Rui Pedro Campos Bento Barros Candeias

Mestre em Educação

A matemática na formação inicial dos professores do ensino primário (1844-1974): o ensino dos números racionais não negativos (frações e decimais)

Dissertação para obtenção do Grau de Doutor em Ciências da Educação,
Especialidade em Teoria e Desenvolvimento Curricular

Orientador: Professor Doutor José Manuel Leonardo de Matos, Professor Auxiliar aposentado da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa

Coorientadora: Professora Doutora Maria Cecília Soares de Morais Monteiro, Professora Coordenadora, aposentada da Escola Superior de Educação de Lisboa

Júri:

Presidente: Professora Doutora Maria Paula Pires dos Santos Diogo, Professora Catedrática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa

Arguentes: Professor Doutor Alexandre Maz Machado, Titular de Universidad, Universidad de Córdoba, Espanha

Professora Doutora Maria Cristina Araújo de Oliveira, Professora Associada do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Juíz de Fora, Brasil

Vogais: Professor Doutor José Manuel Leonardo de Matos, Professor Auxiliar Aposentado da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa

Professor Doutor Francisco José Brito Peixoto, Professor Associado do ISPA – Instituto Universitário de Ciências Psicológicas, Sociais e da Vida

Professor Doutor Pedro da Cruz Almeida, Professor Adjunto da Escola Superior de Educação de Lisboa do Instituto Politécnico de Lisboa

Professora Doutora Ana Elisa Esteves Santiago, Professora Adjunta Convidada da Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Coimbra

Professor Doutor António Manuel Dias Domingos, Professor Auxiliar da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

novembro de 2020

[A matemática na formação inicial dos professores do ensino primário (1844-1974): o ensino dos números racionais não negativos (frações e decimais)]

À minha família

Agradecimentos

No final de um trabalho que se desenvolveu ao longo de vários anos muitas são as pessoas a quem devo agradecer.

Começo por agradecer ao Professor José Manuel Matos por ter aceitado a orientação da tese, por ter encorajado o desenvolvimento do trabalho e por todo o apoio e orientação que foi dando ao longo destes anos.

Um agradecimento também à Professora Cecília Monteiro, com quem fiz a iniciação científica com o mestrado em 2008 e que muito me acompanhou na investigação ao longo dos últimos anos.

Nestes agradecimentos não posso deixar de destacar a Mária e o TóZé, que tanto incentivam o desenvolvimento de projetos nesta área da história da educação matemática, através do seu exemplo.

Durante os últimos anos foram muitos os sábados (bem) passados com um grupo a quem muito se deve este trabalho. Espero não me esquecer de ninguém do Grupo dos Seminários da FCT orientado pelo Professor António Domingos: Alexandra Rodrigues, Ana Santiago, Ana Filipa Silva, Conceição Costa, Carlos Carvalho, Cristina Costa, Fernando Santos, Helena Rocha, Manuela Subtil, Paula Teixeira, Pedro Almeida, Teresa Monteiro e outros colegas que por lá foram passando (que me desculpem se me esqueci de alguém).

Numa primeira fase de desenvolvimento da tese foi necessário consultar documentos em arquivos de Escolas Superiores de Educação. Na ESE de Lisboa foi essencial a disponibilidade do Professor Nuno Ferreira, que pôs à disposição toda a documentação do arquivo e disponibilizou um gabinete de trabalho. Não posso deixar de agradecer postumamente ao Professor Moreirinhas Pinheiro pelo apoio prestado e pela conservação do arquivo durante muitos anos.

O meu agradecimento também para as pessoas do arquivo da ESE de Coimbra que disponibilizaram e facilitaram o acesso a todos os documentos.

Agradeço ainda ao Grupo de História do Ensino da Matemática da Associação de Professores de Matemática.

Agradeço à Teresa, à Mafalda e à Madalena, por terem condescendido nas presenças ausentes.

Agradeço ainda ao Vasco pela revisão do documento e pelas anotações.

Finalizo com os meus agradecimentos à Fundação para a Ciência e a Tecnologia, pelo apoio concedido através do projeto: PTDC/CED-EDG/32422/2017

This work is supported by national funds through FCT – Foundation for Science and Technology, I. P., in the context of the project PTDC/CED-EDG/32422/2017

Resumo

Este trabalho tem como objetivo estudar o desenvolvimento do conhecimento profissional do professor para o ensino da matemática trabalhado nos cursos de formação inicial de professores do ensino primário em Portugal, entre 1844 e 1974. Foi formulada a questão geral: Como se desenvolveu o conhecimento profissional do professor para o ensino da matemática na formação inicial dos professores do ensino primário, no período em estudo, nomeadamente no conteúdo dos números racionais não negativos (frações e decimais)? A partir desta questão foram formuladas questões específicas, organizadas em dois conjuntos. O primeiro relaciona-se com a análise dos normativos legais e do currículo prescrito. O segundo centra-se na análise dos manuais utilizados na formação de professores. O quadro teórico desenvolve-se em torno de duas áreas, o conhecimento profissional do professor e o currículo. O conhecimento profissional do professor para o ensino da matemática é em primeiro lugar discutido de uma forma global, centrando-se depois no conhecimento para ensinar os números racionais não negativos. O currículo é discutido na relação existente entre os diferentes níveis de decisão curricular e a forma como o discurso pedagógico é recontextualizado nestes níveis de decisão. O estudo enquadra-se nos trabalhos de investigação histórica, tendo a análise dos dados um caráter descritivo e interpretativo. Os documentos que constituem as fontes dividem-se em dois grupos, os documentos legais e os manuais ou livros de texto. As categorias de análise basearam-se no quadro teórico, mas foram adaptadas tendo em conta os dados recolhidos. Os resultados da análise de dados mostram que, no âmbito cronológico do estudo, se pode distinguir dois períodos na formação inicial dos professores do ensino primário, quanto ao conhecimento profissional do professor para ensinar matemática. O primeiro período, que vai de 1844 até 1930, é marcado pela existência de disciplinas da componente de ciências de especialidade, mais centradas no conhecimento do conteúdo, e onde se evidencia um lento processo de autonomização das disciplinas de metodologia centradas na componente pedagógica. O segundo período, de 1930 a 1974, marcado pelo peso das disciplinas da componente pedagógica, mais centradas no conhecimento pedagógico do conteúdo. Apesar de ser possível identificar uma relação entre os planos de estudos, os programas das disciplinas e a forma como são elaborados e organizados os manuais, é também possível identificar uma certa autonomia dos seus autores, nomeadamente na abordagem que fazem aos números racionais. Uma análise mais fina centrada no desenvolvimento do ensino dos números racionais permitiu perceber que, apesar de os autores dos manuais da componente de ciências de especialidade estarem mais centrados no conhecimento comum do conteúdo, este conhecimento permitiu que as propostas apresentadas por estes autores promovessem também um conhecimento especializado do conteúdo e o desenvolvimento do conhecimento pedagógico do conteúdo, nomeadamente do conteúdo e do seu ensino. A adoção do sistema métrico decimal parece influenciar a forma como, tanto no currículo prescrito, como nos manuais, se faz a primeira abordagem aos números racionais, que com o passar dos anos se vai centrando na representação decimal, deixando de desenvolver alguns aspetos relacionados com as frações. Nos dois períodos foi possível identificar uma influência das ideias associadas à Educação Nova no ensino da matemática, embora existindo uma reinterpretação destas ideias nos manuais do segundo período.

Palavras-chave: história da educação matemática; formação de professores; ensino primário; conhecimento de professores; números racionais.

Abstract

This work aims to study the development of the teacher's professional knowledge for the teaching of mathematics worked in the initial training courses for primary school teachers in Portugal, between 1844 and 1974. A general question was formulated: How did the teacher's professional knowledge for teaching mathematics develop in the initial training of primary school teachers during the period under study, namely in the content of non-negative rational numbers (fractions and decimals)? From the general question, more specific questions were formulated, organized in two sets. The first relates to the analysis of legal regulations and the prescribed curriculum. The second set of questions focuses on the analysis of the manuals used in teacher training. The theoretical framework is developed around two major areas, the professional knowledge of the teacher and the curriculum. The teacher's professional knowledge is first discussed in more global terms, then focusing on knowledge to teach non-negative rational numbers. The curriculum is discussed considering the relationship between the different levels of curriculum decision and the way in which pedagogical discourse is recontextualized at these levels of decision. The study is a historical research work, and the data analysis has a descriptive and interpretative character. The documents constituting the sources are divided into two groups, the legal documents and manuals or textbooks. The analysis categories were based on the theoretical framework but were adapted considering the data collected. The results of the data analysis show that, in the chronological scope of the study, two periods can be distinguished in the initial training of primary school teachers, regarding the professional knowledge of the teacher to teach mathematics. The first period, from 1844 to 1930, is marked by the existence of disciplines from the specialty science component, more focused on content knowledge, and where a slow process of autonomy of the methodology disciplines centered on the pedagogical component is evident. The second period, from 1930 to 1974, marked by the weight of the disciplines of the pedagogical component, more centered on the pedagogical content knowledge. Although it was possible to identify a relationship between the study plans, the curriculum of the disciplines and the way in which the manuals are organized, it is also possible to identify a certain autonomy of their authors, namely in their approach to rational numbers. A more detailed analysis centered on the development of the teaching of rational numbers allowed us to realize that, although the authors of the manuals of the specialty science component were more focused on the common content knowledge, this knowledge allowed the proposals presented by these authors to also promote specialized content knowledge and the development of pedagogical content knowledge, namely the knowledge of content and teaching. The adoption of the metric decimal system seems to influence the way in which, both in the prescribed curriculum and in the manuals, the first approach to rational numbers is made, which over the years focuses on decimal representation, failing to develop some aspects related to fractions. In both periods it was possible to identify an influence of the ideas associated with New Education in the teaching of mathematics, although there is a reinterpretation of these ideas in the manuals of the second period.

Keywords: history of mathematics education; teacher training; primary school; teachers knowledge; rational numbers.

Índice Geral

Índice de Tabelas

Índice de Figuras

Índice de Anexos

1

Capítulo 1 – Introdução

Neste capítulo 1 apresenta-se o estudo, as motivações pessoais do autor para a sua realização, a organização, o enquadramento, a problemática e relevância, os objetivos e as questões de investigação.

1.1. Apresentação do estudo

O conhecimento profissional do professor para ensinar matemática tem sido um tema de interesse da investigação em educação nos últimos anos. No entanto, no contexto português a perspetiva histórica tem estado pouco presente nesse debate. Com esta investigação pretende-se estudar o desenvolvimento do conhecimento profissional do professor para o ensino da matemática trabalhado nos cursos de formação inicial de professores do ensino primário em Portugal, no período entre 1844 e 1974. O estudo foca-se no conhecimento profissional do professor para ensinar matemática nos primeiros anos de escolaridade e na forma como este conhecimento se foi desenvolvendo nos cursos de formação inicial de professores do ensino primário e tem, por isso, uma perspetiva histórica.

No sentido de estudar a evolução do conhecimento profissional do professor para ensinar matemática é necessário saber onde e como ele se desenvolveu. É por isso necessário conhecer os cursos de formação inicial dos professores do ensino primário, estudando as disciplinas, o conhecimento relacionado com a matemática e o seu ensino, e o seu currículo. O estudo dos documentos normativos é uma fonte essencial para conhecer as intenções e a forma como se pretendia que o professor desenvolvesse o seu conhecimento profissional para ensinar. O estudo enquadra-se assim na história da educação, mais especificamente na história das disciplinas escolares, onde se incluem aspetos da história do currículo.

No presente trabalho, o currículo não é visto apenas como o prescrito centralmente, ele é abordado também como o currículo que é apresentado aos professores através de manuais ou livros de texto, ou como currículo moldado, quando os professores elaboram os próprios manuais que utilizam na sua prática de formação de professores.

Para aprofundar o conhecimento do desenvolvimento profissional do professor, os manuais surgem como uma fonte do que seriam as práticas na formação inicial de professores. Nos manuais, para além de uma análise global sobre os autores, a organização das obras e as propostas para o ensino da matemática, o estudo centra-se no desenvolvimento do conhecimento profissional do professor, através da forma como ele vai estando presente no ensino de um conteúdo específico, os números racionais não negativos. Interessa descrever a forma como este conteúdo era abordado, o conhecimento que era trabalhado nos manuais e as práticas de ensino descritas pelos professores que elaboraram os manuais. Estas práticas surgem em contextos concretos e é necessário enquadrá-las no momento histórico em que ocorrem. No entanto, o desenvolvimento atual da didática e do conhecimento profissional do professor para o ensino da matemática também fornece ferramentas úteis para esta análise. Não se trata de julgar o passado, nem cair em críticas que não seriam legítimas, trata-se de utilizar uma perspetiva atual no sentido de tentar compreendê-lo e de perceber que marcas deixou.

As motivações pessoais para a escolha do tema e a abordagem com uma perspetiva histórica surgem essencialmente por duas razões. Por um lado, na experiência enquanto professor do 1.º ciclo tenho-me deparado com dificuldades dos alunos na aprendizagem dos números racionais, nomeadamente em aspetos como a comparação e ordenação, a equivalência de frações ou a identificação da unidade de referência. Ao realizar o estudo verificou-se que muitas das dificuldades identificadas correspondem ao que a investigação apresenta, sendo muitas vezes referido na literatura que se trata de um tema de grande complexidade no ensino básico. Desta forma, a investigação contribui para a melhoria da prática pedagógica não só pessoal, mas também do grupo de professores com que trabalho na escola. Ainda na minha experiência enquanto professor, tenho verificado nos últimos anos diversas alterações no currículo prescrito que indicam diferentes abordagens para o estudo dos números racionais nos primeiros anos de escolaridade. Essas alterações criaram em mim uma curiosidade sobre como seriam as abordagens propostas no passado menos recente, tanto no currículo prescrito, como na formação inicial dos professores que lecionam estes anos de escolaridade.

Por outro lado, o facto de estar integrado num grupo de investigação que desenvolve uma reflexão sobre o que são as práticas atuais do ensino da matemática, não só, mas também através do estudo do que foram as práticas no passado e como estas se desenvolveram, contribuiu para que tivesse contacto com diferentes programas e manuais utilizados na formação de professores, onde foi possível verificar que as abordagens propostas para o ensino dos números racionais nem sempre foram iguais. Esta constatação levou-me a considerar importante aprofundar o conhecimento que se tem atualmente sobre as propostas, não só como conhecimento histórico, mas também para identificar o que se foi alterando e permanecendo nas diferentes abordagens.

1.2. Organização do estudo

O estudo está organizado em oito capítulos, que integram o quadro teórico, a metodologia, a apresentação e análise de dados e as conclusões.

No primeiro capítulo apresenta-se o estudo e a sua organização. Neste capítulo é também feita uma revisão da literatura, com as investigações efetuadas sobre a matemática na história da formação de professores, história do currículo e das disciplinas escolares, o ensino dos números racionais e os livros de texto utilizados nas escolas de formação de professores do ensino primário. No primeiro capítulo é ainda apresentada a caracterização da presente investigação quanto a aspetos metodológicos, a problemática e a relevância do estudo, os objetivos e as questões de investigação.

O segundo e o terceiro capítulo dedicam-se ao quadro teórico. O quadro teórico encontra-se organizado em duas áreas: o conhecimento profissional do professor e o currículo. No capítulo dedicado ao conhecimento profissional do professor discute-se a relevância do tema e como este se foi desenvolvendo, destacando-se o conhecimento profissional do professor para o ensino da matemática e em especial para o ensino dos números racionais. No capítulo dedicado ao desenvolvimento curricular apresenta-se uma discussão sobre o que se entende por currículo, as aceções mais comuns de um conceito que surge na literatura com diversos significados, as teorias sobre o currículo e os níveis de decisão curricular. O capítulo centra-se depois nas teorias críticas relacionadas com a sociologia da educação, destacando a teoria de Bernstein, o modelo do discurso pedagógico, as relações que se podem estabelecer entre o currículo e outros contextos pedagógicos e os processos de recontextualização que podem ocorrer quando o currículo é transposto para outros níveis do sistema educativo.

O quarto capítulo trata da metodologia adotada neste trabalho. Apresenta-se neste capítulo a caracterização e planificação da investigação, a localização, seleção e a crítica das fontes e os critérios de análise da documentação.

No quinto, sexto e sétimo capítulo apresentam-se os dados e a sua análise. O quinto capítulo é dedicado à apresentação e análise dos dados relacionados com a legislação sobre a formação de professores, o sexto capítulo centra-se nos manuais dos cursos de formação de professores, incidindo a análise na caracterização dos autores, caracterização global da obra e caracterização do conteúdo matemático. No sétimo capítulo aprofunda-se a caracterização do conhecimento profissional do professor para o ensino dos números racionais.

No capítulo oito apresenta-se as conclusões, limitações do estudo e considerações finais da investigação realizada.

Resta referir que neste trabalho se optou por utilizar a ortografia do português atual, quer nas citações longas, quer na designação especifica das disciplinas dos cursos de formação de professores do ensino primário. Nos títulos dos manuais manteve-se a ortografia da época. Os nomes das disciplinas e os nomes dos manuais são apresentados em itálico com inicial maiúscula.

1.3. Enquadramento

Os estudos sobre a história do ensino da matemática encontram-se na confluência de diversas áreas do saber, nomeadamente a história da educação, a história da matemática e a educação matemática (Matos, 2007). Neste sentido, na revisão da literatura relacionada com o tema em estudo foi necessário ter em conta diferentes áreas. É ainda de salientar que alguns estudos referidos na revisão da literatura cruzam também diferentes áreas.

Tratando-se de um estudo que relaciona a história da educação, a história das disciplinas escolares e o desenvolvimento do conhecimento profissional dos professores, foi necessário pesquisar trabalhos que abordassem o tema da história da educação matemática e a história da formação de professores. Simultaneamente também se aborda no estudo a história do currículo e das disciplinas escolares, neste caso do ensino da matemática. Foi por isso necessário fazer um levantamento dos trabalhos realizados neste âmbito.

No entanto, este trabalho tem o seu enfoque na análise do conhecimento profissional do professor para o ensino de um conteúdo matemático, os números racionais, numa perspetiva histórica. Foi assim necessário fazer uma revisão de literatura no âmbito da didática da matemática, centrada no conhecimento profissional do professor para ensinar matemática, mais especificamente no ensino e na aprendizagem dos números racionais não negativos nos primeiros anos de escolaridade.

Uma parte do trabalho centra-se nos livros de texto de matemática utilizados na formação inicial dos professores do ensino primário. Será também importante perceber que estudos têm sido realizados sobre livros de texto.

Para a revisão dos estudos realizados, efetuaram-se consultas em diferentes bases de dados como EBSCO e Web of Science, Scielo Portugal e RCAAP, utilizando palavras-chave como: Educação matemática; conhecimento pedagógico do professor; números racionais; formação de professores; história do currículo, Mathematics education; teachers pedagogical knowledge; rational numbers; teachers training; curriculum history. As consultas foram realizadas até ao final de 2016. Para além das bases de dados foram ainda consultadas publicações onde se faz o levantamento de trabalhos na área da história do ensino da matemática, nomeadamente Almeida e Matos (2014) e Valente (2014).

1.3.1. Conhecimento profissional do professor para o ensino da matemática (ensino dos racionais)

Na área do conhecimento profissional do professor a literatura é muito vasta, pelo que se faz aqui referência aos trabalhos de Shulman (1986, 1987) pela forma como têm influenciado outros trabalhos na mesma área. Também na área do conhecimento profissional do professor para ensinar matemática têm-se desenvolvido muitas investigações, constituindo o trabalho de Ball, Thames e Phelps (2008) uma referência.

No que diz respeito ao conhecimento profissional do professor para o ensino dos números racionais têm-se realizado diversas investigações, tanto a nível internacional, como em Portugal, que importa referir. As dificuldades que os alunos revelam na abordagem aos números racionais têm sido mencionadas em diversos estudos e trabalhos de investigação (por exemplo, Behr, Harel, Post & Lesh, 1992; Monteiro & Pinto, 2005; Ni & Zhou, 2005; Nunes, Bryant & Watson, 2009; Vamvakoussi & Vosniadou, 2004). Um dos obstáculos dos alunos na aprendizagem dos números racionais prende-se com a generalização desadequada do conhecimento que já têm dos números naturais (McMullen, Laakkonen, Hannula-Sormunen & Lehtinen, 2014; Ni & Zhou, 2005). A densidade do conjunto dos números racionais, que não se verifica nos números naturais, representa uma dificuldade para os alunos na sua aprendizagem (McMullen et al, 2014; Monteiro & Pinto, 2005; Ni & Zhou, 2005). Relativamente a esta característica do conjunto dos números racionais, salienta-se a dificuldade na compreensão da impossibilidade de conhecer o número racional que sucede a outro número racional e de identificar quantos racionais existem entre dois números racionais (McMullen et al., 2014; Monteiro & Pinto, 2005; Ni & Zhou, 2005).

Um número racional pode ser representado de diferentes formas, sendo as representações escritas mais comuns, a representação fracionária e a representação decimal. Em qualquer destas representações existem muitas formas de representar o mesmo número, o que constitui uma dificuldade para os alunos visto que, por exemplo, as frações equivalentes $\frac{1}{2}$ e $\frac{4}{8}$ representam o mesmo número. (McMullen et al., 2014; Ni & Zhou, 2005; Nunes et al., 2009).

Uma outra dificuldade refere-se à interpretação imediata da ordem de grandeza de um número racional representado por frações. A sua representação fracionária por vezes é interpretada como dois números naturais distintos, o que é evidenciado na adição com frações quando as crianças incorrem em erros ao adicionar numeradores e denominadores (Cramer & Wyberg, 2009; Monteiro & Pinto, 2005). Ainda na comparação de números racionais na sua representação fracionária é comum verificar a interferência do conhecimento que os alunos têm dos números naturais quando consideram, por exemplo, que $\frac{1}{2} < \frac{1}{6}$ porque $2 < 6$ (Ni & Zhou, 2005). Na representação decimal dos números racionais também acontecem equívocos, onde o conhecimento que os alunos têm dos números naturais interfere e pode levar a erros no trabalho com os números racionais. Por exemplo, os alunos por vezes consideram que 0,25 é maior do que 0,3, porque 25 é maior do que 3 (Durkin & Rittle-Johnson, 2014; Ni & Zhou, 2005; Widjaja, Stacey, & Steinle, 2008).

1.3.2. Estudos sobre a história da educação matemática e a história da formação de professores

Na introdução de um livro que compila textos apresentados num encontro sobre a história do ensino da matemática, que decorreu em Beja em 2004, Matos (2005) destaca que a história do campo científico que designamos por educação matemática, começava, na época, a dar os primeiros passos em Portugal. Pintassilgo, Teixeira, Beato e Dias (2010) salientam que este é um campo de investigação que tem revelado dinamismo nos últimos anos, com a publicação de diversas teses e artigos.

Apesar da formação de professores do ensino primário em Portugal já ter vindo a ser objeto de estudo numa perspetiva histórica, como são exemplo os trabalhos de Pintassilgo e Serrazina (2009), Pintassilgo (2012), Pintassilgo, Mogarro e Henriques (2010) ou ainda Pintassilgo e Mogarro (2015), a perspetiva desses estudos não se tem centrado em aspetos relacionados com o papel da matemática nessa formação. Alguns trabalhos de referência na abordagem histórica à profissionalização dos professores, como o de Nóvoa (1987a, 1987b), também não se centram no conhecimento matemático do professor. O trabalho de Baptista (2004), que tem um enfoque no currículo do ensino normal primário, aborda apenas superficialmente a matemática nos cursos de formação dos professores desse nível de ensino e não se centra no desenvolvimento de um tópico específico da matemática. Alguns trabalhos sobre a história da formação de professores têm-se dedicado à história das disciplinas nesses cursos, como por exemplo Pintassilgo e Pedro (2012a; 2012b), mas o foco tem sido a disciplina de didática, não se debruçando especificamente sobre os conteúdos de matemática, nem sobre a constituição de um conhecimento específico para ensinar os conteúdos desta disciplina. É ainda de destacar o trabalho de Gallego (2004) que estuda de uma forma aprofundada a metodologia da aritmética nos cursos das escolas normais entre 1838 e 1868.

Almeida e Matos (2014), no apêndice do livro que publicaram sobre a matemática nos programas do ensino não superior, fizeram um levantamento das investigações sobre a história do ensino da matemática em Portugal, tendo identificado mais de oitenta publicações que, de uma forma mais ou menos direta, abordam este tema. Dessas publicações, que englobam teses de doutoramento, teses de mestrado, artigos de revista ou capítulos de livros, mais de setenta têm data igual ou posterior a 2005.

Ao analisar-se a lista de publicações, verifica-se que poucas são as que se referem à matemática no ensino primário. No total do levantamento referido anteriormente, apenas nove publicações se referem ao ensino da matemática no que atualmente designamos em Portugal por 1.º ciclo do ensino básico. Entre estas referências destacam-se os trabalhos de Palma (2008) e Mogarro e Palma (2011) que abordam o desenvolvimento curricular da matemática no ensino primário desde o final do século XIX até à década de 70 do século XX. Salienta-se também o trabalho de Santos (2008), que analisa os exames nacionais no ensino primário, no período de 1948 a 1974, ou ainda os trabalhos de Candeias (2008, 2010) que se centram na obra do pedagogo João António Nabais e no seu trabalho no âmbito do ensino da matemática no nível primário. Almeida e Candeias (2014) trabalham sobre os programas de matemática para o ensino primário no período de 1835 a 1974.

Alguns investigadores brasileiros também têm apresentado trabalhos sobre a história do ensino da matemática neste nível de ensino em Portugal, como são os casos de Arruda (2011) que na sua tese de doutoramento aborda as marcas do Movimento da Matemática Moderna no ensino da matemática, Borges (2011a) que se centra na matemática na formação dos professores do ensino primário, em artigo publicado nas atas de V encontro Luso-Brasileiro de História da Matemática e que na sua tese de doutoramento (Borges, 2011b) estuda a apropriação do Movimento da Matemática Moderna nas séries iniciais em Portugal e no Brasil, analisando as revistas pedagógicas. Destaca-se ainda o trabalho de Zuin (2007) que na sua tese de doutoramento aborda a introdução do sistema métrico em Portugal e no Brasil.

Num trabalho editado sobre a história da educação matemática no Brasil organizado por Wagner Valente, Valente (2014), o texto de Silva (2014) destaca que é recente o interesse dos historiadores da educação brasileira pela história do ensino primário e que o tema da matemática no ensino primário é uma lacuna nas investigações. No texto referido, Silva (2014) faz o levantamento dos trabalhos sobre o ensino da matemática nos primeiros anos de escolaridade, apresentados no I Encontro Nacional de Pesquisa em História da Educação Matemática. Nesse levantamento, Silva (2014) refere trabalhos como o de Villela (2009) que analisa duas coleções de livros didáticos do período de 1960 a 1970, marcado pelo Movimento da Matemática Moderna. É também salientado o trabalho de Costa (2010) que investiga a trajetória da aritmética no curso do ensino primário de 1890 a 1946, utilizando como fonte os livros didáticos. É também referido o trabalho de doutoramento de Souza (2011) que estuda o ensino da matemática no Grupo Escolar Eliazar Braga, que funcionou entre 1920 e 1975.

No mesmo trabalho organizado por Valente (2014), o texto de Flores (2014) também analisa as investigações sobre a matemática escolar nos primeiros anos de escolaridade e organiza os trabalhos encontrados em quatro temáticas: o foco no professor, por conteúdos e por metodologias, nas práticas quotidianas e em movimentos como problemas. Entre os trabalhos com o foco no professor são destacadas por Flores (2014) as investigações de Almeida e Silva (2012) e Pardim e Souza (2012) que trabalharam sobre os institutos de educação e sobre as primeiras escolas normais de Campo Grande e Mato Grosso do Sul. Ainda com o foco no professor, a investigação de Reis e Gomes (2012) centra-se na matemática das práticas e propostas de formação de professores dos primeiros anos de escolaridade e teve como principal fonte o arquivo pessoal de uma professora que frequentou um curso de aperfeiçoamento em matemática, na Universidade de Colúmbia, nos Estados Unidos, entre 1927 e 1929.

No que diz respeito aos trabalhos centrados nos conteúdos e nas metodologias, Flores (2014) salienta as investigações de Souza e Villela (2012) e Alves e Villela (2012) que se centram nos conteúdos e abordagens metodológicas propostos por autores de livros didáticos de aritmética, nomeadamente na abordagem às operações com números naturais, frações, sistema métrico decimal, divisibilidade e regra de três simples. Entre outros trabalhos, são destacadas as investigações de Marques (2012) que se centrou na análise de manuais pedagógicos portugueses e na circulação que estes tiveram no Brasil na época da Educação Nova e as investigações de Pinheiro (2012) sobre as propostas de ensino da aritmética para os primeiros anos de escolaridade na Escola Americana Paulista no período entre 1880 e 1930 e sobre os discursos pedagógicos que circularam sobre o movimento do ensino intuitivo.

Um terceiro foco de trabalhos que Flores (2014) refere são aqueles que se centram nas práticas quotidianas. De entre estes, Flores (2014) salienta as investigações de Farias (2012) que se centrou nas memórias de práticas aritméticas realizadas na formação de professores da Escola Normal da Província do Rio de Janeiro ou ainda o trabalho de Souza (2012) que investigou as práticas de apropriação e subversão do ensino da matemática no contexto do Grupo Escolar Eliazar Braga que funcionou em São Paulo, no período entre 1920 e 1975. Neste estudo são focadas várias questões como a amplitude do ato de educar comparando com o ato de ensinar, experiências de ensino, a Educação Nova, os centros de interesse e a higiene mental.

Na última temática referida por Flores (2014), salientam-se as investigações que se centram nos movimentos ou reformas educacionais e a sua influência na educação matemática. De entre estes trabalhos, destacam-se aqueles que se centram na influência do Movimento da Matemática Moderna no ensino da matemática nos primeiros anos de escolaridade, como Borges (2012), que se centra na análise da circulação e apropriação das ideias deste movimento em revistas pedagógicas publicadas entre 1967 e 1983, ou como Silva e Valente (2012) que analisam e comparam as propostas para o ensino da matemática entre os movimentos da escola intuitiva e o Movimento da Matemática Moderna. Outro movimento pedagógico que é abordado nas investigações sobre o ensino da matemática nos primeiros anos de escolaridade é o da Educação Nova, sendo a influência deste movimento que Gomes (2012) estuda no seu trabalho.

1.3.3. Os livros de texto na formação inicial dos professores do ensino primário

Os livros de texto para uso nas escolas de formação dos professores do ensino primário constituem uma importante fonte de pesquisa no desenvolvimento do trabalho aqui proposto. Será através da sua análise que se pretende conhecer o desenvolvimento do conhecimento profissional do professor para o ensino da matemática trabalhado nos cursos de formação inicial de professores do ensino primário em Portugal, nomeadamente no que diz respeito à iniciação aos números racionais não negativos. Será por isso importante definir o que são estes manuais, que trabalhos de investigação abordaram a análise destes manuais e como poderá ser feita a sua análise.

Os livros de texto analisados neste trabalho de investigação têm características diferentes conforme a época a que dizem respeito, nomeadamente na forma como eram selecionados. Em Portugal, no final do século XIX e início do século XX estes manuais eram aprovados centralmente e a sua adoção era publicada no Diário do Governo. Em meados do século XX tratava-se de manuais normalmente produzidos pelos próprios docentes da disciplina, que serviam de apoio às aulas. Por outro lado, os manuais também se referem a disciplinas de componentes diferentes, de acordo com o plano de estudos dos cursos de formação de professores. Em finais do século XIX e até 1930 os cursos de formação inicial dos professores do ensino primário eram compostos por uma componente de ciências de especialidade e formação geral, uma componente pedagógica e uma componente prática. Os conteúdos relacionados com a matemática, ou o seu ensino, eram lecionados essencialmente na componente de ciências de especialidade e formação geral, em disciplinas como a *Aritmética, geometria e álgebra elementar* ou *Matemáticas elementares* e na componente pedagógica, em disciplinas como *Pedagogia* ou ainda *Pedagogia e Metodologia*. A partir da década de 1930, os conteúdos relacionados com a matemática, e o seu ensino, passam a ser lecionados em disciplinas da componente pedagógica, como *Didática* e posteriormente *Didática Especial*.

Referindo-se especificamente aos manuais das disciplinas de *Pedagogia* e de *Metodologia*, das primeiras três décadas do século XX, Pintassilgo (2006) refere que estes têm sido objeto de estudo de diversos autores portugueses e brasileiros, especialmente no âmbito do projeto *Prestige*, coordenado por António Nóvoa e Denice Catani. De entre os trabalhos elaborados, Pintassilgo destaca os de Silva (2001) e Correia e Silva (2002) que exploram a circulação de saberes pedagógicos em manuais portugueses e brasileiros. Destaca ainda o trabalho de Girão (2002) sobre o significado da expressão "tacto pedagógico" em manuais de pedagogia das escolas de formação de professores do ensino primário em Portugal. No entender de muitos dos autores destes manuais, o "tacto pedagógico" caracteriza as qualidades profissionais de um professor, a quem não basta ter conhecimentos pedagógicos, sendo necessário ter uma intuição inata e educativa.

1.4. Problemática e relevância do estudo

O conhecimento profissional do professor para ensinar matemática tem sido um tema de interesse da investigação em educação nos últimos anos, sendo possível identificar diversos trabalhos sobre este tema (Shulman, 1986, 1987; Ball, Thames & Phelps, 2008; Hill & Ball, 2004; Hill, Ball & Shiling, 2008; Ma, 2009). O tema dos racionais não negativos, e do seu ensino, também tem sido objeto de diversos trabalhos, sendo apontada a sua complexidade e importância no ensino básico. (Monteiro & Pinto, 2005; Ni & Zhou, 2005; Nunes, Bryant & Watson, 2009). No entanto, nos estudos efetuados em Portugal, a perspetiva histórica tem sido pouco utilizada.

A importância da investigação histórica na área da educação não se limita ao conhecimento do passado. De acordo com Chervel (1990), os debates sobre o ensino na atualidade poderão beneficiar da investigação histórica e do conhecimento e exploração de modelos disciplinares e regras de funcionamento do passado. Uma preocupação que se mantém atual é a formação inicial dos futuros educadores de infância e professores de matemática do ensino básico. Esta formação pode ser determinante na qualidade da formação matemática dos alunos (Albuquerque, Veloso, Rocha, Santos, Serrazina & Nápoles, 2008). Um estudo sobre o conhecimento profissional do professor para o ensino da matemática, e a sua abordagem didática, trabalhada nas escolas de formação inicial de professores do ensino primário ao longo de um período longo poderá ser um contributo importante para a história desta disciplina escolar neste nível de ensino, assim como para o debate atual sobre a matemática na formação de professores.

A escolha do tema das escolas de formação de professores deve-se ao facto de estas terem desempenhado um papel central no desenvolvimento inicial do pensamento pedagógico em Portugal (Pintassilgo, 2012). A opção por um período longo, focado em particular num conteúdo específico, prende-se com a possibilidade de analisar em profundidade a evolução do ensino de um conteúdo, racionais não negativos, que é muitas vezes apontado como complexo e essencial no desenvolvimento do conhecimento matemático no ensino básico.

Como professor do 1.º ciclo do ensino básico que pretende investigar a história da formação inicial de professores do nível de ensino que leciona, esta constitui uma oportunidade para aprofundar o conhecimento sobre a história da profissão e sobre o ensino de uma disciplina que é muitas vezes motivo de preocupação nas discussões em educação. Um só estudo não irá esgotar esta temática, mas, como defende Chartier (2007), o desenvolvimento de vários trabalhos sobre um mesmo objeto contribui para conhecer o todo, embora sem nunca o alcançar.

1.5. Objetivos da investigação

O presente trabalho tem como objetivo estudar o desenvolvimento do conhecimento profissional do professor para o ensino da matemática trabalhado nos cursos de formação inicial de professores do ensino primário em Portugal, tendo como base uma análise documental de documentos legislativos e de manuais dos cursos de formação inicial. Foi definido um intervalo temporal que vai de 1844, data das primeiras tentativas de uma organização formal da formação de professores e regulamentação de escolas normais primárias, até 1974. No projeto inicial pretendia-se prolongar o estudo até 1986, data em que encerram os magistérios do ensino primário, dando lugar às escolas superiores de educação, com uma lógica de formação de professores do ensino primário diferenciada do que acontecia anteriormente, no entanto, o período já muito extenso, a quantidade de informação para analisar, a dificuldade em identificar manuais utilizados na formação inicial de professores após 1974, a complexidade e sucessivas alterações que o curso sofreu após essa data, levaram a que o período em análise terminasse em 1974.

No sentido de se poder estudar este desenvolvimento do conhecimento profissional do professor, o estudo faz uma primeira abordagem à caracterização global da obra e do trabalho com os diferentes conteúdos, mas depois centra-se no desenvolvimento do trabalho com os números racionais.

1.6. Questões de investigação

Tendo sido traçado o objetivo do trabalho, foi formulada uma questão geral:

Q. – Como se desenvolveu o conhecimento profissional do professor para o ensino da matemática na formação inicial dos professores do ensino primário, no período em estudo, nomeadamente no conteúdo dos números racionais não negativos (frações e decimais)?

A partir desta questão geral, foram formuladas outras questões mais específicas, que se podem agrupar em dois grandes conjuntos. O primeiro relaciona-se com a análise dos normativos legais e do currículo prescrito.

Q1 – De que forma a matemática e o seu ensino marcavam presença nos cursos de formação dos professores do ensino primário? (designação das disciplinas, lugar e peso que tinham no plano de estudos, conhecimento matemático exigido à entrada para os cursos de formação, conteúdos das disciplinas, formação dos professores formadores).

Q2 – Como é que o currículo prescrito refletia a necessidade do desenvolvimento de um conhecimento específico para ensinar matemática nos primeiros anos de escolaridade, o designado conhecimento profissional do professor, nas escolas de formação de professores?

Q3 - Que conhecimento profissional para ensinar o conteúdo dos números racionais não negativos é possível identificar na legislação que regulamentava a formação inicial dos professores do ensino primário, no período em estudo?

Q4 – Que ideias pedagógicas marcaram a evolução do conhecimento profissional do professor na formação inicial dos professores do ensino primário?

O segundo conjunto de questões decorre essencialmente da análise dos manuais utilizados na formação de professores.

Q5 - Quem eram os autores dos manuais utilizados nos cursos de formação inicial dos professores do ensino primário, qual a sua formação, em que meio educativo atuaram e que relação tinham com a matemática?

Q6 – Que conteúdos de matemática eram abordados nos manuais utilizados na formação inicial dos professores do ensino primário e de que forma refletem uma preocupação com o desenvolvimento de um conhecimento profissional do professor para ensinar matemática?

Q7 – Que conhecimento profissional para ensinar o conteúdo dos números racionais não negativos é possível identificar nos manuais utilizados na formação inicial dos professores do ensino primário?

Q8 – O conhecimento para ensinar o conteúdo dos números racionais não negativos exposto nos manuais utilizados na formação de professores tem de alguma forma reflexo no que atualmente a literatura na área da didática da matemática aponta como importante para o ensino deste conjunto numérico?

Q9 – Que relações se encontram entre as principais ideias pedagógicas que marcaram o período em estudo e os modelos pedagógicos apresentados pelos autores dos manuais para a área do ensino da matemática?

2

Capítulo 2. Conhecimento profissional do professor

O presente capítulo apresenta o quadro teórico referente ao conhecimento profissional do professor, uma das questões centrais do presente estudo. Começa-se por discutir a relevância do tema e como este se desenvolveu, nomeadamente com os trabalhos de Shulman (1986, 1987) e mais especificamente na área da matemática, com os trabalhos de Ball, Thames e Phelps (2008) ou Thames e Ball (2010). São ainda destacadas algumas dificuldades que a utilização do quadro de referência criado por Ball et al. (2008) pode criar quando se pretende classificar o conhecimento profissional do professor. Após este enquadramento apresenta-se uma abordagem geral sobre algumas das componentes essenciais no desenvolvimento do sentido de número racional com os alunos, designadamente as apontadas por Pinto (2011).

O quadro teórico debruça-se depois sobre o conhecimento profissional que o professor deve ter para ensinar um conteúdo específico, neste caso os números racionais. Nesta parte do quadro teórico, começa-se por apresentar a evolução histórica do conceito de número, com particular atenção ao desenvolvimento do conceito de número racional. Logo a seguir a esta descrição da evolução histórica é discutido o conhecimento profissional do professor quanto às componentes essenciais identificadas. Destaca-se a definição de número racional, os tipos de unidade, a equivalência de frações, a comparação e ordenação de números racionais, as operações com números racionais e a representação decimal. Relativamente a cada uma destas componentes essenciais do desenvolvimento do sentido de número racional é apresentado o que se entende como conhecimento do conteúdo e o que se pode identificar como conhecimento pedagógico do conteúdo, tal como são definidos por Ball et al. (2008).

No final deste capítulo é ainda discutida a importância das representações no ensino e, em particular no ensino dos números racionais, e o papel das situações matemáticas e contextos que se podem apresentar aos alunos, no ensino deste conteúdo.

2.1. Conhecimento profissional do professor

É de alguma forma consensual que, para um professor ensinar um determinado tópico, precisa de ter um conhecimento aprofundado sobre o assunto, que vai para além do conhecimento matemático de outros profissionais que lidam com os conteúdos desta disciplina (Ma, 2009; Monteiro & Pinto, 2009).

Ponte e Serrazina (2000) salientam a necessidade de o professor sentir que domina os temas de matemática que ensina. O professor tem, por isso, que considerar as ideias fundamentais do tópico, os conceitos, representações, procedimentos e técnicas e as diferentes tarefas e processos matemáticos que podem surgir durante a abordagem. Deve também avaliar o que os alunos sabem em termos de aprendizagens informais ou do trabalho escolar anterior e conhecer o que os alunos deverão saber posteriormente, sobre esse mesmo assunto.

No que se refere à perspetiva do conhecimento que o professor deve ter para ensinar, o trabalho de Shulman (1986) representa um marco inaugural de uma nova forma de conceptualizar o conhecimento profissional do professor (Ball et al., 2008). Shulman (1986) define três categorias de conhecimento que o professor deve reunir para poder lecionar a sua disciplina: 1) conhecimento do conteúdo (subject matter content knowledge), que se refere à quantidade e organização do conhecimento que só por si o professor possui, o que representa ir para além do domínio de factos e conceitos, implicando a compreensão das estruturas dos conteúdos; 2) conhecimento pedagógico do conteúdo (pedagogical content knowledge), que vai para além do conhecimento dos conteúdos *per se* e entra no conhecimento para o ensino, o conhecimento das formas mais úteis de representação de determinadas ideias, as analogias mais esclarecedoras, as ilustrações, os exemplos, as explicações e as demonstrações, ou seja, a forma de representar e formular os conteúdos de forma a torná-los compreensíveis para os outros; 3) conhecimento curricular (curricular knowledge), que se refere ao conhecimento de uma série de programas e materiais de ensino elaborados para determinados conteúdos específicos num determinado nível de ensino, e a capacidade de refletir criticamente sobre as indicações e contraindicações do uso de determinados programas e materiais.

Posteriormente, Shulman (1987) reformulou o seu modelo apresentando sete categorias que, segundo o próprio, seriam a base do conhecimento do professor para promover a compreensão dos alunos: i) conhecimento dos conteúdos, ii) conhecimento pedagógico geral, iii) conhecimento curricular, iv) conhecimento pedagógico do conteúdo, v) conhecimento dos alunos e das suas caraterísticas, vi) conhecimento dos contextos educativos, e vii) conhecimento dos fins educacionais.

De entre as sete categorias, Shulman (1987) destaca o conhecimento pedagógico do conteúdo por considerar que este é um tipo de conhecimento que diferencia o corpo do conhecimento para ensinar de outras formas de conhecimento. Representa a mistura do conhecimento do conteúdo com o conhecimento da pedagogia numa compreensão de como os conteúdos específicos, problemas, questões são organizados, representados e adaptados para os diferentes interesses e habilidades dos alunos e apresentados para ensino. Shulman (1987) salienta que, os professores quando iniciam a sua formação inicial, já apresentam algum nível de conhecimento do conteúdo, concluindo que o conhecimento pedagógico do conteúdo se vai desenvolvendo a partir do próprio conhecimento do conteúdo. Respondendo a críticas que questionam a distinção entre conhecimento do conteúdo e conhecimento pedagógico, o próprio Shulman (1987) admite o caráter provisório, experimental e incompleto do modelo que apresenta.

2.2. Conhecimento profissional do professor para ensinar matemática

Baseando-se nos trabalhos de Shulman, e motivados pela procura do conhecimento necessário para ensinar matemática, Ball, Thames e Phelps (2008) introduzem o conhecimento matemático para ensinar (mathematical knowledge for teaching – MKT) onde discriminam o conhecimento do conteúdo e o conhecimento pedagógico do conteúdo. Nos trabalhos de Ball et al. (2008), optou-se pela observação das atividades de sala de aula e análise de tarefas do professor que requeriam conhecimento matemático. Esta observação evidenciou que existem semelhanças entre o conhecimento matemático de um professor e o conhecimento matemático que outros profissionais utilizam, mas também se identificou a necessidade de conhecimentos matemáticos específicos. Ball et al. (2008) começam por considerar um conjunto de domínios que constituem a matemática de que os professores precisam para desempenhar a tarefa de ensinar matemática aos seus alunos. O primeiro domínio, que designam por conhecimento comum do conteúdo (common content knowledge - CCK), refere-se ao conhecimento e competências matemáticas que também são usados noutros contextos para além do ensino. Ball et al. (2008) destacam que é muito importante que os professores tenham um conhecimento aprofundado do que ensinam porque isso lhes permite reconhecer se as respostas dos alunos estão corretas, ou não, se os manuais apresentam definições corretas, utilizar os termos e as notações corretas. Este é um tipo de conhecimento que outros, dentro da área da matemática, também têm, não é um conhecimento específico para ensinar.

O segundo domínio refere-se ao conhecimento especializado do conteúdo (specialized content knowledge – SCK). É um conhecimento matemático específico para ensinar que Ball et al. (2008) exemplificam como sendo tarefas matemáticas de ensino que normalmente são executadas pelos professores para apresentar ideias matemáticas, responder a perguntas de "porquê" dos alunos, encontrar exemplos para um aspeto matemático específico, reconhecer o que envolve utilizar uma representação específica, relacionar representações com as ideias subjacentes e com outro tipo de representações, relacionar um tópico que se vai ensinar com outros tópicos que já foram trabalhados ou que ainda se vão trabalhar, explicar os objetivos da disciplina aos pais, avaliar e adaptar os conteúdos matemáticos dos manuais, alterar as tarefas a propor, tornando-as mais fáceis ou mais difíceis, avaliar a plausibilidade do que é pedido pelos alunos, dar e avaliar explicações matemáticas, escolher e desenvolver definições, usar notação e linguagem matemática e criticar o seu uso, fazer questões matematicamente produtivas, escolher representações com um propósito específico e averiguar equivalências. Para Ball et al. (2008) este trabalho envolve um "desembrulhar" da matemática que é característico da tarefa de ensinar matemática. O ensinar matemática envolve um conhecimento matemático que vai para além daquele que se tem de ensinar aos alunos.

O terceiro domínio sugerido por Ball et al. (2008) é o conhecimento do conteúdo e dos alunos (knowledge of content and students - KCS). Este é o tipo de conhecimento que combina conhecer os alunos e saber matemática, significa conhecer as conceções e os equívocos mais comuns dos alunos sobre um determinado conteúdo matemático. Os professores devem conseguir antecipar o que os alunos irão pensar e o que acharão confuso ou, quando escolhem um exemplo, deverão conseguir predizer o que alunos acharão interessante e motivante. Ball et al. (2008) diferenciam o conhecimento comum do conteúdo, o conhecimento especializado do conteúdo e o conhecimento do conteúdo e dos alunos, exemplificando que, o reconhecimento de um erro numa resposta de um aluno, implica o conhecimento comum do conteúdo, a identificação da natureza do erro, principalmente um erro pouco familiar, envolve o conhecimento especializado do conteúdo, mas a familiaridade com os erros mais comuns e a decisão de quais, de entre um conjunto de erros, haverá maior probabilidade de os alunos fazerem, já são exemplos do conhecimento do conteúdo e dos alunos.

O quarto e último domínio apresentado por Ball et al. (2008) refere-se ao conhecimento do conteúdo e do seu ensino (knowledge of content and teaching - KCT), como um conhecimento que combina o saber matemático com o saber para ensinar matemática. Muitas das tarefas matemáticas usadas no ensino requerem um conhecimento matemático do modelo de ensino. Os professores organizam os conteúdos de uma forma particular para o ensino. Escolhem exemplos para começar um determinado conteúdo e para levar os alunos a adquirir um conhecimento mais profundo desse mesmo conteúdo. Os professores avaliam as vantagens e desvantagens das representações utilizadas para ensinar uma ideia específica e identificam que métodos e procedimentos diferentes permitem oferecer instrução. Cada uma destas tarefas requer uma interação entre uma compreensão específica da matemática e uma compreensão de questões pedagógicas que afetam a aprendizagem dos alunos.

Quando um professor toma decisões sobre as clarificações que tem de fazer ou sobre que contribuições dos alunos deve usar, está a coordenar o conhecimento matemático com opções pedagógicas (Ball et al., 2008). Um exemplo que Ball et al. (2008) apresentam para o conhecimento do conteúdo e do ensino (KCT) é o conhecimento de diferentes modelos de ensino do valor de posição, reconhecendo o que cada um pode contribuir para a aprendizagem do algoritmo da subtração e sabendo como usá-los de forma eficaz. Conhecer também quais serão os melhores contextos e os materiais didáticos adequados para trabalhar os conteúdos e ter o conhecimento de como estas diferenças são importantes para o desenvolvimento de um determinado tópico é o que Ball et al. (2008) definem como conhecimento do conteúdo e do seu ensino (KCT). Ball et al. (2008) questionam como é que as questões de linguagem podem ajudar ou confundir os alunos. No caso da subtração, como é que os termos empréstimo ou compensação podem interferir com a compreensão do algoritmo da subtração por parte dos alunos. Em qualquer um destes exemplos, o conhecimento do conteúdo e do seu ensino constituem uma amálgama, envolvendo uma ideia ou procedimento matemático muito específico que tem uma familiaridade com os princípios pedagógicos para ensinar.

Ball et al. (2008) propõem então um modelo que sistematiza o conhecimento do professor que se baseia no trabalho de Shulman.

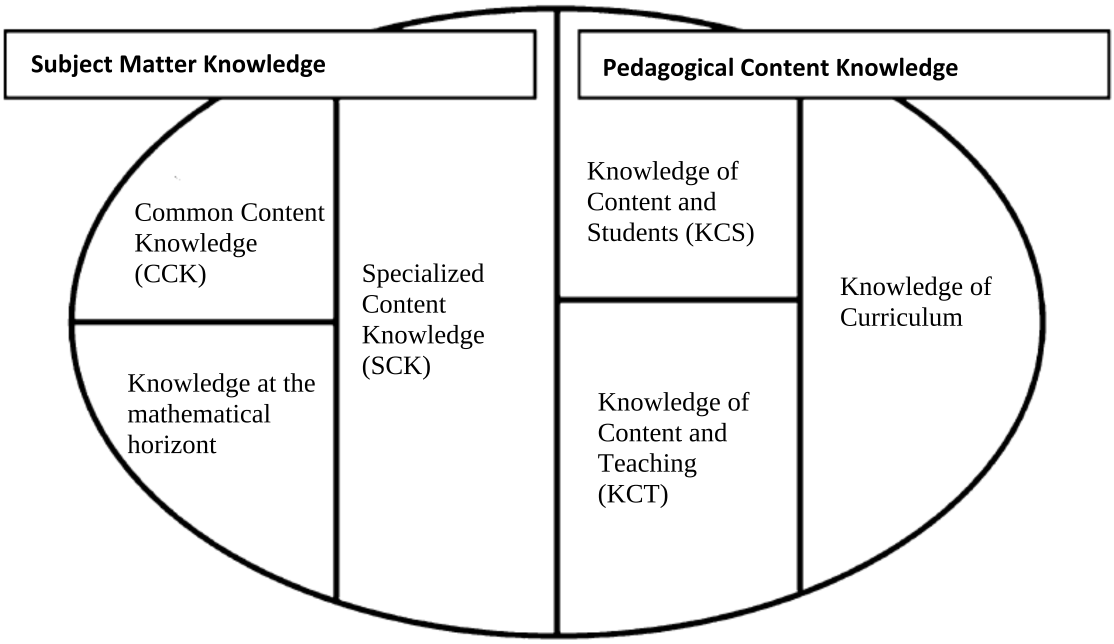


Figura 2.1. Mapa de domínios do conhecimento para ensinar (Ball et al., 2008, p. 403)

A figura 2.1. mostra a correspondência entre o mapa de domínios do conhecimento para ensinar proposto por Ball et al. (2008) e duas das categorias iniciais de Shulman (1986), conhecimento do conteúdo e o conhecimento pedagógico do conteúdo. Ball et al. (2008) colocam a terceira categoria de Shulman (1986), o conhecimento do conteúdo e do currículo (knowledge of content and curriculum – KCCu), integrada no conhecimento pedagógico do conteúdo. Acrescentam uma terceira categoria no conhecimento do conteúdo que designam como conhecimento do horizonte matemático (horizon content knowledge - HCK). Este conhecimento refere-se à consciência que o professor tem da relação entre os tópicos matemáticos do currículo. Um exemplo deste tipo de conhecimento é a consciência que os professores dos primeiros anos devem ter quanto aos conteúdos matemáticos que os seus alunos irão adquirir posteriormente, seja em níveis de ensino próximos, sejam conexões com ideias matemáticas que só serão trabalhadas a longo prazo (Ball et al., 2008).

Desta forma, no conhecimento do conteúdo distingue-se i) conhecimento comum do conteúdo, ii) conhecimento especializado do conteúdo e iii) conhecimento do horizonte matemático. No domínio do conhecimento pedagógico do conteúdo, distinguem entre i) conhecimento do conteúdo e dos alunos, ii) conhecimento do conteúdo e do seu ensino e iii) conhecimento do conteúdo e do currículo.

Ball et al. (2008) salientam que, por vezes, determinados conhecimentos dos professores são difíceis de enquadrar nas categorias definidas teoricamente, admitindo falhas no modelo. No entanto, destacam que, saber se estas categorias são as corretas não é o mais importante do seu trabalho. Estas categorias necessitarão de ser continuamente refinadas e revistas, porque vão surgindo diversos problemas na sua aplicação prática. Ball et al. (2008) apresentam três problemas específicos que podem afetar o seu trabalho. O primeiro problema identificado decorre de um aspeto que à partida seria uma mais valia e diz respeito ao facto do quadro teórico estar fundamentado na relação com a prática. A relação com a prática introduz alguma desordem e variabilidade que está naturalmente associada ao processo de ensino e de aprendizagem. Perante uma mesma situação de análise de um erro de um aluno, um professor pode usar o conhecimento especializado do conteúdo (SCK) e outro professor poderá usar o conhecimento do conteúdo e dos alunos (KCS).

Associado a este problema, surgem outros dois. Apesar da ideia expressa ser o foco na utilização do conhecimento, as categorias usadas podem parecer estáticas. Em última análise, o centro de interesse é a forma como os professores pensam e desenvolvem as ideias matemáticas no seu trabalho. O foco é nas competências, hábitos, sensibilidades e capacidade crítica, assim como conhecimentos (Ball et al., 2008). Colocam-se desta forma algumas dificuldades na diferenciação dos diferentes tipos de conhecimento, principalmente quando se tenta analisar situações concretas do seu uso. Esta dificuldade em discernir onde acaba uma categoria e começa outra, afeta a precisão, ou falta dela, das definições apresentadas por Ball et al. (2008). Um exemplo que é apresentado para ilustrar essa dificuldade refere-se à utilização de diferentes representações nas frações. Esta utilização será conhecimento especializado do conteúdo, ou conhecimento comum do conteúdo de quem utiliza matemática? Ball et al. (2008) consideram que a questão das limitações continua a ser uma questão empírica.

Ball et al. (2008) concluem que as novas categorias que acrescentam ao trabalho de Shulman são úteis porque, em primeiro lugar, ao estudar as relações entre o conhecimento dos conteúdos do professor e o sucesso dos alunos, poderá ser útil saber se há aspetos deste conhecimento do professor que funcionem como preditores do sucesso de alunos, mais de que outros. Em segundo lugar, poderá ser útil estudar se diferentes abordagens ao desenvolvimento profissional do professor têm diferentes efeitos no conhecimento pedagógico do conteúdo. Em terceiro lugar, um sentido claro das categorias do conhecimento do conteúdo para o ensino poderá ser importante na elaboração de materiais de suporte para os professores.

2.3. Conhecimento profissional do professor para o ensino dos números racionais

O conteúdo dos números racionais não negativos é considerado um dos tópicos matemáticos mais complexos e onde os alunos apresentam maiores dificuldades ao nível do ensino básico (Behr & Post, 1992; Monteiro & Pinto, 2005; Ni & Zhou, 2005; Nunes, Bryant & Watson, 2009; Vamvakoussi & Vosniadou, 2004), coexistindo dificuldades inerentes à própria natureza das frações e ao desenvolvimento do seu ensino.

Para a compreensão dos números racionais é essencial um conhecimento profundo dos conceitos que lhes estão associados (Post, Cramer, Behr, Lesh & Harel, 1993). Muitas vezes os professores e alunos sentem dificuldades neste conteúdo, devido a conflitos conceptuais entre as propriedades dos números racionais e as propriedades dos números naturais, nomeadamente o facto de se tratar de um conjunto denso e cujos elementos podem apresentar diversas representações (Monteiro & Pinto, 2009). É ainda essencial no ensino dos números racionais que o professor tenha consciência das ligações que se estabelecem entre os diferentes conceitos e como se estabelecem essas ligações (Ma, 2009).

Pinto (2011) destaca no seu trabalho cinco componentes essenciais no desenvolvimento do sentido de número racional e as respetivas capacidades.

Tabela 2.1. Modelo para caracterizar o sentido de número racional (Pinto, 2011, pp. 112-113).

Sentido de Número Racional	
Componentes	**Capacidades a desenvolver**
Familiaridade com os diferentes significados das frações em contexto	- Reconhecer os diferentes significados das frações (partilha, parte-todo, medida, operador e razão) em situações discretas ou contínuas.
Flexibilidade com a unidade de referência das frações em contexto	- Reconstruir a unidade de referência (discreta ou contínua). - Identificar a unidade de referência (discreta ou contínua).

Familiaridade com diferentes representações de número racional	- Conectar diferentes representações (numeral decimal, fração e numeral misto). - Reconhece frações equivalentes.
Flexibilidade na comparação, ordenação e densidade de números racionais	- Representar números racionais na reta numérica. - Comparar e ordenar números racionais. - Reconhecer a existência de outros números entre dois números racionais.
Símbolos e linguagem matemática formal significativos de números racionais	- Relacionar os símbolos com ações e conhecimentos informais. - Relacionar os símbolos com linguagem matemática formal.

No modelo que apresenta, Pinto (2011) destaca a importância do desenvolvimento da familiaridade com diferentes significados das frações em contexto, a flexibilidade com a unidade de referência das frações em contexto ou ainda o reconhecimento da densidade dos números racionais.

2.3.1. Os números racionais

2.3.1.1. Evolução histórica

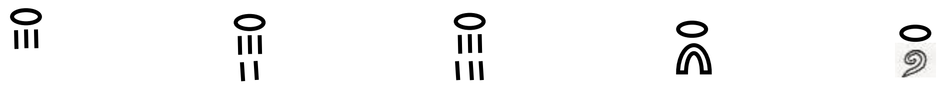
De acordo com Fosnot e Dolk (2002) a noção de número racional desenvolveu-se relativamente tarde na história da humanidade e não se relacionou diretamente com o desenvolvimento dos números naturais. Os números decimais são um produto ainda mais tardio (Boyer, 1991). Aborda-se de seguida como se foram desenvolvendo os números racionais, desde a antiguidade

Os egípcios foram dos primeiros povos a representar os números fracionários através de frações. Os documentos egípcios originais com conteúdo matemático não são muitos, estando identificados cerca de uma dúzia, dos quais se destacam: o papiro de Rhind, o papiro de Moscovo, o papiro de Kahun, o papiro de Berlim e o Rolo de Couro das Matemáticas Egípcias. Destes documentos destacam-se o papiro de Rhind, onde constam 87 problemas, em escrita hierática[1], o papiro de Moscovo, que contém 25 problemas, alguns em comum com os do papiro de Rhind, e o Rolo de Couro das Matemáticas Egípcias, que contém uma tabela de 26 somas de frações unitárias (Estrada, Sá, Queiró, Silva & Costa, 2000).

Nas suas mais antigas representações conhecidas, a numeração egípcia escrita permite a representação de números que podem ultrapassar o milhão. Os egípcios utilizavam um sistema de numeração de base 10, do tipo repetitivo, de uma alguma forma análogo ao utilizado pelos romanos (Estrada, Sá, Queiró, Silva & Costa, 2000).

[1] A escrita hierática é uma escrita mais abreviada do que a hieroglífica e mais utilizada na escrita de papiros.

Embora os papiros não tenham o registo do conceito que os egípcios tinham de fração, um dos aspetos mais relevante da aritmética egípcia relaciona-se com o cálculo de frações, especialmente com um tipo especial de frações: as frações unitárias. Todas as frações eram reduzidas a somas das chamadas frações unitárias, ou seja, frações cujo numerador é igual a um.



$\frac{1}{3}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{10}$ $\frac{1}{100}$

(Ifrah, 1997, p. 349)

Estas frações eram indicadas pelo número do denominador com um símbolo em cima, para facilitar a escrita aqui iremos representar as frações unitárias por um traço horizontal por cima do denominador, tal como fazem Estrada et al. (2000). Por exemplo, $\overline{3} = \frac{1}{3}$, $\overline{5} = \frac{1}{5}$, como não tinham símbolo para a adição $\overline{3}\ \overline{5}$ significava $\frac{1}{3} + \frac{1}{5}$. Existiam, no entanto, algumas exceções, como as frações $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ ou $\frac{3}{4}$, para as quais existiam símbolos especiais.

O cálculo com a fração $\frac{2}{3}$ era baseada numa regra da aritmética egípcia, designada pela “regra dos $\frac{2}{3}$“. De acordo com Estrada et al. (2000), esta regra é explicitada num dos problemas do papiro de Rhind:

> Calcular $\frac{2}{3}$ de uma fração ímpar. Se te disserem quanto é $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{5}$? Tu calculas duas vezes dele e 6 vezes dele; $\frac{2}{3}$ dele é isso. Toma atenção! Faz assim sempre que tenhas uma fração ímpar, qualquer que seja. (Gillings, 1982, citado em Estrada et al., 2000, p. 30)

Uma “fração ímpar” é uma fração unitária com o denominador ímpar. Assim, aplicando a regra ficamos com:

$$\frac{2}{3} \text{ X } \frac{1}{5} = \frac{1}{2 \text{ X } 5} + \frac{1}{6 \text{ X } 5} = \frac{1}{10} + \frac{1}{30}$$

(Estrada et al., 2000, p. 30)

De entre as referências às frações no papiro de Rhind, Estrada et al. (2000) destacam os problemas de divisão equitativa, como por exemplo a partilha de 6 pães por dez homens, e os problemas de complementação, para encontrar a diferença entre dois números, que envolvem também o trabalho com frações unitárias.

No que diz respeito à utilização das frações na matemática chinesa, Fosnot e Dolk (2002) salientam que estes estavam familiarizados com as operações com frações ordinárias e sabiam como encontrar o denominador comum. Relativamente às operações com frações e à simplificação de frações, Estrada et al. (2000) apresentam alguns exemplos. Em relação à simplificação de uma fração, apresentam o seguinte processo utilizado na matemática chinesa para simplificar por exemplo $\frac{49}{91}$:

> Escrevia-se sucessivamente:
> (49,91); (49,42); (7,42); (7, 35); (7,28); (7,21); (7,14); (7,7)
> Vemos que se trata de subtrair ao maior dos termos da fração o menor até encontrar números iguais: esse número seria o máximo divisor comum entre os dois termos da fração; depois, o procedimento seria aquele que ainda hoje utilizamos: dividir o numerador e o denominador pelo número encontrado. (Estrada et al., 2000, p. 128)

Já no que respeita à adição e subtração de frações, os matemáticos chineses reduziam-nas a um denominador comum, sem que existisse a preocupação em que este fosse o menor denominador comum. Era assim evidente que no século III a.C. utilizavam processos muito próximos do que hoje fazemos, o que na Europa não foi utilizado antes do século XV d.C. (Estrada et al., 2000).

Fosnot e Dolk (2002) salientam ainda que, devido à utilização do ábaco com um sistema de base 10, mas sem um zero, surgiram na matemática chinesa as formas primitivas de frações decimais. Como a maioria dos cálculos era efetuada em ábacos, as frações ordinárias eram normalmente transformadas em frações decimais, por exemplo, a fração $\frac{3}{5}$ seria trabalhada no ábaco como seis partes de dez.

Apesar desta utilização precursora das frações, demorou muito tempo até as frações e os decimais, na forma como os conhecemos, se desenvolvessem. De uma forma geral, as frações unitárias e as frações sexagesimais foram os métodos predominantes para representar e calcular com frações até à Idade Média. Apenas no período do Renascimento os métodos de cálculo com frações foram substituídos pelo sistema de representação das frações ordinárias e decimais (Fosnot & Dolk, 2002).

No século VIII, os povos islâmicos terão tido contacto com o sistema decimal desenvolvido na Índia (Estrada et al., 2000). Em relação à utilização das frações, os primeiros textos árabes sobre o sistema decimal referem apenas a parte inteira do número no sistema de base 10, mas as frações são utilizadas no sistema sexagesimal. A introdução do sistema decimal posicional nas frações ocorreu na matemática do mundo árabe de uma forma lenta. No século X um matemático árabe, Al-Uqlidisi, introduziu as frações decimais no contexto de uma divisão por 2, utilizando um traço vertical para separar a parte inteira da parte fracionária. Esta é, no entanto, uma utilização muito ocasional deste sistema (Estrada et al., 2000). As frações decimais só serão tratadas sistematicamente na matemática árabe, já no século XII. Embora sem uma designação que as nomeie, as frações decimais são integradas num método de calcular valores aproximados da divisão e na extração de raízes. De acordo com Estrada et al. (2000), as frações decimais só são identificadas como tal, no século XV, numa obra do matemático árabe al-Kashi. Com estes trabalhos de matemáticos árabes, o sistema decimal posicional ficou completo, passando a englobar os inteiros e as frações. Fosnot e Dolk (2002) referem que também foi na matemática árabe que surgiu pela primeira vez a notação das frações com o traço horizontal, tal como o conhecemos hoje.

Estrada et al. (2000) salientam ainda que, no mundo ocidental, as frações decimais só passaram a ser utilizadas sistematicamente e de uma forma aproximada à que utilizamos hoje, já no século XVI, depois da publicação da obra *A Disma (De Thiende* no original, ou *A Décima* em português atual), de Simon Stevin. Simon Stevin, matemático, engenheiro, físico e semiólogo flamengo, escreveu o primeiro tratado onde se destacava a importância do sistema decimal, aplicado também às frações, tendo-se iniciado uma campanha junto dos governantes para que o sistema fosse adotado (Torra, 2011). De acordo com Ifrah (1997)

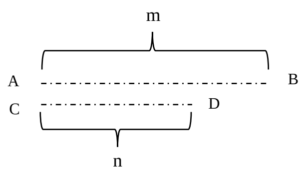
> na Europa, foi o belga Simon Stévin que, em 1582, deu o passo decisivo rumo à nossa notação atual, ao anotar do seguinte modo os nossos 679,567: 679 (0) 5(1) 6(2) 7(3) (simbolizando deste modo: 679 unidades inteiras, 5 'unidades decimais da primeira ordem' ou décimas, 6 'unidades decimais da segunda ordem' ou centésimas e 7 'unidades decimais da terceira ordem' ou milésimas) (p. 328)

Alguns anos depois, o suíço Jost Búrgi simplificou a notação ao eliminar a notação da ordem das frações decimais consecutivas, assinalando apenas com um sinal as unidades 679º 567. Na mesma época, o italiano Magini substituiu o símbolo por um ponto colocado entre o algarismo das unidades e o das décimas, surgindo a notação 679.567. No que diz respeito à vírgula, terá sido Wilbord Snellius que a inventou, no início do século XVII, passando o mesmo número a ser representado por 679,567. Fosnot e Dolk (2002) evidenciam que, com o comércio na época do Renascimento, e com os comerciantes a começarem a dominar o cálculo no sistema posicional decimal, a representação decimal começou a emergir. Esta notação passou a fazer parte das práticas quotidianas da grande maioria dos cidadãos de vários países, quer no sistema de preços e uso da moeda, quer na utilização das diferentes medidas.

2.3.1.2. Definição de número racional

Klein, na sua obra Matemática Elementar de Um Ponto de Vista Superior[2] considera as frações uma segunda extensão do conceito de número, após a introdução dos números negativos. Para Klein (2009) as frações, tal como são tratadas nas escolas, têm à partida um significado concreto, verificando-se apenas uma mudança de princípio em relação aos números naturais. Enquanto nos números naturais se trata de coisas numeráveis, nas frações transita-se para as coisas mensuráveis, ou seja, para a medida. Como exemplos de grandezas mensuráveis, Klein (2009) apresenta os sistemas monetário, o sistema de pesos e o sistema de comprimentos, que considera um exemplo mais completo.

Caraça (1941/2003)[3] considera que o campo racional se constrói sobre uma operação concreta, que é medir, ou seja, comparar duas grandezas da mesma espécie. Na medição, Caraça (2003) destaca três aspetos: escolha da unidade, comparação com a unidade e expressão dessa comparação através de um número. Caraça (2003) define assim o novo campo numérico, dos números racionais:

> Sejam, fig. 13, os dois segmentos de reta $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, em cada um dos quais se contém um número inteiro de vezes o segmento u - $\overline{AB}$ contém m vezes e $\overline{CD}$ n vezes o segmento u. Diz-se, por definição, que a medida do segmento $\overline{AB}$, tomando $\overline{CD}$ como unidade, é o número $\frac{m}{n}$ e escreve-se
>
> 
>
>
> $$\overline{AB} = \frac{m}{n} \cdot \overline{CD}$$
>
> quaisquer que sejam os números inteiros m e n (n não nulo); (Caraça, 2003, p. 35).

No caso de m ser divisível por n, o número $\frac{m}{n}$ coincide com um número inteiro, que é o quociente da divisão. No caso de m não ser divisível por n, o número diz-se fracionário. No entanto, em qualquer das duas hipóteses anteriores, $\frac{m}{n}$ diz-se racional, sendo o número m designado por numerador e o número n designado por denominador. Da igualdade $\overline{AB} = \frac{m}{n} \cdot \overline{CD}$ resulta que $\frac{n}{1} = n$ porque se $\overline{AB} = n \cdot \overline{CD}$ então também $\overline{AB} = \frac{n}{1} \cdot \overline{CD}$ e assim $\frac{n}{n} = 1$ porque as igualdades $\overline{AB} = \overline{AB}$ e $\overline{AB} = \frac{n}{n} \cdot \overline{AB}$ são equivalentes. Caraça (2003) destaca que se está perante um novo conjunto numérico, o conjunto dos números racionais, que compreende o conjunto dos

---

[2] Tradução portuguesa de 2009 baseada na versão inglesa do primeiro volume da obra de Felix Klein, *“Elementarmathematik vom hoheren Standpunkte aus”*, sobre Aritmética, Álgebra e Análise, publicada em 1908 pela editora Teubner, def Leipzig.

[3] Considera-se no presente trabalho a reedição da obra publicada em 2003, cuja 1.ª edição foi publicada em 1941. Por esta razão, e para facilidade de leitura, a referência usada aparecerá apenas como Caraça (2003).

números inteiros com aquele que é formado pelos números fracionários. Pela definição do campo dos números racionais, Caraça (2003) apresenta a organização dos números reais da seguinte forma:

$$\text{Números reais} \begin{cases} \text{racionais} \begin{cases} \text{inteiros} \\ \text{fracionários} \end{cases} \\ \text{irracionais} \end{cases}$$

Caraça (2003, p. 79)

Refletindo sobre a construção deste novo campo numérico, Caraça (2003) destaca que este compreende o conjunto dos números inteiros e o que é formado pelos fracionários, que Caraça (2003) considera os números novos neste campo dos racionais. Caraça (2003) apresenta duas vantagens que se obtêm pela criação deste campo numérico, por um lado permite exprimir sempre[4] a medida de um segmento tomando outro como unidade, como por exemplo "dividida a unidade em 5 partes iguais, cabem 2 dessas partes na grandeza a medir diz-se que a medida é o número $\frac{2}{5}$." (Caraça, 2003, p. 36). O campo dos racionais também permite exprimir sempre a divisão de números inteiros m e n, que se exprime simbolicamente pelo número racional $\frac{m}{n}$ "o quociente de 2 por 5 é o número racional fracionário $\frac{2}{5}$, o quociente de 10 por 5 é o número racional inteiro $\frac{10}{5} = 2$." (Caraça, 2003, p. 36).

Outras definições apresentam o número racional como o quociente entre dois números inteiros, em que o divisor é diferente de zero. Na definição apresentada por Ferreira (1990) "os números racionais serão todos os reais que se identifiquem com o quociente de dois inteiros, isto é, que possam representar-se na forma $\frac{x}{y}, x, y \in \mathbb{Z} \; e \; y \neq 0$ (ou o que é equivalente, com $x \in \mathbb{Z} \; e \; y \in \mathbb{N}_1$)." (p. 31). Daqui resultam as inclusões $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Santos (2014) também começa por definir os números racionais como aqueles que se podem exprimir sob a forma $\frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z} \; e \; b \neq 0$. Como $\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$ pode-se supor sempre que $b > 0$, logo que $a \in \mathbb{Z} \; e \; b \in \mathbb{N}$. Santos (2014) salienta que cada número racional pode ser expresso desta forma de mais do que uma maneira, em que por exemplo $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$. Verificando que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd} \Leftrightarrow ad = bc$.

O critério enunciado anteriormente para verificar a equivalência de frações pode também ser usado para definir os racionais. Santos (2014) refere que "Com efeito, poder-se-ia considerar

[4] Numa nota do editor realça-se que isto só acontece nas condições apresentadas por Caraça (2003) na figura 13. da sua obra, mas que o problema terá posteriores desenvolvimentos, nomeadamente com a questão dos números irracionais.

no conjunto ℤ x ℕ a relação de equivalência ~ definida por (a , b) ~ (c , d) se e só $ad = bc$ e definir ℚ como o conjunto das classes de equivalência desta relação de equivalência." (p. 127). Como para cada $a \in \mathbb{Z}, \frac{a}{1} = a; logo, \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Como o conjunto dos números racionais está munido das operações adição e multiplicação e dos elementos 0 e 1, em que $0 \neq 1$, forma um corpo[5].

O conjunto dos números racionais é estruturalmente um corpo ordenado onde existe uma partição em infinitas classes de equivalência, permitindo definir as frações como elementos dessas classes. Cada uma das classes formadas por famílias de frações equivalentes representa um número racional. Guerreiro (1989) também define os números racionais como uma classe de equivalências em que sendo F o conjunto dos pares ordenados (a , b) tais que $a , b \in K \ e \ b \neq 0$. Então, a relação entre pares (a , b) e (c , d) de F (1) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ em L[6], que se pode escrever $ad = bc$, é uma relação de equivalência em F.

Brousseau, Brousseau e Warfield (2004, 2007) salientam que o desenvolvimento dos números racionais se deve à necessidade de se poder usar um conjunto denso de números para fins de medição e de cálculo e distinguem diferentes categorias nos números racionais não negativos: os números naturais, os números decimais e os números fracionários. Os números decimais são, para Brousseau et al. (2007) assim uma categoria dos números racionais, ou seja, os que se podem representar por dízimas finitas. Os fracionários não decimais seriam aqueles que se podem representar por dízimas infinitas periódicas. Os números decimais e os números fracionários distinguem-se dos números naturais pelas suas propriedades topológicas, já que são conjuntos densos e que por isso podem atribuir uma medida a qualquer quantidade. Também se distinguem pelas suas propriedades algébricas porque qualquer número racional diferente de zero tem um inverso multiplicativo e qualquer equação linear $a = bx \ (com \ b \neq 0)$ tem uma única solução.

Uma das propriedades do conjunto dos números racionais é a densidade. Klein (2009) refere que:

> diz-se que o conjunto dos pontos racionais é «denso» no eixo das abcissas para significar que em qualquer intervalo, por mais pequeno que seja, existem infinitos pontos racionais. Dito de um modo mais abstrato, e por forma a que não intervenham outros conceitos que não o do ponto racional, entre dois pontos racionais existe sempre um outro ponto racional. (p. 41)

Caraça (2003) também destaca esta propriedade do conjunto dos números racionais, salientando que esta propriedade depende do caráter infinito do conjunto dos números inteiros.

---

[5] Um corpo é um conjunto não vazio munido das operações adição e multiplicação e dos elementos 0 e 1 (Santos, 2014)

[6] Sendo L um corpo que contém K como subanel.

Caraça (2003) começa por considerar r e s dois números racionais quaisquer arbitrariamente próximos um do outro, em que $r < s$.

> seja $d = s - r$. Se somarmos a r um número $d' < d$, obtemos um número r' maior que r mas menor que s; portanto, a existência de números racionais entre r e s está dependente apenas da existência de números racionais d' menores que d, e os r' serão tantos quantos forem os d'.
> Ora, nós vamos ver que há uma infinidade de números racionais $d' < d$. Com efeito, d, por ser a diferença de dois números racionais é [cap. II, parág. 18, pág,. 41] um número racional, logo é $d = \frac{m}{n}$ com m e n inteiros; por outro lado, todo o número racional da forma $\frac{m}{n+p}$ com p inteiro é [cap. II, parág. 16] menor que d.
> Logo, todos os números $\frac{m}{n+1}, \frac{m}{n+2}, \dots, \frac{m}{n+p}, \dots$ são números $d' < d$. E quantos são estes? uma infinidade! uma vez que admitimos [cap. I, parág. 11] que a sucessão dos números inteiros é *ilimitada*. (pp. 54-55, itálicos e parêntesis no original)

Já Ferreira (1990) define o conjunto dos números racionais como um conjunto ordenado denso, porque todo o corpo ordenado K é denso.

> Trata-se de provar que para dois elementos quaisquer a, b e K tais que a < b, existe um elemento c tal que a < c < b (visto que K tem pelo menos dois elementos). Ora da relação a < b deduz-se a + a < a + b < b + b ou, designando por u o elemento unidade de K, 2u.a < a + b < 2u.b, e como 2u = u + u > 0, esta relação é equivalente a $a < \frac{a+b}{2u} < b$ (ou, mais abreviadamente, $a < \frac{a+b}{2} < b$, (Ferreira, 1990, p.

No sentido do ensino e da aprendizagem no início da escolaridade, esta propriedade do conjunto dos números racionais pode constituir uma dificuldade à sua compreensão, já que esta é uma propriedade de que não goza o conjunto dos números inteiros, onde é sempre possível identificar o número inteiro que sucede a outro (Monteiro & Pinto, 2005). Vamvakoussi e Vosniadou (2007) adotam no seu trabalho um quadro teórico onde assumem que há uma mudança concetual envolvida na passagem do estudo dos números naturais para os números racionais. Para estes autores, a compreensão da estrutura do conjunto dos números racionais envolve a compreensão de que o facto dos números naturais serem um conjunto discreto, essa propriedade não é preservada no conjunto dos números racionais. Esta propriedade dos números naturais pode constituir uma barreira à compreensão da densidade dos números racionais. Também o facto de o conjunto dos números racionais admitir que um mesmo elemento pode ser representado de diferentes formas, tanto como fração como com decimal, constitui uma dificuldade concetual para os alunos.

Os números racionais podem admitir uma representação decimal. Santos (2014) define um número decimal como um número racional que se pode exprimir como o quociente de um inteiro por uma potência de 10. Por exemplo $\frac{3}{2}, -\frac{7}{50}$ ou $\frac{46}{5}$ são números decimais pois $\frac{3}{2} = \frac{15}{10}, -\frac{7}{50} = -\frac{14}{100}, e\, \frac{46}{5} = \frac{92}{10}$. Já $\frac{1}{3}$, por exemplo, não é um número decimal. Wu (2017) destaca que há uma classe especial de frações, aquelas cujos denominadores são iguais a potências positivas de 10, como por exemplo $\frac{1489}{100}, \frac{24}{100\,000}, \frac{58\,900}{10\,000}$. Para estes casos, existe uma forma de representar em que não se utiliza o traço de fração. Utiliza-se o numerador e fixa-se a informação do número de zeros no denominador, que para os exemplos apresentados anteriormente são dois na primeira fração, cinco na segunda e quatro na terceira e representa-se como 14,89; 0,00024 e 5,8900, respetivamente. No caso da fração decimal, esta notação com a vírgula corresponde a uma dízima finita. O número de algarismos decimais, ou casas decimais, ou seja, de algarismos à direita da vírgula corresponde ao número de zeros no respetivo denominador. Desta forma, uma dízima finita pode ser sempre representada na forma de fração (Wu, 2017). Verifica-se também que qualquer dízima finita pode ser expressa como soma de produtos de números naturais com um só algarismo por potências inteiras de 10, como por exemplo $0{,}0045 = (4 \text{ x } 10^{-3)} + (5 \text{ x } 10^{-4}) = \frac{0}{10^1} + \frac{0}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \frac{5}{10^4}$, o que Wu (2017) designa por decomposição decimal completa, por ser uma extensão do conceito de valor posicional dos números naturais. Por vezes acontece que, depois de uma determinada casa decimal, os algarismos decimais de uma dada dízima se repetem indefinidamente num bloco fixo de algarismos, como por exemplo 16,4197676767676 … ou 0,888888… Nestes casos existe uma notação para representar estas dízimas, em que se utiliza os parêntesis para marcar os algarismos que se repetem indefinidamente, como por exemplo 16,419(76) ou 0,(8). Estas dízimas designam-se por dízimas infinitas periódicas e podem ser sempre representadas por uma fração (Wu, 2017).

Assim como qualquer dízima finita ou infinita periódica pode ser representada sob a forma de uma fração, definida como $\frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}\; e\; n \in \mathbb{N}\; e\; n \neq 0$, o recíproco também é verdade, qualquer fração assim definida é igual a uma dízima finita ou a uma dízima infinita periódica[7]. Os algarismos decimais desta dízima são dados pelo quociente da divisão inteira de m x 10^k por n, onde k é qualquer número natural $\geq n$.

2.3.1.3. Os diferentes significados das frações em contexto

As frações em contexto escolar podem ter diferentes significados, mas esta multiplicidade de significados pode produzir ambiguidades que resultem em dificuldades para a aprendizagem dos alunos. Por outro lado, esta diversidade de significados influencia o ensino potencializando a compreensão dos números racionais, sendo, por isso, importante que os professores tenham

[7] Note-se que Wu (2017) considera o zero como um número natural, ao contrário do que é tradicional em Portugal no ensino básico.

consciência desses diferentes significados e que tirem partido dessa diversidade para melhorar o ensino (Monteiro & Pinto, 2009).

É de certa forma consensual que os trabalhos de Kieren (1976) foram os primeiros a propor que os números consistem em diferentes constructos, e que para uma compreensão global do conceito de número racional, seria necessária a compreensão desses constructos e da sua confluência. Kieren (1976) apresenta sete significados diferentes que os racionais podem ter:

- Os números racionais podem ser representados sob a forma de frações que podem ser comparadas, adicionadas, subtraídas, multiplicadas e divididas;
- Os números racionais podem ser representados sob a forma de frações decimais que formam uma extensão natural dos números inteiros (dízimas finitas ou infinitas periódicas);
- Os números racionais são classes de equivalência de frações. Desta forma $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}$, ... assim como $\frac{1}{3}, \frac{2}{6}, \frac{3}{9}$, ... são números racionais;
- Os números racionais são números da forma $\frac{a}{b}$, onde a e b são inteiros e $b \neq 0$;
- Os números racionais são operadores multiplicativos;
- Os números racionais são elementos de um corpo ordenado de infinitos quocientes. Eles são números na forma $x = \frac{a}{b}$, tal que x satisfaz a equação $bx = a$;
- Os números racionais são medidas que comparam duas grandezas.

Posteriormente Behr, Lesh, Post e Silver (1983), baseando-se nos trabalhos de Kieren (1981), apresentaram quatro interpretações para os números racionais, designando-os por subconstructos: subconstructo parte-todo como medida, reformulando a noção parte-todo, indicando a quantidade relativa a uma unidade específica daquela quantidade; subconstructo razão que define uma nova quantidade como uma relação entre duas quantidades; subconstructo quociente que vê o número racional como o resultado de uma divisão; subconstructo operador que vê a fração como uma transformação.

Alguns anos mais tarde, Kieren (1988) reformula a sua classificação e apresenta cinco constructos que considera fundamentais no trabalho com os racionais na forma de fração: relação parte-todo, em que algo é dividido em partes iguais; quociente, que depende da partilha equitativa, representa o quociente entre dois números inteiros; medida, que compara duas grandezas; razão, como relação entre duas quantidades, referentes a duas partes de um todo; operador, que transforma o valor de um número noutro.

Behr, Harel, Post e Lesh (1992) apresentam ainda uma outra classificação que resume a classificação dos números racionais em cinco subconstructos que consideram suficientes para clarificar o conceito de número racional: parte-todo, quociente, razão, operador e medida.

Já na década de 90 do século XX, Kieren (1993) faz a distinção de quatro interpretações, que também designa por subconstructos, que destaca por terem particular relevância para o conhecimento associado às frações por parte das crianças. Distingue o subconstructo quociente, como facilitador da compreensão do quociente entre duas medidas; o subconstructo medida, associado à medição; o subconstructo operador, em que os números fracionários funcionam como operadores que descrevem alterações de tamanho; e o subconstructo razão quando relacionamos variáveis referentes a quantidades distintas, descrevemos misturas ou probabilidades.

Brousseau et al. (2004, 2007) destacam que os números racionais são normalmente apresentados sob a forma de fração, mas que estas podem ter papéis distintos, como se fossem diferentes conceitos matemáticos. Brousseau et al. (2007) distinguem três conceitos que podem ser representados sob a forma de fração. A fração como medida, que Brousseau et al. (2007) definem como o número m de cópias da unidade que coincide com n cópias da quantidade a ser medida determina a medida $\frac{n}{m}$ da referida quantidade usando essa unidade. Um segundo conceito é a fração como função linear. Neste caso, a fração corresponde a uma relação de proporcionalidade direta entre duas variáveis ($y = kx$ portanto $k = \frac{y}{x}$). O terceiro conceito é o de fração como razão. Brousseau et al. (2007) referem que a utilização mais frequente da fração como razão, é a razão escalar em que um número que designam por "número abstrato", sem dimensão, expressa o número racional de vezes que um número ou quantidade m está contido noutro, n.

Monteiro e Pinto (2005) sintetizam a investigação feita neste campo e propõem seis significados que as frações podem assumir em contextos escolares, ao nível elementar, salientando que é na síntese dessa diversidade e nas relações que os alunos vão conseguindo estabelecer entre as situações, que o sentido de número racional se poderá estabelecer. Monteiro e Pinto (2005) definem assim os diferentes significados:

- a relação entre a parte de um todo contínuo ou discreto, em que a fração surge da comparação entre a parte e o todo, sendo o todo a unidade. A fração $\frac{a}{b}$ refere-se a uma parte fracionada de uma só unidade, como um quinto de uma folha está pintada ou um quinto de uma coleção de 10 lápis são azuis, sendo o todo a folha de papel e a coleção de lápis respetivamente. Neste caso o denominador indica o número de partes em que a unidade está dividida e o numerador designa o número de partes selecionadas;
- o quociente entre dois números inteiros representados pela fração $\frac{a}{b}$ ($b \neq 0$). Este significado está associado à partilha equitativa, em que o numerador representa o número de coisas a partilhar e o denominador o número de recetores dessa partilha. Monteiro e Pinto (2005) salientam que

esta é uma relação entre duas quantidades, mas que também pode assumir o significado de uma quantidade, se se pensar que é a quantidade com que cada um dos recetores ficou;
- a razão "parte-parte", que se entende como a relação entre duas quantidades do mesmo todo (ex.: a razão entre o número de meninos e de meninas numa turma é de 3/2 – lê-se "é de 3 para 2" e corresponde a uma quantidade intensiva;
- a razão entre duas grandezas diferentes, que dão origem a uma nova grandeza, como por exemplo a razão entre a distância e o tempo necessário para a percorrer, a velocidade, que corresponde a uma quantidade intensiva;
- o operador partitivo e o operador partitivo multiplicativo, em que a fração $\frac{a}{b}$ transforma o cardinal de um conjunto discreto, em que o denominador indica uma divisão e o numerador uma multiplicação;
- a medida, em que se compara uma grandeza com outra, tomada como unidade. Nesta situação ter-se-á de fracionar a unidade de tal forma que esteja contida um número inteiro de vezes na grandeza a medir;

Monteiro e Pinto (2005) destacam que a relação da parte com o todo "é uma relação inerente aos números fracionários e que é fundamental ser realçada, seja qual for a situação didática, pois o "todo" traduz a unidade fracionada" (p. 92, aspas no original). No entanto, quando a abordagem didática se limita a esta relação entre a parte e o todo pode levar a equívocos, nomeadamente quando os alunos confundem a relação entre as partes e não a relação entre a parte e o todo que o professor pretende evidenciar (Monteiro & Pinto, 2005). Outro inconveniente que uma abordagem exclusivamente centrada na relação entre a parte e todo pode acarretar é quando se trata de uma fração que representa um número maior do que uma unidade. Um exemplo apresentado por Monteiro e Pinto (2005) é quando estão perante uma figura como a seguinte, que representa $\frac{5}{4}$, e os alunos interpretam como $\frac{5}{8}$.

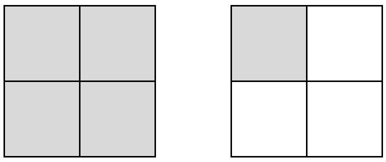


Figura 2.2. Exemplo de equívocos na interpretação das frações.

A relação entre a parte e o todo, em que é apresentada uma unidade contínua já dividida, é uma situação muito utilizada na realidade educativa e que se revela eficaz a curto prazo, mas restringe a conceção de fração (Monteiro & Pinto, 2005). Monteiro e Pinto (2005) salientam ainda que, nos casos em que as frações representam quantidades, só representarão a mesma quantidade se se referirem à mesma unidade.

Diversos trabalhos têm evidenciado que uma abordagem às frações utilizando situações de partilha equitativa, utilizando situações da realidade das crianças, pode permitir ligar as frações à divisão de números inteiros, evidenciando o aspeto da quantidade extensiva das frações, mas também o aspeto de relação de entre duas grandezas da mesma espécie. Esta é também uma abordagem que permite destacar o aspeto da comparação de quantidades representadas por frações ou a equivalência entre frações (Monteiro & Pinto, 2005). Esta abordagem a partir da partilha equitativa também está relacionada com a abordagem entre a parte e o todo, porque após a partilha em partes iguais se relaciona a parte resultante com a unidade. Por exemplo na partilha de 3 pizas entre quatro pessoas, as crianças identificam um quarto com uma das partes de uma piza dividida em quatro partes iguais (Monteiro & Pinto, 2005).

A importância da abordagem às frações a partir da medida também tem sido destacado em trabalhos de investigação, porque prepara os alunos para a representação de números na linha numérica, evidenciando a equivalência de frações, proporcionando uma base para a adição e subtração de números racionais (Monteiro & Pinto, 2005).

É assim de destacar a importância de ser desenvolvido um trabalho que envolva os diferentes contextos em que as frações aparecem com diferentes significados, pois só assim se poderá desenvolver o sentido do número racional (Monteiro & Pinto, 2005).

2.3.1.4. Os diferentes tipos de unidade

No seu trabalho, Caraça (2003) distingue os conjuntos numeráveis, como o $\mathbb{N}_0$, dos conjuntos contínuos, como o conjunto dos pontos da reta. Em relação ao conjunto dos racionais, Caraça (2003) coloca a questão se será do tipo numerável, contínuo ou será de um tipo novo? Como o conjunto dos números racionais carece de uma bijetividade relativamente ao conjunto de todos os pontos da reta, este não pode ser um conjunto contínuo. Caraça (2003) define então o conjunto dos números racionais como sendo um conjunto ordenado, infinito, denso, do tipo numerável, mas não contínuo.

Do ponto de vista do ensino, no desenvolvimento do conceito de número racional a ideia de unidade que lhe está associada é uma das dificuldades dos alunos assinaladas na literatura (Monteiro & Pinto, 2005; Lamon, 2002, 2006). Monteiro e Pinto (2005) destacam que uma das dificuldades na compreensão das frações prende-se com a definição da unidade de referência. Numa questão como “A Joana gastou 1/3 da sua mesada em idas ao cinema e a Marta gastou 1/2 da sua mesada em idas ao cinema, quem gastou mais?” (Monteiro & Pinto, 2005, p. 94) as crianças poderão ser levadas a comparar diretamente 1/3 com 1/2 sem se preocuparem com as unidades de referência, que poderão ser diferentes. Lamon (2006) destaca que, quando se dá início à discussão em torno de problemas com frações, é essencial estabelecer-se qual é a unidade. Para se conseguir responder à pergunta “Quanto?” temos de usar uma unidade de medida para se poder determinar a quantidade que está em causa, porque qualquer fração depende de uma unidade. Lamon (2006) considera que o ensino das frações não tem dado a devida atenção à definição da unidade e, por isso, existe muitas vezes uma visão estereotipada da unidade como sendo uma piza ou uma bolacha. No entanto, no estudo das frações a unidade não tem de ser necessariamente um só objeto. No caso dos números naturais, uma unidade significa um objeto apenas. No caso das frações, a unidade significa a quantidade total que se tem antes de se fazer qualquer partilha. A unidade pode ser um conjunto de objetos ou um grupo visto como uma unidade singular. Desta forma, qualquer fração é sempre uma quantidade relativa, diz a quantidade que se tem relativamente a uma unidade que foi definida (Lamon, 2006).

A definição da unidade num problema com frações não pode ser uma questão de interpretação pessoal (Lamon, 2006). Na abordagem inicial às frações, o significado da fração decorre muitas vezes do contexto em que está a ser usada. Cada contexto, de uma forma explícita ou implícita, deve definir qual é a unidade. Os problemas que são propostos aos alunos deveriam especificar a unidade ou fornecer informação suficiente para que unidade possa ser determinada com um raciocínio rápido.

Lamon (2006) apresenta um exemplo do que poderá não ser uma boa questão sobre frações, porque a unidade não é especificada.

Que fração está representada na figura?

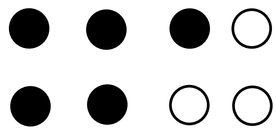


Figura 2.3. Equívocos associados à interpretação da unidade (Lamon, 2006, p. 67)

Perante a figura anterior, Lamon (2006) apresenta diferentes respostas possíveis, conforme a unidade que for assumida pela pessoa que está a resolver a questão: pode ler 5, se cada ponto for considerado como unidade; pode considerar que a unidade é cada conjunto de 2 pontos e ler $2\frac{1}{2}$ ou 2,5; se considerar a razão entre os pontos pretos e os pontos brancos, a leitura seria $\frac{5}{3}$ ou $\frac{3}{5}$ no caso de ser a razão entre os pontos brancos e os pontos pretos; pode considerar que cada grupo de 4 pontos é uma unidade e ler $1\frac{1}{4}$; pode também considerar que o conjunto dos 8 pontos é a unidade e ler $\frac{5}{8}$. Este tipo de situação poderá provocar algum embaraço a um professor que tenha apresentado a figura a pensar que a resposta do aluno iria ser $\frac{5}{8}$. Monteiro e Pinto (2009) salientam que, relativamente à questão da unidade, é essencial discutir com os alunos, destacando o todo a que a fração faz referência e apresentando situações diversificadas relativamente à unidade.

Lamon (2006) destaca também a importância de as crianças aprenderem a trabalhar com unidades de diferentes tipos. Entre os diferentes tipos de unidade a considerar, Lamon (2006) destaca a utilização de unidades contínuas, como uma tarte, um conjunto de unidades contínuas, como um conjunto de pizas, um, ou um conjunto de objetos contínuos, que normalmente já apresentam as partes marcadas, como uma barra de chocolate, um conjunto de objetos discretos, como um conjunto de rebuçados, conjuntos de objetos discretos que normalmente são apresentados em arranjos especiais, como uma caixa de ovos, ou ainda unidades compostas, que consistem num só pacote que contém múltiplos objetos no seu interior tais como por exemplo queques. Monteiro e Pinto (2005) também destacam como dificuldade no trabalho com as frações o facto de as unidades poderem ser contínuas ou discretas. Um exemplo apresentado por Monteiro e Pinto (2005) é a determinação da quarta parte de uma folha de papel e a quarta parte de 8 lápis, já que no segundo caso o resultado é representado por um número inteiro e no primeiro caso isso não é possível. Monteiro e Pinto (2005) distinguem vários tipos de unidade: simples ou unidades compostas, discretas ou contínuas, salientando a importância da definição explícita da unidade de referência que serve de contexto, principalmente numa fase inicial do trabalho com as frações e os decimais.

Do ponto de vista didático, é importante assinalar que, para se chegar a um trabalho só a nível simbólico é necessário que os alunos desenvolvam um significado para os símbolos, através de problemas e situações que lhes façam sentido (Monteiro & Pinto, 2009).

Constitui ainda um trabalho fundamental as situações de reconstrução da unidade, dada uma determinada parte, que poderão levar os alunos a refletir sobre as relações entre a parte e o todo. Neste tipo de trabalho, que Lamon (2006) designa por raciocínio de cima para baixo, envolve um processo que muitas vezes começa numa fração, passa pela identificação da fração unitária, pela identificação da unidade, para chegar finalmente à fração que pretendemos. Este tipo de processo envolve o raciocínio proporcional. Lamon (2006) apresenta exemplos deste tipo de trabalho tanto com unidades discretas, como com unidades contínuas. Um exemplo com unidades discretas é o seguinte:

 $= \frac{4}{5}$ das joaninhas que estão na minha árvore. Quantas joaninhas estão ao todo na minha árvore?

Podemos dizer: 8 joaninhas = $\frac{4}{5}$

2 joaninhas = $\frac{1}{5}$

10 joaninhas = $\frac{5}{5}$ ou 1. Lamon (2006, p. 70)

Monteiro e Pinto (2005) salientam também a importância do desenvolvimento de tarefas de reconstrução da unidade, tanto com unidades discretas, como com unidades contínuas.

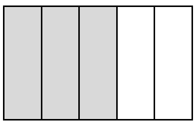
2.3.1.5. Equivalência de frações

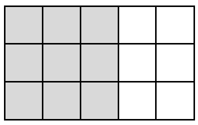
Os números racionais quando expressos sob a forma $\frac{a}{b}$ com $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{N}$ podem escrever-se de mais de uma maneira. Por exemplo $\frac{2}{4} = \frac{3}{6}$. Para determinar quando é que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ $(com\ a, c \in \mathbb{Z}\ e\ b, d \in \mathbb{N})$ representam o mesmo número racional, basta verificar que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd} \Leftrightarrow ad = bc$ (Santos, 2014). Wu (2017) também destaca esta característica dos números racionais representados sob a forma de fração referindo que "Dadas duas frações $\frac{m}{n}$ $e \frac{k}{l}$, respetivamente, suponha-se que existe um número natural não nulo c tal que k = cm e l = cn. Então, $\frac{m}{n} = \frac{k}{l}$." (p. 238)

Apesar de ser um assunto trabalhado sucessivamente em diferentes anos de escolaridade, o resultado do ensino da equivalência de frações é muitas vezes frustrante (Kamii & Clark, 1995). Fazendo uma revisão do trabalho desenvolvido sobre o ensino da equivalência de frações, Kamii e Clark (1995) salientam que o conhecimento das frações equivalentes envolve a capacidade de relacionar o mesmo número a "nomes" diferentes, a capacidade de ignorar ou imaginar linhas que dividem uma unidade, num processo idêntico ao que Lamon (2002) designa por "unitizing", e um raciocínio flexível. Estas autoras destacam que a equivalência de frações envolve dois aspetos relacionados com o raciocínio operativo, o raciocínio multiplicativo e a conservação do todo e das partes. Para Kamii e Clark (1995) o ensino da equivalência de frações deve ir do conhecimento informal e intuitivo para o conhecimento formal. Desta forma, os alunos começam por utilizar a visualização e a manipulação de materiais para comparar frações, pensam depois no tamanho das partes (comparando por exemplo $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{5}$ e referindo que $\frac{1}{4}$ é maior do que $\frac{1}{5}$ porque estando a unidade dividida em menos partes, cada uma das partes é maior). Só depois pensam em frações equivalentes e na sua utilização para comparar frações.

No seu estudo, Kamii e Clark (1995) investigaram a compreensão de equivalência de frações em alunos do quinto e do sexto ano de escolaridade que já tinham estudado esta noção. Na resolução dos problemas propostos, principalmente envolvendo a fração como parte-todo, a maioria dos alunos usou estratégias que os autores designam como percetuais e não as estratégias formais que já tinham trabalhado. Kamii e Clark (1995) sublinham que o ensino da equivalência de frações deve começar com problemas realistas e as crianças devem ser encorajadas a criar as suas próprias soluções de forma a que a noção de fração possa desenvolver-se a partir do seu próprio raciocínio. Para Kamii e Clark (1995) esta matematização a partir do real é preferível às situações em que para trabalhar as frações são apresentadas imagens de círculos, quadrados ou retângulos que foram previamente seccionados. Kamii e Clark (1995) destacam a importância de as crianças terem de colocar o seu próprio raciocínio no papel, em vez de receberem materiais manipuláveis preparados. Destacam ainda que, na organização de propostas de ensino, a equivalência de frações seja trabalhada utilizando as diferentes representações em paralelo, ao contrário do que acontece habitualmente onde inicialmente apenas se trabalham as frações próprias e se espera muito tempo até que sejam apresentadas as frações impróprias, números mistos e adições com frações com denominadores diferentes. Outro aspeto destacado por Kami e Clark (1995) é que o trabalho com frações como partes dos segmentos de reta parece ter melhores resultados quando é ensinado no contexto da medida. Para Kami e Clark (1995), um ponto fundamental na aquisição dos conceitos de ordem e equivalência de frações é quando as crianças ganham independência relativamente aos materiais manipuláveis e conseguem começar a lidar com as frações como números, evoluindo na noção quantitativa de número racional.

No trabalho com a equivalência de frações e a definição da unidade, Lamon (2002) destaca o processo que designa por "unitizing". Este processo consiste em ir-se considerando várias partições de uma unidade, ou formas de organizar a unidade, sem alterar essa unidade. Lamon (2002) apresenta um exemplo com um retângulo que é apresentado sucessivamente com diferentes partições, mas sempre representando $\frac{3}{5}$, onde se põe em evidência a equivalência entre frações, neste caso $\frac{3}{5} = \frac{9}{15}$.





2.3.1.6. Comparação e ordenação dos números racionais

De acordo com Caraça (2003) a ordenação do campo racional é estabelecida através das definições de igualdade e desigualdade. Relativamente à igualdade, Caraça (2003) apresenta a seguinte definição "Dois números racionais $r = \frac{m}{n}$ e $s = \frac{p}{q}$ dizem-se iguais quando exprimem a medida do mesmo segmento, com a mesma unidade inicial." (p. 38). Mesmo que $m \neq p$ e $n \neq q$, cada uma das *n* partes em que a unidade é dividida, pode ser subdividida em *k* partes, sendo *k* um inteiro qualquer não nulo. Feita essa nova subdivisão, a medida será expressa pelo número racional $\frac{m\,.\,k}{n\,.\,k}$ que, pela definição, deve ser considerado como igual a $\frac{m}{n}$. Daqui, Caraça (2003) conclui que para um número racional $r = \frac{m}{n}$, todo o número racional $s = \frac{p}{q}$ onde $p = m\,.\,k$ e $q = n\,.\,k$ (*k* qualquer inteiro não nulo), é igual a *r*. Relativamente à desigualdade, Caraça (2003) refere que “de dois números racionais r e s, diz-se maior aquele que, com o mesmo segmento unidade, mede um segmento maior” (p. 38). Caraça (2003) apresenta três consequências da definição apresentada 1) se os dois números têm o mesmo denominador, é maior (menor) o que tiver maior (menor) numerador; 2) se os dois números têm o mesmo numerador, é maior (menor) o que tiver menor (maior) denominador; e 3) se os dois números não têm o mesmo denominador, nem numerador, ter-se-ão que reduzir ao mesmo denominador.

Santos (2014) salienta que no corpo $\mathbb{Q}$ pode definir-se uma relação de ordem compatível com as operações aritméticas no sentido:

> 1. $(\forall\, p,q,r,s\ \in \mathbb{Q}){:}\, p\ \leq q\ e\ r\ \leq s\ \Rightarrow p+r\ \leq q+s$; 2. $(\forall\, p,q,r,s\ \in \mathbb{Q}){:}\, p\ \leq q\ e\ 0\ \leq r\ \Rightarrow p \times r\ \leq q \times r.$
>
> Naturalmente, no caso de $\mathbb{Q}$ esta relação de ordem pode ser definida por
> $\frac{a}{b}\ \leq \frac{c}{d} se\ e\ só\ se\ cb-ad\ \in\ \mathbb{Z}_{+}$. (pp. 132-133)

Ao iniciarem o estudo dos números racionais os alunos já desenvolveram trabalho com os números naturais. Este conhecimento vai inevitavelmente influenciar a forma como os alunos vão pensar a ordenação dos números racionais (Post, Behr & Lesh, 1986). No conjunto dos números naturais, os alunos podem apresentar dois tipos de pensamento. Podem atender ao aspeto cardinal do número, comparando a “grandeza” de dois números pela correspondência entre elementos de dois conjuntos finitos que representem o mesmo número ou podem centrar-se no aspeto ordinal do número, comparando dois números naturais numa sequência de contagem em que o número maior vem depois.

No entanto, no conjunto dos números racionais não é obvio para os alunos o aspeto ordinal que lhes permita ordená-los e organizá-los de forma exaustiva ao longo de uma reta numérica. Contudo, os símbolos que estão envolvidos sugerem essa relação de ordem. Quando tentam comparar $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$ os alunos podem tentar usar uma relação de ordem que pensam incorretamente estar presente, não se apercebendo de que necessitam de estratégias diferentes para ordenar frações com denominadores iguais, $\frac{2}{5}$ e $\frac{4}{5}$, por exemplo, ou para ordenar frações com denominadores diferentes, como por exemplo $\frac{3}{4}$ e $\frac{3}{5}$.

Post et al. (1986) destacam que a utilização das palavras “mais” e “maior”, ou “menos” e “menor”, no contexto da comparação e ordenação de frações, podem causar dificuldades aos alunos, devido a mal-entendidos que surgem com a utilização destas palavras na linguagem corrente. Os alunos por vezes confundem a expressão “mais” com o facto de a unidade estar partida num maior número de partes, ou a expressão “maior” com o facto de terem um número maior de partes do todo, ou ainda que o todo está partido em partes maiores. É por isso essencial esclarecer o que se entende com estas expressões no contexto da ordenação e comparação de frações, para que os alunos não formem ideias erradas durante as diferentes fases de ensino e de aprendizagem. Post et al. (1986) referem ainda uma outra confusão de linguagem, quando os alunos confundem "tamanho" e "quantidade", relacionando a expressão "tamanho" com a área e a "quantidade" com o número de subdivisões da unidade.

No sentido da organização do ensino, Post et al. (1986) salientam também que nas frações devem ser desenvolvidas estratégias que permitam aos alunos ultrapassar dificuldades conceptuais que os levam a confundir estruturas aditivas e estruturas multiplicativas, que os levam a apresentar dificuldades em tarefas de ordenação e comparação de frações como, por exemplo, afirmar que $\frac{2}{5} = \frac{4}{7}$ porque 2 + 2 = 4 e 5 +2 = 7. Post, Wachsmuth, Lesh e Behr (1985) referem-se a este fenómeno como o predomínio dos números naturais.

Post et al. (1985) destacam que na ordenação de frações será necessário que o aluno desenvolva os seguintes conhecimentos como 1) a grandeza de um número representado por uma fração depende da relação entre os dois números naturais operados pelo símbolo da fração; 2) existe uma relação inversa entre o número de partes em que o todo está dividido e o tamanho de cada parte; e 3) quando as frações têm o mesmo denominador há uma relação direta entre o número de partes que se tomam e a grandeza do número representado pela fração.

No seu trabalho, Post et al. (1986) salientam igualmente a utilização, por parte dos alunos, de um conjunto de estratégias que não lhes foram ensinadas diretamente. Uma das estratégias é designada por "residual" e refere-se aos alunos compararem frações com base na quantidade que falta à fração para completar a unidade. Desta forma, quando comparam as frações $\frac{5}{6}$ e $\frac{7}{8}$ referem que $\frac{5}{6} < \frac{7}{8}$ porque a ambas falta uma parte para completar a unidade e como $\frac{1}{6}$ é maior do que $\frac{1}{8}$, $\frac{5}{6}$ $(1 - \frac{1}{6})$ tem de representar uma quantidade menor. Outra estratégia utiliza os números de referência e a transitividade. Nesta situação, os alunos comparam duas frações utilizando uma terceira como referência. Por exemplo, os alunos conseguem comparar $\frac{4}{9} < \frac{5}{8}$ porque sabem que $\frac{4}{9} < \frac{1}{2} < \frac{5}{8}$, utilizando como referência a fração $\frac{1}{2}$. Este tipo de estratégias parece basear-se noutras que os alunos utilizaram anteriormente com os números naturais (Post et al., 1986).

Num trabalho apresentado por Behr, Wachsmuth, Post e Lesh (1984), estes salientam que uma forma de compreender que noção quantitativa de um número racional um aluno tem, é perceber a sua capacidade para compreender a dimensão relativa dos números racionais na comparação de um par ou de um conjunto de racionais, ou seja, a sua capacidade de determinar relações de igualdade, inferioridade ou superioridade. No estudo, Behr et al. (1984) tinham como objetivo identificar estratégias dos alunos para comparar pares de frações de três tipos 1) com numeradores iguais; 2) com denominadores iguais; e 3) com numeradores e denominadores diferentes, sendo o objetivo principal o de conhecer o papel dos modelos físicos como facilitadores da aquisição e uso de conceitos matemáticos conforme a compreensão dos alunos evolui do concreto para o abstrato. O trabalho de Behr et al. (1984) apresenta as diferentes estratégias que os alunos utilizaram para comparar frações, para cada um dos três tipos de frações.

Nas conclusões, Behr et al. (1984) destacam que, com um ensino adequado e durante um período prolongado, a maioria das crianças no final do quarto ano de escolaridade conseguirá desenvolver um raciocínio adequado para lidar com questões de ordenação e equivalência de frações. No entanto, salientam que esta afirmação se restringe a questões que não envolvam a aplicação do conhecimento sobre frações a novas situações. Mesmo após um período extenso dedicado ao ensino das frações, um número significativo de alunos do quarto ano de escolaridade continuava a demonstrar lacunas consideráveis na compreensão dos conceitos associados à ordenação e comparação de frações. Behr et al. (1984) salientam que a compreensão, a ordenação e a equivalência de frações requer uma compreensão da relação de compensação entre o tamanho e o número de partes iguais em que um todo está dividido, o que, para uma parte significativa das crianças do quarto ano de escolaridade, não é evidente, mesmo após um período relativamente longo de ensino, com oportunidades para aprender e praticar.

No plano da organização do ensino, Behr et al. (1984) recomendam que as frações sejam introduzidas no terceiro ano de escolaridade, restringindo-se inicialmente ao estabelecimento de significados elementares da fração, com ênfase nas frações unitárias. No final do terceiro, ou início do quarto ano de escolaridade, seria introduzido o conceito de fração não unitária, que seria desenvolvido através da iteração das frações unitárias. O conceito de ordem poderia ser depois estendido a frações com o mesmo numerador e depois a frações com numeradores e denominadores diferentes.

Na ordenação de números racionais na representação através de numeral decimal também se verifica uma aplicação errada dos conhecimentos que os alunos têm dos números naturais (Post, Cramer, Behr, Lesh & Harel, 1993). Os alunos apresentam dificuldades na ordenação de números racionais representados através de numerais decimais constituídos por um número diferente de casas decimais, sendo um erro comum a afirmação de que 0,39 é maior do que 0,4 porque 39 é maior do que 4, utilizando de forma errada o conhecimento que têm dos números naturais.

Orton, Post, Behr, Cramer, Harel e Lesh (1995) referem que uma possível estratégia para comparar duas frações é encontrar frações equivalentes com denominadores comuns. No seu trabalho apresentam um exemplo em que para comparar $\frac{2}{5}$ e $\frac{7}{18}$ os alunos multiplicam os denominadores das frações para encontrar um denominador comum, neste caso o 90, continuando depois o procedimento comparando $\frac{36}{90}$ e $\frac{35}{90}$ e verificando que $\frac{2}{5}$ é maior. No entanto, os autores destacam que este tipo de procedimento, de uma forma geral, é pouco significativo para alunos do quinto ano de escolaridade.

Num trabalho onde apresentam alguns aspetos a ter em conta no ensino das frações, Bezuk e Cramer (1989) referem, relativamente à ordenação e comparação de frações, que nos primeiros anos de escolaridade muitos pares de frações podem ser comparados sem o recurso a procedimentos formais como encontrar o mínimo múltiplo comum ou passar cada uma das frações para a sua representação decimal. Como recomendação para uma fase inicial do ensino, estas autoras referem que a comparação de frações seja feita com recurso a materiais manipuláveis, estabelecendo quatro categorias de frações onde os alunos podem utilizar estratégias informais: 1) pares de frações com denominadores iguais; 2) pares de frações com numeradores iguais; 3) pares de frações em que se possam utilizar números de referência como $\frac{1}{2}$ ou 1 (uma das frações é menor que o número de referência e a outra fração é maior); 4) pares de frações em que faltam o mesmo número de "peças" para ter uma unidade (ex.: $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$ ou $\frac{3}{5}$ e $\frac{6}{8}$).

<u>2.3.1.7. Operações com números racionais</u>

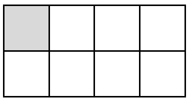
No seu trabalho, Caraça (2003) começa por definir a operação de adição com números racionais como "dados dois números *r* e *s* medindo, com a mesma unidade, dois segmentos, chama-se *r* + *s* ao número racional que mede, ainda com a mesma unidade, o segmento soma dos dois" (p. 40). Caraça (2003) complementa esta definição com a definição da soma de dois segmentos

> dois segmentos de reta $\overline{AB}$ *e* $\overline{CD}$ chama-se soma deles ao segmento $\overline{AD}$ que se obtém transportando $\overline{CD}$ para a reta sobre a qual existe $\overline{AB}$, e fazendo lá coincidir a origem *C* de $\overline{CD}$ com a extremidade *B* de $\overline{AB}$. (p. 40)

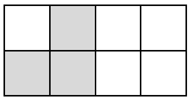
Como consequência da definição anterior, Caraça (2003) apresenta a soma de números racionais na forma de fração, com o mesmo denominador, como $r = \frac{m}{n}$ e $s = \frac{p}{n}$ então $\frac{m}{n} + \frac{p}{n} = \frac{m+p}{n}$. No caso em que os dois números não têm o mesmo denominador, podem reduzir-se previamente ao mesmo denominador, $r = \frac{m}{n}$ e $s = \frac{p}{q}$, em que $r = \frac{m\,.\,q}{n\,.\,q}$ e $s = \frac{n\,.\,p}{n\,.\,q}$, assim $r + s = \frac{m\,.q+m\,.p}{n\,.q}$ logo, $\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{m\,.q+n\,.p}{n\,.q}$ (Caraça, 2003). Salienta ainda que se mantêm todas as propriedades da adição de números inteiros.

No que diz respeito a um conhecimento para ensinar, Vale e Pimentel (2005) começam por utilizar a representação pictórica para ilustrar a adição de frações com denominadores iguais.

Na situação "O João comeu $\frac{1}{8}$ de um bolo e a Joana, mais gulosa, comeu $\frac{3}{8}$. Que parte do bolo comeram em conjunto?" (Vale & Pimentel, 2005, p. 228) apresentam a seguinte resolução:

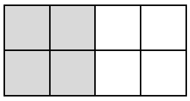


parte do João



parte da Joana

No total comeram

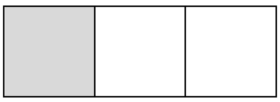


$\frac{4}{8}$ do bolo

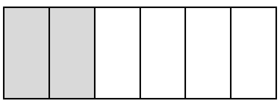
O modelo sugere que $\frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{4}{8}$ (Vale & Pimentel, 2005, p. 228)

A partir da resolução anterior, Vale e Pimentel (2005) apresentam a definição da adição de frações com o mesmo denominador "Sejam dois números racionais $\frac{a}{c}$ e $\frac{b}{c}$. A soma de $\frac{a}{c}$ com $\frac{b}{c}$ é dada por $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$." (p. 228).

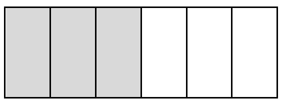
Para as situações em que as frações não têm o mesmo denominador, Vale e Pimentel (2005) seguem um processo análogo na anterior. Começam por modelar uma situação recorrendo à representação pictórica, $\frac{1}{3} + \frac{1}{2}$



De seguida, salientam que, para adicionar os dois números, a unidade tem de estar dividida no mesmo número de partes, apresentando as seguintes representações.



$\frac{2}{6}$



$\frac{3}{6}$

(Vale & Pimentel, 2005, p. 229)

Destacam que, depois de ser encontrada a fração equivalente, para cada uma das frações anteriores, de forma a que ambas tenham o mesmo denominador, volta-se a estar perante uma adição de frações com denominadores iguais. A partir desta situação, Vale e Pimentel (2005) apresentam a definição para a adição de dois números racionais na forma de fração “Sejam dois números racionais $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$. A soma de $\frac{a}{b}$ com $\frac{c}{d}$ é dada por $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$.” (p. 229), salientando que as propriedades da adição com os números racionais são extensões das propriedades homólogas da adição com os números inteiros.

No sentido do ensino da adição de frações, Wu (2017) salienta a definição de adição de números naturais como a concatenação de segmentos e como esta definição pode ser usada para a adição de qualquer par de frações. Desta forma, dadas as frações $\frac{k}{l}$ e $\frac{m}{n}$ a soma pode ser definida como “$\frac{k}{l}+\frac{m}{n}=$ o comprimento de dois segmentos concatenados” (p. 256). A partir desta definição, Wu (2017) enuncia a forma de adicionar duas frações $\frac{k}{l}$ e $\frac{m}{n}$ utilizando a equivalência de frações. Tendo $\frac{k}{l}=\frac{k.n}{l.n}$ e $\frac{m}{n}=\frac{l.m}{l.n}$ pelo que se poderá adicionar as frações fazendo $\frac{k}{l}+\frac{m}{n}=\frac{k.n}{l.n}+\frac{l.m}{l.n}=\frac{k.n+l.m}{l.n}$. Se se exprimir as duas frações como múltiplos de $\frac{1}{l.n}$ ter-se-á uma forma de adicionar quaisquer frações $\frac{k}{l}+\frac{m}{n}=\frac{k.n+l.m}{l.n}$. Wu (2017) salienta que a adição entre frações satisfaz as propriedades associativa e comutativa.

Na adição e subtração com números racionais na forma decimal, Vale e Pimentel (2005) começam por destacar que operar com decimais é semelhante a operar com números inteiros, sendo necessário cuidado com a posição da vírgula. Para exemplificar a adição com decimais, Vale e Pimentel (2005) recorrem às frações decimais para justificar as regras. Desta forma, para o exemplo 76,5 + 8,67 utilizam o que designam por notação expandida

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & 70 & + & 6 & + & \frac{5}{10} & & \\
 & + & & & & 8 & + & \frac{6}{10} & + & \frac{7}{100} \\
\hline
 & & & 70 & + & 14 & + & \frac{11}{10} & + & \frac{7}{100} \\
= & 80 & + & 4 & + & 1 & + & \frac{1}{10} & + & \frac{7}{100} \\
= & & & 80 & + & 5 & + & \frac{1}{10} & + & \frac{7}{100} \\
= & & 85{,}17 & & & & & & &
\end{array}
$$

(Vale & Pimentel, 2005, p. 238)

Wu (2017) também usa a adição de frações para justificar o algoritmo da adição com dízimas finitas, nomeadamente no que se refere à necessidade do alinhamento vertical das vírgulas decimais das duas dízimas, a adição dos dois números como se tratassem de números naturais e a colocação da vírgula no número que daí resulta. No exemplo 4,0451 + 7,28 (Wu, 2017) começa por salientar que 4,0451 + 7,28 = 4,0451 + 7,2800. Desta forma $4{,}0451+7{,}28=\frac{40\,451+72\,800}{10^4}=\frac{113\,251}{10^4}=11{,}3251$.

No que diz respeito à subtração, Caraça (2003) apresenta-a como a operação inversa da adição, "dados dois números racionais $r=\frac{m}{n}$ e $s=\frac{p}{q}$, chama-se diferença $r-s$ deles a um terceiro número racional d tal que $s+d=r$." (Caraça, 2003, p. 41). Como consequência $d=\frac{m\,.q-n\,.p}{n\,.q}$ porque $d+s=\frac{m\,.q-n.p}{n\,.q}+\frac{p}{q}=\frac{m\,.q-n\,.p}{n\,.q}+\frac{n\,.p}{n\,.q}=\frac{m\,.q-n\,.p+n\,.p}{n\,.q}=\frac{m\,.q}{n\,.q}=r$, pelo que se pode escrever $\frac{m}{n}-\frac{p}{q}=\frac{m\,.q-n\,.p}{n\,.q}$ (Caraça, 2003). Salienta-se que a operação verifica todas as propriedades da subtração de números inteiros.

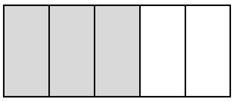
No que diz respeito à subtração, Vale e Pimentel (2005) notam que, tal como para os números inteiros, a subtração nos números racionais pode ser definida como a operação inversa da adição. Apresentam a seguinte definição "Sejam dois números racionais $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$. O único racional $\frac{e}{f}$, tal que $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}+\frac{e}{f}$ diz-se diferença entre $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ e escreve-se $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}$." (Vale & Pimentel, 2005, p. 229).

Na subtração de frações, Wu (2017) apresenta um processo semelhante ao referido para a adição, definindo a diferença $\frac{k}{l}-\frac{m}{n}$, como o comprimento do segmento que sobra quando se retira um segmento de comprimento $\frac{m}{n}$ a partir de um extremo de um segmento de comprimento $\frac{k}{l}$. Desta forma, se $\frac{k}{l}\geq\frac{m}{n}$, $\frac{k}{l}-\frac{m}{n}=\frac{k.n}{l.n}-\frac{l.m}{l.n}=\frac{k.n-l.m}{l.n}$. Tal como na adição, na subtração Wu (2017) também utiliza a subtração de frações para justificar o algoritmo da subtração para dízimas finitas.

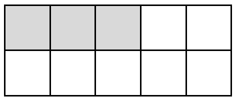
Relativamente à multiplicação, Caraça (2003) distingue três casos, o multiplicador inteiro, o multiplicador fracionário e o multiplicando inteiro e o caso geral. Em relação à multiplicação de um número racional por um multiplicador inteiro, Caraça (2003) segue o critério de analogia com a definição das operações com os números inteiros e apresenta a multiplicação como $\frac{p}{q}\,.n=\overbrace{\frac{p}{q}+\frac{p}{q}+\cdots+\frac{p}{q}}^{(n)}$, de onde, pela definição de adição com números racionais na forma de fração, apresenta $\frac{p}{q}.n=\frac{n\,.p}{q}$. Quando o multiplicador é fracionário e o multiplicando inteiro, Caraça (2003) segue o critério da manutenção da comutatividade do produto, apresentando a definição $n\,.\frac{p}{q}=\frac{p}{q}.n=\frac{p\,.n}{q}$. O caso geral é apresentado como uma extensão do anterior em que

$\frac{p}{q}.\frac{r}{s} = \frac{p.\frac{r}{s}}{q} = \frac{\frac{p.r}{s}}{q}$. Como consequência, mantêm-se todas as propriedades da operação com números inteiros, designadamente a comutativa, a associativa e a distributiva.

No que diz respeito ao ensino da multiplicação com números racionais, Vale e Pimentel (2005) distinguem duas situações, a multiplicação de um inteiro por um fracionário e a multiplicação de dois fracionários. No primeiro caso, sugerem que a multiplicação seja interpretada, tal como acontece com os números inteiros, como a uma adição de parcelas iguais, como no exemplo $3 \text{ x} \frac{2}{5} = \frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} = \frac{6}{5}$. No segundo caso, com a multiplicação de dois fracionários, Vale e Pimentel (2005) recorrem ao modelo de área e apresentam o seguinte exemplo para a calcular $\frac{1}{2} \text{x} \frac{3}{5}$. Apresentam primeiro a representação de $\frac{3}{5}$ de uma unidade e de seguida representam a sua metade.



$\frac{3}{5}$



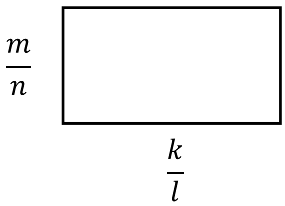
$\frac{1}{2} \text{x} \frac{3}{5}$

Desta forma, Vale e Pimentel (2005) verificam que $\frac{1}{2}$ x $\frac{3}{5}$ corresponde a $\frac{3}{10}$ da unidade. O modelo apresentado sugere que $\frac{1}{2} \text{x} \frac{3}{5} = \frac{1 \text{ x } 3}{2 \text{ x } 5} = \frac{3}{10}$. Apesar dos exemplos apresentados se referirem a números positivos, as conclusões são extensivas a todos os racionais. Vale e Pimentel (2005) apresentam a definição da multiplicação de dois números racionais $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ como o "produto entre $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ é dado por $\frac{a}{b} \text{x} \frac{c}{d} = \frac{a \text{ x } c}{b \text{ x } d}$", destacando que as propriedades da multiplicação de números inteiros estendem-se ao conjunto dos números racionais. Salientam, no entanto, que há uma nova propriedade, que não existe nos números inteiros, a de existência do oposto multiplicativo ou inverso para cada elemento não nulo. Vale e Pimentel (2005) apresentam logo de seguida as propriedades da multiplicação no conjunto dos números racionais:

1. Fecho: Se $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ são racionais, então, $\frac{a}{b}$ x $\frac{c}{d}$ é um racional
2. Comutativa: Se $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ são racionais, então, $\frac{a}{b} \text{x} \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \text{ x} \frac{a}{b}$
3. Associativa: Se $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}$ são racionais, então, $\left(\frac{a}{b} \text{x} \frac{c}{d}\right) \text{ x } \frac{e}{f} = \frac{a}{b} \text{ x } \left(\frac{c}{d} \text{x} \frac{c}{f}\right)$
4. Existência de elemento neutro: Se $\frac{a}{b}$ é racional, então, $\frac{a}{b}$ x $1 = 1$ x $\frac{a}{b} = \frac{a}{b}$
5. Existência de elemento absorvente: Se $\frac{a}{b}$ é racional, então $\frac{a}{b}$ x $0 = 0$ x$\frac{a}{b} = 0$
6. Existência de inverso para cada elemento não nulo: Se $\frac{a}{b}$ é racional e $\frac{a}{b} \neq 0$, então, $\frac{a}{b}$ x $\frac{b}{a} = \frac{b}{a}$ x $\frac{a}{b} = 1$

7. Distributiva da multiplicação em relação à adição: Se $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ e $\frac{e}{f}$ são racionais, então, $\frac{a}{b} \text{ x } \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) =$ $\left(\frac{a}{b} \text{x} \frac{c}{d}\right) + \left(\frac{a}{b} \text{ x} \frac{e}{f}\right)$ (Vale & Pimentel, 2005, p. 231)

Wu (2017) considera que, no caso das frações, não é possível distinguir a multiplicação com o significado de adição repetida, tal como acontece nos números naturais, porque num caso como $\frac{2}{5}$ x $\frac{1}{4}$ não se pode considerar uma adição com $\frac{2}{5}$ de parcelas iguais a $\frac{1}{4}$ nem uma adição com $\frac{1}{4}$ de parcelas iguais a $\frac{2}{5}$. No ensino básico, Wu (2017) critica a ideia que considera prevalecer nos manuais, em que a multiplicação é apresentada como uma regra em que se multiplicam os numeradores, para obter um novo numerador, e multiplicam-se os denominadores para obter um novo denominador. Neste sentido, apresenta duas possíveis interpretações possíveis para a multiplicação de frações, a área de retângulos e a fração como parte de algo "$\frac{m}{n}$ $de\ algo$". Com os professores dos primeiros anos de escolaridade, Wu (2017) opta por apresentar primeiro a definição que designa por geométrica, definindo a multiplicação de frações como o cálculo de uma área de um retângulo em que $\frac{m}{n} \text{x} \frac{k}{l} =$ a área de um retângulo de lados $\frac{m}{n}$ e $\frac{k}{l}$.



Wu (2017) apresenta uma situação em que é definido um quadrado unitário, com uma unidade de área, e se este quadrado for dividido em quatro partes com áreas iguais, como na figura 4. em que o quadrado grande é o quadrado unitário, os lados dos quadrados pequenos têm todos o mesmo comprimento de $\frac{1}{2}$. Desta forma, cada um dos quadrados pequenos tem uma área igual a $\frac{1}{4}$ do quadrado unitário, $\frac{1}{2}$ x $\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ (área do quadrado sombreado de lados $\frac{1}{2}$).

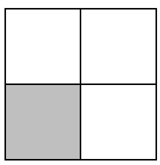
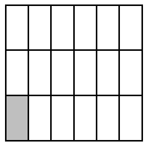


Figura 2.4. Representação pictórica da multiplicação de frações ($\frac{1}{2}$ x $\frac{1}{2}$)

Antes de generalizar a multiplicação de frações, Wu (2017) apresenta casos particulares da multiplicação com frações unitárias, recorrendo à representação geométrica com a área de retângulos, como no exemplo:

$$\frac{1}{3} \text{x} \frac{1}{6} = \frac{1}{18}$$



$$\frac{1}{18}$$

Se neste caso considerarmos o quadrado como figura unitária, cada retângulo pequeno tem $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{6}$ de comprimento dos lados respetivamente, pelo que a sua área é $\frac{1}{3}$ x $\frac{1}{6}$. A área de cada um destes retângulos é $\frac{1}{3 \text{ x } 6}$. Assim, para quaisquer números naturais l > 0 e n > 0, $\frac{1}{n}$ x $\frac{1}{l} = \frac{1}{n \text{ x } l}$.

Wu (2017) apresenta finalmente a generalização do produto de frações, recorrendo novamente à interpretação da multiplicação como área de um retângulo.

No que diz respeito ao desenvolvimento do conceito de multiplicação com números racionais, Monteiro e Pinto (2012) sublinham que é necessário os alunos saberem aplicar as operações a situações concretas de um problema, ter em conta o efeito da operação entre números racionais, que difere do que aprenderam com números naturais, compreender as propriedades da operação e usá-las no cálculo mental e escrito e compreender as relações entre a multiplicação e a divisão.

Taber (2002) sistematiza quatro categorias de situações multiplicativas: a adição de parcelas iguais, a comparação multiplicativa, a razão escalar e o operador partitivo multiplicativo. Esta autora ilustra o que acontece nas quatro categorias, em situações em que os dois fatores, o multiplicador e multiplicando, são números inteiros, o multiplicador é inteiro e o multiplicando é fracionário, o multiplicador é fracionário e o multiplicando é um número inteiro e, finalmente, o multiplicador e o multiplicando são fracionários.

A adição de parcelas iguais é considerada por Taber (2002) a categoria mais comum das situações multiplicativas. O exemplo só com números inteiros a esta categoria é a seguinte “Seis bandejas de tartes com três tartes em cada bandeja. Quantas tartes ao todo?”. Um exemplo de quando o multiplicador é inteiro e o multiplicando é uma fração pode ser o seguinte “Seis bandejas com tartes, com 2/3 de tarte em cada bandeja. Que quantidade de tarte ao todo?”. Nas categorias de Taber (2002) a adição de parcelas iguais desaparece quando se trata de um multiplicador menor do que um que é introduzido.

Na comparação multiplicativa os problemas comparam duas quantidades. Num exemplo só com números inteiros, Taber (2002) apresenta a situação em que “Um rapaz tem 3 tartes e outro tem seis vezes mais tartes do que o primeiro. Quantas tartes tem o segundo rapaz?” Na situação em que o multiplicador é um número inteiro e o multiplicando é um fracionário, Taber (2002) refere o seguinte exemplo “O Paulo tem 2/3 de uma tarte. O João tem 6 vezes mais tarte do que o Paulo. Que quantidade de tarte tem o João?”. A situação em que o multiplicador é um fracionário e o multiplicando é um número inteiro é ilustrada da seguinte forma “O Paulo tem 3 tartes. O João tem 3/5 da tarte que o Paulo tem. Que quantidade de tarte tem o João?”. Na situação em que são os dois fatores números fracionários, um exemplo é “O Paulo tem 2/3 de uma tarte. O João tem 3/5 da tarte que o Paulo tem. Que quantidade de tarte tem o João?”.

A categoria de problemas referentes à multiplicação como uma razão escalar descreve a expansão ou a contração de uma quantidade. Nesta categoria os dois fatores desempenham diferentes papéis, um dos fatores é o operador ou multiplicador, opera a alteração no outro fator, que representa a quantidade. Um exemplo só com números inteiros é “A Alice tem 90 cm de altura. Depois de comer o bolo, ela fica 6 vezes mais alta. Com que altura fica a Alice depois de comer o bolo?”. Um segundo exemplo, em que o multiplicador é um número inteiro e a quantidade é uma fração, pode ser “A Alice tem 2/3 de um metro de altura. Depois de comer o bolo, ela fica 6 vezes mais alta. Com que altura fica a Alice depois de comer o bolo?” Taber (2002) apresenta ainda exemplos para situações em que o multiplicador é uma fração e a quantidade é um número inteiro, e para situações em que tanto o multiplicador como a quantidade são frações.

