado múltiplas vezes, para realizar a atualização dos valores médios e, no caso do algoritmo 1, também para realizar a atualização dos raios de parâmetros.

Relativamente à atualização dos valores médios e raios no caso do algoritmo 1, os resultados obtidos através da *toolbox* de otimização do MATLAB são bastante próximos dos valores de referência dos parâmetros de atualização. A definição dos limites superiores e inferiores no problema de minimização e o tipo de algoritmo de otimização e *solver* escolhido também influenciam a precisão dos resultados obtidos. Sendo que estes deveram ser ajustados consoante a natureza do problema, tal como descrito na seção 4.2.2 desta dissertação.

Trabalhos futuros

A *framework* desenvolvida tem bastante potencial para futuros melhoramentos. Alguns aspetos a considerar em trabalhos futuros:

1. Inclusão de meta-modelos no algoritmo de atualização de modo a substituir a análise de elementos finitos em cada iteração de modo a diminuir os tempos de computação.
2. No caso da utilização de redes neuronais de base radial, estudar como extrair as sensibilidades dos parâmetros estimados através da extração da matriz de pesos associada a cada parâmetro de atualização, de forma a realizar a atualização da matriz de covariância das mesmas.
3. O desenvolvimento de uma interface que permita a recolha de dados “online”, à semelhança do que é feito em algoritmos de atualização de gestão de tráfego rodoviário por exemplo. Isto permitiria obter modelos de elementos finitos mais precisos e a aplicação a outros casos de estudo, como por exemplo, a deteção e monitorização de falhas em estruturas reais.
4. Validar a metodologia de atualização de modelos proposta considerando uma estrutura física real.

Bibliografia

- Adhikari, S. & Khodaparast, H.H., 2014. A spectral approach for fuzzy uncertainty propagation in finite element analysis. *Fuzzy Sets and Systems*, 243, pp.1–24.
- Ahmadian, H., Mottershead, J. E., Friswell, M. I., 1998. Regularisation methods for finite element model updating. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 12 (1), pp. 47–64.
- Anoop, M.B., Rao, K.B. & Gopalakrishnan, S., 2006. Conversion of probabilistic information into fuzzy sets for engineering decision analysis. *Computers and Structures*, 84(3–4), pp.141–155.
- Canbalo, G. & Özgüven, H.N., 2016. Model updating of nonlinear structures from measured FRFs. *Mechanical Systems and Signal Processing* 80, pp. 282–301.
- Carvalho, J., Datta, B., Gupta, A., Lagadapati, M., 2007. A direct method for model updating with incomplete measured data and without spurious modes. *Mechanical Systems and Signal Processing* , 21(7), pp.2715–2731.
- Collins, J., D. , Hart, G. C, Hasselman, T. K., Kennedy, B., 1974. Statistical Identification of Structures. *AIAA Journal*, 12(2), pp. 185–190.
- de Lima, B., Ebecken, N., 2000. A comparison of models for uncertainty analysis by the finite element method. *Finite Elements in Analysis and Design*, 34, pp. 211–232.
- Deng, Z., Guo, Z. & Zhang, X., 2017. Interval model updating using perturbation method and Radial Basis Function neural networks. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 84, pp.699–716.
- Fang, S., Zhang, Q. & Ren, W., 2015. An interval model updating strategy using interval response surface models. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 60–61, pp. 909–927.
- Fox, R. L., Kapoor, M. P., 1968. Rates of change of eigenvalues and eigenvectors. *AIAA Journal*, 6 (12), pp. 2426–2429.
- Friswell, M. I., Mottershead, J. E., 1995. *Finite Element Model Updating in Structural Dynamics. Solid Mechanics and its Applications*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- Friswell, M. I., Mottershead, J. E., Ahmadian, H., 2001. Finite-element model updating using experimental test data: parametrization and regularization. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 359, pp. 169–186.
- Goller, B., Broggi, M. & Calvi, A., 2011. A stochastic model updating technique for complex aerospace structures. *Finite Elements in Analysis and Design*, 47(7), pp. 739–752.
- Govers, Y. & Link, M., 2010. Stochastic model updating—Covariance matrix adjustment from uncertain experimental modal data. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 24(3), pp.696–706.

