



Rita Sofia Marques Caneco

Licenciada em Matemática

Relatório de Estágio

O uso de exemplos na demonstração

Um estudo com alunos de 11.º ano

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em
Ensino de Matemática no 3.º ciclo do Ensino Básico e no Secundário

Orientadora: Professora Doutora Helena Cristina Oitavem Fonseca da Rocha,
Professora Auxiliar,
Faculdade de Ciências e Tecnologias da
Universidade Nova de Lisboa

Coorientadora: Professora Licenciada Elisabete Maria Nunes Pinto Ferreira,
Professora,
Agrupamento de Escolas João de Barros

Júri:

Presidente: Doutora Maria Helena Coutinho Gomes de Almeida Santos

Arguentes: Doutor António Manuel Dias Domingos

Vogais: Doutora Helena Cristina Oitavem Fonseca da Rocha
Licenciada Elisabete Maria Nunes Pinto Ferreira
Doutora Paula Cristina Antunes Teixeira



FACULDADE DE
CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Julho 2019

Rita Sofia Marques Caneco

O uso de exemplos na demonstração
Um estudo com alunos de 11.º ano

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em
Ensino da Matemática no 3.º ciclo do Ensino Básico e no Secundário

Orientadora: Professora Doutora Helena Cristina Oitavem Fonseca da Rocha, Professora
Auxiliar, Faculdade de Ciências e Tecnologias da Universidade Nova de Lisboa

Coorientadora: Professora Licenciada Elisabete Maria Nunes Pinto Ferreira, Professora,
Agrupamento de Escolas João de Barros

Júri:

Presidente: Doutora Maria Helena Coutinho Gomes de Almeida Santos

Arguente: Doutor António Manuel Dias Domingos

Vogais: Doutora Helena Cristina Oitavem Fonseca da Rocha
Licenciada Elisabete Maria Nunes Pinto Ferreira
Doutora Paula Cristina Antunes Teixeira

Julho de 2019

O uso de exemplos na demonstração: Um estudo com alunos de 11.º ano

Copyright © Rita Sofia Marques Caneco, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa.

A Faculdade de Ciências e Tecnologia e a Universidade Nova de Lisboa têm o direito, perpétuo e sem limites geográficos, de arquivar e publicar esta dissertação através de exemplares impressos reproduzidos em papel ou de forma digital, ou por qualquer outro meio conhecido ou que venha a ser inventado, e de a divulgar através de repositórios científicos e de admitir a sua cópia e distribuição com objetivos educacionais ou de investigação, não comerciais, desde que seja dado crédito ao autor e editor.

Agradecimentos

Às professoras Elisabete Ferreira e Paula Teixeira por partilharem comigo as suas salas e os seus alunos e me inspirarem a ser uma boa professora de Matemática. Obrigada por todo o apoio, tempo e conselhos que me deram.

À professora Maria Helena Santos pela sua honestidade, pelos seus conselhos e por me fazer querer ser melhor todos os dias.

À professora Helena Rocha por me dar a conhecer o mundo da Investigação em Educação Matemática, por acreditar em mim desde o início e por todas as oportunidades que me proporcionou.

A todos os professores do Agrupamento de Escolas João de Barros que me receberam e que partilharam comigo a sua paixão pelo ensino, as suas histórias e tantos conselhos valiosos, entre eles, a professora Cristina Pina, o professor Jorge Fernandes, a professora Maria Guiomar e o professor Renato Dias.

À professora Elisabete Gomes por colocar questões tão boas sobre a educação e por me deixar explorar, refletir e questionar o mundo.

A todos os alunos que me têm acompanhado nesta viagem, por serem tão pacientes e carinhosos comigo. Obrigada por me ensinarem, tal como eu vos ensinei. Em particular, obrigada aos alunos que participaram no meu estudo por partilharem o seu tempo comigo e darem o seu melhor.

A todos os professores que já tive, desde a minha primeira professora, a professora Georgina, que me inspiraram a seguir o caminho com que eu sonhava desde pequena.

À minha família por estar sempre disponível. Aos meus pais por me apoiarem sempre e por me encorajarem a seguir o meu sonho. Aos meus sobrinhos por me distraírem com os seus abraços e brincadeiras. Ao meu irmão por me acompanhar e aconselhar desde o meu primeiro dia.

Ao Mikas por me levar a passear todos os dias e me ajudar a distrair.

Aos meus colegas de curso, pela maravilhosa viagem que me proporcionaram, pela companhia e apoio. Em especial, obrigada à Carina, que me acompanhou no estágio, e partilhou comigo tantos momentos de luta e superação.

Aos meus amigos que me acompanharam nesta viagem: Coelho, Gonçalo, Gui, Henrique, Mariana, Rita, Rosa, Tiago e Vieira. Obrigada por me ouvirem e por me distraírem quando precisei.

A todos aqueles que acreditaram em mim, que me aconselharam e apoiaram, e que são mais do que cabem numa página.

Resumo

O presente trabalho está dividido em duas partes, começando por uma breve exposição do trabalho realizado no estágio pedagógico, no âmbito do Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º ciclo do Ensino Básico e no Secundário, e seguindo-se a apresentação da investigação em Educação Matemática realizada no contexto deste estágio.

A primeira parte inicia-se com uma caracterização do contexto escolar em que decorreu o estágio, seguindo-se as reflexões da professora estagiária em relação à sua prática pedagógica supervisionada, uma breve exposição no trabalho não letivo realizado na escola e por fim as suas reflexões em relação a todos estes momentos de aprendizagem e crescimento.

A segunda parte corresponde ao trabalho de investigação em Educação Matemática, que teve como objetivo analisar o modo como os alunos de uma turma de 11.º ano utilizam exemplos no contexto da demonstração matemática. Neste sentido foram analisadas as resoluções dos alunos a problemas de demonstrar a veracidade ou falsidade de algumas afirmações relacionadas com os temas Sucessões 11.º ano e Funções Reais de Variável Real 10.º ano e foram realizadas algumas entrevistas para tentar compreender o raciocínio e as opções tomadas pelos alunos. Este trabalho procurou responder às seguintes questões de investigação:

- i) Quais os critérios ou estratégias usadas pelos alunos na escolha dos exemplos?
- ii) Qual o propósito dos alunos no momento da criação de exemplos?
- iii) Como é que a criação de exemplos e os tipos de exemplo procurados se relacionam com o sucesso da demonstração?
- iv) De que forma os alunos expressam as suas ideias numa demonstração e como é que isso contribui para o sucesso da demonstração?

As conclusões deste estudo sugerem que os alunos priorizam os exemplos *típicos*, que conhecem da sala de aula ou do manual, ou *a primeira ideia* que lhes ocorre no momento de resolução da tarefa. Os alunos sabiam o que queriam atingir com os exemplos e apresentaram diversos propósitos, no entanto nem sempre eram capazes de chegar a um exemplo que lhes permitisse atingir o propósito ambicionado (*transmitir um argumento geral, explorar a representação, reivindicar, refutar, entre outros*). Quanto às estratégias de sucesso detetadas, um dos pares optou por escolher exemplos *simples* e outro optou por recorrer à representação gráfica das sucessões e funções.

Este trabalho vem sublinhar algumas questões referidas por outros autores, tal como a importância da demonstração no ensino (De Villiers, 1990), a importância do uso de exemplos na demonstração matemática (Watson & Chick, 2011) e o facto de os alunos raramente aprenderem a usar exemplos de forma eficiente e estratégica (Knuth, Zaslavsky, & Ellis, 2019).

Palavras-chave: Estágio pedagógico; Ensino Básico; Ensino Secundário; Matemática; Demonstração; Uso de exemplos; Sucessões; Funções; Representações.

Abstract

This work is divided in two parts, starting with a brief description of the work carried out in the pedagogic internship of the Master's Degree in Mathematics Teaching in the 3rd cycle of Basic and Secondary Education, followed by a presentation of the research in Mathematics Education conducted in the context of this internship.

The first part begins with a characterization of the school context in which the internship took place, followed by the reflections of the trainee teacher regarding her supervised pedagogical practice, a brief exposition in the non-teaching related work carried out in the school and, finally, her reflections in relation to all these moments of learning and growth.

The second part corresponds to the research study in Mathematics Education, which had as objective the analyse of the way in which the students of the 11th grade use examples in the context of mathematical demonstration. These tasks were related to the subjects of successions and functions. To achieve this goal, the student's resolutions of problems regarding the proof of the veracity or falsity of some affirmations were analysed. Also, some interviews were conducted to try and understand the reasoning and options made by the students. This work sought to answer the following research questions:

- i) Which criteria or strategies do students use in choosing the examples?
- ii) What is the purpose of the students when creating examples?
- iii) How does the creation of examples and their type relate to the success of the demonstration?
- iv) How do students express their ideas in a demonstration and how does this contribute to the success of the proof?

The conclusions of this study suggest that students prioritize typical examples, known from classroom or the manual, or the first idea that occurs to them when solving the task. The students knew what they wanted to achieve with the use of examples and had several purposes in mind when doing so, however they were not always able to obtain an example that would allow them to achieve their intended purpose (transmitting a general argument, exploring the representation, claiming their point, refuting the conjecture, among others). As for the successful strategies detected, one of the pairs chose simple examples and another chose to resort to the graphical representation of the sequences and functions.

This paper highlights some of the issues raised by other authors, such as the importance of demonstration in teaching (De Villiers, 1990), the importance of using examples in mathematics demonstration (Watson & Chick, 2011) and the fact that students rarely learn to use examples in an efficient and strategic way (Knuth, Zaslavsky, & Ellis, 2019)).

Keywords: Pedagogical internship; Basic education; High school education; Mathematics; Proof; Use of examples; Succession; Functions; Representations.

Índice

PARTE 1	1
1 CARACTERIZAÇÃO DA ESCOLA, DO AGRUPAMENTO E DO CONCELHO	3
1.1 <i>O concelho de Seixal</i>	3
1.2 <i>O Agrupamento de Escolas João de Barros</i>	4
1.3 <i>A Escola Secundária João de Barros</i>	6
2 PRÁTICA PEDAGÓGICA SUPERVISIONADA	11
2.1 <i>Turma de 11.º ano</i>	11
2.1.1 Caracterização da turma.....	12
2.1.2 Aulas assistidas	14
Tirando esse último aspeto, a professora estagiária considera que não faria grandes alterações no plano desta aula se o voltasse a aplicar.....	43
2.1.3 Avaliação e Classificação.....	43
2.2 <i>Turma de 9.º ano</i>	44
2.2.1 Caracterização da turma.....	44
2.2.2 Aulas assistidas	47
3 PRÁTICA NÃO LETIVA.....	63
3.1 <i>Direção de Turma e Reuniões assistidas</i>	63
3.1.1 Direção de Turma e Conselho de Turma.....	63
3.1.2 Reuniões do grupo de recrutamento - 500.....	64
3.2 <i>Atividades organizadas pelo núcleo de estágio</i>	64
3.2.1 Exposição “Matemática?! Isso serve para quê?”	64
3.2.2 Desafio “Caixeiro Viajante”	65
3.2.3 Workshop de Origami.....	66
3.2.4 Desafio “Olimpíadas”	67
3.2.5 Calendário Dodecaedro.....	67
4 REFLEXÕES SOBRE O ESTÁGIO PEDAGÓGICO	69
5 ANEXOS DA PRIMEIRA PARTE	73
5.1 <i>Regras do jogo aplicado na aula do dia 11 de janeiro</i>	73
5.2 <i>Duas versões da parte da tarefa aplicada nos dias 28 e 29 de janeiro</i>	76
5.3 <i>Segunda parte da tarefa aplicada nos dias 28 e 29 de janeiro</i>	81
5.4 <i>Tarefa aplicada no dia 26 de novembro</i>	84
5.6 <i>Primeira parte da tarefa aplicada na aula do dia 31 de janeiro (uma das versões)</i>	86
5.7 <i>Segunda parte da tarefa aplicada na aula do dia 31 de janeiro</i>	88
5.8 <i>Enunciado Teste n.º 3 (versão B)</i>	92
5.9 <i>Critérios Teste n.º 3 (versão B)</i>	95
5.10 <i>Enunciado Ficha de avaliação n.º 2 (versão A)</i>	101
5.11 <i>Critérios da ficha de avaliação n.º 2 (versão A)</i>	104
PARTE 2	111
1 INTRODUÇÃO.....	113
1.1 <i>Objetivo e questões de investigação</i>	114

1.2	<i>Organização do estudo</i>	114
2	REVISÃO DE LITERATURA.....	115
2.1	<i>A demonstração</i>	115
2.1.1	A demonstração no ensino	115
2.2	<i>Os exemplos na demonstração</i>	116
2.2.1	Critérios e estratégias na escolha de exemplos	116
2.3	<i>Representações</i>	120
3	METODOLOGIA.....	123
3.1	<i>Estudo qualitativo</i>	123
3.2	<i>Estudo de caso</i>	124
3.2.1	Tipos de estudo de caso	126
3.3	<i>Escolha dos participantes</i>	128
3.4	<i>Técnicas de recolha de dados</i>	129
3.4.1	Observação	129
3.4.2	Entrevista.....	130
3.5	<i>Procedimentos metodológicos adotados</i>	130
3.5.1	Escolha dos participantes	131
3.5.2	Recolha e análise de dados	132
3.5.3	As tarefas.....	133
3.5.4	Entrevistas.....	138
4	APRESENTAÇÃO DO ESTUDO DE CASO: PAR 2 (ALICE E MARIA)	141
4.1	<i>Afirmações do tipo 1</i>	143
4.1.1	Afirmações universais falsas	143
4.1.2	Afirmações existenciais verdadeiras	148
4.2	<i>Afirmações do Tipo 2</i>	151
4.2.1	Afirmações universais verdadeiras	151
4.2.2	Afirmações existenciais falsas.....	152
4.3	<i>O uso de representações</i>	153
4.4	<i>Conclusão da análise do Par 2</i>	154
5	APRESENTAÇÃO DO ESTUDO DE CASO: PAR 3 (GUILHERME E MIGUEL).....	155
5.1	<i>Afirmações do Tipo 1</i>	157
5.1.1	Afirmações universais falsas	157
5.1.2	Afirmações existenciais verdadeiras	163
5.2	<i>Afirmações do Tipo 2</i>	166
5.2.1	Afirmações universais verdadeiras	166
5.2.2	Afirmações existenciais falsas.....	169
5.3	<i>O uso de representações</i>	170
5.4	<i>Conclusão da análise do Par 3</i>	172
6	APRESENTAÇÃO DO ESTUDO DE CASO: PAR 5 (SOFIA E NUNO).....	173
6.1	<i>Afirmações do Tipo 1</i>	174
6.1.1	Afirmações universais falsas	174
6.1.2	Afirmações existenciais verdadeiras	178
6.2	<i>Afirmações do Tipo 2</i>	181
6.2.1	Afirmações universais verdadeiras	181
6.2.2	Afirmações existenciais falsas.....	185

6.3	<i>O uso de representações</i>	185
6.4	<i>Conclusão da análise do Par 5</i>	186
7	CONCLUSÕES	189
8	BIBLIOGRAFIA	193
9	ANEXOS DA SEGUNDA PARTE.....	195
9.1	<i>Enunciado da primeira tarefa</i>	195
9.2	<i>Enunciado da segunda tarefa</i>	197

Índice de tabelas

TABELA 1.1.1 NÚMERO DE HABITANTES DO SEIXAL EM 2011, POR FAIXA ETÁRIA (PORDATA).....	3
TABELA 1.1.2 NÍVEL DE ESCOLARIDADE COMPLETO MAIS ELEVADO DOS HABITANTES DE SEIXAL COM MAIS DE 15 ANOS, DADOS DE 2001 E 2011	4
TABELA 1.1.3 NÚMERO DE ALUNOS INSCRITOS EM CADA ESCOLA DO AEJB NO ANO LETIVO 2018/2019.....	5
TABELA 1.1.4 NÚMERO DE DOCENTES DO AEJB POR GRUPO DE RECRUTAMENTO NO ANO LETIVO 2018/2019.....	6
TABELA 1.1.5 ALUNOS INSCRITOS POR ANO NA ESJB NO ANO LETIVO 2018/2019	7
TABELA 1.1.6 NÚMERO DE TURMAS DE ENSINO SECUNDÁRIO DA ESJB POR CURSO E POR ANO DE ESCOLARIDADE NO ANO LETIVO 2018/2019.....	7
TABELA 1.1.7 SATISFAÇÃO DOS ALUNOS DAS QUATRO TURMAS ENVOLVIDAS NAS ATIVIDADES DE ESTÁGIO COM O ESPAÇO E FUNCIONÁRIOS DOCENTES E NÃO DOCENTES DA ESCOLA	9
TABELA 1.2.1 CLASSIFICAÇÕES DOS ALUNOS DA TURMA DE 11.º ANO INSCRITOS NA DISCIPLINA DE MATEMÁTICA DURANTE OS TRÊS PERÍODOS DO ANO LETIVO 2018/2019.....	13
TABELA 1.2.2 CALENDARIZAÇÃO DAS AULAS DADAS PELA PROFESSORA ESTAGIÁRIA NA TURMA DE 11.º ANO.....	15
TABELA 1.2.3 RESUMO DO PLANO DE AULA DE DIA 22 DE OUTUBRO.....	15
TABELA 1.2.4 RESUMO DO PLANO DE AULA DE DIA 5 DE NOVEMBRO	19
TABELA 1.2.5 RESUMO DO PLANO DE AULA DE DIA 12 DE NOVEMBRO.....	22
TABELA 1.2.6 RESUMO DO PLANO DE AULA DE DIA 7 DE DEZEMBRO	25
TABELA 1.2.7 RESUMO DO PLANO DE AULA DE DIA 11 DE JANEIRO	28
TABELA 1.2.8 RESUMO DO PLANO DE AULA DE DIA 28 DE JANEIRO	31
TABELA 1.2.9 RESUMO DO PLANO DE AULA DE DIA 29 DE JANEIRO	33
TABELA 1.2.10 RESUMO DO PLANO DE AULA DO DIA 1 DE FEVEREIRO.....	35
TABELA 1.2.11 RESUMO DO PLANO DE AULA DE DIA 28 DE MAIO.....	39
TABELA 1.2.12 INSTRUMENTOS DE AVALIAÇÃO DA TURMA DE 11.º ANO	43
TABELA 1.2.13 CLASSIFICAÇÕES DOS ALUNOS DA TURMA DE 9.º ANO INSCRITOS A MATEMÁTICA NOS TRÊS PERÍODOS DO ANO LETIVO 2018/2019.....	45
TABELA 1.2.14 RESPOSTAS À PERGUNTA “QUAL É O CURSO PRETENDES SEGUIR QUANDO ACABARES O 9.º ANO?” ...	46
TABELA 1.2.15 CALENDARIZAÇÃO DAS AULAS DADAS PELA PROFESSORA ESTAGIÁRIA NA TURMA DE 9.º ANO.....	47
TABELA 1.2.16 RESUMO DO PLANO DE AULA DE DIA 26 DE NOVEMBRO	47
TABELA 1.2.17 RESUMO DO PLANO DE AULA DE DIA 31 DE JANEIRO.....	50
TABELA 1.2.18 RESUMO DO PLANO DE AULA DE DIA 18 DE FEVEREIRO	54
TABELA 1.2.19 RESUMO DO PLANO DE AULA DA AULA DE DIA 18 DE MARÇO	57
TABELA 1.2.20 TABELA TRIGONOMÉTRICA.....	59
TABELA 1.3.1 TEMAS DA EXPOSIÇÃO “MATEMÁTICA?! ISSO SERVE PARA QUÊ?”	65
TABELA 1.3.2 DADOS DO DESAFIO “OLIMPÍADAS”	67
TABELA 1.3.3 MELHOR RESPOSTA AO DESAFIO OBTIDA	67
TABELA 2.2.1 CRITÉRIOS DE ESCOLHA DE UM EXEMPLO (ELLIS, ET AL., 2019, P. 267).....	117
TABELA 2.2.2 BENEFÍCIOS DO USO DE UM EXEMPLO (ELLIS, ET AL., 2019, P. 268)	118
TABELA 2.2.3 PROPÓSITOS NO USO DE UM EXEMPLO (ELLIS, ET AL., 2019, PP. 270-271)	118
TABELA 2.2.4 ESTRATÉGIAS NA ESCOLHA E NO USO DE EXEMPLOS (ELLIS, ET AL., 2019, P. 272).....	119
TABELA 2.3.1 SITUAÇÕES RELEVANTES PARA CADA ESTRATÉGIA DE INVESTIGAÇÃO (COSMOS COPORATIONS, ATRAVÉS DE YIN (2001))	125
TABELA 2.3.2 TIPOS DE ESTUDO DE CASO (YIN, 2001).....	128

TABELA 2.3.3 PESO DE CADA OBJETO DE AVALIAÇÃO NO CÁLCULO DA NOTA DE CARACTERIZAÇÃO	132
TABELA 2.3.4 SELEÇÃO DOS PARES	132
TABELA 2.3.5 AFIRMAÇÕES ANALISADAS NAS DUAS TAREFAS E O SEU TIPO	134
TABELA 2.3.6 DISTRIBUIÇÃO DAS ALÍNEAS DAS TAREFAS POR TIPO.....	135
TABELA 2.3.7 DIFERENTES REPRESENTAÇÕES DE SUCESSÃO E DE FUNÇÃO USADAS	135
TABELA 2.3.8 GRELHA DE ANÁLISE DA RESOLUÇÃO DA PRIMEIRA TAREFA.....	136
TABELA 2.3.9 DIFICULDADES SENTIDAS PELO PAR NA RESOLUÇÃO DE CADA TAREFA	137
TABELA 2.4.1 CARACTERIZAÇÃO DE ALICE E MARIA.....	141
TABELA 2.4.2 ANÁLISE DAS ALÍNEAS RESPONDIDAS PELO PAR 2 EM TERMOS DOS TIPOS 1 E 2.....	141
TABELA 2.4.3 ANÁLISE DAS ALÍNEAS RESPONDIDAS PELO PAR 2.....	142
TABELA 2.5.1 CARACTERIZAÇÃO DE GUILHERME E MIGUEL.....	155
TABELA 2.5.2 ANÁLISE DAS ALÍNEAS RESPONDIDAS PELO PAR 3.....	155
TABELA 2.6.1 CARACTERIZAÇÃO DE SOFIA E NUNO.....	173
TABELA 2.6.2 ANÁLISE DAS ALÍNEAS RESPONDIDAS PELO PAR 5 EM TERMOS DOS TIPOS 1 E 2.....	173
TABELA 2.6.3 ANÁLISE DAS ALÍNEAS RESPONDIDAS PELO PAR 5.....	174

ÍNDICE DE ILUSTRAÇÕES

FIGURA 1.1.1 MAPA DO CONCELHO DE SEIXAL (CÂMARA MUNICIPAL DE ALMADA)	3
FIGURA 1.1.2 ESCOLAS QUE COMPÕEM O AGRUPAMENTO DE ESCOLAS JOÃO DE BARROS (PROJETO EDUCATIVO DO AGRUPAMENTO)	5
FIGURA 1.1.3 RESPOSTA ANÓNIMA – TURMA 11.º ANO.....	8
FIGURA 1.1.4 RESPOSTA ANÓNIMA – TURMA 9.º ANO	8
FIGURA 1.1.5 RESPOSTA ANÓNIMA – TURMA 11.º ANO.....	8
FIGURA 1.1.6 RESPOSTA ANÓNIMA – TURMA 9.º ANO	8
FIGURA 1.2.1 CLASSIFICAÇÕES DOS ALUNOS DA TURMA A MATEMÁTICA NO 10.º ANO (APENAS FORAM CONSIDERADOS OS ALUNOS QUE ESTAVAM INSCRITOS NA DISCIPLINA DE MATEMÁTICA NO 2.º PERÍODO)	12
FIGURA 1.2.2 RESULTADOS FINAIS DOS ALUNOS DA TURMA A MATEMÁTICA	13
FIGURA 1.2.3 RESPOSTA ANÓNIMA – TURMA 11.º ANO.....	14
FIGURA 1.2.4 RESPOSTA ANÓNIMA – TURMA 11.º ANO.....	14
FIGURA 1.2.5 RESPOSTA ANÓNIMA – TURMA 11.º ANO.....	14
FIGURA 1.2.6 RESOLUÇÃO, EM <i>GEOGEBRA</i> , DO EXERCÍCIO DE AULA RELATIVO À FUNÇÃO SENO	17
FIGURA 1.2.7 IMAGEM DA ANIMAÇÃO EM <i>GEOGEBRA</i>	17
FIGURA 1.2.8 SLIDES DA AULA: PRIMEIRO EXERCÍCIO DA AULA DE 5 DE NOVEMBRO.....	20
FIGURA 1.2.9 SLIDES DA AULA: DIFERENÇA ENTRE $\arcsin 3/2 = x$ E $\sin x = 3/2$	20
FIGURA 1.2.10 SLIDES DA AULA: CASO GERAL $\sin x = b$	20
FIGURA 1.2.11 SLIDES DA AULA: PRIMEIRO CASO ANALISADO.....	23
FIGURA 1.2.12 SLIDES DA AULA: SECÇÃO RECORDA: EQUAÇÕES DA RETA	23
FIGURA 1.2.13 SLIDES DA AULA: EXEMPLOS DE DOIS EXERCÍCIOS DE AULA.....	24
FIGURA 1.2.14 SLIDES DA AULA: SECÇÃO RECORDA SOBRE A RETA PERPENDICULAR A UM PLANO	26
FIGURA 1.2.15 SLIDES DA AULA: DOIS PROCESSOS APRESENTADOS PARA DETERMINAR A EQUAÇÃO DE UM PLANO DEFINIDO POR UM PONTO E UM VETOR NORMAL	26
FIGURA 1.2.16 SLIDES DA AULA: SEGUNDO CASO: EQUAÇÃO DE UM PLANO DEFINIDO POR TRÊS PONTOS NÃO COLINEARES.....	26
FIGURA 1.2.17 SLIDES DA AULA: DOIS PROCESSOS APRESENTADOS PARA DETERMINAR SE TRÊS PONTOS DADOS SÃO COLINEARES.....	27
FIGURA 1.2.18 SLIDES DA AULA: EXEMPLO APRESENTADO	39
FIGURA 1.2.19 SLIDES DA AULA: PRIMEIRA QUESTÃO.....	40
FIGURA 1.2.20 SLIDES DA AULA: TAXA MÉDIA DE VARIAÇÃO E SEGUNDA QUESTÃO.....	40
FIGURA 1.2.21 SLIDES DA AULA: INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DA TAXA MÉDIA DE VARIAÇÃO.....	41
FIGURA 1.2.22 SLIDES DA AULA: TAXA INSTANTÂNEA DE VARIAÇÃO	41
FIGURA 1.2.23 SLIDES DA AULA: DOIS DOS DIAPOSITIVOS RETIRADOS PARA ESTA AULA	42
FIGURA 1.2.24 SLIDES DA AULA: EXEMPLOS PARA TAXA INSTANTÂNEA DE VARIAÇÃO	42
FIGURA 1.2.25 CLASSIFICAÇÕES DOS ALUNOS DA TURMA DE 9.º ANO INSCRITOS A MATEMÁTICA NO 8.º ANO	45
FIGURA 1.2.26 RESULTADOS DOS ALUNOS DA TURMA DE 9.º ANO A MATEMÁTICA	45
FIGURA 1.2.27 RESPOSTA ANÓNIMA - TURMA 9.º ANO.....	46
FIGURA 1.2.28 RESPOSTA ANÓNIMA – TURMA 9.º ANO.....	47
FIGURA 1.2.29 RESPOSTA ANÓNIMA - TURMA 9.º ANO.....	47
FIGURA 1.2.30 SLIDES DA AULA: RESOLUÇÃO DO PRIMEIRO PROBLEMA.....	48
FIGURA 1.2.31 SLIDES DA AULA: RESOLUÇÃO DO SEGUNDO PROBLEMA	49
FIGURA 1.2.32 SLIDES DA AULA: COMPARAÇÃO ENTRE PROPORCIONALIDADE DIRETA E A PROPORCIONALIDADE INVERSA.....	49
FIGURA 1.2.33 SLIDES DA AULA: EXEMPLO DA RESOLUÇÃO DE DUAS DAS ALÍNEAS DA TAREFA	49

FIGURA 1.2.34 CONSTRUÇÃO QUE ACOMPANHOU A DEMONSTRAÇÃO (EM <i>GEOGEBRA</i>)	52
FIGURA 1.2.35 TRÊS HIPÓTESES DE RESPOSTA PARA A SEGUNDA PARTE DA TAREFA	52
FIGURA 1.2.36 SLIDES DA AULA: SOMA DOS ÂNGULOS INTERNOS DE UM POLÍGONO: EXEMPLO E CASO GERAL	54
FIGURA 1.2.37 SLIDES DA AULA: SOMA DOS ÂNGULOS EXTERNOS DE UM POLÍGONO CONVEXO.....	55
FIGURA 1.2.38 SLIDES DA AULA: REVISÃO DE CONCEITOS JÁ LECIONADOS	55
FIGURA 1.2.39 SLIDES DA AULA: COMO INSCREVER POLÍGONOS REGULARES NUMA CIRCUNFERÊNCIA	56
FIGURA 1.2.40 SLIDES DA AULA: RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS DO ÂNGULO DE 60 °.....	58
FIGURA 1.2.41 SLIDES DA AULA: RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS DO ÂNGULO DE 45 °.....	59
FIGURA 1.2.42 SLIDES DA AULA: ALGUNS DOS EXERCÍCIOS APRESENTADOS NA AULA DO DIA 28 DE MARÇO.....	59
FIGURA 1.3.1 MAPA E TABELA DISPONIBILIZADOS NO DESAFIO "CAIXEIRO VIAJANTE"	66
FIGURA 1.3.2 ALGUNS DOS ORIGAMIS EM EXPOSIÇÃO NA V FEIRA DA EDUCAÇÃO JOÃO DE BARROS.....	66
FIGURA 1.3.3 CALENDÁRIO DODECAEDRO.....	68
FIGURA 1.4.1 RESPOSTA ANÔNIMA – TURMA 9.º ANO	70
FIGURA 1.4.2 RESPOSTA ANÔNIMA – TURMA 9.º ANO	71
FIGURA 1.4.3 RESPOSTA ANÔNIMA – TURMA 11.º ANO.....	71
FIGURA 2.4.1 RESOLUÇÃO DA ALÍNEA 1.6 PELO PAR 2	143
FIGURA 2.4.2 RESOLUÇÃO DA ALÍNEA 2.6 PELO PAR 2	144
FIGURA 2.4.3 RESOLUÇÃO DA ALÍNEA 2.10 PELO PAR 2.....	145
FIGURA 2.4.4 EXCERTO DA RESOLUÇÃO DA ALÍNEA 1.4 PELO PAR 2	145
FIGURA 2.4.5 RESOLUÇÃO DA ALÍNEA 1.8 PELO PAR 2	146
FIGURA 2.4.6 RESOLUÇÃO DA ALÍNEA 1.1 PELO PAR 2	147
FIGURA 2.4.7 EXCERTO DA RESOLUÇÃO DA ALÍNEA 1.11 PELO PAR 2	148
FIGURA 2.4.8 RESOLUÇÃO DA ALÍNEA 2.3 PELO PAR 2	149
FIGURA 2.4.9 EXCERTO DA RESOLUÇÃO DA ALÍNEA 2.2 PELO PAR 2	149
FIGURA 2.4.10 EXCERTO DA RESOLUÇÃO DA ALÍNEA 2.1 PELO PAR 2	150
FIGURA 2.4.11 EXCERTO DA RESOLUÇÃO DA ALÍNEA 2.8 PELO PAR 2	152
FIGURA 2.4.12 RESOLUÇÃO DA ALÍNEA 1.2 PELO PAR 2	152
FIGURA 2.4.13 RESOLUÇÃO DA ALÍNEA 1.9 PELO PAR 2	153
FIGURA 2.5.1 RESOLUÇÃO DA ALÍNEA 1.6 PELO PAR 3	157
FIGURA 2.5.2 RESOLUÇÃO DA ALÍNEA 1.8 PELO PAR 3	158
FIGURA 2.5.3 EXCERTO DA RESOLUÇÃO DA ALÍNEA 1.11 PELO PAR 3	158
FIGURA 2.5.4 RESOLUÇÃO DA ALÍNEA 2.4 PELO PAR 3	159
FIGURA 2.5.5 RESOLUÇÃO DA ALÍNEA 1.6 PELO PAR 3	161
FIGURA 2.5.6 EXEMPLO APRESENTADO NA ALÍNEA 2.10 PELO PAR 3.....	161
FIGURA 2.5.7 RESOLUÇÃO DA ALÍNEA 1.4 PELO PAR 3	162
FIGURA 2.5.8 RESOLUÇÃO E GRÁFICO APRESENTADO NA ALÍNEA 1.5 PELO PAR 3.....	163
FIGURA 2.5.9 EXTRATO DA RESOLUÇÃO DA ALÍNEA 2.2 PELO PAR 3.....	164
FIGURA 2.5.10 RESOLUÇÃO DA ALÍNEA 2.3 PELO PAR 3	165
FIGURA 2.5.11 RESOLUÇÃO DA ALÍNEA 2.9 PELO PAR 3	165
FIGURA 2.5.12 RESOLUÇÃO DA ALÍNEA 1.3 PELO PAR 3	165
FIGURA 2.5.13 RESOLUÇÃO DA ALÍNEA 1.2 PELO PAR 3	166
FIGURA 2.5.14 RESOLUÇÃO DA ALÍNEA 2.8 PELO PAR 3	166
FIGURA 2.5.15 RESOLUÇÃO DA ALÍNEA 1.10 PELO PAR 3.....	167
FIGURA 2.5.16 RESOLUÇÃO DA ALÍNEA 2.5 PELO PAR 3	168
FIGURA 2.5.17 EXCERTO DA RESOLUÇÃO DA ALÍNEA 1.7 PELO PAR 3	168
FIGURA 2.5.18 EXCERTO DA RESOLUÇÃO DA ALÍNEA 2.7 PELO PAR 3	170

FIGURA 2.5.19 EXCERTO DA RESOLUÇÃO DA ALÍNEA 1.7 PELO PAR 3	171
FIGURA 2.6.1 EXCERTO DA RESOLUÇÃO DA ALÍNEA 1.1 PELO PAR 5	175
FIGURA 2.6.2 GRÁFICO APRESENTADO PELO PAR 5 NA ALÍNEA 2.10	175
FIGURA 2.6.3 EXCERTO DA RESOLUÇÃO DA ALÍNEA 1.6 PELO PAR 5	176
FIGURA 2.6.4 RESOLUÇÃO DA ALÍNEA 1.11 PELO PAR 5.....	177
FIGURA 2.6.5 EXCERTO DA RESOLUÇÃO DA ALÍNEA 1.4 PELO PAR 5	178
FIGURA 2.6.6 RESOLUÇÃO DA ALÍNEA 1.5 PELO PAR 5	179
FIGURA 2.6.7 RESOLUÇÃO DA ALÍNEA 2.1 PELO PAR 5	180
FIGURA 2.6.8 RESOLUÇÃO DA ALÍNEA 2.9 PELO PAR 5	181
FIGURA 2.6.9 RESOLUÇÃO DA ALÍNEA 1.2 PELO PAR 5	182
FIGURA 2.6.10 RESOLUÇÃO DA ALÍNEA 1.7 PELO PAR 5	183
FIGURA 2.6.11 RESOLUÇÃO DA ALÍNEA 2.8 PELO PAR 5	184
FIGURA 2.6.12 RESOLUÇÃO DA ALÍNEA 1.9 PELO PAR 5	185
FIGURA 2.6.13 GRÁFICOS DAS SUCESSÕES REPRESENTADAS ATRAVÉS DE UMA LINHA CONTÍNUA PELO PAR 5.....	186

Lista de abreviaturas

AEJB – Agrupamento de Escolas João de Barros

APM – Associação de Professores de Matemática

CEF – Cursos de Educação e Formação

EB1 – Escola Básica de 1.º ciclo

EB23 – Escola Básica de 2.º e 3.º ciclos

ESJB – Escola Secundária João de Barros

JI – Jardim de Infância

FCT/UNL – Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Lisboa

ME – Ministério da Educação

NCTM - National Council of Teachers Mathematics

NEMJB – Núcleo de Estágio de Matemática Escola Secundária João de Barros

Parte 1

Relatório de Estágio

Experiência de estágio na Escola Secundária João de Barros, com uma turma de 11.º ano do ensino secundário e uma turma de 9.º ano do ensino básico.

1 Caracterização da escola, do agrupamento e do concelho

1.1 O concelho de Seixal

O concelho de Seixal pertence ao distrito de Setúbal e à região de Lisboa e recebe o seu nome da palavra “Seixo”, graças às pedras que ficam visíveis quando o rio Tejo apresenta um baixo nível de maré.

Existe uma relação muito próxima deste concelho com a água, o rio Tejo rega o Seixal através do Sapal de Corroios e do rio Judeu, que nasce em Paio Pires e desagua na Baía do Seixal. Além disso este foi o local escolhido pelos irmãos Vasco e Paulo da Gama para construírem as naus para a viagem à Índia.

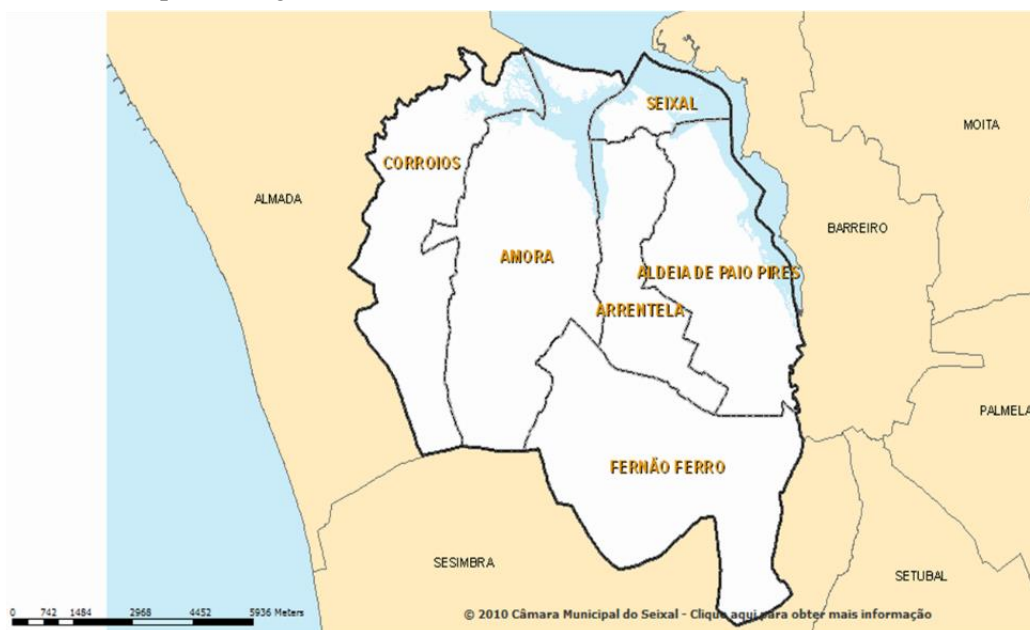


Figura 1.1.1 Mapa do concelho de Seixal (Câmara Municipal de Almada)

Este concelho, com 95,50 km² de área, está dividido em quatro freguesias: Amora, Corroios, Fernão Ferro e a União das Freguesias do Seixal, Arrentela e Aldeia de Paio Pires, que se encontram representadas na Figura 1.1.1.

Em 2011 foram registados 158 269 habitantes, dos quais 34.153 jovens e crianças com menos de 19 anos de idade, cerca de 21,6% da população total. Na Tabela 1.1.1 encontra-se a distribuição dos habitantes de Seixal em 2011 por faixa etária, com foco nas idades escolares.

Tabela 1.1.1 Número de habitantes do Seixal em 2011, por faixa etária (PORDATA)

Faixa etária	Número de habitantes	Percentagem correspondente
0-4 anos	8 514	5,4%

5-9 anos	8 469	5,4%
10-14 anos	8 764	5,5%
15-19 anos	8 406	5,3%
20-34 anos	32 174	20,3%
35-49 anos	35 680	22,5%
50-64 anos	31 829	20,1%
Mais de 65 anos	24 433	15,4%
Total	158 269	

Além do aumento de população neste concelho registou-se também um aumento do nível de escolaridade completo da população do Concelho de Seixal de 2001 para 2011. Registou-se uma diminuição de 4% da população sem nenhum nível de escolaridade completo e um aumento na percentagem de habitantes com o ensino Secundário, Médio e Superior completo neste concelho, como se pode verificar na Tabela 1.1.2.

Tabela 1.1.2 Nível de escolaridade completo mais elevado dos habitantes de Seixal com mais de 15 anos, dados de 2001 e 2011

	2001		2011	
	Número de habitantes	Percentagem correspondente	Número de habitantes	Percentagem correspondente
Sem nível de escolaridade	13 192	10,5%	8 558	6,5%
Básico 1º ciclo	31 671	25,3%	30 804	23,2%
Básico 2º ciclo	14 187	11,3%	15 780	11,9%
Básico 3º ciclo	30 212	24,1%	30 994	23,4%
Secundário	25 208	20,1%	26 710	20,2%
Médio	1 053	0,8%	1 624	1,2%
Superior	9 656	7,7%	18 052	13,6%
Total	125 179		132 522	

1.2 O Agrupamento de Escolas João de Barros

O Agrupamento de Escolas João de Barros (AEJB), criado em 2013 por despacho do Sr. Secretário de Estado da Educação, localiza-se na freguesia de Corroios do concelho de Seixal e é constituído por cinco estabelecimentos de ensino:

- Escola Básica do 1.º ciclo de Miratejo (inclui Jardim de Infância);
- Escola Básica do 1.º ciclo José Afonso;
- Escola Básica do 1.º ciclo de Corroios;
- Escola Básica dos ciclos 2.º e 3.º de Corroios;
- Escola Secundária João de Barros (escola sede do agrupamento);

Este agrupamento resultou da união da Escola Secundária João de Barros com o agrupamento de escolas “O Rouxinol”, constituído pelas restantes escolas.

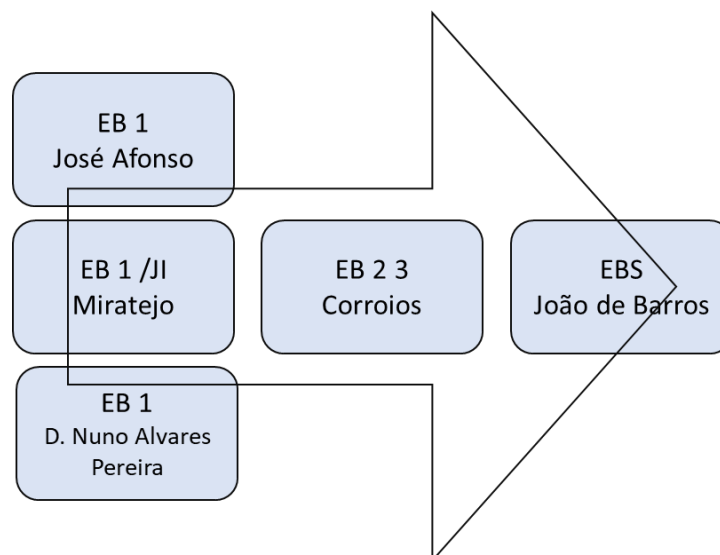


Figura 1.1.2 Escolas que compõem o Agrupamento de Escolas João de Barros (Projeto Educativo do Agrupamento)

Este agrupamento presta formação desde o ensino Pré-Escolar ao Ensino Secundário, permitindo um acompanhamento do aluno no mesmo agrupamento durante todo o ensino obrigatório, como demonstra a Figura 1.1.2. Na Tabela 1.1.3 encontra-se a distribuição dos 2340 alunos do Agrupamento de Escolas João de Barros pelas várias escolas pertencentes ao agrupamento.

Tabela 1.1.3 Número de alunos inscritos em cada escola do AEJB no ano letivo 2018/2019

Escola	Número de alunos inscritos na escola
Escola Básica do 1.º ciclo de Miratejo	310
Escola Básica do 1.º ciclo José Afonso	62
Escola Básica do 1.º ciclo Nuno Alvares Pereira	136
Escola Básica dos 2.º e 3.º ciclos de Corroios	588
Escola Secundária João de Barros	1244
Total	2340

A missão do Agrupamento de Escolas João de Barros, definido pelo Projeto Educativo deste agrupamento, é a de “Educar as crianças e os jovens da comunidade da sua área de influência para que venham a ser indivíduos responsáveis, profissionais competentes e cidadãos participativos e solidários.”, definindo como valores fundamentais deste agrupamento:

- **Responsabilidade**, através da aproximação de todas os participantes no processo de ensino-aprendizagem;
- **Colaboração** de todos os atores educativos na tomada de decisões, num ambiente de confiança e comunicação honesta e aberta;
- **Respeito** pelas diversas opiniões;

- **Excelência** na preparação dos alunos para o mercado de trabalho ou o seguimento dos estudos;
- **Equidade** de oportunidades para o crescimento académico e profissional de todos os atores educativos.

Este agrupamento conta com 227 docentes, dos quais 20 do grupo de recrutamento 500 – Matemática, e 77 funcionários não docentes. Na Tabela 1.1.4 encontra-se a distribuição dos docentes do AEJB por grupo de recrutamento. Quanto aos funcionários não docentes do agrupamento existe 1 técnico superior, 1 coordenador técnico, 1 encarregado operacional, 10 assistentes técnicos e 64 assistentes operacionais.

Tabela 1.1.4 Número de docentes do AEJB por grupo de recrutamento no ano letivo 2018/2019

Grupo de recrutamento	Número de docentes	Grupo de recrutamento	Número de docentes
100 - Educação pré-escolar	4	400 - História	9
110 - 1.º ciclo do ensino básico	29	410 - Filosofia	5
120 - Inglês - 1.º Ciclo	2	420 - Geografia	8
200 - Português e Estudos Sociais/História	4	430 - Economia e Contabilidade	2
210 - Português e Francês	2	500 - Matemática	20
220 - Português e Inglês	4	510 - Física e Química	11
230 - Matemática e Ciências da Natureza	15	520 - Biologia e Geologia	14
240 - Educação Visual e Tecnológica	7	530 - Educação Tecnológica	3
250 - Educação Musical	2	540 - Electrotecnia	3
260 - Educação Física	3	550 - Informática	12
290 - Educação Moral e Religiosa Católica	1	600 - Artes Visuais	4
300 - Português	22	620 - Educação Física	13
320 - Francês	3	910 - Educação Especial 1	11
330 - Inglês	13	920 - Educação Especial 2	1

1.3 A Escola Secundária João de Barros

A Escola Secundária João de Barros, sede do Agrupamento de Escolas João de Barros, está localizada na Rua Dr. Manuel de Arriaga, perto da estação ferroviária de Corroios. A oferta formativa desta escola contempla o Ensino Básico Regular (do 7.º ao 9.º ano) e Cursos De

Educação e Formação – Tipo 2, e Ensino Secundário Regular (Cursos Científico-Humanísticos) e os Cursos Profissionais Técnico Gestão Equipamentos Informáticos e Técnico Gestão Programação Sistemas Informáticos. No ano letivo 2018/2019 houve mais de 1000 alunos inscritos nesta escola, distribuídos pelos vários anos como indicado na Tabela 1.1.5.

Tabela 1.1.5 Alunos inscritos por ano na ESJB no ano letivo 2018/2019

	Ano de escolaridade	Número de alunos inscritos	Total
Ensino Básico Regular	7.º ano	139	481
	8.º ano	167	
	9.º ano	175	
Cursos de Educação e Formação	9.º ano CEF	19	19
Cursos Científico-Humanísticos	10.º ano	233	596
	11.º ano	187	
	12.º ano	176	
Cursos profissionais	10.º ano profissional	53	148
	11.º ano profissional	47	
	12.º ano profissional	48	

No ano letivo 2018/2019 existiram 27 turmas do Ensino Secundário na Escola Secundária João de Barros, das quais 10 eram do Curso Científico-Humanístico Ciências e Tecnologias. Na Tabela 1.1.6 encontra-se o número de turmas existentes por ano de escolaridade e por curso neste ano letivo.

Tabela 1.1.6 Número de turmas de Ensino Secundário da ESJB por curso e por ano de escolaridade no ano letivo 2018/2019

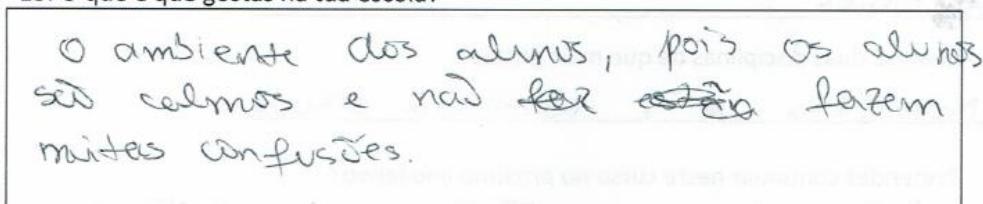
10	11	12	Total	Curso	
4	3	3	10	Ciências e Tecnologias	Científico-Humanístico
1	1	1	3	Ciências Socioeconómicas	
2	2	2	6	Línguas e Humanidades	
1	1	0	2	Artes Visuais	
1	1	1	3	Técnico Gestão Equipamentos Informáticos	Profissional
1	1	1	3	Técnico Gestão Programação Sistemas Informáticos	
			27		

O Núcleo de Estágio de Matemática da Escola Secundária João de Barros (NEMJB), constituído pelas professoras estagiárias Carina Aires e Rita Caneco, concebeu e aplicou um

questionário às quatro turmas com as quais foi desenvolvido o trabalho de estágio. Este questionário ajudou não só na caracterização das turmas, mas também na caracterização da escola.

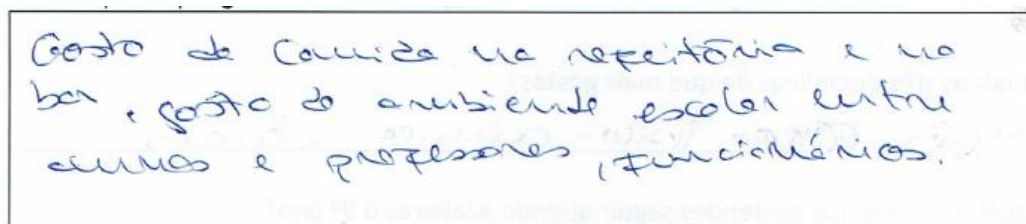
Quando questionados sobre o que gostam na escola um número significativo de alunos referiu o ambiente entre professores, funcionários e alunos e o facto de não haver “confusões”/conflitos entre alunos (como a resposta da Figura 1.1.3). Outros referiram também a comida, o bar, o refeitório e a recém-adquirida esplanada (como a resposta da Figura 1.1.4).

13. O que é que gostas na tua escola?



O ambiente dos alunos, pois os alunos são calmos e não fazem confusões.

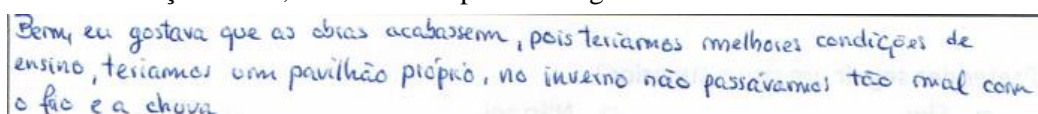
Figura 1.1.3 Resposta anónima – turma 11.º ano



Gosto da comida no refeitório e no bar, gosto do ambiente entre alunos e professores, funcionários.

Figura 1.1.4 Resposta anónima – turma 9.º ano

Por outro lado, quando questionados sobre o que gostavam de mudar na escola a maior parte dos alunos com que a professora a professora estagiária contactou (46 alunos em 52) referiram o estado das instalações e que desejavam que as obras acabassem. Alguns queixaram-se particularmente do facto de se terem de descolar a pé para uma instalação fora da escola para ter as aulas de Educação Física, tal como a resposta na Figura 1.1.5.

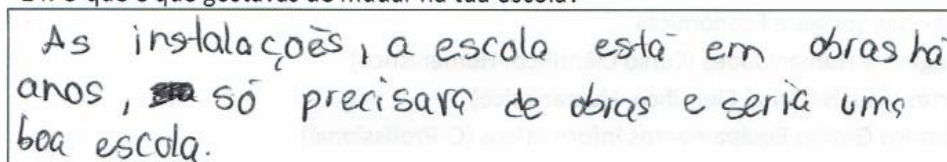


Bem, eu gostava que as obras acabassem, pois teríamos melhores condições de ensino, teríamos um pavilhão próprio, no inverno não passávamos tão mal com o frio e a chuva.

Figura 1.1.5 Resposta anónima – turma 11.º ano

No entanto é importante sublinhar que a maior parte dos alunos estão bastante satisfeitos com a escola e alguns até referem que se não fossem as obras esta seria um escola muito boa, tal como refere, por exemplo, o aluno que deu a resposta na Figura 1.1.6.

14. O que é que gostavas de mudar na tua escola?



As instalações, a escola está em obras há anos, só precisava de obras e seria uma boa escola.

Figura 1.1.6 Resposta anónima – turma 9.º ano

Foi pedido que os alunos avaliassem o seu nível de satisfação em relação a vários aspetos da sua vida escolar numa escala, à qual depois foi atribuída um valor numérico:

gosto muito (4), gosto (3), não gosto muito (2) e não gosto (1).

Na Tabela 1.1.7 encontram-se os resultados das quatro turmas envolvidas nas atividades de estágio relativamente à satisfação dos alunos com o corpo docente e não docente e o espaço físico da escola. É de sublinhar que a pontuação mais alta foi atribuída aos professores, o que revela a importância do seu papel nesta escola, no acompanhamento dos alunos no seu dia-a-dia.

Tabela 1.1.7 Satisfação dos alunos das quatro turmas envolvidas nas atividades de estágio com o espaço e funcionários docentes e não docentes da escola

	Instalações	Bar	Refeitório	Biblioteca	Professores	Funcionários
Média	1,67	2,35	2,90	2,13	3,11	2,74

2 Prática Pedagógica Supervisionada

Este capítulo descreve o trabalho letivo realizado com as duas turmas com que a professora estagiária contactou ao longo do ano letivo 2018/2019 e apresenta algumas reflexões sobre esta prática pedagógica supervisionada.

A turma com a qual foi realizada a maior parte do trabalho de estágio foi uma turma de 11.º ano do curso Científico-Humanista de Ciências e Tecnologias na disciplina de Matemática A. A professora estagiária assistiu a praticamente todas as aulas desta turma e lecionou algumas com a supervisão da professora da turma e, por vezes, da professora Doutora Maria Helena Santos.

Além do trabalho na sala de aula a professora estagiária colaborou também com a Diretora de Turma desta turma, a professora Maria Guiomar, no trabalho de Direção de Turma e assistiu a várias reuniões do Conselho de Turma e reuniões de pais e Encarregados de Educação, trabalho esse que se encontra descrito em 3.1 Direção de Turma e Reuniões assistidas.

Como a professora orientadora Elisabete Ferreira não teve turmas do ensino básico no ano letivo 2018/2019, a professora estagiária trabalhou também com uma turma de 9.º ano da professora Paula Teixeira. A professora estagiária assistiu, em média, a uma aula desta turma por semana e deu também algumas aulas nesta turma, com a supervisão da professora da turma e, por vezes, da professora Doutora Maria Helena Santos.

Ao assistir à aula do mesmo espaço que os alunos ocupam as professoras foram capazes de fazer comentários sobre a postura, atitudes, tom e colocação de voz, confiança e uso do quadro pela professora estagiária, bem como analisar o uso de tempo, comportamento e participação dos alunos e o plano de aula.

No fim de cada uma das aulas assistidas houve uma reunião, onde era discutida a aula que tinha sido dada pela professora estagiária, incidindo sobre os vários aspetos referidos anteriormente e outros que fossem considerados relevantes. Nas aulas a que a professora Doutora Maria Helena Santos foi assistir a colega de estágio, Carina Aires, foi também assistir e ambas participaram nestas reuniões. Estas reuniões foram muito úteis para a professora estagiária pois permitiram-lhe refletir sobre as suas decisões e a sua própria prática pedagógica e trabalhar no sentido de melhorar a sua prática. As considerações apresentadas nos capítulos 2.1.2 e 2.2.2 (Aulas assistidas) surgem dos comentários apresentados nestas reuniões e das reflexões da professora estagiária sobre esses comentários.

2.1 Turma de 11.º ano

A turma com que a professora estagiária mais contactou foi a turma de 11.º ano, a professora acompanhou, ao longo do ano letivo, a disciplina de Matemática desta turma, lecionada pela professora Elisabete Ferreira.

O manual adotado nesta escola para a disciplina de Matemática 11.º ano no ano letivo 2018/2019 foi o Manual “Novo Espaço”, da Porto Editora, cujos autores são Belmiro Costa e Ermelinda Rodrigues. Este manual está dividido em duas partes e inclui um caderno prático, com exercícios.

2.1.1 Caracterização da turma

A turma de 11.º ano com que foi realizado o trabalho de estágio era constituída por 32 alunos (15 raparigas e 17 rapazes). No início do ano a turma tinha 31 alunos, dos quais 28 estavam inscritos em Matemática. No segundo período um aluno, que até ao momento estava a frequentar a escolaridade num país de língua portuguesa, entrou nesta turma e frequentou todas as disciplinas, entre eles a disciplina de Matemática, e no terceiro período uma aluna anulou a disciplina.

A turma resultou da junção de duas turmas de 10.º ano da escola e os alunos demoraram algum tempo até começarem a conviver uns com os outros. Alguns alunos frequentaram as disciplinas específicas Geometria Descritiva e Física e Química enquanto que outros frequentaram Biologia e Geologia e Física e Química.

Ao longo do ano letivo o Conselho de turma avaliou o aproveitamento e comportamento da turma numa escala de *não satisfatório*, *satisfatório* e *muito satisfatório*. No primeiro e no terceiro período o aproveitamento e comportamento dos alunos foram ambos considerados como *satisfatórios*, no segundo período o aproveitamento da turma foi considerado *satisfatório* e o comportamento foi considerado *não satisfatório*. Vários professores da turma referiram nas reuniões de Conselho de Turma que os alunos eram bastante conversadores e distraídos e houve três faltas disciplinares nesta turma no ano letivo 2018/2019.

Foram consultadas as classificações dos alunos pertencentes a esta turma. Na Figura 1.2.1 encontram-se as classificações destes alunos à disciplina de Matemática no 10.º ano. No final do 3.º período os resultados foram os apresentados na Figura 1.2.2. É importante notar que apenas havia dois alunos com negativados no 10.º ano porque estes dados se referem apenas aos alunos que transitaram para o 11.º ano de escolaridade e foram colocados nesta turma.