Na categoria do operador partitivo multiplicativo, são apenas apresentados dois tipos de situação, o multiplicador fracionário e o multiplicando um número inteiro e a situação em que os dois fatores são fracionários. Na primeira situação, um exemplo apresentado pode ser “O Paulo tem 6 tartes. Ele ofereceu 3/5 dessas tartes ao João. Com que quantidade de tarte ficou o Paulo?”. A segunda situação é exemplificada da seguinte forma “O Paulo tem 2/3 de uma tarte. Ele ofereceu 3/5 da sua tarte ao João. Com que quantidade de tarte ficou o Paulo?”. (Taber, 2002).

Na multiplicação de números racionais na representação decimal, Vale e Pimentel (2005) começam por referir que nesta operação também é utilizado o mesmo algoritmo do que com os números inteiros, destacando, no entanto, que é necessário ter cuidado com a colocação apropriada da vírgula no produto. Para salientar a regra da colocação da vírgula, Vale e Pimentel (2005) utilizam a multiplicação com frações decimais, recorrendo ao seguinte exemplo:

0,4 x 1,32

Utilização de frações

$$\frac{4}{10} \text{ x } \frac{132}{100} = \frac{4 \text{ x } 132}{10 \text{ x } 100} = \frac{528}{1000} = 0{,}528$$

Algoritmo

$$\begin{array}{rrrr} & 1, & 3 & 2 \\ \text{x} & & 0, & 4 \\ \hline 0, & 5 & 2 & 8 \end{array}$$

(Vale & Pimentel, 2005, p. 239)

No final, Vale e Pimentel (2005) destacam a regra para multiplicar dois números racionais na sua representação decimal, referindo que se multiplicam os fatores como se fossem inteiros e no final coloca-se a vírgula no produto de modo a que o número de casas decimais seja a soma das casas decimais dos fatores.

Tal como na adição e na subtração, Wu (2017) recorre à multiplicação de frações para justificar o algoritmo da multiplicação com dízimas finitas. Assim, para o exemplo 1,25 x 0,0067 recorre ao cálculo com a representação em fração para justificar as regras do algoritmo $\frac{125}{10^2} \text{ x} \frac{67}{10^4} = \frac{125 \text{ x } 67}{10^2 \text{ x } 10^4} = \frac{8375}{10^2 \text{ x } 10^4} = \frac{8375}{10^{2+4}} = \frac{8375}{10^6} = 0{,}008375.$

Na divisão, Caraça (2003) apresenta duas situações, o divisor inteiro e o divisor fracionário. No primeiro caso, por analogia com as definições dadas para os números inteiros, tem-se que $\frac{p}{q} : n = x \Leftarrow n \,.\, x = \frac{p}{q}$. Com a igualdade $n \,.\, x = \frac{p}{q}$, o que satisfaz o número $x = \frac{p}{q \,.\, n}$, porque $\frac{p}{q \,.\, n} . n = \frac{p \,.\, n}{q \,.\, n} = \frac{p}{q}$, sendo este número único, pela unicidade do produto.

Assim, $\frac{p}{q} : n = \frac{p}{q \,.\, n}$. Daqui, Caraça (2003) conclui que, para dividir um número racional por um inteiro, diferente de zero, multiplica-se o denominador por esse número. Conclui em particular que para os inteiros a e b, tem-se $a : b = \frac{a}{1} : b = \frac{a}{b}$, logo $a : b = \frac{a}{b}$, pelo que se pode considerar como equivalentes os sinais de divisão (:) e de fração (---).

Destas considerações, resulta que $\frac{\frac{p \,.r}{s}}{q} = \frac{p \,.r}{s} : q = \frac{p \,.r}{q \,.s}$, logo $\frac{p}{q} \,.\frac{r}{s} = \frac{p \,.\, r}{q \,.\, s}$. Normalmente refere-se esta igualdade dizendo-se que se efetua o produto de dois números racionais fazendo-se, termo a termo, o produto dos numeradores e dos denominadores (Caraça, 2003)

No segundo caso, divisor fracionário, Caraça (2003), também por analogia com as definições dadas para os números inteiros, apresenta $\frac{p}{q} : \frac{r}{s} = x \Leftarrow x \,.\frac{r}{s} = \frac{p}{q}$.

À igualdade da condição satisfaz o número $x = \frac{p \,.s}{q \,.r}$, visto que $\frac{p \,.s}{q \,.r} \,.\frac{r}{s} = \frac{p \,.s \,.r}{q \,.r \,.s} = \frac{p}{q}$. Como tal número é único em virtude da unicidade do produto, tem-se $\frac{p}{q} : \frac{r}{s} = \frac{p \,.s}{q \,.r} = \frac{p}{q} \,.\frac{s}{r}$.

Como consequência, a operação da divisão é sempre possível, com exceção do caso em que o divisor é nulo, e mantêm-se todas as propriedades da divisão de números inteiros (Caraça, 2003).

No que diz respeito ao ensino da divisão com números racionais, Vale e Pimentel (2005) referem que, tal como acontece na subtração, pode-se definir a divisão como operação inversa da multiplicação, com a seguinte definição “Sejam dois números racionais $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, com $\frac{c}{d} \neq 0$, o único racional $\frac{e}{f}$ tal que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}\ x\,\frac{e}{f}$, diz-se quociente entre $\frac{a}{b}\ e\,\frac{c}{d}$ e escreve-se $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$.” (Vale & Pimentel, 2005, p. 231). Para operacionalizar a definição, Vale e Pimentel (2005) apresentam o exemplo:

$$\frac{3}{4} : \frac{2}{5}$$

> Vamos reduzir a divisão a uma multiplicação. Para isso, multiplicamos tanto o dividendo como o divisor pelo inverso do divisor:
>
> $\left(\frac{3}{4}\ \mathrm{x}\,\frac{5}{2}\right) : \left(\frac{2}{5}\ \mathrm{x}\,\frac{5}{2}\right)$, obtendo sucessivamente
>
> $= \left(\frac{3}{4}\ \mathrm{x}\ \frac{5}{2}\right) : 1 = \frac{3}{4}\ \mathrm{x}\,\frac{5}{2} = \frac{15}{8}$
>
> Em síntese: $\frac{3}{4} : \frac{2}{5} = \frac{3}{4}\ \mathrm{x}\,\frac{5}{2}$
>
> Assim, uma regra prática para dividir racionais sob a forma de fração é a seguinte:
>
> Dados os números racionais$\frac{a}{b} e\,\frac{c}{d}\ com\,\frac{c}{d} \neq 0, \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b}\ \mathrm{x}\,\frac{d}{c}$ (Vale & Pimentel, 2005, p. 232)

No sentido do conhecimento para ensinar a divisão com frações, Wu (2017) salienta que este é um dos tópicos mais críticos da matemática escolar. No entanto, este autor considera esta operação com frações como uma extensão da divisão com números naturais, destacando, no entanto, a diferença que nos números naturais é necessário que o dividendo seja múltiplo do divisor, o que não acontece nos números racionais. Numa abordagem inicial, que Wu (2017) designa por informal, começa por recordar a subtração e a divisão com números naturais com a representação geométrica no segmento de reta e com a área de um retângulo. Revê também a subtração de frações, com a representação na reta, e estabelece a relação entre a divisão entre números naturais e a divisão entre frações, salientando que se *A* e *B* forem frações, $\frac{A}{B}$ é a fração C tal que A = C x B, apresentando também a situação com a representação da área de um retângulo.

No desenvolvimento do ensino e da aprendizagem da divisão de números racionais, Pinto e Monteiro (2008) destacam que é usual a enfatização do algoritmo que passa por inverter o divisor e multiplicar, que designam por IM. Salientam, no entanto, que o problema não é tanto o facto de se ensinar o procedimento, mas sim a forma como se ensina e o quando se ensina, muitas vezes sem conexão com o significado da operação. Ma (2009) também refere que para existir uma compreensão profunda do significado da divisão, o professor deverá trabalhar o significado da multiplicação de frações e as relações entre a multiplicação e a divisão. Pinto e Monteiro (2008) destacam a importância da exploração de situações problemáticas e o trabalho com os diferentes significados da divisão de números racionais. Salientam ainda a importância do uso compreensivo do algoritmo para a divisão de frações (IM) e a utilização de outros algoritmos.

Na divisão de frações, Pinto e Monteiro (2008) destacam diferentes situações de divisão que organizam em três categorias: divisão como medida, divisão como partilha e divisão como operação inversa da multiplicação em situações de produto de medidas relativas a diferentes grandezas. Pinto e Monteiro (2008) caracterizam as situações da divisão como medida como aquelas em que o dividendo e o divisor são da mesma natureza. Neste sentido, o divisor é entendido como uma unidade que é utilizada para medir o dividendo, sendo o quociente o número de vezes que o divisor cabe no dividendo. Nestas situações os alunos são levados a fazer agrupamentos. Um exemplo deste tipo de situação apresentado por Monteiro e Pinto (2008) é o seguinte "48 bolachas foram colocadas em caixas com 4 cada uma, quantas caixas são necessárias?". Pinto e Monteiro (2008) consideram que as situações de divisão como medida englobam também situações de comparação multiplicativa, que exemplificam como "A Maria leu um livro em $3\frac{1}{5}\ h$, enquanto a Joana precisou de 4 h para ler o mesmo livro. Quantas vezes mais tempo que a Maria precisou a Joana para ler o livro?" Pinto e Monteiro (2008) salientam ainda que poderá ser mais intuitivo começar por colocar situações que envolvam a divisão de um número inteiro por uma fração unitária, como por exemplo "Quantos $\frac{1}{3}$ cabem em 2 unidades?".

A divisão como partilha equitativa corresponde a situações que inicialmente os alunos identificam como problemas de divisão, como por exemplo "O João tem 12 chocolates. Se os distribuir igualmente por 3 amigos, quantos chocolates recebe cada amigo?" ou "se dois livros custam 15 euros, qual é o preço de cada livro?". Estas situações correspondem sempre a uma redução à unidade (Pinto & Monteiro). Pinto e Monteiro (2008) alertam para que, no caso das frações, a divisão como partilha aparece muitas vezes só quando o divisor é um número inteiro, como no exemplo "A mãe da Marta fez um grande bolo de morango que dividiu em 16 fatias iguais. A Marta levou para a escola $\frac{12}{16}$ do bolo que distribuiu igualmente por 3 pratos. Que porção do bolo ficou em cada parte?" (Monteiro & Pinto, 2008, p. 208). Uma situação em que o dividendo e o divisor são números fracionários corresponde ao seguinte "O Manuel levou $\frac{1}{2}$ h a percorrer $1\frac{3}{4}$ km. Quanto percorrerá numa hora?" (Monteiro & Pinto, 2008, p. 208). Neste tipo de situações pretende-se conhecer o todo sendo conhecida uma parte dele, sendo imediata a determinação da unidade. Nestas situações é muito evidente a relação da divisão com a multiplicação.

Na categoria da divisão como operação inversa da multiplicação é evidente uma relação multiplicativa entre três medidas, sendo uma delas o produto das outras duas. Estas são situações que normalmente se relacionam com o modelo de área, como por exemplo "Determinar o comprimento de um retângulo que tem de largura $\frac{3}{4}$ da unidade e de área $\frac{6}{20}$ unidades quadradas?" (Pinto & Monteiro, 2008, p. 213).

Como erros mais comuns dos alunos na divisão com números racionais na forma de fração, Pinto e Monteiro (2008) destacam os erros que se relacionam com aprendizagens anteriores dos alunos como pensar que o produto de uma multiplicação é sempre maior do que cada um dos fatores da respetiva multiplicação ou que o quociente de uma divisão é sempre menor do que o dividendo. No seu trabalho, Ma (2009) destaca também algumas dificuldades que os próprios professores revelam na compreensão do conceito. Perante uma situação em que era pedido que enunciassem um problema que fosse traduzido pela expressão $1\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$, muitos professores confundiram a divisão por $\frac{1}{2}$ com a divisão por 2 ou com a multiplicação por $\frac{1}{2}$, isto apesar de conseguirem fazer o cálculo.

Na divisão de números racionais na representação decimal, Vale e Pimentel (2005) destacam que o procedimento é semelhante ao utilizado para a divisão com números inteiros, sendo necessária a colocação apropriada da vírgula, tanto no quociente como no resto. Para justificar o procedimento a utilizar, Vale e Pimentel (2005) utilizam a divisão entre frações, como no exemplo 12,45 : 1,5 = então $\frac{1245}{100} : \frac{15}{10} = \frac{1245}{100} \text{x} \frac{10}{15} = \frac{12450}{1500} = \frac{1245}{150}$. Pode-se então resolver a divisão inicial procurando o resultado da divisão de 1245 por 150.

$$\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 5 & 1 & 5 & 0 \\ \cline{5-7} & 0 & 4 & 5 & 8 & & \end{array}$$

A parte inteira do quociente é 8 e a divisão inteira terminou, para continuar a divisão e conhecer a parte decimal do quociente é necessário acrescentar pelo menos uma casa decimal ao dividendo, como no exemplo.

$$\begin{array}{ccccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 5, & 0 & 1 & 5 & 0 \\ \cline{6-8} & 0 & 4 & 5, & 0 & 8, & 3 & \\ & & 0 & 0, & 0 & & & \end{array}$$

Assim, como $\frac{1245}{150} = 8{,}3$ a divisão 12,45 : 1,5 = 8,3 Como regra da colocação da vírgula, Vale e Pimentel (2005) sublinha que o número de casas decimais do quociente tem de ser tal que somado com o número de casas decimais do divisor dê o número de casas decimais do dividendo.

2.3.1.8. As diferentes representações dos números racionais

A perceção e a observação são fontes privilegiadas para a construção do conhecimento humano. Cada um de nós tem capacidades de perceção sensorial que nos permitem aceder ao conhecimento. Os sentidos são assim essenciais na transmissão, aquisição e construção de qualquer tipo de conhecimento, desempenhando um papel muito importante nos processos de aprendizagem que requerem a mediação da inteligência. Se a perceção é essencial na construção do conhecimento de uma forma geral, também será adequado pensar que desempenha um papel essencial na construção do conhecimento matemático, seja através das perceções auditivas, visuais, ou até mesmo das tácteis. Se os enunciados verbais, gráficos ou simbólicos são os utilizados com maior frequência na emissão, transmissão e receção do conhecimento matemático, não é de estranhar a importância das perceções no ensino e na aprendizagem da matemática (Castro & Castro, 1997).

Neste âmbito, Castro e Castro (1997) destacam a importância que os dados e as informações visuais desempenham na aprendizagem da matemática. Estas informações visuais são importantes na construção de imagens e de objetos mentais que levam à formação de conceitos e ao desenvolvimento de procedimentos matemáticos por parte de quem aprende. Salientam também a necessidade de o pensamento visual ser considerado na elaboração das situações de ensino, destacando dois meios que consideram fundamentais na promoção da construção de imagens mentais e potenciadores da formação do conhecimento matemático: os modelos e as representações.

Castro e Castro (1997) definem as representações como notações simbólicas ou gráficas específicas para cada noção, mediante as quais se expressam os conceitos e os procedimentos matemáticos, assim como as suas características e propriedades mais importantes. Um exemplo será a representação decimal dos números racionais. Quantos aos modelos, Castro e Castro (1997) definem-nos como esquemas ou materiais estruturados que oferecem uma imagem de um determinado conceito, no que diz respeito às suas relações e propriedades. Um exemplo é o material multibásico que é um modelo da numeração em diferentes bases.

Castro e Castro (1997) distinguem dois tipos de representações, a interna e a externa. As representações internas são as representações mentais de um determinado indivíduo relativamente ao que é representado externamente por gráficos, símbolos ou notações. O desenvolvimento das representações internas decorre da interiorização das representações externas. Castro e Castro (1997) apresentam duas funções para as representações externas. Por um lado, estas atuam como um estímulo para o processo de construção de novas estruturas mentais, por outro lado, permitem a expressão de conceitos e ideias utilizados por um indivíduo. Relativamente às representações externas, Castro e Castro (1997) distinguem dois grandes grupos, as representações simbólicas e as representações gráficas.

Bruner (1999) distingue as representações ativas, que podem incluir objetos e movimentos do corpo, icónicas, como as figuras e os esquemas e simbólicas, tais como os dígitos, sinais de operações e de relações como = e <. Goldin (2008) e Vergnaud (2009) também salientam a importância de diversos tipos de representações, incluindo materiais manipuláveis, esquemas e sistemas linguísticos e simbólicos. De acordo com Quaresma e Ponte (2014), de uma forma geral o ensino começa por usar uma combinação de representações verbais, ativas (objetos) e pictóricas (desenhos ou esquemas) que permitem estabelecer a relação entre a interpretação da informação do enunciado e a respetiva solução. No caso dos números racionais, Mamede (2008) distingue nas representações pictóricas, os modelos que podem representar quantidades contínuas e outros que representam quantidades discretas. Entre os modelos que representam quantidades contínuas, Mamede (2008) destaca os modelos de área, de comprimento e outros modelos de medida. Nos modelos de quantidade discreta destaca modelos que usam figuras de objetos do dia a dia ou símbolos.

Em particular no trabalho com os números racionais, as representações desempenham um papel fundamental. O numeral decimal, a fração, a percentagem, a reta numérica e as linguagens natural e pictórica são diferentes representações do número racional, que os alunos precisam de compreender e relacionar (Monteiro & Pinto, 2009). Post, Cramer, Behr, Lesh e Harel (1993) salientam que a compreensão dos números racionais está relacionada com a capacidade de estabelecer relações entre as diferentes representações de uma forma flexível, a flexibilidade nas transformações dentro de cada representação e no desenvolvimento de uma autonomia progressiva relativamente às representações pictóricas e aos materiais manipuláveis.

Tal como já foi referido anteriormente, no desenvolvimento dos conceitos associados aos números racionais podem surgir diversas dificuldades relacionadas com as diferentes representações, nomeadamente com a relação entre a representação em fração e a representação decimal. Essas dificuldades podem surgir também na relação entre as diferentes representações em fração que um mesmo racional pode ter (McMullen, Laakkonen, Hannula-Sormunen & Lehtinen, 2014; Nunes et al., 2009).

2.3.1.8.1. A representação decimal dos números racionais não negativos

A representação de números racionais em numeral decimal resulta da extensão do sistema de numeração decimal usado na escrita de números inteiros (Ponte & Serrazina, 2000). Nesta representação dos números racionais está presente a ideia de valor de posição, que distingue o numeral decimal de outras representações, como a fração ou a percentagem (Brocardo, 2010). O facto de se tratar do prolongamento do funcionamento do sistema de numeração decimal ao conjunto dos números racionais, não o isenta de dificuldades, constituindo um importante desafio (Fosnot & Dolk, 2002).

Monteiro e Pinto (2009) elencam algumas dificuldades e mal-entendidos que podem surgir na utilização dos numerais decimais:

- Confusão nas ordens e na grandeza dos números que leva, por exemplo, à confusão entre 2,5 e 2,05. Este mal-entendido pode acentuar-se se a leitura for feita como "dois vírgula cinco" e "dois vírgula zero cinco" e não como "duas unidades e cinco décimas e duas unidades e cinco centésimas", onde se realça a quantidade.

- Mal-entendido entre o número de algarismos e a quantidade. Alguns alunos consideram que 1,456 é maior que 1,5. É possível notar aqui a interferência com a lógica dos números inteiros não negativos, onde o número que tem mais algarismos é um número maior.

- Falta de entendimento do sistema de numeração decimal que leva os alunos a considerarem que a adição de uma centésima ao número 49,09 resulta no número 49,010 ou no número 50.

- Dificuldade no entendimento do conjunto dos números racionais, levando os alunos a pensar que, por exemplo, entre 0,1 e 0,2 não existem outros números racionais. Este mal-entendido pode resultar do facto de os alunos estarem habituados à sequência discreta dos números inteiros.

Morais (2019), fazendo uma síntese de trabalhos publicados sobre o tema, enumera algumas extensões de conhecimento relativo aos números inteiros para os números racionais, que podem levar a equívocos, algumas já referidas por Monteiro e Pinto (2009).

A extensão mais algarismos, maior grandeza emerge quando os alunos comparam números racionais usando as mesmas condições de comparação dos números inteiros, designadamente que a grandeza de um número expresso por um numeral com maior número de algarismos é maior que a grandeza expressa por um numeral com menor número de algarismos.

A extensão zero mais à esquerda refere-se às situações em que os alunos ignoram qual é o papel do zero e consideram que 0,05 é igual a 0,5 ou que quando acrescentam zero na posição mais à direita do numeral irá aumentar a grandeza do número representado, indicando que 0,30 é maior que 0,3.

A extensão mais algarismos, menor grandeza refere-se a situações em que os alunos consideram que a existência de um maior número de algarismos na parte não inteira do numeral leva a uma menor grandeza do número, considerando, por exemplo, que 0,65 é menor que 0,4, porque um numeral com centésimas será menor que um numeral que só tem décimas. Esta extensão é associada ao uso de conhecimentos relativos à fração, em que com igual numerador, quanto maior é o denominador, menor será o número representado.

2.3.1.9. Situações matemáticas e contextos

Na planificação de conteúdos matemáticos que são objeto de ensino e de aprendizagem na escola, Rico, Marín, Lupiañez e Gómez, 2008 consideram que as ideias, as estruturas e os conceitos matemáticos estudados na escola foram gerados e constituídos como ferramentas para organizar os fenómenos do mundo natural, mental e social. Esta abordagem sugere que o pensamento matemático surge a partir dos fenómenos e que as estruturas matemáticas abstraem e organizam grandes grupos de fenómenos. Desta forma, Rico et al. (2008) sugerem que neste tipo de análise, que designam por fenomenológica, se pretende mostrar a vinculação dos conceitos e estruturas matemáticas a certos fenómenos que estão na sua origem e que os ligam ao mundo natural, cultural, social e científico, tendo como finalidade dar sentido à aprendizagem desses conceitos e das estruturas. Na análise da matemática escolar é importante uma reflexão sobre as situações e os contextos utilizados.

Baseando-se na classificação proposta pela Organização para Cooperação e Desenvolvimento Económico (2004) para os testes do Programme for International Student Assessment, Rico et al. (2008) consideram quatro tipos de situações diferentes que poderão envolver os alunos com os conceitos matemáticos. O primeiro tipo, designado por situações pessoais, inclui situações relacionadas com as atividades diárias dos alunos. O segundo tipo, designado por situações educativas, ocupacionais ou laborais, inclui tarefas que se podem ligar ao mundo do trabalho e que necessitam de uma atividade matemática para encontrar uma resposta. O terceiro tipo, situações públicas, refere-se a situações ligadas à comunidade local. Neste tipo de situações o aluno tem de interpretar, analisar e avaliar informação numérica de forma a tomar uma decisão. O quarto e último tipo refere-se às situações científicas, que podem compreender problemas estritamente matemáticos.

Skovsmose (2001) aborda no seu trabalho a natureza das tarefas matemáticas, distinguindo duas grandes dimensões, uma relacionada com os diferentes paradigmas de tarefas sala de aula e outra relacionada com os diferentes contextos. No que diz respeito à dimensão relacionada com os diferentes paradigmas de tarefas de sala de aula, distingue entre uma tradição de exercícios e uma tradição de investigação. Relativamente aos contextos, diferencia três casos. Um primeiro caso que designa por tarefas estritamente matemáticas, em que as tarefas propostas fazem referência apenas à matemática. Um segundo caso, em que as tarefas propostas se referem a uma semi-realidade, ou seja, não uma realidade que resulte de uma observação direta, mas, por exemplo, uma realidade construída pelo autor de um livro escolar. Um terceiro, e último caso, em que os professores e alunos trabalham em situações da vida real.

Skovsmose (2001) combina os três casos dos contextos com os dois paradigmas de tarefas de aula e apresenta a seguinte matriz, com seis cenários possíveis.

Tabela 2.2. Sistematização das diferentes tarefas de aula de matemática (Skovsmose, 2001, p. 126)

	Tradição de exercícios	**Cenários de investigação**
Referências à matemática pura	(1)	(2)
Referências à semi-realidade	(3)	(4)
Referências à realidade	(5)	(6)

Ponte (2005) apresenta um quadro de análise das tarefas matemáticas a propor aos alunos em sala de aula com duas dimensões principais. A primeira dimensão relaciona-se com o nível de estruturação e a segunda dimensão relaciona-se com o desafio matemático que suscitam. A dimensão relacionada com a estruturação da tarefa está ligada ao grau de explicitação das questões colocadas, podendo a tarefa ser "aberta" ou "fechada". A dimensão do desafio relaciona-se com a perceção da dificuldade que uma questão coloca e prende-se com a questão de se conhecer, ou não, o processo de resolução. A dimensão do desafio pode variar entre o "reduzido" e o "elevado". Ponte (2005) cruza estas duas dimensões e propõe quatro tipos essenciais de tarefas: exercício (fechada, desafio reduzido), problema (fechada, desafio elevado), exploração (aberta, desafio reduzido) e investigação (aberta, desafio elevado).

A resolução de problemas é uma componente essencial das tarefas matemáticas de aula. Como se viu anteriormente, existem diversas definições de problema na literatura. De acordo Boavida, Paiva, Cebola, Vale e Pimentel (2008), a resolução de problemas pode ser vista como um processo de aplicação de conhecimentos anteriormente adquiridos, ou como forma de potenciar a construção de novas ideias e conceitos. Ponte e Serrazina (2000) também destacam este papel complexo da resolução de problemas no processo de ensino aprendizagem da matemática, referindo que ele tanto pode constituir o ponto de partida, como o ponto de chegada, neste processo.

A categorização de diferentes tipos de problemas como tarefas de sala de aula tem sido abordada por diversos autores (Charles & Lester, 1986; Vale, 2002; Boavida, Paiva, Cebola, Vale & Pimentel, 2008).

A primeira categoria apresentada por Boavida et al. (2008), designada por problemas de cálculo, refere-se aos problemas que requerem decisões quanto à operação ou operações a aplicar aos dados apresentados e podem ser resolvidos através da aplicação direta de uma ou mais das quatro operações básicas da aritmética. Nesta primeira categoria, Boavida et al. (2008) distinguem os problemas de um passo, onde é necessário aplicar apenas uma das operações, e os problemas de mais passos, onde é necessário recorrer à aplicação direta de duas ou mais das quatro operações básicas da aritmética. A segunda categoria proposta por Boavida et al. (2008) é designada de problemas de processo. Esta segunda categoria de problemas distingue-se da primeira porque os problemas não podem ser resolvidos apenas por seleção apropriada das operações a utilizar. São problemas normalmente apresentados em contextos mais complexos em que é necessário recorrer a uma ou mais estratégias para chegar ao resultado. São problemas que podem ser utilizados para desenvolver diferentes capacidades, para introduzir diferentes conceitos ou aplicar conhecimentos e procedimentos matemáticos já adquiridos. A terceira categoria proposta por Boavida et al. (2008) é designada de problemas abertos, também designados por investigações, que podem ter mais do que um caminho para chegar à solução ou mais do que uma resposta correta.

A estas categorias de Boavida et al. (2008), juntam-se aqui mais duas categorias propostas por Charles e Lester (1986), os problemas de aplicação e os problemas tipo puzzle. Os problemas de aplicação são aqueles que normalmente requerem a recolha de dados sobre a vida real e a tomada de decisões, podendo ser necessário utilizar uma ou mais operações e uma ou mais estratégias de resolução. Os problemas tipo puzzle são aqueles que podem incluir tarefas lúdica ou recreativas, que suscitam o interesse e envolvimento dos alunos.

A par da resolução de problemas, Boavida et al. (2008) destacam a formulação de problemas como uma tarefa com enorme importância que pode contribuir para o aprofundamento dos conceitos matemáticos envolvidos, como para a compreensão dos processos envolvidos na sua resolução.

Referindo-se especificamente a tarefas a propor aos alunos nos primeiros contactos com frações, Mamede (2008) salienta que estas devem incluir tarefas de identificação de quantidades, comparação de quantidades distintas e reconhecimento de quantidades equivalentes. No que diz respeito às tarefas de identificação de quantidades, Mamede (2008) distingue três tipos de problemas distintos: encontrar a fração, descobrir a parte e encontrar o todo. No primeiro grupo de problemas encontram-se aqueles em que se pretende encontrar o valor do subconjunto correspondente a uma parte, que se designa por fração. São problemas em que são dados o todo e a fração e o aluno deverá identificar a parte. No segundo grupo de problemas, que Mamede (2008) designa por encontrar o todo, é dada a parte e a fração, e pretende-se que o aluno encontre o todo. No terceiro grupo de problemas pretende-se achar a parte. Estes problemas estão enquadrados no que Mamede (2008) intitula de encontrar a fração. Neste caso é dado o valor do todo e o valor da parte e procura-se a parte.

3

Capítulo 3 – O currículo

Neste capítulo começa-se por discutir o que se entende por currículo e as aceções mais comuns deste conceito. O capítulo ocupa-se depois das teorias sobre o currículo e dos níveis de decisão curricular que se distinguem na literatura. Entre as teorias sobre o currículo destacam-se aqui as teorias críticas relacionadas com a sociologia da educação, nomeadamente a teoria de Bernstein, onde se inclui a organização do conhecimento educacional e o modelo do discurso pedagógico, com os processos de recontextualização que podem ocorrer na transposição do currículo para diferentes níveis do sistema de ensino. Este quadro teórico permite enquadrar os níveis de decisão curricular trabalhados na investigação, estudar os diferentes contextos educativos e as relações que se estabelecem entre eles e as formas e estruturas do conhecimento.

De acordo com Pacheco (2001) o termo currículo tem-se vulgarizado no discurso educativo nos últimos anos. No entanto, tem sido utilizado com diferentes aceções pelos diferentes atores educativos, sem que o seu significado seja devidamente esclarecido. Pacheco (2001) define o que entende como duas aceções mais comuns do termo currículo, que se contrapõem: uma formal, com um plano definido desde início, a partir de fins e finalidades; outra informal, como processo decorrente da aplicação do plano.

Na primeira perspetiva, Pacheco (2001) apresenta as definições que apontam o currículo como o conjunto de conteúdos a ensinar (organizados em disciplinas, temas, áreas de estudo) ou como o plano de ação pedagógica. Situam-se nesta perspetiva autores como Tyler (1949), Taba (1962) ou D'Hainaut (1980), cujas definições de currículo correspondem a um plano de estudos, ou a um programa muito estruturado e organizado com base em objetivos e relacionado com a natureza das disciplinas. Nesta perspetiva, o currículo e o programa confundem-se, sendo tratados como sinónimos, surgindo principalmente na tradição latino-europeia. Este é um conceito tradicional de currículo, equivalendo-se a um plano de estudos (Pacheco, 2001).

Na segunda perspetiva estão as definições que, embora refiram o plano ou o programa, apresentam o currículo como um processo dinâmico, um conjunto de experiências educativas, complexo e sem uma estrutura predeterminada. Outras definições de currículo, embora não excluindo o programa e o plano, definem-no como um conjunto de experiências educativas vividas pelos alunos dentro do contexto escolar, com finalidades muito flexíveis, aberto e dependente do processo de aplicação. Esta última perspetiva curricular está mais ligada a uma tradição curricular anglo-saxónica, que define o currículo de uma forma mais abrangente, integrando decisões tanto ao nível político como ao nível escolar (Pacheco, 2001).

Zabalza (1998) também se refere a esta dupla aceção da palavra currículo, que, no entanto, não se excluem:

O currículo como esquema ou como projeto de ensino (quer dizer, o que se pode ou se pretende fazer) e, por outro lado, o currículo como esquema ou como marco de análise do que realmente se está fazendo ou já se fez. (Zabalza, 1998, p. 25)

O currículo é então entendido como um "conjunto de ações desenvolvidas pela escola no sentido de "oportunidades de aprendizagem". (Zabalza, 1998, p. 25). Zabalza (1998) apresenta o currículo como uma ideia ampla, que se pode referir tanto ao conjunto de experiências programadas pela escola, como ao conjunto de experiências que o aluno tem no contexto escolar.

3.1. Teorias sobre o currículo

No currículo, tal como em qualquer outro campo do conhecimento, existem opções teóricas que vão dar origem a classificações, tentando-se relacionar a teoria com a prática (Pacheco, 2001). Baseando-se em diversos contributos teóricos, (Pinar, 1985, Gimeno, 1988, Kemmis, 1988), Pacheco (2001) apresenta três ordens de teoria curriculares, a teoria técnica, a teoria prática e a teoria crítica.

De acordo com Pacheco (2001), a teoria técnica é aquela que tem maior tradição no âmbito dos estudos curriculares. Enquadradas nesta teoria, Pacheco (2001) inclui as seguintes conceções básicas de currículo, currículo como súmula de exigências académicas, currículo como base de experiências, currículo como tecnologia e eficiência. Na primeira conceção, o currículo é sinónimo de conteúdos ou de programas, valorizando-se a dimensão estática e permanente do conhecimento e a sua especialização. Nesta conceção, o currículo abrange o campo das intenções, ficando de fora o processo de implementação (Pacheco, 2001). A segunda conceção relaciona-se com as ideias de movimentos pedagógicos como a Educação Nova ou com as ideias progressistas de Dewey. Nesta conceção, a lógica curricular não está tanto nos conteúdos determinados à partida quanto está nas experiências de aprendizagem que os alunos realizam na escola (Pacheco, 2001). Na terceira conceção, o currículo é definido como um plano para a aprendizagem, um plano de ação pedagógica, um conjunto de experiências planificadas na escola e uma série estruturada de resultados pretendidos de aprendizagem (Pacheco, 2001). O ponto comum a estas conceções de currículo é a orientação de aquilo que deve ser ensinado e, por vezes, como deve ser implementado. O conceito de currículo mais usual no âmbito desta teoria curricular é o de plano estruturado de aprendizagem, que pode estar centrado nos conteúdos ou nos alunos (Pacheco, 2001).

Pacheco (2001) apresenta uma teoria prática de currículo que relaciona com as discussões curriculares da década de 1960. Nesta teoria prática o centro são as condições reais da prática e não o campo das intenções e do que se pretende fazer, reforçando a conceção do currículo como processo e não como produto, como podendo ser interpretado pelos professores de diferentes modos e aplicado em diferentes contextos.

Pacheco (2001) apresenta ainda a teoria crítica do currículo que caracteriza como sendo uma abordagem ao currículo onde este não é o resultado do trabalho de especialistas, nem resulta do trabalho individual do professor, mas sim do trabalho de professores agrupados que têm uma consciência crítica e se agrupam segundo interesses críticos. Nesta teoria existem visões críticas do currículo, sendo este definido "como um interesse emancipatório, resultante dos interesses e das experiências desejadas por todos quantos participam nas atividades escolares." (Pacheco, 2001, p. 40). Pacheco (2001) recorre ao trabalho de Grundy (1987) para caracterizar e diferenciar esta teoria crítica da aceção da teoria prática, apresentando cinco princípios que a caracterizam.1) O currículo é constituído por um processo ativo onde o planear, o agir e o avaliar se relacionam e se integram. 2) A construção do currículo não pode ser separada da sua implementação porque, sendo uma prática social é formada no real. 3) A aprendizagem é encarada como um ato social, sendo a construção do ambiente social, e as relações entre os diferentes atores, central para o currículo. 4) Conhecer é uma construção social, ao aprenderem, os alunos tornam-se participantes ativos na construção do seu próprio conhecimento. 5) O processo de construção do currículo também é um ato político. Quando os alunos e os professores contestam a ascendência daqueles que têm o poder de controlar o currículo, como aqueles que têm o poder de que os seus significados sejam aceites como úteis na transmissão, a construção do currículo torna-se num ato político que envolve significados em conflito.

Silva (2000) também distingue nas teorias tradicionais do currículo, dois modelos, um que designa por técnico, associado aos trabalhos de Bobbitt (1918) e de Tyler (1949), e outro que designa de progressista, associado aos trabalhos de Dewey (1902). De acordo com Silva (2000), o currículo aparece pela primeira vez como objeto específico de estudo, nos anos vinte do século XX, nos Estados Unidos. Silva (2000) relaciona este interesse de estudo e pesquisa com os processos de industrialização e de imigração que intensificaram a massificação da escolarização e com processos de construção de uma identidade nacional. Surgem nessa época muitas questões sobre as finalidades da escolarização massificada, que Silva (2000) considera cruciais, como: A educação escolarizada deve proporcionar uma educação geral, académica, à população ou formar trabalhadores especializados? Deve privilegiar habilidades básicas, disciplinas humanísticas, disciplinas científicas ou habilidades mais profissionalizantes? O centro do ensino devem ser os objetivos do conhecimento organizado ou as perceções e experiências das crianças e jovens? A finalidade da educação deve ser preparar os jovens para a sociedade tal como ela existe ou prepará-los para a sua transformação? A educação tem como finalidade preparar os jovens para a economia ou para a democracia?

Para Silva (2000), os trabalhos de Bobbitt (1918) tentavam evidenciar que o sistema educacional deveria estabelecer de forma precisa os seus objetivos e que estes objetivos deveriam estar diretamente relacionados com uma especialização laboral para a vida adulta, sendo considerada uma abordagem conservadora. Esta seria uma perspetiva que iria dominar a educação nos Estados Unidos durante o século XX. De acordo com Silva (2000), o modelo curricular de Bobbitt (1918) iria consolidar-se nos trabalhos de Tyler (1949), que lança quatro questões que correspondem à divisão tradicional da atividade escolar, o currículo, o ensino, a instrução e a avaliação, numa orientação comportamentalista. Somente com uma definição precisa e comportamental dos objetivos é que se poderiam tomar decisões sobre as experiências que devem ser proporcionadas, sobre o modo como organizá-las e ainda sobre a forma como avaliá-las.

Para Silva (2000), tanto o modelo tecnocrático, como o modelo progressista, que emergem no início do século XX, surgem como reação ao modelo de currículo herdado da antiguidade clássica, na forma do *trivium* (gramática, retórica, dialética) e *quadrivium* (astronomia, geometria, música, aritmética). Por um lado, o modelo tecnocrata criticava uma suposta abstração e inutilidade para a vida moderna dos conhecimentos que eram trabalhados nesse currículo clássico. Por outro lado, os modelos progressistas criticavam o currículo clássico porque este desconsiderava a psicologia infantil, não estando centrado nos interesses e experiências das crianças e jovens.

3.1.1. Níveis de decisão curricular

Numa abordagem centrada no processo, Gimeno (1988/2000) define o currículo como sendo um objeto construído entre a sua configuração, a concretização em determinadas práticas pedagógicas e a avaliação. Gimeno (1988/2000) apresenta assim um modelo de interpretação do currículo com seis níveis: currículo prescrito, currículo apresentado aos professores, currículo moldado pelos professores, currículo em ação, currículo realizado e currículo avaliado. Neste sistema de decisão curricular não existe sempre uma relação direta entre os diferentes níveis, não existe uma diretriz única a orientá-los e nem sempre chega a existir uma coerência. Os diferentes níveis podem expressar diferentes razões e não têm uma completa dependência. Podem mesmo representar forças contraditórias que entrem em conflito (Gimeno (1988/2000).

No trabalho que se pretende desenvolver a análise será centrada nos três primeiros níveis definidos por Gimeno (1988/2000). Importa por isso esclarecer o que se entende por cada um deles.

Em muitos dos sistemas educativos existe algum tipo de prescrição ou orientação do que deve ser o conteúdo da escolaridade obrigatória. Essas referências curriculares servem muitas vezes de base para a elaboração de materiais de apoio, avaliação e aferição do sistema. Esses esquemas de prescrição mudam de um país para o outro (Gimeno, 1988/2000). Perrenoud (1995) denomina este nível de decisão curricular como currículo formal, ou seja, aquele que é apresentado nas leis ou nos preâmbulos dos planos de estudo. Para Perrenoud (1995) o currículo formal permite exercer um certo controlo sobre o ensino, mas é demasiado abstrato, balizando apenas o que é realmente ensinado e avaliado na sala de aula.

Goodson (2001) também distingue diferentes níveis de produção curricular, diferenciando o que designa por currículo escrito, do currículo como atividade de sala de aula, ou currículo ativo. De acordo com Goodson (2001) existem diferentes formas de olhar para estes níveis de decisão curricular. Poder-se-á pensar que o que acontece ao nível da sala de aula é imutável, independentemente das reformas que acontecem com o currículo prescrito centralmente. No entanto, também se verifica que, ao longo do tempo, a relação entre o que é prescrito e o que acontece na prática pode ter relações estreitas. Deste modo, Goodson (2001) salienta a importância de os estudos curriculares terem sempre uma análise do enquadramento social em que o currículo é construído.

Pacheco (2001), analisando as diferentes fases do desenvolvimento curricular, distingue o currículo prescrito, formal ou escrito, como aquele que é sancionado pela administração central e que é adotado pela escola. Neste currículo prescrito podem constar os planos curriculares, os programas, os objetivos, as competências, as atividades e as orientações programáticas.

No entanto, o currículo prescrito é muitas vezes constituído por indicações genéricas que são insuficientes para orientar o trabalho na sala de aula. É neste contexto que surgem intermediários que interpretam o currículo prescrito e o apresentam posteriormente aos professores. Um exemplo muito comum deste tipo de intermediário são os manuais e os livros escolares. Gimeno (1988/2000) designa este nível de decisão curricular por currículo apresentado. Neste contexto, os professores acabam muitas vezes por não trabalhar diretamente com o currículo oficial (Pacheco, 2001).

Gimeno (1988/2000) destaca que o professor não é um agente passivo na concretização dos conteúdos, moldando tanto as propostas prescritivas que lhe são feitas centralmente, como as propostas curriculares apresentadas através de materiais pedagógicos, livros escolares ou guias. Ao dar significado às propostas curriculares, o professor intervém como um tradutor. Essa intervenção poderá ser feita a nível individual, mas também poderá ser feita em grupo. Goodlad (1979) designa este nível de decisão curricular como currículo percebido, definindo-o como uma representação mental do que foi oficialmente aprovado, podendo existir diferentes perceções consoante os atores em causa. Entre as diferentes perceções, Goodlad (1979) destaca a dos professores. Pacheco (2001) coloca este nível de decisão curricular já no âmbito do currículo real, onde, no contexto do projeto educativo, os professores programam em grupo, ou planificam individualmente.

3.2. Teorias críticas: sociologia da educação

Os modelos mais tradicionais de currículo, tanto os técnicos como os progressistas, começaram a ser criticados a partir das décadas de 1960 e 1970. Estas teorias críticas do currículo desenvolveram-se em diferentes contextos, desde o movimento de reconceptualização curricular, nos Estados Unidos da América, à nova sociologia da educação, em Inglaterra. Existem ainda trabalhos que abordaram indiretamente as questões do currículo, como a obra de Bourdieu e Passeron (1970), ou de Baudelot e Establet (1971) ou ainda outras obras que introduziram dados que permitiram o desenvolvimento das críticas neomarxistas na sociologia da educação, como o ensaio de Althusser (1970), ou a obra de Bowles e Gintis (1976), que levou ao sistema de ensino americano o mesmo tipo de análise feito pelos autores anteriores relativamente ao sistema de ensino francês (Silva, 2000). De acordo com Silva (2000), embora estas obras tenham sido muito criticadas durante as décadas posteriores por apresentarem um suposto determinismo económico, estas formaram a base da teoria educacional crítica, que ainda hoje influencia a teoria curricular.

3.2.1. Nova Sociologia da Educação

Basil Bernstein, a par com Michael Young, foi um dos principais impulsionadores da Nova Sociologia da Educação, que surgiu na década de 1970, em Inglaterra. Este foi um dos primeiros movimentos no interior da sociologia crítica a abordar as questões curriculares. Foi um movimento que se caracterizou pelo desenvolvimento de trabalhos com abordagens e metodologias diversificadas.

Este movimento criticava a tradicional Sociologia da Educação britânica dos anos 50 e 60 do século XX, tanto no que se refere ao seu quadro concetual, como no que se refere à sua metodologia, muito baseada nos grandes inquéritos sobre o funcionamento do sistema educativo e centrada na relação entre a escolarização e a estratificação social ou as desigualdades sociais. A principal crítica centrava-se na sobrevalorização que a tradicional sociologia da educação atribuía às variáveis de entrada, como a classe social e os rendimentos, e às variáveis de saída, como os resultados escolares ou o abandono escolar, sem questionar o que se posicionava no meio, nomeadamente o papel do currículo na produção das desigualdades sociais (Silva, 2000).

Um dos autores mais marcantes deste movimento foi Michael Young, sendo a sua obra *Knowledge and Control: New Directions for the Sociology of Education*, de 1971, considerada um marco fundador do movimento. Um dos contributos presente nesse livro foi o de Bernstein, com o artigo "On the Classification and Framing of Educational Knowledge" que abordava uma teoria do currículo como forma de organização e legitimação do conhecimento. No entanto, foram as contribuições de Michael Young as mais marcantes no lançamento de um programa onde se propunha que se analisasse a forma como o conhecimento era selecionado, organizado e transmitido pelo currículo. Para além de criticar a sociologia da educação, por esta não considerar o currículo como objeto de análise sociológica, criticava também a sociologia do conhecimento por esta estudar as condições sociais que influenciavam a evolução do conhecimento, mas não abordar a forma como as instituições de ensino selecionam e organizam esse conhecimento.

A problemática da Nova Sociologia da Educação estava centrada na relação entre a estratificação social e a estratificação do conhecimento e na forma como esta estratificação influenciava a valorização e estratificação dos conhecimentos escolares. Este movimento salientava a relação entre a estrutura institucional dominante e a organização do conhecimento nos currículos. Esta relação combatia qualquer tentativa de valorização diferente do conhecimento por poder ser uma ameaça às estruturas de poder instituídas. Para Michael Young, esta era uma forma de certos grupos sociais restringirem o acesso a certas áreas do conhecimento, legitimando a sua posição social e controlando a circulação do saber. Era assim importante analisar a forma como os diferentes grupos de pressão se organizavam para chegar a um consenso em relação à seleção e organização do conhecimento nos currículos.

Na década de 80 do século XX, a influência do movimento da Nova Sociologia da Educação diminuiu, existindo também uma alteração do posicionamento teórico de Michael Young, e dos seus principais impulsionadores. Esta revisão partiu de diversas críticas que foram surgindo, nomeadamente quanto ao relativismo do conhecimento e da sua produção restrita aos grupos sociais dominantes.

3.3. Teoria de Bernstein

No contexto deste movimento da sociologia crítica da educação que se desenvolveu em Inglaterra a partir dos anos 70 do século XX, é também de salientar o papel de Basil Bernstein pela posição central que ocupou (Silva, 2000). Bernstein foi um importante sociólogo cujo trabalho influenciou várias gerações de sociólogos da educação e linguistas. Desde os seus primeiros trabalhos sobre a linguagem, códigos de comunicação e de escolarização até aos seus últimos trabalhos sobre o discurso pedagógico, prática e transmissão educacional, Bernstein produziu uma teoria sobre códigos sociais e educacionais e os seus efeitos na reprodução social (Sadovnik, 2001).

Os primeiros trabalhos de Bernstein, ainda no início da década de 1960, centraram-se na linguagem onde examinou a relação entre a linguagem pública, autoridade e os significados partilhados. Já no início da década de 1970, a teoria sociolinguística de Bernstein deu origem a uma teoria social analisando as relações entre as classes sociais, a família e o sistema de reprodução de significados. Bernstein iniciou o desenvolvimento da sua teoria dos códigos através da introdução dos conceitos de código restrito e código elaborado. Baseando-se em trabalho empírico, Bernstein distingui o código restrito usado pelas classes trabalhadores, e o código elaborado usado pela classe média. Os códigos restritos são particularistas e dependentes do contexto e os códigos elaborados são universalistas e independentes do contexto (Sadovnik, 2001). De acordo com Morais e Neves (2007), o artigo *Classification and Framing*, publicado por Bernstein em 1971, consolidou a sua teoria sociolinguística. Neste artigo, Bernstein faz uma distinção entre poder e controlo e mostra que existem várias modalidades de código elaborado.

A teoria sociolinguística apresentada por Bernstein gerou diversas críticas, sendo acusado de ter desenvolvido uma teoria que se enquadra nas teorias deficitárias. Bernstein rejeitou sempre estas críticas, argumentando que os códigos restritos utilizados pelas classes operárias eram simplesmente diferentes daqueles que eram utilizados na escolarização formal, o que as colocava em desvantagem nessa situação, mas não significava que a sua linguagem fosse deficitária (Sadovnik, 2001). Perto do final da década de 1970, Bernstein desenvolve o conceito de código para analisar a relação entre os códigos de comunicação e o discurso pedagógico e a prática. Desta forma, a teoria dos códigos passa a preocupar-se com os processos de escolarização e a sua relação com a reprodução social. Num artigo de 1977, Bernstein analisa as diferenças entre dois tipos de transmissão educacional e sugere que as diferenças na classificação e no enquadramento de cada prática pedagógica estão relacionadas com a posição na classe social e com os princípios das famílias que utilizam a escola (Sadovnik, 2001). Para Morais e Neves (2007) a teorização sobre os códigos é mais formalizada no artigo *Codes, Modalities and the Process of Cultural Reproduction*, publicado em 1981, onde Bernstein tenta completar algumas lacunas relativamente à definição do processo de transmissão/aquisição, a definição do contexto e às traduções macrossociológico - microssociológico.

No trabalho desenvolvido por Bernstein até à década de 1980, apesar da definição de classificação e enquadramento das categorias de currículo, Morais e Neves (2007) consideram que o que era transmitido não foi objeto de análise. Só em meados da década de 1980, com o artigo *On Pedagogic Discourse*, é que o centro da análise passou a ser o que é transmitido, com a teoria da construção do discurso pedagógico, as regras de distribuição, recontextualização e avaliação e a sua base social. Bernstein desenvolveu um modelo de análise das modalidades de código elaborado e dos seus contextos sociais e uma análise do discurso pedagógico. No entanto, só já no final da década de 1990 é que Bernstein desenvolveu uma análise dos discursos sujeitos a transformação pedagógica, no artigo *Vertical and Horizontal Discourse: An essay*.

De acordo com Bernstein, a forma como a sociedade selecionava, classificava, distribuía, transmitia e avaliava o conhecimento refletia a distribuição de poder e os princípios de controlo social. Desta forma, as alterações na organização, na transmissão e na avaliação do conhecimento educacional deveriam ser alvo de análise. A forma como pedagogicamente os comportamentos dos alunos eram moldados ou lhe eram inculcados valores dependia das estruturas de poder e de controlo social que eram traduzidas em mudanças na codificação do conhecimento.

Para Bernstein, o conhecimento educacional formal concretizava-se através de três sistemas de mensagem: o currículo, a pedagogia e a avaliação. O currículo definia o que era considerado conhecimento válido, a pedagogia definia o que contava como transmissão válida do conhecimento e a avaliação definia o que resultava como realização válida desse conhecimento da parte de quem era ensinado. Embora se possa considerar que a teoria de Bernstein é uma teoria sociológica do currículo, ele não se centra propriamente no conteúdo curricular, não questiona porque se ensina um tipo específico de conhecimento, e não outro, a sua legitimidade e validade. Bernstein estava mais preocupado com as relações estruturais entre os diferentes tipos de conhecimento que constituem o currículo. Bernstein centrava-se na forma como o currículo está estruturalmente organizado e como os diferentes tipos de organização do currículo estavam ligados a princípios diferentes de poder e controlo (Silva, 2000).

Nos seus primeiros trabalhos, Bernstein (1977) distinguia dois tipos fundamentais de organização estrutural do currículo: o currículo tipo coleção e o currículo integrado. No currículo tipo coleção, as áreas e campos de conhecimento mantêm entre si uma relação fechada, organizando-se em conteúdos isolados. Dependendo do número de conteúdos fechados que contemplava, o currículo coleção podia ser do tipo especializado ou não especializado. Enquanto que no currículo coleção especializado o número de conteúdos fechados era reduzido, no currículo coleção não especializado o número de conteúdos fechados era relativamente elevado. No currículo integrado, as distinções entre as áreas de conhecimento eram menos nítidas, subordinadas a um tema abrangente, o que reduzia o isolamento entre as áreas.

Como forma de se referir ao maior ou menor grau de isolamento e às relações entre as diversas áreas do conhecimento que constituem o currículo, Bernstein (1977) utilizou o conceito de classificação. Quanto maior era o isolamento das áreas de conhecimento e maior o grau de manutenção de fronteiras, a classificação era considerada forte, o que dava origem a uma hierarquia de conhecimentos. Pelo contrário, a classificação era fraca quando se verificava um esbatimento das fronteiras entre as áreas escolares, tendo estas estatutos idênticos. Isto verificava-se em currículos interdisciplinares.

Para analisar a fronteira entre *o que pode* e o que *não pode* ser transmitido na relação pedagógica, Bernstein (1977, 1990, 2000) utilizou o conceito de enquadramento. O grau de controlo que os professores, ou os alunos, detinham no processo de transmissão, era definido por este conceito. Para Bernstein, a relação pedagógica entre professor e aluno era regulada por regras no contexto da sala de aula que diziam respeito à seleção de conhecimentos, sequência de aprendizagem, o ritmo e os critérios de avaliação. Desta forma, o enquadramento seria forte se fosse o professor que mantivesse o controlo os conteúdos e atividades a realizar (seleção), a ordem (sequência dos conteúdos), o tempo (ritmo), espaço da transmissão e o resultado da aprendizagem (critérios de avaliação). Quando o ensino fosse mais centrado no aluno, e quando este dispusesse de algum controlo sobre a seleção, sequência, ritmo, espaço e critérios de avaliação, o enquadramento seria mais fraco (Silva, 2000).

A essência da classificação e do enquadramento iriam determinar a estrutura de autoridade e poder que controlava a seleção e a organização do conhecimento escolar e a forma como este era transmitido. Nos trabalhos de Bernstein, estas noções de poder e de controlo são distintas de outras perspetivas críticas sobre o currículo, como as marxistas, aproximando-se mais da noção de poder de Foucault (Silva, 2000). Para Bernstein, o poder não distorce o currículo ou a pedagogia, onde uma situação de ausência de poder levasse a um currículo não distorcido. No entender de Bernstein, tratava-se apenas de diferentes princípios de poder e de controlo (Silva, 2000).

No trabalho de Bernstein é importante destacar a relação que se estabelece entre o nível macro, mais institucional, e o nível micro, ligado à intervenção pedagógica (Morais, Neves & Ferreira, 2018). Os princípios de poder e de controlo que caracterizavam a estrutura social, manifestavam-se, ao nível do currículo, em determinados valores de classificação e de enquadramento. No entanto, este autor era crítico das teorias de reprodução social. Para essas teorias, o discurso pedagógico era concebido como simples transmissor das relações de poder que lhe eram externas e a sua forma não tinha consequências no processo de transmissão. Para Bernstein o discurso pedagógico oficial, que se refletia nas práticas pedagógicas em contexto escolar, podia ter diferentes formas de ser recontextualizado. Esta recontextualização dependia tanto da capacidade do professor em reproduzir o código do discurso pedagógico, como da sua adesão a esse discurso pedagógico, em virtude dos seus princípios ideológicos. O professor tinha assim espaço para recontextualizar práticas que lhe permitiam ter influência no sucesso escolar dos alunos (Morais, Neves & Ferreira, 2018).

3.3.1. Organização do conhecimento educacional

Para Bernstein (1977), as alterações na organização, na transmissão e na avaliação do conhecimento educacional são uma área de interesse central para a sociologia da educação. O modo como a sociedade seleciona, classifica, distribui, transmite e avalia o conhecimento educacional formal reflete a distribuição de poder e os princípios de controlo social. Bernstein

(1977) insere este estudo do conhecimento educacional numa questão mais ampla da estrutura e da mudança da transmissão cultural, considerando que o estudo da socialização feita na escola foi descurado. Bernstein (1977) salienta a importância do conhecimento educacional como regulador da estruturação da experiência, onde destaca a importância do currículo, da pedagogia e da avaliação, distinguindo duas estruturas diferentes de transmissão, uma estrutura de coleção e uma estrutura de integração.

3.3.1.1. Tipos de currículo

Nas instituições educacionais é muito comum a organização do tempo em unidades que são preenchidas com um determinado conteúdo. A unidade é a divisão formal do tempo e o conteúdo refere-se à forma como o período de tempo é usado, ou seja, é o que preenche esse tempo (Bernstein, 1977).

Numa primeira abordagem ao conceito de currículo, e à forma como está estruturado, Bernstein (1977) defende que deverá ser analisada a relação que se estabelece entre as unidades de tempo e os seus conteúdos. A análise pode incidir sobre o estatuto de cada conteúdo e sobre a delimitação dos diferentes conteúdos. Na análise do estatuto relativos de um conteúdo deve-se ter em consideração o tempo que lhe é dedicado e a importância que lhe é atribuída, a natureza obrigatória ou facultativa. No que se refere à análise da delimitação dos diferentes conteúdos, é considerada a força da fronteira entre os conteúdos. Se as fronteiras entre conteúdos são esbatidas, considera-se que existe uma relação aberta, se as fronteiras estão bem definidas, estando os conteúdos isolados uns dos outros, considera-se uma relação fechada (Bernstein, 1977).

Bernstein (1977) considera que a forma como um currículo é estruturado não tem nada de intrínseco. Realça antes a natureza social das opções que levam à organização de um currículo. Nesta teoria, Domingos, Barradas, Rainha e Neves (1986) destacam que "independentemente da lógica intrínseca às várias formas de conhecimento, as formas da sua transmissão são factos sociais." (p. 151, itálico no original). Desta forma, na estruturação de qualquer currículo estará envolvido um princípio, ou vários, que confere um estatuto especial a alguns conteúdos e estabelece uma relação aberta ou fechada entre eles (Bernstein, 1977).

É baseado na forma de relação que existe entre os conteúdos, principalmente a relação que os conteúdos de estatuto mais elevado mantêm entre si, que Bernstein (1977) define dois tipos fundamentais de currículo, o currículo de coleção e o currículo de integração. Como já foi referido anteriormente, se os conteúdos mantêm entre si uma relação aberta, o currículo diz-se de integração ou integrado e, se os conteúdos mantêm entre si uma relação fechada, o currículo diz-se de coleção. Apresentando exemplos extremos que caracterizem estas situações da teoria, Bernstein (1977) distingue o currículo coleção como aquele em que todos os períodos de tempo são fixos e em que nenhum conteúdo seria aberto, e o currículo de integração como aquele em que não há períodos fixos de tempo e todos os conteúdos seriam abertos. Bernstein (1977) salienta que na realidade o que acontece mais correntemente é existirem vários graus de integração e diferentes formas de coleção, relembrando ainda que não se pode desligar o currículo, da pedagogia e da avaliação e que estes devem ser tratados como um todo.

Num currículo deste tipo promove-se um ensino em profundidade, com uma especialização que vai aumentando conforme vão diminuindo o número de conteúdos fechados dentro da coleção, o que nalguns casos acontece como consequência da redução do número de conteúdos no decurso da vida educacional. Neste tipo de currículo, o aluno escolhe uma coleção de conteúdos que permitam satisfazer uma determinada exigência externa, que pode ser a exigência de determinados exames públicos. Um currículo do tipo coleção organiza-se à volta de temas que mantêm entre si uma relação fechada e que envolvem uma hierarquia no sentido de que ao longo de percurso educacional, o aluno vai acedendo ao conhecimento cujo fim último só é desvendado no final da caminhada educacional (Bernstein, 1977).

O mesmo pode acontecer no programa disciplinar de um determinado ano de escolaridade, em que os temas da disciplina mantêm entre si uma relação fechada, ou no programa disciplinar de um determinado ano de escolaridade, em que os temas das diferentes disciplinas mantêm também esse tipo de relação.

Como num currículo do tipo coleção os conteúdos estão organizados de forma isolada, o professor pode, dentro do seu campo de especialização e nos limites do que é prescrito, seguir um caminho próprio. Para Bernstein (1977), neste currículo a pedagogia é didática e os critérios de avaliação são independentes. Desta forma, as rubricas programáticas de cada conteúdo estão nas mãos de quem ensina e de quem avalia, o que permite diferenças assinaláveis nas formas de ensino e nas formas de avaliação (Bernstein, 1977).

Para Bernstein (1977), o currículo de integração existe apenas de um ponto de vista teórico existindo muito poucos exemplos de tentativas da sua institucionalização. No currículo de integração os diferentes conteúdos estão subordinados a um tema ou ideia central que os agrega num todo e reduz o isolamento entre eles. Esta ideia integradora deve corresponder a um alto nível de abstração. Neste sentido, cada conteúdo deixa de ter significado por si só e passa a ter uma função determinada dentro do todo de que faz parte.

Num currículo de integração os conteúdos estão organizados de forma aberta e inter-relacionam-se em torno de uma ideia central e de uma forma integrada. Assim, os professores de diferentes conteúdos envolvem-se numa tarefa partilhada o que leva à necessidade de uma pedagogia e a um formato de avaliação comum. Esta prática pedagógica comum tende a centrar-se no modo como o conhecimento é adquirido e não nos estados do conhecimento (Bernstein, 1977).

Comparando os dois tipos de currículo em diferentes dimensões, Bernstein (1977) destaca que num currículo de coleção a teoria pedagógica subjacente é a didática, os critérios de avaliação são diferentes de conteúdo para conteúdo e, sobretudo na sua forma especializada, promove-se um ensino em profundidade. Num currículo de integração a teoria pedagógica é autorreguladora, os critérios de avaliação são comuns o que leva a um ensino em extensão.

3.3.1.2. Classificação e enquadramento

Tendo como objetivo o estudo sociológico do conhecimento educacional, Bernstein vai basear-se nos trabalhos de Marx e Durkeim e vai usar como instrumentos de análise os conceitos de classificação e de enquadramento. A classificação e o enquadramento do conhecimento educacional definem-se em função da força da fronteira, já utilizada para distinguir entre currículo de coleção e currículo de integração (Morais & Neves, 2007).

O termo classificação é utilizado por Bernstein (1977, 1990, 2000) relativamente às relações entre conteúdos, ou seja, ao tipo de diferenciação entre conteúdos. A uma classificação forte corresponde conteúdos isolados uns dos outros com fronteiras nítidas e a uma classificação fraca corresponde fronteiras esbatidas e um isolamento reduzido entre conteúdos. A classificação é assim o grau de manutenção das fronteiras entre conteúdos. A força da fronteira é um aspeto essencial na divisão do conhecimento educacional.

Para Bernstein (1977, 1990, 2000) o enquadramento refere-se à forma do contexto em que é feita a transmissão e a aquisição do conhecimento. Quando existe um enquadramento forte, significa que existe uma fronteira nítida entre o que pode e o que não pode ser transmitido, já quando o enquadramento é fraco essa fronteira é suavizada. Um dos aspetos destacados no enquadramento é o que se refere ao controlo que o professor e o aluno podem ter relativamente ao que é transmitido e adquirido no contexto da relação pedagógica. Quando o enquadramento é forte estas opções são reduzidas, mas quando o enquadramento é fraco existe um leque mais alargado de opções. O enquadramento refere-se ao controlo que o professor e o aluno têm sobre a seleção, organização, ritmo de aprendizagem e organização do tempo do conhecimento a ser transmitido-adquirido na relação pedagógica. Na teoria de Bernstein (1977, 1990, 2000) destaca-se um outro aspeto do enquadramento que se refere à relação entre o conhecimento educacional designado por extraescolar e o conhecimento educacional que é passado na relação pedagógica. Neste caso, existem variações no enquadramento consoante a força da fronteira entre estes dois conhecimentos educacionais.

Nesta perspetiva de análise, o currículo relaciona-se com a variação da força da classificação e a pedagogia é dada pela variação da força do enquadramento. As forças da classificação e do enquadramento são independentes uma da outra e a força do enquadramento pode variar em cada um dos níveis que é passível de análise (seleção, organização, ritmo de aprendizagem e organização do tempo) (Bernstein, 1977, 1990, 2000).

Os conceitos de classificação e de enquadramento são usados na análise do currículo de forma a que seja possível identificar os princípios que lhe estão subjacentes. Destaca-se nesta análise a componente poder e a componente identidade. Uma classificação forte cria um forte sentimento de pertença a uma classe particular, levando à criação de uma identidade. No entanto, uma classificação forte reduz o poder do professor sobre o que transmite, porque não pode ultrapassar a fronteira entre os conteúdos. Já os enquadramentos fortes dão poder ao professor na relação pedagógica, enquanto reduzem o poder do aluno sobre o que adquirem, como adquire e quando (Bernstein, 1977, 1990, 2000).

3.3.1.3. Códigos de conhecimento educacional

Bernstein (1977, 1990, 2000) distingue três sistemas de mensagem dentro do código educacional: o currículo, que define o conhecimento válido, a pedagogia, que define a forma válida de transmissão do conhecimento, e a avaliação, que define a realização válida do conhecimento por parte do aluno. A classificação e o enquadramento do conhecimento educacional formal, e os princípios que os regulam, formatam o código. Desta forma, os códigos educacionais são uma forma de estudo da classificação e do enquadramento, sendo este revelado pela relação entre as forças da classificação e do enquadramento (Domingos, Barradas, Rainha & Neves, 1986). Bernstein (1977) considera dois códigos gerais que estão subjacentes aos dois tipos de currículo, o código de coleção e o código de integração. Um código de coleção aparece relacionado com uma organização do conhecimento educacional onde exista uma classificação forte e um código de integração surge em organizações do conhecimento educacional onde se tente reduzir a força da classificação.

Bernstein (1977, 1990) distingue principalmente dois tipos de códigos de coleção, o código de coleção especializado e o não especializado. A extensão da especialização tem em conta o número de conteúdos fechados que constituem o currículo.

Um código de coleção especializado refere-se ao princípio subjacente a um currículo de coleção em que existe um número reduzido de conteúdos fechados. Bernstein (1977) distingue duas variedades deste código no currículo inglês, a variedade pura e a variedade impura. Um exemplo da variedade pura é quando as disciplinas de um determinado curso provêm todas de um determinado campo do conhecimento. Um exemplo da variedade impura é quando as disciplinas provêm de campos de conhecimento diferentes. Aplicado à comparação entre o currículo inglês e o currículo europeu típico da época, Bernstein (1977) refere que a forma de coleção especializada do currículo inglês tem uma classificação muito forte e um enquadramento mais fraco, quando comparado com o europeu. A classificação é forte porque os conhecimentos que podem ser agrupados são determinados, existe um isolamento entre o que é puro e aplicado, os currículos são graduados de acordo com as capacidades dos alunos, e porque há um isolamento entre determinados alunos que escolheram um grupo de disciplinas e que não têm acesso a disciplinas de outro grupo. O enquadramento é mais fraco porque existe menos controlo central sobre o que é transmitido, existem mais opções para os alunos dentro das relações pedagógicas e porque há menor isolamento entre o conhecimento escolar e o não escolar, principalmente para os alunos considerados menos aptos.

Um código de coleção não especializado refere-se ao princípio que está implícito a um currículo de coleção onde existe um número elevado de conteúdos fechados. Bernstein (1977) distingue duas variedades, uma variedade baseada numa disciplina e uma variedade mais baseada num curso. Na variedade baseada numa disciplina, mais comum no currículo europeu da época, a unidade básica do conhecimento é um assunto. Na variedade baseada num curso, mais comum no currículo dos E.U.A da época, a unidade básica do conhecimento é um curso.

No que diz respeito à análise da classificação e do enquadramento nestas variedades de código de coleção, a forma não especializada baseada numa disciplina envolve uma classificação forte e um enquadramento muito forte, porque os professores e os alunos têm poucas opções sobre a transmissão do conhecimento e porque os currículos e os programas são muito explícitos. No que se refere à forma não especializada baseada num curso, a classificação e o enquadramento dos códigos de coleção são mais fracos, principalmente no ensino secundário e universitário. Nestes níveis podem ser combinados diferentes grupos de disciplinas e de formas diferentes, o que indica uma classificação menos forte. O enquadramento mais fraco é indicado pelo fraco isolamento entre o conhecimento escolar e o não escolar e também pelas opções disponíveis para os alunos na relação pedagógica (Bernstein, 1977).

O termo integração aplicado ao código refere-se à subordinação de disciplinas, ou cursos, previamente isolados, a uma ideia que os relacione que suavize as fronteiras entre as disciplinas.

Um código de integração baseado num professor está subjacente a um currículo de integração em que um determinado professor permanece frequentemente com um só grupo de alunos, durante um longo período de tempo. Durante esse período o professor pode transmitir diversos assuntos relacionando-os entre si através de uma ideia integradora (Bernstein, 1977, 1990, 2000). Um exemplo desta situação poderá ser o primeiro ciclo do ensino básico em Portugal. É, no entanto, de destacar que, se o professor apresentar os diferentes assuntos de forma distinta e isolada, não haverá integração. Bernstein (1977) apresenta como exemplo deste código de integração o currículo da escola pré-primária inglesa da época.

Um código de integração baseado num grupo de professores respeita ao princípio subjacente a um currículo onde existem relações entre professores, sendo a integração o resultado de todos se subordinarem a uma ideia relacionadora que atenua as fronteiras entre os conteúdos. É uma integração diferente daquela que é baseada num só professor e apontada como mais difícil de concretizar. Este código de integração baseado num grupo de professores pode apresentar vários graus, consoante o número de professores envolvidos, e duas variedades, conforme se refere a um grupo de professores de diferentes disciplinas ou de um grupo de professores da mesma disciplina (Bernstein, 1977, 1990, 2000).

Qualquer um dos códigos de integração descritos anteriormente levam a um enfraquecimento da classificação. Os critérios para graduar a sua força relacionam-se com a série de assuntos diferentes que são coordenados ou ao número de professores que estão envolvidos nessa coordenação. No que diz respeito à força do enquadramento, esta pode variar conforme as relações entre professores, entre alunos e entre professores e alunos (Bernstein, 1977).

A força e os procedimentos de manutenção da fronteira, tal como surgem na classificação e no enquadramento, integram as diferenças entre os códigos de conhecimento educacional. Para Bernstein (1977), a natureza da classificação e do enquadramento tem consequências na estrutura de autoridade/poder que faz o controlo da seleção e organização do conhecimento educacional e a forma como este é transmitido. O poder e o controlo social são realizados através dos códigos de conhecimento educacional, porque é através deles que entram na consciência e modelam-na (Bernstein, 1977).

3.3.1.4. Socialização e os códigos educacionais

Na teoria de Bernstein (1977, 1990, 2000), as relações sociais serão mais hierarquizadas e ritualizadas, quanto mais forte forem a classificação e o enquadramento, que é o caso do código tipo coleção. Os padrões de relações sociais num código de coleção levam a que o estatuto do aluno seja menorizado e que este tenho poucos direitos.

No padrão de relações sociais num código de integração, com uma classificação fraca, há uma redução da autoridade de cada conteúdo o que leva a perturbações nas estruturas de autoridade existentes, nas identidades educacionais e nos conceitos de propriedade. A integração leva a uma inversão nas relações de poder entre professores e alunos. A integração aumenta o poder de decisão dos alunos e os seus direitos, tendo este um estatuto mais elevado. O enquadramento flexível tem também uma fronteira mais esbatida entre o que pode e não pode ser ensinado (Bernstein, 1977, 1990, 2000).

O conceito de manutenção da fronteira tem consequências não só na manutenção do código educacional, como na organização das relações sociais. Bernstein (1977, 1990, 2000) aponta algumas consequências na organização das instituições escolares causadas pela socialização através dos dois tipos de código. Numa organização em que o conhecimento é regulado por um código de coleção, Bernstein (1977, 1990, 2000) aponta as seguintes características: as hierarquias são mantidas através de fronteiras marcadas entre alunos e professores, diretor e chefes de departamento, chefes de departamento e restantes professores e entre alunos de diferentes idades. As instituições têm um controlo tipo oligárquico, com reuniões formais e informais entre os chefes de departamento e o diretor. Os professores mais antigos, chefes departamento, mantêm fortes relações de trabalho, tanto horizontais como verticais, ou seja, tanto com os outros chefes de departamento, como com os outros professores do mesmo departamento. Os professores mais jovens mantêm apenas relações de trabalho e lealdade verticais, consequência do isolamento entre departamentos. As relações entre alunos serão idênticas às dos professores, existindo um isolamento relativamente a alunos que estudam diferentes grupos de disciplinas. A administração e os atos de ensino tendem a tornar-se invisíveis.

Numa organização em que o conhecimento é regulado por um código de integração, a fronteira entre os diferentes membros da instituição é enfraquecida, em consequência do enfraquecimento da hierarquia das disciplinas. Tanto os professores das diferentes disciplinas, como os alunos, estabelecem relações horizontais de trabalho. As relações entre os professores, principalmente os mais jovens, e os alunos, também são fortalecidas. A administração e os atos de ensino tendem a tornar-se visíveis (Bernstein, 1977, 1990, 2000).

3.3.1.5. Códigos e problemas de ordem

A ordem interna e externa ao indivíduo, assim como as hierarquias, são construídas de forma diferente consoante o conhecimento seja regulado por códigos de coleção ou códigos de integração. Nos casos do conhecimento regulado por códigos de coleção, "a ordem social emerge da natureza hierárquica das relações de autoridade, da organização sistemática, quer no espaço quer no tempo, do conhecimento diferenciado e de práticas de exame explícitas, geralmente previsíveis." (Domingos, Barradas, Rainha & Neves, 1986, p. 165). Em relação à ordem interna de cada indivíduo, esta vai-se formando através da constituição de identidades específicas. A classificação forte permite que a organização, a transmissão e a avaliação do conhecimento nas diferentes disciplinas possa variar. Dentro de um certo limite, também permite que exista uma certa variação ideológica entre os professores, porque as hierarquias isoladas podem permitir conter determinados conflitos. O enquadramento forte entre o conhecimento educacional e o conhecimento não educacional facilitam a diversidade de ideologias, porque cada um não explicita a sua ideologia. Permite também a criação de áreas de privacidade do professor e do aluno, porque existe um distanciamento relativamente ao que é exterior à escola. No entanto, pode criar dificuldades na criação de uma identidade (Bernstein, 1977).

Relativamente a situações em que o conhecimento é regulado por códigos de integração, a ordem social tem de ser planeada e construída. No entanto, Bernstein (1977) salienta que é necessário cumprir determinadas condições para que esta ordem criada com este tipo de código não se torne problemática. Bernstein (1977) enumera quatro condições que é necessário cumprir: explicitação da ideia integradora para a qual deverá haver um consenso, clareza e coerência entre a ideia integradora e o conhecimento que ela irá coordenar, definição clara de critérios de avaliação e constituição de uma comissão de professores e alunos que funcione como agente de socialização no código.

3.3.1.6. Mudança no código educacional

As tentativas de mudança nos códigos educacionais encontram sempre resistência, independentemente do mérito que qualquer um dos códigos possa ter. Na teoria de Bernstein (1977), essa resistência é esclarecida tendo em conta as relações entre códigos educacionais e a estrutura de poder e os princípios de controlo social.

No caso dos códigos de integração, como se apoiam em ideologias explícitas e fechadas, permitem um maior controlo do indivíduo, a sua institucionalização seria facilitada em sociedades onde existam limitações à diversidade de ideologias. No entanto, estes códigos de integração poderão ser potencialmente fatores de mudança nas estruturas de poder e nos princípios de controlo. Nas tais sociedades com limitações à diversidade de ideologias seria provável que esses códigos de integração tivessem fraca classificação, mas fortes enquadramentos para o professor e para o aluno (Bernstein, 1977).

3.3.2. Modelo do discurso pedagógico

O modelo do discurso pedagógico centra-se no que é transmitido como conhecimento educacional e é a partir deste modelo que Bernstein (1990, 2000) desenvolve uma teoria sobre a produção e a reprodução do discurso pedagógico.

3.3.2.1. Gramática interna do discurso pedagógico

Bernstein (1990, 2000) desenvolve uma teoria sobre a produção e reprodução do discurso pedagógico, onde considera que a gramática interna desse discurso é fornecida pelo aparelho pedagógico, através de regras de distribuição, recontextualização e de avaliação. O modelo do discurso pedagógico está centrado no que é transmitido como conhecimento educacional.

As regras de distribuição regulam a relação entre o poder, grupos sociais, formas de consciência e de prática e ainda as suas produções e reproduções. As regras de recontextualização regulam a constituição do discurso pedagógico específico. As regras de avaliação regulam a prática pedagógica específica (Bernstein, 1990, 2000).

As regras de distribuição marcam e especializam o que é pensável/impensável e respetivas práticas, através de agências pedagógicas com especializações diferentes, regulando o grau de isolamento entre grupos, práticas e contextos e entre princípios de comunicação especializados. As regras de distribuição são um princípio de classificação que regula as relações entre a distribuição de poder, o conhecimento e as formas de consciência (Morais & Neves, 2007).

Para Bernstein (1990), a separação entre o pensável e o impensável corresponde, nas sociedades modernas, à separação entre o conhecimento reproduzido e o conhecimento produzido. O impensável é controlado essencialmente, mas não totalmente, direta ou indiretamente, por estratos superiores do sistema educacional, que estão mais ligados à produção do discurso. O pensável está ligado a estratos mais baixos do sistema educacional, ligados à reprodução do discurso. Aplicando a linguagem do código, dir-se-á que os códigos elaborados são os meios de pensar o impensável, porque os significados daquilo que constroem ultrapassa um espaço, tempo e contexto locais. As regras de distribuição marcam e distribuem quem pode transmitir o quê, a quem e sob que condições, estabelecendo assim os limites externos e internos do discurso legítimo (Bernstein, 1990, 2000).

As regras de contextualização regulam a constituição dos discursos pedagógicos. Regulam o que e o como da transmissão-aquisição, ou seja, os discursos a serem transmitidos-adquiridos e os discursos que regulam os princípios da sua transmissão-aquisição. O discurso pedagógico, através das regras de contextualização, cria seletivamente os sujeitos pedagógicos, que são assim sujeitos recontextualizados (Morais & Neves, 2007).

O discurso pedagógico não é assim um conjunto de discursos, mas sim um conjunto de regras que relaciona dois discursos, um discurso instrucional e um discurso regulador. O discurso instrucional (DI) relaciona-se com a aquisição de conhecimentos e competências cognitivas, e o discurso regulador (DR) relaciona-se com a aquisição de valores, normas de conduta social e competências sócio afetivas. Os discursos recontextualizados são significantes dos discursos originais, que passam a ser entes virtuais. É o discurso regulador que cria a ordem, a relação e a identidade do discurso instrucional. Para Bernstein (1990), qualquer disciplina na escola já é uma recontextualização, porque houve uma deslocação do campo primário de produção do discurso, que pode ser a universidade ou um centro de investigação, para a escola onde é reproduzido o discurso. A forma como o discurso original é recontextualizado na escola não é uma questão interna à própria área científica, são antes regras de recontextualização, próprias do discurso pedagógico (Bernstein, 1990).

As regras de avaliação constituem os princípios fundamentais de ordenação do discurso pedagógico, regulando as práticas pedagógicas específicas, ou seja, a relação entre a transmissão e a aquisição dos discursos pedagógicos específicos. As regras de avaliação, como parte da gramática interna do discurso pedagógico e reguladas pelas regras de recontextualização, constituem os princípios fundamentais de ordenação da prática pedagógica. É a avaliação que faz a ligação contínua entre a transmissão e a aquisição. No entanto, podem existir clivagens entre as regras, de tal forma que a prática pedagógica não reproduza exatamente o discurso pedagógico e que o que é adquirido não seja exatamente o que é transmitido (Bernstein, 1990, 2000).

A relação entre poder, conhecimento e consciência é estabelecida pelo aparelho pedagógico que regula a relação entre as regras de distribuição, de recontextualização e de avaliação. Através das regras de distribuição, o aparelho pedagógico distribui o poder. Este poder, que está imerso no conhecimento educacional, é inculcado nos sujeitos quando estes são diferencialmente posicionados através das regras de avaliação, e adquirem uma consciência específica (Morais & Neves, 2007).

<u>3.3.2.2. A produção e reprodução do discurso pedagógico</u>

O discurso pedagógico oficial regula as regras de produção, reprodução, distribuição e a inter-relação dos textos pedagógicos legítimos, das práticas de comunicação legítimas e das práticas de organização legítimas. Para se compreender a importância do discurso pedagógico oficial como elemento na regulação da reprodução cultural, é importante perceber como é que ele é criado e como é transmitido (Morais & Neves, 2007).

O modelo de Bernstein (1990, 2000) refere-se à produção e reprodução do discurso pedagógico oficial em sociedades contemporâneas e assenta em dois pressupostos principais. O primeiro pressuposto é que a reprodução educacional está relacionada com o campo da economia e com o campo do controlo simbólico. O campo da economia refere-se à produção de bens e serviços e à distribuição e circulação de capital económico. O campo do controlo simbólico refere-se à criação, distribuição, reprodução e mudança legítimas da consciência por meios simbólicos, ou seja, princípios de comunicação. O segundo pressuposto é que o contexto de reprodução educacional tem como objetivo colocar os sujeitos, professores e alunos, em referência a um conjunto de significados e de relações sociais. Os significados são aqui entendidos como discursos recontextualizados, comumente referidos como conhecimento educacional transmitido pela escola, e as relações sociais são as práticas específicas que regulam a transmissão e a aquisição dos significados legítimos e da constituição da ordem, relação e identidade. O código pedagógico que é adquirido pelos alunos, está implícito aos significados e às relações sociais. O modelo de análise do modelo do discurso pedagógico tem três níveis, a geração, a recontextualização e a transmissão, e pressupõe que o discurso pedagógico é determinado por um conjunto complexo de relações, com a intervenção de diferentes contextos. A geração e a recontextualização associam-se à produção do discurso pedagógico e a transmissão associa-se à sua reprodução (Morais & Neves, 2007).

O modelo centra-se nas relações complexas e múltiplas que estão presentes na produção e reprodução do discurso pedagógico. Os princípios dominantes da sociedade pertencem ao discurso regulador geral (DRG) e resultam das relações entre o estado, a economia e o controlo simbólico, estando também sujeito a influências internacionais. O discurso pedagógico oficial não resulta diretamente dos princípios dominantes da sociedade porque sofre uma recontextualização oficial, por um lado, e uma recontextualização pedagógica, por outro. Quando se inserem estas recontextualizações, oficial e pedagógica, ao nível da transmissão, podem ainda sofrer um processo de recontextualização, que depende do contexto e da prática pedagógica de cada professor, ou das relações entre a escola e a família e comunidade (Morais & Neves, 2007).

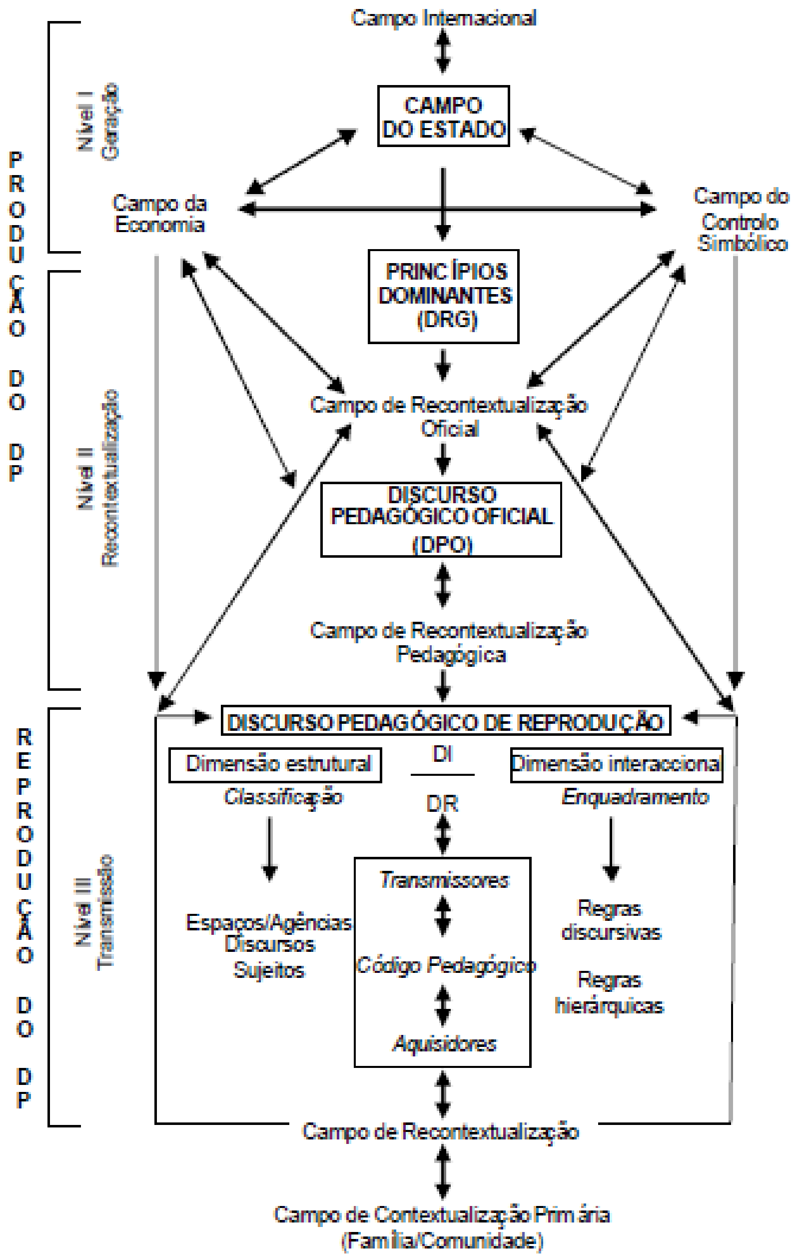


Figura 3.1. Modelo do discurso pedagógico de Bernstein (Morais, Neves & Ferreira, 2018, p. 12)

A produção e a reprodução do discurso pedagógico envolvem processos dinâmicos. O primeiro nível de análise do modelo diz respeito à geração dos princípios dominantes da sociedade que estão envolvidos na produção do discurso pedagógico oficial.

Os princípios dominantes são expressão da política do estado e podem ser, ou não, a expressão de vários interesses e grupos ideológicos. O discurso regulador geral (DRG) é realizado através de textos legais e constituem a base dos princípios dominantes. O estado tenta esbater as diferenças e chegar ao consenso social. No entanto, o discurso regulador geral, que transmite os princípios dominantes, pode nem sempre resultar de consensos, mas sim de conflitos reais ou potenciais, ou de relações pouco estáveis (Morais & Neves, 2007).

O estado articula, por meio dos princípios dominantes, as relações entre o controlo simbólico e o campo da produção, funcionando como estrutura legitimadora e reprodutora de categorias, relações e práticas dominantes. Através dos princípios dominantes, o estado veicula assim a classificação e o enquadramento que depois irão integrar a gramática do discurso pedagógico.

Bernstein (1990, 2000) destaca, no entanto, que o discurso pedagógico não é apenas um resultado dos princípios dominantes, pois estes sofrem ainda um processo de transformação nos campos de recontextualização. O processo de recontextualização (nível II do modelo) é, em última instância, o responsável pela formação do discurso pedagógico de reprodução.

Bernstein (1990, 2000) define uma contextualização primária, que ocorre no contexto primário de produção discursiva, na qual são selecionados os discursos que serão reproduzidos pelo discurso pedagógico e são selecionadas as teorias para a sua transmissão. O campo intelectual da educação é um dos campos de contextualização primária, mas não é o único.

No campo da recontextualização, Bernstein (1990, 2000) distingue a recontextualização oficial e a recontextualização pedagógica. O campo de recontextualização oficial é regulado pelo estado através do sistema legislativo e administrativo. O campo de recontextualização pedagógica é constituído por departamentos universitários de educação, escolas de formação de professores, escolas e ainda meios de comunicação especializados em educação. Entre a recontextualização oficial e a recontextualização pedagógica também há muitas vezes fontes de conflitos, assim como entre as práticas da escola e o contexto primário de quem adquire. A relutância, ou o sentimento de incapacidade, dos próprios professores, ou dos autores de manuais, em reproduzir o código educacional resultante do discurso pedagógico oficial, também confere dinamismo ao processo de produção e reprodução do discurso pedagógico. Por vezes, os professores são também autores de manuais, neste caso atuam como recontextualizadores, mas também como reprodutores. Para Bernstein, os espaços de mudança serão maiores quanto maiores forem as possibilidades de recontextualização. (Morais & Neves, 2007).

No nível da transmissão do discurso, o código aparece na sua dimensão pedagógica como um princípio que regula a relação entre transmissores e quem adquire, que pode ser professores-alunos, pais-filhos, formadores de professores-professores, que ocorre num determinado espaço e tempo em contextos especializados. O discurso pedagógico, que Bernstein define como a relação entre o discurso instrucional, que se relaciona com a aquisição de conhecimentos e competências cognitivas, e o discurso regulador, que se relaciona com a aquisição de valores, normas de conduta social e competências sócio afetivas. (DI/DR), é transmitido no contexto da relação pedagógica (Morais & Neves, 2007).

Os conceitos de classificação e de enquadramento também surgem no modelo do discurso pedagógico como conceitos que permitem estabelecer a diferença entre o poder e o controlo que estão implícitos à estrutura do conhecimento educacional formal. Um código de conhecimento educacional modela um currículo, pedagogia e avaliação. Estes conceitos permitiram a Bernstein (1990) classificar dois tipos extremos de currículo, currículo coleção e de integração. Quando a classificação é forte, há uma separação de conteúdos, corresponde a um currículo de coleção, quando a classificação é fraca, os conteúdos não estão isolados, corresponde a um currículo de integração. O enquadramento é forte num código de coleção, quando o controlo do que é transmitido e adquirido não está nas mãos dos professores e dos alunos. O enquadramento é fraco num código de integração, quando os professores têm opções numa relação pedagógica (Morais & Neves, 2007).

Os contextos pedagógicos específicos, como a escola ou a sala de aula, são definidos por relações de poder e de controlo entre espaços, discursos e sujeitos. As relações entre sujeitos fazem a dimensão "interaccional" de um contexto e as relações entre sujeitos, discursos e espaços constroem a dimensão organizacional. A classificação e o enquadramento são usados para analisar a dimensão organizacional e a dimensão "interaccional", respetivamente. A seleção dos conhecimentos e competências, sequência de aprendizagem, o ritmo de aquisição de conhecimentos esperado e os critérios de avaliação são relações importantes na relação entre o professor e o aluno ao nível da dimensão "interaccional". Os princípios implícitos a estas relações são designados por regras discursivas, porque regulam a transmissão-aquisição do discurso instrucional específico (DIE). O discurso regulador específico, também regulado por regras discursivas, refere-se à transmissão-aquisição de atitudes e valores (Morais & Neves, 2007).

As regras discursivas dizem respeito ao controlo que os transmissores e aqueles que recebem podem ter no processo de transmissão-aquisição. O enquadramento permite estabelecer a natureza do controlo. Um enquadramento é forte, no que diz respeito a regras discursivas que regulam o DIE, se o professor controlar a seleção, a ordem, o tempo destinado à aprendizagem e explicitar os critérios de avaliação. Um enquadramento é fraco quando o aluno que adquire tiver controlo nos parâmetros já enunciados para o professor (Morais & Neves, 2007).

As regras hierárquicas são também muito importantes para caracterizar a relação entre professor e aluno, porque regulam a forma de comunicação entre sujeitos com posições hierárquicas distintas. Um enquadramento fraco refere-se a uma situação em que o aluno pode criticar as práticas do professor ou situações em que o professor explica ao aluno as razões para ter determinados comportamentos, chamado controlo pessoal. Um enquadramento forte refere-se a um controlo posicional em que o professor apela a regras e estatutos, é um controlo imperativo (Morais & Neves, 2007).

Em relação ao nível da dimensão estrutural do código pedagógico podem-se considerar vários tipos de relações quanto aos sujeitos, professor-aluno ou aluno-aluno, quanto aos discursos, relação intradisciplinar ou interdisciplinar, e quantos aos espaços, do professor, do aluno ou dos diferentes alunos. Os valores de classificação podem caracterizar estas relações. Uma classificação fraca na relação entre alunos indica uma fronteira esbatida entre elas, que pode ser relativamente à convivência entre classes sociais, género, raça ou aproveitamento escolar. Uma classificação fraca entre espaços significa a partilha de espaços e materiais. Uma classificação forte entre espaços dos alunos mostra uma fronteira muito marcada, com hierarquias entre os próprios alunos (Morais & Neves, 2007).

No que diz respeito à relação entre discursos, uma classificação fraca ao nível intradisciplinar indica que são estabelecidas relações entre os vários assuntos de uma mesma disciplina. Já uma classificação forte mostra uma separação entre os assuntos sem articulação entre eles. No nível interdisciplinar, há uma classificação forte quando não se estabelecem relações entre os assuntos da disciplina com os das outras disciplinas pertencentes ao currículo, o que corresponde a um código de coleção. Há uma classificação fraca quando a articulação existir entre as disciplinas, o que corresponde a um código de integração (Morais & Neves, 2007).

A classificação e o enquadramento podem referir-se a relações no interior de uma agência, interior de uma escola, quando são internos, mas podem também referir-se a relações entre agências, escola e comunidade, quando são externos. A classificação e o enquadramento podem ter diferentes graus de poder e controlo nas relações entre as categorias. Estas variações que a classificação e o enquadramento podem ter, significam práticas pedagógicas diferenciadas (Morais & Neves, 2007).

4

Capítulo 4 - Metodologia

O presente trabalho tem como objetivo estudar o desenvolvimento do conhecimento profissional do professor para o ensino da matemática trabalhado nos cursos de formação inicial de professores do ensino primário em Portugal, entre 1844 e 1974. A definição do âmbito cronológico tem como marco as primeiras tentativas de uma organização formal da formação de professores do ensino primário e regulamentação de escolas normais primárias. O final do âmbito cronológico do estudo coincide com um momento da história geral de Portugal que marca uma alteração na formação inicial dos professores do ensino primário.

Tendo em conta o objetivo traçado, a investigação baseou-se na recolha, seleção e análise de documentos que permitissem caracterizar o conhecimento profissional do professor em diferentes níveis de decisão curricular, tendo-se focado no currículo prescrito e no currículo apresentado ou moldado. No que diz respeito à caracterização da matemática na formação dos professores do ensino primário no currículo prescrito das escolas de formação de professores, a recolha e seleção de documentos centrou-se nos documentos legais. Na apresentação dos resultados desta parte do trabalho, o âmbito cronológico foi dividido em três períodos que se relacionam com a história geral do país, mas que também marcam alterações significativas no enquadramento legal da formação inicial dos professores do ensino primário. Nas conclusões, a análise é organizada nos dois períodos que têm correspondência com a análise dos manuais, um primeiro período até 1930, desde as primeiras tentativas de formação das primeiras escolas de formação de professores até à extinção das escolas normais primárias em 1930, e o segundo período de 1930 a 1974, com a formação das escolas do magistério primário.

Na caracterização do conhecimento profissional do professor para ensinar matemática presente no currículo apresentado ou moldado, a recolha e seleção de documentos centrou-se nos manuais ou livros de texto. Nesta análise, o âmbito cronológico foi dividido em dois períodos, desde 1844 até 1930 e de 1930 até 1974. Estes dois períodos são marcados por diferenças na organização dos cursos de formação inicial de professores do ensino primário que se refletem em diferentes características dos manuais analisados.

Tendo em conta o objeto de estudo e a caracterização da investigação foi necessário proceder a opções metodológicas em que se destaca a importância do objeto de estudo, o local de onde o sujeito que investiga atua, a forma como foram recolhidos e selecionados os documentos, o que procurar nesses documentos, os procedimentos e técnicas utilizados na análise de dados. O estudo tal como foi exposto, apresenta características de uma investigação histórica, descritiva e interpretativa.

Na primeira secção deste capítulo discutir-se-á a história da educação matemática enquadrada na história das disciplinas escolares. Na segunda secção deste capítulo trata-se do sujeito que investiga em história da educação matemática e que diferentes abordagens o investigador pode assumir. Numa terceira secção discutir-se-á o que se entende por método histórico, a pluralidade de conceções sobre o que poderá ser esse método e a utilização do método histórico na investigação em história da educação.

Neste capítulo é importante justificar a utilização de diferentes fontes como *corpus* documental, o que será discutido na quarta, quinta e sexta secção do capítulo. Será abordada a utilização de normativos legais como fonte e a utilização de livros de texto, nomeadamente os manuais pedagógicos, e como é que os saberes a ensinar e para ensinar poderão ter sido aí registados. Também será discutida a forma como foram selecionadas as fontes documentais, os critérios utilizados nessa seleção e as limitações que as fontes apresentam. Na secção final do capítulo são apresentados os critérios de análise dos documentos. Na análise dos manuais adapta-se a proposta de Maz (2005), ao conteúdo dos números racionais e do seu ensino.

4.1. A história da educação matemática e a história das disciplinas escolares

A história da educação matemática tem vindo a desenvolver-se e a ganhar uma importância crescente que pode ser observada no número de congressos internacionais dedicados ao tema, na formação de grupos de trabalho e publicação de edições especiais de revistas e de livros de síntese. Mesmo nas publicações de educação matemática tem-se vindo a dar alguma visibilidade ao tema da história, existindo na discussão dos problemas atuais a incorporação de reflexões sobre o passado (Matos, 2018). Mas este campo não é isolado e autónomo, é antes um campo com uma atividade profundamente interdisciplinar, com interseções com a história, a história da educação, a sociologia e a história da matemática (Schubring, 2014).

Uma das áreas de grande importância é a história da educação, que trabalha com o sistema educativo onde se dá a educação matemática. De uma forma geral, até há pouco tempo a história da educação não se tinha debruçado de uma forma aprofundada sobre a história dos conteúdos escolares. A partir do final da década de 1980 desenvolveu-se uma área de investigação que tem como objeto a história das disciplinas escolares, tendo o conceito sido desenvolvido por Chervel (1990), ao defender que as disciplinas escolares são uma criação original da escola. Vinão (2006) também se refere à influência francesa em que a história das disciplinas escolares surge como um domínio marginal da história da educação. No entanto, Viñao (2006) destaca um interesse crescente na história das disciplinas escolares. Um dos motivos do crescimento do interesse neste tipo de estudo teria sido a análise das alterações curriculares no ensino secundário após a Segunda Guerra Mundial, em que se passa para uma ideia de escola secundária para todos e onde os estudos da área das humanidades perdem terreno para os conteúdos científicos. Outra razão seria o interesse dos professores pela história da própria disciplina. Mas Vinão (2006) refere outras razões para o crescimento do interesse na história das disciplinas escolares, nomeadamente o facto da própria área da história da educação ter tentado remediar o esquecimento a que tinha remetido o funcionamento real da escola, as suas práticas e a relação dessas práticas com os textos normativos. Outra razão ainda seria o desenvolvimento de uma história cultural e o interesse pela cultura escolar, não como espaço de reprodução ou transmissão de conhecimento externo, mas como espaço de produção de conhecimento.

Viñao (2006) refere ainda os trabalhos que estudam as disciplinas escolares a partir da análise do processo de profissionalização docente e apresenta um esquema de análise que cobre os aspetos considerados mínimos no estudo de uma determinada disciplina:

a) O seu lugar, presença e peso nos planos de estudo;

b) Os seus objetivos específicos e implícitos e os discursos que as legitimam como disciplinas escolares;

c) Os conteúdos prescritos: planos de estudo, livros de texto, programas e horários;

d) Os professores das disciplinas: i) formação e qualificações; ii) seleção; iii) carreira docente; iv) associativismo; v) publicações; vi) presença social e institucional;

e) Aproximação, dentro do possível, às práticas escolares e à realidade da aula.

Nestes aspetos evidenciados por Viñao (2006), destaca-se o que Chervel salienta como essencial na história das disciplinas escolares. Chervel (1990) distingue entre finalidades objetivas e finalidades reais, considerando que a sua distinção é uma necessidade fundamental para quem faz a história das disciplinas. As finalidades de objetivo são as finalidades teóricas, as intenções, enquanto que as finalidades reais são aquelas que se aproximam da prática. O historiador das disciplinas escolares deve trabalhar nestes dois planos.

Como foi referido anteriormente, Chervel (1990) faz uma reflexão sobre a história das disciplinas escolares, recusando a ideia de que os conteúdos de ensino são meras imposições sociais e culturais, considerando que estas são mais do que uma simples simplificação ou vulgarização dos saberes de referência produzidos fora da escola. São justamente as disciplinas escolares que põem em evidência o caráter criativo da escola, que não é passiva, nem apenas um recetor de produtos culturais da sociedade. Neste entender, as disciplinas escolares têm uma autonomia relativa no âmbito do que comumente se designa por cultura escolar, em interação com a cultura mais geral, mas não como um mero processo de reprodução social. Chervel (1990) salienta que a história das disciplinas escolares permite identificar as funções da escola em cada época, indo para além do sentido restrito da instrução.

Em sentido semelhante, Julia (1995) critica a história da educação por estar demasiado centrada na identificação das origens e influências exteriores sobre a instituição escolar. Sem negar a importância das problemáticas da história da educação, considera que ela se tem afastado do que realmente se passa no espaço escolar. Salientando a importância de uma aproximação à realidade do trabalho escolar, destaca a história das disciplinas escolares por tentar compreender o que acontece no espaço escolar, através da análise das práticas de ensino e dos objetivos que levaram à constituição das disciplinas. Sublinha ainda que as disciplinas escolares não são uma simples vulgarização ou adaptação das ciências de referência, mas que são um produto específico da escola. Destaca, assim, a valorização da autonomia das disciplinas escolares, sublinhando que o seu estudo permite aceder às práticas no interior da instituição escolar.

A conceção da originalidade do saber escolar, tal como a apresenta Chervel (1990), afasta-se das propostas da teoria da transposição didática de Chevallard (1991), por outro lado, o trabalho de Julia (1995) acompanhou a tendência da história cultural ligada à antropologia, que procura significados e descrições fenomenológicas densas e afasta-se de descrições globais, centradas em questões económicas e sociais (Burke, 1997). Matos (2018a) realça a ideia de que as escolas e os professores não são meros reprodutores, nem do saber científico, nem de uma cultura social global, o que destaca as ideias de Chervel e Julia sobre as disciplinas escolares, que seriam uma das criações da cultura escolar.

Nesta perspetiva da história das disciplinas escolares pode-se encontrar pontos de interseção com o trabalho de Shulman (1986) que vem apresentar uma nova perspetiva sobre o conhecimento do professor, propondo diferentes componentes deste conhecimento, como o conhecimento do conteúdo e o conhecimento pedagógico do conteúdo. Esta última componente referida assume-se como uma originalidade com origem na prática docente, sendo essencial na compreensão da escola e na forma como se propõem as alterações curriculares e formativas. Nestes trabalhos, para além do conhecimento do conteúdo, Shulman (1986) acentua a relação da prática com o conhecimento pedagógico. Sendo definidas estas duas componentes do conhecimento profissional, elas relacionam-se e fundem-se, sendo difícil estabelecer uma fronteira nítida entre os dois tipos de conhecimento.

Os estudos históricos sobre as disciplinas escolares encontram realidades diferentes das atuais, o que pode permitir evidenciar novas formas de ver o conhecimento profissional do professor, as suas alterações em contextos de modificações curriculares e a sua génese (Matos, 2020).

No entanto, o conhecimento profissional do professor abrange em simultâneo um saber ligado à ação, que Barbier (1996) designa por saberes possuídos (savoirs détenus), e um saber teórico, que Barbier (1996) designa por saberes objetivados (savoirs objectivés). Os saberes ligados à ação, saberes possuídos, ligam-se às capacidades, conhecimentos, competências, aptidões e atitudes que estão relacionadas com a identidade da profissão e que só podem ser estudados através de uma metodologia de observação de comportamentos. Os saberes objetivados são conserváveis, acumuláveis e apropriáveis, eles formalizam uma representação do real e enunciam uma relação entre a representação e o objeto representado (Barbier, 1996). Embora Valente (2019) aponte como um desafio atual da história das disciplinas escolares o estabelecimento de um retrato da forma como historicamente os saberes da ação se constituem como saberes objetivados, muitos trabalhos têm-se debruçado sobre os saberes objetivados por se admitir que uma parte do conhecimento do professor se encontra representado em material impresso, como os manuais escolares ou os livros didáticos. Nesta investigação é também essa a opção, pois são estudados os saberes objetivados, admitindo que os manuais didáticos poderão constituir uma fonte para conhecer os saberes condensados e que também poderão ter tido no passado uma ligação à prática docente.

Viu-se anteriormente que Shulman (1986) propõe que o conhecimento profissional do professor é complexo, sendo composto por diferentes tipos de conhecimento. No estudo histórico do ensino e da formação em geral, Hofstetter e Schneuwly (2009) distinguem entre saberes a ensinar (savoirs à enseigner), os saberes emanados dos campos disciplinares de referência, mas que podem conduzir à criação de saberes próprios das instituições educativas, que se poderão relacionar com o conhecimento do conteúdo tal como é definido por Shulman (1986), e os saberes para ensinar (savoirs pour enseigner), os saberes profissionais, que poderão associar-se ao conhecimento pedagógico do conteúdo definido por Shulman (1986).

No entanto, o estudo do conhecimento profissional do professor tem revelado que existem especificidades relativamente a determinadas disciplinas escolares onde é necessário o desenvolvimento de modelos que tenham em conta os saberes específicos, o que tem acontecido no campo particular da educação matemática. Desta forma, alguns autores têm proposto abordagens mais finas. Nesta investigação, o trabalho de Ball, Thames e Phelps (2008) é destacado, porque desenvolve as propostas de Shulman (1986) a partir da observação de atividades de aula de matemática e análise das tarefas do professor. Ball et al. (2008) distinguem diferentes conhecimentos ou saberes, que designam por domínios, que permitem a adaptação ao estudo dos saberes matemáticos escolares.

Apesar de se assumir a relativa autonomia das disciplinas escolares é importante não deixar de referir a dimensão social dessas disciplinas. Tal como refere Young (1971) a forma como o conhecimento é selecionado, organizado e transmitido pelo currículo é uma construção social. Também Goodson (1997) questiona a suposta neutralidade das estruturas curriculares, defendendo que estas são uma construção social e política. Um aspeto curioso sublinhado por Goodson (1997) na relação entre as disciplinas é o da conflituosidade na definição dos currículos, que leva a disputas de tempo, de estatuto, de recursos, ao reforço curricular de umas disciplinas e a perda de influência de outras.

Neste sentido, o modelo do discurso pedagógico, de Bernstein (1990, 2000) descreve as relações que se podem estabelecer entre o currículo e outros textos e contextos pedagógicos. Essas relações podem ser úteis na análise da relação entre o currículo prescrito e o currículo moldado ou apresentado nos manuais didáticos.

4.2. Quem faz e de onde fala

Valente (2010) identifica quatro domínios que têm caracterizado a história da educação matemática: história da matemática, história na educação matemática, história oral e educação matemática e história da educação matemática como história. Matos (2018a) salienta a necessidade de se refletir sobre a relação entre a investigação em história da educação matemática e a educação matemática, apresentando um outro ponto de vista. Colocando-se numa posição de educador matemático, Matos (2018a) salienta que interessa ao investigador questionar a investigação histórica procurando a sua relevância para a discussão sobre os problemas do ensino e da aprendizagem da matemática, no entanto, distingue este ponto de vista daquele que pretende utilizar o conhecimento e os materiais do passado nas aulas de matemática.

No que diz respeito aos investigadores que realizam trabalho na área da história da educação matemática, Valente (2007) destaca que estes devem manter um contacto com as bases teóricas das diferentes perspetivas do que é fazer história, com a intenção de entender como ocorre o processo de escolarização dos saberes específicos da matemática, utilizando para isso um referencial teórico e metodológico dos historiadores.

Gomes (1988) refere que, apesar da história da educação muitas vezes ser feita por historiadores com formação em história, existem muitos exemplos de pessoas ligadas à ciência que se têm dedicado ao estudo da história da disciplina que lecionam, tendo muitas vezes nestes professores os melhores historiadores da respetiva disciplina. No caso da presente investigação, o investigador não tem uma formação específica em história, mas irá tentar apropriar-se de instrumentos e métodos da história para tentar reconstruir o desenvolvimento do conhecimento para ensinar uma disciplina do nível de ensino que leciona.

4.3. O método histórico

Num texto publicado em 2007, Valente (2007) procura respostas para a pergunta sobre que metodologia utilizar na história da educação matemática. Nesse texto, Valente defende a ideia de que quem faz a história da educação matemática se deve apropriar dos instrumentos utilizados pelos historiadores na sua produção da história, colocando a história da educação matemática no campo da história da educação. Mas quando alguém que não é da área da história, nem possui formação específica, decide realizar um trabalho neste campo surgem algumas questões. O que define a história como campo de investigação? O que é a história e como se escreve? Quais são os seus métodos?

Numa reflexão sobre o que poderá ser a escrita da história, Mattoso (1997) destaca que o trabalho do historiador deverá ter uma fundamentação conceptual e que as opções que tomar no campo teórico deverão ser explicitadas. Para Mattoso (1997), muitas das questões no campo da história relacionam-se com as ciências sociais e humanas, tais como a sociologia, a psicologia ou a antropologia. De acordo com Coutinho (2015) na investigação histórica o objetivo é descrever e interpretar uma situação ou acontecimento em que não pode existir observação direta nem haver experimentação sobre factos existentes, onde se usa a indução para analisar qualitativamente vestígios do que já aconteceu, usando documentos ou testemunhos orais.

No dizer de Certeau (1982), a operação histórica consiste na combinação de um lugar social, análise e de uma escrita. Essa escrita da história exige um método, o método histórico, que consiste na construção do campo documental, análise crítica das fontes, elaboração de uma explicação, síntese e escrita (Certeau, 1982; Chartier, 2007). Mattoso (1997) destaca três momentos na produção do discurso histórico: 1) exame do passado a partir das suas marcas; 2) representação mental do resultado desse exame; 3) produção de um texto, escrito ou oral, que permita comunicar com os outros.

Em relação à seleção de documentos, e do seu conteúdo útil, Mattoso (1997) destaca que este só ganha significado quando estes são inseridos no global, ou seja, nada tem sentido só por si, e os factos só ganham sentido quando se estabelecem relações com o contexto. Certeau (1982) considera que localizar e inventariar fontes históricas é uma operação técnica, onde se transforma em documentos determinados objetos que tinham uma certa organização. A seleção e tratamento das fontes tem de ser rigorosa, sendo necessário criar a possibilidade de outros verificarem a veracidade do conteúdo de quem escreve. A pesquisa em arquivos é muito importante na investigação histórica (Thayer-Bacon & Moyer, 2006). Os investigadores em história preocupam-se em localizar fontes primárias produzidas durante o período de tempo em estudo. A quantidade e tipo de fontes varia muito consoante o tema, a disponibilidade das fontes e consistência com a investigação já existente. As fontes históricas podem ser numéricas, narrativas, gráficas ou orais. As fontes comuns são as cartas, histórias orais, discursos, registos institucionais, diários, jornais e fotografias. No entanto, os investigadores têm que questionar o porquê de os arquivistas terem manipulado e organizado determinados documentos em coleções. O produto final da produção histórica esconde muitas vezes escolhas subjetivas, que também podem passar pelos documentos que foram, ou não, arquivados (Thayer-Bacon & Moyer, 2006).

Certeau (1982) salienta que o historiador constitui os dados, não os aceita. A primeira tarefa do historiador é transformar os documentos recolhidos e dar-lhes inteligibilidade através de uma narrativa compreensível. O historiador tem ferramentas concetuais que conferem sentido ao passado. No entanto, as categorias históricas são reinventadas durante a investigação, não determinam previamente o resultado, mas também não têm que ser alteradas consoante os dados encontrados nos documentos.

Mattoso (1997) define o segundo momento do trabalho do historiador como a passagem do caos à ordem. Esse momento permite transformar o material recolhido numa representação mental, onde se tenta descobrir a natureza do objeto histórico, os seus níveis, as suas partes e estrutura e a forma como se relacionam entre si e com o todo. Certeau (1982) salienta que o passado nunca é um objeto que esteja ali disponível, o objeto histórico é uma construção do próprio historiador. Para Certeau (1982) a prática da história é uma prática científica porque inclui a construção de objetos de pesquisa, a mobilização de técnicas de análise específicas, a construção de hipóteses e procedimentos de validação dos resultados obtidos. Desta forma, o passado não é o objeto de análise por si mesmo, o objeto de análise é uma construção do historiador. Tal como noutras investigações qualitativas, a investigação histórica inclui tanto dados empíricos, como a perspetiva do investigador. Apesar da historiografia do século XIX insistir na história científica, isso só mostrou que escrever sobre o passado envolve sempre a interpretação (Thayer-Bacon & Moyer, 2006).

Para Certeau (1982) apesar do discurso histórico procurar a verdade, apresenta-a na forma de uma narrativa, o que obriga os historiadores a abandonar a certeza de que exista uma coincidência total entre o passado tal como foi e a explicação histórica que o sustenta, mas que não nega o conhecimento histórico como conhecimento verdadeiro. Mattoso (1997) defende que o texto histórico, apesar do seu rigor científico, é sempre um discurso pessoal, que resulta de uma interpretação, que não esgota outras leituras possíveis. No entanto, esta interpretação pessoal dos factos não se deve confundir com a simples opinião. Ao defender esta ligação do autor ao que este escreveu, refere que é uma forma de relativizar e de convidar à crítica e à reflexão, salientando que não há história definitiva, esta tende a reconstruir-se e a ser renovada. Mattoso (1997) salienta ainda que a história, por mais expressiva que seja, não é a realidade, mas sim um intermediário entre o sujeito e a realidade.

O campo da historiografia, o estudo dos métodos e a teoria da escrita da história são uma forma de conhecer as características que definem as diferentes abordagens à história. Uma discussão que ainda está muito presente no debate sobre historiografia é se a escrita da história pode corresponder ao passado real ou se é uma construção do historiador (Thayer-Bacon & Moyer, 2006). Para alguns historiadores a investigação histórica tem não só a responsabilidade de fornecer conhecimento sobre o passado, mas também o de revelar o processo da construção histórica. Para estes, a construção da narrativa histórica deve reconhecer o papel do poder, as ideias preconcebidas e as supressões. Outros autores consideram que a utilização de determinados quadros teóricos, como a raça, o género, a classe, característicos de determinadas investigações pós-modernas, tendem a politizar a história e a distorcer o passado com ideologias do presente (Thayer-Bacon & Moyer, 2006).

Para Mattoso (1997), a última fase será a elaboração do texto escrito, que deverá ser rigoroso, objetivo, bem fundamentado, mas também claro e comunicativo. Certeau (1982) salienta a importância de a escrita estar relacionada com um corpo social e com uma instituição do saber. A escrita é encarada como uma transformação que conduz da prática ao texto. O início da escrita é na realidade um ponto de chegada, impõe-se porque tem que ter um fim, enquanto que a pesquisa é interminável, embora a escrita seja sempre controlada pela prática de onde resulta, e preencha as lacunas que a pesquisa apresenta sempre (Certeau, 1982).

O conhecimento do passado contribui para uma grande variedade de investigações em educação. Todos os investigadores em educação deveriam refletir sobre que forma a perspetiva histórica poderá contribuir para o seu trabalho, seja na análise etnográfica de uma só instituição ou na análise de políticas educativas (Thayer-Bacon & Moyer, 2006). No entanto, poderá a história da educação guiar as ações no futuro? Os estudos sobre reformas educacionais oferecem um retrato mais complexo do que uma simples repetição das mesmas abordagens e debates (Thayer-Bacon & Moyer, 2006). O sucesso de determinadas práticas educativas é contextual e dá respostas a circunstâncias específicas. Contrariamente ao que acontece correntemente a ênfase no cientificamente testado e a generalização das chamadas boas práticas, o que a história nos diz é que não devemos tentar transcender as especificidades do tempo e do espaço em que elas se localizam. No entanto, a história da educação diz-nos muito sobre a fé duradoura no poder da educação em mudar a sociedade. A perspetiva histórica também nos diz que os movimentos de reforma podem ter aspetos muito localizados, mas também ser muito mais amplos do que simplesmente o que se passa na escola. As circunstâncias domésticas e internacionais como o desemprego ou a economia, interesses económicos e sociais, relacionam-se de uma forma complexa com as mudanças educacionais (Thayer-Bacon & Moyer, 2006).

4.4. A constituição das fontes, o conhecimento profissional do professor estudado nos livros de texto

No estudo das disciplinas escolares são utilizadas as fontes mais usuais, como os normativos legais, relatórios e inquéritos oficiais, livros de texto, programas e imprensa pedagógica, a que se juntam outras fontes consideradas mais inovadoras, como os exames e os trabalhos dos alunos, cadernos e exercícios escolares, instrumentos científicos, material didático e iconográfico (Viñao, 2006).

Os livros de texto, ou manuais escolares, têm sido uma importante ferramenta na uniformização do currículo e na modelação do trabalho dos professores (Ross, 2012). Os manuais escolares têm um lugar de destaque como recursos educativos privilegiados como um meio material para a concretização da atividade educativa. Estes são uma interpretação de um programa de uma determinada disciplina para um determinado ano de escolaridade, não só em termos concetuais e metodológicos, mas também em termos políticos, culturais e sociais (Cabrita, 1996).

Viñao (2006) distingue a história dos livros de texto da história das disciplinas escolares. Prevenindo contra a ideia de que a história de uma disciplina se reduz à análise dos manuais utilizados no seu ensino, Viñao (2006) acautela que não se deve cair na ideia contrária, de que é possível fazer a história de uma disciplina escolar sem analisar os seus livros de texto e os materiais utilizados no seu ensino, considerando que existe uma relação estreita entre ambas, mas não igualitária. Embora mantenham uma relativa autonomia como campos de investigação, Viñao (2006) considera que a análise dos livros de texto e do material de ensino como produtos pedagógicos e culturais só adquire um sentido histórico pleno quando é inserida no âmbito mais amplo da história das disciplinas escolares, propondo que a análise dos livros de texto passe a ser feita do ponto de vista da história das disciplinas escolares.

Na presente investigação o *corpus* documental inclui um tipo de manual utilizado especificamente na formação de professores, que podemos designar por manual pedagógico ou livro didático. Estes manuais distinguem-se dos manuais escolares normalmente utilizados pelos alunos porque se destinam a futuros professores e, por isso, têm que explicitar indicações metodológicas gerais, mas também especificas para a o ensino da matemática. São assim particularmente interessantes no estudo do conhecimento profissional do professor, não só do conhecimento do conteúdo, mas também do conhecimento pedagógico do conteúdo.

Valente (2007) destaca o papel dos livros didáticos e a sua ligação com o desenvolvimento da matemática escolar, salientando que a disciplina de matemática é uma das em que é mais evidente a relação entre os livros didáticos e o ensino. Esta relação tão próxima entre a disciplina e os livros didáticos dá-lhes um estatuto especial como fonte para a história dos saberes escolares. Num texto em que discute as relações entre os saberes da ação, saberes que vêm da experiência, informais, e o saber objetivado, onde se incluem os saberes a ensinar e os saberes para ensinar, Valente (2019) salienta que os manuais pedagógicos, os livros os programas de ensino são documentos de referência, de um dado tempo, para o trabalho docente, onde são fixados os saberes instituídos, os saberes objetivados.

Chervel (1990) salienta a importância dos manuais didáticos como fontes de pesquisa para a história das disciplinas escolares, destacando que existem determinadas épocas em que os saberes vinculados nestes manuais estabilizam quanto aos conceitos ensinados, a terminologia utilizada, a organização e sequência de ensino, os exemplos e o tipo de exercícios praticados, não apresentando muitas diferenças, alertando para um aspeto a que chama de *vulgata*. No entanto, noutros momentos, que são determinados por fatores diversos, são produzidos manuais didáticos que apresentam ideias novas, que tentam dar origem a um novo modo de organização do ensino e que podem revelar elementos importantes para a constituição da trajetória histórica de uma determinada disciplina escolar.

Nas pesquisas é usual haver uma definição prévia do período a estudar e só depois procurar as obras que correspondem a esse período. No entanto, também poderá ser o estudo dos livros didáticos a determinar o período a estudar (Valente, 2008). Valente (2008) refere que o mais vulgar nos trabalhos feitos a partir de pesquisas com livros didáticos de matemática é o estudo de um tema ou conteúdo matemático. A partir da escolha do tema são feitas as leituras da sua abordagem nos livros didáticos de diferentes épocas. No entanto, Valente (2008) adverte para que esse tipo de abordagem tende a isolar o conteúdo matemático de outros elementos que podem ser determinantes e explicativos da obra. As conclusões que surgem desse tipo de pesquisa também pode levar a conclusões que tendem a ver determinações do presente, no passado, em vez de procurar ver as marcas do passado, no presente.

Pintassilgo (2006) destaca a importância dos manuais pedagógicos, referindo que surgiram no final do século XIX, em paralelo com o sistema de formação de professores do ensino primário, constituindo um novo artefacto que se veicula como instrumento de divulgação de novas ideias e novas práticas de ensino. Pintassilgo (2006) sintetiza três finalidades que poderiam ser atribuídas a este tipo de manuais, iniciar os alunos-mestres nos princípios da emergente ciência da educação, consolidar o modelo escolar e a cultura escolar e controlar a prática docente, determinando prática desejáveis.

Pintassilgo (2006) salienta, tal como Chervel (1990), a relativa homogeneidade existente entre o conteúdo dos manuais de uma mesma época, sublinhando que os manuais de pedagogia e de didática publicados num determinado período são, por vezes, muito parecidos uns com os outros. Pintassilgo (2006) salienta ainda que alguns manuais também estão estreitamente ligados aos textos que lhes dão origem, normalmente manuais de língua francesa, o que pode trazer alguma ambiguidade à análise da inovação que apresentam.

4.5. Seleção das fontes documentais

A história da educação, tal como na história em geral, tem sido marcada por discussões de ordem metodológica. Uma das reflexões que tem sido efetuada é a que se relaciona com o que é aceitável como fonte ou documento histórico. Neste trabalho aceita-se como válida a definição que Berrio (1976) apresenta para documento histórico, entendendo-o como todo o material que nos dá uma representação do passado educativo. Apesar deste entendimento alargado do que poderão ser as fontes para a história da educação, privilegia-se neste trabalho o que Berrio (1976) designa por documentos escritos. Entre estes documentos escritos, destacam-se os normativos legais e os livros de texto utilizados nos cursos de formação inicial de professores do ensino primário. No que se refere à diferenciação que Berrio (1976) apresenta como uma das distinções mais correntes na historiografia atual, que classifica as fontes como primárias ou secundárias, utilizam-se exclusivamente fontes primárias, onde se incluem os documentos elaborados por observadores ou participantes diretos nos acontecimentos.

Tendo em conta o que se entende por fontes documentais, e no que diz respeito ao currículo prescrito, procede-se a uma caracterização da matemática na formação de professores do ensino primário através da análise de documentação legislativa emanada centralmente (regulamentos, programas, portarias). Nesta parte do trabalho fez-se uma recolha e seleção dos documentos legais referentes à formação inicial dos professores do ensino primário, publicados no período em análise. Numa primeira fase, as principais referências legislativas foram identificadas a partir da literatura sobre a história da formação de professores. A partir de referências presentes nos próprios documentos legais foi possível estabelecer uma cronologia das alterações legislativas relacionadas com a formação inicial de professores e recolher outros documentos.

Também são estudados o currículo apresentado e o currículo moldado através da análise de livros de texto utilizados na formação de professores deste nível de ensino. No que diz respeito a estas fontes documentais, salienta-se aqui uma distinção entre dois tipos de livros de texto, associados a disciplinas das diferentes componentes do curso. Esta distinção decorre da organização curricular e plano de estudos previsto para a formação inicial de professores do ensino primário em diferentes fases do período em estudo. Os cursos apresentam em momentos distintos, diferentes componentes, que Baptista (2004) designa por 1) componentes de ciências de especialidade e formação geral, 2) pedagógica e 3) prática.

Duas das componentes indicadas anteriormente apresentam disciplinas relacionadas com a matemática e o seu ensino. Na componente de ciências de especialidade e formação geral estão presentes disciplinas como *Aritmética* ou *Matemática*, nas quais eram utilizados livros de texto que constituem uma fonte escrita para o entendimento da matemática trabalhada na formação inicial destes professores. Na componente pedagógica existem disciplinas como *Pedagogia*, *Metodologia* ou *Didática* onde são utilizados livros de didática. De acordo com Pintassilgo (2006), estes manuais elaborados num contexto de formação, nomeadamente no início do século XX, umas vezes decorriam de a necessidade dos autores produzirem trabalho no sentido de obterem nomeação definitiva, outras vezes, no sentido de colmatar a falta de livros que servissem de auxílio à disciplina que lecionavam. Desta forma, a sua análise constitui também uma referência do que foram as práticas no ensino da matemática na formação de professores. No que diz respeito à análise dos manuais de didática identificados, é de destacar que nem sempre se pode colocar no nível de currículo apresentado, já que em certas fases do período analisado, estes manuais eram elaborados pelos próprios professores que iriam depois lecionar as disciplinas, colocando-os mais num nível de currículo moldado (Gimeno, 1988/2000) ou de currículo percebido, como o define Goodlad (1979).

4.5.1. Localização das fontes

A maioria dos documentos legais utilizados no presente trabalho está acessível *on-line* em suporte informático, em portais como o Diário da República Eletrónico (https://dre.pt/) ou Coleção de Legislação Régia (https://legislacaoregia.parlamento.pt/Pesquisa/Default.aspx?ts=1). Outros documentos legais identificados na literatura foram recolhidos em bibliotecas ou arquivos de escolas superiores de educação, Escola Superior de Educação de Lisboa e Escola Superior de Educação de Coimbra, ou na Secretaria-Geral do Ministério da Educação. Toda a legislação compilada e utilizada como fonte será listada em anexo (anexo 17) e disponibilizada em formato *Portable Document Format (PDF)*, juntamente com esta tese.

No que diz respeito à recolha do *corpus* documental constituído pelos manuais ou livros de texto, iniciou-se a pesquisa pela consulta da literatura publicada sobre o tema onde foi possível identificar livros de texto utilizados na formação inicial de professores do ensino primário, principalmente dos que se referem às disciplinas da componente pedagógica do plano de estudos do curso. A análise da legislação relacionada com as escolas de formação de professores do ensino primário também permitiu identificar alguns manuais adotados para as disciplinas do curso. No entanto, verificou-se que apenas num curto período, entre 1902 e 1911, existiu a publicação em

Diário do Governo dos livros adotados para utilização nestas escolas. Desta forma, foi necessário fazer uma pesquisa de fontes primárias em bibliotecas/arquivos de escolas superiores de educação, nomeadamente na Escola Superior de Educação de Lisboa e na Escola Superior de Educação de Coimbra, na Biblioteca Nacional de Portugal e no arquivo da Secretaria-Geral do Ministério da Educação. Foi ainda utilizado o arquivo pessoal de Mária Almeida. Nestes locais procurou-se por manuais que tivessem uma indicação explícita de serem indicados para utilização em escolas de formação de professores do ensino primário, o que resultou na lista de livros selecionados na primeira fase. No sentido de localizar as fontes, consultou-se ainda as atas do conselho escolar da antiga Escola Normal de Lisboa, mais tarde Escola do Magistério Primário de Lisboa, que foram localizadas no arquivo da atual Escola Superior de Educação de Lisboa. Neste arquivo foi possível reunir as atas do conselho escolar entre 1864 e 1979, mas não foi possível identificar nesta fonte os manuais adotados.

4.5.2. Critérios de seleção das fontes

Relativamente à seleção de fontes documentais relacionadas com os normativos legais, identificaram-se aproximadamente 150 documentos legais. Destes, foram selecionados como fontes os que definiam os programas, a organização dos cursos, o plano curricular, os exames de acesso aos cursos e os exames finais (anexo 17).

No que diz respeito à recolha e seleção do *corpus* documental constituído pelos livros de texto, consideraram-se os seguintes critérios:

- que fossem livros de texto, da área da matemática ou do seu ensino;

- que fossem explicitamente dirigidos aos cursos de formação de professores do ensino primário e que se enquadrassem nos manuais a utilizar nas disciplinas do plano de estudos desses cursos;

- que tivessem sido publicados no âmbito cronológico do período em estudo;

- que fossem livros de texto de autores portugueses e originais;

- que estivessem integralmente disponíveis.

Estes critérios levaram à constituição de uma amostra que por um lado é criterial, porque obedece a certos critérios já enunciados, mas também tem aspetos de amostra de conveniência, porque são os livros e as edições que foi possível consultar por estarem disponíveis. O levantamento efetuado tornou-se moroso porque apenas num pequeno período do âmbito cronológico do estudo, entre 1902 e 1911, houve uma adoção centralizada dos livros a utilizar nas escolas de formação inicial de professores do ensino primário, publicada no Diário do Governo.

Foram assim identificados e selecionados os seguintes livros de texto:

1. *Tratado de aritmética para uso dos candidatos à escola normal*, António Gonçalves Pereira, 1878

2. *Elementos de aritmética, teoria e prática, para uso das escolas normais,* Diogo Nunes, 1887.

3. *Pedagogia para uso do magistério português*, José Maria da Graça Afreixo e Henrique Freire, 1891, 8.ª ed.

4. *Aritmética prática e geometria elementar para o ensino das escolas normais*, Adolfo Manso Preto, 1903.

5. *Aritmética prática e geometria elementar para texto das escolas normais e de habilitação ao magistério primário,* Elias Pereira, 1904.

6. *Pedagogia elementar*, José Augusto Coelho, 1906, 2.ª ed.

7. *Aritmética prática, geometria elementar e escrituração comercial para o ensino das escolas normais,* Adolfo Manso Preto, 1903, 1.ª ed.

8. *Lições de Metodologia*, Bernardino Lage, 1920.

9. *Metodologia*, Adolfo Lima, 1927.

10. *Súmula didáctica*, Alberto Pimentel, 1934[8].

11. *Como se ensina a aritmética*, Faria de Vasconcelos, 1934.

12. *Didactica aplicada do ensino primário 4.ª classe*, Manuel Inácio Faria, A. Ribeiro, A. Joaquim Domingues, 1941.

13. *Didáctica aplicada ao ensino primário: 3a e 4a classe*, Manuel Faria, A. Ribeiro, A. Joaquim Domingues, 1941.

14. *Notas de Didáctica Especial*, José Maria Gaspar, Orbelino Geraldes Ferreira, 1944.

15. *Introdução ao estudo da didáctica especial para uso dos alunos-mestres das Escolas do Magistério Primário*, José Eduardo Moreirinhas Pinheiro, 1960.

16. *Introdução ao estudo da didáctica especial*, José Eduardo Moreirinhas Pinheiro, 1961.

17. *Didáctica da Aritmética,* Francisco Alberto Fortunato Queirós, 1962.

18. *Didáctica Especial - Apontamentos de Aritmética*, Francisco Alberto Fortunato Queirós, 1963.

19. *Da didáctica da aritmética inicial*, Gonçalo Reis Torgal, 1962.

---

[8] Silva (2005) refere que a obra não terá sido utilizada nas escolas de formação de professores do ensino primário. No entanto, no prefácio, o autor refere que a obra se destina aos professores do ensino primário e, no ano de edição da obra, o autor ainda lecionava no que era já designada por Escola do Magistério Primário de Lisboa. Por esta razão, a obra não foi retirada do *corpus* documental desta investigação.

20. *Da capacidade pedagógica para o Magistério primário*, Rafael de Barros Soeiro, 1965.

21. *Didáctica do cálculo*, Gabriel António Manuel Gonçalves, 1970.

22. *Didáctica do cálculo (apontamentos), 1.º volume*, Gabriel A. M. Gonçalves, 1972, 2.ª edição.

23. *Didáctica do cálculo (apontamentos), 2.º volume*, Gabriel A. M. Gonçalves, 1974, 2.ª edição.

Após esta primeira seleção, fez-se o cruzamento dos manuais selecionados com as principais reformas dos cursos de formação inicial de professores do ensino primário e as disciplinas previstas nos planos dos cursos, organizando-se a tabela 4.1. onde estão marcadas a verde as principais regulamentações que alteraram a formação de professores do ensino primário no âmbito cronológico em estudo. A amarelo estão marcadas as disciplinas da componente de ciências de especialidade e formação geral do plano de estudos dos cursos (Baptista, 2004), e os manuais adotados para essas disciplinas. A azul estão marcadas as disciplinas da componente pedagógica do plano de estudos (Baptista, 2004) e os respetivos manuais identificados.

