



Vasco Alberto Chimene

Licenciado em Estatística-Universidade Eduardo Mondlane

**Tarifação *a Posteriori*: uma proposta para a
SIM-Ímpar**

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em Matemática e Aplicações,
Ramo, Actuariado, Estatística e Investigação Operacional.

Orientadores : Professora Doutora Gracinda R. Guerreiro, Prof^a. Auxiliar, FCT-UNL
Doutor Nuno Gois Silva, Director Técnico Actuário, SIM-Ímpar

Júri:

Presidente: Prof. Manuel Leote Tavares Inglês Esquível

Arguentes: Prof. Maria de Lourdes Belchior Afonso

Vogais: Prof. Gracinda Rita Diogo Guerreiro



FACULDADE DE
CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Setembro, 2014

Tarifação *a Posteriori*: uma proposta para a SIM-Ímpar

Copyright © Vasco Alberto Chimene, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa

A Faculdade de Ciências e Tecnologia e a Universidade Nova de Lisboa têm o direito, perpétuo e sem limites geográficos, de arquivar e publicar esta dissertação através de exemplares impressos reproduzidos em papel ou de forma digital, ou por qualquer outro meio conhecido ou que venha a ser inventado, e de a divulgar através de repositórios científicos e de admitir a sua cópia e distribuição com objectivos educacionais ou de investigação, não comerciais, desde que seja dado crédito ao autor e editor.

Dedico este trabalho aos meus pais

Agradecimentos

Durante a realização deste trabalho, enfrentei muitas dificuldades. No entanto tive a sorte de encontrar amigos que me deram muita força, através do incentivo, da amizade, carinho e compreensão, para que eu conseguisse realizá-lo, pelo que agradeço:

A Deus, pela minha vida e me fazer sentir sempre Sua presença.

Aos meus orientadores Professora Doutora Gracinda Rita Diogo Guerreiro e Doutor Nuno Gois Silva, pelo estímulo na realização deste trabalho e pelo aprendizado durante todo o curso. Agradeço, principalmente pelas dicas preciosas e inteligentes nos momentos mais difíceis da realização do mesmo.

À Seguradora Internacional de Moçambique (SIM-Ímpar)- Área do Seguro Automóvel, pelo material e auxílio concedido.

Aos meus Pais, pelos esforços jamais negados e pelos exemplos sempre oferecidos.

Aos Professores do Curso de Mestrado em Matemática e Aplicações, Ramo, Actuariado, Estatística e Investigação Operacional, por todo o conhecimento transmitido e especialmente ao Professor Doutor Manuel L. Esquível por ter conseguido o estágio para mim na SIM-Ímpar.

À Pélcia da Graça, pela incansável dedicação, carinho e compreensão nos momentos mais difíceis.

À minha família, por me ter suportado com muita compreensão durante o período da elaboração do trabalho.

Aos meus amigos, Abreu Miguel Liliano, Astre Abel Mepameia, Adérito Cacope, Eldry Oliveira, Júlio Moreira de Pina, Mauro Monteiro, Leonardo Miúdo, Vasco Guerreiro Silva, pelo apoio moral e material.

A todos os colegas do Curso de Mestrado em Matemática e Aplicações, pela amizade e colaboração durante todo o curso.

Finalmente, a todos que directa ou indirectamente contribuíram na realização desta tese.

Resumo

O objectivo desta tese foi analisar as características da carteira automóvel de responsabilidade civil e avaliar o actual sistema de *bonus malus* para as garantias de responsabilidade civil, da Seguradora Internacional de Moçambique, S.A.

O actual sistema de *bonus malus* da SIM-Ímpar é comercialmente inviável, e apresenta regras pouco consistentes com os objectivos da seguradora, pelo que se implementa, nesta dissertação, um sistema de *bonus malus* alternativo. Estimou-se, sob o modelo clássico para SBM, as distribuições estacionárias associadas aos dois sistemas de *bonus malus* analisados. Com os resultados obtidos determinou-se as escalas óptimas de prémios propostas por Norberg (1976), Borgan et al. (1981), Gilde and Sundt (1989), Andrade e Silva and Centeno (2005). Avaliou-se, também, o actual sistema e o sistema proposto, usando as várias medidas de avaliação propostas por Lemaire (1995).

Por fim, efectuou-se uma análise comparativa do actual sistema de *bonus malus* da SIM-Ímpar com o sistema aqui proposto onde, tendo em conta factores como aspectos comerciais e a concorrência do mercado, o sistema proposto mostrou-se, no geral, ser eficaz.

Palavras-Chave: Distribuição estacionária, Escalas óptimas de prémios, Medidas de avaliação, Sistemas de *bonus malus*.

Abstract

The aim of this thesis was to analyze the characteristics of automobile liability portfolio and evaluate current *bonus malus* system for guarantees of civil liability at the International Insurance Company of Mozambique, S.A.

The current *bonus malus* system from SIM-Ímpar is commercially unviable and presents inconsistent rules with the objectives of the insurer. This is why an alternative *bonus malus* system has been introduced at this dissertation. The classic BMS model was estimated and the associated stationary distributions of the two systems were analysed.

The optimal premium scales proposed by Norberg (1976), Borgan et al. (1981), Gilde and Sundt (1989), Andrade e Silva and Centeno (2005) were determined. The current system and the proposed system, using various assessment measures proposed by Lemaire (1995), were evaluated as well.

Finally, a comparative analysis of the current *bonus malus* system with the proposed system, which considers factors such as the commercial aspects and the market competition, the proposed system proved to be effective, in general, in their usage.

Keywords: *Bonus Malus* Systems, Evaluation Measures, Optimal Premiums Scales, Stationary Distribution.

Abreviaturas e Siglas

BMS *Bonus Malus System*

CV *Coefficiente de Variação dos Prémios*

E.E *Empresa Estatal*

EMOSE *Empresa Moçambicana de Seguros*

EQM *Erro Quadrático Médio*

INAV *Instituto Nacional de Viação*

ISP *Instituto de Seguros de Portugal*

PM *Prémio Médio*

RSAL *Relative Stationary Average Level (Nível Médio Relativo de Estacionaridade)*

S.A *Sociedade Anónima*

SBM *Sistema de Bonus Malus*

SIM *Seguradora Internacional de Moçambique*

SORCA *Seguro Obrigatório de Responsabilidade Civil Automóvel*

Conteúdo

Agradecimentos	iii
Resumo	v
Abstract	vii
Abreviaturas e Siglas	ix
1 Introdução	1
2 Sistemas de <i>Bonus Malus</i>	5
2.1 Enquadramento Histórico do Seguro em Moçambique	6
2.1.1 Liberalização do Mercado de Seguros em Moçambique	8
2.1.2 Seguro Obrigatório de Responsabilidade Civil Automóvel	9
2.2 Definição de um Sistema de <i>Bonus Malus</i>	11
2.3 Sistema de <i>Bonus Malus</i> da SIM-Ímpar	12
2.3.1 Características do Actual Sistema de <i>Bonus Malus</i>	15
2.3.2 Classes do Actual Sistema de <i>Bonus Malus</i>	15
2.3.3 Vector dos Prémios	16
2.3.4 Matriz das Regras de Transição	16
2.4 O Sistema de <i>Bonus Malus</i> Proposto	18
2.4.1 Características do Sistema de <i>Bonus Malus</i> Proposto	19
2.4.2 Classes do Sistema de <i>Bonus Malus</i> Proposto	19
2.4.3 Vector dos Prémios	20
2.4.4 Matriz das Regras de Transição	20
3 Número de Sinistros	23
3.1 Processo de Poisson Homogéneo	23
3.1.1 Caracterização dos Dados	24
3.1.2 Ajustamento do Número de Sinistros	25
3.2 Processo de Poisson Heterogéneo	26
3.3 Distribuição de Estrutura	26
3.3.1 Modelo Poisson-Gama	27

3.3.2	Modelo Poisson-Inversa Gaussiana	29
4	Transição entre Classes e Distribuição Estacionária	31
4.1	Transição entre Classes	31
4.2	Distribuição Limite	33
5	Medidas de Avaliação e Escalas Óptimas de Prémios	37
5.1	Medidas de Avaliação dos SBM	37
5.1.1	Nível Médio Relativo de Estacionaridade	37
5.1.2	Coefficiente de Variação dos Prémios	39
5.1.3	Elasticidade do Prémio Médio	41
5.1.4	Elasticidade Transiente	43
5.2	Escalas Óptimas de Prémios	44
5.2.1	Critério de Norberg	45
5.2.2	Critério de Borgan et al.	50
5.2.3	Critério de Gilde and Sundt	54
5.2.4	Critério de Andrade e Silva	57
6	Conclusão	63
	Bibliografia	66
	Apêndices	71

Lista de Figuras

4.1	Evolução do prémio médio.	36
5.1	Nível médio relativo de estacionaridade.	39
5.2	Coefficiente de variação dos prémios.	41
5.3	Elasticidade do prémio médio.	43
5.4	Elasticidade transiente.	44
5.5	Distribuição estacionária <i>vs</i> Distribuição ponderada - Actual sistema. . . .	51
5.6	Distribuição estacionária <i>vs</i> Distribuição ponderada - Sistema proposto. . .	52

Lista de Tabelas

2.1	Tabela de <i>Bonus Malus</i>	13
2.2	Tabela de <i>Bonus Malus</i> Modificada.	14
2.3	Tabela de <i>Bonus Malus</i> - Sistema em vigor.	16
2.4	Tabela de <i>Bonus Malus</i> Ajustada.	17
2.5	Tabela de <i>Bonus Malus</i> - Sistema Proposto.	20
3.1	Distribuição observada do número de sinistros.	24
3.2	Ajustamento do número de sinistros observados-Distribuição Poisson	25
3.3	Ajustamento do número de sinistros observados-Teste Qui-quadrado	25
3.4	Ajustamento do número de sinistros observados-Distribuição Poisson-Gama	28
3.5	Ajustamento do número de sinistros observados-D. Poisson-Inversa Gaussiana	30
4.1	Distribuição estacionária-Actual Sistema da SIM-Ímpar	35
4.2	Distribuição estacionária-Sistema de <i>bonus malus</i> Proposto	35
5.1	Escalas óptimas de prémios - Modelo de Norberg, actual sistema	48
5.2	Escalas óptimas de prémios - Modelo de Norberg, sistema proposto	49
5.3	Prémios médios e Medidas de eficiência-Modelo de Norberg	50
5.4	Escalas óptimas de prémios - Modelo de Borgan et al., actual sistema	52
5.5	Escalas óptimas de prémios - Modelo de Borgan et al., sistema proposto	53
5.6	Prémios médios e Medidas de eficiência-Modelo de Borgan et al.	53
5.7	Escalas óptimas de prémios - Modelo de Gilde and Sundt, actual sistema	56
5.8	Escalas óptimas de prémios - Modelo de Gilde and Sundt, sistema proposto	57
5.9	Prémios médios e Medidas de eficiência-Modelo de Gilde and Sundt	57
5.10	Escalas óptimas de prémios - Modelo de Andrade e Silva, actual sistema	59
5.11	Escalas óptimas de prémios - Modelo de Andrade e Silva, sistema proposto	60
5.12	Prémios médios e Medidas de eficiência-Modelo de Andrade e Silva	60
5.13	Perdas de eficiência- Actual sistema <i>vs</i> Sistema proposto	61
5.14	Medidas de avaliação de Lemaire para as escalas propostas	62
1	Discretização da distribuição de estrutura-Inversa Gaussiana	73
2	Distribuição estacionária <i>vs</i> Distribuição ponderada - Actual sistema	74
3	Distribuição estacionária <i>vs</i> Distribuição ponderada - Sistema proposto	74

Capítulo 1

Introdução

Na análise de risco de uma carteira de seguro automóvel, uma das principais tarefas do atuário consiste em definir uma estrutura tarifária que distribua os segurados em grupos de risco, nos quais se pressupõe ser homogéneo o comportamento dos segurados. Para isso, na análise da tarificação *a priori*, pode recorrer-se, por exemplo, a modelos lineares generalizados ¹, a fim de agrupar as apólices em classes de riscos o mais homogéneo possível, em que os segurados que pertencem à mesma classe pagam o mesmo prémio de risco. No entanto, muitos factores que influenciam o risco não podem ser tidos em conta, mesmo quando se incluem muitas variáveis *a priori* e, por conseguinte, continuamos a ter classes de riscos com alguma heterogeneidade.

Os sistemas de *bonus malus* constituem o método mais utilizado na tarificação *a posteriori*, no ramo de seguro automóvel, e são utilizados para corrigir o prémio que cada segurado paga à seguradora, ou seja penalizam os “maus” segurados e bonificam os “bons” segurados. Esta forma de tarificação, que já está em vigor em muitos países, para além de contrariar o risco moral, incentiva os condutores a ter uma condução mais cuidadosa, sendo o prémio ajustado a cada ano com base na experiência passada.

Neste trabalho serão abordados os sistemas de *bonus malus* baseados na frequência de sinistralidade, ou seja, sistemas em que os descontos e agravamentos a atribuir a cada apólice dependem apenas do número de sinistros participados e não dos montantes das indemnizações respectivas. Os Sistemas de *Bonus Malus* (SBM) podem ser concebidos determinando o número de classes, vector dos prémios e regras de transição. Utilizar-se-ão os dados da carteira de responsabilidade civil automóvel da Seguradora Internacional de Moçambique, S.A. (SIM-Ímpar).

Em Moçambique, a concorrência do mercado de seguro tem registado, nos últimos anos um crescimento contínuo, o que torna o mercado segurador cada vez mais competitivo e permitindo uma melhoria contínua da qualidade dos serviços prestados pelas seguradoras. O modelo de tarificação automóvel utilizado pela Seguradora Internacional de Moçambique, S.A. permaneceu inalterado nos últimos anos e, de acordo com a seguradora, necessita de

¹Para mais informações pode consultar, por exemplo, De Jong and Heller (2008), Ohlsson and Johansson (2010) ou Guerreiro (2013).

uma revisão|melhoria por forma a responder à “agressividade” da actual concorrência do mercado segurador.

Com esta dissertação pretende-se analisar as características da carteira automóvel de responsabilidade civil da SIM-Ímpar e aplicar-lhe as técnicas de análise de sistema de *bonus malus* implementando, um novo sistema de *bonus malus* que venha a corrigir as falhas que foram identificadas pela seguradora ao longo dos últimos anos.

Determinam-se, para o modelo actual e proposto, as escalas óptimas de prémios propostas por Norberg (1976), Borgan et al. (1981), Gilde and Sundt (1989), Andrade e Silva and Centeno (2005). Avalia-se também o actual sistema de *bonus malus* e o sistema de *bonus malus* proposto, usando as várias medidas de avaliação propostas por Lemaire (1995). Por fim, faz-se uma análise comparativa dos dois sistemas de *bonus malus*.

O trabalho está dividido em seis capítulos, que se encontram discriminados como a seguir se descreve:

No primeiro capítulo faz-se uma introdução do trabalho no geral e, são apresentados, também, os objectivos e a importância|relevância do mesmo no âmbito da empresa onde foi realizado.

No segundo capítulo, faz-se uma breve introdução aos sistemas de *bonus malus* em geral e para o caso particular dos sistemas de *bonus malus* em análise. Seguindo Centeno (2003) e Norberg (1976) apresenta-se alguns conceitos básicos sobre os sistemas de *bonus malus*. Faz-se também alguns reparos no que se refere às regras de transição, distribuição das bonificações e agravamentos do actual sistema de *bonus malus* da SIM-Ímpar. No fim, faz-se a caracterização do actual sistema de *bonus malus* e do sistema proposto, e das suas matrizes das regras de transição.

No terceiro capítulo faz-se o ajustamento de uma distribuição ao número de sinistros declarados por cada segurado numa anuidade. São abordados, seguindo Centeno (2003) e Guerreiro (2001), os modelos de Poisson para carteiras homogéneas e heterogéneas, e apresenta-se os resultados do ajustamento para os dois modelos considerados.

No quarto capítulo faz-se uma análise da estacionaridade da carteira no caso geral e para o caso particular dos dois sistemas de *bonus malus* em estudo. No fim, são apresentados os resultados, onde, com base nos mesmos, se faz uma análise comparativa dos dois sistemas de *bonus malus* analisados.

No quinto capítulo avalia-se a performance dos sistemas de *bonus malus*, considerando algumas medidas de avaliação propostas por Lemaire (1995). Ainda no mesmo capítulo, por forma a estimar o prémio óptimo a aplicar a cada classe do actual sistema de *bonus malus* e do novo sistema proposto, aborda-se, baseado em Centeno (2003) e Andrade e Silva and Centeno (2005), as escalas óptimas de prémios segundo vários modelos. A partir dos resultados obtidos por aplicação das medidas de avaliação e das escalas óptimas, cuja parte teórica se encontra no mesmo capítulo, faz-se uma análise comparativa dos dois sistemas de *bonus malus* analisados.

No sexto capítulo, são apresentadas as conclusões do trabalho, tendo em conta que nos sistemas de *bonus malus* abordados, estiveram implícitas as hipóteses de que os sistemas foram analisados tendo em conta apenas a frequência de sinistralidade e não a sua severidade.

Num mercado em constante crescimento e cada vez mais competitivo as companhias de seguros reposicionam-se, procurando soluções que contribuam para a estabilidade da sua carteira e, por conseguinte o seu equilíbrio financeiro. A SIM- Ímpar, atenta às mudanças do mercado onde está operar, disputado por várias outras companhias que actuam no mesmo ramo de seguro, faz uma revisão do actual modelo de tarifação automóvel, procurando modelo de tarifação *a posteriori* que, para além de incentivar à condução mais segura, seja capaz de responder as novas exigências do mercado, como os aspectos comerciais e à concorrência, proporcionando, desta forma, o equilíbrio financeiro da seguradora. Foi neste contexto que faz sentido a realização do presente trabalho, que analisa e avalia o SBM para as garantias de responsabilidade civil da SIM-Ímpar recorrendo ao modelo clássico para SBM, ver Lemaire (1995). Acrescenta-se ainda que estudos sobre tarifação *a posteriori* em Moçambique são raros, aliado ao facto da quase inexistência de cursos no ramo de actuariado. Assim, este trabalho, para além de auxiliar a seguradora no alcance dos seus objectivos, supre uma lacuna ao contribuir na divulgação e na necessidade de uma exploração contínua do ramo de actuariado.

Capítulo 2

Sistemas de *Bonus Malus*

Na actividade seguradora, um dos desafios que o actuário enfrenta é o de determinar um prémio proporcional ao risco associado ao contrato de seguro. Neste processo de determinação do prémio de risco assumido pelas seguradoras, podem utilizar-se duas técnicas que se complementam: a tarificação *a priori* e *a posteriori*. Na tarificação *a priori* a seguradora tenta agrupar as apólices em classes de riscos mais homogéneo possível, em que os segurados que pertencem à mesma classe pagam o mesmo prémio de risco. Este método de tarificação por classes de risco, ou *class rating*, pode ilustrar-se no pagamento de prémios diferenciados. Por exemplo, no seguro de responsabilidade civil automóvel, as companhias tarifam os seus segurados utilizando várias variáveis de classificação como sejam:

- Relativamente ao veículo: a sua cilindrada, potência, ano do registo, preço do veículo em novo, tipo de uso (particular ou comercial);
- Relativamente ao segurado: a sua idade, ocupação, zona de residência, tempo de carta (que se pressupõe intimamente ligado à experiência de condução).

No entanto, existem características que não são usadas como critérios de tarificação e que poderiam auxiliar na mensuração do risco real de cada segurado. Existem diferentes motivos para a sua exclusão: podem não ser observáveis directamente (as atitudes relacionadas com a cultura, a agressividade no volante, o conhecimento de código de estrada, etc ...), podem não ser aceitáveis politicamente (nacionalidade, religião, até mesmo género, nalguns países não é uma variável admissível, etc...) ou podem ainda tornar o sistema de tarificação demasiado complicado, o que justifica a sua retirada do modelo. A não inclusão destas variáveis origina uma certa heterogeneidade no colectivo dos riscos pertencentes à mesma classe de tarificação, que, a existir, apenas se torna evidente para a seguradora após o exame do registo das indemnizações individuais. De facto, vários estudos realizados um pouco por toda parte mostram que estes factores tendem a ser os mais importantes, isto é, o melhor predictor do número de sinistros não é a idade do condutor ou do carro, a sua cilindrada ou potência, mas sim a experiência passada. Surge assim, nos anos cinquenta, a ideia de que, para além de tarifar cada segurado de acordo com os valores assumidos

por um certo número de variáveis *a priori* que traduzem determinadas características bem definidas, existe a necessidade de proceder à revisão do prémio *a posteriori* tendo em conta a sinistralidade observada do segurado. Existem várias práticas de tarificação *a posteriori*. Designações comuns são Sistemas de *Bonus-Malus*, NCD (de “No Claim Discount”) e “*Experience Rating*”. Em todas estas práticas se penaliza o segurado que originou sinistros através de um agravamento no prémio (*malus*), e se bonifica o segurado que não declarou sinistros (*bonus*).