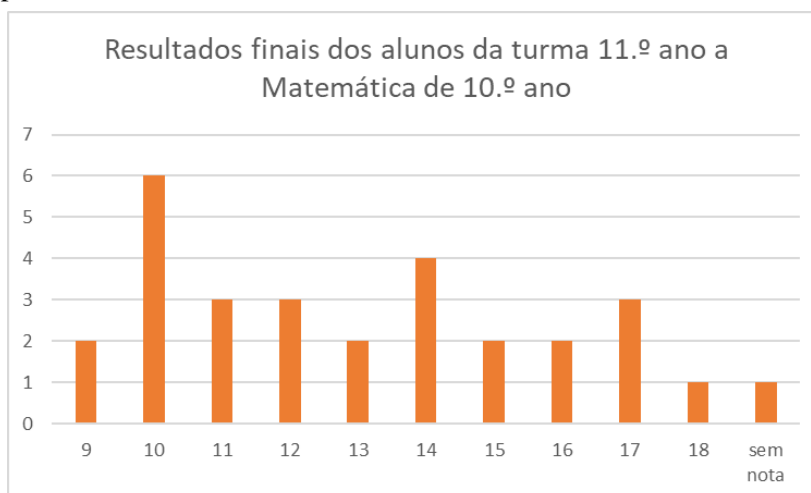


Figura 1.2.1 Classificações dos alunos da turma a Matemática no 10.º ano (apenas foram considerados os alunos que estavam inscritos na disciplina de Matemática no 2.º período)

Os resultados finais dos alunos desta turma a Matemática encontram-se na Tabela 1.2.2. Nesta turma, sete alunos tiveram negativa no terceiro período e doze alunos obtiveram uma classificação de 10 ou 11 valores.

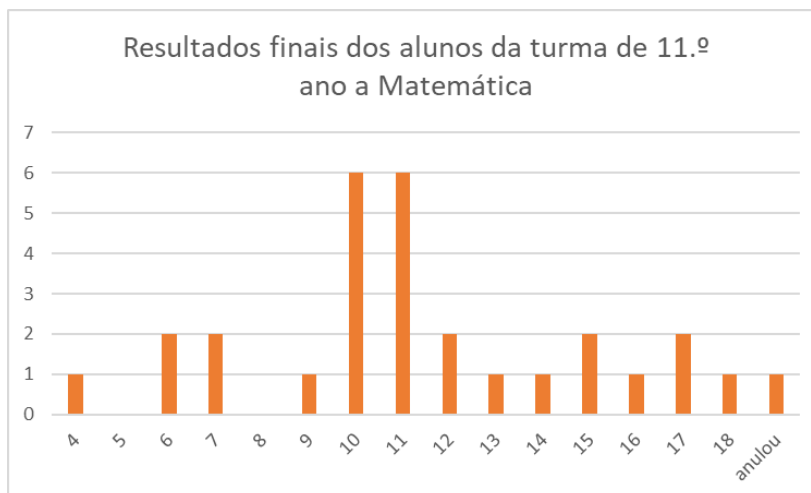


Figura 1.2.2 Resultados finais dos alunos da turma a Matemática

Na Tabela 1.2.1 são apresentadas: a média, a classificação mais alta, a classificação mais baixa e o número de negativas dos alunos desta turma que estiveram inscritos na disciplina de Matemática durante os três períodos do ano letivo 2018/2019 (excluindo portanto o aluno que entrou no 2.º período e a aluna que anulou a disciplina).

Tabela 1.2.1 Classificações dos alunos da turma de 11.º ano inscritos na disciplina de Matemática durante os três períodos do ano letivo 2018/2019

	Classificação Final 10.º ano	11.º ano		
		1.º Período	2.º Período	Classificação Final
Média	12,8	11,7	11,6	11,2
Classificação mais alta	18	19	18	18
Classificação mais baixa	9	7	7	6
Número de negativas	2	6	5	6

No dia 3 de junho de 2019, na penúltima aula de Matemática desta turma, foi aplicado um questionário aos alunos, com o objetivo de caracterizar a turma e a escola de estágio. Vinte e seis alunos da turma responderam a este questionário.

As características mais escolhidas pelos alunos para se definirem a si próprios foram *Interessado* (escolhida por 19 alunos), *Preguiçoso* (escolhida por 19 alunos), *Falador* (escolhida por 17 alunos), *Bom aluno* (escolhida por 13 alunos) e *Distraído* (escolhida por 11 alunos), sendo que treze escolheram simultaneamente interessado e preguiçoso.

Alguns alunos desta turma tiveram explicações (fora da escola) a algumas disciplinas, sendo Matemática e Física e Química as disciplinas a que mais alunos tiveram explicações. Dezoito alunos desta turma tiveram explicações a Matemática e, destes dezoito, treze receberam

também explicações a Física e Química. Apenas cinco alunos desta turma não receberam explicações a nenhuma disciplina.

Quanto às disciplinas de que gostam mais e de que gostam menos, a disciplina de Matemática foi indicada por catorze alunos como uma das duas disciplinas preferidas e por um aluno como uma das duas disciplinas de que gosta menos.

Dos vinte e seis alunos que responderam ao questionário, vinte e dois querem continuar no curso de Ciências e Tecnologias no próximo ano e os restantes quatro ainda não têm a certeza se querem ficar. Dos quatro alunos que referem a possibilidade de mudar de curso dois ainda não sabem qual o curso que querem seguir, um destes pensa seguir artes e o outro informática.

A maior parte dos alunos desta turma pretende seguir um curso superior: vinte alunos pretendem seguir um curso superior, cinco ainda não decidiram e um não pretende escolher esse caminho. Dos vinte alunos que pretendem seguir um curso superior muitos ainda não sabem o que querem seguir ou ainda estão indecisos entre dois cursos, alguns dos cursos referidos foram: Gestão, Física, Fisioterapia, Engenharia Informática, Engenharia Mecânica, Engenharia Eletrotécnica e Biologia Celular e Molecular.

Na pergunta “O que gostavas que os teus professores soubessem” alguns alunos desta turma demonstraram uma insatisfação com o excesso de tarefas e testes (como a resposta da Figura 1.2.3) e outros referem que não se sentem valorizados e apreciados pelo seu esforço (como a resposta da Figura 1.2.4). No entanto alguns aproveitaram este momento de resposta aberta para elogiar os professores desta escola, como o aluno que deu a resposta na Figura 1.2.5.

12. O que é que gostavas que os teus professores soubessem?

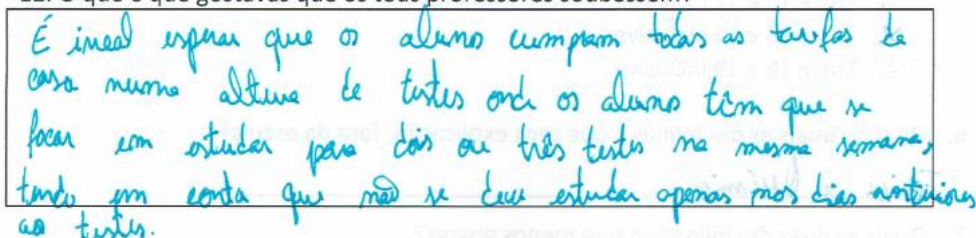


Figura 1.2.3 Resposta anónima – turma 11.º ano

12. O que é que gostavas que os teus professores soubessem?

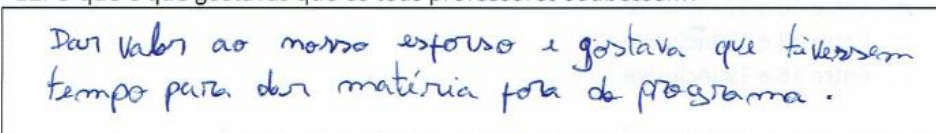


Figura 1.2.4 Resposta anónima – turma 11.º ano

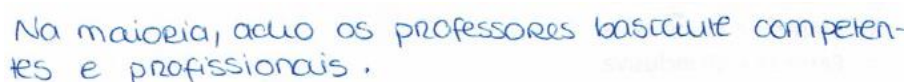


Figura 1.2.5 Resposta anónima – turma 11.º ano

2.1.2 Aulas assistidas

Nesta turma a professora estagiária lecionou nove aulas sob a supervisão da professora orientadora de Estágio Elisabete Ferreira, professora da turma. Destas nove aulas, seis foram

também assistidas pela professora Doutora Maria Helena Santos, regente da unidade curricular Estágio Pedagógico. Na Tabela 1.2.2 encontra-se a calendarização das aulas assistidas.

Tabela 1.2.2 Calendarização das aulas dadas pela professora estagiária na turma de 11.º ano

Período	Data	Duração	Tema	Supervisão
1.º Período	22 de outubro de 2018	90'	Trigonometria 11.º	Prof. Elisabete Ferreira
	5 de novembro de 2018	90'	Trigonometria 11.º	Prof. Elisabete Ferreira
	12 de novembro de 2018	90'	Geometria Analítica 11.º	Prof. Elisabete Ferreira Prof. Doutora Maria Helena Santos
	7 de dezembro de 2018	90'	Geometria Analítica 11.º	Prof. Elisabete Ferreira Prof. Doutora Maria Helena Santos
2.º Período	11 de janeiro de 2019	90'	Sucessões 11.º	Prof. Elisabete Ferreira
	28 de janeiro de 2019	90'	Sucessões 11.º	Prof. Elisabete Ferreira Prof. Doutora Maria Helena Santos
	29 de janeiro de 2019	90'	Sucessões 11.º	Prof. Elisabete Ferreira Prof. Doutora Maria Helena Santos
	1 de fevereiro de 2019	90'	Sucessões 11.º	Prof. Elisabete Ferreira Prof. Doutora Maria Helena Santos
3.º Período	28 de maio de 2019	90'	Funções Reais de Variável Real 11.º	Prof. Elisabete Ferreira Prof. Doutora Maria Helena Santos

2.1.2.1 Aula de 22 de outubro

Resumo da aula

A primeira aula lecionada pela professora estagiária nesta turma realizou-se no dia 22 de outubro e teve como assunto “Funções trigonométricas: Função seno e Função cosseno”.

Tabela 1.2.3 Resumo do plano de aula de dia 22 de outubro

Tema	Trigonometria 11.º.
Subtema	Funções trigonométricas: Função seno e Função cosseno.

Duração	90 minutos
Sumário	Funções trigonométricas: Função seno e Função cosseno.
Material do professor	Computador com <i>GeoGebra</i> instalado. Projetor. Apresentação da aula. Quadro interativo.
Material dos alunos	Folhas quadriculadas.
Objetivos da aula	Compreender o comportamento gráfico da função seno e cosseno de um ângulo $\alpha \in [0, 2\pi]$. Estudar a monotonia e extremos do seno e cosseno de um ângulo $\alpha \in [0, 2\pi]$. Definir a função $\cos(x)$ e $\sin(x)$ Com $x \in \mathbb{R}$ utilizando as relações $\cos(\alpha) = \cos(\alpha + 2\pi) = \cos(\alpha - 2\pi)$ e $\sin(\alpha) = \sin(\alpha + 2\pi) = \sin(\alpha - 2\pi)$. Justificar a paridade das funções $\sin(x)$ e $\cos(x)$. Resolução de exercícios.
Objetivos gerais	Desenvolver o raciocínio lógico. Desenvolver a capacidade de trabalhar em pares.
Estratégias	Utilizar o círculo trigonométrico para compreender as funções trigonometrias. Incentivar o uso da tabela do seno, cosseno e tangente de $\pi/6, \pi/2$ e $\pi/3$. Incentivar a participação dos alunos. Utilizar o <i>GeoGebra</i> como meio de passagem do círculo trigonométrico para o gráfico da função e da restrição $[0, 2\pi]$ das funções seno e cosseno para o domínio \mathbb{R} .

A professora estagiária começou a aula com um exercício simples que pedia que os alunos representassem num referencial ortogonal os pares $(\alpha, \sin(\alpha))$ para os valores

$$\alpha \in \left\{ 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \pi, \frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}, \frac{11\pi}{6}, 2\pi \right\}.$$

O resultado esperado era um esquema semelhante ao da Figura 1.2.6. Conforme os alunos foram acabando a professora estagiária pediu para começarem a pensar no mesmo problema para a função cosseno.

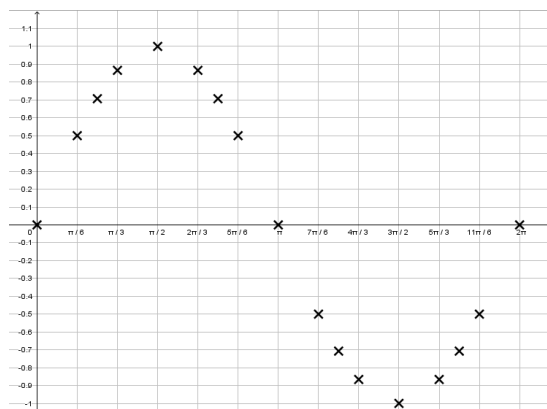


Figura 1.2.6 Resolução, em GeoGebra, do exercício de aula relativo à função seno

A partir do gráfico da função seno no intervalo $[0, 2\pi]$ os alunos indicaram os extremos, zeros e intervalos de monotonia da função neste intervalo.

Recorrendo a uma animação no software *GeoGebra* e à periodicidade da função seno foi estudado o gráfico da função seno. Na Figura 1.2.7 encontra-se um momento dessa animação, o valor ponto de coordenadas $(\alpha, 0)$ era movível e o seletor k tomava valores inteiros entre 0 e 5. Tomando $k \neq 0$ era produzida uma translação $2k\pi$ dos pontos $(\alpha, 0)$ e $(\alpha, \sin(\alpha))$, resultante nos pontos $(\alpha + 2k\pi, 0)$ e $(\alpha + 2k\pi, \sin(\alpha + 2k\pi)) [= (\alpha + 2k\pi, \sin(\alpha) + 2k\pi)]$. Este último ponto tinha a opção “mostrar rasto” ligada, o que permitia visualizar o gráfico da função.

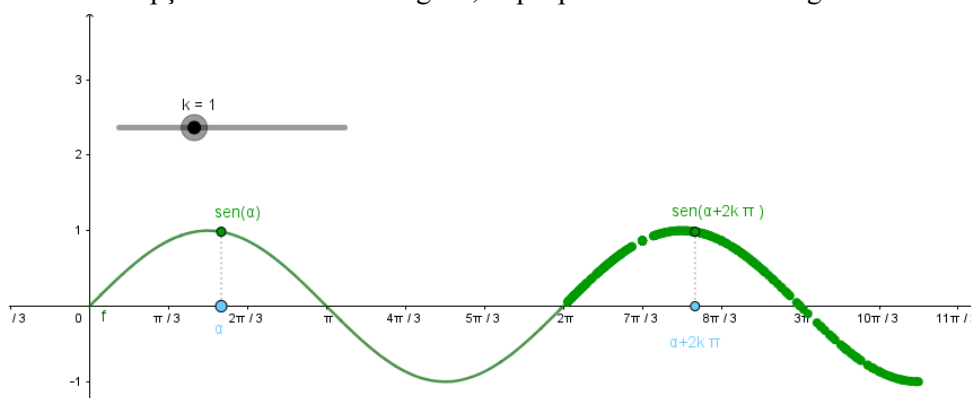


Figura 1.2.7 Imagem da animação em GeoGebra

Partindo do gráfico da função, da periodicidade da função e do cálculo dos extremos, zeros e intervalos de monotonia da função, a professora estagiária deduziu no quadro (com a participação dos alunos) os extremos, zeros e intervalos de monotonia da função seno em \mathbb{R} .

Fazia parte do plano de aula repetir este processo para a função cosseno, mas não houve tempo de aula para realizar esse trabalho.

Preparação da aula e considerações sobre o plano de aula

Com esta aula a professora estagiária pretendia criar um momento inicial mais focado nos alunos e que permitisse que estes criassem uma relação marcante com esta matéria. A partir desse ponto, a aula esteve bastante focada em si, no entanto, a professora estagiária incentivou os alunos a participarem e a chegarem às conclusões por si

Existiu também algum recurso à tecnologia, mas apenas por parte da professora estagiária, visto as aulas da turma decorrerem em salas de aula normais (sem computadores). O uso do *GeoGebra* foi muito útil nesta aula pois permitiu fazer uma passagem do círculo

trigonométrico para o gráfico da função no intervalo $[0, 2\pi]$ e depois do comportamento da função seno neste intervalo para o domínio \mathbb{R} . Nesta aula foi também utilizado um quadro interativo, que permitiu incluir a visualização de animações interativas criadas pela professora estagiária em *GeoGebra*.

A aula foi acompanhada por uma apresentação *PowerPoint*, em que, por exemplo, as conclusões sobre os extremos, zeros e intervalos de monotonia não estavam escritas nos slides, pois a professora estagiária considerou que seria mais produtivo para os alunos se estas fossem escritas no quadro devagar, para melhor entendimento. Desta forma os alunos foram acompanhando o processo e a professora estagiária conseguiu certificar-se de que os alunos tinham tempo para escrever os resultados no caderno.

Fazia também parte do plano de aula fazer um incentivo ao uso da tabela do seno, cosseno e tangente dos ângulos $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{3}$ e do círculo trigonométrico, por oposição à calculadora, pois ao utilizar as propriedades trigonométricas, o círculo trigonométrico e a tabela trigonométrica os alunos conseguiam determinar as razões trigonométricas pedidas mais rapidamente e de forma exata.

Considerações sobre a aula

No início da aula os alunos estavam muito agitados e a tarefa foi bastante eficaz pois estes acalmaram quando a iniciaram. Seguindo-se a resolução da tarefa, quando a exposição da matéria prosseguiu, os alunos estavam calmos e atentos. Esta reação à tarefa pode, na opinião da professora estagiária, ter se devido ao facto de os alunos não estarem muito habituados a resolver este tipo de questões.

Todos os alunos resolveram o exercício, mas houve um erro que surgiu várias vezes. Vários alunos marcaram os pontos $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \dots$ equidistantes entre si no eixo Ox . A opinião da professora estagiária é que a maior parte dos alunos fez este erro por distração. No entanto, alguns alunos apresentaram dificuldades na representação e comparação de frações.

Se um dia a professora estagiária for aplicar novamente esta aula a outra turma terá em consideração os comentários apresentados pela professora Elisabete Ferreira e a prestação da turma ao longo da aula. Nesta aula foi despendido demasiado tempo na resolução da tarefa, que teria sido importante na exposição da matéria. Além disso, dependendo do nível da turma, talvez fosse necessário referir que os pontos indicados não são equidistantes.

Existiram alguns problemas técnicos no início da aula que contribuíram para que a professora estagiária ficasse um pouco mais nervosa, nomeadamente o tempo que a aplicação em *GeoGebra* demorou a abrir e o facto da caneta do quadro interativo ter ficado sem pilhas.

Como referido pela professora da turma, nesta aula a professora estagiária focou-se mais nos alunos das primeiras filas, esquecendo o resto da sala, e não projetou de forma adequada a voz. Estes foram aspetos que foram referidos várias vezes ao longo das aulas pelas professoras que acompanharam o estágio, a professora estagiária foi trabalhando no sentido de melhorar a sua prestação ao longo do ano e considera que estes aspetos foram corrigidos.

A professora estagiária considera que a falta de tempo de aula se deveu à sua inexperiência, pois teve dificuldade em gerir o tempo de aula de forma eficiente pela exposição da matéria e resolução da tarefa de forma .

2.1.2.2 Aula de 5 de novembro

Resumo da aula

A segunda aula lecionada pela professora estagiária nesta turma deu-se no dia 5 de novembro, segunda-feira, e teve como assunto “Equações trigonométricas. Resolução de exercícios”.

Tabela 1.2.4 Resumo do plano de aula de dia 5 de novembro

Tema	Trigonometria 11.º.
Subtema	Equações trigonométricas.
Duração	90 minutos.
Sumário	Equações trigonométricas. Resolução de exercícios.
Material do professor	Computador. Projetor. Apresentação da aula. Quadro interativo.
Material dos alunos	Calculadora.
Objetivos da aula	Correção do trabalho de casa. Revisão das funções trigonométricas inversas. Compreender o método de resolução das equações trigonométricas. Analisar a diferença entre $\arcsin(k) = \alpha$ e $k = \sin(\alpha)$. Resolução de exercícios com equações trigonométricas.
Objetivos gerais	Desenvolver o raciocínio lógico. Desenvolver a capacidade de trabalho autónomo.
Estratégias	Utilizar o círculo trigonométrico para compreender as funções trigonometrias. Incentivar o uso da tabela do seno, cosseno e tangente de $\pi/6$, $\pi/3$ e $\pi/2$. Incentivar a participação dos alunos.

A professora estagiária iniciou a aula com a resolução, no quadro, dos exercícios do trabalho de casa em que os alunos tiveram dúvidas. Quando todas as dúvidas foram esclarecidas, a professora estagiária introduziu a nova matéria, começando com o seno, cosseno e por fim a tangente.

Para cada uma das funções seno, cosseno e tangente foi colocado um exercício inicial, semelhante ao da Figura 1.2.8, que incentivou os alunos a questionarem-se sobre a diferença entre uma equação trigonométrica e a equação com a respetiva função inversa, por exemplo, a diferença entre $\sin(x) = b$ e $\arcsin(b) = x$ para um dado $b \in \mathbb{R}$. Foram também colocadas algumas equações impossíveis, como $\sin(x) = 3$ e $\arcsin(3) = x$, para que os alunos comesçassem a tirar algumas conclusões sobre quais os valores que $a \in \mathbb{R}$ pode tomar em cada um dos casos.

Parte 1
Seno

Considera as seguintes condições de variável x . Para cada um dos casos indica se a condição tem uma solução, várias soluções ou nenhuma. No caso de ter solução indica uma ou mais soluções, em caso contrário justifica porque é que não tem solução.

- a) $\sin(x) = 3$
- b) $x = \arcsin(3)$
- c) $\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = x$
- d) $\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

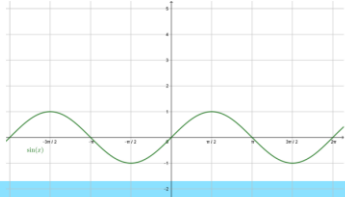
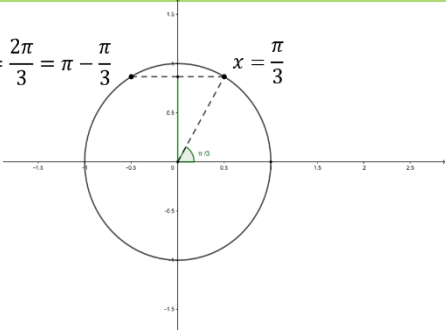


Figura 1.2.8 Slides da aula: Primeiro exercício da aula de 5 de novembro

A partir das duas primeiras alíneas foi explorado o conjunto de soluções de cada uma e a diferença entre a função trigonométrica e a sua respetiva função inversa, tendo em conta o domínio de cada função.

Qual a diferença entre $\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = x$ e $\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$?



$\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Figura 1.2.9 Slides da aula: Diferença entre $\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = x$ e $\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

A partir do círculo trigonométrico, os alunos conseguiram compreender a dedução do conjunto de solução de cada equação trigonométrica. (ver Figura 1.2.9). A partir do exemplo particular foi estudado o caso geral, $\sin(x) = \sin(\alpha)$, $\cos(x) = \cos(\alpha)$ e $\tan(x) = \tan(\alpha)$ com $\alpha \in \mathbb{R}$ dado. A professora estagiária incentivou os alunos a utilizar sempre o círculo trigonométrico na resolução de problemas deste t

Caso geral: $\sin(x) = b$

Impossível se $b \notin [-1, 1]$.

Possível se $b \in [-1, 1]$
 e existe $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ tal que $\sin(x) = \sin(\alpha) = b$ então:

$$x = \alpha + 2k\pi \vee x = \pi - \alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Figura 1.2.10 Slides da aula: Caso geral $\sin(x) = b$

Por fim, foram realizados alguns exercícios do livro para consolidação da matéria, sendo que, alguns destes exercícios envolviam questões onde era necessária a determinação de soluções da equação num determinado intervalo, como o exercício seguinte.

Exercício 116 (pág. 89 da Parte 1)

Dada a equação $\sin x + 0,2 = 0$, indica o número de soluções que pertencem ao intervalo:

- a) $] - 2\pi, \pi[$
- b) $] - \pi, 0[$
- c) $[\pi, \frac{5\pi}{2}[$

Preparação da aula e considerações sobre o plano de aula

A principal estratégia adotada nesta aula foi a utilização de exemplos concretos, recorrendo ao círculo trigonométrico. Depois de resolverem um caso particular os alunos foram capazes de fazer a generalização dos resultados e, nesta passagem, o círculo trigonométrico foi bastante útil pois a representação dos ângulos no círculo trigonométrico permitiu que os alunos encontrassem as similaridades entre o caso particular e o caso geral .

Nesta aula os alunos apenas precisaram da calculadora para obter arredondamentos na resolução dos exercícios do trabalho de casa e de consolidação da matéria.

Este plano de aula foi pensado com o objetivo de criar uma aula centrada nos alunos, os primeiros exercícios sobre o seno, foram guiados pela professora estagiária, mas a partir daí todos os exercícios eram acessíveis. Apesar de se tratar de uma aula tradicional não foi uma aula exclusivamente expositiva, o foco esteve nos alunos e o plano de aula potenciou que estes construíssem o seu próprio conhecimento.

Quando os alunos ficavam “bloqueados” numa pergunta a professora estagiária tentou ultrapassar essa situação, conduzindo-os à resposta correta ou indicando-a quando a questão era demasiado complicada. Esta estratégia foi adotada de modo a evitar situações de bloqueio e de frustração por parte dos alunos.

A professora estagiária sentiu que nesta aula foi fundamental recordar as funções trigonométricas inversas e o seu domínio no início da aula para tentar evitar erros do tipo:

$$\cos(x) = 0,5 \Leftrightarrow \arccos(\cos(x)) = \arccos(0,5) \Leftrightarrow x = \pi/3.$$

Na planificação desta aula a professora da turma e a professora estagiária debateram alguns aspetos da planificação como, por exemplo, a revisão do domínio das funções inversas, que ambas consideraram importantes, e a resolução de exercícios como o exercício 116 (ver acima). Nos exercícios que envolviam a determinação de soluções de uma equação num determinado intervalo decidiu-se adaptar a resolução à turma de estágio e utilizar uma abordagem diferente do manual, optando-se por atribuir valores a $k \in \mathbb{Z}$ e perceber quais os que resultam em valores dentro do intervalo pretendido.

Considerações sobre a aula

O plano desta aula foi cumprido e a maior parte dos alunos pareceu compreender o método de resolução das funções trigonométricas. O caso $\text{sen}(x) = \text{sen}(\alpha), \alpha \in \mathbb{R}$ foi resolvido pela turma em conjunto com a professora estagiária e, de seguida, os alunos foram

capazes de chegar sozinhos ao conjunto de solução das equações $\cos(x) = \cos(\alpha)$ e $\tan(x) = \tan(\alpha)$ para um $\alpha \in \mathbb{R}$ dado.

Os alunos corresponderam às expectativas previstas para a sua participação, tendo participado bastante e respondido às questões colocadas pela professora estagiária, além disso pareceram focados na matéria. A professora estagiária considera que foi estabelecido um bom ritmo de aula.

Nesta aula a professora estagiária ainda sentiu algumas dificuldades em projetar a voz e em gerir a turma, Por exemplo, em alguns momentos havia vários alunos com o braço levantado para responder ou fazer comentários e a professora estagiária não conseguiu proporcionar o todos oportunidade de participar.

A apresentação em *PowerPoint* foi bastante útil nesta aula, pois permitiu que não fosse preciso estar a despendendo tempo a desenhar no quadro o círculo trigonométrico ou o gráfico de cada uma das funções. No entanto se este plano de aula for aplicado, uma das alterações seria colocar um gráfico da respetiva função nos diapositivos referentes à conclusão do caso geral para cada equação (ver exemplo do seno na Figura 1.2.10).

2.1.2.3 Aula de 12 de novembro

Resumo da aula

A terceira aula dada pela professora estagiária nesta turma deu-se no dia 12 de novembro, segunda-feira, e teve como assunto “Declive e inclinação de uma reta do plano”.

Tabela 1.2.5 Resumo do plano de aula de dia 12 de novembro

Tema	Geometria Analítica 11.º.
Subtema	Declive e inclinação de uma reta do plano.
Duração	90 minutos.
Sumário	Declive e inclinação de uma reta do plano.
Material do professor	Computador. Projetor. Apresentação da aula.
Objetivos da aula	Revisão das noções de equação reduzida e equação vetorial de uma reta Compreender as noções de declive e inclinação de uma reta.
Objetivos gerais	Desenvolver o raciocínio lógico. Desenvolver a capacidade de resolver exercícios matemáticos rapidamente.
Estratégias	Aula expositiva, com a resolução de alguns exercícios no fim para consolidar a matéria Parar a exposição da matéria se alguns alunos estiverem com dúvidas. Uso de exercícios de escolha múltipla projetados no quadro para incentivar a participação de todos os alunos. Incentivar a participação de todos os alunos de forma ordenada. Evitar que sejam sempre os mesmos alunos a participar na aula.

Nesta aula foi estudado o declive de uma reta, a aula começou com uma exposição mais centrada na professora, ao que se seguiu a resolução de alguns exercícios de escolha múltipla no quadro.

Para calcular o declive de uma reta foram definidos três casos:

1. A reta passa na origem e é diferente do eixo Ox .
2. A reta não passa na origem.
3. A reta é correspondente ao eixo O_x . Neste caso declive da reta é 0, por definição.

No primeiro caso a definição (ver Figura 1.2.11) é fácil de compreender.

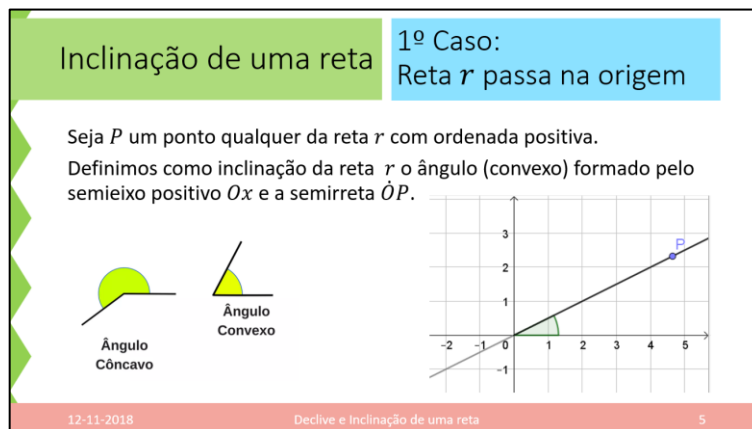


Figura 1.2.11 Slides da aula: Primeiro caso analisado

No segundo caso foi utilizada a reta paralela à reta dada que passa na origem e existiu a necessidade de rever alguns conceitos de 9.º ano. Para este efeito, a professora estagiária decidiu criar uma nova secção da apresentação intitulada “Recorda”, utilizada para rever conceitos que tenham sido lecionados em anos anteriores e que sejam importantes para a aula em causa. Por exemplo, nesta aula, o diapositivo ilustrado em Figura 1.2.12 serviu para rever a equação reduzida e a equação vetorial de uma reta, ambas fundamentais no estudo deste tema.

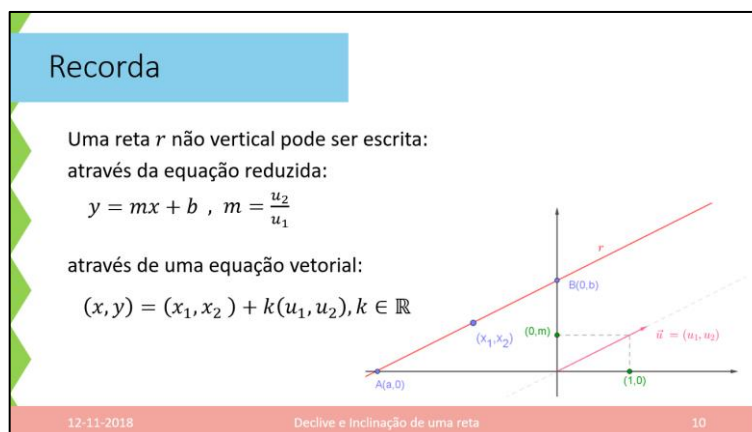


Figura 1.2.12 Slides da aula: Secção recorda: equações da reta

Quando a matéria foi dada e já não existiam mais dúvidas foram projetados alguns exercícios de escolha múltipla, semelhantes aos da Figura 1.2.13. Todos os exercícios eram acompanhados pelo gráfico de uma função (normalmente com uma grelha associada). Os primeiros exercícios referiam-se maioritariamente apenas à equação reduzida e vetorial da reta e a partir da observação do gráfico dessa reta os alunos conseguiam facilmente determinar a intersecção da reta com o eixo O_x ou o eixo O_y . Nos últimos exercícios era dado o ângulo de intersecção da reta com o eixo O_x (a sua inclinação) e o ponto de intersecção da reta com o eixo

O_x ou o eixo O_y , sendo, portanto, necessário recorrer ao cálculo da tangente do ângulo dado para determinar o declive da reta.

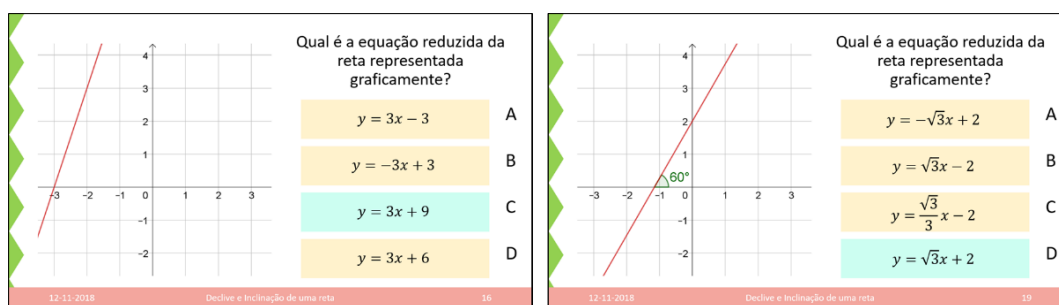


Figura 1.2.13 Slides da aula: Exemplos de dois exercícios de aula

Preparação da aula e considerações sobre o plano de aula

Nesta aula era fundamental existir um momento mais expositivo e tradicional. Com o objetivo de tornar esta aula mais dinâmica e de incluir um espaço para os alunos participarem, a professora estagiária decidiu criar um momento final onde os alunos poderiam participar livremente e trabalhar a pares.

O uso de exercícios de escolha múltipla constituiu uma estratégia para incentivar a participação dos alunos, por outro lado, num ambiente de sala de aula este tipo de exercício permite verificar facilmente onde é que os alunos têm tendência a errar. Este foi um momento em que a professora estagiária teve que assumir um papel de moderadora, gerindo a participação dos alunos, encorajando a participação ordenada de todos e tentando que não fossem sempre os mesmos alunos a responder. Nesta aula os momentos “Recorda” assumiram um papel de grande importância. No entanto, se a professora estagiária ou outro professor repetir este plano de aula, os momentos “Recorda” podem ser colocados no início da aula, em vez do local em que aparecem atualmente no plano de aula.

Considerações sobre a aula

A matéria prevista para a aula foi toda dada, mas não houve tempo para resolver todos os exercícios finais. As professoras consideram que os alunos adquiram estes conceitos, pois, no final da aula, os alunos participavam e respondiam corretamente às questões colocadas.

A secção “Recorda” foi bastante útil pois os alunos lembravam-se vagamente destes conceitos mas não se lembravam, em concreto, de como, por exemplo, determinar a equação vetorial de uma reta. Esta secção permitiu também fazer uma ligação entre a matéria dada e a matéria nova e agilizar o processo de aprendizagem dos alunos.

A professora estagiária considera que as perguntas de escolha múltipla ajudaram bastante a motivar os alunos pois a maior parte estava a trabalhar e queria responder às perguntas. No entanto, este tipo de questões tem uma construção mais demorada pois, ao planear a aula, é preciso tentar prever onde é que os erros de cálculo ou dúvidas da matéria vão surgir e incluir essas opções como possíveis respostas.

Nesta aula surgiu um problema do qual a professora estagiária ainda não se tinha apercebido: quando os alunos da fila da frente respondiam ou colocavam uma questão os alunos das filas de trás por vezes não conseguiam ouvir os colegas. A estratégia sugerida pela

professora da turma foi repetir o que os alunos tinham dito para a turma toda para que todos pudessem acompanhar a aula.

2.1.2.4 Aula de 7 de dezembro

Resumo da aula

A quarta aula lecionada pela professora estagiária a esta turma deu-se no dia 7 de dezembro, sexta-feira, e teve como assunto “Equação de um plano definido por um ponto e um vetor normal. Equação de um plano definido por três pontos não colineares”.

Tabela 1.2.6 Resumo do plano de aula de dia 7 de dezembro

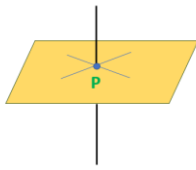
Tema	Geometria Analítica.
Subtema	Equações de planos nos espaços- Equação de um plano definido por um ponto e um vetor normal e Equação do plano definido por três pontos não colineares (Tema 3.1 do manual).
Duração	90 minutos.
Sumário	Equação de um plano definido por um ponto e um vetor normal. Equação de um plano definido por três pontos não colineares.
Material do professor	Computador. Projetor. Apresentação da aula.
Objetivos da aula	Revisão da definição de vetor normal a um plano. Compreender a estratégia para obter a equação de um plano dado um vetor normal ao plano e um ponto do plano. Compreender a estratégia para obter a equação de um plano dado três pontos (não colineares) do plano.
Objetivos gerais	Desenvolver o raciocínio lógico. Desenvolver a capacidade de resolver exercícios. Desenvolver a capacidade de trabalhar em pares.
Estratégias	Intercalar a exposição com exercícios de consolidação simples. Introduzir os algoritmos através de um caso concreto, a partir do qual é possível generalizar. Recorrer a diferentes progressos e permitir que os alunos tenham a liberdade de escolher o processo que preferem e se adequa ao seu modo de pensar.

A professora estagiária começou a aula com um momento “Recorda”, com a revisão da noção de “reta perpendicular a um plano”, seguindo-se a definição de vetor normal a um plano. Em ambos os momentos, foi utilizada a definição de lugar geométrico. Na Figura 1.2.14 encontra-se, para exemplo, um desses slides.

A aula foi dividida em duas partes, primeiro foi estudado o caso da “Equação de um plano definido por um ponto e um vetor normal” e foi realizado um exercício. De seguida, foi visto o caso “Equação de um plano definido por três pontos não colineares” e um exercício correspondente. Esta ordem foi definida por o segundo caso recorrer ao algoritmo do primeiro.

Recorda... (9.ºano)

- Dizemos que **uma reta é perpendicular a um plano** num ponto P quando é perpendicular a duas retas do plano concorrentes nesse ponto.
- Se uma reta é perpendicular a um plano num ponto, então é perpendicular a todas as retas desse plano que passam por esse ponto



07-12-2018 Equação de um plano 2

Figura 1.2.14 Slides da aula: Secção recorda sobre a reta perpendicular a um plano

No primeiro caso começou-se por demonstrar a proposição “Sejam α um plano, P_0 um ponto de α e \vec{u} um vetor normal a α . Temos $P \in \alpha \Leftrightarrow \overrightarrow{PP_0} \cdot \vec{u} = 0$ ”. De seguida, foram apresentados os dois processos para obter a equação pretendida no caso concreto em que $\vec{u} = (1, -3, 3)$ é um vetor normal ao plano α e $P_0(-2, 2, -1)$ um ponto do plano (ver Figura 1.2.15).

Seja α um plano qualquer. Seja $\vec{u} = (1, -3, 3)$ um vetor normal a α e $P_0(-2, 2, -1)$ um ponto de α .
Seja $P(x, y, z)$ um ponto qualquer de α .

Temos $\vec{u} \cdot \overrightarrow{PP_0} = 0$ logo

$$(1, -3, 3) \cdot (x - (-2), y - 2, z - (-1)) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1(x - (-2)) + (-3)(y - 2) + 3(z - (-1)) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x + 2 - 3y + 6 + 3z + 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x - 3y + 3z + 11 = 0 \quad \text{Equação cartesiana do plano } \alpha$$

Processo 1

Seja α um plano qualquer. Seja $\vec{u} = (1, -3, 3)$ um vetor normal a α e $P_0(-2, 2, -1)$ um ponto de α . Seja $P(x, y, z)$ um ponto qualquer de α .

Como $\vec{u} = (1, -3, 3)$ é um vetor normal de α equação de α é da forma $1x - 3y + 3z + d = 0$ para certo $d \in \mathbb{R}$.

Como $P_0(-2, 2, -1)$ é um ponto de α as coordenadas de P_0 são solução da equação do plano então:

$$1 \times (-2) - 3 \times 2 + 3 \times (-1) + d = 0 \Leftrightarrow d = 11.$$

Equação cartesiana do plano α

Logo a equação do plano é $x - 3y + 3z + 11 = 0$.

Processo 2

Figura 1.2.15 Slides da aula: Dois processos apresentados para determinar a equação de um plano definido por um ponto e um vetor normal


No segundo caso foi também utilizado o exemplo de um caso concreto para exemplificar o processo geral. Foram definidos 3 passos distintos de modo a sistematizar a resolução do problema (ver Figura 1.2.16).

Equação de um plano definido por três pontos não colineares

Seja α um plano e sejam A, B e C três pontos de α .

Como obter uma equação de α :

- 1º Passo: Verificar que A, B e C são não colineares;
- 2º Passo: Encontrar um vetor normal a α usando as condições $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ e $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$;
- 3º Passo: Repetir um dos processos anteriores usando o vetor \vec{u} e um dos pontos (A, B ou C).



07-12-2018 Equação de um plano 16

Figura 1.2.16 Slides da aula: Segundo caso: equação de um plano definido por três pontos não colineares

Foram apresentados dois processos distintos para verificar se três pontos dados são não colineares, um consiste na verificação da não colinearidade de dois vetores distintos não opostos

definidos pelos três pontos, e outro recorre ao cálculo do cosseno do ângulo formado por dois vetores distintos não simétricos definidos pelos três pontos.

1º Passo: Verificar que A, B e C são não colineares

Três pontos A, B e C são colineares se $\exists \lambda \in \mathbb{R}: \overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{BC}$

$$\overrightarrow{AB} = (0 - 1, 1 - 0, -1 - 2) = (-1, 1, -3)$$

$$\overrightarrow{BC} = (1 - 0, 3 - 1, 1 - (-1)) = (1, 2, 2)$$

Será que $\exists \lambda \in \mathbb{R}: \overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{BC}$?

$$(-1, 1, -3) = \lambda(1, 2, 2) \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = \lambda \times 1 \\ 1 = \lambda \times 2 \\ -3 = \lambda \times 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -1 \\ \lambda = \frac{1}{2} \\ \lambda = -\frac{3}{2} \end{cases} \text{ Sistema impossível}$$

Os vetores não são colineares!

Processo 1

1º Passo: Verificar que A, B e C são não colineares

Outro processo Se os pontos A, B e C são colineares o ângulo formado pelos vetores \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{BC} é igual 0° ou 180° , logo o cosseno do ângulo formado pelos vetores é igual a 0.

$$\overrightarrow{AB} = (-1, 1, -3) \text{ e } \overrightarrow{BC} = (1, 2, 2)$$

$$\cos(\angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})) = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}|}{\|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{BC}\|} = \frac{-1 + 2 - 6}{\sqrt{11} \times \sqrt{9}} = -\frac{5}{\sqrt{11} \times 3} \approx -0,5$$

Então A, B e C não são colineares!

Processo 2

Figura 1.2.17 Slides da aula: Dois processos apresentados para determinar se três pontos dados são colineares

Preparação da aula e considerações sobre o plano de aula

A professora estagiária considerou que uma aula expositiva era mais adequada para o assunto em estudo pois os alunos teriam muitas dificuldades em deduzir os algoritmos sozinhos. Deste modo, cada caso em estudo iniciou-se com um momento mais dirigido, ao que se seguiu a realização de alguns exercícios de consolidação da matéria.

Os exercícios aplicados nesta aula foram criados pela professora estagiária pois, na opinião desta, os exercícios do manual eram demasiado complicados para uma aula introdutória. Esta aula aparece no seguimento do estudo do tema de Geometria Analítica, mas é a primeira aula em que se trata o espaço (três dimensões), em que os alunos apresentam algumas dificuldades com a visualização dos objetos.

Os exercícios eram simples e diretos, mas foram incluídas algumas alíneas diferentes para testar os casos especiais e criar momentos promotores da aprendizagem, por exemplo, no primeiro exercício uma das alíneas tinha como resposta a reta “ $y = 2$ ” e no segundo exercício os pontos dados numa das alíneas eram colineares.

Nos slides “Recorda” foram incluídas algumas revisões fundamentais, como a definição de reta tangente a um plano, vetor normal a um plano e equação cartesiana de um plano.

Durante a construção do plano de aula a professora da turma e a professora estagiária discutiram alguns aspetos, como a demonstração da propriedade “Sejam α um plano, P_0 um ponto de α e \vec{u} um vetor normal a α . Temos $P \in \alpha \Leftrightarrow \overrightarrow{PP_0} \cdot \vec{u} = 0$ ”, que consideraram um pouco complicada para a turma em causa e que, por isso, foi apresentada mais pausadamente.

O *GeoGebra* foi considerado como ferramenta auxiliar para esta aula, mas a professora estagiária prescindiu a sua utilização por considerar que os objetos como retas e planos representados na *Folha Gráfica 3D* do *GeoGebra* não ficavam muito legíveis e que o seu manuseamento não era fácil.

Considerações sobre a aula

O plano desta aula era extenso e a professora estagiária já estava a prever não conseguir terminar o último exercício, o que se verificou. Foi despendido demasiado tempo no primeiro exercício, tal como referido pelas professoras Elisabete Ferreira e Helena Santos, este devia ter menos uma alínea de modo a permitir terminar a matéria da aula e permitir no fim realizar o último exercício e tirar as dúvidas que surgissem mais cuidadosamente.

Os alunos tiveram um comportamento adequado, com apenas alguns problemas ocasionais, como o caso de dois alunos que utilizaram os telemóveis na aula e por isso os dispositivos foram retirados pela professora estagiária e guardados na sua secretária durante o resto da aula.

Apesar destes aspetos, a aula pode ser considerada um sucesso pois os alunos compreenderam os algoritmos apresentados nesta aula e foram capazes de resolver exercícios deste tipo com facilidade, recorrendo cada um ao processo preferido.

O *PowerPoint* foi muito útil nesta aula pois demorar-se-ia muito mais tempo a escrever tudo no quadro, que não se iria traduzir necessariamente numa melhor compreensão da matéria por parte dos alunos. Além disso o uso de gráficos e cores contribui muito para a aprendizagem, contribuindo para a memória visual.

Durante esta aula a professora estagiária sentiu que esteve um pouco mais à vontade, no entanto, surgiram ainda alguns aspetos a corrigir. As professoras Elisabete Ferreira e Helena Santos referiram que a professora estagiária não circulou o suficiente pela sala, tendo se esquecido do lado direito da sala, que não reviu, com cuidado suficiente, as resoluções dos alunos no quadro, que falou demasiado rápido na exposição da matéria e nas demonstrações e que não insistiu o suficiente na ideia de lugar geométrico. A professora estagiária concorda com estes comentários e tentou corrigir estes problemas nas aulas seguintes. Alguns dos aspetos positivos referidos foram o facto de ter criado os seus próprios exercícios e a atitude da professora estagiária de retirar os telemóveis aos alunos que foram apanhados a utilizá-los na aula. Em geral, houve um foco excessivo nos exemplos e nos exercícios, a professora estagiária deveria ter explicado com mais calma a introdução teórica e o tempo de aula deveria ter sido distribuído tendo isso em conta.

2.1.2.5 Aula de 11 de janeiro

Resumo da aula

A quinta aula dada pela professora estagiária nesta turma decorreu no dia 11 de janeiro, sexta-feira, e teve como assunto “Majorantes, minorantes, máximo e mínimo de um conjunto não vazio de números reais”. Para terminar o plano de aula foi também utilizada parte da aula de dia 15 de janeiro, terça-feira.

Tabela 1.2.7 Resumo do plano de aula de dia 11 de janeiro

Tema	Sucessões.
Subtema	Majorantes e minorantes de um conjunto não vazio de números reais (Tema 1.1 do manual).
Duração	90 minutos.
Sumário	Majorantes, minorantes, máximo e mínimo de um conjunto não vazio de números reais.
Material do professor	Cartas de jogo (um conjunto para cada 4/5 alunos).
Objetivos da aula	Compreender as definições de majorante, minorante, máximo e mínimo de um conjunto não vazio de números reais.

	Compreender a definição de conjunto minorado, majorado ou limitado.
Objetivos gerais	Desenvolver o raciocínio lógico. Desenvolver a capacidade de trabalhar em grupo e analisar as respostas dos colegas.
Estratégias	1ª parte Recorrer a exemplos sempre que for necessário ilustrar alguma definição. Fomentar a participação dos alunos na criação de exemplos adequados. 2ª parte Incentivar o uso espírito crítico na análise das respostas dos colegas. Desenvolver a capacidade matemática e de rapidez matemática.

Esta aula foi dividida em duas partes: na primeira parte foi realizada uma exposição da matéria e na segunda foi realizado um jogo relacionado com os conceitos adquiridos. Na primeira parte da aula apenas foi utilizado o quadro da aula, não foi utilizada nenhuma apresentação.

A professora estagiária começou a aula por introduzir as definições de majorante e minorante, seguidas de alguns exemplos concretos. De seguida, foram apresentadas as definições de conjunto majorado, minorado, limitado e não limitado, e os conjuntos apresentados foram classificados de acordo com estas definições.

A partir das definições de majorante e minorante foram introduzidas as definições de máximo e mínimo e novamente foram apresentados exemplos. Nestas definições os alunos apresentaram mais dificuldades. Por fim foi apresentada a demonstração da unicidade do mínimo de um conjunto, como a demonstração é análoga não foi apresentada a demonstração da unicidade do máximo de um conjunto.

De seguida, a professora estagiária decidiu apresentar alguns exemplos, o que não estava previsto no plano de aula. Estes exemplos foram escolhidos na altura de forma a tentar representar as várias hipóteses relevantes (intervalos abertos, fechados e nem abertos nem fechados e conjuntos obtidos através da união ou disjunção de intervalos). Em conjunto com a professora estagiária os alunos estudaram os majorantes, minorantes, máximo e mínimo de cada um, concluindo se este é majorado, minorado, limitado ou não limitado. Por fim foi realizado o exercício 1.

Exercício 1

Para cada um dos conjuntos identificar o conjunto dos majorantes, o conjunto dos minorantes e, se existirem, o máximo e mínimo. Justificar se é um conjunto majorado, minorado e/ou limitado.

- a) $]1, 5[\cap] - 3, 2[$
- b) $] - 3, -1[\cup] 2, 3]$
- c) $]1, \sqrt{2}[\cup] 5, 7[$
- d) $\{x \in \mathbb{R}: 1 + x > 3\}$
- e) $\{x \in \mathbb{R}: |x + 2| < 2\}$
- f) $\{x \in \mathbb{R}: x^2 + 2x - 8 > 0\}$

Não houve tempo de realizar a segunda parte prevista na mesma aula por isso esta foi realizada noutra aula. Na segunda parte foi realizado um jogo, criado pela professora estagiária, cujas regras são apresentadas em seguida. Este jogo implicava não só que os alunos soubessem

as definições, mas também que fossem capazes de criar um conjunto que verificasse certas propriedades dadas.

Para evitar distrações as regras de jogo foram explicadas e só depois os alunos foram agrupados e as regras de jogo foram distribuídas. A turma tinha vinte e oito alunos nesse momento, portanto os alunos foram organizados em quatro grupos de quatro alunos cada e dois grupos de cinco alunos cada, pedindo aos alunos da primeira e da terceira filas para se virarem para trás e aos alunos da última fila para avançarem uma secretária para a frente. Depois de os grupos lerem as regras de jogo a professora estagiária questionou se existiam dúvidas e só depois foram distribuídas as cartas de jogo. As regras do jogo encontram-se nos anexos relativos à primeira parte (5.1 Regras do jogo aplicado na aula do dia 11 de janeiro).

Durante a resolução do jogo a professora estagiária circulou pela sala a tirar dúvidas aos alunos e a analisar os ternos jogados. Como os alunos guardavam os ternos jogados na mesa junto de si até ao fim do jogo, a professora estagiária conseguiu facilmente verificar se existiam erros com os ternos (por exemplo, um conjunto que não verificava uma das propriedades jogadas) e explicar aos alunos do grupo o erro que tinha sido cometido.

Preparação da aula e considerações sobre o plano de aula

Para este tema a professora estagiária queria realizar um jogo, por isso decidiu adaptar o famoso *jogo das famílias*. Como para poder jogar era necessário que os alunos tivessem algumas noções da matéria era fundamental existir um momento de apresentação da matéria antes de o jogo começar.

A preparação desta aula exigiu algum tempo à professora estagiária, tanto na preparação e execução das cartas de jogo como na análise e reformulação das regras de jogo. A professora estagiária testou algumas vezes o jogo, com o objetivo de acertar o número de cartas que cada jogador recebe, o número de cartas joker e outros aspetos.

Quanto à primeira parte, a professora estagiária decidiu não usar slides pois achou que conseguia escrever rapidamente no quadro as definições.

Considerações sobre a aula

Não foi possível realizar o jogo na mesma aula da exposição da matéria devido aos constrangimentos de tempo, mas foi coberta toda a matéria planificada e foram realizados vários exemplos extra que não estavam previstos na planificação. A realização do jogo foi adiada para uma aula seguinte.

Na opinião da professora estagiária, o plano de aula não foi cumprido devido à realização dos exemplos extra e à ausência dos slides. Quanto aos vários exemplos, a professora estagiária considera que estes foram essenciais para a consolidação da matéria, talvez pudessem ser menos, mas não poderiam ser eliminados na totalidade. Quanto à apresentação, a professora estagiária considera que deveria ter seguido o conselho da professora da turma e ter recorrido a uma apresentação em *PowerPoint*, pois esta teria permitido poupar muito tempo ao não ter de escrever as várias definições.

A professora estagiária considera que os alunos tiveram um bom comportamento, participaram ativamente e foram capazes de adquirir as noções em estudo nesta aula. Ambas as partes da aula foram, na opinião da professora estagiária, um sucesso, mas para ser possível

realizar ambas numa aula de noventa minutos seriam necessárias algumas adaptações como, por exemplo, o uso de uma apresentação ou o uso de menos exemplos.

A professora estagiária considera que este jogo resultou muito bem com a turma, pois os alunos estavam todos a jogar e perceberam facilmente as regras. Através da análise dos ternos a professora estagiária conseguiu apanhar alguns erros que tinham sido cometidos pelos alunos e, falando com os grupos correspondentes, as dúvidas foram rapidamente esclarecidas .

2.1.2.6 Aula de 28 de janeiro

Resumo da aula

A sexta aula lecionada pela professora estagiária nesta turma deu-se no dia 28 de janeiro, segunda-feira, e teve como assunto “Progressões geométricas e aritméticas”.

Tabela 1.2.8 Resumo do plano de aula de dia 28 de janeiro

Tema	Sucessões.
Subtema	Progressões aritméticas e geométricas (4.1 e 4.2 do manual, em particular 4.1.1. e 4.1.2.).
Duração	90 minutos.
Sumário	Progressões geométricas e aritméticas.
Material do professor	30 cópias da primeira parte da tarefa (metade versão A e metade versão B).
Objetivos da aula	Compreender a definição de progressão geométrica e de progressão aritmética. Saber distinguir quando uma sucessão é uma progressão geométrica, progressão aritmética ou nenhuma das duas.
Objetivos gerais	Desenvolver o raciocínio lógico. Desenvolver a capacidade de trabalhar em pares. Desenvolver a capacidade de relacionar diferentes representações da sucessão (representação geométrica, representação por recorrência e através do termo geral).
Estratégias	Incentivar todos os alunos a participarem na aula. Resolução de uma tarefa exploratória, a pares. Utilizar a representação geométrica de sucessões para concluir sobre a sua evolução e seu termo geral. Explorar diferentes representações para a mesma sucessão. Trabalho em pares como fonte de motivação e discussão de ideias.

Nesta aula os alunos trabalharam a pares para tentar definir a sucessão por recorrência e obter o termo geral de diferentes sucessões representadas geometricamente. Existiam duas versões diferentes da mesma tarefa, de modo a explorar um maior número de sucessões.

No início da aula os alunos foram organizados em pares, de forma a minimizar as mudanças de lugar, e foi distribuída a primeira parte da tarefa, um enunciado por cada par. Os alunos tiveram algum tempo para definir as sucessões por recorrência, e conforme foram acabando receberam instruções para começar a pensar no termo geral.

Quando a maior parte dos alunos terminaram esta parte da tarefa, foi distribuído um segundo enunciado a cada par, de forma a que em cada secretária existisse um enunciado da

versão A e outro da versão B. De seguida, foi realizada a resolução da tarefa por alguns alunos no quadro.

Olhando para as soluções a professora estagiária questionou os alunos sobre as semelhanças que estes encontraram na resolução da tarefa, a partir destas ideias foram apresentadas as definições de progressão aritmética e progressão geométrica. Referindo que algumas das sucessões da tarefa não eram nem progressões aritméticas nem progressões geométricas.

De seguida, a professora estagiária apresentou exemplos concretos de uma progressão aritmética e de uma progressão geométrica e o termo geral de cada uma. Foi demonstrado que o termo geral de uma progressão aritmética de primeiro termo u_1 e razão r era $u_n = u_1 + (n-1)r, \forall n \in \mathbb{N}$. Ficou como trabalho de casa obter o termo geral das sucessões apresentadas na tarefa.

Preparação da aula e considerações sobre o plano de aula

A ideia desta tarefa surgiu no decorrer de um trabalho da disciplina História e Filosofia da Matemática, no qual a professora estagiária estudou a escola Pitagórica e Jónica. No estudo deste tema surgiram os números triangulares, quadrangulares e retangulares, entre outros, numa abordagem geométrica. Ao constatar o fraco uso de diferentes representações por parte do manual, a professora estagiária considerou que esta poderia ser uma abordagem muito interessante e adequada para esta turma.

Ao criar uma tarefa a professora estagiária teve a liberdade para escolher o tipo de exercícios a realizar e, como a aula seria muito focada nos alunos, não lhe pareceu de criar uma apresentação para acompanhar a aula.

A professora estagiária estava bastante entusiasmada para explorar os contraexemplos, por isso decidiu incluir duas sucessões na tarefa que não eram nem progressões aritméticas nem progressões geométricas mas que poderiam providenciar um momento de aprendizagem significativo e interessante para os alunos.

Considerações sobre a aula

Os conteúdos planificados para a aula foram atingidos, mas não de acordo com o plano de aula inicial. A professora estagiária tinha pensado dar algum tempo para os alunos tentarem chegar ao termo geral das sucessões indicadas na tarefa e só depois introduzir o caso geral para as progressões geométricas e aritméticas. No entanto, como foi utilizado demasiado tempo na resolução e correção no quadro da primeira questão decidiu saltar logo para o caso geral a partir de um exemplo e deixar a segunda questão da tarefa como trabalho de casa.

Através da reunião com a professora da turma, a professora Doutora Maria Helena Santos e a colega de estágio, em que foi discutida a prestação da professora estagiária, o comportamento da turma e outros aspetos relevantes, a professora estagiária teve oportunidade de refletir sobre a sua própria prática docente.