Tabela 4.1. Reformas na formação inicial de professores do ensino primário, disciplinas do plano de estudos e manuais (1860-1974)

Ano	Legislação	Disciplinas do curso	Manuais
1860	Regulamento para a Escola Normal Primária do Distrito de Lisboa	Aritmética, compreendendo as proporções e a sua aplicação aos usos da vida, sistema legal de pesos e medidas	
		Desenho linear e suas aplicações mais úteis na vida comum	
		Exercícios de aplicação da geometria à agrimensura	
		Pedagogia prática, conhecimento da legislação e administração do ensino	
1870		Aritmética, compreendendo as proporções e a sua aplicação aos usos da vida, sistema legal de pesos e medidas	
		Noções de geometria e suas aplicações práticas	
		Desenho linear	
		Pedagogia, conhecimento da legislação do ensino primário	
		Continuação da pedagogia e metodologia	

1881	Regulamento para a execução das leis sobre a instrução primária, regulamenta as leis de 2 de maio de 1878 e 11 de junho de 1880 (Reforma Rodrigues Sampaio)	Aritmética, sistema legal de pesos e medidas, noções de álgebra	1. Tratado de aritmética para uso dos candidatos à escola normal, António Gonçalves Pereira, 1878 **2. Elementos de aritmética, teoria e prática, para uso das escolas normais, Diogo Nunes, 1887**
		Geometria elementar e suas aplicações mais usuais	
		Desenho	
		Pedagogia e metodologia; legislação relativa às escolas primárias	**3. Pedagogia para uso do magistério português, José Maria da Graça Afreixo e Henrique Freire, 1891, 8.ª ed.**
1901	Reforma do ensino primário e do ensino normal	Aritmética prática e geometria elementar, noções de escrituração comercial e agrícola	**4. Aritmética prática e geometria elementar para o ensino das escolas normais, Adolfo Manso Preto, 1903** 5. Aritmética prática e geometria elementar para texto das escolas normais e de habilitação ao magistério primário, Elias Pereira, 1904
		Pedagogia, em especial metodologia, legislação da escola primária portuguesa	**6. Pedagogia elementar, José Augusto Coelho, 1906**
1911	Regulamentação do ensino infantil, primário e normal	Matemática	7. Aritmética prática, geometria elementar e escrituração comercial para o ensino das escolas normais, Adolfo Manso Preto, 1914
		Trabalhos manuais e economia doméstica (curso feminino)	
		Trabalhos manuais e agrícolas (curso masculino)	
		Pedagogia geral, pedologia e metodologia do ensino primário	
1914	Regulamentação do ensino normal primário	Matemáticas elementares	
		Cosmografia	
		Desenho linear e projeções	
		Trabalhos manuais e modelação	
		Noções de economia rural, jardinagem e horticultura	
		Noções de economia doméstica, costura e lavores	

		Metodologia	
1916	Regulamento e programas do ensino normal primário	Matemáticas elementares	
		Desenho linear e projeções	
		Noções de economia doméstica, costura e lavores	
		Metodologia	
1919	Regulamento do ensino primário normal	Matemáticas elementares	
		Modelação e desenho	
		Noções de economia doméstica	
		Metodologia	8. Lições de Metodologia, Bernardino Lage, 1920 9. Metodologia, Adolfo Lima, 1927
1928	Decreto 16:037 - Remodela o ensino normal primário	Matemática Elementar	
		Metodologia	
1930	Decreto 18:646 - Institui as escolas do magistério primário	Pedagogia geral e experimental	
1932	Decreto 21:695 - Estabelece organização das escolas do magistério primário	Pedagogia; Didática	**10. Súmula didáctica, Alberto Pimentel, 1934** 11. Como se ensina a aritmética, Faria de Vasconcelos, 1934 12. Didactica aplicada do ensino primário 4.ª classe, Manuel Inácio Faria, A. Ribeiro, A. Joaquim Domingues, 1941 13. Didáctica aplicada ao ensino primário : 3a e 4a classe, Manuel Faria, A. Ribeiro, A. Joaquim Domingues, 1941
1935	Decreto 25311 - Programas das escolas do magistério primário		
1942	Decreto-Lei 32:243 - Regulamenta escolas do magistério primário	Desenho e trabalhos manuais educativos	
		Didática especial; Prática pedagógica	**14. Notas de Didáctica Especial - José Maria Gaspar, Orbelino Geraldes Ferreira, 1944**
1943	Decreto 32629 - Programas das escolas do magistério primário		
1960	Decreto-Lei n.º 43:369 - Reorganiza as escolas	Desenho e trabalhos manuais educativos	

do magistério primário (Plano de estudos das escolas do magistério primário)	Didática especial do grupo B (Aritmética e Geometria, Ciências Geográfico-Naturais e Trabalhos Manuais)	15. Introdução ao estudo da didáctica especial para uso dos alunos-mestres das Escolas do Magistério Primário, José Eduardo Moreirinhas Pinheiro, 1960 16. **Introdução ao estudo da didáctica especial , José Eduardo Moreirinhas Pinheiro, 1961** 17. Didáctica da Aritmética, Francisco Alberto Fortunato Queirós, 1962 18. Didáctica Especial - Apontamentos de Aritmética, Francisco Alberto Fortunato Queirós, 1963 19. Da didáctica da aritmética inicial, Gonçalo Reis Torgal, 1962 20. Da capacidade pedagógica para o Magistério primário, Rafael de Barros Soeiro, 1965 21. Didáctica do cálculo, Gabriel António Manuel Gonçalves , 1970 **22. Didáctica do cálculo (apontamentos), 1.º volume, 2.ª edição, Gabriel A. M. Gonçalves, 1972** **23. Didáctica do cálculo (apontamentos), 2.º volume, 2.ª edição, Gabriel A. M. Gonçalves, 1974**

Nesta fase procedeu-se a uma nova seleção dos livros de texto a partir da tabela 4.1., utilizando os seguintes critérios:

- incluir um livro de texto associado a cada uma das reformas mais significativas da formação inicial dos professores do ensino primário;

- que os livros de texto fossem representativos das diferentes disciplinas onde eram abordados conteúdos relacionados com a matemática, tanto da componente de ciências de especialidade e formação geral, como da componente pedagógica do plano de estudos do curso;

- que os livros de texto abordassem o conteúdo relacionado com a matemática ou o seu ensino, e preferencialmente o conteúdo dos números racionais não negativos;

- a influência dos autores na época, tomando em conta o número de edições e se os autores eram simultaneamente docentes nas escolas de formação;

Chegou-se assim a uma lista final dos livros que serão objeto de análise mais aprofundada, que inclui os seguintes livros de texto, por época ou reforma significativa:

2. *Elementos de aritmética, teoria e prática, para uso das escolas normais*, Diogo Nunes, 1887.

3. *Pedagogia para uso do magistério português*, José Maria da Graça Afreixo e Henrique Freire, 1891, 8.ª ed.

4. *Aritmética prática e geometria elementar para o ensino das escolas normais*, Adolfo Manso Preto, 1903.

6. *Pedagogia elementar*, José Augusto Coelho, 1906.

10. *Súmula didáctica*, Alberto Pimentel, 1934.

14. *Notas de Didáctica Especial* - José Maria Gaspar, Orbelino Geraldes Ferreira, 1944.

16. *Introdução ao estudo da didáctica especial*, José Eduardo Moreirinhas Pinheiro, 1961.

22. *Didáctica do cálculo (apontamentos), 1.º volume*, 2.ª edição, Gabriel A. M. Gonçalves, 1972

23. *Didáctica do cálculo (apontamentos), 2.º volume*, 2.ª edição, Gabriel A. M. Gonçalves, 1974

Em relação a esta lista final realça-se que, na obra de José Augusto Coelho (1906) existem poucas referências ao ensino dos números racionais, mas, o próprio manual remete para um trabalho do mesmo autor publicado alguns anos antes, para o aprofundamento deste e outros assuntos. O trabalho referido trata-se de uma obra aprofundada sobre pedagogia, publicada entre 1891 e 1893, em quatro tomos. O Tomo II aborda a metodologia e processologia da geometria e do cálculo aritmético. Tendo em conta que a obra permite aprofundar o pensamento de um dos autores relativamente ao ensino dos números racionais, esta foi acrescentada à lista obras analisadas nesta investigação.

24. *Princípios de pedagogia, Tomo II, José Augusto Coelho, 1892*

A digitalização integral dos manuais que constituem o *corpus* documental desta investigação podem ser encontrados em anexo (anexo 18).

4.6. Crítica das fontes

Como é possível observar, ficaram algumas reformas por retratar por não ter sido possível identificar manuais utilizadas nas disciplinas da época. Entre estas, destaca-se a primeira época em que o curso funcionou com o regulamento de 1860, para o qual não foi possível identificar livros de texto adotados, assim como a reforma de 1919. É de destacar que relativamente ao Regulamento do ensino primário, de 1919, foi possível identificar dois manuais de metodologia utilizados nas disciplinas da componente pedagógica, Lage (1920) e Lima (1927). No entanto, uma primeira análise destes manuais permitiu verificar que não abordavam especificamente a metodologia e processologia do ensino da matemática. No caso do manual de Lima (1927) estava prevista a edição de três volumes, onde o terceiro ocupar-se-ia da processologia do ensino da leitura e escrita, do cálculo e das ciências naturais. Aparentemente, este terceiro volume não terá sido editado.

É de salientar que os autores identificados na lista final de livros de texto são referências na formação de professores do ensino primário e na produção de manuais, identificados também nos trabalhos de Pintassilgo (2006), Borges (2011) ou Silva (2005).

Relativamente a estas obras é de destacar que nem todas são exclusivamente dedicadas à matemática, ou ao seu ensino e que, por isso, apresentam um desenvolvimento muito diferenciado quanto à abordagem dos conteúdos desta disciplina, nomeadamente no que diz respeito aos números racionais e ao seu ensino.

4.7. Critérios de análise dos documentos

A análise e interpretação de dados é uma tarefa crucial na análise qualitativa de dados, mas que pode causar algumas dificuldades. A análise qualitativa de conteúdo é uma opção importante para quem pretende um certo grau de interpretação para chegar ao significado dos dados. No entanto, os dados não falam por si próprios, não têm um significado específico, o significado é atribuído por quem lê. Este é um processo complexo em que o investigador cruza a sua perceção do material com o seu próprio conhecimento sobre o assunto. O significado não é inerente aos dados, é uma construção do investigador (Schreier, 2012). Coutinho (2015) também aponta dificuldades na análise qualitativa, como a diversidade que pode existir nos dados ou a sobreposição que por vezes pode existir entre a recolha de dados e a sua análise, fazendo com que estas duas fases se afetem mutuamente e se completem.

A análise qualitativa de conteúdo distingue-se de outros métodos de análise qualitativa, porque este método se centra em aspetos específicos, que são definidos pelo investigador, que estão relacionados com as perguntas de investigação e que podem ser ajustados durante o processo de análise (Schreier, 2012). A análise qualitativa de conteúdo é sistemática, flexível e reduz os dados. É sistemática porque todo o material é analisado, envolve sempre a mesma sequência de passos e obedece a critérios de fiabilidade, através da verificação da consistência da análise. No entanto, a análise qualitativa de conteúdo também é um método flexível no sentido de que é o investigador que ajusta as unidades de análise aos seus dados. Isto prende-se com a validade das unidades de análise que devem permitir capturar o objeto de estudo. As unidades de análise serão válidas quando as categorias estabelecidas permitam representar de forma adequada os conceitos presentes nas questões de investigação (Schreier, 2012).

Ao aplicar a codificação aos documentos, reduzem-se os dados porque se perdem algumas especificidades, sendo esse o preço a pagar para que se possam comparar partes específicas de informação com outras (Schreier, 2012). Por um lado, o investigador não leva em linha de conta todas as informações contidas nos documentos, limitando-se aos aspetos que são relevantes para a investigação. Por outro lado, as categorias da codificação normalmente são de um nível de abstração superior à informação concreta que existe nos documentos. Coutinho (2015) realça que a análise qualitativa de dados envolve sempre três dimensões: a categorização (teorização), a codificação (seleção) e a redução de dados (análise).

Desta forma foi necessário estabelecer critérios de análise dos documentos. Em relação aos documentos legais, fez-se inicialmente uma análise documental (Bardin, 2014) que permitiu passar dos documentos originais para a sua representação contendo a informação de uma forma organizada. Neste processo, fez-se uma leitura e uma descrição de todos os documentos legais, organizaram-se sínteses descritivas que permitiram classificar a informação e identificar temáticas análogas nos documentos. No final desta fase foi possível identificar temáticas relacionadas com a matemática e o seu ensino na formação inicial dos professores do ensino primário que guiaram posteriormente a análise dos documentos. Foram identificados temas como os conteúdos matemáticos nos exames de acesso à profissão, provas de acesso às escolas de formação de professores, estrutura curricular dos cursos, as disciplinas que abordam conteúdos de matemática e do seu ensino e os programas dessas disciplinas, os exames finais e a formação dos docentes das escolas de formação de professores do ensino primário. A informação foi depois representada numa narrativa qualitativa e ilustrada com tabelas síntese. Este modelo de análise foi ensaiado em textos como Candeias e Matos (2016). No final fez-se a interpretação do sentido dos dados tendo em conta o quadro teórico. Este trabalho foi essencial na posterior análise dos manuais porque permitiu enquadrar a formação inicial dos professores do ensino primário e discutir os modelos que estiveram subjacentes à organização dessa formação.

Na análise dos livros de texto, depois da localização e seleção das fontes documentais a utilizar no presente trabalho foi necessário definir critérios para realizar a análise do conteúdo. Tendo como referência o trabalho de Maz (2005), selecionaram-se três secções de interesse para caracterizar os textos:

- o autor;
- a estrutura da obra e o conteúdo matemático global;
- conteúdo relacionado com os números racionais e o seu ensino.

Para estas três secções de interesse foram adotadas formas de análise diferenciadas. Relativamente ao autor e à estrutura da obra e conteúdo matemático global procedeu-se à leitura e à descrição pormenorizada do conteúdo de cada um dos livros de texto e à análise de publicações que trabalhassem os autores identificados ou as obras. A partir desta análise descritiva adaptou-se a proposta de Maz (2005) para a caracterização do autor e caracterização da estrutura da obra. Na caracterização da estrutura da obra distinguiu-se dois aspetos. O primeiro aspeto relaciona-se com a informação geral sobre a obra e o segundo aspeto relaciona-se com o conteúdo da obra que aborda a matemática e o seu ensino. Principalmente no segundo aspeto foi necessário proceder a adaptações às categorias propostas por Maz (2005) que resultaram da primeira análise descritiva das obras.

Na secção sobre o conteúdo relacionado com os números racionais e o seu ensino adaptou-se o modelo proposto por Monteiro e Pinto (2005) e Pinto (2011) onde se identifica componentes essenciais no desenvolvimento do sentido de número racional, como a definição de número racional, diferentes significados das frações em contexto, unidade de referência, equivalência de frações, comparação e ordenação de frações e utilização de diferentes representações. Cruzando o modelo de Ball et al. (2008) com estas componentes essenciais procedeu-se à caracterização do que seria o conhecimento profissional do professor para o desenvolvimento destas componentes (anexo 9 a 13). Depois da análise descritiva dos textos fez-se uma análise de conteúdo tendo em conta as categorias que resultaram da interação destes dois modelos. As categorias de análise foram testadas e aperfeiçoadas com a publicação de estudos exploratórios (Candeias & Monteiro, 2016; Candeias, 2017a; Candeias, 2017b; Candeias, 2019)

Tendo em conta as secções de interesse referidas anteriormente, procedeu-se à organização de fichas bibliográficas para cada livro de texto, adaptando a proposta de Maz (2005) ao conteúdo das obras e particularmente ao conteúdo dos números racionais não negativos e ao seu ensino (anexo 1 a 8).

Para que fosse possível fazer uma sistematização adequada do trabalho, tornando possível estabelecer relações entre os diferentes livros de texto, definiram-se categorias para cada uma das três grandes secções enunciadas anteriormente.

No estudo do autor usaram-se as categorias definidas por Maz (2005), que se designou por Caracterização do Autor (CAn). Cada categoria desta secção centrada no autor tem a sua denominação acompanhada de um numeral, Caracterização do Autor 1, Caracterização do Autor 2, … Caracterização do Autor 7, e tem a seguinte codificação simplificada CA1, CA2., …, CA7.

No estudo da estrutura global da obra também se seguiu de perto a proposta de Maz (2005), embora com adaptação às obras aqui estudadas, dividindo-se a sistematização desta secção em dois grandes aspetos. O primeiro aspeto centra-se na estrutura global da obra, sendo designada por Caracterização Global da Obra (CGOn). Na designação das categorias utilizou-se uma codificação simplificada com as iniciais de cada palavra da categoria seguida de um numeral, que em relação a este aspeto será identificada com a codificação CGO (CGO1, CGO2, …, CGO7).

O segundo aspeto centra-se no conteúdo e conceitos básicos da matemática e foi designado como Caracterização do Conteúdo Matemático Global (CCMGn). Para se designar as categorias de cada um dos aspetos, será usada a codificação simplificada seguida de um numeral. Caracterização do Conteúdo Matemático Global será codificada como CCMG (CCMG1, CCMG2, …, CCMG7).

No conteúdo relacionado com os números racionais não negativos foram definidos três aspetos diferentes, a abordagem aos números racionais, as representações utilizadas e as situações matemáticas propostas. O primeiro aspeto foi designado por Caracterização do Conteúdo Matemático sobre os Números Racionais (CCMNRn). Esta caracterização foi identificada pelas iniciais acompanhada por um numeral como CCMNR (CCMNR1, CCMNR2, …, CCMNR8). O segundo aspeto tratado refere-se às representações dos números racionais utilizadas nas diferentes obras, que se designou Caracterização das Representações dos Números Racionais (CRNRn). Tal como se fez anteriormente para outros aspetos da obra, este foi designado pelas suas iniciais (CRNR) sendo a sua codificação efetuada com estas iniciais seguidas de um numeral (CRNR1, CRNR2, …, CRNR4). No que diz respeito ao terceiro e último aspeto foi designado por Caracterização das Situações Matemáticas e Contextos nos Números Racionais (CSMCNRn) e foi codificado de acordo com a codificação dos aspetos anteriores, iniciais da designação seguidas de um numeral (CSMCNR1, CSMCNR2, …, CSMCNR4).

4.7.1. Caracterização do autor

No que respeita a esta secção, pretende-se caracterizar o contexto histórico, educativo e de formação de professores da época em que autor do manual atuou e elaborou a sua obra, especialmente no que diz respeito à matemática. Na análise de cada uma das obras, as categorias relacionadas com o autor só são desenvolvidas quando se aplicam ou existe informação disponível.

CA1: Local e data de nascimento/Local e data de óbito

Pretende-se conhecer quando e onde nasceram e faleceram os autores estudados, permitindo assim conhecer o contexto social, cultural, político e educativo em que viveram, enquadrando-os num, ou em mais do que um, dos períodos em estudo.

CA2: Centros de formação onde frequentou estudos

Neste campo caracteriza-se a formação e os locais onde os autores as realizaram, permitindo caracterizar a sua posição no meio educativo e intelectual.

CA3: Profissões e lugares onde exerceu a profissão

Com esta categoria pretende-se completar a caracterização científica dos autores e o seu posicionamento perante a educação, destacando-se as funções relacionadas com a matemática.

CA4: Relação com pessoas significativas na área da educação e do ensino da matemática

Nesta categoria quer-se analisar as relações que os autores estabeleceram com outras pessoas na área da educação, nomeadamente na área do ensino da matemática.

CA5: Obras publicadas

As obras publicadas permitem enquadrar os autores na área da matemática e na área educativa. A revisão das obras publicadas foi feita a partir da consulta do Catálogo Coletivo das Bibliotecas Portuguesas, PORBASE, que inclui o catálogo da Biblioteca Nacional de Portugal e catálogos de mais 180 instituições.

CA6: Outra informação relevante

Neste campo apresenta-se outra informação relevante relacionada com os autores e com o seu trabalho em aspetos que não estão relacionados com a autoria de obras para a educação. Estes aspetos poderão contribuir para completar as caracterizações anteriores.

CA7: Referências bibliográficas

Neste campo estão incluídas quaisquer referências bibliográficas onde seja possível obter outra informação importante sobre os autores e sobre a sua obra.

4.7.2. Caracterização de aspetos globais da obra

Em relação a esta secção pretende-se conjugar uma análise global da obra com uma análise global do conteúdo matemático e das propostas para o seu ensino. Esta análise irá permitir identificar influências que os autores tiveram na área da educação em geral e especificamente no ensino da matemática. Permitirá também reconhecer alterações na forma como são apresentados alguns conteúdos, tanto na sua definição matemática, como na forma de ensino.

Tal como foi referido anteriormente, nesta secção destacam-se dois aspetos, com a seguinte codificação, a Caracterização Global da Obra (CGOn), que vai de CGO1 a CGO7, e a Caracterização do Conteúdo Matemático Global (CCMGn), que vai de CCMG1 a CCMG7.

CGOn – Caracterização global da obra

CGO1: Edição, ano, cidade e editora.

Nesta categoria pretende-se situar o momento e o local de publicação das obras.

CGO2: Ano da primeira edição e edições conhecidas

Com a identificação da primeira edição de cada obra pretende-se situar com maior precisão o contexto histórico da publicação e analisar possíveis alterações na apresentação dos conceitos que tenham ocorrido em edições posteriores.

CGO3: Extensão e estrutura

Pretende-se caracterizar aqui a organização global das obras, o número de páginas, a estruturação do texto (introdução, prólogo, capítulos, notas, apêndices) e a distribuição e identificação dos conteúdos. Esta análise é particularmente importante porque algumas obras não são dedicadas só à matemática e ao seu ensino.

CGO4: Objetivos gerais da obra

São aqui indicados os objetivos gerais das obras, explicitados pelos autores, ou em trabalhos de investigação que já tenham trabalhado as obras em análise.

CGO5: Autores em que se baseia e outras influências

Pretende-se identificar aqui todos os autores que são referidos nas obras. Esta categoria permite ter uma ideia de quais são os autores com maior impacto em cada época e que orientavam o ensino em geral e o ensino da matemática, em particular.

CGO6: Valorização global da obra

Nesta categoria pretende-se identificar o valor que foi dado às obras e que influência tiveram nas obras de outros autores, nomeadamente nos autores das obras que também são analisados neste trabalho.

CGO7: Questões globais sobre o ensino, pedagogia, métodos, metodologia geral

Com esta categoria pretende-se analisar que indicações sobre pedagogia ou metodologia são indicadas na obra, tentando identificar que influências existem a nível do ensino em geral.

CCMGn: Caracterização do Conteúdo Matemático Global

CCMG1: Definição de matemática/ensino de matemática

Nesta categoria são apresentadas as ideias dos autores relativamente ao que é a matemática, e o seu ensino. É de salientar que nas obras analisadas muitas vezes não é utilizado o termo matemática, pelo que se incluirão nesta categoria as definições de aritmética e do seu ensino que sejam explicitadas nas obras.

CCMG2: Noção de número e de quantidade, ou do seu ensino

Nesta categoria são exploradas as definições de número e de quantidade apresentadas nas obras, assim como as referências ao seu ensino.

CCMG3: Operações elementares

Pretende-se aqui analisar a forma como as operações elementares eram apresentadas nas obras analisadas neste trabalho.

CCMG4: Ideias sobre geometria

Nesta categoria pretende-se verificar que ideias gerais as obras analisadas apresentam sobre a geometria e o seu ensino.

CCMG5: Princípios sobre a resolução de problemas

Para além das atividades matemáticas relacionadas com os números racionais não negativos, que serão exploradas na secção dedicada a este conjunto numérico, pretende-se aqui perceber que papel era definido para a resolução de problemas no ensino da matemática.

CCMG6: Noção de cálculo mental

Nesta categoria quer-se verificar se as obras analisadas abordavam o cálculo mental e que objetivos este tinha no ensino da matemática.

CCMG7: Material didático

Esta é uma categoria onde se pretende verificar quais os materiais didáticos para o ensino da matemática eram explicitados na obra, independentemente de serem destinados ao ensino dos números racionais não negativos.

4.7.3. Caracterização da abordagem aos números racionais não negativos

Nesta caracterização pretende-se sistematizar a proposta de cada uma das obras relativamente aos números racionais não negativos. Distinguem-se três aspetos, a abordagem feita aos números racionais não negativos no que diz respeito a aspetos essenciais do ensino deste conjunto numérico (CCMNRn), as representações utilizadas (CRNRn) e as atividades matemáticas e contextos propostos (CSMCNRn). A abordagem aos números racionais é um aspeto central na análise apresentada no estudo pelo que foi definido para cada uma das componentes essenciais o conhecimento profissional do professor, numa adaptação que resulta da interação da proposta de Ball et al. (2008), com as componentes essenciais no desenvolvimento do sentido número racional identificadas por Monteiro e Pinto (2005) e Pinto (2011).

CCMNRn: Caracterização do Conteúdo Matemático sobre Números Racionais

CCMNR1: Evolução histórica dos números racionais

Nesta categoria pretende-se analisar se a evolução histórica dos números racionais não negativos é utilizada ou apresentada na abordagem que se faz nas diferentes obras a este conjunto de números e ao seu ensino.

CCMNR2: Definição de número racional

Nesta categoria quer-se conhecer como é feita a definição de número racional em cada obra analisada, como é enquadrada a dízima na definição e a densidade dos números racionais. É ainda aqui analisada a abordagem inicial dada aos números racionais nas obras analisadas.

CCMNR3: Diferentes significados das frações em contexto

No quadro teórico salientou-se a importância de os professores terem consciência dos diferentes significados das frações em contexto e que usem esse conhecimento para melhorar o ensino. Nesta categoria analisa-se os diferentes significados explorados nas diferentes obras aqui analisadas.

CCMNR4: Os diferentes tipos de unidade

Pretende-se aqui analisar se as diferentes obras analisadas exploram diferentes tipos de unidades e apresentam situações de identificação e reconstrução de unidades de referência, tal como é descrito no quadro teórico.

CCMNR5: Reconhecer frações equivalentes

Pretende-se aqui analisar que trabalho as obras analisadas propõem no sentido do reconhecimento da equivalência entre frações.

CCMNR6: Comparação e ordenação de racionais

Pretende-se aqui analisar que trabalho as obras analisadas propõem no sentido da comparação e ordenação de números racionais.

CCMNR7: Operações com números racionais (na representação fracionária e na representação decimal)

Nesta categoria pretende-se analisar de que forma eram abordadas as operações com os números racionais, tanto na sua representação fracionária, como na sua representação decimal.

CCMNR8: Decimais

Nesta categoria pretende-se analisar de que forma eram trabalhados os números racionais na sua representação decimal e de que forma eram trabalhadas algumas dificuldades que surgem muitas vezes na utilização desta representação.

CRNRn: Caracterização das Representações dos Números Racionais

CRNR1: Representações verbais

De acordo com o quadro teórico, pretende-se aqui identificar a utilização da linguagem verbal, neste caso escrita, na representação de números racionais não negativos, nas obras analisadas.

CRNR2: Representações simbólicas

A representação simbólica constitui um aspeto importante da atividade matemática. Pretende-se aqui verificar o trabalho desenvolvido nas obras analisadas na utilização de diferentes representações simbólicas dos números racionais não negativos, como as frações, os numerais mistos, numerais decimais e as percentagens, assim como a relação entre as diferentes representações.

CRNR3: Representações pictóricas (ou icónicas)

De acordo com o quadro teórico, a representação pictórica, ou icónica, pode desempenhar um papel importante no desenvolvimento de ideias matemáticas, neste caso, sobre os números racionais. Pretende-se aqui observar que representações pictóricas são valorizadas nas obras analisadas e que relações se estabelecem com outras representações, nomeadamente a utilização de modelos de quantidade contínua, como os modelos de área ou os modelos de comprimento, e os modelos de quantidade discreta.

CRNR4: Representações ativas

As representações ativas podem recorrer a objetos de uso corrente ou a materiais especialmente concebidos para esse fim. Pretende-se aqui verificar que modelos eram referidos nas obras.

CSMCNRn: Caracterização das Situações Matemáticas e Contextos nos Números Racionais

CSMCNR1: Situações matemáticas

De acordo com o quadro teórico, pretende-se aqui analisar o tipo de situações matemáticas que são propostas nas obras analisadas, no que diz respeito à complexidade e aos contextos.

CSMCNR2: Tipologia de problemas

Nesta categoria pretende-se analisar os diferentes tipos de problemas que são apresentados nas obras analisadas, tentando situar o papel educativo que teriam no ensino da matemática.

CSMCNR3: Contextos

Pretende-se analisar os contextos mais utilizados nos problemas apresentados nas obras. O termo contextos surge aqui com um significado diferente do que aparece no contexto teórico relacionado com as situações matemáticas, referindo-se aos conteúdos curriculares que eram utilizados para enquadrar os problemas propostos. Os contextos emergem de uma primeira análise descritiva das diferentes obras.

CSMCNR4: Tarefas de sala com frações

Nesta categoria pretende-se analisar um aspeto específico das tarefas propostas com frações, de acordo com o que foi definido no quadro teórico.

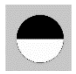
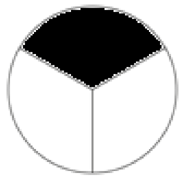
Apresenta-se de seguida as tabelas que resultaram da interação do modelo de Ball et al. (2008) e das componentes essenciais identificadas por Monteiro e Pinto (2005) e Pinto (2011) e que também podem ser consultadas em anexo (anexo 9 a anexo 13). É de destacar que Ball et al. (2008) salientam no seu trabalho que o modelo pretende realçar a complexidade do conhecimento do professor para ensinar matemática e que as categorias distinguidas não se pretendem estanques, mas em relação umas com as outras, como parte de um todo. Nesse sentido, o conhecimento aqui distinguido nas tabelas seguintes serve de referencial de análise, mas deve ser visto de uma forma integrada. Nos instrumentos aqui apresentados não se utilizam todas as categorias do modelo por se considerar que na análise efetuada o conhecimento do horizonte matemático pode ser analisado em conjunto com o conhecimento comum do conteúdo.

Tabela 4.2. Instrumento de caracterização do conhecimento profissional do professor quanto à definição de número racional

Conhecimento do conteúdo	
Conhecimento comum do conteúdo (CCK)	**Conhecimento especializado do conteúdo (SCK)**
- A definição de número racional apresentada refere-se a um conhecimento científico que é comum a obras que não são destinadas ao ensino básico como as definições de Caraça (2003) -medida; Campos Ferreira (1990) – quociente; ou Santos (2014) e Guerreiro (1989) – classes de equivalência. - A definição de número racional inclui uma definição de fração decimal e de dízima. - A definição apresentada inclui a referência à densidade do conjunto dos números racionais como em Klein (2009), (Caraça, 2003) ou Ferreira (1989).	A definição de número racional apresentada refere-se a um conhecimento do conteúdo que é apresentado em contextos de ensino destacando-se os diferentes significados das frações em contexto (quociente, parte todo, medida, operador, razão) (Monteiro & Pinto, 2005)

Conhecimento pedagógico do conteúdo		
Conhecimento do conteúdo e dos alunos (KCS)	**Conhecimento do conteúdo e do seu ensino (KCT)**	**Conhecimento do conteúdo e do currículo (KCCu)**
A parte da obra que se dedica à definição de número racional inclui indicações sobre a necessidade dos futuros professores terem conhecimento de dificuldades que usualmente os alunos têm na compreensão dos números racionais. Ex.: Os alunos considerarem frações como dois números, resultante da interferência com o conhecimento que têm dos números naturais; apresentarem dificuldades porque no conjunto dos racionais cada elemento pode ser representado de diferentes formas (Vamvakoussi & Vosniadou, 2007).	A parte da obra que se dedica à definição do número racional indica ou discute uma sequência de ensino que inclui atividades que põem em evidência aspetos discutidos no conhecimento científico comum e para ensinar, como a utilização de diferentes representações ou de determinadas sequências de ensino. Ex.: A proposta de ensino recorre a diferentes representações do número racional e estabelece relações entre as representações; a sequência de ensino propõe situações que exploram os diferentes significados das frações em contexto (Monteiro & Pinto, 2005); a proposta de ensino discute as vantagens e desvantagens da iniciação aos números racionais ser trabalhada através da forma de fração ou da representação decimal.	A parte da obra que se dedica à definição de número racional inclui indicações sobre a necessidade de se identificar o que o currículo prescrito indica como definição de número racional. São apresentadas indicações sobre tópicos do programa já lecionados, ou que irão ser lecionados, neste conteúdo. São apresentadas indicações sobre o conteúdo de outras disciplinas do mesmo nível em que se possam estabelecer relações com este conteúdo.

Tabela 4.3. Instrumento de caracterização do conhecimento profissional do professor quanto aos tipos de unidade

Conhecimento do conteúdo	
Conhecimento comum do conteúdo (CCK)	**Conhecimento especializado do conteúdo (SCK)**
A definição de unidade contínua e unidade discreta refere-se a um conhecimento que é comum a obras que não são destinadas ao ensino básico como as definições apresentadas por Caraça (2003) para conjunto contínuo, conjunto denso ou conjunto numerável.	São referidos diferentes tipos de unidades: simples ou compostas, discretas ou contínuas (Monteiro & Pinto, 2005). A apresentação das unidades é feita de forma a que na relação parte todo se tenha em conta o tamanho da unidade (ex: apresente-se sempre a unidade de referência e não se apresente para uma mesma situação unidades com tamanhos diversos de forma a que resulte numa má interpretação - metade de uma determinada unidade seja menor que um terço de uma outra unidade).  

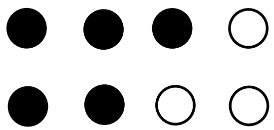
Conhecimento pedagógico do conteúdo		
Conhecimento do conteúdo e dos alunos (KCS)	**Conhecimento do conteúdo e do seu ensino (KCT)**	**Conhecimento do conteúdo e do currículo (KCCu)**
A parte da obra que se dedica à definição da unidade inclui indicações sobre as dificuldades que os alunos podem apresentar. Ex: confundir a unidade de referência levando a confusões entre a relação parte todo com a parte parte. (Lamon, 2006; Monteiro & Pinto, 2005)  A figura pode prestar-se a diferentes leituras conforme a unidade que for considerada (ex.: $1\frac{1}{4}; \frac{5}{8}; 2\frac{1}{2}$).	A parte da obra que se dedica à definição da unidade indica ou discute uma sequência de ensino que inclui atividades que põem em evidência aspetos discutidos no conhecimento científico comum e para ensinar. Ex: São propostas tarefas diversas que incluem unidades contínuas e unidades discretas; existe uma definição explícita da unidade nas tarefas apresentadas; são propostas tarefas de reconstrução da unidade que passe pela identificação de uma fração unitária, identificação da unidade para chegar à fração pretendida (Monteiro & Pinto, 2005; Lamon, 2006).	A parte da obra que se dedica tipos de unidade inclui indicações sobre a necessidade de se identificar o que o currículo prescrito indica como definição de número racional. São apresentadas indicações sobre tópicos do programa já lecionados, ou que irão ser lecionados, neste conteúdo. São apresentadas indicações sobre o conteúdo de outras disciplinas do mesmo nível em que se possam estabelecer relações com este conteúdo.

Tabela 4.4. Instrumento de caracterização do conhecimento profissional do professor quanto ao reconhecimento de frações equivalentes

Conhecimento do conteúdo	
Conhecimento comum do conteúdo (CCK)	**Conhecimento especializado do conteúdo (SCK)**
A definição de frações equivalentes refere-se a um conhecimento que é comum a obras que não são destinadas ao ensino básico como a definição de Santos (2014), para determinar quando é que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ $(com\ a, c \in \mathbb{Z}\ e\ b, d \in \mathbb{N})$ representam o mesmo número racional, basta verificar que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd} \Leftrightarrow ad = bc.$	A definição de frações equivalentes apresentada refere-se a um conhecimento científico que é apresentado em contextos de ensino que envolve o raciocínio operativo, o raciocínio multiplicativo e a conservação do todo e das partes (Kamii & Clark, 1995).

Conhecimento pedagógico do conteúdo		
Conhecimento do conteúdo e dos alunos (KCS)	**Conhecimento do conteúdo e do seu ensino (KCT)**	**Conhecimento do conteúdo e do currículo (KCCu)**
A parte da obra que se dedica à equivalência de frações inclui indicações sobre as dificuldades que os alunos podem apresentar em relação a esta noção. Ex.: relacionar "nomes" diferentes ao mesmo número, imaginar ou ignorar linhas que dividem uma unidade - quando a equivalência de frações é apresentada em representações pictóricas que mostram, por exemplo, a unidade dividida em quatro partes e depois em duas partes e indicam a equivalência entre metade e dois quartos) (Lamon, 2002; Kammi & Clark, 1995).	A parte da obra que se dedica à definição de frações equivalentes indica ou discute uma sequência de ensino que ponha em evidência a necessidade de se irem considerando várias partições de uma quantidade sem a alterar (Lamon, 2002), manipulação de materiais, utilização de representações pictóricas para mostrar a equivalência de frações, matematização de situações reais e utilização de registos informais (Kammi & Clark, 1995).	A parte da obra que se dedica à equivalência de frações inclui indicações sobre a necessidade de se identificar o que o currículo prescrito indica como trabalho a realizar com a equivalência de frações, sobre tópicos do programa já lecionados, ou que irão ser lecionados, neste conteúdo. São apresentadas indicações sobre o conteúdo de outras disciplinas do mesmo nível em que se possam estabelecer relações com este conteúdo.

Tabela 4.5. Instrumento de caracterização do conhecimento profissional do professor quanto à comparação e ordenação de frações

Conhecimento do conteúdo	
Conhecimento comum do conteúdo (CCK)	**Conhecimento especializado do conteúdo (SCK)**
O conhecimento apresentado para a comparação e ordenação de frações refere-se a um conhecimento que é comum a obras que não são destinadas ao ensino básico como a definição de Caraça (2003) um número racional $r = \frac{m}{n}$, todo o número racional $s = \frac{p}{q}$ onde p = m . k e q = n . k (k qualquer inteiro não nulo), é igual a r ou Santos (2014) no caso de $\mathbb{Q}$ esta relação de ordem pode ser definida por $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ $se\ e\ só\ se\ cb - ad \in \mathbb{Z}_+$. (pp. 132-133).	Na comparação e ordenação de números racionais são realçados aspetos como os destacadas por Post et al. (1985): 1) tamanho da fração depende da relação entre os dois números naturais operados, ou seja, da razão entre os dois números envolvidos na representação da fração, 2) existe uma relação inversa entre o número de partes e o tamanho de cada parte, 3) quando as frações têm o mesmo denominador há uma relação direta entre o número de partes tomadas e a grandeza da fração.

Conhecimento pedagógico do conteúdo		
Conhecimento do conteúdo e dos alunos (KCS)	**Conhecimento do conteúdo e do seu ensino (KCT)**	**Conhecimento do conteúdo e do currículo (KCCu)**
A parte da obra que se dedica à ordenação e comparação de frações inclui indicações sobre as dificuldades que os alunos podem apresentar em relação a esta noção como confusões de linguagem “mais” “menos”, ”maior”, “menor” (ex.: no contexto das frações maior pode significar maior número de partes em que partimos a unidade ou maior área coberta por cada uma das partes) (Post et al., 1986).	A parte da obra que se dedica à definição de frações equivalentes indica ou discute uma sequência de ensino que ponha em evidência a necessidade de se irem considerando várias partições de uma quantidade sem a alterar (Lamon, 2002), sequência de ensino que inclua ordenação de frações unitárias, ordenação de frações não unitárias, ordenação de frações com o mesmo denominador, com o mesmo numerador e com numeradores e denominadores diferentes (Behr et al., 1984). Comparar números racionais na sua representação decimal (Post et al., 1993). Utilizar frações equivalentes (Orto net al., 1995) e números de referência (Bezuk & Kramer, 1989) para estabelecer comparações entre números racionais.	A parte da obra que se dedica à comparação e ordenação de números racionais inclui indicações sobre a necessidade de se identificar o que o currículo prescrito indica em relação a este aspeto. São apresentadas indicações sobre tópicos do programa já lecionados, ou que irão ser lecionados, neste conteúdo. São apresentadas indicações sobre o conteúdo de outras disciplinas do mesmo nível em que se possam estabelecer relações com este conteúdo.

Tabela 4.6. Instrumento de caracterização do conhecimento profissional do professor quanto às operações no conjunto dos números racionais

Conhecimento do conteúdo	
Conhecimento comum do conteúdo (CCK)	**Conhecimento especializado do conteúdo (SCK)**
- As operações com os números racionais são apresentadas de uma forma idêntica a outras obras que não são dedicadas ao ensino básico, como em Caraça (2003).	- Na apresentação das operações com os números racionais são destacados aspetos como os diferentes sentidos que as operações podem ter quando são apresentadas em contexto: adição (juntar e acrescentar), subtração (retirar, completar e comparar), (Vale & Pimentel, 2004) multiplicação (adição de parcelas iguais, comparação multiplicativa, razão escalar e o operador partitivo multiplicativo) (Taber, 2002) e a divisão (medida, partilha e operação inversa da multiplicação) (Pinto & Monteiro 2008). - São realçadas as consequências das operações com números racionais não negativos, nomeadamente a multiplicação ou a divisão por números menores do que 1. - Os procedimentos das operações são justificados.

Conhecimento pedagógico do conteúdo		
Conhecimento do conteúdo e dos alunos (KCS)	**Conhecimento do conteúdo e do seu ensino (KCT)**	**Conhecimento do conteúdo e do currículo (KCCu)**
A parte da obra que se dedica às operações com números racionais inclui indicações sobre as dificuldades que os alunos usualmente têm nestas operações, tanto na representação na forma de fração como na representação decimal. Ex.: adicionar ou subtrair os numeradores e os denominadores na representação em fração, adicionar ou subtrair os numeradores mesmo quando não têm os mesmos denominadores, não colocar as ordens corretamente quando adicionam ou subtraem na representam decimal, não aplicarem corretamente as operações em situações concretas de um problema.	A parte da obra que se dedica às operações com números racionais inclui atividades ou sequências de atividades, ou discute vantagens e desvantagens da apresentação de uma determinada atividade ou representação. Ex.: A proposta de ensino apresenta contextos que explorem os diferentes sentidos das operações; a sequência de ensino explora diferentes representações das operações, como o arranjo retangular na multiplicação ou os modelos de quantidades contínuas na adição e na subtração.	A parte da obra que se dedica à definição de número racional inclui indicações sobre a necessidade de se identificar o que o currículo prescrito indica como definição de número racional. São apresentadas indicações sobre tópicos do programa já lecionados, ou que irão ser lecionados, neste conteúdo. São apresentadas indicações sobre o conteúdo de outras disciplinas do mesmo nível em que se possam estabelecer relações com este conteúdo.

5

Capítulo 5 – A matemática na formação inicial dos professores do ensino primário – Os documentos legislativos[9]

Tendo como objetivo estudar o desenvolvimento do conhecimento profissional do professor para o ensino da matemática trabalhado nos cursos de formação inicial de professores do ensino primário em Portugal, entre 1844 e 1974, neste capítulo apresenta-se e discute-se os resultados da análise dos documentos legislativos que enquadram a formação de professores deste nível de ensino no âmbito cronológico definido. O capítulo centra-se no primeiro conjunto de questões formuladas: De que forma a matemática e o seu ensino marcavam presença nos cursos de formação inicial dos professores do ensino primário? Como é que o currículo prescrito refletia a necessidade do desenvolvimento de um conhecimento específico para ensinar matemática nos primeiros anos de escolaridade, o designado conhecimento profissional do professor, nas escolas de formação de professores? Que conhecimento profissional para ensinar o conteúdo dos números racionais não negativos é possível identificar na legislação que regulamentava a formação inicial dos professores do ensino primário, no período em estudo? Que ideias pedagógicas marcaram a evolução do conhecimento profissional do professor na formação inicial dos professores do ensino primário?

Na análise apresentada neste capítulo decidiu-se dividir o âmbito cronológico em três períodos, que irão corresponder a três secções do capítulo. O primeiro inicia-se com a reforma pombalina de 1772 e termina com a implantação da República em 1910. Entre 1910 e 1926 o novo poder republicano vai alterar o quadro legal do ensino primário e a esse período dedica-se uma segunda secção. A partir de 1926, o novo poder ditatorial vai modificar consideravelmente os propósitos do ensino primário e consequentemente da formação de professores. Este terceiro período irá terminar em 1974.

Na primeira parte de cada secção é traçado um breve quadro da implementação das escolas de formação de professores do ensino primário em Portugal. As secções irão depois focar-se especificamente nos conteúdos matemáticos, sendo analisados primeiramente os conteúdos dos

[9] Este capítulo da tese foi publicado em Matos, J. (2018b). *A Matemática e o seu ensino na formação de professores: uma abordagem histórica*. Lisboa: APM.

exames de acesso à profissão e estudando-se depois sucessivamente as provas de acesso às escolas de formação de professores, a estrutura curricular desses cursos, os programas das disciplinas com conteúdos relacionados com a matemática, os exames finais e a formação dos docentes das escolas de formação de professores.

5.1. A matemática na formação inicial dos professores do ensino primário no período de 1772 a 1910

As escolas de formação de professores para o ensino primário, inicialmente designadas por escolas normais primárias, desempenharam um papel central na formação do saber pedagógico em Portugal. A investigação histórica tem-se debruçado detalhadamente sobre essas escolas e as propostas conceptuais de Chervel (1990), valorizando a autonomia das disciplinas escolares revelaram-se produtivas, em particular quanto ao estudo das representações associadas às disciplinas denominadas *Pedagogia* ou *Didática* o que permitiu mapear o desenvolvimento inicial do pensamento pedagógico em Portugal (Pintassilgo, 2012). Foi nessas escolas que os primeiros manuais destinados a professores foram escritos e estudados e foi nelas que as tendências da Educação Nova foram apropriadas e transformadas em alternativas pedagógicas centradas nos alunos.

5.1.1. O desenvolvimento das escolas de formação de professores do ensino primário

A segunda metade do século XVIII foi um momento marcante para o início da constituição da profissão docente do ensino não superior em Portugal. Ainda no quadro de um regime absolutista centrado no poder real, a reforma pombalina de 1772 regulamentou pela primeira vez a profissionalização dos mestres de *ler*, *escrever* e *contar*. Os critérios de admissão, as regras para a certificação profissional, o exercício da profissão e a sua remuneração saíram da alçada da Igreja e passaram a ser tutelados pelo Estado. Ao tornar-se um funcionário do Estado, o professor passou a estar sujeito às suas normas, nomeadamente no que diz respeito aos conteúdos a ensinar e aos métodos a utilizar para o seu ensino (Nóvoa, 2003a; Pintassilgo, 2012). No entanto, a Carta de Lei de 1772, que criou o ensino primário, não previa a criação de instituições de caráter literário, científico ou pedagógico para a habilitação dos mestres. Previa apenas que a Real Mesa Censória averiguaria as qualificações dos candidatos, através de exames a realizar em Lisboa, Coimbra, Porto, Évora e nas capitanias do Ultramar. De acordo com Gomes (1996), esta forma de procedimento manteve-se, sem alterações significativas, até à segunda metade do século XIX.

Assim, a partir do final do século XVIII deixou de ser permitido ensinar sem uma licença ou autorização estatal, a qual era concedida mediante a realização de um exame que podia ser requerido por indivíduos que reunissem certas condições, como habilitações, idade e

comportamento moral. Este exame contribuiu para delimitar o campo profissional, passando a caber aos professores o direito exclusivo de intervenção nesta área. No entanto, nessa fase ainda se estava muito longe da concretização de um sistema institucionalizado de formação de professores. A via de acesso à profissão através de exames de habilitação vigorará até 1901.
A tabela 5.1. apresenta o número de mestres régios desde a aprovação da Carta de Lei de 1772, até 1790.

Tabela 5.1. Número de mestres régios no final do século XVIII

Anos	N.º de mestres
1774	130
1776	144
1778	148
1780	543
1782	679
1784	702
1786	719
1788	726
1790	735

Fonte: Nóvoa (1987a)

No período que decorre do princípio do século XIX até 1910, podem estabelecer-se três momentos no lento desenvolvimento de escolas de formação de professores primários em Portugal. Um primeiro momento decorreu de 1816 até 1860, onde se consolidou nos poderes públicos a ideia de que para ser professor era necessária uma formação relativamente longa e realizada em instituições criadas especificamente para o efeito. São desta época as primeiras tentativas de promover a formação de mestres, como são exemplos a Escola Normal para Habilitação dos mestres das escolas regimentais (1816-1818) e a Escola Normal de Ensino Mútuo[10] ou Escola Normal de Lisboa, situada em Belém (1824-1835). São instituições criadas de forma casuística e sem um plano de âmbito nacional, mas que se vão manter até 1869. Apenas no princípio dos anos 1830, após terminada a guerra civil, apareceram os primeiros projetos de criação de escolas públicas para a formação de professores para o ensino primário, a par com a criação de um embrião de um sistema de ensino secundário. Primeiro, no Regulamento Geral da Instrução Primária, de 1835[11], foi projetada a criação de duas escolas normais, em Lisboa e no

[10] O Ensino Mútuo, método utilizado por Lancaster a partir do início do século XIX em Inglaterra e posteriormente divulgado em outros países, consiste na utilização de alunos mais avançados no ensino de colegas que sabem menos. Sobre o método e o desenvolvimento destas escolas, ver Gomes (1996) e, especialmente, Conde (2005).
[11] Regulamento Geral da Instrução Primária, *COLP 2º Semestre, 1835*, pp. 309-13.

Porto, e em 1836[12] foi planeada a construção de escolas de ensino mútuo em cada capital de região administrativa que funcionariam em simultâneo como escolas normais. Só algumas destas escolas chegaram a abrir e a sua atividade permaneceu irregular (Gomes, 1996; Pintassilgo, 2012). A Reforma de Costa Cabral, de 1844[13], propôs um sistema de formação de professores de instrução primária e legislou em 1845[14] sobre a Escola Normal Primária em Lisboa agregada à Casa Pia, mas que não entrou em funcionamento (Pintassilgo & Mogarro, 2015). A Reforma de 1844 separou pela primeira vez o ensino primário em dois graus sequenciais (o 1.º e o 2.º grau) com os seus professores específicos. Essa distinção foi mantida durante vários anos, embora a denominação fosse, por vezes, alterada, sendo o 1.º grau designado por ensino primário elementar e o 2.º grau por ensino primário complementar[15].

Um segundo momento decorreu entre 1860 e 1901, acompanhando uma fase de desenvolvimento económico. A homogeneização gradual do sistema escolar que ocorreu ao longo do século XIX, que formalizou o ensino secundário (Barroso, 2005), também levou a uma estruturação da formação de professores do ensino primário. Inicialmente com a publicação do Regulamento para a Escola Normal Primária de Lisboa, em 1860[16], seguida pela entrada em funcionamento da Escola Normal Primária de Marvila, Lisboa, em 1862. Esta escola, em regime de internato apoiado pelo Estado, destinada à formação de professores do ensino primário do sexo masculino, foi a primeira integrada num plano mais amplo de formação de professores para o primário.

Até 1869, a formação neste tipo de instituição dedicou atenção à agricultura e às atividades culturais: "a formação conferida pela escola visava um ensino verdadeiramente profissional, baseado na pedagogia e que aliava a dimensão teórica a uma aprendizagem puramente prática" (Pintassilgo, Mogarro e Henriques, 2010, p. 13).

[12] Decreto, Da Instrução Primária, *COLP*, *2º Semestre, 1836*, pp. 131-6.
[13] Reforma Geral da Instrução Pública, *COLP 1844-1845*, pp. 306-30.
[14] Regulamento para a Escola Normal Primária do Distrito de Lisboa, *COLP 1844-1845*, pp. 923-30.
[15] Esta divisão do ensino primário em dois graus, ou elementar e complementar, mantém-se ao longo da segunda metade do século XIX e até aos anos sessenta do século XX, apenas com algumas interrupções, como aconteceu com a legislação de 1956 e de 1960, voltando depois com a legislação de 1964. Esta distinção nem sempre corresponde ao mesmo número de classes. Por exemplo, na legislação de 1901, o primeiro grau da instrução primária correspondia às três primeiras classes e o segundo grau correspondia à 4.º classe. No entanto, na legislação de 1927, o ensino primário elementar já correspondia às quatro primeiras classes e o ensino primário complementar à 5.ª e 6.ª classes. Nas reformas de 1844, 1870, 1878, não são indicados o número de classes que cada grau deveria ter, essa indicação surge apenas na reforma de 1894. A designação também vai alternando entre primeiro grau do ensino primário e ensino primário elementar e segundo grau do ensino primário e ensino primário complementar.
[16] Regulamento da Escola Normal Primária do Distrito de Lisboa, *COLP 1860*, pp. 814-821.

Uma escola normal para o sexo feminino foi regulamentada em 1863[17], mas só entrou em funcionamento, também em regime de internato, em 1866, num recolhimento situado no Calvário em Lisboa (Pintassilgo, 2012).

No final da década de 1860 ocorreram tentativas para alargar o âmbito do ensino normal, que então se reduzia à de Lisboa e a poucas escolas normais de ensino mútuo. Assim, no início de 1869 procurou-se associar o ensino normal a alguns liceus, criando nestes, cadeiras de Pedagogia, propondo a consequente extinção da escola de Lisboa. No final do mesmo ano optou-se por outro caminho, criando escolas normais em Lisboa, Porto, Coimbra, Évora e Viseu e extinguindo as escolas normais de ensino mútuo ainda existentes. Em 1870 foram criadas duas escolas normais femininas em Lisboa e Porto (Gomes, 1996).

A partir de meados da década de 1890 assistiu-se a um processo de diferenciação entre as escolas normais, instituindo-se escolas de habilitação para o magistério de professores do ensino primário nas capitais de distrito do país que ofereciam uma formação simplificada e com carácter regional, relativamente às escolas normais consideradas de referência (Lisboa, Porto e Coimbra) (Pintassilgo, 2012). A partir de 1896[18], os candidatos a professores que não tivessem frequentado as escolas normais passavam a ter de fazer exames perante essas instituições. Estes exames tinham como referência os programas das escolas normais.

O terceiro momento deste primeiro período decorreu entre 1901 e 1910. O Decreto n.º 8, de 1901[19], estabeleceu que a habilitação para a prática do ensino primário passava a depender da aprovação obrigatória no curso das escolas normais ou das escolas de habilitação para o magistério primário e terminou com a possibilidade de pessoas sem um desses cursos poderem aceder à profissão. Em rigor, um importante passo intermédio no sentido da profissionalização docente tinha já sido dado com o Regulamento Geral do Ensino Primário de 1896, que definiu que os exames de habilitação para a docência passariam a ser feitos nas escolas normais. Em 1910, a implantação da República mudou o contexto escolar, marcando o final deste primeiro período de implementação das escolas de formação de professores do ensino primário.

Em 1910, no final da Monarquia existiam seis escolas normais em Lisboa, Porto e Coimbra (uma para cada sexo em cada uma destas cidades) e 17 escolas de habilitação para o magistério primário, nas capitais de distrito, exceto Santarém. Essa rede de escolas era vista como um sobredimensionamento do sistema, já que se diplomavam mais professores do que era julgado necessário, muitos ficando desempregados ou exercendo atividades não relacionadas com a

[17] Regulamento da Escola Normal Primária para o sexo feminino no Distrito de Lisboa, *COLP 1863*, pp. 532-8.
[18] Regulamento geral do ensino primário. *COLP 1896*, pp. 474-519.
[19] Reforma do ensino primário e do ensino normal. *COLP 1891*, pp. 1229-46.

docência. Essa situação prolongar-se-ia até 1921, quando as escolas enquadradas na reforma de 1901 foram encerradas e substituídas pelas novas instituições republicanas (Pintassilgo, 2012).

Apesar de se considerar que estavam a ser formados demasiados professores para o ensino primário, na realidade a percentagem de analfabetismo na população portuguesa da época era muito superior à de países europeus com um desenvolvimento económico similar. De acordo com Carvalho (1996), os números do analfabetismo constituíam uma calamidade e uma vergonha nacional, sendo analfabeta cerca de 82,4% da população portuguesa em 1878 e 75% em 1911. Referindo-se aos dados de meados da década de 1860, Candeias (2005) salienta que a percentagem de crianças inscritas no ensino primário elementar também apresentava números muito inferiores, comparativamente com outros países europeus.

5.1.2. Exames de acesso aos lugares de professor do ensino primário

O estudo das normas que regulam os exames aos candidatos a professores primários, em particular as dimensões científicas, pedagógicas ou morais valorizadas, permite conhecer as representações que os poderes públicos faziam da profissão, no sentido que lhe é atribuído por Julia (1995). Como se viu anteriormente, até 1901 os cursos das escolas normais não eram obrigatórios para alcançar um lugar de professor do ensino primário público, pois o acesso podia ocorrer mediante um exame. Estes exames de acesso à profissão foram instituídos pela primeira vez por Marquês de Pombal em 1772 (Gomes, 1996) e mantiveram-se, sem alterações significativas, até à segunda década do século XIX (Gomes, 1996). A concessão da licença de ensinar era concedida mediante a atestação de bons costumes morais, religiosos e políticos e a aprovação num exame, cujos conteúdos não iam além das matérias ensinadas nas escolas primárias[20] (Baptista, 2004).

O Regulamento Geral da Instrução Primária de 1835[21] estabeleceu as normas que deviam reger a contratação de professores primários para as escolas públicas, exigindo que para os lugares de ensino primário apenas fossem admitidas pessoas habilitadas com o curso da escola normal. No entanto, tratava-se apenas de um enunciado de intenções, pois tal só se veio a efetivar a partir de 1901. A Reforma da Instrução Pública de 1844[22], que veio a ser o normativo seguido durante muitos anos, optou antes pela possibilidade de realização de um exame. Estabelecia-se no artigo 18º que:

[20] No seu trabalho, Baptista (2004) apresenta um exemplo de um exame de candidatos ao magistério primário que incluía uma oração escrita, quase sempre o Padre-Nosso ou a Avé-Maria, os algarismos de 0, 1 até 9, incluindo o cifrão, o abecedário maiúsculo e minúsculo e dois problemas simples que envolviam as quatro operações.

[21] Regulamento Geral da Instrução Primária. *COLP, 2º Semestre, 1835*. pp. 309-13.

[22] Reforma da Instrução Pública. *COLP 1844*. pp. 306-30.

> as cadeiras de Instrução Primária, assim do primeiro, como do segundo grau, serão providas por concurso e exames públicos, orais e por escrito que terão lugar nos respetivos Liceus, sobre todos os objetos, que, nas Escolas Normais, formarem concurso de habilitações para o respetivo grau. (Reforma da Instrução Pública, 1844, p. 308).

Nessas provas de exame, um diploma da escola normal era uma condição de preferência, mas menos relevante de que um do ensino superior ou do ensino secundário (Reforma da Instrução Pública, 1844, §3, art.º 18º).

Até 1869, teriam sido estes os procedimentos seguidos. Tipicamente, o Governo publicitava os lugares a concurso e os candidatos apresentavam a documentação no liceu da zona. O regulamento para os exames em 1869[23], logo seguido da publicação, em 1870, de programas detalhados para esses exames[24] vêm alterar estes procedimentos. Um relatório publicado junto ao Regulamento de 1869 criticava os procedimentos até aí vigentes:

> o sistema há longos anos adotado para o provimento das cadeiras de ensino primário [...] de abrir concursos parciais de todas as vezes que vaga uma cadeira, e de confiar os exames a júris de três membros, compostos pela maior parte de professores de instrução primária *mais vizinhos do local desses exames*, ou, na falta deles, a professores dos liceus, tem graves inconvenientes de sobejo demonstrados pela prática. (Regulamento para os exames dos concorrentes às cadeiras de ensino primário do 1º e 2º grau, 1869, p. 512, itálico no original).

A nova legislação de 1869 contrariava, pois, a prática anterior, que deixava a escolha de grande parte do conteúdo dos exames nas mãos de júris locais. De acordo com o Regulamento de 1869, todos os anos existiriam duas épocas destinadas à admissão a exames dos candidatos, uma em março e outra em outubro. O júri dos exames seria composto por cinco elementos nomeados entre professores de instrução primária, secundária ou superior e de outros funcionários públicos, ou indivíduos que tivessem habilitações científicas, que exercessem o magistério nos estabelecimentos de ensino livre. O comissário de estudos, ou os reitores dos liceus onde funcionava o júri, seriam membros do mesmo.

Na linha dos normativos anteriores, os pretendentes às cadeiras de instrução primária do 1º e do 2º grau deveriam apresentar a documentação necessária acrescentando atestados de habilitações literárias ou científicas, que permitiriam dar preferência em casos de igualdade. Depois, os candidatos habilitados realizavam provas públicas. Os exames eram escritos e orais, por esta ordem, sendo comuns para todos os candidatos, e ocorrendo no mesmo dia e local. Os

---

23 Regulamento para os exames dos concorrentes às cadeiras de ensino primário do 1º e 2º grau. *COLP 1869*. pp. 512-515.

24 Programa para os exames dos concorrentes ao magistério primário no ano de 1870 (1870). *Diário do Governo, 64*, 409-410.

elementos do júri votavam o valor de cada uma das provas escritas, de acordo com um valor máximo designado nos programas para cada uma dessas provas. Os candidatos que não obtivessem no total das provas escritas um valor superior a um terço do valor máximo previsto para essas provas, eram excluídos das provas orais. Para os que ficassem aprovados para as provas orais, os valores obtidos nas provas escritas eram tomados em conta na graduação final[25].

Nas provas orais propostas em 1870 para os candidatos masculinos, destinados a escolas masculinas, eram avaliados um conjunto de temas designados de "disciplinas" que incluíam a leitura, gramática, história sagrada, aritmética, sistema métrico, geografia, história, pedagogia e noções elementares de agricultura. Os temas de matemática representavam cerca de 15% da pontuação das provas orais. As provas escritas envolviam alguns dos temas anteriores e, quanto à matemática, a resolução de dois problemas aritméticos e o desenho linear geométrico. No total, os conteúdos relacionados com a matemática representavam mais de 20% da cotação total dos exames[26]. Tanto nas provas orais como nas escritas, existia o exame de Pedagogia onde seriam também abordados temas relacionados com o ensino de conteúdos matemáticos, embora os documentos legais não o discriminem.

Os exames das concorrentes às escolas do sexo feminino, destinadas a lugares em escolas femininas, eram também contemplados no Programa de 1870. A tabela 5.2. mostra o número de candidatos aprovados em exame de habilitação ao magistério primário, entre 1870 e 1879.

Tabela 5.2. Número de candidatos aprovados em exame de habilitação ao magistério primário, 1870-1879

Anos	1.ª época	2.ª época	Total
1870	120	216	336
1871	240	276	516
1872	160	?	?
1873	?	219	?
1874	206	244	450
1875	163	237	400
1876	167	224	391
1877	?	258	?

[25] Os candidatos que obtivessem uma classificação inferior a um terço do total previsto para as provas eram classificados de medíocres. Os que obtivessem mais de um terço do valor total previsto para as provas escritas e orais, tinham a classificação de suficiente. Os candidatos que obtivessem mais de metade dos valores previstos para as provas, tinham a classificação de bom. A classificação de distinto era atribuída aos candidatos que obtivessem mais de dois terços dos valores previstos para as provas.

[26] Na legislação de 1870, a cada disciplina avaliada nas provas orais e nas provas escritas era atribuída uma cotação. No total, as provas orais tinham uma cotação total de 320 pontos, dos quais 25 correspondiam ao tema de Aritmética e 15 ao do Sistema Métrico Decimal. As provas escritas tinham uma cotação total de 120 pontos, dos quais, 30 correspondiam à Resolução de Dois Problemas Aritméticos. Os conteúdos de matemática eram ainda avaliados nas respostas a um quesito sobre gramática, história pátria ou pedagogia, que valia 20 pontos. Estas cotações referem-se às provas dos candidatos às escolas masculinas.

1878	264	250	516
1879	209	?	?

Fonte: Baptista (2004)

De acordo com Baptista (2004), este exame de acesso de habilitação para o exercício do magistério primário era o principal meio de acesso à profissão. No total, nesta década de 1870 o número de professores habilitados por este meio foi de 3455. Este é um número muito superior ao que Nóvoa (1987b) indica para o número de professores formados pela Escola Normal de Marvila na década que vai de 1872-1873 a 1880-1881, onde a média anual de inscritos não ultrapassava os 15. Neste período frequentaram esta escola 142 alunos, obtendo o diploma 92 destes alunos (Nóvoa, 1987b). A tabela 5.3. apresenta o número de candidatos aprovados em exame de habilitação ao magistério primário, já na década de 1880. Num período idêntico, que vai de 1881 a 1887, as escolas normais preparam apenas 238 professores (Baptista, 2004).

Tabela 5.3. Número de candidatos aprovados em exame de habilitação ao magistério primário, 1884-1888

Anos	Mestres aprovados
1884	350
1885	226
1886	203
1887	184
1888	195
Total	1158
Média anual	231

Fonte: Baptista (2004)

Embora globalmente as provas para candidatos dos dois sexos tivessem muitas semelhanças, distinguiam-se na simplificação de alguns requisitos das candidatas nas áreas de língua portuguesa, aritmética, história e geografia, agricultura e desenho linear. Essa simplificação era compensada pelas provas práticas de lavores e por uma maior valorização da pedagogia. Os temas de matemática para as candidatas eram menos avançados e tinham um peso de cerca de 20% nas provas escritas e menos de 10% nas provas orais.

A prova de *Aritmética* estava dividida em três partes. A primeira incluía essencialmente os números inteiros[27], operações com números inteiros e respetivas provas e operações com números quebrados[28] e operações com números decimais:

> I - Quantidade, unidade e número; Número abstrato e concreto, inteiro, quebrado e misto; Artifício da numeração, numeração oral, escrita e romana; Modo de usar do contador mecânico para explicar a numeração às crianças; Operações da aritmética, adição, subtração, multiplicação e divisão de números inteiros; Emprego do contador para ensinar estas operações; Tirar os nove a um número; Provas reais e dos nove aplicadas às quatro operações; Numeração decimal; Regras e prática das quatro operações sobre os números decimais; Multiplicar ou dividir um número inteiro ou decimal por 10, 100, 1000, etc., só com auxílio da vírgula. (Programas para os exames dos concorrentes ao magistério primário, 1870, p. 409)

Na segunda parte, destinada apenas aos candidatos masculinos, estavam incluídos os critérios de divisibilidade, frações, na época designadas por quebrados, e decimais e as operações com frações:

> II – Regras para conhecer quando um número é exatamente divisível por 2, 3, 4, 5, 9, 10; Quebrados, modo de os representar, modo de os simplificar, redução à dízima, aproximar um quociente em partes decimais, redução de dois ou mais quebrados ao mesmo denominador; Regras e prática das quatro operações sobre quebrados. (Programas para os exames dos concorrentes ao magistério primário, 1870, p. 409)

A terceira parte, também apenas para os candidatos masculinos, continha razões e proporções, resolução de problemas e regras de auxílio à resolução de problemas e cálculo comercial:

> III – Razões e proporções; Razão aritmética, proporção aritmética, propriedade fundamental; Razão geométrica, proporção geométrica, propriedade fundamental; Aplicação da aritmética aos usos da vida; Regra de três simples, direta e inversa; Regra de três composta; Resolução de problemas pelas proporções e pelo método de redução à unidade; Regras de juros simples e composta; Descontos; Regras de companhia simples e composta. (Programas para os exames dos concorrentes ao magistério primário, 1870, p. 409)

[27] Apesar dos programas referirem os números inteiros, o que realmente fazia parte do exame era o conjunto dos números naturais com o 0. Na época era comum nos programas do ensino primário os números naturais serem referidos como números inteiros.

[28] Os quebrados, ou frações ordinárias, representam-se por dois números, separados por um risco. O número por baixo, denominador, designa as partes em que a unidade se encontra dividida. O número de cima, numerador, de quantas dessas partes consta a quantidade representada. Têm esta designação para se diferenciarem das frações decimais. Quando o numerador é igual ao denominador, o quebrado vale uma unidade. Se vale mais do que uma unidade, tem o nome de quebrado impróprio.

Relativamente ao tema Sistema Métrico Decimal, os conteúdos examinados referiam-se às diferentes medidas do sistema métrico, às medidas agrárias, aos instrumentos de medida e seu conhecimento prático e ao sistema monetário.

> Sistema métrico; Medidas de comprimento, metro, seus múltiplos e submúltiplos; Medidas de capacidade, litro, seus múltiplos e submúltiplos; Medidas agrárias, are, seu múltiplo e submúltiplo; Estere; Balança decimal; Conhecimento prático e uso destas medidas; Sistema legal e moedas. (Programas para os exames dos concorrentes ao magistério primário, 1870, p. 409)

No tema de Pedagogia, para além de aspetos mais gerais relacionados com a disciplina, comportamento e mobília escolar, eram também avaliados conteúdos relacionados com a matemática, como o ensino do cálculo mental e da aritmética e do sistema métrico. Nesta disciplina eram ainda examinados os conhecimentos dos candidatos sobre os métodos de ensino, pedindo-se que fizessem uma exposição dos diversos métodos, designadamente o modo individual, mútuo, misto e simultâneo[29].

O *Desenho Linear* apresentava-se dividido em *Desenho Geométrico* e *Desenho à Vista*. Na primeira parte, apenas destinada aos candidatos do sexo masculino, eram incluídos conteúdos relacionados com a matemática, como traçar duas retas paralelas, traçar um ângulo reto, agudo, obtuso ou de um determinado número de graus e avaliar as áreas e os volumes de figuras.

As regras do Regulamento de 1881[30] eram muito menos detalhadas do que as de 1870 e aparentemente estiveram em vigor até 1896. A partir dessa data, os conteúdos dos exames tornaram-se semelhantes aos dos cursos das escolas normais. A tabela 5.4. sintetiza as caraterísticas que discriminámos para os exames de acesso à profissão.

Tabela 5.4. Exames de acesso à profissão de professor do ensino primário (1772-1902).

Ano	Exames	Júri	Local de realização
1772	Atestação de bons costumes morais, religiosos e políticos e a aprovação num exame, cujos conteúdos não iam além das matérias ensinadas nas escolas primárias.	Presidente mais dois examinadores nomeados pelo presidente (Lisboa). Comissário e dois examinadores, nomeados pelo presidente da mesa (Coimbra, Porto e Évora).	Lisboa, Coimbra, Porto e Évora e nas capitanias do Ultramar.
1844	Exames públicos, orais e por escrito, sobre todos os objetos que nas escolas normais sejam de		Liceus

[29] Para uma leitura mais aprofundada sobre estes diferentes métodos de ensino ver Conde (2005).
[30] Regulamento para a execução de leis sobre a instrução primária. *COLP 1881*, pp. 145-91.

	habilitação para o respetivo grau.		
1869	Duas épocas de exames. Provas públicas, escritas e orais.	Cinco elementos nomeados entre professores de instrução primária, secundária ou superior, ou outros indivíduos com habilitações. O comissário de estudos ou os reitores dos liceus também pertenciam ao júri.	Capitais dos distritos administrativos. Um júri só podia compreender mais do que um distrito administrativo.
1870	Provas escritas: resolução de dois problemas aritméticos (40 min.), resposta a quesito (30 min.) e desenho geométrico à vista (90 min./30 min no feminino).	Nos exames para candidatos do sexo feminino, o júri era constituído pelo presidente, que podia ser o comissário dos estudos, dois membros nomeados e mais duas mestras.	Salas dos liceus ou escolas públicas.
1881	Exames públicos com provas escritas, orais e práticas.	Em cada circunscrição escolar o júri era constituído por cinco vogais efetivos e dois suplentes. O presidente era o inspetor da circunscrição escolar.	Sede das circunscrições escolares, e, sempre que for possível, nas escolas normais.
1896	Provas escritas, orais, práticas, de canto, ginástica e lavores (só sexo feminino) seguindo os programas das respetivas escolas.	Diretor ou diretora da escola normal, que o presidia, e pelos professores efetivos e auxiliares das escolas normais.	Escolas normais e escolas de habilitação para o magistério.
1902[31]	Provas escritas, orais, práticas, de canto, ginástica e lavores (só sexo feminino) seguindo os programas das escolas.	Diretor ou diretora da escola normal, que o presidia, e pelos professores efetivos e auxiliares das escolas normais.	Escolas normais e escolas de habilitação para o magistério.

Fonte: Legislação (1772, 1844, 1869,1870, 1881, 1896, 1902).

5.1.3. A matemática nas provas de acesso às escolas normais

A Reforma da Instrução Pública de 1844 definiu pela primeira vez a habilitação necessária para a entrada em escolas normais, que, no entanto, nunca chegariam a funcionar:

> ter dezoito anos completos de idade; saber ler e escrever correntemente e a prática das quatro espécies de contas; possuir as primeiras noções de gramática portuguesa, e conhecimentos suficientes de religião do Estado; não padecer de moléstia contagiosa, ou outra que inabilite para o

[31] Apesar de se ter determinado, através do decreto n.º 8 de 1901, que só o curso das escolas normais, ou das escolas de habilitação para o magistério primário, constituía habilitação para o exercício do magistério primário, no *Diário do Governo* n.º 16 (21/1/1902) publicava-se que nesse ano letivo ainda fossem admitidos a exame final, candidatos estranhos às escolas de formação.

> magistério; e ser reconhecidamente bem morigerado [bem-educado]. (Reforma da Instrução Pública, 1844, p. 307).

Em termos gerais, essa matriz continuou a ser seguida nas peças legislativas seguintes. Em 1860 foi publicado o novo Regulamento para a Escola Normal Primária do Distrito de Lisboa[32], que, como vimos, foi o primeiro a ser concretizado. Os candidatos apresentar-se-iam aos exames de admissão na Escola Normal, no distrito de Lisboa, e perante os Reitores dos liceus nacionais, no caso dos outros distritos. Esse conjunto de requisitos manteve-se até 1910.

Para além de servirem para graduar os candidatos, já que estavam em jogo bolsas de estudo que apoiavam o regime de internato, esses exames de acesso tinham também como objetivo reconhecer se os candidatos sabiam ler e escrever corretamente, dominavam a prática das quatro operações fundamentais de aritmética com números inteiros decimais e quebrados, os primeiros rudimentos de gramática portuguesa e a doutrina cristã. Os candidatos podiam ainda ser examinados em disciplinas ensinadas na escola normal, caso se oferecessem. Este exame poderia constar das seguintes provas: Leitura de um clássico português, e inteligência do sentido do trecho que se escolher, manifestada pelas respostas às interrogações do júri; Escrita de um trecho de prosa ou verso, ditado por um dos examinadores; Resposta às perguntas de doutrina cristã e de moral; Resolução de problemas do uso comum que dependam apenas da combinação das operações fundamentais da aritmética. O prazo e os programas que marcavam a forma e o processo dos exames, tanto das disciplinas obrigatórias como das facultativas, eram decretados publicamente pelo governo. O júri dos exames era constituído pelo reitor do liceu e pelo conselho da Escola Normal, no distrito de Lisboa, e pelo reitor e pelo conselho do liceu, nos restantes distritos.

De acordo com este Regulamento de 1860, os conteúdos matemáticos nos exames de admissão incidiam sobre a aritmética: prática das quatro operações fundamentais de aritmética com números inteiros, decimais e quebrados; resolução de problemas de uso comum que dependam apenas da combinação das operações fundamentais da aritmética.

Em 1869 foram criadas cinco escolas normais para a formação de professores de instrução primária em Lisboa, Porto, Coimbra, Évora e Viseu[33]. O regulamento do funcionamento destas instituições, publicado em conjunto com o decreto, previa a candidatura de 20 alunos pensionistas do Estado e também a de alunos não pensionistas. As condições de admissão eram iguais nas duas situações. Os exames de admissão eram públicos e, na área da matemática, pretendia-se avaliar os candidatos quanto à prática das quatro operações fundamentais da aritmética em números

[32] Regulamento da Escola Normal Primária do Distrito de Lisboa. *COLP 1860*. pp. 814-21.

[33] Decreto publicado no Diário do Governo n.º 292, de 23 de dezembro de 1869, que cria cinco escolas normais para habilitar professores de instrução primária. *COLP 1869*. pp. 474-516.

inteiros, decimais e quebrados e aplicações destas operações e quanto ao domínio do sistema legal de pesos e medidas. A prova relacionada com estes conhecimentos era a 5.ª prova, com a resolução de problemas de uso comum, que dependessem das operações fundamentais da aritmética e da aplicação do sistema métrico decimal[34].

Em 1881 a reforma Rodrigues Sampaio de 1878[35] é regulada[36]. Agora o júri de exames de admissão seria constituído pelo inspetor primário, o diretor e os professores da escola e os exames compreendiam provas escritas e provas orais. As provas escritas eram compostas por:

> 1.° Escrita de duas linhas de bastardo, quatro de bastardinho e seis de cursivo, copiadas de livro aprovado; 2.° Escrita por ditado de dez a quinze linhas de livro aprovado; 3.° Resposta a um quesito sobre história sagrada ou pátria; 4.° Resolução de dois problemas de uso comum; um de aritmética elementar e outro de sistema legal de pesos e medidas; 5.° Desenho simples de um objeto de uso comum; 6.° Exercício de redação (art.º 168.º, p. 155).

As provas escritas eram iguais para os candidatos que fizessem os exames no mesmo dia e tinham a duração de quatro horas. As provas orais incidiam sobre as seguintes matérias:

> 1.° Leitura corrente, explicação do significado das palavras, sentido das frases, inteligência do texto; 2.° Elementos da língua portuguesa, princípios de gramática, principais regras de sintaxe e análise gramatical; 3.° Aritmética, prática das quatro operações em inteiros e decimais, calculo mental, principais questões sobre a teoria elementar das quatro regras, teoria e pratica do sistema legal de pesos e medidas; 4.° História sagrada o doutrina cristã; 5.° História de Portugal, factos mais importantes nos reinados de D. Afonso Henriques, D. Diniz, D. João I, D. João II, D. Manuel, D. João III, D. Sebastião, D. João IV, D. José I. — Estabelecimento do governo constitucional; instituições no antigo e novo regime; 6.° Corografia de Portugal, situação, superfície e limites do reino, principais vilas e cidades, portos, rios, montanhas, divisão administrativa e eclesiástica, judicial e militar do continente e ilhas adjacentes, possessões na África, Asia e Oceânia (art.º 169.º).

Cada uma destas provas orais tinha a duração de dez minutos.

[34] Em dezembro de 1852, num decreto publicado no reinado de D. Maria II, o sistema métrico decimal foi adotado em Portugal. Para a sua implantação no país foi estabelecido um período de dez anos, acrescido de um outro prazo de dez anos para a sua inserção nas escolas públicas e privadas (Zuin, 2007). Em 20 de junho de 1859 é assinado o decreto pelo qual passa a vigorar o sistema métrico linear, a partir de 1 de janeiro de 1860, sendo abolidas outras medidas usadas anteriormente. Na regulamentação de 1860, o sistema legal de pesos e medidas já fazia parte do conjunto de disciplinas do curso do primeiro grau, com a disciplina *Aritmética, compreendendo as proporções e a sua aplicação aos usos da vida, sistema legal de pesos e medidas*. No entanto, na regulamentação de 1860, os exames de admissão ainda não contemplavam este conteúdo. A inclusão deste conteúdo nas provas de acesso às escolas normais em 1869 é a consequência da generalização da utilização deste sistema de medidas. Entretanto, em 1862 o sistema de pesos e medidas também já tinha sido incluído no programa e instruções para os exames de instrução primária, sendo a prova número VI.

[35] Carta de Lei de 2 de maio de 1878, *COLP 1878*, pp. 53-62.

[36] Regulamento para execução das leis de 2 de maio de 1878 e 11 de junho de 1880, *COLP 1881*, pp. 145-91.

As provas escritas e as provas orais eram classificadas por votação de acordo com uma escala numérica que tinha correspondência com notas qualitativas.

Os candidatos que no somatório das classificações das provas escritas não obtivessem pelo menos trinta valores, ficavam excluídos das provas orais. Num total de seis provas escritas, os candidatos teriam que obter pelo menos metade da pontuação para poderem ir às provas orais. A resolução de dois problemas de uso comum; um de aritmética elementar e outro de sistema legal de pesos e medidas era uma das três provas escritas em que uma classificação de mau levava a uma imediata exclusão das provas orais. Nas provas orais os candidatos teriam que obter uma média de cinco valores em cada uma das seis provas. Sem essa média, não seriam admitidos às escolas normais. Depois das provas escritas, as concorrentes às escolas normais femininas faziam trabalhos de agulha, onde tinham de obter pelo menos uma média de cinco valores, sem a qual não seriam admitidas às provas escritas. O júri organizava posteriormente uma lista dos examinados por ordem de mérito, que estivesse de acordo com o resultado obtido pelos concorrentes. Da lista de aprovados era extraída uma lista dos mais graduados em número igual ao dos lugares de pensionistas vagos na escola normal.

Tal como no caso do Regulamento de 1860, os conteúdos matemáticos nos exames de admissão em 1881 incidiam sobre a aritmética. Nas provas escritas pedia-se a resolução de dois problemas de uso comum, um de aritmética elementar e outro sobre o sistema legal de pesos e medidas e as orais incidiam sobre aritmética, prática das quatro operações em inteiros e decimais, cálculo mental, principais questões sobre a teoria elementar das quatro regras, teoria e prática do sistema legal de pesos e medidas.

O Regulamento Geral do Ensino Primário, aprovado em 1896[37], introduziu novas escolas complementares distritais, nas quais funcionavam cursos distritais de habilitação para o magistério primário que davam acesso à profissão. Quanto às Escolas Normais usuais (em Lisboa, Porto e Coimbra), esse Regulamento apenas mencionava exames para os alunos que pretendessem seguir o regime de internato com uma pensão estatal. Esses exames compreendiam provas escritas e orais que, quanto aos temas matemáticos, incidiam sobre a resolução de problemas de uso comum, prática das quatro operações em inteiros e decimais e prática do sistema de pesos e medidas.

A Reforma do ensino primário e do ensino normal de 1901[38], fixou pela primeira vez a obrigatoriedade de um diploma das escolas normais para o acesso à profissão de professor do ensino primário. O número máximo de alunos a admitir nas escolas era fixado anualmente pelo

[37] Regulamento geral do ensino primário. *COLP* 1896. pp. 752-762.
[38] Decreto nº 8 de 1901. Reforma do ensino primário e do ensino normal. *COLP 1901*. pp. 1229-46.

governo, de acordo com as necessidades. Aos candidatos às escolas normais passava a ser exigida a aprovação no exame de instrução primária e em exame especial de admissão perante a respetiva escola. O exame de acesso seria regulamentado em 1902[39], e as provas escritas, que eram eliminatórias, envolviam a resolução de um problema de aritmética e um de geometria. As provas orais incidiam nos programas de instrução primária, o que não diferia muito da regulamentação anterior. As provas escritas envolviam a resolução de um problema de aritmética e um de geometria, que eram eliminatórias. As provas orais incidiam sobre os programas de instrução primária. Sintetizam-se na tabela 5.5. as condições de admissão (idade e qualificações mínimas), exames de acesso e seu conteúdo matemático entre 1844 e 1902 que temos vindo a discutir.

Tabela 5.5. Condições de admissão e exames de acesso às escolas normais (1844-1902).

Ano	Idade	Qualificações	Exames de acesso
1844[40]	18 anos	Não são mencionadas qualificações	- Não é definido o tipo de prova - Prática das quatro espécies de contas
1860	18 a 20 anos	Certificado de frequência de escola pública ou privada	- Provas escritas e provas orais: - Resolução de problemas do uso comum que dependam apenas da combinação das operações fundamentais da aritmética - A prática das quatro operações fundamentais de aritmética com números inteiros decimais e quebrados
1869	18 a 25 anos	Certidão de exames de instrução secundária	Exames públicos para saber se os candidatos sabem a prática das quatro operações fundamentais da aritmética em números inteiros, decimais e quebrados e aplicações destas operações. - Provas com resolução de problemas do uso comum, que dependam das combinações das operações fundamentais da aritmética e da aplicação do sistema métrico decimal.
1881	16 a 25 anos	Preferência a quem tivesse exame do curso complementar de instrução primária	- Provas escrita (4 horas): Total de 5 provas - Resolução de dois problemas de uso comum; um de aritmética elementar e outro de sistema legal de pesos e medidas (Prova eliminatória) - Provas orais (total de 5 provas com 10 min cada): Aritmética, prática das quatro operações em inteiros e decimais, cálculo mental, principais questões sobre a teoria elementar das quatro regras, teoria e prática do sistema legal de pesos e medidas
1896		Não são mencionadas	- As provas de admissão são só para concurso à pensão. - Provas escritas (4 horas) – Total de 5 provas Resolução de dois problemas de uso comum, sendo um de aritmética elementar e o outro de sistema legal de pesos e medidas - Provas orais (5 provas com 10 min cada)

[39] Decreto nº 4 de 1902. Regulamento do decreto nº 8 de 24 de dezembro de 1901. *COLP 1902*, pp. 917-45.
[40] Apenas intenções.

			Aritmética, prática das quatro operações em inteiros e decimais, aplicação destas operações à resolução dos problemas, prática do sistema legal de pesos e medidas
1901	16 a 25 anos	- Aprovação no exame da instrução primária. - Exame especial de admissão feito perante a escola.	
1902	16 a 25 anos	Aprovação em exame da instrução primária	- Provas escritas (5 provas – 4 horas). - Resolução de um problema de aritmética e de um de geometria. - Provas orais (6 provas). Exercícios práticos no quadro preto e interrogatório sobre aritmética, geometria e sistema métrico.

Fonte: Legislação (1844, 1860, 1869, 1881, 1896, 1901, 1902).

5.1.4. A matemática nas disciplinas dos cursos das escolas de formação dos professores do ensino primário

Analisa-se seguidamente a estrutura dos cursos para a formação de professores do ensino primário e as disciplinas que continham conteúdos matemáticos. Como ponto prévio importa clarificar que o conceito de disciplina não teve um significado constante ao longo do período em análise. Na legislação encontram-se por vezes denominações imprecisas sugerindo que a sua concretização ficava ao critério dos professores, por exemplo, *Aritmética com a extensão possível*, de 1845 (Regulamento para a Escola Normal Primária do Distrito de Lisboa, 1845). Encontram-se ainda casos em que nem mesmo existe uma denominação plausível. Por exemplo, a denominação *Aritmética, noções de geometria elementar e suas aplicações mais usuais, escrituração comercial e indústria*, de 1896, mais parece que se refere a um conjunto de tópicos que *per se* explicita um programa do que ao nome de uma disciplina. Exemplos idênticos podem ser encontrados noutros ramos do sistema de ensino português da época (Almeida & Matos, 2014).

A reforma de 1844[41] foi a primeira que apresentou uma estrutura curricular para o ensino normal primário, explicitando a duração e segmentando os cursos em disciplinas. De acordo com a regulamentação publicada em 1845[42], os estudos eram distribuídos por dois cursos, um de habilitação para as cadeiras do ensino primário do primeiro grau, com a duração de um ano, e o outro curso de dois anos, para as cadeiras do segundo grau. Se necessário, cada um destes cursos

[41] Reforma Geral da Instrução Pública, *COLP 1844-1845*, pp. 306-30.
[42] Regulamento para a Escola Normal Primária do Distrito de Lisboa, *COLP 1844-1845*, pp. 923-30.

poderia durar mais um ano. Para além da formação teórica, os alunos tinham também exercícios de prática de ensino numa escola primária. Os conteúdos de matemática estavam presentes em *Desenho Linear* e *Aritmética e Geometria*, que em 1845[43] se desdobrou em *Aritmética na extensão possível* e *Geometria com Aplicação à Indústria*.

O Regulamento da Escola Normal Primária do Distrito de Lisboa de 1860[44] teve uma importância acrescida, já que foi o primeiro a ser posto em prática a partir de 1862. Seguindo a tradição anterior, os estudos foram distribuídos por dois cursos que correspondiam aos dois graus em que se dividia a instrução primária. O curso do primeiro grau durava dois anos e incluía a *Aritmética, compreendendo as proporções e a sua aplicação aos usos da vida, sistema legal de pesos e medidas* e *Desenho linear e suas aplicações mais úteis na vida comum*. O curso do segundo grau incluía ainda a *Continuação do desenho linear, compreendendo as noções elementares de geometria e suas aplicações práticas* e durava três anos. Não se detetam grandes diferenças no que se refere aos conteúdos matemáticos. As novidades limitavam-se à explicitação do sistema métrico, entretanto obrigatório no país (Almeida & Candeias, 2014), e à *Pedagogia* que aparece como disciplina autónoma no curso do primeiro grau. A legislação que em 1863 criou a Escola normal primária para o sexo feminino em Lisboa[45] apresentava as disciplinas do curso. No que diz respeito à matemática, estas eram idênticas ao curso do primeiro grau para o sexo masculino, e incluíam a disciplina de *Aritmética elementar, compreendendo as proporções e a sua aplicação aos usos da vida, sistema legal de pesos e medidas* e de *Desenho linear e suas aplicações mais úteis na vida comum*.

Em 1870[46] manteve-se a designação das disciplinas no curso do primeiro grau e no do segundo grau, surgindo as *Noções de geometria e suas aplicações práticas*. A *Pedagogia* passou a incluir aspetos relacionados com a *Metodologia*, no curso do segundo grau[47].

A legislação de 1881[48] era muito mais detalhada e estabelecia a existência de escolas normais de primeira classe, Lisboa e Porto, e de segunda classe, colocadas noutros distritos do país. Nas escolas de primeira classe eram ministrados os cursos elementar e complementar e nas

---

[43] Regulamento para a Escola Normal Primária do Distrito de Lisboa, *COLP 1844-1845*, pp. 923-90.
[44] Regulamento da Escola Normal Primária do Distrito de Lisboa, *COLP 1860*, pp. 814-21.
[45] Regulamento da Escola Normal Primária para o sexo feminino no Distrito de Lisboa, *COLP 1863*, pp. 532-8.
[46] Reforma da instrução primária, *COLP 1870*, pp. 458-68.
[47] Devido a perturbações políticas, e consequente queda do governo do Duque de Saldanha, substituído por Sá da Bandeira, a reforma da instrução primária de D. António da Costa de 1870 não chegou a ser posta em prática. Com a queda desse governo, dois meses depois de ter sido empossado, também foi eliminado o então recente Ministério dos Negócios da Instrução Pública, passando a educação para a pasta do Reino, com o bispo D. António Alves Martins, que publicou uma série de decretos a abolir todas as reformas de D. António da Costa (Escolas Normais masculinas e femininas, Instituto da Educação Feminina e Reforma do Ensino Primário) (Proença, 1997).
[48] Regulamento para execução das leis de 2 de maio de 1878 e 11 de junho de 1880, *COLP 1881*, pp. 145-91.

escolas de segunda classe era ministrado apenas o curso elementar. O curso elementar, ou de primeiro grau, tinha a duração de dois anos e o curso complementar, ou de segundo grau, tinha a duração de três anos. Relativamente às disciplinas com conteúdos matemáticos destaca-se a introdução das noções de álgebra numa disciplina que passou a designar-se por *Aritmética; sistema legal de pesos e medidas; noções de álgebra* em substituição da *Aritmética, compreendendo as proporções e a sua aplicação aos usos da vida, sistema legal de pesos e medidas*, da legislação anterior. A legislação de 1881 incluía ainda disciplinas como *Geometria elementar e suas aplicações mais usuais* e *Desenho*, que incluíam conteúdos matemáticos. O curso das escolas normais passava ainda a ter uma disciplina de metodologia que incluía aspetos de metodologia, designada por *Pedagogia, metodologia, legislação relativa às escolas primárias*.

O Regulamento Geral do Ensino Primário de 1896[49] definia três formas de obtenção da habilitação para o magistério primário, o curso das escolas normais, o curso das escolas complementares a funcionar nas sedes de distrito, que habilitava apenas para o ensino primário elementar, e a realização de exame perante as escolas normais. Nas escolas normais eram ministrados dois cursos, um de habilitação para o ensino primário elementar, com a duração de dois anos, e outro de habilitação para o ensino primário complementar, com a duração de três anos. Neste regulamento de 1896, os conteúdos de matemática estavam incluídos na disciplina de *Aritmética, noções de geometria elementar e suas aplicações mais usuais, escrituração comercial e industrial*. As noções de álgebra foram substituídas pelas noções de contabilidade.

A legislação de 1901[50] incluía algumas apreciações sobre os conteúdos programáticos explicitando algumas críticas aos programas anteriores. O programa das escolas normais deve:

> ser suficientemente extenso, para que os professores, nelas habilitados, estejam à altura de bem desempenhar a profissão; mas não convém que o seja tanto que, em vez de ótimos mestres, dali saiam pedantes superficiais e pretensiosos. Melhor é dar, portanto, ao programa, em lugar de extensão exagerada, mais intensidade, organizando-o sempre de harmonia com as matérias do ensino primário. (Coleção Oficial da Legislação Portuguesa, Decreto n.º 8, 1901, p. 1232).

Assim, era acrescentado um ano ao curso e, por outro lado, eram reduzidos os programas de algumas disciplinas, nomeadamente das disciplinas associadas às ciências naturais (*Elementos de ciências naturais e suas aplicações à agricultura e à higiene; noções de agricultura prática*), que se considerava ter um desenvolvimento desequilibrado relativamente às restantes disciplinas. Era também justificado o número de anos para a preparação do magistério, três anos, com o facto de não serem exigidas muitas habilitações aos candidatos. Dizia-se no texto legislativo que, se

[49] Regulamento geral do ensino primário, *COLP 1896*, pp. 474-519.
[50] Decreto nº 8 de 1901. Reforma do ensino primário e do ensino normal. *COLP 1901*. pp. 1229-46.

fossem exigidas maiores habilitações, provavelmente os dois anos de curso bastariam, mas assim, os três anos não seriam excessivos. Neste preâmbulo, apresentava-se o exemplo de alguns países que tinham cursos normalistas mais curtos, mas que exigiam à entrada a frequência e aproveitamento em cursos preparatórios, como na Prússia ou na Baviera. No caso de países em que não existiam esses cursos preparatórios, os cursos normalistas eram mais longos, como na Suécia ou no Japão, onde duravam quatro anos. O curso de três anos era desta forma considerado suficiente para uma preparação adequada dos alunos para o exercício do magistério. Para essa preparação era também considerada indispensável a prática nas escolas anexas às escolas normais.

Apesar do ensino primário continuar dividido em dois graus, primeiro e segundo grau, na Reforma de 1901 desapareceu a distinção entre curso para os professores do primeiro e do segundo graus do ensino primário. Com esta reforma, a habilitação para o magistério primário passava a ser feita apenas através de aprovação no curso das escolas normais ou das escolas de habilitação para o magistério primário. Qualquer um destes cursos passava a ter a duração de três anos. Logo em setembro do ano seguinte foi regulamentada a reforma da instrução primária de 1901[51]. Os temas matemáticos eram abordados em *Aritmética prática e geometria elementar e Desenho linear e de ornato*. As disciplinas com conteúdos matemáticos estavam presentes nos três anos do curso, sendo aquelas que apresentavam uma maior carga horária. Na disciplina de *Pedagogia* explicitava-se que incluía a *Metodologia de ensino*. A tabela 5.6. apresenta uma síntese das alterações da duração que o curso de formação de professores do ensino primário teve ao longo deste período entre 1844 e 1901.

Tabela 5.6. Duração do curso de formação professores do ensino primário, 1844-1901.

Ano	**Duração do curso**	
	Primeiro grau	**Segundo grau**
1844	Um ano (podendo durar mais um ano)	Dois anos (podendo durar mais um ano)
1860	Dois anos	Três anos
1869[52]	Um ano	Dois anos
	Elementar (primeiro grau)	Complementar (segundo grau)
1881	Dois anos	Três anos
1896	Dois anos	Três anos
1901	Três anos	

Fonte: Legislação (1844, 1860, 1869, 1881, 1896, 1901).

[51] Decreto nº 4 de 1902. Regulamento do decreto nº 8 de 24 de dezembro de 1901. *COLP 1902*, pp. 917-45

[52] De acordo com o Decreto publicado no Diário do Governo n.º 294, de 22/12/1869, existiria um curso para o magistério nas escolas normais, com a duração de três anos, que só seria professado nas escolas de Lisboa, Coimbra e Porto.

Na tabela 5.7. resume-se a denominação das disciplinas que compreendiam conteúdos relacionados com a matemática ou o seu ensino, o que permite ter uma visão da matemática escolar das escolas normais, no período entre 1844 e 1901.

Tabela 5.7. Denominação das disciplinas relacionadas com a matemática e o seu ensino nas escolas normais, 1844-1901.

Ano	Aritmética	Geometria	Pedagogia
1844	Aritmética e geometria com aplicação à indústria		-
		Desenho linear	-
1845	Aritmética com a extensão possível	Desenho linear Geometria com aplicação à indústria	-
1860	Aritmética, compreendendo as proporções e a sua aplicação aos usos da vida, sistema legal de pesos e medidas	Desenho linear e suas aplicações mais úteis na vida comum Exercícios de aplicação da geometria à agrimensura	Pedagogia prática, conhecimento da legislação e administração do ensino
1869	Aritmética, compreendendo as proporções e a sua aplicação aos usos da vida. Sistema legal de pesos e medidas (1.º ano)	Desenho linear, e suas aplicações mais úteis na vida comum (1.º ano)	
1870	Aritmética, compreendendo as proporções e a sua aplicação aos usos da vida, sistema legal de pesos e medidas	Noções de geometria e suas aplicações práticas Desenho linear	Pedagogia, conhecimento da legislação do ensino primário Continuação da pedagogia e metodologia
1881	Aritmética, sistema legal de pesos e medidas, noções de álgebra	Geometria elementar e suas aplicações mais usuais Desenho	Pedagogia e metodologia; legislação relativa às escolas primárias
1896	Aritmética, noções de geometria elementar e suas aplicações mais usuais, escrituração comercial e industrial		Pedagogia; legislação relativa às escolas primárias
1901	Aritmética prática e geometria elementar, noções de escrituração comercial e agrícola		Pedagogia, em especial metodologia, legislação da escola primária portuguesa

Fonte: Legislação (1844, 1845, 1860, 1870, 1881, 1896, 1901).

Em conclusão, a matemática escolar das escolas normais compunha-se de tópicos – a aritmética, a geometria e o desenho têm presença constante – e estava quase sempre associada a uma dimensão prática ("aplicações práticas") ou profissionalizante (agrimensura e escrituração). Também é de salientar que a partir de 1860 surgiu nos cursos das escolas normais a disciplina de *Pedagogia*, que em 1870 passa a ter na sua designação a referência à metodologia, onde eram abordados conteúdos relacionados com o ensino das diferentes disciplinas que constituíam o ensino primário, onde se incluía a *Aritmética*.

5.1.5. Programas das disciplinas dos cursos das escolas normais ou de habilitação para o magistério primário

O estudo dos programas permite aprofundar as normas (Julia, 1995) associadas à matemática nas escolas normais. Do que foi possível apurar, até 1881 a legislação não incluiu descrições pormenorizadas dos conteúdos a lecionar. Em contraste, os programas publicados em 1881, 1896, e 1902 já continham uma enumeração dos temas e conteúdos para cada disciplina, o que permite analisar nesta a evolução programática de diversos tópicos matemáticos.

Números inteiros e respetivas operações

O estudo do sistema de numeração decimal e das quatro operações aritméticas estava naturalmente presente nas escolas normais. Em relação a esse tema, o programa do 1º ano da disciplina de *Aritmética, sistema legal de pesos e medidas, noções de álgebra* de 1881[53] iniciava-se com noções preliminares de aritmética, na qual eram trabalhadas a numeração falada e escrita de números inteiros, as operações fundamentais sobre números inteiros e as provas dos nove para as quatro operações sobre inteiros, com a demonstração da sua ineficácia, com exemplos e exercícios práticos que deveriam ser feitos no quadro preto. No final de cada um desses tópicos eram recomendados exercícios. Os teoremas relativos às operações sobre números inteiros eram incluídos no 2º ano do curso, sendo as regras de divisibilidade privilegiadas no 1º ano. Abordava-se a regra prática para encontrar o resto da divisão de qualquer número inteiro por 10, 100, 1000, assim como regras para encontrar o resto da divisão de qualquer número inteiro por 2, 3, 5, 9 e 11 e a prova dos onze sobre as quatro operações fundamentais. Para todos esses tópicos eram recomendados exercícios. No 2º ano do curso, nas condições de divisibilidade dos números inteiros, era pedida a demonstração das condições de divisibilidade por 10, 2 ou 5, e por potências desses números, e ainda por 3, 9 ou 11. Trabalhava-se a teoria e a prática das provas. Também era proposta a resolução de exercícios.

Relativamente aos números primos, começava-se por estudar a regra prática para identificar se um determinado número é primo, não sendo, no entanto, identificada de que regra se tratava. Passava-se depois à prática de decomposição de qualquer número inteiro positivo num produto de fatores primos.

---

[53] Regulamento para execução das leis de 2 de maio de 1878 e 11 de junho de 1880, *COLP 1881*, p. 145-91.

Também era estudada a definição de máximo divisor comum e de números primos entre si, assim como um processo prático, que nos programas não era identificado, para encontrar o máximo divisor comum entre dois ou mais números inteiros. Seguia-se a definição de menor múltiplo comum de dois ou mais números inteiros e o processo de encontrar o menor múltiplo comum de dois ou mais números inteiros, mas a legislação não especificava qual o processo a que se estava a referir. Nesse tópico era ainda trabalhada a determinação do menor múltiplo comum e máximo divisor comum de dois ou mais números pela decomposição em fatores primos. No final de cada tópico havia sempre a recomendação para a realização de exercícios. No 2º ano do curso recordavam-se os princípios fundamentais relacionados aos números primos, não sendo discriminados de que princípios se tratavam. Voltava-se a trabalhar a decomposição de um número em fatores primos e a formação dos divisores de um número inteiro. Era também recordada a teoria do máximo divisor comum e do menor múltiplo de dois ou mais números inteiros.

No Regulamento geral do ensino primário de 1896[54], o programa dos dois primeiros anos das Escolas Normais coincidia com o do ensino primário complementar. Neste tema, o programa não exibia diferenças significativas em relação ao programa anterior. No entanto, os tópicos que em 1881 estavam distribuídos pelos três anos do curso, estavam agora concentrados no 1º ano.

Em 1902[55] foram aprovados novos Programas para o Ensino Normal. Em geral, os programas eram semelhantes aos de 1896, embora fazendo uso de uma terminologia matemática mais elaborada. Era incluído o estudo da numeração romana e no 3º ano o único tópico referente ao tema dos números inteiros era o cálculo de expressões aritméticas, que não existia anteriormente. O programa apresenta ainda sugestões de procedimentos didáticos. Por exemplo, no tópico dos números primos, os futuros professores deveriam reconhecer que a série dos números primos é ilimitada e o Crivo de Eratóstenes era referido explicitamente como método para encontrar números primos. Referia-se ainda a utilização de outras regras para saber se um número é primo, não sendo explicitadas quais seriam essas regras. Fazia-se a decomposição de um número em fatores primos e trabalhavam-se os números primos entre si, os divisores comuns de dois ou mais números e o maior divisor comum, sendo sugerido o processo das divisões sucessivas ou o processo da decomposição fatorial.

Estes programas possuíam uma terminologia que remete para processos matemáticos mais complexos do que os que o professor usaria nas suas aulas, referindo regras aritméticas gerais e solicitando a justificação de procedimentos. Nas operações com números inteiros, para

[54] Regulamento geral do ensino primário, *COLP 1896*, pp. 474-519.
[55] Decreto nº 4 de 1902. Regulamento do decreto nº 8 de 24 de dezembro de 1901. *COLP 1902*, pp. 917-45.

além do seu conhecimento, era também pedido aos futuros professores que soubessem a sua definição, regras e teoria, estando implícito o conhecimento das propriedades fundamentais dessas operações.

Números fracionários e números decimais

Na disciplina de *Aritmética, sistema legal de pesos e medidas, noções de álgebra* de 1881, o programa do 1º ano iniciava-se com noções preliminares de aritmética onde eram também trabalhados os números fracionários e decimais e as operações fundamentais sobre números decimais. Nesse 1º ano era tratada a simplificação de quebrados, a redução ao mesmo denominador e a redução ao menor denominador comum. Nesse tema eram praticadas as quatro operações aritméticas sobre quebrados. A redução de quebrados a dízima e a redução de números decimais a quebrados era o último tópico do tema. Em relação a estes tópicos, eram recomendados exercícios.

O 2º ano dessa disciplina iniciava-se com teoremas relativos às operações sobre decimais e quebrados, para além dos inteiros, já tratados anteriormente. Em relação aos quebrados, era trabalhada a redução dos quebrados a dízima e o contrário, fazendo-se, também, a determinação do limite de qualquer dízima periódica, simples ou mista. Recomendava-se a resolução de exercícios.

Nesse tema, os programas de 1896 e de 1902, e tal como aconteceu com o tema dos números inteiros, são idênticos ao anterior, mas condensam os conteúdos apenas no 1º ano do curso normal.

Potenciação

No Regulamento de 1881, o estudo da potenciação começava no 1º ano do curso, com a sua definição e o ensino da regra para a formação de qualquer potência de 10, 100, 1.000. Em seguida, eram apresentados diversos tópicos com regras de operações com potências, como a multiplicação de diversas potências da mesma raiz, multiplicação de potências do mesmo grau, regra para achar qualquer potência de uma potência indicada, quociente de duas potências da mesma raiz ou do mesmo grau. No final de cada um desses tópicos eram recomendados exercícios.

Os dois últimos temas do 1º ano dessa disciplina eram a raiz quadrada e a raiz cúbica. Relativamente à raiz quadrada, começava-se por fazer a sua definição, seguia-se o quadrado de números dígitos, a regra prática para encontrar a raiz quadrada de um número inteiro ou decimal e a regra prática para encontrar a raiz quadrada de um quebrado. No que diz respeito à raiz cúbica, também se iniciava com a sua definição, trabalhando-se depois o cubo dos números dígitos e a regra prática para achar a raiz cúbica de um número inteiro ou decimal. Relativamente a esses temas, também eram recomendados exercícios.

No 2º ano era trabalhada a multiplicação e a divisão de potências de inteiros e o 3º ano começava com os logaritmos, tendo os alunos que aprender a teoria geral dos logaritmos deduzida a partir da comparação de duas progressões. Teriam ainda de conhecer as propriedades gerais e particulares dos logaritmos vulgares, a disposição e o uso das tábuas e, ainda, o complemento aritmético de um logaritmo. Tal como acontecia nos dois temas anteriores, em 1896 o tema da potenciação era abordado de forma semelhante ao de 1881. Nota-se, no entanto, alguma preocupação em recomendar abordagens didáticas a temas mais complexos. Por exemplo, é sugerido que o uso de logaritmos fosse aplicado à resolução de expressões fracionárias. O programa de 1902 é semelhante, embora o estudo das raízes quadradas fosse limitado apenas a números inteiros e o das raízes cúbicas tivesse sido retirado.

Progressões e álgebra

Os programas de 1881 apresentavam para o 2º ano tópicos relacionados com as proporções e progressões, onde se trabalhava inicialmente as proporções e progressões por diferença, teoremas sobre a inserção de meios aritméticos e soma de números em progressão aritmética. As proporções por quociente, com as divisões proporcionais, as progressões por quociente, os teoremas sobre a inserção de meios geométricos e a soma de números em progressão geométrica, eram outros dos tópicos. Por último, era discutida a noção de limite e limite da soma dos termos de uma progressão geométrica decrescente. Para todos esses tópicos recomendava-se a realização de exercícios.

O último tema do 2º ano do curso normal designava-se, explicitamente, por noções de álgebra. Era inicialmente abordado o uso das letras para a representação dos resultados, aplicando-se a problemas de juros, de desconto ou de divisão proporcional. Os futuros professores teriam de refletir sobre as vantagens das representações algébricas.

Ainda em relação a esse tema, no 3º ano constavam as operações algébricas fundamentais, frações algébricas e ainda se fazia o estudo das quantidades negativas. No tema de álgebra eram ainda trabalhadas as diferentes espécies de igualdade, a avaliação do grau de uma equação, resolução de equações do 1º grau a uma incógnita e equações simultâneas do 1º grau. Trabalhava-se, ainda, os casos de indeterminação e impossibilidade e a teoria das desigualdades. Recomendava-se a resolução de exercícios e a resolução de problemas de uma equação do 1º grau a uma incógnita.

Nos programas de 1896 e de 1902, verifica-se uma opção por eliminar a designação de noções de álgebra no nome da disciplina. Eliminaram-se também muitos dos conteúdos relacionados à álgebra, mantendo-se apenas o tema das progressões, não incluindo o estudo dos limites. Salienta-se que nesse último programa se optou por incluir o desenvolvimento do quadrado da soma e diferença de dois termos e o desenvolvimento da diferença dos quadrados de dois termos, sendo esses conteúdos apresentados no contexto da disciplina de aritmética, embora se trate de conteúdos de álgebra.

Cálculo comercial

Conforme se referiu anteriormente, esses programas incluíam tópicos relacionados com a matemática, mas que têm claramente uma ligação a aplicações profissionais. Tal é o caso das noções de escrituração comercial que se designa aqui de cálculo comercial. No 1º ano de 1881, o cálculo comercial surgia como um dos temas onde era trabalhada a regra de três simples e regra composta. No final desse tema, recomendava-se a resolução de problemas variados e frequentes sobre essas regras.

No 2º ano era abordada a regra conjunta, a regra de juros e suas espécies, a regra de compra e venda de fundos públicos, ações e obrigações de bancos e companhias, a regra de câmbio e a regra de companhia, de liga, de mistura ou de preço médio. Para além dos exercícios recomendados em todos os tópicos, sugeria-se também a resolução de problemas sobre as regras indicadas, utilizando o sistema de redução à unidade e as proporções. No 3º ano da disciplina não existiam referências ao cálculo comercial.

Em geral, os programas de 1896 e 1902 eram semelhantes ao de 1881. O de 1902 aprofundava temas contabilísticos específicos, como, por exemplo, diário, razão, caixa, inventários e balanço, ativo e passivo, e diversos sistemas de escrituração.

Geometria e medida

Nos programas analisados é difícil separar a geometria da medida. Opta-se aqui por uma abordagem que se inicia com a medida, que nos programas analisados está, muitas vezes, integrada na aritmética, a que se segue a geometria, embora existam muitos pontos em comum. Nos conteúdos de geometria é ainda de salientar que junto dos conteúdos a lecionar faziam-se algumas recomendações no sentido de os conteúdos serem utilizados na resolução de problemas, que se poderiam considerar como indicações de caráter metodológico.

Quanto à medida, em 1881, esse tópico estava distribuído entre as disciplinas de *Aritmética, sistema legal de pesos e medidas, noções de álgebra*, *Geometria elementar e suas aplicações mais usuais* e *Desenho*. Na disciplina de *Aritmética*, o segundo tema do 1º ano era o sistema métrico decimal. Os alunos trabalhariam a noção do que é medir uma grandeza e a utilização de diferentes espécies de medida. Eram recomendados exercícios práticos. Logo a seguir era trabalhado o tema das medidas de comprimento, no qual os alunos deveriam estudar tópicos como os instrumentos e os diversos modos de medir, diferentes unidades adotadas para as distâncias itinerárias, a légua geográfica e a marítima e os seus valores em metros.

Os temas que se seguiam abordavam as medidas de superfície, de volume, de capacidade e de peso. Nas medidas de superfície estudavam-se as unidades, os múltiplos e submúltiplos e as medidas agrárias. Nas medidas de volume trabalhavam-se as unidades fundamentais, unidades derivadas, medidas para lenha e para madeira e formas práticas de as usar. Nas medidas de capacidade, os alunos aprendiam as formas, a sua construção a as utilizações mais frequentes. Nas medidas de peso trabalhavam a unidade principal e mais usual, a sua derivação e formas diferentes de medidas de peso. Era ainda trabalhado um tópico onde se estabelecia a relação entre as medidas de peso e as unidades de volume. No final de cada um desses temas recomendava-se a realização de exercícios.

Ainda no 1º ano da disciplina de *Aritmética* era feita, inicialmente, a definição de número complexo e incomplexo. A redução de número incomplexo a outro e a redução de um número complexo à sua unidade da ínfima espécie, ou a qualquer outra, eram conteúdos ainda trabalhados nesse tópico. A redução de um número incomplexo a um número complexo e as quatro operações sobre números complexos eram os dois últimos tópicos desse tema. No segundo ano do curso normal abordava-se o tema dos números complexos, onde era feita a redução de números incomplexos a outros incomplexos ou a números complexos e o contrário. Trabalhavam-se ainda as operações com números concretos, complexos ou incomplexos. Todos os tópicos tinham a recomendação da execução de exercícios.

Os programas de 1896 e de 1902 abordavam de forma semelhante o tema da medida, embora alguns temas (unidade de área, volume, capacidade e peso) tivessem passado para o âmbito da geometria. Nos diferentes programas analisados era sempre estudado o sistema monetário. Nesse tema abordava-se os metais usados nas moedas, o peso e as dimensões das moedas portuguesas, o título e a tolerância concedidos a estas medidas.

O tema da geometria surgia em 1881 no programa de *Geometria elementar e suas aplicações mais usuais*. O primeiro tópico desse programa, designado de noções preliminares, referia-se à definição dos principais termos na geometria: linha reta, circunferência e círculo, arcos, ângulos, perpendiculares, oblíquas e paralelas e proporcionalidade das retas. No 2º ano eram trabalhados mais temas geométricos: círculos que cortam retas, triângulos, quadriláteros, polígonos, perímetros e áreas das figuras planas, noções de agrimensura e prática com instrumentos.

No início do 3º ano era dada a indicação de que deveriam ser apresentados problemas práticos sobre a avaliação de áreas, aos alunos da escola anexa à escola normal, tendo como referência o que tinham aprendido no sistema métrico decimal. No 3º ano trabalhavam-se ainda os seguintes tópicos: noções gerais de geometria no espaço; ângulos poliedros e triedros; definição das principais figuras no espaço; teoremas fundamentais sobre os poliedros; descrição e propriedades de superfícies cónicas, cilíndricas e esféricas; áreas de poliedros e de corpos limitados por superfícies curvas; volume de poliedros e de corpos terminados em superfícies curvas; comparação de volumes; cartonagem.

A geometria estava ainda presente na disciplina de Desenho do regulamento de 1881. Nesse tema era trabalhada a representação das figuras geométricas. No 2º ano do curso voltava-se a trabalhar o desenho geométrico, onde se recapitulavam as figuras estudadas no 1º ano e se fazia a representação gráfica de todas as figuras abrangidas pelo programa de geometria plana. No 3º ano do curso, o desenho geométrico abordava os poliedros e as suas definições e os exercícios sobre as diferentes perspetivas. Não existiam diferenças substanciais nesse tema entre o programa de 1881 e os de 1896 e de 1902.

Metodologia

Os programas analisados continham, a partir de 1881, a designação de metodologia nas disciplinas que abordavam os aspetos pedagógicos. A introdução dessas disciplinas marca o desenvolvimento de um saber pedagógico específico para o ensino primário, que vai materializar nos manuais que então começam a ser produzidos e que nos permitem vislumbrar o seu desenvolvimento autónomo (Chervel, 1990). Como se referiu, ela coincide com o desenvolvimento do ideário da Educação Nova e com a procura de uma fundamentação científica para os métodos educacionais (Matos, 2014).

Embora os programas não contivessem indicações específicas para o ensino da matemática, essas disciplinas dividiam-se em *Pedagogia*, *Metodologia geral* e *Metodologia especial*. Na primeira, abordava-se a organização da escola e os métodos gerais de ensino e, na segunda, examinavam-se os métodos de ensino dos diferentes ramos de instrução. É possível inferir que seria no âmbito desta disciplina que seriam abordados os métodos para o ensino dos conteúdos de matemática, que depois seriam praticados nas escolas anexas. Como consequência dessa nova organização curricular, vai-se gerar um novo conhecimento e novas práticas que vão recompor a cultura escolar, do ensino primário português, no sentido de Julia (1995). Uma compreensão mais aprofundada do que seria trabalhado nessa *Metodologia especial*, carece de uma análise de outras fontes.

5.1.6. A matemática nos exames finais dos cursos das escolas de formação dos professores do ensino primário

O regulamento para o funcionamento da Escola Normal Primária do Distrito de Lisboa, de 1845[56], definia que no fim de cada ano letivo os alunos seriam submetidos a exame nas disciplinas frequentadas nesse ano. O júri dos exames era constituído pelo Conselho da Escola, sob a presidência do Comissário dos Estudos do Distrito de Lisboa. Os exames eram públicos, orais e escritos, sobre todas as disciplinas dos respetivos cursos. Estes exames nunca podiam ter um grau de dificuldade inferior aos exames feitos pelos opositores às cadeiras primárias do 1º e 2º grau. Os alunos tinham ainda de realizar um exercício prático de ensino. Os alunos que ficassem aprovados no primeiro curso da escola[57], seriam admitidos no segundo curso caso, pelas suas habilitações e comportamento, merecessem. Esta admissão era feita sob proposta do Conselho Superior de Instrução Pública, caso fossem necessários para as cadeiras do segundo grau, ou para as cadeiras das escolas normais. Os alunos que ficassem aprovados nos exames finais, e quisessem sair, teriam um certificado declarando a sua capacidade intelectual e moral, e a sua aptidão para o magistério.

O regulamento para o funcionamento da Escola Normal Primária do Distrito de Lisboa de 1860[58], o primeiro a ser posto em prática, definia que no fim de cada ano letivo os alunos seriam submetidos a exame nas disciplinas dos seus cursos. Embora não se referisse especificamente um exame final, esta norma implicava que no final do curso haveria exames. O júri destes exames era constituído pelo Conselho da Escola Normal e pelo Reitor do Liceu Nacional de Lisboa, que presidia. Tanto os exames orais como os escritos, eram públicos. Para provar a aptidão dos alunos para o magistério, estes tinham de fazer um exercício prático de ensino numa escola elementar. Este regulamento deixava para o regulamento interno da escola a definição de que como seriam qualificados e graduados os alunos. Os alunos que reprovassem nos exames seriam expulsos da escola e perderiam o direito à pensão. Os alunos que terminassem com distinção o curso do primeiro grau, podiam passar ao segundo curso, através de proposta do conselho da escola e ouvido o conselho geral da instrução pública. Em geral, as normas da legislação publicada em 1881[59] é semelhante à de 1860.

---

[56] Regulamento para a Escola Normal Primária do Distrito de Lisboa, *COLP 1844-1845*, pp. 923-30.
[57] Recorde-se que na época o ensino primário estava divido em dois graus e que, por isso, a legislação que regulamentava os cursos de habilitação ao magistério primário previa dois cursos, um de habilitação ao primeiro grau do ensino primário, com a duração de um ano, e outro de habilitação às cadeiras do segundo grau, com a duração de dois anos.
[58] Regulamento da Escola Normal Primária do Distrito de Lisboa, *COLP 1860*, pp. 814-21.
[59] Regulamento para execução das leis de 2 de maio de 1878 e 11 de junho de 1880, *COLP 1881*, pp. 145-91.

A legislação publicada em 1896[60] previa quatro tipos de exames: exames de concurso à pensão, exames de passagem, exames finais de habilitação para o ensino elementar e complementar dos alunos com frequências nas escolas normais e exames de estranhos, ou seja, para aqueles que não tendo frequentado as escolas normais, queriam obter habilitação para exercer o magistério primário. No que diz respeito aos exames finais, estes podiam ser realizados no fim do 2.º e do 3.º ano, conforme a habilitação fosse para o ensino primário elementar ou para o ensino primário complementar. Os exames finais constavam de provas escritas, orais e práticas, e podiam abordar todas as disciplinas e exercícios de cada curso, tendo de estar em conformidade com os respetivos programas. O júri destes exames era constituído pelo diretor ou diretora da escola normal, que o presidia, e pelos professores efetivos e auxiliares das escolas normais. Às provas escritas assistiam apenas dois vogais e o presidente do júri. Os professores de música, lavores e ginástica, só interrogavam e votavam no exame da disciplina que lecionavam.

Na legislação de 1896, as provas escritas dos exames finais para o 2.º ano, que habilitavam para o ensino primário elementar, eram constituídas por uma prova de escrita por ditado, uma prova caligráfica, construção de uma figura geométrica, desenho de ornato ou cópia de mapas geográficos e corográficos de Portugal, resolução de dois problemas, um de aritmética e outro de geometria, resposta a um quesito sobre moral, história pátria ou pedagogia e versão de um trecho de francês para português. As provas escritas para os exames finais do 3.º ano, que habilitavam para o magistério do ensino primário complementar, eram semelhantes às do 2.º ano. Especificamente para o 3.º ano, incluía-se um quesito sobre um ponto de história geral, pedagogia, física ou ciências naturais e a versão de um trecho de português para francês. A prova de ditado e a prova caligráfica tinham a duração de meia hora. As restantes provas escritas tinham a duração de uma hora.

Para cada uma das provas de construção de uma figura geométrica, desenho de ornato ou cópia de mapas geográficos e corográficos de Portugal, resolução de dois problemas, um de aritmética e outro de geometria, resposta a um quesito sobre moral, história pátria ou pedagogia e a versão de um trecho de francês para português era construído pelo júri de exames em sessão secreta um conjunto de dez pontos que abordavam os conteúdos dos programas de ensino elementar ou complementar das escolas normais, conforme o ano a que se referiam os exames. As provas orais dos exames finais, tanto para o 2.º como para o 3.º ano, versavam sobre todas as disciplinas que constituíam os respetivos cursos. Entre as provas escritas e as provas orais as alunas prestavam provas de lavores e os alunos provas de canto e ginástica. A classificação final era obtida pela média das provas escritas, orais e práticas. Os alunos com uma média inferior a dez, eram reprovados. As provas de ginástica, canto e lavores eram votadas em separado e os

[60] Regulamento geral do ensino primário, *COLP 1896,* pp. 474-519.

resultados eram mencionados no diploma. Os alunos que ficassem habilitados para o curso elementar com classificação de bom ou distinto, podiam ser admitidos à matrícula do curso complementar, caso o requeressem.

Na regulamentação de 1902[61], os exames finais decorriam no final da 3.ª classe dos cursos das escolas do ensino normal. Os exames finais constavam de provas escritas, especiais, práticas e orais. Estes exames poderiam abordar os conteúdos das disciplinas e os exercícios do curso, em conformidade com os programas. Nas escolas normais, o júri destes exames era constituído por cinco professores da 3.ª classe do curso e incluía sempre o diretor. Nas escolas de habilitação para o magistério primário, o júri era constituído por quatro professores, podendo ser presididos por um professor da 3.ª classe das escolas normais, que era nomeado pelo governo. Nas provas escritas destes exames finais estavam presentes o presidente e o secretário do júri. Para além destes e dos examinandos, só poderiam estar nas salas as autoridades que superintendiam os serviços do ensino primário. As provas escritas eram feitas em duas sessões e incluíam:

1) redação sobre um assunto das seguintes disciplinas:

a) língua e literatura portuguesa,

b) pedagogia,

c) história geral e

d) ciências naturais;

2) prova de caligrafia;

3) construção de uma figura geométrica, desenho de um ornato ou cópia de mapas geográficos e corográficos de Portugal;

4) resolução de dois problemas, um de aritmética e outro de geometria;

5) versão de um trecho de português para francês.

A prova de caligrafia tinha meia hora e as outras provas escritas tinham a duração de uma hora e meia. Para cada uma destas provas eram elaborados pelo júri, em sessão secreta, entre 15 a 20 pontos que abordavam as matérias dos programas do ensino normal primário.

Depois de realizadas as provas escritas, o júri fazia a sua apreciação e deliberava quais os alunos que poderiam ser submetidos às provas especiais. Para serem admitidos às provas especiais, os alunos teriam de obter maioria de notas de bom nas provas de redação sobre um assunto das disciplinas de língua e literatura portuguesa, pedagogia, história geral e ciências naturais e na prova de resolução de dois problemas, um de aritmética e outro de geometria. Teriam ainda de obter maioria de notas suficientes nas restantes provas escritas. As provas especiais eram

---

[61] Decreto nº 4 de 1902. Regulamento do decreto nº 8 de 24 de dezembro de 1901. *COLP 1902*, pp. 917-45.

diferentes para os alunos do sexo masculino e feminino. Os alunos do sexo feminino prestavam provas de lavores, ginástica e música, mas os do sexo masculino apenas prestavam provas de ginástica e música. Só eram admitidos à prova prática os alunos que obtivessem maioria de notas suficiente em cada uma das provas especiais. A prova prática consistia na regência de exercícios a uma classe de alunos sobre qualquer assunto dos programas do ensino primário. Os pontos eram elaborados pelo júri e tirados à sorte pelos examinandos duas horas antes da prova. Nessas duas horas, os examinandos podiam estudar o ponto do programa que iriam ter que abordar, mas teriam que fazê-lo dentro do edifício escolar sob vigilância de elementos do júri. Nessa preparação podiam consultar livros e mapas.

Para serem admitidos às provas orais, os alunos teriam de obter pelo menos maioria de notas de suficiente na prova prática. As provas orais centravam-se em especial nas disciplinas que constituíam o terceiro ano do curso das escolas normais e, em geral, sobre as disciplinas que constituíam os dois primeiros anos do curso. As provas orais não eram públicas. No entanto, os pais, tutores ou encarregados de educação dos alunos sujeitos a exame podiam assistir a estas provas. Os elementos do júri interrogavam sobre a disciplina ou disciplinas que tivessem lecionado durante o curso. O interrogatório sobre cada disciplina não deveria exceder os quinze minutos e no total não deveria exceder uma hora e meia. Finalizadas as provas orais, ficavam aprovados os alunos que obtivessem pelo menos maioria de notas de bom nas disciplinas de *Língua e literatura portuguesa*, *Aritmética prática e geometria elementar*; *noções de escrituração comercial e agrícola* e *Pedagogia e, em especial, metodologia do ensino primário* e *Legislação da escola primária portuguesa* e maioria de notas de suficiente nas restantes disciplinas. A graduação dos alunos aprovados era atribuída de acordo com as classificações obtidas em todas as provas e tendo em conta a frequência escolar.

5.1.7. Qualificações dos docentes dos cursos de formação inicial de professores do ensino primário

Neste ponto apresenta-se a evolução dos requisitos exigidos aos professores das escolas normais. De acordo com o Regulamento para a Escola Normal Primária de Lisboa de 1845[62], para se ter lugar a nomeação de professor na escola normal pretendia-se que os candidatos apresentassem, para além das habilitações literárias, que não eram discriminadas, qualidades morais e religiosas para o bom desempenho da missão. Os lugares seriam providos por concurso e exames públicos. Em 1860[63], o quadro de pessoal da escola normal de Lisboa, a primeira que efetivamente funcionou, compreendia quatro professores, entre os quais um capelão e as

[62] Regulamento para a Escola Normal Primária do Distrito de Lisboa, *COLP 1844-1845*, pp. 923-30.
[63] Regulamento da Escola Normal Primária do Distrito de Lisboa, *COLP 1860*, pp. 814-21.

disposições sobre a sua contratação eram semelhantes às de 1845. Quando em 1878 foi lançada a reforma do ensino primário[64], foram também determinadas regras para o provimento dos lugares dos professores das escolas normais. Para as de primeira classe eram preferidos os professores vitalícios das escolas normais de segunda classe que tivessem o diploma do curso completo de ensino normal, ou serviço distinto por mais de cinco anos numa escola do ensino primário complementar. Para as escolas normais de segunda classe eram preferidos os professores vitalícios do ensino primário complementar que se tivessem distinguido pelo seu comportamento e serviço de magistério. Precisa-se agora que cada escola normal deveria ter anexa uma escola com ensino primário para a apoiar prática pedagógica dos futuros professores, mas não definia as habilitações requeridas aos professores dessas escolas.

Em 1881[65] foi regulamentada a reforma de 1878. Agora, os professores das escolas normais eram nomeados pelo governo, depois de concurso público e os procedimentos a observar na nomeação eram semelhantes aos de 1860. Os diretores das escolas seriam escolhidos pelo governo de entre os professores efetivos. Entre outras competências, os professores das escolas normais tinham o dever de reger as disciplinas que lhes fossem distribuídas, de acordo com os programas e os horários aprovados, manter a disciplina nas aulas, lançar as notas dos alunos, participar nas sessões do Conselho Escolar e fazer parte dos júris de exame de alunos.

De acordo com o regulamento de 1896[66], as escolas normais teriam quatro professores ou professores efetivos, três professores ou professores auxiliares e dois professores ou professoras especiais, para o ensino da música, canto coral, lavores e ginástica. O diretor ou diretora das escolas normais eram nomeados de entre os professores efetivos das respetivas escolas. A nomeação dos professores era feita pelo governo, mediante concurso de provas públicas. As habilitações exigidas eram as seguintes: aprovação em qualquer curso do ensino superior, aprovação no curso complementar das escolas normais ou aprovação nos cursos de instrução secundária professados nos liceus[67]. Para os lugares de professores auxiliares podiam ser nomeados professores que tivessem prestado bom serviço em algumas das mesmas escolas.

A legislação de 1901[68] previa a criação de escolas normais primárias superiores o que só veio a acontecer bastante mais tarde e por isso a contratação de professores para as escolas normais manteve as disposições anteriores. Nestas escolas deveriam existir sete professores

[64] Carta de Lei de 2 de maio de 1878, *COLP 1878*, pp. 53-62.
[65] Regulamento para a execução das leis de 2 de maio de 1878 e 11 de junho de 1880, *COLP 1881*, pp. 145-91.
[66] Regulamento geral do ensino primário. *COLP* 1896. pp. 752-762.
[67] A habilitação exigida era igual à do magistério primário complementar que estava definida no Decreto nº 1. *COLP* 1894. pp. 1064-76.
[68] Decreto nº 8 de 1901. Reforma do ensino primário e do ensino normal. *COLP 1901*. pp. 1229-46.

efetivos e, nas escolas de habilitação, três professores e duas professoras efetivas. Os professores que na época fossem professores auxiliares das escolas normais ficavam considerados como professores efetivos. Os que fossem professores auxiliares em duas escolas normais só podiam ser declarados efetivos numa das escolas, à escolha do governo. Em anexo a cada escola normal e de habilitação para o magistério havia uma escola mista de ensino primário, para os exercícios práticos de pedagogia. Nas escolas normais de Lisboa, Coimbra e Porto, os professores das escolas anexas eram professores ou professoras do ensino elementar, conforme as escolas fossem do sexo masculino ou do sexo feminino.

Em 1902[69] a nomeação de professores para as escolas normais e de habilitação para o magistério era feita pelo governo, mediante concurso público. Só eram admitidos candidatos que tivessem habilitação legal para o magistério. As provas do concurso eram organizadas de acordo com os grupos de disciplinas que eram lecionadas no ensino normal. No 1.º grupo constavam as disciplinas de I Língua e literatura portuguesa; II Língua francesa; III Direitos e deveres dos cidadãos; moral e doutrina cristã e, para o sexo feminino, economia doméstica; IV Geografia, cronologia e história; V Pedagogia, metodologia e legislação da escola primária portuguesa; VI Ginástica elementar; VII Música; canto coral. No 2.º grupo estavam as disciplinas de I Aritmética prática; escrituração comercial e agrícola; II Geometria; II Desenho Linear e de ornato; IV Ciências naturais e sua aplicação à agricultura e à higiene; agricultura prática; V Geografia, cronologia e história; VI Ginástica elementar; VII Música; canto coral. No caso das candidatas, acrescentava-se aos dois grupos a prova de Lavores.

Cada grupo de disciplinas tinha um conjunto de provas. As provas escritas do 1.º grupo eram constituídas pela explicação de um ponto de pedagogia ou metodologia; composição em língua portuguesa; versão de um trecho de português para francês. As provas escritas do 2.º grupo eram a explicação de um ponto de pedagogia ou metodologia, resolução de um problema de aritmética ou de álgebra de equações do 1.º grau e de um problema de geometria; desenho sobre perspetiva e cópia de um ornato em gesso.

A prova oral tinha uma estrutura comum para os dois grupos e compreendia interrogatório sobre as matérias compreendidas nos programas de ensino normal, interrogatório sobre pontos especiais tirados à sorte de cada uma das disciplinas privativas de cada grupo.

As provas práticas eram comuns aos dois grupos e consistiam de uma lição prática (exposição, interrogatório) perante um grupo de alunos da escola normal. Estas provas práticas versavam sobre assuntos do programa das disciplinas do respetivo grupo, à escolha do júri, sendo

[69] Decreto nº 4 de 1902. Regulamento do decreto nº 8 de 24 de dezembro de 1901. *COLP 1902*, pp. 917-45.

retirado duas horas antes da realização. A prova tinha uma duração entre cinquenta minutos a uma hora. A nota final dos candidatos era obtida pela média das provas escritas e das provas orais.

Os lugares de professores das escolas anexas eram preenchidos por concurso público ao qual podiam concorrer professores da instrução primária. As provas constavam de uma lição prática sobre assunto do programa do ensino primário, tirado à sorte entre 20 pontos organizados pelo júri. Essa lição era apresentada perante alunos de instrução primária do 1.º ou do 2.º grau. O júri era nomeado pelo governo e constituído por um diretor de uma escola normal e por dois professores das escolas do ensino normal, sendo um deles professor de pedagogia. A lição tinha a duração de uma hora, sendo depois o candidato interrogado durante meia hora pelo júri, sobre o conteúdo da lição. A tabela 5.8. resume as habilitações requeridas para a docência nas escolas normais entre 1845 e 1902.

Tabela 5.8. Habilitações requeridas para a docência nas escolas de formação de professores do ensino primário (1845-1902).

Ano	Habilitações
1845	Eram exigidas habilitações literárias, não discriminadas na regulamentação, e qualidades morais e religiosas.
1860	Indicava que seria estabelecido um regulamento especial que determinaria as habilitações morais e literárias exigidas aos candidatos.
1878	Para as escolas normais de 1.ª classe eram preferidos os professores das escolas normais de 2.ª classe que tivessem o curso completo de ensino normal, ou serviço distinto por mais de cinco anos numa escola do ensino primário complementar. Para as escolas normais de 2.ª classe eram preferidos os professores do ensino primário complementar que se tivessem distinguido pelo seu comportamento e serviço de magistério.
1881	Para as escolas normais de 1.ª classe eram preferidos os professores das escolas normais de 2.ª classe que tivessem o curso completo de ensino normal. Para as escolas normais de 2.ª classe eram preferidos os professores do ensino primário complementar que se tivessem distinguido pelo seu comportamento e serviço de magistério.
1896	Aprovação em qualquer curso do ensino superior, aprovação no curso complementar das escolas normais ou aprovação nos cursos de instrução secundária professados nos liceus
1901	Aos candidatos à docência nas escolas normais era exigida a habilitação legal para o magistério. Os professores das escolas anexas eram professores ou professoras do ensino elementar, conforme as escolas fossem do sexo masculino ou do sexo feminino.
1902	Só eram admitidos candidatos que tivessem habilitação legal para o magistério. Os candidatos prestavam provas escritas, orais e práticas. Os lugares de professores das escolas anexas eram preenchidos por concurso público ao qual podiam concorrer professores da instrução primária.

Fonte: Legislação (1845, 1860, 1878, 1881, 1896, 1901, 1902).

5.1.8. Em síntese – 1844 a 1910

Nesta secção traçou-se um quadro dos saberes matemáticos e do seu ensino desenvolvidos nas escolas normais durante este primeiro período em análise. Embora esta parte do trabalho se limite às normas, no sentido de Julia (1995), podem destacar-se alguns aspetos.

Começa-se por salientar que, ao longo deste primeiro período em estudo, o curso das escolas de formação de professores do ensino primário, designadas por escolas normais, vai-se impondo como forma de acesso à profissão. Se até 1901 existiam outras vias de acesso à profissão, nomeadamente através da realização de um exame sem ter frequentado o curso da escola normal, a partir desta data a frequência do curso torna-se obrigatória para quem pretendesse exercer o magistério primário.