A tarificação *a posteriori* pretende fazer aproximar gradualmente o prémio do contrato ao risco que cada segurado, individualmente, representa para a seguradora. Assim, é a experiência verificada no passado que influencia o prémio a pagar no futuro.

A aplicação de *bonus malus*, ou seja, de sistemas que conduzem à redução de prémios em caso de baixa sinistralidade (*bonus*) ou a um aumento se esta for excessiva (*malus*), constitui um dos instrumentos essenciais da tarificação *a posteriori*, sendo utilizado massivamente no âmbito da exploração do seguro automóvel: para além do princípio actuarial atrás referido, um dos seus objectivos principais é o de predispor os segurados para uma condução mais cautelosa. Este tipo de tarificação faz ainda com que os segurados não declarem os sinistros de pequeno montante, por forma a evitar o agravamento dos seus prémios em anuidades posteriores. Este fenómeno de evasão, que impede a seguradora de conhecer o verdadeiro risco subjacente a cada apólice, designa-se habitualmente por “*sede de bonus*” e foi já objecto de estudo por parte de diversos autores, ver, por exemplo Lemaire (1995), Centeno (2003) ou Pereira and de Sá (1999).

Dada a progressiva liberalização no mercado de segurador, sobretudo na União Europeia, que culminou nas habitualmente denominadas “Directivas de Terceira Geração”, os sistemas tarifários aplicados são livremente estabelecidos pelas seguradoras, tendo em atenção as características específicas da sua carteira, o que significa que também os sistemas de *bonus malus* podem ser fortemente diferenciados dentro do mesmo país.

2.1 Enquadramento Histórico do Seguro em Moçambique

Esta secção foi baseada no trabalho desenvolvido pelo Dr. Momade Ali Mucusse, profissional de seguros desde 1987 a 1994 na EMOSE, e depois passou para o quadro de pessoal da SIM-Ímpar, onde se encontra a trabalhar até então, como chefe de serviços na área técnica automóvel. O trabalho por ele desenvolvido tem por missão trazer alguns subsídios sobre o Direito de Seguros que, segundo ele, considera úteis para partilhar, à luz da lei do Governo de Moçambique sobre o Seguro Obrigatório de Responsabilidade Civil Automóvel (SORCA), Lei nº 2/2003, de 21 de Janeiro, do novo Regime Jurídico dos Seguros aprovado pelo Decreto-lei nº 1/2010, de 31 de Dezembro, assim como o Decreto nº 30/2011, de 11 de Agosto, que aprova o Regulamento das Condições de Acesso e de Exercício da Actividade Seguradora e da Respectiva Mediação e, já agora, também pelo Decreto - Lei nº 1/2011, de 23 de Março, que aprova o novo Código de Estrada.

2.1. ENQUADRAMENTO HISTÓRICO DO SEGURO EM MOÇAMBIQUE⁷

Segundo Mucusse (2012), o seguro, na sua forma moderna, teve o seu início na Europa, mais concretamente em Génova, na Itália, desde o século XIV, tendo registado um grande desenvolvimento a partir do século XVIII. Em Moçambique só começou a ser praticado no início do século XX. Contudo, as modalidades de inter-ajuda no seio de comunidades e famílias moçambicanas, perante um acontecimento infeliz de alguns, que não são mais do que a ideia básica do seguro e do célebre princípio um por todos e todos por um, constituem práticas seculares.

Nos primeiros anos, as transacções de seguro estavam entregues a firmas comerciais que, para além do comércio interno, importação e exportação, se dedicavam, entre outras actividades subsidiárias, à actividade seguradora, sendo a maior parte dessas instituições constituídas por agências estabelecidas em Moçambique, de capitais Britânicos e Sul Africanos, numa reflexão clara do fraco poderio económico de Portugal, então potência colonizadora, sendo a maior expressão económica destas agências observada no período compreendido entre 1933 a 1942.

Em 1943, foi criada a primeira sociedade de seguros colonial, a “NAUTICUS” e nos tempos que se seguiram até 1948, com a criação da segunda companhia colonial, a “LUSITANA”, em 1945. A situação conheceu uma inversão positiva nas transacções de seguro a favor das companhias de seguro com sede em Moçambique.

Em 1949, foram criados em Moçambique os serviços de Fiscalização Técnica da Indústria Seguradora que, mais tarde, passou a ostentar o nome de Inspeção de Seguros.

Em 1957, nascem mais duas novas sociedades de seguro com sede local filiais de seguradoras Portuguesas, nomeadamente, a “MUNDIAL E CONFIANÇA DE MOÇAMBIQUE” e a “TRANQUILIDADE DE MOÇAMBIQUE”, elevando para quatro o número de companhias de seguros com sede em Moçambique.

Após a Independência Nacional, a 25 de Junho de 1975, a importância económica deste sector mereceu, desde logo, a atenção do Estado e Governo de Moçambique, tendo sido um dos primeiros sectores de actividade económica a ser nacionalizado, acto que se verificou em Janeiro de 1977, à luz dos seguintes objectivos:

- Por tratar-se de um sector consumidor de divisas que, como tal, importava controlar;
- Por ser um sector que gere, também, seguros sociais, no caso, por exemplo, de Acidentes de Trabalho e, como tal, com reflexos sociais importantes;
- Por ser um sector de serviços complexos e onde não havia quadros nacionais preparados. Havia, assim, que garantir a sua formação técnica e profissional de forma acelerada;
- Em suma, por servir melhor as necessidades da economia, assegurando o desenvolvimento dos seguros que sirvam os máximos interesses nacionais.

É, assim, criada em 1 de Janeiro de 1977, a EMOSE – Empresa Moçambicana de Seguros E.E., pelo Decreto-Lei n.º 3/77, de 13-01-1977, instituição a que foi confiada a

exclusividade do exercício da actividade seguradora e resseguradora e que resultou da fusão das quatro companhias seguradoras com sede em Moçambique, nomeadamente, as companhias de Seguros NAUTICUS, LUSITANA, TRAQUILIDADE DE MOÇAMBIQUE e a MUNDIAL E CONFIANÇA DE MOÇAMBIQUE, esta última, com sede na cidade da Beira, foi liquidada dada a sua situação prática de falência. Por outro lado, cessaram as suas actividades na República de Moçambique as agências gerais e delegações das cerca de trinta companhias de seguros estrangeiras, entre as quais, portuguesas, inglesas, sul africanas e italianas. Esta exclusividade do exercício da actividade seguradora do Estado Moçambicano, por intermédio da EMOSE, E.E., teve sempre em vista a prossecução dos objectivos do Governo, considerando que:

- O sector segurador apoiava-se “em esquemas e estruturas capitalistas que não beneficiavam a Nação”;
- Os prémios, as poupanças, o investimento e a mutualidade não eram processados em benefício do Povo, mas sim com vista à multiplicação da riqueza dos detentores do capital;
- Das cerca de três dezenas de seguradoras e agências existentes em Moçambique, apenas quatro delas possuíam sede no solo pátrio;
- “A legislação, as modalidades de seguro, suas bases e reservas técnicas, e seu caucionamento fora do País” visavam obter vantagens para a “potência colonial”;
- “O dinheiro das seguradoras era, fundamentalmente, aplicados nos sectores especulativos, em especial para a área imobiliária”;
- As resseguradoras nem sempre tinham em conta o necessário equilíbrio de cobertura de risco a nível nacional, “favorecendo as suas companhias-mãe”.

2.1.1 Liberalização do Mercado de Seguros em Moçambique

Em Dezembro de 1991, a Assembleia da República, considerando que o processo de reestruturação económica em curso exigia a correcta adaptação e dinamização do sector financeiro do país. Dado que a actividade seguradora assumia importância vital na economia, o sistema de seguros e as formas do seu desenvolvimento deviam ser adaptadas às tendências da estruturação económica e social, o que iria permitir uma maior competitividade económica e melhoria da qualidade dos serviços prestados. Daí a actividade seguradora e resseguradora passou a poder ser exercida por entidades públicas, privadas ou outras, desde que para tal se mostrem devidamente licenciadas à luz da Lei nº 24/91, de 31 de Dezembro. Desde essa altura já foram autorizadas a operar as seguintes seguradoras:

1. Global Alliance: 29 de Julho 1992, Ramos Vida e Não Vida.
2. IMPAR-Companhia de Seguros de Moçambique, SARL: 23 de Setembro de 1992, Ramo Vida e Não Vida.

2.1. ENQUADRAMENTO HISTÓRICO DO SEGURO EM MOÇAMBIQUE⁹

3. SIM-Seguradora Internacional de Moçambique S.A: 27 de Novembro de 2001.
4. Hollard: 29 Setembro 2001, Ramo Não Vida; 22 de Outubro 2008-Ramo Vida.
5. Moçambique Companhia de Seguros: 20 de Outubro de 2001, Ramo Não Vida.
6. Austral Seguros: 19 de Agosto 2008, Ramo Não Vida.
7. Real Seguro: 9 de Junho de 2010, Ramo Vida.

De 2010 até então, embora ainda relativamente modesto quando comparado com o de outros países, o mercado de seguro em Moçambique cresce actualmente a um bom ritmo, e estima-se em mais de 15 companhias de seguros, a operar em diversas áreas.

2.1.2 Seguro Obrigatório de Responsabilidade Civil Automóvel

O Seguro Obrigatório de Responsabilidade Civil Automóvel (SORCA) foi introduzido na República de Moçambique pela Lei nº 2/2003, de 21 de Janeiro, cujo regulamento foi aprovado pelo Decreto nº 47/2005 do Conselho de Ministros, publicado no Boletim da República I série nº 46 - 2º suplemento, de 22 de Novembro de 2005. A institucionalização do seguro obrigatório coloca o país ao lado de outras nações que se preocupam com as consequências sempre nefastas dos acidentes de viação e, sob ponto de vista social, a iniciativa foi bastante meritória, o que, *a priori*, justificaria a sua adesão massiva. Infelizmente, em Moçambique, continua a assistir-se a uma resistência por parte dos proprietários de veículos automóveis em responder à obrigatoriedade do seguro lançado desde Janeiro de 2003. Por um lado, e segundo o inspector do Instituto Nacional de Viação, Henrique Makanica, desde a sua aprovação, a lei ficou refém da entrada em funcionamento dos centros de inspecção periódica obrigatória, tornando a sua obrigatoriedade efectiva, a partir do primeiro semestre de 2008. Por outro lado, o seguro era somente obrigatório para as viaturas de transporte de passageiros. Verificando-se ainda hoje, no entanto, que em muitos casos de acidentes de viação as pessoas não possuem apólice de seguro e torna-se difícil obrigar o autor a ressarcir o ofendido pelos danos causados.

Do estudo realizado pelo Dr. Mucusse, que teve como questão fundamental:

“Quais as razões que estão por detrás da fraca adesão ao SORCA, falta de recursos, fraca fiscalização das autoridades competentes ou outras?”

Pode perceber-se que do ponto de vista de recursos, e com base em informações recolhidas em diversas sensibilidades, do público utente de veículos automóveis e de profissionais na área de seguros, todos foram unânimes ao não concordarem que alguém que compre ou tenha na sua posse uma viatura, não tenha capacidades financeiras para efectuar um seguro, nos termos e condições previstos à luz da Lei nº 2/2003, de 21 de Janeiro, tendo em conta que a viatura só por si é um bem muito valioso em relação ao preço de um

seguro. Portanto, *a priori* não se pode colocar a questão de custos com prémio como factor limitante na contratação do seguro, pois, desde que as partes forneçam mutuamente as informações até ao mínimo detalhe e fazendo uso de todas as prerrogativas ao seu alcance, este pode ser um elemento pacífico e viável.

No que diz respeito à fiscalização das autoridades competentes, há que realçar que não tem sido comum, nas actividades de rotina, os agentes da Polícia de trânsito e as brigadas do Instituto Nacional de Viação (INAV) exigirem certificados de seguro aos automobilistas, limitando-se a conferir licenças de condução, livretes e efectuando testes de alcoolemia. Usualmente, o certificado de seguro obrigatório é exigido aos automobilistas intervenientes em acidentes de viação, constatando-se, muitas vezes, a falta deste documento por não celebração do seguro. É somente nestes casos em que são aplicadas multas por ausência do seguro. Na opinião de Mucusse (2012), esta actuação não contribui para a resolução da questão da reposição dos danos aos terceiros lesados.

Mucusse (2012) entende ainda que a polícia de trânsito seja uma corporação ou unidade policial especializada no controlo do trânsito e no policiamento das estradas. Entre as funções especializadas incluem-se a investigação de acidentes, a fiscalização das condições de circulação dos veículos automóveis, a resposta a emergências, a aplicação da lei nas estradas, o reporte de anomalias técnicas nas estradas e o ordenamento do tráfego rodoviário. Apesar deste leque de competências, as autoridades policiais, em muito poucas ocasiões fiscalizam a adesão ao SORCA, cujos comprovativos são o certificado de seguro, certificado provisório e o aviso ou recibo, quando acompanhado de talão do respectivo pagamento.

Outros factores possíveis que se consubstanciam na fraca adesão ao seguro, são associados aos aspectos de índole cultural, na medida em que se pode aliar, sim, a falta de cultura de seguro, pois é uma matéria pouco divulgada pelas entidades competentes (autoridades de tutela em matéria de trânsito rodoviário, seguradoras e intermediários de seguros), a utilidade do seguro no geral e, em particular, do SORCA.

A observação continua, ao apontar a questão de regularização tardia de sinistros, o que pode levar a que um tomador de seguro ou segurado não veja a utilidade de um seguro, pois a maior parte das vezes são obrigados a pagarem pelos seus próprios meios, mesmo tendo celebrado um contrato de seguro, sem o necessário direito de reembolso, aliado ao facto de, em alguns casos, à falta de clareza nas circunstâncias em que podem accionar as coberturas do SORCA, o que a apólice pode cobrir e pode excluir, levando estes contratantes a anularem os seguros.

Para o INAV, a adesão ao SORCA passa necessariamente, por um lado, pela formulação e compreensão de políticas públicas que focalizem a segurança de trânsito, considerando o enfoque tradicional como o psicológico, visando a combinação tripartida de factores homem, estrada e veículo automóvel, tendo em acidente de viação equivalente a fatalidade, destino e falha humana e, por outro lado, o enfoque proposto que se consubstancia em factores sociológicos, na perspectiva de cidade como ambiente construído e o

acidente como ambiente social. Compreendidos todos estes factores e combinados com a consciência de que quem causa danos a outrem tem por obrigação prover a sua reparação, uma responsabilidade obrigacional passível de transferência para seguradoras como entidades autorizadas e vocacionadas na gestão de risco, crescerá igualmente a tendência de adesão em massa ao SORCA.

Actualmente, e segundo o estudo levado a cabo pelo Dr. Mucusse, os factores inicialmente apontados, como sendo principais causas de fraca adesão ao SORCA não actuam de forma isolada, ou seja, a falta de recursos, fraca fiscalização das autoridades competentes, elevados custos com prémios, actuam combinadamente com todos outros factores atrás mencionados. Portanto, o fenómeno de fraca adesão ao SORCA é um fenómeno sócio-cultural que se caracteriza pelo elevado índice de falta de conhecimento sobre os aspectos básicos da cultura de seguro que está estritamente ligada à matéria de direito obrigacional em que a componente privada é chamada a exercer seus direitos e obrigações, em resposta à responsabilidade civil que pode emergir em razão de utilização de um veículo automóvel e tenha causado danos a terceiro, em consequência de acidente de viação.

Feito o enquadramento histórico de seguro em Moçambique, a seguir são apresentados, seguindo Centeno (2003) e Norberg (1976), alguns conceitos básicos, do ponto de vista actuarial, da modelação de um sistema de *bonus malus*.

2.2 Definição de um Sistema de *Bonus Malus*

Um sistema de tarifação *a posteriori* é designado por Sistema de *Bonus Malus*, ou simplesmente sistema de *bonus*, se as seguintes condições são válidas:

- Os períodos de vigência das apólices são de idêntica duração, geralmente de um ano.
- As apólices são distribuídas num número finito de s classes, C_1, C_2, \dots, C_s . Cada apólice permanece na mesma classe ao longo de um período de tempo.
- A classe do sistema em que um segurado é colocado, num determinado período, depende unicamente da classe a que pertenceu no período anterior e do número de sinistros declarados durante esse mesmo período.

Um sistema de *bonus malus* é determinado por três elementos, a saber:

- A escala de prémios, $\mathbf{b} = (b(1), b(2), \dots, b(s))'$. O valor $b(i)$, embora se designe por prémio da classe C_i do sistema, é apenas um factor multiplicativo do prémio *a priori*, reduzindo ou aumentando o prémio inicialmente determinado.
- As regras de transição entre as diferentes classes do sistema. Para cada par ordenado (i, j) , seja T_{ij} o conjunto dos inteiros r tais que uma apólice pertencente à classe C_i transite para a classe C_j no fim do período quando originar r sinistros no mesmo

período. Deste modo as regras de transição podem ser representadas por uma matriz $\mathbf{T} = [T_{ij}]$ com dimensão $s \times s$. Para que o conjunto de regras de transição seja completo e livre de contradições a matriz \mathbf{T} das regras de transição deve ser tal que

$$U_{j=1}^s T_{ij} = \{0, 1, 2, \dots\} \quad \text{e} \quad T_{ij} \cap T_{ij'} = \emptyset \quad \text{sempre que} \quad j \neq j' \quad (2.1)$$

- A classe C_{i_0} de entrada no sistema, a qual se supõe ser a mesma para todos os segurados novos (embora, na prática, esta hipótese seja muitas vezes violada). Em muitos dos sistemas, a classe de entrada depende do valor assumido por algum ou alguns dos factores da tarifa *a priori*. Note-se que a não verificação da hipótese não levanta problemas do ponto de vista matemático, mas induz a estimativas diferentes no que se refere à distribuição anual dos segurados pelas classes.

O sistema de *bonus* pode ser representado pelo trio $(C_{i_0}, \mathbf{T}, \mathbf{b})$. Este trio, que define o sistema, será designado por Δ . O sistema de *bonus* Δ , fornece, assim, uma base de tarifação que consiste na classe de *bonus* de uma apólice no período n , $Z_{\Delta, n}$, que é determinada pelas regras \mathbf{T} e pela classe inicial C_{i_0} . Esta definição de sistema de *bonus malus* pressupõe que o sistema possa ser modelado através de uma cadeia de Markov ¹. Assim, o conhecimento da classe actual e do número de indemnizações do ano são suficientes para determinar a classe para o próximo ano, não interessando a história do processo, ou seja, a forma como a classe actual foi alcançada.

2.3 Sistema de *Bonus Malus* da SIM-Ímpar

Antes de caracterizar o actual sistema de *bonus malus* do seguro de responsabilidade civil automóvel da SIM-Ímpar, importa referir que, em Moçambique, o Seguro Obrigatório de Responsabilidade Civil Automóvel (**SORCA**) é hoje regulado pela Lei nº 2/2003, de 21 de Janeiro, cujo regulamento foi aprovado pelo Decreto Lei nº 47/2005, de 22 de Novembro. Entretanto, não inclui uma cláusula que uniformiza a apólice automóvel de responsabilidade civil, deixando a cargo das seguradoras que opera no mercado Moçambicano definir o seu sistema de bonificação e agravamento. Para o caso da Seguradora Internacional de Moçambique, segundo informação obtida junto de um dos funcionários séniores da Companhia, o primeiro sistema de *bonus malus* utilizado foi importado da Seguradora Império de Portugal, em 1992, altura em que a SIM-Ímpar inicia as suas actividades em Moçambique. Este sistema é regido pelas Condições Gerais do Seguro Automóvel, no seu artigo 15º que passamos a citar:

¹Para uma leitura mais aprofundada pode consultar por exemplo, Loimaranta (1972) ou Wolthuis (1994).

Artigo 15^o - Agravamentos e Bonificações por Sinistralidade

1. Os agravamentos por sinistralidade e as bonificações por ausência de sinistros (Bónus/Malus) regem-se pela Tabela 2.1 abaixo, a qual faz parte integrante desta apólice.
2. Para efeito da aplicação deste regime, só serão considerados os sinistros que tenham dado lugar ao pagamento de indemnizações ou à constituição de uma provisão, desde que, neste último caso, a Seguradora tenha assumido a responsabilidade perante terceiros.
3. Em caso de constituição de provisão, a Seguradora poderá suspender a atribuição de bónus durante um período de dois anos, devendo, findo esse prazo, o mesmo ser devolvido e reposta a situação tarifária sem prejuízo para o Tomador de Seguro, caso a Seguradora não tenha, entretanto, assumido a responsabilidade perante terceiros.
4. Em caso de substituição do veículo seguro, manter-se-á a bonificação ou agravamento existente à data, desde que não haja alteração do condutor habitual. Em caso de alteração do condutor habitual, o novo condutor será enquadrado no sistema de bonificações e agravamentos como se de um contrato novo se tratasse.