A professora estagiária esteve mais descontraída nesta aula e os alunos estiveram calmos a trabalhar na resolução da tarefa e participaram durante a resolução no quadro. A professora estagiária considera que a maior parte dos alunos compreenderam a matéria e que a tarefa

contribuiu para estes criarem criar uma memória e uma ligação significativa com o novo tema introduzido.

No entanto, alguns pontos não correram tão bem, nomeadamente, a professora estagiária falou um pouco baixo, não usou o quadro de forma eficiente (escreveu demasiado em baixo). A professora estagiária considera que o momento de apresentação das conclusões poderia ter sido melhor conduzido, as conclusões não ficaram muito organizadas e os alunos não pareceram muito focados durante esse momento.

Algumas alterações a fazer neste plano de aula seriam criar slides auxiliares para acelerar o ritmo de aula, com o cuidado de fazer as demonstrações no quadro por escrito.

2.1.2.7 Aula de 29 de janeiro

Resumo da aula

A sétima aula lecionada pela professora estagiária nesta turma deu-se no dia 29 de janeiro, terça-feira, e teve como assunto “Monotonia das progressões geométricas e aritméticas”.

Tabela 1.2.9 Resumo do plano de aula de dia 29 de janeiro

Tema	Sucessões.
Subtema	Progressões aritméticas e geométricas (4.1 e 4.2, em particular 4.1.2. e 4.2.2.).
Duração	90 minutos.
Sumário	Monotonia das progressões geométricas e aritméticas.
Material do professor	30 cópias da segunda parte da tarefa.
Objetivos da aula	Compreender como obter o termo geral de uma progressão aritmética ou geométrica em função da razão e de um termo de ordem p . Estudar a monotonia das progressões geométricas e aritméticas.
Objetivos gerais	Desenvolver a capacidade de estar atento. Desenvolver a capacidade de realizar demonstrações válidas. Desenvolver a capacidade de criar sucessões que obedeçam a um conjunto de regras dadas.
Estratégias	Trabalho em pares como fonte de motivação. Propor que os alunos criem sucessões que verifiquem certas propriedades.

A professora estagiária começou a aula com a demonstração do termo geral da progressão geométrica, que tinha ficado por terminar da aula anterior. De seguida, foi realizada a correção do trabalho de casa no quadro, mas, como muitos alunos não tinham resolvido a segunda questão da tarefa, foi consumido tempo em excesso nesse momento.

De seguida, foi distribuída a segunda parte da tarefa, onde a primeira pergunta procura construir uma intuição para termo geral em função da razão e do termo de ordem 3. Depois dos alunos resolverem esta pergunta foi apresentado o caso geral no quadro pela professora estagiária.

A professora estagiária perguntou aos alunos se para uma progressão aritmética qualquer conseguimos obter o termo geral só conhecendo a razão r e um termo de ordem p .

Foram utilizados mais alguns exemplos no quadro para auxiliar o raciocínio. Tendo em conta a resolução dos exemplos chegou-se à hipótese $u_n = u_p + r(n - p), \forall n \in \mathbb{N}$. Depois de ter a hipótese formada e os alunos perceberem o comportamento desta propriedade foi feita a demonstração no quadro.

Estava previsto apresentar o resultado equivalente para as progressões aritméticas e estudar a monotonia das progressões aritmética e geométrica, mas não houve tempo de aula suficiente para terminar o plano de aula.

Preparação da aula e considerações sobre o plano de aula

A principal estratégia para esta aula era recorrer aos exemplos para ilustrar os resultados em estudo. No estudo da monotonia o objetivo era que os alunos criassem os seus próprios exemplos, fazendo variar a razão e o primeiro termo, de modo a testar o comportamento da sucessão.

A tarefa utilizada nestas duas aulas foi pensada com uma única tarefa, mas foi dividida em duas partes com a finalidade de diminuir a dispersão dos alunos.

Considerações sobre a aula

Esta aula foi bastante problemática, pois a professora estagiária teve dificuldades em se adaptar às circunstâncias da sala de aula e ao seu próprio atraso na matéria prevista. Alguns dos problemas desta aula estiveram relacionados com a resolução do trabalho de casa no quadro, as questões 3 e 4 da tarefa e a postura da professora estagiária.

Quando a professora estagiária percebeu que os alunos não tinham realizado o trabalho de casa devia ter saltado essa parte e avançado com o plano de aula. Não ficou claro qual a razão pela qual os alunos não realizaram o trabalho de casa, podem não ter compreendido a matéria ou o que era pedido, pode também se ter devido ao facto de o trabalho de casa ter sido pedido para o dia seguinte.

A maior parte dos alunos apresentaram dificuldades com as perguntas 3 e 4, tanto na interpretação do enunciado como dificuldades em chegar ao resultado esperado. Outros alunos foram ao manual ver a resposta e apresentaram logo o resultado final.

Quanto aos contraexemplos incluídos na tarefa, e com os quais foi despendido demasiado tempo de aula, as professoras Elisabete Ferreira e Helena Santos referiram que talvez fosse preferível terem sido retirados ou que não tivessem sido resolvidos em aula.

Os alunos tiveram alguns problemas de comportamento durante a aula, estavam agitados e distraídos com outras conversas, uma situação com que a professora estagiária não soube lidar de forma adequada. Ao se perceber da quantidade de tempo consumido na resolução do trabalho de casa a professora estagiária começou a ficar nervosa e tentou acelerar a aula.

A matéria prevista para esta aula não foi atingida e a professora estagiária ficou frustrada. No fim da aula, as professoras Elisabete Ferreira e Helena Santos tentaram tranquilizar a professora estagiária referindo que nem tudo correu mal, pois, pelo menos, a matéria que foi dada nessa aula ficou clara para os alunos e estes pareceram compreender os conceitos.

A professora estagiária considera que os objetivos atingidos nesta aula foram insuficientes, tendo em conta a duração da mesma. Pelos aspetos já referidos, mas

principalmente pelos nervos, a professora estagiária considera que esta foi a sua pior aula assistida do estágio.

2.1.2.8 Aula de 1 de fevereiro

Resumo da aula

A oitava aula lecionada pela professora estagiária nesta turma deu-se no dia 1 de fevereiro, sexta-feira, e teve como assunto “Monotonia das progressões geométricas e aritméticas”.

Tabela 1.2.10 Resumo do plano de aula do dia 1 de fevereiro

Tema	Sucessões.
Subtema	Progressões aritméticas e geométricas.
Duração	90 minutos.
Sumário	Monotonia das progressões aritmética e geométrica.
Objetivos da aula	Compreender como obter o termo geral de uma progressão geométrica em função da razão e de um termo de ordem p . Estudar a monotonia das progressões geométricas e aritméticas. Resolver exercícios e problemas de consolidação da matéria.
Objetivos gerais	Desenvolver a capacidade de estar atento. Desenvolver a capacidade de trabalhar autonomamente.
Estratégias	Rever a matéria anterior. Incentivar os alunos a explorarem vários exemplos de progressões aritméticas e geométricas. Utilizar os exemplos para ilustrar as propriedades em estudo.

A professora estagiária começou a aula com uma revisão de toda a matéria estudada até ao momento: definição de progressão aritmética, termo geral da progressão aritmética, termo geral da progressão aritmética em função da razão e de um termo de ordem p , definição de progressão geométrica, termo geral da progressão geométrica, termo geral da progressão geométrica em função da razão e de um termo de ordem p . Foi demonstrada a expressão do termo geral da progressão geométrica em função da razão e de um termo de ordem p .

A professora estagiária questionou os alunos sobre a monotonia das progressões aritméticas: “São todas crescentes? Podem ser decrescentes? Podem ser constantes?” e pediu que encontrassem exemplos de cada tipo. Foram escritos alguns exemplos no quadro e a partir destes foi encontrada a regra seguinte, que foi escrita e demonstrada no quadro.

$$\text{Uma progressão aritmética } \begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = u_n + r, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

é crescente se $r > 0$, decrescente se $r < 0$ e constante se $r = 0$.

O caso da progressão geométrica foi tratado de forma semelhante, a professora estagiária guiou a discussão e as conclusões, sugerindo que os alunos pensassem primeiro no caso em que o primeiro termo é 1 e a razão é positiva e fazendo depois variar a razão. Sugeriu, também, que recordassem as sucessões usadas na tarefa. Para este tipo de sucessões, como era esperado, os alunos não conseguiram chegar sozinhos à conclusão.

Seja u_n uma progressão geométrica $\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = u_n \times r, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

Temos $u_n = u_1 \times r^{n-1}$ então

$$u_{n+1} - u_n = r^{n-1} \times (r - 1) \times u_1, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Se $u_1 > 0$ e

$r > 1$ então (u_n) é crescente;

$0 < r < 1$ então (u_n) é decrescente;

$r < 0$ então (u_n) não é monótona.

Se $u_1 < 0$ e

$r > 1$ então (u_n) é decrescente;

$0 < r < 1$ então (u_n) é crescente;

$r < 0$ então (u_n) não é monótona.

Preparação da aula e considerações sobre o plano de aula

Nesta aula um dos objetivos era recuperar o ritmo da turma e concluir a matéria proposta para a semana, por isso esta aula foi mais conduzida do que as anteriores, de modo a tentar evitar desvios. Além disso começou com uma revisão de toda a matéria apresentada nas duas aulas anteriores.

Novamente, a professora estagiária decidiu não utilizar nenhuma apresentação auxiliar e escrever tudo no quadro. A primeira parte da aula foi expositiva e a segunda parte foi mais baseada numa discussão de turma por isso a professora estagiária não considerou necessário a uma apresentação em *PowerPoint*.

Considerações sobre a aula

Como a aula anterior não tinha corrido bem e a professora estagiária estava com receio de se atrasar mais, por isso, começou a aula logo a correr. No início da aula a professora estagiária apresentou a revisão de todos os conceitos que tinham sido apresentados nessa aula. Como estava bastante atrasada no plano para essa semana a professora estagiária sentiu que tinha gasto demasiado tempo nessa parte da aula, no entanto, a professora da turma referiu que essas revisões foram feitas demasiado depressa e que a professora estagiária falou demasiado depressa. Alguns alunos quiseram passar o resumo para o caderno, apesar de a professora estagiária ter avisado que estava tudo no manual, mas como tinha receio de não completar o plano de aula tentou apressar os alunos. Se repetisse esta aula a professora estagiária teria apresentado esta parte inicial das revisões em *PowerPoint*, para não perder tanto tempo a escrever no quadro e permitir a possibilidade de disponibilizar os slides aos alunos.

Um aspeto referido pelas professoras Elisabete Ferreira e Helena Santos foi o facto de um dos exercícios escolhidos pela professora estagiária utilizar percentagens. Este exercício foi escolhido precisamente por utilizar percentagens e ser um problema de contexto da vida real, no entanto, tendo em conta os comentários apresentados, a professora estagiária concordou que o

exercício poderia ser demasiado complicado para alguns dos alunos e que existiam exercícios do manual mais adequados para esta aula.

Proposta 57 (pág. 55 da Parte 2)

Considera que, após a aquisição de um automóvel, este sofre um desvalorização anual de 15%.

O Sr. Fausto comprou recentemente um automóvel novo por 30 000€.

57.1 Calcula um valor aproximado, em euros, da quantia que poderá render o carro ao Sr. Fausto caso este o venda daqui a 5 anos.

57.2 Determina uma expressão geral que traduza o valor do automóvel em função do número n de anos decorridos após a sua compra.

Como a professora estagiária tinha um pouco de receio de se atrasar mais na planificação e de que os alunos se distraíssem, esta aula foi bastante conduzida. Mesmo a discussão da monotonia foi bastante conduzida, no entanto resultou bastante bem e os alunos participaram e criaram os seus próprios exemplos.

A ideia inicial era os alunos criarem exemplos em pares e depois ser realizada uma sistematização no quadro, mas desta forma a aula decorreu mais rapidamente e correu bastante bem, houve colaboração por parte dos alunos e alguns até sugeriram ideias corretas sobre o caso geral da monotonia das progressões.

Ao longo da aula, a professora estagiária ficou mais descontraída, sentiu que a turma estava mais calma e não houve problemas de comportamento como na aula anterior. O plano de aula foi cumprido e no fim da aula houve tempo para começar a resolver os exercícios que tinham sido previstos para trabalho de casa.

2.1.2.9 Reflexões sobre a sequência das três aulas

A professora estagiária sentiu que nas aulas em que usou *PowerPoint* falava demasiado depressa e que a matéria podia não ficar tão clara para os alunos, por isso decidiu fazer as aulas desta semana no quadro e com tarefas impressas, ao contrário do conselho da professora da turma, que aconselhou o uso de uma apresentação em *PowerPoint*.

No entanto concorda com as professoras relativamente à sua fraca gestão de tempo nesta semana pois perdeu demasiado tempo a escrever no quadro os teoremas e a rever a matéria. Por vezes é adequado escrever tudo no quadro para os alunos poderem acompanhar a aula de forma eficiente, no entanto, esta não foi a estratégia adequada para este contexto (tema, turma e tempo disponível).

Considerando as sugestões e comentários que as professoras envolvidas no estágio partilharam ao longo do ano, a professora estagiária tentou melhorar a sua prática letiva, incidindo, por exemplo, sobre a colocação e projeção adequada da voz, a gestão de tempo, o circular pela sala, entre outros aspetos. Apesar das melhorias que foram observadas, nesta semana a professora estagiária estava bastante nervosa e as aulas assistidas poderiam ter corrido melhor.

A primeira aula da semana correu bastante bem, a professora estagiária sentiu que os alunos estavam calmos, motivados e a trabalhar, a tarefa, talvez por ter uma componente de novidade, contribuiu bastante para prender a atenção dos alunos. Na segunda aula os alunos

estavam um pouco mais inquietos e a professora estagiária sentiu bastante dificuldade em manter um ritmo de aula adequado. Por fim, a última aula foi bastante dirigida, mas permitiu atingir os objetivos estabelecidos.

A professora estagiária considera que os problemas na aula de terça-feira foram causados pela sua inexperiência e ao facto de não se ter conseguido adaptar, por exemplo, quando a professora estagiária percebeu que os alunos não tinham pensado no trabalho de casa deveria ter saltado a sua resolução. Foi também despendido um tempo excessivo no estudo geral dos termos gerais das sucessões que não eram progressões aritméticas nem geométricas, pois estas eram de nível de dificuldade superior e não eram relevantes para os objetivos da aula.

A professora estagiária considera que a segunda parte da tarefa poderia ter sido dispensada, pois a maior parte dos alunos teve dificuldades com as perguntas relacionadas com o “termo geral em função da razão e de um termo de ordem p “. Talvez tivesse sido preferível expor no quadro as ideias através de um exemplo e prosseguir para a explicação formal e demonstrações respetivas, em vez de esperar que os alunos fossem capazes de deduzir por si este resultado.

A professora estagiária considera que a matéria prevista para esta semana era demasiado extensa para três aulas com uma turma tão grande e a sua inexperiência.

Não foi possível apresentar a fórmula para a soma dos primeiros n termos de uma progressão aritmética e a fórmula para a soma dos primeiros n termos de uma progressão geométrica, como tinha sido previsto no início da semana. A professora estagiária pensa que a matéria prevista para esta semana era demasiado extensa para três aulas com uma turma tão grande, mas que talvez fosse possível apresentar todo o tema se as aulas fossem mais dirigidas ou a turma fosse menor.

Apesar de esta sequência de aulas não ter corrido de acordo com as suas expectativas, a professora estagiária continua a atribuir uma grande importância ao uso de tarefas variadas nas aulas de Matemática pois estas permitem que os alunos estabeleçam uma ligação com o tema em estudo.

O atraso da segunda aula foi compensado na última aula, tendo ficado por dar apenas a soma de termos consecutivos de uma progressão aritmética e de uma progressão geométrica. A professora estagiária considera que o parecer final foi positivo, pois o subtema “Progressões aritméticas e geométricas” foi dado quase na íntegra e os alunos pareceram compreender as noções apresentadas. No entanto, faria muitas alterações neste plano se o voltasse a aplicar noutra turma e sente que nestas aulas foi bastante prejudicada pelos seus nervos e inexperiência.

Outro aspeto que seria corrigido neste plano de aula seria separar as progressões aritméticas e as progressões geométricas, tal como aconselhado inicialmente pela professora da turma. A professora estagiária deixaria a primeira parte da tarefa igual, mas depois de obter o termo geral da progressão aritmética e o termo geral da progressão geométrica seguiria com a matéria das progressões aritméticas até ao fim, seguida da matéria das progressões geométricas. Desta forma pensa que seria mais fácil para os alunos memorizarem as características de cada uma mais facilmente.

2.1.2.10 Aula de 28 de maio

Resumo

A nona, e última, aula lecionada pela professora estagiária nesta turma deu-se no dia 28 de maio, terça-feira, e teve como assunto “Taxa média de variação e taxa instantânea de variação”.

Tabela 1.2.11 Resumo do plano de aula de dia 28 de maio

Tema	Funções Reais de Variável Real.
Subtema	Taxa média de variação e taxa de variação instantânea.
Duração	90 minutos.
Sumário	Taxa média de variação e taxa instantânea de variação.
Material do professor	Computador. Projetor. Apresentação da aula.
Objetivos da aula	Compreender a definição de taxa média de variação de uma função num intervalo. Compreende a definição de taxa instantânea de variação. Explorar o significado da taxa média de variação e da taxa instantânea de variação num exemplo de movimento retilíneo.
Objetivos gerais	Desenvolver a capacidade de concentração. Desenvolver o raciocínio lógico.
Estratégias	Começar com um exemplo prático, recorrendo ao gráfico cartesiano para ilustrar as relações. Partir da representação gráfica para os conceitos analíticos. Recorrer a animações que permitam expor os comportamentos matemáticos de forma mais eficiente.

A professora estagiária começou a aula com a apresentação do exemplo de uma função obtida através do movimento de um atleta numa pista retilínea. O atleta move-se na pista para a frente e para trás e ao mesmo tempo marcamos a sua posição numa função ao lado, na Figura 1.2.18 encontra-se uma das imagens dessa animação. De seguida, a professora estagiária perguntou aos alunos o que é que esta função representava.



Figura 1.2.18 Slides da aula: Exemplo apresentado

Foi apresentada a definição de variação “A variação da função f no intervalo $[a,b]$ é dada por $f(b) - f(a)$ ” e a professora estagiária pediu para os alunos calcularem a variação desta função em alguns intervalos, recorrendo à análise do gráfico cartesiano. Na resolução foi sublinhado que este valor não é a distância percorrida pelo atleta, mas sim a variação da sua posição (ver Figura 1.2.19).

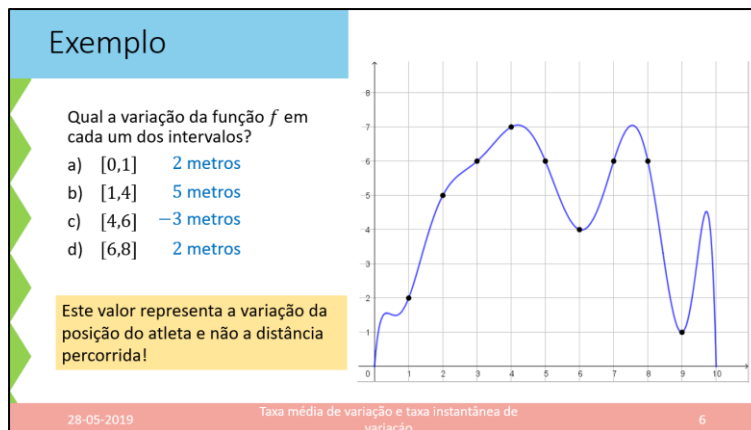


Figura 1.2.19 Slides da aula: Primeira questão

De seguida, foi apresentada a definição de taxa média de variação e pedido aos alunos que calculassem a taxa de variação da função f nos intervalos dados. Na disciplina de Física e Química foram referidos problemas semelhantes a este, mas foi referido novamente que a taxa média de variação num intervalo corresponde à velocidade nesse intervalo e que quando o atleta corre em direção à origem a velocidade é negativa.

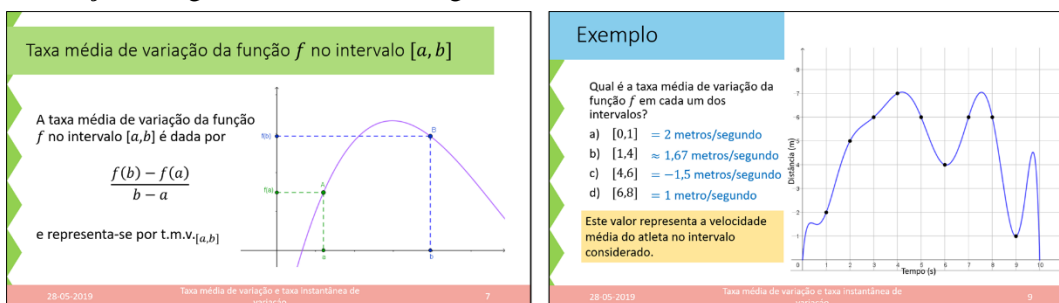


Figura 1.2.20 Slides da aula: Taxa média de variação e segunda questão

Com o recurso à representação de uma função no referencial cartesiano foi estudada a interpretação geométrica da taxa média de variação de uma função num intervalo $[a, b]$. Neste momento foi preciso rever alguns conceitos anteriores como declive e inclinação de uma reta.

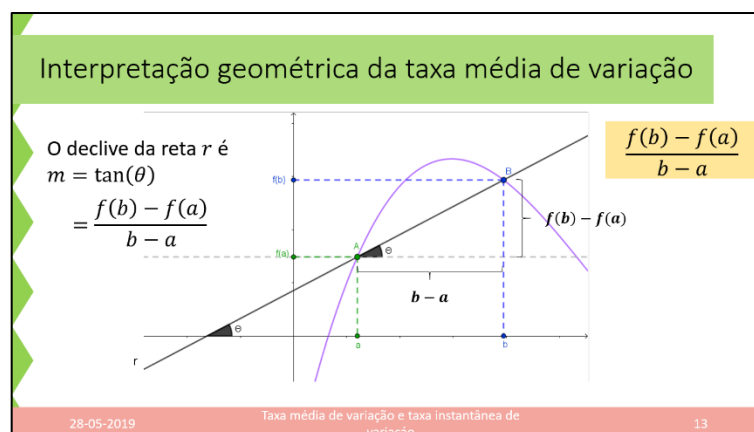


Figura 1.2.21 Slides da aula: Interpretação geométrica da taxa média de variação

De seguida, foram realizados dois exercícios diretos do manual adotado e alguns alunos foram ao quadro resolver as questões.

Depois da taxa média de variação passou-se para a taxa instantânea de variação. A professora estagiária apresentou a definição de taxa instantânea de variação num dado ponto x_0 e questionou os alunos sobre o que eles pensam que este limite representa.

Através de uma animação produzida em *GeoGebra* onde se encontra o gráfico de uma função, os pontos $P_0(x_0, f(x_0))$ e $P(x_0 + h, f(x_0 + h))$ e a reta secante a estes pontos foi possível visualizar a interpretação geométrica da taxa instantânea de variação. A variável h está a variar entre 5 unidades de medida e 0 e a animação permite perceber que a reta está a convergir para a reta tangente à função f no ponto P_0 . A partir destes exemplos os alunos conseguem compreender que o limite apresentado, quando existe, é igual ao declive da reta tangente à função f no ponto P_0 .

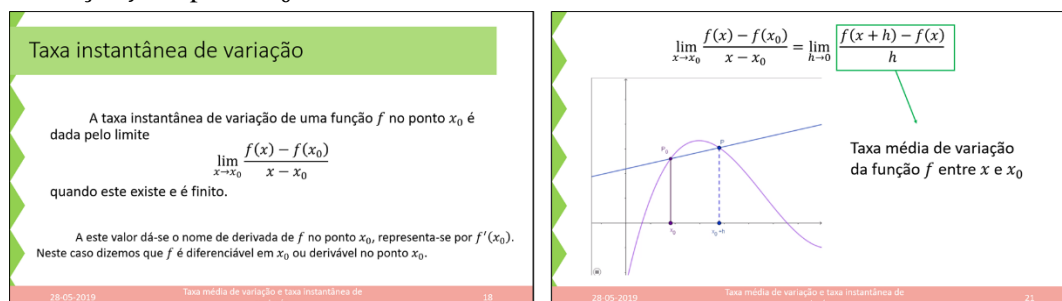


Figura 1.2.22 Slides da aula: Taxa instantânea de variação

A professora estagiária sublinhou que esta representação não servia para demonstrar o resultado em causa e que não iria apresentar essa demonstração nessa aula não. A animação apresentada exemplifica apenas o caso de h positivo e para o limite existir devemos considerar os dois casos: h positivo e h negativo, que correspondem ao limite à direita e limite à esquerda. Nesta aula, por conselho da professora da turma, não foi abordada a mudança de variável correspondente e as definições de derivada à esquerda e da derivada à direita de x_0 (ver Figura 1.2.23), que foram estudadas posteriormente.

Taxa instantânea de variação

Quando a função é derivável num ponto x_0 temos

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Logo

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

28-05-2019 Taxa média de variação e taxa instantânea de variação 23

Notação

Dizemos que que f é derivável à esquerda se existir o limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \left(= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right)$$

Chamamos a este limite **derivada à esquerda** de f no ponto x_0 e denotamo-lo por

$$f'(x_0^-)$$

28-05-2019 Taxa média de variação e taxa instantânea de variação 24

Figura 1.2.23 Slides da aula: Dois dos diapositivos retirados para esta aula

Voltando ao exemplo usado anteriormente, foi justificado que neste caso como não temos a expressão não conseguimos determinar analiticamente a derivada da função. De seguida, foi resolvido o exercício do manual apresentado na Figura 1.2.24.

Exemplo

Como não temos a expressão desta função não conseguimos determinar analiticamente a derivada da função em nenhum ponto.

Neste caso $f'(x_0)$ representa a velocidade do atleta no instante x_0 .

28-05-2019 Taxa média de variação e taxa instantânea de variação 26

Exemplo (ex. 88 pág. 162)

Considera a função $f(x) = -x^2 + 3x$

- Mostra que $f(2+h) - f(2) = -h^2 - h$.
- Calcula:
 - $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$
 - $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

28-05-2019 Taxa média de variação e taxa instantânea de variação 27

Figura 1.2.24 Slides da aula: Exemplos para taxa instantânea de variação

Preparação da aula e considerações sobre o plano de aula

Nesta aula a professora estagiária optou por uma aula mais tradicional, mas procurou introduzir um exemplo que fosse relevante para os alunos e permitisse acompanhar os vários conceitos em estudo. Ao escolher um exercício surgiu a ideia de utilizar uma função posição de um movimento retilíneo, que é um problema com o qual os alunos estão familiarizados e que permite ilustrar as taxas de variação média instantânea com significado para os alunos. Apesar do exemplo estar relacionado com a disciplina de Física e Química os alunos conseguiam resolver o exercício mesmo sem ter tido esta disciplina ou estando pouco confortáveis com a mesma.

Foi utilizada uma apresentação em *PowerPoint* e várias animações em *GeoGebra*, pois o *GeoGebra* apresenta funcionalidades bastante úteis no estudo deste tema e deste modo não existe o risco do *GeoGebra* não funcionar no computador em que está a ser transmitida a imagem.

Por sugestão da professora da turma, foi retirada a formalização da interpretação da taxa instantânea de variação através do limite identificado em Figura 1.2.23 e a definição das derivadas laterais.

Considerações sobre a aula

O plano desta aula foi cumprido e a professora estagiária sentiu que adotou uma postura confiante e projetou a voz de forma bastante eficaz. Por estes motivos, a opinião da professora estagiária é que esta foi a aula de estágio assistida que correu melhor. Os alunos tiveram um comportamento adequado, alguns tentaram mexer nos telemóveis, mas depois de serem chamados à atenção pela professora estagiária não o voltaram a fazer.

No fim da aula a professora estagiária percebeu que foi uma boa decisão seguir o conselho da professora da turma e retirar as partes relativas à mudança de variável (a análise dos dois limites laterais e a definição das derivadas laterais) pois o tempo seria apertado para apresentar estas noções de forma adequada e com tempo, de modo a permitir que todos os alunos as compreendessem. De facto, se a professora estagiária não tivesse retirado esta parte não teria sido possível realizar um exercício da taxa instantânea de variação em aula.

A professora estagiária percebeu que este tipo de modo de trabalho, associando a projeção da matéria e exemplos no quadro com a resolução dos exercícios no quadro pelos alunos, resultou muito bem com esta turma.

Poderiam ter sido feitas algumas referências mais específicas com a matéria dada pelos alunos em Física e Química, tal como a professora Doutora Maria Helena Santos referiu na reunião final.

2.1.3 Tirando esse último aspeto, a professora estagiária considera que não faria grandes alterações no plano desta aula se o voltasse a aplicar. Avaliação e Classificação

Na Tabela 1.2.12 encontra-se a calendarização dos vários instrumentos de avaliação aplicados a esta turma. Foram realizados cinco testes e duas fichas de avaliação, sendo que cada teste teve a duração de uma hora e meia e cada ficha de avaliação de cerca de uma hora.

Os testes de avaliação incidiram principalmente sobre a matéria em estudo no momento, mas incluíam também questões do ou dos temas anteriores estudados e a professora da turma incentivou sempre os alunos a rever toda a matéria. Além de incentivar os alunos a reverem a matéria, este tipo de teste é uma excelente medida para começar a familiarizar e preparar os alunos para o exame nacional de Matemática A, pois este contempla a matéria dos três anos do ensino secundário.

As fichas de avaliação referiram-se apenas à matéria que estava a ser dada no momento de aplicação, mas também tiveram um peso inferior na avaliação, de acordo com os critérios de classificação estabelecidos.

Tabela 1.2.12 Instrumentos de avaliação da turma de 11.º ano

	Data	Instrumento de avaliação	Tema principal avaliado
1.º Período	19 de outubro de 2018	Teste de avaliação n.º 1	Trigonometria
	9 de novembro de 2018	Ficha de avaliação n.º 1	Trigonometria
	30 de novembro de 2018	Teste de avaliação n.º 2	Geometria Analítica
2.º Período	8 de fevereiro de 2019	Teste de avaliação n.º 3	Sucessões
	1 de março de 2019	Ficha de avaliação n.º 2	Sucessões
3.º Período	24 de maio de 2019	Teste de avaliação n.º 4	Funções Reais de Variável Real

A professora da turma partilhava sempre os testes e fichas de avaliação com as professoras estagiárias antes da aula e estava sempre disponível para ouvir as sugestões destas e

discutir as melhores opções de escolha, ordem e a ponderação atribuída às questões. Esta atitude permitiu que as professoras estagiárias entrassem em contato com uma área do ensino com o qual nunca se tinham deparado anteriormente e que refletissem sobre o tipo de exercícios e problemas a colocar nos objetos de avaliação, qual o peso que deve ser atribuído a cada uma, se a questão mais difícil deve ser a que tem mais cotação, como criar critérios de correção, como lidar com múltiplas resoluções da mesma questão, entre outros aspetos.

A professora estagiária avaliou algumas resoluções do Teste de avaliação n.º 2 dos alunos da turma e criou critérios de classificação para o Teste de avaliação n.º 3 que depois foram discutidos com a professora da turma (em anexo, 5.9 Critérios Teste n.º 3 (versão B)).

A Ficha de avaliação n.º 2 foi elaborada e corrigida pela professora estagiária, com o apoio da professora da turma. Foi criada uma primeira versão da ficha, que depois foi adaptada para manter um nível de dificuldade semelhante com a ficha criada pela outra professora estagiária do NEESJB para a turma 11.º A. Depois desta primeira versão foi criada uma versão B da mesma ficha e os critérios de correção, que foram revistos pela professora da turma. A professora estagiária classificou todas as fichas da sua turma de estágio, que foram revistas pela professora Elisabete Ferreira antes de serem entregues à turma. Em anexo encontra-se a versão A desta ficha (5.10 Enunciado Ficha de avaliação n.º 2 (versão A)) e os critérios criados pela professora estagiária e que foram revistos pela professora da turma (5.11 Critérios da ficha de avaliação n.º 2).

2.2 Turma de 9.º ano

Durante o ano letivo, a professora estagiária acompanhou também a turma de 9.º ano na disciplina de Matemática, lecionada pela professora Paula Teixeira.

O manual adotado de Matemática 9.º adotado nesta escola no ano letivo 2018/2019 foi o Manual “Matematicamente falando”, da Areal Editores, cujos autores são Alexandra Conceição e Matilde Almeida. Este manual está dividido em duas partes e inclui um caderno de exercícios.

2.2.1 Caracterização da turma

A turma de 9.º da Escola Secundária João de Barros com que a professora estagiária trabalhou era constituída por 31 alunos (20 raparigas e 11 rapazes), sendo que uma das alunas entrou na turma apenas no segundo período.

A maior parte dos alunos veio da mesma turma de 8.º ano, tirando duas alunas que estavam a repetir o 9.º ano e três alunos que vieram de outras turmas. Foram consultadas as classificações dos alunos da turma a Matemática no 8.º ano e na Figura 1.2.25 encontra-se a distribuição dos seus resultados. De sublinhar que 17 dos alunos transitaram do 8.º para o 9.º ano com negativa a Matemática.

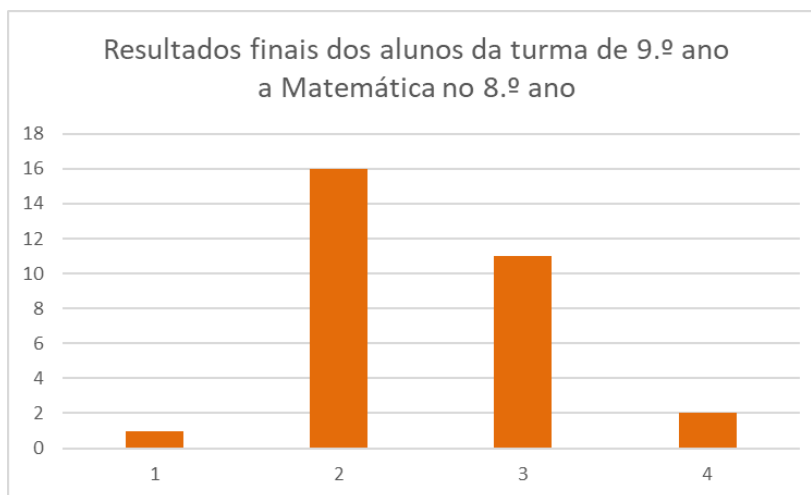


Figura 1.2.25 Classificações dos alunos da turma de 9.º ano inscritos a Matemática no 8.º ano

No 9.º ano, 18 dos alunos, a maior parte, manteve a classificação que tinha obtido a Matemática no 8.º ano, 9 alunos subiram e 2 desceram. A distribuição das classificações a Matemática dos alunos desta turma encontra-se na Figura 1.2.26.

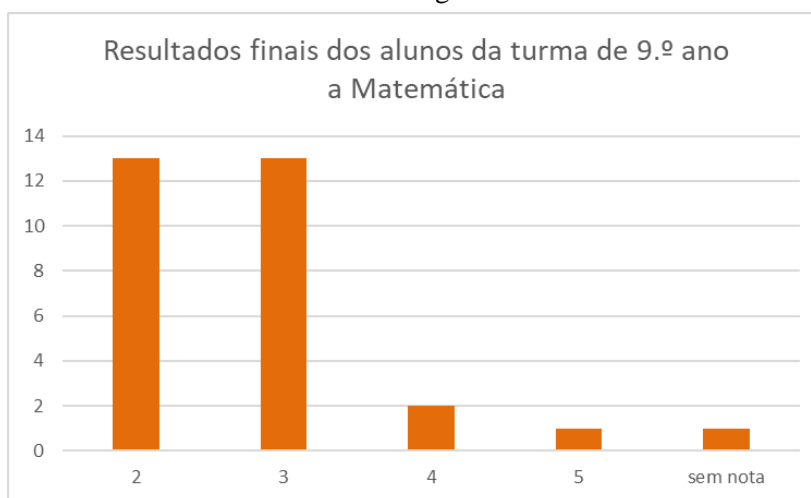


Figura 1.2.26 Resultados dos alunos da turma de 9.º ano a Matemática

Na Tabela 1.2.13 encontram-se: a média, a classificação mais alta, a classificação mais baixa e o número de negativas dos alunos da turma. Pela análise desta tabela é possível verificar que o aproveitamento dos alunos evoluiu positivamente ao longo do 8.º e 9.º anos.

Tabela 1.2.13 Classificações dos alunos da turma de 9.º ano inscritos a Matemática nos três períodos do ano letivo 2018/2019

	Classificação Final 8.º ano	9.º ano		
		1.º Período	2.º Período	Classificação Final
Média	2,47	2,60	2,63	2,69
Classificação mais alta	4	5	5	5
Classificação mais baixa	1	1	2	2
Número de negativas	17	15	15	13

O comportamento e o aproveitamento da turma foram ambos considerados *satisfatórios* pelo Conselho de Turma no terceiro período.

Foi colocado um questionário aos alunos da turma, no dia 3 de junho de 2019, com o objetivo de caracterizar a turma e a escola de estágio. Desta turma, vinte e seis dos alunos responderam ao questionário.

As características mais escolhidas pelos alunos para se definirem a si próprios foram *Bom aluno* (escolhida por 18 alunos), *Preguiçoso* (escolhida por 17 alunos), *Falador* (escolhida por 15 alunos) e *Interessado* (escolhida por 15 alunos), sendo que onze escolheram simultaneamente *Bom aluno* e *Preguiçoso*.

Nesta turma cinco alunos receberam explicações a todas as disciplinas, quinze não tiveram explicações a nenhuma disciplina, cinco tinham apenas a Matemática e um apenas a Físico-Química. As disciplinas de que os alunos desta turma menos gostam são Matemática e Inglês, ambas com onze votos, e as disciplinas de que mais gostam são Ciências Naturais e Educação Física.

A maior parte dos alunos desta turma pretende seguir o curso de Ciências e Tecnologias ou Línguas e Humanidades e nove pretendem seguir um curso profissional.

Tabela 1.2.14 Respostas à pergunta “Qual é o curso pretendes seguir quando acabares o 9.º ano?”

Curso	Número de votos
Ciências e Tecnologias	6
Línguas e Humanidades	5
Técnico Gestão Programação Sistemas Informáticos	5
Ciências sociais e Económicas	2
Artes Visuais	2
Outro	4
Não sabe	2

Na questão “O que gostavas que os teus professores soubessem?” grande parte dos alunos demonstrou sentir-se incompreendido ou desvalorizado pelos professores (ver Figura 1.2.27 e Figura 1.2.29). Mas existem também alguns alunos que valorizam o trabalho dos professores e aproveitaram este momento para deixar um elogio (ver Figura 1.2.28).

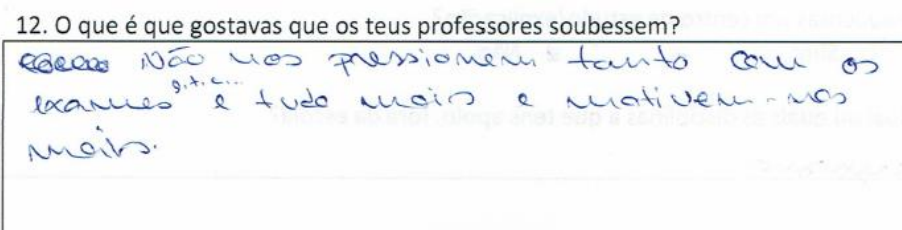


Figura 1.2.27 Resposta anónima - turma 9.º ano

12. O que é que gostavas que os teus professores soubessem?

Que ser adolescente e complicado e estudar também.

Figura 1.2.28 Resposta anónima – turma 9.º ano

Gostava que soubessem que ensinam muito bem e for explicar muito bem.

Figura 1.2.29 Resposta anónima - turma 9.º ano

2.2.2 Aulas assistidas

Nesta turma a professora estagiária lecionou cinco aulas de exposição da matéria sob a supervisão da professora Paula Teixeira, professora da turma. Destas cinco aulas, três foram assistidas também pela professora Doutora Maria Helena Santos, regente da unidade curricular Estágio Pedagógico. Na Tabela 1.2.2 encontra-se a calendarização dessas aulas.

Tabela 1.2.15 Calendarização das aulas dadas pela professora estagiária na turma de 9.º ano

Período	Data	Duração	Tema	Supervisão
1.º Período	26 de novembro de 2018	90'	Proporcionalidade Inversa. Funções algébricas 9.º	Prof. Doutora Paula Teixeira
	31 de janeiro de 2019	90'	Circunferência 9.º	Prof. Doutora Paula Teixeira Prof. Doutora Maria Helena Santos
2.º Período	18 de fevereiro de 2019	90'	Circunferência 9.º	Prof. Doutora Paula Teixeira Prof. Doutora Maria Helena Santos
	28 de março de 2019	90'	Trigonometria 9.º	Prof. Doutora Paula Teixeira Prof. Doutora Maria Helena Santos

O manual adotado inclui exercícios variados e adequados em termos de nível de dificuldade e tipo de proposta (exercício de aplicação de resposta mais ou menos rápida e problemas), portanto na maior parte das aulas dadas a professora não sentiu necessidade de criar exercícios novos e o manual foi utilizado frequentemente.

2.2.2.1 Aula de 26 de novembro

Resumo da aula

A primeira aula lecionada pela professora estagiária nesta turma deu-se no dia 26 de novembro, segunda-feira, e teve como assunto “Proporcionalidade inversa e direta”.

Tabela 1.2.16 Resumo do plano de aula de dia 26 de novembro

Tema
Proporcionalidade Inversa.

	Funções algébricas.
Subtema	Proporcionalidade inversa.
Duração	90 minutos.
Sumário	Proporcionalidade inversa e direta.
Material do professor	Computador. Projetor. Apresentação da aula. 30 cópias da ficha da tarefa.
Objetivos da aula	Revisão da proporcionalidade direta. Introdução da proporcionalidade inversa. Relação de cada uma com o gráfico da função correspondente. Sublinhar a diferença entre a proporcionalidade direta e a proporcionalidade direta.
Objetivos gerais	Desenvolver a capacidade raciocínio. Desenvolver a capacidade de trabalhar a pares ordenadamente. Desenvolver a capacidade realizar explorações matemáticas.
Estratégias	Utilizar problemas de contexto real como fonte de motivação e interesse. Recorrer aos exemplos para ilustrar as propriedades em estudo. Utilizar os gráficos da função para auxiliar a memorização dos conceitos Tentar manter todos os alunos focados na tarefa Pedir a participação de todos os alunos na resolução dos problemas e exercícios no quadro

A professora estagiária iniciou a aula com a projeção de dois problemas, uma de revisão da proporcionalidade direta e outro de introdução à proporcionalidade inversa. O primeiro problema serviu para rever as propriedades da proporcionalidade inversa, a definição de constante de proporcionalidade e ilustrar o gráfico correspondente. No primeiro problema a tabela já estava preenchida e os alunos só tiveram de perceber a relação entre as variáveis: tempo de viagem e número de quilómetros percorridos. Nos slides da apresentação usada nesta foi apresentado o gráfico correspondente a esta relação, premindo que os alunos observassem o comportamento característico da proporcionalidade direta (ver Figura 1.2.30).

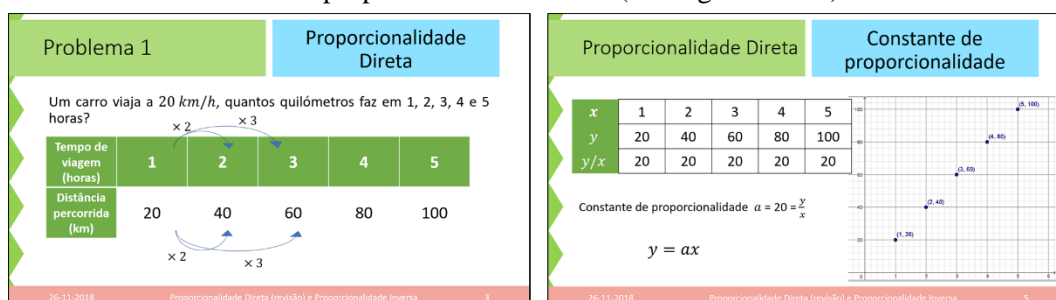


Figura 1.2.30 Slides da aula: Resolução do primeiro problema

No segundo problema os alunos tiveram de preencher a tabela e concluir sobre a relação entre as variáveis número de passageiros e preço por pessoa. A partir desta tabela foi determinada a constante de proporcionalidade inversa e foi apresentado o gráfico respetivo. Tal como no primeiro problema, foi apresentado o gráfico correspondente à relação (ver slides da apresentação da aula apresentados Figura 1.2.31).

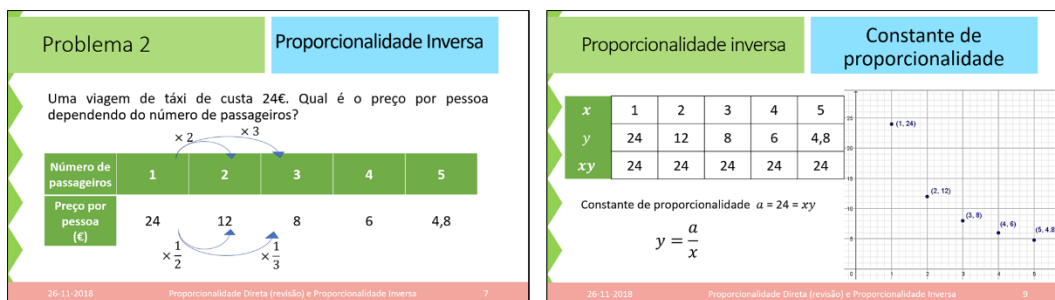


Figura 1.2.31 Slides da aula: Resolução do segundo problema

Estes problemas serviram para fazer o paralelismo entre os dois tipos de proporcionalidade, sublinhando as semelhanças e diferenças entre a constante de proporcionalidade e o gráfico de cada uma (ver slides da apresentação da aula apresentados na Figura 1.2.32).

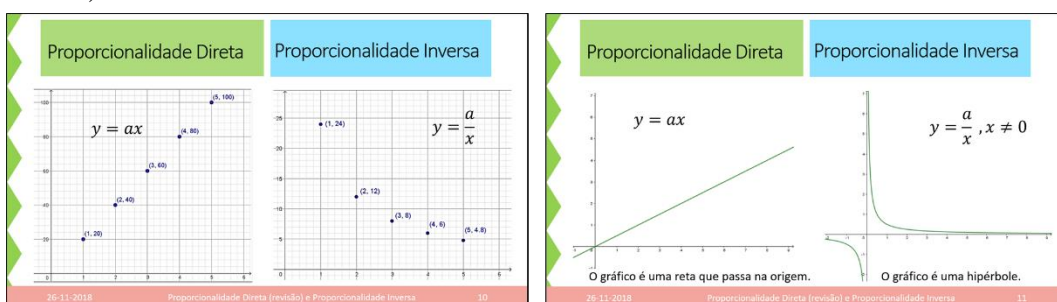


Figura 1.2.32 Slides da aula: Comparação entre proporcionalidade direta e a proporcionalidade inversa

De seguida, foi distribuído enunciado por cada par de alunos. A correção dos exercícios foi feita recorrendo à apresentação em *PowerPoint* (ver exemplo na Figura 1.2.33). A alínea e) representa uma relação que não é de proporcionalidade direta nem inversa e serve para demonstrar que duas variáveis podem estar relacionadas, sem ser por proporcionalidade.

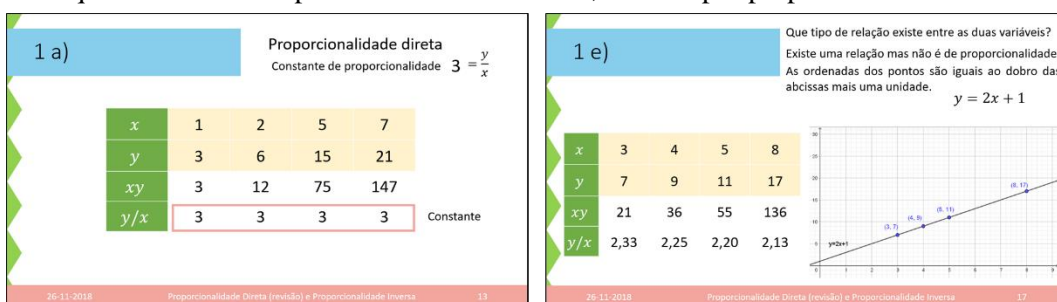


Figura 1.2.33 Slides da aula: Exemplo da resolução de duas das alíneas da tarefa

De seguida, o projetor foi desligado e os alunos começaram a resolver a página 102 da segunda parte do manual.

Preparação da aula e considerações sobre o plano de aula

Esta foi a primeira aula dada pela professora estagiária nesta turma, por isso a professora da turma deu algum apoio na escolha do tema a lecionar e em algumas opções do plano de aula.

Esta foi uma aula tradicional, mas que permitiu que os alunos trabalhassem em pares numa tarefa, aproveitando as qualidades de cada um e permitindo uma discussão dos resultados.

A professora estagiária considerou que não existiam suficientes exercícios introdutórios no manual e por isso decidiu criar uma tarefa de introdução com mais exercícios simples. Além

disso nesta turma havia muitos alunos que frequentemente não levavam o manual para a aula, levando uma tarefa impressa a professora estagiária conseguiu ultrapassar essa questão. A professora da turma sugeriu que fosse dado um enunciado por aluno, em vez de um enunciado por par como a professora estagiária tinha pensado, devido às características da turma. No fim da aula foram também utilizados exercícios do manual como consolidação da matéria.

A apresentação em *PowerPoint* foi utilizada para introduzir a matéria e suportar a resolução da tarefa. Tendo em conta a inexperiência da professora estagiária, esta pareceu a escolha adequada tanto pela professora da turma como pela própria, pois se a professora estagiária se atrapalhasse tinha o *PowerPoint* como guia, além disso não foi despendido tempo a escrever tudo no quadro nem a desenhar os gráficos correspondentes.

Embora a proporcionalidade direta já tivesse sido estudada pelos alunos anteriormente foi muito importante fazer uma revisão e sublinhar as diferenças entre as duas relações de forma a que os alunos não as confundissem. Um dos objetivos desta aula era precisamente sublinhar essa diferença.

Considerações sobre a aula

O plano de aula foi cumprido e os alunos apresentaram um bom comportamento nesta aula, houve uma boa participação por parte da turma durante a introdução dos conceitos, a correção da ficha e a resolução dos exercícios do manual. Nesta aula a professora estagiária esteve descontraída e conseguiu lecionar a aula de forma bastante satisfatória.

Faltou sublinhar que as variáveis da proporcionalidade direta ou inversa poderiam tomar valores negativos, quando foi projetado o gráfico correspondente à proporcionalidade inversa (função do tipo $\frac{a}{x}$) o domínio mostrado era sempre um subconjunto de \mathbb{R}^+ . Nos exemplos e nas tarefas também só foram utilizados valores positivos, que tornaram a aula mais acessível à turma, no entanto, como referido pela professora da turma, a professora estagiária deveria ter feito uma referência ao facto das variáveis poderem tomar valores negativos.

O contraexemplo foi bastante relevante, os alunos não conseguiram chegar à relação correta entre as variáveis pois não conseguiram chegar à expressão algébrica correspondente, mas perceberam que, efetivamente, a relação não era do mesmo tipo das duas que estudámos nesta aula.

2.2.2.2 Aula de 31 de janeiro

Resumo

A segunda aula dada pela professora estagiária realizou-se no dia 31 de janeiro, quinta-feira. O assunto desta aula foi “Reta perpendicular a uma corda que passa pelo centro da circunferência. Arcos e cordas compreendidos entre cordas paralelas”.

Tabela 1.2.17 Resumo do plano de aula de dia 31 de janeiro

Tema	Circunferência.
Subtema	Relações entre arcos e cordas numa circunferência. Reta perpendicular a uma corda que passa pelo centro da circunferência. Arcos e cordas compreendidos entre cordas paralelas.

Duração	90 minutos.
Sumário	Reta perpendicular a uma corda que passa pelo centro da circunferência. Arcos e cordas compreendidos entre cordas paralelas.
Material do professor	30 cópias da tarefa. Compasso, esquadro e régua para quadro.
Material dos alunos	Compasso, esquadro e régua.
Objetivos da aula	Compreender as propriedades da reta perpendicular a uma corda que passa pelo centro da circunferência. Compreender que arcos e cordas compreendidos entre cordas paralelas são iguais.
Objetivos gerais	Desenvolver a capacidade de trabalhar com material de desenho. Recordar as construções de reta perpendicular que passa num certo ponto, bissetriz de um ângulo e mediatriz de um segmento de reta.
Estratégias	Levar clips para os alunos que se esquecerem de trazer o compasso (para a tarefa não precisamos de fazer raios com um tamanho fixo por isso esta solução funciona. Explorar hipóteses com construções geométricas.

Na aula anterior houve uma atividade escolar que implicou que muitos alunos faltassem à aula de Matemática. Por essa razão houve a necessidade de fazer umas revisões da matéria anterior e apresentar alguns resultados que ainda não tinham sido trabalhados com os alunos. Os conceitos que iam ser introduzidos eram ângulo ao centro, corda, setor circular e arco menor e maior da circunferência e os resultados, que ainda não tinham sido trabalhados pelos alunos, eram referentes à igualdade de setores circulares, arcos e ângulos ao centro.

A tarefa utilizada nesta aula estava dividida em duas partes, para a primeira parte existiam três versões diferentes, em que só mudava a localização dos pontos A e B .

Na primeira parte da tarefa havia três questões, todas acompanhadas pela mesma representação da circunferência de centro C e dois pontos A e B da circunferência. Na primeira questão os alunos deviam desenhar a bissetriz do ângulo AOB , na segunda a mediatriz da corda $[AB]$ e na última questão a reta perpendicular à corda $[AB]$ que passa em O .

A professora estagiária começou a aula por distribuir um enunciado por aluno e indicou que podiam discutir a tarefa a pares mas cada aluno devia resolver a tarefa na sua folha. Enquanto os alunos resolviam a tarefa a professora estagiária circulou pela sala e passado algum tempo pediu a alguns alunos que mostrassem as suas resoluções aos colegas. A partir da observação das resoluções foi possível chegar à conjectura apresentada a seguir.

Conjectura: Dada uma circunferência de centro O e dois pontos A e B a mediatriz da corda $[AB]$ é correspondente à reta perpendicular a $[AB]$ que passa em O e a bissetriz do ângulo $A\hat{O}B$ corresponde à parte dessa reta que se encontra no interior do ângulo AOB .

Depois da fase de exploração seguiu-se a fase de esquematização, onde foi enunciado e demonstrado o teorema seguinte (Teorema 1). A professora estagiária foi escrevendo a demonstração por passos no quadro e, com o material de desenho, contruindo o esquema

correspondente (ver na Figura 1.2.34 a representação em *GeoGebra* da construção feita pela professora estagiária no quadro).

Teorema 1

Qualquer reta que passa pelo centro de uma circunferência e é perpendicular a uma corda bissecta-a, assim como aos arcos subtensos e aos ângulos ao centro correspondentes.

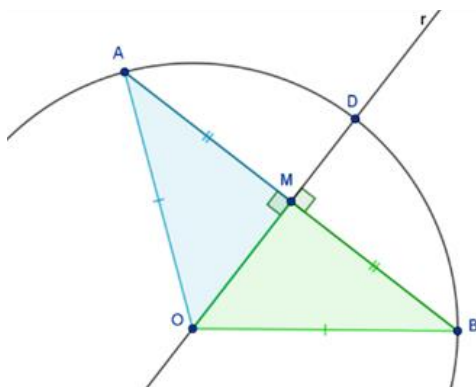


Figura 1.2.34 Construção que acompanhou a demonstração (em *GeoGebra*)

O plano de aula incluía o estudo da propriedade “Arcos e cordas compreendidos entre cordas paralelas são iguais”, que não foi possível realizar. A estratégia era semelhante, os alunos realizariam a tarefa a pares, seria feita uma discussão em turma e depois seria demonstrada a propriedade em causa.

A segunda parte da tarefa apresentava várias circunferências com o centro C e dois pontos da circunferência A e B marcados e pedia-se que os alunos desenhassem um arco com o mesmo comprimento que o arco AB . Esta parte ficou como trabalho para casa.

Preparação da aula e considerações sobre o plano de aula

Para esta aula a professora estagiária queria experimentar outra abordagem por isso decidiu criar uma tarefa diferente. A primeira parte da tarefa permitiu que os alunos comprovassem que a propriedade se verifica para alguns casos e, portanto, intuir antes de começar a realizar a demonstração. A segunda parte da tarefa é exploratória e existiam diferentes respostas corretas pois o método apresentado não é o único para obter arcos de igual comprimento (ver Figura 1.2.35).

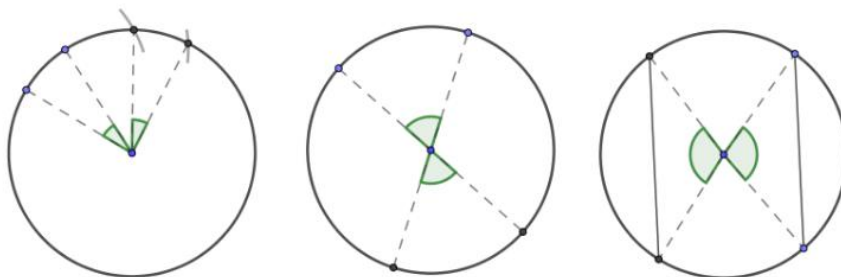


Figura 1.2.35 Três hipóteses de resposta para a segunda parte da tarefa

A professora estagiária optou por não fazer uma apresentação em *PowerPoint* para esta aula. Uma das razões deveu-se ao fato de a sala de aula não ter projetor, e, por isso, ser necessário levar o projetor e o computador, além dos materiais de desenho para o quadro que eram fundamentais para esta aula. Depois de ser dada a aula a que os alunos da turma faltaram,

a professora da turma sugeriu que a professora estagiária recorresse a uma apresentação em *PowerPoint* mas esta não o fez por já ter a aula planeada deste modo e por acreditar que os alunos conseguem acompanhar melhor as demonstrações quando estas são escritas no quadro do que quando são projetadas.

A professora estagiária construiu um objeto tipo compasso para representar circunferências no quadro pois o compasso disponível na escola não funcionava muito bem. Além disso, decidiu distribuir clips pelos alunos que se esqueceram do compasso em casa, de modo a que estes conseguissem representar circunferências mais ou menos exatas.

Considerações sobre a aula

A professora estagiária concluiu que deveria ter optado por utilizar uma apresentação em *PowerPoint*, tal como a professora da turma tinha sugerido. Foi perdido bastante tempo com as revisões e as demonstrações eram bastante compridas, alguns alunos quiseram passar a demonstração para o caderno, o que também contribuiu para um ritmo de aula mais lento. A dado ponto a professora estagiária informou que iria enviar a demonstração para o email dos alunos e que por isso não existia necessidade de passarem tudo. Outro argumento a favor do uso de uma apresentação *PowerPoint* seria o facto de se tratar de um tema de Geometria, pois a professora estagiária perdeu bastante tempo a desenhar as várias construções no quadro e estas não ficaram exatas.