Comparando os conteúdos dos exames de acesso à profissão de professor para os candidatos que não tinham frequentado as escolas normais com os conteúdos exigidos aos alunos dessas escolas, no período até 1910, é patente a maior exigência destes últimos, que se torna mais significativa à medida que as escolas foram tornando mais elaborados os programas dos seus cursos. Uma sequência similar ocorre no gradual aumento dos requisitos para os candidatos às próprias escolas normais, que no início do período se limitavam a um conhecimento básico da leitura e da escrita e que em 1902, para além do diploma do ensino primário, já exigiam um domínio sólido dos conhecimentos desse nível de ensino.

Quanto às disciplinas das escolas normais, no período até 1910 dois eixos se tornaram claros. Se por um lado os conteúdos matemáticos foram-se tornando mais complexos (incluindo, por exemplo, a álgebra e os logaritmos), por outro desde muito cedo a matemática estudada contém uma componente prática e envolve temas próximos de aplicações profissionais (contabilidade, agrimensura), fazendo parte da função formativa das escolas primárias portuguesas no período em análise.

Até 1910, o desenvolvimento de saberes específicos para o ensino da matemática vai tornar-se evidente, acompanhando a difusão das ideias da Educação Nova em Portugal. Por um lado, as disciplinas de pedagogia geral parecem gradualmente ir incluindo aspetos relacionados com métodos e processos específicos para o ensino das matérias a lecionar no ensino primário, onde se inclui os conteúdos de matemática, revelando a gradual elaboração de saberes específicos da profissão. A inclusão da designação de metodologia especial nas disciplinas de pedagogia é um sinal revelador deste aspeto. Por outro lado, é patente a gradual inclusão de sugestões de caráter metodológico nos próprios programas das disciplinas relacionadas com os conteúdos de matemática, onde é comum a recomendação de resolução de exercícios ou de problemas.

Relativamente à avaliação de alunos das escolas de formação, é de destacar que desde os primeiros regulamentos se prevê a realização de diversos exames como os exames de concurso à pensão, exames de admissão, exames de passagem ou exames finais de habilitação. No que se refere à realização de exames finais, estes abordam normalmente os conteúdos dos programas das disciplinas que constituem o curso, sendo por isso avaliados conteúdos relacionados com a matemática ou com o seu ensino. Quanto à legislação específica que regulamenta a forma de realização dos exames é possível perceber que a matemática é normalmente avaliada através da resolução de problemas de aritmética ou de geometria. Estes exames eram realizados na forma escrita e oral. Os conteúdos de matemática e do seu ensino poderiam ainda ser avaliados no contexto das provas práticas.

No que diz respeito às habilitações exigidas aos docentes das escolas normais, os primeiros documentos a regulamentar as escolas normais, publicados em 1845 e em 1860, não eram esclarecedores. Com a reforma de 1878, e posterior regulamentação em 1881, passou-se a definir como qualificação preferencial para o exercício da docência nas escolas normais de 1.ª classe, o facto de já se ter exercido a docência em escolas normais de 2.ª classe ou o ter o curso completo do ensino normal. Com a reforma de 1896 estabelece-se uma precedência em que eram preferidos para a docência nas escolas normais os candidatos que tivessem aprovação em qualquer curso do ensino superior relativamente àqueles que tinham aprovação no curso complementar das escolas normais. Com as reformas que ocorreram até 1910, 1901 e 1902, voltam a ter preferência os candidatos que tivessem habilitação legal para o magistério.

5.2. A matemática na formação inicial dos professores do ensino primário no período de 1910 a 1926

Nesta parte do trabalho estuda-se as peças legislativas dedicadas às escolas de formação de professores para o ensino primário em Portugal entre o ano de 1910, quando se dá a implantação da República, e o ano de 1926, quando é implantada a Ditadura Militar.

No período da Primeira República, entre 1910 e 1926, as escolas de formação de professores do ensino primário viveram a sua época áurea, em grande parte devido à importância que foi atribuída à formação de professores e ao seu papel como fator de desenvolvimento do país, assim como na formação do cidadão republicano (Pintassilgo e Mogarro, 2015).

Num primeiro ponto será traçado um breve quadro da implementação das escolas de formação de professores do ensino primário em Portugal. O texto ir-se-á depois focar especificamente nos conteúdos matemáticos, sendo analisados sucessivamente as provas de acesso às escolas de formação de professores, a estrutura curricular desses cursos, os programas das disciplinas com conteúdos relacionados com a matemática, os exames finais e a formação dos docentes das escolas de formação de professores.

5.2.1. As escolas de formação de professores do ensino primário (1910-1926)

Retomando a síntese da secção anterior, em 1910, no final da Monarquia existiam seis escolas normais em Lisboa, Porto e Coimbra (uma para cada sexo em cada uma destas cidades) e 17 escolas de habilitação para o magistério primário. Nessa época, o poder político argumentava que essa rede de escolas era um sobredimensionamento do sistema, já que se diplomavam mais professores do que era julgado necessário, muitos ficando desempregados ou exercendo atividades não relacionadas com a docência. Essa situação prolongar-se-ia até 1921[70], quando as escolas enquadradas na reforma de 1901 foram encerradas e substituídas pelas novas instituições republicanas (Pintassilgo, 2012).

Apesar de se considerar que estavam a ser formados demasiados professores para o ensino primário, na realidade a percentagem de analfabetismo na população portuguesa da época era muito superior à de países europeus com um desenvolvimento económico similar. De acordo com Carvalho (1996), os números do analfabetismo constituíam uma calamidade e uma vergonha nacional, sendo analfabeta cerca de 82,4% da população portuguesa em 1878 e 75% em 1911. Referindo-se a dados relativos ao período em estudo, Sampaio (1975) destaca que as escolas normais primárias estavam longe de formar os quadros docentes necessários ao cumprimento da escolaridade obrigatória, salientando que a percentagem de inscritos no ensino primário estava muito distante da de recenseados, chegando a reunir apenas um quarto dos recenseados no ano letivo 1918-1919, quando a escolaridade obrigatória era de cinco anos.

A tabela 5.9. apresenta a variação da frequência no ensino normal primário no período em estudo, sendo muito notória a diminuição do total de inscrições, aprovações e conclusões após o encerramento das escolas de habilitação para o magistério primário que funcionam nos diferentes distritos.

Tabela 5.9. Variação da frequência no ensino normal primário, aprovações e conclusões. Anos 1911-1912, 1916-1917, 1921-1922 e 1926-1927.

	1911-1912	**1916-1917**	**1921-1922**	**1926-1927**
Total				
1 – Escolas	----	20	4	5
2 – Inscritos	1560	3311	408	793
3 – Aprovados	1427	2642	353	595
4 - % 3/2	91,4	79,8	86,5	75

[70] A Lei n.º 233, publicada em 1914 previa a construção de três escolas normais em Lisboa, Coimbra e Porto, abrindo a possibilidade da criação de outras escolas normais, com o mesmo modelo, envolvendo as juntas gerais de distrito nas despesas de instalação e na aquisição do material escolar. No entanto, a situação arrastou-se e as novas escolas normais só foram instaladas a partir de 1918/1919: Escola Normal Primária de Lisboa (1918/1919) as Escolas Normais Primárias de Coimbra e do Porto (1919/1920). Só há registo do funcionamento de mais duas escolas normais primárias a funcionar de acordo com os novos modelos: Escola Normal Primária de Braga (1920/1921) e a Escola Normal Primária de Ponta Delgada (1922/1923).

5 – Conclusões	453	677	175	223
6 - % 5/2	29	20,4	42,9	28,4
Escolas Normais				
7 – Escolas	----	3	4	5
8 – Inscritos	706	1102	408	793
9 – Aprovados	644	793	353	595
10 - % 9/8	91,2	72	86,5	75
11 – Conclusões	152	190	175	223
12 - % 11/18	21,5	17,2	42,9	28,4
Escolas de habilitação para o magistério				
13 – Escolas	----	17	----	----
14 – Inscritos	854	2209	----	----
15 – Aprovados	783	1849	----	----
16 - % 15/14	91,7	83,7	----	----
17 – Conclusões	275	487	----	----
18 - % 17/14	32,2	22	----	----

Fonte: Sampaio (1975)

O período que se seguiu à implantação da República em 1910 foi marcado por alguma instabilidade, que também se refletiu na educação. Algumas reformas decretadas tiveram uma concretização lenta e outras foram mesmo substituídas ainda antes de começarem a ser implementadas. Por exemplo, a reforma do ensino primário de 1911[71] nunca chegou a ser regulamentada. Em 1914[72], e depois em 1916[73], o ensino normal volta a ser alvo de legislação. No entanto, só a reforma de 1919[74] traz um cunho de transformação republicana ao ensino normal centrada na defesa da coeducação e de uma escola laica que eram referências fundamentais do republicanismo (Pintassilgo & Mogarro, 2015).

Com a redução do número de escolas, o reforço da preparação e a maior exigência nos exames de admissão aos candidatos às escolas normais, tentou-se melhorar a qualidade do ensino normal. No plano curricular, apesar de a formação ter sido mais centrada na componente da prática docente, não se descurou a parte científica, com a presença de disciplinas como *Língua e Literatura Portuguesa* ou *Matemáticas*. Os programas das disciplinas, enquadrados na reforma de 1919, têm também uma forte marca da Educação Nova, patente nas instruções pedagógicas que precedem cada programa (Pintassilgo & Mogarro, 2015). Baptista (2004) também realça a

[71] Decreto com força de lei, Regulamento do ensino infantil, primário e normal (1911). *Diário do Governo*, *73*(30/3/1911), 1341-1360.
[72] Lei n.º 233, Regulamento do ensino normal primário (1914). *Diário do Governo*, *111*(7/7/1914), 477-479.
[73] Decreto n.º 2.213, Regulamento e programas sobre o ensino normal primário (1916). *Diário do Governo*, *24*(10/2/1916), 65-146.
[74] Decreto n.º 6.203, Programas do ensino primário e do ensino normal (1919). *Diário do Governo*, *227*(7/11/1919), 2229-2385.

ligação do plano de estudos publicado na legislação de 1919[75] com o movimento científico e positivista em torno da educação e a sua relação com autores como Adolfo Lima, vinculados com a Educação Nova. Para Baptista (2004), um exemplo desta relação era o estatuto que disciplinas como metodologia, legislação, psicologia experimental, pedologia, pedagogia geral ou história da educação assumiam neste plano de estudos. Outro exemplo, é o peso que as disciplinas que Baptista (2004) designa por práticas têm no plano de estudos, sendo o suporte de uma escola ativa. Nóvoa (1995) destaca como característica do movimento da Educação Nova em Portugal, a dimensão significativa que esta assumiu nas instituições de formação de professores, o que facilitou a sua propagação a setores alargados de professores. De acordo com Nóvoa (1995), esta difusão levou a que o movimento perdesse alguma consistência teórica e rigor concetual na sua disseminação no meio educativo português. No seu trabalho, Nóvoa (1995) sintetiza cinco ideias chave deste movimento: laboratório de pedagogia prática, realçando a ligação com a natureza, sistema de coeducação dos sexos, destaque para os métodos ativos, desenvolvimento do espírito crítico, com a conjugação do trabalho individual e o trabalho coletivo, e o desenvolvimento da autonomia dos educandos.

5.2.2. A matemática nos exames de admissão às escolas normais

Como se viu na secção anterior, a reforma do ensino primário e do ensino normal de 1901[76] veio fixar pela primeira vez a obrigatoriedade de um diploma das escolas normais para o acesso à profissão de professor do ensino primário. A legislação publicada logo em março de 1911[77], que não chegou a ser regulamentada, reforçou a obrigatoriedade da habilitação legal conferida pelas escolas normais para o exercício do magistério primário. Esta condição foi confirmada ao longo do período que vai de 1910 a 1926, com a publicação da legislação de 1914[78] e a sua posterior regulamentação em 1916[79], assim como com a legislação de 1919[80]. A possibilidade de acesso à profissão através de exames só voltou a existir já em plena Ditadura Militar com a criação dos postos de ensino e a abertura de lugares de regência para estes postos, como se verá na secção seguinte dedicada ao período de 1926 a 1974.

---

[75] Decreto n.º 6.203, Programas do ensino primário e do ensino normal (1919). *Diário do Governo, 227*(7/11/1919), 2229-2385.
[76] Decreto nº 8 de 1901. Reforma do ensino primário e do ensino normal. *COLP* 1901. pp. 1229-1246.
[77] Decreto com força de lei, Regulamento do ensino infantil, primário e normal (1911). *Diário do Governo, 73*(30/3/1911), 1341-1360.
[78] Lei n.º 233, Regulamento do ensino normal primário (1914). *Diário do Governo*, *111*(7/7/1914), 477-479.
[79] Decreto n.º 2.213, Regulamento e programas sobre o ensino normal primário (1916). *Diário do Governo*, *24*(10/2/1916), 65-146.
[80] Decreto n.º 5.787-A, Regulamento das escolas primárias superiores (1919). *Diário do Governo*, 98(10/5/1919), 1346/A-1346/G.

Em 1914, o novo poder republicano regulamentou[81] as condições de acesso às escolas normais. Poder-se-iam candidatar às escolas normais aqueles que tivessem o diploma das escolas primárias superiores ou de aprovação no exame da 1.ª secção dos liceus (correspondendo aos 3 anos iniciais do curso dos liceus) e que fossem aprovados no exame de admissão à frequência daquelas escolas. Os candidatos com o curso geral dos liceus (5 anos) estavam dispensados deste exame. No que diz respeito aos conteúdos de matemática, indica-se que estes exames versavam sobre *Aritmética, geometria e álgebra elementar*.

Em 1916, surge novo regulamento das escolas normais, incluindo novos programas[82], que mantém muito do proposto em 1914. Os exames de admissão compreendem provas de conteúdos semelhantes aos exames de saída do curso geral dos liceus (5 anos), o que representa um aumento de exigência considerável em relação ao período anterior. Os modos de organização eram semelhantes aos que encontrámos no período anterior. As provas escritas precediam as práticas e tinham caráter eliminatório. Os conteúdos matemáticos eram avaliados na quarta prova escrita, através de um problema de aritmética, álgebra ou geometria, com a duração de uma hora e meia que deveria ter um caráter de aplicação à vida prática. Poderiam ainda ser avaliados conteúdos matemáticos na prova de desenho geométrico, que tinha a duração de duas horas. As provas orais eram constituídas por interrogatórios que poderiam durar entre 15 a 20 minutos. Nestas provas orais, os conteúdos de matemática eram avaliados nos temas aritmética, geometria e álgebra elementar, e também na prova de desenho linear. Para serem admitidos às orais, os candidatos teriam de obter pelo menos média de 8 valores (máximo de 20 valores) em qualquer uma das provas práticas.

As provas orais consistiam em interrogatórios sobre um total de oito matérias. No que diz respeito à matemática as matérias estavam incluídas na quinta prova designada por *Aritmética, Geometria* e *Álgebra Elementar* e na oitava, *Desenho Linear e Ornato*. O interrogatório de cada candidato, em cada disciplina, duraria entre 15 e 20 minutos. Os candidatos que obtivessem em cada disciplina média não inferior a 10 valores, ficariam aprovados. A classificação final seria apurada fazendo-se a média das médias das três espécies de provas, e seria imediatamente publicada.

A tabela 5.10. resume as condições de admissão (idade e qualificações mínimas), exames de acesso e seu conteúdo matemático entre 1911 e 1919 que se apresentou anteriormente.

---

[81] Lei n.º 233, Regulamento do ensino normal primário (1914). *Diário do Governo*, *111*(7/7/1914), 477-479.

[82] Decreto n.º 2.213, Regulamento e programas sobre o ensino normal primário (1916). *Diário do Governo*, *24* (10/2/1916), 65-146.

Tabela 5.10. Condições de admissão e exames de acesso às escolas de formação de professores do ensino primário, 1911-1919.

Ano	Idade	Qualificações	Exames de acesso
1911	15 a 25 anos	Diploma de aprovação no curso das escolas primárias superiores ou na classe correspondente dos liceus	Não foram definidos os exames de acesso.
1914	16 a 25 anos	Diploma de aprovação no curso das escolas primárias superiores ou de aprovação no exame da 1.ª secção (3.ª classe) do curso geral dos liceus	Total de 8 exames de admissão: 5.º Aritmética, geometria e álgebra elementar. 8.º Desenho linear e de ornato.
1916	16 a 25 anos	Diploma de aprovação no curso das escolas primárias superiores ou de aprovação no exame da 1.ª secção (3.ª classe) do curso geral dos liceus	Provas escritas (5), orais (8) e práticas: Provas escritas 4.º Problema de aritmética, álgebra ou geometria (hora e meia) 5.º Execução de um desenho geométrico e cópia natural de objetos usuais de formas simples (duas horas) Provas orais 5.º Aritmética, geometria e álgebra elementar; 8.º Desenho linear e ornato
1919	16 anos	Diploma de aprovação no curso das escolas primárias superiores ou de aprovação no exame do curso geral dos liceus (2.ª secção)	Provas escritas (5), orais (8) e práticas Provas escritas 4.º Problema de aritmética, álgebra ou geometria (hora e meia) Provas orais 5.º Aritmética, geometria e álgebra elementar; (...) 8.º Desenho

Fonte: Legislação (1911, 1914, 1916, 1919).

Merecem especial atenção os temas exigidos em 1916 para o exame de admissão. Ao contrário do que acontecia anteriormente, esta regulamentação de 1916, precisava os temas em avaliação através de um longo programa detalhando as matérias que poderiam ser examinadas. No caso da prova de *Aritmética, Geometria e Álgebra Elementar*, os candidatos deviam estar preparados para responder a uma lista de temas que correspondiam aos dos programas do curso geral dos liceus. No que aos temas matemáticos diz respeito, os programas dos exames de admissão às escolas normais primárias de 1919[83] são similares aos de 1916.

A tabela 5.11. discrimina os conteúdos exigidos em 1916. É muito provável que os candidatos com as habilitações mais básicas, isto é, com 3 anos do curso dos liceus ou com a frequência das escolas primárias superiores tivessem dificuldade em satisfazer estes critérios,

[83] Decreto n.º 6.203, Programas do ensino primário e do ensino normal (1919). *Diário do Governo, 227*(7/11/1919), 2229-2385.

tendo em conta a diferença entre os conteúdos trabalhados nesses níveis de ensino e os conteúdos exigidos nestas provas de acesso.

Tabela 5.11. Conteúdos matemáticos requeridos na prova de Aritmética, geometria e álgebra elementar nos exames de admissão em 1916.

Aritmética
- Números inteiros, numeração decimal, respetivas operações e propriedades fundamentais. - Números primos. - Máximo divisor comum e menor múltiplo comum. - Números fracionários, noção de quebrado ou fração, frações decimais, dízimas, respetivas operações e propriedades fundamentais. - Potenciação e raiz quadrada. - Números irracionais. - Progressões aritméticas e geométricas e as suas propriedades fundamentais. - Logaritmos e as suas propriedades fundamentais. - Sistema legal de pesos e medidas. - Números complexos e incomplexos. - Cálculo comercial.
Geometria
- Noções fundamentais de geometria: conceitos de ponto, linha, superfície e volume. Axiomas e postulados fundamentais da geometria. - Geometria plana: retas paralelas, perpendiculares e oblíquas. - Noção de ângulo. - Circunferência e círculo. - Triângulos, quadriláteros e as suas propriedades fundamentais. - Determinação de áreas de figuras planas. - Princípios relativos às projeções ortogonais. - Superfícies cónica, cilíndrica e esférica e as suas principais propriedades. - Poliedros. - Área de figuras no espaço. - Noção de volume.
Álgebra elementar
- Expressões algébricas. - Cálculo do valor numérico de uma expressão algébrica, números negativos, regras dos sinais, operações algébricas sobre monómios e polinómios. - Frações algébricas. - Equações do 1.º grau a uma incógnita, sistemas de equações lineares e propriedades fundamentais. - Equação do segundo grau. - Números imaginários e operações sobre números imaginários. - Noção de limite.

Fonte: Decreto n.º 2.213, de 10 de fevereiro de 1916.

O programa para o exame de Desenho Linear e de Ornato também continha conteúdos na área da matemática, nomeadamente de geometria, como o traçado e divisão de segmentos de reta, medição e divisão de ângulos, traçado de circunferências, construção de triângulos e quadriláteros construção de diferentes curvas, entre outros. A tabela 5.12. especifica os conteúdos que, de acordo com o programa, poderiam ser avaliados nesta prova.

Tabela 5.12. Conteúdos matemáticos requeridos na prova de Desenho linear e de ornato nos exames de admissão em 1916.

Desenho linear e de ornato
- Traçado e medição de segmentos de reta; sua divisão em partes iguais. - Medição de ângulos e divisão em partes iguais. - Construção de triângulos e quadriláteros. - Problemas relativos à circunferência. - Figuras semelhantes e problemas respetivos. Escalas. - Construções da elipse, da hipérbole e da parábola. Tangentes a estas curvas. - Projeções ortogonais. - Projeções de prismas, pirâmides, cilindros, pirâmides. Secções, rebatimentos e planificações. - Planificação de poliedros. - Noções de perspetiva.

Fonte: Decreto n.º 2.213, de 10 de fevereiro de 1916.

Em 1919, quando foram publicados os programas do ensino primário e do ensino normal, foram novamente publicados os programas para os exames de admissão às escolas normais. Estes programas mantiveram os conteúdos de matemática dos exames de admissão de 1916.

5.2.3. A matemática nas disciplinas dos cursos das escolas de formação dos professores do ensino primário

Em 1911, no início do regime republicano, o governo propõe-se reformar o ensino normal. Alargando o âmbito da formação nas escolas normais, distinguem-se três cursos[84]: o curso geral, comum aos dois sexos; o curso especial para cada sexo; e os cursos complementares, onde estavam incluídos o curso colonial para os professores que se destinavam às colónias, o curso destinado aos professores para escolas de anormais e para as escolas de anormais físicos (surdos e cegos). O curso geral ministrado nas escolas normais passava a ter quatro anos. Podemos encontrar as matérias relacionadas com a matemática, ou com o seu ensino na seção de pedagogia, a *Pedagogia Geral*, *Pedologia* e *Metodologia do Ensino Primário*. A seção literária e científica incluía a *Matemática* que compreendia a aritmética, a álgebra e a geometria elementar, a agrimensura, a contabilidade e a escrituração comercial. O curso especial para a preparação das professoras constava ainda de *Trabalhos Manuais* e *Economia Doméstica* e para o sexo masculino havia *Trabalhos Manuais* e *Agrícolas*, onde podiam ser abordadas matérias relacionadas com a matemática.

A grande instabilidade que caracterizou os anos que se seguiram à implantação da República não permitiram a concretização do que era proposto na reforma de 1911. Em 1914, o governo voltava a legislar no sentido da criação de novas escolas normais em Lisboa, Porto e Coimbra, abrindo a possibilidade de criação de escolas normais com uma participação das

[84] Decreto com força de lei, Regulamento do ensino infantil, primário e normal (1911). *Diário do Governo, 73*(30/3/1911), 1341-1360.

entidades locais, como já foi referido anteriormente[85]. Nas "novas" escolas normais, que tinham como fim habilitar professores de ambos os sexos para o exercício do magistério primário, estavam previstos dois tipos de curso, um teórico e cursos práticos especiais para cada sexo, com a duração de três anos. Relativamente aos conteúdos de matemática, no curso teórico poder-se-iam encontrar na disciplina de *Matemáticas Elementares*. Saliente-se, no entanto a existência da disciplina de *Cosmografia*, onde poderiam estar incluídos alguns conteúdos relacionados com aplicação da matemática. O curso teórico compreendia ainda a disciplina de *Metodologia* onde eram abordados aspetos relacionados com o ensino das diferentes disciplinas, incluindo a matemática. Os cursos práticos tinham as disciplinas de *Desenho Linear* e *Projeções e Trabalhos Manuais* e *Modelação*, onde poderiam ser abordados alguns conteúdos de matemática, essencialmente ligados à geometria. A aplicação dos conteúdos matemáticos poderia ainda ser encontrada nas disciplinas de *Noções de Economia Rural*, *Jardinagem* e *Horticultura* ou de *Noções de Economia Doméstica, Costura e Lavores*, dos cursos práticos. A legislação publicada em 1916[86], mantém a estrutura de 1914, com um curso teórico, comum aos dois sexos e cursos práticos, especiais para cada sexo, com a duração de três anos.

Em 1919 as escolas normais primárias são novamente regulamentadas[87]. Este decreto mantinha o curso distribuído por três anos. As disciplinas com conteúdos matemáticos, ou relacionadas com a metodologia do seu ensino, eram as de *Matemáticas Elementares* e de *Metodologia*. A disciplina de *Matemáticas Elementares* continuava presente nos cinco primeiros semestres do curso, embora com uma carga horária superior à definida em 1916. A disciplina de *Metodologia* passava a estar presente nos dois primeiros semestres do curso, com o dobro da carga horária definida anteriormente. É de salientar que continuavam incluídas no curso disciplinas que também abordavam conteúdos matemáticos com um caráter de aplicação, como *Noções de Economia Doméstica* ou *Modelação e Desenho*.

As escolas normais primárias, e o seu plano de estudos, voltam a ser objeto de regulamentação em 1924[88]. Apesar do preâmbulo do decreto ser muito marcado pelas questões

---

[85] Na legislação de 1911 a intenção era centralizar o ensino normal, reduzir e garantir qualidade da formação. As escolas de habilitação para o magistério primário nas sedes do distrito, e as antigas escolas normais centrais, eram transformadas em escolas do ensino primário superior, onde se esperava que as entidades locais tivessem uma atuação nessa transformação.
Na legislação de 1914, para além das três escolas normais de Lisboa, Porto e Coimbra, abre-se a possibilidade de localmente serem também criadas escolas normais, de acordo com o modelo das outras três, mas isso só acontece em Braga e em Ponta Delgada. As outras não parecem ter reunido condições para funcionar e, em muitas capitais de distrito, só voltou a haver formação de professores em 1943, quando as escolas do magistério primário reabriram.

[86] Decreto n.º 2.213, Regulamento e programas sobre o ensino normal primário (1916). *Diário do Governo*, *24*(10/2/1916), 65-146.

[87] Decreto n.º 6.137 (1919). *Diário do Governo*, *198* (29/9/1919), 2068-2093.

[88] Decreto n.º 10.181 (1924). *Diário do Governo, 230* (13/10/1924), 1444-1446.

orçamentais, a legislação publicada vem introduzir uma alteração no plano de estudos que é de assinalar. As disciplinas da componente de ciências de especialidade e formação geral passam a ter também a designação de didática. Na matemática acontece o mesmo que noutras disciplinas e a disciplina de *Matemáticas elementares* passa a designar-se por *Matemáticas elementares e sua didática*, passando a ser mais ténue a divisão que se apresenta na tabela 5.1.4. entre disciplinas da componente pedagógica e disciplinas da componente de ciências de especialidade. Esta é uma tendência que existe desde as alterações introduzidas em 1916 nos cursos das escolas normais, com a introdução de conteúdos didáticos nos programas das disciplinas da componente de ciências de especialidade, e que nesta regulamentação de 1924 se passa a refletir na designação da própria disciplina.

A tabela 5.13. apresenta uma síntese das alterações à estrutura e duração do curso durante este período.

Tabela 5.13. Duração do curso de formação inicial de professores do ensino primário, 1911-1919.

Ano	**Duração do curso**
1911	Quatro anos
1914	Três anos
1916	Três anos
1919	Três anos

Fonte: Legislação (1911, 1914, 1916, 1919).

Na tabela 5.14. resume-se a denominação das disciplinas que compreendiam conteúdos relacionados com a matemática ou o seu ensino, o que nos permite ter uma visão da matemática escolar das escolas normais, no período entre 1911 e 1926.

Tabela 5.14. Disciplinas dos cursos de formação inicial de professores do ensino primário com conteúdos de matemática (1911-1926).

Ano	**Disciplinas**	
	Com conteúdo matemático	**Com conteúdo didático**
1911	Matemática Trabalhos Manuais e Economia Doméstica (curso feminino) Trabalhos Manuais e Agrícolas (curso masculino)	Pedagogia Geral, Pedologia e Metodologia do Ensino Primário
1914	Curso teórico: Matemáticas Elementares Cosmografia Curso prático: Desenho Linear e Projeções Trabalhos Manuais e Modelação Noções de Economia Rural, Jardinagem e Horticultura Noções de Economia Doméstica, Costura e Lavores	Metodologia
1916	Curso teórico:	Metodologia

	Matemáticas Elementares Curso prático: Desenho Linear e Projeções Noções de Economia Doméstica, Costura e Lavores	
1919	Curso teórico: Matemáticas Elementares Curso prático: Modelação e Desenho Noções de Economia Doméstica	Metodologia
1924	Matemáticas elementares e sua didática	Metodologia geral

Fonte: Legislação (1911, 1914, 1916, 1919, 1924).

5.2.4. Programas das disciplinas dos cursos das escolas normais ou de habilitação para o magistério primário

Apesar das alterações introduzidas na organização dos cursos das escolas normais primárias logo desde 1911, os programas das disciplinas desses cursos só foram definidos primeiramente em 1916 e depois em 1919[89]. Aparentemente os programas das disciplinas na regulamentação de 1924[90] não chegaram a ser publicados, pelo que não é possível verificar o reflexo da introdução da designação didática no nome da disciplina das *Matemáticas elementares*.

Nos programas dos cursos normais de 1916[91], a disciplina de *Matemáticas Elementares* estava presente nas três classes do curso. No 1.º semestre da 1.ª classe devia ter 2 aulas semanais, num total de 36 aulas e no 2.º semestre devia ter 2 aulas semanais, num total de 32 aulas. No 1.º semestre da 2.ª classe do curso devia ter uma aula semanal, num total de 18 aulas e no 2.º semestre devia ter duas aulas semanais, num total de 32 aulas. Na 3.ª classe do curso, a disciplina de *Matemáticas Elementares* só estava presente no primeiro semestre, com três aulas semanais, num total de 54 aulas.

De acordo com as instruções pedagógicas do programa da disciplina de *Matemáticas Elementares*, esta disciplina tinha por objeto três vertentes. Em primeiro lugar, fazer a revisão dos conhecimentos matemáticos já adquiridos pelos alunos, tendo como fim habilitar os alunos para o ensino das primeiras noções da aritmética e da geometria e para que pudessem desenvolver com rigor exercícios e problemas que mais tarde teriam que propor aos seus alunos. Em segundo, desenvolver os conhecimentos já adquiridos, para que os alunos percebessem o valor educativo das matemáticas elementares, a sua aplicação noutros ramos do saber e o seu valor na ação social, caso os alunos viessem a exercer a profissão longe dos centros urbanos. Por último, o

[89] Decreto n.º 6.203, Programas do ensino primário e do ensino normal (1919). *Diário do Governo, 227*(7/11/1919), 2229-2385.
[90] Decreto n.º 10.181 (1924). *Diário do Governo, 230* (13/10/1924), 1444-1446.
[91] Decreto n.º 2.213, Regulamento e programas sobre o ensino normal primário (1916). *Diário do Governo, 24*(10/2/1916), 65-146.

desenvolvimento do conhecimento metodológico do ensino da aritmética e da geometria no ensino primário. Desta forma, para além de conteúdos científicos como equações de 2.º grau a uma incógnita, o desenvolvimento da noção de função e de derivada, razões trigonométricas ou funções circulares, desenvolviam-se também conteúdos de caráter metodológico, com indicações para o ensino das operações fundamentais da aritmética.

As instruções pedagógicas deste programa de *Matemáticas Elementares* de 1916 especificavam em pormenor o que se entendia com cada um dos três aspetos anteriores. Relativamente ao primeiro aspeto — revisão dos conhecimentos matemáticos —, referia-se que os futuros professores deviam ter uma exata compreensão do significado das operações da aritmética, deviam usar corretamente os sinais utilizados nas expressões numéricas e usar uma linguagem rigorosa. Salientava-se também a necessidade de habilitar os futuros professores com a capacidade de organizar coleções de problemas, devidamente graduados. O programa identificava mesmo os requisitos que deviam ter os problemas, onde se realça a necessidade de serem estruturados, rigorosos, adequados à idade e desenvolvimento dos alunos e ligados à prática:

> - Apresentarem os seus enunciados o maior rigor e clareza;
> - Serem igualmente muito claros e rigorosos na indicação das unidades em que hão de exprimir-se os dados e as incógnitas.
> - Poderem resolver-se com os conhecimentos ministrados nas escolas primárias;
> - Não exigirem operações praticamente irrealizáveis;
> - Versarem sobre assuntos de uso comum ou da vida local, tendo, conseguintemente, caráter utilitário; e finalmente
> - Guardarem o que pode chamar-se o sentimento das proporções, isto é, não pedirem, por exemplo, a determinação dos valores de certas grandezas em circunstâncias que nunca se verificam, ou que não teriam mesmo significação na vida prática. (Decreto n.º 2213, Regulamento e programas sobre o ensino normal primário, 1916, p. 104, itálico no original)

Relativamente ao segundo aspeto destacado no programa — a relação das matemáticas elementares com outros ramos do saber —, realçava-se que o desenvolvimento dos conhecimentos já adquiridos serviria para que o aluno formasse uma conceção geral do homem, da natureza e do mundo. O ensino das matemáticas elementares devia ainda permitir aos alunos desenvolver os estudos noutras ciências e tornar-se também útil no caso alunos irem exercer a docência em meios remotos. Nesta última situação, considerava-se que poderia ser muito útil "saber resolver certos problemas menos vulgares, levantar uma planta suficientemente aproximada, avaliar com suficiente exatidão uma distância, determinar a área de uma porção de terreno" (Programas do curso normal, 1916, p. 105). Considerava-se ainda que este ensino deveria ser prático e utilitário.

No que diz respeito ao terceiro aspeto — desenvolvimento do conhecimento metodológico específico —, destacava-se que este devia ser desenvolvido a partir da 2.ª classe, tendo como base as noções de metodologia geral já aprendidas e as revisões de aritmética e geometria feitas na 1.ª classe do curso.

A disciplina de *Metodologia* apresentava na sua constituição uma parte dedicada à metodologia geral e outra dedicada às metodologias específicas de cada disciplina do ensino primário. Nas instruções pedagógicas desta disciplina destacava-se a importância do conhecimento do professor, mas que este não o devia usar ostensivamente, mas sim como consciência do que diz, faz e ensina. Considerava-se que o estudo dos métodos devia ser experimental, devendo o professor normalista trabalhar com os futuros professores como se estivessem num laboratório. Relativamente à metodologia especifica para a matemática, o programa começava por destacar a metodologia própria para este grau de ensino e a história do ensino das ciências matemáticas. Salientava-se ainda o caráter prático e experimental que o ensino da matemática devia ter neste grau de ensino e o material a utilizar. O programa de *Metodologia* não referia concretamente nenhum material.

A tabela 5.15. lista os principais tópicos matemáticos discriminados nos programas de 1916.

Tabela 5.15. Tópicos principais das disciplinas com conteúdos matemáticos, 1916.

Matemáticas Elementares
1.ª classe - Aritmética – Revisão e preparação da metodologia de ensino - Noção de número inteiro. Numeração decimal. Definições e propriedades fundamentais das operações. Potências. Divisibilidade. Números primos. Máximo divisor comum e menor múltiplo comum - Aspetos metodológicos do ensino das primeiras noções de aritmética - Noção de quebrado ou fração. Fração própria e imprópria. Propriedades fundamentais, simplificação de quebrados. As frações decimais. Conversão de quebrado em dízima. Operações de quebrados - Estudo das razões, proporções e progressões, aritméticas e geométricas e estudo das suas propriedades. Comparação e medição de quantidades, proporcionalidade direta e inversa. Regras de três simples e composta. Método da redução à unidade. Regras de liga e de companhia. Números complexos. Sistema legal de pesos e medidas, medidas de comprimento, de superfície, de volume, de capacidade, de peso e de tempo e as moedas - Geometria - Complementos: resolução e discussão da equação geral do 2.º grau a uma incógnita, composição da equação e propriedades do trinómio do 2.º grau. Ideia de número e noção de função e de derivada. As linhas trigonométricas e razões trigonométricas ou funções circulares 2.ª classe - Objeto de ensino da aritmética na escola primária e a sua ação educativa - Cálculo mental - Características dos problemas na escola primária - Ensino do sistema métrico

- Ensino da geometria - Preparar e assistir a lições nas escolas anexas 3.ª classe - Preparar e lecionar nas escolas anexas
Metodologia
- A matemática na escola infantil ou jardins escolas. Metodologia especial neste grau e nos graus do ensino primário - Esboço histórico do ensino das ciências matemáticas - Âmbito e partes em que se divide, cálculo mental, aritmética prática ou económica, a mecânica, a cosmografia, a geometria, o sistema métrico - Importância da matemática e do seu ensino na escola primária. Aspeto essencial e exclusivamente prático e experimental que deve ter o seu ensino neste grau da educação - Como se deve ensinar cada uma das suas partes ou divisões - O material

Fonte: Decreto n.º 2.213, de 1916.

Em 1919, publicaram-se novos programas dos cursos normais[92]. A disciplina de *Matemáticas Elementares* continuou presente nas três classes do curso, sendo reforçada a carga horária na 2.ª classe do curso. No 1.º semestre da 1.ª classe a disciplina tinha duas aulas semanais, num total de 36 aulas e no 2.º semestre devia ter duas aulas semanais, num total de 32 aulas. No 1.º semestre da 2.ª classe do curso devia ter duas aulas semanais, num total de 36 aulas e no 2.º semestre devia ter duas aulas semanais, num total de 32 aulas. Na 3.ª classe do curso, a disciplina de Matemáticas Elementares só estava presente no primeiro semestre, com três aulas semanais, num total de 54 aulas. O programa de *Matemáticas Elementares* mantém as três características enumeradas relativamente ao programa de 1916. No entanto, é de ressaltar o destaque dado à geometria descritiva e à cosmografia, nas instruções pedagógicas. As noções de geometria descritiva eram enquadradas nas relações das matemáticas elementares com outras ciências e na valorização da ação social do professor. A este respeito, o programa de 1919 acrescentava, relativamente à legislação de 1916, que as noções de geometria descritiva deviam contribuir para a educação geral dos futuros professores, permitindo-lhes ganhar a capacidade de analisar a representação no espaço. O decreto enunciava as finalidades deste ensino, referindo que:

> O fim que se tem em vista ao incluí-las no programa [noções de geometria descritiva] só se considerará atingido quando a análise das projeções desenhadas sugerir nitidamente a imagem da figura que representarem, ou, como costuma dizer-se, quando os alunos «virem no espaço». O estudo deste ramo da Geometria deverá, pois, auxiliar muito eficazmente o desenvolvimento das faculdades dos educandos e muito particularmente o seu poder de concentração intelectual, tão preciso para futuros educadores. (Decreto n.º 6.203, Programas do ensino primário e do ensino normal, 1919, p. 2340)

[92] Decreto n.º 6.203, Programas do ensino primário e do ensino normal (1919). *Diário do Governo*, *227*(7/11/1919), 2229-2385.

O realce dado às noções de geometria descritiva continuava a ser explorado nestas instruções pedagógicas, salientando-se a sua importância pela contribuição que podia dar ao estudo de outras disciplinas, como o *Desenho, Trabalhos Manuais* ou a *Geografia*, bem como pelo seu caráter prático para a resolução de questões do dia a dia.

As instruções pedagógicas que iniciam o programa de *Matemáticas Elementares* destacavam também a inclusão do tema da cosmografia na disciplina. Pretendia-se que o futuro professor do ensino primário ficasse habilitado a saber "dar concretamente as noções mais necessárias e indispensáveis a uma cultura geral, sobre os astros e seus movimentos e os fenómenos que daí resultam, como as divisões e subdivisões periódicas do tempo e suas características respetivas." (Decreto n.º 6.203, Programas do ensino primário e do ensino normal, 1919, p. 2340). A cosmografia era apresentada como um tema que deveria ter um caráter essencialmente utilitário e que se deveria centrar na habilitação dos futuros professores para lecionar estes conteúdos nas escolas primárias. O papel para o desenvolvimento de uma cultura científica e do positivismo era também atribuído ao desenvolvimento deste tema:

> Intuitivamente por meio de desenhos, trabalhos em papel e cartão, por quadros transparentes em cartão recortado, os alunos-mestres ficarão habilitados a fazer compreender às crianças da escola primária as noções, mas noções concretas, precisas, exatas da Cosmografia – da Cosmografia que devem e podem ensinar na escola primária, que tem por fim iniciar a educação dos indivíduos, destruindo preconceitos e criando um critério positivo, científico. (Decreto n.º 6.203, Programas do ensino primário e do ensino normal, 1919, p. 2340)

Em 1919[93], as instruções pedagógicas e os conteúdos da disciplina de Metodologia eram essencialmente o que foi exposto relativamente à legislação publicada em 1916.

A tabela 5.16. resume os conteúdos de matemática presentes nos programas do curso normal publicado em 1919.

Tabela 5.16. Tópicos principais das disciplinas com conteúdos matemáticos, 1919.

Matemáticas Elementares
- Números inteiros e respetivas operações - Números fracionários e números decimais - Potenciação, raiz quadrada e logaritmos - Noções de álgebra - Sistema legal de pesos e medidas - Funções circulares - Noções de função e derivada - Noções de geometria descritiva - Cosmografia

[93] Decreto n.º 6.203, Programas do ensino primário e do ensino normal (1919). *Diário do Governo, 227*(7/11/1919), 2229-2385.

-Noções de metodologia de ensino da aritmética e da geometria

Metodologia
- Apontamentos de história do ensino da matemática - Ensino da matemática e as partes em que se divide: cálculo mental, aritmética prática ou económica; mecânica; cosmografia; geometria; sistema métrico - A importância da matemática e do seu ensino na escola primária elementar - Aspeto essencialmente prático e experimental que esta disciplina deve ter no ensino primário elementar - Materiais didáticos

Fonte: Decreto n.º 6.203, de 1919.

5.2.5. Exame final de curso

Será apenas em 1916 que o regime republicano altera o modo de funcionamento dos exames finais das escolas normais[94]. Este exame era constituído por provas escritas, especiais, práticas e orais, que versavam sobre as disciplinas do curso e que ocorria no final da 3.ª classe. As provas escritas do exame eram quatro e realizavam-se em duas sessões, podendo compreender:

1) uma redação sobre um assunto de alguma das seguintes disciplinas: a) Língua e literatura portuguesa, b) pedagogia e c) história geral (uma hora);

2) a execução de uma cópia, do natural, de objetos usuais de formas simples e resolução de um problema de desenho geométrico (duas horas);

3) um problema de física ou de química (uma hora);

4) dois problemas de matemática, sendo um deles de aritmética aplicada (hora e meia).

Para a realização destas provas escritas, o júri organizava trinta pontos, de entre as matérias do programa do ensino normal. Para serem admitidos às restantes provas, os alunos tinham que obter pelo menos uma média de 10 em três destas provas escritas. Eram depois realizadas as provas especiais de ginástica[95], música e canto coral e trabalhos manuais. As alunas do sexo feminino realizavam ainda a prova de lavores. Nestas provas, os alunos também teriam que obter a média de 10 em todas as classificações, exceto uma, para poderem ser admitidos às provas orais.

As provas orais versavam sobre as matérias das disciplinas do curso e serviam para avaliar os conhecimentos científicos, literários, pedagógicos, aptidão e sentido crítico e o desenvolvimento estético dos examinandos. O interrogatório sobre cada disciplina demorava de 15 a 20 minutos. Nas provas orais, os alunos teriam que obter pelo menos a média de 10 valores em cada uma das disciplinas, para serem admitidos às provas práticas.

---

[94] Decreto n.º 2.213, Regulamento e programas sobre o ensino normal primário (1916). *Diário do Governo*, *24*(10/2/1916), 65-146.

[95] Na prova prática de ginástica era ainda realizado o exame prático para a classificação da atenção, da disciplina e da execução.

As provas práticas consistiam de:

1) dissertação oral sobre uma questão de pedagogia, de metodologia, de pedologia, de educação física ou organização escolar;

2) lição dada a uma classe infantil ou primária sobre um assunto dos programas;

3) lição de ginástica a uma classe da escola primária.

Todas estas provas eram seguidas de argumentação por parte de um membro do júri. Para obter a aprovação os alunos teriam que obter pelo menos média de 10, na média dos valores das três provas. No ano de 1919 foi publicada diversa legislação regulando o ensino primário e normal[96]. Em geral são mantidas as disposições anteriores relativas ao exame final[97]. O regime de exames finais dos cursos das escolas normais primárias de Lisboa, Porto e Coimbra é remodelado em 1922[98] que, no entanto, não alteram fundamentalmente a sua estrutura.

5.2.6. Qualificações dos docentes dos cursos de formação inicial de professores do ensino primário[99]

Com a criação das Escolas Normais Superiores nas Universidades de Coimbra e de Lisboa, em 1911[100], as qualificações exigidas aos que pretendiam lecionar nas escolas normais primárias passaram a ser obtidas nessas escolas, nomeadamente para os que pretendiam lecionar a disciplina de *Matemática*, posteriormente denominada de *Matemáticas Elementares*. A criação das duas escolas normais superiores teve como objetivo promover uma alta cultura pedagógica e habilitar para o magistério dos liceus, das escolas normais primárias, das escolas primárias superiores, e para os lugares de inspetores do ensino. Estas escolas tiveram um forte impacto na formação de professores para os liceus. Neste trabalho a análise limita-se aos aspetos fundamentais que têm relevância para a formação dos docentes das escolas normais.

Para se matricularem nos cursos das escolas normais superiores, para além de serem sujeitos a um exame de admissão, os candidatos tinham que possuir um diploma de nível universitário na área das disciplinas que pretendiam vir a ensinar nas escolas normais. Assim, para lecionar as disciplinas matemáticas os candidatos deveriam previamente possuir um

---

[96] Decreto n.º 5.787-A, Regulamento das escolas primárias superiores (1919). *Diário do Governo*, 98(10/5/1919), 1346/A-1346/G e o Decreto n.º 5.787-B, Reorganização do ensino primário (1919). *Diário do Governo*, *98*(10/5/1919), 1346/G-1346/N.

[97] É de referir ainda que na legislação de 1919, decretos n.ºs 5.787-A e B, previa-se que os diplomados pelas escolas normais primárias poderiam frequentar qualquer curso universitário ou superior especial, desde que fizessem o exame de admissão à respetiva faculdade ou escola. Eram ainda preferidos, em igualdade de condições, na admissão ao curso do magistério normal primário, das escolas normais superiores.

[98] Decreto n.º 134, Regime de exames finais dos cursos das escolas normais primárias de Lisboa, Porto e Coimbra (1922). *Diário do Governo*, *134*(5/7/1922), 667.

[99] Esta ponto contou com os comentários de Ana Santiago e de José Manuel Matos.

[100] Decreto com força de lei, criando as escolas normais superiores (1911). *Diário do Governo*, *120*(24/5/1911), 2081-3.

bacharelato em matemática com a duração de três anos obtido na Universidade ou nos institutos politécnicos. Estes requisitos de nível superior marcam a visão republicana de melhorar a qualidade da formação profissional docente.

Estas escolas só começaram a funcionar em pleno a partir de 1915. Pode-se observar os procedimentos de admissão através da legislação de 1918[101] que estabiliza o funcionamento das escolas. A admissão era feita por concurso de provas públicas dividido em duas partes, uma geral e uma especial. A parte geral consistia na redação sobre um ponto da história pátria e na apresentação e defesa de uma tese sobre um assunto da secção a que pertencia o candidato. A parte especial do concurso compreendia três espécies de provas: escritas, orais e práticas. O regulamento publicava os programas destas provas. No caso dos candidatos ao curso de habilitação ao magistério normal primário, e no que se refere à secção de ciências matemáticas, a prova escrita consistia na resolução de um problema de álgebra ou geometria, extraído do programa das escolas normais primárias. Na prova oral o candidato tinha que mostrar os conhecimentos das matérias do programa das escolas normais primária, assim como o conhecimento das matérias do ensino superior de que eram estudados casos particulares nas escolas normais primárias. Na prova prática, os candidatos teriam que fazer a leitura e construção de gráficos e ábacos, o uso corrente das tábuas de logaritmos e das funções circulares e o emprego do grafómetro nas aplicações de trigonometria.

Os cursos das escolas normais superiores tinham a duração de dois anos, com um primeiro ano de preparação pedagógica e um segundo de iniciação na prática pedagógica. As disciplinas do primeiro ano do curso de habilitação ao magistério normal primário, na secção de ciências, correspondentes à preparação pedagógica, eram as mesmas que os futuros professores de Matemática dos liceus deveriam seguir:

Pedagogia (com exercícios de pedagogia experimental);

História da Pedagogia;

Psicologia Infantil;

Teoria da Ciência;

Metodologia Geral das Ciências Matemáticas e das Ciências da Natureza;

Organização e Legislação Comparada do Ensino Primário, Obras Auxiliares e Complementares da Escola;

Higiene geral e Especialmente a Higiene Escolar;

Moral, Instrução Cívica Superior[102].

---

[101] Decreto n.º 4.900, Regulamento das Escolas Normais Superiores (1918). *Diário do Governo*, *227*(18/10/1918), 1820-1833.

[102] O plano curricular sofre pequenas alterações três anos após as escolas terem entrado em funcionamento, desaparecendo a Teoria da Ciência, dividindo a disciplina de Legislação em duas cadeiras semestrais e

No segundo ano, o curso compreendia a metodologia especial das disciplinas que o candidato deveria lecionar nas escolas normais efetivada através da prática pedagógica numa escola normal primária. Esta estrutura de curso era em tudo idênticas à dos cursos de habilitação ao magistério dos liceus e do ensino primário superior, com as devidas adequações no estudo da legislação e na prática pedagógica. Da consulta da documentação sobre a Escola Normal Superior de Coimbra disponível no Arquivo da Universidade de Coimbra, ressalta que os candidatos a docentes das disciplinas matemáticas das escolas normais integravam a turma de *Metodologia Geral das Ciências Matemáticas* que os futuros professores de matemática dos liceus também frequentavam.

A legislação de 1911 previa que o segundo ano do curso, iniciação na prática pedagógica, estivesse dividido em dois períodos. No primeiro, que decorreria desde o início do ano letivo em outubro até 24 de dezembro, os candidatos assistiriam a aulas dos professores das escolas normais ou das escolas primárias superiores, adquirindo desta forma noções de metodologia especial das respetivas disciplinas. No entanto, cada um dos candidatos deveria também ensinar uma vez por semana, sob a orientação do professor dirigente. Durante o restante ano letivo, o ensino era ministrado exclusivamente pelos candidatos, com a fiscalização dos professores dirigentes. Os candidatos tinham ainda de comparecer às reuniões de turma, aos conselhos escolares que tratassem da avaliação dos alunos e aos exames. Uma vez por mês, as aulas deveriam ter a assistência dos professores de pedagogia, e de história de pedagogia, alternadamente. Pretendia-se também fomentar o uso frequente de aparelhos e instrumentos necessários ao ensino do desenho, das ciências matemáticas e das ciências físico-químicas.

Depois de terminado o ano de prática, a habilitação pedagógica do candidato era avaliada através de um Exame de Estado. No caso dos candidatos ao magistério normal primário, o exame constava das seguintes provas:

1) argumento de meia hora sobre as matérias de ensino nas escolas normais primárias;

2) uma lição dada a uma classe ou turma da escola normal primária, sobre um ponto tirado à sorte com vinte e quatro horas de antecedência, seguida de uma discussão pedagógica com a duração de uma hora;

3) apresentação de uma dissertação, impressa ou datilografada, sobre um ponto de didática do ensino normal primário escolhido pelo candidato.

Conhece-se com algum detalhe as práticas das Escolas Normais Superiores, em especial as de Coimbra. Ressalta que o número de candidatos a docentes das disciplinas de matemática

---

contemplando uma terceira disciplina de Metodologia Geral das Ciências do Espírito, Decreto n.º 4.649, reformando as Escolas Normais Superiores (1918). *Diário do Governo*, *157*(14/7/1918), 1311-4.

das escolas normais encontrados é escasso: até à extinção das escolas em 1930 apenas há notícia de 4 alunos, tendo alguns deles concluído em simultâneo o curso de formação para o magistério liceal. Será de esperar, no entanto, que esse número aumente quando houver acesso à documentação da Escola Normal Superior de Lisboa. A tabela 5.17. discrimina os títulos de algumas dissertações para Exame de Estado.

Tabela 5.17. Títulos de dissertações para Exame de Estado do curso do magistério normal primário.

Ano	Candidato	Título	Escola Normal Superior
1917	Luís Maria de Passos da Silva	Do ensino da geometria na escola primária e na escola normal primária	Lisboa
1921	José Maria Mendes	Primeira noção intuitiva das fracções	Coimbra
1922 ou 1924	José Maria Mendes[103]	Como eu ensinaria geometria na minha escola	Coimbra

Até 1919, as habilitações exigidas para lecionar nas escolas normais mantiveram-se relativamente ao que tinha sido definido em 1911, isto é, o provimento de professores das escolas normais seria feito pelo governo entre professores nacionais ou estrangeiros, contratados por períodos de três anos, não podendo ultrapassar os doze para as disciplinas teóricas e sete para os cursos práticos. Em 1919[104], com as escolas normais superiores a funcionar em pleno, o pessoal docente das escolas normais distribui-se em três categorias: efetivos, agregados e interinos. Em geral, para serem considerados professores efetivos os professores das escolas normais primárias teriam de ser diplomados por uma escola normal superior. Os professores agregados também teriam também de ser diplomados pelas escolas normais superiores e exerceriam funções enquanto não houvesse vaga de professores efetivos. Os interinos eram nomeados por concurso documental a que podiam concorrer os diplomados com cursos especiais para o magistério, nacionais ou estrangeiros, para as respetivas disciplinas, ou indivíduos de reconhecida competência. Os professores das escolas anexas eram nomeados após concurso documental. Para além de outras condições, estes professores teriam de apresentar certificado de habilitação para o exercício do magistério primário. A tabela 5.18. resume as habilitações exigidas para lecionar nas escolas normais primárias durante o período de 1911 a 1919. As condições essenciais da legislação de 1919 prolongar-se-iam até 1926, início do período seguinte.

Tabela 5.18. Habilitações requeridas para a docência nas escolas de formação de professores do ensino primário.

[103] O candidato deve ter reprovado em 1921.
[104] Decreto n.º 6.137 (1919). *Diário do Governo*, *198* (29/9/1919), 2068-2093.

Ano	Habilitações
1911	Para além da habilitação específica do respetivo grupo, o docente deveria ter o curso de habilitação da escola normal superior.[105]
1914	Para além da habilitação específica do respetivo grupo, o docente deveria ter o curso de habilitação da escola normal superior.[34]
1916	Para além da habilitação específica do respetivo grupo, o docente deveria ter o curso de habilitação da escola normal superior.[34] Os professores das escolas anexas eram professores do ensino primário.
1919	Para além de habilitação específica do respetivo grupo, os professores efetivos e agregados tinham que ter habilitação das escolas normais superiores para o magistério desse grupo. Os professores das escolas anexas eram professores do ensino primário.

Fonte: Legislação (1911, 1914, 1916, 1919).

5.2.7. Em síntese - 1910 a 1926

No período de 1910 a 1926 salienta-se um reforço na exigência das condições de admissão às escolas normais primárias, com as consequentes implicações numa maior exigência no que era pedido ao nível da matemática nos exames de admissão.

Neste período, e no que diz respeito às disciplinas que desenvolvem conteúdos matemáticos ou conteúdos relacionados com o ensino desta disciplina, destaca-se a continuidade da existência de uma disciplina que pretende desenvolver os conhecimentos matemáticos que os futuros professores tinham à entrada para o curso, que passa a ser designada por *Matemáticas elementares*. É ainda de salientar a existência da disciplina de *Metodologia*, onde se desenvolvem conteúdos relacionados com o ensino desta disciplina no ensino primário, que adquire um maior peso na matriz curricular em 1919. Destaca-se ainda a existência de disciplinas onde os conteúdos de matemática têm um caráter de aplicação.

Entre 1910 e 1926, e no que se refere aos programas, é de realçar que as disciplinas das áreas da componente de ciências de especialidade e formação geral, como as *Matemáticas elementares*, continuam a explorar conteúdos que vão para além daqueles que os futuros professores teriam que ensinar aos seus alunos do ensino primário, fazendo uma revisão do que os alunos já tinham aprendido e desenvolvendo esses conhecimentos. Devido à maior exigência à entrada para as escolas normais, considera-se que os alunos em formação para professores já teriam um nível desenvolvido de formação científica, adquirindo o curso um caráter profissional, que se frequenta para aprender a ensinar. Por esta razão, a disciplina de *Matemáticas elementares* adquire também um caráter metodológico, coexistindo com a disciplina de *Metodologia* onde são explorados os aspetos relacionados com o ensino das diferentes disciplinas no ensino primário.

[105] Apenas intenções, pois estes docentes ainda não existiam.

Salienta-se ainda que neste período continuam a existir conteúdos de aplicação, destacando-se a inclusão de conteúdos como as noções de geometria descritiva ou de cosmografia na disciplina de *Matemáticas elementares*. A importância dos aspetos metodológicos, tanto como parte das disciplinas teóricas, como *Matemáticas elementares*, como noutras disciplinas como a disciplina de *Metodologias*, parece ir ao encontro do que referem Baptista (2004) ou Nóvoa (1995) quando estabelecem uma ligação entre o plano de estudos publicados em 1919 e o movimento da Educação Nova e o desenvolvimento do que se poderá chamar da área das ciências da educação.

Com o estabelecimento das escolas normais superiores em 1911, são alteradas as habilitações exigidas para a docência nas escolas normais. Passa-se a exigir a habilitação específica do respetivo grupo e o curso de habilitação da escola normal superior. A exigência destas habilitações mantém-se até ao final do período da Primeira República, prolongando-se ainda pelos primeiros anos da ditadura militar, nomeadamente na legislação aprovada em 1928.

5.3. A matemática na formação inicial dos professores do ensino primário no período de 1926 a 1974

Depois do apogeu que a formação de professores do ensino primário terá vivido durante o período republicano, a Ditadura Militar, implantada em 1926 e, especialmente, o Estado Novo que se seguiu, produziram diversas alterações nestas escolas que não se limitaram à alteração da designação para escolas do magistério primário. Desde 1926 até meados da década de 1930 foram publicados mais de 20 documentos legais que visavam as escolas de formação de professores legislando sobre matérias como a reorganização dos cursos, programas das disciplinas, regulamentação dos exames de admissão, dos exames finais, exames de estado, bolsas de estudo e extinção de escolas (Pintassilgo, 2012).

Neste terceiro período estuda-se em particular os conteúdos relacionados com a matemática e o seu ensino nas peças legislativas dedicadas às escolas de formação de professores para o ensino primário em Portugal desde a implantação da Ditadura Militar, em 1926, até 1974.

A elaboração deste trabalho foi guiada pelo levantamento já efetuado em Almeida e Candeias (2014). Analisou-se a legislação que, para além dos normativos habituais (leis, decretos e portarias), incluiu também circulares e instruções enviadas às escolas. Este terceiro e último período, de 1926 a 1974, é marcado pelo Estado Novo, e termina quando uma revolução democrática vem introduzir novas alterações na formação inicial dos professores do ensino primário.

Num primeiro ponto será traçado um breve quadro da evolução das escolas de formação de professores do ensino primário em Portugal no período em apreço. O texto ir-se-á depois focar especificamente nos conteúdos matemáticos, sendo discutidos primeiramente os conteúdos dos exames de acesso à profissão propostos para as regentes, estudando-se depois sucessivamente as provas de acesso às escolas de formação de professores, a estrutura curricular e os programas das disciplinas com conteúdos relacionados com a matemática, os Exames de Estado e os requisitos académicos dos docentes das escolas de formação de professores com responsabilidades na formação matemática dos futuros professores.

5.3.1. A evolução das escolas de formação de professores para o ensino primário

Como se viu na secção anterior (5.2.), a reforma de 1919 traz um cunho de transformação republicana ao ensino normal. O regime de coeducação e a defesa de uma escola laica eram referências fundamentais do republicanismo (Pintassilgo & Mogarro, 2015). Com a redução do número de escolas, o reforço da preparação e a maior exigência nos exames de admissão às escolas normais, tentou-se melhorar a qualidade do ensino. No plano curricular, apesar de a formação ter sido mais centrada na componente da prática docente, não se descurou a parte científica, com a presença de disciplinas como *Língua e Literatura Portuguesa* ou *Matemáticas*. Os programas das disciplinas, enquadrados na reforma de 1919, têm também uma forte marca da Educação Nova, patente nas instruções pedagógicas que precedem cada programa (Pintassilgo & Mogarro, 2015).

Em Portugal, a Ditadura Militar implantada em 1926 e, especialmente, o regime do Estado Novo que se seguiu, alteraram a formação de professores do ensino primário. Em 1930, ainda na transição da ditadura militar para o regime do Estado Novo, as escolas normais superiores foram encerradas[106] e as escolas normais primárias substituídas por escolas do magistério primário[107]. Mais do que uma mudança na designação, esta alteração envolveu uma mudança radical na organização escolar, no plano curricular e nos programas, que sofrem alterações em 1935 e, posteriormente, em 1943. No entanto, a implementação dos modelos de formação na década de 1930 não foi uma tarefa fácil para o Governo, porque havia muitos adversários no campo educacional que eram apoiantes do modelo de formação republicano (Baptista, 2004).

Em 1936, alegando que havia um número excessivo de professores, o Governo suspendeu a matrícula nas escolas do magistério primário[108]. Em 1942[109], tomou a decisão de as reabrir, reconhecendo a premente necessidade de professores primários e em 1943 foram publicados os programas das disciplinas[110]. As escolas foram então reconfiguradas, colocadas sob o controlo do

[106] Decreto n.º 18.973 (1930). *Diário do Governo, 251*(28/10/1930), 2208-13.
[107] Decreto n.º 18.646 (1930). *Diário do Governo, 166*(19/7/1930), 1443-50.
[108] Decreto-lei n.º 27.279 (1936). *Diário do Governo, 276*(22/11/1936), 1511-1
[109] Decreto n.º 32.243 (1942). *Diário do Governo, 208*(5/9/1942), 1139-43.
[110] Decreto n.º 32.629 (1943). *Diário do Governo, 12*(16/1/1943), 31-41.

governo central e adotando os valores do novo regime. Esta situação manteve-se até o fim do Estado Novo (Pintassilgo, 2012).

A tabela 5.19. resume o número de inscritos nas escolas normais primárias, posteriormente escolas do magistério primário, durante o período trabalhado neste texto.

Tabela 5.19. Número de inscritos nas escolas de formação de professores para o ensino primário 1926-1970.

Anos	Inscritos
1926-1927	793
1933-1934	313
1947-1948	1155
1954-1955	2721
1961-1962	4494
1962-1963	4209
1963-1964	3332
1964-1965	2792
1965-1966	2700
1966-1967	2316
1967-1968	----
1968-1969	2274
1969-1970	3277

Fonte: Sampaio (1976, 1977)

Em 1960[111], assiste-se a uma extensão da escolaridade obrigatória e a aprovação de novos programas para o ensino primário, o que exigia alterações no desenvolvimento profissional dos professores[112]. No entanto, esta alteração não produziu mudanças fundamentais na estrutura e funcionamento dos cursos de formação de professores do ensino primário (Pintassilgo, 2012). Esta regulamentação irá durar até 1974, final do período em estudo.

A duração do curso de formação de professores do ensino primário sofreu, pois, diversas alterações entre 1926 e 1974. A tabela 5.20. apresenta uma síntese dessas alterações.

Tabela 5.20. Duração do curso de professores do ensino primário, 1928-1960.

Ano	Duração do curso
1928	Quatro anos.
1930	Dois anos (4 semestres).
1931	Dois anos (4 semestres).
1932	Três anos (6 semestres).
1936-42	Suspensão das matrículas no 1.º ano do curso das Escolas do Magistério Primário

[111] Decreto-lei n.º 43.369 (1960). *Diário do Governo*, *279*(2/12/1960), 2674-6.
[112] Decreto-lei n.º 43.369 (1960). *Diário do Governo*, *279*(2/12/1960), 2674-6.

1942	Três semestres mais um semestre de estágio
1960	Dois anos (4 semestres).

Fonte: Legislação (1928, 1930, 1931, 1932, 1936, 1942, 1960).

Inicialmente, o curso teve duração de quatro anos, herdando a estrutura do regime anterior. Depois disso, a duração do curso variou de um mínimo de três semestres mais um estágio que decorria entre 1 de março e 31 de julho (1942)[113] e um máximo de três anos (1932). Entre 1936 e 1942 as matrículas estiveram suspensas.

5.3.2. Exames de acesso aos lugares de professor do ensino primário

O estudo das normas que regulam os exames aos candidatos a professores primários, em particular as dimensões científicas, pedagógicas ou morais valorizadas, permite-nos conhecer as representações que os poderes públicos faziam da profissão, no sentido que lhe é atribuído por Julia (1995). Como se viu em 5.1., a reforma do ensino primário e do ensino normal de 1901, veio fixar pela primeira vez a obrigatoriedade de um diploma das escolas normais para o acesso à profissão de professor do ensino primário. Esta obrigatoriedade manteve-se durante o final do período da monarquia e durante todo o período republicano. No entanto, em 1931, o Ministro Cordeiro Ramos cria "postos de ensino", com o objetivo de diminuir o número de iletrados e resolver o problema do analfabetismo[114], devendo-se respeitar o regime de separação de sexos que vigorava para a escola primária[115]. Para a regência destes postos de ensino poderia ser designada pelo Ministro da Instrução Pública qualquer pessoa que possuísse a necessária idoneidade moral e intelectual. As nomeadas eram na sua quase totalidade do sexo feminino e

[113] Só eram admitidos a este estágio os candidatos que tivessem obtido aprovação no exame de saída das escolas do magistério primário. O estágio decorria em escolas primárias oficiais, tendo como objetivo integrar o futuro professor em todas as atividades escolares. Os estagiários eram distribuídos por professores do ensino primário considerados de referência, que acompanhavam os estagiários, no máximo de dois, na regência das aulas. Durante o estágio, os estagiários tinham que assistir obrigatoriamente a sessões de leitura comentadas sobre educadores modernos e conferências pedagógicas.

[114] Decreto n.º 20.604 (1931). *Diário do Governo, 283*(9/12/1931), 2680-81.

[115] No corpo do texto legislativo destacava-se que a criação dos postos de ensino visava a resolução do problema do analfabetismo, demonstrando-se assim a atenção que o governo dava à melhoria da escola primária. Pretendia-se levar o ensino da leitura e da escrita aos lugares onde a escola ainda não tinha chegado. Salientava-se, no entanto, a distinção entre as escolas e estes postos de ensino, referindo-se mesmo que a designação adotada pretendia que não houvesse lugar a confusões. Relativamente a esta possível confusão, realçava-se a experiência das escolas móveis, posta em prática durante o período republicano, que, segundo o decreto referido, tinham funcionado em localidades onde já existiam escolas regulares, com uma regência onde não eram verificadas habilitações profissionais. O decreto pretendia distinguir os postos de ensino das escolas móveis, referindo que os postos de ensino deveriam ficar limitados à função que lhe era atribuída, ou seja, não podiam ser criados em povoações dotadas de escolas oficiais, nem a menos de dois quilómetros destas. No entanto, em 1940, a falta de professores do ensino primário levou a que fosse necessário recorrer a regentes para completar lugares em escolas do ensino primário.

ficaram conhecidas como as "regentes". Para além da idoneidade, não se indicava qualquer outra habilitação necessária à regência dos postos.

O já referido decreto de 1931 conferia ao ministro o poder de nomear os regentes para os postos, com base na idoneidade moral e intelectual. Como não se exigia a comprovação desta idoneidade, as informações eram enviadas pelas entidades locais. Considerou-se em 1935[116], que estas informações nem sempre seriam fiáveis, pelo que se passou a exigir provas de aptidão limitadas ao programa do 2.º grau da instrução primária[117] para o acesso ao lugar de regente. Eram admitidos às provas indivíduos do sexo masculino com mais de 20 anos e menos de 45, e do sexo feminino com pelo menos 18 e não mais de 45 anos de idade. As provas eram prestadas perante um júri constituído por um inspetor de distrito, ou por um inspetor orientador, ou ainda um professor dos liceus, que presidia, e por dois vogais, professores do quadro geral do ensino primário. Estas provas eram realizadas nas capitais de distrito. Havia uma prova escrita de português, outra de aritmética e outra das restantes disciplinas, elaboradas pelos serviços de orientação pedagógica. As provas, escritas não deveriam demorar mais de uma hora e meia no total, sendo reprovados os candidatos que não obtivessem 10 valores em cada uma delas. Os candidatos aprovados realizariam uma prova oral, centrada na disciplina de português, com uma duração de dez minutos. Os candidatos do sexo feminino, que constituíam a esmagadora maioria, efetuavam ainda uma prova de lavores femininos.

Em 1936 o Ministro Carneiro Pacheco toma um conjunto de medidas visando o enquadramento das escolas primárias no ideário do Estado Novo[118]. Para além de decisões sobre a inscrição obrigatória na Mocidade Portuguesa de todos os alunos do ensino primário elementar, a necessidade de uma autorização ministerial para o casamento das professoras, a ameaça de expulsão da função pública dos docentes que exprimissem desacordo com o regime político, a imposição de um livro único para o ensino primário, entre outras[119], nas duas páginas do decreto-lei o Ministro ainda suspende as matrículas de novos alunos nas escolas do magistério, converte os postos de ensino em postos escolares, considerados formas embrionárias da escola elementar

[116] Decreto n.º 25.797 (1935). *Diário do Governo, 199*(28/8/1935), 1260-1.
[117] Em 1935 estava ainda em vigor o Decreto n.º 18.140, de 1930, que dividia o ensino primário elementar em dois graus. O primeiro grau correspondia às três primeiras classes, e era considerado ensino obrigatório, o segundo grau correspondia à quarta classe. Neste caso, passava-se a exigir aos candidatos a regentes que prestassem provas ao nível da 4.ª classe do ensino primário elementar.
[118] Decreto-lei n.º 27.279 (1936). *Diário do Governo, 276*(22/11/1936), 1511-1
[119] Este Decreto-lei n.º 27.279 apresentava medidas de caráter transitório, e consideradas de urgência, enquanto era preparada reforma do ensino primário. O objetivo explicitado era o de aumentar a cultura dos portugueses e o de combater o analfabetismo. Neste decreto-lei criticava-se as "entorpecedoras utopias e as aspirações ilegítimas" atribuídas à educação popular, afirmando-se que esta se deveria centrar no "ler, escrever e contar, e a exercer as virtudes morais e um vivo amor a Portugal.", criticando-se ainda "o estéril enciclopedismo racionalista" que, segundo o legislador, deturpava o ensino primário elementar. Para o desenvolvimento deste objetivo, a disseminação dos postos escolares era considerada essencial.

e reduz o âmbito das provas a realizar pelos candidatos a regentes exigindo apenas conhecimentos ao nível do ensino primário elementar que em 1938 passará de quatro para três anos (Almeida & Candeias, 2014). Obriga ainda as regentes que tivessem sido nomeados sem prestação de prova a realizar este exame no ano letivo de 1936/37.

Em 1937 precisou-se melhorar o modo como devia ser organizado o exame das regentes dos postos escolares[120]. O exame constava de provas de cultura, que incidiam sobre os programas do ensino primário elementar, e provas de aptidão pedagógica. A prova que incidia sobre conteúdos de matemática era a terceira, de um total de três provas de cultura escritas. A prova consistia na resolução de seis problemas, com a duração de 45 minutos. Referia-se que entre a prova escrita de redação, a segunda do exame, e a prova de aritmética, devia existir um intervalo de 15 minutos. O candidato que obtivesse a classificação de mau numa prova escrita era eliminado. No caso da prova escrita de aritmética a classificação de mau era atribuída se o candidato errasse a resolução de dois problemas. Na prova de aptidão pedagógica os candidatos tinham de dar uma lição a uma classe, sobre um assunto designado pelo júri e tirado à sorte até às 17 horas do dia anterior ao da prestação da prova. A classificação final era atribuída de acordo com uma escala definida legalmente. Os exames continuavam a ser realizados nas sedes de distrito, mas a constituição do júri era alterada, relativamente à legislação anterior, sendo este constituído pelo diretor do distrito escolar, que o presidia, e por dois vogais de entre quatro professores da sede do distrito, nomeados pelo diretor geral do ensino primário. As regentes que já tivessem completado os 45 anos de idade não eram submetidos a estas provas, sendo a sua competência julgada por uma inspeção.

Em 1940, pouco tempo após a saída de Carneiro Pacheco do Ministério da Educação Nacional, e perante a patente falta de professores para o ensino primário, o governo legisla um processo expedito de formação. É o próprio decreto-lei[121] assinado pelo novo Ministro Mário de Figueiredo que, implicitamente criticando a política de Carneiro Pacheco, argumenta que, mesmo utilizando todos os professores auxiliares e agregados existentes, e recorrendo às regentes agregadas cuja função se deveria limitar aos postos escolares, ficariam encerradas naquele ano letivo 134 escolas. por falta de professores. Esta situação seria agravada com a passagem à inatividade de 160 professores por ano, em média, pelo que, até à saída dos primeiros professores das escolas do magistério primário, após a sua reabertura, estariam em falta aproximadamente 807 professores. A situação piorava ainda num contexto em que o governo afirmava pretender alargar a rede escolar.

[120] Portaria n.º 8.731 (1937). *Diário do Governo*, *129*(4/6/1937), 545-6.
[121] Decreto-lei n.º 30.951 (1940). *Diário do Governo*, *286*(10/12/1940), 1431-56.

Na emergência, propunha-se que a habilitação para o magistério primário se fizesse através de um exame de cultura específica, um estágio de preparação didática curto, um exame de aptidão pedagógica e um Exame de Estado. A estas provas só seriam admitidos candidatos com o curso geral dos liceus, ou com o 2.º ciclo dos liceus, sendo necessário que tivessem entre 18 e 28 anos. O exame de cultura específica, para além de português e de geografia-história, abrangia os conteúdos de matemática, com a realização de provas escritas e orais. A nota de medíocre em duas disciplinas, ou de mau numa, conduz à eliminação. Eram aprovados os candidatos que obtivessem pelo menos 10 valores em cada disciplina, sendo a classificação expressa pela média aritmética das notas das diferentes disciplinas. O estágio de preparação didática durava três meses e era realizado numa escola do ensino primário. O exame de preparação pedagógica era constituído pela realização de uma lição com alunos. No estágio de preparação didática o candidato tinha de elaborar um relatório. No exame de aptidão pedagógica, o júri devia ter em consideração as informações das provas realizadas no exame, o relatório do estagiário e as informações do parecer sobre o relatório. Estes exames habilitavam para nomeação provisória de professor agregado. O Exame de Estado era constituído por quatro lições a alunos, uma a cada classe do ensino primário. Era ainda feito um interrogatório sobre o plano de cada lição. O acesso a este Exame de Estado podia ser feito depois de um ano de serviço letivo numa escola. Eram aprovados os candidatos que obtivessem pelo menos 10 valores em três lições, desde que na outra lição não obtivessem menos de 8 valores. Este exame habilitava para a nomeação definitiva de professor agregado.

Estas medidas surgiram num momento em que as escolas de habilitação para o magistério estavam encerradas há cinco anos, levando a uma situação de falta de professores para assegurar as escolas existentes. Mesmo com a reabertura das escolas de formação de professores, só passados três anos estariam aptos os primeiros professores, pelo que se pensava que este processo de emergência para recrutamento de professores seria eficiente no preenchimento dos quadros do ensino primário. Por um lado, considerava-se que a exigência de pelo menos o 2.º ciclo do liceu aos candidatos garantiria que dominavam os conteúdos, por outro lado, o contacto com a função despertaria nos candidatos as qualidades para o seu exercício, afirmando-se que "o candidato aprendeu a ensinar, ensinando; ensinando, mostrará se aprendeu a ensinar" (Decreto-lei n.º 30.951, 1940, p. 1454). Apesar das carências de professores para o ensino primário, a reabertura das escolas do magistério vai demorar ainda dois anos[122].

No que diz respeito à disciplina de matemática, o programa das provas do exame de cultura[123] estava dividido em aritmética, potenciação e geometria, contemplando conteúdos

[122] Decreto n.º 32.243 (1942). *Diário do Governo*, *208*(5/9/1942), 1139-43.
[123] Decreto n.º 30.968 (1940). *Diário do Governo*, *290*(14/12/1940), 1468-72.

ministrados até ao 2.º ciclo dos liceus excluindo todos os conteúdos de álgebra. Em aritmética avaliavam-se conteúdos como numeração árabe e romana, quatro operações fundamentais, propriedades das operações e regras práticas. Na potenciação estavam incluídas as expressões numéricas, noção de múltiplo e submúltiplo, critérios de divisibilidade, máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum, fatores primos e decomposição em fatores primos. Podiam ser avaliados conteúdos relacionados com os números fracionários e as operações com estes números, assim como os números decimais. A raiz quadrada e a sua extração também constavam nos assuntos a avaliar, tal como o sistema métrico. Antes dos conteúdos relacionados com a geometria, surgiam ainda as razões e proporções geométricas, proporcionalidade direta e inversa e a regra de três simples e composta. Na geometria podiam ser avaliados conteúdos relacionados com os sólidos geométricos, ângulos, polígonos e não polígonos, volumes de poliedros e do cilindro e cone.

Em suma, a partir do início do século XX o acesso à profissão passou a ser condicionado à certificação numa escola de formação. No entanto, desde o início da década de 1930, e a par com o encerramento das escolas de formação, este acesso passou a poder ser feito através de uma prova ao nível do 2.º grau do ensino primário elementar, correspondente à 4.ª classe, e mais tarde mesmo ao nível da 3.ª classe, o que levou ao exercício do magistério primário indivíduos com escassíssima formação científica e pedagógica. Estas decisões, baseadas essencialmente na desconfiança do regime nas instituições de formação, apenas foram corrigidas a partir de 1942 e significaram anos de retrocesso na profissionalização dos professores do ensino primário.

5.3.3. A matemática nos exames de admissão às escolas de formação de professores do ensino primário

Nos primeiros anos após o golpe militar de 1926, as condições de acesso às escolas normais primárias permaneceram semelhantes às do período anterior. Como habilitação mínima, os candidatos teriam de apresentar o exame final do 1.º ciclo do curso dos liceus e realizar exames de entrada que incluíam provas escritas, provas práticas e provas orais. Na área da matemática realizavam exame de aritmética e geometria. Os candidatos poderiam ainda apresentar como habilitação o exame final das provas preparatórias do ensino técnico, o exame final do curso preparatório do Instituto do Professorado Primário Oficial Português[124], ou o exame final do curso das entretanto extintas Escolas Primárias Superiores.

[124] O Instituto do Professorado Primário Oficial Português era um estabelecimento de previdência com fins de instrução e beneficência, destinado a proteger as órfãs e filhas de professores primários oficiais.

Os conteúdos dos programas dos exames de admissão às escolas normais foram alterados em 1928[125] e incluíam essencialmente temas de aritmética, geometria e álgebra elementar (tabela 5.21.) sem grandes alterações relativamente à legislação anterior (ver capítulo 2.2).

Tabela 5.21. Conteúdos matemáticos nos exames de admissão em 1928.

Aritmética
- Números inteiros e respetivas operações. - Frações, decimais e respetivas operações. - Potenciação e raiz quadrada. - Cálculo comercial. - Sistema legal de pesos e medidas.
Geometria
- Noções fundamentais de geometria: conceitos de volume, superfície, linha e ponto. Axiomas e postulados fundamentais da geometria. - Geometria plana: Retas paralelas, perpendiculares e oblíquas. Noção de ângulo. Circunferência e círculo. Triângulos, quadriláteros e suas propriedades fundamentais. - Determinação de áreas de figuras planas.
Álgebra elementar
- Expressões algébricas. - Vantagem da utilização de sinais como meio para simplificar e da utilização de letras como meio para generalizar. - Cálculo do valor numérico de uma expressão algébrica, números negativos, regras dos sinais, operações algébricas sobre monómios e polinómios. - Frações algébricas, equações do 1.º grau a uma incógnita e resolução de problemas do 1.º grau.

Fonte: Decreto n.º 16.038, 15 de outubro, 1928.

Com a instituição das escolas do magistério primário, em 1930[126], as qualificações mínimas de acesso foram reduzidas para o 4.º ano do ensino primário elementar. Os alunos com o 2.º ciclo do curso dos liceus estavam isentos de exames de admissão. As alterações à legislação compiladas em 1932[127], confirmaram as condições de admissão às escolas estabelecidas em 1930. Na reabertura das escolas em 1942[128], as qualificações mínimas foram alteradas, sendo de novo exigido o 2.º ciclo do curso dos liceus (5 anos após a instrução primária).

Apesar da redução das qualificações mínimas de acesso, o regulamento das escolas do magistério primário, publicado em 1931, salientava que, até que saísse nova resolução do Governo, estariam em vigor os programas publicados em 1916[129] onde os conteúdos matemáticos do exame de admissão embora tivessem alguma semelhança com os programas dos exames de admissão de 1928, apresentavam alguns conteúdos que iam para além do que era exigido em

[125] Decreto n.º 16.038 (1928). *Diário do Governo*, *237*(15/10/1928), 2100-3.
[126] Decreto n.º 18.646 (1930). *Diário do Governo*, *166*(19/7/1930), 1443-50.
[127] Decreto n.º 21.695 (1932). *Diário do Governo*, *229*(29/9/1932), 1963-70.
[128] Decreto n.º 32.243 (1942). *Diário do Governo*, *208*(5/9/1942), 1139-43.
[129] Decreto n.º 2.213, Regulamento e programas sobre o ensino normal primário (1916). *Diário do Governo*, *24*(10/2/1916), 65-146.

1928, sendo por isso mais exigentes. Durante o restante tempo deste período, esses programas não foram objeto de nova regulamentação.

Com a reestruturação do curso em 1960[130], foram mantidas as condições de admissão às escolas do magistério primário, bem como as provas de acesso. Aqueles que estavam na profissão há pelo menos 5 anos sem o curso poderiam ser admitidos sem exame de admissão, incluindo as regentes, desde que tivessem as habilitações mínimas.

A tabela 5.22. resume as condições de admissão (idade e qualificações mínimas), exames de acesso e seu conteúdo matemático entre 1928 e 1960. As condições estabelecidas em 1960 mantiveram-se até 1974, final do período em análise neste texto.

Tabela 5.22. Condições de admissão e exames de acesso às escolas de formação de professores do ensino primário, 1928-1960.

Ano	Idade	Qualificações	Exames de acesso
1928	14 anos	Exame de passagem ao 2.º ciclo do curso dos liceus (6.º ano)	- Provas escritas, prova prática e provas orais - Provas escritas: um problema de aritmética (1 hora) e execução de um desenho geométrico e cópia natural de objetos usuais de formas simples (2 horas) - Provas orais: aritmética e geometria; desenho
1929	14 anos	Exame de passagem ao 2.º ciclo do curso dos liceus (6.º ano)	- Provas escritas, prova prática e provas orais - Provas escritas: um problema de aritmética e um problema de geometria (90 minutos); execução de um desenho geométrico e cópia natural de objetos usuais de formas simples (2 horas) - Provas orais: aritmética e geometria; desenho
1930	16 anos	2.º grau do ensino primário elementar (4.º ano)	- Provas escritas, prova prática e provas orais - Os candidatos com o curso geral dos liceus estavam dispensados do exame
1931	16 anos e máximo de 35 anos	Não são mencionadas qualificações mínimas	- Provas escritas, prova prática e provas orais - Os candidatos com o curso geral dos liceus estavam dispensados do exame
1932	15 anos e máximo de 36 anos	2.º grau do ensino primário elementar (4.º ano)	- Provas escritas, prova prática e provas orais. As provas escritas e a prova prática eram eliminatórias - Os candidatos com o curso geral dos liceus estavam dispensados do exame
1936-42	Suspensão das matrículas no 1.º ano do curso		
1942	16 anos e máximo de 28 anos	2.º ciclo liceal (10.º ano)	- Provas escritas e orais. A matemática era avaliada numa das três provas

130 Decreto-lei n.º 43.369 (1960). *Diário do Governo, 279*(2/12/1960), 2674-6.

1960	16 anos e máximo de 28 anos	2.º ciclo liceal (9.º ano)	- Provas escritas (90 minutos cada) e provas orais (15 minutos para cada disciplina) - Aritmética e geometria era uma das três disciplinas objeto das provas escritas

Fonte: Legislação (1928, 1929, 1930, 1931, 1932, 1936, 1942, 1960).

5.3.4. A matemática nas disciplinas dos cursos de formação inicial de professores do ensino primário

Depois do golpe militar de 1926, que impôs a Ditadura Militar, a estrutura do curso foi alterada pela primeira vez em 1928[131]. O curso mantinha uma disciplina da componente de especialidade teórica de matemática e outra de metodologia onde eram lecionados temas sobre o ensino da matemática, conservando a estrutura usual desde os primeiros cursos em meados do século XIX. Do mesmo modo, não foram propostos novos programas para as disciplinas e é apenas referido que deveria ser utilizado o programa de 1919[132].

O corte ocorre em 1930. Seguindo uma tendência de reduzir os requisitos matemáticos dos cursos educacionais e exames (Matos, 2014), a instituição das escolas do magistério primário em 1930 eliminou a disciplina com conteúdo matemático teórico da componente da especialidade. Ao mesmo tempo, o caráter profissionalizante do curso foi reforçado, com um aumento da carga horária das disciplinas com conteúdo didático. Na reabertura das escolas do magistério primário, em 1942, o conteúdo matemático teórico ficou limitado à geometria na disciplina de *Desenho e trabalhos manuais educativos*. A metodologia de ensino da matemática passou a ser um conteúdo da disciplina de *Didática Especial*[133].

A tabela 5.23. indica os nomes das disciplinas relacionadas com a matemática dos cursos de formação inicial dos professores do ensino primário, distinguindo as disciplinas com conteúdo matemático da componente de ciências da especialidade, daquele cujo enfoque é a forma de ensinar matemática, ou seja, com um conteúdo essencialmente didático.

Tabela 5.23. Disciplinas dos cursos de formação inicial de professores do ensino primário com conteúdos de matemática.

Ano	**Disciplinas**	
	Com conteúdo matemático	**Com conteúdo didático**
1928	Matemática	Pedagogia. Metodologia
1930		Pedagogia geral e experimental
1931		Pedagogia geral e experimental; Didática; Prática na escola de aplicação

[131] Decreto n.º 16.038 (1928). *Diário do Governo*, *237*(15/10/1928), 2100-3.
[132] Decreto n.º 6.203, Programas do ensino primário e do ensino normal (1919). *Diário do Governo*, *227*(7/11/1919), 2229-2385.
[133] Decreto n.º 32.243 (1942). *Diário do Governo*, *208*(5/9/1942), 1139-43.

1932		Pedagogia; Didática
1936-42	Suspensão das matrículas no 1.º ano do curso	
1942	Desenho e trabalhos manuais educativos	Didática especial; Prática pedagógica
1960	Desenho e trabalhos manuais educativos	Didática especial do grupo B (Aritmética e Geometria, Ciências Geográfico-Naturais e Trabalhos Manuais)

Fonte: Legislação (1928, 1930, 1931, 1932, 1936, 1942, 1960).

5.3.5. Programas das disciplinas dos cursos de formação inicial dos professores do ensino primário

Apesar da instituição das escolas do magistério primário em 1930, e toda a reestruturação que o curso sofreu como resultado dessa mudança, os programas das disciplinas só foram publicados em 1935[134]. Em 1936 as matrículas no 1.º ano destas escolas foram suspensas e as escolas só reabriram em 1942, sendo publicados novos programas em 1943[135].

Os programas publicados em 1935 contemplam as disciplinas dos dois cursos previstos para as escolas do magistério primário, curso do magistério primário elementar e o curso do magistério infantil[136]. Os programas das disciplinas comuns aos dois cursos são apresentados em seis grupos de disciplinas.

Não existe uma disciplina de matemática com componente teórica, por isso, os conteúdos de matemática estariam associados à disciplina de *Didática*. Na 1.ª classe do curso esta disciplina abordava conteúdos gerais, como o conceito de didática, os métodos, terminologia didática, metodologia, processologia pedagógica e aspetos relativos à organização de uma escola e de uma turma na sala. A parte especial da didática era só abordada na 2.ª classe do curso. Nesta parte especial era estudada a didática das disciplinas que compunham o ensino primário elementar da época. O programa de cada uma das disciplinas do ensino primário era examinado nesta disciplina, assim como as instruções que pudessem ser emanadas pelos serviços de orientação pedagógica e aperfeiçoamento do ensino. Na 2.ª classe desta disciplina existia uma parte dedicada à didática aplicada.

Como estes programas não vinham acompanhados de quaisquer diretrizes de caráter pedagógico ou didático, não é possível perceber quais seriam as indicações para a didática da aritmética e da geometria.

A disciplina de *Modelação e desenho*, que estava presente nas duas classes do curso, também apresentava alguns conteúdos que se podiam relacionar com a matemática,

[134] Decreto n.º 25.311 (1935). *Diário do Governo*, 106(10/5/1935), 636-44.
[135] Decreto n.º 32.629 (1943). *Diário do Governo*, *12*(16/1/1943), 31-41.
[136] O Decreto n.º 18.646, de 1930, que instituiu as escolas do magistério primário previa que na Escola do Magistério Primário de Lisboa fosse ministrado do magistério especial de anormais.

nomeadamente com a geometria, como a modelação de formas geométricas (sólidos) ou a composição decorativa com elementos geométricos.

É de destacar que no curso do magistério infantil a disciplina de *Jogos educativos* apresenta alguns conteúdos que apontam para a iniciação do cálculo como o conhecimento de materiais, os jogos de cálculo e a didática da iniciação do cálculo, o conceito de número pelo sentido táctil muscular (enfiar contas, modelação, diferentes jogos), o conceito de número pelo sentido visual (lotos de botões, saquinhos de conchas, material froebiliano), o conceito de número pelo sentido auditivo, iniciação da memória visual dos números através de jogos diversos e a associação do sinal gráfico com o número.

Estes programas são a consolidação da grande redução curricular prevista em 1930[137], com a constituição das escolas do magistério primário. Se forem confrontados com os programas previstos em 1928, são excluídas as disciplinas que apresentavam uma componente de ciências da especialidade teórica, onde se inclui a disciplina de Matemática, simplificando-se e acentuando-se o caráter profissionalizante do curso, com uma redução ao que era considerado essencial.

Os programas publicados em 1943 vêm confirmar o previsto nos programas publicados em 1935, embora estes já sejam acompanhados de instruções gerais que permitem discriminar o que se pretendia em cada uma das disciplinas. Os conteúdos relacionados com a matemática passaram a ser essencialmente ensinados em *Didática Especial*. Nesta disciplina, a aritmética era abordada essencialmente a partir de um ponto de vista educacional, valorizando-se a dimensão didática. Os conteúdos matemáticos abordados eram sobretudo os do ensino primário, a começar pela análise dos programas desse nível de ensino. O programa da disciplina de *Desenho* e *Trabalhos Manuais Educativos* também tinha alguns conteúdos que se relacionavam com a matemática, especificamente com a geometria (tabela 5.24.). Assim, nesta reforma não havia na estrutura do curso nenhuma disciplina de matemática com uma componente de especialidade teórica, passando os conteúdos de aritmética e de geometria a fazer parte da disciplina *Didática Especial*.

Tabela 5.24. Tópicos principais das disciplinas com conteúdos matemáticos, 1943.

Didática Especial	**Desenho e trabalhos manuais educativos**
- Metodologia de ensino dos números inteiros e das respetivas operações - Metodologia de ensino das frações e dos decimais - Números complexos: medidas de tempo - Regras de redação e técnicas de apresentação das situações problemáticas	- Linha reta, semirreta e segmento de reta. Retas paralelas e perpendiculares - Medição de ângulos. Construção de ângulos e a sua divisão. Traçado da bissetriz de um ângulo sem recorrer ao seu vértice - Polígonos: construção de triângulos e de quadriláteros

[137] Decreto n.º 18.646 (1930). *Diário do Governo, 166*(19/7/1930), 1443-50.

- Técnicas de construção de testes diagnósticos e de testes prognósticos.	- Desenho de circunferências de raio dado, passando por dois pontos dados

Fonte: Decreto n.º 32.629, 6 de janeiro, 1943.

A reformulação do curso efetuada em 1960[138] veio reforçar a componente das metodologias de ensino, quer através da separação da *Didática Especial A*, específica para o ensino das humanidades, da *Didática Especial B*, com o ensino das ciências naturais e matemática, quer fornecendo maior carga horária para estas disciplinas. A *Didática Especial B* era ensinada por um professor generalista que se especializava em metodologias do ensino da matemática. Esta especialização não significava que os professores tivessem obtido qualquer formação específica em metodologia de ensino desta disciplina. Significava apenas que esses professores acabavam por se especializar nessas metodologias, durante o exercício da sua prática. Apesar das alterações feitas no curso em 1960, os programas não foram alterados e continuou a não existir uma disciplina da componente de ciências de especialidade de matemática.

5.3.6. Os Exames de Estado

A legislação publicada em junho de 1927[139], veio alterar a forma de realização do exame final das escolas normais primárias, que estava definido desde 1922[140]. Considerava-se, então, que o decreto de 1922 não discriminava nem regularizava devidamente a forma de realização das provas, complicando os serviços e tornando-os dispendiosos. No entanto, a alteração limitou-se à constituição do júri que passava apenas a ser formado por seis professores eleitos pelo conselho escolar e pelo diretor, que presidia ao júri.

O decreto de criação das escolas do magistério primário de 1930[141] vai alterar profundamente o modo como os exames finais se realizavam. Até então estes exames eram organizados localmente de acordo com a legislação de 1922[142] mas agora os Exames de Estado, segundo a nova denominação, seriam controlados a nível central, com júris determinados pelo Governo e incorporando seus representantes. Os Exames seriam constituídos por três provas:

a) execução de todos os serviços escolares de um dia letivo;

b) crítica e argumentação sobre os planos das lições realizadas;

c) crítica e argumentação sobre as lições dadas.

[138] Decreto-lei n.º 43.369 (1960). *Diário do Governo, 279*(2/12/1960), 2674-6.
139 Decreto n.º 13.792 (1927). *Diário do Governo*, 125(17/06/1927), 1002.
140 Decreto n.º 8.230 (1922). *Diário do Governo*, 134, (5/7/1922).
[141] Decreto n.º 18.646 (1930). *Diário do Governo*, *166*(19/7/1930), 1443-50.
[142] Decreto n.º 8.230 (1922). *Diário do Governo*, *134*(5/7/1922), 667 com alterações pelo Decreto n.º 13.792 (1927). *Diário do Governo*, *125*(17/6/1927), 1002.

A crítica e argumentação sobre o plano das lições deviam ser entregues ao presidente júri antes da prestação da prova de execução de um dia de serviço escolar, onde se incluíam as lições. O assunto a tratar nas lições era tirado à sorte com 48 horas de antecedência e os planos deviam ser acompanhados por um relatório justificativo dos motivos pedagógicos. O presidente do júri era o representante das escolas do magistério primário no Conselho Superior da Instrução Pública, acompanhado por um inspetor do ensino primário e por um professor efetivo da escola do magistério primário da cidade onde fosse realizado o exame. Na sessão de julgamento deviam estar na posse do júri todos os trabalhos escritos realizados pelos candidatos durante o estágio nas escolas de aplicação, que deviam ser tomados em conta para efeitos de classificação. As classificações obtidas durante o curso deviam ser tomadas em linha de conta na atribuição da classificação final.

Com a reabertura das escolas do magistério primário em 1942[143], o Exame de Estado continuou a ser uma condição necessária para o exercício do magistério primário. Eram admitidos a este exame os candidatos que tivessem completado o estágio previsto para o último semestre do curso. As provas, que não eram discriminadas, eram prestadas perante um júri único, nomeado livremente pelo Ministro da Educação Nacional, entre professores de qualquer grau de ensino, inspetores do ensino primário, diretores de distrito escolar ou os seus adjuntos.

Em 1960[144], explicita-se que o Exame de Estado era constituído por uma parte escrita, uma parte prática e uma parte oral. Na parte escrita os candidatos tinham de prestar provas nas disciplinas de *Pedagogia*, *Didática Geral* e *História da Educação*, *Psicologia Aplicada à Educação* e de *Didática Especial*, com a duração de 90 minutos para cada prova. A parte prática constava de uma lição a uma classe do ensino primário. O candidato devia fazer e entregar o respetivo plano com 24 horas de antecedência, sendo-lhe concedidos 90 minutos para a concretização da aula planeada. A parte oral constava da crítica e discussão dos exames escritos e práticos e tinha a duração máxima de 30 minutos. As provas eram prestadas nas escolas do magistério perante um júri único que as classificava com uma escala de medíocre a muito bom, sendo eliminatória a classificação de medíocre. A classificação final era expressa numa escala numérica de 10 a 20. Na nota final era tida em conta a nota do exame de admissão, a média de frequência, relatório e informação do estágio, e as classificações atribuídas às várias provas do Exame de Estado. O júri único era constituído pelo diretor-geral do ensino primário, ou por um seu delegado, e pelos diretores das escolas do magistério primário. O júri era ainda constituído por professores de *Didática* e de *Psicologia*, por inspetores-orientadores, diretores do distrito escolar ou professores do ensino primário.

---

143 Decreto n.º 32.243 (1942). *Diário do Governo, 208*(5/9/1942), 1139-43.
144 Decreto-lei n.º 43.369 (1960). *Diário do Governo, 279*(2/12/1960), 2674-6.

5.3.7. Qualificações dos docentes dos cursos de formação inicial de professores do ensino primário

Em 1928[145], os professores das escolas normais primárias passaram a ser agrupados em doze grupos de disciplinas, sendo o 6º grupo o da *Matemática* e o 2.º grupo o da *Metodologia*. Uma análise das qualificações consideradas necessárias para a docência nas escolas de formação de professores do ensino primário mostra duas fases. Na primeira até 1930, a maioria dos professores que ensinavam matemática deveriam ter uma habilitação específica em matemática, obtida em universidades, e deveriam ter aprovação em disciplinas das escolas normais superiores ou teriam frequentado um curso de *Ciências Pedagógicas* nas Faculdades de Letras.

Em 1930[146] as escolas de formação de professores do ensino primário sofrem diversas alterações, sendo possível distinguir aqui uma segunda fase quanto às habilitações exigidas para a docência de conteúdos matemáticos nas escolas de formação dos professores do ensino primário. Uma das alterações prende-se com o plano de estudos de onde desaparece a disciplina de *Matemáticas Elementares* e o respetivo grupo de *Matemática*[147]. Conforme vimos anteriormente, a formação nestas novas escolas tem um âmbito mais limitado, disponibilizando apenas saberes diretamente relacionados com a função letiva. Desaparece o objetivo de consolidação dos saberes adquiridos nos liceus, bem como o de aprofundamento de didáticas específicas através de especialistas dedicados. Os temas matemáticos apenas são agora mencionados na disciplina de *Didática*. Os professores que pretendessem lecionar esta disciplina tinham de prestar provas públicas, sendo selecionados de entre os diplomados pelas escolas normais superiores com Exame de Estado em qualquer grupo do ensino liceal ou deviam ter frequentado com aproveitamento as cadeiras de *Psicologia Geral* e *Psicologia Experimental* das Faculdades de Letras. Os temas relacionados com o ensino da matemática no ensino primário podiam agora ser lecionados por qualquer professor com formação para o ensino secundário tendo ou não uma formação específica em matemática. Esta situação não se vai alterar até 1974.

Alguns conteúdos matemáticos, principalmente da geometria, também eram tratados na disciplina de *Desenho*. Para esta disciplina, os docentes podiam ser recrutados entre os professores do ensino primário elementar que tivessem cadeiras de desenho de ornato, modelação de ornato, desenho de cabeça e tronco, desenho de estátua nas escolas de belas artes.

---

[145] Decreto n.º 16.037 (1928). *Diário do Governo, 237*(15/10/1928), 2094-100.
[146] Decreto n.º 18.646 (1930). *Diário do Governo*, *166*(19/7/1930), 1443-50 com alterações introduzidas pelo Decreto n.º 20.254 (1931). *Diário do Governo*, *166*(25/8/1931), 1942-5.
[147] Desaparecem igualmente as disciplinas relacionadas com línguas, geografia, história ou ciências.

Com a reabertura das escolas do magistério primário em 1942[148], houve uma alteração na regulamentação de acesso à docência nestas escolas. Nas escolas do magistério primário podiam existir professores de nomeação vitalícia ou em comissão, professores contratados e professora da disciplina de educação feminina. Os professores de *Didática Especial*, disciplina onde eram abordados conteúdos relacionados com o ensino da matemática, podiam ser de nomeação vitalícia ou em comissão. Os professores de *Didática Especial* eram nomeados livremente pelo Ministro da Educação Nacional, de entre indivíduos que estivessem habilitados para o magistério primário, com pelo menos 16 valores de diploma e cinco anos de exercício docente.

Com a reestruturação do plano de estudos em 1960[149], a disciplina de *Didática Especial* passou a ser ministrada por dois professores que iriam reger também a disciplina de Legislação e Administração Escolares. A regulamentação não explicita quais as habilitações para a docência destas disciplinas, apenas referindo que eles podiam obter a nomeação definitiva depois de dois anos de bom e efetivo serviço, tendo para isso de realizar concurso de provas escritas e orais sobre a matéria do programa das disciplinas que iam lecionar.

A tabela 5.25. detalha os requisitos para a docência nas escolas de formação de professores do ensino primário, que eram especificados na legislação.

Tabela 5.25. Habilitações para a docência nas escolas do magistério primário (1928-1974).

Ano	Habilitações
1928	Para além de habilitação específica do respetivo grupo, os professores efetivos e agregados tinham que ter habilitação das escolas normais superiores para o magistério desse grupo. Os professores das escolas anexas eram professores do ensino primário.
1930	Os professores eram recrutados por concurso de provas públicas entre os diplomados pelas escolas normais superiores com exame de estado em qualquer grupo do magistério secundário, e que tivessem frequentado com aproveitamento as cadeiras de Pedagogia Geral e Psicologia Experimental das Faculdades de Letras. Os professores das escolas de aplicação teriam que ser diplomados com o exame de estado em qualquer dos grupos das escolas normais superiores, ou com exame de estado do magistério primário, ou ainda com exame de habilitação das escolas normais primárias.
1931	Os professores das escolas do magistério primário teriam que ter aprovação em todas as cadeiras de ciências pedagógicas das Faculdades de Letras. Os professores do 3.º grupo, onde se incluía a Didática deveriam ter habilitação para o exercício do magistério primário ou um curso superior.
1942	Os professores de Didática Especial eram nomeados pelo Ministro da Educação Nacional, de entre os que estivessem habilitados para o magistério primário, com pelo menos 16 valores de diploma e cinco anos de exercício docente.
1960	A regulamentação não explicita quais as habilitações necessárias para docência destas disciplinas, mas refere que estes professores podiam ter nomeação definitiva depois de

[148] Decreto n.º 32.243 (1942). *Diário do Governo, 208*(5/9/1942), 1139-43.
[149] Decreto-lei n.º 43.369 (1960). *Diário do Governo, 279*(2/12/1960), 2674-6.

	dois anos de bom e efetivo serviço, tendo para isso de realizar concurso de provas escritas e orais sobre a matéria do programa das disciplinas que iam lecionar.

Fonte: Legislação (1928, 1930, 1931, 1942, 1960).

Como consequência das alterações ao plano de estudos, neste período que vai de 1926 a 1974, é possível distinguir duas fases. Numa primeira fase que vai até 1930, e ainda na sequência do período anterior, existia no plano de estudos das escolas de formação de professores do ensino primário, uma disciplina de matemática, *Matemáticas Elementares*, e, por isso, exigia-se para a docência desta disciplina, um docente com habilitação específica para este grupo, que tivesse também a habilitação das escolas normais superiores. Como consequência da legislação publicada em 1930, e, posteriormente, em 1931, o plano de estudos destas escolas deixa de apresentar uma disciplina de matemática. A matemática passa a ser lecionada apenas do ponto de vista da didática, numa disciplina designada por *Didática*, e a partir de 1942, por *Didática Especial*. Por esta razão, a estes docentes não era exigida qualquer formação específica no âmbito da matemática. Inicialmente, em 1931, era exigida a habilitação para o exercício do magistério primário ou um curso superior, sendo também exigida aprovação em todas as cadeiras de ciências pedagógicas das Faculdades de Letras. A partir de 1942 passa a ser exigida a habilitação para o exercício do magistério primário.

5.3.8. Em síntese – 1926 a 1974

No início deste período, com a legislação publicada em 1928 e 1929, já no regime de Ditadura Militar, vai exigir como qualificação para o acesso às escolas de formação de professores do ensino primário o exame de admissão ao segundo ciclo dos liceus, correspondente à frequência escolar de seis anos (6.º ano). No entanto, a reforma de 1930 veio definir apenas o 4.º ano do ensino primário elementar como condição de acesso ao curso, o que significou uma redução das habilitações exigidas no final do período anterior, quando era exigido o exame de admissão ao segundo ciclo dos liceus. Esta condição vigorou por um período de doze anos, sendo apenas alterada em 1942, quando se passou a ser exigido o segundo ciclo dos liceus (9.º ou 10.º ano). Destaca-se aqui um largo período em que as habilitações mínimas exigidas são muito reduzidas, o que terá tido impacto nos conhecimentos matemáticos dos futuros professores deste nível de ensino.

No que diz respeito às disciplinas do curso, no princípio deste período destacava-se a *Matemática Elementar*, visando a preparação científica e cultural dos professores, e a *Metodologia*, focada principalmente na didática do ensino da matemática. As alterações feitas no plano de estudos da formação de professores do ensino primário em 1930, excluíram a matemática, enquanto disciplina teórica da componente de especialidade, da formação de professores deste nível de ensino, passando a centrar-se apenas na didática da disciplina no ensino primário. Mais tarde, com as alterações introduzidas em 1942 e em 1960, o caráter profissionalizante foi reforçado com a criação de uma nova disciplina, a *Didática*, posteriormente *Didática Especial*. Nesta análise destaca-se o empobrecimento curricular dos cursos das escolas do magistério primário, com a ausência de disciplinas da componente de ciências de especialidade com um caráter teórico ao nível da matemática. Isto acontece também a um nível mais geral nos cursos das escolas do magistério primário, onde Baptista (2004) salienta que a partir de 1930 o plano curricular fica reduzido aos elementos considerados essenciais à cultura profissional, excluindo-se muitas disciplinas de especialidade e formação geral. Mantêm-se apenas disciplinas da componente de especialidade e formação geral na área do desenho e trabalhos manuais por estas serem áreas consideradas muito necessárias à formação do docente do ensino primário (Baptista, 2004). Pintassilgo (2012) também destaca que o novo modelo de formação de professores do ensino primário esvaziava o currículo de aspetos que eram considerados mais complexos, num curso que se queria mais eficiente, com uma retórica tecnocrática.

No início deste período, com a legislação publicada em 1928, os conteúdos das disciplinas de matemática iam para além do que o futuro professor teria de ensinar no ensino primário, para além de abordarem também conteúdos de metodologia. Nestas disciplinas havia também aplicações práticas dos conteúdos de matemática, tal como a cosmografia. Durante este período, os conteúdos começam a concentrar-se exclusivamente em aspetos didáticos, acentuando-se o caráter profissionalizante do curso das escolas do magistério primário. Conjugado com a diminuição das habilitações exigidas no acesso ao curso, que caracterizam também uma parte deste período, isto significa uma deterioração dos conhecimentos teóricos, e das suas aplicações práticas, nomeadamente no que se refere aos conhecimentos matemáticos dos futuros professores do ensino primário.

Até 1928, a legislação publicada mantém o requisito nas habilitações exigidas para a docência nas escolas normais primárias, a habilitação específica do respetivo grupo e o curso de habilitação da escola normal superior. Este era um requisito que se mantinha desde 1911, com o estabelecimento das escolas normais superiores.

Na legislação publicada em 1931, que, relativamente às habilitações exigidas para a docência nas escolas de formação de professores do ensino primário, se manteria até ao final deste período, aos candidatos à docência nestas escolas passava a ser exigida a aprovação nas cadeiras de ciências pedagógicas das Faculdade de Letras. Os professores de *Didática*, que teriam a ser cargo a lecionação de conteúdos relacionados com o ensino da matemática, deveriam ter habilitação para o exercício do magistério primário ou um curso superior. As habilitações exigidas a estes docentes refletem a extinção das escolas normais superiores, mas também a ausência de disciplinas com componente teórica de ciências de especialidade e formação geral nos cursos das escolas do magistério primário.

6

Capítulo 6 – O ensino da matemática nos manuais da formação inicial

Tendo como objetivo estudar o desenvolvimento do conhecimento profissional do professor para o ensino da matemática, neste capítulo apresenta-se e discute-se os resultados relacionados com a análise dos manuais selecionados, centrado na caracterização dos autores e na estrutura da obra e o conteúdo matemático global. Após uma primeira análise descritiva, fez-se uma adaptação da proposta de Maz (2005) adaptando-a aos manuais selecionados. Tenta-se dar resposta às questões colocadas inicialmente, como: Quem eram os autores dos manuais utilizados nos cursos de formação inicial dos professores do ensino primário, qual a sua formação, em que meio educativo atuaram e que relação tinham com a matemática? Quais os conteúdos de matemática e do seu ensino que eram abordados nesses manuais e de que forma refletiam uma preocupação com desenvolvimento de um conhecimento profissional do professor para ensinar matemática? Que relações se encontram entre as principais ideias pedagógicas que marcaram o período em estudo e os modelos pedagógicos apresentados pelos autores dos manuais para a área do ensino da matemática?

O capítulo está dividido em duas partes que correspondem aos dois períodos em que foi dividido o âmbito cronológico do estudo no que se refere à análise dos manuais. O primeiro período que vai de 1844 a 1930 e o segundo período que vai de 1930 a 1974. Para cada um dos manuais foi elaborada uma ficha bibliográfica (anexo 1 a anexo 8), onde se registaram e sintetizaram os dados, adaptando uma proposta de Maz (2005).

1.º Período – Das escolas normais às escolas do magistério primário (1860 – 1930)

6.1. Caracterização dos autores e do contexto

As principais fontes para a caracterização dos autores deste período são o Dicionário de educadores portugueses (Nóvoa, 2003b), com os trabalhos de Correia (2003) e Frota (2003), e artigos publicados em revistas (Boto, 2010; Fernandes, 1995; Fonseca, 1925; Gomes, 1977; Junior, s.d.; Martínez, 2014; Souza, 2013) ou informação constante no próprio manual analisado. Salienta-se que a informação recolhida sobre cada um dos autores é muito discrepante, estando muito dependente do autor já ter sido tratado biograficamente no âmbito de outras obras, ou não. Na caracterização dos autores das obras aqui tratadas, a informação recolhida em fontes secundárias é mais relevante do que a recolhida em fontes primárias.

Os autores identificados neste período são Diogo Nunes (????-????), José Maria da Graça Affreixo (1842-1919) e Henrique Augusto da Cunha Soares Freire (1842-1908), Francisco Adolpho Manso Preto (????-????) e José Augusto Coelho (1850-1925). Apesar de não ter sido possível recolher dados completos sobre todos eles, é possível verificar que são todos portugueses, nascidos em meados do século XIX, que prolongam a sua atividade na formação de professores até às primeiras décadas do século XX.

Deste conjunto de autores, o único com formação específica em matemática é Francisco Adolpho Manso Preto, que obteve o grau de doutor na Faculdade de Matemática da Universidade de Coimbra. Este autor exerceu a docência no Liceu Central de Coimbra e na Escola Normal de Coimbra, estando por isso ligado à formação inicial de professores do ensino primário. Diogo Nunes é um autor com formação na área das ciências, mas não especificamente em matemática. No entanto, dedicou-se ao ensino de aritmética, geometria e noções de álgebra, que correspondiam à 1.ª cadeira da escola industrial, e à autoria de manuais para estas disciplinas.

Graça Affreixo e Henrique Freire tiveram percursos iniciais de formação semelhantes, fazendo o curso da escola normal e exercendo posteriormente o magistério primário em escolas do país. Antes de chegarem à docência na Escola Normal Primária de Évora, onde lecionavam quando editaram a oitava edição da obra aqui analisada, apresentaram percursos de formação e profissionais diferentes. Graça Affreixo formou-se bacharel em Direito, enquanto que Henrique Freire passou pela inspeção escolar.

José Augusto Coelho trabalhou na formação inicial de professores do ensino primário no final do século XIX e início do século XX. Teve um percurso de formação um pouco incaracterístico já que, apesar de ter frequentado o ensino universitário, nunca chegou a concluir qualquer curso superior. Desenvolveu atividade profissional ligada à educação como professor no ensino particular e no ensino livre. Foi a notoriedade que ganhou como pedagogo, e não a sua formação académica, que o levou à docência na Escola Normal Primária do Porto e mais tarde na Escola Normal Primária de Lisboa. Para além das funções de docência na escola normal primária, exerceu também funções diretivas, tanto na Escola Normal Primária de Lisboa masculina, como posteriormente na feminina.

Na formação dos autores podem distinguir-se dois grupos. Um grupo que tinha uma formação na área das ciências exatas e outro grupo que tinha como formação inicial os cursos da escola normal primária, mesmo que posteriormente tivesse obtido outras qualificações, nomeadamente em Direito. Estas diferenças nas características da formação dos autores são o reflexo da estrutura do curso das escolas normais primárias no final do século XIX e início do século XX, que contemplava disciplinas de uma componente de ciências de especialidade e formação geral e disciplinas da componente pedagógica.

Os autores trabalhados neste primeiro período não apresentam relações de destaque com pessoas significativas na área do ensino da matemática. Apenas Manso Preto refere como mestres alguns autores ligados à área da matemática, como Rufino Guerra Osório, Jacome Luiz Sarmento, José Teixeira de Queiroz e Raimundo Venâncio Rodrigues. No entanto, pelas funções relevantes desempenhadas é de destacar que autores como Henrique Freire, Manso Preto ou Augusto Coelho se relacionaram com pessoas significativas na área da educação em geral. Henrique Freire teve um papel de destaque no lançamento das bases da rede pública da instrução primária no final do século XIX, Francisco Manso Preto foi membro de uma comissão, composta por vinte e um professores de liceus, dirigida por Jerónimo Northway do Vale, que analisou em 1904 o Projeto de Reforma da Instrução Secundária, elaborado por Abel Andrade, e José Augusto Coelho foi vogal no Conselho Superior de Instrução Pública e teve uma intervenção relevante na imprensa educativa da época.

Qualquer um dos autores aqui tratados tem uma bibliografia alargada, nomeadamente na área do ensino. Diogo Nunes e Francisco Manso Preto têm obras publicadas na área do ensino da matemática, tanto para as escolas normais primárias como para os liceus. Diogo Nunes distingue-se também pelas obras desta área, publicadas para as escolas industriais, onde este autor leciona aritmética, geometria e noções de álgebra, correspondentes à 1.ª cadeira destas escolas. No que se refere a Graça Affreixo, Henrique Freire e Augusto Coelho, a obra publicada relaciona-se essencialmente com a pedagogia, a metodologia e a organização do ensino, para os cursos de ensino normal primário.

Finalmente, no que diz respeito ao trabalho que tem sido realizado sobre estes autores, salienta-se que os autores ligados às disciplinas da componente das ciências de especialidade e formação geral parecem ter sido pouco estudados, existindo poucas referências a trabalhos realizados sobre os mesmos. Já os autores mais ligados às disciplinas da componente de pedagogia têm sido objeto de diversos trabalhos, designadamente sobre os manuais de pedagogia e a circulação de ideias no contexto da formação de professores do ensino primário em Portugal e no Brasil, como em Pintassilgo (2006) ou em Silva (2001, 2005).

6.1.1. Em síntese

No primeiro período foram analisadas quatro obras de cinco autores: Diogo Nunes (Nunes, 1887), José Maria da Graça Affreixo e Henrique Augusto da Cunha Soares Freire (Affreixo & Freire, 1891), Francisco Adolpho Manso Preto (Preto, 1903) e José Augusto Coelho

(Coelho, 1906). São todos autores portugueses, nascidos em meados do século XIX, que exercem a sua atividade na formação inicial de professores do ensino primário entre o final do século XIX e as primeiras décadas do século XX.

No que diz respeito à formação inicial, distinguem-se no primeiro período dois grupos, o dos autores ligados aos manuais para a componente das ciências da especialidade e formação geral do curso, neste caso Diogo Nunes e Francisco Adolpho Manso Preto, e o dos autores ligados aos manuais da componente pedagógica, neste caso José Maria da Graça Affreixo e Henrique Augusto da Cunha Soares Freire e José Augusto Coelho. No primeiro grupo a formação dos autores está ligada à área das ciências, embora só Francisco Adolpho Manso Preto tenha uma formação específica em matemática. Nestes dois casos, para além de exercerem a sua atividade como formadores de professores, os dois autores estão ligados ao ensino secundário, Manso Preto no Liceu Central de Coimbra e Diogo Nunes na Escola Industrial da Covilhã. No grupo dos autores ligados à componente pedagógica, nenhum tem uma formação inicial ligada à área da matemática, nem das ciências. Graça Affreixo e Henrique Freire são autores com formação inicial na escola normal primária que, antes de chegarem à formação de professores adquirem outras habilitações, um em Direito e o outro na área da inspeção escolar. Deste grupo de autores do primeiro período distingue-se, quanto à sua formação inicial, José Augusto Coelho por, apesar de ter frequência no ensino universitário, não ter concluído qualquer curso superior. A sua atividade profissional na área da formação de professores decorre da notoriedade que adquire como pedagogo.

Relativamente à relação com pessoas de destaque na área da matemática e do seu ensino, apenas Manso Preto refere como mestres figuras ligadas a esta área como Rufino Guerra Osório, Jacome Luiz Sarmento, José Teixeira de Queiroz e Raimundo Venancio Rodrigues. No entanto, os autores analisados no primeiro período destacam-se por terem desempenhado funções relevantes na área da educação em geral, como o caso de Henrique Freire ligado ao lançamento da rede pública da instrução primária, Manso Preto pelo seu papel na comissão que analisou o Projeto de Reforma da Instrução Secundária de 1904, ou José Augusto Coelho como vogal no Conselho Superior de Instrução Pública.

Neste primeiro período qualquer um dos autores tratados tem uma bibliografia alargada. Pela sua formação, Diogo Nunes e Manso Preto têm obras publicadas principalmente na área do ensino da matemática, nomeadamente para a formação de professores do ensino primário, para os liceus ou para as escolas industriais. Graça Affreixo, Henrique Freire e José Augusto Coelho têm obra publicada na área da pedagogia, metodologia e organização do ensino.

Nos trabalhos já realizados sobre estes autores, é de destacar que parecem existir poucos trabalhos sobre os autores mais ligados à componente das ciências da especialidade e formação geral. Já os autores ligados à componente pedagógica, têm sido objeto de trabalhos de investigação, nomeadamente no âmbito do Dicionário de educadores portugueses (Nóvoa, 2003) ou do trabalho desenvolvido sobre os manuais de pedagogia (Pintassilgo, 2006) ou a circulação de ideias no contexto da formação de professores do ensino primário em Portugal e no Brasil (Silva, 2001, 2005).

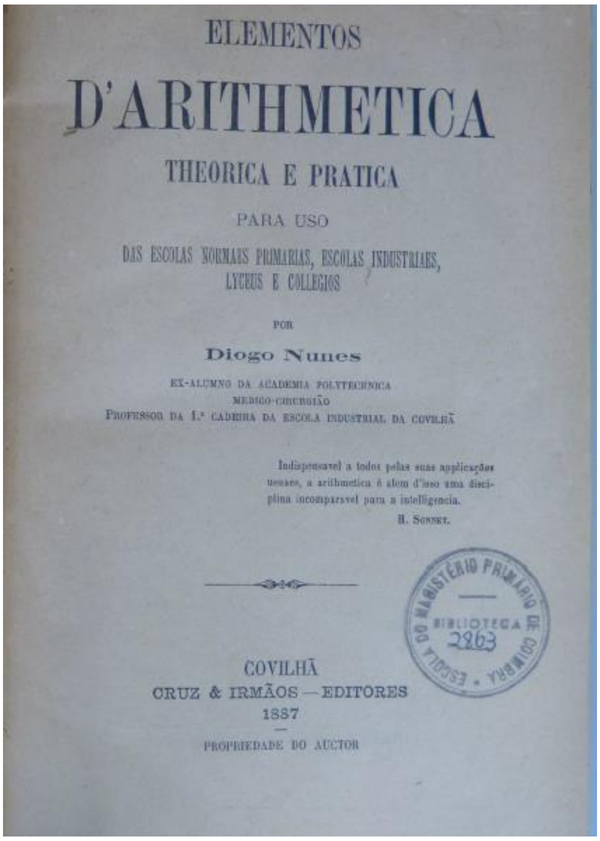
6.2. Caracterização global das obras e do seu contexto

As obras analisadas neste primeiro período podem dividir-se em dois grupos. No primeiro grupo incluem-se as obras destinadas às disciplinas da componente das ciências da especialidade e formação geral dos cursos de formação de professores do ensino primário. Estão neste grupo as obras de Diogo Nunes (1887), *Elementos de d'arithmetica theorica e pratica para uso das Escolas Normais Primarias, Escolas Industriais, Lyceus e Collegios*, e de Manso Preto (1903), *Arithmética prática e geometria elementar para o ensino das escolas normais*. No segundo grupo podem integrar-se as obras destinadas à componente pedagógica dos cursos. Estão neste grupo a obra de Graça Affreixo e Henrique Freire (1891) e a obra de José Augusto Coelho (1906). A tabela 6.1. sistematiza as obras analisadas neste primeiro período, os autores, a edição trabalhada e as edições que foi possível identificar.

Tabela 6.1. – Identificação das obras referentes ao 1.º período analisado

Título	Autor	Edição	Edições identificadas
Elementos de d'arithmetica theorica e pratica para uso das Escolas Normais Primarias, Escolas Industriais, Lyceus e Collegios	Diogo Nunes	1.ª (1887)	Uma edição
Elementos de pedagogia para uso do magistério portuguez	Graça Affreixo e Henrique Freire	8.ª (1891)	Oito edições (1.ª 1870).
Arithmética prática e geometria elementar para o ensino das escolas normais	Francisco Adolpho Manso Preto	1.ª (1903)	Cinco edições. (1.ª 1903)
Noções de Pedagogia Elementar	José Augusto Coelho	2.ª (1906)	Duas edições (1.ª 1903).

A obra de Diogo Nunes (1887), analisada aqui na sua 1.ª edição, foi publicada explicitamente para o uso de uma disciplina do plano de estudos da formação inicial de professores do ensino primário e aborda os temas e conteúdos previstos no programa da disciplina, como é possível verificar no capítulo 5.1. do presente trabalho. Esta é uma obra publicada no contexto da Reforma do ensino primário, de 1878, e da sua posterior regulamentação de 1881 que previa a existência de uma disciplina designada de *Aritmética, sistema legal de pesos e medidas, noções de álgebra*, na componente de ciências de especialidade e formação geral, onde se enquadra a obra aqui analisada, não sendo por isso uma disciplina dedicada à metodologia de ensino. De acordo com Baptista (2004), o plano de estudos previsto nesta reforma pretendia dotar os futuros professores do ensino primário de mais conhecimentos, dando-lhes capacidades para um melhor desempenho profissional. O plano de estudos é aprofundado relativamente a programas anteriores, que até a essa data não incluíam descrições pormenorizadas dos conteúdos a lecionar, tornando-se mais extenso nas diferentes disciplinas. No entanto, em relatórios de inspeção citados por Baptista (2004), os programas são considerados demasiados extensos, principalmente para quem frequenta os dois primeiros anos, destinados a formar professores para o 1.º grau do ensino primário.


ELEMENTOS

D'ARITHMETICA

THEORICA E PRATICA

PARA USO

DAS ESCOLAS NORMAES PRIMARIAS, ESCOLAS INDUSTRIAES,
LYCEUS E COLLEGIOS

POR

Diogo Nunes

EX-ALUMNO DA ACADEMIA POLYTECHNICA
MEDICO-CIRURGIÃO
PROFESSOR DA 1.ª CADEIRA DA ESCOLA INDUSTRIAL DA COVILHÃ

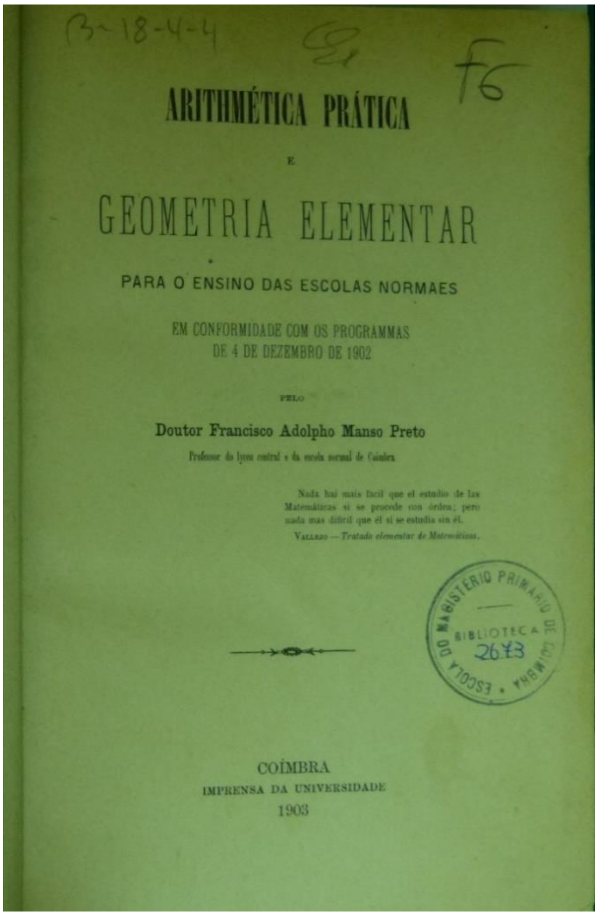
Indispensavel a todos pelas suas applicações usuaes, a arithmetica é alem d'isso uma disciplina incomparavel para a intelligencia.
H. SONNET.

COVILHÃ
CRUZ & IRMÃOS — EDITORES
1887

PROPRIEDADE DO AUCTOR

Figura 6.1. – Folha de rosto da obra *Elementos de d'arithmetica theorica e pratica para uso das Escolas Normais Primarias, Escolas Industriais, Lyceus e Collegios*, Nunes (1887) (digitalização, redução, 50% do original).

A obra de Preto (1903), analisada aqui na sua 1.ª edição, também foi publicada explicitamente para uma disciplina do curso das escolas normais primárias, *Aritmética prática e geometria elementar, noções de escrituração comercial e agrícola*, que surgiu na reforma de 1901, cujo programa foi publicado em dezembro de 1902. Esta disciplina estava presente nas três classes do curso. Este era um plano de estudos onde a componente de ciências de especialidade e formação geral tinha um peso elevado. Baptista (2004) considera que as disciplinas desta componente eram marcadas pelo academicismo escolar com poucas marcas de formação profissional no sentido do conhecimento para ensinar os conteúdos do ensino primário. Um exemplo que Baptista (2004) apresenta para esse academicismo é o facto de nestes programas de 1902 terem sido retirados os exercícios práticos de cada disciplina de especialidade do professor do ensino primário, dando origem a uma prática desligada da teoria.



ARITHMÉTICA PRÁTICA

E

GEOMETRIA ELEMENTAR

PARA O ENSINO DAS ESCOLAS NORMAES

EM CONFORMIDADE COM OS PROGRAMMAS
DE 4 DE DEZEMBRO DE 1902

PELO

Doutor Francisco Adolpho Manso Preto

Professor do lyceu central e da escola normal de Coimbra

Nada hai mais facil que el estudio de las Matemáticas si se procede con órden; pero nada mas difícil que él si se estudia sin él.

VALLEJO — *Tratado elemental de Matemáticas.*

COIMBRA
IMPRENSA DA UNIVERSIDADE
1903

Figura 6.2. Folha de rosto da obra *Arithmética prática e geometria elementar para o ensino das escolas normais,* Preto (1903) (digitalização, redução, 50% do original).

No que diz respeito às obras do segundo grupo, da componente pedagógica do curso, *Elementos de pedagogia para uso do magistério portuguez*, de Graça Affreixo e Henrique Freire (1891), 8.ª edição, surge na sequência de uma série de edições que vão alargando a abrangência da obra. A primeira edição da obra, datada de 1870, intitulada *Elementos de Pedagogia,* enquadra-se no âmbito de uma série de reformas iniciadas com a reforma da instrução pública, em 1868, à criação de escolas normais, em 1869, e à reforma da instrução primária, em 1870, onde pela primeira vez surge a disciplina de pedagogia nos cursos das escolas normais. O prefácio da primeira edição da obra destaca isso mesmo, referindo que a sua publicação se justifica pela falta de um exemplar sobre conhecimentos pedagógicos, em língua portuguesa, que auxilie nos concursos para os magistérios (Martínez, 2014). As diferentes edições vão alargando a abrangência do livro, que começa por ser designado como guia para os candidatos ao magistério primário e a última edição é designada como sendo para uso do magistério primário português (Martínez, 2014). A obra vai sendo sucessivamente ampliada, nomeadamente no que diz respeito aos aspetos da metodologia, principalmente da metodologia especial de cada disciplina, respondendo de certo modo às alterações que vão ocorrendo no curso das escolas normais, onde a metodologia vai ganhando protagonismo nos programas da disciplina de pedagogia, mas também correspondendo ao desenvolvimento do conhecimento dos próprios autores nestas áreas, o que justifica uma análise mais aprofundada sobre a oitava edição, aqui apresentada.

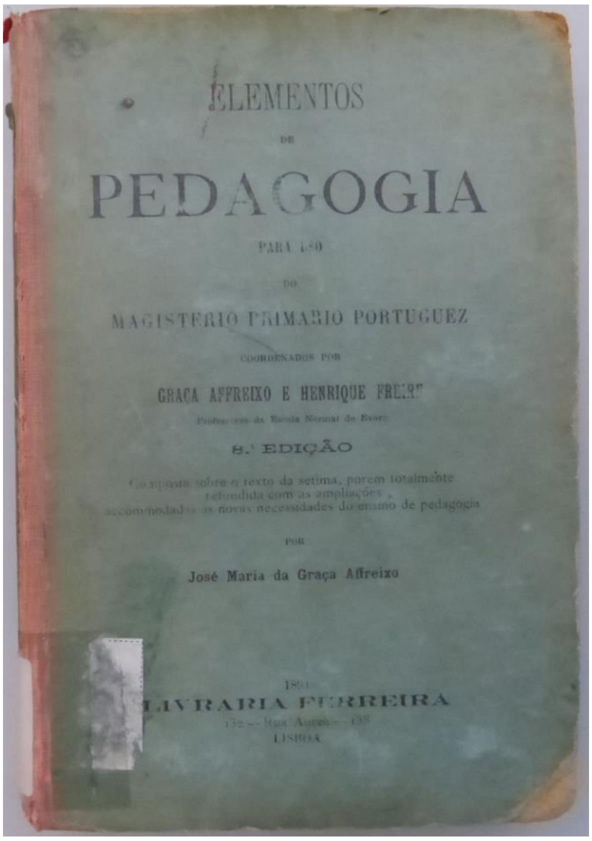


Figura 6.3. Capa da obra *Elementos de pedagogia para uso do magistério portuguez,* Affreixo e Freire (1891) (digitalização, redução, 50% do original).

A obra de José Augusto Coelho (1906), 2.ª edição, é uma obra de apoio à disciplina *Pedagogia e, em especial, metodologia do ensino primário*; *legislação da escola primária portuguesa,* dos cursos das escolas normais e de habilitação para o magistério primário, que consta na reforma do curso feita em 1901. Os programas das disciplinas foram posteriormente publicados em 1902. A disciplina de Pedagogia já existia no curso desde 1860, mas sem a designação de metodologia, que só surge em 1870, no 2.º grau do curso, e depois em 1881. Esta indicação de metodologia desaparece na legislação de 1896, da qual José Augusto Coelho é crítico, mas volta a ser retomada na reforma de 1901.

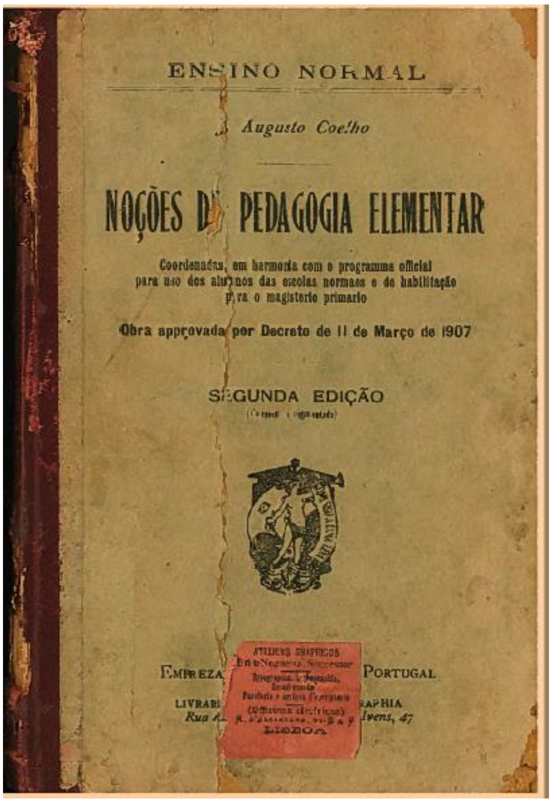


Figura 6.4. Capa da 2.ª edição da obra *Noções de Pedagogia Elementar*, Coelho (1906)[150] (digitalização, redução, 50% do original).

A maioria das obras analisadas teve mais do que uma edição, aqui são analisadas duas primeiras edições e as outras duas que não são. Tendo em conta o número edições identificadas, parecem ser obras que tiveram alguma divulgação junto dos futuros professores.