Este artigo é acompanhado pela seguinte tabela de *bonus malus* que apresenta os prémios a cobrar mas não define as regras de transição em vigor.

Tabela 2.1: Tabela de *Bonus Malus*.

Classes	Anos sem Sinistros	Sinistro	Bónus (%)	Agravamento
Escala de Bonus				
1	11	—	50%	—
2	10	—	45%	—
3	9	—	45%	—
4	8	—	45%	—
5	7	—	40%	—
6	6	—	40%	—
7	5	—	40%	—
8	4	—	30%	—
9	3	—	30%	—
10	2	—	20%	—
11	1	—	10%	—
12	Entrada			—
Escala de Malus				
13	—	1	—	30%
14	—	2	—	50%
15	—	3	—	80%
16	—	4	—	100%

Mais tarde, verificou-se que o sistema utilizado não era comercialmente viável, ou seja, para além de apresentar bonificações baixas, a partir do 3^o ano sem sinistros os segurados permaneciam 2 ou 3 anos com a mesma bonificação. Para além dos segurados não sentirem o benefício da ausência de sinistralidade, o aumento da concorrência no mercado de seguro, induziu a que muitos segurados abandonassem a seguradora logo nos primeiros anos. Para fazer face a tais abandonos, a seguradora sentiu necessidade de rever a referida tabela de *bonus malus*, tendo-se retirado as três primeiras classes e reformulado o vector de prémios. Foi igualmente acrescentada a definição das regras de transição dos segurados em caso de ausência ou não de sinistros. A Tabela 2.1 foi assim substituída por um conjunto de regras que contém 13 classes, numeradas de 4 a 16, tendo-se mantido a classe 12 como classe de entrada. As regras de transição dos segurados, após a reformulação, podem ser consultadas na Tabela 2.2.

Entretanto, mesmo depois da seguradora ter efectuado esta revisão, pode observar-se que as regras de transição previstas não estão completas, havendo cenários possíveis de sinistralidade cujas transições não estão previstas. Nomeadamente, estão omissas as regras a aplicar aos segurados das classes de agravamento (*malus*) que, numa anuidade, não participem sinistros. Este facto contraria uma das definições de SBM, violando a condição referida em 2.1.

Tabela 2.2: Tabela de *Bonus Malus* Modificada.

Classe Bónus/Malus													
Entrada				Anuidade seguinte									
Classe	Prémio	Bónus	Malus	0 sin	1 sin	2 sin	3 sin	≥ 4 sin					
≤ 4	50	50	–	4	–50	8	–35	13	30	14	50	15	80
5	50	50	–	4	–50	8	–35	13	30	14	50	15	80
6	55	45	–	5	–50	9	–30	13	30	14	50	15	80
7	60	40	–	6	–45	10	–25	13	30	14	50	15	80
8	65	35	–	7	–40	11	–20	14	50	15	80	16	100
9	70	30	–	8	–35	12	0	14	50	15	80	16	100
10	75	25	–	9	–30	12	0	14	50	15	80	16	100
11	80	20	–	10	–25	13	30	14	50	15	80	16	100
12	100	0	–	11	–20	13	30	14	50	15	80	16	100
13	130	–	30			14	50	15	80	16	100	16	100
14	150	–	50			15	80	16	100	16	100	16	100
15	180	–	80			16	100	16	100	16	100	16	100
16	200	–	100			16	100	16	100	16	100	16	100

Para que a realização deste trabalho fosse possível, tornou-se necessário começar por completar as regras de transição existente, optou-se também por efectuar alguns ajustes relativamente à distribuição das bonificações e agravamentos. De seguida passamos a apresentar, baseado na frequência de sinistralidade, o sistema actual ajustado.

2.3.1 Características do Actual Sistema de *Bonus Malus*

- O sistema é composto por 13 classes, sendo 8 de desconto (*bonus*), 4 de agravamento (*malus*) e uma classe de entrada, sem qualquer desconto nem agravamento: a classe 12;
- As classes estão numeradas de 4 a 16, e em ordem crescente de propensão à sinistralidade;
- Por cada sinistro declarado numa anuidade, com responsabilidade do segurado, para apólices que se encontram nas classes de *malus*, subida de uma classe;
- Por cada sinistro declarado numa anuidade, com responsabilidade do segurado, para apólices que encontram na zona de *bonus*, subida de quatro classes nos primeiros dois sinistros e de uma nos restantes sinistros, caso a apólice esteja nas primeiras três classes de maior bonificação (classes 4, 5 e 6). Subida de três classes nos primeiros dois sinistros participados e de uma nos restantes sinistros caso a apólice se encontre nas outras três classes intermédias (classes 7, 8 e 9). Subida de duas classes nos primeiros dois sinistros e de uma classes nos restantes, caso a apólice se encontre nas duas classes menos bonificadas (classes 10 e 11);
- Por cada anuidade sem sinistro, para todas as apólices independentemente da classe onde se encontre, descida de uma classe;
- Os montantes de descontos e agravamentos a atribuir não se alteraram, mantendo-se o que está em vigor na Tabela 2.2.

2.3.2 Classes do Actual Sistema de *Bonus Malus*

O actual sistema de *bonus malus* com as alterações propostas apresenta as seguintes classes:

Tabela 2.3: Tabela de *Bonus Malus* - Sistema em vigor.

Classes	Prémios(%)	Bonus(%)	Malus(%)
4	50	50	
5	50	50	
6	55	45	
7	60	40	
8	65	35	
9	70	30	
10	75	25	
11	80	20	
12	100	0	
13	130		30
14	150		50
15	180		80
16	200		100

2.3.3 Vector dos Prémios

Com base na informação anterior o vector dos prémios, mais, precisamente vector dos factores multiplicadores do prémio *a priori*, é definido como se segue.

$$b' = \left[50 \ 50 \ 55 \ 60 \ 65 \ 70 \ 75 \ 80 \ 100 \ 130 \ 150 \ 180 \ 200 \right]$$

2.3.4 Matriz das Regras de Transição

A matriz das regras de transição, com as alterações propostas em 2.3.1 será dada por

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \{0\} & - & - & - & \{1\} & - & - & - & \{2\} & \{3\} & \{4\} & \{5\} & \{6, 7, \dots\} \\ \{0\} & - & - & - & - & \{1\} & - & - & - & \{2\} & \{3\} & \{4\} & \{5, 6, \dots\} \\ - & \{0\} & - & - & - & - & \{1\} & - & - & - & \{2\} & \{3\} & \{4, 5, \dots\} \\ - & - & \{0\} & - & - & - & \{1\} & - & - & \{2\} & \{3\} & \{4\} & \{5, 6, \dots\} \\ - & - & - & \{0\} & - & - & - & \{1\} & - & - & \{2\} & \{3\} & \{4, 5, \dots\} \\ - & - & - & - & \{0\} & - & - & - & \{1\} & - & - & \{2\} & \{3, 4, \dots\} \\ - & - & - & - & - & \{0\} & - & - & \{1\} & - & \{2\} & \{3\} & \{4, 5, \dots\} \\ - & - & - & - & - & - & \{0\} & - & - & \{1\} & - & \{2\} & \{3, 4, \dots\} \\ - & - & - & - & - & - & - & \{0\} & - & - & \{1\} & \{2\} & \{3, 4, \dots\} \\ - & - & - & - & - & - & - & - & \{0\} & - & \{1\} & \{2\} & \{3, 4, \dots\} \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - & \{0\} & - & \{1\} & \{2, 3, \dots\} \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & \{0\} & - & \{1, 2, \dots\} \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & \{0\} & \{1, 2, \dots\} \end{bmatrix}$$

A partir da matriz das regras de transição verifica-se facilmente que se trata de uma cadeia de Markov irredutível pois há comunicação entre todas as classes.

A Tabela 2.4 ilustra as regras do sistema de *bonus malus*, com as alterações propostas em 2.3.1 e com as partes omissas completadas.

Tabela 2.4: Tabela de *Bonus Malus* Ajustada.

Classe Bónus/Malus													
Entrada				Anuidade seguinte									
Classe	Prémio	Bonus	Malus	0 sin	1 sin	2 sin	3 sin	≥4 sin					
4	50	50	–	4	–50	8	–35	12	0	13	30	14	50
5	50	50	–	4	–50	9	–30	13	30	14	50	15	80
6	55	45	–	5	–50	10	–25	14	50	15	80	16	100
7	60	40	–	6	–45	10	–25	13	30	14	50	15	80
8	65	35	–	7	–40	11	–20	14	50	15	80	16	100
9	70	30	–	8	–35	12	0	14	50	15	80	16	100
10	75	25	–	9	–30	12	0	14	50	15	80	16	100
11	80	20	–	10	–25	13	30	15	80	16	100	16	100
12	100	0	–	11	–20	13	30	14	50	15	80	16	100
13	130	–	30	12	0	14	50	15	80	16	100	16	100
14	150	–	50	13	30	15	80	16	100	16	100	16	100
15	180	–	80	14	50	16	100	16	100	16	100	16	100
16	200	–	100	15	80	16	100	16	100	16	100	16	100

*As partes a cores destacam as alterações efectuadas na Tabela 2.2

Apesar das alterações propostas, a seguradora continua a achar que o sistema de *bonus malus* ajustado, para o actual mercado não é comercialmente viável, pelo que sugere que se implemente um sistema alternativo que seja comercialmente viável, ou seja, um sistema com as bonificações e agravamentos “leves” (*bonus* altos e *malus* baixos), de modo que o desequilíbrio financeiro não seja muito grave.

Para além da inviabilidade comercial, considera-se que o sistema de *bonus malus* utilizado pela seguradora penaliza fortemente os bons segurados principalmente nos primeiros dois anos em que, em caso de sinistros, os bons segurados sobem por exemplo 4 classes, e é menos “duro” para os maus segurados pois só sobem uma classe por cada sinistro participado. Adicionalmente este sistema apresenta regras pouco consistentes com ideias da seguradora, vejamos por exemplo o que acontece na zona de *bonus*, onde os bons segurados sobem quatro classes ao primeiro e segundo sinistros participados numa anuidade, e a partir daí, quando se tornam mais “perigosos”, isto é, quando numa anuidade declaram 3 ou mais sinistros, após o segundo sinistro o segurado sobe apenas uma classe. A seguradora considera que deveria ser o contrário (o segurado deveria subir menos classes no primeiro sinistro participado e, daí, agravava-se mais nos restantes sinistros). Daí, considerar-se

que o actual sistema de *bonus malus* da SIM-Ímpar não é justo tanto para a seguradora como para os segurados, e pensar-se que seja também por este facto que os segurados transferem muito cedo as suas apólices para outras seguradoras, criando desta forma um desequilíbrio financeiro para a seguradora. Portanto, a seguradora considera que necessita de um sistema que, para além de responder às novas exigências do mercado, como os aspectos comerciais e à concorrência do mercado de seguros, seja capaz de proporcionar um equilíbrio financeiro para seguradora e que também seja justo para os segurados.

2.4 O Sistema de *Bonus Malus* Proposto

Nesta secção apresentar-se-á o sistema alternativo para a SIM-Ímpar, o mesmo foi escolhido depois de uma revisão dos trabalhos realizados por Lemaire and Zi (1994), onde fazem a simulação e comparação dos SBM de 22 países utilizando várias medidas de avaliação dos SBM. O trabalho de Baione et al. (2002), que constrói uma estrutura tarifária adequada para que o SBM concebido seja um sistema adequado, transparente e que também seja financeiramente equilibrado. Fez-se também uma revisão de alguns trabalhos realizados, na Malásia, por Binti Manan et al. (2013), e em dois países africanos, por Dionne and Ghali (2005), que faz uma avaliação empírica do impacto da introdução de um SBM na segurança rodoviária na Tunísia e, por fim, o trabalho realizado na Nigéria por Ibiwoye et al. (2011), que avalia o SBM em uso nas companhias de seguro automóvel.

Após as revisões mencionadas no parágrafo anterior, e de várias tentativas feitas usando sistemas com regras $-1/+4$ (subida de quatro classes em caso de sinistro e descida de uma classe em caso de ausência de sinistros), $-1/+3$ (subida de três classes em caso de sinistro e descida de uma classe em caso de ausência de sinistros), $-1/+2$ (subida de duas classes em caso de sinistro e descida de uma classe em caso de ausência de sinistros). O sistema com as regras $-1/+2$, e com as características a seguir descritas, considerou-se que responde aos objectivos da seguradora, e tem em conta os factores comerciais e a concorrência. Contudo, também achamos que poderíamos ter avaliado a possibilidade de propor um sistema de *bonus malus* com regras de transição mais eficientes do que as regras de transição do sistema aqui proposto. No entanto, o estudo da eficiência das regras de transição de um sistema de *bonus malus* não faz parte dos objectivos do presente trabalho. Pode citar-se, como exemplo de um estudo de regras de transição óptimas o trabalho de Tan et al. (2014).

Com o objectivo de melhorar e rever o actual sistema de *bonus malus* da SIM-Ímpar, implementa-se então um novo sistema de *bonus malus* na carteira automóvel de responsabilidade civil. A sua construção foi baseada no actual sistema, manteve-se o mesmo número de classes de agravamento e os respectivos montantes de agravamento, reformulando-se as classes de *bonus* (foram retiradas duas classes de bonificação e os respectivo montantes de bonificação). Desta forma a classe de entrada, de acordo com a nova numeração, passa a

ser a classe 7. Poderíamos ter escolhido como classe de entrada a classe que minimiza o erro quadrático médio (EQM) do primeiro período conforme sugerido em Norberg (1976). Contudo, por forma a garantir que o sistema proposto não cause grandes alterações, a análise não chegou a ser efectuada. No que se segue, apresenta-se as características do sistema de *bonus malus* proposto, tendo em conta os objectivos definidos pela seguradora.

2.4.1 Características do Sistema de *Bonus Malus* Proposto

- O sistema é composto por 11 classes, sendo 6 de desconto (*bonus*), 4 de agravamento (*malus*) e uma classe de entrada, sem qualquer desconto nem agravamento: a classe 7.
- As classes são numeradas de 1 a 11 e em ordem crescente de propensão à sinistralidade.
- Por cada sinistro declarado numa anuidade, com responsabilidade do segurado subida de duas classes.
- Por cada anuidade sem sinistro descida de uma classe.
- As apólices sem sinistros numa anuidade ganham um desconto (*bonus*) de 15% no primeiro ano, 10% nos dois anos seguintes e 5% nos restantes anos.
- As apólices com 1, 2, 3 e 4 sinistros declarados numa anuidade sofrem, na anuidade seguinte, um agravamento (*malus*) de 30%, 50%, 80% e 100%, respectivamente.
- As apólices com mais de 4 sinistros declarados numa anuidade, carecem de uma análise para se definir o agravamento.

2.4.2 Classes do Sistema de *Bonus Malus* Proposto

O sistema de *bonus malus* proposto contém as seguintes classes:

Tabela 2.5: Tabela de *Bonus Malus* - Sistema Proposto.

Classes	Prêmios(%)	Bonus(%)	Malus(%)
1	50	50	
2	55	45	
3	60	40	
4	65	35	
5	75	25	
6	85	15	
7	100	0	
8	130		30
9	150		50
10	180		80
11	200		100

2.4.3 Vector dos Prêmios

Definidas as regras de transição do SBM proposto, teremos então o seguinte vector dos prêmios.

$$b' = [50 \ 55 \ 60 \ 65 \ 75 \ 85 \ 100 \ 130 \ 150 \ 180 \ 200]$$

É importante realçar que este vector não apresenta os prêmios propriamente ditos, mas sim as percentagens a aplicar ao prémio *a priori*, conforme já referido anteriormente.

Definidas as regras de transição, número de classes, classes do sistema e o vector dos prêmios, o SBM fica assim caracterizado.

2.4.4 Matriz das Regras de Transição

De acordo com as regras de transição definidas, a matriz das regras de transição será dada por

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \{0\} & - & \{1\} & - & \{2\} & - & \{3\} & - & \{4\} & - & \{5, 6, \dots\} \\ \{0\} & - & - & \{1\} & - & \{2\} & - & \{3\} & - & \{4\} & \{5, 6, \dots\} \\ - & \{0\} & - & - & \{1\} & - & \{2\} & - & \{3\} & - & \{4, 5, \dots\} \\ - & - & \{0\} & - & - & \{1\} & - & \{2\} & - & \{3\} & \{4, 5, \dots\} \\ - & - & - & \{0\} & - & - & \{1\} & - & \{2\} & - & \{3, 4, \dots\} \\ - & - & - & - & \{0\} & - & - & \{1\} & - & \{2\} & \{3, 4, \dots\} \\ - & - & - & - & - & \{0\} & - & - & \{1\} & - & \{2, 3, \dots\} \\ - & - & - & - & - & - & \{0\} & - & - & \{1\} & \{2, 3, \dots\} \\ - & - & - & - & - & - & - & \{0\} & - & - & \{1, 2, \dots\} \\ - & - & - & - & - & - & - & - & \{0\} & - & \{1, 2, \dots\} \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - & \{0\} & \{1, 2, \dots\} \end{bmatrix}$$

Analisando a matriz das regras de transição verifica-se facilmente que o sistema pode ser modelado como uma cadeia de Markov, sendo irredutível, aperiódica e todos os estados recorrentes.

Capítulo 3

Número de Sinistros

Uma das maiores dificuldades que as seguradoras Moçambicanas apresentam é o acesso/disponibilidade de informação. Para o caso do seguro automóvel, estima-se que apenas 25% das viaturas possuem seguro obrigatório de responsabilidade civil. Estes dados podem de alguma forma influenciar nos resultados que iremos obter ao longo deste trabalho. A carteira que iremos analisar pertence à Seguradora Internacional de Moçambique (SIM-Ímpar), e correspondem aos dados dos sinistros ocorridos em 2012 e participados até ao final de Dezembro de 2013.

O processamento dos resultados será feito utilizando o software *Mathematica da Wolfram*.

Neste capítulo far-se-á o ajustamento de uma distribuição ao número de sinistro declarados por cada segurado numa anuidade. São abordados, seguindo Centeno (2003) e Guerreiro (2001), os modelos de Poisson quer para uma carteira homogénea ou heterogénea.

3.1 Processo de Poisson Homogéneo

Uma carteira homogénea é composta por apólices que, à partida, têm o mesmo nível de risco *a priori*, ou seja, a frequência de sinistralidade não é influenciada pelo comportamento dos segurados.

Definição 3.1.1. Um processo estocástico $\{N(t); t \geq 0\}$ é um processo de Poisson homogéneo de intensidade $\lambda > 0$, com $N(t)$ a representar o número de sinistros relacionados a uma determinada apólice, ocorridos no intervalo de tempo $]0, t]$, se as seguintes condições são satisfestas:

- $N(0) = 0$;
- $N(t)$ tem incrementos independentes, ou seja, se $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$, ($n \geq 1$), então $N(t_n) - N(t_{n-1}), N(t_{n-1}) - N(t_{n-2}), \dots, N(t_1) - N(t_0)$ são incrementos independentes;

- Para quaisquer $r \geq 0$ e $t > 0$ a variável aleatória $N(t+r) - N(r)$ tem distribuição de Poisson (incrementos estacionários), isto é,

$$Pr[N(t+r) - N(r) = k] = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}; \quad k \in \mathbb{N}_0 \quad (3.1)$$

- Para qualquer $h \rightarrow 0^+$; $Pr\{N(h) = 1\} = \lambda h + o(h)$ e $Pr\{N(h) \geq 2\} = o(h)^1$.

Num processo de Poisson homogéneo, tem-se que $E[N(t)] = \lambda t$ e $V[N(t)] = \lambda t$. Portanto, o valor esperado do número de eventos no intervalo unitário $(0, 1)$, ou qualquer outro de tamanho unitário, é igual a λ .

O processo de Poisson é dito ter incrementos estacionários se, para $0 \leq t_1 \leq t_2$, $N(t_2) - N(t_1)$ e $N(t_2 - t_1)$ têm a mesma distribuição, o que se verifica num processo de Poisson homogéneo.

Para uma discussão mais detalhada sobre o processo de Poisson homogéneo utilizada em modelos matemáticos de seguros, pode ver-se por exemplo, Lemaire (1995), Geiss (2010) ou Rolski et al. (2009).

3.1.1 Caracterização dos Dados

A Tabela 3.1 abaixo apresenta os dados dos sinistros ocorridos em 2012 e participados até o final de Dezembro de 2013. Estes dados dizem respeito às apólices anuais da carteira de responsabilidade civil do ramo automóvel da SIM-Ímpar.

Tabela 3.1: Distribuição observada do número de sinistros.