A professora estagiária considera que o uso dos clips como substituto do compasso (quando não é preciso marcar um raio dado) foi uma boa ideia, tal como a professora Doutora Maria Helena Santos comentou. No entanto não teve muito tempo para ensinar aos alunos como utilizar esta ferramenta, tendo apenas explicado por alto. . Alguns alunos tentaram utilizar os clips mas acabaram por desistir, Na opinião da professora estagiária, este não deveria ser um fator impeditivo pois se os alunos tentassem mais teriam conseguido utilizar os clips para o propósito previsto.

A primeira parte da tarefa correu bem, a maior parte dos alunos estava a trabalhar, mas a professora estagiária deveria ter despendido mais tempo com a demonstração.

Não foi possível cumprir todos os objetivos previstos para esta aula e se repetisse esta aula a professora estagiária optaria por manter a tarefa, mas aptando por apresentar tudo em *PowerPoint*, incluindo as demonstrações por serem demasiado compridas. A maior parte dos alunos estava atenta e reagiu positivamente à tarefa, no entanto, durante a demonstração essa atenção foi se perdendo, a professora estagiária considera que isto se deveu ao facto de a demonstração ser bastante comprida, terem sentido dificuldades em acompanhar o seu desenvolvimento e ter demorado bastante tempo.

2.2.2.3 Aula de 18 de fevereiro

Resumo

A terceira aula dada pela professora estagiária a esta turma deu-se no dia 18 de fevereiro, segunda-feira, e teve como assunto “Soma dos ângulos internos e externos de um polígono. Polígono inscrito numa circunferência”.

Tabela 1.2.18 Resumo do plano de aula de dia 18 de fevereiro

Tema	Circunferência.
Subtema	Soma dos ângulos internos e externos de um polígono. Polígono inscrito numa circunferência.
Duração	90 minutos.
Sumário	Soma dos ângulos internos e externos de um polígono. Polígono inscrito numa circunferência.
Material do professor	Computador. Projetor. Apresentação da aula.
Material dos alunos	Manual. Compasso, esquadro e régua.
Objetivos da aula	Compreender que para qualquer polígono com n lados a soma dos ângulos internos é igual a $(n - 2) \times 180^\circ$ e que soma dos ângulos externos é 360° . Compreender que é possível inscrever numa circunferência um polígono regular com qualquer número de lados e perceber de que forma o podemos fazer. Realizar exercícios de consolidação.
Objetivos gerais	Desenvolver a capacidade de trabalhar com material de desenho. Desenvolver a capacidade de estar atento. Recordar as definições de polígono regular, polígono convexo e ângulo interno e externo de um polígono convexo
Estratégias	Dividir a aula em duas partes: teórica e prática Solicitar a participação dos alunos durante a exposição da matéria

A professora estagiária começou a aula com a revisão das definições de polígono convexo e de ângulos internos e externos de um polígono. De seguida, foi apresentado um exemplo de um pentágono e, recorrendo a vários passos, foi determinada a soma das medidas dos seus ângulos internos. A partir deste exemplo, e usando o mesmo processo dedutivo, foi determinada a soma das medidas das amplitudes dos ângulos internos de um polígono convexo qualquer.

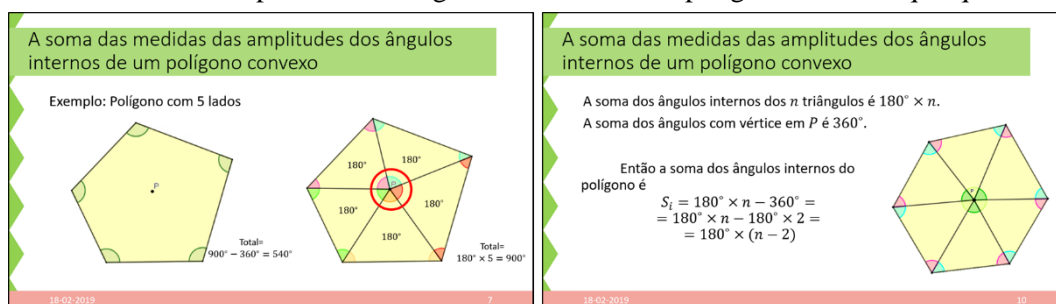


Figura 1.2.36 Slides da aula: Soma dos ângulos internos de um polígono: exemplo e caso geral

Para a soma das medidas das amplitudes dos ângulos externos de um polígono não foi utilizado um exemplo e foi logo apresentada a demonstração do caso geral (ver Figura 1.2.37).

A soma das medidas das amplitudes dos ângulos externos de um polígono convexo

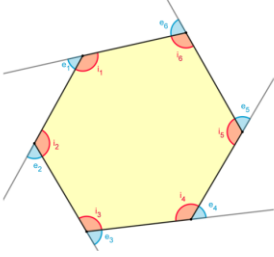
Consideremos um polígono com n lados.

Vamos denotar os ângulos internos do polígono de i_1, \dots, i_n e os ângulos externos correspondentes de e_1, \dots, e_n .

Então

$$i_k + e_k = 180^\circ$$

para todo o $k = 1, 2, \dots, n$.



18-02-2019 12


Figura 1.2.37 Slides da aula: Soma dos ângulos externos de um polígono convexo

De seguida, foi revista a definição de polígono regular e apresentado um exercício de aplicação da matéria, adaptado do manual adotado: descobrir qual a medida da amplitude dos ângulos internos de um polígono regular, neste caso de um octógono regular. A professora estagiária considera que este se trata de um exercício clássico e fundamental para o estudo desta matéria, razão pela qual decidiu apresentá-lo em aula. .

Foi revista a definição de polígono inscrito na circunferência e foi referido que no caso do triângulo é sempre possível inscrevê-lo numa circunferência utilizando o circuncentro. Recorrendo aos conceitos estudados no primeiro período, foi sublinhada a diferença entre circunferência inscrita e circunscrita num polígono, utilizando exemplo do triângulo (ver Figura 1.2.38)

Nota

Circunferência inscrita num triângulo \neq Circunferência circunscrita num triângulo (Triângulo inscrito numa circunferência)



Definida a partir do incentro Definida a partir do circuncentro

18-02-2019 22

Figura 1.2.38 Slides da aula: Revisão de conceitos já lecionados

A professora estagiária questionou os alunos sobre como inscrever polígonos regulares numa circunferência, começando pelo caso do triângulo com que os alunos estavam mais familiarizados. Foi também apresentado o caso do quadrado e do pentágono e por fim o caso geral.

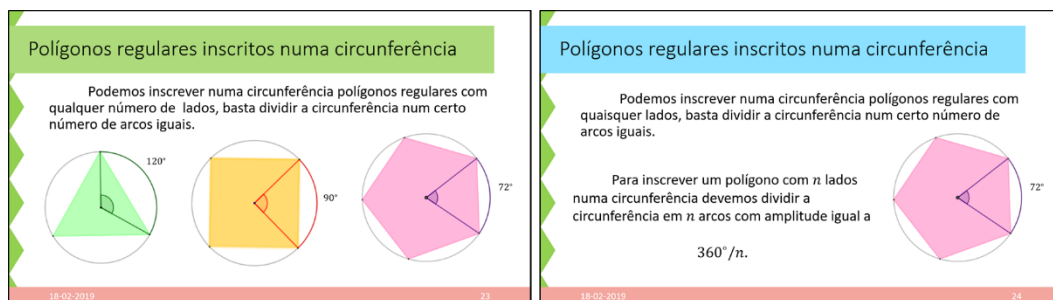


Figura 1.2.39 Slides da aula: Como inscrever polígonos regulares numa circunferência

De seguida, foi apresentada a representação de um quadrilátero inscrito numa circunferência e a professora estagiária questionou os alunos sobre a relação entre os ângulos internos opostos do quadrilátero. Recordando as várias propriedades estudadas anteriormente ficou demonstrado o resultado seguinte. Através de um contraexemplo de um quadrilátero que não admite uma inscrição numa circunferência a professora estagiária demonstrou aos alunos que este resultado não é válido para todos os quadriláteros.

Resultado

A soma dos ângulos opostos de um quadrilátero inscrito numa circunferência é igual a um ângulo raso (**180°**).

Por fim, foi feita uma revisão de todos os resultados e a professora estagiária indicou que os alunos resolvessem os exercícios das páginas do manual relativas a esta matéria. Como previsto, não foi possível resolver todos os exercícios em aula, tendo a resolução ficado no exercício 6 da página 143 da primeira parte do manual e os restantes exercícios das páginas 139 e 143 ficaram para trabalho de casa.

Preparação da aula e considerações sobre o plano de aula

Tendo em conta o que aconteceu na última aula assistida, em que a professora estagiária perdeu muito tempo a escrever no quadro e as construções não ficaram exatas, a apresentação em *PowerPoint* pareceu a estratégia adequada para este tema e as características da turma. Além disso, a professora estagiária considerou que as fórmulas a ser deduzidas nesta aula eram fáceis de acompanhar e dependiam muito de construções geométricas por isso não haveria necessidade de utilizar o quadro nestes momentos, tendo sido escritos alguns apontamentos no quadro quando surgiu necessidade de o fazer.

Nesta aula foram utilizados os exercícios do manual correspondentes ao tema em estudo e, na resolução em aula, apenas foi excluído um exercício da lista de exercícios a trabalhar por ser de revisão.

Considerações sobre a aula

Nesta aula o plano foi cumprido, o que se pode ter devido a vários fatores, entre eles, o facto de terem faltado alguns alunos, ter sido usada uma apresentação em *PowerPoint* e a professora estagiária ter dito aos alunos para estes não passarem os resultados projetados porque estes estavam no manual.

Com menos alunos, a dinâmica da turma foi diferente, para melhor. Para além de estarem mais concentrados na apresentação foram mais participativos e responderam mais às questões colocadas pela professora estagiária quando esta os solicitou.

Ao longo das aulas assistidas a professora estagiária notou (e os comentários das professoras Elisabete Ferreira, Paula Teixeira e Helena Santos confirmaram) a sua tendência para avançar demasiado depressa quando utilizada uma apresentação em *PowerPoint*. No entanto a professora estagiária considera que nesta aula isso não aconteceu e o ritmo de aula foi adequado, além de concordar com isto a professora da turma referiu também que a professora estagiária foi capaz de adaptar a linguagem ao nível de escolaridade.

Como este capítulo da circunferência tem muitas figuras e estas auxiliam bastante o processo de aprendizagem os slides foram fundamentais para esta aula e para atingir os objetivos definidos para os noventa minutos. A dedução da fórmula da soma das amplitudes dos ângulos internos de um polígono convexo e a demonstração da fórmula da soma das amplitudes dos ângulos externos de um polígono convexo foram projetadas, não foram feitas no quadro, por a professora estagiária as considerar acessíveis, e os alunos pareceram não ter problemas a compreender e a acompanhar as mesmas. A professora estagiária fez pausas frequentes para verificar se os alunos tinham dúvidas nas definições ou demonstrações e os alunos conseguiram acompanhar a aula com facilidade.

Enquanto os alunos resolviam os exercícios a professora estagiária circulava pela sala e a resolução dos exercícios foi apresentada pelos alunos no quadro, à medida que os concluíam. Alguns exercícios mais imediatos foram logo resolvidos no quadro pela professora estagiária, com a participação dos alunos.

A maior parte dos alunos, como a professora da turma indicou ser típico desta idade, não queria ir ao quadro. Apesar disso, os alunos participavam no seu lugar e a resolução dos exercícios até foi bastante dinâmica. A professora estagiária esteve com particular atenção e incentivou os alunos que estavam com mais dificuldades a trabalhar e a irem ao quadro resolver os exercícios, deste modo conseguiu envolver a maior parte da turma.

2.2.2.4 Aula de 28 de março

Resumo

A quarta, e última aula, dada pela professora estagiária nesta turma realizou-se no dia 28 de março, quinta-feira. Esta aula teve como assunto “Razões trigonométricas dos ângulos de 30° , 45° e 60° ”.

Tabela 1.2.19 Resumo do plano de aula da aula de dia 18 de março

Tema	Trigonometria.
Subtema	Razões trigonométricas dos ângulos de 45° , 30° e 60° .
Duração	90 minutos.
Sumário	Razões trigonométricas dos ângulos de 30° , 45° e 60° .
Material do professor	Computador. Projetor. Apresentação da aula.
Objetivos da aula	Compreender como se termina o seno, cosseno e tangente de um ângulo, em particular dos ângulos de amplitude 30° , 45° e 60° .
Objetivos gerais	Resolver exercícios da matéria.

	Consolidar a matéria do tema de trigonometria.
Estratégias	Fazer a dedução das razões trigonométricas dos ângulos de 30° , 45° e 60° através de exemplos. Durante a apresentação da teoria utilizar o quadro branco sempre que for necessário para esclarecer dúvidas dos alunos. Projetar os exercícios e problemas a realizar, de forma a ultrapassar a falta de manuais na sala.

Esta aula foi dividida em três momentos, primeiro foi realizada uma breve revisão da matéria, depois foi introduzida a matéria da aula e por fim foram realizados alguns exercícios de consolidação.

Os primeiros diapositivos referem-se à definição de seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo. Foi também revista a fórmula fundamental da trigonometria e a relação entre tangente, seno e cosseno.

A exposição da matéria começou pelo estudo dos ângulos de 60° e 30° , cujas razões trigonométricas são deduzidas do mesmo triângulo. Começando pelo ângulo de 60° , a professora estagiária pediu que os alunos se recordassem de um triângulo que tivesse (pelo menos) um ângulo com esta amplitude. Os alunos responderam o triângulo equilátero e, depois de justificar porque é que os ângulos medem todos 60° , a professora estagiária questionou como é que poderíamos obter um triângulo retângulo a partir deste.

Traçando a mediatriz de um dos lados obtemos o triângulo adequado. Neste ponto é importante sublinhar que a mediatriz do lado $[AB]$ é também a bissetriz do ângulo ACB e uma altura do triângulo pois $\overline{AC} = \overline{BC}$.

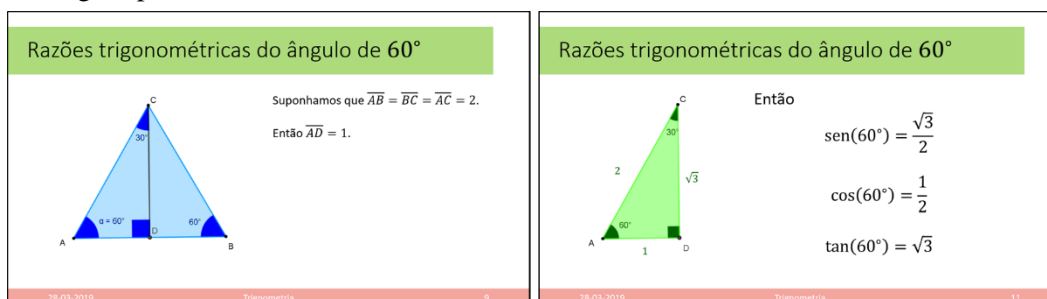


Figura 1.2.40 Slides da aula: Razões trigonométricas do ângulo de 60°

Escolhendo duas unidades de medida (u.m.) como comprimento dos lados do triângulo equilátero as contas ficam mais simples por isso foi utilizado este valor. A partir da escolha deste lado a professora estagiária questionou os alunos sobre como determinar a medida do comprimento dos restantes lados do triângulo. A partir destes valores foi determinado o seno, cosseno e tangente do ângulo de 60° . Para o ângulo de 30° foi utilizado o mesmo triângulo.

Para o ângulo de 45° a estratégia foi semelhante, mas baseando-se num quadrado de lado uma unidade de medida (u.m.).

Razões trigonométricas do ângulo de 45°

Então

$$\operatorname{sen}(45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{cos}(45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{tg}(45^\circ) = \frac{1}{1} = 1$$

28-03-2019 Trigonometria 15

Figura 1.2.41 Slides da aula: Razões trigonométricas do ângulo de 45°

Por fim, a professora estagiária apresentou a Tabela 1.2.20 com as razões trigonométricas dos ângulos 30°, 45° e 60°. Os alunos foram informados que tinham de memorizar estes valores porque no exame teriam uma tabela trigonométrica como a que está no livro, que não tem os valores exatos, e que por isso tinham que decorar esta. Nesta tabela foi também sublinhada a relação entre as razões trigonométricas de ângulos complementares.

Tabela 1.2.20 Tabela trigonométrica

α	30°	45°	60°
$\operatorname{sen}(\alpha)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\operatorname{cos}(\alpha)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg}(\alpha)$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Alguns dos exercícios do manual foram adaptados para esta aula (ver Figura 1.2.42). O primeiro exercício apresentado foi adaptado do manual, é um exercício direto e foram acrescentadas mais alíneas para consolidação da matéria. De seguida, foi apresentado um problema, que foi baseado numa questão do manual, acrescentada a questão intermédia “Qual é a altura, arredondada às centésimas, que a escada atinge quando inclinada 30° e quando inclinada 60°?” e uma animação que permitia visualizar que quando o ângulo aumenta a altura atingida aumenta e a distância ao prédio tem de diminuir.

Exercício 1 (modificado)

Determina o comprimento do lado desconhecido, x .
Apresenta o valor exato e (nos casos aplicáveis) o valor arredondado às centésimas.

Exercício 3 (modificado)

Numa operação de salvamento aquando de um incêndio num prédio de vários andares, foi utilizada uma escada magirus, com 30 metros de comprimento, assente num camião a 2,5 m do chão. De acordo com os bombeiros a inclinação máxima da escada é de 60°.

Qual é a altura, arredondada às centésimas, que a escada atinge quando inclinada 30° e quando inclinada 60°?
Qual é a altura máxima que a escada pode atingir?

28-03-2019 Trigonometria 18

Figura 1.2.42 Slides da aula: Alguns dos exercícios apresentados na aula do dia 28 de março

A primeira alínea do exercício 1 foi resolvida no quadro pela professora estagiária e as restantes foram resolvidas por vários alunos no quadro. Em aula foram realizados os exercícios

1 e 3 e os restantes exercícios das páginas relativas ao subtema em estudo (páginas 60 e 61 da segunda parte do manual) ficaram para trabalho de casa.

Preparação da aula e considerações sobre o plano de aula

Esta aula baseou-se no processo apresentado no manual, mas foi alterada a medida do lado do triângulo equilátero de 1 u.m. para 2 u.m. para facilitar os cálculos.

É uma aula típica, com exposição da matéria com apresentação seguida da resolução dos exercícios. A professora estagiária considerou realizar um jogo nesta aula, seria um jogo tipo *Trivial Pursuit* onde os alunos teriam que responder a questões para avançar num tabuleiro e passar por todas as casas especiais. A professora estagiária questionou a professora da turma sobre esta decisão, ao que a professora respondeu que uma aula tradicional provavelmente se adequava melhor a esta turma. Ponderando sobre a turma e o tema, a professora estagiária decidiu então fazer uma aula mais parecida com o que os alunos estão acostumados, com exposição da matéria em *PowerPoint* e exercícios de consolidação.

A professora estagiária decidiu utilizar os exercícios apresentados pelo manual adotado nas páginas 60 e 61 por estes serem bastantes variados e cobrirem a matéria toda. Além disso, o uso dos exercícios do manual permitiu que os alunos trabalhassem autonomamente e verificassem se as suas respostas estavam corretas, o que foi bastante vantajoso. No entanto, foram realizadas algumas alterações relativamente à ordem dos exercícios e aos enunciados dos exercícios 1 e 3. A ordem dos exercícios foi alterada, de modo a incluir a realização de um problema em aula, este problema (exercício 3) foi escolhido por ser interessante e reoresentar uma situação da vida real.

Na última aula a professora estagiária notou que os alunos apresentaram algumas dificuldades com exercícios parecidos com o exercício 1 por isso achou benéfico adicionar algumas alíneas deste tipo. No manual era pedido apenas o valor arredondado, mas a professora estagiária mudou o enunciado para pedir o valor exato e o valor aproximado, de forma a incentivar o uso do valor exato das razões trigonométricas dos ângulos 30° , 45° e 60° .

A professora estagiária decidiu fazer algumas alterações no exercício 3 proposto no manual adotado pois este pede diretamente para determinar qual é a altura máxima que a escada consegue atingir e esta considerou que os alunos teriam alguma dificuldade em resolver esta questão e perceber porque é que a altura máxima é atingida quando o ângulo é 60° . Deste modo, decidiu incluir dois casos iniciais para serem testados pelos alunos. Além dessa alteração foi incluída uma animação ilustrativa do problema e que permite visualizar a relação entre o ângulo da escada e a altura atingida.

Considerações sobre a aula

Alguns alunos estavam distraídos e não quiseram trabalhar, mas a maior parte dos alunos estavam atentos e participaram na aula. A professora estagiária já estava mais, familiarizada com a turma e a linguagem adequada a este nível de escolaridade por isso sentiu que nesta aula estava descontraída e que adotou uma boa postura, o que contribuiu para o sucesso da aula.

Neste dia o plano de aula foi cumprido, mas poderiam ter sido resolvidos mais exercícios durante a aula, foi despendido demasiado tempo no exercício 1. Uma das alterações seria, portanto, tirar as alíneas extra deste exercício ou estas ficarem como trabalho de casa.

Quando ao exercício 3 a professora estagiária sentiu que a apresentação dos dois casos foi útil e a animação também, pois, ao circular pela sala, percebeu que alguns alunos estavam mais adiantados na resolução dos exercícios e já tinham começado a resolver o problema, mas não sabiam muito bem como começar. No entanto, tal como referido pelas professoras Paula Teixeira e Helena Santos, não foi capaz de fazer a conclusão deste problema de forma clara e com cuidado suficiente.

A apresentação ajudou bastante a manter um bom ritmo de trabalho nesta aula pois foram utilizadas várias imagens auxiliares e os enunciados dos exercícios do manual foram modificados.

A professora estagiária considera que esta aula correu bastante bem e que, portanto, tomou a decisão certa ao escolher um plano de aula mais tradicional. Como a turma de estágio tem alguns alunos problemáticos poderiam ficar apenas a jogar sem responder às questões ou sem verificar se a resposta dada estava correta. Outro aspeto considerado foi o número de alunos da turma, pois numa turma tão grande é complicado gerir as discussões e os vários grupos de trabalho, tendo ao mesmo tempo estipulados tantos objetivos didáticos e específicos.

3 Prática não letiva

3.1 Direção de Turma e Reuniões assistidas

3.1.1 Direção de Turma e Conselho de Turma

A professora estagiária acompanhou a Direção de Turma com a professora Guiomar Queluz, professora da turma na disciplina de Português, normalmente às terças-feiras das 10h05 às 11h35.

A professora estagiária auxiliou a Diretora de Turma no planeamento das reuniões de Conselho de Turma e das reuniões de Encarregados de Educação e assistiu também a essas reuniões. Tendo a reunião de Encarregados de Educação de início do terceiro período sido dirigida pela mesma.

Através da participação e da preparação destas reuniões, do preenchimento e avaliação dos planos individuais da turma, da organização das avaliações das aulas de apoio e preparação das atas do Conselho de Turma a professora estagiária entrou em contacto com as funções de um Diretor de Turma e do Conselho de Turma, tendo tal contribuído para uma melhor compreensão da organização escolar, um melhor acompanhamento da turma e da sua avaliação e uma preparação para o seu futuro cargo como Diretora de Turma.

A professora Guiomar incentivou a professora estagiária a ler alguns documentos relevantes para a prática do ensino, como por exemplo os documentos reguladores dos exames nacionais e dos materiais autorizados nos exames nacionais, que foram muito relevantes pois os alunos este ano têm exames nacionais de Biologia e Geologia, Física e Química e Geometria Descritiva.

A turma foi avaliada como tendo comportamento não satisfatório no segundo período por haver três alunos com faltas disciplinares e os alunos da turma serem muito distraídos e faladores nas aulas. No entanto o contacto com esta turma e todas as sugestões dos professores da turma, tanto nos conselhos de turma como fora, ajudaram a professora estagiária a desenvolver algumas estratégias para lidar com turmas com problemas de comportamento.

Existem também alunos com necessidades educativas especiais por isso a professora Guiomar sugeriu a leitura do decreto de lei n.º 54 sobre Educação Inclusiva e que contribuiu fortemente para a professora estagiária entrar em contacto com esta realidade e conhecer as medidas que pode tomar para contribuir para a aprendizagem de todos os alunos.

De sublinhar que, na última reunião do Conselho de Turma, os docentes do conselho de turma registaram em ata um elogio à professora estagiária pelo seu “trabalho, empenho e colaboração (...) ao nível do trabalho desenvolvido no Conselho de Turma e nas tarefas de Direção de Turma”.

3.1.2 Reuniões do grupo de recrutamento – 500

As professoras estagiárias participaram nas reuniões do grupo de recrutamento 500 Matemática do Agrupamento de Escolas João de Barros. Nestas reuniões estiveram presentes os vários professores do agrupamento a lecionar nesse grupo de recrutamento no ano letivo 2018/2019.

Ao assistir a estas reuniões as professoras estagiárias tiveram oportunidade de entrar em contacto com professores de vários anos de escolaridade, com histórias de vida e pontos de vista distintos.

Nestas reuniões foram discutidas várias questões sobre a avaliação muito relevantes, como por exemplo:

- Como definir os critérios de avaliação?
- Qual o peso que deve ser dado às atitudes e valores em cada ciclo de ensino?
- Como se avalia as atitudes e valores? Quais os aspetos relevantes: pontualidade, assiduidade, material, comportamento ou outros?
- Os testes devem incluir a matéria anterior ou só a matéria atual?
- Os testes devem ser iguais para todos os alunos do mesmo ano de ensino?

Foram também apresentados vários projetos no AEJB, como o projeto + tempo JMCC =R (mais tempo para jogar, motivar, cooperar, consolidar e, no fim, recuperar), que tem como objetivo criar um rede de apoio e recursos que permita que alunos do 3.º ciclo com classificação negativa a Matemática tenham oportunidade de melhorar a sua prestação e recuperar a sua avaliação na disciplina de Matemática.

3.2 Atividades organizadas pelo núcleo de estágio

O Núcleo de Estágio de Matemática Escola Secundária João de Barros organizou várias atividades de divulgação matemática dirigidas a todos os alunos do Agrupamento de Escolas João de Barros.

No dia do Pi, dia 14 de março, foi lançada a exposição “Matemática?! Isso serve para quê?” e divulgado o desafio caixeiro viajante.

No dia da V feira da educação João de Barros, 31 de maio, foi afixada novamente a exposição “Matemática?! Isso serve para quê?”, foi lançado o desafio “Olimpíadas” e as estagiárias dinamizaram um workshop de Origami.

3.2.1 Exposição “Matemática?! Isso serve para quê?”

Nesta exposição as professoras estagiárias tentaram responder a uma das questões mais ouvidas na sala de matemática e que certamente irá fazer parte da sua vida profissional: “Professor, mas isto serve para quê?”.

Nesta exposição são apresentados alguns problemas acessíveis aos alunos do ensino básico e ensino secundário relacionados com dez temas diferentes e para os quais a matemática

apresenta uma resposta. Além dos objetivos matemáticos incluímos alguns comentários no âmbito da cidadania nos temas de Ecologia e Epidemiologia.

Tabela 1.3.1 Temas da exposição “Matemática?!! Isso serve para quê?”

Tema	Publico alvo	Objetivo
Biologia	Ensino Básico e Ensino Secundário	Calcular o número estimado de bactérias num prato de Petri sabendo a quantidade existente numa parte desse prato.
Genética	Ensino Básico e Ensino Secundário	Saber se é possível um filho biológico de um pai de olhos azuis e outro de olhos castanhos ter os olhos castanhos.
Uma viagem ao casino...	Ensino Básico e Ensino Secundário	Calcular o valor de esperado de algumas jogadas simples na roleta russa. Demonstrar porque é que “a casa ganha sempre”.
Ecologia	Ensino Básico e Ensino Secundário	Calcular a área de plástico gasto para garrafas de diferentes capacidades. Mostrar que é mais ecológico utilizar uma garrafa grande (1,5L) do que várias garrafas pequenas (0,33L e 0,5L).
Teoria de jogos	Ensino Básico e Ensino Secundário	Analisar qual a melhor estratégia (cooperação ou traição) numa variação do dilema do prisioneiro.
Criptografia	Ensino Básico e Ensino Secundário	Explorar o método de criptografia por transposição e a cifra de César. Ilustrar o funcionamento da máquina enigma.
Epidemiologia	Ensino Secundário	Explorar uma versão simplificada da modelação do modelo SIR. Mostrar os benefícios da vacinação da população
Física	Ensino Secundário	Estudar a trajetória de uma balsa de salvamento.
Meteorologia	Ensino Secundário	Prever a altura da maré ao longo de um dia sabendo o comportamento do dia anterior através da modelação matemática.
Juros	Ensino Secundário	Estudar os dois tipos mais simples de juro (simples e composto) e comparar os dois.

3.2.2 Desafio “Caixeiro Viajante”

O objetivo deste desafio era descobrir o caminho mais curto passando pelas 18 capitais de distrito de Portugal uma e uma só vez em cada capital e com início e fim em Setúbal. Este

desafio esteve aberto a todos os alunos do AEJB através do Facebook, além desta partilha existiram também enunciados espalhados pela biblioteca e pelo átrio do Pavilhão E da ESJB.

Os alunos tinham acesso a um mapa de Portugal com as capitais de distrito marcadas e uma tabela com os quilómetros entre cada dois pares de capitais de distrito, obtida através da consulta do *Google Maps*, apresentados na Figura 1.3.1.

A aluna que deu a melhor resposta, 1828.8 km, recebeu um tabuleiro de “SETS” oferecido pelo Clube Math da FCT/UNL.

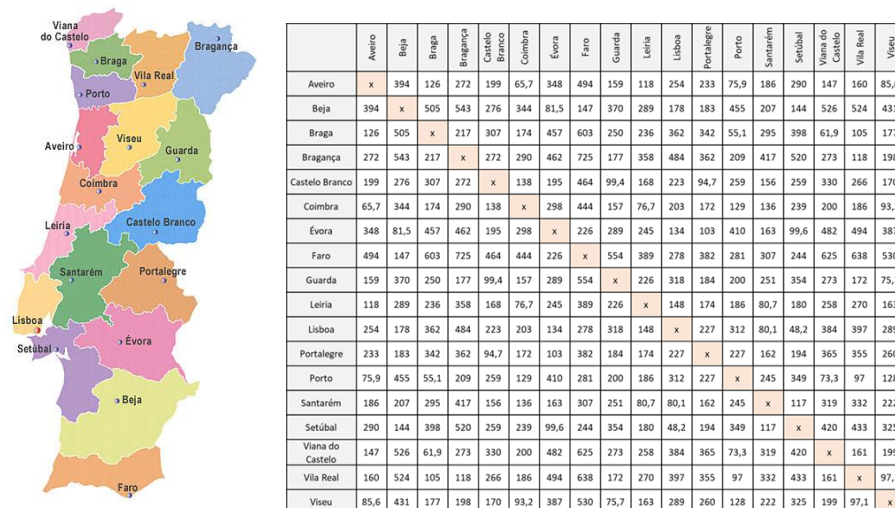


Figura 1.3.1 Mapa e Tabela disponibilizados no desafio "Caixeiro Viajante"

3.2.3 Workshop de Origami

Durante a V Feira de Educação João de Barros, realizada no dia 31 de maio, as professoras estagiárias estiveram na sala 19 do Bloco C da EB23 de Corroios a ensinar os visitantes que por ali passaram a fazer alguns origamis.

Os origamis foram adaptados ao nível dos participantes, tinha sido planeado realizar tetraedros, octaedros, cubos e octaedros estrelados, mas como a maior parte dos alunos interessados eram do ensino Pré-Escolar e Primário foram realizados muitos “sapos que saltam” e “quantos-queres”.



Figura 1.3.2 Alguns dos Origamis em exposição na V Feira da Educação João de Barros

3.2.4 Desafio “Olimpíadas”

Neste desafio os alunos tinham de encontrar a melhor equipa para participar num concurso (fictício) de Olimpíadas. Eram dadas as classificações de 8 alunos a 7 disciplinas diferentes e os alunos tinham de escolher a equipa participante sabendo que a escola tem de participar em todas as provas, um aluno só pode fazer uma prova e um aluno suplente acompanha a equipa para substituir qualquer um dos colegas que falte. O critério de determinação da melhor equipa era dado pela soma das classificações de cada aluno na disciplina em que vai competir com a média do aluno suplente. Na Tabela 1.3.2 encontram-se os dados que os alunos tinham para responder a este desafio.

Tabela 1.3.2 Dados do desafio “Olimpíadas”

	Português	Matemática	Ciências naturais	E. Física	E. Visual	Filosofia	Inglês	História
Ana	50	80	96	94	93	71	82	89
Bernardo	79	51	37	63	95	66	49	91
Catarina	96	79	42	53	44	83	99	51
Diogo	82	59	90	96	74	47	80	85
Elisa	45	82	80	68	36	88	89	53
Fábio	76	57	65	72	95	55	84	65
Gabriela	55	98	50	82	91	69	75	78
Hugo	89	78	90	82	59	55	60	86
Inês	55	90	78	80	68	98	100	75

Só foram aceites respostas a este desafio no dia da Feira do Agrupamento e estas foram colocadas numa caixa na sala da exposição. Os três alunos com as melhores respostas receberam um calendário dodecaedro, que é apresentado na secção seguinte. A melhor resposta encontrada pelos alunos, obtida por dois dos vencedores, encontra-se na Tabela 1.3.3.

Tabela 1.3.3 Melhor resposta ao desafio obtida

Português	Matemática	Ciências naturais	E. Física	E. Visual	Filosofia	Inglês	História	Suplente
Elisa	Bernardo	Catarina	Fábio	Gabriela	Ana	Inês	Diogo	Hugo

3.2.5 Calendário Dodecaedro

Este calendário foi planificado pelas professoras estagiárias do NEMJB, recorrendo ao software *GeoGebra* e *PowerPoint*, e refere-se ao ano letivo 2018/2019. Quando montado este calendário tem a forma de um dodecaedro regular e todos os meses uma das faces com os logotipos do AEJB e da FCT/UNL está virada para cima.

Na Figura 1.3.3 encontra-se uma planificação do calendário acompanhado por um calendário no estado final. Esta planificação foi partilhada com algumas professoras de Matemática da Escola Básica dos 2.º e 3.º ciclos de Corroios, a pedido das mesmas, para o adaptarem para uma atividade de aula.

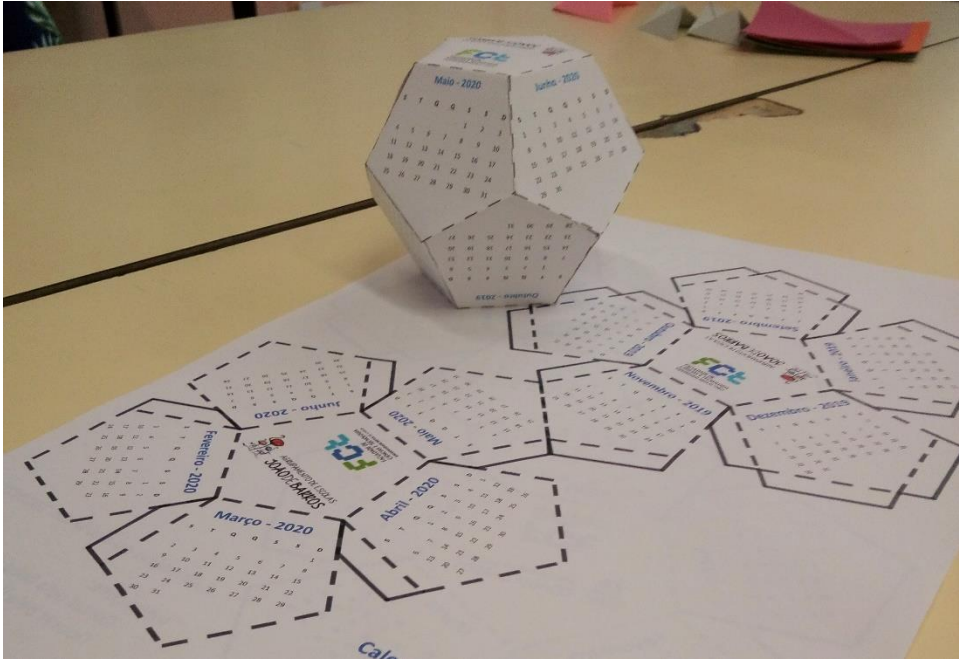


Figura 1.3.3 Calendário Dodecaedro

4 Reflexões sobre o Estágio Pedagógico

Chega assim o momento de refletir sobre este ano de estágio, que tanto marcou a professora estagiária. Este foi o primeiro momento na escola e permitiu ficar a conhecer um pouco da rotina escolar dos professores e o seu tão importante papel na escola.

As professoras Elisabete Ferreira e Paula Teixeira foram uma grande fonte de inspiração para o futuro da professora estagiária enquanto professora, pela sua dedicação à turma, conhecimento e conselhos prestados. Através da observação das suas aulas a professora estagiária foi capaz de observar e refletir sobre as várias estratégias educativas que estão à disponibilidade dos professores.

As duas turmas com que a professora estagiária lidou foram bastante diferentes, tanto pelo nível de escolaridade como pelas diferentes personalidades e dinâmicas de grupo que surgiram em cada uma. Através do contacto com o 3.º ciclo do Ensino Básico e o Ensino Secundário, foi possível constatar as várias grandes diferenças na lecionação das aulas e no comportamento e raciocínio dos alunos. As estratégias usadas pelas professoras titulares eram também distintas e adaptadas a cada uma das turmas. Para a turma do 9.º ano a linguagem tinha de ser adaptada, de forma a que todos os conceitos ficassem claros pois aconteceu, por exemplo, os alunos terem dúvidas apenas numa palavra que aparecia na definição e não no conceito em si. A professora estagiária sentiu que os alunos, em geral, aprendiam melhor através do uso de exemplos para ilustrar as propriedades do que apenas com a enunciação e demonstração dessas propriedades, comparando as duas turmas, constatou também que para os alunos de 9.º este uso de exemplos tinha ainda mais peso. No Ensino Básico existe uma componente extra de gerir o comportamento e motivação dos alunos, a professora Paula Teixeira muitas vezes tinha de incluir um momento “não-matemático” na aula para pedir aos alunos para mudarem a sua postura, para trabalharem ou motivar os alunos para se dedicarem à disciplina de Matemática. Os alunos das duas turmas atribuíram uma importância diferente ao papel do professor durante o estágio, sendo que os alunos mais novos tinham uma relação mais afetuosa com os professores, inclusive uma aluna da turma de 9.º ano ofereceu um desenho da professora Paula Teixeira e da professora estagiária como prenda à professora titular da turma.

O estágio permitiu à professora estagiária ter um papel especial na sala de aula, durante as aulas das professoras titulares a professora estagiária conseguia observar simultaneamente o comportamento dos alunos, a sua dedicação, preguiça ou obstinação e acompanhar e refletir sobre a aula dada. Nas aulas de exercícios, a professora estagiária colaborava com a professora da turma e circulava pela sala a tirar dúvidas, o que contribuiu bastante para ficar a conhecer e estabelecer uma relação como os vários alunos da turma. Ao longo do ano letivo, alguns alunos começaram a chamar diretamente a professora estagiária quando tinham dúvidas da matéria.

As aulas assistidas pelas professoras da turma e pela professora Doutora Maria Helena Santos foram um elemento muito importante para a determinação da prática profissional da professora estagiária. Estes momentos permitiram testar algumas estratégias, como o uso de

jogos, tarefas diferentes ou questões de escolha múltipla, projetar ou não os exercícios e recorrer ou não à apresentação de dispositivos. Além disso, a avaliação e as sugestões apresentadas pelas professoras às várias aulas permitiram que a professora estagiária refletisse sobre todas as suas escolhas pedagógicas e a sua postura, projeção de voz e colocação na sala de aula, aspetos em que a professora estagiária foi trabalhando com sucesso ao longo deste ano de estágio. Toda esta discussão e trabalho com as professoras e os alunos permitiram à professora estagiária uma confiança cada vez maior no seu papel enquanto professora.

A convivência com o ambiente escolar permitiu que a professora estagiária interagisse com diversos professores da Escola Secundária João de Barros que partilharam as suas próprias experiências, deixando conselhos muito úteis para o futuro da professora estagiária e vão ficar para sempre nas memórias deste ano.

A professora Maria Guiomar, Diretora de Turma da turma de 11.º ano, permitiu que a professora estagiária a acompanhasse nas várias tarefas de Direção de Turma. Esta professora partilhou imensos ensinamentos e conselhos valiosos sobre a prática docente, incentivando a professora estagiária a melhorar a sua prática e a manter-se atualizada a nível dos vários documentos orientadores. Juntas refletiram sobre o papel e as características que um professor e um Diretor de Turma devem ter.

Vários professores da escola interagiram com a professora estagiária e aproveitaram esses momentos para partilhar um pouco da sua história de vida e conselhos inestimáveis sobre como ser um bom professor. Além da inegável paixão pelo ensino que transmitiram, partilharam conselhos concretos sobre, por exemplo, como lidar com os telemóveis na sala de aula, como receber os Encarregados de Educação e a importância de passar tempo com os alunos num ambiente de aprendizagem informal. Estas interações foram fundamentais para moldar e motivar a professora estagiária.

Este ano de estágio permitiu também que a professora estagiária tivesse oportunidade de participar na V Feira da Educação João de Barros. Este foi um momento de convívio e mostra de atividades entre alunos e professores de todo o agrupamento. Esta feira ilustra perfeitamente os espaços de aprendizagem informal, cada vez mais decisivos na relação dos alunos com a escola e a aprendizagem.

No questionário colocado aos alunos no fim do ano uma das perguntas para a qual a professora estagiária estava particularmente curiosa para descobrir as respostas era a questão “O que é que gostavas que os teus professores soubessem?”. Esta questão contribuiu particularmente para a criação do modelo de professor da professora estagiária. Os alunos apresentaram respostas muito pertinentes e atuais que frisam a componente afetiva da profissão docente.

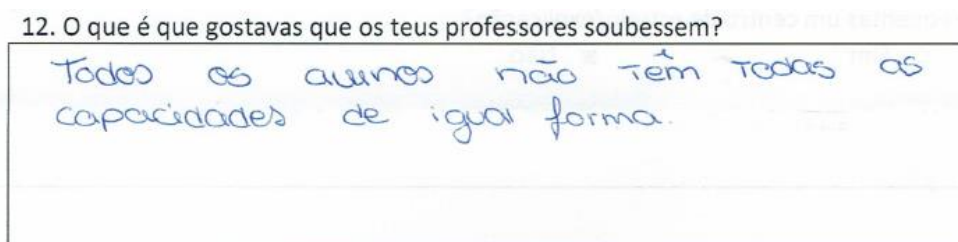
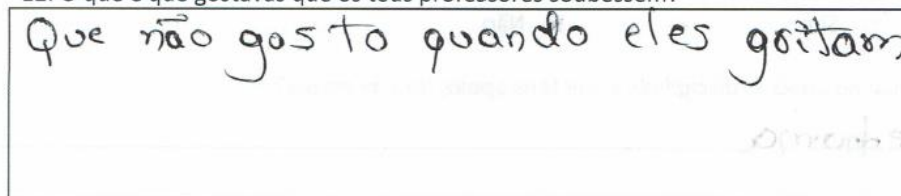


Figura 1.4.1 Resposta anónima – turma 9.º ano

Estas respostas revelaram a importância do professor tratar os alunos de uma forma correta, ser atencioso, valorizar a prestação dos alunos e respeitar os diferentes ritmos de aprendizagem.

12. O que é que gostavas que os teus professores soubessem?

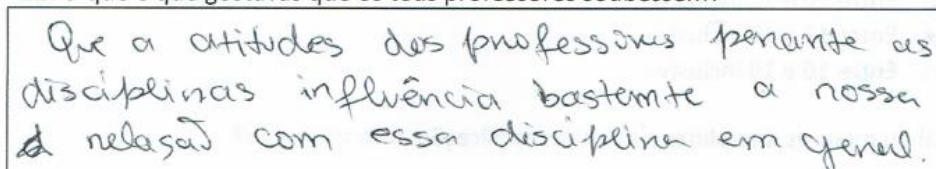


Que não gosto quando eles gritam

Figura 1.4.2 Resposta anónima – turma 9.º ano

Nestas respostas foi também possível verificar que os alunos da turma de 9.º ano atribuíram um peso muito maior às atitudes sociais dos professores do que os alunos da turma de 11.º ano. Existe uma evolução da relação afetiva com os professores que tende para uma afastamento que foi possível observar não só por estas respostas como também pelas atitudes durante o ano letivo.

12. O que é que gostavas que os teus professores soubessem?



Que a atitudes dos professores perante as disciplinas influencia bastante a nossa relação com essa disciplina em geral.

Figura 1.4.3 Resposta anónima – turma 11.º ano

Um aluno da turma de 11.º ano apresentou uma resposta bastante diferente, defendendo que os professores deviam saber primeiros socorros, esta é, realmente, uma sugestão muito boa considerando que os primeiros socorros não fazem parte do currículo dos cursos em educação.

Estes são apenas alguns dos pormenores que marcaram este ano de estágio, um dos primeiros passos de uma vida de professora. Recordando e refletindo em todos estes acontecimentos e todas estas sugestões, a professora estagiária espera evoluir e tornar-se uma boa professora, tal como os professores que a inspiraram a chegar a este momento.

5 Anexos da primeira parte

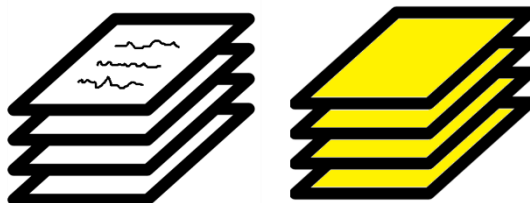
5.1 Regras do jogo aplicado na aula do dia 11 de janeiro

Regras do jogo

Material: 60 cartas (18 cartas conjunto, 36 cartas propriedade e 6 cartas joker).

Organização do tabuleiro: Cada jogador deve ter 6 cartas na mão em todos os momentos. Na mesa existem dois baralhos:

- Baralho de compra (com as cartas viradas para baixo)
- Baralho de descarte (com as cartas viradas para cima, mas apenas a primeira visível).



Baralho de descarte

Baralho de compra

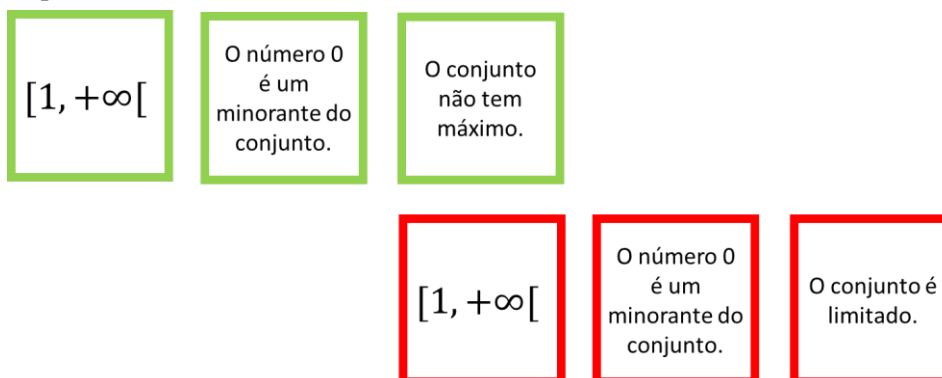
Objetivo do jogo:

O objetivo deste jogo é fazer o maior número de ternos, cada um valendo 2 pontos.

Um terno é um conjunto de 3 cartas formado por uma carta conjunto e duas cartas com propriedade diferentes, em que o conjunto na carta conjunto verifica as propriedades indicadas nas cartas propriedade.

Uma das três cartas pode ser substituída por uma carta joker desde que o jogador indique corretamente uma propriedade ou conjunto para o terno.

Exemplo de um terno válido (verde) e um terno inválido (vermelho):



O jogo:

São distribuídas 4 cartas por cada jogador (mão) e as restantes cartas são reservadas na mesa viradas para baixo, este vai ser chamado de baralho de compra. No início do jogo o baralho de descarte está vazio.

O primeiro jogo é iniciado pelo jogador mais novo, nos jogos seguintes começa o jogador que ganhou o jogo anterior. O jogo procede por turnos, no sentido dos ponteiros do relógio.

Em cada turno o jogador pode pontuar um terno se o tiver e comprar uma carta.

Pontuar terno: Se um jogador tiver um terno na sua mão pode o pontuar no fim do seu turno, colocando as três cartas em cima da mesa à vista de todos. Os restantes jogadores devem analisar se se trata mesmo de um terno, se for válido as três cartas ficam em cima da mesa, o jogador deve ir buscar três cartas ao baralho de compra e ganha dois pontos, se o terno não for

válido as cartas voltam para a sua mão e o jogador perde um ponto e não pode realizar nenhuma ação nesse turno.

Comprar carta: O jogador pode escolher comprar a carta no topo do baralho de descarte ou ver a primeira carta no baralho de compra e decidir se a quer comprar ou não (nesse caso coloca a carta no baralho de descarte). Para comprar uma carta o jogador deve descartar uma das cartas da sua mão e colocá-la no topo do baralho de descarte virada para cima.

O jogador não é obrigado a pontuar se tiver um terno válido na mão e não é obrigado a comprar nenhuma carta, estas ações podem ser realizadas por qualquer ordem, mas no máximo uma de cada por turno.

O jogo acaba em situação de bloqueio, isto é, quando não há mais cartas no baralho de compra e ninguém quer comprar a carta no topo do baralho de descarte ou este está vazio.

5.2 Duas versões da parte da tarefa aplicada nos dias 28 e 29 de janeiro

Tarefa – Progressões Aritméticas e Geométricas

1ª parte Versão A



Nome: _____

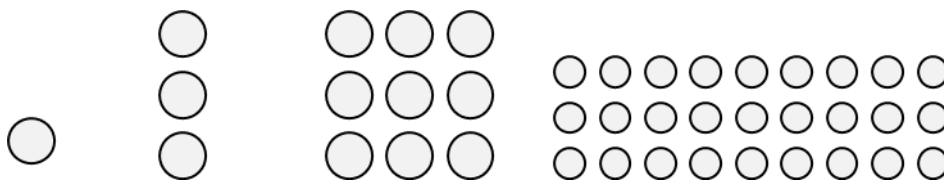
Nome: _____

Turma: _____

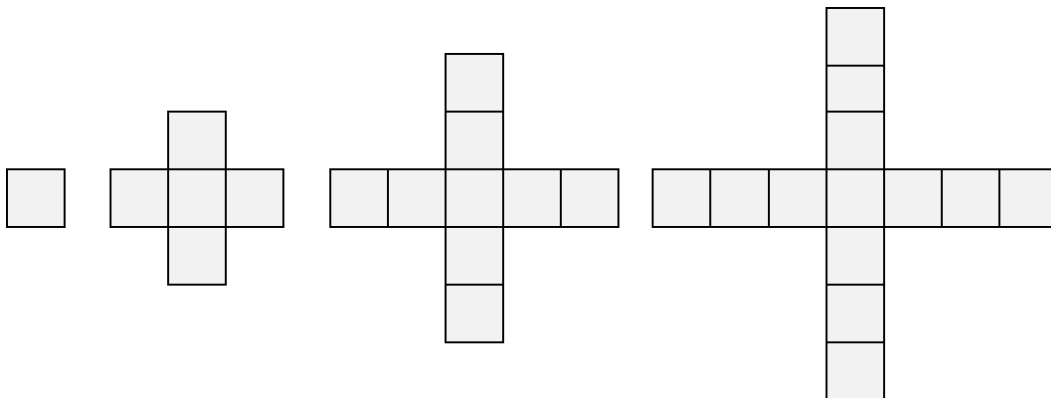
Dia: _____

1. Em cada uma das figuras estão representados os primeiros termos de uma sucessão.
Define por recorrência cada sucessão.

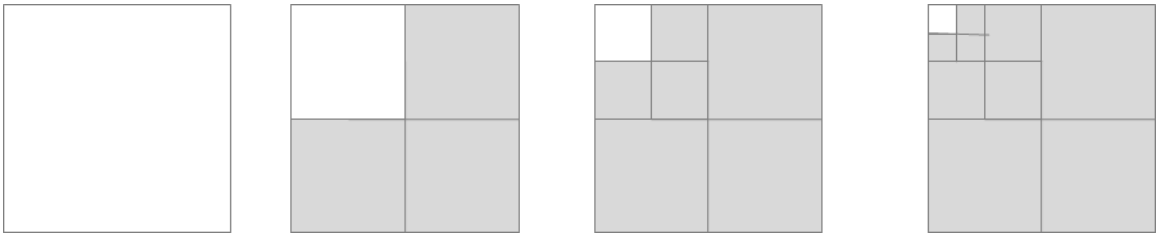
- a) A sucessão (a_n) cujos termos correspondem ao número de círculos em cada figura.



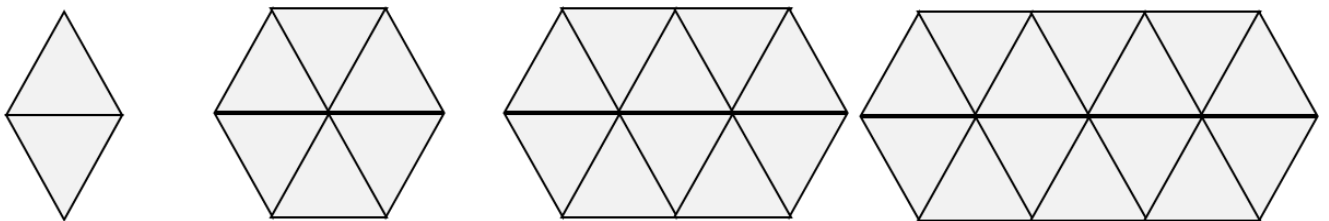
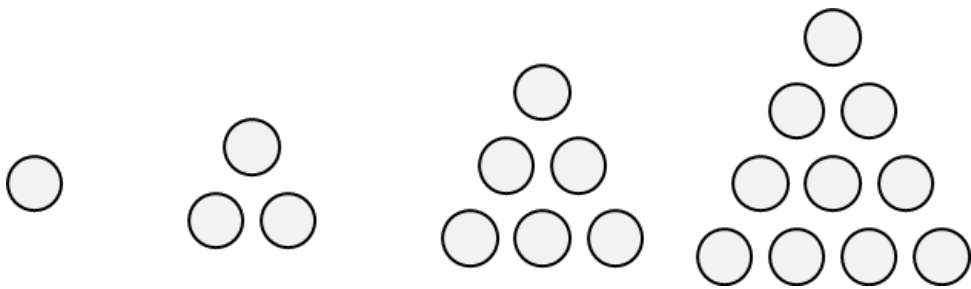
- b) A sucessão (b_n) correspondente ao perímetro de cada uma das figuras. Admite que cada quadrado tem 1 unidade de medida de lado.



- c) A sucessão (c_n) correspondente à área de cada uma das folhas. Admite que a folha original é um quadrado com 2 unidades de medida de lado. Em cada iteração cortamos a folha pelas duas metades e obtemos um quadrado mais pequeno.



- d) A sucessão (d_n) cujos termos correspondem ao número de círculos em cada figura.



- e) A sucessão (e_n) cujos termos correspondem ao número de triângulos pequenos em cada figura.

Tarefa – Progressões Aritméticas e Geométricas

2ª parte Versão B



Nome: _____

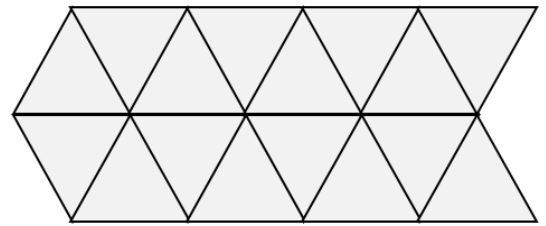
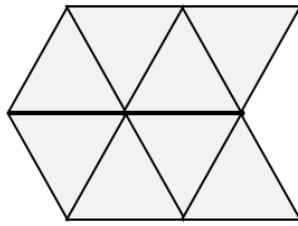
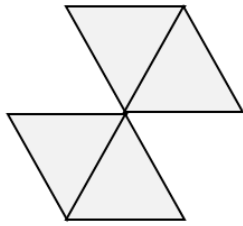
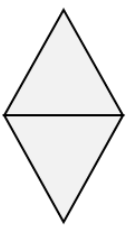
Nome: _____

Turma: _____

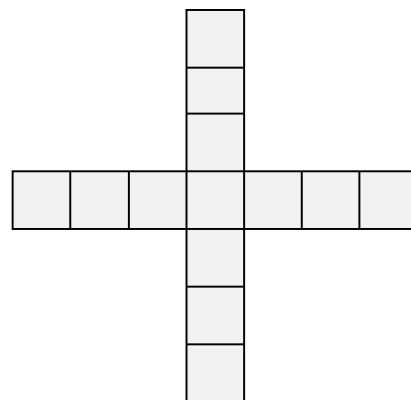
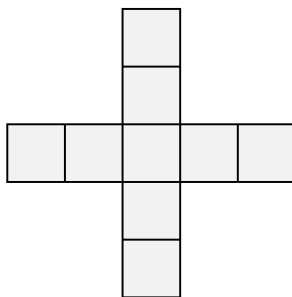
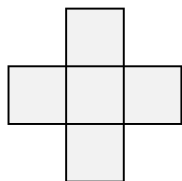
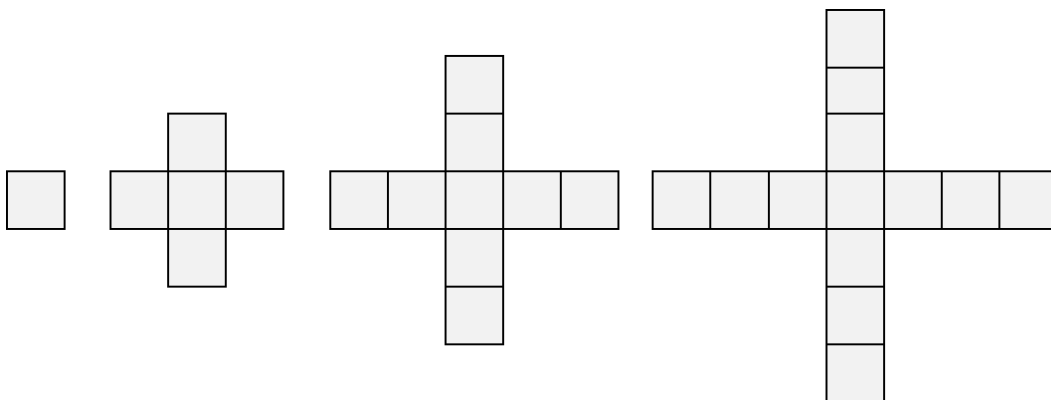
Dia: _____

1. Em cada uma das figuras estão representados os primeiros termos de uma sucessão. Define por recorrência cada sucessão.