São obras relativamente extensas, apresentando entre 175 páginas, no caso de Nunes (1887), e 527 páginas, no caso de Preto (1903). Os manuais dedicados às disciplinas da componente das ciências de especialidade e formação geral apresentam uma estrutura diferente, embora tenham em comum dedicarem-se apenas a conteúdos da área da matemática. O primeiro, Nunes (1887), está organizado em cinco livros, num só volume, onde se abordam apenas aspetos relacionados com a aritmética elementar e algumas das suas aplicações. O manual de Preto (1903) está divido em três partes, tudo num volume só, sendo as duas primeiras constituídas por três

[150] É de referir que, apesar da capa ter a indicação de que a obra foi aprovada pelo Decreto de 11 de março de 1907, no interior a data indicada é de 1906, pelo que, neste trabalho, adota-se essa data como data de referência desta obra.

livros. A primeira parte ocupa-se da aritmética prática, a segunda aborda a geometria plana e a terceira parte trata do sistema métrico. Esta estrutura e conteúdos diferentes relacionam-se com as alterações que o plano de estudos e os programas dos cursos das escolas normais primárias sofreram entre as datas de publicação das duas obras. Entre 1887 e 1903, a disciplina que abordava conteúdos de aritmética fundiu-se com a disciplina de geometria formando uma só disciplina nos cursos das escolas normais primárias, designada por *Aritmética prática e geometria elementar, noções de escrituração comercial e agrícola*. A denominação da disciplina, e a análise efetuada aos seus conteúdos no capítulo 5.1., permite perceber que são também integrados conteúdos relacionados com as aplicações práticas da aritmética, como a escrituração comercial e industrial, o que leva o manual de Preto (1903) a tratar também desses assuntos.

Os manuais da componente pedagógica apresentam uma estrutura muito diferente dos manuais da componente das ciências de especialidade e formação geral, desde logo porque abordam temas muito diversificados na área da pedagogia, não se dedicando apenas a uma disciplina. Comparando apenas os dois manuais da componente pedagógica quanto à sua estrutura, destaca-se a importância e o espaço que a metodologia, e em particular a metodologia especial, tem no manual de Affreixo e Freire (1891) relativamente ao manual de Coelho (1906). Também aqui os manuais refletem o programa da disciplina de Pedagogia, que tinha, entretanto, passado a atribuir uma maior importância às questões de metodologia, particularmente à metodologia do ensino das disciplinas que faziam parte do ensino primário.

Qualquer um dos autores salienta que o objetivo da publicação da obra era apoiar os alunos na respetiva disciplina do curso das escolas normais primárias. Os manuais da componente das ciências de especialidade fazem-no unicamente na capa ou na folha de rosto indicando a disciplina a que se destina. Os manuais da componente pedagógica, para além da indicação da capa, dão também indicação do objetivo geral da obra no prólogo ou introdução, estabelecendo uma relação estreita e explícita com os programas e o ano do curso a que se destinam. Outro traço comum a estes manuais da componente pedagógica é que apresentam como justificação para a edição da obra a necessidade de adaptar ao contexto português as ideias pedagógicas que chegam do exterior, salientando a necessidade da emergência de uma pedagogia portuguesa. Pintassilgo (2006) realça que estes manuais são um importante instrumento de divulgação das novas ideias, em contraponto com as práticas tradicionais que o discurso pedagógico questiona, pretendendo-se afirmar uma cientificidade do conhecimento pedagógico. Os manuais, onde este manual de Coelho (1906) se integra, têm, no dizer de Pintassilgo (2006), uma função de formação, iniciando os futuros professores na emergente ciência da educação e em saberes específicos da função docente. São também, de acordo com Pintassilgo (2006), fatores de consolidação de um modelo e cultura escolar, estabelecendo práticas desejáveis e não desejáveis.

De uma forma geral, os manuais analisados neste período não apresentam referências bibliográficas, nem citam autores que influenciaram a organização do mesmo. Os manuais de Nunes (1887) e Preto (1903), enquadrados na componente das ciências da especialidade, não apresentam quaisquer referências bibliográficas e as únicas citações são as apresentadas na folha de rosto do manual, com ideias gerais sobre o ensino da matemática, como o que é apresentada por Preto (1903) "Nada hai mais fácil que el estúdio de las Matematicas si se procede com órden; pero nada mas difícil que él si se estudia sin él." (citando Ortega)[151], ou sobre a importância da aritmética, tanto na vida do dia a dia, como para o desenvolvimento do raciocínio, como a citação apresentada por Nunes (1887) "Indispensável a todos pelas suas aplicações usuais, a aritmética é além disso uma disciplina incomparável para a inteligência." (p.4, citando Sonnet, s/d)[152].

Os manuais da componente pedagógica também não apresentam referências bibliográficas, nem citações. A obra de Graça e Affreixo (1891) apenas cita Braun, um pedagogo alemão do século XIX, a propósito da necessidade de adaptar os seus conselhos práticos na organização de uma pedagogia portuguesa. No caso de Coelho (1906) foi necessário consultar uma outra obra da sua autoria para aprofundar o seu pensamento sobre o ensino dos números racionais, Coelho (1892). Apenas nessa obra foi possível identificar influências explicitadas pelo autor, como o trabalho *A educação física, intelectual e moral*, de autoria de Herbert Spencer, filósofo e sociólogo inglês, representante do positivismo e empirismo britânico, ou, já na área do ensino da matemática, a referência aos trabalhos de Friedrich Froebel, pedagogo alemão da primeira metade do século XIX.

As quatro obras analisadas neste período não são citadas em qualquer dos manuais analisados neste trabalho, tanto do primeiro como do segundo período. Apesar de não existirem referências a estas obras nos restantes manuais analisados e poder-se inferir que elas poderiam não ter tido influência posterior no desenvolvimento do trabalho na formação inicial dos professores do ensino primário, é de destacar que particularmente as obras da componente pedagógica, Graça e Affreixo (1891) e Coelho (1906), tiveram uma ampla divulgação no ensino normal, na área da pedagogia e da metodologia.

Quanto às questões globais sobre o ensino, pedagogia, métodos e metodologia geral, também se distinguem os manuais dedicados à componente de ciências de especialidade dos que se dedicam à componente pedagógica. Os primeiros não apresentam quase referências a questões mais gerais do ensino, existindo apenas no manual de Preto (1903) o estabelecimento de uma

---

[151] José Mariano Vallejo y Ortega (1779-1846) foi um ativo político, didata e matemático espanhol (Astudillo, 2005).

[152] Michel Louis Joseph Sonnet, matemático francês de meados do século XIX, autor de numerosos trabalhos sobre matemática e ciências, que lecionou em vários colégios franceses e foi inspetor da Academia de Paris (Lorenz & Vechia, 2004).

ligação dos conteúdos do seu manual com os conteúdos do programa oficial das escolas normais da época em que foi editado. Por outro lado, os autores dos manuais da componente pedagógica ocupam uma boa parte da obra com questões gerais de ensino, pedagogia e metodologia geral, o que corresponde ao programa das disciplinas a que se destinavam.

O manual de Affreixo e Freire (1891), tratando-se de uma obra dedicada à pedagogia, é natural que aborde de uma forma prolongada questões gerais como a educação, o ensino, a pedagogia, a didática e a metodologia. Logo na introdução os autores apresentam uma definição de educação que salienta que esta se exprime pelo "desenvolvimento integral de todas as faculdades e aptidões do homem, com o fim de o tornar hábil para a luta pela vida." (Affreixo & Freire, 1891, p. 5). O professor é considerado o sujeito da educação e o aluno é o seu objeto, considerando-se que a educação são os aperfeiçoamentos que o "o aluno recebe em suas aptidões, para atingir o estado de cidadão" (Affreixo & Freire, 1891, p. 5).

É aqui de salientar que estes autores dão a uma crescente importância à cientificidade das questões ligadas à educação, à pedagogia, à metodologia, relacionando-as com as emergentes ciências da psicologia e da sociologia, no entanto, também dão realce às questões da vocação e do dom inato para ensinar. A questão do saber pedagógico ir ganhando progressivamente o estatuto de conhecimento científico é uma questão também evidente na obra de Coelho (1906), tal como é destacado em Boto (2010) que refere que havia uma tendência para tentar compreender o ensino como uma "arte que era, para uma ciência que se propunha ser." (p. 18), marcado por um discurso prescritivo influenciado pelas ideias de Herbert Spencer. Estas ideias enquadram-se na necessidade que existia entre o final do século XIX e o início do século XX de o ensino estar firmado em princípios de ordem teórica. A atividade de ensinar ia passando aos poucos para um domínio onde era a necessária a habilidade para saber como ensinar, assim como a compreensão dos conteúdos a serem ensinados (Boto, 2010).

A importância dada à metodologia é outro aspeto que se destaca na obra de Affreixo e Freire (1891), em especial na oitava edição, nomeadamente no que diz respeito à metodologia especial.

> assim como julgamos necessário o estudo elementar da psicologia, fundamento da cultura intelectual, parece-nos por igual necessário estudar os princípios mais elementares da sociologia, base da educação cívica. A sociologia, como a psicologia, devem porém, pelas exigências do ensino dos alunos mestres, ficar para se desenvolverem depois da metodologia, como um elemento de progresso contínuo e indefinido na classe do professorado. (Affreixo e Freire, 1891, p. 10)

No que diz respeito à metodologia, é de salientar a discussão que os autores apresentam sobre os métodos, destacando os métodos analíticos sintéticos e o seu uso no ensino primário. No ensino em geral, e em particular no ensino das ciências, onde se inclui a matemática, são destacados os métodos intuitivos, onde os conhecimentos podem ser apresentados e apreendidos utilizando as capacidades percetivas dos alunos.

Aquilo que é discutido no manual de Affreixo e Freire (1891) sobre o ensino, a educação, os métodos surge também no manual de Coelho (1906), constatando-se nestes manuais o que Pintassilgo (2006) salienta como característica dos manuais de pedagogia da época, referindo-se a uma certa homogeneidade do seu conteúdo, nomeadamente no que se refere às definições de métodos, modos, formas e processos de ensino.

No que diz respeito aos métodos, Coelho (1906) salienta a importância da relação entre a análise e a síntese, destacando que o método analítico deve proceder o método sintético. Coelho (1906) também dedica atenção à processologia, ou processos de ensino, que define como maneira de apresentar o objeto de ensino aos alunos, e considera esses processos como aquilo que define o professor e onde se pode observar a personalidade do professor. Também as formas de ensino são discutidas por Coelho (1906), salientando que no ensino primário a forma dialogal – socrática deve ser privilegiada.

6.2.1. Em síntese

As obras analisadas no primeiro período podem dividir-se em dois grupos, as obras destinadas às disciplinas da componente das ciências da especialidade e formação geral, onde se incluem Nunes (1887) e Preto (1903), e as obras dedicadas à componente pedagógica, como Affreixo e Freire (1891) e Coelho (1906). São todas obras editadas explicitamente para disciplinas do curso de formação inicial de professores do ensino primário. De uma forma geral são obras que tiveram mais do que uma edição, o que de alguma forma indica que tiveram aceitação junto dos futuros professores. A exceção é a obra de Nunes (1887), da qual não é conhecida mais nenhuma edição.

Todas as obras analisadas no primeiro período são relativamente extensas, mas apresentam uma estrutura diferente consoante se integram no grupo das obras dedicadas à componente das ciências de especialidade e formação geral ou no grupo dedicado à componente pedagógica, refletindo ainda as alterações que a estrutura e programas dos cursos foram sofrendo ao longo do tempo. As duas obras da componente das ciências de especialidade, Nunes (1887) e Preto (1903), dedicam-se exclusivamente a aspetos relacionados com a matemática, o que não acontece com os manuais da componente pedagógica, Affreixo e Freire (1891) e Coelho (1906), que se dedicam a aspetos gerais da pedagogia. No entanto, os manuais de Nunes (1887) e Preto (1903) apresentam também diferenças entre si, que refletem as alterações que o plano de estudos e os programas das disciplinas sofreram. É aqui de salientar a integração dos conteúdos de aritmética e de geometria num só manual, como em Preto (1903), o que não acontecia em Nunes

(1887). Como diferenças de estrutura e conteúdo entre estes dois manuais é ainda de destacar a integração no manual de Preto (1903) de conteúdos relacionados com a aplicação prática da aritmética, como a escrituração comercial e industrial ou a agrimensura, o que não acontecia em Nunes (1887). Também aqui se refletem as alterações dos programas das disciplinas, que entre estes dois momentos passam a ter estes conteúdos, traduzindo uma preocupação em dotar o futuro professor do ensino primário de competências para lecionar no ensino primário complementar que incluía alguns conteúdos mais profissionalizantes. Neste sentido, o ensino primário e em particular o professor do ensino primário, poder-se-ia constituir como agente de apoio à formação profissional local, nomeadamente aos pequenos comerciantes, oficinas e empresas agrícolas. Parece ser esse o sentido das alterações na legislação que se refletem nos manuais aqui analisados.

No que diz respeito à estrutura dos manuais da componente pedagógica, quando se compara o manual de Affreixo e Freire (1891) com o manual de Coelho (1906) é de destacar a importância que a metodologia vai adquirindo, e em particularmente a metodologia especial. Também aqui é possível observar o reflexo das alterações efetuadas nos planos de estudo e nos programas da disciplina de *Pedagogia*. Apesar de neste período os programas serem por vezes considerados como demasiado académicos, e a legislação posterior a este período referir isso mesmo, nota-se que simultaneamente as disciplinas e os seus conteúdos vão dando uma importância cada vez maior ao ensino e a saberes específicos para ensinar os conteúdos do ensino primário.

Os manuais analisados no primeiro período apresentam sempre como objetivo o apoio aos alunos na respetiva disciplina dos cursos das escolas normais primárias. Os manuais da componente pedagógica também apresentam como objetivo da edição a necessidade de adaptar ao contexto português as ideias pedagógicas difundidas internacionalmente, destacando a necessidade de uma pedagogia portuguesa e questionando práticas pedagógicas que designam por tradicionais, tentando afirmar uma cientificidade do conhecimento pedagógico. Este é um aspeto já referido em estudos anteriores, tal como em Pintassilgo (2006) que destaca que os manuais de pedagogia deste período eram um instrumento de difusão de novas ideias e de iniciação dos futuros professores na ciência da educação e em saberes específicos da sua futura função docente, levando à formação de um modelo de cultura escolar, com o estabelecimento de práticas desejáveis nesta função.

No que diz respeito aos autores que influenciaram as obras, nos manuais do primeiro período aqui analisado não é possível destacar obras porque os manuais não apresentam referências bibliográficas, nem citações ao longo da obra. No caso dos manuais da componente das ciências da especialidade e formação geral, são apenas citados dois autores, um em cada obra, e apenas no frontispício dos manuais. Um dos autores citados é José Mariano Vallejo y Ortega, matemático e didata espanhol da primeira metade do século XIX. O outro autor citado é Michel Louis Joseph Sonnet, matemático francês de meados do século XIX. As citações utilizadas referem-se a aspetos gerais que devem nortear o ensino da matemática, como a importância da ordenação e estruturação no ensino da matemática, a importância da matemática na vida do dia a dia pelas suas aplicações práticas e a relevância do ensino da matemática no desenvolvimento do raciocínio. No que diz respeito aos manuais da componente pedagógica, só com a consulta de outras obras dos autores estudados, nomeadamente no caso de José Augusto Coelho, foi possível identificar referências como Herbert Spencer, um autor ligado ao positivismo e ao empirismo, e a Friedrich Froebel, um pedagogo alemão da primeira metade do século XIX.

No que diz respeito a questões globais sobre ensino, pedagogia, métodos e metodologia geral também há naturalmente uma distinção clara nos manuais do primeiro período. Enquanto que os manuais dedicados à componente de especialidade praticamente não fazem referência a questões globais sobre o ensino, embora fossem explicitamente editados para os cursos de formação de professores, os manuais dedicados à componente de pedagogia dedicam uma grande parte da obra a essas questões. Os manuais de Affreixo e Freire (1891) e de Coelho (1906) apresentam alguma homogeneidade relativamente ao que é discutido e às definições sobre o ensino, educação e os métodos, característica já destaca por Pintassilgo (2006) relativamente aos manuais de pedagogia do primeiro terço do século XX. Nestes dois manuais a educação é definida como tendo em vista o desenvolvimento integral das faculdades e aptidões do homem, no sentido de o tornar hábil para vida. O professor é o sujeito da educação e o aluno é seu objeto, tendo em vista torná-lo num cidadão. Nestes dois manuais há uma discussão em torno da cientificidade da educação, pedagogia, metodologia e a sua relação com outras áreas científicas emergentes na época, como a psicologia e a sociologia, mas também se realça a vocação e o dom inato para ensinar. Esta será uma discussão que estará presente nos manuais de pedagogia do início do século XX (Pintassilgo, 2006; Silva, 2005), mas que também continuará nos manuais de didática já na segunda metade do século XX, analisados na presente investigação. Uma outra discussão também presente nos dois manuais de pedagogia analisados neste primeiro período, são as questões em torno dos métodos, processologia e formas de ensino. Affreixo e Freire (1891) defendem os métodos analíticos-sintéticos no ensino primário e os métodos intuitivos em particular no ensino das ciências no ensino primário, destacando a importância da utilização das capacidades percetivas das crianças. Coelho (1906) salienta que os métodos analíticos devem preceder os métodos sintéticos no ensino primário, destacando a forma de ensino dialogal socrática neste nível de ensino.

6.3. Caracterização global do conteúdo matemático

Nesta secção, tal como em secções anteriores de análise dos manuais deste período, é importante começar por referir que se podem distinguir aqui dois conjuntos de manuais. Dois manuais que foram editados para apoiar disciplinas da componente de ciências da especialidade e formação geral e os outros dois que são direcionados para a componente pedagógica. Esse caráter muito diferenciado dos manuais tem influência na forma como abordam globalmente a matemática e o seu ensino.

As obras de Nunes (1887) e Preto (1903), dedicadas a disciplinas da componente das ciências de especialidade e formação geral, apresentam algumas características em comum, nomeadamente no que se refere ao facto de ambas apresentarem logo no início um conjunto de noções preliminares relacionadas com a aritmética, como a grandeza, medida das grandezas, unidade, número, contar e espécies de números, número inteiro e número fracionário. Embora não seja de o âmbito deste trabalho fazer uma comparação com outras aritméticas da época, é possível verificar que esta organização e conjunto de noções existem usualmente noutras aritméticas da mesma época, como por exemplo a obra de Luís Pegado (Pegado, 1895).

Para Nunes (1887), a aritmética é definida como:

> a ciência que estuda as *operações* que se podem efetuar sobre os números abstratos (é o que constitui o *cálculo*), e as propriedades elementares de que gozam os números por si mesmos, independentemente de toda a ideia de medida. (p. 7, itálicos no original)

No que se refere à noção de aritmética, Preto (1903) define-a como a "ciência elementar dos números" (p. 7).

Antes de apresentar a definição de número, Nunes (1887) esclarece a noção de grandeza e a medida das grandezas. A grandeza é definida como "tudo o que pode ser aumentado ou diminuído" (Nunes, 1887, p. 5). A medida das grandezas é condição essencial para ter a ideia exata de uma grandeza. A medida é a comparação "com uma da mesma espécie tomada por *unidade*" (Nunes, 1887, p. 5, itálico no original). A unidade é a grandeza que serve para medir todas as grandezas da sua espécie. São apresentadas algumas unidades consideradas familiares como o metro, o quilo e o litro. O número é definido posteriormente como "o resultado da medida de uma grandeza." (Nunes, 1887, p. 5), sendo apresentados alguns exemplos com medidas de comprimento e de peso, ou os alunos de uma turma. Nunes (1887) refere então que "a grandeza representada por um número toma o nome de *quantidade*" (Nunes, 1887, p. 6, itálico no original).

Antes da noção de número, Preto (1903) apresenta a noção de grandeza, onde distingue as grandezas contínuas e as grandezas descontínuas. Só depois de apresentar as noções de medir e unidade é que Preto (1903) refere as noções de número e de quantidade:

> *Medir uma grandeza* é compará-la com outra conhecida, que se toma para unidade;
> *Unidade* é uma grandeza, tomada as mais das vezes *arbitrariamente*, que serve para medir as grandezas da mesma espécie;
> *Número* é o resultado da comparação da grandeza com a unidade;
> *Quantidade* é toda a grandeza avaliada em números; (p. 5, itálicos no original)

As obras de Affreixo e Freire (1891) e Coelho (1906) fazem uma abordagem mais centrada no ensino da aritmética e não na apresentação de noções, como as duas obras referidas anteriormente. Affreixo e Freire (1891) começam por fazer uma distinção entre as metodologias a utilizar nas humanidades e nas ciências.

> Por mais que se pretenda reduzir, às condições do método experimental, o grupo de conhecimentos denominados humanidades, há sempre naqueles estudos alguma coisa que escapa à observação, e fica indemonstrado. Pelo contrário, no grupo de conhecimentos, especialmente denominadas ciências, a verdade tem sempre demonstração experimental. (p. 220)

Nas humanidades, o método de ensino utilizado deveria ser muito mais através de processos de analogia, mas no ensino das ciências eram mais usados processos instrumentais, com a demonstração experimental (Affreixo & Freire, 1891). No entanto, estes autores destacam que na época os métodos gerais seguiam uma tendência do ensino instrumental, mas consideravam que nas humanidades os processos de analogia ainda seriam utilizados por muito tempo.

Para Affreixo e Freire (1891) os números e as linhas são o objeto de todo o cálculo, sendo a álgebra a abstração do cálculo das quantidades, "o tratado dos números chama-se aritmética e o das linhas geometria." (p. 221). Affreixo e Freire (1891) apresentam primeiro a aritmética e as suas relações com a pedagogia e depois com a álgebra. Relativamente ao ensino da álgebra, os autores realçam que esta não é usada no ensino primário, mas como faz parte do programa oficial das escolas normais, é também discutida. Só depois os autores abordam o método que consideram aplicável ao ensino da geometria. No ensino da aritmética, Affreixo e Freire (1891) destacam o seu papel utilitário. No entanto, salientam que isso não deve levar a falta de precisão na linguagem e no cálculo.

Na apresentação das noções de unidade, número e quantidade nota-se em Affreixo e Freire (1891) uma maior preocupação em estabelecer uma relação com o ensino e com o trabalho a realizar com as crianças:

> Contando as crianças diferentes objetos a uma e um, aos pares, às mãos, às dúzias, terão no que denomina *um* a unidade, no *total* dos objetos contados a quantidade, e na palavra de *relação* de

> grandeza, entre o que denominou um e o total, terá o número. (Affreixo & Freire, 1891, p. 223, itálicos no original).

Em Affreixo e Freire (1891) toda a apresentação dos números é feita com a preocupação da organização do ensino.

Coelho (1906) também se centra nas questões de ensino, quando apresenta as primeiras noções ligadas à aritmética. A metodologia e a processologia dos conteúdos relacionados com a matemática são apresentadas com as restantes metodologias do que designa por ciências teóricas. É tratada primeiro a metodologia dos conteúdos de geometria porque se podem concretizar, estabelecendo-se depois uma ligação com as relações numéricas. No trabalho do ensino da aritmética, Coelho (1906) distingue a importância da organização e denominação dos números, a comparação e a aplicação prática rudimentar. No ensino da aritmética, Coelho (1906) destaca a necessidade de se ensinar com processos ligados à realidade, para só depois abordar processos conceptuais. Coelho (1906) estabelece uma relação entre a forma de ensino e a forma como a ciência evoluiu historicamente.

Nas operações, estas são explicadas por Nunes (1887) como combinações que se podem efetuar com os números, sendo quatro as operações fundamentais a adição, a subtração, a multiplicação e a divisão. A adição é definida como "uma operação que tem por fim reunir em um só número todas as unidades contidas em muitos números da mesma espécie." (Nunes, p. 16). Nesta operação, Nunes (1887) distingue três casos, a adição de dois números só de um algarismo, a adição de dois números, em que um tem vários algarismos e o outro só tem um algarismo e finalmente a generalização da adição a quaisquer números. Para a subtração, Nunes (1887) apresenta duas definições. Uma primeira que salienta o sentido de retirar "a subtração é uma operação que tem por fim tirar de um número todas as unidades contidas num outro menor da mesma espécie" (p. 19) e uma segunda que salienta o sentido de completar "a subtração tem por fim , sendo dados dois números, achar um terceiro que, ajuntado ao menor, reproduza o maior." (p. 19).

A multiplicação é definida por Nunes (1887) como uma soma de parcelas iguais. Para esta operação apresenta quatro casos. O primeiro caso é a multiplicação de dois fatores só com um algarismo cada, cujos resultados devem-se conhecer de cor. O segundo caso refere-se à multiplicação de um fator só com um algarismo por outro fator com mais do que um algarismo. No terceiro caso, Nunes (1887) apresenta o procedimento da multiplicação para números inteiros positivos com dois ou mais algarismos, em que um dos números termina em 0, por exemplo 300, e depois o quarto caso, com a multiplicação de dois números inteiros não negativos, fazendo a decomposição decimal de um dos fatores e recorrendo depois aos procedimentos do segundo e terceiro caso. No final de expor estes casos da multiplicação, Nunes (1887) apresenta a regra geral para fazer a multiplicação.

Para a divisão, Nunes (1887) também apresenta duas definições. Na primeira, a divisão é vista no sentido de agrupamento "é uma operação que tem por fim procurar *quantas* vezes um número chamado *divisor* se contém num outro chamado *dividendo*" (p. 32, itálicos no original). Na segunda definição apresentada, a divisão é referida como operação inversa da multiplicação "é uma operação que tem por fim, sendo dados dois números, um chamado *dividendo*, outro *divisor*, achar um terceiro chamado *quociente*, que multiplicado pelo divisor reproduza o dividendo.

Preto (1903) faz uma apresentação das operações elementares, idêntica à de Nunes (1887), mas, por vezes, exemplifica o sentido das operações com recurso a um problema com contexto, como se verifica na subtração. As operações aritméticas são definidas como as diferentes formas de combinar os números, podendo gerar outros, assim a "operação *aritmética* é toda a combinação feita com números." (Preto, 1903, p. 20, itálicos no original). A adição é apresentada como "*a operação que tem por fim formar um número que contenha tantas unidades, quantas são as contidas em muitos números dados*" (Preto, 1903, p. 20, itálicos no original). Na adição, Preto (1903) distingue dois casos, quando as parcelas são números simples e quando as parcelas são números compostos, explicando depois a forma de fazer a adição nos dois casos. Depois de explicar a forma de adicionar quaisquer números, usando o algoritmo, Preto (1903) apresenta três regras para a adição, a soma é independente da ordem das parcelas, a soma não se altera se adicionarmos um número qualquer de unidades a uma das parcelas, desde que se diminua o mesmo número de unidades na outra parcela, e se a uma das parcelas adicionarmos ou tirarmos qualquer número de unidades, a soma aumenta ou diminui o mesmo número de unidades. A subtração é introduzida no sentido de completar com um exemplo em que utiliza um contexto de alunos da escola normal "suponhamos que queremos saber quantos alunos frequentam a 2.ª classe duma escola normal, sabendo que na 2.ª e 3.ª classes, conjuntamente, há 96 e na 3.ª há 41 alunos" (Preto, 1903, p. 26), sendo definida como "*a operação que tem por fim tirar de um número dado tantas unidades, quantas são as contidas noutro número também dado, porém, em geral, menor que o primeiro*." (Preto, 1903, p. 26, itálico no original). Logo a seguir, Preto (1903) define o resultado da subtração como resto ou diferença e o diminuendo ou aditivo como o maior dos números dados, o número de onde se tira, e o diminuidor ou subtrativo, a quantidade que se tira, apresentando também os sinais utilizados na operação. Apresenta uma segunda definição de subtração como "a operação, na qual, sendo dada a soma de duas parcelas e uma delas, se pede a outra." (Preto, 1903, p. 27) que enquadra o sentido da operação no primeiro exemplo apresentado.

Preto (1903) define a multiplicação como uma adição de parcelas iguais "multiplicação é a operação que tem por fim repetir um número tantas vezes quantas são as unidades de um outro número igualmente dado" (Preto, 1903, p. 39). São também definidas as designações dos números quando utilizados na multiplicação, o resultado é o produto, o número que se repete é o multiplicando e o número que indica quantas vezes se repete o multiplicador, estes dois últimos também são designados por fatores. Na multiplicação, Preto (1903) distingue três casos, quando os dois fatores são números só com um algarismo, quando um dos fatores só tem um algarismo e o outro tem mais do que um algarismo, e quando os dois fatores têm mais do que um algarismo. A divisão é definida como "*a operação que tem por fim decompor um número dado em tantas partes iguais, quantas são as unidades de um outro número dado.*" (Preto, 1903, p. 54, itálico no original). O autor distingue as designações atribuídas aos números na divisão. O dividendo é o número que se decompõe em partes iguais, o divisor é o número que indica em quantas partes iguais se decompõe o dividendo e o quociente é o resultado da divisão. A divisão é representada com o sinal **:** ou através de um traço horizontal, como fração. A divisão também é definida como a operação inversa da multiplicação "a operação pela qual, sendo dado o produto de dois fatores e um deles, se determina o outro." (Preto, 1903, p. 55) e ainda como "a operação pela qual se procura quantas vezes um número dado se contém noutro número também dado." (p. 55). Da primeira definição apresentada, o autor conclui que a divisão também se pode apresentar como uma subtração em que se subtrai repetidamente o divisor ao dividendo e aos restos parciais que vão surgindo.

Os manuais de Affreixo e Freire (1891) e Coelho (1906) centram-se no ensino inicial das operações, após o ensino da contagem e do sistema numérico, e na utilização de materiais didáticos. Esta abordagem diferencia-se daquela exposta nos manuais de Nunes (1887) e Preto (1903), onde as operações surgiam definidas de uma forma mais abstrata e com pouco ligação ao concreto. Esta diferença relaciona-se com o caráter distinto dos dois grupos de manuais, já que este segundo grupo se destinava à componente pedagógica do curso, pode também relacionar-se com a formação dos autores dos manuais, já que os autores do primeiro grupo de manuais tinha uma formação na área das ciências, nomeadamente Preto (1903) que tinha uma formação especificamente em matemática, mas também se pode relacionar com algumas ideias que irão marcar a Educação Nova no início do século XX e que estão de alguma forma presentes nos manuais de pedagogia e de metodologia, como a questão dos métodos ativos e a utilização da concretização.

Para fazer a iniciação da adição, Affreixo e Freire (1891) apresentam algumas indicações, recorrendo a um material designado como contador horizontal. Affreixo e Freire (1891) começam por relacionar esta operação com o ato de juntar as esferas no contador. Depois, o trabalho da adição com o contador horizontal é direcionado no sentido do algoritmo e de recorrer às regras do sistema decimal para proceder à adição. O professor deve começar por separar tantos grupos de esferas, quantos os algarismos de cada coluna, ordenando-os em grupos de dez mais o resto, se houver. Para representar o resto, escreve-se sob o algarismo correspondente, levando-se para a coluna imediata tantas unidades, quantos grupos de dez se formaram anteriormente.

Na subtração, Affreixo e Freire (1891) começam por dar a indicação de que o professor deve começar por fazer exercícios inversos aos que fez na iniciação do contar. Depois, deve arrumar todas as esferas para um dos lados do contador horizontal e separar as esferas para o lado oposto no primeiro arame, dizendo com os alunos "dez menos um, nove – dez menos dois, oito – dez menos três, sete …" (Affreixo & Freire, 1891, p. 226). O professor deve realizar o mesmo tipo de exercícios, mas utilizando as esferas de dois arames, com números até vinte. Affreixo e Freire (1891) realçam que, quando o grupo subtrativo for maior que o aditivo, devem-se juntar ao aditivo dez esferas. Depois de tirar a esse grupo, um grupo igual ao do subtrativo, fica o resto. Este esclarecimento de Affreixo e Freire (1891) remete para o algoritmo da subtração, embora a abordagem anterior destes autores não apresente o algoritmo da subtração.

Na multiplicação, Affreixo e Freire (1891) referem em primeiro lugar que para fazer a multiplicação é necessário saber a tabuada, que também pode ser ensinada com recurso ao contador. Esse ensino deve começar pela separação do mesmo número de esferas em cada arame e pela sua contagem. Depois de este tipo de exercício estar rotinado, o professor deve reunir os grupos de esferas e dizer com os alunos a tabuada da multiplicação da seguinte forma "supondo as esferas divididas em grupos de oito, o professor vai reunindo um, outro e outro grupo … dizendo da cada vez: uma vez oito, oito – duas vezes oito dezasseis" Affreixo e Freire (1891, p. 226). Os alunos devem ser depois levados a verificar a exatidão da soma abreviada que fizeram.

No que diz respeito à divisão, Affreixo e Freire (1891) salientam que no ensino desta operação se devem separar no contador tantas esferas como as unidades no dividendo, fazendo grupos de esferas com as mesmas unidades que o divisor, sobrando um resto de esferas. O número de grupos equivale ao quociente, o resto não se conta, servindo apenas para depois ensinar a prova da operação ou nas aproximações mais exatas do quociente. Affreixo e Freire (1891) destacam na operação de divisão que apresentam apenas um caso e que quem usar o compêndio deve estender o procedimento às situações em que é necessário recorrer a dividendos parciais.

Coelho (1906) também apresenta as operações após o trabalho com as contagens e construção do sistema numérico, recorrendo a materiais. Relativamente à adição, devia-se ir tomando sucessivamente objetos e agrupando-os sobre a mesa, formando diversos números. A criança devia repetir todas as operações. Através de uma representação icónica, Coelho (1906) apresenta a disposição que os objetos deviam ter na mesa. Não é referido se essa representação icónica devia ser também utilizada com as crianças, ou se era apenas uma indicação para o professor dispor os objetos em concreto.

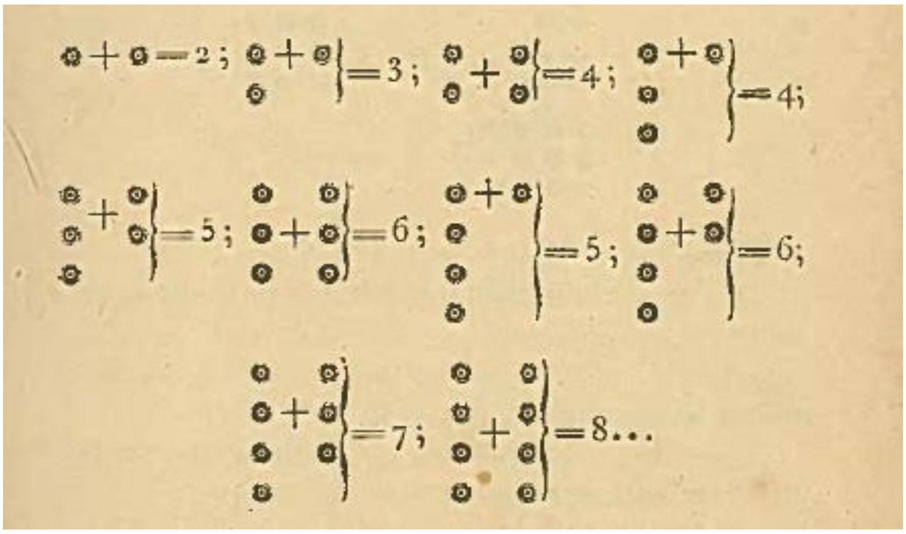


Figura 6.5. Representação icónica de como deveriam ser colocados os objetos em cima da mesa, formando diferentes grupos (Coelho, 1906, p. 96).

Na construção dos números por subtração, Coelho (1906) refere que se poderia usar os objetos representados na figura anterior e ir retirando um de cada vez. A multiplicação é apresentada por Coelho (1906) como uma soma abreviada de parcelas iguais. Para concretizar os números até 10 com esta operação, o professor devia levar a criança a representar o multiplicando por grupos de objetos contendo 1, 2, 3 objetos cada grupo, representando de seguida o multiplicador pelo número desses grupos. Coelho (1906) apresenta a figura seguinte para ilustrar a concretização do procedimento.

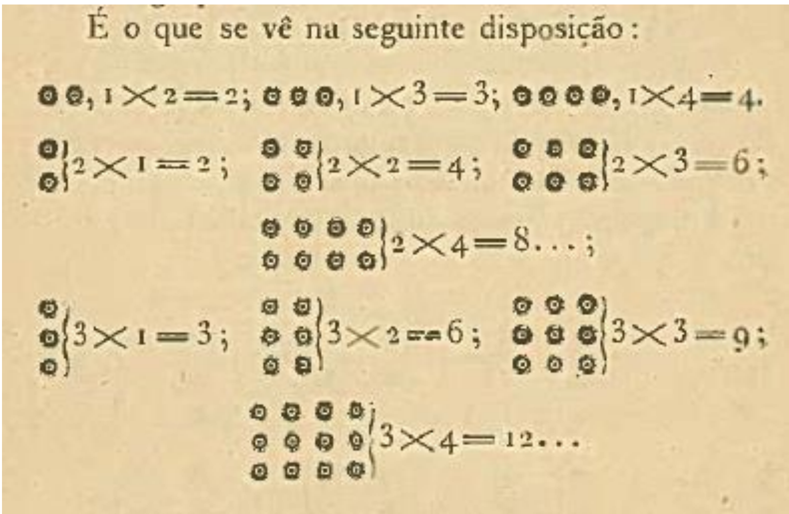


Figura 6.6. Representação icónica de como deveriam ser colocados os objetos em cima da mesa para representar a multiplicação (Coelho, 1906, p. 98) (digitalização, 100% do original).

Na construção de números inteiros até 10 através da divisão, Coelho (1906) refere que se devem apresentar novamente os grupos que foram formados com a multiplicação. De seguida, o professor deve mostrar ao aluno, dentro do grupo total, quantas vezes entram os subgrupos parciais, que podem ser considerados horizontalmente ou verticalmente. Para ilustrar o procedimento a realizar, Coelho (1906) apresenta a figura seguinte com o grupo total, representado icónica e simbolicamente.

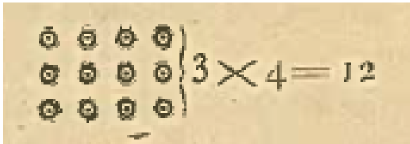


Figura 6.7. Representação icónica e simbólica do grupo total de objetos (Coelho, 1906, p. 98) (digitalização, 100% do original).

De acordo com Coelho (1906), o professor devia de seguida fazer notar ao aluno o subgrupo considerado verticalmente, disposição que o autor apresenta iconicamente, tal como na figura seguinte.

Figura 6.8. Representação icónica do subgrupo de objetos considerado verticalmente (Coelho, 1906, p. 98) (digitalização, 100% do original).

Coelho (1906) realça que este subgrupo entra no total quatro vezes e representa simbolicamente a divisão $12 : 3 = 4$. Logo de seguida, Coelho (1906) destaca que o professor também deve apresentar o subgrupo considerado horizontalmente, que representa iconicamente, para depois referir que este subgrupo entra no todo três vezes, representando simbolicamente a divisão $12 : 4 = 3$.

Só depois deste trabalho com as operações é que Coelho (1906) apresenta um jogo com o qual faz a transição entre a concretização das relações numéricas e a apresentação destas através de algarismos. Para Coelho (1906) esta transição deve ser gradual porque considera que "passar do *empirismo* das relações entre os objetos para a *conceitualidade* dos algarismos é um salto violento." (p. 100, itálicos no original). Para fazer esta transição, Coelho (1906) indica as qualidades que deve ter o processo a utilizar. Primeiro, deve destacar os objetos a numerar, os algarismos destinados a designar os números dos objetos e a correspondência entre esses termos. Em segundo, deve levar ao aluno até ao conceito de valor absoluto e valor relativo dos algarismos.

Como processo para corresponder às qualidades descritas anteriormente, Coelho (1906) apresenta o que designa por jogo[153]. Neste jogo, cada aluno deve ter um conjunto de pranchetas em madeira com os algarismos inscritos, deve ter também um conjunto de objetos e ainda uma caixa em madeira retangular, dividida com oito ou nove separações intermédias transversais. Na mesa, a esta caixa de madeira retangular, podia-se juntar uma outra de menores dimensões junto à face menor à direita da primeira. Este material é apresentado por Coelho (1906) com uma ilustração.

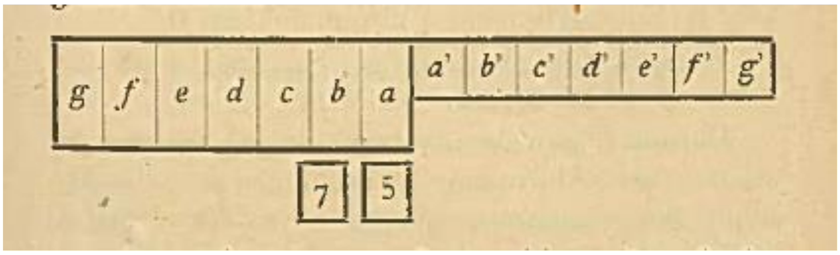


Figura 6.9. Ilustração apresentada para descrever o jogo para trabalhar a numeração (Coelho, 1906, p. 98) (digitalização, 100% do original).

No subcapítulo III da sua obra, designado por *Os números significados por algarismos*, Coelho (1906) começa por destacar que nesta fase o aluno irá abandonar os objetos e ficar só com os algarismos, referindo-se sempre a uma unidade determinada. O autor apresenta depois as regras práticas das operações fundamentais da aritmética só com números inteiros não negativos. Para a adição apresenta dois casos, uma situação em que não é necessário adicionar unidades de uma ordem às da ordem imediatamente superior e outra situação em que é necessário adicionar unidades de uma ordem imediatamente superior. Todos os exemplos são referidos a uma unidade determinada, neste caso, as conchas. Coelho (1906) apresenta diversos exemplos do procedimento, como se pode ver na figura 6.10.

[153] Este processo está também descrito na obra *Princípios de Pedagogia* (Tomo II) de José Augusto Coelho.

1.º — Quando cada numero é apenas representado por um algarismo, seguir-se-ha o caminho indicado nos typos de calculo seguintes:

$$\begin{array}{r}1\text{ concha}\\+\ 1\text{ concha}\\\hline 2\text{ conchas}\end{array};\quad\begin{array}{r}2\text{ conchas}\\+\ 1\text{ concha}\\\hline 3\text{ conchas}\end{array};\quad\begin{array}{r}2\text{ conchas}\\+\ 2\text{ conchas}\\\hline 4\text{ conchas}\end{array};\quad\begin{array}{r}3\text{ conchas}\\+\ 1\text{ concha}\\\hline 4\text{ conchas}\end{array};$$

$$\begin{array}{r}3\text{ conchas}\\+\ 2\text{ conchas}\\\hline 5\text{ conchas}\end{array};\quad\begin{array}{r}3\text{ conchas}\\+\ 3\text{ conchas}\\\hline 6\text{ conchas}\end{array};\quad\begin{array}{r}4\text{ conchas}\\+\ 1\text{ concha}\\\hline 5\text{ conchas}\end{array};\quad\begin{array}{r}4\text{ conchas}\\+\ 2\text{ conchas}\\\hline 6\text{ conchas}\end{array};$$

$$\begin{array}{r}4\text{ conchas}\\+\ 3\text{ conchas}\\\hline 7\text{ conchas}\end{array};\quad\begin{array}{r}4\text{ conchas}\\+\ 4\text{ conchas}\\\hline 8\text{ conchas}\end{array};\quad\begin{array}{r}5\text{ conchas}\\+\ 1\text{ concha}\\\hline 6\text{ conchas}\end{array},\text{ etc.}$$

2.º — Quando os numeros são representados por *mais d'um* algarismo, teremos os seguintes exemplos:

$$a)\ \begin{array}{l}\text{a 2 dezenas de conchas} + 1\text{ concha}\\\text{juntar .... 2 conchas}\\\hline \text{2 desenas de conchas} + 3\text{ conchas}\end{array}\quad\text{ou}\quad\begin{array}{r}\text{a 20 con.} + 1\text{ con.}\\\text{juntar...... 2 con.}\\\hline 20\text{ con.} + 3\text{ con.}\end{array}$$

Figura 6.10. Exemplos do procedimento a utilizar na adição, quando não é necessário adicionar uma unidade às da ordem imediatamente superior (Coelho, 1906, p. 98) (digitalização, 100% do original).

Na subtração, Coelho (1906) apresenta também dois casos. No primeiro caso os algarismos do aditivo, designado por diminuendo, são todos maiores do que os do subtrativo, designado por diminuidor. No segundo caso, nem todos os algarismos do aditivo são maiores do que os seus correspondentes do subtrativo. Para os dois casos, Coelho (1906) apresenta diversos exemplos. O segundo caso é ilustrado da seguinte forma:

B) Caso em que *nem todos* os algarismos do diminuendo são maiores que os do diminuidor.

Proceder-se-ha como se vê no exemplo seguinte:

De 6 cent. de con. + 3 dez. de con. + 7 con.

tir. 4 cent. de con. + 5 dez. de con. + 3 con.

será o mesmo que de 600 con. + 30 con. + 7 con. tirar 400 con. + 50 con. + 3 con.; ora, isto é o mesmo que —

$$\begin{array}{l}\text{de } 500\text{ con.} + 130\text{ con.} + 7\text{ con.}\\\text{tir. } 400\text{ con.} + \ \ 50\text{ con.} + 3\text{ con.}\\\hline \quad 100\text{ con.} + \ \ 80\text{ con.} + 4\text{ con.}\end{array}\quad\text{ou}\quad\begin{array}{l}\text{de } 637\text{ con.}\\\text{tir. } 453\text{ con.}\\\hline \quad 184\text{ con.}\end{array}$$

Figura 6.11. Exemplificação do procedimento a realizar no caso em que um dos algarismos do aditivo é menor do que o seu correspondente no subtrativo (Coelho, 1906, p. 98) (digitalização, 100% do original).

Na multiplicação, Coelho (1906) apresenta dois casos. No primeiro caso o multiplicador tem apenas um algarismo e, no segundo caso, o multiplicador é expresso por mais do que um algarismo. Também na multiplicação, Coelho (1906) refere-se sempre à unidade concha. Na situação em que o multiplicador tem mais do que um algarismo, Coelho (1906) propõe um procedimento em que decompõe um dos fatores para obter produtos parciais que no final adiciona. O procedimento está ilustrado na figura seguinte.

Assim, sejam os numeros a multiplicar **1745 ×354.**

Eis como se procederá, empregando a analyse.

Mostrando ao alumno que **354 = 300 + 50 +4,** tudo se reduzirá a elle fazer tres multiplicações como as seguintes:

```
1745   con.        1745   con.       1745  con.
 300                 50                 4
------             -----              ----
523500 con.        87250  con.       6980  con.
```

N'estas tres operações será facil mostrar como na primeira o producto deve representar centenas, dezenas na segunda e unidades na terceira.

Agora, levando-o a operar, por synthese, a reunião das tres operações, teremos:

```
  1745  con.               1745  con.
   354                      354
 ------                   ------
  6980           ou        6980
 87250                     8725 .
523500                    5235
 ------                   ------
617730  con.              617730 con.
```

Figura 6.12. Procedimento a realizar quando o multiplicador tem dois algarismos (Coelho, 1906, p. 98) (digitalização, 100% do original).

Na divisão, são também apresentados dois casos, o primeiro descreve a divisão em que o quociente é expresso só com um algarismo, podendo o dividendo e o divisor ser expressos com qualquer número de algarismos. O segundo caso apresentado para a divisão remete para a situação em que o quociente tem mais do que um algarismo. No primeiro caso, Coelho (1906) assinala que se deve apresentar dois números, com a indicação de que um é o dividendo e o outro o divisor. De seguida, deve-se construir uma tabela com os produtos do divisor por 1, por 2, por 3 …. No final o aluno deve utilizar a tabela para o auxiliar na procura do quociente.

No que diz respeito a ideias gerais sobre a geometria e o seu ensino, começa-se por salientar que um dos manuais, Nunes (1887) não apresenta considerações sobre o esse ensino porque na época a aritmética e a geometria eram trabalhadas em disciplinas separadas e o manual destinava-se apenas à disciplina de *Aritmética, sistema legal de pesos e medidas, noções de álgebra*. Dos restantes três manuais, distingue-se a abordagem do manual de Preto (1903) da componente das ciências de especialidade e formação geral, mais centrados nos conteúdos de geometria, dos outros dois, Affreixo e Freire (1891) e Coelho (1906), mais centrados numa abordagem ao ensino da geometria.

Na obra de Preto (1903), a geometria é tratada na segunda parte, que está organizada em três livros, correspondentes aos conteúdos das três classes do curso das escolas normais da época em questão. O primeiro livro começa por apresentar os conteúdos de geometria do curso de formação de professores e depois aborda algumas noções preliminares que designa por definições. A primeira definição apresentada é a de geometria que Preto (1906) define como "a ciência que se ocupa da extensão e da forma dos corpos." (p. 322). São depois apresentadas as definições de volume, superfície, linhas e ponto, por esta ordem. Depois destas noções preliminares, Preto (1903) trata de alguns termos usados normalmente em geometria, como a proposição, teorema, hipótese, tese, problema, lema, corolário, escólio, axioma e postulado. A partir destas noções são apresentados os conteúdos do programa, usando o método dedutivo.

Relativamente ao ensino da geometria, Affreixo e Freire (1891) começam por salientar que a prática é essencial no ensino primário, em particular no caso da geometria. O professor deve começar por levar os alunos a fixar as formas das figuras, círculo, o quadrado, o triângulo e o retângulo. estas formas devem ser observadas no meio que rodeia as crianças. Deve-se proceder da mesma forma com as figuras como o cubo, o cilindro, o paralelepípedo, os prismas e as pirâmides. Os autores salientam que acima de tudo "é ter em vista que se não trata de ensinar a demonstrar e deduzir os teoremas, de que certos cálculos dependem; mas sim esses cálculos, de um modo prático, racional e conveniente por sua eficácia." (Affreixo & Freire, 1891, p. 229). Neste ensino da geometria, é essencial que as escolas possuam sólidos geométricos em madeira e caixas de material Froebel.

Ainda no ensino da geometria, Affreixo e Freire (1891) destacam os exercícios de cartonagem, que permitem fixar as formas geométricas, de uma forma lúdica. Os autores recomendam o trabalho com a planificação de sólidos em cartão e posterior construção. Também recomendam a construção da base dos sólidos com cortiça e das arestas com arames. No final deste ponto, Affreixo e Freire (1891) desafiam os professores que tenham dúvidas sobre este tipo de ensino, a experimentarem.

Coelho (1906) começa por definir o objeto da geometria como sendo "as formas da extensão em si e nas suas relações" (p. 84). Na escola primária o objeto de estudo deveria ser limitado "1.º - As formas da extensão em si e mais gerais; 2.º - As relações mais elementares entre essas formas predominando, pela sua aplicação prática, as de equivalência." (p. 84). O processo indicado por Coelho (1906) para o ensino da geometria nas escolas primárias e infantis é o do empírico e real. A abstração pura das formas da extensão deve ser concretizada a partir das porções de matéria de que elas são a abstração, tornando-as mais tangíveis e reais, defende Coelho

(1906). Para este propósito, Coelho (1906) sugere a utilização do material *froebeliano* ou outros objetos materiais adaptados.

A ordem metódica que Coelho (1906) indica que deve ser adotada para o ensino da geometria é a seguinte:

> Primeiramente, virão as formas consideradas *em si* e depois as suas *relações*: pelo que respeita às formas em si, serão, em primeiro lugar, apresentadas ao aluno as *sólidas*, depois as *superficiais*, depois as *lineares* e, por último, os *pontos*, avançando-se assim do *concreto para o abstrato*; pelo que respeita às relações entre as formas, considerando acima de todas as de *equivalência*, surgirão primeiro as relações entre as lineares, depois entre as superficiais e, por último, entre os volumes, passando-se assim do *abstrato para o concreto*. (pp. 84-85, itálicos no original)

Nesta proposta, Coelho (1906) ressalta que no ensino da geometria o aluno passaria pelo que o autor designa por ciclo natural na ordem da atividade mental, primeiro do concreto para o abstrato e depois do abstrato para o concreto.

Todos os manuais utilizados neste período apresentam problemas de aritmética relacionados com os conteúdos a trabalhar, mas nem todos referem explicitamente o papel que estes devem ter no ensino da aritmética. No final de cada conteúdo, Nunes (1887) apresenta um conjunto situações e problemas onde os conteúdos podem ser aplicados, no entanto não existe no manual uma discussão explícita sobre o papel que os problemas podem ter no ensino da aritmética. Affreixo e Freire (1891) salientam que os problemas são essenciais no ensino da aritmética, devendo estar relacionados com o meio social e familiar dos alunos, com contextos relacionados com as compras, recados e trocos. Os autores dão ainda realce à necessidade de os professores levarem os seus alunos a resolver o maior número de problemas de uso comum, considerando que esta é a parte mais proveitosa do ensino da aritmética. No que se refere ao manual de Preto (1903), este trata dos problemas no contexto do cálculo de expressões numéricas, definindo-os da seguinte forma:

> *Problema* é uma questão que se pretende resolver e na qual, sendo conhecidos alguns números, se trata de achar, por meio das operações aritméticas executadas sobre eles, outros números correspondentes aos pedidos do problema.
> Os números conhecidos chamam-se *dados* do problema e os que se pretendem obter são as *incógnitas*. (p. 173, itálicos no original)

Preto (1903) considera que não se podem apresentar regras gerais para resolver todo e qualquer problema, mas, conhecendo a finalidade das diferentes operações aritméticas, pode-se, na maior parte dos casos, reconhecer qual deve ser aplicada para alcançar o resultado pedido. Preto (1903) chama a atenção para que na resolução de problemas são muito importantes a razão e o bom senso.

Ainda no que diz respeito a princípios sobre o papel da resolução de problemas no ensino da aritmética, salienta-se que o manual de Coelho (1906) não apresenta qualquer referência a este aspeto. Pela necessidade de consultar a sua obra para esclarecer as recomendações para o ensino dos números racionais, foi possível verificar que em Coelho (1892) o autor apresenta um quadro sinótico com um esquema do que deve ser o cálculo numérico no ensino primário onde propõe a utilização de "exercícios e aplicações de uso comum" e "exercícios sobre problemas de aritmética concreta", mas não explicita e nem apresenta exemplos.

Em relação ao cálculo mental, este aspeto só é alvo de algum de algum destaque nas obras de Affreixo e Freire (1891) e Preto (1903). O cálculo mental é o primeiro ponto abordado por Affreixo e Freire (1891). Para estes autores, o uso doméstico, ou seja, o uso no dia a dia da contagem antecede o ensino da aritmética, sendo o cálculo mental o mais usado correntemente na vida. Para Affreixo e Freire (1891), o ensino do cálculo mental está completo com o exercício de resolução mental de problemas utilizando contextos usuais do meio social dos alunos. Alguns contextos sugeridos são as pequenas compras, os recados, os trocos. Os problemas só devem ser aplicados aos alunos depois de estes se habituarem a medir e a calcular mentalmente o custo ou preço das grandezas. O cálculo mental é utilizado na iniciação a todas as operações elementares, em estreita relação com os materiais didáticos, e precede todo o cálculo escrito.

Também na obra de Preto (1903) o cálculo mental merece destaque, sendo-lhe dedicado todo um capítulo. O cálculo mental é definido como "fazer as operações sem as escrever, é o que se indica pela expressão cálculo mental." (Preto, 1903, p. 78). Neste cálculo não existem regras fixas, estando estas dependentes do "bom senso e a sagacidade do calculador pode fazer descobrir." (Preto, 1903, p. 78). Este autor apresenta diversas técnicas de cálculo mental para as diferentes operações aritméticas.

O último aspeto abordado nesta caracterização global do conteúdo matemático das obras é a referência ao material didático. Estes materiais são apenas referidos nas obras que correspondem a disciplinas da componente pedagógica, Affreixo e Freire (1891) e Coelho (1906). Para Affreixo e Freire (1891) os materiais pedagógicos, como são designados na obra, são essenciais para tornar real e instrumental todo o ensino do cálculo. São referidos materiais como pesos e medidas, sólidos geométricos, caixas de material Froebel e contadores mecânicos. A coleção de pesos e medidas é considerada indispensável em todas as escolas porque "a avaliação de todas as grandezas aprende-se melhor praticando, ou mais propriamente, só praticando se aprende, porque só assim se compreende e se entende." (Affreixo & Freire, 1891, p. 52). Os sólidos geométricos são considerados essenciais no ensino da geometria, sendo proposto pelos autores que se possam construir na própria escola por meio de exercícios de cartonagem. A importância deste material é destacado por Affreixo e Freire (1891) que referem que "não há nenhuma criança capaz de compreender teoricamente a grandeza relativa das capacidades e volumes; nem se pode dizer que haja ensino abstrato, neste ramo de conhecimentos, porque só se abstrai por meio da observação e o aluno, sem ver sólidos, não pode abstrair nenhuma ideia.” (p. 52). Relativamente aos contadores mecânicos, Affreixo e Freire (1891) salientam que estes podem ser úteis nos exercícios de cálculo mental, que consideram ser a fundação do ensino da aritmética. Estes contadores são apresentados posteriormente na obra aqui analisada, no capítulo XII, no ponto que se refere ao ensino da aritmética.

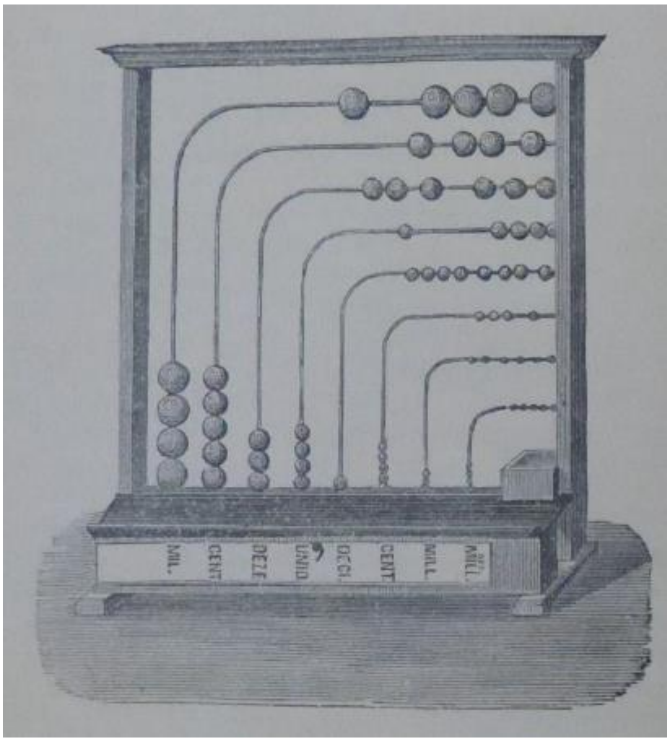


Figura 6.13. Gravura que representa o contador de hastes para a numeração escrita (Affreixo & Freire, 1891, p. 224, digitalização, 100% do original)

Coelho (1906) dá alguma atenção aos materiais de ensino, nomeadamente no que diz respeito a materiais didáticos para a exploração de conteúdos de matemática. É ainda de realçar a importância que Coelho (1906) dá aos livros de texto como material de ensino. Na sua obra são referidos materiais como a coleção geral de formas geométricas elementares, coleção de objetos para concretizar as relações numéricas, lousas quadriculadas e papel quadriculado, material froebiliano ou outros objetos adaptados e um jogo para explorar e construir o sistema de numeração decimal.

6.3.1. Em síntese

A forma como o conteúdo matemático é abordado nos manuais analisados no primeiro período é marcada pela distinção já assinalada anteriormente entre manuais da componente da especialidade e os manuais da componente pedagógica. Desta maneira, as obras de Nunes (1887) e de Preto (1903) apresentam inicialmente um conjunto de noções preliminares relacionadas com a aritmética, como a definição de grandeza, medida das grandezas, unidade, número, contar e espécies de números, número inteiro e número fracionário, que são comuns encontrar em aritméticas da época, mesmo naquelas que não são para uso nas escolas normais. A apresentação destas noções não é feita nos manuais da componente pedagógica. Estes manuais centram-se nas questões do ensino, existindo uma discussão sobre as metodologias a utilizar no ensino mais geral e, posteriormente, no ensino das disciplinas específicas.

Affreixo e Freire (1891) distinguem a metodologia a utilizar no ensino das ciências e no ensino das humanidades, considerando que no ensino das ciências deveriam ser utilizados processos instrumentais, como a demonstração experimental. No manual de Affreixo e Freire (1891) é abordada a metodologia da aritmética, da álgebra e da geometria, no entanto, os autores destacam que só fazem uma abordagem à álgebra porque esta disciplina está presente no programa das escolas normais, embora não faça parte dos programas do ensino primário. No ensino da aritmética, estes autores destacam o seu caráter utilitário. No manual de Coelho (1906) privilegia-se uma primeira abordagem à metodologia da geometria, por se considerar que nesta disciplina as noções se podem concretizar, e só depois é abordada a metodologia da aritmética. Neste manual não está presente a metodologia de álgebra porque com as reformas de 1896 e de 1901 os conteúdos relacionados com a álgebra tinham sido retirados dos cursos de formação inicial dos professores do ensino primário.

Na abordagem às operações elementares, distingue-se a abordagem dos manuais de Nunes (1887) e de Preto (1903), daquela que é feita nos manuais da componente pedagógica. Nos manuais de Nunes (1887) e Preto (1903) as operações elementares são apresentadas verbalmente, destacando-se casos que tenham procedimentos algorítmicos diferentes. Também são apresentados exemplos e definições onde se podem distinguir diferentes sentidos das operações, como na subtração o sentido de retirar e completar, ou, no caso da divisão o sentido de agrupamento e a divisão como operação inversa da multiplicação. Nestes manuais não são apresentadas sugestões metodológicas para o desenvolvimento do trabalho com as operações no ensino primário. Os manuais de Affreixo e Freire (1891) e de Coelho (1906) centram-se no ensino das operações associado à contagem, com recurso a materiais de concretização e a jogos que trabalham o sistema decimal. Nestes manuais também há um amplo recurso à representação pictórica na representação das operações, principalmente em Coelho (1906).

No que se refere ao papel da resolução de problemas no ensino da aritmética, todos os manuais analisados no primeiro período apresentam problemas de aritmética relacionados com os conteúdos a trabalhar, mas nem todos referem explicitamente o papel que a resolução de problemas deve ter no seu ensino. Nunes (1887) apresenta os problemas no final de cada conteúdo trabalhado, sendo sugeridas situações onde podem ser aplicados os conteúdos apresentados anteriormente no manual. Este autor não explicita o papel que estes problemas podem ter no ensino da aritmética. Preto (1903) destaca o papel da resolução de problemas no ensino da aritmética, salientando a aplicação das operações e o desenvolvimento do raciocínio e do bom senso. Nos manuais dedicados à componente pedagógica, apenas o manual de Affreixo e Freire (1891) refere a importância da resolução de problemas no ensino da aritmética, salientando que estes se devem relacionar com o meio social e familiar dos alunos, nomeadamente as compras, recados e trocos.

No cálculo mental, outro aspeto analisado na caracterização global do conteúdo matemático, nos manuais do primeiro período este só é referido em dois manuais, Affreixo e Freire (1891) e Preto (1903). Para Affreixo e Freire (1891) o cálculo mental deve ser trabalhado em estreita relação com a iniciação às operações elementares, precedendo o cálculo escrito. Também a obra de Preto (1903) refere-se ao cálculo mental de forma destacada, definindo-o como a realização das operações sem as escrever. Este autor apresenta diversas técnicas de cálculo mental para as diferentes operações, que se distinguem dos procedimentos algorítmicos e onde são utilizadas as propriedades das operações.

No que diz respeito às referências ao material didático nas obras analisadas no primeiro período, este apenas é referido nas obras dedicadas à componente pedagógica, sendo destacados materiais como pesos e medidas, sólidos geométricos, caixas de material Froebel e contadores mecânicos. Estes materiais são considerados essenciais no ensino da aritmética, da geometria e da medida porque permitem concretizar os conteúdos a ensinar.

Nas ideias gerais sobre o ensino da geometria, nos manuais do primeiro período distingue-se a abordagem de Preto (1903) daquela que é utilizada nos manuais da componente pedagógica. No manual de Preto (1903) são primeiro apresentadas algumas definições como volume, superfície, linhas e ponto, e depois são tratados os conteúdos do programa usando o método dedutivo. Nos manuais de Affreixo e Freire (1891) e de Coelho (1906) o ensino da geometria é encarado como um ensino eminentemente prático, estabelecendo-se uma relação com outras disciplinas como o Desenho. São sugeridos exercícios como a cartonagem e a planificação de sólidos, e é destacado o aspeto lúdico do trabalho a realizar com os alunos no ensino primário.

2.º Período – Nas escolas do magistério primário

6.4. Caracterização dos autores e do contexto

Relativamente ao grupo de autores que consta no segundo período, que vai de 1930 a 1974, também existe algum desequilíbrio na informação recolhida. Alguns autores já tinham sido retratados em outros trabalhos como o Dicionário dos educadores portugueses (Nóvoa, 2003), ou em publicações como Ferreira (2016), Pinheiro (1996), Pintassilgo (2006, 2016), Pintassilgo e Pedro (2012a, 2012b) e, por isso, foi possível recolher a informação desejada. Relativamente a um dos autores, Gabriel Gonçalves, foram efetuadas diligências no sentido de recolher informações junto da Porto Editora e junto da Escola Superior de Educação do Porto, locais de trabalho do autor na época da edição da obra analisada, mas não foi possível recolher a informação pretendida.

Os autores identificados para este período são Alberto Pimentel Filho (1875-1950), José Maria Gaspar (1910-1987) e Orbelino Geraldes Ferreira (1914-1965), José Eduardo Moreirinhas Pinheiro (1923-2017) e Gabriel Gonçalves (????-????). São todos autores portugueses. De uma forma geral nasceram nas primeiras décadas do século XX e atuaram na formação inicial de professores do ensino primário, já após a criação das escolas do magistério primário e o encerramento das escolas normais primárias. A exceção é Pimentel Filho que, apesar de estar incluído neste período porque o manual aqui analisado foi publicado já depois de 1930, logo a seguir à criação das escolas do magistério primário, foi um autor com uma longa carreira de docência nas escolas normais primárias e, após o encerramento e reabertura das escolas do magistério primário, já não voltou a trabalhar na formação de professores do ensino primário. É por isso um autor que tem uma ligação ao período anterior.

No que diz respeito à formação dos autores analisados, é de sublinhar um grupo constituído por José Maria Gaspar, Orbelino Geraldes Ferreira e José Moreirinhas Pinheiro, cuja formação inicial se refere à habilitação para o exercício do magistério primário, os dois primeiros ainda nas escolas normais primárias e o último já nas escolas do magistério primário. Outro elemento comum a dois destes autores é o curso de ciências pedagógicas, que lhes permitiu chegar à formação de professores. Apesar de não ter sido possível recolher informações sobre a formação inicial de Gabriel Gonçalves, pelo seu percurso profissional posterior é possível inferir que terá passado por uma escola de formação de professores do ensino primário, tendo provavelmente um percurso formativo semelhante aos três autores anteriores. Alberto Pimentel Filho distingue-se deste grupo por ter uma formação inicial ligada às ciências, tendo-se diplomado como médico na Escola Médico-Cirúrgica de Lisboa.

Salienta-se que nenhum dos autores analisados neste período teve uma formação específica na área da matemática. Isto poderá ser em parte atribuído ao facto de o plano curricular dos cursos de formação inicial de professores do ensino primário ter sido alterado ainda na década de 1930, e posteriormente em 1943, tendo perdido muitas das disciplinas da componente de especialidade e formação geral que faziam parte dos cursos das anteriores escolas normais primárias. Com os cursos centrados na preparação profissional, privilegia-se a componente prática, pedagógica e didática, o que fez com que os docentes que surgiram nas escolas do magistério primário tivessem essencialmente uma formação pedagógica e não uma formação específica na área da matemática. Mesmo a reestruturação do plano de estudos que decorreu em 1960, que reforçou a componente pedagógica e didática e que promoveu alguma especialização na didática, não parece ter tido influência na formação posterior dos autores deste período que passaram por essa reestruturação.

Da observação das profissões e lugares onde exerceram a profissão sobressai a longa permanência destes autores nas escolas de formação inicial de professores do ensino primário. No que diz respeito a Pimentel Filho, a par da docência de diversas disciplinas na Escola Normal de Lisboa, destaca-se o seu trabalho na escrita, nomeadamente com a edição de monografias médicas e de romances. No que diz respeito a José Maria Gaspar, salienta-se o seu trabalho como bolseiro do Instituto de Alta Cultura, primeiro em Espanha (1954) e depois no Centro Internacional de Estudos Pedagógicos de Sèvres, em França (1956) e a publicação de obras essencialmente ligadas à pedagogia. Orbelino Geraldes Ferreira também se destaca pelas obras publicadas. José Moreirinhas Pinheiro mesmo após a aposentação manteve uma ligação à Escola Superior de Educação de Lisboa, dedicando-se ao estudo da história da educação em Portugal. Neste aspeto, Gabriel Gonçalves distingue-se dos outros autores porque deixa a docência na Escola do Magistério do Porto e passa a trabalhar como inspetor-orientador no Ministério da Educação.

Da análise das manuais e dos aspetos biográficos dos seus autores não ressalta qualquer relação significativa destes, com pessoas da área da matemática ou do seu ensino. No entanto, não será de deixar de assinalar que autores como José Maria Gaspar, com as missões que desempenhou no exterior, terá tido contactos com pessoas no âmbito da pedagogia e do ensino e acesso a ideias que circulavam nos meios que terá frequentado. Mesmo os outros autores, embora sem missões no exterior, no âmbito do trabalho desenvolvido terão tido acesso a ideias que circulavam sobre o ensino, na época. Será possível analisar as influências que estes autores apresentam a partir da análise das referências bibliográficas utilizadas, o que será referido na caracterização global de cada um dos manuais.

Qualquer um dos autores aqui analisado tem uma extensa obra publicada, incluindo a sua participação na imprensa pedagógica da época, com a publicação de artigos em revistas da área da educação. Neste aspeto é de destacar os trabalhos publicados por Pimentel Filho, nomeadamente as *Lições de Pedagogia Geral e de História da Educação*, que Nóvoa (2003b) considera uma obra da maior importância para o estudo da pedagogia e da história da educação, destacando que Pimentel Filho é um autor que merece um estudo atento por o seu trabalho se situar num momento de afirmação das perspetivas científicas em educação. Das publicações de José Maria Gaspar e Orbelino Geraldes Ferreira, Castelo (2003) salienta a importância no apoio à reorganização do curso de formação de professores do ensino após a reabertura das escolas do magistério primário, em 1942. Castelo (2003) ressalta ainda que o registo escrito destes autores, em especial de Orbelino Ferreira, é ilustrativo do pensamento educativo dominante em Portugal, em meados do século XX, com a defesa de uma educação tradicional portuguesa e críticas a uma pedagogia internacionalista. Na obra publicada por Moreirinhas Pinheiro, Ferreira (2016) salienta o trabalho dedicado à história da educação em Portugal.

Por fim, no que diz respeito ao trabalho que tem sido publicado sobre estes autores, é de assinalar que têm sido publicados trabalhos sobre as suas obras de referência, mas também sobre aspetos biográficos. Neste grupo de autores sobressai a ausência de informações sobre Gabriel Gonçalves, sobre o qual não foi possível recolher informações nem identificar trabalhos que focassem a sua vida e obra.

6.4.1. Em síntese

No segundo período foram analisadas quatro obras de cinco autores: Alberto Pimentel Filho (Pimentel Filho, 1934), José Maria Gaspar e Orbelino Geraldes Ferreira (Gaspar & Ferreira, 1944), José Eduardo Moreirinhas Pinheiro (Pinheiro, 1961) e Gabriel Gonçalves (Gonçalves, 1972, 1974). De uma forma geral são autores que atuaram na formação inicial de professores do ensino primário após 1930, já depois do encerramento das escolas normais primárias e criação das escolas do magistério primário. A exceção neste grupo de autores é o caso de Pimentel Filho, cuja obra foi incluída no segundo período, por ter sido publicada em 1934, mas o autor teve uma longa carreira de docência nas escolas normais primárias, nomeadamente na Escola Normal Primária de Lisboa, estando por isso ligado ao primeiro período.

Nestes autores do segundo período é possível distinguir dois grupos, um formado por José Maria Gaspar, Orbelino Ferreira, José Moreirinhas Pinheiro e, muito provavelmente Gabriel Gonçalves, cuja formação inicial é realizada em escolas de formação de professores do ensino primário, escolas normais primárias ou escolas do magistério primário, seguida de uma formação em ciências pedagógicas. Distingue-se neste período Alberto Pimentel Filho, por ter tido uma formação inicial ligada às ciências, já que era médico. É de destacar que nenhum dos autores deste segundo período tem uma formação específica na área da matemática. Esta situação relaciona-se com as alterações que o curso de formação inicial de professores do ensino primário sofreu a partir da década de 1930, em que foram eliminadas as disciplinas da componente da especialidade e formação geral, privilegiando-se a componente prática, pedagógica e didática. Esta situação levou a que os docentes que passaram a lecionar nas escolas do magistério primário tivessem uma formação essencialmente pedagógica e não uma formação específica na área de matemática.

Da análise das relações dos autores do segundo período com pessoas da área da matemática ou do seu ensino, não ressalta qualquer relação significativa.

Estes autores apresentam uma extensa obra publicada, não só com a publicação de obras dedicadas à pedagogia, à metodologia ou à história da educação, mas também com uma participação ativa na imprensa pedagógica, com a publicação de artigos em revistas da área da educação. De salientar ainda as publicações feitas após a reabertura das escolas do magistério primário, nomeadamente de José Maria Gaspar e de Orbelino Geraldes Ferreira, por de alguma forma refletirem o pensamento educativo da época em Portugal, com a defesa de uma educação tradicional portuguesa e críticas à pedagogia disseminada internacionalmente.

Tal como foi referido relativamente aos autores do primeiro período, os autores ligados à componente pedagógica têm sido objeto de trabalhos de investigação, nomeadamente no âmbito do Dicionário de educadores portugueses (Nóvoa, 2003) ou no trabalho desenvolvido por Ferreira (2016), Pintassilgo (2006), Pintassilgo e Pedro (2012a, 2012b).

6.5. Caracterização global das obras

Com as alterações realizadas no curso a partir de 1930, as disciplinas da componente das ciências da especialidade e formação geral são praticamente eliminadas dos cursos de formação de professores do ensino primário, reforçando-se o caráter profissionalizante do curso com o aumento do número de horas das disciplinas com conteúdo didático. Como consequência, as obras analisadas neste segundo período são exclusivamente dedicadas a disciplinas da componente pedagógica como Pimentel Filho (1934), *Súmula Didáctica*, Gaspar e Ferreira (1944), *Notas de Didáctica Especial*, Pinheiro (1961) *Introdução ao Estudo de Didáctica Especial: para uso dos alunos-mestres das escolas do magistério primário* e Gonçalves (1972, 1974), *Didáctica do Cálculo*.

A tabela 6.2. sistematiza as obras analisadas neste segundo período, os autores, a edição trabalhada e as edições que foi possível identificar.

Tabela 6.2. - Identificação das obras referentes ao 2.º período analisado

Título	Autor	Edição	Edições identificadas
Súmula Didáctica	Alberto Pimentel Filho	1.ª (1934)	Uma edição.
Notas de Didáctica Especial	José Maria Gaspar e Orbelino Geraldes Ferreira	1.ª (1944)	Duas edições (1944, 1946)
Introdução ao Estudo de Didáctica Especial: para uso dos alunos-mestres das escolas do magistério primário	José Moreirinhas Pinheiro	2.ª (1961)	Três edições (1960, 1961, 1967)
Diáctica do Cálculo	Gabriel Gonçalves	2.ª (1972, 1974)	Duas edições (1970, 1972/1972, 1974)

No entanto, é possível distinguir três momentos onde se incorporam os manuais aqui analisados. Um momento de transição entre as escolas normais primárias e as escolas do magistério primário, um segundo momento em que a disciplina de *Didática Especial* engloba a didática de todas as disciplinas dos programas do ensino primário e um último momento em que a disciplina de *Didática Especial* é dividida em dois grupos, sendo o grupo B dedicado às disciplinas de Aritmética e Geometria, Ciências Geográfico-Naturais e Trabalhos Manuais.

O manual de Pimentel Filho (1934), *Súmula Didáctica*, enquadra-se num momento de transição entre o encerramento das escolas normais primárias e o desenvolvimento das escolas do magistério primário. Embora seja um texto elaborado para apoiar a prática dos professores do ensino primário, não é referida uma disciplina para a qual seja especificamente indicado, apesar de se poder enquadrar na disciplina de *Didática*, da qual Pimentel Filho era professor na época. De acordo com Pintassilgo (2006), a elaboração de obras dedicadas à didática ou à pedagogia no primeiro terço do século XX, organizadas por autores que eram também professores nas escolas de formação de professores do ensino primário, eram pensadas em primeiro lugar para esse contexto de formação. Nalguns casos as obras decorriam para a obtenção da nomeação definitiva do autor, noutros, para colmatar a ausência de livros que auxiliassem na aquisição de conhecimentos.

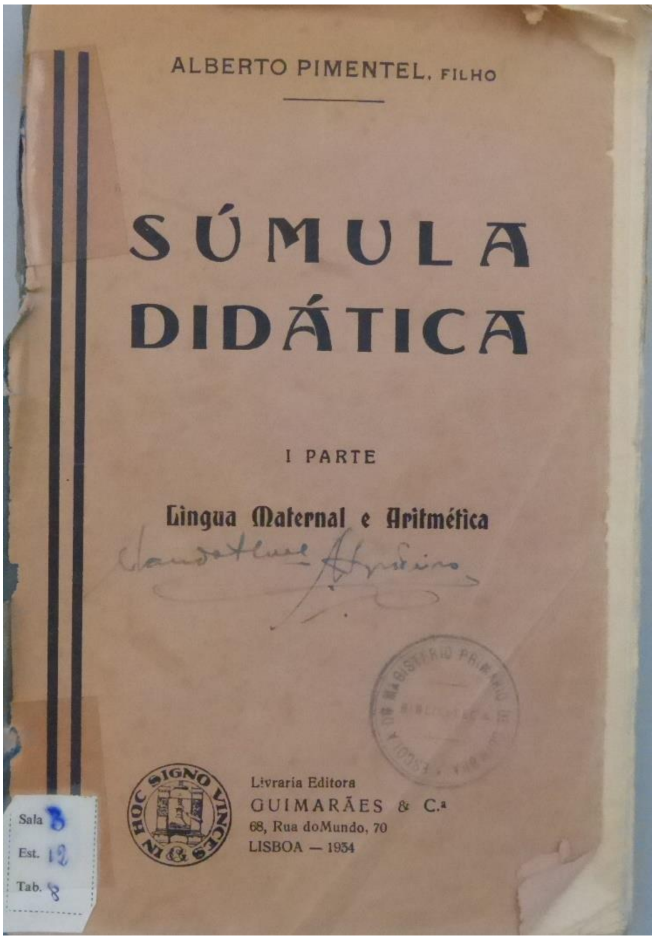


Figura 6.14. Capa da obra *Súmula Didática – I Parte – Língua Maternal e Aritmética*, de Alberto Pimentel Filho, 1934 (digitalização, redução, 50% do original).

O manual de José Maria Gaspar e Orbelino Geraldes Ferreira, *Notas de Didáctica Especial*, de 1944 surge após a reabertura das escolas do magistério primário e a publicação do respetivo plano de estudos. Neste plano está incluída a disciplina de *Didática Especial*, à qual se destina a obra. É a fase inicial da disciplina e o manual pretende colmatar a ausência de uma obra que auxilie na formação dos professores. Embora seja uma obra que surge num contexto conservador, nacionalista e católico, continua a apresentar muitas ideias ligadas à Educação Nova como a defesa dos métodos intuitivos e ativos, o aluno no centro do processo de aprendizagem e uma atenção às fases do seu desenvolvimento (Pintassilgo, 2012). O mesmo acontece nas indicações para o ensino da aritmética, onde se diz que este deve ser racional, prático, intuitivo e ligado à realidade.

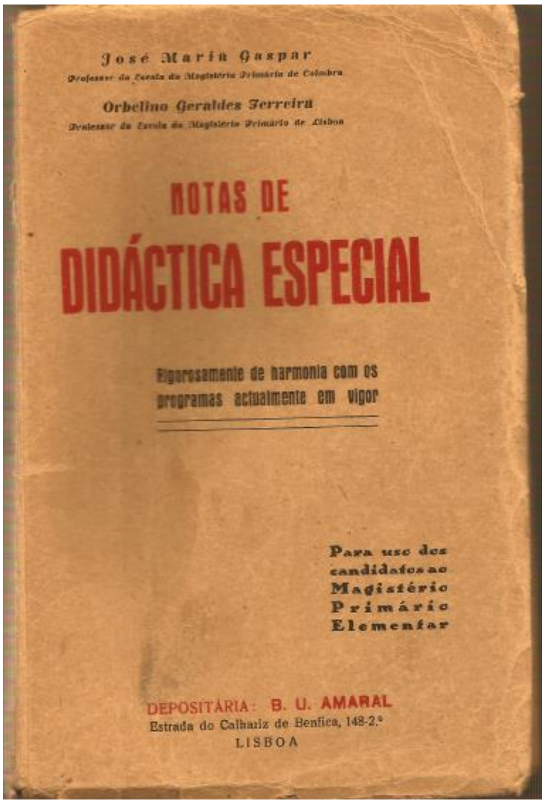


Figura 6.15. Capa da obra *Notas de Didáctica Especial*, de José Maria Gaspar e Orbelino Geraldes Ferreira, 1944 (digitalização, redução, 50% do original).

O manual *Introdução ao Estudo da Didática Especial: para uso dos alunos-mestres das escolas do magistério* de José Moreirinhas Pinheiro (1961) foi editado já após a reformulação do curso que ocorreu em 1960, que levou ao reforço da componente das metodologias de ensino e à separação da disciplina de *Didática Especial* em duas disciplinas, *Didática Especial A* e *Didática Especial B*, esta última centrada no ensino das ciências naturais e da matemática. O manual ainda apresenta a didática de todas as disciplinas do ensino primário. De acordo com Pintassilgo e Pedro (2012a), a primeira edição foi editada em 1960 e terá resultado da iniciativa de alunas e alunos de Moreirinhas Pinheiro, que compilaram apontamentos das suas aulas. A obra teve uma segunda edição em 1961, aqui analisada, já com uma revisão do autor, que a ampliou. Foi ainda editada uma terceira edição em 1967, dedicada à Didática Especial A (Língua Portuguesa, História Pátria e Desenho), área em que o autor se especializara (Pintassilgo & Pedro, 2012a). Existe ainda uma terceira edição, também datada de 1967, dedicada à Didática Especial B (Aritmética, Ciências Geográfico-Naturais e Trabalhos Manuais) que, embora esteja completa, não terá chegado a ser publicada, contendo um capítulo manuscrito por Moreirinhas Pinheiro sobre a Matemática Moderna, o que mostra o seu interesse pelo desenvolvimento do ensino nas diferentes disciplinas. Embora tenham elementos em comum, as três edições apresentam alterações entre si. Neste trabalho ter-se-á em linha de conta para análise essencialmente a edição de 1961, por ser uma edição que é fundamentalmente da responsabilidade do autor, estar completa, ter sido editada e ter em conta as alterações programáticas de 1960.

Pintassilgo e Pedro (2012a) consideram que a obra didática de Moreirinhas Pinheiro se situa entre uma herança da Educação Nova, que nunca deixou de marcar presença nas escolas de formação de professores do ensino primário, combinada com uma tradição da pedagogia católica e humanista “os discursos são esvaziados das teses mais radicais e dos projetos de transformação social subjacentes a algumas das correntes do movimento, sendo enfatizada a sua dimensão técnico-pedagógica.” (Pintassilgo & Pedro, 2012a, p. 9) O autor e a sua obra enquadram-se na construção de uma certa identidade profissional, que ocorre já na segunda metade do século XX que tem como referência o discurso didático, considerado como uma especialização técnica (Pintassilgo & Pedro, 2012a)

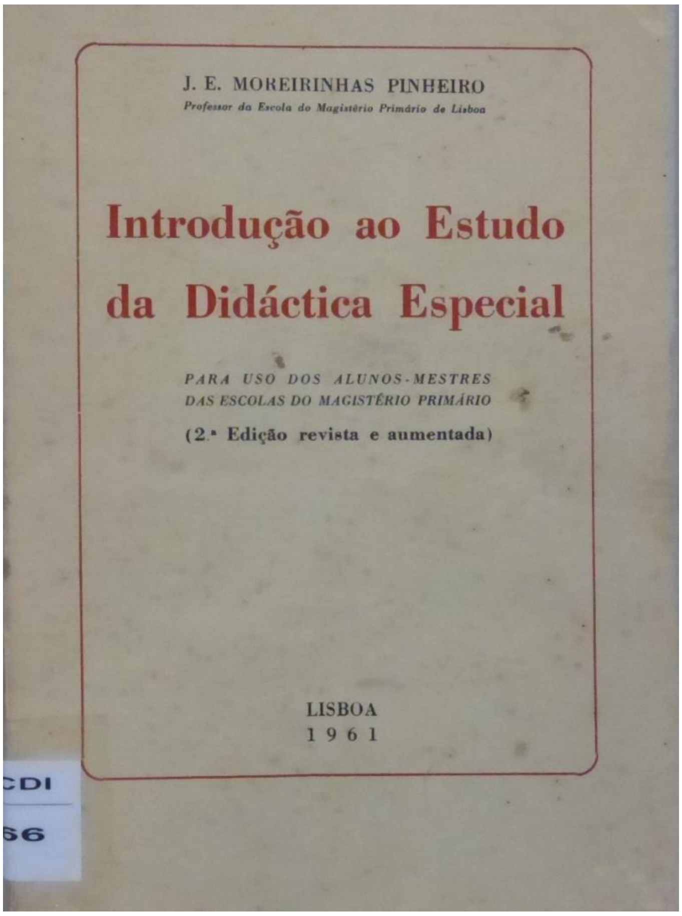
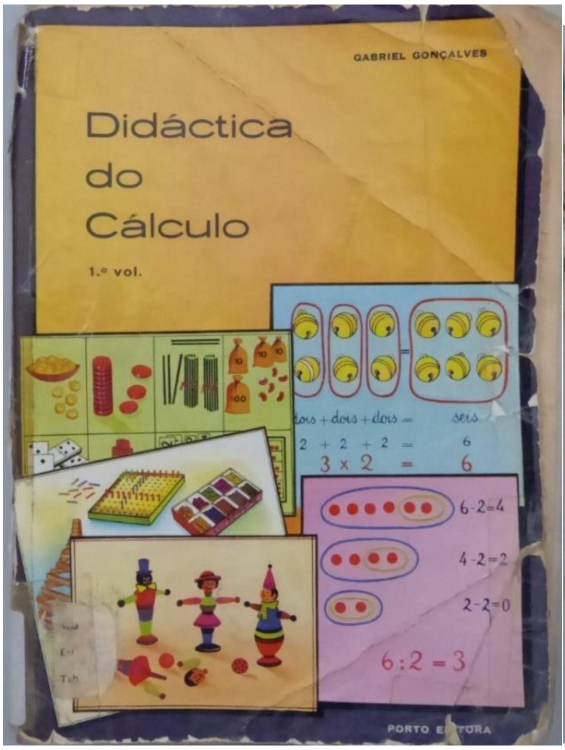


Figura 6.16. Capa da obra *Introdução ao estudo da Didáctica Especial*, 1961, 2.ª edição revista e aumentada, digitalização, redução, 50% do original.

A obra Didática do Cálculo, de Gabriel Gonçalves (1972, 1974) faz parte de um conjunto de didáticas editadas a partir da década de 1960 para servir de apoio à disciplina de *Didáctica Especial* dos cursos de formação inicial de professores do ensino primário das escolas do magistério primário. Quando foi editada esta obra, a disciplina de Didática Especial já se encontrava dividida em duas disciplinas especializadas nas didáticas de determinadas disciplinas. Isto também reflete nesta obra, que se dedica apenas à didática da aritmética e da geometria, ao contrário das obras anteriores deste período que apresentavam as didáticas de todas as disciplinas do ensino primário.



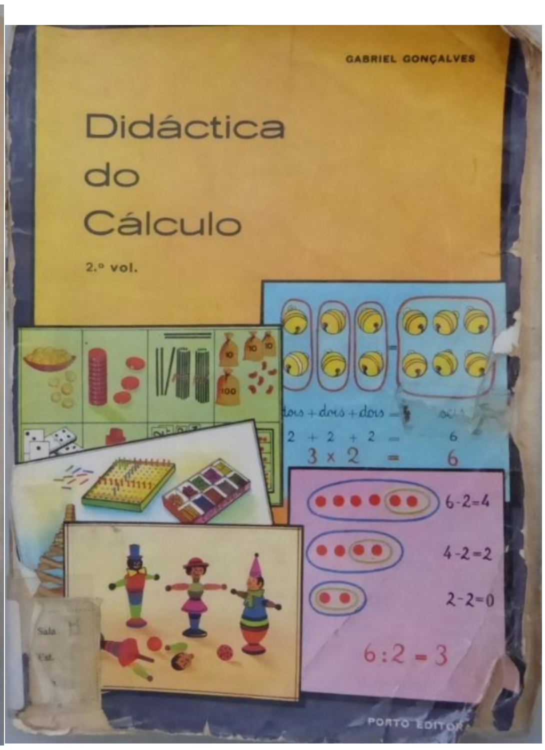


Figura 6.17. e **6.18.** Capa da obra Didáctica do Cálculo, 1.º e 2.º volumes, 1972, 1974, 2.ª edição (digitalização, redução, 40% do original).

Das quatro obras analisadas neste segundo período, três tiveram mais do que uma edição, sendo a obra de Pimentel Filho (1934) a que apresenta apenas uma edição. As obras foram editadas em diferentes momentos, uma é da década de 1930, outra é de meados da década de 1940, uma do início da década de 1960 e a última foi editada em dois volumes, sendo o último editado já em 1974, refletindo, por isso, diferentes momentos do curso de professores do ensino primário. Salienta-se que a *Didática do Cálculo*, de Gabriel Gonçalves, foi publicada por uma editora com maior difusão a nível nacional, o que poderá ter permitido que a obra tivesse uma divulgação diferente das obras anteriores aqui analisadas.

No que diz respeito à extensão, são todas obras bastante extensas, mas existe uma diferença assinalável entre as 133 páginas do manual de Pinheiro (1961), obra menos extensa, até às 492 páginas da obra de Gonçalves (1972, 1974), a obra mais extensa. O desenvolvimento dado à didática dos conteúdos de matemática também é muito variável. Enquanto as três primeiras obras deste período são generalistas, apresentando a didática das diferentes disciplinas dos programas do ensino primário, e por isso com um desenvolvimento menor das questões do ensino da matemática, a última obra é dedicada apenas ao ensino da matemática, apresentando um desenvolvimento maior da exploração didática dos conteúdos desta área.

A estrutura das obras também reflete o facto de serem generalistas ou de se dedicarem apenas ao ensino da matemática. O manual de Pimentel Filho (1934) apresenta-se dividido em duas partes, uma primeira dedicada à metodologia geral e a segunda que aborda a metodologia especial. A segunda parte está dividida em dois livros, um com a didática da língua maternal e o outro com a didática da aritmética. A didática da aritmética, livro II, ocupa a fração maior da parte dedicada à metodologia especial. A obra de Gaspar e Ferreira (1994) apresenta-se dividida em capítulos e secções, embora isso não seja explícito através da consulta do índice. O primeiro capítulo trata do programa de didática das escolas do magistério primário e o segundo ocupa-se da didática geral e da didática especial. Após os capítulos iniciais, cada capítulo discute a didática de cada disciplina. A didática da aritmética é a primeira a ser trabalhada. No que se refere ao manual de Pinheiro (1961), este está dividido em quinze capítulos e cada capítulo trata de uma didática específica. Este manual apresenta uma bibliografia final, o que o distingue dos outros manuais já referidos anteriormente nos dois períodos analisados. O manual de Gonçalves (1972, 1974) é apresentado em dois volumes, com um total de 52 capítulos que cobrem todo o programa de aritmética e geometria, do ensino primeiro elementar da época. Tal como Pinheiro (1961), este manual também apresenta uma lista bibliográfica final. É de destacar no manual de Gonçalves (1972) a introdução de diversas páginas a seguir à página 66 (66-A à 66-P) com um conjunto de exemplos relacionados com o projeto de remodelação dos programas do ensino primário, que estaria em curso, onde é visível a influência do Movimento da Matemática Moderna.

As obras generalistas apresentam sempre um capítulo inicial dedicado à metodologia geral e só depois surgem as didáticas das diferentes disciplinas. A obra dedicada apenas à didática dos conteúdos matemáticos também aborda um conjunto de princípios, métodos e técnicas de uma forma mais global, mas depois estabelece logo uma relação com o ensino da matemática, percorrendo todos os conteúdos do programa do ensino primário da época da edição.

De uma forma geral, os autores das obras destacam que a publicação pretendia apoiar os alunos, futuros professores, na preparação para a função docente. É de notar que obra de Pimentel Filho (1934) não tem esta indicação, sendo referido que se destina a apoiar os professores na sua prática. Nos objetivos apresentados nesta obra não se explicita uma relação direta com uma disciplina da formação inicial. Na obra de Pimentel Filho (1934) são destacados o seu caráter eminentemente prático e o seu papel de orientador da didática do ensino primário. A publicação da obra deveu-se à boa aceitação de outros trabalhos pedagógicos do autor no Brasil. No que diz respeito ao livro de Gaspar e Ferreira (1944), os autores referem que pretendiam a organização de uma obra que ajudasse na interpretação dos programas e nas dificuldades iniciais da vida escolar. Os autores salientam que a reabertura das escolas do magistério primário teria imposto a necessidade do aparecimento de um livro mais organizado e completo, mas as necessidades já indicadas anteriormente teriam levada à edição mais apressada da obra aqui em análise. No seu trabalho, Pinheiro (1961) refere que tratava de uma obra que pretendia facilitar o trabalho dos futuros professores, designados por alunos-mestres das escolas do magistério primário. Pretendia dar uma primeira preparação teórica a alunos que ainda tinham poucos conhecimentos, justificando assim a utilização de uma linguagem simples.

De acordo com Gonçalves (1972, 1974), o manual de *Didáctica do Cálculo* destinava-se principalmente aos alunos-mestres das escolas do magistério primário, embora também pudesse ser aproveitado por todos aqueles que se interessam pelos problemas do ensino. A 1.ª edição teria sido feita, de acordo com as palavras do autor, para dar resposta ao pedido de alguns alunos-mestres que pretendiam a publicação do resumo das lições realizadas na escola, para facilitar a sistematização que era difícil a partir dos apontamentos tirados na aula. O autor salienta ainda no prefácio que a orientação e técnicas apresentadas eram simples sugestões que deveriam ser adaptadas e recriadas por cada professor.

Relativamente ao ensino da matemática, o autor afirma que à época se parecia "estar no limiar de uma nova era. Livros publicados há um ou dois anos, versando, sobretudo, «conjuntos», já hoje são acusados de errados." (Gonçalves, 1972, p. 5). Esta seria a razão pela qual o autor não iria entrar nesse tipo de trabalho. Gonçalves (1972) define para o seu trabalho um objetivo mais modesto "sugerir, a quem não tem grande experiência, uma orientação e uma série de técnicas e formas de atividade, capazes de o ajudar a tornar o ensino da matemática mais intuitivo e ativo." (p. 5)

Relativamente aos autores em que se baseiam as obras aqui analisadas, tanto no aspeto geral como no que diz respeito ao ensino da matemática, é de salientar que apenas duas obras apresentam referências bibliográficas finais. Pimentel Filho (1934) não apresenta um conjunto de referências finais, mas, ao contrário do que acontece com muitos dos autores analisados neste trabalho de investigação, são muitas as referências que vão surgindo no corpo do texto. As referências surgem tanto na parte dedicada à metodologia geral, como na parte dedicada à metodologia da aritmética. Na parte dedicada à didática da aritmética há uma grande frequência de referências, sendo possível verificar que em certas partes, como a parte dedicada ao ensino das frações e dos decimais, Pimentel Filho segue de perto as indicações de outros autores. Na metodologia geral e na didática da língua são citados diversos autores, destacando-se Rousselot[154] e Compayré[155], pela frequência com que surgem. Existem ainda referências a Rousseau, Montessori, Quintiliano, Cousinet, Dewey, Ostwald, Cellèrier, Bacon e Claparéde. No que diz respeito às referências utilizadas na parte dedicada à didática da aritmética, destacam-se três autores. São autores de língua francesa, seus contemporâneos, da área da matemática, Bourlet[156], Grosgurin[157] e Laisant[158]. Ainda no âmbito da didática de aritmética são citados os trabalhos de Lay e de Decroly[159]. Um dos autores, Grosgurin, é particularmente citado a propósito do ensino dos números racionais, frações e decimais, sendo referido por vinte e sete vezes. No âmbito deste estudo não nos foi possível aceder à proposta de Grosgurin no sentido de percebermos até que ponto a proposta de Pimentel Filho é influenciada por este autor relativamente à sequência de conteúdos, exemplos e propostas de resolução. Não é assim possível verificar se neste caso existe o que Pintassilgo (2006) refere como característica dos manuais desta época, o decalque em relação a certos manuais, principalmente de língua francesa.

No manual de Gaspar e Ferreira (1944) não existem referências bibliográficas finais e também não existem muitas referências no corpo do texto, nomeadamente no que diz respeito à didática da aritmética. No entanto, é de notar que são mencionados diversos autores quando são expostos os métodos para o ensino das operações fundamentais. Entre os autores citados destacam-se os nomes de Montessori, Decroly, Cousinet e Mc Khinder. São essencialmente autores ligados à Educação Nova que mostram o tipo de influência que este movimento deixou

---

[154] Paul Rousselot (1833-1914) é autor de diversas obras no campo da pedagogia e da história da educação. Histoire de l'éducation des femmes em France (1883); Pédagogie historique, d'après les principaux pédagogues , philosophes et moralistes (1891).

[155] Jules-Gabriel Compayré (1843-1913) foi um teórico da pedagogia. Foi professor de pedagogia na Escola Normal Superior de Fontenay-Saint-Cloud. Foi também autor de diversas obras na área da pedagogia e história da pedagogia. (recuperado de https://fr.wikipedia.org/wiki/Gabriel_Compayr%C3%A9).

[156] Carlo Bourlet (1866-1913) - Matemático francês do final do século XIX e princípio do século XX, autor de diversas obras nesta área. (recuperado de https://fr.wikipedia.org/wiki/Carlo_Bourlet).

[157] Grosgurin (????-????) - É um autor suíço, do final do século XIX, princípio do século XX.

[158] Laisant foi matemático francês também do final do século XIX, início do século XX

[159] Ovide Decroly (1871-1932) – Nasceu em Renaix, na Bélgica. Estudou medicina na Universidade de Gand, em Berlim e em Paris. Fez parte de uma geração de médicos e físicos belgas que no final do século XIX e princípio do século XX se dedicaram ao desenvolvimento da pedologia e da pedagogia científica, aplicando métodos científicos como a experimentação, a observação sistemática e a medição de fenómenos psicopedagógicos. Os seus primeiros trabalhos em pedagogia, fundamentados em princípios bio-sociológicos e psicológicos, centraram-se no estudo de crianças anormais, conhecimento que depois transferiu para a educação de crianças normais. Desenvolveu também o método dos centros de interesse, onde se procurava adequar a educação ao meio e aos interesses das crianças. (Chateau, 1956; Proença, 1997).

nestes formadores de professores, apesar do discurso patente nos seus textos onde defendem uma pedagogia nacional.

Pinheiro (1961), para além das citações que apresenta ao longo do seu texto, inclui também uma bibliografia final onde indica as principais obras que influenciaram o seu trabalho. No capítulo dedicado à didática da aritmética, os autores mais citados são Decroly A. Rude, Aguayo[160], Benedi, Solana ou Theobaldo M. Santos[161]. São essencialmente autores do final do século XIX e início do século XX que, de uma forma geral estão relacionadas com o que designamos por Educação Nova. Na obra são ainda destacados os métodos de Decroly, Montessori, Mackinder e Kühnel para o ensino da aritmética. A respeito da avaliação do trabalho escolar em aritmética, Pinheiro (1961) usa as seguintes referências Ayres, Ballard, Burt, Claparède, Courtis, Dottrens e Thorndike.

Tal como Pinheiro (1961), Gonçalves (1972, 1974) também apresenta uma bibliografia no final do manual, com algumas das obras consultadas. Nesta obra de Gonçalves (1972, 1974) é de salientar a influência que o designado Movimento da Matemática Moderna começava a ter no ensino primário e, por isso, não é de estranhar que sejam citados autores como André Revuz[162], a propósito do rigor da linguagem na matemática, ou surja na bibliografia final a referência a obras como A Matemática Moderna no Ensino Primário, de Dienes, ou O Zeca já pode aprender aritmética, de Caleb Gattegno. Um dos autores mais citados por Gonçalves é Junquera Muné[163], nomeadamente sobre a importância do rigor no ensino da matemática ou sobre os métodos e técnicas a usar no ensino da aritmética. Na resolução de problemas, Gonçalves (1972, 1974) menciona Norma Osório[164] quando esta refere que as crianças devem ter a oportunidade de expor a sua engenhosidade e invenção, ou Junquera Muné e Buisse relativamente à tipologia de problemas a apresentar às crianças. No que se refere ao tópico das frações, Gonçalves (1972,

[160] Alfredo Miguel Aguayo (1866-1948). Intelectual ligado à divulgação das ideias da Educação Nova. Autor de diversas obras, como a Didática da Educação Nova (recuperado de http://www.encaribe.org/es/article/alfredo-miguel-aguayo-sanchez/650).

[161] Theobaldo Miranda dos Santos (1904-1971) – Autor brasileiro com diversas publicações na área da pedagogia, psicologia, filosofia, entre outras temáticas na área da educação.

[162] André Revuz nasceu em Paris, em 1914. Foi aluno da Escola Normal Superior, licenciou-se em matemáticas e fez a sua tese de doutoramento na Sorbonne (Paris). Foi professor universitário, tendo-se dedicado ao ensino da matemática e à formação de professores. Foi ainda dirigente associativo em associações de professores de matemática, em França. Publicou uma vasta obra dirigida aos professores de matemática do ensino secundário. É autor do livro Matemática Moderna – Matemática Viva, dedicada a um público mais generalista (Revuz, 1980).

[163] Junquera Muné foi autor, professor da escola normal e inspetor do ensino primário, em Gerona. Autor da obra Didáctica del Cálculo, obra extensa sobre o ensino da matemática, que teve diversas edições durante a década de 1960.

[164] Norma Osório, autora brasileira, publicou obras sobre o ensino da matemática nos primeiros anos, nomeadamente Matemática na escola primária moderna, de 1965. Traduziu e adaptou a obra Seeing through arithmetic, de Hartung, Engen, Knowles, Gibb, Stochl e Walch, publicado em português em 1967.

1974), embora não sejam utilizadas muitas citações, nem seja tomada qualquer obra como referência principal, são referidos alguns autores e obras. A primeira obra referida é a de Adolf Rude[165], *Metodologia da Aritmética*. Esta obra não surge, no entanto, na bibliografia que Gonçalves (1974) apresenta no final do seu livro. A segunda referência é a de Robert Dottrens[166], com a obra *L'enseignement individualisé*, numa edição de Delachaux et Niestlé. É também apresentada uma referência a obra *Didáctica del Cálculo*, de Junquera Muné[167], numa edição Labor, de Barcelona. Outra referência utilizada neste capítulo é a obra de Charles Augustine[168], *Métodos modernos para o ensino da Matemática*, edição Ao livro técnico, do Rio de Janeiro. Uma última referência que é utilizada neste capítulo é a uma obra de Norma Osório[169] e outros autores, intitulada *Vamos aprender Matemática*, numa edição de Ao livro técnico.

No que diz respeito à valorização global das obras, ou seja, obras que fazem parte do *corpus* documental aqui analisado e que são citadas ou referidas noutras obras do mesmo *corpus*, é de referir que no trabalho de Pinheiro (1961) faz-se referência à Súmula Didática, de Alberto Pimentel Filho (1934) e às Notas de Didática Especial, de José Maria Gaspar e Orbelino Geraldes Ferreira (1944). O trabalho de Gaspar e Ferreira (1944) é referido na bibliografia final, mas não é citado ao longo da obra de Pinheiro (1961). No que diz respeito à Súmula Didática, de Alberto Pimentel Filho, a citação surge a propósito da importância do ensino da aritmética no ensino primário, tanto pelo aspeto da racionalidade do seu conhecimento, como pelas suas aplicações práticas. Na bibliografia final de Gonçalves (1974) são referidas as obras de Pimentel Filho (1934) e de Pinheiro (1961).

Tratando-se de manuais dedicados essencialmente à componente pedagógica do curso de formação inicial de professores do ensino primário, é natural que se alonguem em torno de questões gerais sobre o ensino, pedagogia, métodos e metodologia geral.

Pimentel Filho (1934) refere-se a método como sendo um "conjunto dos processos raciocinados, das regras, dos meios que praticamos ou que seguimos na transmissão de quaisquer conhecimentos." (Compayré, s.d., citado em Pimentel Filho, 1934, p. 9). A metodologia, ou ciência que estuda os métodos, tratava da forma como se deve ensinar e transmitir conhecimentos. A metodologia também poderia ser designada por didática ou metódica. Pimentel Filho (1934)

---

165 Adolf Rude (????-????) - ????
166 Robert Dottrens (1893-1984) – Pedagogo suíço na linha da pedagogia experimental. Foi professor universitário na Universidade de Genebra. (recuperado de https://fr.wikipedia.org/wiki/Robert_Dottrens).
167 José Junquera Muné (????-????) – Professor do Ensino Normal e Inspetor do Ensino Primário em Gerona, Espanha.
168 Charles Augustine (????-????) - ?????
169 Norma Osório (1931-) – Professora brasileira nascida no estado do Rio de Janeiro. Autora de diversas obras na área da didática da matemática para o ensino primário. (recuperado de http://www.fe.ufrj.br/norma_cunha_osorio.pdf)

distingue entre metodologia geral, a aplicar na transmissão de quaisquer conhecimentos, e a metodologia especial, que diz respeito à transmissão de conhecimentos específicos. No que diz respeito a método gerais de ensino, Pimentel Filho (1934) salienta os métodos dedutivo e indutivo, O método indutivo é definido como aquele em que:

> … o conhecimento é feito por meio da observação ou da experiência, levem-se os alunos a descobrir ou induzir as relações que entre esses factos existem, remontando por esta forma às leis que os regulam; quere dizer, partimos do particular para o geral" (Pimentel Filho, 1934, p. 14)

Já no método dedutivo "o professor começa por apresentar certas verdades ou princípios gerais que explica, fazendo com que os alunos reconheçam depois os casos particulares" (Pimentel Filho, 1934, p. 14).

Como exemplo ligado à matemática, Pimentel Filho (1934) apresenta o ensino da geometria, onde, de acordo com o autor, de uma forma geral, começa-se por apresentar certos princípios (axiomas, postulados) que depois são verificados em determinados teoremas que os confirmam, sendo aplicações desses princípios, indo-se do geral para o para o particular, o que corresponderia ao método dedutivo. No entanto, Pimentel Filho (1934) refere que:

> Modernamente, porém, está-se adoptando de preferência, e sempre que seja possível, no ensino desta Ciência, principalmente no seu ensino elementar, a verificação experimental das relações geométricas, por meio das quais os alunos são levados a descobrir os princípios gerais da Geometria: é o método indutivo. (p. 15).

Para além da ordem pela qual se devem apresentar os conteúdos, o autor refere que se deve ter também em conta a forma como esses conhecimentos são transmitidos aos alunos. Neste caso, o autor distingue dois outros métodos, o método expositivo, em que o professor expõe diretamente a matéria a ensinar, e o método interrogativo, dialogal ou Socrático, onde, através de perguntas o professor leva à reflexão dos alunos, levando-os a descobrir os conhecimentos que pretende transmitir. Estes dois métodos, expositivo e interrogativo, poderiam ser combinados com os dois anteriores, dedutivo e indutivo

Gaspar e Ferreira (1944) salientam a didática como uma das ciências da educação, sendo o conjunto dessas ciências designado por pedagogia, que era vista como a ciência e a arte da educação. A didática geral é definida como a ciência que ensina a transmitir os conhecimentos com o mínimo esforço e a máxima eficiência. O professor deveria dominar essa ciência porque a formação da criança envolve uma grande complexidade e requer "uma longa série de sentimentos e conhecimentos que ao professor (pedagogo-condutor de crianças) compete estimular e fornecer da maneira mais assimilável, mais fácil, mais razoável e racional, do modo mais prático e eficientemente possível" (Gaspar & Ferreira, 1944, p. 13). Desta forma, a didática é considerada um ramo da pedagogia, um ramo dedicado à instrução, algo mais restrito. Gaspar e Ferreira (1944) distinguem uma da outra indicando que "A Pedagogia cuida de adestrar a criança para todas as atividades da vida. A Didática procura sobretudo encaminhá-la no âmbito da vida escolar." (p. 14, maiúsculas no original). Gaspar e Ferreira (1944) distinguem também a finalidade formativa do ensino da finalidade utilitária. A primeira consistia no sujeito dar provas pessoais e sociais da aquisição de formação e era mais difícil de atingir. A segunda estaria enquadrada nos programas, horários, classes e era o objeto da didática geral.

Para estes autores, a didática especial é a aplicação prática dos princípios gerais da didática às diferentes disciplinas. "A cada disciplina corresponde um conjunto de normas especiais que no seu ensino devem ser aplicadas. A esse conjunto se chama a didática dessa disciplina" (Gaspar e Ferreira, 1944, p. 15). Estas normas deveriam ser utilizadas pelo professor segundo a necessidade de cada criança, mas também de acordo com os programas, com os horários e com as intenções oficiais para cada disciplina. Para estes autores, a didática especial tinha uma afinidade com a psicofisiologia, com a pedologia, mas principalmente com a metodologia. Há também em Gaspar e Ferreira (1944) uma discussão sobre o duplo aspeto da didática, como ciência e como arte, o aspeto especulativo e o aspeto prático. O aspeto especulativo são os princípios certos e temporariamente imutáveis, as normas do procedimento que são impostas ao agente educativo. O aspeto prático são as circunstâncias em que o agente educativo coloca em prática as normas. "Há por isso uma ciência didática geralmente aceite e uma arte didática pessoalmente executada" (Gaspar & Ferreira, 1944, pp. 17-18).

Pinheiro (1961) apresenta também a mesma discussão da pedagogia como ciência e arte da educação. Pinheiro (1961) considera a pedagogia como uma ciência normativa, que "considera os factos à luz duma certa doutrina e estuda-os com a ajuda dos métodos das ciências positivas. E como o seu objeto é o ser humano, tem necessariamente de se apoiar numa Moral." (p. 9). Para Pinheiro (1961) a educação é absolutamente necessária e deve ser natural, embora saliente que isto não significa que deva ser naturalista. A Educação deveria ser sistemática e dirigir-se a todas as faculdades, tanto físicas, morais como intelectuais. Pinheiro (1961) distingue também educação de instrução, "Instrução dirige-se à inteligência; a Educação a todo o indivíduo. Para o cristão, Educação será «obra de desenvolvimento interior, de libertação da personalidade, de cristã e racional integração de todos os valores do Homem»." (p. 9, aspas no original)

Tal como em Gaspar e Ferreira (1944), Pinheiro (1961) refere-se à didática como uma das ciências da educação. A didática implicaria uma teoria de ensino e basear-se-ia na ação de transmitir conhecimentos. O ato de ensinar exigiria sempre a presença de um professor. Pinheiro (1961) divide a didática, em geral e especial. A didática geral ocupar-se-ia dos métodos, processos e formas de ensino genéricos e a didática especial aplicar-se-ia a determinados conteúdos específicos "a Didática Especial transmite verdades específicas a cada uma das disciplinas; «estuda o objeto e importância de cada matéria, as regras a que submete o ensino e a marcha que deve seguir-se na transmissão dos diversos conhecimentos»." (Pinheiro, 1961, p. 10, aspas e iniciais maiúsculas no original).

Para Gonçalves (1972) a pedagogia é a ciência da condução de uma classe. No que diz respeito a métodos, Gonçalves (1974) distingue método analítico, quando se entra nas noções pela sua decomposição, de método sintético, quando se começa por ter em conta os elementos, para depois articular e chegar ao objeto. Relaciona o método analítico, a análise, com o método indutivo, e o método sintético, a síntese, com o método dedutivo. Refere-se também ao método heurístico ativo. Este é descrito como um método que globalmente é de análise e de síntese, que corresponde a um procedimento ativo, devendo presidir a toda a atividade escolar, sobretudo no cálculo. Gonçalves também discute o papel do professor no ensino, salientando que, em didática, a função do mestre não é descobrir a verdade, porque já a conhece, mas também não é transmiti-la aos alunos já digerida. Assim, para Gonçalves (1974) a função do mestre é:

> dirigir a atividade do pensamento de quem ignora a verdade, para a redescobrir por si próprio, conscientemente, ativamente, inteligentemente. Processo, portanto, *ativo*, *experimental* e *vivo*. Aprender, *observando*, *pensando*, *fazendo* e *exprimindo* em linguagem correta. (…) A função do mestre será, sobretudo, «preparar a realidade, colocar o aluno perante ela e dirigir a atividade do seu pensamento, no sentido de chegar à verdade.». (Gonçalves, 1974, p. 22, aspas e itálicos no original)

No trabalho de Gonçalves (1974) também é de destacar a importância que este autor dá à sistematização e ordenação lógica do ensino. Começa por referir que o programa é sistematizado e tem uma ordenação lógica, em que cada noção nova está assente em conhecimentos anteriores e servir de base a conhecimentos posteriores. No entanto, sublinha que o ensino também deve ser apoiado na experiência da criança e pela exploração de situações reais, que muitas vezes são complexas e caracterizadas por terem falta de ordem. Perante esta situação, Gonçalves (1974) propõe que a melhor forma será simplificar a realidade, evidenciando uma só noção.

6.5.1. Em síntese

No segundo período, as obras analisadas estão centradas na componente pedagógica, que, principalmente após 1930, passou a ocupar a quase totalidade do plano de estudos dos cursos de formação inicial dos professores do ensino primário. No entanto, é possível distinguir três momentos diferentes a que pertencem os manuais, um momento de transição entre as escolas normais primárias e as escolas do magistério primário, um segundo onde os manuais de didática correspondem à disciplina de Didática Especial do curso que engloba as didáticas de todas as disciplinas dos programas do ensino primário e um último momento onde a disciplina de Didática Especial é dividida em dois grupos e, por isso, o manual de didática aqui analisado apresenta apenas as disciplinas de Aritmética e Geometria. Estas são obras que surgem ao nível local das escolas do magistério primário, organizadas pelos próprios docentes das disciplinas de didática dos cursos de formação, com o intuito de obtenção da nomeação definitiva do próprio autor da obra e professor, ou para colmatar a ausência de livros de didática. Observa-se aqui uma prática já descrita por Pintassilgo (2006) relativamente aos manuais de didática e de pedagogia do primeiro terço do século XX.

No segundo período, apesar de se tratar de manuais centrados na componente pedagógica, também se podem observar diferenças na sua estrutura. Mais uma vez, estas diferenças surgem pela adaptação dos manuais às alterações que vão sendo feitas no plano de estudos do curso. Desta forma, dos manuais analisados há três que são generalistas e apresentam a didática das diferentes disciplinas do ensino primário, e um manual que apresenta apenas a didática apenas de conteúdos matemáticos, desenvolvendo mais a didática dos conteúdos desta área. No que diz respeito à estrutura destaca-se que a obra de Gonçalves (1972, 1974) apresenta um conjunto de páginas com exemplos associados à influência do *Movimento da Matemática Moderna* no ensino primário, que não têm correspondência com alterações propostas nos programas de formação inicial de professores do ensino primário, nem nos próprios programas do ensino primário da época.

De uma forma geral, os manuais analisados no segundo período indicam como objetivo da obra o apoio aos futuros professores na sua função docente. Os autores destacam muitas vezes o seu caráter prático e a sua simplicidade, por se destinarem a futuros professores. Muitos destes autores referem ainda que as obras publicadas serviriam para dar resposta aos pedidos dos alunos das escolas de formação onde lecionavam.

Nas obras analisadas no segundo período, apenas duas apresentam referências bibliográficas finais, a obra de Pinheiro (1961) e a obra de Gonçalves (1972, 1974). No entanto, é de salientar que o manual de Pimentel Filho (1934) apresenta diversas referências bibliográficas no corpo do texto, particularmente quando aborda a didática da aritmética, no conteúdo das frações.

No que diz respeito a aspetos gerais, nas referências utilizadas por Pimentel Filho (1934) destacam-se as citações de Rousselot ou Compayré, autores da segunda metade do século XIX, ligados à pedagogia e à história da pedagogia. Nos aspetos globais da metodologia existem ainda diversas referências a Rousseau, Montessori, Quintiliano, Cousinet, Dewey, Ostwald, Cellèrier, Bacon e Claparéde. Na área da didática de aritmética destacam-se na obra de Pimentel Filho (1934) autores como Bourlet, Grosgurin e Laisant. Neste manual de Pimentel Filho (1934) salienta-se que o próprio autor refere várias vezes seguir e explanar as ideias de outros autores, o que não era comum nos manuais da época (Pintassilgo, 2006) e também não é comum nos manuais analisados no primeiro período da presente investigação. Isto é particularmente evidente na didática do ensino das frações onde existe uma maior densidade de citações. É possível verificar que o autor assume estar a apresentar as ideias de outros e não apresenta a obra como se fosse um conjunto de ideias originais suas. Na análise de Silva (2001) também é destacada esta distinção entre o autor que interpreta e apresenta ideias de outros e o autor que é responsável pela ideia original. Nos autores citados por Pimentel Filho (1934) destacam-se os autores de língua francesa associados à pedagogia moderna, salientando-se as referências a Compayré, que é um dos autores cujas ideias estão mais presentes no discurso dos manuais da época (Pintassilgo, 2006). Na lista é também evidente a ausência de referências a autores portugueses, nomeadamente a José Augusto Coelho, que, de acordo com Pintassilgo (2006), era um autor muito referido nos manuais desta época.

No manual de Gaspar e Ferreira (1944) é de salientar a continuação da existência de referências integradas no corpo de texto, destacando-se os autores relacionados com a pedagogia moderna e com o movimento da Educação Nova, como Montessori, Decroly ou Cousinet. É de destacar aqui a permanência das referências a estes autores, relativamente a obras anteriores, num manual de dois autores portugueses particularmente ligados ao regime autoritário entretanto instalado em Portugal e defensores de uma pedagogia nacional. Estas são influências que se mantêm nos manuais analisados neste segundo período, como Pinheiro (1961), onde se desenvolvem as ideias de uma educação integral, ligadas ao ideal católico, e que de alguma forma se relacionam com correntes pedagógicas diversas que se foram desenvolvendo no final do século XIX, como a pedagogia moderna, no início do século XX, como a Educação Nova, ou a partir da década de 1930 do século XX, com a escola ativa de inspiração católica (Pintassilgo, 2016).

Nos outros dois manuais analisados neste período, Pinheiro (1961) e Gonçalves (1972, 1974) destaca-se a existência de uma lista de referências finais, para além das referências que vão sendo apresentadas no corpo do texto. Continua a distinguir-se a presença de referências a autores como Decroly, Aguayo, Benedi, Solana, Theobaldo Santos, Montessori, Ayres, Ballard, Burt, Claparède, Courtis, Dottrens, muitos deles ligados aos movimentos pedagógicos do final do século XIX e do início do século XX, como a pedagogia moderna e a Educação Nova. Salienta-se ainda no manual de Gonçalves (1972, 1974) a utilização de referências a André Revuz, autor do livro Matemática Moderna – Matemática Viva, a Dienes e a Caleb Gattegno. Nestes dois últimos manuais analisados neste período é de notar a valorização que Pinheiro (1961) faz de obras que fazem parte do *corpus* documental deste trabalho, nomeadamente às obras de Pimentel

Filho (1934) e de Gaspar e Ferreira (1944). Também Gonçalves (1974) valoriza obras deste *corpus* documental, apresentando referências a Pimentel Filho (1934) e a Pinheiro (1961).

Tratando-se de manuais centrados na componente pedagógica, os manuais analisados no segundo período dão um particular enfoque às questões do método, da metodologia e da didática. A discussão sobre os modos de ensino, presente nos manuais do primeiro período, parece ser abandonada nos manuais deste segundo período, que não fazem referência a esse aspeto. Neste segundo período as questões parecem centrar-se na metodologia e na didática, tanto geral como especial, o que também espelha as alterações feitas, no início da década de 1930, no plano de estudos e nos programas das disciplinas.

Em Pimentel Filho (1934) retorna-se à discussão em torno dos métodos, discussão essa igualmente existente em obras da componente pedagógica do primeiro período aqui analisado. Pimentel Filho (1934) distingue o método indutivo e o método dedutivo. No que diz respeito ao ensino primário, e especificamente ao ensino dos conteúdos matemáticos no ensino primário, Pimentel Filho (1934) mostra preferência pelo método indutivo, em que os alunos são levados a induzir relações entre os factos e os conhecimentos adquiridos por observação ou pela experiência. Pimentel Filho (1934) discute os métodos quanto à forma como os conhecimentos são transmitidos aos alunos, distinguindo aqui o método expositivo do método dialogal ou Socrático. Gonçalves (1972, 1974) também apresenta uma discussão semelhante em torno dos métodos, distinguindo o método analítico e o método sintético, que se relacionam com o método indutivo e o método dedutivo, respetivamente. Gonçalves (1972, 1974) acrescenta o método heurístico ativo que combina o método de síntese e de análise. Na discussão sobre os métodos, Gonçalves (1972, 1974) também a discute a forma de apresentação dos conteúdos e o papel do professor, destacando que este deve ter como função a orientação do pensamento do aluno através de processos ativos e experimentais, preparando aspetos da realidade a apresentar ao aluno.

Há também nos manuais deste período uma continuidade em relação aos manuais da componente pedagógica do primeiro período, no que diz respeito às questões da educação como ciência ou como arte. Esta discussão presente nos manuais de didática e de pedagogia do primeiro terço do século XX (Pintassilgo, 2006) tem continuidade nos manuais analisados neste segundo período, particularmente em Gaspar e Ferreira (1944) e em Pinheiro (1961). Um outro aspeto que permanece nestes dois últimos manuais referidos, relativamente aos manuais do primeiro período, é a discussão sobre a questão da educação integral do indivíduo. Uma educação que se deve dirigir a todas as faculdades do indivíduo, tanto físicas, como morais e intelectuais, mas destacando-se nestas duas obras a integração dos valores da religião cristã.

Tendo como referência as alterações surgidas no plano de estudos a partir da década de 1930, os manuais deste período relevam a discussão em torno da didática, didática geral e didática especial. A didática é vista como uma das ciências da educação, que se integra na pedagogia, como um dos seus ramos. Na didática estaria sempre implicada uma teoria de ensino e estaria na base da ação de transmissão de conhecimentos, estudando a importância de cada conteúdo, as regras para o seu ensino e a ordem a seguir na transmissão dos diversos conhecimentos.

6.6. Caracterização global do conteúdo matemático

No que diz respeito à caracterização global do conteúdo matemático nos manuais em análise neste segundo período, salienta-se que todos eles fazem uma abordagem centrada nos aspetos pedagógicos. Na metodologia geral, Pimentel Filho (1934) discute diferentes métodos, destacando o método indutivo. Este método é particularmente destacado no que se refere à didática da aritmética, disciplina onde o autor assinala o carácter racional e prático.

O caráter prático e utilitário também é destacado no trabalho de Gaspar e Ferreira (1994). Na obra é muito valorizada a importância da aritmética na vida do dia a dia, sendo-lhe atribuída uma maior aplicação do que a própria leitura, razão pela qual é apresentada em primeiro lugar a sua didática. A análise do currículo da aritmética no ensino primário é muito destacada, sendo referida por diversas vezes a importância do conhecimento do programa e da adequação das práticas ao seu cumprimento. No ensino primário, a aritmética é apresentada como uma disciplina que tem um fim utilitário, mas também formativo, onde as crianças desenvolvem a capacidade de resolver de uma forma rápida, lógica e sensata os problemas escolares e os problemas do dia a dia, aprendendo a estabelecer relações entre ideias e raciocínios. Para a didática da aritmética são apontados os princípios essenciais, a racionalidade, prático, intuitivo e verdadeiro. A utilidade prática e a intuição são muitas vezes destacadas na aprendizagem da aritmética.

Na abordagem global ao ensino da aritmética, Pinheiro (1961) enquadra esta disciplina nas disciplinas essenciais, salientando a importância da intuição, resolução de problemas, hábitos de pensamento e ação. Pinheiro (1961) destaca também a ideia de instrução educativa, onde a disciplina de aritmética está ao serviço da formação moral do indivíduo. Pinheiro (1961) apresenta os propósitos para o que entende que seria um bom ensino da aritmética:

> **Racional** – Porque qualquer noção aprendida com esforço racional é mais perdurável do que aprendida com a memória.
> **Progressivo** – Os conhecimentos devem ser ministrados segundo dificuldades crescentes. Deve o ensino ser baseado nos conhecimentos anteriormente adquiridos com vista à matéria que vai ensinar-se seguidamente.
> **Prático** – Como a criança abstrai com dificuldade, deve relacionar-se o ensino com o meio que o cerca. Os assuntos práticos da vida corrente serão o mundo concreto a que nos devemos reportar para orientar o ensino.
> **Regional** – Quer dizer: o ensino deve ser feito de acordo com a região em que a criança vive.

> **Ativo** – A criança deve colaborar diretamente na lição que está a ser-lhe ministrada, através de material didático adequado.
> **Intuitivo** – A criança só aprende bem o que cai sob o seu domínio sensorial. Deve, pois, o mestre recorrer à concretização frequente. A intuição leva o aluno a uma rápida perceção. (p. 56, negrito no original)

Ainda relativamente aos propósitos do ensino da aritmética, Pinheiro (1961) destaca que este deve ser verdadeiro e formativo, no sentido de desenvolver nos alunos um sentimento moral, faculdades de memória, juízo e do raciocínio.

No trabalho de Gonçalves (1972) salienta-se a influência do Movimento da Matemática Moderna na forma como é encarada a iniciação ao ensino e a aprendizagem da matemática. A Matemática Moderna era então encarada por Gonçalves (1972) com uma nova técnica de aprendizagem "que evite a criação prematura de mecanismos sem a inteligência das situações matemáticas" (p. 15). Gonçalves (1972) criticava a mecanização do cálculo como princípio de aprendizagem, sem uma compreensão da estrutura dos números e das operações que viria mais tarde, porque levaria a muitos vícios e erros difíceis de apagar posteriormente. A Matemática Moderna era considerada "um novo método, uma nova linguagem, uma nova organização do trabalho" (p. 15) no sentido de uma unificação. Gonçalves (1972) salienta a necessidade de ser utilizada uma linguagem que não permita ambiguidades e cita André Revuz para afirmar que será a linguagem matemática que permite fugir a essas ambiguidades da linguagem corrente. Gonçalves (1972) considera que o novo método deve ser adotado em todos os graus de ensino, desde o primário ao superior. Gonçalves (1974) destaca dos programas em vigor na época os objetivos do ensino da aritmética, destacando que nesses programas se refere que a aritmética na escola primária deve ser acentuadamente prática, deve consistir mais na criação de hábitos e na aquisição de um novo instrumento de trabalho do que na interpretação de conceitos abstratos. O autor menciona ainda que nos programas se salienta, no entanto, que a compreensão dos conceitos aritméticos não deve ser descurada, sendo esse desenvolvimento intelectual o principal valor formativo da aritmética[170]. Ainda nos objetivos do ensino da aritmética, Gonçalves (1974) distingue o objetivo utilitário, de aplicação na vida diária, e o objetivo formativo, de exercitar o raciocínio na sua forma matemática. No que diz respeito às formas de pensamento a criar, Gonçalves (1974) refere que a aritmética deve desenvolver a plasticidade do pensamento, através das inter-relações que estuda.

Os manuais analisados neste período não apresentam definições das noções de grandeza, medida das grandezas, unidade, número e contar, como acontecia nos manuais da componente

[170] A este respeito, Gonçalves (1974) cita Heloísa Barreto, da sua obra Iniciação à Matemática, onde esta afirma que muitos conceitos e ideias abstratas da matemática podem ser ensinadas na escola primária.

das ciências de especialidade e formação geral do primeiro período. No manual de Gaspar e Ferreira (1944) são apresentados alguns planos de aula que têm como objeto o ensino inicial da numeração. Em relação à sequência do ensino dos números, Gaspar e Ferreira (1944) referem que em primeiro lugar deve ser feita a concretização, com a contagem de objetos, para em seguida aparecerem os números, que os autores destacam que já implicam o relacionar de noções, e só posteriormente utilizam os algarismos que envolvem a abstração. Também Pinheiro (1961) apresenta uma série de planos de aula para o estudo inicial da numeração. Nesses planos destaca-se a importância de se recorrer inicialmente à concretização e só posteriormente utilizar-se formas de abstração como os algarismos. A abordagem inicial à numeração sugerida por Gonçalves (1972) centra-se no trabalho com o concreto. Gonçalves (1972) refere a este respeito que “

> Na iniciação, deverá abandonar-se completamente a via simbólica, pois um símbolo (o algarismo) só tem significado desde que seja precedido do conhecimento e da experiência do que ele sintetiza. Assim, o conhecimento dos algarismos será precedido duma fase manual e concreta, por composições e decomposições, livres e dirigidas, lhes confira significado … (p. 65, citando o Suplemento 288 da Escola Portuguesa).

Na proposta de Gonçalves (1972) também se destaca a linguagem dos conjuntos que na época começava a dominar o trabalho de iniciação à numeração no ensino primário. Gonçalves (1972) destaca que à entrada para a escola as crianças já possuem algumas noções de quantidade, de diferença, de peso, assim como algumas ideias de posição, de topologia de direção e de forma. Na escola deveriam ser trabalhados alguns exercícios e jogos sensoriais e de lógica que permitissem desenvolver estas noções.

Os manuais deste período abordam as operações elementares do ponto de vista do seu ensino. Pimentel Filho (1934) coloca o trabalho com as operações fundamentais da aritmética na sequência do trabalho a realizar com a numeração em que se começa pela noção de quantidade, representação gráfica da contagem, testes de contagem, iniciação das quatro operações fundamentais, os algarismos, estrutura e figuração numérica das quatro operações fundamentais, a noção de dezena e o valor de posição e a contagem até à centena. Nesta sequência o trabalho inicial com as operações é feito no concreto e só depois são apresentados os algarismos e os sinais das operações. Depois de realizado o trabalho com o concreto o professor faz a passagem para os a representação do número através de algarismos, passando ainda pela figuração da numeração através de representações pictóricas, como no exemplo.

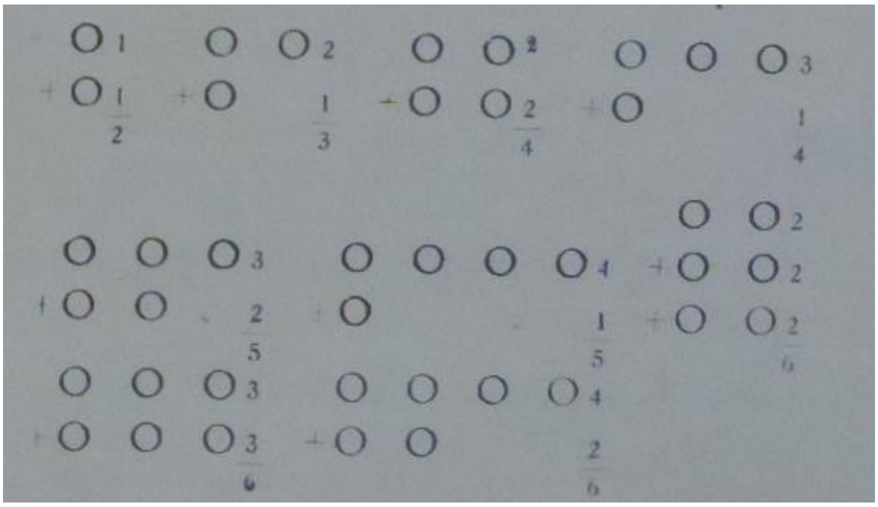


Figura 6.19. Exemplo da adição representada com numeração figurada (Pimentel Filho, 1934, p. 95, digitalização, 100% do original)

De acordo com Pimentel Filho (1934) todas as outras operações deveriam ser também apresentadas através de casos concretos. A multiplicação deveria ser apresentada como uma forma abreviada de representar uma adição de parcelas iguais e a divisão como uma série de subtrações sucessivas. Na divisão, Pimentel Filho (1934) distingue dois casos, a divisão como partilha e a divisão como conteúdo. No caso da divisão como partilha, o quociente é da mesma natureza que o dividendo, no caso da divisão como conteúdo o dividendo e o divisor são da mesma natureza.

Na obra de Gaspar e Ferreira (1944), o ensino das operações está diretamente relacionado com a resolução de problemas, considerando-se que é a necessidade de resolver os problemas que faz nascer o interesse por aprender as operações. Tal como no ensino do número, considera-se que o ensino das operações deve ser intuitivo, do concreto para o abstrato, seguindo a sequência da concretização, representação pictórica e representação simbólica. Os autores destacam várias vezes que os alunos devem ir deixando os materiais. No ensino das operações elementares, Gaspar e Ferreira (1944) citam o método de diversos autores como Montessori, Decroly, Cousinet, Mc Kinder. A todos apontam virtudes e limitações, salientando que deveria ser elaborado um método português que tivesse em conta o contexto, incluindo o conhecimento sobre os alunos, os programas e os horários oficiais. No desenvolvimento do ensino das operações os autores destacam o cálculo mental, a concretização das operações, embora critiquem a excessiva concretização, e a realização individual. Criticam a realização de operações muito extensas e a cópia de operações do quadro. Salientam ainda a importância de o professor não interromper o raciocínio dos alunos, destacando a importância do erro na aprendizagem das operações.