- Haag, T., Herrmann, J. & Hanss, M., 2010. Identification procedure for epistemic uncertainties using inverse fuzzy arithmetic. In *Mechanical Systems and Signal Processing*, 24(7), pp. 2021–2034.
- Hanss, M., 2005. *Applied fuzzy arithmetic: An introduction with engineering applications*, Springer-Verlag.
- Hanss, M. & Willner, K., 2000. Fuzzy arithmetical approach to the solution of finite element problems with uncertain parameters. *Mechanics Research Communications*, 27(3), pp.257–272.
- Hemez, F. M., Farrar, C. R., 2014. A Brief History of 30 Years of Model Updating in Structural Dynamics. In: Foss, G., Niezrecki, C. (Eds.), *Special Topics in Structural Dynamics, Volume 6. Conference Proceedings of the Society for Experimental Mechanics Series*. Springer International Publishing, Cham, pp. 53–71.
- Jacquelin, E., Adhikari, S. & Friswell, M.I., 2012. A second-moment approach for direct probabilistic model updating in structural dynamics. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 29, pp.262–283.
- Jensen, H. A., Esse, C., Araya, V., Papadimitriou, C., 2017. Implementation of an adaptive meta-model for Bayesian finite element model updating in time domain. *Reliability Engineering and System Safety*, 160, pp.174–190.
- Karian, Z. A., Dudewicz, E. J., 2000. *Fitting Statistical Distributions: The Generalized Lambda Distribution and Generalized Bootstrap Methods*. Chapman and Hall/CRC.
- Khodaparast, H.H. Govers, Y., Dayyani, I., Adhikari, S., Link, M., Friswell, M.,I., Mottershead, J. E., Sienz, J., 2017. Fuzzy finite element model updating of the DLR AIRMOD test structure. *Applied Mathematical Modelling*, 52, pp.512–526.
- Khodaparast, H.H., Mottershead, J.E. & Badcock, K.J., 2011. Interval model updating with irreducible uncertainty using the Kriging predictor. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 25(4), pp. 1204–1206.
- Khodaparast, H.H., Mottershead, J.E. & Friswell, M.I., 2008. Perturbation methods for the estimation of parameter variability in stochastic model updating. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 22(8), pp. 1751–1773.
- Lin, R.M., Ewins, D. J., 1990. Model updating using FRF data. In: Sas, P. (Ed.), *Proceedings of 15th ISMA International Seminar on Modal Analysis Noise and Vibration Engineering*. K.U. Leuven, Katholieke Universiteit Leuven, Leuven, pp. 141–162.
- Lin, R.M. & Zhu, J., 2006. Model updating of damped structures using FRF data. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 20(8), pp. 2200–2218.
- Maia, N. M. M., Silva, J. M. M., 1997. *Theoretical and Experimental Modal Analysis*. Mechanical Engineering Series. Research Studies Press Limited.
- Marwala, T., 2010. *Finite-element-model updating using computational intelligence techniques: Applications to structural dynamics*. Springer-Verlag London.
- Massa, F., Ruffin, K., Tison, T., Lallemand, B., 2008. A complete method for efficient fuzzy modal analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 309(1–2), pp. 63–85.

- Massey Jr., F. J., 1951. Kolmogorov-Smirnov Test for Goodness of Fit. *Journal of the American Statistical Association* 46 (253), pp. 68–78.
- Mottershead, J. E., Friswell, M. I., Oct. 1993. Model Updating In Structural Dynamics: A Survey. *Journal of Sound and Vibration*, 167 (2), pp. 347–375.
- Mottershead, J.E., Link, M. & Friswell, M.I., 2011. The sensitivity method in finite element model updating: A tutorial. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 25(7), pp. 2275–2296.
- Pradhan, S. & Modak, S. V, 2012. Normal response function method for mass and stiffness matrix updating using complex FRFs. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 32, pp. 232–250.
- Ross, T.J., 2004. *Fuzzy Logic with Engineering Applications*, Wiley.
- Schwer, T.L.E., 2007. An overview of the PTC 60 / V & V 10 : guide for verification and validation in computational solid mechanics.
- Silva, J.M.M. & Maia, N.M.M., 2012. *Modal Analysis and Testing*, Springer Netherlands.
- Silva, T.A.N., 2015. Development and Implementation of Model Updating Techniques in Structural Dynamics, Ph.D. thesis, Universidade de Lisboa.
- Sun, H. & Büyüköztürk, O., 2016. Probabilistic updating of building models using incomplete modal data. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 75, pp.27–40.
- Zadeh, L., A., 1965. Fuzzy sets. *Information and Control*, 8(3), pp.338–353.
- Zhongdong, D., Spencer, B., F., Guirong, Y., Jinping, O., 2004. An improved optimal elemental method for updating finite element models. *Earthquake Engineering and Engineering Vibration*, 3(1), pp.67–74.