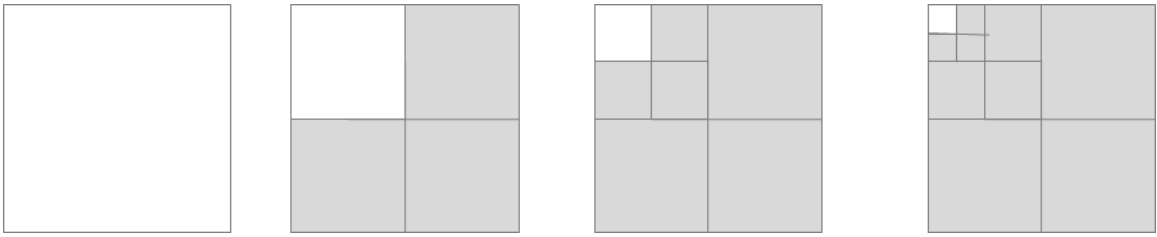
- a) A sucessão (a_n) cujos termos correspondem ao número de triângulos pequenos em cada figura.



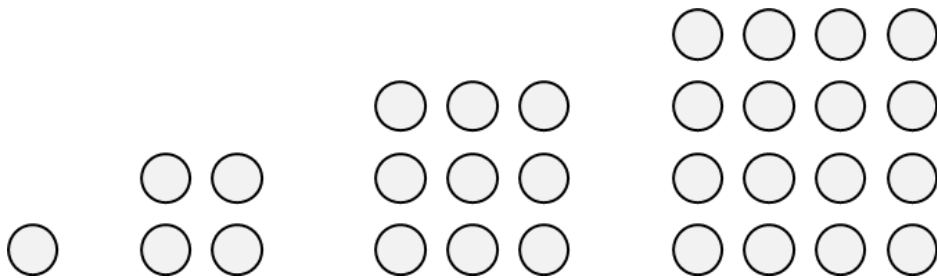
- b) A sucessão (b_n) correspondente à área de cada uma das figuras. Admite que cada quadrado tem 1 unidade de medida de lado.



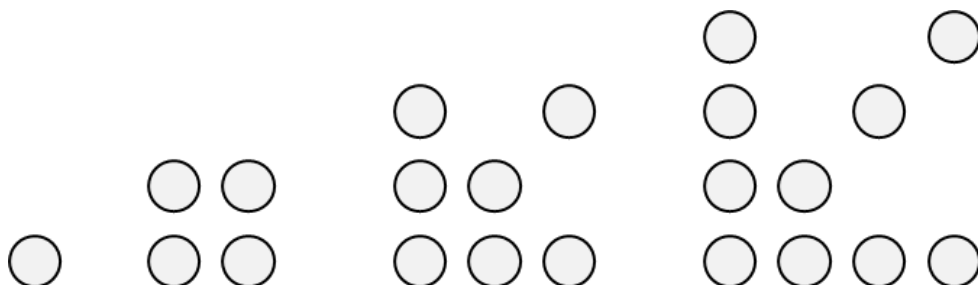
- c) A sucessão (c_n) correspondente ao perímetro de cada uma das folhas. Admite que a folha original é um quadrado com 2 unidades de medida de lado. Em cada iteração cortamos a folha pelas duas metades e obtemos um quadrado mais pequeno.



- d) A sucessão (d_n) cujos termos correspondem ao número de círculos em cada figura.



- e) A sucessão (e_n) cujos termos correspondem ao número de círculos em cada figura.



5.3 Segunda parte da tarefa aplicada nos dias 28 e 29 de janeiro

5. Identifica uma sucessão de cada tipo, indicando a sua definição por recorrência e os primeiros 5 termos.

	Progressão Aritmética	Progressão Geométrica
Crescente		
Decrescente		

6. Indica justificando uma condição necessária e suficiente para uma progressão aritmética ser crescente.
7. Indica justificando uma condição necessária e suficiente para uma progressão geométrica ser crescente. Considera o caso em que $u_1 = 1$.

5.4 Tarefa aplicada no dia 26 de novembro

Tarefa – Progressões Aritméticas e Geométricas

2ª parte

Nome: _____

Nome: _____

Turma: _____ Dia: _____

1. Observa os seguintes quadros. Em quais existe uma relação entre x e y ?
No caso de existir uma relação de proporcionalidade direta ou inversa identifica a constante de proporcionalidade.

a)

x	1	2	5	7
y	3	6	15	21

b)

x	2	3	4	6
y	6	4	3	2

c)

x	2	3	6	9
y	4,5	3	1,5	1

d)

x	3	4	5	8
y	21	28	35	56

e)

x	3	4	5	8
y	7	9	11	17

5.6 Primeira parte da tarefa aplicada na aula do dia 31 de janeiro (uma das versões)

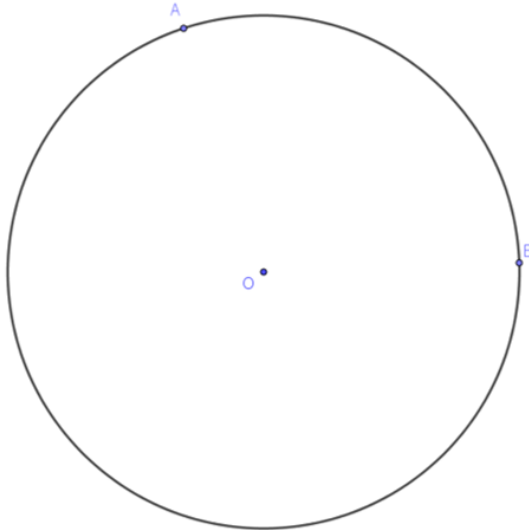
Tarefa – Arcos e Cordas 1

Nome: _____
Turma: _____ Dia: _____

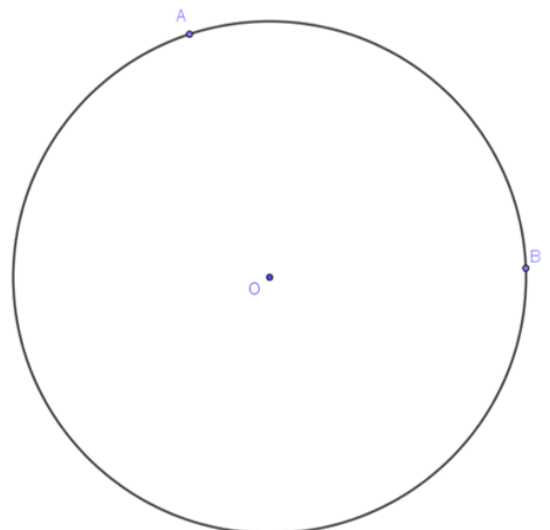


Considera as seguintes circunferências todas com o mesmo raio. Em cada uma O representa o centro da circunferência e A e B dois pontos na circunferência.

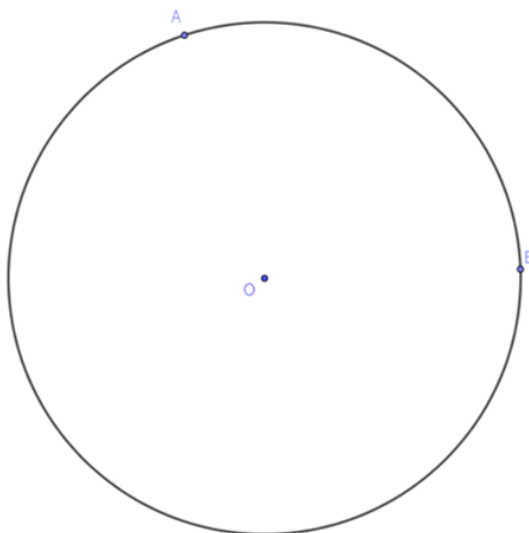
1. Nesta circunferência desenha a bissetriz do ângulo AOB



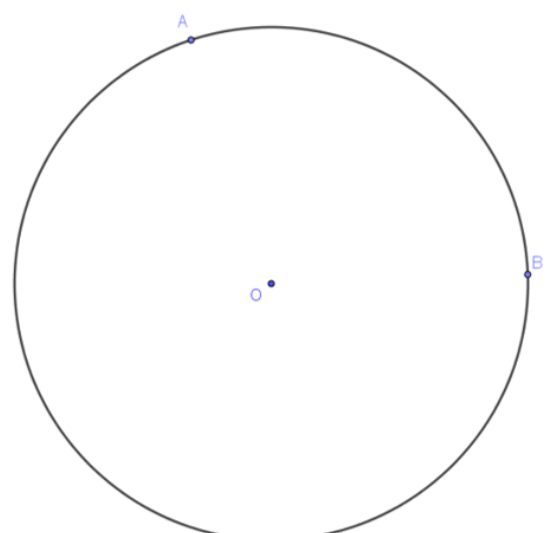
2. Nesta circunferência desenha a mediatriz da corda $[AB]$



3. Nesta circunferência desenha a reta perpendicular à corda $[AB]$ que passa em O .



Circunferência extra, para o caso de haver um engano.



4. O que podes conjecturar a partir da observação das circunferências?

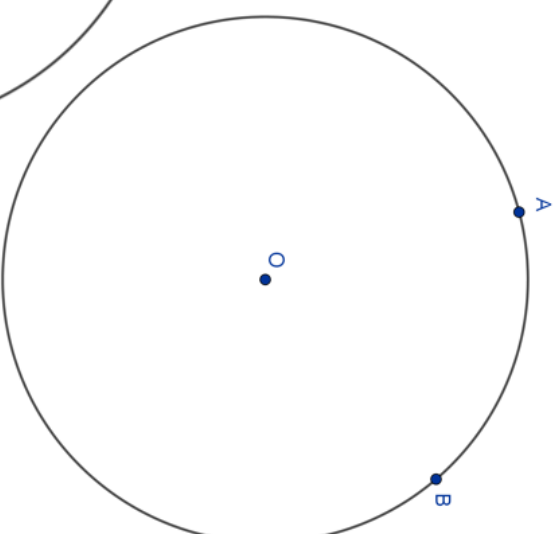
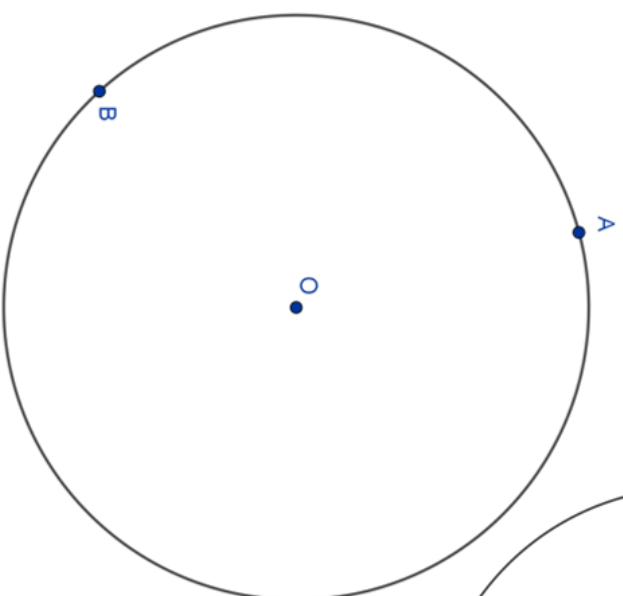
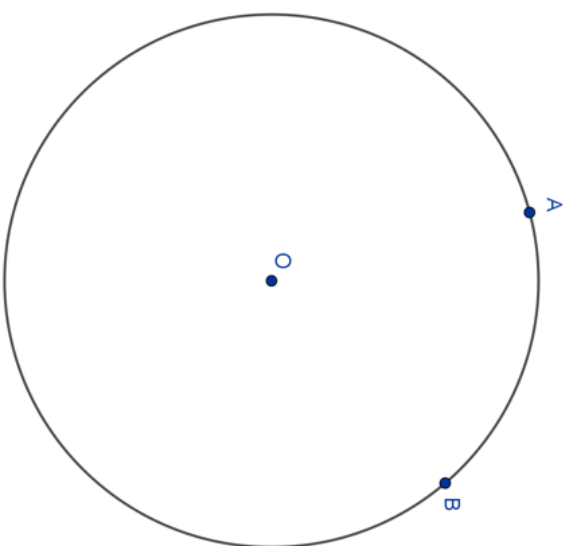
5.7 Segunda parte da tarefa aplicada na aula do dia 31 de janeiro

Tarefa – Arcos e Cordas

Nome: _____



5. Desenhe um arco na circunferência com o mesmo comprimento que o arco AB .



5.8 Enunciado Teste n.º 3 (versão B)

Não é permitido o uso de calculadora.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Determina o valor exato de $(2\vec{u}) \cdot (-4\vec{v})$, sabendo que $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 3$ e $\left(\vec{u}, \vec{v}\right) = 135^\circ$

2. Qual das equações seguintes representa a reta que passa no ponto $(-3, 3)$ e tem de

inclinação $\frac{\pi}{6}$ rad ?

- (A) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{3\sqrt{3}}{3}$ (B) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 3 + \sqrt{3}$ (C) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 3 - \sqrt{3}$ (D) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{3\sqrt{3}}{3}$

3. Na figura, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um prisma quadrangular regular $[ABCDEFGH]$

Sabe-se que:

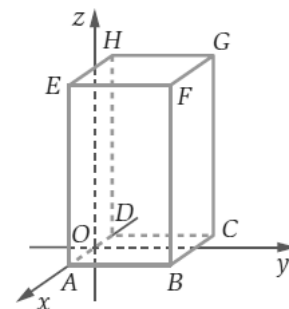
- As bases do prisma são paralelas ao plano xOy
- $A(2, 0, 0)$, $B(2, 4, 0)$ e $G(-2, 4, 10)$

3.1. Escreve uma equação vetorial do plano AHG .

3.2. Determina, na forma $ax + by + cz + d = 0$, uma equação do plano que contém o ponto F e é perpendicular à reta AG .

3.3. Seja α o plano que contém a reta BC e o ponto P de coordenadas $(0, -4, 2)$ (P não está representado na figura).

Determina as coordenadas do ponto de interseção do plano α com o eixo Oz .



4. Num referencial o.n. xOy , considera a circunferência de equação $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 5$.
Escreve a equação reduzida da reta tangente à circunferência no ponto de coordenadas $(0, -4)$

5. Considera, em \mathbb{R} , a equação $\cos^4 x - \sin^4 x = 2(\cos x + 1)^2 + 1$

5.1. Mostra que $\forall x \in \mathbb{R}, \cos^4 x - \sin^4 x = \cos^2 x - \sin^2 x$

5.2. Resolve a equação $\sin^4 x - \cos^4 x = 2(\cos x + 1)^2 + 1$ e indica as soluções

que pertencem ao intervalo $\left[-2\pi, \frac{3}{2}\pi\right]$

6. Considera o conjunto $A = [-1,3[\cup]4,9[$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?
- (A) O conjunto dos majorantes é $[9,+\infty[$ (C) Não tem minorantes
 (B) O mínimo do conjunto é 4 (D) O máximo de A é 9
7. Acerca de uma sucessão (a_n) sabe-se que é decrescente e que o 5.º termo é igual a -1 . Qual das expressões seguintes pode ser o termo geral da sucessão (a_n) ?
- (A) $\frac{n-7}{2}$ (B) $\frac{1-n}{4}$
 (C) $\frac{2}{3n-17}$ (D) $\frac{(-1)^n - n}{6}$
8. Considera a sucessão (a_n) de termo geral $a_n = \frac{2}{3n+1}$
- 8.1. Mostra que $\frac{1}{23}$ é termo da sucessão (a_n) e identifica a respetiva ordem.
 8.2. Estuda (a_n) quanto à monotonia.
 8.3. A sucessão (a_n) é limitada? Justifica.
9. A sucessão (u_n) é uma progressão aritmética de razão r . Sabe-se que $u_{n+2} = 12 + u_{n+6}$. Qual é o valor de r ?
- (A) 12 (B) 3 (C) -3 (D) -12
10. Considera as sucessões (u_n) e (v_n) definidas, respetivamente por:

$$u_n = 3n - 4 \quad \text{e} \quad v_n = \begin{cases} v_1 = 9 \\ v_n = -\frac{v_{n-1}}{3}, n > 1 \end{cases}$$

- 10.1. Mostra que (u_n) é uma progressão aritmética e define-a por recorrência.
 10.2. Justifica que (v_n) é uma progressão geométrica e indica a respetiva razão.
 10.3. Mostra, recorrendo ao princípio de indução matemática que $v_n = (-3)^{3-n}$

FIM

Item			.1	.2	.3		.1	.2			.1	.2	.3		0.1	0.2	0.3	Total
Cotação	2	0	2	2	8	2		4	0	0		2	2	0	4	2	4	00

5.9 Critérios Teste n.º 3 (versão B)

1. 12 pontos

12 pontos	Pontos
Indicar que $2 \vec{u} \cdot (-4\vec{v}) = -8(\vec{u} \cdot \vec{v})$	2
Indicar que $(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \ \vec{u}\ \times \ \vec{v}\ \times \cos(\vec{u} \wedge \vec{v})$	2
Indicar que $\cos(135^\circ) = \cos(180^\circ - 45^\circ) = -\cos(45^\circ)$	2
Indicar que $\cos(45^\circ) = \sqrt{2}/2$	2
Determinar corretamente $(\vec{u} \cdot \vec{v})$	2
Determinar corretamente $2 \vec{u} \cdot (-4\vec{v})$	2

2. Escolha múltipla 10 pontos

3. 12+12+18 pontos

3.1 12 pontos

12 pontos	Pontos
Determinar corretamente as coordenadas de H ou justificar que B pertence ao plano AHG	1
Determinar dois vetores do plano	1
Encontrar uma condição que define os vetores perpendiculares aos dois vetores do plano	3
Escolher um vetor normal \vec{u} correto, de acordo com a condição anterior	2
Indicar que o plano é definido pelos pontos $P(x, y, z)$ tais que $\vec{AP} \cdot \vec{u} = 0$ (ou equivalente)	2
Obter uma equação do plano correta	3

3.2 12 pontos

12 pontos	Pontos
Determinar corretamente as coordenadas de F	2
Determinar corretamente as coordenadas do vetor \vec{AG} (ou \vec{GA})	2
Indicar que o plano é definido pelos pontos $P(x, y, z)$ tais que $\vec{FP} \cdot \vec{AG} = 0$ (ou equivalente)	4
Obter uma equação do plano correta e na forma pretendida	4

3.3 18 pontos

18 pontos	Pontos
Determinar corretamente as coordenadas de C	1
Determinar dois vetores do plano	1
Encontrar uma condição que define os vetores perpendiculares aos dois vetores do plano	3

Escolher um vetor normal \vec{u} correto, de acordo com a condição anterior	2
Indicar que o plano é definido pelos pontos $P(x, y, z)$ tais que $\overrightarrow{BP} \cdot \vec{u} = 0$ (ou equivalente)	3
Obter uma equação do plano correta	3
Indicar que se um ponto $P(x, y, z)$ intersecta o eixo O_z então $x = 0$ e $y = 0$	2
Determinar o ponto correto	3

4 12 pontos Seja C o centro da circunferência e $A(0, -4)$.

12 pontos	Pontos
Determinar corretamente as coordenadas do centro da circunferência	2
Determinar corretamente as coordenadas do vetor \overrightarrow{AC} ou \overrightarrow{CA}	2
Indicar que o plano é definido pelos pontos $P(x, y, z)$ tais que $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ (ou equivalente)	4
Obter uma equação da reta correta	4

5 8 + 14 pontos

5.1 8 pontos

8 pontos	Pontos
$\cos^4(x) - \sin^4(x) = (\cos^2(x) - \sin^2(x))(\cos^2(x) + \sin^2(x))$	4
$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$	2
Concluir $\cos^4(x) - \sin^4(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$	2

5.2 14 pontos

8 pontos	Pontos
Utilizar $\cos^4(x) - \sin^4(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$ para simplificar a equação	2
Utilizar $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ para simplificar a equação	2
Chegar a $\cos(x) = -1/2$	2
Resolver corretamente a equação do tipo $\cos(x) = a$	4
Indicar corretamente quais das soluções anteriores pertencem ao intervalo em conta	4

6 Escolha múltipla 10 pontos

7 Escolha múltipla 10 pontos

8 8+12+12 pontos

8.1 8 pontos

8 pontos	Pontos
Indicar que $1/23$ é termo da sucessão se existe n tal que $a_n = \frac{2}{3n+1}$	2
Resolver corretamente a equação	6

8.2 12 pontos

12 pontos	
$\forall n \in \mathbb{N} \quad n + 1 > n$	1
$\Rightarrow 3(n + 1) > 3n$	1
$\Rightarrow 3(n + 1) + 1 > 3n + 1$	2
$\Rightarrow \frac{1}{3(n + 1) + 1} < \frac{1}{3n + 1}$	2
$\Rightarrow \frac{2}{3(n + 1) + 1} < \frac{2}{3n + 1}$	1
$\Rightarrow a_{n+1} < a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$	2
Concluir que (a_n) é decrescente	3

Ou

12 pontos	
$a_{n+1} - a_n = \frac{2}{3(n + 1) + 1} - \frac{2}{3n + 1}$	1
$= \frac{2(3n + 1) - 2(3(n + 1) + 1)}{(3(n + 1) + 1)(3n + 1)}$	1
$= \frac{-6}{(3(n + 1) + 1)(3n + 1)}$	2
Justificar $\frac{-6}{(3(n+1)+1)(3n+1)} < 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$	3
Concluir que $a_{n+1} < a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$	2
Logo (a_n) é decrescente	3

8.3 12 pontos

12 pontos	Pontos
Justificar que como (a_n) é decrescente	3

$a_n < a_1, \forall n \in \mathbb{N}$	
Determinar $a_1 = \frac{1}{2}$	2
Justificar que $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$	4
Concluir que (a_n) é limitada	3

9 Escolha múltipla 10 pontos

10 14+12+14 pontos

10.1 14 pontos

14 pontos	Pontos
$u_{n+1} - u_n = 3(n+1) - 4 - (3n - 4)$	1
$= 3n + 3 - 4 - 3n + 4 = 3, \forall n \in \mathbb{N}$	1
Escrever que como a diferença entre quaisquer dois termos consecutivos é constante a sucessão é uma progressão aritmética	4
Determinar $u_1 = -1$	2
Indicar $r = 3$	2

10.2 12 pontos

12 pontos	Pontos
Como o quociente entre quaisquer dois termos consecutivos é constante a sucessão é uma progressão geométrica	6
Com razão igual a $-1/3$	6

10.3 14 pontos

14 pontos	Pontos
Ver o caso $n = 1$ $(v_1 = 9 = (-3)^{3-1} = (-3)^2 = 9)$	3
Indicar corretamente a hipótese de indução $v_n = (-3)^{3-n}$	2
Indicar corretamente a tese de indução $v_{n+1} = (-3)^{2-n}$	2
Pela definição da sucessão	2

$v_{n+1} = -\frac{v_n}{3}$	
Não indicar que é pela definição da sucessão	Desconto 0.5
Pela hipótese de indução $v_{n+1} = -\frac{(-3)^{3-n}}{3}$	2
Não indicar que é pela hipótese de indução	Desconto 0.5
Logo $v_{n+1} = \frac{(-3)^{3-n}}{(-3)^1} = (-3)^{2-n}$	3

5.10 Enunciado Ficha de avaliação n.º 2 (versão A)



Nome: _____ N.º: _____ Turma: _____

É permitido o uso de calculadora.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, seleciona a opção correta. Escreve, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens apresenta todos os cálculos que tiveres de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresenta sempre o valor exato.

1. Considera a sucessão (v_n) . Sabe-se que $v_7 = 5$ e $v_{n+1} = v_n + 2$
 - 1.1. Justifica que a sucessão (v_n) é uma progressão aritmética.
 - 1.2. Mostra que o termo geral da progressão é $v_n = 2n - 9$
 - 1.3. Determina a soma dos 30 primeiros termos da sucessão.

2. Seja (u_n) uma progressão aritmética definida por $u_1 = k \wedge u_{n+1} = u_n + 7, k \in \mathbb{R}$.
Sabendo que $u_{10} = 50$, determina o valor de k .

3. Considera a sucessão (u_n) definida por $u_n = 5 \times 10^n$
 - 3.1. Mostra que (u_n) é uma progressão geométrica. Indica o primeiro termo e a razão da progressão.
 - 3.2. Determina a soma dos 15 termos consecutivos da sucessão a partir do 12.º termo (inclusive).

4. Seja (u_n) uma progressão geométrica crescente de razão r . Qual das seguintes opções poderá traduzir o 1.º termo e a razão desta progressão?

(A) $u_1 = 1$ e $r = \frac{1}{2}$	(B) $u_1 = 2$ e $r = -\frac{1}{3}$
(C) $u_1 = 2$ e $r = -\frac{1}{3}$	(D) $u_1 = -2$ e $r = \frac{1}{2}$

5. Considera (w_n) a sucessão definida por $w_n = \frac{n+2}{2n+3}$ com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $c \neq 0$.
Qual das afirmações é sempre verdadeira?

(A) $\exists \delta > 0: \forall p \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow u_n \in V_\delta \left(\frac{1}{2}\right)$	(B) $\forall \delta > 0, \exists p \in \mathbb{N}: n \geq p \Rightarrow u_n \in V_\delta \left(\frac{1}{2}\right)$
(C) $\forall \delta > 0, \forall p \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow u_n \in V_\delta \left(\frac{1}{2}\right)$	(D) $\exists \delta > 0: \exists p \in \mathbb{N}: n \geq p \Rightarrow u_n \in V_\delta \left(\frac{1}{2}\right)$

6. Considera as sucessões (u_n) e (w_n) definidas por $u_n = \frac{4n+1}{2n+3}$ e $w_n = 3n + 2$

6.1. Quantos termos da sucessão (u_n) não pertencem à vizinhança $V_{0,01}(2)$?

6.2. Prova por definição que $\lim u_n = 2$.

6.3. Prova por definição que $\lim w_n = +\infty$.

7. Considera as sucessões (u_n) e (v_n) definidas por

$$u_n = \frac{(-1)^n}{3} \text{ e } v_n = \begin{cases} \frac{2n+4}{3n+2} & \text{se } n \leq 13 \\ 2n+4 & \text{se } n > 13 \end{cases}$$

7.1. Determina se existir o limite da sucessão (u_n) .

7.2. Determina se existir o limite da sucessão (v_n) .

Fim

Item																			Total
Cotação																			

5.11 Critérios da ficha de avaliação n.º 2 (versão A)

1. Considera a sucessão (v_n) . Sabe-se que $v_7 = 5$ e $v_{n+1} = v_n + 2$.

1.1. Justifica que a sucessão (v_n) é uma progressão aritmética e indica qual a razão.

10 pontos	Pontos
Indicar que é uma progressão aritmética porque a diferença entre dois termos consecutivos é constante. // cada termo é obtido do anterior através da soma de uma constante	8
Indicar que a razão é 2	2

1.2. Mostra que o termo geral da progressão é $v_n = 2n - 9$

20 pontos	Pontos
Indicar que $v_n = v_7 + r \times (n - 7), \forall n \in \mathbb{N}$	10
$v_n = 5 + 2 \times (n - 7), \forall n \in \mathbb{N}$	5
$v_n = 2n - 9, \forall n \in \mathbb{N}$	5

Ou

20 pontos	Pontos
Indicar que $v_1 = v_7 + r \times (1 - 7)$	4
$v_1 = 5 - 2 \times 6 = -7$	4
Indicar que $v_n = v_1 + r \times (n - 1), \forall n \in \mathbb{N}$	4
$v_n = -7 + 2 \times (n - 1), \forall n \in \mathbb{N}$	4
$v_n = 2n - 9, \forall n \in \mathbb{N}$	4

1.3. Determina a soma dos 30 primeiros termos da sucessão.

20 pontos	Pontos
Indicar que $S = \frac{v_1 + v_{30}}{2} \times 30$	4
$v_1 = 2 \times 1 - 9 = -7$	4
$v_{30} = 2 \times 30 - 9 = 51$	4
$S = \frac{-7 + 51}{2} \times 30$	4
$S = 660$	4

2. Seja (u_n) uma progressão aritmética de razão igual a 7.

Determina o primeiro termo da progressão, sabendo que $u_{10} = 50$.

20 pontos	Pontos
Indicar que $u_1 = u_{10} + r \times (1 - 10)$	10
$u_1 = 50 + 7 \times (-9)$	5
$u_1 = -13$	5

Ou

20 pontos	Pontos
Indicar que $u_n = u_1 + r \times (n - 1), \forall n \in \mathbb{N}$	5
Logo $u_{10} = u_1 + 7 \times 9$	10
Então $u_1 = u_{10} - 9 \times 7 = -13$	5

3. Considera a sucessão (u_n) definida por $u_n = 2 \times 3^n$

3.1. Justifica que (u_n) é uma progressão geométrica. Indica o primeiro termo e a razão da progressão.

20 pontos	Pontos
(u_n) é uma progressão geométrica porque o quociente de dois termos consecutivos da sucessão é constante // cada termo é obtido do anterior através do produto por uma constante	5
$r = 3$	10
$u_1 = 6$	5

3.2. Determina a soma dos 8 termos consecutivos da sucessão a partir do 6.º termo (inclusive).

20 pontos	Pontos	
Queremos determinar a soma $u_6 + u_7 + \dots + u_{13}$		
<p>1º Método</p> $u_6 + u_7 + \dots + u_{13} = S_{13} - S_5$	Indicar $u_6 + u_7 + \dots + u_{13} = S_{13} - S_5$	5
	$S_{13} = 6 \times \frac{3^{13} - 1}{3 - 1}$	5
	$S_{13} = 4782966$	2
	$S_5 = 6 \times \frac{3^5 - 1}{3 - 1}$	5
	$S_5 = 726$	2
	Soma = 4782240	1
<p>2º Método</p> $u_6 + u_7 + \dots + u_{13} = u_6 \times \frac{1 - 3^8}{1 - 3}$	Indicar $u_6 + u_7 + \dots + u_{13} = u_6 \times \frac{1 - 3^8}{1 - 3}$	5
	Determinar $u_6 = 2 \times 3^6 = 1458$	5

	$1458 \times \frac{1 - 3^8}{1 - 3}$ $= 4782240$	10
Erros possíveis: descontas na etapa		

4. Seja (u_n) uma sucessão convergente. Qual das seguintes afirmações é equivalente a $\lim u_n = \frac{1}{2}$?

- (A) $\exists \delta > 0: \forall p \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow u_n \in V_\delta\left(\frac{1}{2}\right)$ (B) $\forall \delta > 0, \exists p \in \mathbb{N}: n \geq p \Rightarrow u_n \in V_\delta\left(\frac{1}{2}\right)$
(C) $\forall \delta > 0, \forall p \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow u_n \in V_\delta\left(\frac{1}{2}\right)$ (D) $\exists \delta > 0: \exists p \in \mathbb{N}: n \geq p \Rightarrow u_n \in V_\delta\left(\frac{1}{2}\right)$

5. Considera as sucessões (u_n) e (w_n) definidas por $u_n = \frac{4n+1}{2n+3}$ e $w_n = 3n + 2$

5.1. Quantos termos da sucessão (u_n) não pertencem à vizinhança $V_{0,01}(2)$?

20 pontos	Pontos
$u_n \notin V_{0,01}(2) \Leftrightarrow u_n - 2 > 0,01$	3
$\Leftrightarrow \left \frac{4n+1}{2n+3} - 2 \right > 0,01$	1
$\Leftrightarrow \left \frac{4n+1-2(2n+3)}{2n+3} \right > 0,01$	2
$\Leftrightarrow \left \frac{4n+1-4n-6}{2n+3} \right > 0,01$	1
$\Leftrightarrow \left \frac{-5}{2n+3} \right > 0,01$	1
$\Leftrightarrow \frac{5}{2n+3} > 0,01$	1
$\Leftrightarrow \frac{5}{0,01} > 2n+3$	2
$\Leftrightarrow \left(\frac{5}{0,01} - 3 \right) \times \frac{1}{2} > n$	2
$\Leftrightarrow 248.5 > n$	2
248 termos da sucessão não pertencem à vizinhança	5
Alunos também podem considerar o conjunto complementar (os pontos que pertencem à vizinhança), os passos são os mesmos mas com o sinal \leq e as cotações são iguais	

5.2. Prova por definição que $\lim u_n = 2$.

20 pontos	Pontos
Seja $\epsilon > 0$ qualquer	2
$u_n \in V_\epsilon(2) \Leftrightarrow u_n - 2 < \epsilon$	2
$\Leftrightarrow \left \frac{4n+1}{2n+3} - 2 \right < \epsilon$	1
$\Leftrightarrow \left \frac{4n+1-2(2n+3)}{2n+3} \right < \epsilon$	1
$\Leftrightarrow \left \frac{4n+1-4n-6}{2n+3} \right < \epsilon$	2
$\Leftrightarrow \left \frac{-5}{2n+3} \right < \epsilon$	2
$\Leftrightarrow \frac{5}{2n+3} < \epsilon$	2
$\Leftrightarrow \frac{5}{\epsilon} < 2n+3$	2
$\Leftrightarrow \left(\frac{5}{\epsilon} - 3 \right) \times \frac{1}{2} < n$	2
Seja $p > \left(\frac{5}{\epsilon} - 3 \right) \times \frac{1}{2}$ se $n > p$ então $u_n \in V_\epsilon(2)$	2
Logo (u_n) tende para 2	2

5.3. Prova por definição que $\lim w_n = +\infty$.

20 pontos	Pontos
Seja $L > 0$ qualquer	5
$u_n > L \Leftrightarrow 3n+2 > L$	4
$\Leftrightarrow n > \frac{L-2}{3}$	3
Seja $p > \frac{L-2}{3}$ se $n > p$ então $u_n > L$	5
Logo (u_n) tende para $+\infty$	3

6. Considera as sucessões (u_n) e (v_n) definidas por

$$u_n = \frac{(-1)^n}{3} \text{ e } v_n = \begin{cases} \frac{2n+4}{3n+2} & \text{se } n \leq 13 \\ 2n+4 & \text{se } n > 13 \end{cases}$$

6.1. Determina se existir o limite da sucessão (u_n) .

15 pontos	Pontos
A sucessão dos termos pares de (u_n) tende para $1/3$	5

A sucessão dos termos ímpares de (u_n) tende para $-1/3$	5
Então a sucessão (u_n) não tem limite	5

6.2. Determina se existir o limite da sucessão (v_n) .

15 pontos	Pontos
Seja (w_n) a sucessão definida por $w_n = 2n + 4$. (v_n) é igual à sucessão (w_n) excepto num número finito de termos.	3
A sucessão (w_n) tende para $+\infty$ (estes pontos contam mesmo que não seja feita a demonstração)	3
Como as sucessões divergem num número finito de termos $\lim w_n = \lim v_n = +\infty$	3

Parte 2

O uso de exemplos na demonstração

Um estudo com alunos de 11.º ano

1 Introdução

O foco deste trabalho está no uso de exemplos no âmbito da demonstração matemática, com ênfase na análise das capacidades lógicas e matemáticas dos alunos e nas suas estratégias no uso, escolha e representação desses exemplos. Os critérios, propósitos, estratégias e benefícios da escolha e usos de exemplos foram estudados tendo em conta o modelo definido por Ellis *et al.* (2019).

A demonstração tem um papel central na matemática, no desenvolvimento, validação e comunicação do conhecimento matemático, no entanto tem um papel secundário no Ensino da Matemática (Rocha, 2019). Os alunos não compreendem a necessidade da demonstração (De Villiers, 1990), sendo esta uma dificuldade identificada pela investigação como uma dificuldade no ensino da demonstração (De Villiers, 1990).

A investigadora considera que a dificuldade dos alunos em realizar demonstrações matemáticas pode estar relacionada com a ausência de método e com algumas dificuldades em saber por onde começar, neste sentido os exemplos podem ser muito úteis. Knuth, Zaslavsky e Ellis (2019) argumentam que para os matemáticos os exemplos “desempenham um papel crítico nas atividades relacionadas com a demonstração, já que o tempo gasto a pensar e analisar os exemplos pode fornecer não só uma compreensão mais profunda de uma conjectura, mas também uma visão do desenvolvimento de uma prova” (p. 2), no entanto o seu papel no ensino básico e secundário é ínfimo, pois os alunos raramente aprendem a usar estrategicamente exemplos no âmbito da demonstração matemática.

Huete e Bravo (2006) referem como um dos princípios de aprendizagem que “repete-se apenas aquilo que, em virtude das suas consequências, é satisfatório, motivador, estimulante ou agradável. Tudo o que não for assim será evitado” (p. 63). Ao contactar com os alunos deste nível de escolaridade foi possível perceber a relação negativa que estes apresentam com as demonstrações matemáticas, neste sentido o desenvolvimento da capacidade de usar exemplos no âmbito da demonstração pode se revelar uma ajuda pois “a generalização é fundamental para a abstração” (Watson & Chick, 2011, p. 284). Entre os vários benefícios da criação e uso de exemplos na demonstração matemática encontram-se: demonstrar a afirmação ou encontrar um contraexemplo (Sanderfur, Mason, & Watson, 2013), a generalização empírica ou estrutural (Watson & Chick, 2011), auxiliar a demonstração da afirmação, compreender os limites da conjectura (Ellis, et al., 2019), entre outros.

Ryken (2009) defende que “a resolução de problemas científicos é auxiliada por representações visuais e estas são um meio de instruir e comunicar ideias científicas relacionadas a padrões e relacionamentos” (p. 349), deste modo parece adequado permitir que os alunos utilizem representações variadas nas suas demonstrações, facilitando assim a resolução por diferentes abordagens e providenciando mais um ponto de análise do seu pensamento e raciocínio.

1.1 Objetivo e questões de investigação

Este trabalho teve como objetivo analisar a forma como os alunos do 11.º de escolaridade criam e usam exemplos no contexto da demonstração matemática e de que forma esta ação pode beneficiar o processo de aprendizagem, tendo também em conta a forma como os alunos expressam as suas ideias neste tipo de atividade.

De acordo com este objetivo foram definidas as seguintes questões de investigação:

- i) Quais os critérios ou estratégias usadas pelos alunos na escolha dos exemplos?
- ii) Qual o propósito dos alunos no momento da criação de exemplos?
- iii) Como é que a criação de exemplos e os tipos de exemplo procurados se relacionam com o sucesso da demonstração?
- iv) De que forma os alunos expressam as suas ideias numa demonstração e como é que isso contribui para o sucesso da demonstração?

Para dar resposta a estas questões de investigação foram colocadas duas tarefas a vários pares de alunos de uma turma do 11.º ano de escolaridade do curso Científico-Humanístico de Ciências e Tecnologia. Em cada uma destas tarefas, foram colocadas várias afirmações distintas, para as quais os alunos deveriam indicar justificando o valor de verdade.

Seguindo-se estas tarefas foram realizadas entrevistas com os mesmos pares de alunos onde a investigadora explorou o tipo de exemplos criados pelos alunos, o seu propósito com o uso dos vários exemplos e as estratégias utilizadas pelos alunos.

1.2 Organização do estudo

Esta segunda parte do relatório de estágio encontra-se dividida em 9 capítulos, começando pela presente introdução, seguindo-se a revisão de literatura, onde são apresentados alguns resultados relevantes para este estudo, e o capítulo de metodologia, onde são apresentadas, justificadas e brevemente descritas as escolhas bibliográficas tomadas.

Nos capítulos 4, 5 e 6 são apresentados os três estudos de caso analisados nesta investigação: os pares de alunos 2, 3 e 5. Nestes capítulos são apresentadas e analisadas as resoluções de algumas das alíneas das tarefas realizadas, concluindo-se com uma breve conclusão da análise de cada par. Nesta secção foi tida em conta o tipo de afirmação (universal falsa, existencial verdadeira, etc.) e se estas admitiam uma demonstração através da exibição de um exemplo ou não.

No capítulo 7 são apresentadas as conclusões deste estudo, refletindo sobre estes três pares de alunos, as suas semelhanças e diferenças e tentando responder às questões de investigação acima mencionadas.

Por fim, são apresentadas a Bibliografia e os Anexos referentes a esta parte do relatório de estágio.

2 Revisão de literatura

2.1 A demonstração

A demonstração é a “pedra basilar de todo o conhecimento matemático” (Rocha, 2018), no entanto existe alguma discordância entre os matemáticos na definição da demonstração (Steele & Rogers, 2012). Rocha (2018) estudou o entendimento de professores e futuros professores relativamente à demonstração matemática no ensino e às suas funções no ensino e fora do ensino. As várias opiniões incidiram sobre a ideia de garantir a veracidade e na existência de uma sequência de argumentos lógicos.

Opinião de um professor: “[A demonstração] sob o ponto de vista matemático é uma sequência de passos, com uma determinada sequência lógica, que tem por objetivo comprovar uma determinada ideia ou conjectura que se baseia numa experiência empírica.” (p. 75)

Opinião de um futuro professor de Matemática: “Demonstração matemática é o método para provar um teoria, seguindo regras lógicas válidas e utilizando pressupostos matemáticos universalmente e previamente aceites.” (p. 76)

Neste trabalho o conceito de *demonstrar* será considerado simultaneamente como “a atividade de demonstrar enquanto processo e o produto resultante desta atividade” (Boavida, 2001, p. 12). Sendo o produto a própria *demonstração*, isto é, “um argumento matemático que é geral para uma classe de ideias matemáticas e estabelece a verdade de uma afirmação matemática baseando-se em factos matemáticos que são aceites ou que tenham sido previamente comprovados” (Steele & Rogers, 2012, p. 5).

2.1.1 A demonstração no ensino

“Concentrando-se em “*o quê?*” e deixando de fora o “*porquê?*”, a matemática é reduzida a uma concha vazia. A arte não está na “verdade”, mas na explicação, no argumento. (...) A matemática é a *arte da explicação*. Se se negar aos alunos a oportunidade de se envolverem nesta atividade - para colocar os seus próprios problemas, fazer suas próprias conjecturas e descobertas, estar errado, ficar criativamente frustrado, ter uma inspiração e construir suas próprias explicações e demonstrações – estamos a negar-lhes a matemática em si.” (Lockhart, 2009, p. 5)

No Ensino da Matemática, a demonstração ou é esquecida completamente ou é utilizada apenas com o objetivo de certificar que uma afirmação é verdadeira, no entanto este não é o único propósito da demonstração, nem a demonstração é o único método de obter a validação de uma afirmação (De Villiers, 1990).

Schoenfeld (1994), tal como De Villiers (1990), refere alguns problemas com o currículo e defende que “a prova não é um objeto separado da matemática, como aparece no nosso currículo, é uma componente essencial no fazer, na comunicação e no registo da matemática” (p. 76). Estes autores, tal como muitos outros, defendem que demonstração deve ser explorada como uma atividade de aprendizagem significativa para os alunos.

As dificuldades no ensino da demonstração admitem diversas causas possíveis. Por um lado, os alunos não compreender a utilidade da demonstração (De Villiers, 1990), por outro, os professores muitas vezes privilegiam os argumentos empíricos às demonstrações dedutivas por considerarem que estes são mais convincentes e fáceis de seguir (Steele & Rogers, 2012),

A formulação de conjecturas contribui para o desenvolvimento do raciocínio indutivo (Fonseca, 2004) e a capacidade de raciocinar dos alunos desenvolve-se quando estes “são encorajados a formular conjecturas, quando lhes é dado tempo para procurar evidências que as apoiem e refutem e quando é esperado que expliquem e justifiquem as suas ideias” (Fonseca, 2004, p. 82).

Boavida (2001) afirma que a atividade de demonstrar deve fazer parte do ensino desde muito cedo, devendo o professor selecionar tarefas que incentivem os alunos a “criarem descreverem e examinarem padrões para detetar regularidades, a formularem conjecturas, a explorarem estas conjecturas e a produzirem argumentos para as validarem ou rejeitarem” (p. 15). Também Fonseca (2004) refere que a demonstração deve “ser utilizada por crianças desde que começam a aprender matemática” (p. 82), sublinhando no entanto que nos anos iniciais esta não deve envolver formalismo nem formas de raciocínio abstrato.

Neste sentido deve ser criado um ambiente na sala de aula de matemática construtivo, onde as justificações e argumentos dos alunos são valorizados e a validade não se baseia numa autoridade (como o professor ou o manual) (Boavida, 2001).

2.2 Os exemplos na demonstração

Neste estudo será utilizada a definição de exemplos adotada por Sanderfur, Mason e Watson (2013) de “objetos matemáticos cujas propriedades o construtor pretende instanciar em problemas de prova” (p. 324).

Muito frequentemente os exemplos têm um papel crítico nas atividades matemáticas relacionadas com a demonstração, pois fomentam um conhecimento mais profundo da conjectura e podem providenciar alguma ideia para o desenvolvimento da demonstração (Knuth, Zaslavsky, & Ellis, 2019). Outro papel importante dos exemplos na demonstração está na demonstração por contraexemplo, Fonseca (2004) afirma que uma das dificuldades que os alunos sentem na demonstração por contraexemplo é precisamente “não saber como procurar um exemplo que não verifique a proposição perdendo-se por vezes na busca de exemplos que a verificam” (p. 94).

2.2.1 Critérios e estratégias na escolha de exemplos

Lynch e Lockwood (2019) apresentam três estratégias base de construção de exemplos para testar a veracidade de uma conjectura: estratégia direta, estratégia contraditória e estratégia

contrarrecíproca. A estratégia direta caracteriza-se pela criação de exemplos que verificam a hipótese da afirmação para depois verificar se estes cumprem a tese. A estratégia contraditória procura exemplos que que simultaneamente verificam a hipótese e a negação da tese, no caso de tal exemplo ser encontrar trata-se de um contraexemplo para a afirmação dada e verifica a sua falsidade. Por fim, a estratégia contrarrecíproca caracteriza-se pela criação de exemplos que verificam a contradição da tese para posteriormente verificar se estes exemplos cumprem a negação da hipótese.

Ellis *et al.* (2019) criaram o quadro de trabalho CAPS (*criteria, affordances, purposes e strategies*, que pode ser traduzido para critérios, benefícios, propósitos e estratégias) com o intuito de analisar e estruturar o modo como os alunos escolhem os exemplos (critérios e propósitos), como os usam (propósitos), como os usam tendo em conta uma estratégia (estratégias) e o que aprendem/assimilam com esses exemplos (benefícios).

O primeiro aspeto estudado por estes autores foi o tipo de critérios usados pelos alunos, apresentados na Tabela 2.2.1. Os critérios usados na escolha de exemplos podem estar relacionados com propósitos ou estratégias da demonstração, como *compreender, testar ou refutar a conjectura*, embora alguns apenas revelem uma preferência pessoal (como o *favorito*). Os critérios *caso mínimo* ou o *caso limite* podem ser usados tendo em conta o propósito de *explorar o domínio de verdade* e o critério *aleatório* pode revelar uma tentativa de *transmitir um argumento geral*. Os critérios *primeira ideia* ou *favorito* não estão tipicamente ligados a nenhuma estratégia. Esta categorização não é exclusiva, podendo um exemplo ser de vários tipos ao mesmo tempo.

Tabela 2.2.1 Critérios de escolha de um exemplo (Ellis, et al., 2019, p. 267)

Critério	
Simple	Exemplo escolhido de forma a facilitar o processo.
Caso mínimo	Exemplo escolhido porque é o exemplo mais pequeno que verifica a condição inicial.
Aleatório	Exemplo escolhido de forma intencionalmente aleatória para testar a veracidade da conjectura.
Caso limite	Exemplo escolhido porque é um extremo ou um caso especial.
Típico	Exemplo típico ou escolhido por muitos alunos.
Primeira ideia	Exemplo escolhido porque foi o primeiro de que se lembrou, sem seguir nenhuma seleção.
Familiar	Exemplo escolhido por ter propriedades conhecidas.
Favorito	Exemplo escolhido com base nas suas preferências de número, forma, etc.

Ao escolher e usar um certo exemplo o aluno pode obter diferentes benefícios, como os indicados na Tabela 2.2.2.

Tabela 2.2.2 Benefícios do uso de um exemplo (Ellis, et al., 2019, p. 268)

Benefício	
Ganhar visão sobre a proposição	Compreender porquê: O exemplo permite compreender porque é que a conjectura é verdadeira.
	Observar um elemento estrutural: O exemplo permite identificar a estrutura geral, normalmente fornece alguma ideia para a potencial demonstração.
Generalizar	O exemplo permite fazer uma generalização
Suportar uma conjectura	Nova conjectura: o exemplo incentiva o desenvolvimento de uma nova conjura.
	Conjectura revista: O exemplo fomenta a revisão da conjectura, normalmente diminuindo o domínio de veracidade.
Auxiliar a justificação/demonstração	Viável mas incompleto: O exemplo permite a tentativa de tratar o caso geral. O argumento produzido é uma abordagem viável para justificar a conjectura, mas fica aquém de uma demonstração completa.
	Produzir uma demonstração: O exemplo permite produzir uma demonstração completa e confiável.
Compreender os limites da proposição	O exemplo permite que o aluno compreenda as limitações do excesso de confiança no uso geral do exemplo. O estudante entende através do uso de exemplos que exemplos não podem chegar à demonstração (exceto no caso de demonstração por exaustão).

Na Tabela 2.2.3 encontram-se os propósitos do uso de um exemplo, ou seja, o que os alunos pretendem fazer com o exemplo escolhido. Os propósitos e os critérios de escolha dos exemplos estão interligados, no entanto os propósitos respondem à pergunta “porque é que o aluno usou o (s) exemplo (s)?” enquanto que os critérios respondem à pergunta “porque é que o aluno usou este exemplo?”. Os benefícios do uso de um exemplo podem não ter sido previamente planeados pelos alunos enquanto que os propósitos são intencionais.

Tabela 2.2.3 Propósitos no uso de um exemplo (Ellis, et al., 2019, pp. 270-271)

Propósito	
Compreender	Exemplo escolhido para compreender como é que a conjectura funciona.
Testar a veracidade	Exemplo escolhido para tentar testar o valor de verdade da

	conjetura.
Confirmar a sua ideia	Exemplo escolhido para confirmar se a sua alegação de veracidade está correta.
Explorar o domínio de verdade	Exemplo escolhido para testar para que exemplos é que a conjetura é verdadeira.
Refutar	Exemplo escolhido para tentar refutar a proposição.
Reivindicação	Exemplo (ou contraexemplo) escolhido como uma ilustração da veracidade (ou falsidade) da conjetura.
Compreender porquê	Exemplo escolhido para tentar compreender porque é que a proposição é falsa ou verdadeira.
Transmitir um argumento geral	Exemplo genérico escolhido para transmitir um argumento geral que sustente a sua afirmação.
Explorar a representação	Exemplo escolhido para explorar a representação e de que forma é que esta se relaciona com a conjetura.
Desenvolver conjeturas	Exemplo escolhido com o objetivo de desenvolver uma conjetura
Responder ao entrevistador	Exemplo escolhido para responder à intervenção do entrevistador

Na Tabela 2.2.4 encontram-se as estratégias subjacentes ao uso de exemplos na demonstração, estas estratégias podem estar presentes tanto na escolha e criação de exemplos como na aplicação desses exemplos a um propósito. Estando portanto divididos em dois tipos: estratégias na escolha de exemplo e estratégias no uso de exemplos.

Tabela 2.2.4 Estratégias na escolha e no uso de exemplos (Ellis, et al., 2019, p. 272)

Estratégias na escolha de exemplos	
Diversidade	Testar a diversidade dos exemplos.
Variação sistemática	Escolher um primeiro conjunto de exemplos e depois fazem variar sistematicamente a natureza desses exemplos.
Explorar as propriedades	Escolher exemplos que verifiquem uma certa propriedade ou um conjunto de propriedades
Estratégias no uso de exemplos	
Tentativa de refutar	Assumir que a conjetura é falsa e tentar prová-lo com um contraexemplo.

Estrutura	Procurar um padrão ou uma estrutura matemática através de um conjunto de exemplos, e tentar usar o conjunto para identificar características gerais.
Procura de padrões	Tentar encontrar características ou padrões semelhantes aos exemplos anteriores sem considerar quaisquer elementos estruturais ou explicativos (o padrão encontrado é coincidência e a pesquisa não é específica à conjectura).
Construir formalidade	Desenvolver uma representação formal como uma expressão do que é comum a todos os exemplos.
Saltar para a formalidade	Introduzir abruptamente uma representação formal que não está relacionada com os exemplos considerados ou ocorre sem o uso de exemplos.
Indução informal	Verificar vários exemplos e depois estender esse argumento ao caso geral, argumentando que todos os casos podem ser gerados com base no conjunto inicial de exemplos.

2.3 Representações

Ao utilizar um exemplo, no caso destes estudo uma sucessão ou função, é possível utilizar diversas representações. Estas representações e a sua adequada articulação influenciam a resolução da tarefa, portanto ao analisar um dado exemplo faz sentido considerar a forma como este está representado.

O NCTM (2000) defende que a forma de representação das ideias tem um papel fundamental na compreensão e uso dessas ideias. Em concreto, no Ensino da Matemática quando os alunos aprendem a trabalhar com as representações dos objetos matemáticos estes acedem a uma vasta gama de ferramentas, que vão contribuir fortemente para a sua capacidade de “pensar matematicamente”.

Ao longo do processo de pensamento e resolução de um problema matemático e no próprio produto final, podem ser considerados dois tipos de representações: externas e internas, sendo as externas as que podem ser observadas externamente, como gráficos, escrita ou esquemas (NCTM, 2000). Aspinwall e Shaw (2002) defendem que as representações geradas pelos alunos podem-se revelar “janelas úteis” para o raciocínio dos alunos, devendo, portanto, ser valorizadas pelos professoras.

Nem todos os alunos têm a mesma forma de pensar e de representar as suas ideias. Alguns alunos valorizam o processamento visual-pictórico, utilizando mais gráficos ou esquemas, enquanto que outros valorizam o processamento verbal-lógico. Tendo em conta estas diferenças, Krutetskii (1976) identifica três principais métodos de processamento matemático:

- i) Analítico: o aluno depende maioritariamente do processamento verbal-lógico e muito pouco no processamento visual-pictórico;
- ii) Geométrico: o aluno baseia-se maioritariamente do processamento visual-pictórico e não tanto no processamento verbal-lógico;
- iii) Harmónico: o aluno usa igualmente os processamentos verbal-lógico e visual-pictórico.

Tradicionalmente o foco da Análise Matemática estava na manipulação das representações simbólicas e analíticas, mas, desde cerca de 1990, que a representação gráfica tem vindo a ganhar importância, sendo promovida a compreensão tanto da representação analítica como da representação gráfica de funções e derivadas (Aspinwall & Shaw, 2002).

Paradinha e Leuca (2010) notaram que os alunos participantes no seu estudo sentiam alguma dificuldade em passar de uma representação para a outra e concluíram que existe uma necessidade de implementar tarefas diversificadas na sala de aula, de forma às relações entre as diferentes representações serem compreendidas e estabelecidas pelos alunos.

Apesar das dificuldades que crescem com o uso de diversas representações na sala de aula e com o esforço de motivar os próprios alunos a realizar um uso adequado e variado de representações, vários estudos apontam para o facto de que “os alunos entendem melhor os conceitos quando os estudam através de uma variedade de perspetivas e desenvolvem a destreza para se mover entre as diferentes representações” (Tripathi, 2008, p. 444). Sendo, portanto, necessário adequar as práticas letivas.

3 Metodologia

Neste capítulo são apresentadas e fundamentadas algumas metodologias e técnicas de recolha de dados utilizadas em estudos no Ensino da Matemática. De seguida, são apresentados os procedimentos metodológicos adotados neste estudo.

3.1 Estudo qualitativo

Este tipo de investigação centra-se em “processos e significados que não são examinados nem medidos rigorosamente (se chegarem a ser medidos), em termos de quantidade, volume, intensidade ou frequência” (Denzin & Lincon, p. 4). Os dados analisados numa investigação qualitativa são recolhidos pelo investigador no campo, “fazendo observações, julgamentos subjetivos, analisando e resumindo, enquanto realizam sua própria consciência” (Stake, 1999, p. 45) e são “ricos em pormenores descritivos relativamente a pessoas, locais e conversas, e de complexo tratamento estatístico” (Bogdan & Biklen, 1994, p. 16). Estes dados podem ser obtidos recorrendo ou não a ferramentas como registo vídeo, entrevista ou observação participante, sendo depois revistos e analisados pelo investigador, devendo esta recolha ser o mais completa, rica e imparcial possível, livre de pressupostos ou estereótipos (Bogdan & Biklen, 1994).

Rodríguez, Flores e Jiménez (1996), baseando-se em Stake (1999) (original de 1995), apontam quatro características comuns aos vários tipos de investigações qualitativas:

- **Holística:** a investigação é contextualizada, orientada para um caso, tendo em vista a compreensão e não a comparação e resistente ao reducionismo;
- **Empírica:** a investigação está focada no campo e nas observações do investigador e dos sujeitos de estudo, é uma investigação naturalista e não intervencionista e que utiliza descrições dos eventos em linguagem natural;
- **Interpretativa:** os investigadores estão em interação com o espaço em estudo, focando-se nos eventos relevantes para o estudo e recorrendo à sua intuição;
- **Empática:** a investigação tem um design previamente planeado, baseando-se num quadro de referência dos atores no processo, mas é sensível e mutável, existe uma interação propositada com os sujeitos de estudo,

Bogdan e Biklen (1994) definem a investigação qualitativa como tendo cinco características essenciais, admitindo, no entanto, que nem todos os estudos qualitativos apresentam todas estas cinco características:

- Os dados são recolhidos através do contacto direto do investigador com o local (ou locais) de estudo no seu estado natural, pois “as ações podem ser melhor compreendidas quando são observadas no seu ambiente habitual de ocorrência” (p. 48);
- Os investigadores qualitativos recolhem dados descritivos como palavras, imagens, “transcrições de entrevistas, notas de campo, fotografias, vídeos, documentos pessoais, memorandos e outros registos oficiais” (p. 48);
- Interessa mais o processo do que o resultado ou produto, procurando-se determinar as mudanças ocorridas e compreender o porquê dessas mudanças;
- Os dados são analisados de forma intuitiva, não existe uma hipótese pré-concebida que se quer verificar, “as abstrações são construídas à medida que os dados particulares que foram recolhidos se vão agrupando” (p. 50);
- Uma investigação qualitativa pretende, através do questionamento dos sujeitos de investigação compreender o significado e as diferentes perspetivas em jogo na situação em estudo.

Muitos autores descrevem o estudo qualitativo por oposição ao estudo quantitativo, por exemplo, Stake (1999, p. 42) indica como três principais diferenças entre a investigação qualitativa e a quantitativa:

- i) “a distinção entre explicação e compreensão como objeto da investigação”;
- ii) “a distinção entre uma função pessoal e uma função impessoal do pesquisador”;
- iii) “uma distinção entre conhecimento descoberto e conhecimento construído.”

Stake (1999) refere ainda que a diferença mais importante entre estes dois tipos de investigação não está no tipo de dados (quantitativos ou qualitativos) mas sim no tipo de conhecimento que cada uma pretende alcançar: acontecimentos ou causas. A investigação quantitativa procura explicações, enquanto que a qualitativa procura compreender “as complexas relações entre tudo o que existe” (p. 42). Enquanto que na investigação qualitativa as questões de investigação procuram relações entre um pequeno número de variáveis, na investigação quantitativa “as questões de investigação estão direcionadas a casos ou fenómenos e são procurados modelos” (Stake, 1999, p. 45). Em relação ao contexto, os métodos quantitativos tentam eliminar os efeitos contextuais e situacionais, enquanto que os qualitativos estão interessados no contexto e singularidade dos casos, sendo o “erro”, o caso que foge à regra, muito importante para a compreensão do objeto de estudo.