Nº Sinistros	Nº Apólices
0	5786
1	295
2	13
3	2
<i>Total</i>	6096

Com base na informação contida na Tabela 3.1 acima, e designando por N a variável aleatória que representa o número de sinistros num ano, obtém-se a média de 0,053642 e variância de 0,057007. Para a aplicação dos vários métodos aqui considerados apenas foi considerado o número de sinistros participados pelos diversos segurados, e não o montante das indemnizações associados aos mesmos.

Esta opção prende-se, essencialmente, com o facto de se assumir a independência entre o número de sinistros participados e o montante de perdas agregado. Apesar de se poder discutir este pressuposto, o facto de quase todos os sistemas em vigor apenas penalizarem

¹Uma função f é dita ser $o(h)$, ou um infinitésimo com h se $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = 0$.

o número de sinistros, independentemente da sua severidade, é uma indicação de que as seguradoras e os órgãos de supervisão dos vários países assumem este pressuposto como uma boa aproximação a realidade.

3.1.2 Ajustamento do Número de Sinistros

Ao ajustar a distribuição que consta na Tabela 3.1 às características do processo de Poisson, verifica-se que tanto o método dos momentos como o da máxima verosimilhança conduz à selecção da média observada como melhor estimador para λ , pelo que devemos fixar $\hat{\lambda} = 0,053642$. Calculando as probabilidades $p_k = Pr[N(t) = k]$ de uma variável aleatória com distribuição de Poisson de parâmetro $\lambda = 0,053642$, e aplicando-as à amostra, teremos as frequências teóricas ajustadas apresentadas na Tabela 3.2.

Tabela 3.2: Ajustamento do número de sinistros observados-Distribuição Poisson

Nº Sinistros	Nº Apólices	p_k	np_k
0	5786	0,947771602	5777,61564
1	295	0,05084111	309,9213137
2	13	0,001363576	8,460987832
3	2	0,0000243815	0,148629762
Total	6096	1,00	6096

Uma vez que o teste Qui-quadrado, utilizado para medir a qualidade do ajustamento é assintótico, torna-se necessário agrupar algumas das classes de menor frequência, para que os np_k tenham um valor mínimo adequado. Nesse caso, todos os np_k devem ser iguais ou superiores a 5, o que conduz aos agrupamentos apresentados na Tabela 3.3.

Tabela 3.3: Ajustamento do número de sinistros observados-Teste Qui-quadrado

Nº Sinistros	Nº Apólices	p_k	np_k	Teste Quiq
0	5786	0,947771602	5777,61564	0,012167088
1	295	0,05084111	309,9213137	0,718393972
≥ 2	15	0,001387957	8,460987832	5,053627422
Total	6096	1,00	6096	5,784188483

Dado que $\chi_{obs}^2 = 5,784 > \chi_1^2 = 3,841$ rejeita-se, ao nível de significância de 5%, a hipótese dos dados se ajustarem a uma distribuição de Poisson, pelo que não se deve aplicar o modelo de Poisson homogéneo para a carteira do ramo automóvel da SIM-Ímpar.

Precisamos, assim, de uma distribuição em que a variância exceda a média, o que resulta do facto de termos uma carteira não homogénea. Este resultado prova desde já que se justifica a introdução de um sistema de *bonus malus* na carteira automóvel de

responsabilidade civil da SIM-Ímpar.

3.2 Processo de Poisson Heterogéneo

Na secção 3.1 foi visto que as apólices que formam uma carteira homogénea, têm o mesmo nível de risco. Quando o comportamento dos segurados, em termos de frequência de sinistralidade, é heterogéneo, necessitamos de um modelo que reflecta a diferença de riscos subjacentes a cada um deles. Assim, em vez de se supôr que o número de sinistros segue um processo de Poisson de intensidade λ , supõe-se que λ é resultado da observação de uma variável aleatória Λ , não negativa, sendo a sua função de distribuição $U(\lambda) = Pr(\Lambda < \lambda)$.

A variável aleatória Λ é designada por variável de estrutura e $U(\lambda)$ por distribuição de estrutura.

Diz-se que o processo de contagem $\{N(t) : t \geq 0\}$ é um processo de Poisson Misto, quando satisfaz as seguintes condições:

i. $N(0) = 0$;

ii.

$$\begin{aligned} Pr[N(t+r) - N(r) = k] &= \int_0^\infty Pr\{N(t+r) - N(r) = k | \lambda\} dU(\lambda) & (3.2) \\ &= \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^k}{k!} dU(\lambda). \end{aligned}$$

De (ii) torna-se claro que um processo de Poisson misto tem incrementos estacionários e portanto

$$p_k(t) = Pr(N(t) = k) = \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^k}{k!} dU(\lambda) = \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^k}{k!} u(\lambda) d\lambda$$

ou seja, $N(t)$ tem distribuição de Poisson Mista. Contudo, contrariamente ao processo de Poisson homogéneo, os incrementos do processo de Poisson heterogéneo não são independentes.

O processo de Poisson Misto é caracterizado por apresentar variância superior a média, uma vez que $V[N(t)] = E[N(t)] + t^2 V[\Lambda]$, com $E[N(t)] = tE[\Lambda]$.

3.3 Distribuição de Estrutura

O facto de recorrermos a um processo de Poisson Misto mostra-nos que o comportamento dos segurados, em termos de frequência de sinistralidade, é heterogéneo. A distribuição de estrutura utilizada reflecte a diferença de riscos subjacentes a cada um dos segurados que compõem a carteira. Diversos estudos revelam que existem várias distribuições que podem ser utilizadas como distribuições de estrutura para modelar o número de sinistros. O modelo mais usual é o que considera que Λ tem distribuição *Gama*(α, β).

Contudo, Sichel (1971) considera o modelo Poisson-Inversa Gaussiana, um modelo no qual a distribuição de estrutura Λ segue uma distribuição Inversa Gaussiana, $IG(g, h)$, como alternativa ao modelo Poisson-Gama.

Outras alternativas podem ser consideradas para modelar o comportamento dos segurados em termos de frequência de sinistralidade, veja por exemplo, Grandell (1997) ou Pereira (1998). No entanto, neste trabalho, testou-se as hipóteses de a intensidade dos sinistros da carteira automóvel de responsabilidade civil da SIM-Ímpar ser provenientes de uma distribuição $Gama(\alpha, \beta)$ ou de uma distribuição $IG(g, h)$.

3.3.1 Modelo Poisson-Gama

Um caso particular do processo de Poisson misto é o modelo Poisson-Gama, também conhecido por processo de Polya, que se obtém quando a distribuição de estrutura Λ segue uma distribuição Gama, dada por

$$u(\lambda) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \beta^\alpha e^{-\beta\lambda} \lambda^{\alpha-1}, \quad \lambda > 0,$$

onde $\alpha > 0$ é o parâmetro de forma e $\beta > 0$ o parâmetro de escala. Neste caso a função de probabilidade de $N(t)$ é dada por:

$$p_k(t) = \binom{\alpha + k - 1}{k} \left(\frac{\beta}{\beta + t} \right)^\alpha \left(\frac{t}{\beta + t} \right)^k \quad (3.3)$$

que corresponde à distribuição Binomial Negativa com parâmetros α e $p(t) = \frac{\beta}{\beta+t}$.

Algumas Propriedades de $\{N(t), t \geq 0\}$ quando $\Lambda \sim Gama(\alpha, \beta)$

A média e a variância são dadas por:

- $E[N(t)] = \frac{\alpha}{\beta} t$
- $V[N(t)] = \frac{\alpha}{\beta} t + \frac{\alpha}{\beta^2} t^2$

No Ramo Automóvel é comum considerar-se como unidade de tempo o ano, isto é $t = 1$, pois coincide com o período de vigência de uma apólice. Se nas últimas duas expressões substituirmos t por 1, resulta que:

$$E[N] = \frac{\alpha}{\beta}$$

$$Var[N] = \frac{\alpha(\beta + 1)}{\beta^2}$$

Neste caso as probabilidades para o número de sinistros podem ser calculadas recursivamente, através de:

$$p(0) = \left(1 + \frac{1}{\beta}\right)^{-\alpha}$$

$$p(k) = \left(\frac{\alpha + k - 1}{k}\right) \left(\frac{1}{\beta + 1}\right) p(k - 1), \quad k = 1, 2, \dots$$

conforme pode ser visto, por exemplo, em Lemaire (1995).

Aplicação aos dados da SIM-Ímpar

Como vimos, a rejeição estatística do modelo Poisson mostra que o comportamento dos segurados, em termos de número de sinistros é heterogêneo, pelo que necessitamos de um modelo que reflecta a diferença de riscos subjacentes a cada um deles. Assim, em vez de se supôr que o número de sinistros segue um processo de Poisson de intensidade λ , supõe-se que λ é resultado da observação de uma variável aleatória Λ , não negativa, sendo a sua função de distribuição $U(\lambda) = Pr(\Lambda < \lambda)$ com $\lambda > 0$.

Aplicando o método da máxima verosimilhança aos dados da Tabela 3.1, obtemos as seguintes estimativas para os parâmetros da distribuição Gama da variável de estrutura $\hat{\alpha} = 0,85497704$, $\hat{\beta} = 15,93865458$, $\hat{p} = 0,940963$ e $\hat{q} = 0,059037$. Utilizando exactamente a mesma metodologia do processo de Poisson, calculando as probabilidades p_k , de acordo com os parâmetros agora referidos, com a nova distribuição e aplicando-as à amostra, verificamos que o ajustamento é bom, depois de termos procedido ao reagrupamento das duas últimas classes.

Tabela 3.4: Ajustamento do número de sinistros observados-Distribuição Poisson-Gama

Nº Sinistros	Nº Apólices	p_k	np_k	Teste Quiq
0	5786	0,9493	5786,957111	0,000158298
1	295	0,0479	292,0961313	0,02886876
≥ 2	15	0,0028	16,94675724	0,223633566
Total	6096	1,00	6096	0,25266062

Da Tabela 3.4 vê-se facilmente que $\chi_{obs}^2 = 0,253 < \chi_1^2 = 3,841$, o que indica que não devemos rejeitar, ao nível de significância de 5%, a hipótese dos dados se ajustarem a uma distribuição Mista Poisson-Gama, pelo que podemos construir um sistema de bonus malus para a carteira do ramo automóvel da SIM-Ímpar com base nesta distribuição.

Como alternativa à distribuição Binomial Negativa, vamos testar se os dados se ajustam a distribuição Poisson-Inversa Gaussiana. Esta distribuição de estrutura tem como parâmetros g e h , que estimaremos a partir do método da máxima verosimilhança.

3.3.2 Modelo Poisson-Inversa Gaussiana

Sichel (1971) introduz um outro modelo particular do processo de Poisson Misto, que se obtém quando a distribuição de estrutura Λ segue uma distribuição Inversa Gaussiana, com parâmetros g e h , cuja função densidade é dada por:

$$u(\lambda) = \frac{g}{\sqrt{2\pi h\lambda^3}} \exp\left\{-\frac{1}{2h\lambda}(\lambda - g)^2\right\}, \quad \lambda > 0$$

onde os parâmetros g e h são não negativos, e $E[\Lambda] = g$ e $V[\Lambda] = gh$. Deste modo, a função de probabilidade de $N(t)$ será dada por:

$$p_k(t) = \int_0^\infty \frac{e^{-t\lambda}(\lambda t)^k}{k!} \frac{g}{\sqrt{2\pi h\lambda^3}} \exp\left\{-\frac{1}{2h\lambda}(\lambda - g)^2\right\} d\lambda \quad (3.4)$$

que corresponde à função de probabilidade da distribuição Poisson-Inversa Gaussiana.

Quando consideramos um ano como a unidade de tempo ($t = 1$), a média e a variância de $N(t)$ serão dadas por:

$$E[N] = g$$

$$Var[N] = g(1 + h)$$

Assim, as probabilidades de $N(t)$ podem ser calculadas recursivamente (ver Lemaire (1995)), através de:

$$p(0) = e^{\frac{g}{h}[1-(1+2h)^{1/2}]}$$

$$p(1) = gp(0)(1 + 2h)^{-1/2}$$

$$p(k) = \frac{h(k-1)(2k-3)p(k-1) + g^2p(k-2)}{(1+2h)k(k-1)}, \quad k = 2, 3, \dots$$

Aplicação aos dados da SIM-Ímpar

Como alternativa à distribuição Poisson-Gama, utilizou-se a distribuição Poisson-Inversa Gaussiana. As estimativas de máxima verosimilhança para os parâmetros da distribuição, obtidos com os dados da sinistralidade observada foram $\hat{g} = 0,05364173$ e $\hat{h} = 0,062740553$. Os resultados obtidos são ilustrados na Tabela 3.5.

Tabela 3.5: Ajustamento do número de sinistros observados-D. Poisson-Inversa Gaussiana

Nº Sinistros	Nº Apólices	p_k	np_k	Teste Quiq
0	5786	0,94927	5786,779273	0,00010494
1	295	0,04800	292,5974974	0,019726822
≥ 2	15	0,0027	16,62322944	0,158505531
Total	6096	1,00	6096	0,17833729

Comparando o $\chi_{obs}^2 = 0,178 < \chi_1^2 = 3,841$, conclui-se, ao nível de significância de 5%, que os dados também se ajustam à distribuição Mista Poisson-Inversa Gaussiana, pelo que também podemos utilizar este modelo para a construção de um sistema de *bonus malus*.

Já que os dados se ajustam tanto à distribuição Mista Poisson-Gama e Poisson-Inversa Gaussiana, temos de decidir qual das duas distribuições reflecte melhor a heterogeneidade dos segurados da carteira em estudo. À partida podemos dizer que a distribuição Mista Poisson-Inversa Gaussiana é a que melhor reflecte o comportamento dos segurados, pois, tem um valor do $p - value = 0,938933$ superior comparativamente com a distribuição Mista Poisson-Gama com $p - value = 0,937343$, ou analisando pelos valores do teste Qui-quadrado vê-se que a distribuição Mista Poisson-Inversa Gaussiana apresenta um valor inferior comparativamente ao obtido na distribuição Mista Poisson-Gama, mas também se pode recorrer ao teste de razão de verosimilhança ². Contudo, neste trabalho não é realizado o teste de razão de verosimilhança.

Daqui em diante, serão feitas as análises tendo em conta que os dados da SIM-Ímpar se ajustam à distribuição Mista Poisson-Inversa Gaussiana.

²Este teste pode ser consultado, por exemplo, em Guerreiro (2001).

Capítulo 4

Transição entre Classes e Distribuição Estacionária

4.1 Transição entre Classes

Quando se pretende estudar o comportamento dos segurados ao longo das classes do sistema é necessário construir uma matriz de probabilidades de transição que está associada à matriz das regras de transição. Esta matriz contém as probabilidades de cada segurado, que se encontra na classe i , transitar para a classe j no período seguinte. A metodologia de transição utilizada está baseada em cadeias de Markov, que pressupõe que o sistema não tem “memória”, ou seja, que não é considerado o comportamento no passado mas somente a classe em que o segurado se encontra e o número de sinistros participados nesse período para se determinar a classe para onde transitará no ano seguinte.

A exposição desta secção é baseada em Centeno (2003) e Guerreiro (2001).

Para uma frequência de sinistralidade λ , com $Z_{\Delta,n}$ a representar a classe do sistema, Δ , onde o segurado se encontra no período n , conforme o que foi definido na secção 2.1, a probabilidade de um segurado que se encontra na classe i transitar para a classe j no período seguinte, é dada por:

$$p_{T,\lambda}(i, j) = Pr(Z_{\Delta,n+1} = j | Z_{\Delta,n} = i, \Lambda = \lambda), \quad i, j = 1, 2, \dots, s. \quad (4.1)$$

Conhecido λ , a distribuição de $Z_{\Delta,n}$ é

$$p_{\Delta,\lambda}^n(j) = Pr(Z_{\Delta,n} = j | \Lambda = \lambda), \quad j = 1, 2, \dots, s, \quad (4.2)$$

que, para além de depender de T , depende também da classe inicial, C_{i_0} . Pode dizer-se que essa classe de bonus é um estado aperiódico da cadeia de Markov.

As matrizes de probabilidades de transição, associadas às matrizes das regras de transição apresentadas no Capítulo 2, e com recurso à distribuição de Poisson de média λ ,

Analisando a matriz das probabilidade de transição, do Sistema proposto, conclui-se novamente que a cadeia de Markov implícita no modelo é irreduzível, isto é, todas as classes comunicam entre si. A cadeia é finita aperiódica, portanto, é recorrente positiva, pelo que a distribuição limite coincidirá com a distribuição estacionária ver, por exemplo, Rolski et al. (2009), Parzen (1999) ou Ross (1996).

4.2 Distribuição Limite

Geralmente todos os sistemas de *bonus malus* utilizados na prática têm uma classe de eleição para onde transitam os segurados que não participam sinistros, e pode-se dizer que essa classe é um estado aperiódico da cadeia de Markov. Desta forma, e como se disse antes, se a cadeia de Markov implícita no modelo for irreduzível e finita será também aperiódica e recorrente, pelo que, neste caso a distribuição limite

$$\pi_{T,\lambda}(j) = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{\Delta,\lambda}^n(j), \quad j = 1, 2, \dots, s, \quad (4.3)$$

coincide com a distribuição estacionária.

A distribuição estacionária, $\Pi_{(T,\lambda)}$ é, a única solução não negativa do sistema de equações:

$$\begin{cases} \Pi_{T,\lambda} \times \mathbf{P}_{T,\lambda} = \Pi_{T,\lambda} \\ \sum_{j=0}^s \pi_{T,\lambda}(j) = 1. \end{cases} \quad (4.4)$$

ou, por outras palavras, a distribuição estacionária é dada pelo vector próprio esquerdo associado ao valor próprio unitário da matriz $\mathbf{P}_{T,\lambda}$.

Note-se que o termo π_j , $j = 1, 2, \dots, s$, coincide com o valor limite da probabilidade de um segurado se encontrar na classe C_j , quando o número de períodos, n , tende para infinito.

Quando λ é o resultado de uma variável aleatória Λ , a matriz das probabilidades de transição em n passos, $\mathbf{P}_{T}^{(n)}$, com $n > 1$, pode ser obtida a partir das $\mathbf{P}_{T,\lambda}^{(n)}$, integrando em função a λ de acordo com a distribuição estrutural, i.e.,

$$p_T^{(n)}(i, j) = \int_0^\infty p_{T,\lambda}^{(n)}(i, j) dU(\lambda), \quad i, j = 1, 2, \dots, s.$$

Desta forma, a distribuição incondicional de $Z_{\Delta,n}$ é dada por:

$$p_S^{(n)}(j) = Pr\{Z_{\Delta,n} = j\} = \int_0^\infty p_{\Delta,\lambda}^{(n)}(j) dU(\lambda), \quad j = 1, 2, \dots, s.$$

e da mesma forma, a distribuição limite será dada por:

$$\pi_T(j) = Pr(Z_T = j) = \int_0^\infty \pi_{T,\lambda}(j) dU(\lambda), \quad j = 1, 2, \dots, s. \quad (4.5)$$

Como o processo de cálculo dos integrais indicados só será possível recorrendo a métodos numéricos, surge como alternativa a discretização da distribuição de estrutura, obtendo-se assim uma distribuição aproximada e discreta.

No caso em análise, a distribuição de estrutura é Inversa Gaussiana com os parâmetros $\hat{g} = 0,05364173$ e $\hat{h} = 0,062740553$ determinados no Capítulo 3, discretizou-se a distribuição utilizando o método de arredondamento à unidade mais próxima. A distribuição de estrutura discretizada, obtida por aplicação do método de arredondamento acima referido, pode ser consultada em anexo.

Desta forma, adaptando a equação (4.5) ao caso discreto, torna-se possível determinar a distribuição limite, através de:

$$\pi_T(j) = \sum_{\lambda} \pi_{T,\lambda}(j) u_{\lambda}^d, \quad j = 1, 2, \dots, s. \quad (4.6)$$

sendo u_{λ}^d o vector das probabilidades da distribuição Inversa Gaussiana discretizada para $\lambda = 0,01, 0,02, \dots, 1$. Optou-se por fazer a discretização apenas para valores de λ entre 0 e 1, pois a probabilidade de λ tomar valores superiores a 1 é de apenas $5,55029 \times 10^{-6}$.

A distribuição estacionária também pode ser consultada, por exemplo, em Denuit and Dhaene (2001), e será, como veremos no Capítulo 5, tomada como referência na utilização de alguns modelos propostos por Lemaire (1995).

Seguidamente faz-se uma análise comparativa dos dois sistemas em análise, em termos da estacionaridade dos mesmos.

Resultados

A distribuição limite estima o comportamento dos sistemas de *bonus malus* a longo prazo, em função da frequência de sinistralidade, que varia de segurado para segurado, e da carteira em termos globais.

Assim, para o actual sistema de *bonus malus*, estimou-se que o prémio médio em condições de estacionaridade é de cerca de 53,44% do prémio *a priori* ou seja, a longo prazo, um segurado, em média paga o equivalente a 53,44% do prémio definido *a priori*.