No que diz respeito às operações em aritmética, Pinheiro (1961) destaca a existência de sete operações elementares, distinguindo diferentes sentidos na subtração e na divisão. Os planos de lição apresentados por Pinheiro (1961) salientam a utilização de materiais didáticos, manipulação individual de materiais e as representações pictóricas.

Nas operações aritméticas, Gonçalves (1974) também destaca diferentes ações que podem corresponder às operações aritméticas. Na adição identifica a ação de juntar, na subtração distingue duas ações, tirar e achar a diferença, na multiplicação salienta a ideia de uma soma de parcelas iguais e na divisão distingue também duas ideias, a de partilhar e a de achar o conteúdo.

Apesar de algumas obras deste período dedicarem-se apenas à didática aritmética, como a de Pimentel Filho (1934), todas abordam questões sobre o ensino da geometria, embora com um aprofundamento muito diferenciado. Destaca-se a Didática do Cálculo – 2.º volume, de Gonçalves (1974), por ser uma obra inteiramente dedicada à didática dos conteúdos de matemática e, por isso, aprofundar as questões sobre o ensino da geometria.

No que se refere às ideias gerais sobre o ensino da geometria, um aspeto comum a todas as obras do período é que mencionam sempre que esta é uma disciplina que, apesar de no seu ensino se trabalhar essencialmente com o método dedutivo, nos alunos dos primeiros anos é essencial recorrer ao método indutivo e à realidade. Um aspeto muito apontado é a relação da geometria com a medida, a verificação experimental e a relação com outras disciplinas, como os trabalhos manuais ou o desenho. A este respeito, Pimentel Filho (1934) refere que no ensino da geometria, de uma forma geral começa-se por apresentar certos princípios (axiomas, postulados) que depois são verificados em determinados teoremas que os confirmam, sendo aplicações desses princípios, indo-se do geral para o para o particular, o que corresponderia ao método dedutivo. No entanto, Pimentel Filho (1934) destaca que:

> Modernamente, porém, está-se adoptando de preferência, e sempre que seja possível, no ensino desta Ciência, principalmente no seu ensino elementar, a verificação experimental das relações geométricas, por meio das quais os alunos são levados a descobrir os princípios gerais da Geometria: é o método indutivo. (p. 15).

Gaspar e Ferreira (1944) apontam como objetivo de o ensino da geometria “habituar a criança a observar e distinguir as formas e dimensões dos objetos.” (Gaspar & Ferreira, 1944, p. 78). Para estes autores, as características do ensino da geometria não diferiam do ensino da aritmética, ambos devendo ter o quotidiano por base. Na escola primária, o ensino da geometria deve ser concreto e prático, dada a abstração desta disciplina, destacam Gaspar e Ferreira (1994), referindo que o ambiente propício à sua aprendizagem são o recreio, a rua e os passeios escolares. Estes autores estabelecem a relação com os programas, salientando que, tal como é referido no programa do ensino primário da época, o ensino da geometria deve ser prático e utilitário, destacando a necessidade de um ensino indutivo para esta disciplina.

Na obra de Pinheiro (1961) destaca-se que, no ensino da geometria se podem utilizar o método analítico e o método sintético. O primeiro caso, método analítico, Pinheiro (1961) descreve-o como sendo um método que "parte dos corpos para atingir as linhas" (p. 87). No segundo caso, método sintético, "parte-se das linhas para chegar aos corpos." (Pinheiro, 1961, p. 87). Para Pinheiro (1961) na escola primária deve-se ensinar a geometria indutivamente, tendo como ponto de partida a observação, a análise e a imaginação da criança. Destaca ainda que no ensino da geometria deve ser utilizada a atividade natural da criança, como a construção e o desenho de figuras geométricas estudadas. Refere também que deve ser estabelecida uma relação entre o ensino da geometria e o desenvolvimento de disciplinas como os trabalhos manuais e o desenho, apelando-se para que o ensino tenha uma feição objetiva e prática. Apela-se ainda para experiência infantil e para o domínio que a criança já tem das diversas formas geométricas existentes na natureza.

Gonçalves (1974) dedica uma parte da sua obra ao ensino da geometria, abordando aspetos como a sua origem e evolução histórica, o ensino da geometria através dos tempos, os objetivos gerais e princípios gerais do seu ensino e considerações particulares sobre o ensino de cada um dos conteúdos do ensino primário. Para Gonçalves (1974) o ensino da geometria deve ser simultaneamente utilitário, formativo, intuitivo e ativo. Gonçalves (1974) salienta também a necessidade de associar disciplinas como os trabalhos manuais ao ensino da geometria exemplificando que "a dobragem de um quadrado, para a construção de uma pomba brinquedo, pode fornecer numerosas observações: igualdade dos lados, igualdade dos ângulos retos, divisão do ângulo reto em dois ângulos de 45º, centro e eixo de simetria" (p. 111). Gonçalves (1974) destaca ainda a importância do material de concretização no ensino da geometria e a precisão e rigor na sua utilização.

Os manuais analisados neste período dão algum relevo à resolução de problemas no ensino da aritmética numa perspetiva da didática. Na análise das obras é possível identificar alguns pontos em comum. Em qualquer das obras a resolução de problemas é colocado como ponto central do ensino da aritmética sendo-lhe especificamente dedicado pelo menos um capítulo. As diferentes obras também abordam temas comuns relativamente à resolução de problemas, que se mantêm desde a primeira obra deste período como a origem dos problemas, a adequação à idade e desenvolvimento dos alunos, o caráter prático e a adequação às condições da vida social dos alunos, a importância da concretização e utilização de esquemas e a graduação da dificuldade. Os problemas são encarados essencialmente como uma forma de aplicação das operações. Existem também alguns aspetos que só são tratados nalgumas obras, até porque o aprofundamento deste tema não é sempre o mesmo.

Pimentel Filho (1934) apresenta a resolução de problemas como central no ensino da aritmética, discutindo aspetos como a procedência dos problemas, destacando as coletâneas de problemas organizados pelos professores. Discute também os requisitos a que devem obedecer os problemas, salientando a experimentação, a observação direta, a concretização, a graduação das operações e dos problemas, etapas para a resolução de problemas e adequação ao desenvolvimento da criança. Distingue diferentes tipos de problemas, como os problemas de iniciação, os problemas de aplicação e os problemas de revisão. Aborda a importância da disposição dos cálculos, salientando cinco princípios a seguir num trabalho metódico de abordagem à resolução de problemas. Discute o papel do professor na resolução de problemas. Aborda ainda a organização do tempo da aula na resolução de problemas.

Na obra de Gaspar e Ferreira (1944), o ensino das operações está diretamente relacionado com a resolução de problemas, considerando-se que é a necessidade de resolver os problemas que faz nascer o interesse por aprender as operações. O final do capítulo dedicado à didática da aritmética apresenta uma secção dedicada à resolução de problemas. Nesta secção, os autores abordam a proposição e resolução de problemas, a escolha das situações, técnica da apresentação dos problemas e os erros mais frequentes no uso dos problemas. Começam por destacar a relação entre o ensino das operações, que consideram a principal finalidade da disciplina, e a resolução dos problemas, considerados como processo para atingir a finalidade. Os problemas deveriam ser colocados de acordo com o desenvolvimento dos alunos, apresentados oralmente, e só depois por escrito, e seguir uma sequência do concreto para o abstrato. Para os autores, os problemas servem para introduzir outras noções. Para além dos problemas apresentados pelos professores, os autores consideram que não se devem desprezar os contextos reais dos alunos. No entender dos autores, os problemas deveriam ser diversos, tanto nos dados, como no enunciado e na resolução, e os alunos deveriam ser habituados a verificar os resultados e as resoluções. Os autores estabelecem relações entre a resolução de problemas e outros conteúdos, nomeadamente a educação para os valores de cidadania da época, como no exemplo:

> «Que tempo dedica num ano a Deus (autor e conservador de todos os nossos momentos) a pessoa que todos os domingos está 35 minutos na Missa?» Isto é a vida individual e coletiva – em grande parte dos núcleos escolares de Portugal. (Gaspar & Ferreira, 1944, p. 65, aspas no original)

Pinheiro (1961) dedica aos problemas uma secção que designa por problemas aritméticos. nesta secção aborda questões como a proposição de problemas, resolução, regras a observar, problemas por via oral e escrita, tipos de problemas e erros mais frequentes. Na resolução de problemas, Pinheiro (1961) salienta vários momentos, destacando a explicação do problema e o raciocínio como momentos essenciais. Na sua obra, Pinheiro (1961) estabelece uma tipologia de problemas a apresentar aos alunos, onde se destacam os problemas ligados à realidade, ou construídos e adaptados da realidade dos alunos. Os contextos mais utilizados são os das trocas comerciais ou das medidas, destacando-se os problemas de cálculo com a aplicação de uma só operação elementar. Há ainda algum destaque para a formulação de problemas por parte dos alunos e para a proposta de problemas que não apresentem todos os dados necessários e para os quais os alunos poderão apresentar diferentes propostas de resolução.

Gonçalves (1972) também apresenta um capítulo dedicado na sua totalidade à resolução de problemas. O capítulo encontra-se dividido em três partes, didática dos problemas, proposição dos problemas e resolução dos problemas. Depois de alguns aspetos gerais sobre a didática dos problemas, Gonçalves (1972) destaca na proposição dos problemas quais as regras a observar, os tipos de problemas e a técnica de proposição de problemas. Na parte da resolução de problemas, destaca aspetos como o raciocínio na solução de problemas e a relação com o sentido das operações aritméticas, passos na resolução de problemas, os métodos, a quantidade de problemas a resolver, a correção dos exercícios e os erros mais frequentes.

Nas considerações gerais sobre a didática do cálculo, Gonçalves (1972) começa por definir o que entende por problema, numa definição que contém muito do que era na época definido no programa de aritmética do ensino primário elementar.

> um problema é sempre uma dificuldade, questão ou perplexidade para a qual não temos uma resposta pronta, mas que se pode resolver pelo pensamento reflexivo, a atividade construtiva com materiais concretos.
> Importa porém que a dificuldade do problema «não provenha da obscuridade da expressão».
> «Os problemas devem considerar situações vividas pelos alunos, ou que, pelo menos, estejam ao alcance da sua observação e do seu interesse.» (Gonçalves, 1972, pp. 41-42, aspas no original)

Gonçalves (1972) destaca, na resolução de problemas, o desenvolvimento de métodos diferenciados e a exposição, pelos alunos, desses métodos. A este respeito, refere que as crianças devem ter a oportunidade de expor a sua engenhosidade e invenção.

O cálculo mental é abordado por todos os autores deste período, embora com desenvolvimentos diferentes. Este aspeto é particularmente desenvolvido nas obras de Pimentel Filho (1934) e Gonçalves (1972) que lhe dedicam um capítulo completo, embora as outras obras também tenham diversas referências ao cálculo mental.

O cálculo mental é um aspeto que sobressai na obra de Pimentel Filho (1934). Relativamente a este aspeto, salienta que este deve ser contínuo, graduado e individual. O autor apresenta diferentes estratégias de cálculo para as quatro operações, utilizando como referência o trabalho de Bourlet[171]. Para além das estratégias diversificadas, apresenta diferentes exemplos de exercícios para trabalhar cada estratégia. Pimentel Filho (1934) define o cálculo mental como "o cálculo realizado sem a figuração concreta dos seus elementos" (Pimentel Filho, 1934, p. 320). O autor considera que o cálculo mental tem um alto valor educativo e prático. Por um lado, tem um valor educativo porque cria hábitos de reflexão e de análise, porque estimula a curiosidade, anima o decurso da aula e é um meio de levar os alunos a tentarem superar-se. A sua ação também é considerada reguladora, no sentido de corrigir a precipitação de alguns alunos e de estimular a rapidez de outros. Por outro lado, o cálculo mental é considerado pelo autor como tendo um alto valor prático, porque é muito utilizado na via quotidiana. Um exemplo de um exercício proposto por Pimentel Filho (1934) é o seguinte

> Arredonda-se o número terminado pelo maior algarismo; depois junta-se a êste novo número o que é preciso juntar ao algarismo que serviu a arredondar para reproduzir o outro número. Assim, 49 e 37 são 86. Mentalmente 49 e 1 fazem 50; ora 37 é 1 + 36; então a soma procurada é igual a 50 + 36 = 86. (Pimentel Filho, 1934, p. 325)

Na situação anterior, em que a soma dos algarismos das unidades é maior do 10, é recomendado a utilização do arredondamento.

Embora as estratégias de cálculo mental não sejam aprofundadas em Gaspar e Ferreira (1944) estes autores também o referem diversas vezes. Para estes autores, o cálculo mental deve anteceder o cálculo escrito, nomeadamente na resolução de problemas. A falta de treino do cálculo mental é apontada como um dos fatores que leva ao erro na resolução de problemas.

Na obra de Pinheiro (1961) o cálculo mental é destacado como elemento fundamental no ensino inicial da aritmética, sendo a sua ausência considerada como um dos erros mais frequentes na iniciação. Na sua obra, Pinheiro (1961) destaca que o cálculo mental deve preceder o cálculo escrito e deve permitir ao aluno desenvolver um espírito crítico relativamente aos resultados do cálculo escrito.

Na obra de Gonçalves (1972) o cálculo mental também é destacado ocupando um capítulo nos conteúdos referentes à 2.ª classe, sendo mencionado novamente nos conteúdos da 3.ª classe. Para Gonçalves (1972) o cálculo mental é uma atividade essencial na resolução de problemas, podendo ser exato ou aproximado. Este deve iniciar-se na 1.ª classe e prolongar-se durante toda a vida. Gonçalves (1972) considera que o cálculo mental tem um valor formativo, prático e preventivo contra resultados incongruentes. Neste cálculo, Gonçalves (1972) considera que não

[171] A obra de Bourlet referida no texto de Pimentel Filho é *Mathématiques, in Noveau Dictionaire de Pédagogie et d'Instruction Primaire, de Buisson, 1911; Cours Abrégé d'Arithemétique, Premier Cycle, 6iéme édition, 1906.*

se devem estabelecer regras porque cada indivíduo tem formas de pensamento especiais, "Portanto, nada de regras, apenas sugestões que habituem os alunos a pensar, a refletir e a calcular: a desenvolver as suas próprias formas de pensamento" (p. 235). É de referir aqui que as indicações apresentadas por Gonçalves (1972) em relação a certos aspetos do cálculo mental são por vezes textualmente as mesmas que Pimentel Filho (1934) embora não sejam indicadas as fontes das citações. Gonçalves (1972) também apresenta algumas estratégias de cálculo mental para as diferentes operações aritméticas, fazendo uso das propriedades das operações. Por exemplo, para a adição a utilização do que ele designa por número redondo "pode-se substituir um número dado por um *número redondo* seu vizinho, fazendo-se no fim a correção 325 + 96 = 325 + 100 – 4 = 425 – 4 = 421" (p. 236).

No que diz respeito à utilização de material didático, de uma forma mais ou menos estruturada e aprofundada, todas as obras referem a sua utilização no ensino da aritmética, principalmente na iniciação das contagens e das operações elementares.

No trabalho de Pimentel Filho (1934) o material didático é essencialmente referido quando é trabalhada a iniciação à noção de quantidade, grandeza ou coleção. Para este trabalho são mencionadas as coleções de objetos do dia a dia. É também referido um material idêntico ao material de base 10 para trabalhar o sistema decimal.

Gaspar e Ferreira (1944) destacam a importância da concretização na aprendizagem da aritmética, embora assinalando que não se deve deixar que as crianças não se devem prender demasiado aos materiais, devendo desenvolver a capacidade de se abstrair. Muitos dos materiais referidos por estes autores são materiais relacionados com o sistema de medida. São também referidos os jogos com cartões e com cubos, nomeadamente no ensino das operações aritméticas, sendo referido o método Montessori. É ainda referido o método Decroly com a utilização de tábuas de diferentes formas, tamanhos, pesos e cores e o método Mac Kinder onde se utilizam caixas ou tabuleiros para o ensino das operações fundamentais.

No que diz respeito ao material a utilizar no ensino, Pinheiro (1961) divide-o em quatro grupos: o material de graça ou quase de graça, o material muito barato, o material preparado pelos alunos ou pelo professor e o material da escola. No material sem custos, Pinheiro (1961) refere os feijões, pedrinhas, botões, pinhões, rodelas de cartão e de cortiça, fósforos e palitos. De entre o material muito barato, Pinheiro (1961) refere a argila de modelagem, papel quadriculado, cubos de madeira, fita métrica, papel branco e de várias cores e o metro articulado. Relativamente ao material preparado pelos alunos ou pelo professor refere jogos diversos, pequenas bandeiras e quadrantes de relógio mudo. No que se refere a material da escola, Pinheiro (1961) destaca a caixa métrica, ábaco ou contador, jogos aritméticos como Montessori, Decroly e Mackinder.

Gonçalves (1972) dedica um capítulo do 1.º volume ao material didático. Este capítulo está dividido em oito pontos *1. Sua importância, 2. Material objetivo, 3. Material ideográfico, 4. Outro material, 5. Características do material didático, 6. Material pré-fabricado, 7. A utilização dos materiais pré-fabricados*, *8. A ação sobre o material didático.* No primeiro ponto, Gonçalves (1972) começa por justificar a importância da utilização de material didático, recorrendo a uma citação do programa de aritmética da época, onde se afirma que deve ser a partir do concreto que o aluno atinge o abstrato. Nesta mesma citação do programa, afirma-se que a escola deve dispor de material de fácil aquisição e manuseamento. No segundo ponto, Gonçalves (1972) enumera o material objetivo, que divide em dois grupos, o material objetivo docente, que é coletivo, e o material objetivo discente, que é individual. No material objetivo docente, identifica as 1) rodelas de várias cores, para as contagens e decomposições, as 2) varetas para a numeração e as operações, 3) contas para contar e enfiar, do método MacKinder para a escrita e leitura de números, 4) botões, 5) cápsulas de garrafas, 6) conchas, 7) seixos do mar ou do rio, 8) frutos secos não comestíveis, 9) metro articulado, 10) moedas, 11) ábacos, para contagens e cálculos, 12) pranchetas retangulares com pregos, para fixação das rodelas, 13) vasilhas, para encher e vazar, 14) balanças e material para pesagens, 15) dispositivos (tabuleiros) para a concretização da adição e da divisão, 16) réguas montessorianas, para a composição e decomposição numérica e concretização das operações, e 17) material morfocromático de Cuisenaire. No que diz respeito ao material objetivo discente, Gonçalves (1972) refere as caixas de cálculo com grãos, discos de cartão, ábacos em formato reduzido, material Cuisenaire, dinheiro e régua. Quanto às características do material didático, indicadas no ponto cinco deste capítulo, Gonçalves (1972) destaca que este deve ser simples, preferindo os objetos às suas representações. No material pré-fabricado, Gonçalves (1972) refere os blocos lógicos de Dienes, o material morfocromático Cuisenaire, o material Discat e mosaicos. No que diz respeito à utilização destes materiais pré-fabricados, Gonçalves (1972) cita o trabalho do autor Bandet, salientando que, mesmo que estes materiais sejam excelentes, podem sempre ser substituídos por outros, e não são suficientes, porque a sua utilização exclusiva poderia levar à mecanização e ao desinteresse. Quanto à ação sobre o material didático, Gonçalves (1972) volta a salientar que antes da aquisição abstrata, a criança deve passar por uma experiência concreta, para que a verbalização não seja imposta, mas seja antes a tradução da realidade vivida. Destaca ainda que, não são os objetos que interessam, mas sim a ação das crianças sobre os objetos.

6.6.1. Em síntese

Os manuais analisados no segundo período centram-se na componente pedagógica e enfatizam a discussão em torno da metodologia, da didática, da análise do currículo e do caráter que deve ter o ensino da aritmética no ensino primário. Em qualquer um dos manuais analisados neste período é destacado o caráter prático e utilitário do ensino desta disciplina, destacando-se o método indutivo no seu ensino. Pinheiro (1961) de alguma forma sintetiza os propósitos para o ensino desta disciplina no ensino primário, que também são expressos nos outros manuais analisados, enumerando o seu caráter racional, progressivo, prático, regional, ativo e intuitivo. Nos manuais de Gaspar e Ferreira (1944) e de Pinheiro (1961) também é salientado o papel da disciplina de aritmética na formação moral do indivíduo. Nos manuais deste segundo período é ainda de destacar a importância que se dá à análise do programa de aritmética do ensino primário da época, sendo quase sempre uma das primeiras partes apresentadas nos manuais.

Nos manuais analisados no segundo período, as operações elementares são abordadas do ponto de vista do ensino. É sublinhada a importância da utilização de diferentes representações como a representação ativa através da utilização de materiais de concretização, a representação pictórica, a representação verbal e a representação simbólica. No trabalho destes autores destacam-se os sentidos das operações quando apresentadas em contexto, como o sentido de retirar, achar a diferença e completar, na subtração, e o sentido de partilha e de agrupamento, na divisão.

No segundo período, os manuais analisados colocam a resolução de problemas como ponto central do ensino da aritmética, tendo sempre um capítulo dedicado a este aspeto. Existem outros pontos que se encontram em todas as obras deste período relativamente à resolução de problemas. Em todas estas obras é discutida qual deve ser a origem dos problemas apresentados aos alunos, a adequação à idade e desenvolvimento dos alunos, o caráter prático e a adequação à condição social dos alunos, a importância da concretização e utilização de esquemas e a graduação da dificuldade. Nas obras aqui analisadas, os problemas são vistos essencialmente como forma de iniciação a um conteúdo, aplicação ou como revisão. As obras de Pimentel Filho (1934), Pinheiro (1961) e Gonçalves (1972) realçam também a existência de momentos diferentes numa aula de resolução de problemas, salientando momentos como a explicação e a oportunidade para o raciocínio. Na obra de Pinheiro (1961) há um elemento que não é comum às outras obras analisadas, que se refere à formulação de problemas por parte dos alunos e para a proposta de problemas que não apresentem todos os dados necessários nos quais os alunos poderão apresentar propostas de resolução diferentes.

O cálculo mental é abordado em todas obras analisadas no segundo período, embora com desenvolvimentos diferentes, sendo visto nestas obras como essencial para o desenvolvimento de um espírito crítico relativamente ao cálculo escrito e como estimativa na resolução de problemas. No entanto, este aspeto não é desenvolvido da mesma forma em todas as obras, sendo particularmente desenvolvido nas obras de Pimentel Filho (1934) e de Gonçalves (1972). Nestes dois autores, um aspeto que se destaca é a apresentação de técnicas de cálculo mental para as diferentes operações que vão para além da realização mental do algoritmo, explorando as propriedades das operações. Nestas duas obras é também destacado o caráter individual das estratégias desenvolvidas por cada um dos alunos.

Nas obras do segundo período, todas elas mencionam os materiais didáticos, principalmente associados à iniciação das contagens e das operações elementares. Nestas obras há um certo destaque para os materiais não estruturados associados às contagens como as coleções de objetos, feijões, rodelas de cartão, fósforos, palitos, entre outros. No entanto existem também referências a materiais como o material base 10, jogos com cartões e cubos, papel quadriculado, cubos de madeira, o material do método Montessori, tábuas de diferentes formas, tamanhos, pesos e cores do método Decroly, as caixas ou tabuleiros para o ensino das operações fundamentais do método MacKinder, o ábaco e o contador. Entre os materiais didáticos referidos também têm destaque os materiais de medida como a fita métrica, o metro articulado e os materiais das caixas métricas, dinheiro e réguas. Em Gonçalves (1972) também são destacados materiais como o material morfocromático de Cuisenaire, os blocos lógicos de Dienes, o material Discat e os mosaicos. Na obra de Gonçalves (1972) realça-se que embora os materiais sejam importantes, não são os objetos que interessam, mas sim a ação das crianças sobre eles.

Nas obras do segundo período, destaca-se um aspeto comum a todas que se refere ao facto de todas mencionarem que a geometria é uma disciplina onde normalmente o método dedutivo é utilizado. No entanto, os autores destacam que, com os alunos do ensino primário seria essencial recorrer ao método indutivo e à relação com a realidade, nomeadamente a relação com disciplinas como os trabalhos manuais ou o desenho.

7

7. Caracterização do conhecimento profissional dos professores para o ensino dos números racionais

Com o objetivo de estudar o desenvolvimento do conhecimento profissional do professor para o ensino da matemática, neste capítulo apresenta-se e discute-se os resultados relacionados com a análise dos manuais selecionados, centrado na caracterização do conteúdo relacionado com os números racionais e o seu ensino. Com base no modelo de Monteiro e Pinto (2005) e Pinto (2011), onde são identificadas componentes essenciais no desenvolvimento do sentido do número racional, e no modelo de Ball et al. (2008) para a caracterização do conhecimento profissional do professor, organizou-se categorias de análise que resultaram da interação entres estes dois modelos (anexo 9 a 13) onde se aborda a definição de número racional, tipos de unidade, frações equivalentes, comparação e ordenação de frações e operações com números racionais. Tendo em conta o enquadramento teórico, neste capítulo faz-se ainda uma análise dos manuais da formação de professores quanto às representações e situações matemáticas e contextos utilizados no ensino dos números racionais.

Procura-se neste capítulo respostas para as questões colocadas inicialmente como: Q5 - Quem eram os autores dos manuais utilizados nos cursos de formação inicial dos professores do ensino primário, qual a sua formação, em que meio educativo atuaram e que relação tinham com a matemática? Q6 – Que conteúdos de matemática eram abordados nos manuais utilizados na formação inicial dos professores do ensino primário e de que forma refletem uma preocupação com o desenvolvimento de um conhecimento profissional do professor para ensinar matemática? Q7 – Que conhecimento profissional para ensinar o conteúdo dos números racionais não negativos é possível identificar nos manuais utilizados na formação inicial dos professores do ensino primário? Q8 – O conhecimento para ensinar o conteúdo dos números racionais não negativos exposto nos manuais utilizados na formação de professores tem de alguma forma reflexo no que atualmente a literatura na área da didática da matemática aponta como importante para o ensino deste conjunto numérico? Q9 – Que relações se encontram entre as principais ideias pedagógicas que marcaram o período em estudo e os modelos pedagógicos apresentados pelos autores dos manuais para a área do ensino da matemática?

Tal como o capítulo anterior, este capítulo está dividido em duas partes que correspondem aos dois períodos em que foi dividido o intervalo de tempo do estudo dos manuais, o primeiro período que vai de 1844 a 1930 e o segundo período que vai de 1930 a 1974. Para cada um dos manuais foi elaborada uma ficha bibliográfica (anexo 1 a anexo 8), onde se registaram e sintetizaram os dados recolhidos de acordo com as categorias definidas. O anexo 14 sintetiza a caracterização do conhecimento profissional do professor relativamente às diferentes componentes. Nesse anexo regista-se se foram ou não identificadas evidências de um determinado domínio do conhecimento profissional do professor para o ensino dos números racionais. Em determinadas situações optou-se pela utilização do termo "implícito" por se considerar representativo das situações em que o autor não enuncia explicitamente um determinado conhecimento, mas onde, através da análise dos exemplos apresentados, é possível identificar o desenvolvimento desse conhecimento. Os anexos 15 e 16 sintetizam, respetivamente, a caracterização das representações e a caracterização das situações matemáticas e contextos utilizados no desenvolvimento do conteúdo dos números racionais.

1.º Período – Das escolas normais às escolas do magistério primário (1860 – 1930)

7.1. Definição de número racional

Na definição de número racional apresentada no conjunto de manuais analisado neste período, e tendo em conta o que se definiu para os diferentes domínios do conhecimento do conteúdo e conhecimento pedagógico do conteúdo (anexo 9), é possível distinguir dois tipos de manuais. Os manuais destinados à componente das ciências da especialidade e formação geral, Nunes (1887) e Preto (1903), e os manuais da componente pedagógica, Affreixo e Freire (1891) e Coelho (1906).

Nunes (1887), numa obra dedicada à componente das ciências da especialidade, identifica duas espécies de números que resultam da distinção que faz de dois casos na medida das grandezas. O número inteiro, "quando a grandeza contém a unidade uma ou muitas vezes exatamente." (p. 6) e fração, "quando a grandeza não contém a unidade inteiramente." (Nunes, 1887, p. 6). Nunes (1887) distingue também fração, quando o número é apenas constituído por partes não inteiras, de número fracionário, quando o número é constituído por uma parte inteira e outra não inteira.

O livro III de Nunes (1887) aborda as frações, como medida das grandezas. No capítulo I, deste livro III, são definidas as propriedades gerais das frações. A fração é definida como "dividindo a *unidade* em um certo número de partes iguais e tomando uma ou muitas das partes formadas, temos uma **fração**.” (Nunes, 1887, p. 61, itálico e negrito aumentado no original). Para esta definição é apresentado verbalmente um exemplo em que se divide uma laranja em quatro partes iguais e se tomam três dessas partes. Estes três quartos são uma fração, que se obtêm quando se mede uma grandeza menor do que a sua unidade. O autor descreve depois a forma como se representa simbolicamente uma fração, com o denominador, o numerador e o traço de fração. No final da descrição estabelece uma relação entre a representação verbal e a representação simbólica através de uma fração

> Uma fração é representada por meio de dois números: o *denominador*, que indica em quantas partes iguais a unidade foi dividida, e o *numerador*, que indica quantas partes se tomam.
>
> O numerador e o denominador chamam-se os *termos da fração*. Para escrever uma fração, escreve-se primeiro o numerador, e a baixo o denominador, separando os dois números por um traço horizontal. Assim, a fração *três quartos* escreve-se $\frac{3}{4}$. (Nunes, 1887, p. 61, itálicos no original)

Nunes (1887) expõe depois a forma de leitura de diferentes frações. Destaca a forma geral, lendo-se primeiro o numerador e depois o denominador seguido da terminação avos. Salienta algumas particularidades como os meios, os terços até aos décimos. Refere ainda a leitura de frações cujos termos são números grandes, destacando que nestes casos se lê o numerador e depois o denominador, com a palavra sobre entre os dois termos.

Nas frações decimais e na sua representação na forma de numeral decimal, Nunes (1887) começa por destacar a relação entre as duas representações simbólicas, fração decimal e numeral decimal, estabelecendo também uma relação com a representação verbal. Nesta obra também se destaca a relação que existe entre a representação na forma de numeral decimal e o sistema de numeração decimal utilizado nos números inteiros não negativos. Na descrição que faz inicialmente para apresentar a representação decimal dos racionais, o autor utiliza a representação verbal e só depois a representação simbólica, dando ênfase à forma de fazer a leitura dos números.

A relação entre a representação na forma de fração decimal e a forma de numeral decimal é muito destacada nesta obra, assim como a forma de fazer a conversão. Isso acontece quando o autor pretende apresentar a forma de fazer a comparação de números representados como numerais decimais e recorre à representação como fração decimal para depois fazer essa comparação. Na obra, o autor apresenta algumas situações que representam alguns mal-entendidos que é comum verificar entre os alunos, nomeadamente no que se refere ao valor de posição no sistema decimal. Também recorre a essa relação entre representações quando quer apresentar as regras dos procedimentos para as operações na forma de numeral decimal. Nessa situação, recorre muitas vezes às regras das operações com frações, mas estabelece relações com as operações entre números inteiros não negativos e com o sistema decimal.

No capítulo dedicado às frações decimais, os procedimentos das operações são sempre apresentados com recurso apenas a situações matemáticas estritamente numéricas. Não são apresentados outros tipos de situações com contextos mais ligados à realidade, que envolvam as frações decimais e os numerais decimais. No entanto, é de destacar que o capítulo que se segue na obra é dedicado ao sistema métrico, onde surgem diversas situações e contextos onde são aplicados os numerais decimais.

Na obra de Preto (1903), a primeira definição do número racional apresentada também decorre da medida, na situação em que a unidade cabe um número exato de vezes, na grandeza a medir, ao número chama-se inteiro. Quando a unidade não cabe um número inteiro de vezes no comprimento a medir, ao número chama-se fracionário, e o número que exprime o resto chama-se quebrado ou fração (Preto, 1903). As definições são apresentadas recorrendo à representação verbal.

> *Número inteiro* é o que consta de unidades iguais;
> *Número quebrado* ou *fração* é o que consta de partes iguais da unidade;
> *Número fracionário* é o que consta de unidades iguais e partes também iguais da unidade. (Preto, 1903, p. 7, itálicos no original)

Tal como em Nunes (1887), Preto (1903) apresenta os termos da fração e só depois apresenta a fração numa representação simbólica, estabelecendo uma relação com a representação verbal escrita.

> Escreve-se uma fração, colocando os dois números, *numerador* e *denominador*, separados por uma linha horizontal, o primeiro por cima da linha e o segundo por baixo. Assim, para representar a fração que provém de dividir a unidade em 8 partes iguais (*denominador*) e destas tomar 3 (*numerador*), escreveremos $\frac{3}{8}$. (Preto, 1903, p. 131, itálicos no original)

Apesar de apresentar a fração em primeiro lugar como medida, Preto (1903) também estabelece a relação entre a definição de divisão e a fração, concluindo que "uma fração pode ser considerada como o quociente da divisão do numerador pelo denominador." (p. 132). Daqui resulta que para dividir 7 por 9, pode tomar-se $\frac{1}{9}$ da unidade e repetir esta parte alíquota da unidade por sete vezes, representando simbolicamente como $7 : 9 = \frac{7}{9}$. Preto (1903) distingue a fração que representa a unidade, a fração menor que a unidade, que designa por fração própria, e a fração maior que a unidade, que designa por imprópria.

No trabalho de Preto (1903), após a definição de fração são abordadas as frações decimais, que o autor também designa por dízimas. Preto (1903) descreve estas frações decimais como aquelas que resultam de dividir a unidade em 10, 100 ou 1000 partes iguais. Estas divisões da unidade são apresentadas como simples e vantajosas para o cálculo.

> Desta maneira as frações que *resultam ficam sempre por denominador a unidade seguida de um ou mais zeros* e, por isso, se lhe dá o nome de *frações decimais* ou simplesmente *dízima*. Podemos, pois, definir em geral:
> *Número decimal é o número que exprime de quantas unidades e partes decimais da unidade se compõe uma grandeza qualquer*. (Preto, 1903, p. 156, itálicos no original)

Aparentemente, Preto (1903) não faz distinção entre a designação de fração decimal e a sua representação decimal na forma de dízima, considerando-as como sendo o mesmo. Isto também é notório na continuação da descrição das frações decimais. Preto (1903) estabelece a relação entre estas e o sistema decimal utilizado nos números inteiros referindo que tal como se organizam os números inteiros em coleções de dez, cem, mil, … unidades "analogamente poderemos dividir a unidade em dez partes iguais e a cada uma destas partes chamar décimas, que será dez vezes menor que a unidade a unidade dividir a décima em dez partes iguais e a cada uma destas partes chamar centésima" (pp. 155-156). O sistema de organização dos números é descrito sucessivamente sendo indicadas as designações das divisões da unidade até à décima milionésima.

A forma de organização da numeração escrita nas dízimas também é descrita em comparação com a organização escrita dos números inteiros, sendo indicadas as regras:

> 1.ª Para escrever um número decimal, que nos seja enunciado, principiaremos por escrever a parte inteira, se a houver, seguida de uma vírgula; se não houver parte inteira, será esta substituída por um zero, e depois, sucessivamente e da direita para a esquerda, iremos escrevendo as décimas, centésimas, etc. que nos forem enunciadas, substituindo por zero as diferentes ordens que faltarem;
> 2.ª Para ler um número decimal escrito, enuncia-se primeiro a parte inteira, se a houver, e depois a parte que está à direita da vírgula, como se fosse número inteiro, dando ao último dos seus algarismos à direita o nome decimal que lhe pertencer. (Preto, 1903, p. 158)

Preto (1903) apresenta depois alguns exemplos de leitura de números ditos decimais

> 1.º Escrever o número decimal composto de 89 *unidades*, 6 *décimas*, 5 *centésimas* e 9 *décimas milésimas*: teremos
>
> 89,6509;
>
> pondo um zero no lugar das milésimas, porque o número proposto não as tem. (Preto, 1903, p. 158)

Preto (1903) salienta depois que os números decimais obedecem ao sistema de valor de posição usado nos números inteiros, enunciando três regras como consequência da utilização desse sistema. "1.º Um número decimal não se altera, quando à direita do seu último algarismo se acrescenta qualquer número de zeros. Assim é 3,45 = 3,45000 ……” (p. 160). Também como consequência do sistema do valor de posição, se um determinado algarismo for deslocado para a esquerda passa a ter um valor dez vezes superior e se for deslocado para a direita passa a ter um valor dez vezes inferior, de onde Preto (1903) enuncia as regras para a multiplicação e para a divisão por 10, 100 ou 1000.

> 2.ª *Para multiplicar um número decimal por 10, 100, 1000, …, basta transportar a vírgula 1, 2, 3 …, casas para a direita*.
> E reciprocamente:
> 3.ª *Para dividir um número decimal por 10, 100, 1000, basta transportar a vírgula 1, 2, 3 …, casas para a esquerda*.
> Desta maneira, para multiplicar, por exemplo, 7,20345 por 100, isto é, para tornar este número 100 vezes maior, escreveremos 720,345. (Preto, 1903, p. 160).

São também apresentados exemplos para a divisão por 10, 100, ou 1000.

No ponto seguinte, Preto (1903) apresenta a forma de converter um número decimal numa fração, indicando que “1.ª Para converter um número decimal em fração ordinária, basta suprimir a vírgula; escrever o resultado em numerador; e pôr em denominador a unidade seguida de tantos zeros quantos são os algarismos decimais” (p. 161). Preto (1903) também enuncia o recíproco, salientando que “2.ª Para converter uma fração ordinária, que tenha por denominador a unidade seguida de qualquer número de zeros, em fração decimal, basta escrever o numerador, e separar nele tantos algarismos para dízima quantos os zeros do divisor.” (p. 161). Os vários exemplos apresentados recorrem à representação simbólica, “0,345 convertido em fração ordinária dá $\frac{345}{1000}$.” (p. 161)

Tal como já foi destacado noutros momentos da análise dos manuais correspondentes a este primeiro período, a obra de Affreixo e Freire (1891) não apresenta qualquer abordagem aos números racionais, nem na sua representação em fração, nem na sua representação decimal, razão pela qual não é possível analisar a forma como é apresentada a definição de número racional.

Na obra de Coelho (1906), dedicada à componente pedagógica do curso, o autor apresenta pela primeira vez a noção de fração com um exemplo ligado à realidade.

> Assim, suponha-se que se pretende, por exemplo, por diante dos olhos do aluno o que seja a relação numérica *um quinto* ou seja a fração expressa pelo seguinte símbolo: $\frac{1}{5}$; para o conseguir, bastará mostrar ao aluno, por exemplo, uma laranja dividida em cinco partes iguais: tomando uma de essas partes, ter-se-á $\frac{1}{5}$ da unidade total. (Coelho, 1906, p. 99, itálicos no original)

Nesta obra de 1906 esta é a única referência à representação na forma de fração, sendo posteriormente referida a representação decimal. Na sua obra de 1892, também aqui analisada, Coelho (1892) apresenta uma proposta em tudo idêntica à de 1906 para a iniciação das frações.

> A apresentação empírica das relações quantitativas quando os números exprimem partes de uma dada unidade, não oferece dificuldades sérias.
> Suponha-se, por exemplo, que se pretende pôr diante dos olhos dos alunos o que seja $\frac{1}{5}$ da unidade. É claro que conseguirá objetivar uma tal noção, apresentando um objeto qualquer, por exemplo, uma laranja, dividida em 5 partes iguais; tomando uma dessas partes, ter-se-á $\frac{1}{5}$ da unidade total. (Coelho, 1892, p. 204)

A fração é apresentada como a parte de um todo de uma unidade contínua, referindo-se o uso de objetos do dia a dia, como uma laranja. Este processo deveria ser utilizado para a apresentação de diferentes frações da unidade, unitárias e não unitárias, assim como a apresentação de frações impróprias.

No que se refere à representação decimal dos números racionais, Coelho (1892) relaciona o seu estudo com o estudo do sistema decimal, fazendo uso de um jogo que estabelece a relação decimal entre as diferentes ordens.

7.1.1. Em síntese

No primeiro período do âmbito cronológico em análise podem distinguir-se dois tipos de manuais quanto ao conhecimento profissional desenvolvido na definição de número racional, os manuais da componente das ciências de especialidade e formação geral, tais como Nunes (1887) e Preto (1903), e os manuais da componente pedagógica, tais como Affreixo e Freire (1891) e Coelho (1906).

As obras de Nunes (1887) e de Preto (1903) centram-se no conhecimento do conteúdo, sem que seja explicitamente destacado um conhecimento especializado do conteúdo. Nas obras destes dois autores a designação número racional não é utilizada, surgindo designações como quebrado ou fração para referir um número que tem partes iguais da unidade, mas que é menor do que a unidade, ou número fracionário para referir um número que tem partes iguais da unidade, mas que é maior do que uma unidade. Em Preto (1903) também são utilizadas designações como fração própria para referir-se à fração menor do que a unidade e fração imprópria para a fração maior do que a unidade. Nestas duas obras, este conjunto numérico tem uma primeira abordagem a partir da representação na forma de fração, como medida das grandezas, embora não seja apresentada uma definição formal, com recurso a uma representação simbólica matemática, tal como aparece no quadro teórico em Caraça (2003). Em Preto (1903) a fração também aparece definida como quociente tal como é definida em Campos Ferreira (1990). Outra característica comum aos dois autores referidos é a importância que dão à relação entre a representação verbal da fração, a leitura dos termos da fração e a sua representação simbólica. Nestes dois manuais a definição de dízima é apresentada em estreita relação com a noção de fração decimal. Na obra de Preto (1903) não se faz uma distinção clara entre as duas designações. A noção é apresentada com recurso à representação verbal e representação simbólica matemática, mas sem o formalismo utilizado nas obras do quadro teórico, como Santos (2014) ou Wu (2017). Desta forma, o conhecimento desenvolvido nestes dois manuais em torno da definição de número racional pode considerar-se como um conhecimento comum do conteúdo já que surge como uma definição próxima do que acontece noutras obras que não são para o ensino básico.

Em Nunes (1887) e Preto (1903) não é possível identificar que exista uma preocupação explícita com um conhecimento especializado do conteúdo ou com os diferentes domínios do conhecimento pedagógico do conteúdo, não sendo possível identificar indicações sobre sequências de ensino ou dificuldades dos alunos no trabalho com a definição de número racional. No entanto, é de destacar que tanto Nunes (1887), como Preto (1903), apresentam no final do capítulo sobre as frações, exemplos de exercícios que remetem para a utilização da fração com um contexto da parte de um todo, tanto contínuo como discreto, e contextos em que a fração surge como operador (Monteiro & Pinto, 2005), onde implicitamente se trabalha um conhecimento especializado do conteúdo. É ainda de salientar que a obra de Nunes (1887) apresenta e discute as resoluções dos exercícios sugeridos e, embora não se possa considerar que eles constituam uma proposta de sequência de ensino organizada, é possível considerar que existe uma preocupação com o conhecimento pedagógico do conteúdo, nomeadamente do conhecimento do conteúdo e do seu ensino.

O facto de Nunes (1887) e Preto (1903) abordarem primeiro o número racional na sua representação na forma de fração, e não na sua representação decimal, também não parece surgir como uma indicação pedagógica explícita. Embora essa fosse uma sequência comum a outras obras de aritmética da época, nestas obras destinadas à formação de professores não surge qualquer discussão sobre essa sequência.

O tratamento dado por Nunes (1887) e Preto (1903) relativamente aos decimais e o destaque que dão ao valor de posição do sistema decimal e à utilização do zero, embora não seja explicitamente indicado pelos autores como dificuldades que os alunos possam apresentar, pode enquadrar-se no conhecimento pedagógico do conteúdo, nomeadamente no conhecimento do conteúdo e dos alunos.

Nas duas obras deste primeiro período, elaboradas para a componente pedagógica do curso, Affreixo e Freire (1891) e Coelho (1906), salienta-se a quase ausência de referências à abordagem ao número racional. A obra de Affreixo e Freire (1891) não tem qualquer referência e a obra de Coelho (1906) apresenta a fração com um exemplo ligado à realidade, como uma parte do todo. Embora a apresentação tenha um caráter pedagógico no sentido de apresentar uma situação que pode ser utilizada com os alunos para introduzir as primeiras noções do conteúdo, não há referências a dificuldades que os alunos possam apresentar nem é discutida uma sequência de ensino para a sua apresentação. É ainda de destacar que nas obras de Coelho (1892, 1906) a representação decimal dos números racionais é construída numa estreita relação com a organização dos números inteiros positivos, não se estabelecendo qualquer relação com as frações decimais.

7.2. Tipos de unidade

Nos tipos de unidade, Nunes (1887) define unidade como a grandeza que serve para medir todas as grandezas da sua espécie. O número é o resultado da medida de uma grandeza, que toma o nome de quantidade. Na questão da unidade, o autor distingue a ação de contar da ação de medir. Para Nunes (1887) na ação de contar, a grandeza é formada por muitas partes distintas e semelhantes, que o autor designa por grandeza descontínua, dando exemplos como um grupo de pessoas ou um monte de livros. No caso das grandezas descontínuas, toma-se como unidade uma das partes que a constituem. São também apresentados alguns exemplos de grandezas contínuas, como as medidas de comprimento.

Nos problemas resolvidos, apresentados por Nunes (1887) no final do capítulo dedicado às frações, destaca-se a utilização de contextos com unidades contínuas como as medidas de comprimento, de capacidade e as medidas de tempo. No exemplo seguinte a unidade utilizada refere-se às medidas de capacidade:

> De uma pipa contendo 210 litros de vinho retiram-se 40 litros que se substituem por água; tiram-se de novo 20 litros da mistura que se substituem ainda por água. Quantos litros de vinho e de água contém a pipa depois desta 2.ª operação? (Nunes, 1887, p. 77)

São também apresentados alguns exemplos em que a unidade utilizada é discreta. Um exemplo é o seguinte:

> Uma camponesa precisa de levar à cidade uma cesta com 125 laranjas; mas sabe que antes de lá chegar deve passar por duas partes: à primeira tomam-lhe $\frac{1}{4}$ do número de laranjas que levar, e à segunda deve dar 1/6 das que lhe restarem. Quantas laranjas deve levar na cesta para satisfazer a estas exigências? (Nunes, 1887, p. 77)

Note-se que o que se pretende no exemplo anterior é que se reconstrua a quantidade inicial.

Preto (1903) apresenta a unidade de uma forma idêntica a que Nunes (1887) utiliza. A grandeza é definida como:

> tudo o que é suscetível de aumentar ou diminuir. Um monte de milho, por ex., é uma grandeza, pois que pode aumentar juntando-se-lhe mais milho e pode diminuir tirando-se-lhe algum do que já tinha. Do mesmo modo, a porção de azeite, que se encontra em uma pia, é também uma grandeza, pois que pode igualmente aumentar ou diminuir. (Preto, 1903, p. 3)

Outros exemplos que o autor apresenta como grandezas são os pesos, os volumes, grupos de homens.

Preto (1903) distingue duas espécies de grandezas, as contínuas e as descontínuas. As grandezas descontínuas são aquelas que aumentam ou diminuem juntando-lhe objetos da mesma espécie, como os livros de uma biblioteca ou as árvores de um pomar. Preto (1903) distingue estas grandezas, das grandezas contínuas, que exemplifica com a porção de azeite, considerando que "a porção de azeite varia de uma forma contínua e insensível, sem passar bruscamente de uma altura a outra. O mesmo acontece aos comprimentos, às áreas, aos volumes, etc." (Preto, 1903, p. 4).

No caso das grandezas contínuas, Preto (1903) considera que a unidade pode ser escolhida arbitrariamente. Para medir um comprimento pode-se tomar um outro comprimento, que pode ser maior ou menor. No caso das grandezas descontínuas, a unidade já não pode ser uma qualquer, sendo necessário indicá-la antecipadamente. Assim, há grandezas que se podem avaliar, contando-as, e outras que para avaliar é necessário medi-las. Preto (1903) define unidade como "uma grandeza, tomada as mais de vezes arbitrariamente, que serve para as grandezas da mesma espécie" (Preto, 1903, p. 5)

Nos exemplos apresentados por Preto (1903) destaca-se a utilização de unidades relacionadas com as medidas de tempo e de capacidade. Num outro exemplo apresentado por Preto (1903), a unidade utilizada é a hora como um conjunto discreto: "Quantas horas são os $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$ de $\frac{4}{5}$ de $\frac{5}{6}$ de 12 horas?" (Preto, 1903, p. 155). É ainda de referir que alguns dos exercícios propostos envolvem a reconstrução da unidade, como na seguinte situação: "A diferença entre os $\frac{3}{4}$ e os $\frac{2}{9}$ de uma herança é 1672$000; qual é o valor da herança?" (Preto, 1903, p. 156).

Na obra de Affreixo e Freire (1891) a unidade é discutida apenas quando é apresentada a definição de número.

> Contando as crianças diferentes objetos a uma e um, aos pares, às mãos, às dúzias, terão no que denomina *um* a unidade, no *total* dos objetos contados a quantidade, e na palavra de *relação* de grandeza, entre o que denominou um e o total, terá o número. (Affreixo & Freire, 1891, p. 223, itálicos no original).

Affreixo e Freire (1891) não aprofundam a abordagem aos números racionais na sua obra, indicando apenas a ordem pela qual a aritmética deveria ser ensinada, onde se inclui o número decimal e a ideia de fração. Por esta razão, não é possível descrever o tratamento dado à unidade no contexto do ensino dos números racionais.

Na obra de Coelho (1892, 1906) este refere-se à unidade quando apresenta a sequência de ensino da numeração. Nos exemplos apresentados no contexto dos números racionais, os primeiros exercícios referem-se a unidades contínuas, em situações em que a fração é vista como a parte de um todo, como por exemplo o encontrar $\frac{1}{5}$ de uma laranja. Não são apresentadas situações em que sejam utilizadas unidades discretas. No caso dos decimais, Coelho (1892) também se refere a unidades compostas, quando trabalha a relação entre as diferentes unidades na representação decimal, como por exemplo as dezenas, centenas, milhares.

7.2.1. Em síntese

No que se refere aos tipos de unidade, nas obras de Nunes (1887) e Preto (1903) é feita uma distinção explícita entre grandezas contínuas, como as medidas de comprimento, e as grandezas discretas, designadas pelos autores como descontínuas, como um conjunto de laranjas, que se podem enquadrar nos diferentes tipos de unidades como são definidos em Monteiro e Pinto (2005). Nas duas obras é estabelecida uma distinção entre o ato de medir, associado às grandezas contínuas, e o ato de contar, associado às grandezas discretas. Existe também nestas obras um cuidado com a explicitação da unidade de referência, parecendo antecipar dificuldades que os alunos possam ter com a unidade de referência (Lamon, 2006; Monteiro & Pinto, 2005). Estes diferentes tipos de unidades são também utilizados nos exemplos de exercícios propostos nas obras dos dois autores. É de salientar que alguns exemplos apresentados em Preto (1903) envolvem a reconstrução da unidade a partir de uma parte.

Ainda nas obras do primeiro período aqui analisado, Affreixo e Freire (1891) e Coelho (1892, 1906) não discutem explicitamente a existência de diferentes tipos de unidades. Em Affreixo e Freire (1891) a questão da unidade só é abordada quando apresentam a definição de número. Na obra de Coelho (1892, 1906) para além de não ser explicitada uma discussão sobre os tipos de unidades, os exemplos apresentados na abordagem às frações referem-se apenas a unidades contínuas. No entanto, quando Coelho (1892) trabalha o sistema de numeração decimal faz referência a unidades compostas, como a dezena que é composta por dez unidades simples.

7.3. Equivalência de frações

No manual de Nunes (1887) a equivalência de frações é trabalhada quando é tratado o efeito de multiplicar ou dividir uma fração por um inteiro. Nunes (1887) começa por enunciar verbalmente o teorema "multiplicando ou dividindo o denominador de uma fração por um número inteiro, a fração torna-se o mesmo número de vezes menor ou maior" (Nunes, 1887, p. 64). A consequência destes dois teoremas é que a fração não muda de valor quando se multiplicam ou dividem os seus dois termos pelo mesmo número. Depois de enunciar esta consequência verbalmente, Nunes (1887) apresenta um exemplo, recorrendo à representação simbólica "com efeito, comparemos as três frações $\frac{4}{9}, \frac{4}{9\,.\,5}, \frac{4\,.\,5}{9\,.\,5}$. A 1.ª é 5 vezes maior do que a 2.ª; mas a 3.ª é também 5 vezes maior do que a 2.ª; logo a 1.ª e a 3.ª são equivalentes, isto é, têm o mesmo valor e diferente forma" (p. 64).

A consequência que Nunes (1887) enuncia anteriormente leva-o à simplificação de frações e à redução à sua forma mais simples, designada por irredutível. O enunciado é apresentado verbalmente por Nunes (1887):

> Simplificar uma fração é substituí-la por uma outra equivalente cujos termos são mais pequenos.
> Para simplificar uma fração, basta dividir os seus dois termos pelo mesmo número. Reduzir uma fração à sua expressão mais simples, é substituí-la por uma outra equivalente cujos termos são os mais pequenos que é possível.
> Uma fração reduzida à sua expressão mais simples diz-se *irredutível.* (p. 64, itálico no original)

Nunes (1887) salienta depois que os dois termos de uma fração irredutível são primos entre si, porque se assim não fosse admitiriam um divisor comum diferente da unidade. Como corolário desta afirmação apresenta verbalmente e depois simbolicamente um procedimento indicando que "para reduzir uma fração à sua expressão mais simples, basta dividir os seus dois termos pelo seu m.d.c. **(86)**. Assim para reduzir $\frac{1312}{896}$ à sua expressão mais simples, dividimos os dois termos pelo seu m.d.c. 32, o que dá $\frac{41}{28}$." (Nunes, 1887, p. 65, negrito no original).

Na equivalência de frações, Preto (1903) começa por fazer a abordagem recorrendo em primeiro lugar à verificação de que, mantendo o denominador, se multiplicarmos, ou dividirmos, o numerador de uma fração por um número qualquer, a fração aparecerá multiplicada ou dividida por esse mesmo número. Em segundo lugar, é destacada a regra pela qual, mantendo o denominador, se multiplicarmos ou dividirmos o denominador por qualquer número, a fração será dividida ou multiplicada, respetivamente, pelo mesmo número. Estas regras são enunciadas verbalmente. Preto (1903) enuncia o corolário: "Uma fração não muda de valor quando se multiplicam ou quando se dividem ambos os seus termos pelo mesmo número. Assim teremos $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}=\frac{6}{9}=\frac{8}{12}=\cdots$ e $\frac{30}{45}=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$" (pp. 136-137).

A segunda parte do capítulo é dedicada à simplificação de frações e à identificação de denominadores comuns. A simplificação de frações é definida como "reduzi-la a uma outra do mesmo valor, porém em termos mais simples. Chama-se fração irredutível aquela que já não pode simplificar-se." (Preto, 1903, p. 137). São ainda apresentadas outras definições como a fração irredutível é aquela que tem os seus termos primos entre si, ou, é possível simplificar a fração quando se puder dividir ambos os termos pelo mesmo número. Para estas definições são apresentados exemplos recorrendo à representação verbal com a correspondente representação simbólica

> Assim, a fração $\frac{108}{144}$ pode simplificar-se, porque (138, 1.º) os seus termos são divisíveis por 2, o que dá $\frac{54}{72}$: esta ainda é suscetível de simplificação, porque também ambos os seus dois termos são divisíveis por 2, e teremos $\frac{27}{36}$: e finalmente, como ambos os termos desta última são divisíveis por 9 (139), resultará a fração $\frac{3}{4}$, que tem o mesmo valor que qualquer das antecedentes.
> Desta maneira teremos
> $\frac{108}{144}=\frac{54}{72}=\frac{27}{36}=\frac{3}{4}$." (p. 138).

São apresentados outros métodos onde faz a redução ao mesmo denominador, com o recurso ao menor múltiplo comum, através da simplificação prévia das frações.

> Para reduzir frações ao menor denominador, reduzem-se em primeiro lugar à sua expressão mais simples (179 e 180). Procure-se depois o menor múltiplo comum dos denominadores, e este será o menor denominador comum procurado: os numeradores formar-se-ão multiplicando cada um dos numeradores das frações propostos pelo quociente que resulta de dividir o menor múltiplo comum pelo denominador respetivo. (p. 141)

É depois apresentado um exemplo onde se pede para comparar frações que não têm o mesmo denominador. Para ultrapassar esta dificuldade, o autor procura as frações equivalentes com o menor denominador comum:

> Assim, sejam dadas as frações irredutíveis
>
> $$\frac{1}{2}\ ,\quad \frac{3}{4}\ ,\quad \frac{5}{8}\ ,\quad \frac{2}{3}\ ,\quad \frac{5}{24}$$
>
> É fácil de ver que o denominador 24 da última fração é divisível por 2, 4, 8 e 3, denominadores das outras, e por si mesmo; logo é este o menor múltiplo comum e, por consequência, o *menor denominador comum*. Resta achar os numeradores: para isto dividiremos 24 por 2, 4, 8, 3 e 24, que dá os quocientes 12, 6, 3, 8 e 1: multiplicando respetivamente cada um

dos numeradores das frações dadas por estes quocientes, teremos os numeradores pedidos. Desta maneira, as frações propostas seriam equivalentes, respetivamente a

$$\frac{1 \text{ x } 12}{24}, \quad \frac{3 \text{ x } 6}{24}, \quad \frac{5 \text{ x } 3}{24}, \quad \frac{2 \text{ x } 8}{24}, \quad \frac{5 \text{ x } 1}{24}$$

ou

$$\frac{12}{24}, \quad \frac{18}{24}, \quad \frac{15}{24}, \quad \frac{16}{24}, \quad \frac{5}{24}.$$

(Preto, 1903, p. 141, itálicos no original)

Nos dois manuais deste período dedicados à componente pedagógica, apenas a obra de Coelho (1892, 1906) aborda a equivalência de frações. Coelho (1892) aborda a equivalência de frações na sequência do trabalho que envolve a análise das modificações que a fração sofre quando se multiplica ou divide qualquer dos termos por um número[172].

Se a fração é, por exemplo $\frac{4}{12}$, bastará tomar um objeto dividido em 12 partes iguais, e, por meio dele, evidenciar as modificações em questão. Assim, mostrar-se-á que, sendo o numerador multiplicado, por exemplo, por 3, a fração ficará três vezes maior, pois que se tomarão 3 vezes mais partes do objeto dividido sempre em 12 partes iguais; que sendo o denominador dividido por 2, ficará a fração duas vezes menor, porque as partes do objeto, ficando a ser apenas em número de 6, serão duplamente maiores do que as anteriores; e assim sucessivamente (pp. 218-219).

Coelho (1892) continua a apresentar o trabalho a efetuar com os alunos no ensino das frações, com a equivalência de frações, o que designa por "mostrar que a fração não se altera quando os seus termos se multiplicam pelo mesmo número" (p. 219). Para Coelho (1892) bastará trabalhar esta equivalência a partir do que os alunos já sabem sobre a multiplicação de frações. Na sequência do trabalho com as frações, Coelho (1892) trata da "redução de frações ao mesmo denominador", referindo que se deve abordar como uma consequência do princípio anterior.

O manual de Coelho (1892) não reflete sobre possíveis dificuldades que os alunos possam ter neste tópico, nem recomenda a utilização de materiais ou diferentes representações que evidenciem a equivalência de frações.

7.3.1. Em síntese

No que diz respeito aos manuais do primeiro período, as obras de Nunes (1887) e Preto (1903) abordam a equivalência de frações quando se estuda o efeito de multiplicar ou dividir o numerador e o denominador de uma fração por um número inteiro. Nestes dois manuais, a

[172] Na citação, Coelho (1892) refere, talvez por lapso, que a fração fica duas vezes menor quando se divide o denominador por 2.

equivalência de frações é também trabalhada em conjunto com a simplificação de frações e com a identificação de denominadores comuns, nomeadamente com a identificação do menor múltiplo comum. Na abordagem apresentada por qualquer um destes autores, as regras são enunciadas verbalmente a partir da observação de diferentes exemplos e só depois apresentadas simbolicamente. A regra é baseada em exemplos e não existe uma generalização com uma definição formal como em Santos (2014). Nestes manuais também não existe um trabalho com diferentes representações, como pictóricas ou ativas, que possam apoiar o trabalho com os exemplos de frações equivalentes ou que tornem evidentes as diferentes partições da mesma unidade e a conservação do todo (Kammi & Clark, 1995; Lamon, 2002).

No que diz respeito aos outros dois manuais deste primeiro período, apenas o trabalho de Coelho (1892) refere a equivalência de frações quando analisa o que acontece às frações quando se multiplica ou divide o numerador e o denominador pelo mesmo número inteiro. Esta equivalência é apresentada verbalmente através de um exemplo. Não existe recurso a outras representações, nem pictóricas nem simbólicas, na abordagem a esta equivalência, existindo, no entanto, uma indicação para que sejam utilizados materiais ou outras representações.

7.4. Comparação e ordenação de racionais

Na comparação e ordenação de números racionais, Nunes (1887) começa por salientar algumas particularidades na comparação de frações, usando a unidade como referência, indicando que a fração pode ser inferior, igual ou superior à unidade, conforme o numerador é menor, igual ou maior do que o denominador. Em segundo lugar destaca que entre frações com o mesmo denominador, é maior a que tiver maior numerador. Em terceiro e último salienta que entre frações com o mesmo numerador, é maior a que tiver menor denominador.

Nunes (1887) também utiliza o valor que excede a unidade numa fração, ou o valor que falta para completar uma fração, após adicionar o mesmo número aos dois termos da fração, para comparar e ordenar frações. Nunes (1887) indica que, se a fração for menor do que a unidade, esta aumenta quando se adiciona a mesma o mesmo número aos dois termos e se a fração for maior do que a unidade, o seu valor diminui após adicionar o mesmo número aos dois termos.

> 1.º Seja $\frac{5}{12}$, por exemplo. Juntando 3 aos seus dois termos, torna-se $\frac{8}{15}$. Ora, $1-\frac{5}{12}=\frac{7}{12}$, e $1-\frac{8}{15}=\frac{7}{15}$; mas $\frac{7}{12}$ é maior que $\frac{7}{15}$ (n.º 106, 3.º), logo $\frac{5}{12}<\frac{8}{15}$.
> 2.º Seja $\frac{15}{11}$, por exemplo. Juntando 4 aos seus dois termos, torna-se $\frac{19}{15}$. Ora, $\frac{15}{11}=1+\frac{4}{11}$, e $\frac{19}{15}=1+\frac{4}{15}$; mas $\frac{4}{11}$ é maior que $\frac{4}{15}$, logo $\frac{15}{11}>\frac{19}{15}$. (Nunes, 1887, p. 63).

No que diz respeito à comparação de números racionais na sua representação decimal, Nunes (1887) utiliza a relação desta representação com as frações decimais para fazer a comparação da ordem de grandeza dos números. Em relação a multiplicar o número 3,141592 por 100, Nunes (1887) refere que "*com efeito*, o número torna-se 314,1592. Vê-se que cada algarismo representa unidades 100 vezes maiores que as do número dado; o 2.º número é, pois, 100 vezes maior que o 1.º." (Nunes, 1887, p. 83, itálicos no original). Este exemplo também é apresentado na forma de fração ordinária, fazendo-se a comparação e verificando-se que o segundo número é cem vezes maior "o número proposto vale $\frac{3141592}{10^6}$, e o 2.º número vale $\frac{3141592}{10^4}$ ou $\frac{3141592 \text{ x } 100}{10^6}$, e vê-se que a 2.ª fração é 100 vezes maior que a 1.ª." (Nunes, 1887, p. 82)

No caso de Preto (1903), este começa por comparar frações tomando a unidade como referência e apresentando a forma de identificar as frações que são maiores, iguais ou menores do que a unidade. Após o trabalho com a equivalência de frações, Preto (1903) trata da forma de comparar frações com o mesmo denominador, porque estas estão todas referidas ao que é designado por mesma unidade auxiliar, sendo suficiente comparar o numerador. A procura de frações equivalentes com o mesmo denominador é indicada como forma de comparar frações, pela facilidade em comparar estas frações.

No caso das frações apresentadas não serem irredutíveis, e o menor múltiplo comum não ser o produto de todos os denominadores, o método para comparar e ordenar passava por começar por procurar frações equivalentes às que não eram apresentadas na forma irredutível e, de seguida, procurar o menor múltiplo comum dos denominadores através da decomposição com fatores primos, como no exemplo:

$$\frac{2}{4}\ ,\ \frac{7}{8}\ ,\ \frac{20}{48}\ ,\ \frac{5}{18}\ ,\ \frac{7}{24}\ \ e\ \ \frac{17}{36}.$$

> A primeira e a terceira destas frações não são irredutíveis, porque os dois termos da primeira são divisíveis por 2 e os da terceira por 4; reduzindo-se pois à mais simples expressão, em lugar das frações propostas, teremos
>
> $$\frac{1}{2}\ ,\quad \frac{7}{8}\ ,\quad \frac{5}{12}\ ,\quad \frac{5}{18}\ ,\quad \frac{7}{24}\ \ e\ \ \frac{17}{36}$$
>
> Feito isto, procure-se o menor múltiplo comum dos denominadores (163), para o que suprimiremos 2, 12 e 18, que se contêm em 36, e 8 que se contém em 24; respetivamente pois 24 e 36, que, decompostos nos seus fatores primos, dão (151)
>
> $$24 = 2^3 \text{ x } 3\ , 36 = 2^2 \text{ x } 3^2$$
>
> e, por isso, o menor múltiplo comum e, por consequência, o menor denominador comum será
>
> $$2^3 \text{ x } 3^2 = 72;$$
>
> e como este número, dividido pelos denominadores 2, 8, 12, 18, 24 e 36, dá respetivamente os quocientes 36, 9, 6, 4, 3 e 2, as frações, equivalentes às propostas e reduzidas ao menor denominador comum, serão $\frac{36}{72}\ ,\ \frac{63}{72}\ ,\ \frac{30}{72}\ ,\ \frac{20}{72}\ ,\ \frac{21}{72}\ ,\ \frac{34}{72}$. (Preto, 1903, pp. 142-143)

No final do capítulo dedicado às operações com frações, Preto (1903) propõe um conjunto de 16 exercícios onde se incluem exercícios de comparação e ordenação de frações.

Preto (1903) não especifica uma forma de comparar e ordenar números racionais na sua representação decimal, indicando implicitamente que esta comparação é feita como consequência do sistema de valor de posição, utilizado na representação decimal.

No caso de Affreixo e Freire (1891), o manual não faz qualquer referência à forma de comparar e ordenar números racionais.

No trabalho de Coelho (1892, 1906) as referências à comparação e ordenação de números racionais surgem apenas na obra editada em 1892, que aprofunda as questões do ensino da aritmética. Nesta obra, a primeira referência à comparação e ordenação de números racionais é discutida com a comparação de frações, utilizando a unidade como referência. Coelho (1892) indica como identificar se a fração é maior, menor ou igual à unidade, comparando o numerador com o denominador. Coelho (1892) volta a trabalhar a comparação de frações, quando aborda a equivalência de frações.

7.4.1. Em síntese

No que diz respeito aos manuais do primeiro período, existe uma abordagem diferenciada entre os manuais da componente das ciências de especialidade e formação geral e os manuais da componente pedagógica. Os manuais de Nunes (1887) e de Preto (1903) começam por trabalhar a comparação e ordenação de números racionais salientando particularidades na comparação de frações. No caso de Nunes (1887) este começa por destacar a unidade como referência para comparar frações, dando indicações para verificar se uma determinada fração representa um número inferior, igual ou superior à unidade. Existe na obra de Nunes (1887) uma preocupação em apresentar uma sequência de ensino na comparação de frações que começa com a comparação de frações com o mesmo denominador e depois frações com o mesmo numerador. Nunes (1887) apresenta também um procedimento para comparar frações que passa por utilizar a unidade como referência, verificando-se o que falta a uma determinada fração para completar a unidade ou em quanto excede uma determinada fração a unidade. A comparação de números racionais na sua representação decimal é trabalhada por Nunes (1887) a partir do trabalho com as frações decimais e, depois, com a análise do efeito de multiplicar ou dividir um decimal por 10, 100 ou 100. Na comparação e ordenação de números racionais, o trabalho de Nunes (1887) evidencia uma preocupação com o conhecimento do conteúdo e do seu ensino.

Preto (1903) começa o trabalho com este aspeto da mesma forma que a proposta apresentada por Nunes (1887), comparando frações utilizando a unidade como referência e depois procurando uma sequência em que se compara primeiro as frações com o mesmo denominador e depois as frações com o mesmo numerador. No entanto, a proposta de Preto (1903) para comparar e ordenar frações centra-se depois na procura de frações equivalentes com o mesmo denominador, no que difere de Nunes (1887). Preto (1903) também não estabelece uma relação explícita entre a comparação de frações decimais e a comparação de número racionais na representação decimal, deixando implícito que esta comparação é feita como consequência do sistema de valor de posição.

No caso dos manuais da componente pedagógica, Affreixo e Freire (1891) não apresentam qualquer referência à comparação e ordenação de frações. Coelho faz apenas referência a este aspeto na sua obra de 1892, centrando-se na comparação de frações utilizando a unidade como referência. A comparação de frações é também abordada nesta obra recorrendo ao conhecimento sobre frações equivalentes.

7.5. Operações com números racionais

7.5.1. Frações

No caso de Nunes (1887), este autor começa por apresentar as regras das operações com números racionais na representação na forma de fração. Na apresentação dos procedimentos das operações com frações, Nunes (1887) utiliza essencialmente situações matemáticas estritamente numéricas, onde recorre muitas vezes à representação verbal ou à representação simbólica. A regra do procedimento é normalmente enunciada recorrendo à representação verbal. Um exemplo é a forma como Nunes (1887) apresenta a adição de frações com denominadores diferentes, recorrendo à representação verbal e depois à representação simbólica:

> Se as frações não têm o mesmo denominador, reduzem-se primeiro ao mesmo denominador, depois opera-se como dissemos.
> Assim, a soma das frações $\frac{3}{8}, \frac{4}{11}, \frac{7}{16}, \frac{13}{22}$, depois de reduzidas ao seu denominador comum 176, é $\frac{311}{176}$ ou $1 + \frac{135}{176}$. (Nunes, 1887, p. 68)

No caso da multiplicação, o autor estabelece uma analogia entre a multiplicação com frações e a multiplicação com inteiros, afirmando que multiplicar dois números é encontrar um terceiro a que se dá o nome de produto, identificando três casos. No primeiro caso a multiplicação de uma fração por um inteiro, no segundo caso a multiplicação de um inteiro por uma fração e no terceiro caso a multiplicação de uma fração por uma fração. Estabelece depois o procedimento a utilizar nos diferentes casos, recorrendo à representação verbal para enunciar a regra e à representação simbólica, como no exemplo:

> para multiplicar um inteiro por uma fração, multiplica-se o inteiro pelo numerador e dá-se ao produto o denominador da fração. Podemos também dividir o inteiro pelo denominador da fração, quando isto seja possível, e depois multiplicar o quociente pelo numerador. Assim: $20 \text{ x} \frac{3}{4} = \frac{20}{4} \text{ x } 3 = 15$. (Nunes, 1887, p. 70)

No que diz respeito à divisão, Nunes (1887) distingue dois casos, a divisão de uma fração por um número inteiro positivo e a divisão de um número inteiro positivo, ou de uma fração, por uma fração. No que diz respeito ao primeiro caso, Nunes (1887) apresenta dois procedimentos possíveis, que equivalem a tornar a fração tantas vezes menor conforme o número pelo qual se divide a fração. No primeiro procedimento, multiplica-se o denominador pelo número pelo qual se está a dividir a fração, sem mexer no numerador. No segundo procedimento, divide-se o numerador pelo número pelo qual se vai dividir a fração, só se aplicando nos casos em que isto é possível. No segundo caso apresentado para a divisão, a situação implica a divisão de um qualquer número inteiro ou fração, por uma fração. O procedimento apresentado por Nunes (1887) realça a relação inversa entre a divisão e a multiplicação.

> Seja a dividir o número N (inteiro ou fracionário) por $\frac{4}{7}$. Como o quociente desconhecido, multiplicado pelo divisor, deve dar o dividendo, os $\frac{4}{7}$ do quociente valem N; um sétimo deste quociente valerá evidentemente 4 vezes menos, isto é $\frac{\text{N}}{4}$, e todo o quociente valerá 7 vezes $\frac{\text{N}}{4}$, isto é $\frac{\text{N x 7}}{4}$.
>
> Obteríamos este resultado multiplicando N por $\frac{7}{4}$. (Nunes, 1887, p. 73)

No final deste exemplo, Nunes (1887) enuncia a regra para dividir um número por uma fração “multiplica-se o número pela fração divisor invertida”, apresentando um exemplo “$\frac{3}{7} : \frac{4}{11} = \frac{3}{7} \text{ x } \frac{11}{4}$” (Nunes, 1887, p. 74). Nunes (1887) adverte para a situação em que o divisor é um número inteiro, lembrando que neste caso o denominador é 1, podendo aplicar-se a regra do segundo caso.

No final do capítulo dedicado às operações com frações, Nunes (1887) apresenta um ponto intitulado problemas, que contém oito problemas com a respetiva solução. São problemas que implicam a utilização das operações com frações. São essencialmente problemas de cálculo que se resolvem com a utilização de uma ou mais operações aritméticas, podendo alguns problemas enquadrar-se nos problemas de processo, já que poderão envolver mais do que uma estratégia de resolução. São problemas com diferentes contextos, mas onde se destaca o contexto das medidas, como o dinheiro, as medidas de comprimento ou de capacidade. Um dos problemas envolve a percentagem. Destacam-se as situações que envolvem a multiplicação de frações em que a fração é utilizada como um operador partitivo.

Relativamente às operações com números racionais, Preto (1903) aborda primeiro as operações com a representação na forma de fração. As operações e os seus procedimentos são apresentados com situações matemáticas estritamente numéricas, recorrendo à representação simbólica e à representação verbal, como no exemplo da adição de frações com denominadores diferentes: “reduzem-se primeiro ao mesmo denominador, e depois pratica-se a regra antecedente. Assim, para achar a soma das frações $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}$ e $\frac{5}{7}$ teremos, reduzindo-as ao mesmo denominador, $\frac{56}{84} + \frac{63}{84} + \frac{60}{84} = \frac{56+63+60}{84} = \frac{179}{84} = 2\frac{11}{84}$.” (Preto, 1903, p. 144).

Na adição, Preto (1903) considera-a no sentido de juntar. Na subtração considera dois sentidos, o sentido de tirar, como operação inversa do juntar da adição, e o sentido de completar, na “qual sendo dada uma fração, soma de outras duas, e uma das parcelas, se pede a outra parcela” (Preto, 1903, p. 146).

A multiplicação e a divisão de frações também são apresentadas com recurso a situações matemáticas estritamente numéricas, enunciando-se a regra verbalmente e depois apresentando um exemplo na sua representação simbólica: “Para multiplicar um quebrado por um inteiro, multiplica-se o numerador do quebrado pelo inteiro. Assim, teremos $\frac{7}{11} \text{x } 3 = \frac{7 \text{ x } 3}{11} = \frac{21}{11} = 1\frac{10}{11}$.” (Preto, 1903, p. 148). Na multiplicação de duas frações, a regra indicada é multiplicar-se os numeradores entre si e os denominadores entre si, sendo o segundo produto o denominador da fração que resulta da multiplicação. Para esta regra é apresentada uma justificação:

> Com efeito, vimos que o produto se forma do multiplicando como o multiplicador se forma da unidade (190); ora, forma-se o multiplicador $\frac{3}{4}$, dividindo a unidade em 4 partes iguais e tomando 3 dessas partes; logo: o produto forma-se do multiplicando, dividindo-o em quatro partes iguais e tomando 3 dessas partes.
> Ora uma das 4 partes do multiplicando $\frac{5}{7}$ é $\frac{5}{7 \text{ x } 4}$ (173, 2.º); e 3 vezes este resultado é evidentemente (173, 1.º): $\frac{5 \text{ x } 3}{7 \text{ x } 4}$ logo este resultado $\frac{5 \text{ x } 3}{7 \text{ x } 4}$ é o produto das frações propostas. (Preto, 1903, p. 149)

O autor chama ainda a atenção para consequência da multiplicação quando o multiplicador é uma fração própria:

> Todas as vezes que o multiplicador for uma fração própria, o produto há de ser mais pequeno que o multiplicando, visto ser uma fração do multiplicando; daqui provém que ao produto de duas frações se chama algumas vezes fração de fração, e ao produto de muitas frações, fração de frações. (Preto, 1903, p. 150)

No que diz respeito à divisão, Preto (1903) define primeiro a operação verbalmente e depois recorre à representação simbólica para exemplificar. Esta operação é definida como “a operação que tem por fim, sendo dado o produto de duas frações - dividendo – e uma delas –

divisor -, achar a outra – quociente.” (Preto, 1903, p. 150). A definição indica a divisão como operação inversa da multiplicação, sendo apresentado o exemplo de dividir $\frac{3}{5}$ por 4, em que o que se pretende é encontrar um número que multiplicado por 4 dê o produto $\frac{3}{5}$. Desta forma, o quociente procurado é 4 vezes menor que $\frac{3}{5}$ e como consequência igual a $\frac{3}{5 \text{ x } 4}$, sendo $\frac{3}{5} : 4 = \frac{3}{5 \text{ x } 4}$. Preto (1903) enuncia assim a seguinte regra “para dividir uma fração por um inteiro, multiplica-se o denominador da fração pelo inteiro e conserva-se o numerador.” (p. 151).

Na divisão de uma fração por uma fração, a regra indicada é “invertem-se os termos à que serve de divisor e pratica-se a regra da multiplicação” (p. 152). A explicação apresentada remete mais uma vez para a divisão como operação inversa da multiplicação. É ainda apresentado o caso particular em que os dois termos da fração dividendo são múltiplos dos dois termos da fração divisor, podendo-se, neste caso, efetuar a divisão dividindo os numeradores entre si e os denominadores entre si. O capítulo sobre as operações com frações termina com um conjunto de exercícios, a maioria dos quais com situações estritamente matemáticas. São ainda apresentados alguns exemplos relacionados com as medidas de tempo ou com dinheiro.

No manual de Affreixo e Freire (1891) não são abordadas as operações com números racionais.

O manual de Coelho (1906) também não explicita procedimentos para trabalhar as operações com números racionais. Recorrendo à obra de Coelho (1892) é possível verificar que este autor começa por abordar as operações com frações. Primeiro apresenta exemplos matemáticos estritamente numéricos para a adição e subtração de frações com o mesmo denominador, explicitando a regra verbalmente. Para as operações com denominadores diferentes o procedimento só é trabalhado após ser abordada a equivalência de frações.

Na multiplicação de frações, Coelho (1892) distingue duas situações, a multiplicação de uma fração por um número inteiro e a multiplicação de uma fração por outra fração. Nas duas situações as regras são apresentadas verbalmente e exemplificadas com recurso à representação simbólica.

> a) Apresente-se, primeiramente, o caso de uma fração a multiplicar por um número inteiro; seja, por exemplo, $\frac{7}{5}$ x 4. É claro que, neste caso, para tornar a fração 4 vezes maior, bastará multiplicar o numerador por 4; (Coelho, 1892, p. 219)

Coelho (1892) adverte que a apresentação abstrata deve ser combinada com a apresentação com objetos, para que a regra se evidencie com essa relação.

No que respeita à divisão de frações, Coelho (1892) destaca três casos, a divisão de uma fração por um número inteiro, a divisão de uma fração por uma fração e a regra para a verificação do resultado da divisão de frações. Os procedimentos para os diferentes casos são apresentados verbalmente e exemplificados simbolicamente. As situações escolhidas por Coelho (1892) são matemáticas estritamente numéricas.

7.5.2. Decimais

Nas operações com decimais, Nunes (1887) recorre à relação entre a representação decimal e a representação na forma de fração decimal quando apresenta os procedimentos para as operações na forma decimal, particularmente na multiplicação e na divisão. Um exemplo apresentado é a multiplicação 13,742 x 0,17, onde Nunes (1887) estabelece uma relação com a sua representação em fração $\frac{13742}{10^3}$ e $\frac{17}{10^2}$, cujo produto é $\frac{13742 \text{ x } 17}{10^5}$.

Na adição e subtração com decimais estabelece muitas vezes as regras das operações usando a relação com as operações entre números inteiros não negativos e com o sistema decimal.

Em relação às operações com decimais, Preto (1903) apresenta verbalmente os procedimentos para a adição e subtração, realçando as semelhanças com os procedimentos utilizados com os números inteiros. Depois da exposição verbal são apresentados exemplos recorrendo à representação simbólica, sendo o algoritmo o procedimento utilizado. O procedimento da multiplicação com decimais é explicado com recurso às regras da multiplicação com frações decimais. Após a explicação verbal são apresentados exemplos simbolicamente com a utilização do algoritmo. Na divisão também é apresentado o algoritmo, sendo a regra explicitada verbalmente.

No manual de Affreixo e Freire (1891) não são abordadas as operações com decimais.

No que diz respeito aos decimais, Coelho (1892, 1906) apenas refere que as operações com estes números são de uma forma geral extremamente simples e de fácil apresentação aos alunos, não tratando, por isso, de quaisquer casos em particular[173].

7.5.3. Em síntese

No que diz respeito aos manuais analisados no primeiro período, tanto os manuais da componente das ciências da especialidade e formação geral, como o manual da componente pedagógica que aborda as operações com números racionais, começam por centrar o trabalho nas operações com frações. Os manuais de Nunes (1887) e de Preto (1903) fazem a apresentação das operações com frações de uma forma semelhante. De uma maneira geral, a regra do procedimento é enunciada recorrendo à representação verbal. Depois são apresentados diversos exemplos onde

[173] Relembra-se aqui que, tal como acontece na obra Noções de Pedagogia Elementar (1906), nesta obra dos Princípios de Pedagogia (1892), o autor volta a apresentar o jogo para a organização do sistema decimal, onde refere a forma de representar os números racionais em numeral decimal, o que já foi discutido anteriormente neste trabalho.

já há o recurso à representação simbólica. Os procedimentos são normalmente justificados, mas nem sempre isso acontece, nomeadamente na divisão de frações. Para apresentar os diferentes casos das operações, os autores recorrem a situações matemáticas estritamente numéricas, sem qualquer contexto. No final do capítulo dedicado às operações com frações, no manual de Nunes (1887) é apresentado um conjunto de problemas e no manual de Preto (1903) é apresentado um conjunto de exercícios em que prevalecem as situações matemáticas estritamente numéricas, mas onde também são apresentadas situações com problemas de cálculo que envolvem uma ou mais operações, com contextos como as medidas de tempo, as medidas de capacidade ou a atividade comercial. No que diz respeito aos problemas apresentados por Nunes (1887) destacam-se as situações que envolvem a multiplicação de frações em que a fração é utilizada como um operador partitivo multiplicativo (Taber, 2002). Apesar de poucos exercícios apresentados por Preto (1903) apresentarem contextos, nas definições apresentadas por este é possível identificar diferentes sentidos para as operações. No caso da adição, Preto (1903) apresenta-a no sentido de juntar, na subtração Preto (1903) considera dois sentidos, o retirar, como operação inversa do juntar, e o sentido completar (Vale & Pimentel, 2004). A definição da divisão apresentada por Preto (1903) remete para a divisão como operação inversa da multiplicação (Pinto & Monteiro, 2008).

Nos manuais do primeiro período, apenas os da componente da especialidade e formação geral apresentam uma abordagem relativamente às operações com os números racionais na sua representação decimal. Tanto Nunes (1887) como Preto (1903) recorrem predominantemente às operações com frações decimais para justificar os procedimentos da multiplicação e da divisão na sua representação decimal. Já no que diz respeito à adição e subtração, começam por apresentar verbalmente as regras para os procedimentos, realçando as semelhanças com os procedimentos utilizados com os números inteiros.

7.6. Caracterização das representações

Os manuais analisados neste período apresentam características diferentes, pelo que a utilização das representações também difere.

Na primeira abordagem aos números racionais e na apresentação dos procedimentos das operações com frações, Nunes (1887) privilegia a representação verbal, estabelecendo posteriormente uma relação com a representação simbólica. Destaca-se a leitura da fração e a designação atribuída aos seus termos.

> Dividindo a *unidade* em um certo número de partes iguais e tomando uma ou muitas das partes formadas, temos uma **fração**. Por exemplo, dividindo uma laranja em 4 partes iguais e tomando três destas partes, temos os *três quartos* da laranja.

> O número *3 quartos* é uma fração. Já vimos que se obtém uma fração medindo uma grandeza menor do que a sua unidade.
> Uma fração é representada por meio de dois números: o *denominador*, que indica em quantas partes iguais a unidade foi dividida, e o *numerador*, que indica quantas partes se tomam.
> O numerador e o denominador chamam-se os *termos* da fração. Para escrever uma fração, escreve-se primeiro o numerador, e a baixo o denominador, separando os dois números por um traço horizontal. Assim, a fração *três quartos* escreve-se $\frac{3}{4}$. (Nunes, 1887, p. 61, negrito aumentado e itálicos no original).

Este autor também estabelece uma relação entre diferentes representações simbólicas, como por exemplo entre as frações decimais e a sua representação na forma de numeral decimal.

> O número 7,35 valendo 735 centésimas, podemos escrevê-lo debaixo da forma $\frac{735}{100}$. Do mesmo que 0,028 pode tomar a forma $\frac{28}{1000}$. Regra. - Para escrever um número decimal debaixo da forma de fração ordinária, suprime-se a vírgula, e dá-se para denominador, ao inteiro obtido, a unidade seguida de tantos zeros quantos algarismos decimais havia no número dado.”. (Nunes, 1887, p. 81)

Na descrição que faz inicialmente para apresentar a representação decimal dos racionais, o autor utiliza a representação verbal e só depois a representação simbólica, dando ênfase à forma de fazer a leitura dos números.

> escrever cinquenta e duas unidades trezentas e vinte milésimas. Escreveremos primeiro 52 para a parte inteira, depois uma vírgula; depois a parte decimal 327, de maneira que o último algarismo 7 fique na casa das milésimas, isto é, na 3.ª casa à direita da vírgula. O número escrito é pois 52,327. (Nunes, 1887, p. 80).

É de referir que o autor não utiliza as designações que atualmente são mais comuns para designar as frações. Um exemplo é a designação que utiliza para se referir às frações impróprias, que designa por expressão fracionária, ou a expressão que usa para designar o numeral misto, que designa por número fracionário.

Este autor não utiliza as representações pictóricas, nem faz alusão à utilização de representações ativas.

Preto (1903), numa obra igualmente utilizada nas disciplinas da componente das ciências da especialidade e formação geral, também privilegia na abordagem inicial aos números racionais a relação entre a representação verbal e a representação simbólica através da fração.

> Escreve-se uma fração, colocando os dois números, *numerador* e *denominador*, separados por uma linha horizontal, o primeiro por cima da linha e o segundo por baixo. Assim, para representar a fração que provém de dividir a unidade em 8 partes iguais (*denominador*) e destas tomar 3 (*numerador*), escreveremos $\frac{3}{8}$. (Preto, 1903, p. 131, itálicos no original).

Preto (1903) destaca igualmente a forma de leitura das frações, desde os meios até aos décimos, e a leitura das frações em que denominador é maior que 10, estabelecendo a relação entre a representação simbólica e a representação verbal escrita "Assim $\frac{3}{5}$, lê-se *três quintos*; $\frac{11}{17}$, lê-se *onze dezassete avos*." Preto (1903, p. 131, itálicos no original). Destaca ainda a forma de leitura quando um, ou os dois termos da fração, exprimem operações "Assim, $\frac{a}{b}, \frac{9+7}{4}, \frac{9-4}{6 \text{ x } 7}$ leem-se *a sobre b*, 9 + 7 *sobre* 4, 9 – 4 *sobre* 6 x 7." Preto (1903, p. 132, itálicos no original). Esta relação entre a representação verbal e a simbólica é utilizada por Preto (1903) noutras situações, como nas operações com frações.

A relação entre diferentes representações simbólicas do número racional, como a fração e a representação decimal, também é assinalada por Preto (1903), que indica a forma de converter uma representação na outra, utilizando a representação verbal para descrever essa conversão "1.ª Para converter um número decimal em fração ordinária, basta suprimir a vírgula; escrever o resultado em numerador; e pôr em denominador a unidade seguida de tantos zeros quantos são os algarismos decimais" (p. 161). Preto (1903) também enuncia o recíproco, salientando que "2.ª Para converter uma fração ordinária, que tenha por denominador a unidade seguida de qualquer número de zeros, em fração decimal, basta escrever o numerador, e separar nele tantos algarismos para dízima quantos os zeros do divisor." (p. 161). Os vários exemplos apresentados recorrem à representação simbólica, "0,345 convertido em fração ordinária dá $\frac{345}{1000}$." (p. 161).

Esta relação entre a representação na forma de fração e a representação decimal é também explorada por Preto (1903) para introduzir as regras das operações na representação decimal.

> Para multiplicar dois números decimais, multiplicam-se como se fossem inteiros; e, no produto, separam-se tantos algarismos para dízima, quantos os algarismos da dízima dos dois fatores.
> Assim teremos

			3,	2	6	5
			4,	3	7	
		2	2	8	5	5
		9	7	9	5	
1	3	0	6	0		
1	4,	2	6	8	0	5

> Com efeito, convertendo em frações ordinárias os números decimais dados (209, 1.º), temos

$$3{,}265 \text{ x } 4{,}37 = \frac{3265}{1000} \text{ x} \frac{437}{100};$$

> e, como é (193)

$$\frac{3265}{1000} \text{ x} \frac{437}{100} = \frac{3265 \, x \, 437}{100000} = 1426805 \, ,$$

segue-se que (211, 2.º)

$$3{,}265 \times 4{,}37 = 14{,}26805.$$ (Preto, 1903, p. 164)

Na obra de Preto (1903) não são utilizadas representações pictóricas, nem é referida a utilização de representações ativas, na exploração deste conteúdo.

As outras duas obras trabalhadas neste período centram-se na componente pedagógica do curso de formação de professores do ensino primário. Nenhuma destas duas obras desenvolve uma abordagem significativa para o ensino dos números racionais, sendo difícil analisar as representações utilizadas. A obra de Affreixo e Freire (1891) não apresenta qualquer representação do número racional, indicando apenas que a ideia de fração e o número decimal devem constar no ensino da aritmética.

A obra de Coelho (1906) remete para a sua obra *Princípios de Pedagogia*, de 1892, razão pela qual se apresenta aqui uma análise das duas obras relativamente às representações utilizadas para abordar os números racionais. Nestas obras de Coelho (1892, 1906) o ensino deste conteúdo é tratado em conjunto com o ensino da aritmética seguindo a mesma sequência do trabalho realizado com números inteiros, primeiro a concretização com objetos, seguida da passagem para a representação verbal e depois para a representação simbólica através de algarismos, mas ainda relacionados com unidades concretas e, finalmente, as relações numéricas abstratas.

A fração começa por ser trabalhada com representações ativas, através da manipulação de objetos, para depois passar para a representação verbal e logo depois a sua correspondente representação simbólica. Para apresentar aos alunos este conjunto numérico Coelho (1906) propõe o seguinte procedimento:

> Assim, suponha-se que se pretende, por exemplo, por diante dos olhos do aluno o que seja a relação numérica *um quinto* ou seja a fração expressa pelo seguinte símbolo: $\frac{1}{5}$; para o conseguir, bastará mostrar ao aluno, por exemplo, uma laranja dividida em cinco partes iguais: tomando uma de essas partes, ter-se-á $\frac{1}{5}$ da unidade total. (p. 99, itálicos no original)

Apesar de Coelho (1892) utilizar representações pictóricas, com imagens para a exploração de outros conteúdos na mesma obra, na exploração das frações não existe o recurso a imagens.

7.6.1. Em síntese

No que se refere à utilização das representações dos números racionais, é de assinalar que nos manuais do primeiro período se pode fazer a distinção já indicada anteriormente entre os manuais da componente das ciências de especialidade e formação geral e os manuais da componente pedagógica. Nos manuais de Nunes (1887) e Preto (1903) é privilegiada uma primeira abordagem através da representação verbal da fração, com a leitura e escrita de frações e o conhecimento da designação dos seus termos, estabelecendo-se posteriormente uma relação com a representação simbólica na forma de fração. Nestas duas obras privilegia-se também a relação entre as representações simbólicas, fração e numeral decimal, nomeadamente para introduzir e justificar os procedimentos das operações com números racionais na sua representação decimal. No que diz respeito à representação verbal e a sua relação com diferentes formas de representação simbólica dos números racionais, é de destacar que um destes autores, Nunes (1887), não utiliza as designações que atualmente são mais comuns, como por exemplo, a fração imprópria é designada por expressão fracionária e o numeral misto é designado por número fracionário. Nunes (1887) e Preto (1903) não utilizam representações pictóricas nem fazem alusão a representações ativas no desenvolvimento do trabalho com os números racionais.

Como se referiu anteriormente, as duas obras do primeiro período que se centram na componente pedagógica não aprofundam o trabalho a realizar no ensino dos números racionais. No caso de Affreixo e Freire (1891), a obra não apresenta qualquer representação do número racional, referindo apenas verbalmente que a ideia de fração e o número decimal devem constar no ensino da aritmética. Nas obras de Coelho (1892, 1906) aqui analisadas é de destacar que este segue nos números racionais uma sequência idêntica à que refere para o trabalho com os números inteiros, propondo que se inicie o trabalho com as frações através de representações ativas, com a manipulação de objetos, seguida da passagem para a utilização da representação verbal e a correspondente representação simbólica, na forma de fração. Nesta obra não há qualquer utilização da representação pictórica no trabalho com os números racionais, apesar de Coelho (1892, 1906) utilizar este tipo de representação na exploração de outros conteúdos na aritmética.

7.7. Caracterização das situações matemáticas e contextos

No que se refere às situações matemáticas e contextos utilizados no trabalho de abordagem aos números racionais, os manuais utilizados neste período apresentam características diferentes.

Na apresentação das frações e dos procedimentos das operações com frações, Nunes (1887) recorre essencialmente a situações matemáticas estritamente numéricas, como por exemplo na regra para a multiplicação de um número inteiro por uma fração.

> para multiplicar um inteiro por uma fração, multiplica-se o inteiro pelo numerador e dá-se ao produto o denominador da fração. Podemos também dividir o inteiro pelo denominador da fração, quando isto seja possível, e depois multiplicar o quociente pelo numerador. Assim: $20 \text{ x} \frac{3}{4} = \frac{20}{4} \text{ x } 3 = 15$. (Nunes, 1887, p. 70)

No entanto, é de salientar que o autor desta obra no final do capítulo dedicado às frações, apresenta um conjunto de oito "problemas resolvidos" em que é necessário a utilização de conhecimento sobre frações. No que diz respeito ao tipo de situações apresentadas, são na sua maioria situações semirreais, envolvendo problemas de cálculo, que implicam a utilização de duas ou mais operações aritméticas elementares, ou problemas de processo, que implicam o uso de uma ou mais estratégias de resolução. Um exemplo destes problemas é o segundo problema apresentado por Nunes (1887):

> Um grupo de operários poderia fazer uma obra em 8 dias; um 2.º grupo faria a mesma obra em 12 dias. Empregam-se os $\frac{2}{3}$ do 1.º grupo e os $\frac{3}{4}$ do 2.º; pergunta-se em quanto tempo a obra estará feita? (Nunes, 1887, p. 75)

Para todos os problemas sugeridos por Nunes (1887) é apresentada uma estratégia de resolução.

Muitos dos problemas utilizados utilizam contextos relacionados com a medida ou com a atividade comercial, como os salários, o dinheiro, ou as promoções, como no exemplo seguinte:

> Um editor publica um livro. As despesas de impressão e outras elevam-se a 200$000 réis; vende este livro por dúzias, fazendo primeiro o abatimento de 25 por cento sobre o preço forte, que é de 400 réis, depois ao abatimento do 13.º exemplar (dá 13 exemplares pelo preço de 12); nestas condições, ganha 520$000 réis quando esgotada a edição. Pergunta-se quantos exemplares da obra se tiraram. (Nunes, 1887, p. 77)

Na obra de Nunes (1887) não há uma organização explícita das tarefas a apresentar aos alunos em sala de aula, com uma tipificação dos problemas.

Na obra de Preto (1903), também dedicada a uma disciplina da componente das ciências da especialidade, a apresentação das frações e dos decimais, e dos procedimentos para as respetivas operações, é feito com recurso essencialmente a situações matemáticas estritamente numéricas, como por exemplo na situação da divisão de um inteiro por uma fração.

> dividir 11 por $\frac{3}{4}$ é achar um número que multiplicado por $\frac{3}{4}$ dê o produto 11. Logo $\frac{1}{4}$ do quociente é 3 vezes menor que 11, e portanto igual a $\frac{1}{3}$ de 11; por consequência, teremos o quociente pedido tomando 4 vezes $\frac{1}{3}$ de 11, isto é, multiplicando por $\frac{4}{3}$. (Preto, 1903, p. 152)

O final do capítulo dedicado às frações apresenta um conjunto de dezasseis exercícios. Alguns destes exercícios trabalham a equivalência, simplificação e ordenação de frações com situações matemáticas estritamente numéricas, como por exemplo:

> 1. Tornar 5 vezes maiores as frações: $\frac{3}{7}, \frac{2}{35}, \frac{11}{19}, e\ \frac{7}{100}$

(…)

3. Simplificar as frações: $\frac{126225}{1767150}, \frac{21000}{290000}, \frac{5050}{9999}$ e $\frac{264}{368}$.

(…)

5. Escrever por ordem de grandeza as frações: $\frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}$ e $\frac{5}{7}$ (Preto, 1903, p. 155)

Neste conjunto de 16 exercícios são ainda apresentadas situações com um contexto semirreal, com contextos ligados às unidades de tempo ou ao dinheiro:

12. Quantas horas são os $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$ de $\frac{4}{5}$ de $\frac{5}{6}$ de 12 horas?

13. Três torneiras enchem um tanque: a 1.ª em 3 horas; a 2.ª em 4 e a 3.ª em 2: quanto tempo gastaram para o encher correndo todas ao mesmo tempo?

14. Um operário trabalhou $\frac{1}{3}$ do dia, depois $\frac{1}{4}$ do dia, depois $\frac{5}{6}$ do dia e, finalmente, $\frac{3}{8}$ do dia em uma obra que leva 2 dias a fazer; quanto tempo lhe falta para a acabar?

(…)

16. A diferença entre os $\frac{3}{4}$ e os $\frac{2}{9}$ duma herança é 167200; qual é o valor da herança? (Preto, 1903, p. 155-156)

Os problemas apresentados são essencialmente problemas de cálculo que se resolvem com duas ou mais operações elementares, embora alguns problemas pudessem envolver o uso uma ou mais estratégias de resolução caso fossem apresentados a alunos que não tivessem rotinas de resolução desse tipo de problema.

No capítulo dedicado aos decimais, Preto (1903) também utiliza situações matemáticas estritamente numéricas para estabelecer a relação entre as frações decimais e a representação decimal, a definição de dízima e as operações com números racionais na sua representação decimal.

1.º Converter em fração decimal a fração ordinária $\frac{21}{140}$, e determinar previamente a espécie de dízima que há de produzir.

Em primeiro lugar simplificaremos a fração proposta, para o que basta dividir os seus dois termos por 7; teremos assim a fração irredutível $\frac{3}{20}$; e, como o denominador decompõe nos seus fatores primos dá

$$20 = 2^2 \text{ x } 5,$$

isto é, não contém senão 2 e 5 por fatores primos e o maior expoente destes é 2, segue-se (1.º) que a dízima é finita e composta por dois algarismos.

Com efeito temos

$$\begin{array}{rrr|lll} 3 & 0 & & 2 & 0 & \\ \cline{4-6} 1 & 0 & 0 & 0, & 1 & 5 \\ & 0 & 0 & & & \end{array}$$

isto é,

$\frac{3}{20} = 0{,}15$. (Preto, 1903, pp. 170-171)

No final do capítulo dedicado às frações decimais e à sua representação decimal, Preto (1903) apresenta um conjunto de 11 exercícios. São essencialmente situações matemáticas estritamente numéricas que servem de treino para as situações colocadas durante o capítulo, nomeadamente a conversão de frações em dízima, e a situação recíproca, regras para multiplicar e dividir as dízimas por 10, 100 e 100, efetuar operações com dízimas, reconstruir a unidade e reduzir frações a dízimas. Apresentam-se aqui alguns exemplos dos exercícios colocados pelo autor:

> 1. Escrever em forma dízima as frações: $\frac{3}{10}$, $\frac{8}{100}$, $\frac{15}{10000}$ e $\frac{265}{100}$.
> 2. Reduzir a frações ordinárias e estas à sua expressão mais simples as dízimas: 0,25; 0,125; 0,1375 e 0,136.
> 3. Tornar 100 vezes maiores as frações decimais: 0,4657; 0,008 e 0,48657.
> (…)
> 5. Efetuar as operações: 0,365 + 48,0567 – 31,00047 – 0,469.
> (…)
> 7. Achar o número cujos 0,85 são iguais 24,72.
> (…)
> 11. Reduzir a dízimas as frações: $\frac{137}{32}$, $\frac{16}{25}$, $\frac{8}{15}$ e $\frac{72}{168}$. (Preto, 1903, pp. 172-173)

Preto (1903) apresenta na sua obra um capítulo dedicado ao cálculo de expressões numéricas, onde começa por definir o que entende por problema. Considera que não existem regras gerais para resolver todos os problemas. Relaciona a resolução de problemas com a finalidade das operações aritméticas. Na resolução de problemas, Preto (1903) considera que, em geral, se é conduzido a praticar duas ou mais operações sobre os dados, fazendo a indicação com a utilização dos sinais aritméticos, o que resulta no que designa por expressões numéricas. Esta caracterização dos problemas identifica-os essencialmente como problemas de cálculo.

Preto (1903) apresenta depois dois problemas com a respetiva resolução. São problemas com contextos de dinheiro e de medida onde são aplicadas as regras do cálculo de expressões numéricas, apresentadas em paralelo com o cálculo em algoritmo.

> Problema I – O dono de uma fábrica emprega, durante 15 dias, 178 homens, 59 mulheres e 36 crianças. Paga 900 réis a cada homem, 720 réis a cada mulher e 540 réis a cada criança, por dia. Durante este tempo fabricaram 11:785 metros de fazenda que vendeu a 1$080 réis cada metro. A matéria prima importou em 965$000 réis. Quanto ganhou? (Preto, 1903, p. 178)

Problema II - Um negociante comprou 280,45 metros de fazenda a 900 réis cada metro; 145 e $\frac{3}{4}$ metros a 1$200 réis e 366 $\frac{5}{8}$ a 1$000 réis. Vendeu toda a fazenda pelo mesmo preço e ganhou 316$025 réis; a como vendeu cada metro? (Preto, 1903, pp. 179-180)

O capítulo XIII, com o qual termina o livro primeiro, encerra com um conjunto de seis exercícios, onde se pretende que se treinem as regras trabalhadas para as expressões numéricas. Entre estes seis exercícios existem uns que são estritamente numéricos e outros que são apresentados com um contexto, como o dinheiro, medidas de comprimento, medidas de tempo.

O primeiro exercício apresentado é um exemplo estritamente numérico. O segundo exercício apresenta um contexto de medidas de comprimento e dinheiro. O terceiro exercício apresenta um contexto de dinheiro. O exercício número 5 envolve o dinheiro e o exercício número 6 envolve as medidas de comprimento.

1. A soma de três números é igual ao quadrado de 432; o 1.º destes números é o dobro do 2.º que é igual a 37528; qual é o 3.º?
2. Um negociante comprou 350 metros de fazenda de duas qualidades, tanto duma como da outra. A fazenda 2.ª qualidade custou-lhe 3$600 réis o metro e 6 metros da de 1.ª qualidade valem tanto como 9 metros da de 2.ª. Quanto lhe custou a fazenda toda?
3. Um rancho de 17 operários recebeu uma certa quantia por 15 dias de trabalho; se tivesse recebido 102$000 réis, teria ganho cada um 1$000 por dia. Quanto ganhou realmente cada operário?
4. Um hortelão quer levar para casa 12 peras; mas tem de atravessar duas portas e sabe que na primeira lhe tirarão a metade das peras que apanhou e na segunda a quarta parte do resto. Quantas peras deve apanhar?
5. Um relógio atrasa-se 0,75 da hora em cada dia e foi acertado ao meio dia. Quantas horas são, quando indicar 5,5 horas da tarde?
6. Uma bola elástica, caindo verticalmente ressalta depois de cada queda a uma altura igual aos 0,60 de altura donde caiu; depois de ter ressaltado três vezes, elevou-se a 1m,08. De que altura caiu primitivamente? (Preto, 1903, p. 180)

Apesar da definição de problema apresentada por Preto (1903) remeter para problemas de cálculo, alguns dos exemplos apresentados implicam o uso de mais do que uma estratégia de resolução, que se enquadra nos problemas de processo. Para estes exercícios não são apresentadas resoluções.

Os outros dois manuais analisados neste período são manuais da componente pedagógica que apresentam um desenvolvimento muito diferente para as questões do ensino da matemática. Desta forma, o manual de Affreixo e Freire (1891) não apresenta quaisquer considerações sobre as situações matemáticas e contextos a apresentar na abordagem aos números racionais.

No que diz respeito à obra de Coelho (1906), esta também não aprofunda as situações matemáticas utilizadas na abordagem aos números racionais. No entanto, Coelho (1906) remete para uma outra obra da sua autoria, onde este aprofunda este tema. Da análise da obra de Coelho (1892) é possível verificar que na noção de fração e nas operações com frações são utilizadas essencialmente situações matemáticas estritamente numéricas. Um exemplo é a introdução da adição e subtração de frações com o mesmo denominador:

> Desde que para o aluno é bem clara a noção de fração, será fácil levá-lo a somar ou subtrair frações *quando tenham o mesmo denominador*; $\frac{6}{5}-\frac{2}{5}=\frac{4}{5}$ é com efeito, uma expressão destinada a representar uma operação cuja natureza facilmente se evidencia, visto que bastará tomar **6** partes em dois objetos iguais e divididos cada um em **5** partes iguais e, em seguida, subtrair **2** de entre essas partes. (Coelho, 1892, p. 205, itálicos e negritos no original)

As situações apresentadas não têm um contexto que se tente aproximar da realidade, mas há a sugestão de se utilizarem objetos para a concretização do que é representado verbal e simbolicamente.

Na exploração da representação decimal, as situações apresentadas também são matemáticas estritamente numéricas, com o recurso à utilização de um jogo. Na abordagem aos números racionais proposta por Coelho (1892, 1906) não são utilizadas quaisquer outras situações matemáticas e contextos ou problemas.

7.7.1. Em síntese

No que diz respeito às situações matemáticas e contextos utilizados na abordagem aos números racionais, nos manuais analisados no primeiro período distinguem-se aqueles que se destinavam à componente da especialidade e os que se destinavam à componente pedagógica. Os primeiros, obras de Nunes (1887) e Preto (1903), na apresentação das frações e dos procedimentos das operações com frações, optam por recorrer essencialmente a situações matemáticas estritamente numéricas. No entanto, qualquer um destes autores apresenta no final do capítulo dedicado às frações um conjunto de propostas que designam por exercícios, que incluem situações matemáticas estritamente numéricas, mas também problemas. Na obra de Nunes (1887) são apresentados oito problemas em que é necessário aplicar o conhecimento sobre frações. São na sua maioria situações que se enquadram nos contextos de semi-realidade (Skovsmose, 2001), quanto aos seus contextos, envolvendo problemas de cálculo, que implicam a utilização de duas ou mais operações aritméticas elementares, ou problemas de processo, que no nível elementar poderiam implicar uma ou mais estratégias de resolução. Os contextos utilizados nestes problemas relacionam-se principalmente com a medida ou com a atividade comercial, como os salários, o dinheiro ou as promoções. No caso de Preto (1903), a abordagem às frações e aos decimais, e aos procedimentos das respetivas operações, é feito com recurso a situações matemáticas estritamente numéricas. No final destes capítulos são apresentados conjuntos de exercícios que trabalham a equivalência, simplificação e ordenação de frações com situações matemáticas estritamente numéricas. No caso do capítulo sobre as frações, os 16 exercícios incluem ainda situações que se podem enquadrar na semi-realidade, com contextos ligados às unidades de tempo ou ao dinheiro. São essencialmente problemas de cálculo que se resolvem com duas ou mais operações elementares, embora alguns problemas pudessem envolver o uso de uma ou mais estratégias de resolução. No capítulo dedicado aos decimais, Preto (1903) também utiliza situações matemáticas estritamente numéricas para estabelecer a relação entre as frações decimais e a representação decimal. No final do capítulo, Preto (1903) apresenta um conjunto de 11 exercícios, designação usada pelo próprio autor. São essencialmente situações matemáticas estritamente numéricas que servem de aplicação e treino para os procedimentos apresentados durante o capítulo.

Relativamente aos manuais da componente pedagógica, do primeiro período, a obra de Affreixo e Freire (1891) não apresenta quaisquer considerações sobre as situações matemáticas e contextos a trabalhar na abordagem aos números racionais. Na obra de Coelho (1906), este também não apresenta situações e contextos para aprofundar o trabalho com os números racionais. No entanto, na análise da obra Coelho (1892) é possível verificar que na noção de fração são utilizadas essencialmente situações matemáticas estritamente numéricas. No que diz respeito ao trabalho com a representação decimal, Coelho (1892) também explora apenas situações matemáticas estritamente numéricas, designadamente com um jogo para estabelecer a relação entre as diferentes ordens do sistema decimal.

2.º Período – Nas escolas do magistério primário

7.8. Definição de número racional

No trabalho Pimentel Filho (1934), num ponto designado por Frações ordinárias, este começa por destacar que a noção de fração é uma noção basilar no ensino da aritmética e que, por isso, deve merecer uma atenção especial. Pimentel Filho (1934) discute desde logo o interesse que a noção de fração poderá provocar na criança, salientando que todos os princípios relativos a este conteúdo devem ser "exclusivamente induzidos de casos concretos, reais, realizados diretamente pelos alunos. Mais do que em qualquer outro caso, a passagem das noções concretas à abstração deve aqui ser lenta e gradual." (p. 147). É uma discussão inicial que se centra no conhecimento da relação do aluno com aquele conteúdo em específico e com a necessidade de ser feita uma concretização dos diferentes aspetos a trabalhar.

Quando no terceiro ponto do capítulo Pimentel Filho (1934) apresenta as frações, fá-lo com a indicação da utilização de materiais concretos, indicando que a apresentação deve seguir três fases, a apresentação da unidade concreta, a apresentação da fração concreta e a medida da fração. A seguir à concretização, os materiais são representados pictoricamente e estabelecendo-se posteriormente uma relação com a representação verbal, com exercícios de nomenclatura. As frações não unitárias são introduzidas da mesma forma, recorrendo-se à concretização e posteriormente às imagens. As ilustrações são utilizadas para realizar exercícios de leitura das frações representadas.

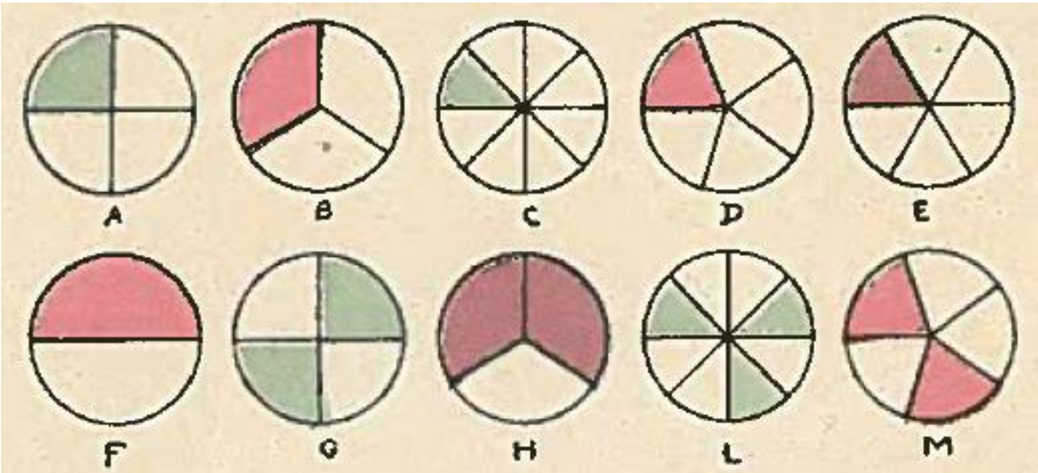


Figura 7.1. Discos seccionados em diferentes partes, representando diferentes frações da unidade, onde surge a representação de frações não unitárias (Pimentel Filho, 1934, p. 150, digitalização, 100% do original)

Nestes exemplos iniciais, Pimentel Filho (1934) privilegia a introdução da fração como uma relação entre a parte e um todo de uma unidade contínua.

Após a apresentação concreta e pictórica das frações até aos nonos, e depois de se estabelecer uma relação com a representação verbal, Pimentel Filho (1934) sugeria a apresentação da representação numérica da fração em três fases, representação numérica da fração, representação das expressões fracionárias, designação utilizada pelo autor para a fração imprópria, e representação de números fracionários, designação utilizada para identificar o numeral misto. Na primeira fase, Pimentel Filho (1934) insiste na importância dos significados do numerador e do denominador. Sugere que de início a escrita da fração seja feita por extenso, e que só se vá abandonando essa escrita conforme a leitura das frações esteja consolidada. Na segunda fase, onde Pimentel Filho (1934) apresenta as frações impróprias que designa por expressões fracionários, continua a recorrer à representação pictórica, relacionando com a representação verbal e simbólica.

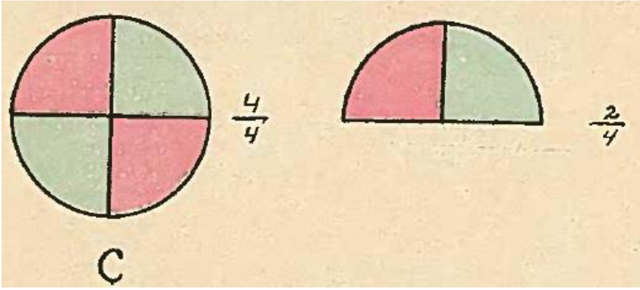


Figura 7.2. Representação de uma proposta de abordagem à fração imprópria, designada por expressão fracionária (Pimentel Filho, 1934, p. 152)

Nesta fase continua a privilegiar a apresentação da fração como uma relação entre a parte e um todo de uma unidade contínua.

Na terceira fase, Pimentel Filho (1934) destaca os numerais mistos, que designa como números fracionários, definindo-os como aqueles que são "formados por um número inteiro mais uma fração, como "$2+\frac{2}{3}, 5+\frac{3}{4}$, etc" (Pimentel Filho, 1934, p. 154). Nesta fase não é utilizada a notação simbólica mais usual do numeral misto, sendo representado como uma adição de um inteiro com uma fração. A notação simbólica só é usada quando são exploradas as operações de adição e subtração. Note-se que a designação verbal de numeral misto não é utilizada, nem posteriormente no contexto das operações. São dados exemplos de como se converte um número fracionário em expressão fracionária, ou seja, converter um numeral misto numa fração imprópria, por exemplo $2+\frac{2}{3}$ seria convertido em $\frac{8}{3}$ visto duas unidades serem o mesmo que $\frac{6}{3}$ "e juntos aos $\frac{2}{3}$ soltos, dão $\frac{8}{3}$" (Pimentel Filho, 1934, p. 154)

Estas fases constituem um primeiro passo na abordagem às frações, após as quais Pimentel Filho (1934) apresenta um conjunto de dezanove exercícios para a consolidação dos conteúdos trabalhados até ali. Os exercícios apresentados baseiam-se essencialmente em dois autores, Bourlet e Grosgurin, dos quais se destacam aqui alguns exemplos:

> 1.º Converter em meios, terços, quartos, quintos ... nonos, 2, 3, 5, etc., inteiros.
> 2.º João tem 12 soldados de chumbo. ¿ Se der metade, com quantos ficará?
> 4.º Quantos lápis serão os $\frac{2}{5}$ de 25 lápis?
> 6.º ¿Se eu quiser dividir um queijo por 8 pessoas, que porção de queijo darei a cada uma? E se o dividir por seis pessoas? E por 5?
> 9.º Deram-me $\frac{17}{5}$ de laranjas? Juntando êsses $\frac{17}{5}$ quantas laranjas posso reconstituir, posso formar? ¿ Sobram alguns quintos? Quantos?
>
> 18.º Após ter perdido os $\frac{3}{5}$ dos seus belindres Paulo tem ainda 12. ¿Quantos belindres tinha êle? – (Grosgurin) (Pimentel Filho, 1934, pp. 155-156)

É de salientar que, na citação anterior, Pimentel Filho (1934) apresenta alguns exercícios (2.º, 4.º e o 18.º) que remetem para situações em que a unidade é um conjunto discreto, e em que a fração é entendida como operador partitivo multiplicativo, o que ainda não tinha sido abordado anteriormente na obra. É ainda destacar o 6.º exercício cujo contexto remete para uma situação de partilha equitativa, com a fração entendida como um quociente.

Na obra de Gaspar e Ferreira (1944) também começam por considerar o ensino das frações, e dos decimais, como essencial na aritmética. Estes autores consideram que o ensino destes números envolve noções muito abstratas para as crianças e, por isso, deveria ser particularmente intuitivo, prático e ativo. Na concretização das primeiras noções, Gaspar e Ferreira (1944) sugerem a utilização do metro articulado ou a utilização de medidas de capacidade. Os autores sugerem uma sequência para apresentação das frações aos alunos, que começa por trabalhar a metade e posteriormente a quarta parte e a oitava parte, por se conseguirem obter a partir da metade e da quarta parte da metade. O terço, o sexto e o nono só seriam trabalhados após o trabalho com a décima. Os exemplos apresentados referem-se sempre à fração como parte de um todo de uma unidade contínua, valorizando-se a relação entre a representação pictórica, a representação verbal e posteriormente a representação simbólica.

Estes autores defendem um ensino simultâneo da representação na forma de fração e a representação decimal, considerando que a representação decimal facilita a compreensão porque dá uma dimensão utilitária e lógica aos números, pela sua relação com o sistema métrico.

No manual de Pinheiro (1961), a primeira abordagem aos números racionais é feita a partir da representação decimal, números decimais como são designados por Pinheiro (1961), seguindo as instruções dos programas da época[174]. Nas instruções dos programas é destacado o trabalho que deve ser feito para a iniciação aos números decimais. De acordo com estas instruções, a iniciação aos números decimais deveria ser feita a partir do estudo do metro e dos seus submúltiplos. Os alunos deveriam começar por fazer medições em que o metro entrasse um número inteiro de vezes. Mediriam depois usando o metro e o decímetro representando na forma designada por decimal misto, utilizando a vírgula a seguir à unidade principal[175]. Deveriam repetir o processo para o centímetro e para o milímetro, observando as posições dos algarismos correspondentes e estabelecendo uma relação com as regras aprendidas na formação dos números inteiros[176]. Os alunos passariam depois para a utilização de decimais simples, ou seja, aqueles em que a unidade principal é zero. Depois do trabalho com as unidades concretas, os alunos poderiam generalizar, dividindo qualquer unidade em décimas, centésimas e milésimas. As operações com

[174] Programas do ensino primário aprovados pelo Decreto-lei n.º 42:994, de 28 de maio de 1960.

[175] A designação decimal misto é utilizada nas instruções do programa, assim como por Pinheiro (1961), para se referirem a um número que represente mais do que uma unidade, na sua representação decimal, em que uma vírgula separa a parte inteira da não inteira do número. As instruções do programa também referem decimal simples como um número na sua representação decimal, com um valor inferior à unidade.

[176] Nas instruções dos programas refere-se os números inteiros, mas o que faz parte dos programas do ensino primário são apenas os números inteiros não negativos.

números decimais deveriam ser ensinadas, estabelecendo-se um paralelismo com as operações com os números inteiros. A citação das instruções do programa que Pinheiro (1961) apresenta dá a entender que preconiza uma abordagem aos números racionais não negativos a partir da sua representação decimal, com o estudo das medidas de comprimento, tal como defende o próprio programa. Depois do trabalho com esta unidade, os alunos deveriam fazer a generalização a qualquer unidade em décimas, centésimas e milésimas. É esta abordagem que Pinheiro (1961) faz na sua obra de didática, o que leva a um trabalho centrado na relação parte todo de uma unidade contínua.

No trabalho com as frações destaca o trabalho com a representação pictórica, a representação verbal e posteriormente a relação com a representação simbólica. A fração é essencialmente apresentada como a parte de um todo de uma unidade contínua. A iniciação é feita através das frações unitárias numa sequência idêntica à proposta por Gaspar e Ferreira (1944). Também é apresentado um exemplo em que a fração surge como operador multiplicativo partitivo de uma unidade discreta. Pinheiro (1961) não explicita nenhuma indicação a diferenciar estes dois tipos de situações.

Tal como Pinheiro (1961), a proposta de Gonçalves (1974) para a iniciação aos números racionais também se centra no trabalho com a representação decimal. Esta opção de Gonçalves (1974) também é justificada pelas orientações do programa do ensino primário em vigor na época[177]. No entanto, Gonçalves (1974) aprofunda esta questão da forma de iniciar o estudo dos números racionais citando metodólogos que apresentam opiniões divergentes. Por um lado, aqueles que consideram que se deve começar o estudo pela representação decimal porque estes constituem uma continuação do estudo dos números inteiros e têm uma relação direta com o sistema de medida decimal. Por outro lado, aqueles que defendem que a primeira abordagem deve ser feita através das frações ordinárias, porque as frações decimais são só um caso particular das frações. Gonçalves (1974) também estabelece a diferença entre a representação decimal e o número decimal, chamando à atenção para a utilização de número decimal em vez de numeral decimal.

Na definição de fração, Gonçalves (1974) refere que as frações constituem "um mundo novo, com tipos próprios de unidades, de quantidades, de números: nova numeração, novas notações e operatória geral distinta." (p. 142). Gonçalves (1974) considera que a aritmética apresenta a fração como um caso de nova realidade de uma nova numeração e, por isso, o seu estudo não devia ser paralelo ao estudo dos números inteiros.

[177] Na época estavam em vigor os programas aprovados na Portaria n.º 23.485, Diário do Governo, 167, 16/7/1968, 1.019-36.

Gonçalves (1974, citando Augustine, s/d) destaca que o conceito de número fracionário é mais complexo do que o conceito de número natural e, por isso, requer da criança maior maturidade e conhecimentos matemáticos. Ao contrário do que acontece com o número natural, que é propriedade de um determinado conjunto, Gonçalves (1974) distingue no número fracionário diversos conceitos. Gonçalves (1974) distingue quatro conceitos diferentes, apresentando exemplos que diferenciam esses conceitos. O primeiro exemplo refere-se ao que se pode enquadrar na fração como a parte de um todo de uma unidade contínua "1) Na partilha de um conjunto contínuo ele significa «uma ou mais das partes iguais em que se dividiu esse conjunto»." (Gonçalves, 1974, p. 143, aspas no original) sendo apresentada a seguinte figura.

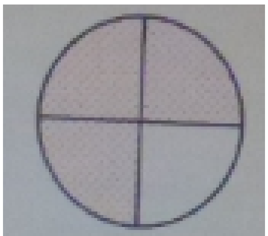


Fig. 1

Figura 7.3. Ilustração da fração como parte de um todo de uma unidade contínua. (Gonçalves, 1974, p. 143, digitalização, 100% do original)

No segundo exemplo, Gonçalves (1974) apresenta a fração no que se pode enquadrar como parte de um todo de um conjunto discreto, ou operador partitivo multiplicativo "2) Na partilha de um conjunto descontínuo, ele significa «uma ou mais das partes iguais desse conjunto» (de coisas, pessoas, etc.)." (Gonçalves, 1974, p. 143, aspas no original). Para ilustrar a fração neste sentido, apresenta a seguinte figura.

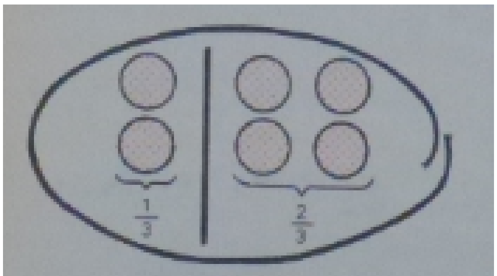
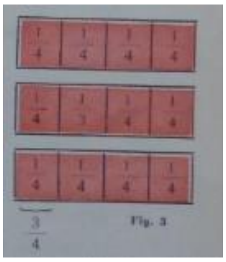


Fig. 2

Figura 7.4. Ilustração da fração como parte de um todo de uma unidade discreta. (Gonçalves, 1974, p. 143, digitalização, 100% do original).

No terceiro conceito que Gonçalves (1974) distingue nas frações, apresenta um exemplo que remete para o que se pode designar como a fração como o quociente entre dois números inteiros, numa situação de partilha equitativa.

> 3) Pode significar o «quociente de dois números naturais (divisor ≠ zero)». Se eu quiser dividir três barras de sabão por 4 lavadeiras, posso dividir cada barra em 4 partes, dando a cada lavadeira três quartos, pois as barras são três. Ver fig. 3 (Gonçalves, 1974, p. 143, aspas no original)



Gonçalves (1974) apresenta ainda um quarto significado que o conceito de fração pode encerrar, referindo-se à fração como uma razão "a razão das propriedades numéricas de dois conjuntos". O exemplo apresentado para este caso é o seguinte:

> 4) Pode também significar «a razão das propriedades numéricas de dois conjuntos». Se, num fruteiro, houver 5 bananas e eu comer duas, a relação entre as bananas que comi e as que havia no fruteiro é de 2 para 5 ↔ 2/5." (Gonçalves, 1974, p. 143, aspas no original)

Para Gonçalves (1974) este último significado da fração está no fundamento do estudo da percentagem.

Gonçalves (1974) recomenda que o desenvolvimento do conceito intuitivo de fração seja feito através da partilha equitativa de conjuntos contínuos, seguida da formação de subconjuntos de um conjunto determinado. Gonçalves (1974) define também a função do numerador e do denominador na fração, esclarecendo da seguinte forma o que designa por número fracionário:

> *número fracionário* é uma *ideia* e a sua representação simbólica denomina-se *fração* (numeral do número fracionário), a qual pode ter a forma *a/b*, e que *a* e *b* designam números naturais, podendo também referir-se *a* como dividendo e *b* como divisor, sendo **b ≠ 0**. (Gonçalves, 1974, p. 144, itálicos e negritos no original)

Ainda na definição de fração, Gonçalves (1974) distingue o que designa por unidade fracionária, quando se divide a unidade inteira em partes iguais e se toma apenas uma dessas partes, da quantidade fracionária que resulta da junção de várias unidades fracionárias. Salienta ainda que a fração pode representar uma quantidade que não é inteira, mas também pode representar unidades inteiras. Só depois do trabalho com a noção de fração é que Gonçalves (1974) introduz a nomenclatura utilizada normalmente nas frações como traço de fração, que o autor designa por risco de fração, numerador, denominador e termos da fração. Gonçalves (1974) apresenta também as frações impróprias mencionando que esta designação se deve ao facto de elas se referirem a frações que valem mais do que a unidade. No exemplo anterior, Gonçalves (1974) apresenta também a fração imprópria representada na forma de numeral misto, sem explicar verbalmente o significado da parte inteira e da parte fracionária, apresentando apenas a relação entre a figura e a representação simbólica. Verbalmente refere apenas as frações impróprias, destacando que as crianças devem observar que o numerador é igual ou maior do que o denominador[178]. Numa nota de rodapé, Gonçalves (1974) destaca ainda que os números naturais devem ser considerados como um subconjunto dos números fracionários, e que as crianças devem ir adquirindo essa noção de números fracionários.

Gonçalves (1974) trabalha ainda a questão da conversão da fração em dízima, indicando a forma para o fazer e como identificar as frações que podem ser representadas como dízimas.

7.8.1. Em síntese

Os quatro manuais relativos ao segundo período, de 1930 a 1974, analisados neste trabalho estão mais centrados na componente pedagógica, dando resposta às alterações que tinham sido, entretanto, efetuadas nos cursos de formação inicial dos professores do ensino primário. No entanto, entre os quatro existem diferenças no conhecimento profissional que os futuros professores trabalhavam relativamente ao conteúdo dos números racionais. Na obra de Pimentel Filho (1934) é privilegiada a introdução da fração como uma relação entre a parte e um todo de uma unidade contínua, destacando-se um conhecimento especializado do conteúdo e conhecimento do conteúdo e do seu ensino. Na iniciação às frações também são apresentados exemplos que remetem para situações em que a fração aparece com o significado de operador partitivo multiplicativo de um conjunto discreto (Monteiro & Pinto, 2005). Na abordagem é destacada a importância e as dificuldades que este conteúdo oferece aos alunos na iniciação, embora não sejam referidas dificuldades específicas do conteúdo. É uma abordagem que privilegia a relação entre as diferentes representações, ativas, pictóricas e verbais e simbólicas, fazendo-se um amplo uso das imagens com cor. Na obra nunca é usada a expressão número racional, sendo utilizadas designações como fração, expressão fracionária para designar fração imprópria, número fracionário para designar numeral misto, e números decimais. A proposta está centrada na apresentação de uma sequência de ensino que privilegia a iniciação a partir das frações e só depois dos decimais, mas não apresenta definições que se possam enquadrar no conhecimento comum do conteúdo. Pimentel Filho (1934) discute os tipos de unidades logo no início do capítulo sobra as frações, estando implícito um conhecimento comum do conteúdo, que no entanto difere da forma como Caraça (2003) apresenta estas definições.

No trabalho de Gaspar e Ferreira (1944) é de sublinhar a importância que é dada à indicação de uma sequência de ensino com um enfoque inicial na fração, mas onde se defende que essa representação deve ser trabalhada em paralelo com a representação decimal. A representação decimal assume uma maior importância na abordagem destes autores porque

[178] Gonçalves (1974) considera como fração imprópria as frações que representam números maiores ou iguais à unidade.

consideram que esta representação facilita a compreensão e dá um caráter utilitário aos números pela sua relação com o sistema métrico. No trabalho inicial que incide sobre a fração unitária, apresentada sempre como parte de um todo de uma unidade contínua, os autores valorizam a relação entre as diferentes representações, pictórica, verbal e só posteriormente a simbólica, embora o destaque seja dado à relação entre a representação verbal e a simbólica, não se fazendo uso da imagem como acontecia por exemplo em Pimentel Filho (1934).

A obra de Pinheiro (1961), também centrada no conhecimento do conteúdo e do seu ensino, distingue-se das obras anteriores por propor uma abordagem inicial aos números racionais a partir da sua representação decimal. O autor não apresenta uma discussão sobre essa opção e sobre as vantagens e desvantagens de fazer a iniciação através da fração ou dos decimais, justificando-se com as instruções do programa do ensino primário da época que indicavam esta sequência e centravam o trabalho na utilização do metro e dos seus submúltiplos e na relação que se podia estabelecer entre a organização dos decimais e a organização decimal dos números inteiros. Só depois do trabalho com a unidade metro é que os alunos generalizavam a divisão da unidade em décimas, centésimas e milésimas a qualquer unidade. Só depois do trabalho com a representação decimal é que Pinheiro (1961) considera a iniciação às frações, destacando-se na sequência de ensino proposta o trabalho inicial com as frações unitárias e a relação entre as diferentes representações, pictórica, verbal e simbólica, numa ordem idêntica à proposta de Gaspar e Ferreira (1944). A fração é caracterizada essencialmente como a parte de um todo de uma unidade contínua, embora o autor apresente alguns exemplos em que a fração surge como operador multiplicativo partitivo aplicado a uma unidade discreta. No entanto, Pinheiro (1961) não discute explicitamente essas diferenças, não se destacando, por isso, um conhecimento especializado do conteúdo. Na obra de Pinheiro (1961) nunca é utilizada a designação número racional, sendo utilizadas as designações fração e números decimais. É também de destacar na obra de Pinheiro (1961) a importância que se dá ao conhecimento do currículo de matemática do ensino primário, sendo muitas vezes citado para justificar opções na sequência de ensino.

Gonçalves (1972, 1974) também faz a opção pela iniciação centrada na representação decimal, justificando essa opção com as orientações do programa do ensino primário da época. No entanto, apresenta uma discussão explícita sobre as possíveis sequências de ensino com início na representação decimal ou na representação na forma de fração, num desenvolvimento do conhecimento do conteúdo e do seu ensino. Gonçalves (1974) destaca algumas dificuldades que este conteúdo pode provocar nas crianças na sua representação em fração, porque representa um conjunto numérico novo, com tipos de unidades diferentes e com uma notação e operatória distinta, tal como descrito por autores referidos no quadro teórico (Monteiro & Pinto, 2005; Vamvakoussi & Vosniadou, 2007). Na obra de Gonçalves (1974) não é usada a designação número racional, sendo usada a expressão número fracionário para identificar os números que se podem representar por uma fração. Faz também uma distinção entre a expressão unidade fracionária, que utiliza para designar frações unitárias, e a quantidade fracionária que resulta da adição de unidades fracionárias. No que se pode considerar o sentido do conhecimento especializado do conteúdo, Gonçalves (1974) faz referência à complexidade do conceito do número fracionário, distinguindo quatro conceitos diferentes quando a fração é apresentada em contexto: partilha de um conjunto contínuo, partilha de um conjunto descontínuo, quociente de dois números inteiros e razão. Estes quatro conceitos podem enquadrar-se nos diferentes significados das frações em contexto, tal como são apresentados por Monteiro e Pinto (2005). Na sequência de ensino para as frações, Gonçalves (1974) salienta que a iniciação deve ser feita através do que se pode designar por partilha equitativa de conjuntos contínuos (Monteiro & Pinto, 2005). Nessa iniciação utiliza a relação entre a representação pictórica e a representação simbólica. No trabalho de Gonçalves (1974) é ainda possível verificar que existe uma necessidade de distinguir a ideia da sua representação, o que acontece por exemplo quando o autor distingue número fracionário da sua representação na forma de fração e número decimal da sua representação em numeral decimal.