No entanto estas duas metodologias não são incompatíveis e algumas investigações beneficiam de uma combinação das duas, ação que Olabuenaga (2003) chama de triangulação e afirma ser cada vez mais frequente.

3.2 Estudo de caso

Meirinhos e Osório (2010) defendem que, como o estudo de caso é uma estratégia pouco sistematizada e abrangente, as suas características não são “completamente coincidentes e

podem sofrer alguma variação conforme as abordagens, o desenho metodológico e os aspetos a que cada autor atribui mais importância” (p. 53).

Uma característica apontada por vários autores (por exemplo, Ponte (2006) e Yin (2001)) é a sua natureza empírica. Meirinhos e Osório (2010), por sua vez, referem que este design de investigação “herda” algumas características da investigação qualitativa.

Yin (2001) afirma que o estudo de caso é utilizado quando se quer deliberadamente estudar as condições contextuais e quando “os limites entre o fenómeno e o contexto não estão claramente definidos” (p. 13), por oposição, por exemplo, à experiência científica, em que se deseja separar o fenómeno do contexto e estudar apenas algumas variáveis.

Quanto ao objeto de estudo, Yin (2001) depende que este é um “fenómeno contemporâneo no seu contexto de vida real” (p. 13) e Ponte (2006) refere que este é “uma entidade bem definida como uma pessoa, uma instituição, um curso, uma disciplina, um sistema educativo, uma política ou qualquer outra unidade social” (p. 2).

Segundo Ponte (2006), os dados de um estudo de caso são obtidos através do trabalho de campo ou da análise documental e possuem uma forte componente descritiva, apoiando-se na descrição grossa (*thick description*), isto é, uma descrição “factual, literal, sistemática e tanto quanto possível completa, do seu objeto de estudo” (p. 7). Um estudo de caso pode, no entanto, não ser exclusivamente descritivo, pode também ser analítico, questionando a situação e confrontando-a com teorias existentes e outras situações.

De acordo com Yin (2001), a investigação de estudo de caso trata de situações tecnicamente únicas, onde existem mais variáveis de interesse do que pontos de dados, como consequência esta baseia-se em múltiplas fontes de evidência e beneficia de um desenvolvimento prévio de proposições teóricas para guiar a recolha e análise de dados.

Existem diversas estratégias de investigação e fica ao critério do investigador optar pela estratégia adequada. Yin (2001) apresenta um modelo de escolha baseado no tipo de questão de investigação colocadas, no controlo que o investigador tem sobre os eventos em estudo e na localização temporal da situação em estudo, como pode ser observado na Tabela 2.3.1. No caso do estudo de caso as questões de investigação são do tipo “Como” e “Por que”, não é necessário existir controlo sobre os acontecimentos e os eventos são contemporâneos (atuais). De acordo com esta categorização, a estratégia adequada para este estudo era efetivamente o estudo de caso.

Tabela 2.3.1 Situações relevantes para cada estratégia de investigação (Cosmos Coporations, através de Yin (2001))

	Tipo de questão de investigação	Necessita de controlo sobre os eventos comportamentais?	Foca-se em eventos contemporâneos?
Experiência científica	como, porquê	Sim	Sim
Levantamento	quem, o quê, onde, quantos, quanto	Não	Sim

Análise de arquivos	quem, o quê, onde, quantos, quanto	Não	Sim/Não
Pesquisa histórica	como, porquê	Não	Não
Estudo de caso	como, porquê	Não	Sim

Também Ponte (2006) refere que as questões de investigação do estudo de caso são do tipo “como” e “porquê”, sendo que o objetivo de um estudo de caso é “compreender em profundidade o “como” e os “porquês” dessa entidade [sujeito em estudo], evidenciando a sua identidade e características próprias, nomeadamente nos aspetos que interessam ao pesquisador” (p. 2).

Alguns autores (como Bogdan e Biklen (1994) e Merriam (1988)) apresentam uma ideia de estudo de caso um pouco mais abrangente do que a definição de Yin (2001), não incluindo a contemporaneidade como fator obrigatório.

Bogdan e Biklen (1994) recomendam que o primeiro projeto de investigação de um investigador seja um estudo de caso, de forma a proporcionar “uma primeira experiência gratificante” (p. 89). De acordo com Ponte (2006), esta estratégia de investigação tem sido cada vez mais utilizada em investigação em Educação Matemática, sendo um design investigação adequado tanto a projetos de grande dimensão como de pequena dimensão. Servindo os propósitos de “ investigar questões de aprendizagem dos alunos, bem como do conhecimento e das práticas profissionais de professores, programas de formação inicial e contínua de professores, projetos de inovação curricular, novos currículos, etc.” (Ponte, 2006, p. 3).

Stake (1999) aponta que a atenção dada aos contextos deve ser proporcional à natureza intrínseca do estudo de caso, podendo alguns contextos importantes não ser relevantes para o estudo. “O nível de atenção dado aos contextos baseia-se, em parte, na distinção entre objetivos intrínsecos e instrumentais” (p. 63).

Yin (2001), Stake (1999) e Ponte (2006) sublinham a importância do contexto: “os elementos exteriores, quer da realidade local, quer de natureza social e sistémica que mais o influenciaram” (Ponte, 2006, p. 5). Ponte (2006) refere também a influência e importância da história, ou sejam as condições de desenvolvimento do sujeito, apontando assim dois tipos de justificação para as características do caso: as determinantes internas (a história, natureza e propriedades próprias) e as influências externas recebidas do contexto (próximas e distantes, diretas e indiretas).

3.2.1 Tipos de estudo de caso

Ponte (2006) aponta duas principais perspetivas possíveis para os estudos de caso, uma perspetiva interpretativa e uma perspetiva pragmática. A perspetiva interpretativa foca-se no mundo do ponto de vista dos participantes, tentando compreender os seus pontos de vista enquanto que a perspetiva pragmática procura descrever o objeto de estudo na sua totalidade e de forma coerente, do ponto de vista do investigador. Este autor refere que cada caso funciona como um exemplo, podendo ter o seu próprio propósito:

- i) Exemplo pela negativa: pretende mostrar alguns aspetos negativos de uma realidade que se pensava certa (por exemplo demonstrar que um programa falhou os objetivos pretendidos);
- ii) Exemplo pela positiva: pretende sublinhar os aspetos positivos de alguma realidade que nunca se tinha visto ou não se achava possível;
- iii) Exemplo excecional: pretende evidenciar um caso por ser raro, permitindo compreender melhor os casos comuns;
- iv) Exemplo neutro: pretende analisar um caso nem positivo nem negativo, um exemplo típico de um certo grupo.

Merriam (1988), focando-se nas orientações teórica, indica alguns tipos de estudos de caso adequados para a Educação Matemática:

- i) Estudos de caso de cariz etnográfico: analisam o objeto de estudo de um ponto de vista sociocultural, baseando-se no conhecimento comum, artefactos e comportamentos comuns a um certo grupo e tendo em conta a sua história;
- ii) Estudos de caso históricos: estudam a evolução de um fenómeno ou organização num dado período;
- iii) Estudos de caso psicológicos: analisam o comportamento de um certo sujeito como um todo, tentando perceber certos comportamentos seus;
- iv) Estudos de caso sociológicos: procuram compreender os efeitos e relações entre as construções teóricas como aspetos demográficos e sociais ou os papéis de cada sujeito.

Bogdan e Biklen (1994) distinguem vários tipos de estudo de caso: estudos de caso de organizações numa perspetiva histórica, estudos de caso de observação, histórias de vida, estudos comunitários, análise situacional e microetnografia, sublinhando que existem ainda outros diferentes. De acordo com estes autores, um estudo de caso de observação é baseado na observação participante e com foco numa organização particular (local, grupo de pessoas ou atividade da escola, por exemplo) ou num aspeto dessa organização.

Em termos do número de assuntos, ambientes ou bases de dados Bogdan e Biklen (1994) apresentam três possibilidades: estudo de caso único, estudo de casos múltiplos e estudo de casos comparativos, sendo que no estudo de casos comparativos “dois ou mais estudos de caso são efetuados e depois comparados e contrastados” (p. 97). No entanto, outros autores (como por exemplo Yin (1993)) apenas dividem os estudos de caso em caso único ou casos múltiplos. Os estudos de caso múltiplos são vantajosos, segundo Rodríguez, Flores e Jiménez (1996), pois permitem comparar de forma parcial os vários casos enquanto que os de caso único são, de acordo com Yin (2001), mais adequados quando se trata de um caso crítico, extremo/único ou revelador.

Yin (1981) defende que os estudos de caso não são apenas exploratórios (ao contrário da ideia corrente) e que podem servir mais propósitos, apontando três tipos de estudo de caso em relação ao propósito que servem:

- i) Estudos de caso exploratórios: servem para obter algumas informações preliminares sobre o objeto em estudo;

- ii) Estudos de caso descritivos: servem para descrever o objeto em estudo e responder a perguntas de como;
- iii) Estudos de caso analíticos: servem para testar explicações para a ocorrência de certos eventos, desenvolvendo ou confrontando os resultados com a teoria existente.

Ponte (2006) refere que os estudos de caso exploratórios são úteis como estudo piloto no desenvolvimento de um estudo em larga escala e os estudos de caso descritivos para preparar um programa de intervenção mas que os estudos de caso analíticos “proporcionam um mais significativo avanço do conhecimento” (p. 6)

Tabela 2.3.2 Tipos de estudo de caso (Yin, 2001)

	Estudo de caso único	Estudo de casos múltiplos
Holísticos (unidade única de análise)	Projeto holístico de caso único	Projeto holístico de casos múltiplos
Incorporados (unidades múltiplas de análise)	Projeto incorporado de caso único	Projeto incorporado de casos múltiplos

Yin (1981) refere que os estudos de caso exploratórios podem ser de caso único ou de múltiplos casos, dependendo se se trata de apenas um objeto de estudo ou um conjunto de casos de estudo. Mais tarde Yin (1993) expande esta categorização em termos do número de objetos de estudo para os estudos de caso analíticos e descritivos

Dependendo no número de unidades de análise Yin (2001) divide os estudos de caso em holísticos (uma única unidade de análise) ou incorporados (várias unidades de análise), sendo que estes podem ser também estudos de caso único ou múltiplos casos, como indica a Tabela 2.3.2.

3.3 Escolha dos participantes

Aires (2015) e Olabuenaga (2003) apontam dois tipos de amostragem usados nas investigações qualitativas: amostragem opinática e amostragem teórica. A amostragem opinática baseia-se num critério estratégico pessoal do investigador (escolher os sujeitos com conhecimento mais profundo, mais abordáveis ou os voluntários). A amostragem teórica tem por objetivo de criar uma teoria, o investigador deve analisar os dados disponíveis e decidir os grupos que quer analisar profundamente. A amostragem teórica só termina quando o ambiente em estudo for saturado.

Numa amostragem teórica o investigador tem algum interesse numa dada característica ou ideia e escolhe “indivíduos ou ambiente: onde pensa que este será patente” (Bogdan & Biklen, 1994, p. 87), no entanto Bogdan e Biklen (1994) sublinham que nem sempre o investigador chega à conclusão que esperava e tem de estar preparado para mudar as suas expectativas ou o plano preparado.

3.4 Técnicas de recolha de dados

3.4.1 Observação

Segundo Aires (2015), a observação “consiste na recolha de informação, de modo sistemático, através do contacto direto com situações específicas” (p. 25).

Apesar de parecer uma atividade banal, a observação é muito útil na investigação qualitativa pois providencia uma visão mais completa da realidade (Aires, 2015) e pode potenciar uma maior compreensão do caso (Stake, 1999).

A observação permite regular a informação pois permite “articular informação proveniente da comunicação intersubjetiva entre os sujeitos com a informação de carácter objetivo” (Aires, 2015).

Stake (1999) refere que “o investigador deve manter um bom registo dos eventos, de forma a providenciar uma descrição incontestável para posteriormente analisar e comunicação” (p. 61), focando-se em categorias ou eventos chave e ao contexto que pode influenciar a análise.

Aires (2015) refere que o observador não deve manipular nem estimular os sujeitos, no entanto alguns autores referem tipos de observação onde o observador pode ter um papel não passivo (como Yin (2001) e Silva e Menezes (2005)).

Silva e Menezes (2005) apresentam sete tipos de observação, baseados nas suas características:

- observação assistemática: não tem planeamento ou controle previamente preparados;
- observação sistemática: tem planeamento e realiza-se em condições controladas para responder às questões pré-estabelecidas;
- observação em laboratório: tudo é controlado;
- observação na vida real: o registo dos dados é feito à medida que estes acontecem;
- observação não-participante: o pesquisador observa o facto, mas não participa;
- observação individual: realizada por um investigador;
- observação em equipa: realizada por um grupo de pessoas.

Yin (2001) refere-se a dois tipos de observação: observação direta e observação participante. Na observação direta o investigador analisa alguns comportamentos ou ambientes relevantes para o estudo no seu local natural. Na investigação participante o investigador pode participar nas atividades, em vez de ser apenas um observador passivo. As principais vantagens da observação participante são poder perceber mais facilmente o ponto de vista de alguém dentro da situação e poder usufruir de algumas oportunidades especiais (como manipular eventos menos importantes), por outro lado algumas desvantagens são possuir uma menor capacidade de agir como um observador externo parcial, ter tendência para apoiar de um grupo ou organização e ter menos tempo para tomar notas ou fazer perguntas.

3.4.2 Entrevista

Segundo Stake (1999), na investigação qualitativa os investigadores têm interesse em descobrir e descrever os múltiplos pontos de vista do caso e a entrevista é a forma mais fácil de alcançar múltiplas realidades.

Numa entrevista o entrevistador e o sujeito interagem pessoalmente, por correio, telemóvel, computador ou outro meio, permitindo “o desenvolvimento de uma interação criadora e captadora de significados em que as características pessoais do entrevistador e do entrevistado influenciam decisivamente o curso da mesma” (Aires, 2015).

Bogdan e Biklen (1994) admitem que a entrevista pode decorrer num momento planeado ou não, pois “por vezes, a entrevista não tem uma introdução; o investigador transforma simplesmente aquela situação numa entrevista” (p. 134), no entanto no final do estudo é vantajoso obter uma entrevista mais formal.

Stake (1999) refere que numa investigação qualitativa raramente são realizados questionários com a mesma pergunta para todos os sujeitos e que raramente se procura uma resposta de sim ou não. “O objetivo da entrevista é compreender a experiência única de cada sujeito e alcançar alguma explicação ou a descrição de um episódio ou história” (Stake, 1999).

Uma desvantagem da entrevista é ser uma atividade difícil de gerir, “é extremamente fácil falhar a obter uma resposta para as questões certas e muito difícil de orientar alguns dos entrevistados mais informativos sobre a escolha de questões do investigador” (Stake, 1999).

Aires (2015) sublinha três características determinantes da entrevista: o número de pessoas, o número de temas e a estrutura. A entrevista pode ser realizada apenas com um sujeito de estudo ou com um grupo e pode focar-se apenas sobre um tema (monotemática).

Silva e Menezes (2005) referem dois tipos de entrevista: estruturada e não estruturada. A entrevista estruturada ou padronizada apresenta um guião previamente estabelecido enquanto que a entrevista não estruturada permite explorar outras questões não existentes no guião.

Bogdan e Biklen (1994) classificam as entrevistas no *contínuo estruturada / não estruturada*. Uma entrevista estruturada foca-se em certos tópicos e pode ser orientada por algumas questões gerais, enquanto que numa entrevista aberta ou não estruturada o entrevistador deixa o entrevistado escolher o tópico e guiar a entrevista. As entrevistas semiestruturadas o entrevistado não guia o estudo, mas este tipo permite obter elementos comparáveis entre os vários sujeitos.

3.5 Procedimentos metodológicos adotados

Este estudo constituiu numa investigação qualitativa baseada num estudo de caso múltiplo. Definindo-se como um estudo de caso de observação, segundo a definição de Bogdan e Biklen (1994), e descritivo, segundo a definição de Yin (2001), pois o tema dos exemplos na demonstração já foi tratado em alguns artigos (como por exemplo Ellis *et al.* (2019)) e neste estudo iremos focar-nos em descrever e compreender o desempenho destes alunos na escolha e uso de exemplos no âmbito da demonstração.

Esta investigação foi dividida em duas partes, a primeira foi realizada no momento do estudo do tema sucessões 11.º ano e a segunda no início do tema funções reais de variável real

11.º ano. Em cada uma destas partes foi realizada uma tarefa seguida por uma entrevista aos alunos. As tarefas e as respetivas entrevistas foram realizadas com cerca de uma semana de intervalo, de modo a que os alunos ainda se recordassem da sua resolução. A primeira tarefa foi realizada no dia vinte e seis de março e a segunda tarefa no dia vinte e seis de abril. As primeiras entrevistas foram realizadas nos dias dois, três e quatro de março e as segundas nos dias vinte e nove e trinta de abril e três e sete de maio.

Bogdan e Biklen (1994) defendem que num estudo de caso de observação, ao escolher o ambiente ou grupo de estudo o investigador deve ter em conta que “quanto menor for o número de indivíduos maior a probabilidade de que o comportamento destes seja alterado pela sua presença” (p. 92). Tendo em conta este efeito e a intenção de obter um ambiente de confiança os alunos foram divididos em pares, que se mantiveram ao longo do estudo na resolução das tarefas e nas entrevistas.

A investigadora tomou um papel diferente nos vários momentos de recolha de dados, participou enquanto observadora participante nas aulas de Matemática da turma de forma a poder caracterizar e emparelhar os alunos de forma adequada. Por oposição, durante a realização das duas tarefas a investigadora tentou interferir o mínimo possível com a resolução dos alunos, comunicando com estes apenas quando o solicitassem e respondendo apenas a questões não relacionadas com a matéria em estudo.

As entrevistas realizadas foram do tipo semiestruturadas, seguindo um guião adaptado a cada um dos pares de forma a cobrir as suas aptidões e dificuldades.

3.5.1 Escolha dos participantes

Os alunos foram convidados a participar no estudo, tendo-lhes sido dito que iria incidir sobre a demonstração. Dez alunos voluntariaram-se para o efeito, cinco rapazes e cinco raparigas, que foram posteriormente organizados em pares.

Os alunos foram caracterizados tendo em conta três critérios: as classificações obtidas nos diferentes objetos de avaliação realizados na disciplina de Matemática no ano corrente, a sua evolução ao longo do ano letivo e o seu nível de extroversão.

Os primeiros dois critérios foram representados através de uma nota, denotado de nota de caracterização. No momento da formação dos pares tinham sido realizados cinco momentos de avaliação sumativa, três testes e duas fichas. De modo a ter em conta a evolução do aluno ao longo do ano letivo, os objetos de avaliação recentes receberam um peso maior e como a segunda ficha incidiu no estudo das progressões geométricas, progressões aritméticas e na parte inicial do estudo dos limites de sucessões, incluindo portanto alguma da matéria abordada na tarefa recebeu um peso superior aos outros elementos de avaliação. Na Tabela 2.3.3 encontra-se o peso atribuído a cada um dos momentos de avaliação no cálculo da nota de caracterização. De sublinhar que esta nota de caracterização inclui, assim, o desempenho nos critérios dois primeiros critérios.

Para refletir o terceiro critério foi atribuído a cada aluno um valor de 1 a 3, pela investigadora e pela professora da turma, de acordo com a observação das aulas, tentando refletir a personalidade e participação nas aulas de Matemática. O nível 3 de extroversão foi atribuído aos alunos que tomavam iniciativa de participar nas aulas ou que falavam muito com

os colegas, o nível 2 aos alunos que não participavam tanto nas aulas por iniciativa própria e o nível 1 aos alunos que não participavam na aula por iniciativa própria. Na Tabela 2.3.4 encontra-se a caracterização dos dez alunos participantes no estudo.

Tabela 2.3.3 Peso de cada objeto de avaliação no cálculo da nota de caracterização

	Teste 1	Ficha 1	Teste 2	Teste 3	Ficha 2
Peso	1	1	2	2	3

Estes dois parâmetros quantitativos (nota de caracterização e nível de extroversão) foram decisivos na formação dos pares pois procurou-se criar pares homogêneos em termos destes dois valores, tendo sido dada maior importância à nota de caracterização. No entanto, foram também tidas em conta as dinâmicas sociais observadas nas aulas desta turma e as relações de amizade dos alunos. O nível de extroversão e os pares escolhidos foram revistos pela professora da turma, de modo a obter um conjunto de pares o mais adequado possível e tentando manter os pares equilibrados. A motivação para esta formação dos pares foi obter um bom ambiente de discussão saudável e de confiança entre os alunos.

Na Tabela 2.3.4 encontra-se a caracterização dos dez alunos voluntários, incluindo a nota de caracterização, a classificação mais alta e mais baixa obtida em testes ou fichas de avaliação e o nível de extroversão de cada um. Esta tabela inclui também a especificação dos cinco pares que foram formados com os dez alunos voluntários.

Tabela 2.3.4 Seleção dos pares

	Nome (fictício)	Nota de caracterização			Nível de extroversão
Par 1	Francisco	12			3
	Diogo	12			3
Par 2	Alice	13			1
	Maria	15			2
Par 3	Guilherme	16			2
	Miguel	18			2
Par 4	Beatriz	12			1
	Mariana	11			2
Par 5	Sofia	16			2
	Nuno	17			3

Destes cinco pares foram escolhidos três para serem analisados neste estudo, os pares 2, 3 e 5. O Par 3 foi escolhido por ser o par com maior sucesso na resolução da tarefa, apresentando justificações adequadas a um maior número de alíneas. O Par 5 foi escolhido por ser o único que adota um *método de processamento matemático geométrico* desde a primeira tarefa. Entre os pares 1, 2 e 4 havia bastantes semelhanças, por isso foi escolhido o Par 2 por ter as resoluções e respostas mais organizadas dos três pares.

3.5.2 Recolha e análise de dados

Esta investigação dividiu-se em duas partes, em cada uma das partes o par realizou uma tarefa e posteriormente uma entrevista semiestruturada. Estas entrevistas contribuíram para compreender a fundo o raciocínio e uso de exemplos dos alunos.

Os dez alunos voluntários realizaram as tarefas a pares no horário letivo numa sala de aula à parte do resto da turma para diminuir as interferências. As entrevistas foram realizadas fora de aula e apenas estava o par entrevistado e a investigadora na sala onde a entrevista decorreu.

As resoluções da tarefa foram analisadas tendo em conta o valor de verdade referido pelo par, as justificações/demonstrações realizadas, o uso de exemplos e diferentes representações e as dificuldades detetadas. Na segunda tarefa foi analisado se houve uma evolução relevante do uso de exemplos e no caso afirmativo se tal contribuiu para o sucesso na tarefa.

Na entrevista, os alunos foram questionados sobre o seu uso de exemplos e o seu desempenho na tarefa. Além disso foram confrontados com as perguntas que não realizaram e as perguntas que erraram, sendo o uso de exemplos, quando adequado, incentivado. Nos casos onde se notou um fraco uso de exemplos ou uma grande dificuldade num aspeto particular da matéria foram feitos alguns problemas novos incidentes nas dificuldades dos alunos.

3.5.3 As tarefas

As tarefas analisadas tiveram a duração de noventa minutos e foram realizadas em tempo de aula, nos dias 26 de março e 26 de abril. A primeira tarefa foi realizada na sala de aula apenas com os alunos participantes no estudo e a segunda tarefa foi realizada numa aula normal por toda a turma. Os alunos participantes no estudo foram sentados de acordo com os pares previamente estabelecidos enquanto que os restantes alunos se sentaram em pares à sua escolha.

Cada tarefa, consistia numa lista de afirmações para as quais os alunos deveriam indicar justificando o valor de verdade (ver Tabela 2.3.5). As afirmações foram seleccionadas de modo a incentivar a exploração de alguns exemplos e não era esperado que os alunos soubessem responder imediatamente a todas elas.

Nos anexos 9.1 e 9.2 encontram-se os enunciados das tarefas colocadas aos alunos. Além da folha com o enunciado da tarefa, cada par de aluno recebeu várias folhas de resposta. Estas folhas de resposta tinham apenas um espaço para indicar o número da alínea, o valor de verdade da afirmação dessa alínea e o número do par, sendo o restante espaço reservado para as resoluções dos alunos. De modo a ser mais fácil analisar as resoluções dos alunos estes receberam instruções para resolver uma alínea por página.

Os alunos foram informados antes de realizar cada tarefa de que não era esperado que resolvessem todas as alíneas e que deveriam fazer uma escolha das afirmações em que se queriam focar e investir nessas. Foram, também, incentivados a justificar a afirmação o melhor que conseguissem, recorrendo, se necessário, a esquemas, texto, desenhos ou diferentes representações. Foi também pedido que indicassem se a sua opinião mudasse a meio da resolução.

A primeira tarefa incidiu no tema “Sucessões” 11.º ano e a segunda no tema de “Funções reais de variável real” do 10.º ano. No momento de resolução da primeira tarefa os alunos estavam a estudar o tema em foco. No momento de resolução da segunda tarefa os alunos estavam a começar a estudar o tema de “Funções reais de variável real” do 11.º ano, por isso antes da realização da tarefa a investigadora reviu algumas definições como extremo absoluto e extremo relativo, função monótona e paridade de uma função.

Apesar de se tratarem de dois temas diferentes e de anos diferentes é possível encontrar uma relação entre estes temas e os alunos podem usar todo o conhecimento adquirido até este ponto para resolver as tarefas, pois as sucessões são funções de variável natural e contradomínio \mathbb{R} e as sequências, estudadas no ensino básico, correspondem ao conjunto de chegada das sucessões. Desta forma, se os alunos forem capazes de perceber as “conexões entre diversos tópicos estudados no ensino básico e diferentes áreas, os estudantes desenvolvem a capacidade de aplicar os conhecimentos sobre as sequências no estudo das sucessões, olhando para a matemática como um todo integrado” (Paradinha & Leuca, 2010, p. 28) e o mesmo pode ser aplicado para as funções.

As afirmações da tarefa foram divididas em termos da possibilidade da demonstração ser realizada exclusivamente através da exibição de um exemplo, sendo as de tipo 1 as que admitem essa possibilidade e as do tipo 2 as que não admitem. Como o objetivo deste trabalho era estudar o uso de exemplo foram apresentadas mais alíneas do tipo 1, sendo que em cada uma das tarefas existiam sete alíneas do tipo 1 e quatro do tipo 2.

Para simplificar a notação as alíneas foram identificadas como “número da tarefa. número da alínea”, deste modo a alínea 5 da tarefa 2 está identificada como 2.5. Na Tabela 2.3.5 encontram-se as vinte e duas afirmações existentes na tarefa, o seu valor de verdade e o seu tipo.

Tabela 2.3.5 Afirmações analisadas nas duas tarefas e o seu tipo

Alínea	Afirmação	Valor de verdade	Tipo
1.1	Uma sucessão crescente e minorada é limitada.	F	1
1.2	Uma progressão aritmética de razão natural é sempre monótona.	V	2
1.3	Algumas progressões aritméticas são limitadas.	V	1
1.4	Uma progressão geométrica é sempre monótona.	F	1
1.5	Nem todas as sucessões crescentes tendem para infinito.	V	1
1.6	Se uma sucessão é convergente então é monótona.	F	1
1.7	Se uma sucessão é convergente então é limitada.	V	2
1.8	Se uma sucessão é limitada então é convergente.	F	1
1.9	Existe uma sucessão com dois limites diferentes.	F	2
1.10	A soma de um infinitésimo com uma sucessão infinitamente grande é infinitamente grande.	V	2
1.11	O produto de uma sucessão limitada com uma sucessão convergente é uma sucessão convergente.	F	1
2.1	Nem todas as funções admitem inversa.	V	1
2.2	Uma função pode ser simultaneamente par e ímpar.	V	1
2.3	Uma função pode não ser par nem ser ímpar.	V	1
2.4	Se uma função de domínio \mathbb{R}^+ é crescente em sentido lato então a reflexão de eixo Ox da representação do gráfico dessa função é também crescente em sentido lato.	F	1
2.5	Se uma função de domínio \mathbb{R}^+ é crescente em sentido lato então a reflexão de eixo Oy da representação do gráfico dessa função é decrescente em sentido lato.	V	2
2.6	Um extremo relativo de uma função é sempre um extremo absoluto.	F	1
2.7	Existe pelo menos uma função do tipo $f(x) = x - a + b$ com $a, b \in \mathbb{R}$ e domínio \mathbb{R} que é monótona.	F	2

2.8	A função inversa de uma função afim é uma função afim.	V	2
2.9	Algumas funções polinomiais não têm zeros.	V	1
2.10	Se uma função é crescente em sentido lato então não admite um máximo absoluto.	F	1
2.11	Uma função do tipo $f(x) = \sqrt{x - a} + b$ com $a, b \in \mathbb{R}$ e domínio $[a, +\infty[$ é sempre monótona.	V	2

De modo a permitir uma ideia geral da tarefa, na Tabela 2.3.6 encontra-se a distribuição das alíneas em termos de tipo de proposição (universal ou existencial), do valor de verdade e do tipo.

Tabela 2.3.6 Distribuição das alíneas das tarefas por tipo

alínea	universal ou existencial	valor de verdade	tipo	alínea	universal ou existencial	valor de verdade	tipo
1.1	A	F	1	2.1	E	V	1
1.2	A	V	2	2.2	E	V	1
1.3	E	V	1	2.3	E	V	1
1.4	A	F	1	2.4	A	F	1
1.5	E	V	1	2.5	A	V	2
1.6	A	F	1	2.6	A	F	1
1.7	A	V	2	2.7	E	F	2
1.8	A	F	1	2.8	A	V	2
1.9	E	F	2	2.9	E	V	1
1.10	A	V	2	2.10	A	F	1
1.11	A	F	1	2.11	A	V	2

3.5.3.1 Análise das tarefas

As tarefas foram analisadas tendo em conta os seguintes pontos:

- i) O valor de verdade referido pelo aluno, as suas justificações dadas, o uso de exemplos e o uso de diferentes representações em cada uma das afirmações;
- ii) As dificuldades detetas no tema em estudo (de acordo com o definido na Tabela 2.3.9);
- iii) Outras notas relevantes sobre a prestação do aluno ao longo da tarefa;
- iv) Evolução do aluno da primeira para a segunda tarefa.

Não é possível observar o processo interno de pensamento dos alunos mas as representações exteriores podem permitir uma melhor compreensão do seu *método de processamento matemático* (segundo a categorização de (Krutetskii, 1976)), com esse objetivo em mente foram analisadas as representações utilizadas pelos alunos durante o presente estudo. Na Tabela 2.3.7 encontram-se as formas convencionais de representação consideradas neste estudo, que foram escolhidas tendo em vista os manuais adotados pela escola.

Tabela 2.3.7 Diferentes representações de sucessão e de função usadas

Sucessão	Função
Termo geral Termo geral escrito por ramos Termo geral dado por recorrência	Expressão algébrica Expressão algébrica escrita por ramos Gráfico cartesiano

Gráfico cartesiano	Tabela Diagrama de setas
--------------------	-----------------------------

Relativamente ao primeiro ponto foi utilizada uma grelha de análise para cada uma das tarefas. Na Tabela 2.3.8 encontra-se a grelha de análise da resolução da primeira tarefa, a grelha de análise da resolução da segunda tarefa é igual exceto a secção das representações, que variam de acordo com as representações definidas na Tabela 2.3.7.

As estratégias utilizadas pelos alunos no uso dos exemplos foram classificadas de acordo com Lynch e Lockwood (2019) e Ellis *et al.* (2019). Lynch e Lockwood (2019) dividem as estratégias em direta, contraditória e contrarrecíproca, Ellis *et al.* (2019) em tentativa de refutar, perceber a estrutura, procurar padrões, construir formalidade, saltar para a formalidade e indução informal. Como a tentativa de refutar pode corresponder à estratégia contraditória ou contrarrecíproca este tipo de estratégia não se encontra na grelha de análise.

Os critérios utilizados na seleção dos exemplos e a posterior utilização dada pelos alunos a esses exemplos foram analisadas de acordo com Ellis *et al.* (2019).

Tabela 2.3.8 Grelha de análise da resolução da primeira tarefa

Tarefa 2		Afirmação n.º
Tipo (universal ou existencial)		
Valor de verdade da afirmação		
É possível demonstrar o valor de verdade através da exibição de um exemplo?		
Valor de verdade indicado	Correto	
	Errado	
	Par indicou um valor e demonstrou outro?	
	Mudou de opinião a meio da resolução?	
De acordo com a classificação do aluno é possível demonstrar o valor de verdade através da exibição de um exemplo?		
Justificação	Par tenta uma demonstração através da exibição de um exemplo	Quantos exemplos foram usados?
		O exemplo é suficiente para demonstrar o pretendido?
		O exemplo serve para completar ou ilustrar a demonstração?
		Apresenta intenção de generalizar a partir de um ou mais exemplos?
		O exemplo escolhido está matematicamente errado?
Par apresenta alguma justificação escrita (além ou ao invés da apresentação de um ou mais exemplos)?		
Representações de função utilizadas	Termo geral	
	Termo geral de uma sucessão definida por ramos	
	Por recorrência	
	Gráfico	
	Outra (especificar)	
Estratégias base para afirmações universais	Lynch e Lockwood (2017)	Direta
		Contraditória
		Contrarrecíproca
Critérios utilizados na escolha do/s exemplo/s	Ellis <i>et al.</i> (2019)	Caso mínimo, caso limite
		Aleatório
		Simples, favorito, primeira ideia
		Típico, familiar
Propósito dos exemplos	Ellis <i>et al.</i> (2019)	Compreender como ou porque é que a conjectura funciona
		Testar a veracidade

		Confirmar a sua ideia
		Explorar o domínio de verdade
		Refutar
		Reivindicação
		Transmitir um argumento geral
		Compreender ou ilustrar a representação
		Desenvolver conjecturas
Benefícios do uso do/s exemplo/s	Ellis <i>et al.</i> (2019)	Compreender
		Generaliza
		Suportar a sua conjectura
		Apoiar a sua justificação
		Produzir uma demonstração
		Compreender as limitações da afirmação
Estratégia no uso dos exemplos*	Ellis <i>et al.</i> (2019)	Tentativa de refutar
		Estrutura
		Procura de padrões
		Construir formalidade
		Saltar para a formalidade (independente dos exemplos)
		Indução informal
Estratégia na escolha de exemplos*	Ellis <i>et al.</i> (2019)	Diversidade
		Variação sistemática
		Propriedades

* apenas aplicável se for utilizado mais do que um exemplo

As dificuldades dos alunos foram caracterizadas de acordo com o programa atual e através da observação das aulas. Ao longo da lecionação do tema foram detetados alguns pontos onde os alunos tipicamente se enganam e estes encontram-se expostos na Tabela 2.3.9.

Tabela 2.3.9 Dificuldades sentidas pelo par na resolução de cada tarefa

Tarefa 1	Tarefa 2
Definição de sucessão crescente, crescente em sentido lato, decrescente ou decrescente em sentido lato	Definição de função inversa
Definição de sucessão minorada e majorada	Definição de função par e função ímpar
Definição de máximo e mínimo de um conjunto	Definição de domínio de uma função
Progressões aritméticas	Definição de função polinomial
Monotonia das progressões aritméticas	Definição de função afim
Progressões geométricas	Definição dos pontos mínimo e máximo relativos e absolutos de uma função
Monotonia das progressões geométricas	Distinção entre extremo absoluto e extremo relativo
Definição de limite de uma sucessão	Definição de monotonia e uma função
Diferença entre sucessão convergente e	Reflexões de eixo Ox e de eixo Oy de uma

sucessão divergente	função
Sucessões infinitamente grandes ou infinitamente pequenas	
Operações com limites de sucessões	

Em termos da evolução do par foram tidos em conta o uso de exemplos e o sucesso na tarefa. O uso de exemplos foi analisado em termos de frequência, adequação e existência de alguma estratégia matemática. O sucesso da demonstração foi refletido através do número de perguntas para as quais os alunos indicaram corretamente o valor de verdade e o número de justificações realizadas corretamente.

3.5.4 Entrevistas

As entrevistas tiveram a duração de cerca de uma hora, a primeira fase de entrevistas realizou-se nos dias dois e três de março e a segunda fase nos dias vinte e nove e trinta de abril e três e sete de maio. Durante as entrevistas a investigadora tentou criar um ambiente de confiança onde os alunos foram incentivados a expressar as suas ideias, optando por uma atitude positiva, substituindo “isso está errado” por “têm a certeza que é mesmo assim?”, entre outros pormenores. As entrevistas foram divididas em quatro partes:

1. Questões introdutórias gerais;
2. Analisar a resolução das várias alíneas;
3. Analisar as razões de descarte das alíneas não respondidas;
4. Questões adicionais (se necessário).

As questões introdutórias serviram para quebrar o gelo mas para também tentar obter algumas respostas às questões de investigação. Nas entrevistas relativas à primeira tarefa as primeiras questões introdutórias eram mais triviais, de modo a permitir que os alunos descontraíssem, e as seguintes mais focadas no estudo:

- Trabalharam bem em conjunto?
- Alguma vez tinham feito uma tarefa parecida com esta?
- Fizeram as perguntas por ordem?
- O que acharam da tarefa? Foi difícil? Foi fácil?
- De que forma é que os exemplos contribuíram para a resolução da tarefa?
- Como é que decidiam quando é que iam usar exemplos e quando não os iam utilizar?
-

Nas entrevistas relativas à segunda tarefa, em que os alunos já estavam mais confortáveis com a investigadora e já tinham tido a experiência de ser entrevistados, as perguntas introdutórias focaram-se em questões concretas, relacionadas com as questões de investigação:

- De que forma é que os exemplos contribuíram para a resolução da tarefa?
- Quais foram as representações de funções que acharam mais úteis? Utilizaram mais dada representação, porquê?

- Porque é que às vezes faziam um gráfico da função mas não indicavam a expressão algébrica da função?
- Quando é que se pode usar apenas um exemplo para fazer a demonstração?
- ...

Na fase seguinte, a investigadora percorreu as várias alíneas respondidas pelos alunos, questionando-os sobre a sua resolução, o seu uso de exemplo e de diferentes representações, tentando perceber o raciocínio dos alunos, as suas escolhas e os benefícios ou consequências das mesmas. As questões feitas nesta parte tinham sido previamente pensadas para cada alínea e cada par de alunos e eram questões como:

- Podem me explicar a vossa demonstração/raciocínio?
- Porque é que escolheram este exemplo?/ Qual o propósito deste exemplo?
- Como é que se lembraram deste exemplo?
- Qual é o papel deste exemplo na demonstração?
- Porque é que não usaram nenhum exemplo nesta alínea?
- De que forma é que este exemplo contribuiu para a resolução da tarefa?
- Que sucessão/função é esta?
- Porque é que usaram um *exemplo genérico*?
-

Na terceira fase foram revistas as afirmações que os alunos excluíram, tentando perceber quais as razões de descarte das afirmações e as dificuldades sentidas pelos alunos. Quando os alunos se mostravam abertos para tal a investigadora tentava que estes chegassem a um resposta por si próprios, incentivando o uso de exemplos.

Foram colocadas algumas questões extra nos casos em que pareceu adequado, por exemplo, quando algum dos temas tinha ficado por falar. Estas questões estavam inicialmente pensadas para o fim da entrevista mas como foram surgindo no âmbito de algumas das alíneas a que os alunos tinham respondido incorretamente ou em que a investigadora tinha detetado alguma incoerência., foram colocadas no guião da entrevista junto da primeira alínea em que o problema surgia. Se os alunos demonstrassem muitas dificuldades na alínea correspondente era colocada a questão extra e depois volta-se à alínea original.

4 Apresentação do estudo de caso: Par 2 (Alice e Maria)

Alice e Maria são alunas de aproveitamento satisfatório na disciplina de Matemática. Durante a observação das aulas de Matemática da turma, a investigadora verificou que Maria foi um pouco mais participativa do que Alice, tendo por isso sido atribuído um nível de extroversão 1 a Alice e 2 a Maria. Apesar do nível de extroversão atribuído às alunas ter sido diferente, durante o estudo estas formaram um par bastante equilibrado e ambas participaram na discussão e resolução das tarefas.

Tabela 2.4.1 Caracterização de Alice e Maria

	Nota de caracterização	Classificação máxima	Classificação mínima	Nível de extroversão	Média fichas	Média testes
Alice	13	18	7	1	17	9
Maria	15	19	9	2	18	11

Este par não resolveu as alíneas pela ordem que foram dadas e dividiram a resolução da tarefa pelas duas. Na primeira entrevista Alice referiu que “Em todas as perguntas nós comentávamos primeiro e depois de comentar víamos o que era melhor fazer e cada uma fazia. De maneira a aproveitar o tempo”. Apesar de divergirem dos outros pares nesse aspeto, as alunas consideram que trabalharam bem em conjunto e a professora investigadora é da mesma opinião.

Estas alunas responderam a dezoito das vinte e duas alíneas colocadas, sendo que das quatro alíneas rejeitadas uma é de tipo 1 (permite uma demonstração através da exibição de um exemplo) e três de tipo 2. No entanto, indicam o valor de verdade correto de todas as afirmações de tipo 2 a que apresentam uma resposta e erram o valor de verdade de quatro afirmações do tipo 1, conforme indicado na Tabela 2.4.2.

Tabela 2.4.2 Análise das alíneas respondidas pelo Par 2 em termos dos tipos 1 e 2

Tipo de alínea	Valor de verdade indicado pelo Par 5	Número de ocorrências
Tipo 1	Correto	10*
	Incorreto	3
	Não respondido	1
Tipo 2	Correto	5
	Incorreto	0
	Não respondido	3

*na alínea 1.1 indicam valor de verdade falso (errado) mas demonstram que a afirmação é verdadeira (v.v. correto), por isso foi considerado como correto

Apesar de não existir um número suficiente de dados para tirar uma conclusão forte, a análise da Tabela 2.4.3 sugere que as alunas têm mais dificuldade a analisar as afirmações universais.

Tabela 2.4.3 Análise das alíneas respondidas pelo Par 2

Tipo de alínea	Universal ou existencial	Valor de verdade	Valor de verdade indicado pelo Par	Número de ocorrências
Tipo 1	universal	F	Correto	5
			Incorreto	2
			Não respondido	1
	existencial	V	Correto	5*
			Incorreto	1
			Não respondido	0
Tipo 2	universal	V	Correto	4
			Incorreto	0
			Não respondido	2
	existencial	F	Correto	1
			Incorreto	0
			Não respondido	1

*na alínea 1.1 indicam valor de verdade falso (errado) mas demonstram que a afirmação é verdadeira (v.v. correto), por isso foi considerado como correto

Na primeira tarefa as alunas indicam o valor de verdade correto de oito alíneas e nas restantes três indicam o valor de verdade errado. Na segunda tarefa não apresentam resposta a quatro alíneas e indicam o valor de verdade errado apenas numa das alíneas.

As alunas referiram na segunda entrevista que não se recordavam da matéria e que não tinham estudado matemática nas férias da Páscoa e portanto tinham tido algumas dificuldades em realizar a tarefa no tempo previsto.

I Acharam esta tarefa mais difícil que a primeira?

A Eu acho que... esta não fizemos toda e como nós tínhamos acabado de vir das férias... É assim eu durante as férias não estudei matemática. [risos]

M Pois eu também não. Eu já não me lembrava da matéria, se calhar foi por isso que se tornou mais difícil.

A Sim, se calhar tornou mais difícil. (...) Esse fator se calhar tornou mais difícil mas eu acho que uma coisa boa desta tarefa foi que nós já tínhamos recebido *feedback* da anterior portanto já sabíamos mais ou menos o que era melhor fazer e o que era melhor não fazer. Esse fator foi bom, mas por causa do outro demorámos mais tempo.

(entrevista 2)

Quando questionadas sobre as afirmações a que não responderam referem que não tiveram tempo e portanto escolheram as que, à primeira vista, lhes pareceram mais fáceis.

M Não tivemos tempo, nós começámos por outras.

A Nós começámos pelas que vá... sabíamos só de olhar, tínhamos maíós ou menos a noção. Como a Alice disse, nós tivemos de pensar bastante em cada uma [das alíneas]. Mas escolhemos as que achámos que seriam mais simples.

(entrevista 2)

4.1 Afirmações do tipo 1

4.1.1 Afirmações universais falsas

Das oito afirmações universais as alunas não responderam à alínea 2.4. Nas alíneas 1.6, 2.6 e 2.10 as alunas apresentam exemplos adequados para o que pretendem demonstrar. Nas alíneas 1.1 e 1.8 apresentam exemplos incorretos. Nas alíneas 1.1 e 1.11 enganaram-se no valor de verdade da afirmação e apresentam um exemplo para demonstrar algo que não admite uma demonstração através da exibição de um exemplo.

A alínea 1.6 (Se uma sucessão é convergente então é monótona) as alunas apresentam um contraexemplo, uma sucessão convergente que não é monótona. A sucessão escolhida, representada na Figura 2.4.1, está definida por ramos mas tem alguns problemas de notação, visto que o que as alunas pretendiam escrever era:

$$u_n = \begin{cases} \frac{4}{n} + 2 & \text{se } n < 10 \\ -\frac{4}{n} + 2 & \text{se } n \geq 10 \end{cases}.$$

Estas alunas utilizaram várias vezes sucessões em que o termo geral continha $\frac{2}{n}$ ou $\frac{n}{2}$ por estas sucessões terem com propriedades por elas conhecidas (*familiares*) e por serem *simples*. Nesta alínea como queriam criar uma sucessão não monótona decidiram escrever o termo geral por ramos.

Sucessão convergente

$$u_n = \begin{cases} \frac{4}{n} + 2 & n < 10 \\ -\frac{4}{n} + 2 & n \geq 10 \end{cases}, n \in \mathbb{N}$$

u_n não é monótona logo nem todas as sucessões convergentes são monótonas

Figura 2.4.1 Resolução da alínea 1.6 pelo Par 2

Nas alíneas 2.6 (Um extremo relativo de uma função é sempre um extremo absoluto) e 2.10 (Se uma função é crescente em sentido lato então não admite um máximo absoluto) as alunas utilizaram exemplos genéricos, apresentam o gráfico de uma função mas não identificam a expressão geral correspondente.

Na alínea 2.6 o exemplo usado, além de ser um exemplo *genérico*, é um exemplo *aleatório*, uma função qualquer escolhida aleatoriamente e que não representa nenhuma função ou família de funções particular.

I O que é que fizeram na alínea 6?

M Então na 6 para percebermos melhor... Quando nós falamos tínhamos logo a certeza de que a afirmação era falsa mas para termos a certeza desenhámos e concluímos que nem sempre isso acontece... que os extremos relativos não podem... não podem quer dizer... podem não ser absolutos. Acho que esta aqui até foi a mais fácil.

A A porque com o gráfico demonstra logo.

I Neste gráfico basearam-se em alguma função?

A Não, foi...

M Ao acaso.

A Sim.

(entrevista 2)

As alunas começam por apresentar uma definição não formal de extremo absoluto e extremo relativo e apoiam-se no gráfico de uma função para *suportar a sua conjectura e transmitir um argumento geral* (ver Figura 2.4.2).

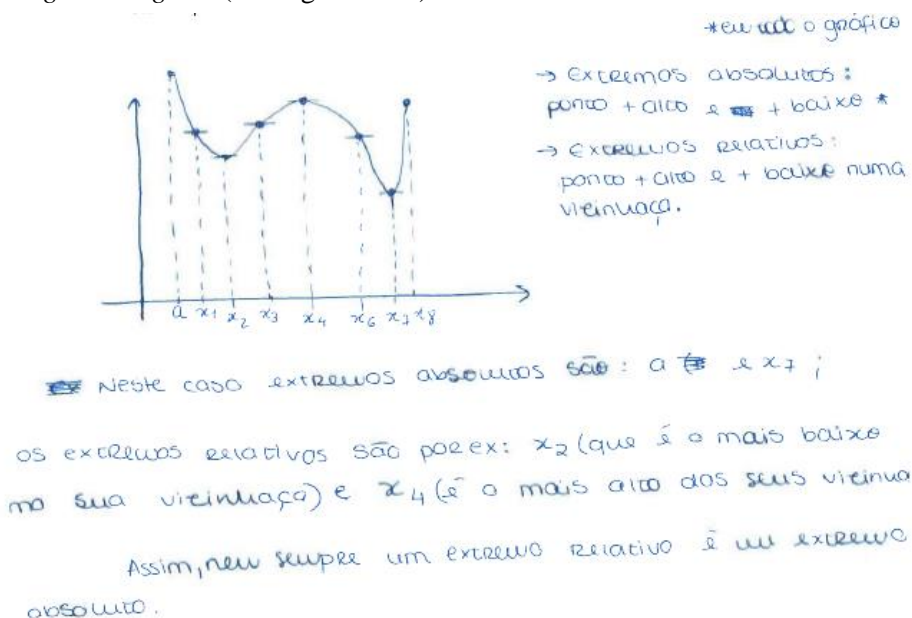


Figura 2.4.2 Resolução da alínea 2.6 pelo Par 2

Na alínea 2.10 (Se uma função é crescente em sentido lato então não admite um máximo absoluto), o exemplo apresentado é escolhido por representar o aspeto típico de uma sucessão crescente em sentido lato e permite demonstrar o pretendido. Na resolução da tarefa, as alunas apresentaram apenas o gráfico da função e durante a entrevista completaram a justificação (ver Figura 2.4.3).

- I Como é que se lembraram deste gráfico?
- A Então porque foi... porque nós mostrámos. Eu sabia que os gráficos em sentido [crescentes em sentido lado] eram assim pronto, podia continuar e que neste caso, em que fica constante, o máximo absoluto é este. Como também já tínhamos feito gráficos antes sobre máximo absoluto, relativo e assim, então depois associámos a isso.

(entrevista 2)

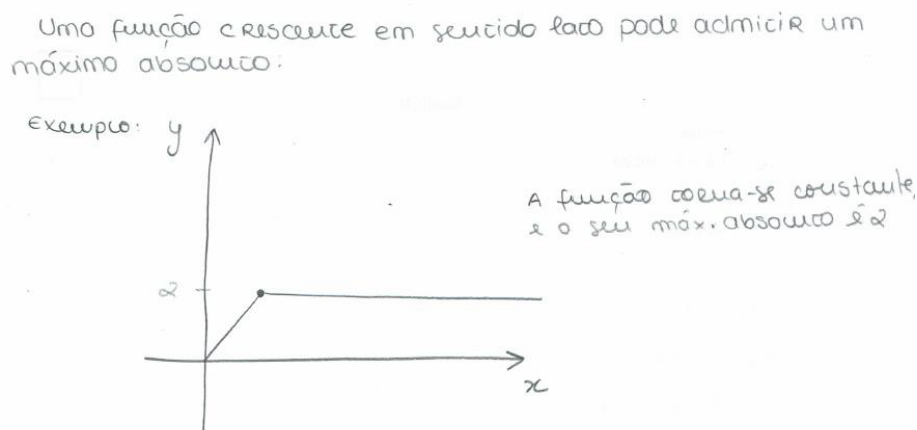


Figura 2.4.3 Resolução da alínea 2.10 pelo Par 2

Na alínea 1.4 (Uma progressão geométrica é sempre monótona) as alunas apresentam a sucessão (ver Figura 2.4.4), a que chamam de “sucessão de ramos geométrica”. Esta sucessão não é monótona mas não é uma progressão geométrica, por isso o exemplo utilizado não permite concluir nada sobre o valor de verdade da afirmação dada.

* Contra-exemplo da afirmação:

- Usando uma sucessão de ramos geométrica;

$$u_n = \begin{cases} u_{n+1} = -2 u_n, & n < 10 \\ u_{n+1} = 2 u_n & n > 10 \end{cases}, n \in \mathbb{N}$$

Figura 2.4.4 Excerto da resolução da alínea 1.4 pelo Par 2

Também na alínea 1.8 (Se uma sucessão é limitada então é convergente), as alunas apresentaram um contraexemplo inadequado. Nesta alínea o exemplo escolhido foi a sucessão de termo geral $3n + 2$, um exemplo *familiar*, mas que não permite demonstrar o pretendido, pois não se trata de uma sucessão limitada.

Justificação: Uma sucessão limitada pode ser divergente.

$$U_n = 3n + 2$$

$$\begin{aligned} n > 0 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 3n > 0 & \Rightarrow \\ 3n + 2 > 2 & \rightarrow \text{É limitada mas é} \\ & \text{divergente} \end{aligned}$$

$$\lim 3n + 2 = \lim 3n = +\infty \rightarrow \text{É divergente.}$$

Então uma sucessão limitada não implica que seja convergente, ela pode também ser divergente.

Figura 2.4.5 Resolução da alínea 1.8 pelo Par 2

Na entrevista as alunas referiram que pensaram nas alíneas 1.7 (Se uma sucessão é convergente então é limitada) e 1.8 (Se uma sucessão é limitada então é convergente) ao mesmo tempo por acharem que uma seria falsa e outra verdadeira. Esta ideia deveu-se ao facto de as afirmações serem recíprocas e a tendência para as trabalhar em conjunto foi verificada, também, em outros pares participantes no estudo. Quanto à afirmação 1.8, o objetivo das aulas era *refutar* a afirmação apresentando uma sucessão limitada e não convergente. No entanto, o exemplo apresentado foi a sucessão de termo geral $v_n = 3n + 2$, que não é uma sucessão limitada, e por isso não permite demonstrar o pretendido.

- A Nós tratámos estas duas, a 7 e a 8, em conjunto. Nós sabíamos que, pelo menos à primeira vista, vimos que a 7 era verdadeira e a 8 era falsa.
- M Sim.
- A Porque nem todas as limitadas iriam ser convergentes.
- M Exato. Então nós mostramos uma divergente que era, como que é que era? [Lê o enunciado] Mostrámos uma que era limitada mas não era convergente, era divergente, esta aqui $3n + 2$, que tem limite mais infinito, ou seja não é convergente mas era limitada, não era?
- I Então era um contraexemplo, certo?
- M Sim.

Durante a entrevista a investigadora incentivou as alunas a encontrarem uma sucessão nas condições pedidas, estas consideraram os exemplos das sucessões de termo geral $2/n$ e $n/2$, sem sucesso, e não foram capazes de chegar a um exemplo adequado.

Nas alíneas 1.1 (Uma sucessão crescente e minorada é limitada) e 1.11 (O produto de uma sucessão limitada com uma sucessão convergente é uma sucessão convergente) as alunas indicam o valor de verdade errado, considerando portanto as afirmações como “universais verdadeiras” Ao enganar-se no valor de verdade as alunas obtiveram uma conjectura que não permite uma demonstração através da exibição de um exemplo, no entanto baseiam as suas justificações na exibição de um exemplo.

Na alínea 1.1, as alunas apresentam um exemplo *simples* da sucessão de termo geral $n/2$ como sendo uma sucessão minorada e limitada. Como é possível comprovar pela resolução das

alunas (ver Figura 2.4.6), estas cometeram alguns erros na sua tentativa de demonstrar que esta sucessão é limitada.

Justificação:
 Por exemplo, usando a sucessão $m_n = \frac{n}{2}$ que é crescente.
 Conjunto dos minorantes: $]-\infty, \frac{1}{2}]$ sendo que 0 minorante e $\frac{1}{2}$.
 $0 < \frac{1}{n} \leq 1 \Leftrightarrow 0 < \frac{2}{n} \leq 2 \Leftrightarrow 0 < \frac{n}{2} \leq n$
 $\Leftrightarrow 0 < \frac{2}{n} \leq 2 \Leftrightarrow 0 < \frac{n}{2} \leq n \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{n}{2} \leq n$ c.q.d.
 R: logo é limitada

Figura 2.4.6 Resolução da alínea 1.1 pelo Par 2

Na entrevista as alunas mencionaram que não tinham percebido que a afirmação era universal e pensavam que bastava apresentar um exemplo. Esta questão pode ter sido originada pela forma como a afirmação está escrita, podendo ter-se usado “Uma sucessão crescente e minorada é sempre limitada” ou “Todas as sucessões crescentes e minoradas são limitadas”.

- I Como é que se lembraram desta sucessão?
 A Então nós decidimos pegar numa sucessão que era minorada e fomos comprovar que tinha limite. Foi a partir de aí, se houvesse pelo menos uma, que era esta, se fosse correta a afirmação estava verdadeira.
 (...)

 A Nós queríamos... tentámos comprovar que era minorada e limitada então pegámos numa sucessão simples para mostrar isso
 (...)

 M Porque aí, quando diz “Uma sucessão crescente e minorada é limitada” é para todas? Pois nós não fizemos isso...
 A Pois não...
 I Então estavam só a dar um exemplo que ilustrava?
 A Sim.

(entrevista 1)

Na alínea 1.11 (O produto de uma sucessão limitada com uma sucessão convergente é uma sucessão convergente) as alunas adotam o mesmo procedimento da alínea 1.1, baseando a sua demonstração na apresentação de um exemplo que verificava a propriedade.

- I Como é que se lembraram destas sucessões?
 M Exatamente a mesma situação como antes. [como na 1.10, onde o exemplo foi a primeira ideia]
 A Tivemos de fazer primeiro para saber se era verdadeira ou falsa.
 M Mas esta também era... também tínhamos de demonstrar para todas para ser verdadeira.

(entrevista 1)

Nesta alínea, as alunas indicam que a afirmação é verdadeira e apresentam o primeiro par de sucessões de que se lembraram nas condições pedidas (ver Figura 2.4.7) e determinaram o

limite do seu produto. As duas sucessões são muito parecidas e foram escolhidas por serem a *primeira ideia* e terem um termo geral *simples*. No entanto, como se trata de uma afirmação universal, para demonstrar que a afirmação é verdadeira teriam de justificar que a propriedade é verificada para todos os pares de sucessões nas condições pedidas e não apenas um par.

$$\begin{aligned}
 (u_n) \text{ é limitada} &\rightarrow u_n = \frac{2}{n} + 3 \\
 (v_n) \text{ é convergente} &\rightarrow v_n = \frac{4}{n} + 2 \\
 u_n \times v_n &= \\
 &= \left(\frac{2}{n} + 3 \right) \times \left(\frac{4}{n} + 2 \right) = \left(\frac{2}{n} + \frac{3n}{n} \right) \times \left(\frac{4}{n} + \frac{2n}{n} \right) =
 \end{aligned}$$

Figura 2.4.7 Excerto da resolução da alínea 1.11 pelo Par 2

4.1.2 Afirmações existenciais verdadeiras

Das seis afirmações deste tipo as alunas identificaram corretamente o valor de verdade de todas, menos da afirmação da alínea 2.2 (Uma função pode ser simultaneamente par e ímpar).

As alunas pensaram nas alíneas 2.2 (Uma função pode ser simultaneamente par e ímpar) e 2.3 (Uma função pode não ser par nem ser ímpar) ao mesmo tempo, começaram por fazer a alínea 2.3 e depois utilizam as mesmas funções como exemplo para a alínea 2.2.