A distribuição estacionária para o actual sistema de *bonus malus* da SIM-Ímpar é mostrada na Tabela 4.1, onde se pode verificar que, em condições de estacionaridade, a maioria dos segurados, 98,28%, se encontra nas classes bonificadas (4 a 11), sendo que

79,39% dos segurados se encontram na classe de maior bonificação, 0,73% estão na classe de entrada, não usufruindo de desconto ou agravamento, e apenas 0,93% dos segurados se encontram nas classes de agravamento.

Tabela 4.1: Distribuição estacionária-Actual Sistema da SIM-Ímpar

Classes	D. Estacionária
4	0,793949
5	0,0334963
6	0,0361396
7	0,0391272
8	0,042525
9	0,0141403
10	0,0136504
11	0,00976678
12	0,00789648
13	0,00467688
14	0,00248535
15	0,00140514
16	0,000741623

O prémio médio em condições de estacionaridade do Sistema de *bonus malus* proposto é de cerca de 52,02% ficando ligeiramente abaixo do prémio médio estacionário do actual sistema. A distribuição estacionária que coincide com a distribuição limite para o sistema de *bonus malus* proposto é ilustrada na Tabela 4.2 abaixo.

Tabela 4.2: Distribuição estacionária-Sistema de *bonus malus* Proposto

Classes	D. Estacionária
1	0,882152
2	0,0415202
3	0,0453465
4	0,0099862
5	0,0079907
6	0,0036185
7	0,0028081
8	0,0019422
9	0,0016716
10	0,0014846
11	0,0014798

Da Tabela 4.2, pode-se verificar que em condições de estacionaridade a esmagadora maioria dos segurados, 99,06%, também se encontram nas classes bonificadas (1 a 6), sendo que 88,22% dos segurados se encontram na classe de maior bonificação, a classe

1; 4,15% na classe 2, e apenas 0,28% se encontram na classe de entrada. Em condições de estacionaridade, a probabilidade de um segurado se encontrar nas classes de *malus* é muito reduzida, e estima-se que apenas 0,66% dos segurados se encontrem nas classes de agravamento. Estas estimativas vão de encontro à proposta da seguradora que pretende um sistema com regras menos “duras”. Efectivamente, verifica-se que com as regras agora propostas, os segurados se concentram, em maior proporção, nas classes de desconto.

Verifica-se ainda que as duas distribuições estacionárias, do actual sistema e do sistema proposto, não mostram diferenças significativas, pois nas duas distribuições temos uma maior percentagem das apólices nas classes de bonificação, mais precisamente nas classes de maior desconto e há, nas duas distribuições, poucas apólices nas classes de agravamento. Contudo o sistema proposto apresenta um prémio médio em condições de estacionaridade ligeiramente inferior do que ao apresentado pelo actual sistema.

Seguidamente faz-se o estudo do comportamento do prémio médio para os dois sistemas de *bonus malus* em análise.

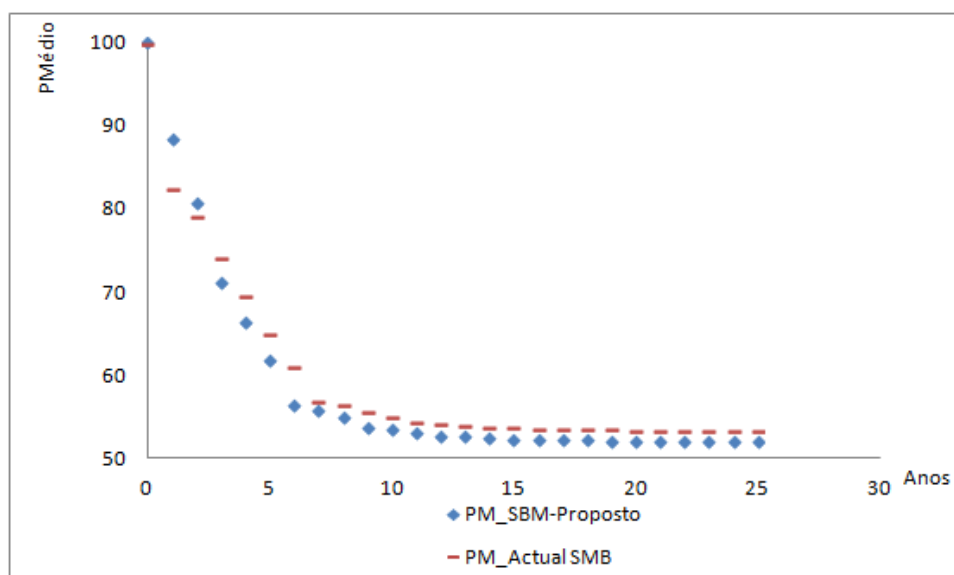


Figura 4.1: Evolução do prémio médio.

A Figura 4.1 ilustra a evolução do prémio médio de qualquer segurado novo para os dois sistemas. Observa-se que o prémio médio dos dois sistemas converge muito lentamente, atingem a estacionaridade passados 30 anos, entretanto fez-se a análise num horizonte de 25 anos, nota-se que embora não se tenha ainda atingido o valor do prémio médio em condições de estacionaridade, a evolução no horizonte considerado para os dois sistemas tende para os respectivos prémios estacionários, sendo que nos primeiros 3 anos o prémio médio do sistema proposto é superior ao prémio médio do actual sistema, do quarto ano em diante o prémio médio do sistema proposto é no entanto menor do que o do actual sistema.

Capítulo 5

Medidas de Avaliação e Escalas Óptimas de Prémios

Este capítulo encontra-se dividido em duas secções. Na primeira avalia-se a performance dos sistemas de *bonus malus* em estudo, considerando algumas medidas de avaliação propostas por Lemaire (1995). Na segunda secção, por forma a estimar o prémio óptimo a aplicar a cada classe do actual sistema de *bonus malus* e do novo sistema proposto, aborda-se, baseado em Centeno (2003) e Andrade e Silva and Centeno (2005), as escalas óptimas de prémios segundo vários modelos.

Por fim, a partir dos resultados obtidos por aplicação das medidas de avaliação e das escalas óptimas, efectua-se uma análise comparativa dos dois sistemas de *bonus malus* analisados.

5.1 Medidas de Avaliação dos SBM

Por forma a avaliar a performance dos Sistemas de *Bonus Malus*, são consideradas algumas medidas de avaliação. Lemaire (1995) propõe várias medidas de apreciação dos sistemas de *bonus malus*. Estas medidas devem ser utilizadas na avaliação comparativa de diferentes sistemas e não na avaliação absoluta de um sistema por si.

5.1.1 Nível Médio Relativo de Estacionaridade

O nível médio relativo de estacionaridade, designado por RSAL (Relative Stationary Average Level), mede a posição dos segurados médios, quando o SBM atinge a estacionaridade, ou por outra, avalia o grau de aglomeração das apólices nas classes mais baixas do SBM em condições de estacionaridade. O RSAL é dado por:

$$RSAL = \frac{PM(Z_T) - \text{Prémio mínimo}}{\text{Prémio máximo} - \text{Prémio mínimo}} \quad (5.1)$$

para a globalidade de carteira e por

$$RSAL_{\lambda} = \frac{PM_{\lambda}(Z_T) - \text{Prémio mínimo}}{\text{Prémio máximo} - \text{Prémio mínimo}}$$

para uma dada frequência de sinistralidade λ .

onde $PM(Z_T)$ e $PM_{\lambda}(Z_T)$ designam respectivamente, o prémio médio da carteira e o prémio para uma dada frequência de sinistralidade λ em condições de estacionaridade, isto é

$$PM(Z_T) = \sum_{j=1}^s b(j)\pi_T(j)$$

e

$$PM_{\lambda}(Z_T) = \sum_{j=1}^s b(j)\pi_{T,\lambda}(j).$$

O RSAL determina a posição relativa do segurado médio quando o prémio mais baixo é igual a zero. Um valor baixo de RSAL indica uma grande aglomeração das apólices nas classes com maior desconto, enquanto que um valor alto sugere uma melhor distribuição das apólices entre as classes. Um valor ideal de RSAL deve estar em torno dos 50%, contudo nenhum SBM chega a atingir este valor. Note-se que este critério é altamente influenciado pelos prémios mínimo (onde é comum situar-se a grande maioria das apólices) e máximo, onde apenas um número muito reduzido de apólices se situa.

Resultados

O Nível Médio Relativo de Estacionaridade apresenta valores compreendidos entre zero e um, em que valores elevados de RSAL sugerem uma boa distribuição das apólices pelas classes enquanto que valores baixos de RSAL indicam aglomeração nas classes de maior desconto. Considera-se um valor razoável de RSAL quando este está por volta dos 0,5, entretanto há que ter cautela ao se tirar as conclusões pois este critério depende bastante do valor do prémio mínimo e máximo.

A análise dos dois sistemas de *bonus malus* indica valores muito baixo de RSAL para a carteira no geral, sendo 0,0229222 para o actual sistema e 0,0134346 para o sistema proposto. Nota-se contudo, que apesar de os dois sistemas apresentarem valores baixos de RSAL e, por conseguinte, uma maior concentração das apólices nas classes de maior desconto ou de baixa sinistralidade, o actual sistema apresenta um valor de RSAL razoável comparativamente com o valor de RSAL do sistema proposto.

Os valores de RSAL reflectem exactamente o que se viu nas distribuições estacionárias dos dois sistemas, ver Tabelas 4.1 e 4.2, em que os segurados estão ainda mais aglomerados nas classes de desconto.

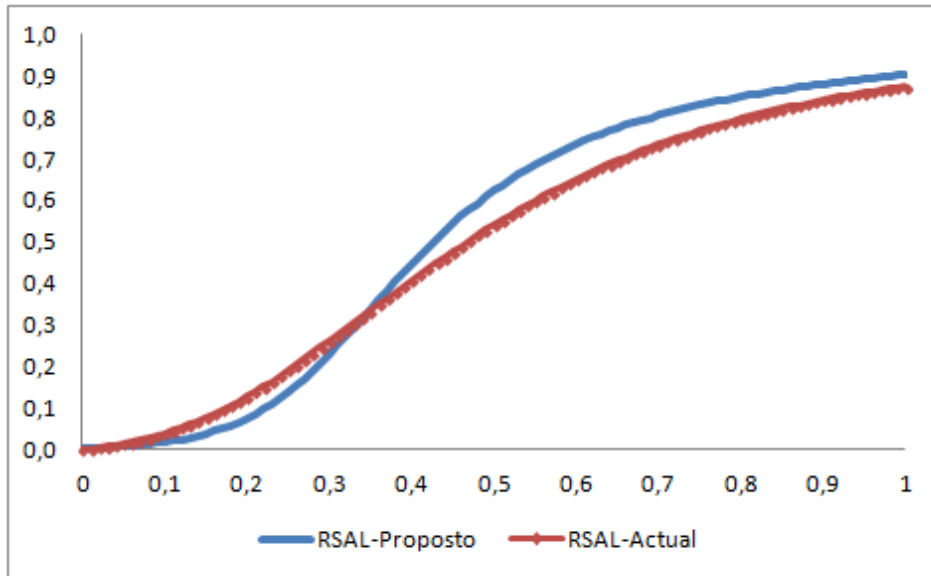


Figura 5.1: Nível médio relativo de estacionaridade.

A Figura 5.1 mostra a evolução do nível médio relativo de estacionaridade dos dois sistemas para diferentes valores da frequência de sinistralidade. Da Figura verifica-se que uma maior frequência de sinistralidade, leva a um maior valor de RSAL. Verifica-se ainda que, para $\lambda < 0,35$, o RSAL do actual sistema é maior do que o RSAL do sistema proposto, entretanto para valores de $\lambda > 0,35$, o sistema proposto apresenta um nível médio relativo de estacionaridade maior comparativamente com o nível médio relativo de estacionaridade do actual sistema, portanto, o actual sistema é “eficaz” nas classes de baixa sinistralidade enquanto que o sistema proposto é “eficaz” nas classes com elevada frequência de sinistralidade.

5.1.2 Coeficiente de Variação dos Prémios

Um contrato de seguro consiste na transferência de riscos do segurado para a seguradora. Sem a tarifação *a posteriori*, por exemplo SBM, a transferência é total (solidariedade perfeita). Desta forma, a variabilidade do prémio do segurado é igual a zero. Introduzindo um SBM, os prémios passam a variar de ano para ano, de acordo com o histórico de sinistros de cada segurado. A solidariedade entre os segurados pode ser avaliada por uma medida de variabilidade dos prémios anuais. O coeficiente de variação dos prémios, em condições de estacionaridade, é definido como o quociente entre o desvio padrão dos prémios em condições de estacionaridade e o prémio médio estacionário, isto é:

$$CV = \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^s b^2(j)\pi_T(j) - PM^2(Z_T)}}{PM(Z_T)} \quad (5.2)$$

para a globalidade da carteira e por

$$CV_\lambda = \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^s b^2(j)\pi_{T,\lambda}(j) - PM_\lambda^2(Z_T)}}{PM_\lambda(Z_T)}$$

para uma dada frequência de sinistralidade λ .

Segundo Bowers et al. (1986), sem recurso a um contrato de seguro, o segurado está exposto a um processo que tem coeficiente de variação de 6,4 e na ausência de tarifação *a posteriori* conforme referido atrás o coeficiente de variação é igual a zero. Se utilizarmos um sistema de *bonus malus*, o coeficiente de variação estará compreendido entre 0 e 6,4, quanto mais “duro” o sistema aplicado, maior será este coeficiente. No geral este indicador não permanece constante, ele parte do valor zero no primeiro ano e cresce até ao momento em que os melhores segurados atingem a classe de *bonus* máximo, variando depois mais suavemente até ao ponto de estacionaridade da carteira.

Resultados

Para a carteira em análise, em condições de estacionaridade, obteve-se um valor do coeficiente de variação de 1,01513 para o actual sistema, e 1,01025 para o sistema proposto. O sistema proposto apresenta um coeficiente de variação ligeiramente menor do que o coeficiente do actual sistema, contudo os valores anteriores estão mais perto de 0 do que de 6,4, assim pode-se dizer que os prémios dos segurados não estão muito dispersos, ou seja, os sistemas ainda não conseguem penalizar os segurados com elevada frequência de sinistralidade. A redução do valor do CV para o sistema proposto vai de encontro às expectativas da seguradora quanto à introdução de um sistema menos “duro”.

A Figura 5.2 mostra a evolução do Coeficiente de Variação dos prémios como função do parâmetro de sinistralidade. Da Figura 5.2 pode-se verificar que, para uma frequência de sinistralidade menor que 0,2, o coeficiente de variação do actual sistema encontra-se acima do coeficiente de variação do sistema proposto, já para $0,2 < \lambda < 0,5$, o coeficiente do sistema proposto encontra-se muito acima do coeficiente do actual sistema, e para uma frequência de sinistralidade maior que 0,5 o sistema proposto volta a apresentar um coeficiente de variação menor comparativamente com o coeficiente de variação do actual sistema. Contudo, o valor mais alto do coeficiente de variação dos prémios é atingido pelo sistema proposto quanto a frequência de sinistralidade é igual a 0,3.

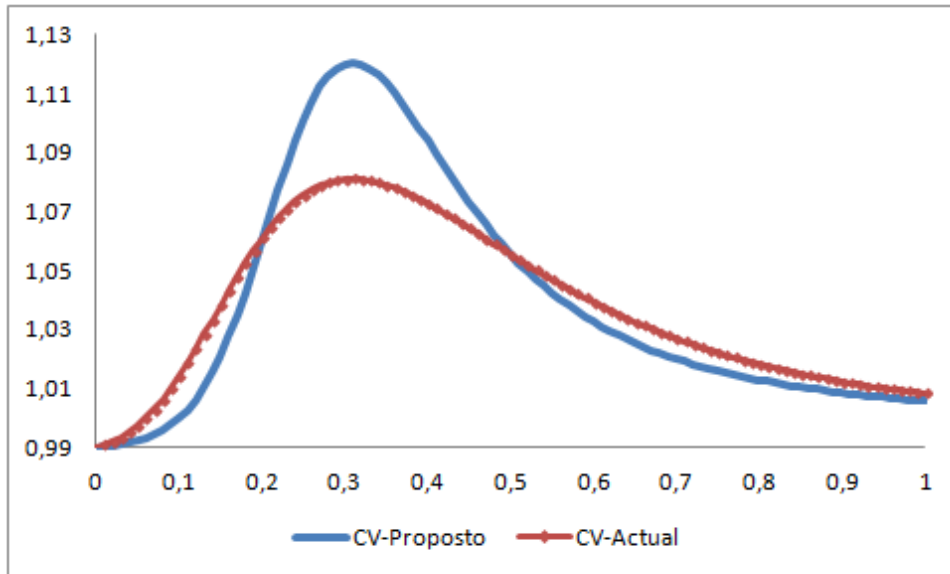


Figura 5.2: Coeficiente de variação dos prêmios.

5.1.3 Elasticidade do Prémio Médio

A elasticidade do prémio médio, em condições estacionárias de um sistemas de *bonus malus* mede a resposta do sistema a uma alteração na frequência esperada de sinistralidade. Esta medida foi utilizada neste, contexto por, Lemaire (1995) e Loimaranta (1972).

Se o risco associado a uma apólice é medido pela frequência de sinistralidade, então, idealmente, um aumento relativo nesta frequência deveria implicar o mesmo aumento relativo nos prémios, numa perspectiva de longo prazo.

De um modo geral, conhecendo λ , a elasticidade $\eta(\lambda)$ de um sistema de *bonus malus* pode ser definida como

$$\eta(\lambda) = \frac{\frac{dPM_{\lambda}(Z_T)}{PM_{\lambda}(Z_T)}}{\frac{d\lambda}{\lambda}} = \frac{\frac{dPM_{\lambda}(Z_T)}{d\lambda}}{\frac{PM_{\lambda}(Z_T)}{\lambda}} = \frac{d \ln PM_{\lambda}(Z_T)}{d \ln \lambda}, \quad (5.3)$$

com

$$PM_{\lambda}(Z_T) = \sum_{j=1}^s b(j)\pi_{T,\lambda}(j).$$

Facilmente se prova que a elasticidade não pode ser 1 para todo o valor de λ . Com efeito supondo, como é natural, que $PM_{\lambda}(Z_T)$ é crescente com λ , o mesmo sucede com $\ln PM_{\lambda}(Z_T)$. Quando λ tende para infinito o prémio médio tende para $\max_{i=1,\dots,s} b(i)$ que é finito, o mesmo sucedendo com o logaritmo dos prémios e, portanto, a elasticidade, a derivada logarítmica do prémio tende para 0, quando λ tende para infinito. Pela mesma ordem de razões a elasticidade tende também para 0 quando λ tende para zero. De facto

a elasticidade parte de 0, descreve uma curva no quadrante positivo, que se vai aproximar novamente de 0 quando λ tende para infinito.

Pode calcular-se o valor esperado da elasticidade, tendo em conta a distribuição de estrutura, obtendo-se a elasticidade global do sistema

$$\eta = \int_0^{\infty} \eta(\lambda) dU(\lambda). \quad (5.4)$$

Elasticidade do prémio médio entre 0 e 1, reflecte aumentos de prémio inferiores aos aumentos na frequência de sinistralidade, situação mais frequente. Enquanto que elasticidade superior a 1 reflecte aumentos de prémio superiores aos aumentos na frequência de sinistralidade. Quando a elasticidade do prémio médio é igual a 1 diz-se que, o SBM é perfeitamente elástico, ou seja reflecte aumentos de prémio proporcionais aos aumentos na frequência de sinistralidade.

Resultados

A Elasticidade do Prémio Médio foi de 0,0833473 para o actual sistema e de 0,0596624 para o sistema proposto, deste modo pode-se dizer que os aumentos dos prémios da carteira em análise são inferiores aos aumentos da frequência de sinistralidade nos dois sistemas, com uma ligeira melhoria no actual sistema.

A Figura 5.3 mostra a evolução da elasticidade do prémio médio em função da frequência de sinistralidade para a carteira da SIM-Ímpar, verifica-se que para os dois sistemas, a elasticidade toma o valor zero quando a frequência de sinistralidade é nula, ou seja, todos os segurados se encontram na classe de desconto máximo. Para uma frequência de sinistralidade de 0,35 a elasticidade do prémio médio toma o seu valor máximo, 1,2, sendo que uma reduzida proporção, 1,57%, dos segurados (segurados com valores de lambda compreendidos entre 0,3 e 0,4) no sistema proposto fica sujeita a uma elasticidade maior que a unidade, facto que não é favorável de um ponto de vista comercial, enquanto que a elasticidade do prémio médio do actual sistema, nunca atinge a unidade.