7.9. Tipos de unidade

No caso do trabalho de Pimentel Filho (1934), este refere-se pela primeira vez à unidade quando se ocupa das noções de quantidade, de unidade e de número. Para o autor, estas noções devem ser trabalhadas com os alunos a partir de casos concretos. Pimentel Filho (1934) afirma logo nesse primeiro capítulo que inicialmente apenas deverá ser abordada a "… grandeza descontínua, precisa para abordagem da numeração. A noção de grandeza contínua será dada ao iniciar-se o estudo das frações, porque só então a poderemos fazer induzir de casos concretos." (p. 89). Pimentel Filho (1934) volta a referir-se à unidade quando trabalha o sistema decimal e é necessário organizar unidades compostas para compor novas ordens na numeração.

Já no contexto do ensino dos números racionais, no capítulo dedicado às frações ordinárias, Pimentel Filho (1934) observa que o estudo das frações deve ser precedido da noção de grandeza contínua. Como exemplo de grandeza contínua, Pimentel Filho (1934) apresenta o caso de uma tira de papel, um queijo, um segmento de reta, uma superfície ou um volume. O autor define assim as grandezas contínuas como aquelas que "podem ser divididas em partes iguais, e distribuídas, sem que cada parte resultante da divisão deixe de ter as mesmas propriedades que tinha a grandeza primitiva de que as destacamos" (p. 148).

Pelo contrário, as grandezas descontínuas são definidas como não podendo ser fracionadas sem perderem a sua identidade, ou seja, numa coleção de grandezas descontínuas, que podem ser semelhantes ou não, se partirmos uma dessas grandezas, ela deixa de poder figurar na coleção, que por sua vez fica incompleta. Um exemplo apresentado por Pimentel (1934) é citado da obra de Grosgurin, onde este refere que "As partes obtidas não apresentam já o conjunto de caracteres de um objeto: um fragmento de prato, já não é um prato (Grosgurin, citado em Pimentel Filho, 1934, p. 148). Pimentel Filho (1934) continua afirmando que "uma coleção de grandezas descontínuas, semelhantes ou não, perde a sua autonomia se uma dessas grandezas se fragmentar, visto que a grandeza fragmentada deixou de poder figurar na coleção, que fica incompleta (Pimentel Filho, 1934, p. 148).

Na apresentação inicial das frações, Pimentel Filho (1934) recorre essencialmente a unidades contínuas, como círculos divididos em partes iguais. Para além dos exercícios onde é pedido que os alunos identifiquem que fração corresponde à parte colorida relativamente à unidade, são também sugeridos exercícios em que, sabendo que fração corresponde a uma determinada parte da figura, se pede ao aluno que faça a reconstituição da unidade.

> Com os setores soltos reconstituir-se-ão unidades, discos completos, o que levará as crianças a verificarem que a unidade só pode ser reconstituída com frações todas iguais (ou terços, ou quartos, ou quintos, etc.). Completado um disco com setores soltos, três por exemplo, perguntar-se-á: ¿se tirarmos um terço, quantos terços ficam ainda no resto do disco? ¿E se fossem quintos? Justaponhamos três quintos: ¿quantos nos faltam para termos o disco completo, a unidade? (Pimentel Filho, 1934, p. 150)

As figuras como quadrados, os retângulos e os ângulos são também apresentadas como se prestando para a concretização de frações, sendo identificados como unidades contínuas.

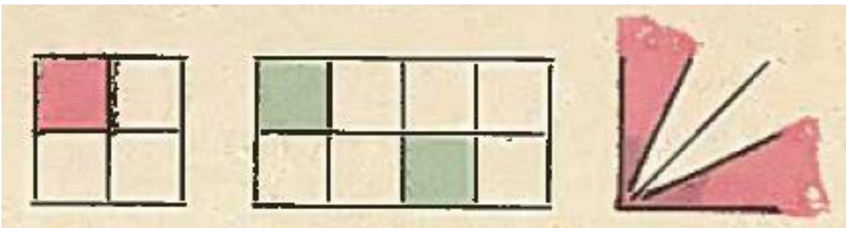


Figura 7.5. (Pimentel Filho, 1934, p. 150, digitalização, 100% do original).

Os quadrados soltos poderiam ser utilizados para a reconstituição da unidade, sugerindo-se o exercício "Este quadrado é o oitavo de um retângulo. Construa o retângulo respetivo. etc." (Pimentel Filho, 1934, p. 150).

Apesar de na apresentação inicial das frações, Pimentel Filho (1934) usar apenas exemplos com unidades contínuas, nos exercícios propostos no final do capítulo apresenta exemplos, que designa por exercícios, onde a unidade utilizada são conjuntos discretos. Dois exemplos são o 2.º e o 4.º exercício: "2.º João tem 12 soldados de chumbo. ¿ Se der metade

metade, com quantos ficará? 4.º Quantos lápis serão os $\frac{2}{5}$ de 25 lápis?" Pimentel Filho (1934, p. 155).

No trabalho que Pimentel Filho (1934) propõe para as operações com frações, também são apresentados exemplos que utilizam unidades contínuas e unidades discretas. É de destacar que nos contextos com a representação decimal são privilegiadas as unidades contínuas, sendo os contextos de medida os mais utilizados.

No manual de Gaspar e Ferreira (1944), as primeiras referências a unidades são feitas no âmbito do estudo dos números naturais, onde são apresentados exemplos com unidades discretas e unidades compostas que correspondem a conjuntos discretos, embora não exista nenhuma referência explícita a diferentes tipos de unidades. No entanto, as primeiras noções apresentadas no contexto do estudo dos números racionais referem-se a unidades contínuas.

No início da proposta são utilizadas essencialmente as tiras de papel que permitem dividir a unidade sucessivamente em metades. No entanto, a utilização das unidades contínuas deve-se principalmente ao facto da abordagem proposta por Gaspar e Ferreira (1944) relacionar quase desde o início a representação na forma de fração e a representação decimal, o que leva os autores a utilizar as unidades de medida, principalmente de comprimento e de capacidade. As referências a conjuntos discretos são apenas apresentadas quando os autores destacam os materiais que podem ser utilizados no ensino das frações, onde se referem a desenhos de grupos de objetos ou de animais.

É ainda de destacar que os autores têm normalmente o cuidado de definirem explicitamente a unidade de referência, contudo, na obra são apresentados esquemas para evidenciar a equivalência de frações onde as unidades de referência não são iguais o que poderia provocar equívocos nos alunos relativamente à comparação e equivalência de frações.

No caso de Pinheiro (1961), as primeiras referências à unidade também são feitas no âmbito do estudo dos números naturais e referem-se a conjuntos de objetos para contagem. No contexto do ensino dos números racionais, o trabalho centra-se inicialmente na representação decimal, razão pela qual o autor privilegia as unidades contínuas, essencialmente relacionadas com as medidas. No ensino das operações com decimais, Pinheiro (1961) também utiliza essencialmente unidades contínuas para exemplificar e representar pictoricamente as operações a efetuar. Nestes casos a unidade de referência é usualmente uma tira de papel, como no exemplo seguinte onde ilustra uma unidade contínua dividida em 10 partes iguais:

> Um menino tinha um bolo. Deu 0,2 ao José, 0,3 ao João e 0,4 ao Carlos. Que quantidade de bolo deu aos três? Concretizamos com uma unidade representada graficamente:

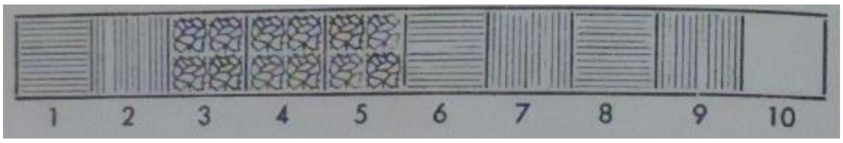


Figura 7.6. Representação simbólica e pictórica de dados de um problema onde é utilizada uma unidade contínua (Pinheiro, 1961, p. 72, digitalização, 100% do original).

No início do trabalho com a fração, Pinheiro (1961) também recorre às tiras de papel que vai dobrando para obter as diferentes frações. Neste trabalho, Pinheiro (1961) também apresenta situações onde recorre a unidades discretas, principalmente quando trabalha a fração como operador partitivo multiplicativo.

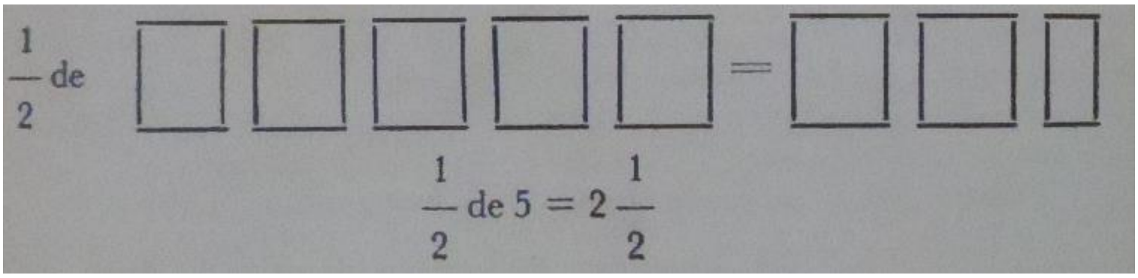
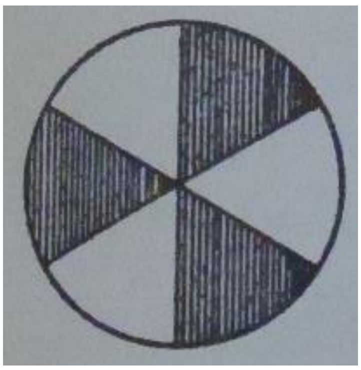


Figura 7.7. Exercícios de concretização das frações, onde se recorre a unidades discretas (Pinheiro, 1961, p. 80, digitalização, 100% do original).

Na abordagem às noções de numerador, denominador e nomenclatura das frações também é utilizada uma unidade contínua, circular.



Dividi a unidade em 6 partes iguais e tomei 3 dessas partes. A fração que eu tomei da unidade escreve-se (três sextos). (Pinheiro, 1961, p. 81)

É de salientar ainda que Pinheiro (1961) atribui muita importância à definição da unidade de referência que serve de contexto aos exemplos, para depois ser feita a generalização a qualquer unidade.

Na obra de Gonçalves (1972, 1974), as primeiras referências à unidade são apresentadas no estudo inicial da numeração, com exemplos de unidades discretas simples. Ainda no âmbito do estudo dos números naturais são referidas unidades discretas compostas como a dezena, a dúzia e o quarteirão, que são designados como conjuntos-unidade. Para Gonçalves (1974) esta era uma ampliação do conceito unidade.

No âmbito do estudo dos números racionais, as primeiras referências à unidade surgem no estudo dos decimais porque a primeira abordagem de Gonçalves (1974) a este conjunto numérico é feita através da representação decimal. As unidades destacadas pelo autor são as que se relacionam com as medidas de comprimento. Destacam-se também as unidades designadas por decimais 0,1; 0,01. Para Gonçalves (1974) esta ampliação do conceito de unidade "é a base de um ramo importante, permitindo resolver facilmente questões que, de outro modo, seriam muito complexas" (p. 79) e que por isso devem ser desenvolvidas na criança. Gonçalves (1974) enfatiza esta questão porque lhe permite tipificar o tipo de problemas a propor aos alunos neste conteúdo, destacando que nos problemas com os decimais, a maioria tem os seguintes elementos: "O valor correspondente à unidade; a fração; o valor correspondente a essa fração" (p. 79).

No primeiro conjunto de exercícios propostos por Gonçalves (1974), que trabalham o caso de reconhecer (ou achar) a fração, destaca-se a divisão da unidade em 10 ou 100 partes iguais quando utiliza as unidades contínuas e as coleções de objetos ou os desenhos quando utiliza as unidades discretas. Um exemplo da utilização de unidades discretas é o seguinte: "4.º Apresentar 20 rodelas (ou feijões, milho, etc.) de cores diferentes e perguntar: Que fração do conjunto representam: as rodelas vermelhas?; as amarelas?; etc. (Gonçalves, 1974, p. 84).

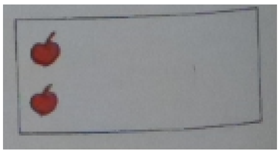
No segundo conjunto de exercícios, onde se pretende achar o valor da parte de um todo, designado por valor da fração, são utilizadas unidades contínuas e discretas. Nos exemplos com unidades discretas são utilizados objetos como rodelas ou lápis, e nos exemplos com unidades contínuas são utilizados círculos.

No terceiro e último tipo de exercícios, achar o valor da unidade (ou do inteiro, ou do todo), o autor sugere três exercícios em que é dado a fração e o seu valor, e pede-se que o aluno indique qual a unidade. Neste caso são usadas apenas unidades discretas. Gonçalves apresenta o raciocínio a utilizar para a resolução dos exercícios.

> 1.º Duas rodelas. Estas duas rodelas são a décima parte das que estão na caixa. Quantas estão na caixa?
>
> Raciocínio: Uma décima = 2 rodelas;
> 10 décimas = 10 x 2 rodelas = 20 rodelas. (Gonçalves, 1974, p. 84)

No terceiro exemplo deste caso, Gonçalves (1974) apresenta o conjunto recorrendo a uma representação pictórica.

3.º As duas maçãs desenhadas representam duas décimas das que havia no tabuleiro. Desenha as que de lá se tiraram. (Gonçalves, 1974, p. 84)



Quando se centra no ensino das frações, Gonçalves (1974) também explicita a utilização de diferentes unidades quando distingue os diferentes conceitos que a fração pode representar, referindo explicitamente conjuntos contínuos e discretos O primeiro exemplo refere-se à fração como a parte de um todo de uma unidade contínua "1) Na partilha de um conjunto contínuo ele significa «uma ou mais das partes iguais em que se dividiu esse conjunto».". No segundo exemplo, Gonçalves (1974) apresenta a fração como parte de um todo de um conjunto discreto "2) Na partilha de um conjunto descontínuo, ele significa «uma ou mais das partes iguais desse conjunto» (de coisas, pessoas, etc.)." (Gonçalves, 1974, p. 143, aspas no original). Para Gonçalves (1974) a iniciação do estudo das frações deveria começar pela partilha equitativa de unidades contínuas.

Na segunda parte do capítulo onde trabalha as frações, Gonçalves (1974) identifica um percurso de oito fases para o ensino intuitivo das frações. Para cada uma destas oito fases, Gonçalves (1974) apresenta exercícios que permitem o desenvolvimento do ensino deste conteúdo. Nestes exercícios destaca-se a utilização de unidades contínuas, com a partição de objetos do dia a dia tais como bolos e tortas, as medidas de comprimento e de capacidade, as formas geométricas.

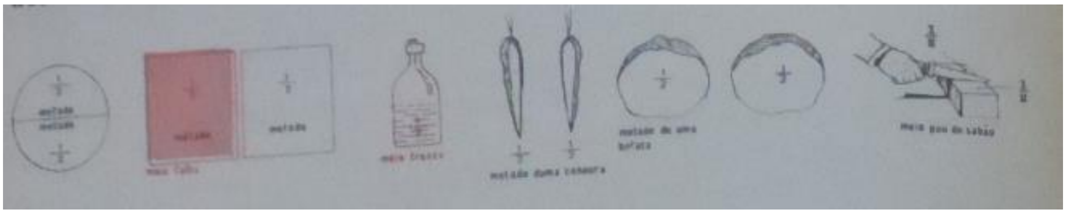
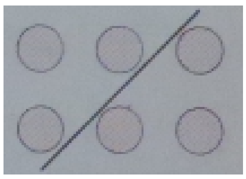


Figura 7.8. Apresentação de algumas unidades partidas ao meio, com a sua representação através de um desenho, verbalmente por escrito e simbolicamente em fração. (Gonçalves, 1974, p. 146, digitalização, 100% do original).

Apenas numa das fases trabalho são utilizadas unidades discretas, como no exemplo seguinte:

4) Procedam também as crianças à partição em duas partes iguais de conjuntos determinados: «separe, com uma linha (ponteiro, régua, etc.) metade das coisas deste conjunto». (Gonçalves, 1974, p. 147, aspas no original)



Na obra de Gonçalves (1974) é explícito o cuidado que apresenta na definição da unidade de referência e que no mesmo exercício as unidades de referência utilizadas não levem a equívocos. Numa das fases do trabalho com as frações, Gonçalves (1974) refere que os alunos devem obter metades, terços, da mesma unidade ou de unidades diferentes e compará-las.

Gonçalves (1974) critica os programas do ensino primário da época porque, no seu entendimento, estes limitavam o trabalho a realizar com as frações a um tipo de problemas, em que se conhecia o todo e a fração e procurava-se o seu valor. Para Gonçalves (1974) isto limitava o trabalho neste conteúdo porque não levava os alunos a trabalharem situações de reconstrução da unidade, sabendo a fração e o valor dela, assim como outro tipo de exercícios.

7.9.1. Em síntese

No que se refere às obras do segundo período em estudo, Pimentel Filho (1934) e Gonçalves (1974) referem-se explicitamente ao trabalho com diferentes tipos de unidades. Pimentel Filho (1934) distingue grandezas contínuas, como uma tira de papel ou uma fatia de queijo, destacando o seu papel essencial no estudo das frações, das grandezas discretas, ou descontínuas como são designadas pelo autor, que refere a propósito do estudo dos números naturais. Sublinha ainda a existência das unidades compostas quando se refere ao sistema decimal. Apesar de salientar as grandezas contínuas no trabalho inicial com as frações, nos exercícios propostos também surgem exemplos com unidades discretas, mas Pimentel Filho (1934) não explicita essa distinção nesses exemplos. No trabalho de Pimentel Filho (1934) parece existir uma insistência maior no conhecimento dos conteúdos e do seu ensino do que no reconhecimento de dificuldades particulares quanto à utilização de diferentes unidades no ensino dos números racionais. No que diz respeito a Gonçalves (1972, 1974), que também distingue explicitamente diferentes tipos de unidades, existe uma ênfase no trabalho com a unidade porque permite ao autor tipificar os problemas a propor aos alunos neste conteúdo. Um dos exercícios tipo propostos refere-se à reconstrução da unidade, em que, conhecendo-se a parte e a fração, é pedido que se encontre o todo. Nos exemplos de exercícios que Gonçalves (1974) apresenta distingue explicitamente as situações em que se refere a unidades contínuas e a unidades discretas, que designa por conjunto contínuo e conjunto discreto. É também uma proposta centrada no conhecimento dos conteúdos e do seu ensino, estabelecendo uma sequência de ensino com exercícios diversificados com a utilização da unidade, identificação da unidade de referência, utilização de diferentes tipos de unidades (Monteiro & Pinto, 2005; Lamon, 2006), mas onde não existe uma identificação e antecipação de dificuldades que os alunos poderão vir a apresentar, no sentido do conhecimento do conteúdo e dos alunos. Nas obras de Gaspar e Ferreira (1944) e de Pinheiro (1961) é destacado o trabalho com as unidades contínuas, nomeadamente no trabalho com as frações, mas não é explicitada uma distinção entre diferentes tipos de unidades.

7.10. Equivalência de frações

Na sua obra, Pimentel Filho (1934) trata pela primeira vez da equivalência no capítulo dedicado à representação numérica da fração, nos casos em que a fração representa a unidade. Neste capítulo da obra, Pimentel Filho (1934) dedica o sexto ponto à equivalência de frações, enunciando o que chama de princípio fundamental das frações. O autor enuncia esse princípio verbalmente, afirmando que multiplicando ou dividindo o numerador e o denominador de uma fração pelo mesmo número o valor desta não se altera, mas não refere que esse número tem de ser diferente de zero. Para além do enunciado verbal, Pimentel Filho (1934) apresenta uma figura que evidencia a equivalência de frações.

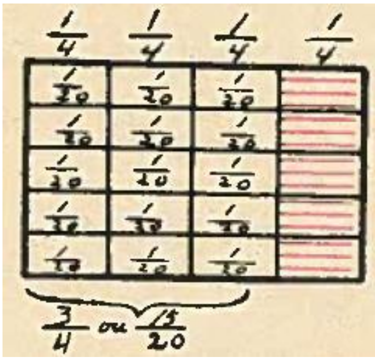


Figura 7.9. Um exemplo para a apresentação das frações equivalentes (Pimentel Filho, 1934, p. 157, digitalização, 100% do original).

Pimentel Filho (1934) recorre à imagem para esclarecer como, através de diferentes partições de uma mesma unidade, se pode chegar à equivalência das frações. No final, o autor utiliza a representação verbal e simbólica para estabelecer a relação entre duas frações equivalentes.

> a fração $\frac{15}{20}$ resulta da fracção $\frac{3}{4}$ multiplicando os dois termos desta por 5, $\frac{3 \times 5}{4 \times 5} = \frac{15}{20}$. Se dividirmos os dois termos da fracção $\frac{15}{20}$ por 5, resultará a fracção $\frac{3}{4}$ que, como acabámos de ver, lhe é igual: $\frac{15:5}{20:5} = \frac{3}{4}$. Vê-se, portanto que uma fração não muda de valor quando multiplicamos ou dividimos os seus dois termos pelo mesmo número. (Pimentel Filho, 1934, p. 158).

Pimentel Filho (1934) utiliza o princípio fundamental para a simplificação e comparação de frações. Enuncia que o exposto iria permitir converter uma fração noutra mais simples, apresentando exemplos das vantagens da simplificação das frações, até se obter uma fração irredutível. Pimentel Filho (1934) trabalha ainda a redução ao mesmo denominador, que era utilizada para facilitar a comparação de frações e fazia uso do mesmo princípio fundamental. Eram depois sugeridos exercícios para treino da operação que induziriam as crianças para a descoberta da regra geral.

No caso de Gaspar e Ferreira (1944), estes começam por trabalhar as metades, os quartos e os oitavos, expondo um esquema que evidencia a equivalência entre frações.

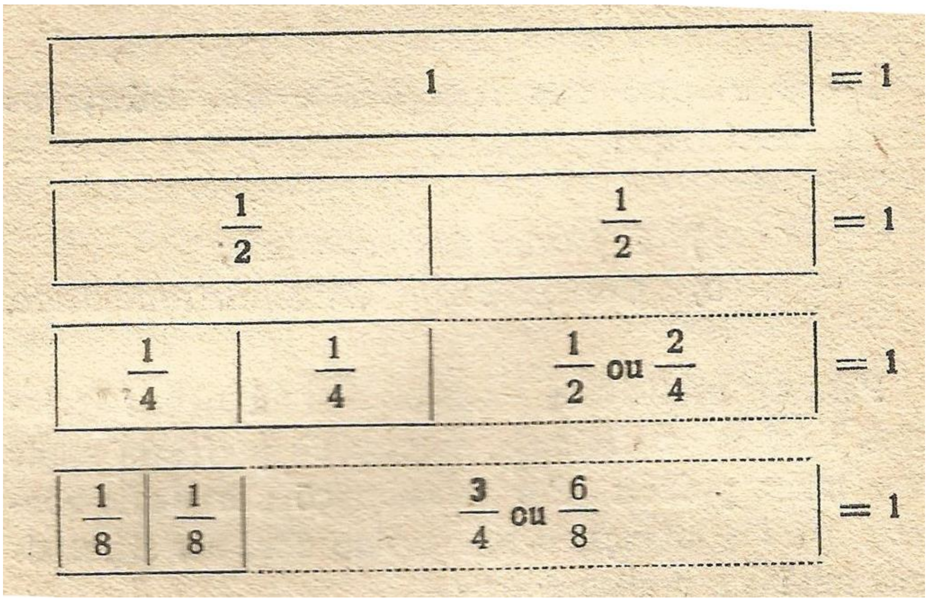


Figura 7.10. Equivalência entre frações (Gaspar & Ferreira, 1944, p. 52, 100% do original).

Gaspar e Ferreira (1944) apresentam a equivalência de frações como uma das dificuldades poderão ter no desenvolvimento deste conteúdo. Estes autores destacam que esta dificuldade poderá ser superada com recurso à concretização, à representação pictórica e à repetição. Para a exemplificação da representação dessa concretização, os autores apresentam o seguinte esquema, onde pretendem evidenciar as relações de equivalência entre as frações.

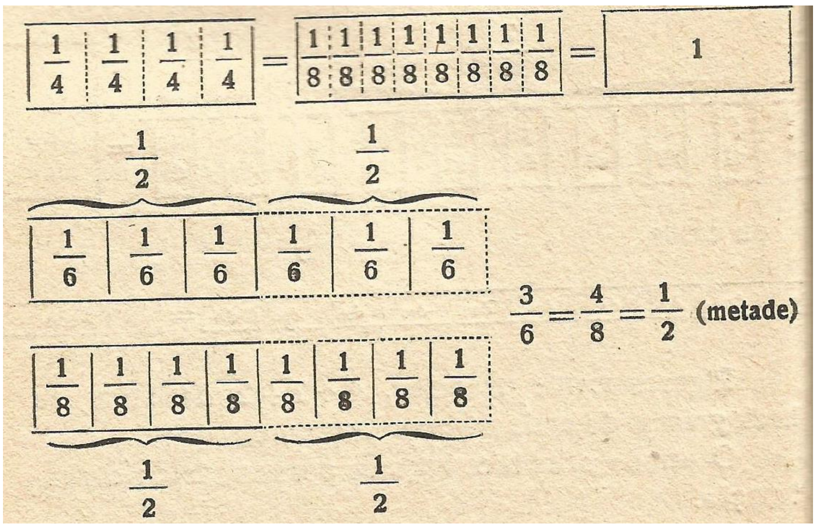


Figura 7.11. As diferentes partições da unidade e a equivalência entre frações (Gaspar & Ferreira, 1944, p. 54, digitalização, 100% do original)

No entanto, é de destacar que a imagem que os autores apresentam para a unidade não é sempre igual o que pode levar a equívocos entre os alunos.

Pinheiro (1961) faz uma apresentação das frações semelhante à de Gaspar e Ferreira (1944) apresentando um esquema que evidencia a relação de equivalência entre frações.

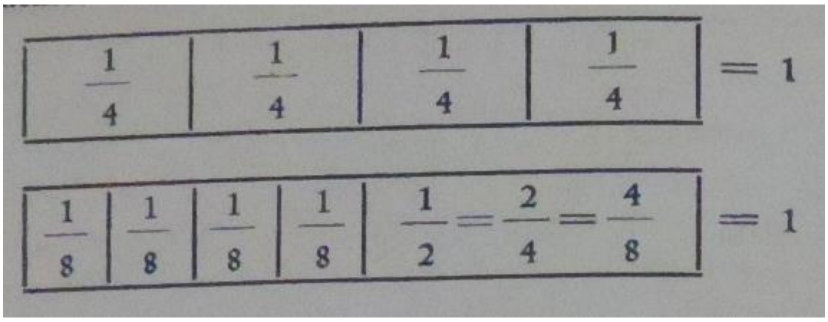


Figura 7.12. Concretização da equivalência entre frações (Pinheiro, 1961, p. 80, digitalização, 100% do original)

Logo na exploração inicial das frações com modelos ativos e pictóricos, Pinheiro (1961) trabalha a equivalência de frações, que depois representa simbolicamente.

No seu trabalho, Gonçalves (1974) aborda a questão das frações equivalentes após a exposição das questões gerais sobre o ensino das frações. Gonçalves (1974) destaca que um número fracionário pode ser representado por diferentes frações, apresentando simbolicamente exemplos de frações que designam o mesmo número fracionário. Gonçalves (1974) apresenta depois a definição de frações equivalentes, recorrendo à representação simbólica, como sendo "duas frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ são equivalentes somente se a x d = b x c." (p. 144), referindo no final exemplos de frações equivalentes como $\frac{2}{6}$ e $\frac{3}{9}$, porque 2 x 9 = 6 x 3.

No desenvolvimento do trabalho com as frações, Gonçalves (1974) propõe que os alunos verifiquem a equivalência entre frações, apresentando exemplos em que essa verificação é feita por concretização e depois representada pictoricamente e simbolicamente.

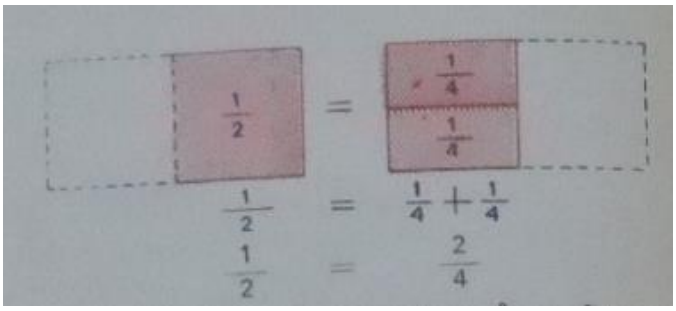


Figura 7.13 – Representação pictórica e simbólica da equivalência das frações (Gonçalves, 1974, p. 148, digitalização, 100% do original)

A equivalência de frações também é explorada nos casos em que a fração representa a unidade.

7.10.1. Em síntese

Nos manuais analisados no segundo período a equivalência de frações é abordada com diversos exemplos, recorrendo à relação entre a representação ativa, a pictórica, a representação verbal e a representação simbólica, o que é particularmente evidente em Pimentel Filho (1934). Este autor destaca uma sequência de trabalho onde evidencia a simplificação de frações e as relações de equivalência entre as frações obtidas com a simplificação. Os manuais de Gaspar e Ferreira (1944) e Pinheiro (1961) apresentam a equivalência de frações como uma das dificuldades que os alunos enfrentam no trabalho com este conteúdo. Nos dois casos seguem uma sequência muito idêntica no trabalho com a equivalência de frações, apresentando um esquema em que a unidade vai surgindo dividida em diferentes partes e que estabelece a relação entre diferentes frações, sendo para isso utilizada a representação pictórica e a representação simbólica, como descreve por exemplo Lamon (2002) ou Kammi e Clark (1995). É de referir que no manual de Gaspar e Ferreira (1944) não há a preocupação de apresentar a unidade sempre igual nestes esquemas pictóricos, o que poderia induzir os alunos em erro. Nestes dois manuais do segundo período parece existir essencialmente uma preocupação com o conhecimento pedagógico, principalmente com o conhecimento do conteúdo e dos alunos ou o conhecimento dos conteúdos e do seu ensino. No caso de Gonçalves (1974), para além do conhecimento pedagógico, também há a preocupação de generalizar e apresentar uma definição de frações equivalentes no sentido do conhecimento comum do conteúdo.

Em qualquer dos casos analisados os exemplos utilizados para abordar a equivalência de frações centram-se nas situações matemáticas estritamente numéricas, sendo isto comum a todos os manuais, mesmo os do primeiro período.

7.11. Comparação e ordenação de racionais

No caso de Pimentel Filho (1934), a primeira referência à comparação e ordenação de números racionais aparece quando o autor aborda a comparação de frações com o mesmo denominador. O autor destaca que se trata de um conhecimento intuitivo e não indica possíveis dificuldades dos alunos ou estratégias a adotar para o seu ensino. No caso de terem o mesmo numerador, mas não o mesmo denominador, Pimentel Filho (1934) salienta que seria necessário recorrer à concretização, recorrendo a um modelo de quantidade contínua para representar uma situação em que uma unidade é dividida primeiro em três partes iguais e depois em cinco partes iguais, tomando-se duas dessas partes em cada situação. No final Pimentel Filho (1934) recorre à representação simbólica para comparar as frações. Pimentel Filho (1934) também apresenta exemplos em que usa a unidade como referência para comparar frações.

Após o trabalho com a equivalência de frações, Pimentel Filho (1934) salienta que uma das aplicações desse princípio fundamental das frações poderia ser a comparação e ordenação de frações. A comparação de frações também surge nalguns problemas, em que Pimentel Filho (1934) utiliza os contextos de medida, como no exemplo seguinte:

> 1.º Um operário faz $\frac{4}{5}$ de um metro de pano em uma hora; um seu companheiro faz os $\frac{7}{5}$ de um metro de pano no mesmo tempo.
> ¿ Qual dos dois trabalha mais depressa? Quantos metros terá esse feito a mais do que o outro após 12 horas de trabalho? Quantos metros de pano terão feito os dois ao cabo das 12 horas? (Pimentel Filho, 1934, p. 174).

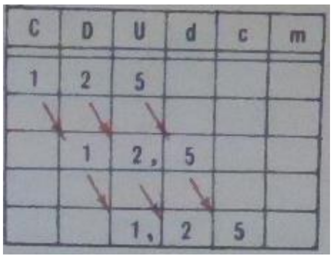
No que diz respeito à comparação e ordenação de números racionais representados na forma decimal, Pimentel Filho (1934) recomenda a utilização da concretização e de modelos pictóricos, salientando que a perceção tornaria evidente a relação entre as décimas, as centésimas e a as milésimas. Na comparação de decimais, Pimentel Filho (1934) estabelece primeiro uma relação com as frações decimais e a sua comparação e depois evidencia o valor de posição do sistema decimal que também é utilizado na representação decimal, indicando algumas dificuldades que os alunos por vezes apresentam.

Na comparação e ordenação de frações, Gaspar e Ferreira (1944) começam por comparar frações unitárias com denominadores diferentes, recorrendo a modelos de quantidade contínua e depois à representação simbólica. Como os autores defendem um trabalho com as frações e com a representação decimal em paralelo, a comparação é também feita com decimais recorrendo também a modelos pictóricos. Quando trabalham a equivalência de frações, Gaspar e Ferreira (1944) salientam que os mesmos modelos pictóricos poderão ser utilizados para comparar frações.

No caso de Pinheiro (1961), este autor faz a iniciação aos números racionais através da representação decimal e, por isso, destaca-se o valor de posição para comparar os decimais, não existindo, no entanto, nenhum procedimento explicitado. No que diz respeito à comparação e ordenação de frações, Pinheiro (1961) utiliza modelos de quantidade de contínua para evidenciar as diferenças e igualdades entre frações unitárias.

Tal como Pinheiro (1961), Gonçalves (1974) inicia o estudo dos números racionais através da representação decimal. Por esta razão, as primeiras referências à comparação e ordenação também estão relacionadas com o valor de posição do sistema decimal. O autor recorre a modelos de área para representar as décimas e as centésimas e verificar a ordem de grandeza e a relação existente entre estas partes da unidade. Também são propostos exercícios de identificação do valor da posição de cada unidade decimal, usando tabelas que o autor designa como dispositivo, que também são utilizados para induzir as regras da multiplicação por 10, 100 e 1000.

125 … … 12,5 … … 1,25 … … 0,125
340 … … 34,0 … … 3,40 … … 0,340
24 … … 2,4 … … 0,24 … … 0,024



Os números tornam-se, sucessivamente, 10, 100, 1000 vezes menores, conforme a vírgula se deslocou, respetivamente, 1, 2, 3 casas para a esquerda. (Gonçalves, 1974, p. 55)

Este tipo de exercício também é utilizado para comparar grandezas como os comprimentos.

No que diz respeito à comparação e ordenação de frações, Gonçalves (1974) começa por propor situações em que se utiliza unidade como referência, verificando se a fração corresponde a uma quantidade maior ou menor do que a unidade. Gonçalves (1974) também a equivalência de frações para estabelecer relações de comparação entre frações. Nestes casos recorre à concretização e a modelos de quantidade contínua. Para a comparação de frações, Gonçalves (1974) segue uma sequência pela comparação de frações unitárias, depois a comparação de frações com o mesmo denominador, que o autor designa como frações homogéneas, a seguir as frações equivalentes, a relação entre as partes e o todo, usando a unidade como referência e finalmente a unidade inteira como quantidade fracionária.

Na comparação de frações unitárias, Gonçalves (1974) sugere a utilização de tiras de papel para os alunos dividirem num número diferente de partes iguais e compararem por sobreposição e depois ordenarem por crescente ou decrescente de valor. Depois de concretizado em tiras de papel, o autor apresenta a representação modelos de quantidade contínua, com as diferentes divisões da unidade.

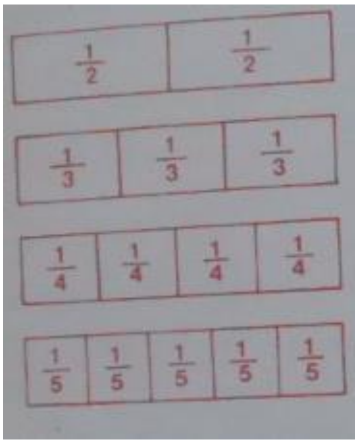


Figura 7.14. Desenho representativo das divisões feitas nas tiras de papel. (Gonçalves, 1974, p. 152, digitalização, 100% do original).

Depois deste trabalho, Gonçalves (1974) sugere que os alunos registem o que observaram e verbalizem a regra "*as frações unitárias diminuem de valor quando aumenta o seu denominador*." (Gonçalves, 1974, p. 152, itálico no original). São ainda propostos exercícios como identificar a fração maior e a menor de entre frações unitárias representadas simbolicamente, identificar frações unitárias maiores do que uma fração unitária dada, pôr por ordem crescente e decrescente frações unitárias apresentadas simbolicamente e escrever duas frações maiores do que uma fração unitária dada.

No segundo momento, é sugerida uma sequência que permita levar a criança a comparar frações com o mesmo denominador. Nesta sequência, sugere-se que se continue a trabalhar com o mesmo tipo de material, tiras de papel, levando a criança a observar que $\frac{1}{3} < \frac{2}{3} < \frac{3}{3}$ e outras similares. Para além desta representação simbólica, Gonçalves (1974) também apresenta o que poderá ser um desenho representativo do trabalho realizado, a apresentar às crianças.

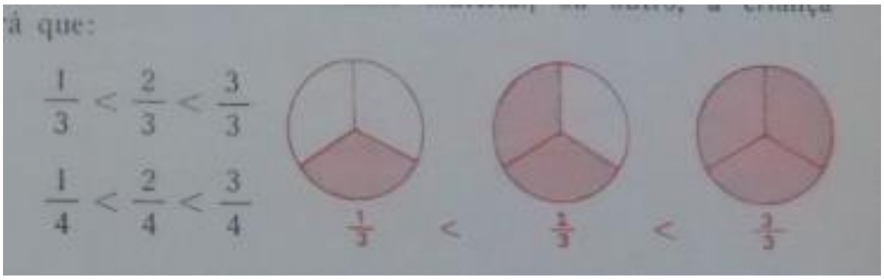


Figura 7.15. Desenho e linguagem simbólica que ilustram a comparação de frações com o mesmo denominador (Gonçalves, 1974, p. 153, digitalização, 100% do original).

Partindo do trabalho realizado, Gonçalves (1974) pretende que a criança seja levada a estabelecer a regra para comparar frações com o mesmo denominador, que enuncia da seguinte forma "*Quando duas frações têm o mesmo denominador, é maior a que tiver maior numerador,* *dado que foi tomado maior número de partes*." (Gonçalves, 1974, p. 153, itálico no original). Logo a seguir, apresenta exercícios para praticar a comparação de frações. São exercícios estritamente numéricos, com recurso à representação simbólica, como por exemplo

> a) Escreve as seguintes frações por ordem crescente: $\frac{1}{5}\frac{3}{5}\frac{2}{5}\frac{7}{5}\ \frac{6}{5}\ \frac{9}{5}$;
>
> β) Escreve duas frações maiores que $\frac{3}{7}$." (Gonçalves, 1974, p. 153)

No terceiro momento desta parte do capítulo, o trabalho relaciona-se com a comparação de frações com o mesmo numerador. É descrita uma sequência com três pontos, começando o autor por sugerir que se volte a utilizar material idêntico ao anterior, para levar a criança a verificar relações entre frações com o mesmo numerador. São apresentados alguns exemplos, onde o autor recorre essencialmente à linguagem simbólica e a desenhos, como por exemplo "$\frac{1}{2} > \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{2}{2} > \frac{2}{3}$" (p. 153) ou como exemplificado na figura seguinte.

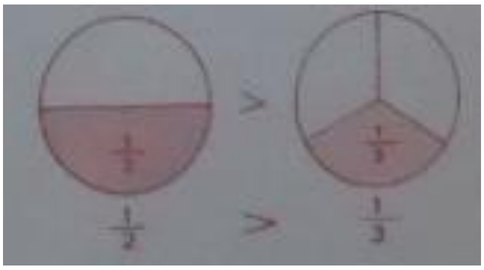


Figura 7.16. Desenho que ilustra a comparação de frações com o mesmo numerador (Gonçalves, 1974, p. 153, digitalização, 100% do original).

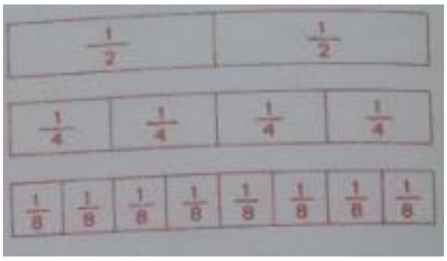
Só posteriormente os alunos seriam induzidos a verbalizar a regra que Gonçalves (1974) enuncia da seguinte forma "Quando duas frações têm o mesmo numerador, é maior a que tiver menor denominador (porque a unidade foi dividida em um menor número de partes)." (p. 154). No final deste terceiro momento, o autor sugere a prática de exercícios, mas não exemplifica.

O quarto momento desta parte do capítulo é dedicado às frações equivalentes. Tal como em momentos anteriores, é sugerido que se voltem a usar tiras de papel iguais. Uma para dobrar em metades, outra em quartos e outra para dobrar em oitavos. Destacando uma metade, os alunos devem verificar por sobreposição que $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$, $\frac{1}{2} = \frac{4}{8}$ e $\frac{2}{2} = \frac{4}{4}$. Gonçalves (1974) estabelece uma relação entre a representação simbólica e a representação pictórica, através de desenhos, tal como se apresenta a seguir.

$\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$, $\frac{1}{2} = \frac{4}{8}$ e $\frac{2}{2} = \frac{4}{4}$.

Logo, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$ e $\frac{4}{8}$ são nomes para o mesmo número fracionário.

(Gonçalves, 1974, p. 154)

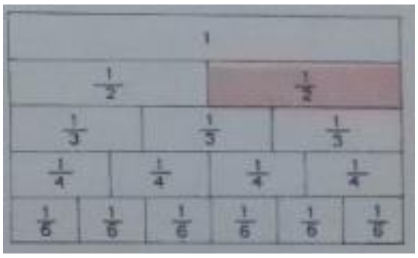


Gonçalves (1974) salienta que os alunos devem fazer o mesmo para verificarem a equivalência entre outras frações, nomeadamente com denominador 3 e denominador 6. A seguir, as crianças devem ser levadas a observar que se conseguem obter frações equivalentes a uma dada, multiplicando, ou dividindo, ambos os termos pelo mesmo número. O autor apresenta diversos exemplos, recorrendo sempre à representação simbólica. Depois da observação e descoberta, as crianças devem ser levadas ao que Gonçalves (1974) designa por propriedade fundamental das frações que enuncia da seguinte forma “*multiplicando ou dividindo os termos de uma fração por um número natural ≠ 0 obtém-se uma fração equivalente*.” (p. 155, itálico no original). Por último, os alunos devem praticar exercícios, em que, numa relação entre a representação simbólica e a pictórica, consigam encontrar a equivalência entre frações, como no exemplo.

O diagrama ao lado mostra que:

$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$

$\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ (Gonçalves, 1974, p. 155)



O quinto momento é dedicado à relação entre as partes e o todo, comparação com a unidade. Gonçalves (1974) apresenta diversos exemplos estabelecendo a relação entre a parte e o todo de uma unidade contínua. Gonçalves (1974) continua a privilegiar a relação entre a representação pictórica e a representação simbólica. Nesta situação, também destaca a relação entre a adição e a subtração e a adição e a multiplicação.

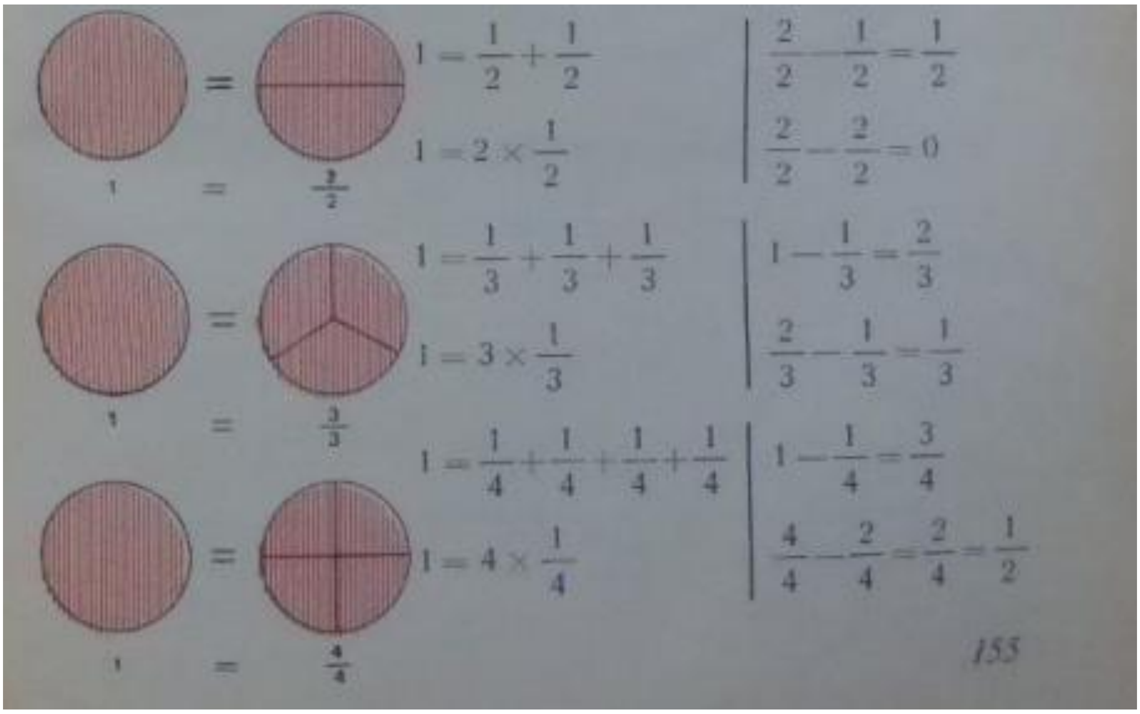


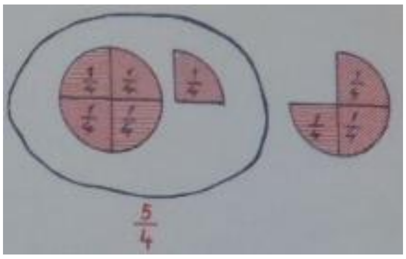
Figura 7.17. Relação entre a parte e o todo (Gonçalves, 1974, p. 155, digitalização, 100% do original).

Gonçalves (1974) considera que a criança devia ser depois levada a concluir, generalizando que $1 = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \frac{4}{4}$, o que a levaria a estar capacitada para achar com facilidade a distância entre a fração e a unidade, propondo que se realizem exercícios como os seguintes: “Quanta falta a $\frac{5}{8}$ para 1? Raciocínio: $1 = \frac{8}{8}$; $\frac{8}{8} - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$ ” (Gonçalves, 1974, p. 156).

O sexto momento desta parte trabalha a unidade inteira como o que Gonçalves (1974) designa por quantidade fracionária. Gonçalves (1974) considera que, após os exercícios que foram expostos anteriormente, a criança facilmente será levada a concluir que é sempre possível expressar a unidade inteira como quantidade fracionária, na forma de fração. Apresenta alguns exemplos em que mostra a igualdade entre a unidade e uma fração em que o numerador é igual ao denominador. Nesta situação utiliza apenas a representação simbólica, usando a multiplicação como “$1 = 2 \text{ x} \frac{1}{2} = \frac{2}{2}$.” (Gonçalves, 1974, p. 156).

Na sétima parte deste capítulo, Gonçalves (1974) propõe o trabalho com frações maiores do que a unidade. O autor começa por referir que a criança já “conhece o crescimento da quantidade fracionária, por iteração da unidade fracionária: $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ $\quad \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3}{3}$” (Gonçalves, 1974, p. 156). A criança deve ser levada a verificar que, quando junta o terceiro terço fica com uma unidade inteira. Desta forma, o autor considera que a criança facilmente compreenderá que se quisesse juntar aos quatro quartos mais um quarto, teria de recorrer a outra unidade e dividi-la em quatro partes iguais. Para explicar esta noção, Gonçalves (1974) estabelece uma relação entre a representação pictórica do ato de juntar um quarto à unidade, a expressão verbal e a representação simbólica.

c) Porém, ela facilmente será agora levada a compreender que, se quiséssemos juntar, por ex., a quatro quartos mais um quarto, o poderíamos fazer, lançando mão de outro inteiro, dividido em quartos (ver grav.). $\frac{4}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$ (Gonçalves, 1974, p. 157)



É sugerido que a criança utilize material concreto divisível para realizar exercícios idênticos ao anterior, sendo levada a concluir que se juntar sucessivamente unidades fracionárias, isso levará a um crescimento infinito da quantidade fracionária. Gonçalves (1974) apresenta um exemplo com frações com denominador 6.

$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$ $\quad$ $\frac{4}{6} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

$\frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6}$ $\quad$ $\frac{5}{6} + \frac{1}{6} = \frac{6}{6}$

$\frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$

e) a partir de aqui, a quantidade fracionária será maior que 6/6, ou seja, maior que 1.

$\frac{6}{6} + \frac{1}{6} = \frac{7}{6} = 1\frac{1}{6}$ $\quad$ Ora: $\frac{12}{6} = \frac{6}{6} + \frac{6}{6} = 1 + 1 = 2$

………………..

$\frac{11}{6} + \frac{1}{6} = \frac{12}{6} = 2$ (Gonçalves, 1974, p. 157)

Gonçalves (1974) utiliza este exemplo para ir formando frações impróprias, mencionando que esta designação se deve ao facto de elas se referirem a frações que valem mais do que a unidade.

7.11.1. Em síntese

Relativamente aos manuais do segundo período, Pimentel Filho (1934) começa por destacar que a comparação e ordenação de frações com o mesmo denominador é um processo intuitivo e que, por isso, não deverá oferecer dificuldades aos alunos. Já no que se refere à comparação de frações com o mesmo numerador, destaca a necessidade de recorrer a modelos concretos, representações ativas e pictóricas, para concretizar as situações. Pimentel Filho (1934) também recorre à unidade como referência para comparar frações. Para além das situações estritamente matemáticas, Pimentel Filho (1934) apresenta algumas situações em que recorre a problemas, nomeadamente com contextos de medida, para enquadrar a comparação de frações. No que diz respeito à comparação de números racionais na sua representação decimal, Pimentel Filho (1934) começa por estabelecer uma relação com a comparação de frações decimais e só depois evidencia o valor de posição do sistema decimal, indicando algumas dificuldades que os alunos poderão apresentar. Evidencia-se nesta obra o conhecimento pedagógico do conteúdo, nomeadamente o conhecimento do conteúdo e dos alunos e o conhecimento do conteúdo e do seu ensino.

Gaspar e Ferreira (1944) propõe como primeiros exercícios na comparação de números racionais, a comparação de frações unitárias com denominadores diferentes, utilizando modelos pictóricos de quantidade contínua, recorrendo posteriormente à representação simbólica. Paralelamente propõe um trabalho de comparação utilizando a representação decimal, estabelecendo-se a relação com a fração decimal. Nesta situação também são utilizados modelos pictóricos de unidade contínua. No trabalho proposto por Gaspar e Ferreira (1944) não é percetível que na comparação de números racionais na representação decimal seja destacado o valor de posição do sistema decimal.

Nas obras de Pinheiro (1961) e de Gonçalves (1974) o estudo dos números racionais é iniciado com a representação decimal e, por isso, também a comparação e ordenação é feita em primeiro lugar com esta representação. Destaca-se nos dois trabalhos a importância atribuída ao valor de posição do sistema decimal para fazer a comparação de decimais. No entanto, distingue-se nestes dois trabalhos a importância dada à comparação de números racionais na forma de fração. Enquanto Pinheiro (1961) praticamente não desenvolve trabalho para a comparação de frações, Gonçalves (1974) propõe uma sequência de ensino que começa com a comparação de frações unitárias, frações com o mesmo denominador e recorrendo posteriormente a frações equivalentes para comparar frações com denominadores e numeradores diferentes. Neste processo recorre frequentemente a modelos ativos e pictóricos de quantidades contínuas, apresentando paralelamente a representação simbólica na forma de fração. Qualquer um destes dois autores recorre essencialmente a situações matemáticas estritamente numéricas na comparação de números racionais.

7.12. Operações com números racionais

7.12.1. Frações

No que diz respeito às operações com números racionais, Pimentel Filho (1934) começa por abordar a adição e a subtração com frações. A primeira abordagem a estas operações é feita com cálculo oral, tal como é designado por Pimentel Filho (1934) e só depois é usado o cálculo escrito. Logo no início do ponto dedicado às operações, Pimentel Filho (1934) enfatiza que em todas as situações as frações dirão respeito à mesma unidade.

No cálculo oral são apresentados quatro exemplos de exercícios de adição e subtração de frações, utilizando unidades contínuas e unidades discretas. Um dos exemplos refere-se a uma situação em que as unidades estão repartidas num igual número de partes e os outros três exemplos referem-se a situações em que a unidade está repartida num diferente número de partes. O exemplo seguinte apresenta uma situação em que a unidade está repartida num diferente número de partes, onde o autor recorre à comparação de frações e toma como referência a unidade inteira para a resolver oralmente.

> 2.º De dois copos iguais, um, está cheio até um terço, o outro até aos três quartos. ¿ Que sucederá se eu despejar o primeiro no segundo?
> Paulo: «Uma inundação ... 1 terço é mais do que um quarteirão.» Três quartos e um terço ... são 9 doze avos e 4 doze avos ... 13 doze avos ... 1 inteiro e doze avos. É, com efeito, este um doze avos que sairá do copo.» (Pimentel Filho, 1934, p. 163)

Na adição e subtração de frações Pimentel Filho (1934) começa por apresentar exemplos de casos particulares em que as frações têm o mesmo denominador, para depois apresentar situações em que essa particularidade já não acontece e é necessário escrever frações equivalentes às dadas, mas com o mesmo denominador. O autor apresenta as operações recorrendo a representações pictóricas e posteriormente estabelecendo a relação com a representação verbal, com a fração escrita por extenso, e com a representação simbólica. Pimentel Filho (1934) refere-se a algumas dificuldades que os alunos poderão apresentar na adição e subtração de frações, como somarem os numeradores e os denominadores, apresentando sugestões de exercícios que levem os alunos a concluir sobre o absurdo da situação.

> Quando este contrassenso se manifestar, o mestre aplicá-lo-á a certos casos que mostrem bem a sua absurdidade.
> Assim: $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ dariam $\frac{2}{4}$ ou $\frac{1}{2}$ ... !
> $\frac{3}{3} + \frac{2}{2}$ dariam $\frac{5}{5}$ ou 1. Então 1 e 1 fazem 1 ... ! (Pimentel Filho, 1934, p. 165)

Na adição e subtração de frações, Pimentel Filho apresenta ainda alguns exercícios tipo, situações estritamente matemáticas ou semirreais. As situações semirreais são usualmente problemas de cálculo, que se resolvem com a utilização de uma ou mais operações aritméticas, onde os contextos mais utilizados são as medidas de comprimento ou as atividades comerciais, com a utilização do dinheiro.

A multiplicação é explorada como uma adição de parcelas iguais, onde Pimentel Filho (1934) recorre à representação pictórica em contextos estritamente matemáticos. É de salientar que na representação simbólica, Pimentel Filho (1934) nem sempre é coerente com a posição do multiplicador e do multiplicando. No que diz respeito aos problemas apresentados, o contexto mais utilizado é o das medidas de comprimento, como no exemplo seguinte:

> 1.º Um operário faz $\frac{4}{5}$ de um metro de pano em uma hora; um seu companheiro faz os $\frac{7}{5}$ de um metro de pano no mesmo tempo.
> ¿ Qual dos dois trabalha mais depressa? Quantos metros terá esse feito a mais do que o outro após 12 horas de trabalho? Quantos metros de pano terão feito os dois ao cabo das 12 horas? (Pimentel Filho, 1934, p. 174).

Na primeira questão apresentada no problema ter-se-ia de comparar as frações. A segunda questão remete para a multiplicação de uma fração, seguida de uma adição. A multiplicação de duas frações só é tratada quando o autor aborda a divisão de frações, sendo aplicada na regra da divisão.

Na divisão de frações, Pimentel Filho (1934) destaca dois modelos de situações, partilha e conteúdo, explicitando o contexto de problemas onde isso se verifica. Na exploração da divisão de frações são muitas vezes utilizados problemas para fazer a abordagem dos conteúdos, mas também são exploradas situações estritamente matemáticas. O principal contexto utilizado é o das medidas de comprimento, mas também são apresentados outros contextos que poderiam ser do dia a dia das crianças. As resoluções apresentadas para os problemas recorrem muitas vezes a modelos pictóricos.

No trabalho de Gaspar e Ferreira (1944) ressalta a utilização paralela da representação na forma de fração e de decimal. Os autores realçam que a representação decimal tem um caráter utilitário e lógico. As primeiras operações são com frações de referência como as metades ou os quartos, sempre em situações em que as frações têm o mesmo denominador. Gaspar e Ferreira (1944) sugerem a concretização com objetos do dia a dia. Os autores passam logo depois para a adição com frações decimais, em que o denominador é sempre 10, estabelecendo uma relação com as medidas de comprimento e de capacidade. Gaspar e Ferreira (1944) não aprofundam a sequência de ensino a utilizar para as operações com frações, não apresentando qualquer proposta para a multiplicação e divisão de frações.

No que diz respeito às operações com frações, Pinheiro (1961) não apresenta um trabalho específico para além do que apresenta para trabalhar a noção de fração, frações equivalentes e concretização de frações. No trabalho desenvolvido na concretização de frações, Pinheiro (1961) apresenta alguns exemplos com situações matemáticas estritamente numéricas, que remetem para a multiplicação de uma fração por um número inteiro ou para a multiplicação de uma fração por uma fração.

No que diz respeito ao caso de Gonçalves (1974), o autor aborda os números racionais em primeiro lugar através da representação decimal, pelo que, as operações com frações são só trabalhadas após o trabalho desenvolvido nas operações com decimais. Após o desenvolvimento das noções iniciais com as frações, Gonçalves (1974) não dedica nenhum ponto do trabalho especificamente às operações com frações, mas apresenta algumas noções das operações conforme vai apresentando a noção de fração, a equivalência de frações e a conversão de fração ordinária em fração decimal. Gonçalves (1974) começa por destacar que não seria desejável trabalhar as operações com frações em paralelo com as operações com números inteiros devido à complexidade que envolvem, referindo alguns exemplos.

> «pode ela adicionar 2 + 3, mas nunca 1/2 + 1/3; pode multiplicar 2 x 5, mas nunca 1/2 x 1/5; pode mesmo adicionar 1/2 + 1/2, mas não 1/2 mais 1/3. A inteligência dos quebrados e sua operatória exige um conhecimento dos inteiros e sua operatória que, de modo algum, a criança pode ter no princípio.» (Gonçalves, 1974, p. 142, aspas no original)

Gonçalves (1974) salienta ainda que, mesmo no aspeto prático, não se justifica o ensino das frações a par do ensino dos primeiros números porque, nessa fase, não é muito comum surgirem problemas com cálculos que envolvam fracionários.

No manual de Gonçalves (1974), o trabalho desenvolvido com as operações de adição e subtração surge pela primeira vez na composição e decomposição da unidade. Gonçalves (1974) apresenta a operação recorrendo à representação pictórica que representa objetos do dia a dia, expressando depois a operação na representação simbólica e em modelos de quantidade contínua.

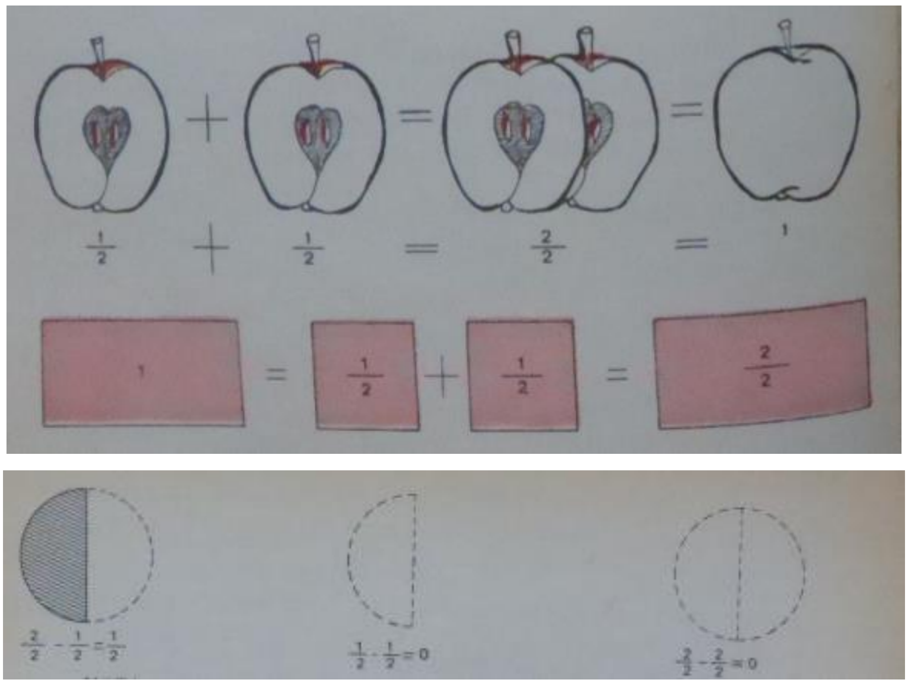


Figura 7.18. Representação ideográfica e simbólica dos jogos de decomposição e recomposição (Gonçalves, 1974, p. 146, digitalização, 100% do original).

A multiplicação de uma fração por um número inteiro só é tratada quando Gonçalves (1974) trabalha a relação entre as partes e o todo e a comparação com a unidade, sendo destacada a relação entre a adição de parcelas iguais e a multiplicação.

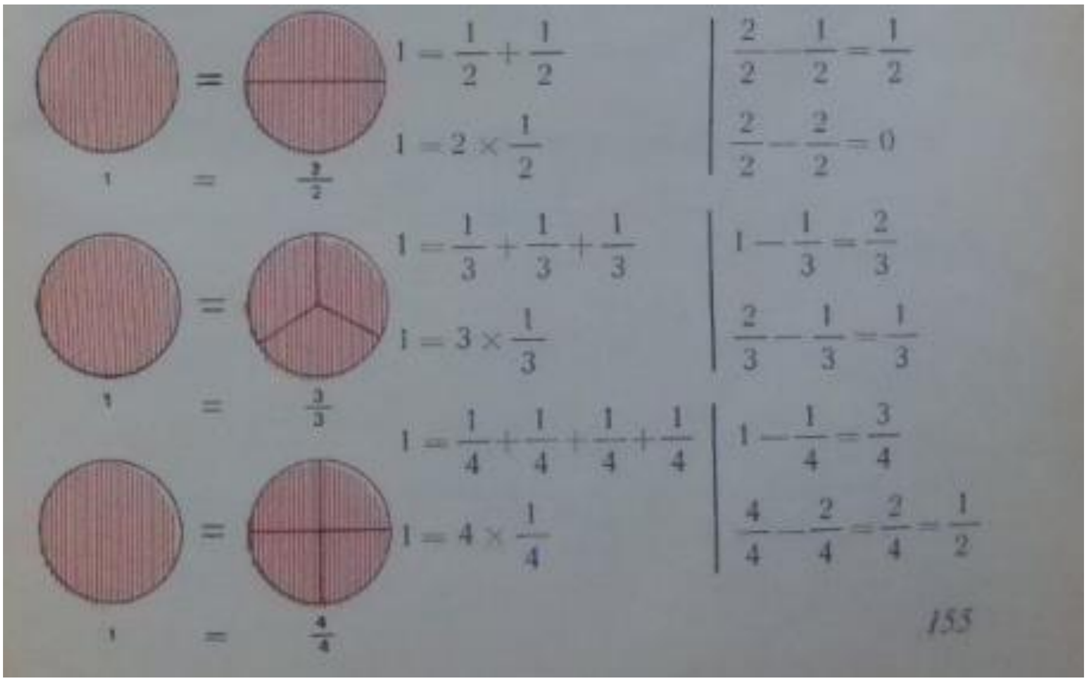


Figura 7.19. Relação entre a adição de parcelas iguais e a multiplicação (Gonçalves, 1974, p. 155, digitalização, 100% do original)

No trabalho de Gonçalves (1974) não são apresentados exemplos para a divisão de frações.

7.12.2. Decimais

No que se refere às operações com decimais, Pimentel Filho (1934) começa por trabalhar a adição, seguida da subtração, multiplicação e divisão. Na adição Pimentel Filho (1934) apresenta inicialmente um problema com medidas de comprimento "¿Duas tiras de papel, uma de m 2,45 e outra de m 0,25, que comprimento fazem?" (p. 214). Nesta situação, Pimentel Filho (1934) refere que se pode tomar para unidade de cálculo, o metro ou o centímetro, porque os dados do problema incluem números que têm centésimas, apresentando o cálculo em algoritmo como mostra a figura seguinte.

CENTÍMETROS			METROS	
cm	245		*m*	2,45
+ *cm*	25		+ *m*	0,25
cm	270		*m*	2,70

Figura 7.20. Disposição do cálculo para a adição com números decimais (Pimentel Filho, 1934, p. 214, digitalização, 100% do original).

Para o cálculo que se encontra à direita, Pimentel Filho (1934) destaca que se pode dizer que os “cinco centímetros mais cinco centímetros são uma décima do metro ou um *decímetro*, que juntaremos aos decímetros que figuram nas duas parcelas da soma.” (p. 214, itálicos no original).

Na subtração, Pimentel Filho (1934) apresenta essencialmente situações semirreais com o contexto das medidas de comprimento, em que o sentido da operação é o de retirar. No entanto, no último exemplo que o autor apresenta usa o sentido de completar, sendo isso destacado quando refere que “se nos lembrarmos que na subtração o aditivo representa a soma de duas parcelas e o subtrativo uma dessas parcelas, sendo o resto a segunda parcela, vê-se que o que falta a 3,65 para 9,50 há de ser um número que somado com 3,65 dê 9,50 e que é igual ao excesso de 9,50 sobre 3,65.” (p. 216), isto referindo-se ao problema que colocara anteriormente.

Relativamente à multiplicação, Pimentel Filho (1934) distingue três casos, a multiplicação de um decimal por um inteiro, a multiplicação por 10, 100 e por 1000 e com multiplicador decimal. Na apresentação desta operação utiliza principalmente situações semirreais, com contextos de medidas de comprimento ou de atividades comerciais com a utilização do dinheiro. Para evidenciar a regra do cálculo recorre à adição de parcelas iguais para evidenciar a colocação da vírgula no produto. A resolução é apresentada da seguinte forma.

SOMA :			MULTIPLICAÇÃO :	
m	5,3		*m*	5,3
+ *m*	5,3		×	3
+ *m*	5,3		*m*	15,9
m	15,9			

Figura 7.21. Disposição do cálculo para a multiplicação de um número inteiro por um decimal (p. 216, digitalização, 100% do original).

Pimentel Filho (1934) também utiliza a relação com as frações decimais para a verificação do resultado da multiplicação.

$$m\ 5\frac{3}{10} \times 3 = m\ 15\frac{9}{10} = m\ 15{,}9$$

Figura 7.22. Proposta do autor para a contraprova da multiplicação efetuada anteriormente (Pimentel Filho, 1934, p. 217, digitalização, 100% do original).

Na divisão, Pimentel Filho (1934) apresenta dois casos, o divisor inteiro e o divisor decimal. No primeiro caso, começa por expor um problema com o contexto das medidas de comprimento “Em uma extensão de m 8,30 estão cravadas 5 estacas. ¿A que distância estão elas umas das outras?” (p. 219). Pimentel Filho (1934) explica o desenvolvimento do cálculo a realizar

> Começámos por dividir 8, parte inteira do dividendo, por 5, o que dá 1 de quociente e 3 inteiros para resto. Como não podemos dividir três inteiros por 5 e ainda nos falta dividir 3 décimas do dividendo também por 5, reduzamos tudo a décimas, o que dá 33 décimas, que já podemos dividir por 5, obtendo 6 de quociente e sobrando 3 décimas. Como não as podemos dividir por 5, convertamo-las em centésimas, o que dá 30 centésimas. E dividindo estas por 5 temos 6 para quociente, sem resto. O primeiro 6 do quociente representa portanto décimas e o segundo centésimas, de sorte que, para o indicarmos, teremos de colocar uma vírgula à direita do 1. (p. 220)

Pimentel Filho (1934) apresenta também a disposição do mesmo cálculo de duas formas distintas, mas não faz qualquer comentário sobre essa situação.

Temos de dividir m 8,30 por 5.

$$\begin{array}{r|l} m\ 8{,}30 & 5 \\ \hline 3\,3 & m\ 1{,}66 \\ 30 & \\ 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} m\ 8{,}30 & 5 \\ \hline 5 & m\ 1{,}66 \\ \hline 33 & \\ 30 & \\ \hline 30 & \\ 30 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Figura 7.23. Disposição do cálculo da divisão de um decimal por um inteiro (Pimentel Filho, 1934, p. 220)

Pimentel Filho (1934) apresenta ainda situações em que o dividendo e o divisor são inteiros, mas em que o dividendo é menor que o divisor. Para estas situações também apresenta diferentes disposições do cálculo.

No último caso da divisão, em que o divisor é decimal, Pimentel Filho (1934) começa por colocar um problema com o contexto das medidas de comprimento e do dinheiro “Paguei 91$00 por m 1,3 de certa fazenda. ¿ A como é o metro dela?” (p. 223). Na proposta de resolução que o autor apresenta, primeiro multiplica-se o dividendo e o divisor por 10, para que o divisor passe a ser um número inteiro. Desta forma, já será possível realizar a divisão recorrendo a uma forma de cálculo já conhecida.

Tal como foi referido anteriormente, Gaspar e Ferreira (1944) sugerem uma abordagem inicial com as frações e os decimais trabalhados paralelamente. No que se refere à abordagem às operações com decimais, os autores começam por fazer uma crítica à forma como se fazia o ensino dos decimais e à forma como estes eram avaliados nos exames da 3.ª e da 4.ª classes da época, provocando uma enorme percentagem de reprovações. Para Gaspar e Ferreira (1944), estas dificuldades eram quase sempre o resultado de um ensino descuidado da numeração decimal

> Ainda há quem ensine assim as operações com números decimais «Na soma e diminuição são vírgulas debaixo de vírgulas e mais nada! Na multiplicação são tantas casas decimais no multiplicando mais as do multiplicador igual às do resto. Na divisão, se há mais casas decimais no divisor, juntam-se zeros … etc.». E é tudo o que aos alunos se ensina de decimais, porque as operações já eles sabem fazer quando «isto» lhes é ensinado. (Gaspar & Ferreira, 1944, p.57).

No entanto, Gaspar e Ferreira (1944) não apresentam uma sequência de ensino para trabalhar as operações com decimais.

No caso de Pinheiro (1961), a sua abordagem inicial aos números racionais é feita através da representação decimal e, por isso, este autor também trata em primeiro lugar as operações com decimais. Na abordagem às operações é usualmente utilizada a representação pictórica, estabelecendo-se depois uma relação com a representação verbal e com a representação simbólica na forma de numeral decimal.

Em qualquer das operações com decimais o trabalho realizado é desenvolvido no sentido de se chegar ao algoritmo. Na adição é apresentado um problema com um contexto ligado ao dia a dia das crianças. É utilizada uma unidade contínua, tal como tinha sido feito com a iniciação aos números decimais através da partição do metro nos seus submúltiplos. Depois de apresentado o problema contextualizado, mas onde as quantidades são representadas na forma decimal, Pinheiro (1961) sugere a concretização dos dados numa unidade representada pictoricamente.

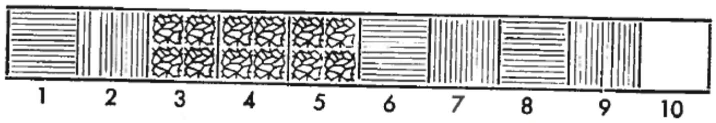


Figura 7.24. Representação gráfica dos dados de um problema (Pinheiro, 1961, p. 72)

Pinheiro (1961) também apresenta a resolução do problema, representando-a através de um esquema equivalente ao algoritmo, onde escreve as décimas por extenso. Posteriormente, a mesma operação é apresentada horizontalmente, utilizando a representação decimal e estabelecendo uma relação com a representação que tinha apresentado no esquema idêntico ao algoritmo.

$$\begin{array}{r} 2 \text{ décimas} \\ 3 \text{ décimas} \\ + \ 4 \text{ décimas} \\ \hline 9 \text{ décimas} \end{array}$$

9 décimas escreve-se: 0,9.

Logo: $0,2 + 0,3 + 0,4 = 0,9$

Figura 7.25. Representação simbólica dos dados de um problema (Pinheiro, 1961, p. 72)

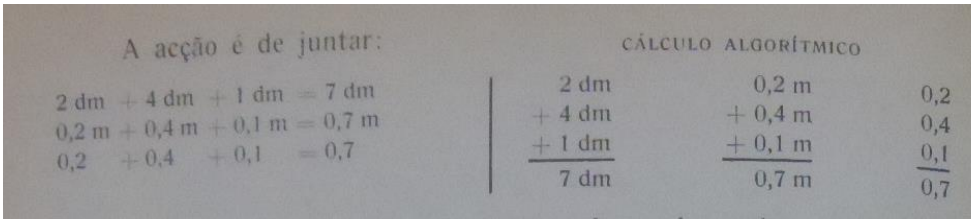
Esta sequência de trabalho também é utilizada com as outras operações.

Quanto às situações privilegiadas, Pinheiro (1961) refere por diversas vezes a necessidade de serem elaborados problemas baseados na realidade no sentido de contextualizar as operações, mas raramente concretiza quais os problemas a utilizar, apresentando na realidade situações estritamente matemáticas. No entanto, é possível identificar que um dos contextos privilegiados é o das medidas de comprimento. O autor também parece privilegiar contextos próximos dos alunos, como o da partição de bolos. Para a contextualização das operações, Pinheiro (1961) também salienta a necessidade de serem apresentados problemas que sejam passíveis de resolver com a utilização apenas de uma das operações elementares da aritmética.

No trabalho de Gonçalves (1974) as operações com decimais são apresentadas na sequência do trabalho realizado com o sistema métrico e surgem pela primeira vez nas operações com medidas de comprimento e na generalização da décima, centésima e milésima a qualquer unidade. No início são apenas trabalhadas a adição e a subtração. A multiplicação e a divisão com decimais são primeiro abordadas quando o autor trabalha as regras para multiplicar e dividir números por 10, 100 ou 1000.

No capítulo dedicado às quatro operações com decimais, Gonçalves (1974) desenvolve um trabalho que tem ponto central a aprendizagem dos algoritmos. O trabalho é desenvolvido em confronto com as mesmas operações realizadas com números inteiros.

No que diz respeito à adição, Gonçalves (1974) apresenta um problema com o contexto das medidas de comprimento e define a adição como uma ação de juntar, começando por apresentar a operação na horizontal, utilizando números inteiros referindo-se à unidade decímetro. Faz depois a mesma operação, mas referindo-se à unidade metro e utilizando por isso números decimais e por último apresenta a mesma operação com números decimais, mas sem referir a unidade. A mesma sequência de cálculos é apresentada na vertical e designada por cálculo algorítmico.



A acção é de juntar:

2 dm + 4 dm + 1 dm = 7 dm
0,2 m + 0,4 m + 0,1 m = 0,7 m
0,2 + 0,4 + 0,1 = 0,7

CÁLCULO ALGORÍTMICO

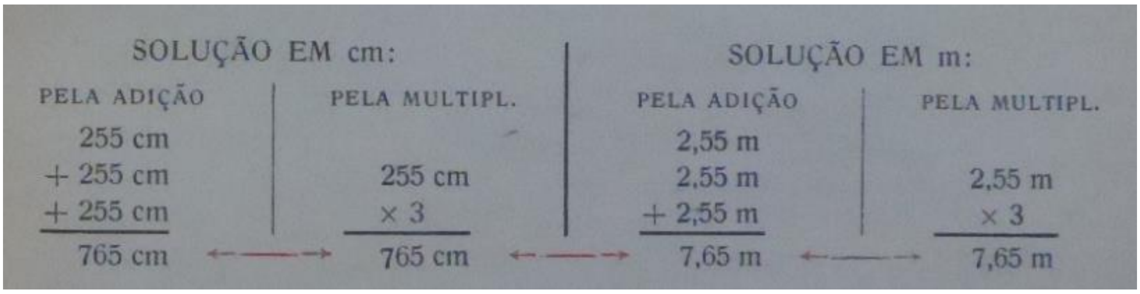
2 dm	0,2 m	0,2
+ 4 dm	+ 0,4 m	0,4
+ 1 dm	+ 0,1 m	0,1
7 dm	0,7 m	0,7

Figura 7.26. Sequência para apresentação do cálculo algorítmico da adição (Gonçalves, 1974, p. 60).

Na subtração, Gonçalves (1974) aplica o mesmo processo, começando por trabalhar com números decimais em unidades de comprimento iguais, depois com unidades de comprimento diferentes e depois generalizando a quaisquer números. Tal como para a adição, enuncia no final a regra, mas neste caso designa por *Indução e afirmação da regra*. No final da parte dedicada à subtração são apresentados alguns *Exercícios de aplicação*. Estes exercícios são constituídos por problemas com o contexto das medidas de comprimento, bolos divididos em porções ou ainda exercícios estritamente numéricos em que são utilizados os decimais.

Relativamente à multiplicação, Gonçalves (1974) distingue dois casos. O primeiro caso corresponde à situação em que um fator é inteiro e o outro decimal e o segundo caso em que ambos fatores são números decimais. No primeiro caso, Gonçalves (1974) apresenta ainda o que designa por *Generalização da lei básica da multiplicação*.

O primeiro caso é apresentado a partir de um problema com um contexto de medidas de comprimento: "Quanto medirão três cortes de tecido, se cada um medir 2,55 m?" (p. 63). Para esta situação, Gonçalves (1974) apresenta a solução em centímetros e em metros. Em ambos os casos, começa por fazer a adição de três parcelas repetidas que depois relaciona com a multiplicação.



SOLUÇÃO EM cm:		SOLUÇÃO EM m:	
PELA ADIÇÃO	PELA MULTIPL.	PELA ADIÇÃO	PELA MULTIPL.
255 cm		2,55 m	
+ 255 cm	255 cm	2,55 m	2,55 m
+ 255 cm	× 3	+ 2,55 m	× 3
765 cm ←→	765 cm ←→	7,65 m ←→	7,65 m

Figura 7.27. Exemplo para a multiplicação para a multiplicação de um fator inteiro por um outro decimal (Gonçalves, 1974, p. 63).

No segundo caso da multiplicação, *Ambos os fatores são números decimais*, Gonçalves (1974) faz o que designa por generalização da "lei básica da multiplicação, estendendo-a ao caso de ambos os fatores serem decimais" (p. 67), apresentando um exemplo em que o contexto utilizado é novamente um problema com medidas de comprimento.

Relativamente à divisão, última operação apresentada, Gonçalves (1974) destaca três casos, *1.º - O divisor é um número inteiro. A aproximação.*; *2.º - O divisor é decimal e tem tantas casas decimais como o dividendo, ou mais: generalização da lei básica da divisão*. *3.º - O divisor tem menos casas decimais que o dividendo*. O primeiro caso é introduzido com um problema de medidas de comprimento "Temos uma peça com 19 m de pano que desejamos repartir em 5 retalhos iguais. Quanto medirá cada retalho?" (p. 70). Gonçalves (1974) considera que se deve levar a criança a verificar que a cada retalho devem ser atribuídos 3 metros inteiros e que se peça de pano tivesse mais 1 metro, já poderiam atribuir a cada retalho 4 m inteiros. As crianças devem também compreender que os 4 metros que sobraram podem também ser divididos em 5 partes, se operarmos com decímetros ou décimas do metro.

19 m	5
4 m	3 m

4 m = 40 dm = 4,0 m

DIVISÃO INTEIRA (EM dm)

40 dm	5
0	8 dm = 0,8 m

DIVISÃO DECIMAL (EM DÉCIMAS DO m)

4,0 m	5
0	0,8 m

Figura 7.28. Exemplo para a multiplicação para a multiplicação de um fator inteiro por um outro decimal (Gonçalves, 1974, p. 70).

Gonçalves (1974) observa ainda que se deve realçar que as divisões têm um resultado equivalente, "desde que, no quociente, se separem tantas casas decimais como as do dividendo." (p. 70). Conclui assim que cada retalho poderia ter

3 m inteiros + 0,8 m = 3,8 m

Salienta ainda que os cálculos poderiam ter sido feitos numa só operação apresentada da seguinte forma:

DIVISÃO INTEIRA

190 dm	5
40	38 dm = 3,8 m
0	

DIVISÃO DECIMAL

19,0 m	5
4 0	3,8 m
0	

Figura 7.29. – Apresentação da divisão inteira e da divisão decimal (Gonçalves, 1974, p. 71).

Gonçalves (1974) apresenta uma série de exercícios de aplicação.

Relativamente ao segundo caso, Gonçalves (1974) começa por destacar que a criança estaria habituada a trabalhar a divisão com números inteiros e que por isso se poderia ter habituado à ideia de que o resultado da divisão seria sempre menos do que o dividendo, sendo esse o significado da divisão na linguagem popular, dividir, distribuir, partir num determinado número de partes iguais. No entanto, salienta que a criança deve ser exposta perante situações em que o divisor possa ser maior que o dividendo e o quociente menor do que 1. Gonçalves (1974) salienta cinco experiências que será necessário realizar no sentido de levar as crianças a redescobrir:

> 1) Que, se se mantiver constante o dividendo, o quociente varia na razão inversa do divisor;
> 2) Que dividir por 0,1; 0,01; 0,001 corresponde a multiplicar respetivamente por 10, 100, 1000;
> 3) Que todos os casos da divisão com decimais se podem reduzir ao primeiro caso (já estudado), se tornarmos o divisor inteiro, pela multiplicação de ambos os termos por 10, 100, 1000..., conforme o número de casas decimais do divisor seja 1, 2, 3..., isto é, se aplicarmos a propriedade de compensação da divisão;
> 4) Que o número de casas decimais a separar no quociente é igual à diferença entre o número de casas decimais do dividendo e o das do divisor;
> 5) Que, no resto, que é da natureza do dividendo, se devem separar tantas casas decimais como as que houver neste. (pp. 72-73).

Apresenta alguns exemplos de "experiências" que a criança deverá realizar. Entre essas experiências encontram-se os exercícios estritamente numéricos, problemas com os contextos de medidas de comprimento e de dinheiro. Alguns problemas apontam também para a recomposição da unidade, onde Gonçalves sugere uma sequência de problemas.

> c) Se dois queijos e meio (2,5) custarem 105$00, quanto custaria apenas um deles?
> Se vinte e cinco centésimas (0,25) de um queijo custarem 10$50, quanto custará o queijo inteiro?
> A criança ficará assim a compreender a razão por que, sabendo o valor da fração, para saber o da unidade, poderá dividir esse valor pela respetiva fração. (Gonçalves, 1974, p. 75)[179]

No que é respeitante ao terceiro caso, Gonçalves (1974) salienta que este corresponde a uma aproximação do quociente, tal como o primeiro caso. Destaca assim que, quando há igualdade de casas decimais, o quociente é inteiro, mas se o dividendo tiver mais casas decimais do que no divisor, há uma aproximação, de ordem decimal. Apresenta um exemplo para o qual produz um conjunto de observações.

[179] Nesta citação, a palavra fração aparece no sentido de parte de um todo e não no sentido da representação dos números racionais na forma de fração.

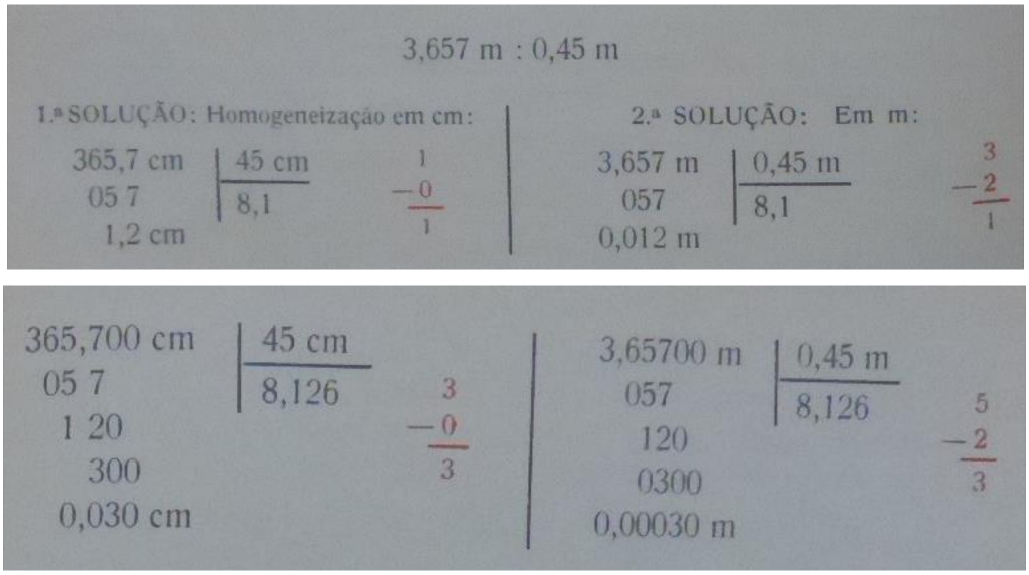


Figura 7.30. Apresentação de diferentes casos no algoritmo da divisão com decimais (Gonçalves, 1974, pp. 76-77).

No primeiro exemplo há uma aproximação a uma décima, cabendo o divisor oito vezes inteiras e mais uma décima no dividendo. Depois há a verificação de que o quociente ainda não é exato e que, por isso, poder-se-ia aproximar mais, por exemplo a uma milésima. Há ainda a observação de que no quociente se separam tantas casas decimais como a diferença entre as do dividendo e as do divisor, o que Gonçalves (1974) regista ao lado do algoritmo e no resto se separam tantas casas decimais como as do dividendo, por serem da mesma natureza. São depois propostos alguns exercícios de aplicação.

7.12.3. Em síntese

No que diz respeito aos manuais do segundo período, é de notar uma preocupação maior com as operações com os números racionais na sua representação em fração na obra de Pimentel Filho (1934), e uma preocupação maior com as operações na representação decimal nas obras de Pinheiro (1961) e de Gonçalves (1974). No trabalho de Pimentel Filho (1934) são primeiro trabalhadas as operações de adição e subtração com frações primeiro oralmente e só depois simbolicamente. As primeiras situações trabalhadas referem-se à adição e subtração de frações com o mesmo denominador e depois situações com frações com denominadores diferentes. Nestes casos não são apresentados procedimentos formais para as operações, sendo sugeridos procedimentos de procura de frações equivalentes. Pimentel Filho (1934) também recorre frequentemente à representação pictórica, que depois relaciona com a representação verbal e a representação simbólica. Este autor sugere exercícios tipo com situações estritamente matemáticas, mas também com situações que quanto ao contexto utilizado se podem enquadrar na semi-realidade, tal como são designadas por Skovsmose (2001), com recurso a problemas de cálculo. Relativamente à adição e à subtração de frações, Pimentel Filho (1934) refere algumas dificuldades que os alunos normalmente apresentam, como somarem ou subtraírem numeradores e denominadores, sendo alguns dos problemas apresentados direcionados para levar os alunos a concluírem sobre o absurdo desse tipo de procedimento. Na multiplicação de frações Pimentel Filho (1934) destaca o sentido da multiplicação como adição de parcelas iguais (Taber, 2002), recorrendo à representação pictórica com situações estritamente matemáticas. Na divisão de frações, Pimentel Filho (1934) destaca dois sentidos, a partilha e a medida, ou conteúdo tal como designado pelo autor, sendo essa uma indicação explícita no manual. Nesta operação, o autor utiliza muitas vezes situações que utilizam um contexto que se enquadra na semi-realidade, mas também situações estritamente matemáticas. Nas resoluções propostas recorre a modelos pictóricos que depois relaciona com a representação simbólica.

O trabalho de Gaspar e Ferreira (1944) foca a utilização paralela da representação em fração e da representação decimal. Isso também acontece na abordagem às operações, onde os autores destacam o caráter utilitário das operações na representação decimal. Na adição e subtração com frações, Gaspar e Ferreira (1944) apresentam essencialmente alguns casos com frações de referência, como as metades e os quartos, sempre em situações em que as frações têm o mesmo denominador. Os autores focam-se depois nestas operações com frações decimais, estabelecendo uma relação com as medidas de comprimento. Gaspar e Ferreira (1944) não aprofundam os procedimentos para a adição e subtração de frações, nem apresentam quaisquer propostas para a multiplicação e divisão de frações. Na obra de Pinheiro (1961) também não há um aprofundamento dos procedimentos para as operações com frações, sendo apenas apresentados alguns casos em exemplos com situações estritamente matemáticas, que remetem para a multiplicação de uma fração por um número inteiro ou a multiplicação de uma fração por uma fração. Em Pinheiro (1961) o trabalho com as operações com números racionais é centrado na representação decimal, que precede o trabalho com as frações.

Na obra de Gonçalves (1974) também se destaca as operações com números racionais na representação decimal. As operações com frações não são objeto de qualquer estudo específico por parte de Gonçalves (1974), surgindo apenas em certos contextos quando o autor trabalha a noção de fração ou a equivalência de frações. Gonçalves (1974) apresenta explicitamente inconvenientes no trabalho paralelo das operações com frações e as operações com números inteiros, identificando dificuldades que os alunos podem apresentar. Também toma como pouco necessário o recurso precoce aos cálculos com frações, porque considera que nos problemas do dia a dia dos alunos dos primeiros anos estes são pouco comuns.

No que diz respeito à forma como as operações com decimais são trabalhadas nos manuais do segundo período, são elementos comuns o facto de que o ponto de partida é o sistema de medidas, designadamente as medidas de comprimento. Isto acontece em Pimentel Filho (1934), Pinheiro (1961) e Gonçalves (1974), já que Gaspar e Ferreira (1944) não apresentam uma proposta para trabalhar as operações com decimais, apresentando apenas algumas críticas aos processos de ensino que consideravam ser usuais na época, e que colocavam o enfoque na colocação das vírgulas no resultado.

Apesar do ponto de partida comum aos três autores, há diversos aspetos que diferenciam as suas abordagens. Um primeiro aspeto é o facto de Pimentel Filho (1934) só abordar as operações com decimais após o ter feito com as frações, o que não acontece com Pinheiro (1961) e Gonçalves (1974). Isto permite que, principalmente na multiplicação de decimais, Pimentel Filho (1934) estabeleça uma relação com a multiplicação de frações decimais e justifique dessa forma os procedimentos das operações com os decimais. Pimentel Filho (1934) identifica os diferentes casos das operações com decimais apresentando uma situação de semi-realidade, normalmente um problema de cálculo que envolve apenas a operação a estudar. Na adição foca essencialmente o sentido de juntar e na subtração foca os sentidos de retirar e de completar (Vale & Pimentel, 2004), sendo essa diferença destacada explicitamente. Na divisão e na multiplicação, Pimentel Filho (1934) distingue diferentes casos que decorrem dos próprios procedimentos de cálculo (multiplicação de um decimal por um inteiro, multiplicação por 10, 100 ou 1000 e a multiplicação de um decimal por outro decimal, a divisão por um divisor inteiro e a divisão por um divisor decimal). Nestas operações não distingue explicitamente diferentes sentidos das operações.

Pinheiro (1961) centra o trabalho das operações na representação decimal nos procedimentos dos cálculos. Apesar de referir diversas vezes que as situações devem ser contextualizadas, apresenta os diferentes casos dos cálculos recorrendo a situações estritamente matemáticas. Em Pinheiro (1961) a sequência para o trabalho com os diferentes casos das operações é sempre muito similar entre as diferentes operações. Começa por apresentar os dados do que poderia ser um problema colocado às crianças, representando-os pictoricamente e verbalmente. De seguida apresenta o cálculo num esquema equivalente ao algoritmo, indicando as décimas e depois apresenta o cálculo horizontalmente. Só no final deste procedimento apresenta o algoritmo na sua forma mais usual, apresentado na vertical.

No manual de Gonçalves (1974) as operações com decimais são apresentadas numa sequência de trabalho em que aborda também o sistema métrico. O trabalho é maioritariamente desenvolvido em confronto com as mesmas operações realizadas com os números inteiros, começando por utilizar unidades do sistema de medidas de comprimento, generalizando depois a qualquer unidade. Este autor começa por trabalhar a adição e a subtração, centrando-se na aprendizagem do algoritmo. Na adição destaca a ação de juntar, mas na subtração não é possível distinguir diferentes sentidos para a operação já que os exemplos apresentados são estritamente numéricos. Na multiplicação e na divisão o trabalho também se centra nas regras do algoritmo, sendo apresentados contextos com as medidas de comprimento. Este autor destaca a multiplicação como adição de parcelas iguais. Destaca também algumas dificuldades que os alunos costumam apresentar na interpretação dos resultados da divisão quando o quociente é menor do que a unidade e apresenta uma sequência de exemplos que deverão ser colocados às crianças nomeadamente com exercícios de recomposição da unidade.

7.13. Caracterização das representações

No que diz respeito às representações utilizadas na abordagem inicial dos números racionais nas obras analisadas neste segundo período, destacam-se algumas características comuns como uma ampla utilização da representação pictórica e a sua relação com a representação verbal e posteriormente a utilização da representação simbólica. Neste aspeto destacam-se as obras de Pimentel Filho (1934) e Gonçalves (1974) pelo recurso frequente a imagens que ilustram os aspetos a destacar no trabalho com os números racionais.

Na obra de Pimentel Filho (1934), e no que diz respeito às representações, o autor faz referências frequentes à utilização de representações ativas, com a utilização de discos e setores soltos que se possam manipular, e a representações pictóricas, principalmente a modelos de quantidade contínua, que relaciona com a linguagem verbal escrita, onde por vezes as frações são escritas por extenso, e que relaciona posteriormente com a linguagem simbólica matemática. Este tipo de trabalho é utilizado tanto na apresentação inicial das frações, como posteriormente na abordagem às operações ou ordenação de frações. No exemplo que se apresenta de seguida, os alunos deveriam começar por verificar a unidade inteira representada pelo disco A e depois realizar exercícios de leitura dos números representados pelos sectores soltos

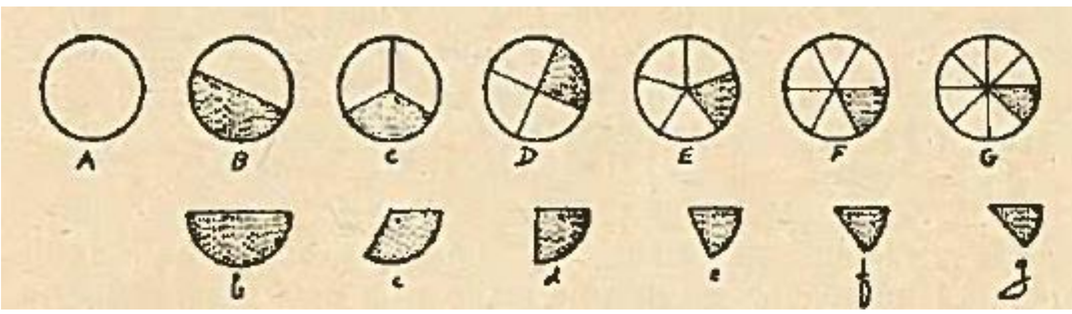
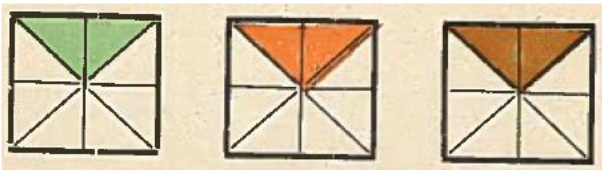


Figura 7.31. Disco representando a unidade inteira e posteriormente divido em partes iguais (Pimentel Filho, 1934, p. 149, digitalização, 100% do original).

Pimentel Filho (1934) estabelece também a relação entre diferentes representações simbólicas. Para algumas das situações onde apresenta propostas de resolução, Pimentel Filho (1934) usa muitas vezes representações pictóricas que façam uma relação direta com a representação simbólica. É de salientar que a representação simbólica matemática nem sempre é coerente, nomeadamente no que se refere à multiplicação, como nos exemplos seguintes:

Que fração formarão as partes coloridas destes quadrados?



Dois oitavos, mais dois oitavos, mais dois oitavos, são seis oitavos. Podemos pois escrever $\frac{2}{8} + \frac{2}{8} + \frac{2}{8} = \frac{6}{8}$, o que é uma soma de parcelas iguais e nós já vimos que uma soma nestas condições se poderá transformar em uma multiplicação, na qual o multiplicando é a parcela que queremos repetir e o multiplicador o número de vezes que essa parcela tem de ser repetida. E então $\frac{2}{8}$ x 3 = $\frac{6}{8}$ ou $\frac{2 \text{ x } 3}{8}$. (p. 172).

Logo a seguir, apresenta um outro exemplo para a multiplicação, mas em que a representação simbólica não é coerente com a anterior relativamente à posição do multiplicador.

$4\,X\,\frac{2}{25} = \frac{4\,X\,2}{25} = \frac{8}{25}$ (Pimentel Filho, 1934, p. 173)

Pimentel Filho (1934) também utiliza na sua obra outros modelos de quantidade contínua, como os modelos de comprimento. No exemplo seguinte estabelece a equivalência de frações utilizando um segmento de reta.

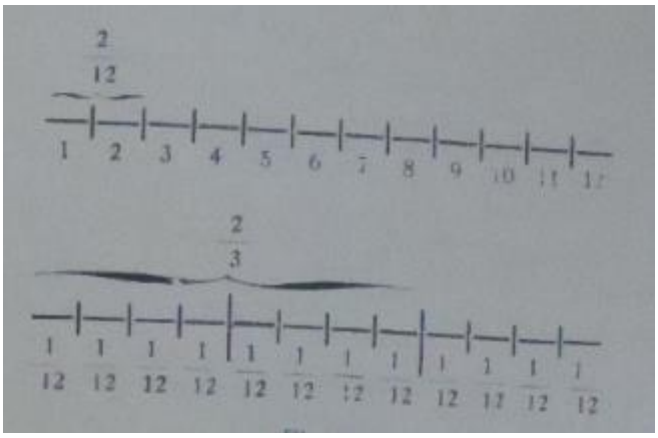


Figura 7.32. Utilização do segmento de reta para estabelecer a equivalência de frações (Pimentel Filho, 1934, p. 159, 100% do original).

É ainda de destacar que por vezes o autor utiliza na representação verbal de alguns conceitos uma nomenclatura que não é utilizada em português na atualidade, mas que surge também em Nunes (1887) obra analisada neste trabalho. Um exemplo é a designação de número fracionário para a soma de um natural com uma fração própria, ou às frações impróprias, que designa por expressão fracionária. Estas expressões parecem ter sido adaptadas das obras consultadas pelo autor. Se consultarmos obras em castelhano é possível observar que utilizam uma nomenclatura idêntica pelo que, uma justificação possível poderá ser que Pimentel Filho tenha tido acesso às obras citadas através de traduções nessa língua.

Nas representações icónicas apresenta diversos diagramas destacando-se ainda o grafismo e o uso recorrente da cor.

Na proposta de Pimentel Filho, a representação decimal é trabalhada posteriormente, numa relação estreita com as frações decimais e depois como uma extensão do sistema decimal utilizado nos números inteiros não negativos. Neste trabalho são privilegiados os modelos contínuos de área, como modelos circulares ou retangulares, mas também são usados modelos contínuos de comprimento, como a reta numérica graduada. No seu trabalho, Pimentel Filho (1934) refere materiais didáticos idênticos ao material multibásico. No trabalho com o numeral decimal também é seguida a sequência do modelo pictórico, representação verbal escrita e representação simbólica.

No que diz respeito às representações, no trabalho de Gaspar e Ferreira (1944) evidencia-se o trabalho com recurso a representações ativas, como as tiras de papel, com a correspondência posterior a representações pictóricas, principalmente modelos de quantidade contínua que representam retângulos, e posterior ligação à representação verbal e finalmente à representação simbólica. Na figura seguinte é destaca a relação entre a representação pictórica e a relação simbólica, na equivalência de frações.

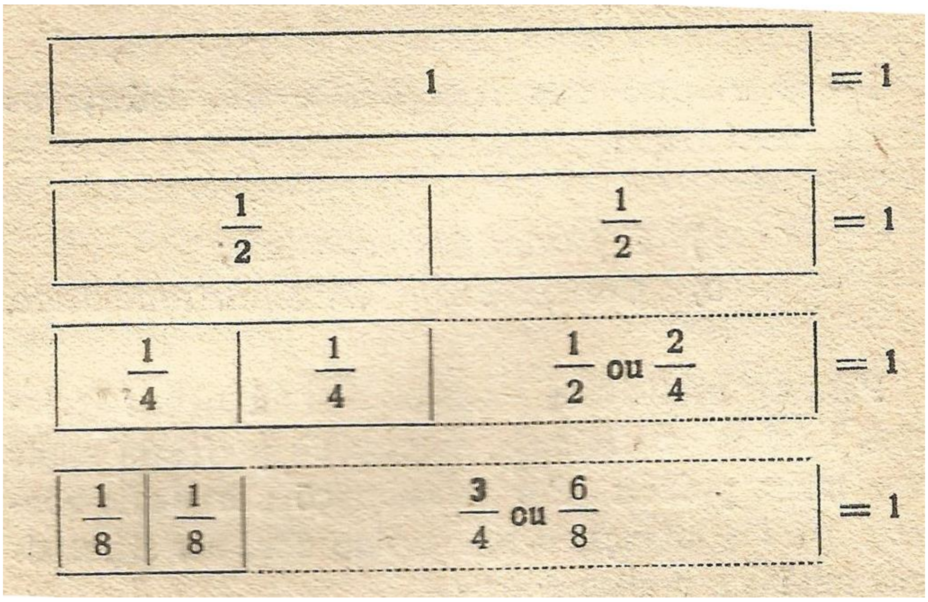


Figura 7.33. Relação entre a relação pictórica e a relação simbólica (Gaspar & Ferreira, 1944, p. 52, 100% do original).

Apesar das frequentes menções à concretização, Gaspar e Ferreira (1944) destacam que os alunos deverão repetir exercícios que lhes permitam um gradual desligar da concretização.

Em Gaspar e Ferreira (1944) existe também um trabalho para relacionar as diferentes representações simbólicas, nomeadamente a fração e a representação decimal.

Na proposta de Pinheiro (1961), este privilegia a representação simbólica e a sua relação com a representação verbal, com a escrita dos números por extenso. A proposta inicia-se muitas vezes com o recurso a modelos ativos, tira de papel, que depois é representada pictoricamente, estabelecendo-se de seguida a relação com a representação simbólica na forma de fração, como no exemplo:

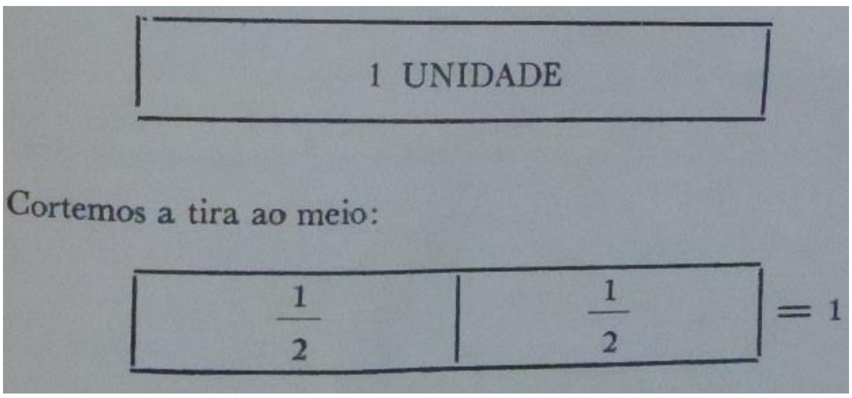


Figura 7.34. Iniciação à noção de fração. (Pinheiro, 1961, p. 79).

A relação entre diferentes representações simbólicas é também trabalhada por Pinheiro (1961), nomeadamente a relação entre fração, numeral misto e a representação decimal.

O trabalho com a representação decimal dos números racionais é centrado nas operações com estes números. Na abordagem às operações é usualmente utilizada a representação pictórica, estabelecendo-se depois uma relação com a representação verbal e com a representação simbólica na forma de numeral decimal, como no exemplo "«Um menino tinha um bolo. Deu 0,2 ao José, 0,3 ao João e 0,4 ao Carlos. Que quantidade de bolo deu aos três?»" (p. 72, aspas no original) que depois é representado pictoricamente como na figura seguinte:

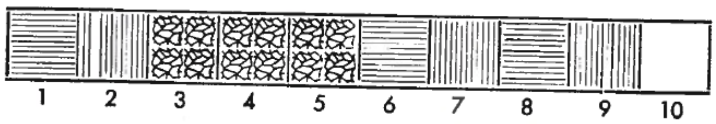


Figura 7.35. Representação gráfica dos dados de um problema (Pinheiro, 1961, p. 72).

Pinheiro (1961) também apresenta a resolução do problema, representando-a através de um esquema equivalente ao algoritmo, onde escreve as décimas por extenso. Posteriormente, a mesma operação é apresentada horizontalmente, utilizando a representação decimal e estabelecendo uma relação com a representação que tinha apresentado no esquema idêntico ao algoritmo.

$$\begin{array}{r} 2 \text{ décimas} \\ 3 \text{ décimas} \\ + \; 4 \text{ décimas} \\ \hline 9 \text{ décimas} \end{array}$$

9 décimas escreve-se: 0,9.
Logo: $0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}4 = 0{,}9$

Figura 7.36. Representação simbólica dos dados de um problema (Pinheiro, 1961, p. 72).

Na proposta apresentada por Gonçalves (1974) é frequente o recurso às representações pictóricas, que depois são relacionadas com a representação escrita e, posteriormente, com a representação simbólica, nomeadamente com o numeral decimal, o numeral misto, a fração e a percentagem. Um exemplo do destaque dado à relação entre a representação ativa, a pictórica, a representação verbal e a representação simbólica é a que Gonçalves (1974) utiliza para fazer a primeira abordagem à décima:

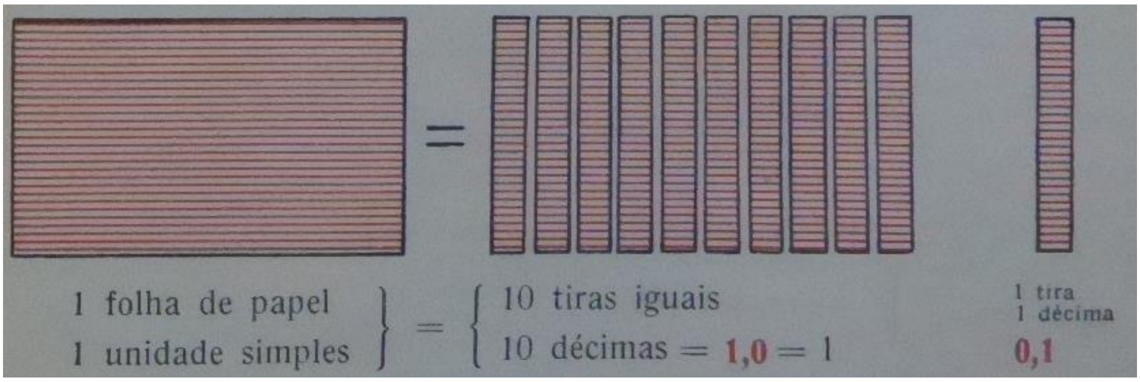
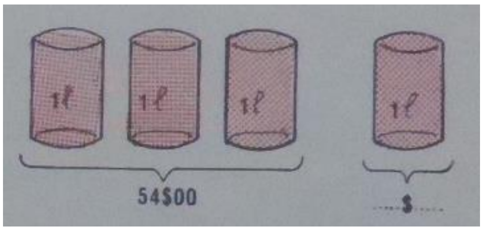
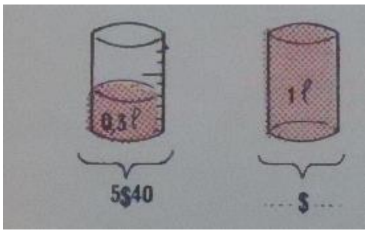


Figura 7.37. Representação da décima (Gonçalves, 1974, p. 45).

Um outro aspeto que se destaca na obra de Gonçalves (1974) é a utilização recorrente da representação pictórica para apresentar os problemas e as respetivas resoluções. Um exemplo da utilização da representação pictórica é a que Gonçalves (1974) apresenta para a resolução do problema:

1) Compraram-se três litros de azeite por 54$00. A como saiu o litro?





2) Compraram-se três decilitros (0,3l) de azeite por 5$40. A como saiu o litro do mesmo azeite?
O sentido do 1.º problema é nitidamente partitivo (54$00 : 3 = 18$00). (Gonçalves, 1974, p. 80)

Nas operações com frações, Gonçalves (1974) também enfatiza a utilização de diferentes representações, nomeadamente a utilização de objetos do dia a dia, que depois são representados pictoricamente e simbolicamente. Um exemplo é o que Gonçalves (1974) utiliza para a adição de frações:

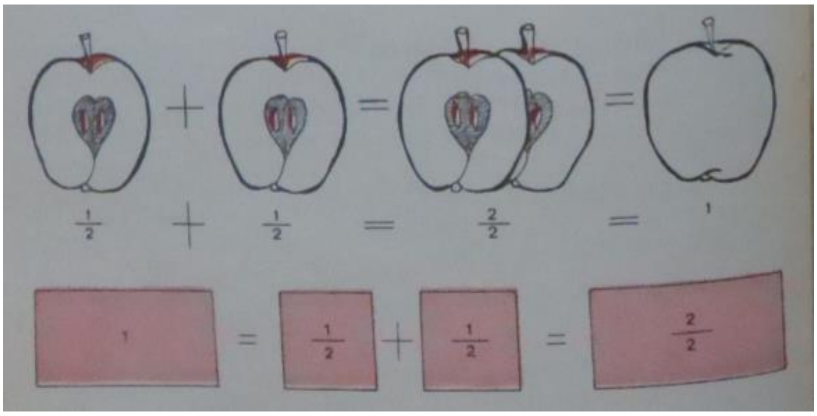


Figura 7.38. Representação ideográfica e simbólica dos jogos de decomposição e recomposição (Gonçalves, 1974, p. 146).

Gonçalves (1974) salienta também a relação entre a representação simbólica e a representação verbal escrita, apresentando uma sequência para o registo da nomenclatura associada às frações:

> A criança já compreendeu que fração é sinónimo de divisão. Por isso, facilmente se poderá levá-la a concluir:
> a) que qualquer fração se poderia representar sob a forma de divisão: um meio = 1 : 2 ; um terço = 1 : 3
> b) que se convencionou substituir o sinal da divisão por um *traço* ou *risco horizontal*:
> $1 : 2 = 1/2 = \frac{1}{2}$
> c) que o *denominador* (colocado por baixo do traço) corresponde, portanto, ao divisor e *denomina* (indica o nome) das unidades fracionárias: *meios*, *terços*, *quartos*, …
> d) que o *numerador* (colocado por cima do traço) corresponde ao dividendo e indica o *número* de unidades fracionárias. (Gonçalves, 1974, p. 151)

Gonçalves (1974) destaca ainda o trabalho com a percentagem, salientando que, para introdução ao tema, deverá ser feita a revisão do conceito de fração decimal, recomendando a realização de exercícios de conversão de frações decimais em dízima e vice-versa.

É ainda de referir a utilização por parte de Gonçalves (1974) de modelos de quantidade contínua como a representação do segmento de reta. No primeiro conjunto de exercícios pretende-se que o aluno diga e escreva o valor das frações, como no exemplo da figura.

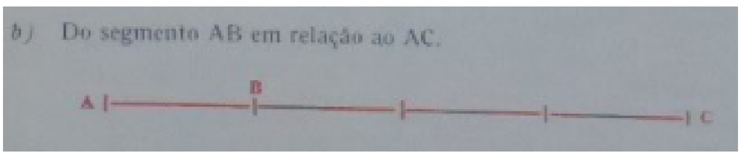


Figura 7.39. Exercício onde se pretende que o aluno identifique a fração num segmento de reta (Gonçalves, 1974, p. 159).

7.13.1. Em síntese

No que diz respeito às representações utilizadas nos manuais analisados no segundo período, começa-se por destacar as obras de Pimentel Filho (1934) e Gonçalves (1974) pelo recurso frequente à representação pictórica como forma de ilustrar e destacar o trabalho a realizar com os números racionais, com um recurso frequente à cor. Nestas duas obras também são frequentes as referências à utilização de representações ativas. São utilizados essencialmente modelos de quantidade contínua (Mamede, 2008), que os autores utilizam para relacionar com a linguagem verbal escrita e, posteriormente, com a linguagem simbólica matemática.

Na representação simbólica, Pimentel Filho (1934) privilegia inicialmente a representação dos números racionais como fração. Nesta obra a representação decimal é trabalhada posteriormente, numa relação estreita com as frações decimais. Neste trabalho são privilegiados os modelos contínuos de área, mas também são usados modelos contínuos de comprimento, como a reta orientada, tal como é referido em Mamede (2008). Há também no trabalho de Pimentel Filho (1934) referências a um material didático idêntico ao material multibásico, que é usado no trabalho com os números racionais na representação decimal.

Gonçalves (1974) faz um uso frequente da representação pictórica, que depois relaciona com a representação verbal escrita e representação simbólica matemática. Quanto à representação simbólica matemática privilegia inicialmente a representação decimal, mas também utiliza a fração, o numeral misto e a percentagem, estabelecendo uma relação entre estas diferentes representações simbólicas. Um outro aspeto a destacar na obra de Gonçalves (1974) é a utilização muito frequente da representação pictórica para apresentar os problemas e as respetivas propostas de resolução. São privilegiados os modelos de quantidade contínua, nomeadamente modelos de área e modelos de comprimento, como a representação a reta orientada. Também é de destacar a utilização por parte de Gonçalves (1974) de representações pictóricas de objetos do dia a dia que depois o autor relaciona com representações pictóricas, com o uso de modelos de quantidade contínua, e representações simbólicas.

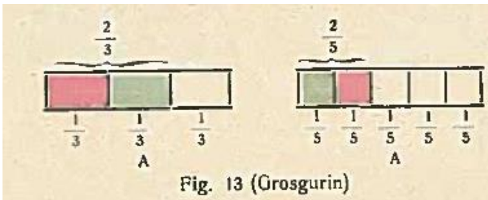
No que diz respeito a este segundo período analisado, Gaspar e Ferreira (1944) também mencionam a utilização das representações ativas, como as tiras de papel, e a correspondência posterior com a representação pictórica, principalmente com modelos de quantidade contínua que representam retângulos. Estes autores estabelecem depois uma relação com a representação verbal escrita e com a representação simbólica matemática, relacionando a fração com a representação decimal. No entanto, em Gaspar e Ferreira (1944) o recurso à representação pictórica é muito menos frequente do que em Pimentel Filho (1934) e Gonçalves (1974), assim como o recurso à cor. Gaspar e Ferreira (1944) salientam que a repetição de exercícios deverá levar os alunos a desligarem-se gradualmente da concretização.

A proposta de Pinheiro (1961) embora seja inicialmente diferente da de Gaspar e Ferreira (1944) por se centrar na representação decimal, apresenta algumas semelhanças na utilização das diferentes representações. Na proposta inicial indica frequentemente a utilização de representações ativas, como a tira de papel, que depois representa pictoricamente, em modelos de quantidade contínua de área. Apesar de existirem estas referências na obra de Pinheiro (1961), estas são muito menos frequentes do que nas obras de Pimentel Filho (1934) e Gonçalves (1974) e, tal como em Gaspar e Ferreira (1944), não há recurso à cor na representação pictórica. Na obra de Pinheiro (1961) também existe um trabalho para estabelecer a relação entre diferentes representações simbólicas matemáticas, como a fração, o numeral misto e a representação decimal.

7.14. Caracterização das situações matemáticas e contextos

As obras analisadas neste período centram-se na componente pedagógica, mas apresentam diferentes situações e contextos para a abordagem aos números racionais.

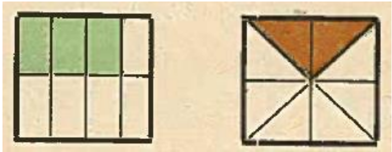
Na sua proposta, Pimentel Filho (1934) apresenta exemplos de situações matemáticas estritamente numéricas ou problemas com um contexto adaptado à prática e a situações do que poderia ser o dia a dia dos alunos. Relativamente à apresentação das primeiras noções, como a comparação de frações, Pimentel Filho (1934) utiliza muitas vezes situações matemáticas estritamente numéricas, referindo a concretização e recorrendo à representação pictórica.



À esquerda, a grandeza A foi dividida em terços e, à direita, a mesma grandeza foi dividida em quintos; em ambas se tomaram duas dessas partes: no primeiro caso, $\frac{2}{3}$; e, no segundo, $\frac{2}{5}$. As crianças verificarão, medindo-os, que $\frac{2}{3} > \frac{2}{5}$. (Pimentel Filho, 1934, pp. 151-152).

Nas operações com frações utiliza essencialmente as situações matemáticas estritamente numéricas, mas também recorre a situações semirreais, principalmente com problemas de cálculo, onde se recorre a duas ou mais operações aritméticas. O exemplo seguinte apresenta uma situação estritamente matemática para a subtração de frações:

Calcular a diferença das duas partes coloridas:
Unidade: o quadrado



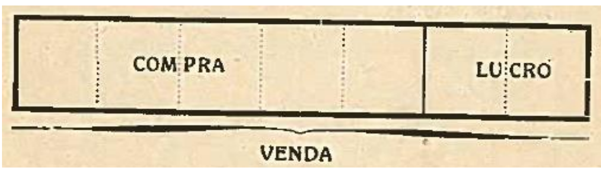
$\frac{3}{8} - \frac{2}{8} = \frac{1}{8}$
A primeira parte tem mais um oitavo de unidade. (Pimentel Filho, 1934, p. 166)

Entre os exemplos com contexto, o autor recorre essencialmente aos contextos de medida, comprimento, capacidade, tempo e dinheiro. Um exemplo com o contexto de medidas de comprimento é o seguinte, onde Pimentel Filho mostra o uso de numerais mistos e as operações com eles.

6.º Um barrote tem de comprimento m $4\frac{1}{4}$. Corta-se-lhe um pedaço de m $1\frac{1}{8}$. ¿ Quantos metros ficaram? $4\frac{1}{4} - 1\frac{1}{8} = 3\frac{1}{8}$, dizendo $4 - 1 = 3$; $\frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{2}{8} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$ (Pimentel Filho, 1934, p. 168).

Relativamente aos problemas a apresentar aos alunos, Pimentel Filho (1934) salienta que "Sempre que as condições materiais do problema a resolver possam ser verificadas diretamente, o devem ser: e, na impossibilidade de uma observação direta, recorrer-se-á à concretização dos dados dos problemas por meio de desenho, dos croquis." (p. 305, palavra destacada no original). Ainda em relação aos problemas, que estes devem ser organizados de uma forma que permita a graduação das operações. Pimentel Filho (1934) destaca que nos primeiros anos do ensino primário os professores se devem limitar a apresentar problemas que conduzam a uma só operação, ou então, dividir o enunciado do problema em tantas partes quantas as operações a realizar. Pimentel Filho (1934) salienta que, só na última classe do ensino primário se deveria deixar ao aluno o trabalho de destacar no enunciado as diferentes fases de resolução. Apesar destas indicações, no seu trabalho Pimentel Filho (1934) apresenta muitas vezes exemplos mais complexos, em que ao nível elementar a sua resolução implicava vários passos, como o exemplo seguinte com o contexto de dinheiro:

12.º Vendendo certa mercadoria por 280 escudos, tiramos um lucro igual aos $\frac{2}{5}$ do preço da compra.
¿ Qual foi o preço da compra?
No quadro: simbolizar o preço de compra por uma superfície ... placa de prata.



Aumentar esta superfície dos seus $\frac{2}{5}$, o todo representa o preço da venda.

280 escudos : 7 = 40 escudos. Estes 40 escudos representam o valor de $\frac{1}{5}$ da compra. Logo, a compra foi de 40 escudos x 5 = 200 escudos.

Prova. Os $\frac{2}{5}$ de 200 escudos, somados a 200 escudos, dão 280 escudos?

200 : 5 = 40; 40 x 2 = 80; 200 + 80 = 280

¿ O preço da compra que fração é do preço de venda? O preço de compra é, visivelmente, $\frac{5}{7}$ do preço de venda.

Ou ainda: 200 escudos são que fração de 280 escudos?

$\frac{200}{80} = \frac{20}{28} = \frac{5}{7}$

[1]) Escrevemos escudos por extenso, visto que, só depois de dados os números decimais, as crianças poderão compreender o emprego do $ (Pimentel Filho, 1934, pp. 171-172)

Este tipo de exemplos vai-se sucedendo na apresentação das diferentes operações com frações.

Nas operações com decimais, Pimentel Filho (1934) utiliza principalmente situações semirreais, com contextos ligados maioritariamente à medida e às atividades comerciais. São sobretudo problemas de cálculo que se resolvem com a utilização de uma ou mais das quatro operações aritméticas. Um exemplo utilizado na multiplicação é o seguinte: “11 estacas estão cravadas à distância de m 2,50 umas das outras. Queremos ligá-las com um arame. ¿quantos metros deste serão precisos?” (p. 217). O autor apresenta uma proposta de resolução onde salienta que as 11 estacas têm 10 espaços entre si de 2,50 m cada e por isso “m 2,50 x 10 = m 25” (p. 217).

No que diz respeito às situações matemáticas e contextos apresentados na obra de Gaspar e Ferreira (1944) para a abordagem ao conteúdo dos números racionais, salienta-se a utilização dos exercícios sem contexto. Os próprios autores destacam que neste conteúdo é necessário a repetição de exercícios e um gradual desligar da concretização. Isto é particularmente visível no trabalho com a representação em forma de fração, onde o autor começa por apresentar as frações através da concretização e representação pictórica, mas em situações estritamente matemáticas, para depois recorrer à apresentação de situações estritamente matemáticas apenas com a representação simbólica.

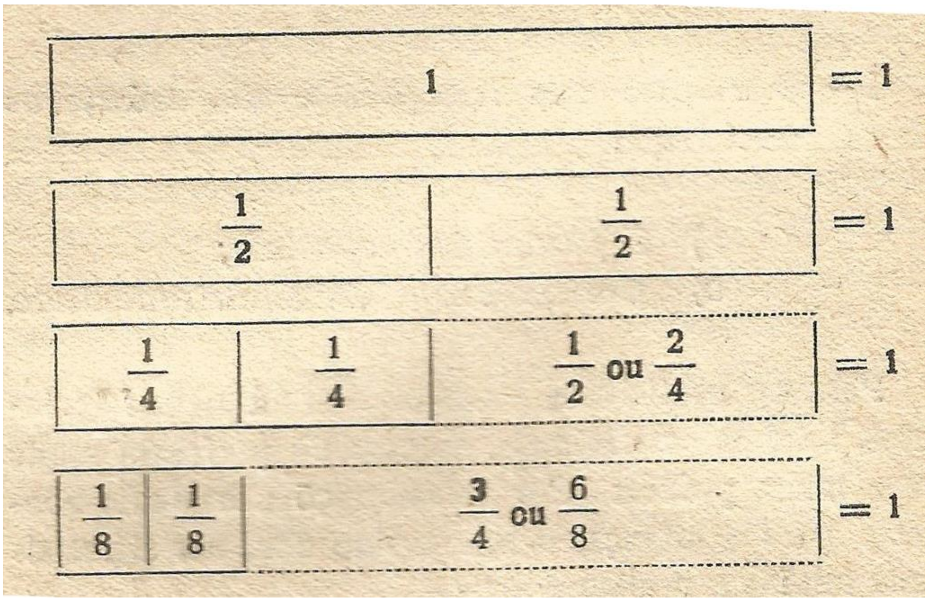


Figura 7.40. Situações matemáticas e contextos na introdução da noção de fração (Gaspar & Ferreira, 1944, p. 52, 100% do original).

No entanto, e especialmente no que se refere à representação decimal e a sua relação com as frações decimais, os autores apresentam situações semirreais, com problemas essencialmente de cálculo, envolvendo uma ou mais operações aritméticas, com contextos de medida ou de atividades comerciais. Também no contexto do trabalho com a representação decimal, Gaspar e Ferreira (1944) consideram que se deve dar importância aos contextos reais dos alunos. No entender dos autores, os problemas deveriam ser diversos, tanto nos dados, como no enunciado e na resolução, e os alunos deveriam ser habituados a verificar os resultados e as resoluções. Os autores estabelecem relações entre a resolução de problemas e outros conteúdos, nomeadamente a educação para os valores da cidadania da época. Apesar de fazerem algumas considerações sobre os contextos a utilizar na formulação de problemas, os autores não apresentam muitos exemplos do que poderiam ser os problemas no conteúdo dos racionais na sua representação decimal.

Relativamente à obra de Pinheiro (1961) este começa por abordar a representação decimal e as operações com decimais. As situações matemáticas privilegiadas são as semirreais e as estritamente numéricas. As situações com um contexto são essencialmente problemas de cálculo com a utilização de uma ou mais operações aritméticas, que servem para a aplicação das operações, como no exemplo seguinte: "«Um menino tinha um bolo. Deu 0,2 ao José, 0,3 ao João e 0,4 ao Carlos. Que quantidade de bolo deu aos três?»" (Pinheiro, 1961, p. 72, aspas no original). Na proposta de resolução são muitas vezes utilizadas representações pictóricas a par da representação verbal e simbólica. É de destacar que apesar de Pinheiro (1961) abordar a questão dos problemas a utilizar nas outras operações, muitas vezes não apresenta exemplos, o que não permite fazer uma análise do tipo e contexto dos problemas, ficando apenas o exemplo matemático estritamente numérico.

Na sua obra, Pinheiro (1961) apresenta uma secção onde aborda a resolução de problemas, destacando a proposição, a resolução, as regras a observar, problemas por via oral e escrita, tipos de problemas e erros mais frequentes. Pinheiro (1961) destaca os problemas construídos a partir de situações reais, mas com a adequação dos dados que levem a resultados exatos. Os contextos realçados são os da vida da criança, nomeadamente os que se relacionam com o dinheiro e com as medidas. Destaca-se também a importância da formulação de problemas, no sentido de melhorar a compreensão de noções já aprendidas, mas também no sentido da aquisição de hábitos de análise de situações mais complexas. Na resolução de problemas, Pinheiro (1961) salienta vários momentos, destacando a explicação do problema e o raciocínio como momentos essenciais. Há ainda algum destaque para a formulação de problemas por parte dos alunos e para a proposta de problemas que não apresentam todos os dados necessários e para os quais os alunos poderão apresentar diferentes propostas de resolução.

Na sua obra, Pinheiro (1961) destaca sete tipos de problemas a propor aos alunos, apresentando exemplos de cada tipo de problema. Alguns exemplos enquadram-se no conteúdos dos números racionais. O primeiro tipo de problema são os problemas da vida real e o exemplo apresentado é o seguinte "O José comprou 2,5 dm de fazenda por 45$00. Qual foi o preço do metro?" (Pinheiro, 1961, p. 83). Trata-se de um problema de cálculo, que pode ser resolvido com uma operação aritmética, com um contexto de medida e de atividade comercial. O segundo tipo são os problemas em série, em que após uma exposição inicial, são feitas questões em série, cujas respostas dependem da resposta anterior, como no exemplo:

> Quero engarrafar o vinho de um garrafão de 5 litros, em garrafas de 2,5 dl cada uma: 1. Quantas garrafas posso encher? 2. Quanto apurarei na venda se vender cada uma a 2$50? Se me pagarem todas as garrafas com uma nota de 500$00, que troco hei de dar? (Pinheiro, 1961, pp. 82-83)

Trata-se de uma sequência de problemas de cálculo, que podem ser resolvidos com uma operação aritmética, com um contexto de medida e de atividade comercial.

É também apresentado outro tipo de problemas em que o objetivo é resolver situações onde é fornecido um dado desnecessário. Um exemplo apresentado para este tipo de problemas é o seguinte "Um depósito com a forma de um paralelepípedo retângulo mede 1,5 m de comprimento, 1,20 m de largura e 0,75 m de altura. Qual é a área do fundo do depósito?" (Pinheiro, 1961, p. 84). Trata-se de um problema de cálculo, embora envolva a necessidade de identificar que um dos dados fornecidos é desnecessário. O contexto utilizado é o das medidas de comprimento.

As situações matemáticas e contextos privilegiados por Gonçalves (1974) decorrem da sua opção de iniciação aos números racionais através da representação decimal e da relação com as medidas de comprimento. A abordagem inicial da representação decimal é feita com exercícios e situações matemáticas estritamente numéricas com recurso à representação pictórica, verbal e simbólica. Um exemplo desta abordagem é o trabalho proposto para a décima e para adição com décimas:

1) As crianças observam novamente a divisão do metro em 10 partes iguais;

2) Com recurso à concretização, as crianças verificam a décima parte de outras unidades (pão, maçã, queijo) dividindo a unidade em dez partes iguais, apresentando a seguinte ilustração:

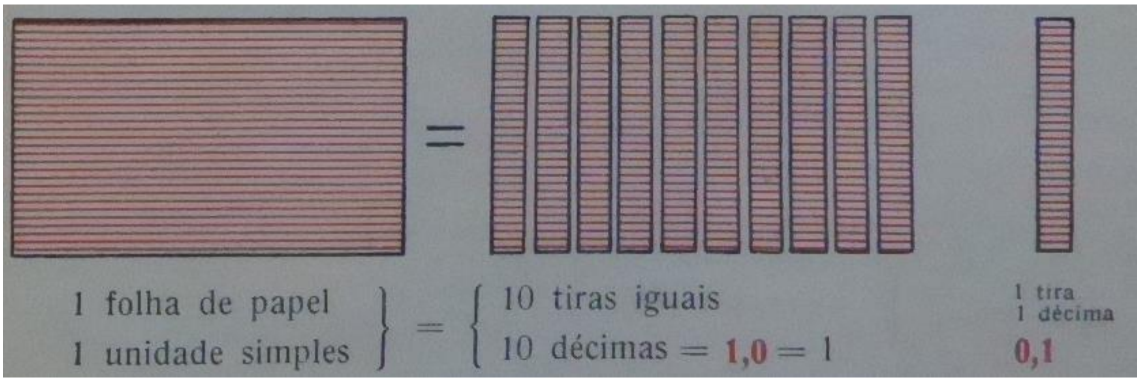


Figura 7.41. Representação da décima (Gonçalves, 1974, p. 45).

Gonçalves (1974) destaca como fator essencial para a criança dominar a notação decimal o reconhecimento de que 1,0 designa dez décimos e simultaneamente um.

3) Exercícios de análise

Ex.: 1 u = 5 d + 5 d

1 = 0,5 + 0,5

= 0,5 + 0,1 + 0,1 + 0,1 + 0,1 + 0,1

= 0,2 + 0,2 + 0,2 + 0,2 + 0,2

4) Exercícios de síntese

Ex.: 2 d + 3 d + 1 d = 6 d

0,2 + 0,3 + 0,1= 0,6

5) Exercícios de aplicação

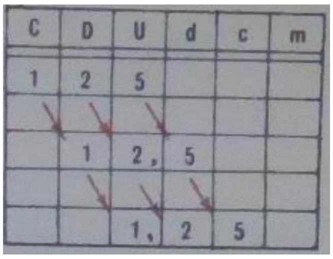
Nos exercícios de aplicação são propostas atividades em que se pretende que os alunos identifiquem as partes da unidade relativamente a um retângulo, a um círculo, ou ainda que se faça a leitura de números decimais em décimas.

Gonçalves (1974) recorre também a esquemas que sistematizam os conhecimentos com os decimais, como as tabelas para a comparação e ordenação de números:

125 … … 12,5 … … 1,25 … … 0,125

340 … … 34,0 … … 3,40 … … 0,340

24 … … 2,4 … … 0,24 … … 0,024



Os números tornam-se, sucessivamente, 10, 100, 1000 vezes menores, conforme a vírgula se deslocou, respetivamente, 1, 2, 3 casas para a esquerda.

(Gonçalves, 1974, p. 55)

Outra das situações privilegiadas por Gonçalves (1974) são as situações semirreais. Os problemas apresentados são essencialmente problemas de cálculo que envolvem uma ou mais das quatro operações aritméticas. São também apresentados alguns problemas que se poderão enquadrar nos problemas de processo, envolvendo uma ou mais estratégias de resolução. Os contextos mais utilizados por Gonçalves (1974) nos problemas são os de medida (comprimento e capacidade), com a ligação a possíveis questões do quotidiano. Estes contextos são também utilizados nos exercícios de aplicação das regras e procedimentos trabalhados.

- E quanto medem dois décimos (0,2) da peça?

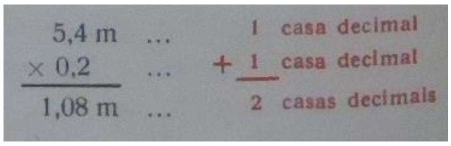
1.º RACIOCÍNIO: Vou saber quanto é um décimo da peça e depois multiplico-o por 2:

5,4 m : 10 = 0,54 m

0,54 m x 2 = 1,08 m

2.º RACIOCÍNIO: Se a peça mede 5,4 m, dois décimos da peça medirão:

0,2 x 0,54 m



5,4 m x 0,2 m = 5,4 m : 10 x 2

Chamar novamente a atenção para o sentido multiplicativo das expressões como **0,2 de …**

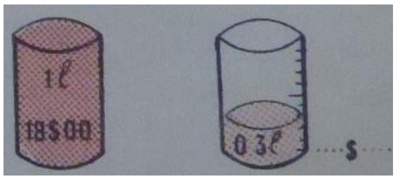
(Gonçalves, 1974, p. 68)

Logo depois deste tipo de situação, são sugeridos um conjunto de exercícios que envolvem situações estritamente matemáticas e também resolução de problemas com o contexto das medidas de comprimento e do dinheiro.