- A É assim nós primeiros dissemos o que é que era uma função par e uma função ímpar, que tem a ver com as simetrias do gráfico.
- M Nós primeiro fizemos a alínea 3.
- A Que ajudou bastante.
- M Como depois já tínhamos as conclusões de cada um, como é que era a par e como é que era a ímpar depois lembrámos-mos que aqui era só mostrar e explicar que não dava.
- A Um gráfico não pode ter dois eixos de simetria então como já tínhamos feito a 3 tornou-se mais fácil fazer a 2.

(entrevista 2)

Na alínea 2.3, começam por apresentar um exemplo de uma função par (x^2) e uma função ímpar ($1/x$) e referem a simetria característica de cada paridade. Por fim desenharam um gráfico de uma função sem expressão geral associada (ver Figura 2.4.8). Quando questionadas sobre a escolha destas funções, Alice mencionou que “foram as primeiras de que nos lembrámos porque eram *simples* e porque nos recordámos delas”, tendo sido portanto usado os critérios *típicos* e *primeira ideia*. Em termos de estratégia, estes exemplos tinham como objetivo *explorar propriedades e explorar a representação*.

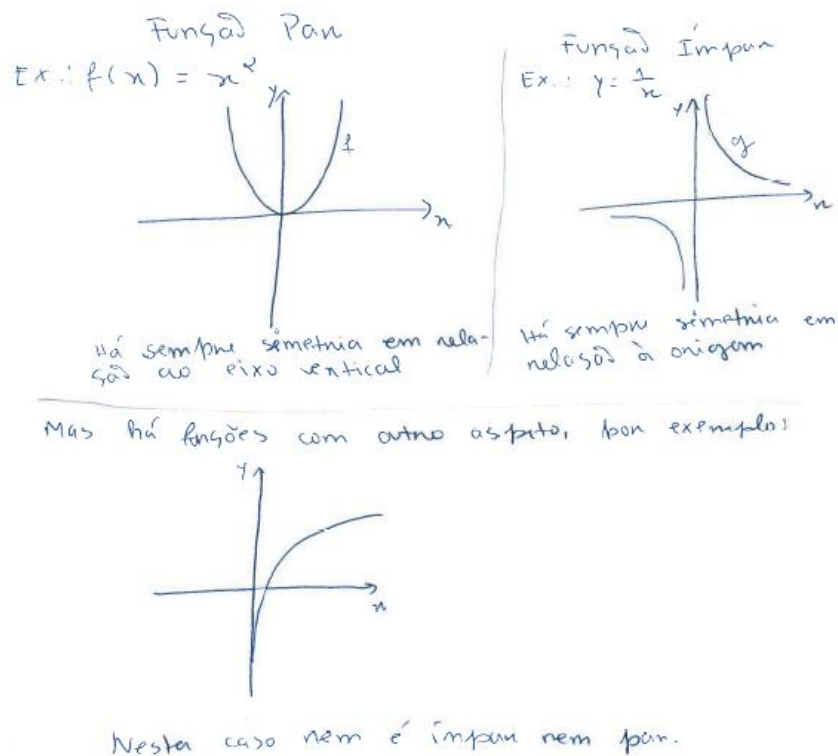


Figura 2.4.8 Resolução da alínea 2.3 pelo Par 2

Na alínea 2.2 as alunas indicam que a afirmação é falsa (que é o valor de verdade errado) e utilizam os primeiros dois exemplos utilizados na alínea 2.3.. As alunas argumentam que é impossível uma função ser refletida simultaneamente pelo eixo O_y e pela origem, e que por isso a afirmação é falsa. Este argumento falha pois existe uma função para a qual tal é possível, a função nula (constante igual a zero). Quanto ao gráfico apresentado nesta resolução (ver Figura 2.4.9), este contém duas funções sobrepostas e Maria afirma na entrevista que este “foi baseado na alínea 3, tanto que as funções estão iguais... o aspeto delas”. Este exemplo *típico* teve como propósito *transmitir um argumento geral*.

- Como é impossível uma função ter simultaneamente 2 eixos de simetria, a afirmação é falsa.

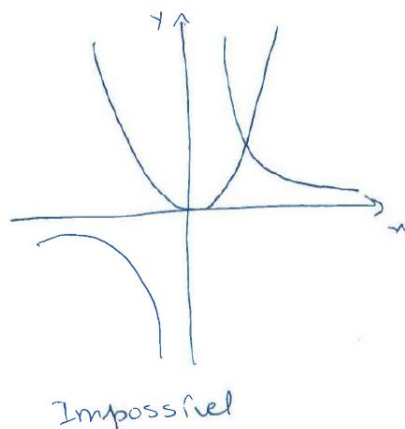


Figura 2.4.9 Excerto da resolução da alínea 2.2 pelo Par 2

Na alínea 2.1 as alunas começaram a justificação com uma revisão das definições de função inversa, imagem direta e imagem inversa. De seguida, apresentaram um exemplo de uma

função não invertível (ver Figura 2.4.10), o que permitiu *reivindicar* o seu ponto de vista. Na entrevista confessaram que utilizaram esta representação porque viram outro colega de turma colocar uma questão com esta representação no quadro.

I Nesta utilizaram um exemplo, como é que se lembraram deste exemplo assim?

A Ah esta nós demorámos bastante. Eu no início não me lembrava da matéria e tivemos que começar a escrever isto e não sabíamos se ia chegar a algum lado. Depois o Tiago veio ao quadro e deu um exemplo destes [diagrama de setas] e nós pensámos, ah este tem a ver com a primeira. Nós íamos fazer uma explicação muito mais difícil e fazendo este exemplo era muito mais fácil.

(...)

I De que forma é que o exemplo contribuiu para a demonstração?

A O exemplo tornou mais simples a demonstração. Nós fomos ao... diagrama de setas, acho que é assim que se chama, porque demonstra logo o que nós queremos e é direto.

(entrevista 2)

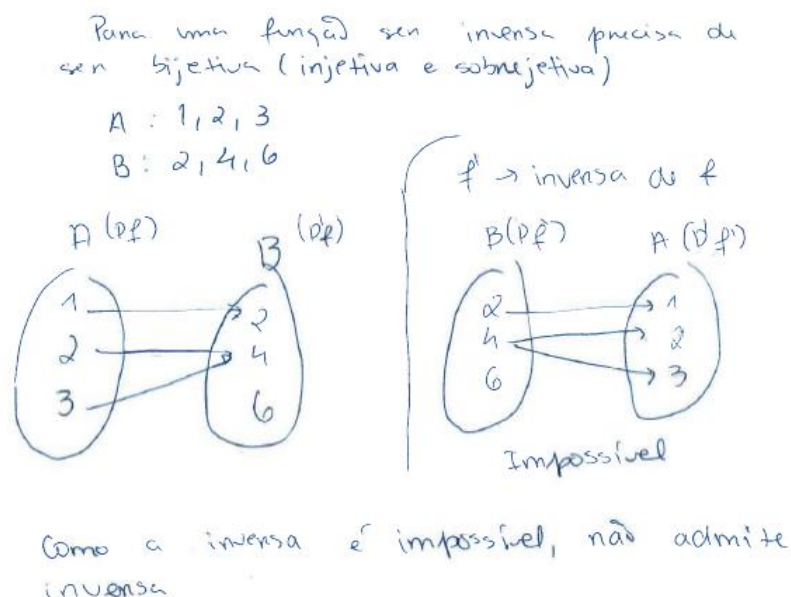


Figura 2.4.10 Excerto da resolução da alínea 2.1 pelo Par 2

Na alínea 2.9 (Algumas funções polinomiais não têm zeros) as alunas apresentam o exemplo de uma função quadrática genérica $y = ax^2 + bx + c$ com $a, b, c > 0$, acompanhado por um esboço do gráfico da função. Na entrevista, as alunas referiram que se lembraram deste exemplo da aula e que primeiro pensaram no gráfico e só depois na expressão. As alunas escolheram um caso geral para “provar que é universal”, quando na realidade bastava um exemplo concreto pois a afirmação é existencial verdadeira.

I Podem me explicar qual é que era a vossa ideia na alínea 9?

M Então nós aqui lembrámos-mos desta situação, nesta situação a função não tem zeros então todos os... fatores, vá, do polinómio são positivos. Então considerando que esta é a expressão e que a, b e c são maiores do que zero a [função] não ia ter zeros, porque aqui substituindo depois o x acho que não...

- I Porque é que fizeram um caso geral em vez de dizerem valores concretos para a, b e c ?
- M Então porque tinha de ser um caso geral para provar que é universal
- I Lembraram-se primeiro do gráfico?
- M Sim, sim. Tínhamos falado disto na aula anterior.

(entrevista 2)

Na alínea 1.5 (Nem todas as sucessões crescentes tendem para infinito) as alunas indicam que a afirmação é falsa mas justificam como sendo verdadeira. Nesta alínea utilizaram o exemplo sucessão de termo geral $\frac{2}{n} + 3$, este exemplo foi utilizado frequentemente por estas alunas ao longa da resolução da primeira tarefa sendo portanto um exemplo *familiar* e *típico* destas alunas. Este exemplo foi utilizado pelas alunas para mostrar que existe pelo menos uma sucessão crescente que não tende para infinito. No entanto esta sucessão não é crescente portanto a justificação não é válida.

Na alínea 1.3 (Algumas progressões aritméticas são limitadas) as alunas utilizaram o exemplo *típico* e que foi a *primeira ideia* da sucessão de termo geral $3 + \frac{2}{n}$. No entanto esta sucessão não é uma progressão aritmética por isso a justificação não é válida.

4.2 Afirmações do Tipo 2

4.2.1 Afirmações universais verdadeiras

Das seis afirmações universais verdadeiras as alunas identificaram corretamente o valor de verdade em todas menos nas afirmações das alíneas 2.5 (Se uma função de domínio \mathbb{R}^+ é crescente em sentido lato então a reflexão de eixo Oy da representação do gráfico dessa função é decrescente em sentido lato) e 2.11 (Uma função do tipo $f(x) = \sqrt{x - a} + b$ com $a, b \in \mathbb{R}$ e domínio $[a, +\infty[$ é sempre monótona).

Na alínea 2.8 (A função inversa de uma função afim é uma função afim) as alunas apresentam um gráfico e um diagrama de setas para representar uma função afim e a sua inversa, utilizando cinco pontos do seu domínio.

- A A 8 nós sabíamos logo que era verdadeira, então nós fomos buscar um exemplo. Uma função afim é sempre uma reta crescente ou decrescente logo a inversa também será uma reta do mesmo estilo. Então nós fomos fazer o contradomínio da função e vimos. Nós tentamos usar uma expressão geral.
- I Porque é que aqui utilizaram o diagrama de setas?
- A Para nos ajudar... eu fiz este gráfico e depois fiz isto para me ajudar a pensar e ter mais facilidade a fazer o gráfico
- M Depois fica mais simples para fazer a associação no gráfico [da função inversa].

(entrevista 2)

Este tipo de argumento não permite demonstrar o pretendido, mas durante a entrevista as alunas foram capazes de demonstrar a propriedade usando o termo geral das funções afim $mx +$

b. Quando concluíram a demonstração, Alice afirmou que este método “era muito mais fácil” do que como tinham apresentado inicialmente a justificação.

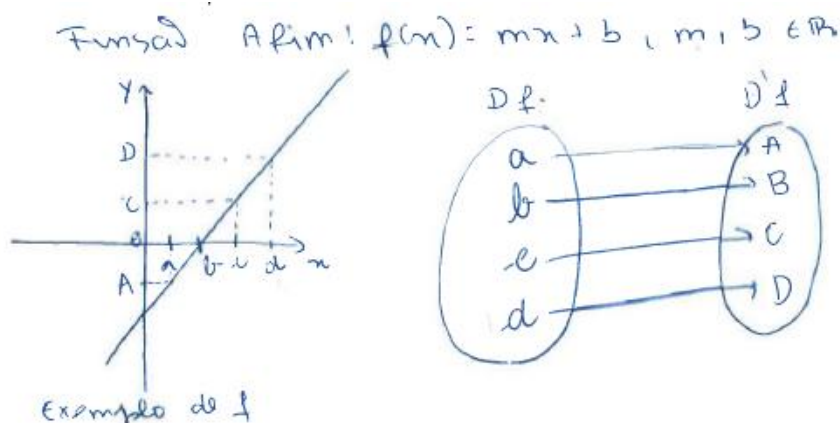


Figura 2.4.11 Excerto da resolução da alínea 2.8 pelo Par 2

Nas alíneas 1.7 (Se uma sucessão é convergente então é limitada) e 1.10 (A soma de um infinitésimo com uma sucessão infinitamente grande é infinitamente grande) as alunas apresentam o mesmo problema que nas alíneas 1.1 e 1.11, apresentando exemplos concretos para justificar uma verdade universal. O exemplo usado na alínea 1.7, a sucessão de termo geral $1/n$, é um exemplo *típico* e os exemplos usados na alínea 1.10, a sucessão de termo geral $2/n$ (infinitésimo) somada com a sucessão de termo geral $2n$ (infinitamente grande), são exemplos *típicos* e foram a *primeira ideia* das alunas.

Na alínea 1.2 (Uma progressão aritmética de razão natural é sempre monótona) as alunas apresentaram uma demonstração sem recorrer a nenhum exemplo. No entanto, enganaram-se na definição do termo geral da progressão aritmética e a demonstração está errada.

Justificação:

Progressão aritmética $U_n = u_1 + r(n-1)$

$$U_{n+1} - U_n = u_1 + r(n+1) - u_1 + r(n-1) =$$

$$= \cancel{u_1} + r(n+1) - \cancel{u_1} + r(n-1) =$$

$$= r(n+1) + r(n-1) =$$

$$= r(2n) = 2rn$$

A razão é constante, o n é sempre natural ~~logo~~ logo o produto entre ambos vai ser sempre monótona ~~positiva~~

Figura 2.4.12 Resolução da alínea 1.2 pelo Par 2

4.2.2 Afirmações existenciais falsas

Das duas afirmações existenciais falsas, as alunas indicaram corretamente o valor de verdade da afirmação da alínea 1.9 (Existe uma sucessão com dois limites diferentes) e não responderam à alínea 2.7 (Existe pelo menos uma função do tipo $f(x) = |x - a| + b$ com $a, b \in \mathbb{R}$ e domínio \mathbb{R} que é monótona). Quando questionadas na entrevista sobre a alínea 2.7 as alunas não se conseguiam recordar do aspeto do gráfico da função $f(x) = |x - a| + b$.

Na alínea 1.9 as alunas apresentaram uma justificação, sem recorrer ao uso de exemplos. Esta justificação não está correta pois as alunas consideram que no caso de uma sucessão definida por ramos o limite será o majorante ou o minorante, o que pode acontecer num caso específico mas não acontece por regra.

Uma sucessão tem um único limite
Apesar das sucessões de ramos aparentemente
ter 2 limites distintos, ao calcular os
2 limites, para saber o limite geral, vamos
buscar o majorante maior e o minorante
menor.

Figura 2.4.13 Resolução da alínea 1.9 pelo Par 2

4.3 O uso de representações

Na resolução da primeira tarefa Alice e Maria apenas utilizaram a expressão geral e a expressão geral por ramos da sucessão, sendo a representação por ramos privilegiada quando queriam representar uma sucessão não monótona. As alunas mencionaram que não costumam utilizar gráficos nas aulas de Matemática e, por isso, nem se quer se lembraram de o fazer na resolução da tarefa.

- I Não se lembraram de usar por exemplo gráficos?
A Nós por acaso não nos lembrámos. Nós quando acabámos e olhámos para a resolução do Nuno e da Sofia...
M Reparámos que eles tinham gráficos mas...
A Nem nos ocorreu.
M Nem falámos nisso.
A Nós não costumamos muito fazer isso então não nos lembrámos.
I Não costumam fazer nas aulas?
M Não.
A Não costumamos fazer gráficos.

(entrevista 1)

Quando acabaram a primeira tarefa e repararam no trabalho do Par 1 (Nuno e Sofia) aperceberam-se que estes tinham utilizado gráficos. Talvez este tenha sido um incentivo porque na segunda tarefa as alunas focaram-se muito mais nas várias representações de função, utilizaram a expressão algébrica, diagrama de setas e gráfico cartesiano, sendo que a mais frequente foi o gráfico cartesiano, que foi utilizado em todas as alíneas a que responderam menos uma.

- I Utilizaram a expressão algébrica, diagrama de setas e gráfico cartesiano, qual é que acharam mais útil?
A Eu acho que dependia de cada exercício, por exemplo às vezes o gráfico davam...
M Nós utilizamos mais gráficos, não foi? Mas dentro dos exercícios os gráficos ajudaram bastante.

- A Acho que dependia também da pergunta. Houve umas em que usar o diagrama de setas ajudava mais.
- M Mas acho que no geral foi o gráfico das funções que nos facilitou mais.

(entrevista 2)

4.4 Conclusão da análise do Par 2

Os critérios mais usados por este par foi o *típico*, *familiar primeira ideia*, na primeira tarefa quase todas as expressões gerais de sucessão incluíam $n/2$ ou $2/n$. Estas alunas por vezes investiam demasiado num objeto matemático mesmo não sendo a melhor escolha para todas as perguntas. Em termos dos propósitos foi possível observar uma variedade deles, tanto para *testar a veracidade* (como na alínea 1.6), *refutar* (como na alínea 1.8) ou *reivindicar* (como na alínea 2.1).

No caso destas alunas, a criação de exemplos por si não foi suficiente para decidir o sucesso na demonstração, na primeira tarefa as alunas apresentaram dificuldades em alguns conceitos como nas definições de progressão aritmética (alínea 1.2, ver Figura 2.4.12), progressão geométrica (alínea 1.4, ver Figura 2.4.4), monotonia da sucessão (alínea 1.5) e limite da sucessão (alínea 1.9, ver Figura 2.4.13). Na segunda tarefa começam a utilizar variadas representações de função e parece existir uma relação entre o uso de exemplos recorrendo a variadas representações e o sucesso na tarefa de demonstração.

Na primeira tarefa as alunas revelaram um método de processamento matemático mais analítico, recorrendo apenas ao processamento verbal-lógico. Enquanto que na segunda tarefa o *método de processamento* foi *geométrico*, as alunas apresentam algumas representações verbal-lógicas. mas o pensamento foi centrado nas representações visual-pictóricas como gráficos e diagramas de setas.

5 Apresentação do estudo de caso: Par 3 (Guilherme e Miguel)

Guilherme e Miguel são ambos bons alunos e muito pouco faladores. Durante as aulas o Guilherme revelou-se um pouco mais participativo do que o Miguel mas esta diferença não se justificou numa subida de nível de extroversão, sendo que ambos foram caracterizados com um nível de extroversão de 2. Na Tabela 2.5.1 encontra-se a caracterização dos alunos. Durante a resolução das tarefas os alunos resolveram as alíneas em conjunto.

Tabela 2.5.1 Caracterização de Guilherme e Miguel

	Classificação de caracterização	Classificação máxima	Classificação mínima	Nível de extroversão	Média fichas	Média testes
Guilherme	16	19	14	2	16	16
Miguel	18	20	15	2	17	17

Este par respondeu a todas as alíneas das tarefas (ver Tabela 2.5.2) e apenas errou duas alíneas, a 1.3 e a 1.4. As duas alíneas a que os alunos responderam erradamente são ambas da tarefa 1 e do tipo 2, isto é, não admitem uma demonstração através da exibição de um exemplo. A alínea 1.3 é do tipo existencial e a 1.4 é do tipo universal.

Tabela 2.5.2 Análise das alíneas respondidas pelo Par 3

Tipo de alínea	Universal ou existencial	Valor de verdade	Valor de verdade indicado pelo Par	Número de ocorrências
Tipo 1	universal	F	Correto	7
			Incorreto	1
			Não respondido	0
	existencial	V	Correto	5
			Incorreto	1
			Não respondido	0
Tipo 2	universal	V	Correto	6
			Incorreto	0
			Não respondido	0
	existencial	F	Correto	2
			Incorreto	0
			Não respondido	0

Guilherme e Miguel fizeram as alíneas por ordem e começaram por não usar exemplos nas primeiras três alíneas mas depois chegaram à conclusão de que esta não era a melhor escolha, como indicado no seguinte excerto da primeira entrevista:

- I Começaram por não utilizar muitos exemplos e ao longo da tarefa foram utilizando mais, foi por alguma razão?
- G Achámos mais simples de provar assim do que por palavras.
- I Acharam que os exemplos facilitavam?
- G Sim.
- M Quando se fala na monotonia... a monotonia é uma coisa que podemos calcular por isso achamos que era mias fácil usar exemplos.
- I Como é que decidiam quando é que iam usar exemplos e quando não os iam utilizar?
- G Acho que era mais por simplificar a resposta, para não ficar uma resposta muito extensa, utilizamos para ficar uma resposta mais compacta exemplos da matéria que já sabíamos. Porque, por exemplo na 4 a monotonia eu não sabia justificar aquilo por palavras... porque é que é aquilo mas com os cálculos conseguimos descobrir.
- M Também os cálculos da sucessão é uma prova matemática e também nos ajuda a compreender melhor como é que vamos responder.

(entrevista 1)

Na primeira entrevista os alunos referem que utilizaram os exemplos para “simplificar a respostas” mas na segunda entrevista apresentam uma ideia mais concreta (mas incompleta) sobre quando se pode usar ou não um exemplo para demonstrar. Os alunos referem que se pode usar exemplos para demonstrar uma afirmação do tipo universal falsa mas esquecem-se do caso da afirmação existencial verdadeira.

- I Quando é que posso usar apenas um exemplo para fazer a demonstração?
- G Onde é que usámos só um exemplo? [revêm a tarefa]
- M Só um exemplo... só por exemplo uma expressão?
- I Sim.
- M Acho que quando é... Quando nos dizem que uma coisa é verdadeira para todos, basta arranjar um que não seja verdadeiro para bastar esse exemplo para mostrar que é falsa.
- I Só nessa situação?
- M Hum... Que me ocorra agora sim. Guilherme, tens mais alguma ideia?
- G Não.

(entrevista 2)

5.1 Afirmações do Tipo 1

Das catorze afirmações deste tipo os alunos responderam corretamente a todas menos às alíneas 1.3 (Algumas progressões aritméticas são limitadas) e 1.4 (Uma progressão geométrica é sempre monótona).

5.1.1 Afirmações universais falsas

Durante resolução da alínea 1.1 (Uma sucessão crescente e minorada é limitada) os alunos pediram ajuda porque a afirmação, nas palavras do Guilherme, “por vezes era falsa e outras era verdadeira”. A partir dessa discussão os alunos concluíram que a afirmação era falsa. Esta questão surge também com o Par 2.

Nesta alínea os alunos apresentaram a justificação “Como a sucessão é crescente mas não sabemos se é majorada, não podemos afirmar que esta é limitada”, que podia ser substituída pelo exemplo de uma sucessão. Na entrevista seguinte foram capazes de encontrar um exemplo que permitisse demonstrar o pretendido.

- I Na justificação podiam ter usado um exemplo para justificar, certo?
M Sim, mas acho que era mais fácil por palavras, era mais simples.
I Mas conseguem arranjar um exemplo nestas condições?
G Não consigo pensar assim em nenhum exemplo... Porque ela tinha de começar assim pelo...
M Pode ser a sucessão $u_n = n$, o minorante é 1.
G Ah, certo.

(entrevista 2)

Nas alíneas 1.6 (Se uma sucessão é convergente então é monótona) e 1.8 (Se uma sucessão é limitada então é convergente) Guilherme e Miguel usam um contraexemplo típico, $(-1)^n/n$ e $(-1)^n/2$, respetivamente.

Justificação: *consideramos por exemplo a sucessão $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$, é convergente para 0, mas não é monótona porque*

{	<i>se n é par $u_n > 0$</i>
	<i>se n é ímpar $u_n < 0$</i>

$\frac{(-1)^n}{n}$

Figura 2.5.1 Resolução da alínea 1.6 pelo Par 3

A alínea 1.6 (ver Figura 2.5.1) foi a primeira em que os alunos utilizam uma sucessão relacionada com a $(-1)^n$, muito usada pelos alunos na escolha de um contraexemplo. Guilherme refere que se lembrou deste exemplo das aulas de Matemática:

- I Na afirmação 6 utilizaram o exemplo $(-1)^n/n$. Porque é que se lembraram desta sucessão?
G Eu lembrei-me das aulas porque a professora estava sempre a reclamar comigo [que nem todas as sucessões convergentes são monótonas].
I E qual é que foi o papel deste exemplo na demonstração?
G Ah, eu acho que o exemplo foi meio para demonstrar que existem sucessões que não são convergentes... não são limitadas aliás mas

que não são monótonas, que é este caso... um caso especial em que tem dois ramos e ambos tendem para zero.

Na alínea 1.8 (Se uma sucessão é limitada então é convergente), o exemplo apresentado, além de ser um exemplo *típico*, é também a *primeira ideia* dos alunos, na primeira entrevista o Guilherme referiu “acho que nos lembramos logo deste exemplo, pelas anteriores”.

Justificação: A afirmação falsa diz que não é condição necessária ser limitada para a sequência ser convergente.

Damos o exemplo de $\frac{(-1)^n}{2}$, uma sequência definida por ramos, em que ambos têm um limite constante, divergendo.

$$\frac{(-1)^n}{2} \begin{cases} -\frac{1}{2} & n \text{ ímpar} \\ \frac{1}{2} & n \text{ par} \end{cases}$$

Figura 2.5.2 Resolução da alínea 1.8 pelo Par 3

Na alínea 1.11 (O produto de uma sucessão limitada com uma sucessão convergente é uma sucessão convergente), os alunos tiveram de testar vários pares até conseguirem encontrar um par que lhes permitisse demonstrar que a afirmação era falsa, revelando uma estratégia de *variação sistemática*. Este foi o único par que conseguiu encontrar um par adequado, no entanto cometeu alguns erros de contas no cálculo dos limites.

Guilherme e Miguel testaram 3 pares de sucessões, todos contendo a sucessão $(-1)^n/2$, começaram com $\frac{1}{n}$, depois $(\frac{2}{5})^n$, até chegarem à sucessão $4 - \frac{1}{n}$. Apesar de se terem enganado nas contas (ver Figura 2.5.3) o produto da sucessão limitada $(-1)^n/2$ e a sucessão convergente $4 - \frac{1}{n}$ resulta numa sucessão que não é convergente.

$$\begin{aligned} \left(4 - \frac{1}{n}\right) \frac{(-1)^n}{2} &= 4 \frac{(-1)^n}{2} - \frac{(-1)^n}{2n} = 2(-1)^n - \frac{(-1)^n}{2n} = \\ &= \frac{4n(-1)^n - (-1)^n}{2n} = \end{aligned} \begin{cases} \text{Se } n \text{ é par } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty \\ \text{Se } n \text{ é ímpar } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = -\infty \end{cases}$$

Figura 2.5.3 Excerto da resolução da alínea 1.11 pelo Par 3

G Esta foi a que achámos mais complicado da tarefa toda mas conseguimos achar um exemplo que comprova que é falso.

- I Como é que se lembraram desses exemplos? Foi de forma aleatória ou ...
- G Primeiro nós tínhamos pensado assim e tinha nos levado a um resultado que era convergente também mas o que nós queríamos era provar que não era convergente, para vermos se era falso. Então lembrámo-nos de uma sucessão que tem o 4 menos $1/n$ e isto levou-nos a descobrir uma que não era convergente, que era divergente.
- (...)
- I E têm alguma ideia porque é que neste caso deu convergente e nos outros não deu?
- (...)
- M Acho que foi porque o número que está aqui é maior do que o número que está no denominador [$4 > 2$]
- G Sim, exato.

(entrevista 1)

Nas alíneas 2.4, 2.6 e 2.10 os alunos utilizaram exemplos gerais e *aleatórios*, apresentam o gráfico de uma sucessão sem indicar a expressão geral respetiva.

Na afirmação 1.4 (Se uma função de domínio \mathbb{R}^+ é crescente em sentido lato então a reflexão de eixo Ox da representação do gráfico dessa função é também crescente em sentido lato) e na afirmação 1.5 (Se uma função de domínio \mathbb{R}^+ é crescente em sentido lato então a reflexão de eixo Oy da representação do gráfico dessa função é decrescente em sentido lato) os alunos apresentam uma justificação semelhante apesar da afirmação 1.4 ser do tipo 1 (admite uma demonstração através da exibição de um exemplo) e a afirmação 1.5 ser do tipo 2.

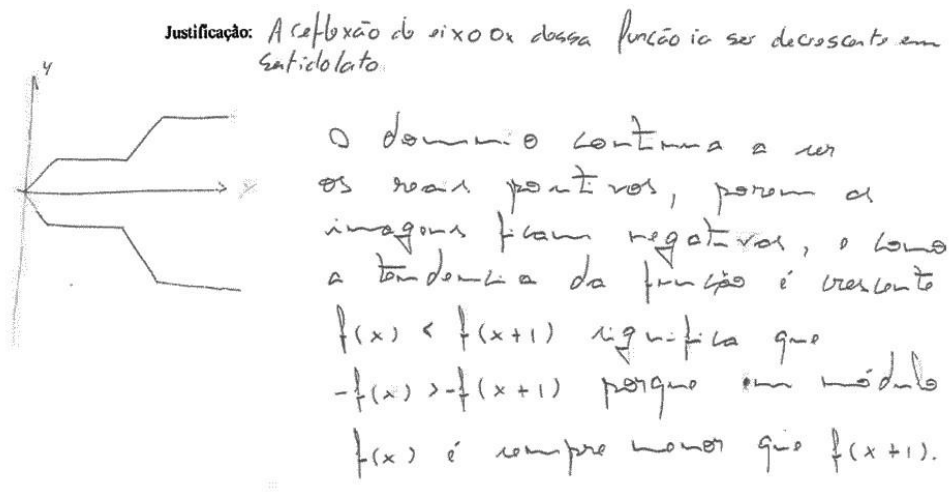


Figura 2.5.4 Resolução da alínea 2.4 pelo Par 3

A afirmação 1.4 é falsa e na verdade é falha para todas as funções, pois a reflexão de eixo Ox da representação gráfica de uma função crescente em sentido lato é sempre decrescente em sentido lato. Com este exemplo *aleatório, simples e típico* os alunos tentaram *transmitir um argumento geral*, como se pode perceber com esta transcrição da segunda entrevista.

- I Que funções são estas?

- M Acho que pode ser uma qualquer, desde que siga esta padrão, que seja crescente em sentido lato, que tenha estas partes em que é constante.
- G Sim, o padrão geral que vai representar. Mas também não nos lembrámos se tivesse por exemplo uma curva mas eu acho que não influenciaria. Eu acho que ser reta é mais simples, mais fácil de representar e também de visualizar.

(entrevista 2)

Na alínea 2.6 (Um extremo relativo de uma função é sempre um extremo absoluto) os alunos optam pela estratégia de *explorar as propriedades*, recorrendo a dois exemplos bastantes distintos, o primeiro trata-se de uma função quadrática e o segundo de uma função definida por ramos com um efeito tipo mola e que tende para infinito. Com a primeira os alunos pretendem ilustrar um caso em que o extremo relativo é um extremo absoluto e com a segunda um caso em que não só o extremo relativo não é um extremo absoluto como a função não tem nenhum máximo absoluto. O primeiro exemplo usado trata-se de um exemplo *familiar e típico*, enquanto que o segundo se trata de um exemplo escolhido de modo *aleatório*.

- G Como o nome indica, relativo quer dizer que é o maior da vizinhança, não diz que é o maior da função toda
- I Nesta afirmação utilizaram duas funções, como é que se lembraram delas ou que funções são estas?
- G Por exemplo a primeira é a função quadrática e nós sabemos que ou tem sempre um mínimo absoluto ou um máximo absoluto. Neste casos eu representei a invertida, com o x negativo, ou seja ela iria ter um máximo absoluto que também era o relativo porque é o único que ela ia ter. Neste caso eu pensei numa função que vai crescendo assim aos picos, em que vai ter bastantes máximos relativos mas pode ter eventualmente um que seja maior que os outros todos.
- I Se quisessem encontrar um expressão para a segunda conseguiam?
- G Se calhar... Por exemplo aquela entre parentes $(-1)^n/n$ talvez.

(entrevista 2)

O segundo exemplo permite demonstrar o pretendido mas a justificação tem algumas falhas pois os alunos esqueceram-se do caso do mínimo. Como é possível ler na Figura 2.5.5, os alunos escreveram erradamente “Neste caso a função tende para $+\infty$, não existe extremo absoluto” e “Um extremo absoluto é o máximo ponto da função (...)”.

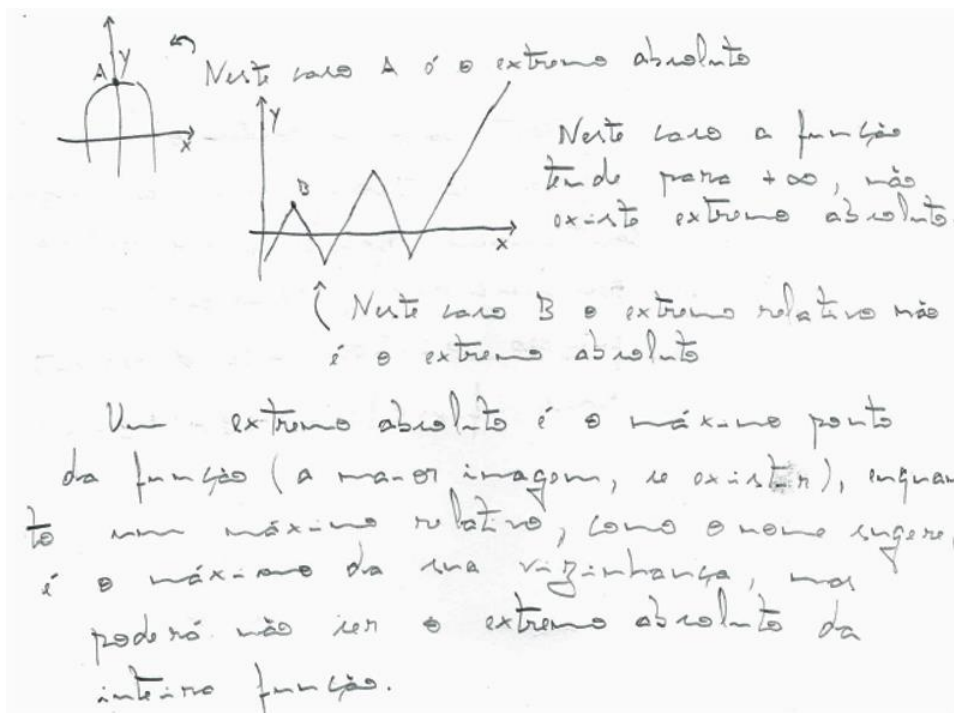


Figura 2.5.5 Resolução da alínea 1.6 pelo Par 3

Na alínea 2.10 (Se uma função é crescente em sentido lato então não admite um máximo absoluto) os alunos apresentam uma função (representada na Figura 2.6.6) crescente em sentido lato de aspeto *típico* que permite demonstrar o pretendido.



Figura 2.5.6 Exemplo apresentado na alínea 2.10 pelo Par 3

A alínea 1.4 (Uma progressão geométrica é sempre monótona) foi a alínea em que os alunos se enganaram no valor de verdade. É possível perceber que os alunos mudaram de opinião ao longo da resolução (ver Figura 2.5.7), tendo inicialmente indicado que a afirmação era falsa (valor de verdade correto) e depois dito que era verdadeira.

Valor de verdade: Falsa e Verdadeira

Justificação:

$$\begin{aligned}u_n &= 3 \times 4^{(n-1)} = \\u_1 &= 3 \times 4^{(1-1)} = 3 \\u_2 &= 3 \times 4^{(2-1)} = 12 \\u_3 &= 3 \times 4^{(3-1)} = 48\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}u_{n+1} - u_n &= 3 \times 4^{(n+1-1)} - 3 \times 4^{(n-1)} \\&= 3 \times 4^n - 3 \times 4^{(n-1)} \\&= 3(4^n - 4^{(n-1)}) \\&= 3\left(4^n - \frac{4^n}{4}\right) \\&\quad \uparrow \\4^n - \frac{4^n}{4} &\text{ vai ser sempre maior que zero, porque} \\4^n &> \frac{4^n}{4}, \text{ logo } u_{n+1} - u_n > 0, \text{ o que} \\&\text{ faz com que seja monotona crescente}\end{aligned}$$

Figura 2.5.7 Resolução da alínea 1.4 pelo Par 3

Os alunos escolheram um exemplo *simple*s e *aleatório* de uma progressão geométrica para justificar que todas as progressões geométricas são monótonas. Como queriam demonstrar a propriedade para todas as progressões geométricas nunca o poderiam fazer exibindo apenas um caso particular, razão pela qual esta justificação falha. Os alunos estão conscientes de que não conseguiram demonstrar a propriedade para todos os casos mas acreditam que ficou justificado para “uma boa quantidade de exemplos”.

Escolhendo uma progressão aritmética com razão negativa chegar-se-ia a um contraexemplo, como o exemplo testado utiliza valores naturais os alunos não se apercebem que a afirmação é falsa.

- M Acho que nós começamos por dizer que era falsa porque o valor entre dois termos consecutivos ia ser sempre diferente... foi a razão principal para dizermos que era falsa... mas depois lembramos-mos daquele caso em que ao calcular a monotonia $u_{n+1} - u_n$ dava um valor que tinha n's mas que como esses n's eram sempre positivos o valor entre a diferença entre dois termos consecutivos ia ser sempre positivo então admitimos que era monótona.
- I E como é que se lembraram deste exemplo?
- M É um dos exemplos mais fáceis, é com números naturais.
- (...)
- I Não pensaram fazer isto para o caso geral?
- G Eu acho que foi mais tipo pela simplicidade, para ser mais rápido.
- M Com tempo limite, quando envolve r's pode complicar um bocado, quando temos um número mesmo é mais fácil, é mais simples.
- I Acham que assim conseguem representar todos os casos? Todos os valores de r e todos os valores de u_1 ?
- G Como não é com letras não representa assim em geral mas eu acho que conseguimos extrair uma boa quantidade de exemplos através deste, deste exemplo.

(entrevista 1)

5.1.2 Afirmações existenciais verdadeiras

Na alínea 1.5 (Nem todas as sucessões crescentes tendem para infinito) os alunos utilizaram o exemplo $-1/n$, um exemplo *típico* e que correspondeu à sua *primeira ideia*. Nesta alínea apresentaram também o gráfico de uma sucessão através de uma linha contínua, o único gráfico produzido pelos alunos na resolução da primeira tarefa.

Justificação: ^{consideramos} por exemplo a sucessão $-\frac{1}{n}$, $u_1 = -1$, $u_2 = -\frac{1}{2}$, $u_3 = -\frac{1}{3}$, a sucessão é crescente, ~~para~~ mas não tendo para mais infinito, tendo para 0

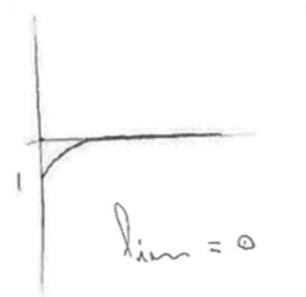


Figura 2.5.8 Resolução e gráfico apresentado na alínea 1.5 pelo Par 3

Na entrevista os alunos referem que se lembraram de ver este gráfico no manual e depois foram encontrar o termo geral correspondente à função representada no gráfico.

- I Como é que se lembraram desta sucessão $\frac{1}{n}$?
- M É assim eu acho que me lembrei primeiro do gráfico porque eu lembro-me de ter visto no livro logo na primeira página dos limites que havia um gráfico assim. Eu não me lembrava exatamente como é que era a sucessão mas ilustrando o gráfico podemos ter uma ideia melhor e a partir daí pensei na sucessão, acho que foi essa a razão principal.
- (...)
- G Eu acho que foi um pouco mais para ilustrar, mas também serve um pouco para justificar o nosso raciocínio.

(entrevista 1)

Na alínea 2.1 (Nem todas as funções admitem inversa) os alunos apresentam dois exemplos *simples*: o primeiro $(y = \frac{2x+4}{4x})$ serviu para relembrar como se calculava a inversa de uma função e o segundo $(y = \frac{2}{4-x})$ para demonstrar o pretendido. Novamente, os alunos voltam a escolher os seus exemplos tendo a simplicidade e eficiência em conta.

- I Qual era o objetivo de cada uma das funções usadas?
- M Eu queria mostrar exatamente isto, que havia um termo da função inversa que não pertencia ao termo da função original, e o meu objetivo era demonstrar isso e fui tentar chegar a uma expressão que chegasse a isto.
- I Então e com a primeira função? Qual é que é o papel desta função?
- M Era para eu me lembrar como é que se fazia a inversa.

- G Era um modelo.
- I Como é que se lembraram destas funções? São funções um bocadinho estradas, são as duas funções racionais mas porquê estas?
- G Não sei acho que são as fáceis de trabalhar e para andar a mudar de um lado para outro.

(entrevista 2)

Na alínea 2.2 (Uma função pode ser simultaneamente par e ímpar) os alunos começaram por apresentar o exemplo da circunferência de equação $(x - c_x) + (y - c_y) = 4$, tomando $c_x = c_y = 0$, acompanhando a expressão pelo gráfico correspondente. No entanto, depois aperceberam-se de que esta não era uma função, “depois apercebi-me que um objeto não pode ter duas imagens diferentes” (Miguel). De seguida, apresentam uma dedução (ver Figura 2.5.9) que resulta na função constante $f(x) = 0$ como uma função simultaneamente par e ímpar (a única função que permite demonstrar que a afirmação 2.2 é verdadeira).

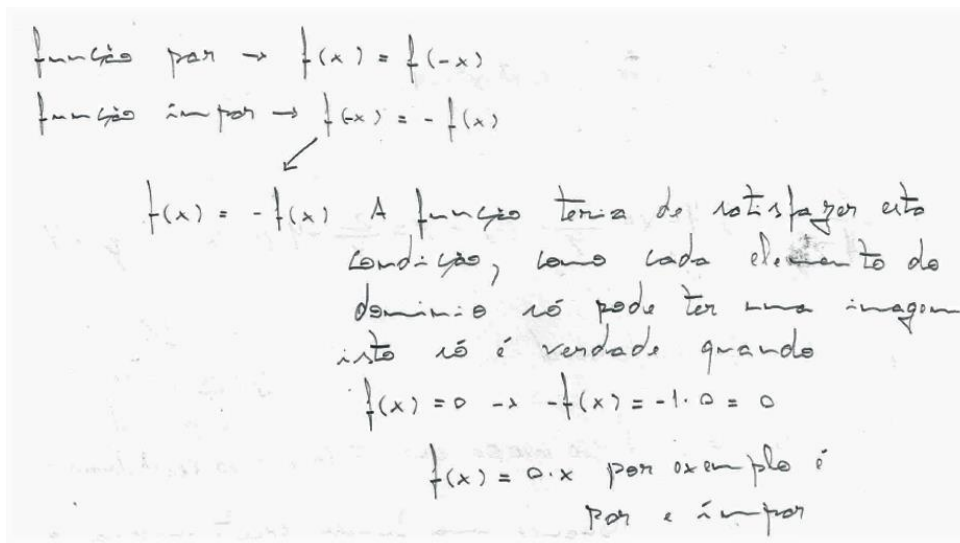


Figura 2.5.9 Extrato da resolução da alínea 2.2 pelo Par 3

Nas alíneas 2.3 (Uma função pode não ser par nem ser ímpar) e 2.9 (Algumas funções polinómicas não têm zeros) os alunos apresentam o gráfico da função quadrática como exemplo, no entanto não referem a expressão geral da função escolhida (ver Figura 2.5.10 e Figura 2.5.11). Estas funções permitem demonstrar o pretendido e este tipo de função foi usado pelos alunos por ser a *primeira ideia*.

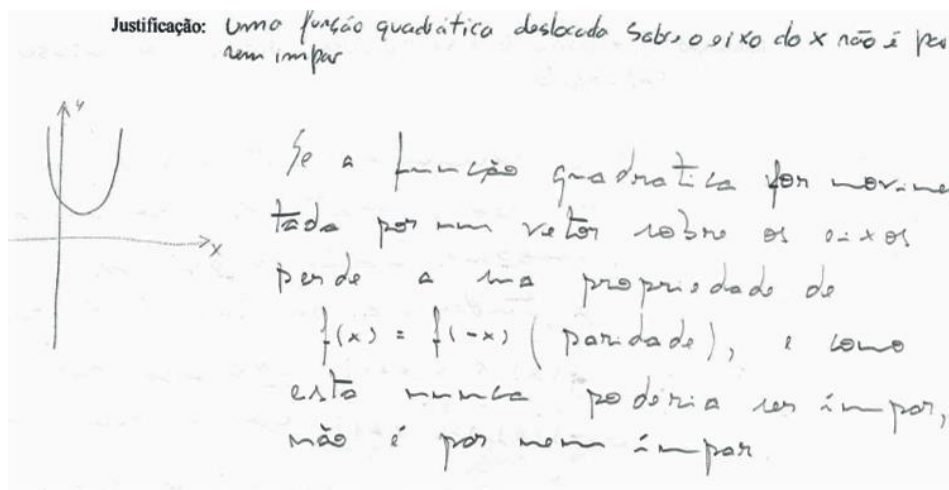


Figura 2.5.10 Resolução da alínea 2.3 pelo Par 3

Na segunda entrevista os alunos referem que escolheram o exemplo da função quadrática na alínea 2.9 também por ser *simples*. O primeiro exemplo está correto mas na segunda parte da justificação os alunos utilizam outro exemplo, uma função racional $Q(x)/q(x)$, que sai fora do domínio de estudo desta afirmação- Na segunda entrevista o Guilherme refere “eu pensava que era válido porque ambas $[Q(x)$ e $q(x)]$ são polinómios”.

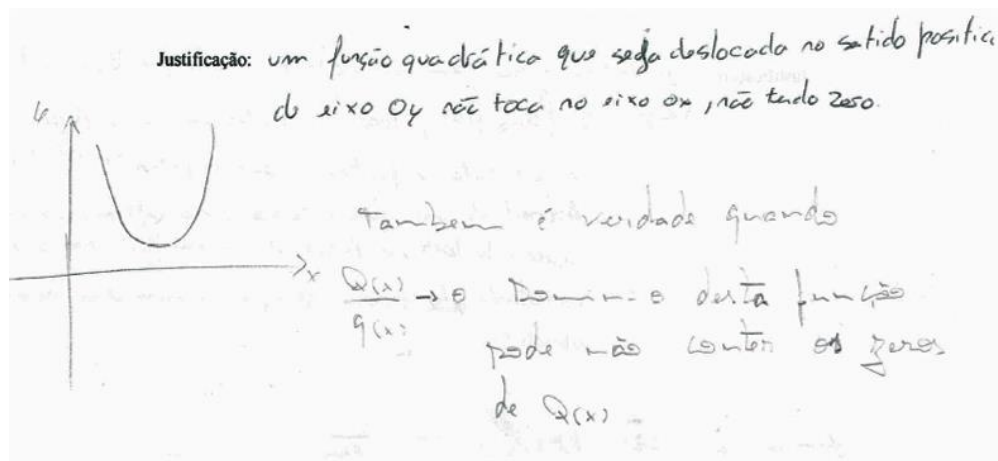


Figura 2.5.11 Resolução da alínea 2.9 pelo Par 3

Na alínea em que os alunos se enganaram, 1.3 (Algumas progressões aritméticas são limitadas), este erro deveu-se a terem considerado apenas o caso em que a razão é negativa ou positiva, esquecendo o caso em que $r = 0$. A justificação apresentada pelos alunos baseia-se no facto de uma progressão aritmética de razão positiva tender para $+\infty$ e uma progressão aritmética de razão negativa tender para $-\infty$ e os alunos não recorrem ao uso de exemplos nesta alínea.

Justificação: Como $U_{n+1} = U_n + r$, seja a razão positiva ou negativa, a progressão tende sempre para $+\infty$ ou $-\infty$.

Figura 2.5.12 Resolução da alínea 1.3 pelo Par 3

5.2 Afirmações do Tipo 2

Os alunos indicaram o valor correto em todas as afirmações do tipo 2, que não admitem uma demonstração exclusivamente através da exibição de um exemplo, no entanto em alguns casos justificam as afirmações através da exibição de um exemplo.

5.2.1 Afirmações universais verdadeiras

Nas alíneas 1.2 e 2.8 os alunos apresentam uma justificação correta sem recorrer a um exemplo. Nas alíneas 1.10 e 2.5 os alunos pretendem concluir que a afirmação universal é verdadeira a partir da exibição de um caso para o qual a propriedade é verificada. Finalmente nas alíneas 1.7 e 2.11 as justificações recorrem a exemplos e contêm alguns problemas de raciocínio ou incompletude.

Na alínea 1.2 (Uma progressão aritmética de razão natural é sempre monótona) os alunos apresentam uma pequena justificação, representada na Figura 2.5.13.

Justificação: Num progressão aritmética, vemos a monotonia ~~sempre~~ fazendo a diferença entre dois termos consecutivos, diferença essa que corresponde à razão, que como é sempre constante, torna a progressão monótona.

Figura 2.5.13 Resolução da alínea 1.2 pelo Par 3

Pela justificação apresentada a investigadora questionou-se se os alunos teriam a ideia de que uma sucessão é monótona apenas quando a diferença entre dois termos consecutivos é sempre constante então colocou essa questão na primeira entrevista, a que os alunos responderam corretamente.

Na alínea 2.8 (A função inversa de uma função afim é uma função afim) os alunos utilizam a expressão $y = mx + b$ para demonstrar que a inversa de uma função afim é uma função afim (ver Figura 2.5.14).

Justificação:
função afim: $y = mx + b$
 $y = mx + b \Leftrightarrow y - b = mx \Leftrightarrow x = \frac{y - b}{m} \Leftrightarrow x = \frac{y}{m} - \frac{b}{m} \quad b, m \in \mathbb{R}$
também é afim

Figura 2.5.14 Resolução da alínea 2.8 pelo Par 3

Os alunos compreenderam que esta demonstração permitia concluir que a propriedade é válida todas as funções afim.

- I O que é que fizeram nesta demonstração?
- M Foi pegar na expressão, digamos, básica de uma função afim e fazer a inversa dela.
- G Como foi logo com as letras dá para todos os casos, é mais generalizante.
- I Assim ficou demonstrado para todas, certo?
- G Sim.

(entrevista 2)

Na alínea 1.10 (A soma de um infinitésimo com uma sucessão infinitamente grande é infinitamente grande) os alunos apresentam um par de sucessões *simples*, um infinitésimo e um infinitamente grande positivo, e determinam o limite da sua soma, comprovando que dá uma sucessão com limite $+\infty$, tendo como propósito *transmitir um argumento geral*.

Justificação: Somamos a sucessão $u_n = \frac{1}{n}$, infinitésimo, com a sucessão $v_n = n$, infinitamente grande:

$$\frac{1}{n} + n = \frac{1 + n^2}{n} = w_n$$

$$\lim w_n = +\infty.$$

Figura 2.5.15 Resolução da alínea 1.10 pelo Par 3

Os alunos consideraram que esta justificação era suficiente, mas durante a entrevista perceberam que podiam ter feito a demonstração utilizando apenas os limites e que esta seria válida para todas as sucessões e não apenas num caso particular.

- G Esta chegámos à conclusão que era verdade, até está aqui a provar.
- I Estas sucessões foram as primeiras que se lembraram?
- G Sim, são as mais simples.
- (...)
- I Qual era a função do exemplo?
- G Acho que era meio para generalizar.
- I Não têm ideia de como podem fazer esta demonstração de outra forma?
- M Podíamos fazer com o limite.
- G Ah sim, também podíamos somar os dois limites, zero mais infinito vai dar infinito. Exatamente.
- M Também dava.
- G Se calhar era mais simples
- I Acham mais simples fazer o caso geral do que este exemplo?
- G Sim porque com o limite funciona para todas enquanto que este caso não funciona para todas.
- M É verdade.

Na alínea 2.5 (Se uma função de domínio \mathbb{R}^+ é crescente em sentido lato então a reflexão de eixo Oy da representação do gráfico dessa função é decrescente em sentido lato) os alunos apresentam uma justificação bastante semelhante à alínea 2.4 (ver Figura 2.5.4) apesar de estas serem de tipos diferentes. O exemplo usado trata-se de uma função crescente em sentido lato *aleatória, simples e típica*, escolhida com o propósito de *transmitir um argumento geral*.

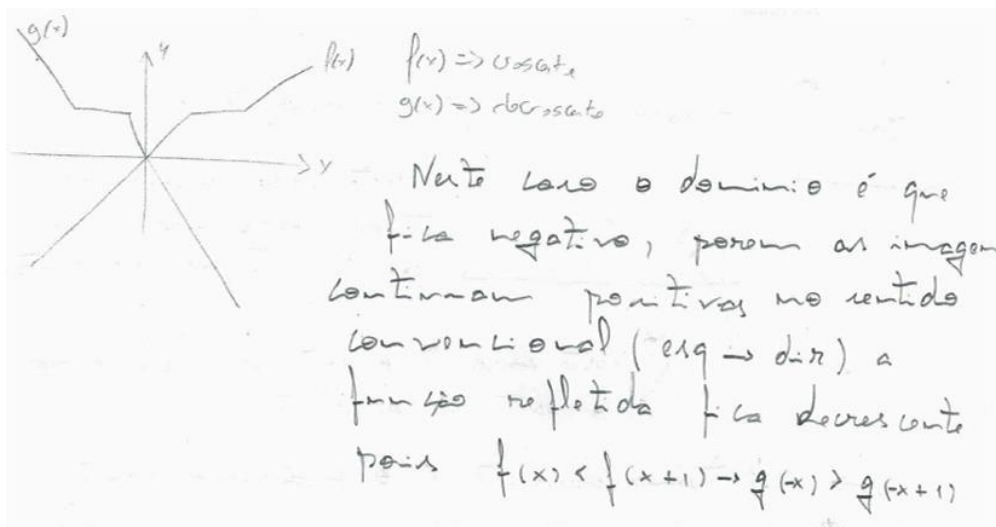


Figura 2.5.16 Resolução da alínea 2.5 pelo Par 3

Na alínea 1.7 (Se uma sucessão é convergente então é limitada), os alunos apresentam uma justificação acompanhada pelo exemplo $(-1)^n/n$. Este exemplo foi a *primeira ideia* dos alunos e foi escolhido por ser um caso especial e ser convergente mas não monótona, podemos afirmar que se trata de uma *caso limite*, apesar de não haver uma relação de ordem nas sucessões. Este exemplo foi escolhido com o papel mais ilustrativo, tendo o propósito de *transmitir um argumento geral e auxiliar a justificação*.

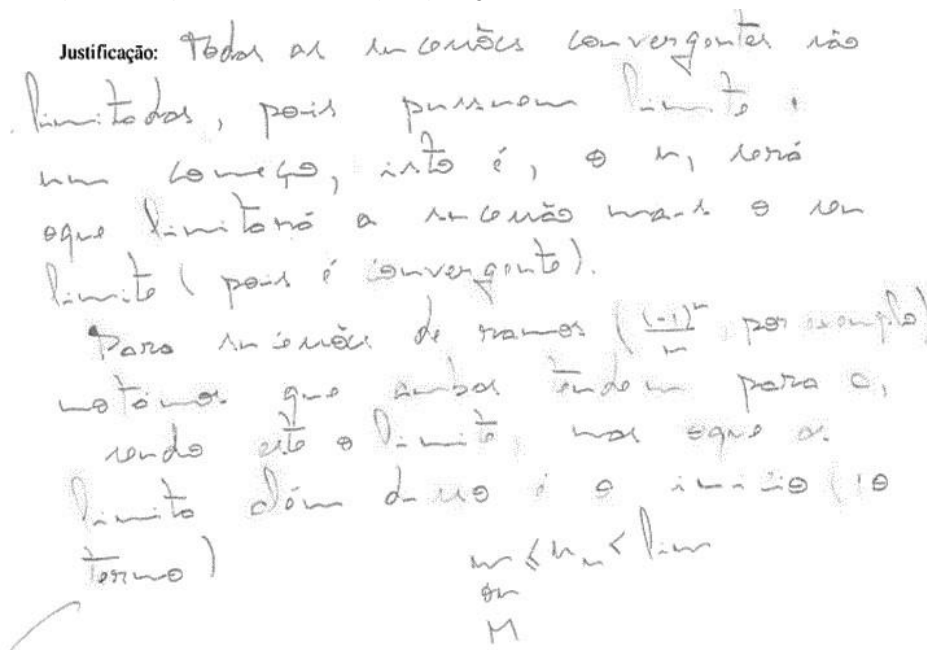


Figura 2.5.17 Excerto da resolução da alínea 1.7 pelo Par 3

A ideia que os alunos pretendiam transmitir com esta justificação é que os termos de uma sucessão convergente se encontram entre o seu majorante (M) ou minorante (m) e o limite da

sucessão mas o caso da sucessão $(-1)^n/n$ é uma exceção, pois esta sucessão não é monótona. Este argumento não está completo pois no caso de a sucessão não ser monótona os alunos não apresentam um método de descobrir o majorante e minorante nem justificam porque é que estes existem.

A afirmação da alínea 1.7 é a recíproca da alínea 1.8 (Se uma sucessão é limitada então é convergente) e, na entrevista, Miguel refere que se recorda de a professora ter repetido que se uma sucessão é convergente então é limitada mas o contrário não é verdade.

M A 7 era aquela tal que já sabíamos que era verdadeira e a 8 era falsa, a professora repetiu várias vezes que isto era verdadeiro mas o contrário não era. Foi uma coisa que ficou gravada.

I E como é que pensaram na demonstração?

G Esta eu lembrei-me logo do exemplo da anterior mas acho que foi um pouco confuso para justificar por palavras porque nós conseguíamos pensar na... em porque é que era verdadeiro mas transformar isso em linguagem foi um pouco mais complexo. Então recorremos um bocado aos exemplos.

M Eu acho que aqui o objetivo principal foi mostrar que se é convergente começa em algum lado e converge para outro, ou seja, o limite digamos de baixo há-de-ser o primeiro termo e o limite de cima há-de-ser o limite, é esta a ideia principal.

(...)

M Este foi um caso específico que nós tratamos em que os limites, o de cima não ia ser o valor para onde ela converge mas é aquele caso dos ramos...

G Ambas vão para zero mas começam em sítios diferentes por assim dizer.

(entrevista 1)

5.2.2 Afirmações existenciais falsas

Nas alíneas 1.9 (Existe uma sucessão com dois limites diferentes) e 2.7 (Existe pelo menos uma função do tipo $f(x) = |x - a| + b$ com $a, b \in \mathbb{R}$ e domínio \mathbb{R} que é monótona) os alunos apresentam uma justificação recorrendo a exemplos meramente ilustrativos, com o propósito de *transmitir um argumento geral e auxiliar a justificação*.

O exemplo usado na alínea 1.9 (Existe uma sucessão com dois limites diferentes), a sucessão $(-1)^n \times n$ trata-se de um exemplo *típico*. Durante a entrevista Guilherme afirma que esta se trata de uma demonstração por absurdo, o que não é verdade, pois por definição uma sucessão não pode ter dois limites.

G Essa [1.9] acho que era aquela justificação que era absurdo ou alguma coisa assim.