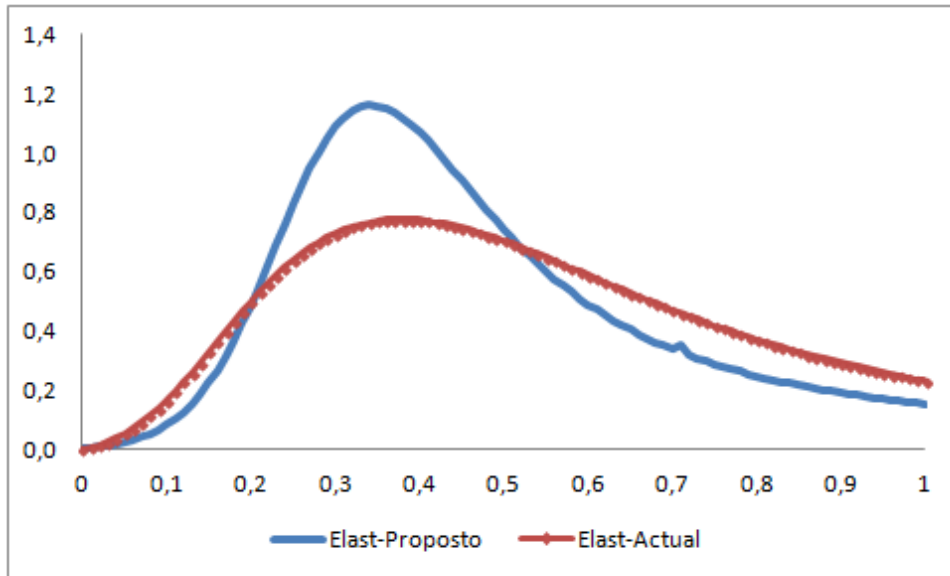


Figura 5.3: Elasticidade do prêmio médio.

5.1.4 Elasticidade Transiente

Lemaire (1995) introduz um outro conceito de elasticidade, que designa por elasticidade transiente. Seja $V_\lambda(j)$ o valor esperado actualizado a pagar em horizonte infinito por uma apólice que figure na classe C_j no presente período e seja $\beta < 1$ a taxa de desconto. Utilizando aquilo que é geralmente designado, na terminologia das cadeias de Markov, por análise de primeiro passo (ver Taylor and Karlin (1984)), $V_\lambda(j)$ deve verificar

$$\mathbf{V}_\lambda(j) = b(j) + \beta \sum_{l=1}^s \mathbf{P}_{T,\lambda}(j,l) \mathbf{V}_\lambda(l), \quad j = 1, 2, \dots, s \quad (5.5)$$

ou, em termos matriciais,

$$\mathbf{V}_\lambda = b + \beta \mathbf{P}_{T,\lambda} \mathbf{V}_\lambda,$$

onde \mathbf{V}_λ é um vector coluna.

Lemaire (1995) prova que o sistema tem solução única recorrendo ao princípio da contracção, o que corresponde a provar que o determinante da matriz $\mathbf{I} - \beta \mathbf{P}_{T,\lambda}$ é diferente de zero (na hipótese da cadeia ser irredutível). A elasticidade do valor esperado actualizado dos pagamentos futuros, em relação á frequência de sinistralidade, é dada por

$$\mu_\lambda(j) = \frac{\frac{d\mathbf{V}_\lambda(j)}{d\lambda}}{\frac{\mathbf{V}_\lambda(j)}{\lambda}}; \quad j = 1, \dots, s$$

A elasticidade transiente do sistema, relativa a um segurado que se situe na classe C_j , é

$$\mu(j) = \int_0^{\infty} \mu_{\lambda}(j) dU(\lambda); \quad j = 1, \dots, s \quad (5.6)$$

Resultados

Para se determinar a elasticidade transiente dos dois sistemas em análise, considerou-se, seguindo Centeno (2003), uma taxa de desconto de 0,97. Da Figura 5.4 observa-se que a elasticidade transiente nos dois sistemas é maior nas classes de maior desconto e vai diminuindo à medida que nos aproximamos das classes mais gravosas. Há que realçar que, em todas as classes, a elasticidade transiente do actual sistema é maior do que a elasticidade transiente do sistema proposto.

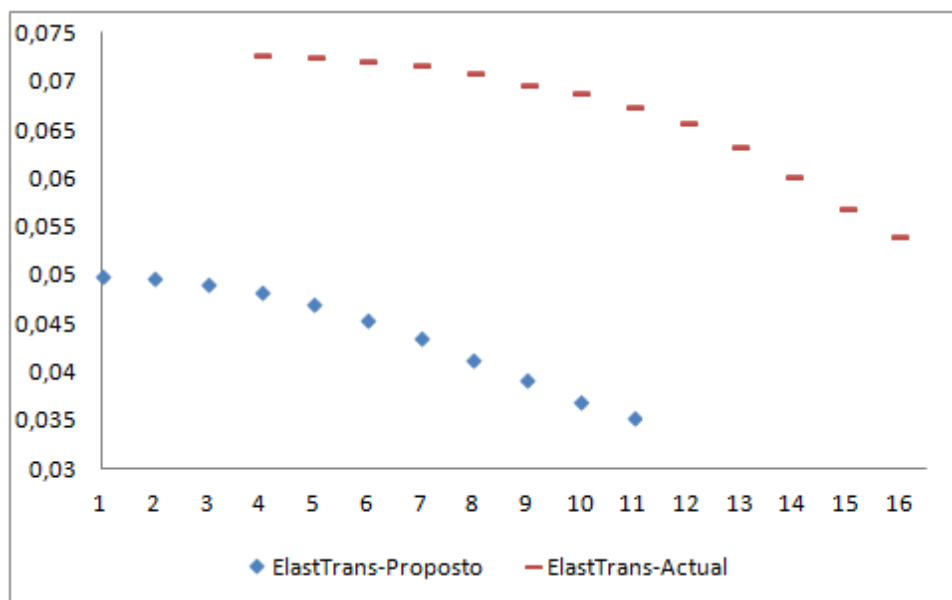


Figura 5.4: Elasticidade transiente.

No geral, o sistema proposto apresenta valores baixos para o prémio médio relativo de estacionaridade, para o coeficiente de variação dos prémios, para a elasticidade do prémio médio e para a elasticidade transiente em todas as classes, comparativamente com os valores dos mesmos indicadores apresentado pelo actual sistema ajustado, o que era de se esperar uma vez que, no sistema proposto suavizou-se, como uma estratégia comercial, as regras de transição.

5.2 Escalas Óptimas de Prémios

Na tentativa de auxiliar a seguradora a optar por um sistema que seja adequado em termos de aplicabilidade e competitividade com a concorrência, no mercado onde está a

operar, nesta secção estima-se o prémio óptimo a aplicar a cada classe do actual sistema de *bonus malus* e do sistema proposto, efectuando-se depois uma análise comparativa dos dois sistemas em estudo.

As escalas óptimas de prémios, que a seguir se apresentam, podem ser também consultadas em Andrade e Silva and Centeno (2005) onde, para além da revisão das escalas propostas por Norberg (1976), Borgan et al. (1981) e Gilde and Sundt (1989), os autores apresentam os potenciais problemas da escala linear e propõem como alternativa, uma possível solução, a utilização da escala geométrica.

5.2.1 Critério de Norberg

Contrariamente aos trabalhos de Lemaire, que propõe medidas a ser utilizadas na avaliação comparativa de diferentes sistemas e não na avaliação absoluta de um sistema por si, Norberg (1976), seguindo uma filosofia diferente, considera o problema da determinação dos prémios a vigorar em cada classe, uma vez fixadas as regras de transição de um sistema de *bonus malus*. Utiliza, para o efeito, uma abordagem próxima da Teoria da Credibilidade, que se descreve seguidamente.

Sejam S_n as indemnizações agregadas relativas a um segurado no n -ésimo período de validade da apólice. Conhecido o parâmetro de risco λ , os montantes S_n , $n \in IN$, são variáveis aleatórias que se consideram independentes e identicamente distribuídas. $Z_{\Delta,n}$ designa como referido anteriormente a classe de *bonus* de uma apólice no n -ésimo período, quando vigora o sistema $\Delta = (\mathbf{T}, \mathbf{b}, C_{i_0})$.

A medida de eficiência do prémio $b_n(Z_{\Delta,n})$, para o período n , o qual serve de estimador do prémio de risco $E[S_n|\lambda]$, é a perda quadrática esperada.

$$\begin{aligned} Q_n(\Delta) &= E[E(S_n|\lambda) - b_n(Z_{\Delta,n})]^2 = \\ &= \int_0^\infty \sum_{j=1}^s [E(S_n|\lambda) - b_n(j)]^2 p_{\Delta,\lambda}^n(j) dU(\lambda) \end{aligned} \quad (5.7)$$

Teorema 5.1. Para qualquer $b_n(Z_{\Delta,n})$, baseado em $Z_{\Delta,n}$ tem-se que

$$Q_n(\Delta) \geq E[V[E(S_n|\lambda)|Z_{\Delta,n}]], \quad (5.8)$$

com a igualdade a verificar-se se e só se

$$Pr[b_n(Z_{\Delta,n}) = \mu_n(Z_{\Delta,n})] = 1,$$

com

$$\mu_n(Z_{\Delta,n}) = E[E[S_n|\lambda]|Z_{\Delta,n}]. \quad (5.9)$$

Demonstração: A demonstração que a seguir se apresenta, pode também ser consultada em Centeno (2003).

Pela propriedade da iteratividade do valor esperado tem-se que

$$Q_n(\Delta) = E \left[E[(E[S_n|\lambda] - b_n(Z_{\Delta,n}))^2 | Z_{\Delta,n}] \right].$$

No segundo dos valores esperados aplica-se a regra

$$E[(W - a)^2] = V(W) + (E(W) - a)^2,$$

de onde

$$Q_n(\Delta) = E[V[E(S_n|\lambda)|Z_{\Delta,n}]] + E \left[[E[E(S_n|\lambda)|Z_{\Delta,n}] - b_n(Z_{\Delta,n})]^2 \right],$$

o que prova o pretendido. ■

$\mu_n(Z_{\Delta,n})$ é o prémio de credibilidade para o período n , baseado na classe de *bonus* do sistema no período n , $Z_{\Delta,n}$. Na terminologia Bayesiana $Q_n(\Delta)$ é proporcional ao risco do estimador $b_n(Z_{\Delta,n})$ para $E[S_n|\lambda]$, quando se usa a função de perda quadrática e $\mu_n(Z_{\Delta,n})$ o correspondente estimador Bayes.

Note-se que

$$E[\mu_n(Z_{\Delta,n})] = E[E(S_n|\lambda)] = E[S_n],$$

o que implica que, em média, o prémio de credibilidade iguala as indemnizações esperadas.

Por aplicação directa do Teorema 5.1, a escolha óptima do prémio de cada classe de *bonus*, seria então $E[E(S_n|\lambda)|Z_{\Delta,n} = j]$, $j = 1, \dots, s$, que dependeria em geral de n , enquanto que na definição de sistema de *bonus* se supõe que os prémios são independentes do instante n . Assim, a escolha óptima da escala de prémios não pode ser feita por simples aplicação desse resultado.

Sejam Δ e $\tilde{\Delta}$ dois sistemas de *bonus*. Se $Q_n(S) < Q_n(\tilde{\Delta})$ para todo o n , então Δ é claramente preferível a $\tilde{\Delta}$. Mas, no caso geral, $Q_n(\Delta) < Q_n(\tilde{\Delta})$ para alguns valores de n e $Q_n(\Delta) > Q_n(\tilde{\Delta})$ para outros valores de n . Norberg (1976) propõe que se minimize, para a determinação da escala óptima de prémios, o valor limite de $Q_n(\Delta)$ quando n tende para ∞ , ou seja $Q_0(\Delta) = E[[E(S|\lambda) - b(Z_T)]^2]$, onde S designa uma variável aleatória identicamente distribuída a S_n . O minimizante é o prémio de credibilidade

$$b_T(j) = E[E(S|\lambda)|Z_T = j] = \frac{\int_0^\infty E(S|\lambda)\pi_{T,\lambda}(j)dU(\lambda)}{\pi_T(j)}, \quad j = 1, \dots, s \quad (5.10)$$

Note-se que se considerar que S_n depende de λ apenas através da distribuição do número de sinistros - hipótese que coaduna com o facto do sistema de *bonus* apenas depender do número de sinistros e não do seu montante - e se se escolher como unidade monetária o valor esperado de cada indemnização, (5.10) é equivalente a

$$b_T(j) = \frac{\int_0^\infty \lambda\pi_{T,\lambda}(j)dU(\lambda)}{\pi_T(j)}, \quad j = 1, \dots, s. \quad (5.11)$$

Como medida de eficiência para a escala óptima aqui obtida, o autor propõe o seguinte resultado:

Teorema 5.2. Sejam Δ e $\tilde{\Delta}$ dois sistemas de *bonus malus* com regras de transição T e \tilde{T} , respectivamente, e com escalas de prémios óptimas (calculadas de acordo com (5.10). T é mais eficiente que \tilde{T} ($T > \tilde{T}$) ou seja $Q_0(\Delta) < Q_0(\tilde{\Delta})$ se e só se $e(T) > e(\tilde{T})$, com

$$e(T) = E[b_T^2(Z_T)] = \sum_{j=1}^s b_T^2(j)\pi_T(j). \quad (5.12)$$

Demonstração: A demonstração que a seguir se apresenta, pode também ser consultada em Centeno (2003).

$$\begin{aligned} V[E(S|\lambda)] &= V[E[E(S|\lambda)|Z_T]] + E[V[E(S|\lambda)|Z_T]] \\ &= V[b_T(Z_T)] + Q_0(b_T(Z_T)) \\ &= E[b_T^2(Z_T)] - E^2[b_T(Z_T)] + Q_0(b_T(Z_T)) \\ &= e(Z_T) - E^2(S) + Q_0(b_T(Z_T)), \end{aligned}$$

de onde se conclui que a soma de $e(Z_T)$ com $Q_0(b_T(Z_T))$ é independente de Z_T e que portanto $Q_0(\Delta) < Q_0(\tilde{\Delta})$ se e só se $e(Z_T) > e(Z_{\tilde{T}})$. ■

Este critério, que assenta exclusivamente no comportamento estimado da carteira na estacionaridade, pode, por vezes revelar-se desadequado à realidade da seguradora se, por exemplo, a distribuição dos segurados em carteira se encontrar numa fase em que a carteira ainda não estabilizou. Esta é a principal crítica ao modelo, observado por vários autores ao longo dos anos e que foram apresentadas propostas de melhoria para este modelo de Norberg.

Resultados

O modelo de Norberg assenta na estimação da escala óptima de prémios a aplicar a um sistema de *bonus malus*, com base na distribuição estacionária da carteira. A Tabela 5.1 ilustra a escala de prémios obtida por aplicação do modelo de Norberg no sistema de *bonus malus* em vigor na SIM-Ímpar.

Tabela 5.1: Escalas óptimas de prémios - Modelo de Norberg, actual sistema

Classes	E. Norberg	% PPriori
4	0,0407301	21,85%
5	0,0740889	39,74%
6	0,0773847	41,51%
7	0,0810245	43,46%
8	0,0850623	45,63%
9	0,128452	68,91%
10	0,138897	74,51%
11	0,160245	85,96%
12	0,186416	100,00%
13	0,22878	122,73%
14	0,268712	144,15%
15	0,32212	172,80%
16	0,402221	215,77%

A escala de prémios de Norberg, para o actual sistema de *bonus malus* da carteira automóvel de responsabilidade civil da SIM-Ímpar, cresce de acordo com a propensão à sinistralidade em todas as classes, ou seja os prémios para as apólices situadas nas classes menos gravosas são inferiores em relação aos prémios das apólices situadas nas classes mais gravosas. Verifica-se ainda que, em condições de estacionaridade, considerando a escala de Norberg, um segurado que se encontre na classe de máximo desconto pagaria 21,85% do prémio *a priori*, enquanto que um segurado que se encontra na classe de máximo agravamento pagaria 215,77% do prémio *a priori*.

Tabela 5.2: Escalas óptimas de prémios - Modelo de Norberg, sistema proposto

Classes	E. Norberg	% PPriori
1	0,0451335	19,57%
2	0,0856482	37,14%
3	0,0901789	39,11%
4	0,141873	61,53%
5	0,156081	67,69%
6	0,205803	89,25%
7	0,230595	100,00%
8	0,273163	118,46%
9	0,305463	132,47%
10	0,345963	150,03%
11	0,385702	167,26%

Na escala de prémios de Norberg, ver Tabela 5.2, para o sistema de *bonus malus* proposto, os prémios também crescem de acordo com a propensão à sinistralidade em todas as classes. Sendo que, em condições de estacionaridade, considerando a escala de Norberg, um segurado que se encontre na classe de máximo desconto pagaria 19,57% do prémio a priori, enquanto que um segurado que se encontre na classe de máximo agravamento pagaria 167,26% do prémio *a priori*.

Considerando o modelo de Norberg, verifica-se que o sistema proposto apresenta, para os segurados que se encontram na zona de *malus*, agravamentos mais suaves, e bonificações mais elevadas para os segurados que se encontram na zona de *bonus*, comparativamente com os agravamentos e bonificações do actual sistema.

A Tabela 5.3 ilustra os prémios médios e as medidas de eficiências, para os dois sistemas de *bonus malus* considerados. Da análise da Tabela verifica-se que o prémio médio estacionário, obtido utilizando a escala de Norberg, no actual sistema é de 28,78% do prémio *a priori*, contra os 23,26% do respectivo prémio *a priori*, no sistema proposto. O sistema proposto, considerando a escala de Norberg, apresenta um prémio médio estacionário inferior ao prémio obtido no actual sistema. Contudo, os prémios médios dos dois sistemas, considerando a escala de Norberg, são muito inferiores aos respectivos prémios estacionários ilustrados no capítulo anterior.

Os prémios obtidos por aplicação do modelo de Norberg no sistema aqui proposto, não reflectem os objectivos da seguradora ou seja, não são comercialmente viáveis. Ao optar por esta escala a seguradora estaria sujeita em condições de estacionaridade, a dar descontos elevadíssimos, veja-se por exemplo, um segurado que se encontre nas classes 1, 2 e 3 teria um desconto de 80,43%, 62,86% e 60,89% do prémio *a priori*, esta situação pode causar um desequilíbrio financeiro. Outra desvantagem prática da escala de Norberg aqui

proposta é de apresenterar um prémio médio muito inferior ao respectivo prémio médio estacionário ilustrado no capítulo anterior.

Tabela 5.3: Prémios médios e Medidas de eficiência-Modelo de Norberg

	S. Actual	S.Proposto
P. Médio	28,7753	23,2624
M. Eficiência	0,00399386	0,0038673

Verifica-se ainda, segundo o Teorema 5.2, sendo a medida de eficiência do actual sistema igual a 0,00399386 maior do que 0,0038673, medida de eficiência do sistema proposto, conclui-se, considerando o modelo de Norberg, que o actual sistema tem regras de transição mais eficientes do que o sistema proposto, embora a diferença não seja muito significativa.

5.2.2 Critério de Borgan et al.

Com o objectivo de dar resposta à crítica apontada ao modelo de Norberg, Borgan et al. (1981) generalizam o modelo anterior, por introdução de um sistema de ponderadores $\{w_n; n \in \mathbb{N}_0\}$, onde w_n representa o peso a atribuir ao período n com $n = \mathbb{N}$ e w_0 representa o peso a atribuir à distribuição estacionária (os pesos podem, por exemplo, traduzir a distribuição das idades das apólices na carteira). A escala óptima de prémios, $b_B(j), j = 1, 2, \dots, s$, é então determinada por minimização de

$$Q(\Delta) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n Q_n(\Delta) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n \int_0^{\infty} \sum_{j=1}^s [E(S_n|\lambda) - b_B(j)]^2 p_{\Delta,\lambda}^{(n)}(j) dU(\lambda), \quad (5.13)$$

com $p_{\Delta,\lambda}^{(0)}(j) = \pi_{T,\lambda}(j)$, $j = 1, \dots, s$.

Derivando a expressão anterior em ordem a $b_B(j)$, obtém-se o minimizante

$$b_B(j) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} w_n \int_0^{\infty} E(S_n|\lambda) p_{\Delta,\lambda}^{(n)}(j) dU(\lambda)}{p_{\Delta}(j)}; \quad j = 1, \dots, s \quad (5.14)$$

com

$$p_{\Delta}(j) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n \int_0^{\infty} p_{\Delta,\lambda}^{(n)}(j) dU(\lambda); \quad j = 1, \dots, s. \quad (5.15)$$

$\vec{p}_{\Delta} = [p_{\Delta}(j)]_{j=1, \dots, s}$ é designada por distribuição ponderada de carteira para um horizonte de n anos e estima a distribuição dos segurados pelas classes, efectuando uma média

ponderada da evolução temporal da carteira, com o sistema de ponderadores previamente definido. Esta formulação permite que os resultados obtidos reflitam horizontes temporais mais curtos, não fixando todas as estimativas numa perspectiva de longo prazo, o que se poderá adequar melhor à realidade da carteira.

O critério de eficiência para escala de Borgan et al. (1981) é dado por

$$e(\Delta) = \sum_{j=1}^s (b_B(j))^2 p_{\Delta}(j), \quad (5.16)$$

Segundo Borgan et al. (1981) nada garante que, sendo as classes numeradas por ordem crescente de propensão à sinistralidade, a sucessão dos prémios calculados utilizando o seu critério seja crescente. Esta observação havia já sido verificado também no modelo de Norberg (1976).

Resultados

Neste caso, a escala óptima de prémios é baseada na distribuição estacionária e ponderada. Na definição dos ponderadores, seguiu-se a sugestão de Centeno (2003), fixou-se um conjunto de 25 ponderadores, os quais são determinados recorrendo ao sistema de equações (5.17).

$$\begin{cases} w_n = \frac{w_n - 1}{1 + i} \\ \sum_{n=1}^{25} w_n = 1 \end{cases} \quad (5.17)$$

Em relação ao peso a atribuir à distribuição estacionária, optou-se por não determinar nenhum valor *a priori*, deixando que seja atribuído pela convergência para a estacionaridade do próprio sistema. Caso o sistema não atinja a estacionaridade, o peso a atribuir a distribuição estacionária será zero. O valor de i foi fixado em 5%, conforme utilizado em Centeno (2003). A Figura 5.5 ilustra a distribuição estacionária e a distribuição ponderada do actual sistema da SIM-Ímpar. Devido a magnitude dos valores, representa-se o gráfico separando as classes de desconto das de agravamento e também não é apresentado a classe de máximo desconto.

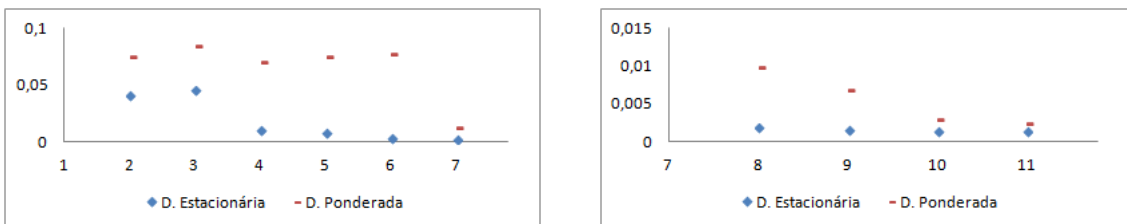


Figura 5.5: Distribuição estacionária vs Distribuição ponderada - Actual sistema.

A escala de prémios resultante da aplicação do modelo de Borgan et al., no actual sistema é ilustrada na Tabela 5.4

Tabela 5.4: Escalas óptimas de prémios - Modelo de Borgan et al., actual sistema

Classes	E. Borgan	% PPriori
4	0,0391934	31,49%
5	0,0505364	40,61%
6	0,053027	42,61%
7	0,055792	44,83%
8	0,0588854	47,32%
9	0,0605635	48,67%
10	0,0636634	51,16%
11	0,0654776	52,61%
12	0,12445	100,00%
13	0,145212	116,68%
14	0,217493	174,76%
15	0,268288	215,58%
16	0,365286	293,52%

Observando a Tabela 5.4, verifica-se que, com o sistema de ponderadores definido, a escala de Borgan et al. (1981), cresce de acordo com a propensão à sinistralidade, ou seja os prémios estão distribuídos por forma que seja menor nas classes com menor índice de sinistralidade, e vai aumentando ao longo das classes, sem qualquer quebra, até à classe com maior índice de sinistralidade. Considerando a escala de Borgan et al., no actual sistema de *bonus malus*, passados 25 anos e em condições de não estacionaridade, um bom segurado pagaria 31,49% do prémio *a priori* e um mau segurado pagaria 293,52% do prémio *a priori*.

Seguidamente apresenta-se a Figura 5.6 que ilustra as distribuições estacionária e ponderada do sistema proposto. À semelhança do que foi dito no actual sistema, aqui também representa-se o gráfico separando as classes de desconto das de agravamento e não é apresentada a classe de máximo desconto.

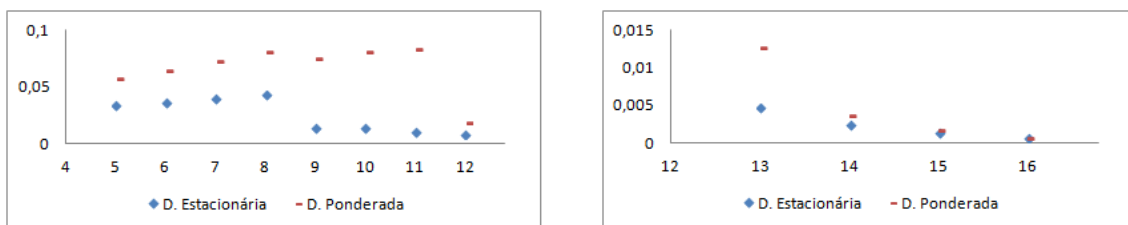


Figura 5.6: Distribuição estacionária vs Distribuição ponderada - Sistema proposto.

Já no modelo proposto, ver Tabela 5.5, a escala de Borgan et al. (1981), não cresce de acordo com a propensão a sinistralidade em todas as classes do sistema, verifica-se uma quebra na classe 4. Esta escala propõe que um “bom” segurado, um segurado que se

encontra na classe de máximo desconto, pague 35,20% do prémio *a priori* enquanto que um “mau”segurado, que se encontre na classe de máximo agravamento, pague 231,50% do prémio *a priori*.

Tabela 5.5: Escalas óptimas de prémios - Modelo de Borgan et al., sistema proposto

Classes	E. Borgan	% PPriori
1	0,0429912	35,20%
2	0,0577426	47,28%
3	0,0611059	50,04%
4	0,0598336	49,00%
5	0,0614674	50,33%
6	0,0620336	50,80%
7	0,122117	100,00%
8	0,134664	110,27%
9	0,157815	129,23%
10	0,234524	192,05%
11	0,2827	231,50%

À semelhança do modelo de Norberg, considerando o modelo de Borgan et al., os agravamentos são mais suaves e as bonificações são, no geral, mais elevadas no sistema de *bonus malus* actual do que no sistema de *bonus malus* proposto.

A Tabela 5.6 mostra os prémios médios e as medidas de eficiência, para os dois sistemas de *bonus malus* considerados. Da Tabela verifica-se que o prémio médio obtido, utilizando a escala de Borgan et al., no actual sistema, é de 43,10% do prémio *a priori*, contra os 43,93% no sistema proposto. O sistema proposto, considerando a escala de Borgan et al., apresenta um prémio médio ligeiramente superior do que, o prémio médio obtido no actual sistema. Os prémios médios obtidos por aplicação do modelo de Borgan et al. são superiores aos respectivos prémios médios obtidos por aplicação do modelo de Norberg. Este facto deve-se à distribuição ponderada que num horizonte de 25 anos não tem, ainda, tantos segurados acumulados nas classes mais baixas.

Tabela 5.6: Prémios médios e Medidas de eficiência-Modelo de Borgan et al.

	S. Actual	S.Proposto
P. Médio	43,1027	43,9259
M. Eficiência	0,00344082	0,00339567

Comparando as escalas de prémios de Norberg com as escalas de prémios de Borgan et al., para os dois modelos, verifica-se, curiosamente, com a excepção da escala óptima de prémios obtida por aplicação do modelo de Borgan et al. no sistema proposto, que

as duas escalas, de Norberg e de Borgan et al., crescem de acordo com a propensão à sinistralidade, e para os dois modelos considerados, o sistema de *bonus malus* proposto revela-se mais “eficaz” comparativamente com o actual sistema de *bonus malus*.

A medida de eficiência do actual sistema, é igual a 0,00344082 e 0,00339567 para o sistema proposto, o que nos permite concluir que, considerando o modelo de Borgan et al., contrariamente à conclusão obtida, considerando o modelo de Norberg, o sistema proposto apresenta um prémio médio maior do que o actual sistema, com uma ligeira perda de eficiência.

5.2.3 Critério de Gilde and Sundt

De forma a solucionar o problema das escalas anteriores, que não garantem a evolução dos prémios no sentido da evolução da sinistralidade, Gilde and Sundt (1989) impõem que os prémios $b(j)$ sejam lineares em j , isto é, escolhem os prémios de forma a minimizar (5.13), introduzindo as restrições

$$b(j) = a + jb, \quad j = 1, \dots, s. \quad (5.18)$$

Sendo o problema minimizar(5.13), começa-se por notar que

$$\begin{aligned} Q(\Delta) &= \sum_{n=0}^{\infty} w_n Q_n = \sum_{n=0}^{\infty} w_n \int_0^{\infty} \sum_{j=1}^s [E(S_n|\lambda) - b(j)]^2 p_{\Delta,\lambda}^{(n)}(j) dU(\lambda) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} w_n \int_0^{\infty} \sum_{j=1}^s E^2(S_n|\lambda) p_{\Delta,\lambda}^{(n)}(j) dU(\lambda) + \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} w_n \int_0^{\infty} \sum_{j=1}^s (b(j))^2 p_{\Delta,\lambda}^{(n)}(j) dU(\lambda) - \\ &- 2 \sum_{n=0}^{\infty} w_n \int_0^{\infty} \sum_{j=1}^s E(S_n|\lambda) b(j) p_{\Delta,\lambda}^{(n)}(j) dU(\lambda). \end{aligned}$$

de onde, por simplificação, se pode concluir que

$$Q(\Delta) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n \int_0^{\infty} E^2(S_n|\lambda) dU(\lambda) + \sum_{j=1}^s (b + jb)^2 p_{\Delta}(j) - 2 \sum_{j=1}^s (a + jb) b_B(j) p_{\Delta}(j). \quad (5.19)$$

Note-se que o primeiro termo do segundo membro é independente da escala escolhida, sendo a restante parte, quando se opta pela escala Bayes, o simétrico da eficiência $e(\Delta)$, ficando clara a generalização ao Teorema 5.2.

A proposta de Gilde and Sundt (1989) passa por determinar os parâmetros a e b , da equação 5.18, por forma a minimizar 5.19.

Derivando a expressão em ordem a a e b e anulando o gradiente obtém-se a solução óptima, que consiste no ponto (a_L, b_L) tal que

$$\left\{ \begin{array}{l} b_L = \frac{\sum_{j=1}^s j b_B(j) p_\Delta(j) - \sum_{j=1}^s j p_\Delta(j) \sum_{j=1}^s b_B(j) p_\Delta(j)}{\sum_{j=1}^s j^2 p_\Delta(j) - \left(\sum_{j=1}^s j p_\Delta(j) \right)^2} \\ a_L = \sum_{j=1}^s b_B(j) p_\Delta(j) - b_L \sum_{j=1}^s j p_\Delta(j). \end{array} \right. \quad (5.20)$$

A escala linear evolui ao longo das classes de forma mais regular, e resolve o problema de uma eventual não monotonia da escala Bayes, bem como de outras irregularidades menos graves. Esta escala pode, no entanto, nalguns casos extremados, ser não admissível, i.e., os prémios das classes menos gravosas podem ter estimativas negativas o que naturalmente, não se pode traduzir numa escala de natureza prática.

A medida de eficiência para escala de Gilde and Sundt (1989) é dado por

$$e(\Delta) = \sum_{j=1}^s (b_L(j))^2 p_\Delta(j), \quad (5.21)$$

sendo a perda de eficiência por se adicionar a restrição 5.18 na minimização da expressão 5.13, dado pelo quociente entre o EQM associado à escala linear e o EQM associado à escala de Bayes.

Resultados

O modelo de Gilde and Sundt, como referido atrás, baseia-se numa escala linear, ou seja, consiste na linearização da escala óptima de prémios proposta por Borgan et al. ou Norberg. No presente trabalho, aplicou-se a escala linear ao modelo de Borgan et al., por esta, contrariamente a escala de Norberg, não estar somente baseada na distribuição estacionária.

A Tabela 5.7 ilustra as escalas de prémios obtidas por aplicação do modelo de Gilde and Sundt, no actual sistema da SIM-Ímpar.

Tabela 5.7: Escalas óptimas de prémios - Modelo de Gilde and Sundt, actual sistema

Classes	E. Gilde	% PPriori
4	0,037385	42,04%
5	0,0438291	49,28%
6	0,0502731	56,53%
7	0,0567172	63,77%
8	0,0631612	71,02%
9	0,0696053	78,26%
10	0,0760493	85,51%
11	0,0824934	92,75%
12	0,0889374	100,00%
13	0,0953815	107,25%
14	0,101826	114,49%
15	0,10827	121,74%
16	0,114714	128,98%

Da Tabela 5.7 pode-se verificar que, embora as escalas óptimas de prémios obtidas por aplicação dos dois modelos anteriores também evoluam de acordo com a propensão à sinistralidade de cada classe, o modelo de Gilde and Sundt apresenta uma escala mais regular, sendo que um segurado que se encontre na classe de máximo desconto pagaria 42,04% do prémio *a priori* e o segurado que se encontre na classe de máximo agravamento pagaria 128,98% do prémio *a priori*. Verica-se assim que as penalizações e os descontos obtidos utilizando o modelo Gilde and Sundt são mais suaves comparativamente com as penalizações e os descontos obtidos por aplicação dos modelo de Norberg e Borgan et al..

Como não deixaria de ser a escala de Gilde and Sundt no sistema proposto também é mais regular e cresce de acordo com a propensão à sinistralidade. A Tabela 5.8 contém os prémios a ser aplicados em cada classe no sistema proposto, considerando o modelo de Gilde and Sundt.

Tabela 5.8: Escalas óptimas de prémios - Modelo de Gilde and Sundt, sistema proposto

Classes	E. Gilde	% PPriori
1	0,0413833	44,20%
2	0,0500916	53,50%
3	0,0587999	62,80%
4	0,0675083	72,10%
5	0,0762166	81,40%
6	0,084925	90,70%
7	0,0936333	100,00%
8	0,102342	109,30%
9	0,11105	118,60%
10	0,119758	127,90%
11	0,128467	137,20%

Considerando o modelo de Gilde and Sundt, o sistema proposto revela-se ligeiramente menos “agressivo” comparativamente com o actual sistema.

Os prémios médios, em condições de não estacionaridade, e as medidas de eficiência, resultantes da aplicação do modelo de Gilde and Sundt, constam da Tabela 5.9. O prémio médio, para o actual sistema, é de 60,31% do prémio *a priori* e de 57,28% do prémio *a priori* para o sistema proposto. Contrariamente aos prémios anteriores obtidos por aplicação dos modelos de Norberg e Borgan et al., estes são superiores aos respectivos prémios médios estacionários. O que se deve, novamente, ao facto de, em condições de não estacionaridade, os segurados não estarem ainda, distribuídos com elevada aglomeração nas classes mais baixas.

Tabela 5.9: Prémios médios e Medidas de eficiência-Modelo de Gilde and Sundt

	S. Actual	S.Proposto
P. Médio	60,3134	57,2885
M. Eficiência	0,00320098	0,003191

As medidas de eficiência do actual sistema e do sistema proposto são ilustradas na Tabela 5.9, de onde se conclui que não há perda significativa de eficiência, quando se opta em utilizar o sistema proposto. Verifica-se que a perda de eficiência por optar pelo novo sistema aqui proposto não se revela significativa.

5.2.4 Critério de Andrade e Silva

Uma outra alternativa para corrigir as lacunas do modelo de Norberg (1976) e de Borgan et al. (1981) é o modelo apresentado por Andrade e Silva (1991), mais tarde publicado

por Andrade e Silva and Centeno (2005), também denominado por Escala Geométrica. À semelhança do modelo de Gilde and Sundt (1989), neste critério pretende-se determinar a e b , sob a restrição

$$b(j) = a \times b^j, \quad j = 1, \dots, s \quad (5.22)$$

de modo a que se minimize a seguinte expressão:

$$Q(\Delta) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n \int_0^{\infty} E^2(S_n|\lambda) dU(\lambda) + \sum_{j=1}^s (a \times b^j)^2 p_{\Delta}(j) - 2 \sum_{j=1}^s (a \times b^j) b_B(j) p_{\Delta}(j). \quad (5.23)$$

Derivando a expressão 5.23 em ordem a a e b e igualando a zero, obtém-se a solução que consiste no ponto (a_G, b_G) .

$$a_G \left[a_G \sum_{j=1}^s j b_G^{2j-1} p_{\Delta}(j) - \sum_{j=1}^s j b_G^{j-1} b_B(j) p_{\Delta}(j) \right] = 0 \quad (5.24)$$

substituindo a expressão de a_G , e tendo em conta os valores admissíveis para a_G e b_G , obtém-se a seguinte equação mais simplificada

$$\sum_{j=1}^s b_G^j b_B(j) \sum_{j=1}^s j b_G^{2j} p_{\Delta}(j) = \sum_{j=1}^s j b_G^j b_B(j) p_{\Delta}(j) \sum_{j=1}^s b_G^{2j} p_{\Delta}(j). \quad (5.25)$$

Os autores não provam a existência de uma solução única de b_G na equação 5.25, contudo, em todos os exemplos que determinaram a solução numérica da equação, mostrou-se existir uma e uma só solução admissível para b_G . O ponto de estacionaridade que se obtiver será certamente um minimizante, já que $\partial Q(\Delta)/\partial b < 0$ em $b = 1$ e os valores admissíveis supõem $b_G > 1$. Tal como referido pelos autores, apesar das lacunas que o modelo origina, é importante referir que, em termos práticos, as soluções admissíveis situam-se num intervalo relativamente estreito¹, o que torna possível um estudo cuidado deste intervalo por forma a verificar a unicidade da solução, em cada situação concreta.

A medida de eficiência desta escala, para medir a eficiência do modelo, é semelhante à definida na escala linear, ou seja, é dado por:

$$e(\Delta) = \sum_{j=1}^s (b_G(j))^2 p_{\Delta}(j), \quad (5.26)$$

e a perda de eficiência por se adicionar a restrição 5.26 na minimização da expressão 5.23 é apresentada como o quociente entre o erro quadrático médio associado à escala geométrica

¹ b_G deve estar situado entre 1 e um máximo de 3

e o erro quadrático médio associado à escala de Bayes.

Resultados

A escala de Andrade e Silva serve de alternativa à escala de Gilde and Sundt quando se pretende que a diferença dos prémios entre as classes i e j seja em termos proporcionais e não em termos absolutos. À semelhança da escala linear, aplicou-se a escala geométrica ao modelo de Borgan et al..

A Tabela 5.10 ilustra a escala óptima de prémios resultante da aplicação do modelo de Andrade e Silva, no actual sistema da SIM-Ímpar.

Tabela 5.10: Escalas óptimas de prémios - Modelo de Andrade e Silva, actual sistema

Classes	E. Andrade	% PPriori
4	0,041376	46,65%
5	0,0455136	51,32%
6	0,050065	56,45%
7	0,0550715	62,09%
8	0,0605786	68,31%
9	0,0666365	75,13%
10	0,0733001	82,64%
11	0,0806302	90,91%
12	0,0886932	100,00%
13	0,0975625	110,00%
14	0,107319	121,00%
15	0,118051	133,10%
16	0,129856	146,41%

Da Tabela 5.10 verifica-se, como seria de esperar, que esta também cresce de acordo com a propensão à sinistralidade em todas as classes do sistema. Considerado esta escala, um “bom”segurado pagará 46,65% do prémio *a priori* enquanto que um “mau”segurado pagará 146,41% do prémio *a priori*.

A mesma análise pode-se fazer no sistema proposto, cujo prémios a aplicar ao SBM, por aplicação do modelo de Andrade e Silva, constam da Tabela 5.11.

Tabela 5.11: Escalas ótimas de prémios - Modelo de Andrade e Silva, sistema proposto

Classes	E. Andrade	% PPriori
1	0,0472312	56,45%
2	0,0519543	62,09%
3	0,0571497	68,30%
4	0,0628647	75,13%
5	0,0691512	82,64%
6	0,0760663	90,91%
7	0,0836729	100,00%
8	0,0920402	110,00%
9	0,101244	121,00%
10	0,111369	133,10%
11	0,122506	146,41%

A Tabela 5.12, ilustra os prémios médios, em condições de não estacionaridade, utilizando o modelo de Andrade e Silva para os dois sistemas. Como se pode ver, os prémios médios obtidos por aplicação deste modelo são também superiores comparativamente com os respectivos prémios estacionários. O prémio médio no actual sistema aplicando o modelo de Andrade e Silva, seria de 61,59% do prémio a priori, contra 65,88% no sistema proposto.

Considerando o modelo de Andrade e Silva as bonificações e os agravamentos no sistema proposto são iguais às bonificações e agravamentos nas classes que se situam à mesma distância da classe de entrada no actual sistema (por exemplo a classe 3 no sistema proposto situa-se a mesma distância da classe 8 no actual sistema, partindo das respectivas classes de entrada), o que era de se esperar uma vez que esta escala tem a mesma diferença em termos proporcionais nos dois sistemas considerados. Assim, depois de se proceder à normalização necessária com o objectivo de ter os prémios em percentagem do prémio da classe de entrada é óbvio que as bonificações e agravamentos que se situam à mesma distância das respectivas classes de entrada nos dois sistemas serem iguais.