M Ah sim. Pelo menos quando eu li que tinha dois limites, que existe uma sucessão com dois limites, não pode ser. Uma sucessão não pode ter dois limites, por definição. Eu lembro-me daqueles exercícios em que a sucessão era por ramos, era o exemplo que demos aqui, quando o limite em cada ramo dá diferente não podemos considerar que a sucessão tem limite.

- G Para visualizar uma crescente mas que tendia para zero.
 I E porque é que nas outras não utilizaram?
 G Eu achei mais simples nas outras justificar mesmo com cálculos.
 (entrevista 1)

Nas alíneas 1.7, 1.8, 1.9 e 1.11 os alunos utilizam uma sucessão obtida pelo produto da sucessão $(-1)^n$ por outra sucessão e recorrem à notação por ramos, por vezes incorretamente exprimida (ver Figura 2.5.19).

The image shows a handwritten mathematical expression $\frac{(-1)^n}{n}$ with a large curly bracket underneath it. The bracket is divided into two parts. The top part is labeled "n impar" and contains the inequality $-1 \leq \frac{1}{n} < 0$. The bottom part is labeled "n par; n >= 2" and contains the inequality $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{n} < 0$. There are some additional scribbles and a small "M" at the top right.

Figura 2.5.19 Excerto da resolução da alínea 1.7 pelo Par 3

Na segunda tarefa, os alunos decidiram usar gráficos em praticamente todas as alíneas e só não fazem nas alíneas 2.8 (A função inversa de uma função afim é uma função afim) e 2.11 (Uma função do tipo $f(x) = \sqrt{x-a} + b$ com $a, b \in \mathbb{R}$ e domínio $[a, +\infty[$ é sempre monótona). Na alínea 2.8 apresentam um argumento geral, utilizado a expressão geral $y = mx + b$ e é compreensível que os alunos não tenham sentido necessidade de utilizar um gráfico. Na alínea 2.11 os alunos estudaram dois casos particulares, calcularam várias imagens da função e ao encontrar um padrão o exemplo permitiu-lhes suportar uma nova conjectura, sem precisarem de passar pela representação gráfica da função.

Na segunda entrevista, quando questionados sobre os exemplos os alunos fazem logo a ligação com a representação gráfica e o Guilherme refere que ele não usou tanto os gráficos e que estes foram iniciativa do Miguel.

- I De que forma é que os exemplos contribuíram para resolução da tarefa?
 G Acho que foi mais para imaginar graficamente nalgumas. Mas eu pessoalmente não usei muitos
 M Eu usei muitos gráficos quando estava a pensar, para visualizar.
 I E para justificar? Qual era o papel dos exemplos na demonstração?
 G Ah os exemplos usámos mais letras e assim... casos gerais. Para tentar globalizar os resultados.
 I Quais as representações de sucessão que acharam mais úteis?
 (...)
 G Eu acho que é mais simples usar o gráfico.
 M Sim.

(entrevista 2)

5.4 Conclusão da análise do Par 3

Os critérios mais usados por estes alunos na escolha dos exemplos foram *simples* (como na alíneas 1.4, 2.4 e 2.11) e *típico* (como nas alíneas 1.6, 1.8 e 2.10), os alunos não estavam apenas preocupados em resolver a tarefa mas também em encontrar um método mais simples e eficaz de justificar o pretendido. Utilizaram também exemplos *aleatórios* para tentar *transmitir argumento geral*, como nas alíneas 1.4, 2.5 e 2.6.

Os exemplos foram usados tanto para explorar, por exemplo, *testar a veracidade* na alínea 1.10 ou *explorar a representação* nas alíneas 2.4 e 2.5 como no momento de justificação, por exemplo, para *reivindicar* a sua ideia na alínea 1.9 ou *refutar* a afirmação na alínea 1.8.

A criação de exemplos foi muito útil para estes alunos, em algumas das alíneas Guilherme e Miguel apresentaram vários exemplos até conseguirem chegar a uma justificação que consideram adequada. Nessas alíneas é possível discernir uma estratégia lógica, como *explorar as propriedades* na alínea 2.6 ou *variação sistemática* na alínea 1.11.

Na primeira tarefa os alunos apresentaram um método de processamento matemático mais analítico, baseando-se quase exclusivamente no processamento verbal-lógico. Na segunda tarefa alteraram bastante o seu método de resolução da tarefa e de processamento matemático, adotando um método harmónico, coordenando as representações verbal-lógicas e visual-pictóricas.

6 Apresentação do estudo de caso: Par 5 (Sofia e Nuno)

Sofia e Nuno são ambos bons alunos. Nuno é mais extrovertido do que Sofia e acabou por liderar a resolução da tarefa e as entrevistas. Sofia e Nuno discutiram cada uma das alíneas e resolveram todas as questões em conjunto..

Tabela 2.6.1 Caracterização de Sofia e Nuno

	Nota de caracterização	Classificação máxima	Classificação mínima	Nível de extroversão	Média fichas	Média testes
Sofia	16	20	12	2	16	15
Nuno	17	20	14	3	19	15

Este par respondeu a dezassete das vinte e duas perguntas existentes nas tarefas, responderam a todas as perguntas da primeira tarefa e a seis da segunda tarefa. Das cinco alíneas não respondidas duas são universais verdadeiras, uma universal falsa, uma existencial verdadeira e uma existencial falsa.

Das afirmações do tipo 1 (afirmações universais falsas ou existenciais verdadeiras e que, portanto, admitem uma demonstração através da exibição de uma exemplo) este par não respondeu a duas alíneas, e das afirmações do tipo 2 (restantes, que não admitem demonstração através da exibição de um exemplo) este par não respondeu a três alíneas. Portanto aparentam rejeitar com maior frequência as alíneas que não podem ser demonstradas por exemplo. Apesar desta tendência, Sofia e Nuno responderam corretamente a todas as alíneas do tipo 2 que não deixaram em branco.

Tabela 2.6.2 Análise das alíneas respondidas pelo Par 5 em termos dos tipos 1 e 2

Tipo de alínea	Valor de verdade indicado pelo Par 5	Número de ocorrências
Tipo 1	Correto	6
	Incorreto	6*
	Não respondido	2
Tipo 2	Correto	5
	Incorreto	0
	Não respondido	3

*na alínea 1.5 indicam que a afirmação é verdadeira (v.v. correto) mas demonstram que a afirmação é falsa (v.v. incorreto), por isso foi considerado como incorreto

No caso deste par não parece existir nenhuma relação entre o facto da afirmação ser do tipo universal ou existencial e o sucesso na atribuição do valor de verdade, como se pode comprovar na Tabela 2.6.3, no entanto seriam necessários mais dados para efetivamente chegar a uma conclusão.

Tabela 2.6.3 Análise das alíneas respondidas pelo Par 5

Tipo de alínea	Universal ou existencial	Valor de verdade	Valor de verdade indicado pelo Par 5	Número de ocorrências
Tipo 1	universal	Falso	Correto	4
			Incorreto	3
			Não respondido	1
	existencial	Verdadeiro	Correto	2
			Incorreto	3*
			Não respondido	1
Tipo 2	universal	Verdadeiro	Correto	4
			Incorreto	0
			Não respondido	2
	existencial	Falso	Correto	1
			Incorreto	0
			Não respondido	1

*na alínea 1.5 indicam que a afirmação é verdadeira (v.v. correto) mas demonstram que a afirmação é falsa (v.v. incorreto), por isso foi considerado como incorreto

Quando questionados sobre a escolha realizada os alunos referem que escolheram as que acharam mais fáceis devido ao constrangimento de tempo.

- I Não responderam às alíneas 2, 4, 5, 7 e 11, foi só uma questão de tempo?
- N Não
- S Foi também uma questão de escolha. Do género nós estávamos atrasados então nós olhávamos e escolhíamos as que achávamos mais fáceis de responder. É por isso que as folhas não estão por ordem.

(segunda entrevista)

6.1 Afirmações do Tipo 1

6.1.1 Afirmações universais falsas

Das oito afirmações universais falsas existentes nas tarefas, este par respondeu corretamente a quatro, respondeu incorretamente a três e rejeitou uma.

Os alunos responderam corretamente às alíneas 1.1, 1.6, 2.6 e 2.10 e utilizam exemplos em todas menos na alínea 2.6. Nas alíneas 1.1 e 2.10, os alunos apresentaram um gráfico genérico sem associar a expressão da sucessão, no entanto na alínea 1.1 o gráfico tem o objetivo

de complementar a demonstração escrita e na alínea 2.10 o gráfico constitui um contraexemplo. Na alínea 1.6 (Se uma sucessão é convergente então é monótona) utilizaram a sucessão $\frac{(-1)^n}{n}$ como contraexemplo.

Na alínea 1.1 (Uma sucessão crescente e minorada é limitada), apresentada na Figura 2.6.1, os alunos indicaram o valor de verdade correto mas a sua demonstração parte da ideia errada de que “todas as sucessões crescentes tendem para mais infinito”.

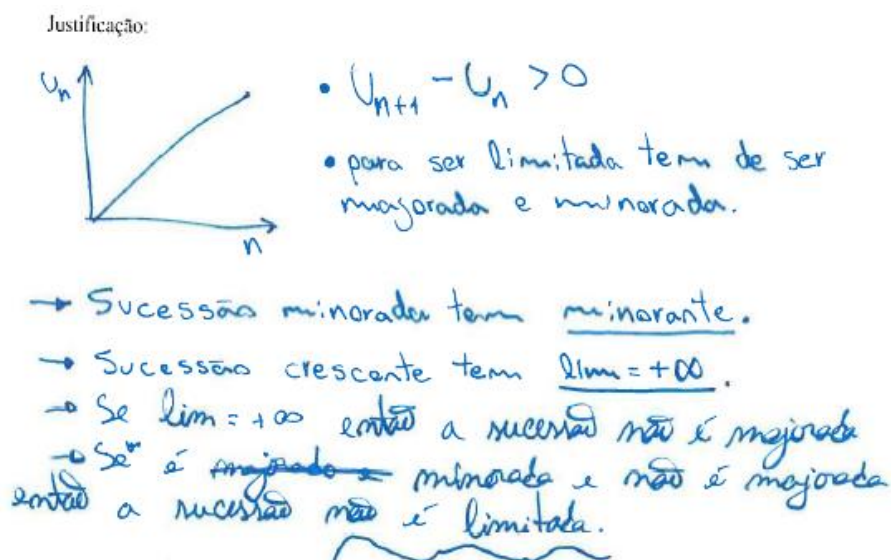


Figura 2.6.1 Excerto da resolução da alínea 1.1 pelo Par 5

Na alínea 2.10 (Se uma função é crescente em sentido lato então não admite um máximo absoluto) os alunos apresentam o gráfico da Figura 2.6.2 e na entrevista referiram que acharam que não havia necessidade de obterem a expressão geral da função. Apesar de se tratar de um exemplo genérico permitiu aos alunos reivindicar a sua ideia, refutar a afirmação e produzir uma justificação.

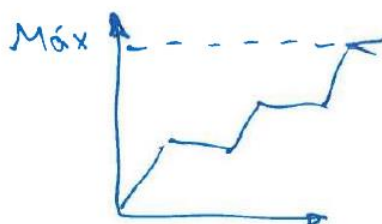


Figura 2.6.2 Gráfico apresentado pelo Par 5 na alínea 2.10

- I Porque é que às vezes faziam um gráfico da função, mas não indicavam a expressão algébrica da função? Por exemplo na alínea 10 fizeram isso.
- N Epá... Porque esta aqui para definir uma função crescente em sentido lato tínhamos de fazer uma função por ramos e é um bocado... complicado.
- (...)
- I Então não pensaram em fazer a expressão da função por ramos?
- N Pensei mas achei que não valia a pena porque tinha de estar aqui a meter x_1, x_2, x_3 e depois aqui [eixo Oy] y_1, y_2, y_3 e dizer daqui aqui vai

a crescer, daqui aqui é constante e achei que não valia a pena estar a fazer isso para o exemplo.

I E como é que se lembraram deste exemplo?

N Então porque é assim em sentido lato, acho que é... só pode ser deste género.

(entrevista 2)

Na alínea 1.6 este par apresenta como contraexemplo a sucessão $\frac{(-1)^n}{n}$, que é um exemplo *típico* para esta alínea, e apresentam esta sucessão através da expressão geral e por ramos e através do gráfico cartesiano. Na entrevista os alunos referiram que se lembraram primeiro do gráfico e só depois da expressão geral da sucessão.

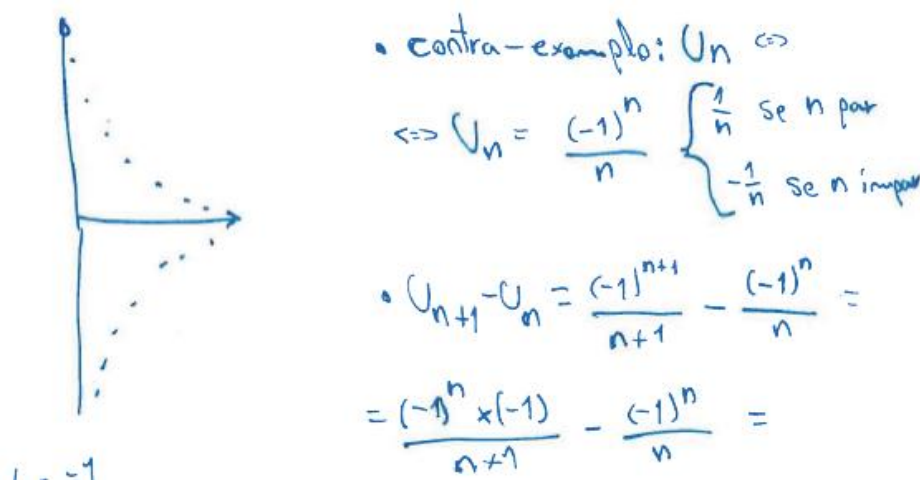


Figura 2.6.3 Excerto da resolução da alínea 1.6 pelo Par 5

Nesta alínea os alunos estão completamente conscientes de que utilizaram um contraexemplo e que conseguiram demonstrar o que queriam.

I Como é que se lembraram desta sucessão?

(...)

N Então dizia que se convergia tinha de ser monótona então pensámos numa que convergisse para um limite mas que não seguisse sempre por cima ou por baixo e esta aqui uma segue por cima e a outra por baixo e vêm para o eixo do x. (...) Foi... tipo o contraexemplo, sim, o contraexemplo justifica. Mostrámos que não era assim para todas.

(entrevista 1)

Na alínea 1.11 os alunos testaram dois pares de sucessões de modo a analisar se o produto será uma sucessão convergente ou não convergente. Em ambos os testes utilizam a sucessão de termo geral $v_n = \frac{1}{n}$ como sucessão convergente. Para a sucessão limitada utilizam primeiro a sucessão de termo geral $u_n = \frac{1}{n}$ e depois a sucessão de termo geral $w_n = (-1)^n$. A sucessão $\frac{1}{n}$ é um exemplo *simples* pois facilita as contas no cálculo do produto das sucessões e é um exemplo *típico* de uma sucessão convergente e limitada, tendo sido várias vezes utilizada nas aulas.

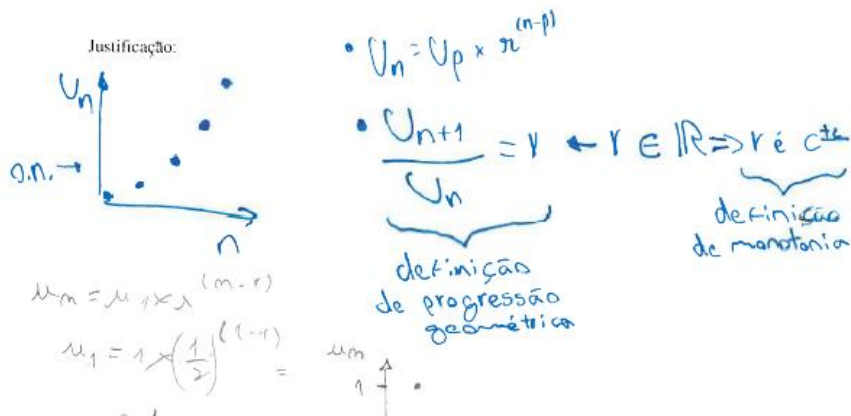


Figura 2.6.5 Excerto da resolução da alínea 1.4 pelo Par 5

- I Não percebo porque é que aqui diz “definição de monotonia”.
- N Então porque o r é constante... é, acho eu... na definição de monotonia, não é? Porque para ver se é monótona ou não nós temos de fazer esta razão e encontrar um r e a justificação é que r é constante.
- I Para uma sucessão qualquer?
- N Não, para as progressões geométrica e aritmética.
- S Por exemplo se isto aqui desse por exemplo $3n$ já não era monótona, então se o r for por exemplo sempre 3 já é constante então já é monótona.
- (...)
- I Porque é que têm dois gráficos?
- N Nós começamos com esta parte [geral] e depois tentámos... não estávamos a encontrar a resposta acho eu então tentámos usar um exemplo.

(entrevista 1)

6.1.2 Afirmações existenciais verdadeiras

Estes alunos indicam o valor de verdade corretamente para três das afirmações existenciais verdadeiras, o valor incorreto de duas e não responderam a uma.

Na alínea 1.5 (Nem todas as sucessões crescentes tendem para infinito), Sofia e o Nuno indicaram que a afirmação é verdadeira, mas depois demonstram que é falsa. É possível perceber na Figura 2.6.6 que os alunos estavam a considerar também as sucessões crescentes em sentido lato e depois eliminaram esse caso

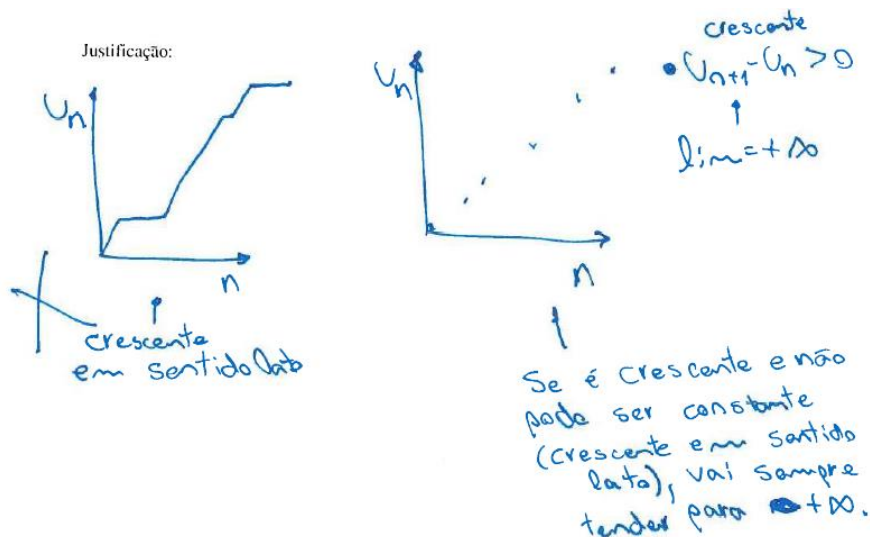


Figura 2.6.6 Resolução da alínea 1.5 pelo Par 5

No início da primeira entrevista, a investigadora tentou explorar esta ideia e pediu aos alunos que indicassem o valor de verdade da afirmação “Todas as sucessões crescentes tendem para infinito”, semelhante à alínea 1.5 mas sem a palavra “nem”. Os alunos apresentaram algumas dificuldades com este conceito, que se podem dever à mudança da definição nos programadas de Matemática A.

- I A afirmação “Todas as sucessões crescentes tendem para infinito” é verdadeira ou falsa?
- N Sim. Não, podem ser convergentes até um ponto, até um limite
- S Crescente em sentido lato ou... isso conta como crescente?
- I Estritamente crescentes
- N Ah, estritamente crescentes então...
- S Então tende sempre para infinito
- N Para mais infinito
- (...)
- I Então e a sucessão $\frac{1+n^2}{n}$? [usada pelos alunos na afirmação 1.7]
- N Mas essa é crescente em sentido lato
- I É estritamente crescente
- N Não, é em sentido lato porque depois há um ponto em que já está constante
- (...)
- S Então porque é que pusemos verdadeiro [na alínea 1.5]?
- N Porque nós pensávamos que quando era assim era crescente em sentido lato, eu pensei...

(entrevista 1)

Nas alíneas 2.1 e 2.9 os alunos indicaram o valor de verdade correto e apresentam uma demonstração válida através de exemplo. No entanto, os alunos não apontaram uma função concreta que prove a afirmação e tentam criar um “exemplo geral”.

Na alínea 2.1 (Nem todas as funções admitem inversa) os alunos apresentaram dois exemplos, começaram por escrever a expressão algébrica da função $f(x) = \frac{1}{ax}$ e desenhar o seu gráfico, mas depois decidiram recorrer ao diagrama de setas para representar uma função não invertível. Na entrevista foi possível perceber que os alunos inicialmente tinham confundido a função inversa com o inverso da multiplicação por isso é que tinham utilizado a função definida por $f(x) = \frac{1}{ax}$.

- I Utilizaram a expressão algébrica desta função $\left(\frac{1}{ax}\right)$ que depois apagaram...
- N Sim porque eu pensava que essa era aquela função inversa e depois percebi que era aquela função que se trocava o y e o x.
- I Depois utilizam também o diagrama de setas.
- N Sim, eu acho que esse foi útil para mostrar que não era uma função.

(entrevista 2)

O segundo exemplo apresentado nesta alínea é um exemplo *típico* de uma função invertível e permitiu que os alunos produzissem uma demonstração. Além da apresentação deste exemplo genérico escrevem uma pequena justificação indicando que a inversa da função escolhida não ia ser função.

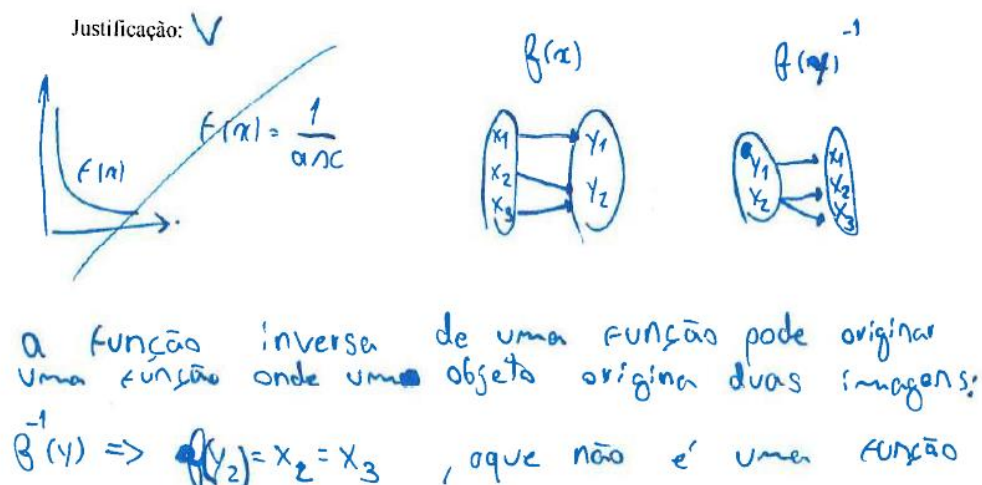


Figura 2.6.7 Resolução da alínea 2.1 pelo Par 5

Na alínea 2.9 (Algumas funções polinomiais não têm zeros) os alunos apresentam como exemplo a família de funções $f(x) = x^2 + a$ com $a \in \mathbb{R}^+$, indicando a expressão geral e esboçando o gráfico correspondente. Esta foi a sua primeira ideia e permitiu demonstrar o pretendido.

$$f(x) = x^2 + a, \quad a \in \mathbb{R}^+$$

Algumas funções têm contradomínio que se encontra no intervalo $\mathbb{R}^+ =]0, +\infty[$

Figura 2.6.8 Resolução da alínea 2.9 pelo Par 5

Apesar dos alunos terem respondido corretamente a ambas as alíneas mostraram a intenção de apresentar um exemplo geral, na alínea 2.1 através das variáveis x_1, x_2, x_3, y_1 e y_2 e na alínea 2.9 através da variável a . Esta atitude representa alguma insegurança na distinção das afirmações que se podem ou não demonstrar exclusivamente através da apresentação de um exemplo, como se ilustra no seguinte comentário:

- N Então porque eu lembrei-me desta função assim que não tinha... não passava no eixo dos x e pronto escrevi-a assim para ser mais absoluto, em vez de usar um exemplo. Quer dizer isto foi um exemplo, mas era mais uma fórmula geral para as funções quadráticas positivas sem zeros.

(entrevista 2)

Na alínea 2.3 (Uma função pode não ser par nem ser ímpar) os alunos apresentam o exemplo da função constante $f(x) = 4$, que é par, mas não é ímpar e, portanto, não permite tirar nenhuma conclusão. Este par começou por indicar que a afirmação era verdadeira e depois riscaram e mudaram de opinião. Este exemplo suportou a crença dos alunos na falsidade da afirmação, mas não permitiu construir uma demonstração e os alunos responderam sem ter a certeza.

- I Qual é que foi o objetivo deste exemplo?
- S Ah, o objetivo do exemplo era mais para eu tentar ver se... pronto se a função podia não ser par nem ímpar. Pronto eu lembrei-me... lembrei-me da constante e depois tentei ver e depois vi que não podia ser ímpar mas podia ser par mas... tinha de tentar com as funções todas, com todos os tipos de funções. Eu lembrei-me desta pensei que podia ser ou não, mas não cheguei a concluir nada.

(entrevista 2)

6.2 Afirmações do Tipo 2

6.2.1 Afirmações universais verdadeiras

Das seis afirmações universais verdadeiras existentes nas tarefas este par respondeu a quatro, nessas quatro identificou o valor de verdade correto, mas é possível encontrar algumas conceções erradas na resolução dos alunos.

Na alínea 1.10 os alunos optam por uma demonstração analítica e não utilizam exemplos enquanto que na alínea 1.2 apresentam um exemplo com o objetivo de ilustrar a demonstração e nas alíneas 1.7 e 2.8 a demonstração baseia-se exclusivamente em exemplos.

Na alínea 1.2 (Uma progressão aritmética de razão natural é sempre monótona) os alunos apresentam um esquema ilustrativo da relação $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ e um gráfico que pretende representar uma progressão aritmética qualquer, como se pode observar na Figura 2.6.9. Apesar da existência do gráfico como exemplo, Nuno afirmou que “este gráfico acho que não ajudou muito, o mais importante era esta coisa aqui [a explicação escrita]”.

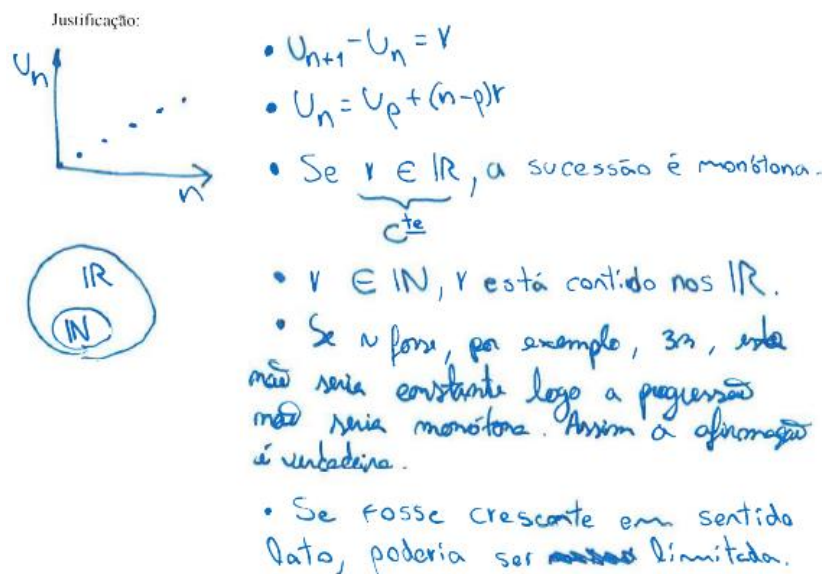


Figura 2.6.9 Resolução da alínea 1.2 pelo Par 5

Na primeira entrevista a investigadora questionou os alunos sobre a monotonia das sucessões e estes afirmaram que uma sucessão é monótona quando a diferença entre dois termos consecutivos é constante, o que não está correto.

- I Quando é que uma sucessão é monótona?
- N Quando é monótona é quando este valor $[u_{n+1} - u_n]$.
- S Quando é crescente ou quando é decrescente ou pode ser crescente em sentido lato ou decrescente em sentido lato, não podem oscilar os valores.
- N A diferença entre dois [termos] consecutivos é sempre a mesma, não é... é um número real, não é um número tipo com n .
- S Sim, não pode dar... tem de dar um número real
- N É uma constante.

(entrevista 1)

Na alínea 1.7 (Se uma sucessão é convergente então é limitada) os alunos apresentam duas sucessões convergentes, uma por valores superiores e outra por valores inferiores, como se pode observar Figura 2.6.10. Na entrevista os alunos referiram que pensaram primeiro nos gráficos e só depois no termo geral de cada sucessão (Sofia: “nós fazemos sempre os gráficos primeiro”), no entanto enganaram-se na primeira sucessão e o gráfico representado não corresponde à expressão geral indicada ao lado.

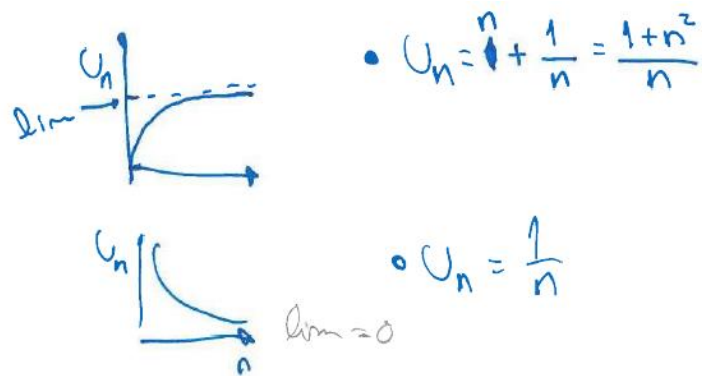


Figura 2.6.10 Resolução da alínea 1.7 pelo Par 5

O objetivo dos alunos era com estas sucessões representar todos os tipos de sucessões convergentes e concluir que em todos os casos as sucessões vão ser limitadas.

Nesta alínea o critério de escolha dos exemplos foi a primeira ideia e a estratégia usada foi *propriedades*, pois os alunos tentaram testar sucessões com a propriedade comum de serem convergentes mas variando em termos de monotonia. Durante a segunda entrevista os alunos aperceberam-se de que se esqueceram do caso em que a sucessão não é monótona e admitiram não saber se estes são os únicos tipos de sucessões convergentes.

I Como é que se lembraram destas duas sucessões?

S Como é que nos lembrámos?

N Porque é convergente logo... as convergentes costumam ser deste tipo, se não forem deste tipo são sempre deste ou deste [aponta para uma sucessão que tende para $+\infty$] ou constante.

(...)

I Vocês escolheram duas sucessões convergentes, certo?

N Sim, supostamente acho que faltava só aquela [sucessão $\frac{(-1)^n}{n}$ que é convergente mas não monótona] que não usámos como exemplo, mas também é convergente. Mas sim nós pensámos em exemplos de sucessões convergentes e eram limitadas.

I E a justificação é que como funciona para esses exemplos funciona para todos?

N Sim, porque nós lembramos-mos destes tipos, por isso assumimos que eram os únicos que havia... mas não sei se está bem.

(entrevista 1)

Como é possível observar na Figura 2.6.11, na alínea 2.8 os alunos determinam as funções inversa da função $y = 3x + 2$ e da função $y = x - 5$ e comprovam que estas vão ser também funções afim e a partir destes dois exemplos admitem que a afirmação “A inversa de uma função afim é uma função afim” é verdadeira.

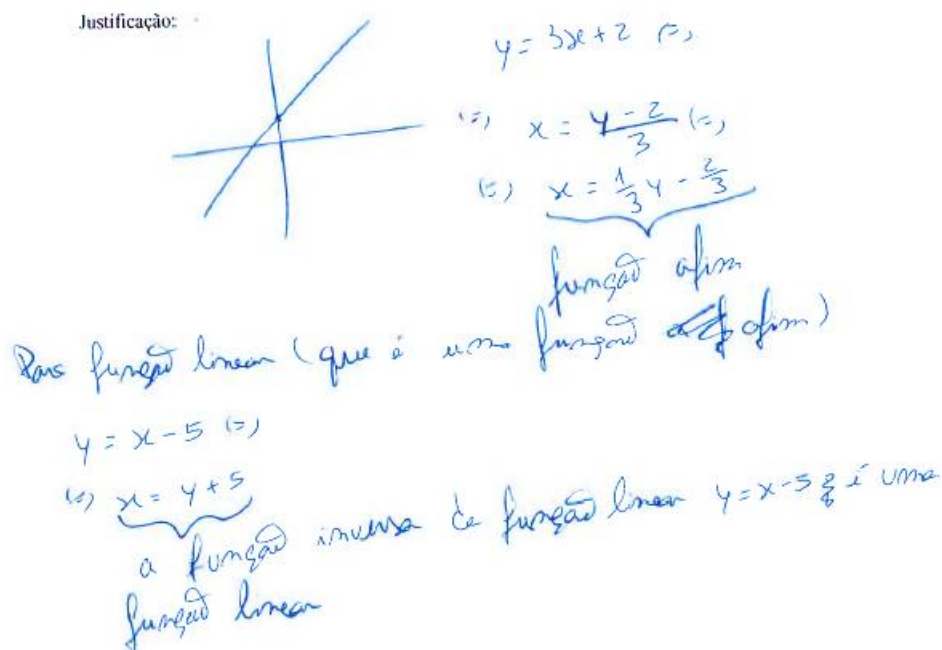


Figura 2.6.11 Resolução da alínea 2.8 pelo Par 5

Tal como na alínea 1.7 os alunos apresentam a intenção de *transmitir um argumento geral* a partir da concretização de alguns exemplos, mas a consciência de que esse passo não é válido, pois comprovar a validade para um exemplo não permite afirmar que a propriedade é válida para todas as sucessões. A partir da ideia do Nuno de utilizar a expressão algébrica $y = mx + b$ o par conseguiu produzir uma demonstração válida durante a segunda entrevista.

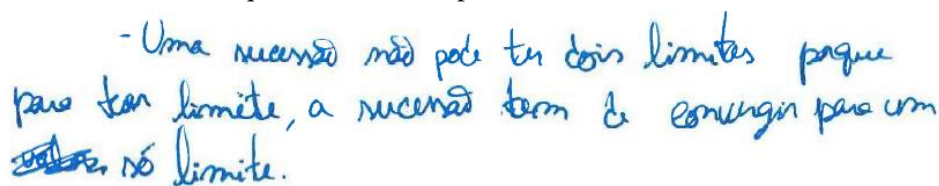
- I O que é que fizeram nesta demonstração?
- S Pronto arranjei uma função afim tipo dei um exemplo e depois fiz a função inversa da que tinha arranjado e... pronto deu igual (...)
Verifiquei que a inversa da afim era uma afim.
- (...)
- I Não demonstraram para todas, certo?
- S Para todas as afins que há?
- I Sim.
- S Não, não...
- N Foi um tiro no escuro
- I Porque é que só fizeram uma?
- S Porque não tínhamos muito tempo e já estava quase na hora de ir embora.
- N E acho que também mesmo que tivéssemos tempo não íamos calcular todas as funções afim.
- (...)
- I Mas acham que não conseguiam resolver esta alínea?
- N Podíamos fazer com o $y = mx + b$ se calhar.
- S Sim eu acho que conseguíamos.

(entrevista 2)

6.2.2 Afirmações existenciais falsas

Das duas afirmações existenciais falsas existentes nas tarefas, os alunos responderam apenas a uma. Rejeitaram a alínea 2.7 (Existe pelo menos uma função do tipo $f(x) = |x - a| + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e domínio \mathbb{R} que é monótona) e apresentam uma justificação adequada à alínea 1.9 (Existe uma sucessão com dois limites diferentes).

Nesta alínea os alunos apresentam uma explicação vaga sem recorrer a nenhum exemplo, como é possível observar na Figura 2.6.12. É de sublinhar que os alunos escreveram primeiro “convergir para um valor” e depois corrigiram para “convergir para um limite”. inicialmente não se devem ter recordado que uma sucessão pode ter mais ou menos infinito como limite.



- Uma sucessão não pode ter dois limites porque para ter limite, a sucessão tem de convergir para um valor, só limite.

Figura 2.6.12 Resolução da alínea 1.9 pelo Par 5

6.3 O uso de representações

Estes alunos recorreram a diferentes representações ao longo das tarefas. Na resolução da primeira tarefa utilizaram gráficos em todas as alíneas menos três. Os gráficos tiveram o propósito de *auxiliar da demonstração*, com a função de ilustrar ou ajudar a perceber o comportamento das sucessões. O termo geral da sucessão foi também utilizado frequentemente e em duas alíneas foi escrito por ramos.

- I E como é que isso [o uso de gráficos] vos ajudou na demonstração?
N Eu gosto de gráficos.
S Sim.
N Ajuda a pensar e perceber.
S Sim, dá para ver mais ou menos.
N Ajuda a visualizar.

(entrevista 1)

Dos doze gráficos apresentados na primeira tarefa oito representavam a sucessão através de uma sucessão de pontos e quatro através de uma linha contínua. Os últimos foram utilizados nas alíneas 1.1, 1.5 e 1.7 e estão apresentados na Figura 2.6.13. Estes gráficos apareceram todos associados à monotonia, sendo que o primeiro representa uma sucessão crescente, o segundo uma sucessão crescente em sentido lado e os gráficos da alínea 1.7 pretendem apresentar “todos os tipos de sucessões convergentes”.

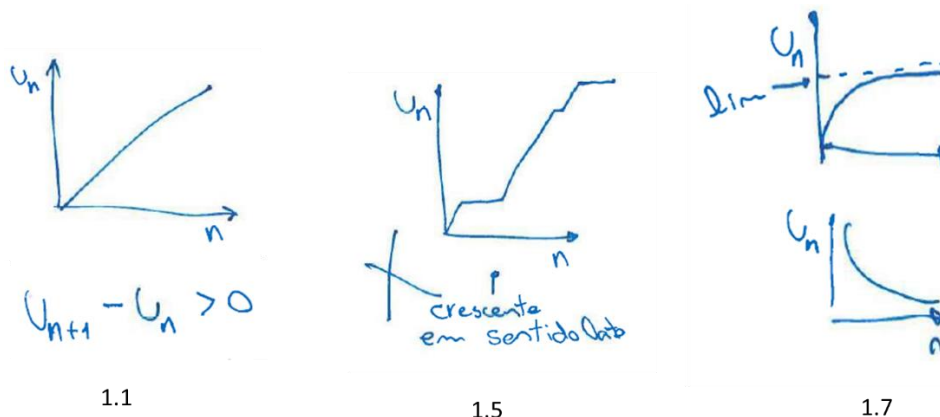


Figura 2.6.13 Gráficos das sucessões representadas através de uma linha contínua pelo Par 5

Na tarefa 2 utilizaram a representação gráfica da função em todas as alíneas a que responderam. Na primeira alínea recorreram também ao diagrama de setas.

Os alunos referiram nas entrevistas que se lembravam primeiro do gráfico e depois iam procurar o termo geral da sucessão ou expressão geral da função correspondente. Apenas não indicaram a expressão algébrica da função da alínea 2.10 pois acharam que “não valia a pena” e “era complicado”.

6.4 Conclusão da análise do Par 5

Os vários exemplos foram analisados tendo de acordo com a classificação de Ellis et. al. (2019) em termos de critério e propósito de escolha, estratégias na escolha e uso de exemplos e nos benefícios que os alunos obtiveram dos exemplos escolhidos.

Sofia e Nuno utilizaram frequentemente exemplos *típicos* (nomeadamente, nas alíneas 1.6, 1.11, 2.1 e 2.10) ou que representavam a *primeira ideia* que tinham tido (nomeadamente, nas alíneas 1.7, 2.3 e 2.9).

Os exemplos escolhidos pelos alunos apresentaram diversos propósitos como *compreender como a conjectura funciona* (como na alíneas 1.11), *transmitir um argumento geral* (como na alínea 1.5), *refutar a afirmação* (como na alínea 1.1) ou reivindicar (como na alínea 2.9), podendo um mesmo exemplo servir vários propósitos.

Em alguns dos casos em que os alunos utilizaram diversos exemplos podemos detetar estratégias na escolha de exemplos, como a estratégia de na alínea 1.7 (Se uma sucessão é convergente então é limitada) em que os alunos estudam uma sucessão convergente decrescente e outra convergente e crescente, a estratégia de *variação sistemática* na alínea 1.11 (O produto de uma sucessão limitada com uma sucessão convergente é uma sucessão convergente) em que os alunos começam por testar um par de sucessões e depois alteram uma delas com o intuito de perceber se o produto das duas será convergente e a estratégia *diversidade* na alínea 2.8 (A inversa de uma função afim é uma função afim) em que os alunos analisam dois exemplos de funções afim *simples*..

Quando os alunos tinham a impressão de que a afirmação é passível de demonstrar através de um exemplo normalmente conseguem encontrar um exemplo adequado mesmo que não seja a *primeira ideia* (por exemplo, na alínea 2.1) mas no caso contrário os alunos aparentam ter algumas dificuldades e por vezes apresentam apenas um ou dois casos e indicam

o valor de verdade conscientes que não demonstraram o pretendido (por exemplo, nas alíneas 1.1, 2.3 e 2.8).

Sofia e Nuno demonstraram nestas tarefas um *método de pensamento geométrico*, baseado maioritariamente no processamento visual-pictórico e não tanto no processamento verbal-lógico, de acordo com a definição de Krutetskii (1976). O tipo de representação mais utilizado pelos alunos nestas tarefas foi a representação gráfica das sucessões e das funções. Na alínea 2.10 os alunos apresentaram apenas o gráfico de uma função como demonstração enquanto que nas alíneas 1.8, 1.9 e 2.6 apresentam apenas texto escrito. No entanto na maior parte das demonstrações os alunos apresentaram o texto acompanhado por um ou mais gráficos que servem tanto como ilustração de uma sucessão ou função explícita (como, nas alíneas 1.6 e 2.3) como um exemplo geral não associado a nenhum termo geral ou expressão algébrica particular (como nas alíneas 1.1 e 1.5).

7 Conclusões

Este estudo foca-se no uso dos exemplos no âmbito da demonstração matemática, analisando os tipos de exemplos escolhidos, o seu propósito e de que forma estes contribuem para a produção de uma demonstração.

Vários autores apontam para a importância dos exemplos na atividade matemática da demonstração, tanto ao auxiliarem a criação de uma demonstração (Knuth, Zaslavsky, & Ellis, 2019) como ao providenciarem um contraexemplo (Fonseca, 2004).

A classificação dos tipos de exemplos usados pelos alunos participantes no estudo foi feita tendo como base a classificação desenvolvida por Ellis *et al.* (2019), analisando os critérios, estratégias, propósitos e benefícios da escolha e uso de exemplos.

Neste capítulo são apresentadas as conclusões desta investigação e as respostas às questões de investigação colocadas no capítulo 1.1, que são:

- i) Quais os critérios ou estratégias usadas pelos alunos na escolha dos exemplos?
- ii) Qual o propósito dos alunos no momento da criação de exemplos?
- iii) Como é que a criação de exemplos e os tipos de exemplo procurados se relacionam com o sucesso da demonstração?
- iv) De que forma os alunos expressam as suas ideias numa demonstração e como é que isso contribui para o sucesso da demonstração?

Em termos dos critérios e estratégias utilizadas pelos alunos, verificou-se que os alunos recorrem frequentemente a exemplos *típicos*, de que se recordam das aulas, ou à *primeira ideia* que têm. No entanto esta estratégia nem sempre permite chegar a um exemplo adequado, como foi o caso das alunas do Par 2, que na resolução da primeira tarefa recorreram frequentemente às sucessões de termo geral $2/n$ e $n/2$, o que não lhes permitiu criar um exemplo adequado para muitas das afirmações. O Par 3 optou por uma estratégia diferente e focaram-se mais nos exemplos *simples* do que os outros dois pares, questionando-se como é que podiam resolver cada alínea de forma mais rápida e eficiente. Esta estratégia pareceu resultar bastante bem e os exemplos escolhidos por estes alunos eram adequados a cada afirmação.

O critério *favorito* não surgiu nas resoluções dos alunos, o que se pode dever ao nível de escolaridade dos alunos, talvez no Ensino Básico a preferência pessoal ocupe uma posição mais significativa. Os critérios *caso mínimo* e *caso limite* também não apareceram nestas resoluções, no entanto, tendo em conta a inexistência de uma relação de ordem no conjunto de sucessões e no conjunto de sucessões, isto era esperado.

Quanto aos propósitos revelados no momento de criação dos exemplos, as conclusões sugerem que os exemplos foram utilizados nos vários momentos de resolução deste tipo de atividade e com diversos propósitos distintos. Os alunos utilizaram os exemplos para tentar perceber se uma dada afirmação é verdadeira ou falsa, na exploração e na discussão entre pares,

com o propósito de *transmitir um argumento geral, explorar a representação*, ou outro. No momento de apresentar uma justificação (ou demonstração) do valor de verdade identificado os alunos recorreram também aos exemplos, com o objetivo de *reivindicar* o seu ponto de vista, *refutar a afirmação ou outro*.

Em algumas resoluções os exemplos tinham um papel central na demonstração enquanto que noutras vezes tomavam um papel meramente ilustrativo. Cada par apresentou uma relação diferente com os exemplos, mas todos pareceram beneficiar dos exemplos, tanto que ao longo da investigação os alunos foram recorrendo cada vez mais frequentemente a exemplos. Esta tendência é clara, por exemplo, na primeira tarefa do Par 3, pois os alunos realizaram as alíneas por ordem, e não apresentaram exemplos nas primeiras quatro alíneas, mas depois utilizaram-nos em todas as outras alíneas desta tarefa (e em todas as alíneas da segunda tarefa exceto uma). O Par 5 apresentou muitas vezes uma justificação geral, acompanhada por um exemplo particular, no entanto os alunos reconhecem o papel distinto entre estes dois elementos. Uma das alíneas em que os alunos apresentaram uma resolução deste tipo foi a alínea 1.3, no entanto, estavam conscientes que, neste caso, o exemplo não era fundamental e na entrevista Sofia referiu que esse exemplo particular “era para mostrar como é que ficava, mas depois não valeu de nada porque já estava em cima.

Quando os alunos escolhiam mais do que um exemplo, por vezes era possível perceber que o faziam de modo organizado e tendo em conta uma estratégia como *explorar as propriedades*, a *variação sistemática* ou *diversidade*. No entanto, nem sempre era possível perceber qual era o propósito da escolha desse certo conjunto ou qual a estratégia geral dos alunos.

As conclusões deste estudo apontam para o uso de exemplos como um fator relevante para o sucesso da atividade de demonstração, tanto que os próprios alunos tiveram essa percepção e optaram por utilizar exemplos nas suas resoluções. No entanto, analisando os casos destes alunos não surgiu nenhuma estratégia de sucesso na escolha e uso de exemplos que fosse válida para todos os alunos ou um tipo de exemplo que se mostrasse decisivo no desenlace da demonstração. O Par 3 pareceu beneficiar bastante da escolha de exemplos *simples*, por oposição à *primeira ideia* ou ao uso de exemplos *típicos*, mas o seu sucesso pode estar relacionado com o nível dos alunos a esta disciplina e o seu maior à vontade com os conceitos.

Quanto à forma como os alunos expressam as suas ideias na demonstração, estes pareceram beneficiar bastante do uso de diferentes representações de sucessão e de função e, tal como referido por Aspinwall e Shaw (2002), as diferentes representações revelaram-se uma boa ferramenta para compreender o raciocínio dos alunos. No entanto, os alunos revelaram algumas dificuldades em passar de uma representação para outra, como referido por Paradinha e Leuca (2010), por vezes ao passar do gráfico para o termo geral da sucessão ou expressão da função os alunos cometiam algumas incorreções (ver, por exemplo, Figura 2.6.10).

O uso de diferentes representações, particularmente o gráfico da sucessão e o diagrama de setas, foram decisivos no sucesso da demonstração. As conclusões demonstraram que a maior parte dos alunos não utiliza representações variadas se não forem incentivados pelo professor ou outro elemento. O Par 5 foi o único que revelou um *método de processamento matemático geométrico* e que utilizou frequentemente gráficos, tendo o feito desde a primeira tarefa. Os

outros pares apresentaram um *método de processamento matemático analítico* na primeira tarefa, mas alteraram o seu método na segunda tarefa, convergindo para o *método geométrico*.

No caso do par 5 esta mudança pareceu dever-se aos comentários da investigadora na primeira entrevista e à observação da sua resolução. As alunas deste par revelaram na primeira entrevista que, ao sair da sala depois da primeira tarefa, repararam que alguns colegas tinham usado gráficos, mas que na altura não lhes tinha ocorrido essa estratégia. Particularmente no caso destas alunas, esta mudança de método pareceu contribuir bastante para conseguirem identificar o valor de verdade correto e produzir melhores justificações.

O Par 3 apenas utilizou um gráfico na primeira tarefa e refere que nas outras alíneas preferiram utilizar o processamento analítico pois consideraram “mais simples nas outras justificar mesmo com cálculos” (Guilherme), esta atitude pode estar relacionada com o tipo de trabalho realizado em aula ou por os alunos acharem que a justificação através de gráficos não é tão exata. No entanto, na segunda tarefa este par opta por utilizar bastantes vezes a representação gráfica da função, em entrevista Miguel refere que os gráficos o ajudaram a pensar e visualizar as funções.

Um tema que surgiu da análise das resoluções dos alunos foi a relação que estes apresentaram com os tipos de afirmações. Nas afirmações do tipo 1 (que admitem uma demonstração através da exibição de um exemplo), o valor de verdade apresentado pelos alunos algumas vezes estava correto e outras vezes estava incorreto, mas nas afirmações do tipo 2 o panorama foi bastante diferente. Os alunos não indicaram o valor de verdade errado em nenhuma das afirmações deste tipo, mas rejeitaram este tipo de afirmações com alguma frequência, e para as afirmações em que apresentaram uma justificação, esta muitas vezes consistiu apenas na exibição de um ou dois exemplos que verificavam a propriedade. Este tipo de reação aconteceu mais frequentemente na primeira tarefa. Na entrevista Alice mencionou que resolveram assim este tipo de questões pois é o método usado nas aulas.

M Não pensámos que tinha de se geral.

A Por exemplo quando nós damos matéria nas aulas a professora dá a definição e depois dá um exemplo qualquer então se calhar foi por aí. (...) A definição é sempre geral mas dão sempre um exemplo que é só um.

Conforme os alunos vão avançando na escolaridade “o foco tende a ser cada vez mais a apresentação da matemática, talvez sob a suposição de que os alunos já têm a capacidade de pensar em termos formais e não precisam de aprender a articular entre suas conceções ingênuas. e os formalismos matemáticos” (NCTM, 2000, pp. 67-68). No entanto, como foi possível verificar neste estudo, no ensino secundário os alunos ainda apresentam bastantes dificuldades em construir uma justificação formal.

Este estudo vem apoiar a convicção de que “o raciocínio e a demonstração não são atividades especiais reservadas para momentos especiais ou tópicos especiais no currículo, mas devem ser uma parte natural e contínua das discussões em sala de aula, não importa o tópico que está sendo estudado” (NCTM, 2000, p. 342). Em particular, a construção de exemplos deve ser trabalhada com os alunos na sala de aula pois “simplesmente pedir que os alunos gerem exemplos sobre um conceito pode não melhorar substancialmente as suas capacidades de

escrever demonstrações sobre esse conceito” (Iannone, Inglis, Meijía-Ramos, Simpson, & Weber, 2011, p. 11).

O processo de construir exemplos e demonstrações é uma atividade complexa e para que todo o seu potencial possa ser alcançado, este não pode ser limitado no tempo (Sanderfur, Mason, & Watson, 2013). Surge portanto a necessidade não só de realizar mais estudos sobre este tema, como também de criar mais momentos na sala de aula em que os alunos tenham oportunidade de explorar conjecturas e criar os seus próprios exemplos.

8 Bibliografia

- Aires, L. (2015). *Paradigma qualitativo e práticas de investigação educacional*. Lisboa: Universidade Aberta.
- Aspinwall, L., & Shaw, K. L. (2002). Representations in calculus: two contrasting cases. *The Mathematics Teacher*, 95, 434-439.
- Boavida, A. M. (2001). Um olhar sobre o ensino da demonstração em Matemática. *Educação e Matemática*, 63, 11-15.
- Bogdan, R. C., & Biklen, S. K. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Porto: Porto Editora.
- De Villiers, M. D. (1990). The role and function of proof in mathematics. *Pythagoras*, 24(24), 17-24.
- Denzin, N., & Lincon, Y. (1994). *Handbook of qualitative research*. Thousand Oaks (CA): Sage Publications.
- Ellis, A., Ozgur, Z., Vinsonhaler, R., Dogan, M.; Carolan, T., Lockwood, E., Lynche, A., Sabouri, P., Knuth, E., Zaslavsky, O. (2019). Student thinking with examples: The criteria-affordances-purposes-strategies framework. *Journal of Mathematical Behavior*, 53, 263-283.
- Fonseca, L. (2004). *Formação inicial de professores de Matemática: A demonstração em geometria*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.
- Huete, J. C., & Bravo, J. A. (2006). O ensino da Matemática: *Fundamentos teóricos e bases psicopedagógicas*. Porto Alegre: Artmed.
- Iannone, P., Inglis, M., Meijía-Ramos, J. P., Simpson, A., & Weber, K. (2011). Does generating examples aid proof production? *Educational Studies in Mathematics*, 77(1), 1-14.
- Krutetskii, V. A. (1976). *The Psychology of Mathematical Abilities in School-Children*. Chicago: University of Chicago Press.
- Lockhart, P. (2009). *A Mathematician's Lament*. New York, NY: Bellevue Literary Press.
- Lynch, A., & Lockwood, E. (2019). A comparison between mathematicians' and students' use of example for conjecturing and proving. *Journal of Mathematical Behavior*, 53, 323-338.
- Meirinhos, M., & Osório, A. (2010). O estudo de caso como estratégia de investigação em educação. *EDUSER: revista de educação*, 2(2), 29-65.
- Merriam, S. (1988). *Case Study Research in Education: A Qualitative Approach*. San Francisco, CA: Jossey-Bass.
- NCTM (2000). *Principles and Standards*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Olabuenaga, J. (2003). *Metodología de la investigación cualitativa* (3 ed.). Bilbao: Universidad de Deusto.
- Paradinha, H., & Leuca, T. (2010). Um olhar sobre a construção de conexões matemáticas. *Educação e Matemática* (110), 27-32.
- Ponte, J. P. (2006). Estudos de caso em educação matemática. *Bolema*, 5, 105-132.
- Rocha, H. (2018). Demonstração matemática versus demonstração no ensino da Matemática. Em A. D. A Caseiro (Ed.), *Atas do SIEM – seminário de investigação em educação matemática* (pp. 70-82). Almada: APM.
- Rocha, H. (2019). Mathematical proof: from mathematics to school mathematics. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 377, 1-12.
- Rodríguez, G., Flores, J. G., & Jiménez, E. G. (1996). *Metodología de la investigación cualitativa*. Málaga: Ediciones Aljibe.

- Ryken, A. E. (2009). Multiple representations as sites for teacher reflection. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 12, 347–364.
- Sanderfur, J., Mason, J., & Watson, A. (2013). Generating and using examples in the proving process. *Educational Studies in Mathematics*, 83(3), 323-340.
- Schoenfeld, A. H. (1994). What do we know about mathematics curricula? *Journal of Mathematical Behaviour*, 13, 55-80.
- Silva, E. L., & Menezes, E. M. (2005). *Metodologia da pesquisa e elaboração de dissertação* (4 ed.). Florianópolis: UFSC.
- Stake, R. (1999). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Morata.
- Steele, M. D., & Rogers, K. C. (2012). Relationships between mathematical knowledge for teaching and teaching practice: the case of proof. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 15(2), 159-180.
- Tripathi, P. N. (2008). Developing Mathematical Understanding through Multiple Representations. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 13(8), 438-445.
- Watson, A., & Chick, H. (2011). Qualities of examples in learning and teaching. *ZDM*, 43, 283-294.
- Yin, R. (1981). The case study as a serious research strategy. *Research Strategy. Knowledge*, 3(1), 97–114.
- Yin, R. (1986). *Case study research. Design and methods* (2 ed., Vol. 5). Sage Publications.
- Yin, R. (1993). *Applications of case study research*. Beverly Hills, CA: Sage Publishing.
- Yin, R. (2001). *Estudo de caso. Planejamento e Métodos* (2 ed.). Porto Alegre: Bookman.

9 Anexos da segunda parte

9.1 Enunciado da primeira tarefa

Tarefa 1

Nome: _____ N.º: _____
Nome: _____ N.º: _____



Em cada uma das alíneas indica justificando se a afirmação é verdadeira ou falsa.
Explica detalhadamente o teu raciocínio. Indica se mudares de opinião.

Resolve uma pergunta por folha e não apagues nada.

1. Uma sucessão crescente e minorada é limitada
2. Uma progressão aritmética de razão natural é sempre monótona.
3. Algumas progressões aritméticas são limitadas.
4. Uma progressão geométrica é sempre monótona.
5. Nem todas as sucessões crescentes tendem para infinito.
6. Se uma sucessão é convergente então é monótona
7. Se uma sucessão é convergente então é limitada
8. Se uma sucessão é limitada então é convergente.
9. Existe uma sucessão com dois limites diferentes.
10. A soma de um infinitésimo com uma sucessão infinitamente grande é infinitamente grande.
11. O produto de uma sucessão limitada com uma sucessão convergente é uma sucessão convergente.

9.2 Enunciado da segunda tarefa

Tarefa 2

Nome: _____ N.º: _____
Nome: _____ N.º: _____



Em cada uma das alíneas indica justificando se a afirmação é verdadeira ou falsa. Explica detalhadamente o teu raciocínio. Indica se mudares de opinião.

Resolve uma pergunta por folha e não apagues nada.

1. Nem todas as funções admitem inversa.
2. Uma função pode ser simultaneamente par e ímpar.
3. Uma função pode não ser par nem ser ímpar.
4. Se uma função de domínio \mathbb{R}^+ é crescente em sentido lato então a reflexão de eixo Ox da representação do gráfico dessa função é também crescente em sentido lato.
5. Se uma função de domínio \mathbb{R}^+ é crescente em sentido lato então a reflexão de eixo Oy da representação do gráfico dessa função é decrescente em sentido lato.
6. Um extremo relativo de uma função é sempre um extremo absoluto.
7. Existe pelo menos uma função do tipo $f(x) = |x - a| + b$ com $a, b \in \mathbb{R}$ e domínio \mathbb{R} que é monótona.
8. A função inversa de uma função afim é uma função afim.
9. Algumas funções polinomiais não têm zeros.
10. Se uma função é crescente em sentido lato então não admite um máximo absoluto.
11. Uma função do tipo $f(x) = \sqrt{x - a} + b$ com $a, b \in \mathbb{R}$ e domínio $[a, +\infty[$ é sempre monótona.