Tabela 5.12: Prémios médios e Medidas de eficiência-Modelo de Andrade e Silva

	S. Actual	S.Proposto
P. Médio	61,587	65,8898
M. Eficiência	0,00323312	0,00319019

Da mesma Tabela 5.12 pode-se dizer, tendo em conta as medidas de eficiência dos dois sistemas em análise, que não ha perda significativa de eficiência, pelo que é vantajoso optar pelo sistema proposto uma vez que este apresenta maior prémio médio.

As perdas de eficiência, por adicionar restrições na determinação de escalas ótimas,

para os dois sistemas em estudo constam na Tabela 5.13, de onde observa-se que, não há perda significativa de eficiência ao optar pela escala proposta por Gilde and Sundt ou Andrade e Silva em detrimento da escala de Bayes.

Tabela 5.13: Perdas de eficiência- Actual sistema *vs* Sistema proposto

	S. Actual	S. Proposto
eBorgan/eGilde	1,07493	1,06415
eBorgan/eAndrd	1,06424	1,06441
eGilde/eAndrad	0,990058	1,00025

No geral, o sistema proposto apresenta regras de transição tão eficientes quanto as regras de transição do actual sistema, contudo, considera-se que o sistema proposto se revela comercialmente mais vantajoso e apelativo.

A finalizar este capítulo gostaríamos de realçar que o novo sistema proposto nesta dissertação, para além de ir ao encontro das expectativas da seguradora, propondo transições entre classes mais regulares e suaves (principalmente para os segurados das classes bonificadas) não se revelou estatisticamente e actuarialmente menos eficiente. Assim sendo, considerou-se que a aplicação deste novo sistema na SIM-Ímpar se poderá revelar adequado às expectativas da seguradora, uma vez que, do ponto de vista do segurado, e portanto de um ponto de vista comercial, o sistema se apresenta mais atractivo o que, possivelmente, auxiliará na redução do número de anulações de apólices que hoje em dia são uma realidade da seguradora.

Relativamente à escala de prémios a adoptar no novo sistema a implementar, sugere-se, após análise de todos os resultados obtidos nesta dissertação, que a SIM-Ímpar optasse por uma das escalas linear ou geométrica, tendo por base os seguintes argumentos:

- O sistema com as novas regras é, por si só, menos gravoso que o sistema actualmente em vigor;
- De um ponto de vista actuarial, o sistema deve ser prudente relativamente às bonificações a conceder. Os descontos propostos pelas escalas de Norberg e Borgan et al. revelam-se pouco prudentes pois atribuem descontos excessivos nas classes mais baixas onde se verifica que os segurados tendem a aglomerar-se. Sob esta perspectiva, as escalas lineares e geométrica destacam-se por serem mais prudentes nos descontos a atribuir;
- A conjugação do binómio regras|prémios permite que a seguradora sinta, a curto prazo, o benefício de ausência de sinistros, sem comprometer em excesso a eventual solvência de carteira. Garante-se, desta forma, um dos objectivos presentes na instituição de um sistema de tarifação *a posteriori*: incentivo à redução de sinistralidade;

- Relativamente aos prémios das classes agravadas (onde se situam os segurados com frequência de sinistralidade acima da média), a escala linear propõe, na nossa opinião, prémios pouco penalizadores pelo que, sob este ponto de vista, a escala geométrica nos parece revelar-se mais adequada, embora não seja particularmente penalizadora. Note-se que, para que os objectivos de um SBM sejam efectivamente atingidos um segurado deve sentir o impacto no seu prémio, aquando de ocorrência de sinistros, tal como deve sentir uma redução na ausência de sinistralidade. Ambos os aspectos são relevantes de um ponto de vista comercial e de um ponto de vista de segurança da seguradora.

As medidas de avaliação de Lemaire para as escalas aqui sugeridas à seguradora, são apresentadas na Tabela 5.14.

Tabela 5.14: Medidas de avaliação de Lemaire para as escalas propostas

			Elasticidade Transiente		
	E. Linear	E. Geométrica	Classes	E. Linear	E. Geométrica
<i>RSAL</i>	0,14076	0,10496	1	0,0636733	0,0396805
			2	0,0631181	0,0394709
			3	0,0620812	0,0390626
			4	0,0606524	0,0384728
<i>CV</i>	0,823396	0,883844	5	0,058924	0,0377207
			6	0,0569939	0,0368348
			7	0,0549432	0,035839
			8	0,0528757	0,0347826
			9	0,0508402	0,0336843
<i>η</i>	0,0730019	0,0466442	10	0,0490239	0,0326652
			11	0,0473804	0,0316953

Para terminar, ressalta-se que, na escolha do SBM a vigorar numa seguradora, muitas análises devem ser tomadas em consideração, tal como evidenciado ao longo desta dissertação. A eficiência estatística e actuarial deve ser tido em conta a par com os objectivos comerciais que a seguradora pretende instituir, ou seja, as regras e prémios a instituir devem reflectir as preocupações comerciais da seguradora sem comprometer a análise actuarial do risco envolvido na implementação do SBM. Alguns estudos recentes, ver por exemplo Afonso et al. (2014) e Silva (2014) quantificam o impacto de um SBM na probabilidade de ruína, numa carteira automóvel de responsabilidade civil, mostrando que não é de descurar a escolha dos prémios a aplicar na quantificação dessa probabilidade.

Capítulo 6

Conclusão

O presente trabalho foi efectuado, tendo por base a proposta de analisar o sistema de *bonus malus* associado ao seguro de responsabilidade civil automóvel da seguradora SIM-Ímpar sediada em Moçambique. Nas nossas análises, vários indicadores foram analisados e considerou-se que o sistema de *bonus malus* da SIM-Ímpar deverá ser melhorado, sobretudo relativamente aos pontos seguintes:

- Regras de transição,
- Relatividade das bonificações|agravamentos,
- Construção de uma nova escala de prémios.

Na tentativa de melhorar o actual sistema de *bonus malus*, propõe-se um novo sistema com um novo conjunto de regras de transição e efectuando-se uma análise comparativa com o sistema actual ajustado.

Importa referir que em Moçambique não é comum a troca de informação entre as seguradoras, como também não é comum, as seguradoras exigirem o certificado de tarificação a um novo segurado. Isto faz com que um segurado, que se sinta em desvantagem numa dada seguradora, anule a apólice, procurando melhores oportunidades noutras seguradoras, pois lá este é considerado como se de um novo segurado se tratasse, sem qualquer histórico de sinistralidade, o que nalguns casos não constitui a verdade. Quando isto acontece, faz com que o sistema de *bonus malus* utilizado seja financeiramente desequilibrado.

O tamanho da amostra utilizada no estudo não sofreu qualquer reajuste. Em termos de dimensão, para uma carteira que cobre a totalidade do país, considera-se ser demasiado reduzida, o que, de alguma forma, pode influenciar os resultados obtidos ao longo deste trabalho.

Nos sistemas de *bonus malus* aqui abordados, estiveram implícitas as hipóteses de que os sistemas foram analisados tendo em conta a frequência de sinistralidade e não os montantes das indemnizações, assumindo desta forma a independência entre eles.

Os resultados apresentados nesta dissertação, são válidos sob perspectiva duma carteira fechada, ou seja, na carteira analisada, não foram consideradas as entradas e saídas dos segurados. Os sistemas de *bonus malus* aqui analisados são para ser aplicados às garantias de responsabilidade civil e não de danos próprios, uma vez que as garantias de danos próprios têm no geral uma frequência de sinistralidade mais elevada que a frequência de sinistralidade para as garantias de responsabilidade civil aqui estimadas.

Inicialmente, propôs-se um sistema de *bonus malus* que suprisse as lacunas apresentadas pelo actual sistema (regras de transição omissas nalgumas classes), sem registo de mudanças drásticas. Após a análise, constatou-se que o sistema de *bonus malus*, penalizava fortemente a ocorrência de sinistros nas classes de desconto adequados para SBM, o que faz que se verifique uma elevada anulação de apólices nos primeiros anos de vigência. Assim no decorrer deste projecto, surgiu como proposta da SIM-Ímpar que este trabalho incluísse uma proposta para um novo sistema de *bonus malus* que fosse menos “duro” do que o actualmente em vigor.

Da análise dos vários indicadores adequados para SBM, comparando os dois sistemas considerados, e tendo em conta os factores como os aspectos comerciais e a concorrência do mercado, o sistema proposto mostrou-se, no geral, ser eficaz, e apresenta, no geral, escalas de prémios mais “leves”, ou seja, apresenta escalas em que os descontos são elevados e o agravamentos são baixos comparativamente com os descontos e agravamentos das escalas de prémios do actual sistema. Contudo, temos de reconhecer que o actual sistema ajustado, penaliza fortemente a ocorrência de sinistros e, por conseguinte, apresenta no geral medidas de avaliação mais elevadas que as medidas de avaliação do sistema proposto.

Da análise das medidas de eficiência dos dois sistemas de *bonus malus*, verificou-se que, no geral não há perda significativa de eficiência quando se opta em utilizar o sistema proposto em detrimento do sistema em vigor.

Uma das questões que achamos ser interessante estudar, é saber até quanto os segurados estão dispostos a suportar os custos com os sinistros de pequena dimensão, não participando à seguradora, por forma a evitar a aplicação de agravamentos no prémio, fenómeno este designado na literatura de Sistemas *Bonus Malus* por *sede de bónus*, e que pode ser consultado, por exemplo, em Lemaire (1995). Contudo, devido à sua complexidade e insuficiência de informação, infelizmente, não foi abordado os efeitos da retenção média óptima nos sistema de *bonus malus* em estudo.

Outra das questões que se considere ser relevante, de um ponto de vista prático da seguradora, é o de analisar a escala óptima de prémios e as estimativas da distribuição dos

segurados nas classes do SBM, ao longo do tempo, sob uma perspectiva de carteira aberta (considerando que novos segurados entram anualmente na carteira e que outros anulam as suas apólices). Estudos desta natureza foram já efectuados por outros autores, dos quais se cita Guerreiro (2001), Guerreiro and Mexia (2004), Guerreiro et al. (2014) e Centeno and Andrade e Silva (2001).

Bibliografia

- Afonso, M., Egidio dos Reis, A., Guerreiro, G., and Cardoso, R. (2014). Measuring the impact of a bonus-malus system in finite and continuous time ruin probabilities, for large portfolios in motor insurance. In *Comunicação no 2th European Actuarial Journal Conference, Viena, Setembro de 2014*.
- Andrade e Silva, J. (1991). Estruturas tarifárias nos ramos reais da indústria seguradora—uma aplicação ao sector automóvel em Portugal. *Instituto Superior de Economia e Gestão, Universidade Técnica de Lisboa*.
- Andrade e Silva, J. M. and Centeno, M. d. L. (2005). A note on bonus scales. *Journal of Risk and Insurance*, 72(4):601–607.
- Baione, F., Levantesi, S., and Menzietti, M. (2002). The development of an optimal bonus-malus system in a competitive market. *Astin Bulletin*, 32(1):159–170.
- Binti Manan, N., Hashim, H., and Mohd, M. A. (2013). Modification of the current Malaysian no-claim discount system using Markov chains. In *Business Engineering and Industrial Applications Colloquium (BEIAC), 2013 IEEE*. IEEE:926–931.
- Borgan, Ø., Hoem, J. M., and Norberg, R. (1981). A nonasymptotic criterion for the evaluation of automobile bonus systems. *Scandinavian Actuarial Journal*, 1981(3):165–178.
- Bowers, N. L., Gerber, H. U., Hickman, J. C., Jones, D. A., and Nesbitt, C. J. (1986). *Actuarial mathematics*, volume 2. Society of Actuaries Itasca, Ill.
- Centeno, M. d. L. (2003). *Teoria do risco na actividade seguradora*. Celta Editora, Coleção Económicas, Oeiras.
- Centeno, M. d. L. and Andrade e Silva, J. M. (2001). Bonus systems in an open portfolio. *Insurance: mathematics and economics*, 28(3):341–350.
- De Jong, P. and Heller, G. Z. (2008). *Generalized linear models for insurance data*, volume 136. Cambridge University Press Cambridge.
- Denuit, M. and Dhaene, J. (2001). Bonus-malus scales using exponential loss functions. *Blätter der DGVMF*, 25(1):13–27.

- Dionne, G. and Ghali, O. (2005). The (1992) bonus-malus system in tunisia: An empirical evaluation. *Journal of Risk and Insurance*, 72(4):609–633.
- Geiss, C. (2010). Non-life insurance mathematics. *Lecture Notes, University of Jyvaskyla*.
- Gilde, V. and Sundt, B. (1989). On bonus systems with credibility scales. *Scandinavian Actuarial Journal*, 1989(1):13–22.
- Grandell, J. (1997). *The mixed Poisson process*. Chapman & Hall.
- Guerreiro, G. and Mexia, J. T. (2004). An alternative approach to bonus malus. *Discussiones Mathematicae, Probability and Statistics*, 24(2):197–213.
- Guerreiro, G. R. (2013). *Modelos Lineares Generalizados Aplicados à Tarifação Automóvel, Notas de apoio à unidade curricular de Gestão do Risco em Actuariado Não Vida*. Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa.
- Guerreiro, G. R., Mexia, J. T., and de Fátima Miguens, M. (2014). Statistical approach for open bonus malus. *Astin Bulletin*, 44(01):63–83.
- Guerreiro, G. R. D. (2001). *Uma abordagem alternativa para bonus malus, Dissertação de Mestrado*. Instituto Superior de Economia e Gestão, Universidade Técnica de Lisboa.
- Ibiwoye, A., Adeleke, I., and Aduloju, S. (2011). Quest for optimal bonus-malus in automobile insurance in developing economies: An actuarial perspective. *International Business Research*, 4(4):74–83.
- Lemaire, J. (1995). *Bonus-malus systems in automobile insurance*, volume 19. Springer.
- Lemaire, J. and Zi, H. (1994). A comparative analysis of 30 bonus-malus systems. *Astin Bulletin*, 24(2):287–309.
- Loimaranta, K. (1972). Some asymptotic properties of bonus systems. *Astin Bulletin*, 6(3):233–245.
- Mucusse, M. A. (2012). O cantinho do mucusse. <http://mucusse.no.comunidades.net/>. Online; accessed: 2014-11-13.
- Norberg, R. (1976). A credibility theory for automobile bonus systems. *Scandinavian Actuarial Journal*, 1976(2):92–107.
- Ohlsson, E. and Johansson, B. (2010). *Non-life insurance pricing with generalized linear models*. Springer.
- Parzen, E. (1999). *Stochastic processes*, volume 24. SIAM.
- Pereira, E. F. (1998). O sistemas de bonus malus no seguro automóvel. *Revista do Instituto de Seguros de Portugal. Lisboa*.

- Pereira, E. F. and de Sá, C. M. (1999). Efeitos da retenção óptima nos sistemas de bonus malus. *Revista do Instituto de Seguros de Portugal. Lisboa.*
- Rolski, T., Schmidli, H., Schmidt, V., and Teugels, J. (2009). *Stochastic processes for insurance and finance*, volume 505. John Wiley & Sons.
- Ross, S. M. (1996). *Stochastic processes*, volume 2. John Wiley & Sons New York.
- Sichel, H. (1971). On a family of discrete distributions particularly suited to represent long-tailed frequency data. In *Proceedings of the Third Symposium on Mathematical Statistics*. Ed. by Laubscher, N.F., CSIR, Pretoria:51–97.
- Silva, M. (2014). *Impacto do sistema de bonus malus na probabilidade de ruína em tempo contínuo e finito, Dissertação de Mestrado*. Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa.
- Tan, C. I., Jackie, L., Johnny, L., and Balasooriya, U. (2014). Optimal Relativities and Transition Rules of a Bonus-Malus System. In *Apresentação no 30th Internacional Congress of Actuaries, Washington, DC, USA, 30 de Março a 4 de Abril de 2014*.
- Taylor, H. and Karlin, S. (1984). An introduction to stochastic modeling academic press. *New York.*
- Wolthuis, H. (1994). *Life insurance mathematics (The Markovian model)*. Instituut voor Actuarie en Econometrie.

Apêndices

Tabela 1: Discretização da distribuição de estrutura-Inversa Gaussiana

λ	u_{λ}^d	λ	u_{λ}^d	λ	u_{λ}^d	λ	u_{λ}^d
0,01	0,151334	0,26	0,00169902	0,51	0,0000819853	0,76	$5,80365 \times 10^{-6}$
0,02	0,189138	0,27	0,00148317	0,52	0,0000733839	0,77	$5,24192 \times 10^{-6}$
0,03	0,144524	0,28	0,0012971	0,53	0,0000657191	0,78	$4,7357 \times 10^{-6}$
0,04	0,105621	0,29	0,0011363	0,54	0,0000588845	0,79	$4,27938 \times 10^{-6}$
0,05	0,0783041	0,30	0,00099703	0,55	0,0000527863	0,80	$3,86793 \times 10^{-6}$
0,06	0,0592991	0,31	0,000876135	0,56	0,0000473417	0,81	$3,49682 \times 10^{-6}$
0,07	0,0458024	0,32	0,000770981	0,57	0,0000424779	0,82	$3,16202 \times 10^{-6}$
0,08	0,0359829	0,33	0,000679346	0,58	0,0000381305	0,83	$2,85988 \times 10^{-6}$
0,09	0,0286774	0,34	0,000599349	0,59	0,0000342424	0,84	$2,58716 \times 10^{-6}$
0,10	0,0231348	0,35	0,000529397	0,60	0,0000307633	0,85	$2,34092 \times 10^{-6}$
0,11	0,0188581	0,36	0,000468131	0,61	0,0000276487	0,86	$2,11854 \times 10^{-6}$
0,12	0,0155097	0,37	0,000414393	0,62	0,0000248589	0,87	$1,91766 \times 10^{-6}$
0,13	0,0128551	0,38	0,000367192	0,63	0,0000223588	0,88	$1,73616 \times 10^{-6}$
0,14	0,0107272	0,39	0,000325678	0,64	0,0000201175	0,89	$1,57214 \times 10^{-6}$
0,15	0,00900521	0,40	0,00028912	0,65	0,0000181071	0,90	$1,42386 \times 10^{-6}$
0,16	0,00759976	0,41	0,000256888	0,66	0,0000163031	0,91	$1,28981 \times 10^{-6}$
0,17	0,00644408	0,42	0,000228437	0,67	0,0000146837	0,92	$1,16858 \times 10^{-6}$
0,18	0,0054874	0,43	0,000203297	0,68	0,0000132293	0,93	$1,05892 \times 10^{-6}$
0,19	0,00469072	0,44	0,000181061	0,69	0,0000119227	0,94	$9,59719 \times 10^{-7}$
0,20	0,00402368	0,45	0,000161372	0,70	0,0000107484	0,95	$8,69951 \times 10^{-7}$
0,21	0,00346246	0,46	0,000143924	0,71	$9,69255 \times 10^{-6}$	0,96	$7,88707 \times 10^{-7}$
0,22	0,00298817	0,47	0,000128447	0,72	$8,74292 \times 10^{-6}$	0,97	$7,15162 \times 10^{-7}$
0,23	0,00258573	0,48	0,000114707	0,73	$7,88851 \times 10^{-6}$	0,98	$6,48576 \times 10^{-7}$
0,24	0,00224299	0,49	0,000102499	0,74	$7,11952 \times 10^{-6}$	0,99	$5,88278 \times 10^{-7}$
0,25	0,0019501	0,50	0,0000916446	0,75	$6,42718 \times 10^{-6}$	1,00	$5,82578 \times 10^{-6}$

Tabela 2: Distribuição estacionária *vs* Distribuição ponderada - Actual sistema

Classes	D. Estacionária	D. Ponderada
4	0,793949	0,442278
5	0,0334963	0,0582964
6	0,0361396	0,0652136
7	0,0391272	0,0731115
8	0,042525	0,0821756
9	0,0141403	0,0753004
10	0,0136504	0,0815534
11	0,00976678	0,0842509
12	0,00789648	0,0191337
13	0,00467688	0,0127069
14	0,00248535	0,00358345
15	0,00140514	0,00170616
16	0,000741623	0,000690321

Tabela 3: Distribuição estacionária *vs* Distribuição ponderada - Sistema proposto

Classes	D. Estacionária	D. Ponderada
1	0,882152	0,579139
2	0,0415202	0,0755034
3	0,0453465	0,0850741
4	0,0099862	0,0712499
5	0,00799067	0,0754632
6	0,0036185	0,0784554
7	0,00280808	0,0124925
8	0,0019422	0,00999891
9	0,0016716	0,00700986
10	0,00148463	0,00309503
11	0,00147984	0,00251897