Gonçalves (1974) apresenta também uma tipificação dos problemas a apresentar tanto para as frações como para os decimais. Gonçalves (1974) destaca que uma boa parte dos problemas com decimais têm os seguintes elementos: “O valor correspondente à unidade; a fração; o valor correspondente a essa fração” ou então as suas homólogas “O valor do conjunto (o todo); a fração; o valor do subconjunto correspondente à fração" (p. 79) [180] [181] Gonçalves (1974) destaca assim que sendo dados dois desses elementos é sempre possível encontrar o terceiro, e salienta que isso implica a possibilidade de se formularem três grupos de problemas: *1.º Dados o valor correspondente à unidade (ou todo) e a fração, achar o valor do subconjunto correspondente a essa fração*; *2.º Dadas a fração e o valor do subconjunto que lhe corresponde, achar o valor da unidade (ou do conjunto)*; *3.º Dados o valor da unidade (ou do conjunto) e o valor do subconjunto, achar a fração*

Para o primeiro grupo de problemas são apresentados diversos exemplos considerados homólogos. O primeiro problema, com um contexto de medidas de capacidade, consiste em encontrar o valor correspondente à unidade em causa. Para este tipo de problema é também apresentada uma resolução tipo, primeiro encontrar o valor da fração unitária, neste caso da unidade decimal 0,1, e depois multiplicar pelo número de vezes que ela se repete, ou seja, por três.

> 1) Cada litro de azeite custa 18$00. Quanto custarão 0,3l desse azeite?
> Como vimos (p. 65) o problema pode solucionar-se, racionalmente, achando primeiro o valor de cada unidade decimal (18$00 : 10 = 1$80) e multiplicando-o depois pelo número delas (1$80 x 3 = 5$40). (Gonçalves, 1974, p. 79)

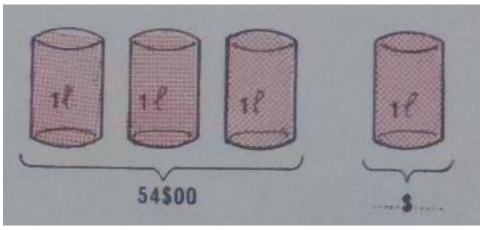


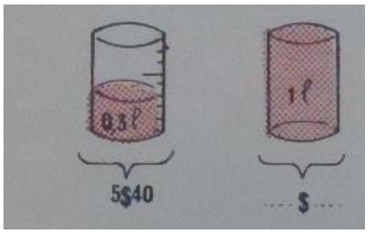
Logo de seguida é apresentado um segundo exemplo, considerado homólogo do primeiro, porque também representa uma situação iterativa que leva ao sentido da multiplicação, "2) Cada litro de azeite custa 18$00. Quanto custarão 3 l do mesmo azeite?" (p. 80). A proposta de resolução consiste na multiplicação dos 18$00 por 3, 18$00 x 3 = 54$00. Gonçalves (1974) considera que, após a criança observar a resolução do segundo problema acabará por perceber que a ação no primeiro problema também é multiplicativa, verificando que multiplicar por 0,3 é o mesmo que dividir por 10 e multiplicar o resultado por 3. Gonçalves (1974) salienta ainda que "a criança também concluirá que, *dado o valor da unidade, para saber o da quantidade* (seja esta maior ou menor que a unidade), *a ação é multiplicativa*" (p. 80, itálico no original). Para este primeiro grupo de problemas são ainda apresentados outros exemplos que, de acordo com Gonçalves (1974) pretendem estender o conceito de unidade ao de todo, ou de conjunto.

[180] Gonçalves (1974) utiliza neste capítulo a nomenclatura fração, mas no sentido de parte da unidade e não no sentido de representação do número na forma de fração.
[181] Na sua obra, Gonçalves (1974) utiliza diversas vezes uma linguagem associada aos conjuntos, nem sempre de uma forma correta. Esse tipo de linguagem reflete o contexto da época, em que a linguagem dos conjuntos era muito utilizada no ensino primário associada ao estudo inicial do número. Neste trabalho iremos manter a linguagem utilizada na época.

No segundo grupo de problemas, *Dadas a fração e o valor do subconjunto que lhe corresponde, achar o valor da unidade (ou do conjunto)*, também são apresentados diversos problemas. Os dois primeiros problemas apresentam um contexto de medidas de capacidade, que se pretende que sejam resolvidos por analogia.

> 1) Compraram-se três litros de azeite por 54$00. A como saiu o litro?





> 2) Compraram-se três decilitros (0,3l) de azeite por 5$40. A como saiu o litro do mesmo azeite?
> O sentido do 1.º problema é nitidamente partitivo (54$00 : 3 = 18$00). (Gonçalves, 1974, p. 80)

O primeiro problema é associado a uma situação partitiva e a proposta de resolução é através de uma divisão, 54$00 : 3 = 18$00. Daqui o aluno deveria reconhecer que o segundo problema apresenta uma situação análoga, inferindo que se for conhecido o valor de uma determinada quantidade, para saber o da unidade, o sentido é dividir. Para o segundo problema é sugerida uma outra forma de resolução que passaria por determinar primeiro o preço de cada décima e depois por multiplicar esse resultado por 10. São ainda sugeridos outros problemas.

No terceiro grupo de problemas, *Dados o valor da unidade (ou do conjunto) e o valor do subconjunto, achar a fração*, são inicialmente apresentados dois problemas.

> 1) Com 54$00, que porção de azeite se pode comprar, de preço de 18$00 o litro?
> 2) Com 5$40, que porção de azeite se pode comprar, do preço de 18$00 o litro? (Gonçalves, 1974, p. 82)

O primeiro problema é considerado como sendo do sentido conteúdo, da divisão, sendo a resolução proposta a seguinte 54$00 : 18$00 = 3. O segundo problema também é enquadrado num raciocínio análogo e, por isso, deverá ser resolvido com um raciocínio semelhante 5$40 : 18$00 = 0,3. Para Gonçalves (1974) estes dois problemas têm a ideia de conteúdo da divisão, ou seja, de relação entre os seus dados. Gonçalves (1974) destaca assim que, "*a fração é-nos dada pela relação (ou razão) entre o valor da quantidade e o valor da unidade*." (p. 82, itálico no original). Salienta ainda que a aprendizagem destes problemas não se deve apoiar apenas na memorização de regras, ou na repetição, sem existir uma prévia compreensão. Gonçalves (1974) considera que esse trabalho de compreensão foi feito previamente quando foram trabalhadas a multiplicação e a divisão de decimais como generalização das leis básicas dessas operações com inteiros.

7.14.1. Em síntese

Nas obras do segundo período, que se centram na componente pedagógica, há muitas referências à importância das situações e contextos que se apresentam aos alunos. No entanto podem distinguir-se dois grupos de manuais. Os manuais de Pimentel Filho (1934) e de Gonçalves (1974) salientam a importância das situações apresentadas aos alunos no trabalho com os números racionais e apresentam diversos exemplos de situações e contextos a utilizar neste conteúdo. Nos manuais de Gaspar e Ferreira (1944) e Pinheiro (1961) também são muitas referências à importância das situações e contextos a apresentar aos alunos, nomeadamente com os problemas relacionados com situações do dia a dia, mas são apresentados poucos exemplos.

Na obra de Pimentel Filho (1934), as primeiras noções das frações são apresentadas com recurso a situações matemáticas estritamente numéricas, com recurso a representações pictóricas que ilustram a situação. No entanto, este autor também recorre a situações semirreais, principalmente com recurso a problemas de cálculo, que se poderiam resolver com duas ou mais operações aritméticas. Nos exemplos em que são utilizados contextos Pimentel Filho (1934) recorre essencialmente aos contextos de medidas de comprimento, medidas de capacidade, tempo e dinheiro. Nestes exemplos é destacar a importância que Pimentel Filho (1934) dá à concretização dos dados do problema ou à sua representação através de desenhos e de esquemas. Pimentel Filho (1934) salienta a importância da ordenação da dificuldade dos problemas a apresentar aos alunos, destacando que os problemas a trabalhar nos primeiros anos se deveriam resolver apenas com uma operação aritmética, ou divididos em tantas partes quantas as operações a realizar, e apenas no último ano do ensino primário deveriam ser utilizados problemas em que o aluno tivesse que destacar no enunciado as diferentes fases da resolução. No entanto, nos exemplos que apresenta na sua obra, Pimentel Filho (1934) apresenta muitas vezes situações mais complexas, em que ao nível elementar a sua resolução implicaria vários passos no processo de resolução. Nas operações com decimais, Pimentel Filho utiliza essencialmente situações com um contexto semirreal, relacionadas com a medida ou com as atividades comerciais. São sobretudo problemas de cálculo que se podem resolver com a utilização de uma ou mais operações aritméticas.

Na obra de Gonçalves (1974), as situações matemáticas e os contextos utilizados ressaltam da sua opção de iniciação aos números racionais através da representação decimal e da relação com as medidas de comprimento. Na primeira abordagem, o autor recorre principalmente a situações matemáticas estritamente numéricas, que ilustra com recurso à representação pictórica e a esquemas. Outras situações privilegiadas por Gonçalves (1974) são as situações com contextos semirreais, utilizando essencialmente as medidas de comprimento, as medidas de capacidade e o dinheiro. São utilizados problemas de cálculo que envolvem uma ou mais das quatro operações aritméticas. São também apresentados por Gonçalves (1974) alguns problemas que se poderão enquadrar nos problemas de processo já que, ao nível elementar, poderiam exigir a utilização de uma ou mais estratégias de resolução. Na obra de Gonçalves (1974) é ainda de destacar a tipificação que o autor apresenta nas situações a apresentar aos alunos tanto com as frações como os decimais. O autor destaca três tipos de problemas que se podem enquadrar nos tipos de problemas de tarefas de identificação de quantidades propostos por Mamede (2008), em que 1) se procura a fração, sendo dada a parte e o todo; 2) identifica-se a parte, sendo dado o todo e a fração; e 3) encontra-se o todo, sendo dada a parte e a fração.

No que diz respeito às situações e contextos a apresentar aos alunos, nas obras de Gaspar e Ferreira (1944) e Pinheiro (1961) distingue-se uma abordagem diferente para a representação dos números racionais na forma de fração e para a representação decimal. Estes autores parecem considerar que a representação em fração está muito longe dos contextos reais dos alunos e, por isso, a maioria das propostas na abordagem às frações são situações matemáticas estritamente numéricas, com o apoio da representação pictórica ou de modelos ativos. No entanto, no trabalho com a representação decimal, estes autores fazem referência à utilização de situações de semi-realidade, com contextos de medidas ou de atividades comerciais. É referida fundamentalmente a utilização de problemas de cálculo, envolvendo uma ou mais operações aritméticas. Nas obras de Gaspar e Ferreira (1944) e Pinheiro (1961), apesar de referências constantes à importância de os contextos dos problemas estarem relacionados com situações do dia a dia das crianças, os exemplos apresentados não refletem o discurso, já que são apresentados essencialmente exemplos com recurso a situações matemáticas estritamente numéricas, mesmo na abordagem à representação decimal. Na obra de Pinheiro (1961) salienta-se o destaque dado à formulação de problemas, não só no sentido de melhorar a compreensão de noções já aprendidas, mas também para a aquisição de hábitos de análise de situações mais complexas. É ainda de salientar que, principalmente em Gaspar e Ferreira (1944), os problemas e contextos são utilizados para estabelecer relações com a educação para os valores de cidadania da época.

8

Capítulo 8 – Conclusões

Neste capítulo começa-se por apresentar uma síntese do estudo. Após esta síntese, apresenta-se as principais conclusões relativas à análise dos documentos legais, procurando-se dar resposta às questões colocadas sobre os documentos legais e do currículo prescrito. Apresenta-se de seguida as conclusões referentes aos diferentes manuais analisados, no que diz respeito à caracterização dos autores e à caracterização global da obra e as conclusões referentes ao conhecimento profissional do professor nas componentes essenciais do ensino dos números racionais nos primeiros anos de escolaridade, procurando-se dar resposta às questões colocadas inicialmente sobre os manuais. A partir destas conclusões tentar-se-á chegar a uma resposta mais alargada à questão geral da investigação.

Após as conclusões identifica-se os principais contributos do estudo e depois apresenta-se as limitações e sugestões para futuras investigações.

A investigação seguiu uma metodologia de caráter qualitativo, numa perspetiva histórica, através da análise documental. Desta forma, a análise dos dados é essencialmente descritiva e interpretativa.

8.1. Síntese do estudo

Este trabalho tem como objetivo estudar o desenvolvimento do conhecimento profissional do professor para o ensino da matemática trabalhado nos cursos de formação inicial de professores do ensino primário em Portugal, entre 1844 e 1974. Tendo em conta este objetivo, foi formulada uma questão geral Q. Como se desenvolveu o conhecimento profissional do professor para o ensino da matemática na formação inicial dos professores do ensino primário, no período em estudo, nomeadamente no conteúdo dos números racionais não negativos (frações e decimais)?

A partir da questão geral, foram formuladas questões mais específicas, organizadas em dois grandes conjuntos. O primeiro relaciona-se com a análise dos normativos legais e do currículo prescrito Q1 – De que forma a matemática e o seu ensino marcavam presença nos cursos de formação dos professores do ensino primário? Q2 – Como é que o currículo prescrito refletia a necessidade do desenvolvimento de um conhecimento específico para ensinar matemática nos primeiros anos de escolaridade, o designado conhecimento profissional do professor, nas escolas de formação de professores? Q3 - Que conhecimento profissional para ensinar o conteúdo dos números racionais não negativos é possível identificar na legislação que regulamentava a formação inicial dos professores do ensino primário, no período em estudo? Q4 – Que ideias pedagógicas marcaram a evolução do conhecimento profissional do professor na formação inicial dos professores do ensino primário?

As respostas as estas primeiras quatro questões encontram-se essencialmente nas diferentes secções do capítulo 5 deste trabalho, onde se analisam os documentos legislativos.

O segundo conjunto de questões centra-se na análise dos manuais utilizados na formação de professores Q5 - Quem eram os autores dos manuais utilizados nos cursos de formação inicial dos professores do ensino primário, qual a sua formação, em que meio educativo atuaram e que relação tinham com a matemática? Q6 – Que conteúdos de matemática eram abordados nos manuais utilizados na formação inicial dos professores do ensino primário e de que forma refletem uma preocupação com o desenvolvimento de um conhecimento profissional do professor para ensinar matemática? Q7 – Que conhecimento profissional para ensinar o conteúdo dos números racionais não negativos é possível identificar nos manuais utilizados na formação inicial dos professores do ensino primário? Q8 – O conhecimento para ensinar o conteúdo dos números racionais não negativos exposto nos manuais utilizados na formação de professores tem de alguma forma reflexo no que atualmente a literatura na área da didática da matemática aponta como importante para o ensino deste conjunto numérico? Q9 – Que relações se encontram entre as principais ideias pedagógicas que marcaram o período em estudo e os modelos pedagógicos apresentados pelos autores dos manuais para a área do ensino da matemática?

As respostas a estas cinco questões encontram-se essencialmente nos capítulos 6 e 7 deste trabalho. O capítulo 6 centra-se nas questões sobre os autores dos manuais, aspetos globais da obra e do conteúdo global sobre o ensino da matemática e ideias pedagógicas que influenciaram a formação de professores. O capítulo 7 centra-se nas questões sobre o desenvolvimento profissional para o ensino dos números racionais.

Com o objetivo e as questões de investigação formuladas nestes termos, o quadro teórico desenvolve-se em torno de duas grandes áreas, o conhecimento profissional do professor e o currículo. O conhecimento profissional do professor para ensinar matemática é em primeiro lugar discutido em termos mais globais, centrando-se depois no conhecimento para ensinar os números racionais não negativos. O currículo é discutido na relação existente entre os diferentes níveis de decisão curricular e a forma como o discurso pedagógico é recontextualizado nestes níveis de decisão.

A investigação enquadra-se no paradigma descritivo e interpretativo, com um caráter histórico. Os documentos que constituem as fontes dividem-se em dois grupos, os documentos legais, localizados essencialmente em portais como o Diário da República Eletrónico ou Coleção de Legislação Régia, mas também em bibliotecas ou arquivos de escolas superiores de educação. Relativamente aos manuais ou livros de texto, estes foram localizados em bibliotecas de escolas superiores de educação, Biblioteca Nacional de Portugal e arquivo da Secretaria-Geral do Ministério da Educação.

No processo de análise dos documentos legais fez-se inicialmente uma leitura e descrição de todos os documentos, organizando sínteses descritivas que permitiram identificar temáticas semelhantes nos documentos. Foram identificados temas como os conteúdos matemáticos nos exames de acesso à profissão, provas de acesso às escolas de formação de professores, estrutura curricular dos cursos, as disciplinas que abordam conteúdos de matemática e do seu ensino e os programas dessas disciplinas, os exames finais e a formação dos docentes das escolas de formação de professores do ensino primário. A informação foi depois representada numa narrativa qualitativa e sintetizada em tabelas. A interpretação dos dados teve em conta o quadro teórico, nomeadamente o modelo do discurso pedagógico de Bernstein (1990).

No que diz respeito à análise dos manuais ou livros de texto, adaptou-se a proposta de Maz (2005) para a caracterização do autor, caracterização global da obra e caracterização do conteúdo global relacionado com a matemática e o seu ensino. Neste último aspeto foi necessário proceder a diversas adaptações à proposta de Maz (2005) de forma a adequá-la aos resultados de uma primeira análise descritiva dos manuais. Na análise do conteúdo matemático sobre os números racionais adaptou-se o modelo de Ball et al. (2008) para a caracterização do conhecimento profissional do professor, cruzando-o com a proposta de Monteiro e Pinto (2005) e Pinto (2011) onde se identifica componentes essenciais para o desenvolvimento do sentido do número racional, como a definição de número racional, diferentes significados das frações em contexto, unidade de referência, equivalência de frações, comparação e ordenação de frações e utilização de diferentes representações. Através da interação entre estes dois modelos procedeu-se à caracterização do conhecimento profissional do professor para o ensino dos números racionais.

A análise dos documentos levou às conclusões que se apresentam a seguir. Nas conclusões as questões foram agrupadas de forma que se possa estabelecer uma relação entre os documentos legislativos e os manuais analisados, com exceção das questões Q1 e Q5, onde, pela natureza das próprias questões, não se estabelece esta relação. A questão Q2 e a questão Q6 são analisadas em conjunto porque se centram no desenvolvimento do conhecimento profissional para o ensino da matemática, as questões Q3, Q7 e Q8, centradas no conhecimento profissional do professor para o ensino dos números racionais e as questões Q4 e Q9, centradas nas ideias pedagógicas que influenciaram a formação inicial dos professores do ensino primário.

8.2. A matemática nos cursos de formação inicial dos professores do ensino primário

A resposta à primeira questão formulada (Q1) pode ser encontrada no capítulo 5 desta investigação, onde são apresentados os dados relativos à presença da matemática nos cursos de formação inicial dos professores do ensino primário, nomeadamente no que diz respeito aos exames de acesso, às qualificações exigidas aos candidatos, aos planos de estudo, às disciplinas, aos programas das disciplinas, aos exames de conclusão do curso e às habilitações para a docência nas escolas de formação. Na análise das componentes do plano de estudos, e da presença da matemática nesse plano, adotou-se a sistematização utilizada por Baptista (2004) que agrupa as disciplinas dos cursos de formação inicial de professores do ensino primário em três componentes: componente de ciências de especialidade e formação geral, componente pedagógica e a componente prática.

No âmbito cronológico do estudo, a análise dos documentos legislativos evidencia dois períodos distintos, quanto à presença da matemática nos cursos de formação inicial dos professores do ensino primário. Um primeiro período que vai desde o início da formação institucionalizada até à extinção das escolas normais primárias em 1930, e um segundo período que se inicia em 1930, com a constituição das escolas do magistério primário, e vai até 1974, final do âmbito cronológico do estudo.

No primeiro período, verifica-se que a matemática, ou as disciplinas com conteúdos de matemática ou do seu ensino, tem um estatuto elevado entre os conteúdos da formação inicial de professores do ensino primário, desde o início da institucionalização desta formação. Esse estatuto verifica-se pela sua presença nas diferentes componentes do curso, tanto na componente de ciências de especialidade, como na componente pedagógica. Também é possível observar esse estatuto pela importância que os conteúdos relacionados com a matemática e o seu ensino têm nos exames de acesso às escolas de formação ou nos exames de conclusão do curso.

No segundo período, as disciplinas com conteúdos de matemática ou do seu ensino, deixam de ter um estatuto elevado na componente de ciências de especialidade, mas reforçam o seu peso na componente pedagógica. Este é um processo que não é exclusivo dos conteúdos de matemática e foi descrito para outras disciplinas por Baptista (2004) ou Pintassilgo (2012). Os conteúdos de matemática continuam também a estar presentes nos exames de acesso ao curso e nos exames de conclusão do mesmo.

Até ao início do século XX uma forma importante de acesso à profissão foi através do exame de habilitação para o exercício do magistério primário, onde não era exigida a frequência ou aprovação numa escola de formação de professores. Apesar de estarem previstos anteriormente, e os conteúdos de matemática estarem sempre presentes, a legislação de 1870 pormenoriza o conteúdo destes exames, de onde se pode tentar inferir o que seria exigido na época. O exame era constituído por três partes, das quais faziam parte os números inteiros, as operações com números inteiros, os quebrados e as operações com quebrados, os decimais, critérios de divisibilidade, razões e proporções, resolução de problemas e cálculo comercial.

É de salientar que o conteúdo dos exames previsto em 1870 era distinto para os candidatos do sexo masculino e do sexo feminino. O conteúdo dos exames das candidatas era simplificado, exigindo-se que realizassem apenas a primeira de três partes da prova de aritmética. Esta simplificação era compensada pelas provas práticas de lavores e por uma valorização da pedagogia. Apesar de ao longo do período analisado serem quase constantes os momentos em que os cursos diferiam para os dois sexos, esta foi a única em que foi possível identificar uma diferença na exigência ao nível dos conteúdos de matemática, baseada na questão de género.

Nestes exames, embora aos candidatos de ambos os sexos fosse exigido o conhecimento da noção de fração, quebrados como se designava na época, só aos candidatos masculinos era exigido o conhecimento de conteúdos relacionados com a equivalência de frações e operações com frações. O conhecimento pedido parece centrar-se no conhecimento do conteúdo, como o entende Ball et al. (2008), embora a prova de pedagogia tivesse como conteúdos o ensino do cálculo mental, da aritmética e do sistema métrico, focado no conhecimento pedagógico do conteúdo (Ball et al., 2008).

Os exames de acesso de habilitação para o magistério primário passam a ter uma maior exigência, quando a partir de 1896 o seu conteúdo passa a seguir os programas das escolas normais primárias.

O acesso à profissão foi vedado às pessoas que não frequentassem um curso das escolas normais a partir de 1901. No entanto, em 1931 foram criados os exames de acesso aos lugares de professor do ensino primário. A estes candidatos começou por ser exigido apenas um atestado de idoneidade moral e intelectual, sendo mais tarde criada uma prova de aptidão com os conteúdos limitados aos programas da 4.ª classe, onde estava incluída uma prova de aritmética, e uma prova de aptidão pedagógica. Esta forma de acesso à profissão só começou a ser corrigida a partir de 1942 e representou um retrocesso na profissionalização dos professores do ensino primário.

O exame de acesso às escolas normais constituía um requisito de acesso aos que não eram dispensados das provas por apresentarem as qualificações mínimas já referidas anteriormente. Desde as primeiras regulamentações, em 1844, que as provas previam conteúdos de matemática, tais como as quatro operações aritméticas. Os conteúdos de matemática tinham um estatuto elevado entre os conteúdos que constituíam as provas de acesso às escolas normais, podendo ser motivo de exclusão no caso da obtenção de uma classificação de mau.

As qualificações exigidas a quem pretendia frequentar os cursos de formação inicial de professores do ensino primário vão variando ao longo do período em estudo. Até 1930 assiste-se a aumento na exigência de qualificações, ano em que se passa a exigir apenas o exame do 2.º grau do ensino primário elementar. Embora esta redução tivesse sido inicialmente justificada com o prolongamento do curso por quatro anos, previsto em 1928, significou que se puderam candidatar ao curso pessoas com qualificações mais baixas durante vários anos. Após a reabertura das escolas do magistério primário, em 1942, volta-se a assistir a um elevar das qualificações exigidas.

É nos programas das provas de acesso às escolas normais, publicados em 1916, que os conteúdos são apresentados pela primeira vez de uma forma mais detalhada. Estes programas revelam uma maior exigência do que os evidenciados em legislação anterior, com conteúdos que abordam temas como a aritmética, a geometria e a álgebra elementar. Os conteúdos avaliados centram-se num conhecimento comum do conteúdo, não existindo qualquer prova de pedagogia.

As provas de admissão aos cursos das escolas de formação inicial de professores do ensino primário, voltam a ser legisladas em 1928, mas mantêm-se quase integralmente os programas de 1916, com os conteúdos de temas como a aritmética, geometria e a álgebra elementar. As provas escritas previstas na legislação de 1930 mantiveram-se semelhantes às previstas anteriormente, assim como as provas práticas. Em 1940 as provas escritas passam a ser só quatro, sendo a matemática uma dessas provas.

Os Exames de Estado passaram a constituir o exame final dos cursos de formação inicial dos professores do ensino primário. Ao contrário dos exames finais das escolas normais, baseados num júri local, estes exames de estado passaram para uma organização centralizada a partir de 1931. A análise efetuada à legislação evidencia que estes exames se centravam em questões de pedagogia e de didática, ou seja, no conhecimento pedagógico do conteúdo (Ball et al., 2008) sendo exigido aos alunos, futuros professores, planos de lições e organização de dias de aulas. Estes Exames de Estado mantêm-se na legislação de 1942 e de 1960. A instituição dos Exames de Estado permite uma uniformização de critérios de saída destas escolas de formação e um maior controlo sobre os conteúdos avaliados, numa relação entre o poder central e as escolas de formação com um enquadramento mais forte, no sentido que lhe dá Bernstein (1990).

No sentido de compreender a presença da matemática no plano de estudos e nas disciplinas dos cursos de formação inicial dos professores do ensino primário foi necessário identificar a duração destes cursos, conhecer o plano de estudos e as suas diferentes componentes, perceber quais as disciplinas onde se trabalhavam conteúdos de matemática e compreender e como é que elas se distribuíam pelas componentes do curso e pelos diferentes anos, e que peso tinham no plano de estudos.

De uma forma geral, pode-se dizer que enquanto foi ministrado nas escolas normais primárias o curso teve por norma a duração de três anos. Houve, no entanto, alguns momentos em que isso não se verificou. No primeiro regulamento de 1844, que não chegou a ser concretizado, a duração prevista do curso era de um ou dois anos, conforme o curso se destinasse ao primeiro ou ao segundo grau do ensino primário. Em 1911 e em 1928 o curso passou a ter quatro anos e, a partir de 1930, a duração do curso diminuiu para dois anos. Apesar da legislação de 1932 prever a duração de três anos para o curso das escolas do magistério primário, quando estas escolas reabriram em 1942, a legislação já previa apenas uma duração de dois anos, em que o último semestre era dedicado ao estágio. Apesar das alterações ocorridas em 1960, o curso continuou com a duração de dois anos. Tal como já salientaram Pintassilgo (2012) ou Baptista (2004) a redução da duração do curso que ocorreu a partir de 1930 deveu-se a uma tentativa de simplificar o curso, reduzindo o tempo dedicado à formação e reduzindo o curso ao indispensável para uma formação profissionalizante.

Da análise efetuada aos planos de estudos foi possível verificar que a componente das ciências de especialidade representou, desde os primeiros regulamentos em 1860 até à legislação de 1919, uma parte muito significativa das horas do curso. As disciplinas desta componente representavam 75% ou mais do tempo semanal de aulas. A legislação de 1930 é um marco importante porque faz com que esta componente passe a representar apenas 30% do tempo semanal do curso, o que se mantém na legislação posterior de 1942 e de 1960. Percurso quase inverso teve a componente pedagógica, que na regulamentação inicial representava aproximadamente 10% do tempo semanal, com a legislação de 1930 passou a representar cerca de 30% e com a legislação de 1942 e de 1960 passou a representar aproximadamente 50% do tempo semanal do curso.

Desde os primeiros regulamentos dos cursos de formação inicial de professores do ensino primário que as disciplinas com conteúdos de matemática estiveram presentes na componente de ciências de especialidade e formação geral. Até 1881, os planos de estudos não definem a distribuição da carga horária semanal por cada disciplina, nem definem a distribuição dos conteúdos das disciplinas pelas classes do curso, numa relação entre o estado central e as escolas de formação com um enquadramento fraco, como o define Bernstein (1990, 2000). Na legislação de 1881, onde é possível perceber o peso relativo das diferentes disciplinas na carga horária semanal, pode-se verificar que as disciplinas de *Aritmética, sistema legal de pesos e medidas; noções de álgebra* e *Geometria elementar e suas aplicações mais usuais* estão entre as disciplinas que apresentam maior número de horas semanais, na componente das ciências de especialidade e formação geral, ao longo do curso. Esta situação mantém-se até 1930, com a disciplina onde se trabalha os conteúdos de matemática.

Da análise dos planos de estudo também se evidencia que a disciplina com conteúdos de matemática da componente de ciências de especialidade e formação geral tinha um maior peso no horário semanal no primeiro ano do curso, do que nos restantes. Com a legislação de 1930 deixa de existir uma disciplina de matemática na componente de ciências de especialidade. Nesta componente do curso passam apenas a ser tratados alguns conteúdos de geometria associados às disciplinas de *Trabalhos manuais e jardinagem* e *Modelação e desenho*. Esta situação vai-se manter até ao final do âmbito cronológico deste estudo.

Na componente pedagógica, desde os primeiros regulamentos que os planos de estudos apresentam uma disciplina associada aos métodos de ensino ou à pedagogia, onde seria possível encontrar conteúdos associados ao ensino da aritmética ou da geometria. Na legislação de 1881, onde são pela primeira vez discriminadas as horas de lição por semana por disciplina, é possível verificar que a disciplina de *Pedagogia e metodologia; legislação relativa às escolas primárias* tem um peso relativo idêntico a disciplinas como a *Aritmética, sistema legal de pesos e medidas; noções de álgebra*. Quando, em 1916, a disciplina de *Metodologia* já apresenta autonomia relativamente à disciplina de *Pedagogia geral e história da educação*, esta aparece com um peso relativo pequeno no horário semanal do curso, e apenas no primeiro ano. Em 1928, a disciplina de *Metodologia* ganha peso no plano de estudos, no entanto, é em 1930, já como *Didática*, embora associada à prática na escola de aplicação, que esta componente associada aos métodos de ensino adquire uma importância maior. A legislação posterior, publicada em 1942 e em 1960, veio confirmar a importância desta disciplina de didática no curso de formação inicial de professores do ensino primário, primeiro como *Didática*, depois como *Didática especial* e mais tarde como *Didática especial do grupo A ou B* distinta para diferentes grupos de disciplinas.

A designação das disciplinas do curso de formação inicial de professores do ensino primário também revela alterações que vão sendo incorporados no curso. Uma primeira observação é a incorporação do sistema legal de pesos e medidas na disciplina de aritmética a partir de 1860, vários anos antes de fazer parte dos exames de acesso a estas escolas e dos exames de acesso à profissão.

Verifica-se também nas disciplinas da componente de ciências de especialidade uma separação inicial entre a aritmética e a geometria, passando a ser uma disciplina única a partir de 1896. A designação de *Matemática* ou *Matemáticas elementares* surge já no princípio do século XX, na legislação de 1911 e de 1914. Uma outra característica da formação matemática dos futuros professores do ensino primário que é possível observar a partir da designação das disciplinas ao longo de uma parte do período que vai até 1930, é a componente profissional, com a designação das disciplinas a incorporar a indicação de aplicações da matemática ao comércio, à indústria ou à agricultura. Em contextos de formação mais geral, também surgem disciplinas na componente de ciências de especialidade que mostram a importância da aplicação prática dos conteúdos matemáticos. A *Cosmografia*, disciplina integrada no curso em 1914, é disso um exemplo. Nesta fase é possível observar, através da designação das disciplinas, a organização de um currículo mais integrado, como é definido por Bernstein (1990, 2000), onde existem relações entre conteúdos dentro da própria disciplina e relações entre conteúdos de diferentes disciplinas.

A designação das disciplinas também mostra que a distinção existente inicialmente entre componente de ciências de especialidade e componente pedagógica se vai esbatendo. Na análise dos programas das disciplinas vai ser possível verificar que isso é particularmente visível a partir de 1916, com a incorporação de conteúdos de metodologia na disciplina de *Matemáticas elementares*, mas a própria designação das disciplinas revela em 1924 essa integração de conteúdos, com a disciplina de matemática da componente de ciências de especialidade a passar a ter a designação de *Matemáticas elementares e sua didática*. Este não é um aspeto específico da matemática e um processo idêntico foi descrito por Pintassilgo (2012) relativamente a outras disciplinas.

Depois de identificadas as disciplinas do curso que abordavam conteúdos matemáticos, procurou-se identificar os respetivos programas. A análise centrou-se tanto nas disciplinas da componente de ciências de especialidade e formação geral, como nas disciplinas da componente pedagógica. Apesar de se terem identificado conteúdos de matemática, designadamente de geometria, em disciplinas como *Desenho Linear e Projeções* ou *Trabalhos Manuais e Modelação*, os programas destas disciplinas foram analisados de uma forma menos aprofundada, tendo a análise estado centrada nas disciplinas de *Aritmética*, *Geometria*, *Matemáticas*, *Matemáticas Elementares*, *Pedagogia e Metodologia*, *Metodologia, Didática* e *Didática Especial*.

Os programas das disciplinas dos cursos de formação inicial de professores do ensino primário têm inicialmente programas muito genéricos no que se refere a disciplinas de aritmética e de geometria da componente de ciências de especialidade, sendo por vezes os conteúdos a abordar indicados na própria designação da disciplina. Esta estrutura pode relacionar-se com uma situação inicial de organização dos cursos, em que o Estado, na sua relação com as instituições formadoras de professores, não detém um controlo tão acentuado sobre o processo de seleção dos conhecimentos e de sequência de apresentação dos mesmos, já que os primeiros programas, e plano de estudos, não apresentam sequências de conteúdos a apresentar. O ritmo de aquisição também não é definido, já que os programas não são definidos por classes ou anos do curso, numa situação de um enquadramento fraco (Bernstein, 1990, 2000).

A partir de 1881, os programas das disciplinas dos cursos de formação passam a ter os programas publicados de uma forma mais pormenorizada, o que se manteve ao longo do âmbito cronológico do estudo. Na análise da organização do plano de estudos e dos programas das disciplinas até 1902 ressalta uma diferença entre as disciplinas da componente de ciências de especialidade e as disciplinas da componente pedagógica. As disciplinas da componente de ciências de especialidade apresentam uma seleção e sequência de conteúdos definida na legislação, com uma lista exaustiva de conteúdos a abordar e em que classes do curso deverão ser abordados. Embora não se possam considerar currículos integrados, no sentido que Bernstein (1990, 2000) atribui a este tipo de currículo, são, no entanto, programas em que vão surgindo aos poucos algumas relações entre conteúdos da mesma disciplina, nomeadamente com o sistema métrico e com a aplicação da aritmética à escrituração comercial, industrial e agrícola. É ainda de realçar que são programas onde se vão complexificando os temas específicos a abordar na matemática, que vão para além do que o futuro professor do ensino primário teria que ensinar, centrados no conhecimento do conteúdo. São também programas onde vão surgindo algumas nuances ainda muito ténues ligadas à metodologia, já que recorrentemente surgem indicações para a realização de exercícios, que se poderiam integrar no conhecimento pedagógico do conteúdo.

No entanto, é a partir de sucessivas reorganizações do curso efetuadas a partir de 1911, com a publicação dos respetivos programas em 1916 e 1919, que se assiste a uma maior exigência dos saberes específicos da matemática aos futuros professores do ensino primário. A disciplina de *Matemática*, posteriormente *Matemática Elementares*, integra conteúdos de aplicação e integração de conteúdos, não só com conteúdos da própria disciplina, mas estabelecendo relação com outras disciplinas como a *Cosmografia*.

É ainda nos programas de 1916 que são explicitamente integrados na disciplina da componente de ciências de especialidade, conteúdos de metodologia específica desta disciplina. Estes conteúdos mais centrados no conhecimento pedagógico do conteúdo são deixados para os dois últimos anos do curso, enquanto os conteúdos centrados no conhecimento do conteúdo, são abordados logo no primeiro ano. Esta integração esbate a fronteira entre as duas componentes do curso, apesar de continuar a existir uma disciplina especificamente para a metodologia, estando-se perante um currículo mais integrado, tal como o define Bernstein (1990, 2000).

Este programa de 1916 evidencia também a influência do discurso que pretende ligar o conhecimento do dia a dia, ao conhecimento escolar, dito académico, numa relação de discursos tal como é designada por Bernstein (1999). Esta relação entre discursos vai-se aprofundar nos programas de 1919, onde também são muito explícitos os esclarecimentos sobre opções metodológicas que vão chegar aos formadores de professores e aos autores de manuais, numa clarificação de regras hierárquicas entre poder central e escolas de formação (Bernstein, 1990, 2000) que provavelmente se manifestariam na relação professor aluno.

As disciplinas da componente de ciências de especialidade com conteúdos matemáticos deixam de estar presentes no curso de formação inicial de professores do ensino primário a partir de 1930 e até ao final do âmbito cronológico do estudo esta componente do curso não volta a ter disciplinas com conteúdos de matemática, a não ser conteúdos de geometria em disciplinas como *Desenho e trabalhos manuais educativos*.

É também nos programas de 1881 que a metodologia específica das disciplinas ganha destaque na componente pedagógica do curso. Embora mais pormenorizados nos seus conteúdos, os programas não explicitam indicações específicas para a metodologia especial do ensino da matemática. É, neste sentido, um programa que deixa aos formadores de professores uma maior margem para selecionar conteúdos, organizar sequências e distribuir os conteúdos pelos diferentes anos, do que as disciplinas da componente de ciências de especialidade. É de realçar um desenvolvimento de uma cientificidade associada às metodologias e à pedagogia, com manifestações da pedagogia como ciência que não existiam anteriormente.

Os programas de metodologia concretizados em 1916 e em 1919 vão explicitar algumas ideias já especificamente para o ensino da matemática, referindo-se a aspetos como a utilização de materiais, cálculo mental, história da matemática, aplicações da matemática a outras ciências. Destaca-se nestes programas o caráter experimental e prático desta disciplina no ensino primário, numa clara alusão aos princípios da Educação Nova, que também se manifestam no preâmbulo dos documentos e nos programas de outras disciplinas, tal como já foi referido por Baptista (2004) ou Pintassilgo (2012). São programas onde, embora organizados por disciplinas, se esbatem as fronteiras entre os discursos das diferentes disciplinas, e onde também se promove a relação entre o discurso do dia a dia e o discurso escolar, numa maior integração do currículo, no sentido que Bernstein (1990, 2000) lhe atribui. No final do primeiro período, o curso de formação inicial de professores do ensino primário era constituído por componentes que pretendiam o desenvolvimento de um conhecimento do conteúdo, mas também de um conhecimento pedagógico do conteúdo (Ball et al., 2008).

Com a reforma de 1930, a componente pedagógica assume uma maior importância nos cursos de formação inicial com a disciplina de *Didática* e de *Didática Especial*. O programa desta última disciplina publicado em 1943 destaca aspetos específicos do ensino da matemática, não só no que diz respeito ao ensino de conhecimentos específicos da disciplina, como no que diz respeito ao desenvolvimento de capacidades como o ensino da resolução de problemas e técnicas de avaliação. É no essencial, tal como refere Pintassilgo (2012), um programa que valoriza a vertente profissional do curso.

Estes programas vão manter-se em vigor durante mais de trinta de anos, até ao final do âmbito cronológico do estudo, não sendo alterados mesmo com a reformulação do plano de estudos que ocorreu em 1960. Não se trata de um programa que pormenorize muito os conteúdos a trabalhar na área da matemática e do seu ensino, deixando alguma margem de decisão a quem iria conduzir a formação de professores nas escolas de formação de professores. Os manuais da formação de professores do ensino primário desta época dão resposta aos conteúdos dos programas do ensino primário e à forma de ensino, mas o facto dos programas da disciplina das escolas do magistério apresentar um enquadramento mais fraco, permite aos autores dos manuais a recontextualização o discurso pedagógico oficial, com manuais com propostas diferentes ao nível do conhecimento profissional para ensinar matemática.

Uma menor exigência à entrada do curso, conjugada com o desaparecimento da disciplina de matemática da componente de ciências de especialidade e formação geral, leva a que o conhecimento profissional do professor se centre no conhecimento pedagógico do conteúdo. Tal como tem sido evidenciado por outros autores (Baptista, 2004; Pintassilgo, 2012) o curso de formação de professores do ensino primário passou a estar centrado nos aspetos de formação profissional, principalmente na didática dos conteúdos que os futuros professores teriam que lecionar no ensino primário, sendo retirado do currículo aspetos considerados mais complexos, o que também aconteceu na área da matemática, com a retirada de aspetos relacionados com o conhecimento do conteúdo.

Na análise da legislação pode observar-se três momentos distintos nas qualificações exigidas aos docentes das escolas de formação inicial de professores do ensino primário. Num primeiro momento, que coincide com a fase inicial de institucionalização da formação dos professores deste nível de ensino são preferidos como candidatos à docência destas escolas aqueles que tivessem o curso completo das escolas normais. Durante este primeiro momento, também existe uma fase em que são preferidos como candidatos aqueles que tivessem formação no ensino superior. Nomeadamente nas disciplinas relacionadas com o ensino da matemática, encontram-se nas escolas normais primárias deste primeiro momento, professores ligados à engenharia ou militares, que acumulavam o seu trabalho na formação de professores com a docência em liceus, como já foi evidenciado por Pintassilgo (2012).

Com o estabelecimento das escolas normais superiores, em 1911, a habilitação exigida para a docência nas escolas normais primárias passa a ser uma habilitação específica no respetivo grupo e o curso de habilitação da escola normal superior. Isto significa um reforço das habilitações exigidas para a docência nestas escolas, numa formação que se pretendia de maior qualidade. Na área da matemática, estas exigência de qualificações leva à docência nas escolas normais primárias um conjunto de pessoas com formação do ensino superior nesta área específica, complementadas com uma formação didática e pedagógica obtida em escolas normais superiores ou em cadeiras de ciências pedagógicas das Faculdades de Letras.

É possível ainda identificar um terceiro momento que decorre das alterações efetuadas na formação de professores do ensino primário a partir de 1930. Com a alteração do plano de estudos efetuada em 1930, o curso deixa de ter uma disciplina de matemática na componente de ciências de especialidade e deixa de ser necessário o recrutamento de docentes com uma formação especializada nesta área. Com o reforço da componente pedagógica, os professores que lecionam conteúdos da área da matemática passam a estar essencialmente ligados às disciplinas de *Didática* e *Didática especial*, relacionadas com a didática das diferentes disciplinas. Para a docência eram exigidas em 1931 habilitações das escolas do magistério primário complementadas com a aprovação em cadeiras de ciências pedagógicas das Faculdade de Letras, passando posteriormente a ser apenas exigida a habilitação do magistério primário, anos de prestação de serviço e a realização de um concurso de provas escritas.

8.3. O desenvolvimento do conhecimento profissional do professor para ensinar matemática

A resposta à segunda (Q2) e à sexta (Q6) questão pode ser encontrada nos capítulos 5 e 6 deste trabalho, onde são apresentados dados relativos ao desenvolvimento do conhecimento profissional do professor para ensinar matemática. Estas duas questões centram-se num conhecimento mais global para o ensino da matemática e foram analisadas quer nos documentos legais, quer nos manuais. Foram analisados aspetos como os conteúdos dos exames de acesso, as disciplinas com conteúdos de matemática e a sua presença nas diferentes componentes do curso, os programas das disciplinas e o conteúdo matemático apresentado nos manuais, realçando aspetos como a definição de aritmética ou do seu ensino, as ideias gerais para o ensino da geometria, os princípios sobre o papel da resolução de problemas, o cálculo mental ou a utilização de material didático.

Tal como foi realçado anteriormente, também no que diz respeito ao conhecimento do professor para ensinar matemática podem distinguir-se no âmbito cronológico do estudo dois períodos. Um primeiro onde existem no curso disciplinas com conteúdos de matemática tanto na componente de ciências de especialidade, como na componente pedagógica e um segundo período onde esses conteúdos de matemática existem apenas nas disciplinas da componente pedagógica. A análise da designação e dos programas das disciplinas da componente de ciências de especialidade revelam que no início do primeiro período o conhecimento profissional do professor para ensinar matemática se centrava no conhecimento comum do conteúdo, abordando também conteúdos que iam para além do que o professor teria que ensinar no ensino primário.

Ao longo do primeiro período, e principalmente a partir de 1911, verifica-se nos programas das disciplinas desta componente do curso uma crescente preocupação com aspetos específicos da metodologia do ensino da matemática, que se enquadram no conhecimento pedagógico do conteúdo. O desenvolvimento e autonomização das disciplinas metodologia, da componente pedagógica do curso, reforça o conhecimento pedagógico na formação matemática dos professores.

No final do primeiro período é possível ainda verificar nos documentos legislativos uma preocupação com um conhecimento que se pode enquadrar no conhecimento do conteúdo e do currículo, verificando-se o estabelecimento de relações entre os conteúdos das disciplinas de *Matemática Elementar* e os conteúdos de outras disciplinas, como a *Cosmografia*.

A reestruturação do curso efetuada em 1930, e a publicação dos programas da disciplina de *Didática especial*, levam a que o conhecimento profissional do professor identificado nos documentos legislativos se passe a centrar no conhecimento pedagógico.

Estes dois períodos descritos anteriormente, refletem-se nos manuais que são editados para as disciplinas do curso. Nos manuais analisados há claramente uma distinção entre aqueles que se destinam a disciplinas da componente de ciências da especialidade, Nunes (1887) e Preto (1903), e os que se destinam à componente pedagógica dos cursos, Affreixo e Graça (1891), Coelho (1892, 1906), Pimentel Filho (1934), Gaspar e Ferreira (1944), Pinheiro (1961) e Gonçalves (1972, 1974). Essas diferenças podem observar-se na estrutura das obras, nos objetivos gerais traçados, na forma como abordam, ou não, temas globais sobre o ensino, os métodos e a metodologia, os conteúdos matemáticos apresentados e o desenvolvimento do conhecimento profissional para o seu ensino, e nos próprios autores que servem de referência à elaboração das obras. No entanto, apesar de se poder observar esta tendência global, é de destacar que existem especificidades que mostram uma certa autonomia dos autores na forma como recontextualizam o discurso pedagógico oficial, mesmo no que diz respeito ao ensino da matemática.

É por isso possível distinguir alguns aspetos particulares nos manuais, no que se refere ao conhecimento profissional para o ensino da matemática. Os conteúdos de matemática abordados nos manuais da componente de ciências de especialidade e formação geral, Nunes (1887) e Preto (1903) são de uma forma geral mais aprofundados e vão para além dos conteúdos que faziam parte do programa do ensino primário da época, tendo correspondência com o programa das escolas normais primárias. Embora estes manuais se centrem no conhecimento do conteúdo, a análise dos exercícios propostos permite verificar que embora implicitamente, é desenvolvido conhecimentos pedagógico do conteúdo como por exemplo os diferentes sentidos das operações elementares quando são apresentadas num contexto, a noção de cálculo mental ou a resolução de problemas. No entanto, é nos manuais da componente pedagógica do segundo período que estes saberes para ensinar são particularmente valorizados, nomeadamente o papel da resolução de problemas no ensino da aritmética.

No início do primeiro período, a preocupação com o desenvolvimento de um conhecimento profissional que abordasse diferentes domínios também é visível nos exames de acesso à profissão, onde os conteúdos das provas refletiam a necessidade de um conhecimento comum do conteúdo, mas onde as provas de pedagogia revelavam a necessidade de um conhecimento pedagógico do conteúdo, sendo abordados conteúdos como o ensino do cálculo mental, o ensino da aritmética e do sistema métrico. Neste primeiro período, os conteúdos de matemática dos exames de acesso às escolas de formação de professores do ensino primário não refletiam a mesma necessidade de um conhecimento pedagógico, talvez porque esse conhecimento iria ser posteriormente trabalhado durante o curso. Os conteúdos dos exames centravam-se no que se pode identificar como conhecimento comum do conteúdo, em aspetos que iam para além do que o professor teria de ensinar no ensino primário. No início do segundo período verificou-se um abaixamento do nível de qualificações exigido na admissão aos cursos de formação, o que provavelmente terá tido reflexo no conhecimento exigido. No entanto, isso não se refletiu nos conteúdos dos exames de admissão às escolas de formação, nem no conhecimento de matemática aí presente que se centrava no conhecimento comum do conteúdo.

As referências aos materiais didáticos, que se podem enquadrar no desenvolvimento de um conhecimento pedagógico, só são evidentes nas obras da componente pedagógica dos cursos de formação dos professores do ensino primário. As primeiras referências encontram-se logo nos manuais da componente pedagógica usados no primeiro período, com a indicação do uso dos dons de Froebel ou do contador mecânico, onde se pode observar a influência da Educação Nova nos métodos para o ensino da matemática nos primeiros anos, recorrendo-se a métodos intuitivos e ativos. Nos manuais da componente pedagógica do segundo período mantém-se essa tendência para a as referências à utilização de materiais didáticos no ensino da matemática.

8.4. O desenvolvimento do conhecimento profissional do professor para o ensino dos números racionais

As respostas à terceira (Q3), sétima (Q7) e oitava questão (Q8) podem ser encontradas nos capítulos 5 e 7 deste trabalho. A análise feita aos documentos legislativos é diferenciada daquela que foi feita aos manuais porque os programas dos exames de acesso às escolas de formação e os programas das disciplinas publicados na legislação não permitem analisar as especificidades sobre o ensino dos números racionais que foi possível analisar nos manuais.

Da análise da legislação é possível observar um facto que se reflete nos conteúdos dos exames de acesso às escolas de formação de professores e que tem consequências na forma de abordagem aos números racionais. O sistema métrico passa a constituir um dos conteúdos exigidos nestes exames de acesso a partir de 1869, já depois de em 1862 este conteúdo fazer parte dos exames de instrução primária e de ter sido integrado em 1860 nas disciplinas do próprio curso de formação inicial de professores do ensino primário. É relevante verificar que até 1869 as operações com os chamados quebrados faziam parte dos conteúdos constantes destes exames, deixando de ser mencionados a partir da legislação de 1881, onde se privilegia a prática das quatro operações com inteiros e decimais e a prática do sistema legal de pesos e medidas. Só na legislação de 1914, e posterior regulamentação em 1916, o conteúdo volta a constar nestes exames de admissão às escolas normais. O facto de se ter adotado o sistema métrico parecer ter tido influência na menor valorização que se fazia do conteúdo das frações e da importância que se lhe dava na abordagem inicial aos racionais, nestes exames de acesso à profissão. Isto irá refletir-se posteriormente nos manuais e na abordagem proposta para a iniciação aos números racionais, como se viu no capítulo 7, na análise dos manuais.

Nos conteúdos das disciplinas dos cursos de formação dos professores do ensino primário, e no que se refere ao conhecimento para ensinar os números racionais, é possível referir o mesmo que se mencionou anteriormente relativamente ao conteúdo matemático global. Inicialmente as disciplinas da componente de ciências de especialidade refletem uma maior preocupação com o conhecimento comum do conteúdo, indo além do que o professor teria de ensinar no ensino primário, também no conteúdo dos números racionais. No entanto, a partir de 1911 verifica-se nos programas das disciplinas desta componente do curso uma preocupação com aspetos de metodologia específica que se podem enquadrar no conhecimento pedagógico do conteúdo. Este aspeto, aliado ao desenvolvimento da metodologia nas disciplinas da componente pedagógica, reforça este conhecimento pedagógico na formação matemática dos professores. Com a reestruturação do curso efetuada em 1930, e a publicação dos programas das disciplinas do plano de estudos é possível referir que o conhecimento profissional emanado nos documentos legislativos se passaria a centrar no conhecimento pedagógico. No entanto, não é possível referir nenhum aspeto em particular do ensino dos números racionais porque, embora os programas da disciplina de *Didática especial* mencionassem a metodologia de ensino das frações e dos decimais, não desenvolviam como se deveria processar esse ensino.

No que diz respeito ao desenvolvimento do conhecimento profissional do professor para o ensino dos números racionais, observado nos manuais, a análise centrou-se em cinco componentes essenciais no desenvolvimento do sentido de número racional, que são identificadas no trabalho de Pinto (2011): definição de número racional, as diferentes unidades, equivalência de frações, comparação e ordenação de números racionais e as operações no conjunto dos números racionais. Para além destas componentes, foram ainda analisados aspetos como as diferentes representações e as situações matemáticas utilizadas na abordagem aos números racionais.

No que se refere à definição de número racional é importante começar por salientar que em nenhum dos manuais é utilizada a designação de número racional, tendo sido identificadas designações como como quebrado ou fração para referir um número que tem partes iguais da unidade, mas que é menor do que a unidade, ou número fracionário para referir um número que tem partes iguais da unidade, mas que é maior do que uma unidade. Algumas designações utilizadas para designar fração própria, fração imprópria ou numeral misto também são diferentes das que são comuns encontrar nos manuais na atualidade. Algumas das designações utilizadas por autores como Nunes (1887) ou Pimentel Filho (1934) parecem estar relacionadas com a utilização de traduções de manuais em castelhano. É de salientar que a utilização da designação número racional é muito recente no contexto do que é o 1.º ciclo do ensino básico em Portugal, correspondente ao ensino primário, surgindo pela primeira vez associada ao Programa de Matemática do Ensino Básico publicado em 2007 (Ponte et al., 2007).

Globalmente, consegue distinguir-se na análise feita aos manuais da formação de professores dois períodos e dois tipos de manuais diferentes quantos aos objetivos com que são elaborados, ao tipo de disciplina a que se direcionam e ao conhecimento profissional para o ensino dos números racionais que foi identificado. Tal como já foi evidenciado na análise feita à legislação, nos manuais foi possível identificar um primeiro período que vai até 1930, em que existem manuais da componente de ciências de especialidade e manuais da componente pedagógica, e um segundo período em que só existem manuais da componente pedagógica do curso.

Numa análise global das diferentes componentes essenciais do desenvolvimento do sentido do número racional, os manuais da componente de ciências de especialidade, Nunes (1887) e Preto (1903) evidenciam um maior desenvolvimento do conhecimento do conteúdo, nomeadamente do conhecimento comum do conteúdo, mas também, embora de uma forma implícita, do conhecimento especializado do conteúdo. Uma evidência é a forma como trabalham a definição de número racional, embora não recorram a um formalismo simbólico como acontece nos autores referidos no quadro teórico.

Nos manuais da componente de ciências de especialidade, este conhecimento comum do conteúdo engloba um conhecimento que vai para além do que o futuro professor do ensino primário teria de ensinar, o que não acontece nos manuais da componente pedagógica, quer do primeiro, quer do segundo período, que se restringiam aos conteúdos que eram abordados no ensino primário. Este facto permitia aos futuros professores do ensino primário que frequentavam um plano de estudos com disciplinas da componente de ciências de especialidade estabelecerem relações entre o que tinham de ensinar no ensino primário e o que os seus alunos teriam que trabalhar em anos posteriores.

O domínio do conhecimento profissional que aparece menos trabalhado nos manuais analisados é o do conhecimento do conteúdo e dos alunos. Isto acontece quer nos manuais da componente de ciências de especialidade, quer nos manuais da componente pedagógica. Embora surjam referências genéricas às dificuldades que os alunos do ensino primário poderiam evidenciar na aprendizagem das frações e dos decimais, este é um domínio onde os autores dos manuais apresentam poucas evidências específicas para o conteúdo em questão e onde o quadro teórico, baseado na literatura na área da didática da matemática, aponta aspetos específicos dentro de cada uma das componentes.

Nos manuais da componente de ciências de especialidade e nos manuais da componente pedagógica do segundo período, os domínios do conhecimento profissional do professor que se apresentam mais trabalhados parecem ser aqueles que se relacionam com o conhecimento especializado do conteúdo e com o conhecimento do conteúdo e do seu ensino. Isto evidencia alguma preocupação dos autores dos manuais com um conhecimento específico para ensinar e a apresentação de sequências de trabalho mais ou menos estruturadas para o ensino deste conteúdo.

Por vezes existem algumas dificuldades em identificar evidências do conhecimento do conteúdo e do currículo em relação a aspetos tão específicos como os que são trabalhados nas componentes essenciais do desenvolvimento do sentido de número racional. No entanto, pode referir-se que, de uma forma global, este domínio do conhecimento profissional está mais desenvolvido nos manuais da componente pedagógica do segundo período, com referências gerais sobre a necessidade de se conhecer os programas do ensino primário, sendo a análise desses programas um aspeto estudado nesses manuais. Ainda no conhecimento do conteúdo e do currículo, quer nos manuais da componente de ciências de especialidade, quer nos manuais da componente pedagógica do segundo período, existem evidências de que os autores estabeleciam uma relação entre o conteúdo dos números racionais e o ensino de outros conteúdos da própria disciplina, nomeadamente com o ensino do sistema de métrico de medidas.

É também possível evidenciar alguns aspetos mais específicos do desenvolvimento do conhecimento profissional do professor relativamente às componentes essenciais do desenvolvimento do sentido de número racional.

Nalguns manuais analisados neste trabalho coloca-se a questão de como fazer a primeira abordagem aos números racionais, se através da representação decimal ou através da representação na forma de fração. Esta é uma questão apresentada explicitamente nos manuais de Pinheiro (1961) e Gonçalves (1974). Nestes dois manuais, a opção recai numa primeira abordagem centrada na representação decimal. A justificação apresentada para esta opção prende-se com o programa do ensino primário da época, onde se trabalhava primeiro a representação decimal devido ao paralelismo que se podia estabelecer com a estrutura do sistema métrico e com o sistema decimal dos números naturais, o que permitia que as operações com decimais fossem mais simples do que com as frações. No manual de Gaspar e Ferreira (1944) esta argumentação não é tão aprofundada, mas o autor defende uma introdução paralela das duas representações. Nos manuais anteriores, embora não existisse uma argumentação explícita sobre esta a forma de fazer esta primeira abordagem, a representação na forma de fração surgia primeiro do que a representação decimal. Tal como se verificou anteriormente na análise da legislação, a importância do trabalho com o sistema métrico parece influenciar a abordagem inicial aos números racionais no ensino primário, refletindo-se nos programas deste nível de ensino e na formação inicial dos professores.

Esta discussão parece manter-se atual nas discussões sobre a abordagem inicial deste conjunto numérico. Por exemplo, Brousseau, Brousseau e Warfield (2007) discutem sobre a melhor forma de se fazer a introdução dos números racionais com os alunos nos primeiros anos, considerando que os decimais apresentam vantagens, particularmente nos países onde as crianças têm familiaridade com o sistema métrico de medidas. Esta é também uma questão que se mantém nos programas do ensino primário. Tal como foi possível verificar em Candeias (2017b), nos programas do ensino primário da década de 1960, a primeira abordagem aos números racionais era feita a partir da representação decimal, no terceiro ano de escolaridade, com a utilização das medidas de comprimento. Nestes programas a fração surgia no quarto ano de escolaridade, sendo abordado apenas o conceito de fração e não as operações com frações. Nos diversos programas do ensino primário que estiveram em vigência ao longo das décadas de 1970, 1980 e 1990, mantém-se a tendência de privilegiar o trabalho com a representação decimal, embora alguns destes programas abordassem primeiro a fração como operador aplicada a um conjunto discreto, no segundo ano de escolaridade. Esta tendência parece ter-se invertido nos recentes programas de 2007 (Ponte et al., 2007) e de 2013 (Bivar et al., 2013), onde se privilegia a primeira abordagem aos números racionais através da fração.

De uma forma geral, nos manuais analisados a abordagem ao número racional privilegia o trabalho com unidades contínuas, destacando-se o sentido da fração como parte de um todo contínuo. Embora seja possível observar isso mesmo nos exemplos apresentados nos manuais, este não é de uma forma geral um conhecimento apresentado de uma forma explícita. Apenas o manual de Gonçalves (1974) discute a complexidade do número racional quando apresentado em contexto de uma forma explícita, referindo exemplos dos diferentes significados das frações em contexto.

O trabalho com as operações com números racionais é muita influenciada pela opção feita nos programas do ensino primário, onde o trabalho com a representação decimal vai ganhando influência. Nos manuais da componente pedagógica do segundo período essa opção é relevante porque centram-se nas operações com decimais, sendo o trabalho com operações com frações muito residual, restringindo-se quase à adição e subtração de frações com o mesmo denominador ou a situações em que se utilizam frações de referência como um meio ou um quarto.

Ainda no que diz respeito ao ensino dos números racionais, o estudo analisou as representações e as situações matemáticas e contextos.

No que se refere às representações utilizadas verifica-se que os manuais da componente de ciências de especialidade e formação geral do primeiro período privilegiam a relação entre a representação verbal e as diferentes representações simbólicas do número racional, como a fração, o numeral misto e o numeral decimal. Nestes manuais não há recurso a representações pictóricas e não se fazem referências à utilização de representações ativas. Nos manuais do primeiro período, apenas os manuais de Coelho (1892, 1906) fazem referência à importância da manipulação e das representações ativas no desenvolvimento deste conteúdo. Há nos manuais de Coelho (1892, 1906) as primeiras indicações explícitas de que há uma preocupação com a importância do ensino ser ativo e haver manipulação de materiais, no desenvolvimento do trabalho com este conteúdo.

Nos manuais da componente pedagógica do segundo período evidencia-se um maior recurso às representações ativas e representações pictóricas, quer com modelos de quantidade contínua, quer com modelos de quantidade discreta. Estes manuais estabelecem depois uma relação entre estas representações e a representação verbal e as representações simbólicas. A relação entre as diferentes representações é particularmente desenvolvida nos manuais de Pimentel Filho (1934) e de Gonçalves (1974), destacando-se o grafismo e a utilização da cor no trabalho com o conteúdo dos números racionais.

A opção pelo recurso às representações pictóricas poder-se-ia relacionar com um maior cuidado no desenvolvimento dos domínios do conhecimento profissional relacionados com o conhecimento pedagógico do conteúdo, nomeadamente do conteúdo e do seu ensino, que estes manuais da componente pedagógica evidenciam. No entanto, nos manuais do primeiro período também se pode colocar a hipótese de estes manuais não recorrerem de uma forma geral a representações pictóricas por existirem dificuldades técnicas na utilização de imagens em material impresso, nessa época. No entanto, essa hipótese não justifica por exemplo o amplo recurso à imagem e à cor no manual de Pimentel Filho (1934), que não se verifica posteriormente, principalmente no manual de Gaspar e Ferreira (1944). Neste manual, os autores explicitam que, apesar da importância da concretização e da utilização de modelos no ensino dos conteúdos da disciplina de aritmética, os alunos devem habituar-se a largar os materiais e a abstrair, não ficando presos a certo tipo de representações. A importância da utilização de diferentes representações, e o estabelecimento de relações entre elas, continua a ser destacada no ensino e aprendizagem do conteúdo dos números racionais na literatura atual, como referem Monteiro e Pinto (2005).

Na caracterização das situações matemáticas e contextos utilizados no ensino dos números racionais, evidencia-se a utilização de contextos matemáticos estritamente numéricos na apresentação das frações. Isso é evidente nos manuais da componente de ciências de especialidade, mas também em manuais como o de Coelho (1906), Pimentel Filho (1934), Gaspar e Ferreira (1944), Pinheiro (1961) e Gonçalves (1974), da componente pedagógica. Aparentemente os autores consideram que devem apresentar este conteúdo com procedimentos e regras de uma forma relativamente desligada da realidade, destacando a estrutura matemática. É, no entanto, de salientar, que no desenvolvimento do trabalho com as frações existem opções dos autores que se diferenciam. Pimentel Filho (1934) e Gonçalves (1934) optam por apresentar contextos semirreais, onde se destacam os problemas de cálculo, mas também alguns problemas que se poderiam considerar de processo, muito apoiados na apresentação com recurso à representação pictórica.

A opção dos autores dos manuais da componente de ciências de especialidade é diferente, após a iniciação, todo o desenvolvimento do trabalho com as frações é baseado na apresentação de contextos matemáticos estritamente numéricos e só no final do capítulo sobre as frações é que são apresentados conjuntos de situações onde se recorre aos exercícios estritamente numéricos, mas também a contextos semirreais, onde se incluem problemas de cálculo e de processo. Estas situações são apresentadas essencialmente para o treino do conteúdo trabalhado anteriormente, mas alguns exemplos envolvem situações que não dependem da aplicação direta dos conteúdos trabalhados. Os manuais de Gaspar e Ferreira (1944) e de Pinheiro (1961) no conteúdo das frações desenvolvem o trabalho só com base em exemplos estritamente numéricos.

No trabalho com a representação decimal as opções são diferentes. Os autores dos manuais da componente de ciências de especialidade fazem a iniciação deste conteúdo só com recurso a exemplos estritamente numéricos. Tal como nas frações, só no final do capítulo apresentam um conjunto de situações que englobam situações estritamente numéricas, mas também algumas situações semirreais que envolvem problemas de cálculo e de processo. Os exemplos apresentados serviriam como problemas tipificados para o treino do conteúdo trabalhado. Os autores dos manuais da componente pedagógica do segundo período, com exceção de Pimentel Filho (1934), optam por apresentar os decimais integrados em situações semirreais, nomeadamente as medidas de comprimento ou as situações de partilha de bolos. Aparentemente, estes autores estabelecem a apresentação da representação decimal com contextos próximos da realidade. No desenvolvimento do trabalho dos decimais, Gaspar e Ferreira (1944) e Pinheiro

(1961) referem várias vezes que o conteúdo dos decimais deve ser trabalhado com recurso a problemas, mas não apresentam exemplos. Gonçalves (1974) faz todo o desenvolvimento do trabalho com os decimais enquadrado em situações semirreais, essencialmente com problemas de cálculo que servem tanto para destacar as regras, como para treinar procedimentos. Pimentel Filho (1934) opta por apresentar os decimais com contextos estritamente numéricos, mas depois enquadra o desenvolvimento do trabalho em situações semirreais, essencialmente problemas de cálculo, mas também alguns problemas que se poderiam nos problemas de processo.

No que diz respeito aos contextos, a maioria dos autores analisados recorre a contextos de medida, comprimento, capacidade, tempo, dinheiro e atividades comerciais, como salários, promoções.

8.5. Os autores dos manuais e a sua relação com a matemática e o seu ensino

A resposta à quinta questão (Q5) pode ser encontrada no capítulo 6 deste trabalho. Os autores cujas obras foram analisadas nesta investigação são todos portugueses. Para além de serem autores de manuais, todos exerceram também atividade na docência em cursos de formação de professores do ensino primário. Atendendo ao plano de estudos do curso de formação de professores do ensino primário, no primeiro período, que decorre de 1844 até 1930, encontram-se entre os autores aqueles que têm uma formação na área das ciências, Nunes (1887) e Preto (1903), que elaboraram manuais para as disciplinas da componente das ciências de especialidade, e outros autores mais ligados à área da pedagogia, autores de manuais para a componente pedagógica. É de salientar que apenas um dos autores das obras aqui analisadas, Preto (1903), tem uma formação específica na área da matemática. No segundo período, que decorre de 1930 a 1974, ressalta a ideia de que predominam os autores ligados à componente pedagógica e didática, com uma formação inicial feita em escolas de formação de professores, complementada com outras habilitações na área das ciências da educação, embora Pimentel Filho (1934) não corresponda a esta descrição por ter uma formação na área das ciências.

A formação dos autores parece influenciar as propostas apresentadas nos manuais e o desenvolvimento do conhecimento profissional aí exposto. Os autores com uma formação na área das ciências, para além de apresentarem nos manuais uma valorização do conhecimento comum do conteúdo, apresentam, embora por vezes de uma forma apenas implícita, o desenvolvimento de outros domínios do conhecimento profissional, tanto do conhecimento do conteúdo, como do conhecimento pedagógico do conteúdo, nomeadamente no domínio do conhecimento do conteúdo e do seu ensino. Este domínio do conhecimento do conteúdo, e do conhecimento especializado do conteúdo, parece ser relevante para que as propostas apresentadas sejam mais diversificadas e abrangentes no desenvolvimento dos diferentes domínios do conhecimento profissional. Isto é possível observar tanto nos manuais de Nunes (1887) e Preto (1903), como no manual de Pimentel Filho (1934). O facto de, ao longo do segundo período, os autores dos manuais terem sido pessoas ligadas essencialmente à componente pedagógica e didática, fez com que o conhecimento profissional do professor fosse menos abrangente no desenvolvimento dos diferentes domínios, exceto no domínio do conteúdo e do currículo.

A partir de 1960 o curso apresenta uma reestruturação e a didática passa a constar de duas disciplinas, onde uma delas, *Didática especial do grupo B*, se centra na didática de disciplinas como a aritmética e geometria, ciências geográfico-naturais e trabalhos manuais. Esta especialização, apesar de não se refletir nas qualificações exigidas aos docentes da disciplina leva a que, pelo menos no manual analisado neste estudo, o autor Gonçalves (1972, 1974) apresente de uma forma mais pormenorizada os diferentes conteúdos e que seja mais abrangente o trabalho desenvolvido nos diferentes domínios do conhecimento profissional do professor.

8.6. As ideias pedagógicas que marcam a formação inicial dos professores do ensino primário no ensino da matemática

As respostas à quarta (Q4) e à nona (Q9) questão encontram-se no capítulo 5 e no capítulo 6 deste trabalho. A análise centra-se nas ideias que refletem tanto na legislação como nos manuais, mas também nos autores que servem de referência àqueles que escreveram os manuais aqui analisados.

No primeiro período, há diversas influências que se podem distinguir na análise dos documentos legais, que podem, no entanto, não corresponder à prática, pelo menos a uma prática generalizada, como acentua Baptista (2004).

Um primeiro movimento é o da pedagogia científica e da pedagogia moderna que se vai notando nos documentos oficiais no final do século XIX e no início do século XX, que se manifesta na crescente importância que as disciplinas da componente pedagógica, como a *Pedagogia e metodologia* ou mais tarde a *Psicologia experimental*, vão adquirindo no plano de estudos. A educação como uma ciência, com métodos próprios e com um conjunto de conhecimentos sistematizados, vai-se afirmando no plano de estudos e nos programas de formação dos professores do ensino primário. No entanto, e tal como destacaram trabalhos como Baptista (2004), Pintassilgo (2006) ou Boto (2010), nos manuais da época reflete-se sobre a relação entre a ciência da educação, a experiência do professor e o designado “tato pedagógico” relacionado com as dimensões pessoal e relacional do trabalho do professor. Esta é uma reflexão que surge frequentemente também nos manuais analisados no presente estudo, mesmo já em meados do século XX. Esta ascensão da pedagogia como ciência não deixa de lado o caráter intuitivo e experimental do ensino, incorporando-o no seu discurso, sendo isso visível nos programas das disciplinas.

Um outro movimento que marca o discurso oficial neste primeiro período é o da Educação Nova, principalmente a partir de 1911, mas de forma mais evidente na legislação de 1919, onde as instruções pedagógicas que precedem os programas das disciplinas refletem as ideias deste movimento. Fazem parte das instruções pedagógicas indicações no sentido do desenvolvimento de métodos ativos, centrados no aluno, com a indicação de que a matemática no ensino primário deve abordar assuntos da vida local, ter um caráter utilitário, prático e experimental. Os processos intuitivos são muitas vezes referidos no ensino da aritmética e da geometria. O trabalho a desenvolver na disciplina de *Matemáticas elementares* deveria levar ao desenvolvimento do espírito crítico e promover a conjugação do trabalho individualizado com o trabalho coletivo.

O início do segundo período foi marcado pela passagem das escolas normais primárias a escolas do magistério primário. Esta não foi apenas uma mudança na designação das escolas de formação de professores do ensino primário, significou também uma alteração no plano de estudos, nas disciplinas lecionadas nestas escolas e nos respetivos programas, assim como nas qualificações exigidas para admissão nas escolas. A análise da legislação, e dos manuais do início do segundo período, reflete de alguma forma uma certa crítica aos ideais da Educação Nova que tinham influenciado a formação de professores principalmente no final do primeiro período. No entanto, como referem também Pintassilgo e Mogarro (2015), os professores das escolas de formação, que muitas vezes também são autores de manuais, mesmo no segundo período, na vigência de um estado autoritário, mantêm alguma autonomia e identidade própria. No presente trabalho, isto reflete-se, por exemplo, na incorporação que se verifica nos manuais do segundo período de algumas das ideias da pedagogia científica e da própria Educação Nova, refletindo-se na área da matemática no destaque dos métodos ativos, as menções ao papel ativo do aluno, ao método intuitivo e indutivo, ao ensino experimental, o caráter utilitário da aritmética e ao papel do professor como orientador do pensamento do aluno. Também se mantêm no segundo período as discussões em torno da pedagogia como ciência ou como arte, ou a educação integral do indivíduo, embora esta última com a integração dos valores da religião cristã.

Essa influência que também é visível nos autores citados nas obras, refere-se a alguns valores da Educação Nova que se mantêm no registo dos autores do segundo período, embora já não estejam presentes no discurso oficial.

De uma forma geral, poder-se-á afirmar que os manuais refletem as alterações que vão ocorrendo na legislação, tanto ao nível do plano de estudos, como dos programas, mas num processo de reinterpretação e de recontextualização do discurso pedagógico oficial, tal como é referido em Bernstein (1990).

Nas obras analisadas nesta investigação nem sempre foi possível identificar os autores que influenciaram a obra por nem sempre existir uma bibliografia final ou indicação de referências no corpo do texto dos manuais. Esta ausência de referências bibliográficas explícitas é particularmente observada nas obras do primeiro período, o que já tem sido identificado noutros trabalhos como em Pintassilgo (2006) relativamente aos manuais de pedagogia do primeiro terço do século XX. Tal como assinala Silva (2001), nas obras analisadas neste estudo também nem sempre é possível fazer a distinção entre o autor que interpreta e apresenta ideias de outros e o autor que é responsável pela ideia original. Nas obras do segundo período já é visível uma maior utilização de referências no corpo do texto e a apresentação de um conjunto de referências no final da obra, principalmente nas obras de Pimentel Filho (1934), Pinheiro (1961) e de Gonçalves (1972, 1974).

Entre os autores referenciados, quer no primeiro como no segundo período, é possível identificar autores relacionados com a pedagogia científica, como Herbart, a pedagogia moderna, surgindo referências a Compayré, ou a Educação Nova, com autores como Montessori, Decroly ou Cousinet. É ainda de realçar a identificação de autores ligados ao Movimento da Matemática Moderna na obra de Gonçalves (1972, 1974) como André Revuz, Dienes e Caleb Gattegno. Embora não seja um exemplo pioneiro na formação de professores, como se verificou em trabalhos anteriores (Candeias, 2008), mostra a influência que o Movimento da Matemática Moderna começava a ter nas escolas de formação inicial de professores do ensino primário da época, ainda antes de existirem esse tipo de referências quer no currículo prescrito da formação inicial de professores, quer no currículo do ensino primário.

Apesar de existir alguma valorização de obras aqui analisadas, noutras obras do *corpus* documental desta investigação, nomeadamente em Pinheiro (1961) e Gonçalves (1972, 1974), é de destacar nas obras do segundo período a quase ausência de referências aos autores do primeiro período, nomeadamente a ausência a referências a José Augusto Coelho (1906), que, de acordo com Pintassilgo (2006), teria sido um autor muito citado em manuais pedagógicos do primeiro terço do século XX.

8.7. Contributos do estudo

O principal contributo do estudo é a apresentação sistematizada do conhecimento matemático para ensinar desenvolvido na formação inicial dos professores do ensino primário, entre 1844 e 1974, tanto no currículo prescrito, com a análise de documentos legais, como no currículo apresentado e moldado, com a análise dos manuais. Esta análise permitiu caracterizar como se foi desenvolvendo esse conhecimento tanto a um nível mais global no ensino da matemática, como relativamente a diferentes componentes do ensino de um conteúdo como o dos números racionais não negativos.

Este estudo dá um contributo teórico para a discussão sobre o conhecimento profissional do professor, com a organização de um quadro de análise que contempla as diferentes componentes desse conhecimento, tal como são definidas por Ball et al. (2008), relativamente a um conteúdo que faz parte do currículo do ensino primário e dos cursos de formação de professores do ensino primário. O quadro de análise apresentado poderá ser adaptado à análise de outros conteúdos do currículo, podendo fornecer ferramentas para se fazer uma caracterização alargada da evolução do conhecimento profissional do professor deste nível de ensino, na área da matemática.

O estudo oferece também uma contribuição prática, no sentido em que foi feito um levantamento exaustivo de legislação e manuais utilizados na formação inicial de professores do ensino primário que poderão ser úteis a outros investigadores.

8.8. Limitações do estudo e sugestões para futuras investigações

Uma primeira limitação que se pode identificar na presente investigação prende-se com o quadro teórico utilizado na análise do conhecimento profissional do professor para o ensino dos números racionais, que constitui uma parte central da tese. O quadro teórico reflete o conhecimento e as preocupações atuais sobre o ensino dos números racionais, o que faz com que a análise diacrónica da abordagem ao ensino dos números racionais na formação inicial dos professores do ensino primário seja vista de uma forma descontextualizada em relação ao que poderia ser feito em outros manuais ou noutros países, em cada uma das épocas analisadas. Esta foi uma abordagem assumida desde o início da investigação porque, embora tenha as limitações enunciadas anteriormente, permite analisar e caracterizar de uma forma aprofundada o conhecimento profissional do professor para o ensino deste conteúdo, identificando permanências e originalidades nas diferentes épocas, na forma como se foi constituindo o conhecimento profissional para o ensino dos números racionais.

Embora em futuras investigações possa ser importante uma análise contextualizada no ensino da época, o presente trabalho permitiu perceber que um quadro teórico baseado no conhecimento presente sobre o ensino de um determinado conteúdo também permite compreender e analisar como se foi desenvolvendo o conhecimento profissional do professor ao longo do tempo. Evidencia-se ser assim possível fazer uma análise semelhante relativamente a outros conteúdos da formação inicial de professores.

A parte do quadro teórico que se refere à análise das situações de ensino, quanto à sua complexidade e aos contextos, é muitas vezes utilizada para fazer o estudo de práticas de professores e de resoluções de alunos. De alguma forma, isto limita a sua utilização na análise das intenções expressas em manuais de formação de professores. Isto é particularmente sensível na análise das situações matemáticas e contextos utilizados na abordagem aos números racionais, porque através da apresentação dos exercícios ou problemas por vezes é difícil distinguir se num contexto de formação de professores tratar-se-ia de um problema de cálculo ou de processo, ou distinguir se se trata de um exercício, um problema ou um cenário de investigação. No entanto, este enquadramento teórico permitiu uma análise e enquadramento das situações, nomeadamente no que se refere aos contextos utilizados pelos autores dos manuais na introdução e abordagem aos números racionais.

No processo de recolha e seleção dos manuais tentou-se que fossem representativos das diferentes fases da história da formação dos professores do ensino primário e das diferentes componentes que o curso teve no período analisado. Apesar da pesquisa feita em diferentes arquivos e bibliotecas, na recolha efetuada não foi possível identificar manuais utilizados em dois momentos do primeiro período analisado, o início da formação institucionalizada em escolas normais primárias a partir de 1860, e a fase referente à primeira república, principalmente o período enquadrado pela reforma de 1919. Isto constituiu uma limitação ao trabalho porque pela análise da legislação foi possível identificar que se tratou de momentos de rutura em relação a épocas anteriores, tanto no que diz respeito às disciplinas onde eram abordados os conteúdos de matemática, como aos próprios conteúdos abordados nessas disciplinas. Por não ter sido possível identificar nenhum manual da época, ficou por caracterizar, por exemplo, o que teria sido um manual adaptado aos programas de 1919, onde a disciplina de *Matemáticas Elementares*, da componente de ciências de especialidade, incluía no seu programa aspetos relacionados com a metodologia do ensino da aritmética e da geometria, numa integração das duas componentes só visível nos documentos legais dessa época.

O trabalho incide sobre uma parte do que normalmente é definido como currículo e relaciona-se com o processo de intenções, analisando o currículo prescrito centralmente e o currículo moldado ou apresentado aos professores. Esta análise é uma limitação do estudo porque não permite perceber o que realmente se passava nas salas de aula durante a formação de professores. É, por isso, importante que futuras investigações possam proceder à recolha e análise de documentos que permitam chegar mais perto do que realmente aconteceu. Os cadernos diários dos alunos, futuros professores, as planificações e sumários de aula da formação de professores ou os exames poderão constituir fontes importantes para essa análise, embora seja importante estabelecer a relação entre esses documentos e o currículo prescrito e o processo de intenções definido centralmente.

Bibliografia

Albuquerque, C., Veloso, E., Rocha, I, Santos, L., Serrazina, L., Nápoles, S. (2008). *A matemática na formação inicial de professores*. Lisboa: APM/SPCE.

Almeida, M., & Candeias, R. (2014). Os programas de matemática do ensino primário, da Telescola e do Ciclo Preparatório do Ensino Secundário. In Almeida, A.; Matos, J. (Eds.), *A matemática nos programas do ensino não-superior (1835-1974)* (pp. 39-68). Caparica: UIED e APM, 2014.

Almeida, A., & Matos, J. (Eds.) (2014). *A matemática nos programas do ensino não-superior (1835-1974)*. Caparica: UIED e APM.

Almeida, D., & Silva, M. (2012, novembro). A formação matemática do professor primário nos Institutos de Educação de São Paulo e do Rio de Janeiro (1932-1939). In I. Parolin, W. Valente & C. Sant'Ana (Org.). *Comunicação apresentada no I Encontro Nacional de Pesquisa em História da Educação Matemática*, Vitória da Conquista, Baía, Brasil.

Alves, C. & Villela, L. (2012, novembro). As metodologias da divisão em alguns livros didáticos brasileiros da primeira metade do século XX. In I. Parolin, W. Valente & C. Sant'Ana (Org.). *Comunicação apresentada no I Encontro Nacional de Pesquisa em História da Educação Matemática*, Vitória da Conquista, Baía, Brasil.

Amor, A. (1934). Súmula didáctica. *Revista Escolar, 8*, 449-450.

Arruda, J. (2011). *Histórias e práticas de um ensino na escola primária: marcas e movimentos da Matemática Moderna*. (Tese de doutoramento, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis).

Astudillo, M. (2005). El compendio de matemáticas de José Mariano Vallejo: su visión del concepto de limite. In Actas del *IX Simpósio SEIEM, Grupo de Investigação História de la Educación Matemática*. Córdoba, Argentina.

Ball, D. (1990). Halves, pieces, and twoths: Constructing representational contexts in teaching fractions. Craft Paper 90-2. Recuperado de http://education.msu.edu/NCRTL/PDFs/NCRTL/CraftPapers/cp902.pdf

Ball, D., Thames, M., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special?. *Journal Of Teacher Education, 59(5)*, 389-407. doi:10.1177/0022487108324554

Baptista, M. (2004). *O Ensino Normal Primário. Currículo, práticas e políticas de educação*. Lisboa: Educa.

Barbier, J. (1996). *Savoirs théoriques et savoirs d'action*. Paris: PUF.

Bardin, L. (2014). *Análise de conteúdo* (5.ª ed.). Lisboa: Edições 70.

Barroso, J. (2005). *Políticas educativas e organização escolar*. Lisboa: Universidade Aberta.

Behr, M., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1992). Rational number, ratio and proportion. In D. Grouws (Org.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 296-333). NY: Macmillan.

Behr, M., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1993). Rational Numbers: Toward a Semantic Analysis - Emphasis on the Operator Construct. In T. Carpenter, E. Fennema & T. Romberg (Eds.). *Rational Numbers: An Integration of Research*, 13-47. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates. Recuperado de http://www.cehd.umn.edu/ci/rationalnumberproject/93_1.html

Behr, M., Lesh, R., Post, T. & Silver, E. (1983). Rational number concepts. In Lesh, R. & Landau. M. (Eds.). *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*. (pp. 91–125). New York: Academic Press. Recuperado de http://www.cehd.umn.edu/ci/rationalnumberproject/83_1.html

Behr, M., & Post, T. (1992). Teaching rational number and decimal concepts. In T. Post (Ed.), *Teaching mathematics in grades K-8: Research-based methods* (2.ª ed.). (pp. 201-248). Boston: Allyn and Bacon. Recuperado de http://www.cehd.umn.edu/ci/rationalnumberproject/92_2.html

Behr, M., Wachsmuth, I., Post, T., & Lesh, R. (1984). Order and Equivalence of Rational Numbers: A Clinical Teaching Experiment. *Journal for Research in Mathematics Education, 15(5),* 323-341.

Bernstein, B. (1977). *Class, codes and control, Vol III: Towards a theory of educational transmissions*. (2.ª ed. rev.) Londres: Routldge & Kegan Paul.

Bernstein, B. (1990). *Class, codes and control, vol IV*. Londres: Routledge.

Bernstein, B. (1999). Vertical and horizontal discourse: an essay. *British Journal of Sociology of Education, 20(2),* 157-173.

Bernstein, B. (2000). *Pedagogy, symbolic control and identity: theory, research, critique* (revised edition). London: Rowman & Littlefield.

Berrio, J. (1976). El método histórico en la investigacion histórica de la educacion. *Revista Española de Pedagogia, XXXIV,* 134 (10-11), 449-475.

Bezuk, N., & Cramer, K. (1989). Teaching About Fractions: What, When, and How? In P. Trafton (Ed.), *National Council of Teachers of Mathematics 1989 Yearbook: New Directions For Elementary School Mathematics* (pp. 156-167). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Bivar, A.; Grosso, C.; Oliveira, F.; Timóteo, M. (2013). Programa e metas curriculares Matemática – Ensino Básico. Lisboa: Ministério da Educação e Ciência.

Boavida, A., Paiva, A., Cebola, G., Vale, I., Pimentel, T. (2008). *A experiência matemática no ensino básico*. Lisboa: DGIDC.

Borges, R. (2011a). *A Matemática ensinada nos cursos do Magistério Primário em Portugal*. In Saraiva, L. (ed.). *Atas do V Encontro Luso-Brasileiro de História da Matemática, 3 a 7 de outubro de 2007, Castelo Branco* – Portugal, 291-304. Lisboa: SPM.

Borges, R. (2011b). *Circulação e apropriação do ideário do movimento da matemática moderna nas séries iniciais: as revistas pedagógicas no Brasil e em Portugal*. (Tese de Doutoramento, Uniban, São Paulo).

Borges, R. (2012, novembro). As orientações para a matemática do primário 1967-1983. In I. Parolin, W. Valente & C. Sant'Ana (Org.). *Comunicação apresentada no I Encontro Nacional de Pesquisa em História da Educação Matemática*, Vitória da Conquista, Baía, Brasil.

Boto, C. (2010). Compêndios pedagógicos de Augusto Coelho (1850-1925): a arte de tornar ciência o ofício de ensinar. *História da Educação, 14, n.º 30*, 9-60.

Boyer, B. (1991). *A history of mathematics.* New York: Wiley.

Brocardo, J. (2010). Trabalhar os números racionais numa perspectiva de desenvolvimento de sentido de número. *Educação e Matemática*, 109, 15–23.

Brousseau, G., Brousseau, N. & Warfield, V. (2004). Rationals and decimals as required in the school curriculum: part 1 rationals as measurement. In *The Journal of Mathematical Behavior, 23,* 1-20. http://dx.doi.org/10.1016/j.jmathb.2003.12.001

Brousseau, G., Brousseau, N. & Warfield, V. (2007). Rationals and decimals as required in the school curriculum: part 2 from rationals to decimals. In *The Journal of Mathematical Behavior, 26*, 281-300. http://dx.doi.org/10.1016/j.jmathb.2007.09.001

Bruner, J. (1999). *Para uma teoria da educação*. Lisboa: Relógio d'Água.

Burke, P. (1997). *O que é a história cultural?* (2.ª ed.). Rio de Janeiro: Zahar.

Cabrita, I. (1996). A proporcionalidade direta à luz dos manuais escolares. In *Atas do VI Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Lisboa: APM.

Candeias, A. (Coord.) (2005*). Modernidade, educação e estatísticas na ibero-américa dos séculos XIX e XX*. Lisboa: Educa História.

Candeias, R. (2008). *Contributo para a história das inovações no ensino da matemática no primário: João António Nabais e o ensino da matemática no Colégio Vasco da Gama.* (Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa)

Candeias, R. (2010). Contributos para a história das inovações no ensino da Matemática no primário: João António Nabais e o desenvolvimento e divulgação de materiais didácticos. *Quadrante. XVII (1),* 47-77.

Candeias, R. (2017a). A matemática na formação inicial de professores do ensino primário: a proposta de José Moreirinhas Pinheiro (1923-2017) para o ensino dos decimais. *HISTEMAT – Revista de História da Educação Matemática da Sociedade Brasileira de História da Matemática, n.º 3*, 55-67, ISSN2447-6447, Recuperado de

Candeias, R. (2017b, fevereiro). Mathematics in the initial pre-service education of primary school teachers in Portugal: Analysis of Gabriel Gonçalves proposal for the concept of unit and its application in solving problems with decimals. *CERME 10, Feb 2017*, 1692-1700, Dublin, Ireland. 〈hal-01938819, Recuperado de

Candeias, R. (2019). Duas abordagens distintas na iniciação aos números racionais não negativos no ensino primário: Pimentel Filho (1934) e Gabriel Gonçalves (1974). In *Revista Cocar: estudos de história da educação matemática, 6*, 07-29. ISSN: 2237-0315. http://dx.doi.org/10.31792/rc.v0i6

Candeias, R. & Matos, J. (2016). A matemática na formação de professores do ensino primário em Portugal, da reforma pombalina de 1772 até 1910. *Perspectiva, v. 34, 1*, 41-66. http://dx.doi.org/10.5007/2175-795X.2016v34n1p41

Candeias, R. & Monteiro, C. (2016). A matemática na formação dos professores do ensino primário: análise de uma proposta didática de Alberto Pimentel Filho (1875-1950) para o ensino das frações. In *Anais do III Congresso Ibero-Americano de História da Educação Matemática* (pp. 823-839). Belém: SBHMat.

Caraça, B. (1941/2003). *Conceitos fundamentais da matemática.* (5.ª ed.). Lisboa: Gradiva. (Obra original publicada em 1941).

Castelo, C. (2003). Gaspar, José Maria. In Nóvoa, A. (Dir.). *Dicionário de educadores portugueses* (pp. 623-625). Porto: Edições ASA.

Castro, E. & Castro E. (1997). Representaciones y modelizacion. In Rico, L. (Coord.): *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria,* 95-124. Horsori. Barcelona.

Certeau, M. (1982). *A escrita da história.* Rio de Janeiro: Editora Forense Universitária.

Charles, R., & Lester, F. (1986). *Mathematical problema solving*. Springhouse: Learning Institute.

Chartier, R. (2007). *La historia o la lectura del tiempo*. Barcelona: Editorial Gedisa.

Chateau, J. (1956). *Os grandes pedagogos*. Lisboa: Edições Livros do Brasil.

Chervel, A. (1990). *História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa*. Teoria & Educação, 2, 177-229.

Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique: du savoir savant au savoir enseigné.* Grénobre: La Pensée Sauvage.

Correia, A., & Silva, V. (2002). *Manuais pedagógicos – Portugal e Brasil – 1930 a 1971: produção e circulação internacional de saberes pedagógicos.* Lisboa: Educa.

Correia, A. (2003). Coelho, José Augusto. In Nóvoa, A. (Dir.). *Dicionário de educadores portugueses* (pp. 359-361). Porto: Edições ASA.

Costa, D. (2010). *A aritmética escolar no ensino primário brasileiro: 1890 – 1946.* (tese de Doutoramento, Pontífica Universidade Católica de São Paulo).

Coutinho, C. (2015). *Metodologia de investigação em ciências socias e humanas: teoria e prática* (2.ª ed.). Coimbra: Edições Almedina.

Cramer, K., & Wyberg, T. (2009). Efficacy of different concrete models for teaching the part-whole construct for fractions. *Mathematical Thinking and Learning, 11(4),* 226-257, doi:10.1080/10986060903246479

D'Hainaut, L. (1980). *Educação: dos fins aos objetivos*. Coimbra: Almedina.

Domingos, A., Barradas, H., Rainha, H. Neves, I (1986*). A teoria de Bernstein em sociologia da educação*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Durkin, K., & Rittle-Johnson, B. (2014). Diagnosing misconceptions: Revealing changing decimal fraction knowledge. *Learning and Instruction, 37,* 1-9 http://dx.doi.org/10.1016/j.learninstruc.2014.08.003

Estrada, M., Sá, C., Queiró, J., Silva, M. & Costa, M. (2000). *História da matemática.* Lisboa: Universidade Aberta.

Farias, K. (2012, novembro). O compêndio é do Conselheiro Ottoni na voz dos relatórios imperiais: rastros de memórias de práticas aritméticas na formação de professores primários na Escola Normal da província do Rio de Janeiro (1868-1878). In I. Parolin, W. Valente & C. Sant'Ana (Org.). *Comunicação apresentada no I Encontro Nacional de Pesquisa em História da Educação Matemática,* Vitória da Conquista, Baía, Brasil.

Fernandes, M. (1995). *O pensamento educacional de José Augusto Coelho* (tese de Mestrado apresentada à Universidade do Minho).

Ferreira, J. (1990). *Introdução à análise matemática* (3.ª ed). Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian

Ferreira, N. (2016). Professor José Eduardo Moreirinhas Pinheiro (1923-2017): um percurso biobibliográfico, *Da Investigação às Práticas*, 7 (1), 91 – 111.

Flores, C. (2014). Como a matemática foi engendrada, em tempos passados, nos anos iniciais da escolaridade? In W. Valente (Org.), *A história da educação matemática no Brasil: problemáticas de pesquisa, fontes, referências teórico-metodológicas e histórias elaboradas* (pp. 50-61). São Paulo: Editora Livraria da Física.

Fonseca, T. (1925). José Augusto Coelho. *Educação Social*, *12*, 1-4.

Fosnot, C. & Dolk, M. (2002). *Young mathematicians at work: constructing fractions, decimals, and percents.* Portsmouth: Heinemann.

Frota, J. (2003). Freire, Henrique Augusto da Cunha Soares. In Nóvoa, A. (2003). *Dicionário de educadores portugueses*. Porto: Edições ASA.

Gallego, D. (2004). *La Metodología de la aritmética en los comienzos de las Escuelas Normales (1838-1868) y sus antecedentes.* (Tese de doutoramento). Universidad de Murcia, Espanha. Recuperado de https://digitum.um.es/digitum/handle/10201/26973

Gimeno, J. (1988/2000). *O currículo: uma reflexão sobre a prática* (3.ª ed.). Porto Alegre: Artmed. (Obra original publicada em 1988).

Girão, L. (2002, novembro). O significado de “tacto pedagógico” nos manuais de pedagogia do magistério português (1880-1960). Apresentado no *II Congresso Brasileiro de História da Educação – História e memória da educação brasileira*, Natal, Rio Grande do Norte, Brasil.

Goldin, G. (2008). Perspectives on representation in mathematical learning and problem solving. In: English, L. (Ed.). *International research in mathematics education***. (**2nd ed). New York: Rutledge, 176-201.

Gomes, J. (1977). Um projeto de escola infantil elaborado por um pedagogo português nos fins do século XIX. In Gomes, J. (Ed.) *A educação infantil em Portugal* (pp. 131-151). Coimbra: Almedina.

Gomes, J. (1988). Situação actual da história da educação em Portugal. In Gomes, J.; Fernandes, R.; Grácio, R. (Org.). *História da educação em Portugal*. Lisboa: Livros Horizonte.

Gomes, J. (1996). *Estudos para a história da educação no século XIX*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Gomes, M. (novembro, 2012). Escola Nova e Educação Matemática nos anos iniciais: duas paisagens. In I. Parolin, W. Valente & C. Sant’Ana (Org.). *Comunicação apresentada no I Encontro Nacional de Pesquisa em História da Educação Matemática*, Vitória da Conquista, Brasil.

Goodlad, J. (1979). *Curriculum inquiry. The study of curriculum practice*. New York: McGraw-Hill.

Goodson, I. (1997). *A construção social do currículo*. Lisboa: Educa.

Goodson, I. (2001). *O currículo em mudança: Estudos na construção social do currículo*. Porto: Porto Editora.

Guerreiro, J. (1989). *Curso de análise matemática*. Lisboa: Escolar Editora

Hill, H., & Ball, D. (2004). Learning mathematics for teaching: results from California’s Mathemtatics Professional Development Institutes. *Journal for Research in Mathematics Education, 35 (5),* 330-351. Recuperado de http://www.umich.edu/~lmtweb/files/hillball.pdf

Hill, H., Ball, D. & Shiling, S. (2008). Unpacking pedagogical knowledge: conceptualizing and measuring teachers’ topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, *39 (4)*, 372-400.

Hofstetter, R. & Schneuwly (2009). Savoirs en (trans) formation: Au coeur des professions de l’enseignement et de la formation. In: Rita Hofstetter et al. (Éds). *Savoirs en (trans) formation. Raisons éducatives*, 7-40. Bruxelles: De Boeck Université.

Ifrah, G. (1997). História universal dos algarismos (Vol. 1). Rio de Janeiro: Nova Fronteira.

Julia, D. (1995). La culture scolaire comme objet historique. *Paedagogica Historica. International Journal of the History of Education*, *1*, 353-382.

Junior, F. (s.d.) José Augusto Coelho: um grande educador português. *Revista Escolar, vários números*.

Kamii, C. & Clark, F. (1995). Equivalent fractions: their difficulty and educational implications. *Journal of Mathematical Behaviour* 14, 365-378

Kieren, T. (1976). On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. In R. Lesh (Ed.), Number and Measurement: Papers from a Research Workshop (pp. 101-144). Columbus, OH: ERIC/SMEAC.

Kieren, T. (1981). *Five faces of mathematical knowledge building*. Edmonton: Department of Secondary Education, University of Alberta.

Kieren, T. (1988). Personal knowledge of rationals numbers: its intuitive and formal development. In J. Hilbert & M. Behr (Org.). Number concepts and operations in the middle grades VII (pp. 162-181). Reston, VA: NCTM & Hillsdale, NJ: Lawrence Erbaulm.

Kieren, T. (1993). Rational numbers and fractional numbers: from quotient field to recursive understanding. In: T. P. Carpenter, E. Fennema e T. Romberg (Ed). *Rational numbers: an integration of research* (pp. 49-84). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Klein, F. (2009). *Matemática elementar de um ponto de vista superior: volume 1 – 1.ª parte - Aritmética.* Lisboa: SPM.

Lamon, S. (2002). Part-whole comparisons with unitizing. In Litwiller, B; Bright, G. (Editor) *Making sense of fractions, ratios and proportions*. Virginia, USA: National Council of Teachers of Mathematics.

Lamon, S. (2006). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers*. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Lorenz, K., Vechia, A. (2004). Os livros didáticos de matemática na escola secundária brasileira no século XIX. In *História da Educação, ASPHE, 15*, 53-72.

Ma, L. (2009). Saber e ensinar matemática elementar. Lisboa: Gradiva.

Mamede, E. (2008). Às voltas com as frações. In E. Mamede (Coord.). *Matemática: ao encontro das práticas 1.º ciclo*. (pp. 83-92). Braga: Instituto de Estudos da Criança – Universidade do Minho.

Marques, J. (novembro de 2012). Manuais pedagógicos portugueses para o ensino de matemática no curso primário brasileiro em tempos de Escola Nova. In I. Parolin, W. Valente & C. Sant'Ana (Org.). *Comunicação apresentada no I Encontro Nacional de Pesquisa em História da Educação Matemática*, Vitória da Conquista, Brasil.

Martínez, S. (2014). Elementos de Pedagogia, Affreixo e Freire: um manual português nas Escolas Normais brasileiras. In Cardoso, T. (org.). *História da profissão docente no Brasil e em Portugal*. Rio de Janeiro: Sindicato Nacional dos Editores de Livros.

Matos, J. (2005). História do ensino da matemática em Portugal. In *Actas do XIII Encontro de Investigação em Educação em Matemática*. Lisboa: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Matos, J. (2007). História do ensino da matemática em Portugal: a constituição de um campo de investigação. In *A matemática moderna nas escolas do Brasil e de Portugal: primeiros estudos*. Matos, J. & Valente, W. (Org.). São Paulo: CAPES – GRICES.

Matos, J. (2014). A matemática no ensino não superior em Portugal. In Almeida, A., Matos, J. (Eds). *A matemática nos programas do ensino não superior (1835-1974)* (pp. 15-35). Caparica: UIED e APM.

Matos, J. (2018a). Revisitando a história da educação matemática: fundamentos, metodologias e temáticas. In Rodrigues, A., Barbosa, A., Santiago, A., Domingos, A., Carvalho, C., Ventura, C., … Carreira, S. (Eds.). *Livro de atas do Encontro de Investigação em Educação*. Coimbra: ESE-IPC.

Matos, J. (Org.) (2018b). *A matemática e o seu ensino na formação de professores: uma abordagem histórica, vol I e II*. Lisboa: APM/UIED.

Matos, J. M. (2020). História da Educação Matemática e Educação Matemática. In M. C. L. d. Silva & T. P. Pinto (Eds.), História da Educação Matemática e Formação de professores: aproximações possíveis (pp. 19-51). São Paulo: Livraria da Física.

Mattoso, J. (1997). *A escrita da história: teoria e métodos.* Lisboa: Editorial Estampa.

Maz, A. (2005). Los números negativos en España en los siglos XVIII y XIX (Tese de doutoramento, Universidad de Granada, Granada). Recuperado de http://digibug.ugr.es/handle/10481/556#.WSkoRWjyvIU

McMullen, J., Laakkonen, E., Hannula-Sormunen, M. & Lehtinen, E. (2014). Modeling the developmental trajectories of rational number concept(s). *Learning and Instructing, 37,* 14-20. doi:10.1016/j.learninstruc.2013.12.004

Mogarro, M. & Palma, H. (2011). A evolução curricular da Matemática no Ensino Primário em Portugal (1882-1974). *Quadrante, XX (2),* 81-107.

Monteiro, C., & Pinto, H. (2005). A aprendizagem dos números racionais. *Quadrante, Revista de Investigação em Educação Matemática, 14,* 89-107. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Monteiro, C., & Pinto, H (2009). *Desenvolvendo o sentido do número racional*. (2.ª ed.). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Monteiro, C. & Pinto, H. (2012). *Sequência de tarefas para o ensino e aprendizagem da multiplicação e da divisão de números racionais não negativos*. Lisboa: APM.

Morais, C. (2019). A compreensão de números racionais: o papel da representação decimal (Tese de doutoramento, Instituto da Educação da Universidade de Lisboa, Lisboa). Recuperado de http://hdl.handle.net/10451/38759

Morais, A. & Neves, I. (2007). A teoria de Basil Bernstein: alguns aspetos fundamentais. *Revista Práxis Educativa, 2* (2), 115-130.

Morais, A.; Neves, I.; Ferreira, S. (2018). O currículo nas suas dimensões estrutural e internacional: perspetiva de Basil Bernstein. In J. Pacheco, M. Roldão, M. Estrela (Eds.), *Estudos de currículo* (pp. 10-38). Porto: Porto Editora.

Ni, Y., & Zhou, Y. (2005) Teaching and learning fraction and rational numbers: The Origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist*, *40(1)*, 27-52, doi:10.1207/s15326985ep4001_3

Nóvoa, A. (1987a). *Le temp des Professeurs*. Lisboa: Instituto Nacional de Investigação Científica, vol I.

Nóvoa, A. (1987b). Do Mestre-Escola ao professor do ensino primário: Subsídios para a história da profissão docente em Portugal (séculos XV –XX). *Análise Psicológica*. *3*, 413-440. Recuperado de http://repositorio.ispa.pt/bitstream/10400.12/2200/1/1987_3_413.pdf

Nóvoa, A. (1995). Uma educação que se diz *nova*. In Candeias, A., Nóvoa, A., & Figueira, M. (Org.). *Sobre a Educação Nova: cartas de Adolfo Lima a Álvaro Viana de Lemos (1923-1941)* (pp. 25-41). Lisboa: Educa.

Nóvoa, A. (Org.) (2003a). *Profissão professor*. Porto: Porto Editora.

Nóvoa, A. (2003b). *Dicionário de educadores portugueses*. Porto: Edições ASA.

Nunes, T., Bryant, P. & Watson, A. (2009). *Keys understandings in mathematics learning*. Recuperado de http://www.nuffieldfoundation.org/sites/default/files/MATHS_COMBINEDv_FINAL(1).pdf

Orton, R., Post, T., Behr, M., Cramer, K., Harel, G., & Lesh, R. (1995). Logical and psychological aspects of rational number pedagogical reasoning. Hiroshima Journal of Mathematics Education, 3, 63-75.

Pacheco, J. A. (2001). *Currículo: teoria e práxis* (3.ª ed.). Porto: Porto Editora.

Palma, H. (2008). *A matemática na escola primária. Um olhar sobre o ensino da Matemática nas escolas portuguesas desde o final do século XIX até à década de 70 do século XX*. Tese de mestrado, Universidade de Lisboa.

Pardim, C. & Souza, L. (novembro, 2012). O manual pedagógico "metodologia do ensino primário e a formação de professores em Campo Grande: um olhar sob a perspectiva hermenêutica de profundidade. In I. Parolin, W. Valente & C. Sant'Ana (Org.). *Comunicação apresentada no I Encontro Nacional de Pesquisa em História da Educação Matemática*, Vitória da Conquista, Brasil.

Perrenoud, P. (1995). *Ofício de aluno e sentido do trabalho escolar*. Porto: Porto Editora.

Pinheiro, J. (1996). José Maria Gaspar. In *Elementos para um livro de memórias* (pp. 18-19). Lisboa.

Pinheiro, N. (novembro, 2012). O método intuitivo para o ensino da aritmética: a experiência da Escola Americana Paulista. In I. Parolin, W. Valente & C. Sant'Ana (Org.). *Comunicação apresentada no I Encontro Nacional de Pesquisa em História da Educação Matemática*, Vitória da Conquista, Brasil.

Pintassilgo, J. (2006). Os manuais de pedagogia no primeiro terço do século XX: entre a tradição e a inovação. In J. Pintassilgo, M. Freitas, M. Mogarro, & M. Carvalho (Orgs.). *História da escola em Portugal e no Brasil: circulação e apropriação de modelos culturais*, 175-200. Lisboa: Edições Colibri.

Pintassilgo, J. (Coord.) (2012). *Escolas de formação de professores em Portugal*. Lisboa: Edições Colibri.

Pintassilgo, J. (2016). Orbelino Geraldes Ferreira e a «escola ativa»: tradição pedagógica e prescrição didática no Portugal de meados do século XX. In A. C. Gomes e P. S. Hansen (Orgs.) (2016). *Intelectuais mediadores: práticas culturais e ação política* (pp. 148- 173). Rio de Janeiro: Civilização Brasileira.

Pintassilgo, J. & Mogarro, M. (2015) *Das escolas normais às escolas do magistério primário: percurso histórico das escolas de formação de professores do ensino primário*. *Historia y Memoria de la Educación, 1*, 203-238. DOI: 10.294.5668.0997.5135285

Pintassilgo, J., Mogarro, M., & Henriques, R. (2010). *A formação de professores em Portugal.* Lisboa: Edições Colibri.

Pintassilgo, J. & Pedro, L. C. (2012a). A disciplina de Didáctica especial na Escola do Magistério Primário de Lisboa. O exemplo do Prof. Moreirinhas Pinheiro. In Hernández Diaz, J. M. (Coord.). *Formación de élites y educación superior en iberoamérica (ss. XVI-XXI)* (vol II, pp. 241-251). Salamanca: Hergar Ediciones Antema.

Pintassilgo, J. & Pedro, L. C. (2012b). As disciplinas de Didáctica nas Escolas do Magistério Primário. Reflexões em torno do currículo da formação de professores. Comunicação apresentada ao XIX Colóquio da Secção Portuguesa da AFIRSE – *Revisitar os Estudos Curriculares: onde estamos e para onde vamos?* – realizado entre 2 e 4 de fevereiro de 2012 no Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Pintassilgo, J.& Serrazina, L. (Org.) (2009). *A Escola Normal de Lisboa e a formação de professores: arquivo, história e memória.* Lisboa: Edições Colibri.

Pintassilgo, J.; Teixeira, A.; Beato, C.; Dias, I. (2010). *A história das disciplinas escolares de matemática e de ciências: Contributos para um campo de pesquisa.* Lisboa: Escolar Editora

Pinto, H. (2011). *O desenvolvimento do sentido da multiplicação e da divisão de números racionais.* Tese de doutoramento: Universidade de Lisboa.

Pinto, H. & Monteiro, C. (2008). A divisão de números racionais. In Brocardo, J.; Serrazina, L. & Rocha, I. (Org.) *O sentido do número: reflexões que entrecruzam teoria e prática* (pp. 201-219). Lisboa: Escolar Editora.

Ponte, J. & Serrazina, L. (2000). *Didáctica da matemática do 1.º ciclo*. Lisboa: Universidade Aberta.

Ponte, J. (2005). Gestão curricular em matemática. Em GTI (Ed.), O professor e o desenvolvimento curricular, 11-34. Lisboa: APM.

Ponte, J., Serrazina, L., Guimarães, H., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M. & Oliveira, P. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação.

Post, T., Wachsmuth, I., Lesh, R., & Behr, M. (1985). Order and Equivalence of Rational Number: A Cognitive Analysis. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16(1), 18-36.

Post, T., Behr, M., & Lesh, R. (1986). Research-Based Observations About Children's Learning of Rational Number Concepts. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 8(1), 39-48.

Post, T., Cramer, K., Behr, M., Lesh, R., & Harel, G. (1993). Curriculum implications of Research on the Learning, Teaching, and Assessing of Rational Number Concepts. In T. Carpenter, E. F& Harel, G. (In press). *Designing instructionally relevant assessment reports.* In T. Carpenter & E. Fennema (Eds.), *Research on the Learning, Teaching, and Assessing of Rational Number Concepts*. Lawrence Erlbaum and Associates. Recuperado de http://www.cehd.umn.edu/ci/rationalnumberproject/93_6.html

Proença, M. (1997). *A reforma de Jaime Moniz: antecedentes e destino histórico*. Lisboa: Edições Colibri

Quaresma, M.; Ponte, J. (2014). Representações e processos de raciocínio na comparação e ordenação de números racionais numa abordagem exploratória. Bolema, v.28, n.50, 1464-1484. DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n50a22

Reis, D. & Gomes, M. (novembro, 2012). História da educação matemática no século XX: um estudo sobre a história da formação de professores de matemática para os anos iniciais, em Belo Horizonte, a partir do arquivo particular de Alda Lodi – 1927/1946. In I. Parolin, W. Valente & C. Sant'Ana (Org.). *Comunicação apresentada no I Encontro Nacional de Pesquisa em História da Educação Matemática*, Vitória da Conquista, Brasil.

Rico, L.; Marín, A.; Lupiañez, J. L. y Gómez, P. (2008). *Planificación de las matemáticas escolares en secundaria: el caso de los números naturales. Suma*, *58*, 7-23. Recuperado de http://revistasuma.es/IMG/pdf/58/007-023.pdf

Ross, E. (2012). Foreword. In Hickman, H. & Porfílio, B. (Eds.). *The new politics of the textbook*. Rotterdam: Sense Publishers.

Sadovnik, A. (2001). Basil Bernstein (1924-2000). In *Perspectivas: revista trimestral de educación comparada, XXXI*, *4*, 687-703. Paris: UNESCO, Oficina Internacional de Educación.

Santos, J. (2014). *Números*. Porto: Universidade do Porto Editorial

Santos, P. (2008). *Exames Nacionais no Ensino Primário (1948 – 1974).* (Tese de Mestrado/Universidade Nova de Lisboa).

Schubring, G. (2014). On historiography of teaching and learning mathematics. In Karp, A. & Schubring, G. (Eds.) *Handbook on the history of mathematics education* (pp. 3-8). New York: Springer Science. DOI 10.1007/978-1-4614-9155-2

Shreier, M. (2012). *Qualitative content: analysis in practice*. London: SAGE.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15 (2), 4-14.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57 (1), 1-22.

Silva, T. (2000). *Teorias do currículo: uma introdução crítica*. Porto: Porto Editora.

Silva, M. (2014). História do ensino primário de matemática: uma dimensão nova e promissora da história da educação matemática. In W. Valente (Org.), *A história da educação matemática no Brasil: problemáticas de pesquisa, fontes, referências teórico-metodológicas e histórias elaboradas* (pp. 274-283). São Paulo: Editora Livraria da Física.

Silva, V. (2001). *História de leituras para professores: um estudo da produção e circulação de saberes especializados nos "manuais pedagógicos" brasileiros (1930-1971)* (2 vols.). Dissertação de mestrado, Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, São Paulo, Brasil.

Silva, V. (2005). Saberes em viagem nos manuais pedagógicos: construções da escola em Portugal e no Brasil (1870-1970) (Tese de doutoramento, Faculdade de Educação, São Paulo). Recuperado de http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48134/tde-30012013-135022/pt-br.php. DOI 10.11606/T.48.2006.tde-30012013-135022

Silva, M. C. & Valente, V. (2012). A matemática escolar nos níveis iniciais de ensino em perspectiva histórica. In *Anais do I ENAPHEM*. Vitória da Conquista: Brasil.

Skovsmose, O. (2001). Landscapes of investigation. *ZDM, vol. 33 (4),* 123-132.

Souza, L. (2011). *Trilhas na construção de versões históricas sobre um grupo escolar*. (Tese de Doutoramento, Universidade Estadual Paulista).

Souza, L. (novembro, 2012). O ensino da matemática no Grupo Escolar Eliazar Braga. In I. Parolin, W. Valente & C. Sant'Ana (Org.). *Comunicação apresentada no I Encontro Nacional de Pesquisa em História da Educação Matemática*, Vitória da Conquista, Brasil.

Souza, R. (2013). A formação do cidadão moderno: a seleção cultural para a escola primária nos manuais de pedagogia (Brasil e Portugal, 1870 – 1920). In *Revista Brasileira de História da Educação-SP*, *v. 13, n.º 3*, 257-283. http://dx.doi.org/10.4322/rbhe.2014.012

Souza, C. & Villela, L. (2012). Analisando metodologias propostas à aritmética das séries iniciais em livros didáticos: 1910 a 1940. In *Anais do I ENAPHEM*. Vitória da Conquista: Brasil.

Taba, H. (1962). *Curriculum development: theory and practice*. New York: Harcourt, Brace & World.

Taber, S. (2002). Go ask Alice about multiplication of fractions. In *Making sense of fractions, ratios and proportions, 2002 - Yearbook*, (pp. 62-71). Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Thayer-Bacon, B. & Moyer, D. (2006). Philosophical and historical research. In Tobin, K. & Kincheloe (Eds.). *Doing educational research*. Rotterdam: Sense Publishers.

Thames, M., Ball, D. (2010). What math knowledge does teaching require? In Teaching Cildren Mathematics 17 (4), 220-229. DOI: 10.2307/41199946

Torra, V. (2011). *Do ábaco à revolução digital*. Lisboa: Editec.

Tyler, R. (1949). *Basic principles of curriculum and instruction*. Illianois: University of Chicago Press.

Vale, I.; Pimentel, T. (2005). Dos inteiros aos reais. In Palhares, P. (Coord.) *Elementos de matemática para professores do ensino básico*. Lisboa: LIDEL.

Valente, W. (2007). História da educação matemática: interrogações metodológicas. *Revista eletrônica de educação matemática*. v2.2., 28-49.

Valente, W. (2008). Livro didático e educação matemática: uma história inseparável. *ZETETIKÉ, 16, n.º 30*, 139-161.

Valente, W. (2010). Trends of the history of mathematics education of Brazil. *ZDM Mathematics Education, 42,* 315-323, DOI 10.1007/s11858-010-0239-8

Valente, W. (Org.) (2014). *A história da educação matemática no Brasil: problemáticas de pesquisa, fontes, referências teórico-metodológicas e histórias elaboradas.* São Paulo: Editora Livraria da Física.

Valente, W. (2019). Saber objetivado e formação de professores: reflexões pedagógico-epistemológicas. *Revista História da Educação (Online), 23,* 1-22, DOI: http://dx.doi.org/10.1590/2236-3459/77747

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2004). Understanding the structure of the set of rational numbers: A conceptual change approach. *Learning and Instruction*, *14,* 443-467. Recuperado de https://telearn.archives-ouvertes.fr/hal-00190233/document

Vergnaud, G. (2009). The theory of conceptual fields. *Human Development, v. 52, n. 2,* 83-94. DOI: 10.1159/000202727

Villela, L. (2009). *"GRUEMA": uma contribuição para a história da educação Matemática no Brasil.* (Tese de Doutoramento, Universidade Bandeirante de São Paulo).

Viñao, A. (2006). La historia de las disciplinas escolares. *Historia de la Educación: Revista interuniversitaria*, 25, 243-269. Recuperado de http://rca.usal.es/index.php/0212-0267/article/viewFile/11181/11603

Widjaja, W., Stacey, K. & Steinle, V. (2008). Misconceptions about density of decimals: Insights from Indonesian pre-service teachers. *Journal of Science and Mathematics Education in Southeast Asia*, *31(2),* 117-131. Recuperado de http://www.recsam.edu.my/R%26DJournals/YEAR2008/dec2008vol2/misconceptions(117-131).pdf

Wu, H. (2017). *Compreender os números na matemática escolar*. Porto: Porto Editora.

Young, M. (Ed.) (1971). *Knowledge and control: new directions for the sociology of education*, London, Collier-Macmillan.

Zabalza (1998). *Planificação e desenvolvimento curricular na escola.* (4.ª ed.). Porto: Edições Asa

Zuin, E. (2007). *Por uma nova arithmetica: o sistema métrico decimal como um saber escolar em Portugal e no Brasil oitocentistas*. (Tese de Doutoramento, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo).

Fontes

Legislação

Carta de Lei, de 6 de novembro de 1772. Regula a fundação das Escolas de Estudos Menores. *COLP 1763-1774*, 612-615.

Decreto, de 7 de setembro de 1835. Regulamento Geral da Instrução Primária (07/09/1835). *COLP 1835, 2.º Semestre*, 309-313.

Decreto, de 14 de novembro de 1836. Reforma Geral dos Estudos. *COLP 2.º Semestre 1836*, 131-136.

Decreto, de 20 de setembro de 1844. Reforma Geral da Instrução Pública (20/09/1844). *COLP 1844-1845*, 306-330.

Decreto, de 24 de dezembro de 1845. Regulamento para a Escola Normal Primária do Distrito de Lisboa. *Diário do Governo, 306*, (29/12/1845), *COLP 1844-1845*, 923-932.

Decreto, de 4 de dezembro de 1860. Regulamento da Escola Normal Primária do Distrito de Lisboa. *Diário de Lisboa, 295*, (26/12/1860), *COLP 1860*, 814-821.

Decreto, de 20 de outubro de 1863. Regulamento da Escola Normal Primária para o sexo feminino no distrito de Lisboa. *Diário de Lisboa, 240* (24/10/1863). *COLP 1863*, 532-538.

Decreto, de 30 de outubro de 1869. Regulamento para os exames dos concorrentes às cadeiras de ensino primário do 1.º e 2.º grau. *Diário do Governo, 260*, (15/11/1869). *COLP 1869*, 512-515.

Decreto, de 14 de dezembro de 1869. Cria cinco escolas normais e regulamenta o seu funcionamento. *Diário do Governo, 291*, (22/12/1869), 752-761.

Programa para os exames dos concorrentes ao magistério primário no ano de 1870. *Diário do Governo, 64* (22/03/1870), 409-410.

Portaria, de 1 de abril de 1870. Regulamentando os exames para admissão ao magistério de ensino primário. *Diário do Governo, 81*, (12/04/1870), 193-195.

Decreto, de 16 de agosto de 1870. Reforma da instrução primária. *Diário do Governo, 194*, (31/08/1870). *COLP 1870*, 458-468.

Lei, de 2 de maio de 1878. Reforma do ensino primário. *Diário do Governo, 110* (16/05/1878), *COLP 1878*, 53-62.

Lei, de 11 de junho de 1880. Reforma e reorganiza o ensino primário. *Diário do Governo, 137*, (19/06/1880), *COLP 1880*, 94-95.

Regulamento para a execução de leis sobre a instrução primária (28/07/1881). *COLP 1881*, 145-191.

Decreto n.º 1, de 22 de dezembro de 1894. Reorganiza a instrução primária. *Diário do Governo, 292*, (24/12/1894). *COLP 1894*, 1064-1076.

Decreto, de 18 de junho de 1896. Regulamento geral do ensino primário. *Diário do Governo, 193* (29/08/1896). *COLP 1896*, 474-519.

Decreto n.º 8, de 24 de dezembro de 1901. Reforma do ensino primário e do ensino normal. *Diário do Governo, 294* (28/12/1901). *COLP 1901*, 1229-1246.

Regulamentação transitória de habilitação para o magistério, de 18 de janeiro de 1902. *Diário do Governo, 16*, (21/01/1902), 13.

Decreto n.º 4, de 19 de setembro de 1902. Regulamento do decreto n.º 8 de 24 de dezembro de 1901. *Diário do Governo, 214* (23/09/1902). *COLP 1902*, 917-945.

Decreto, de 4 de dezembro de 1902. Programas para o ensino normal. *Diário do Governo, 231* (12/12/1902). *COLP 1902*, 1276-1290.

Decreto com força de lei, de 29 de março de 1911. Regulamento do ensino infantil, primário e normal. *Diário do Governo, 73*, (30/03/1911) 1341-1360.

Decreto com força de lei, de 21 de maio de 1911. Criando as escolas normais superiores junto das faculdades de letras e de ciências das Universidades de Coimbra e de Lisboa. *Diário do Governo, 120*, (24/05/1911), 2081-2083.

Lei n.º 233, de 7 de julho de 1914. Regulamento do ensino normal primário. *Diário do Governo, 111, Série I* (07/07/1914), 477-479.

Decreto n.º 2.213. Aprova o regulamento e programas para execução da lei n.º 233, sobre o ensino normal primário. *Diário do Governo, 24, Série I* (10/02/1916), 65-146.

Decreto n.º 4.649, de 13 de julho de 1918. Reforma a organização das Escolas Normais Superiores das Universidades de Coimbra e Lisboa. *Diário do Governo, 157, Série I*, 1311-1314.

Decreto n.º 4.900, de 5 de outubro de 1918. Regulamento das Escolas Normais Superiores das Universidades de Coimbra e Lisboa. *Diário do Governo, 227, Série I*, (18/10/1918), 1820-1833.

Decreto n.º 5.787-A, de 10 de maio de 1919. Aprova e manda pôr em execução o regulamento das escolas primárias superiores. *Diário do Governo, 98, Série I* (10/05/1919), 1346/A-1346/G.

Decreto n.º 5.787-B, de 10 de maio de 1919. Insere a reorganização do ensino primário. *Diário do Governo, 98, Série I* (10/05/1919), 1346/G-1346/N.

Decreto n.º 6.137, de 29 de setembro de 1919. Aprova o regulamento do ensino primário e normal. *Diário do Governo, 198, Série I* (29/09/1919), 2068-2093.

Decreto n.º 6.203, de 7 de novembro de 1919, Aprova os programas do ensino primário geral, do ensino primário superior, do ensino normal primário e do exame de admissão às Escolas Normais Primárias. *Diário do Governo, 227, Série I*, (07/11/1919), 2229-2385.

Decreto n.º 8.230, de 5 de julho de 1922. Remodela o regime de exames finais dos cursos das escolas normais primárias de Lisboa, Porto e Coimbra. *Diário do Governo, 134, Série I* (05/07/1922), 667.

Decreto n.º 10.181, de 13 de outubro de 1924. Introduz várias alterações na organização do ensino normal primário. *Diário do Governo, 230, Série I* (13/10/1924), 1444-1446.

Decreto 13.791, de 17 de junho de 1927. Promulga várias disposições sobre ensino primário infantil, elementar e complementar. *Diário do Governo, 125, Série I* (17/06/1927), 999-1002.

Decreto n.º 13.792, de 17 de junho de 1927. Regula a forma de realização dos exames finais das escolas normais primárias. *Diário do Governo, 125, Série I* (17/06/1927), 1002.

Decreto n.º 16.037, de 15 de outubro de 1928. Remodela o ensino normal primário. *Diário do Governo, 237, Série I* (15/10/1928), 2094-100.

Decreto n.º 16.038, de 15 de outubro de 1928. Regulamenta as condições em que deve ser feito o exame de admissão às escolas normais primárias. *Diário do Governo, 237, Série I* (15/10/1928), 2100-3.

Decreto n.º 18.140, de 28 de março de 1930. Estabelece dois graus no ensino primário elementar. *Diário do Governo, 72, Série I* (28/03/1930), 577-578.

Decreto n.º 18.646, de 19 de julho de 1930. Institui as escolas do magistério primário em substituição das escolas normais primárias, que ficam extintas. *Diário do Governo, 166, Série I* (19/07/1930), 1443-50.

Decreto n.º 18.973, de 28 de outubro de 1930. Funda a secção de ciências pedagógicas nas Faculdade de Letras e cria dois Liceus Normais. *Diário do Governo, 251, Série I* (28/10/1930), 2208-2213.

Decreto n.º 20.254, de 25 de agosto de 1931. Dá nova redação ao decreto n.º 18646, que institui as escolas do magistério primário. *Diário do Governo, 197, Série I* (25/08/1931), 1942-1945.

Decreto n.º 20.604, de 9 de dezembro de 1931. Autoriza o Governo a criar postos de ensino destinados à propagação dos conhecimentos que constituem o 1.º grau do ensino primário elementar. *Diário do Governo, 283, Série I* (09/12/1931), 2680-2681.

Decreto n.º 21.695, de 29 de setembro de 1932. Reorganiza o ensino de preparação para o magistério primário. *Diário do Governo, 229, Série I* (29/09/1932), 1963-1970.

Decreto n.º 25.311, de 10 de maio de 1935. Aprova os programas das disciplinas das escolas do magistério primário *Diário do Governo, 106, Série I* (10/05/1935), 636-644.

Decreto n.º 25.797, de 28 de agosto de 1935. Determina que a idoneidade para a regência de postos de ensino primário seja comprovada, pelos indivíduos que não forem habilitados com o Exame de Estado do magistério primário, por meio da aprovação nas respetivas provas de aptidão. *Diário do Governo, 199, Série I* (28/08/1935), 1260-1261.

Decreto-lei n.º 27.279, de 24 de novembro de 1936. Estabelece as bases em que deve assentar o ensino primário. *Diário do Governo, 276, Série I* (24/11/1936), 1510-1511.

Portaria n.º 8.731, de 4 de junho de 1937. Organiza os exames dos regentes de postos escolares, a que se refere o artigo 3.º, §§ 2.º e 3.º, do decreto-lei n.º 27279. *Diário do Governo, 129, Série I* (04/06/1937), 545-546.

Decreto-lei n.º 30.951, de 10 de dezembro de 1940. Insere várias disposições relativas à habilitação para o exercício do magistério oficial primário. *Diário do Governo, 286, Série I* (10/12/1940), 1431-1456.

Decreto n.º 30.968, de 14 de dezembro de 1940. Aprova o regulamento e programas dos exames de habilitação para o exercício do magistério primário oficial prescritos no decreto-lei n.º 30951. *Diário do Governo, 290, Série I* (14/12/1940), 1468-1472.

Decreto n.º 32.243, de 5 de setembro de 1942. Regula o funcionamento das escolas do magistério primário *Diário do Governo, 208, Série I* (05/09/1942), 1139-1143.

Decreto n.º 32.629, de 16 de janeiro de 1943. Aprova os programas das escolas do magistério primário. *Diário do Governo, 12, Série I* (16/01/1943), 31-41.

Decreto-lei n.º 43.369, de 2 de dezembro de 1960. Altera o plano de estudos das escolas do magistério primário e insere outras disposições relativas ao funcionamento das referidas escolas *Diário do Governo, 279, Série I* (02/12/1960), 2674-2676.

Manuais

Affreixo, J. & Freire, H. (1891). *Pedagogia para uso do magistério português*. 8.ª ed. Lisboa: Livraria Ferreira.

Coelho, J. (1892). *Princípios de pedagogia, Tomo II*. Porto: S. Paulo Teixeira & Irmãos Editores.

Coelho, J. (1906). *Pedagogia elementar*. 2.ª ed. Lisboa: Livraria Moderna – Editora.

Gaspar, J. & Ferreira, O. (1944). *Notas de Didáctica Especial*. Lisboa: B.U. Amaral.

Gonçalves, G. (1972). *Didáctica do cálculo (apontamentos), 1.º volume*. 2.ª ed. Porto: Porto Editora

Gonçalves, G. (1974). *Didáctica do cálculo (apontamentos), 2.º volume*. 2.ª ed. Porto: Porto Editora.

Nunes, D. (1887). *Elementos de aritmética, teoria e prática, para uso das escolas normais*. Covilhã: Cruz & Irmãos Editores.

Pimentel Filho, A. (1934). *Súmula didáctica*. Lisboa: Livraria Editora.

Pinheiro, J. (1961). *Introdução ao estudo da didáctica especial*. Lisboa: Escola do Magistério Primário de Lisboa.

Preto, F. A. (1903). *Aritmética prática e geometria elementar para o ensino das escolas normais*. Coimbra: Imprensa da Universidade

Anexos

Anexo 1 – Ficha de registo de dados da obra Elementos de aritmética, teoria e prática, para uso das escolas normais (1887)

Caracterização do autor (CAn) – Diogo Nunes

CA1.	**Local e data de nascimento/Local e data de óbito**	Não foi possível identificar.
CA2.	**Centro de formação onde frequentou os estudos**	Academia Politécnica
CA3.	**Profissões e lugares onde exerceu a sua profissão (destaque para as funções relacionadas com a matemática).**	Médico cirurgião; professor da 1.ª cadeira (Aritmética e Geometria Elementar) da Escola Industrial da Covilhã
CA4.	**Relações com pessoas significativas na área da educação e do ensino da matemática**	Nada a referir.
CA5.	**Obras publicadas**	- Nova collecção de theoremas e problemas de arithmetica elementar demostrados e resolvidos para servirem de modelo aos alumnos dos Lyceus e Collegios e aos candidatos ao magisterio primario e secundario / por Diogo Nunes. Lisboa : Livraria Editora de Matos Moreira, 1877. - Nova collecção de problemas e exercicios de Trigonometria rectilinea resolvidos e explicados / Diogo Nunes. Lisboa : Typ. Editora. 1880. - Elementos d'Arithmetica theorica e pratica para uso das escolas normaes primarias, escolas industriaes, lyceus e collegios / Diogo Nunes. [S.l. : s.n.]. 1887. - Primeiros elementos d'Algebra theorica e pratica para uso das escolas normaes primarias, escolas industriaes, lyceus e collegios / Diogo Nunes. [S.l. : s.n.]. 1888, Covilhã, Guimarães & Filho - Systema métrico : e operações sobre complexos : problemas e soluções. Coimbra : Imprensa Académica, Diogo Nunes, 1900. - Exercícios e problemas de Aithmetica elementar com as soluções para uso das Escolas Normais, Escolas Profissionaes e dos Lyceus, 1903, nova edição correcta e consideravelmente argumentada, Coimbra, Livraria Portuguesa e Estrangeira.
CA6.	**Outra informação relevante**	Nada a referir.
CA7.	**Referências bibliográficas**	Nada a referir.

Anexo 1 - Caracterização global da obra (CGOn)

Título	Elementos de d'arithmetica theorica e pratica para uso das Escolas Normais Primarias, Escolas Industriais, Lyceus e Collegios	
CGO1.	**Edição, ano, cidade, editora**	1.ª edição, 1887, Covilhã, Cruz & Irmãos Editores
CGO2.	**Ano da primeira edição e edições conhecidas**	1.ª edição - 1887 Não foram identificadas outras edições
CGO3.	**Extensão e estrutura**	170 páginas. Cinco livros organizados num total de 23 capítulos. Não tem bibliografia final.
CGO4.	**Objetivos gerais da obra**	Aritmética para uso das Escolas Normais Primarias, Escolas Industriais, Lyceus e Collegios.
CGO5.	**Autores em que se baseia e outras influências (global)**	A obra não apresenta bibliografia. A única citação que a obra tem surge na folha de rosto e o autor é identificado como H. Sonnet.
CGO6.	**Valorização global da obra (é citado em que obras das que são analisadas no trabalho)**	Não é citado noutras obras analisadas neste trabalho.
CGO7.	**Questões globais sobre ensino, pedagogia, métodos, metodologia geral**	Não apresenta.

Anexo 1 - Caracterização do Conteúdo Matemático Global (CCMGn)

CCMG1.	**Definição de matemática (aritmética)/Ensino da matemática (aritmética)**	"… a ciência que estuda as *operações* que se podem efetuar sobre os números abstratos (é o que constitui o *cálculo*), e as propriedades elementares de que gozam os números por si mesmos, independentemente de toda a ideia de medida
CCMG2.	**Noção de número e de quantidade/Ensino de …**	O número é definido como "o resultado da medida de uma grandeza
CCMG3.	**Operações elementares**	A multiplicação, como se vê, segundo a definição, é uma soma abreviada de parcelas iguais
CCMG4.	**Ideias sobre geometria**	A geometria não é trabalhada nesta obra.
CCMG5.	**Princípios sobre o papel da resolução de problemas**	Não há referências explícitas ao papel dos problemas no ensino da aritmética, mas os capítulos dedicados às operações aritméticas encerram com um conjunto de problemas em que podem ser aplicadas as operações estudadas. No final de cada tema também é apresentado um ponto com problemas resolvidos.
CCMG6.	**Noção de cálculo mental**	Não há referência explícita ao cálculo mental, mas são apresentadas estratégias de cálculo para além dos algoritmos e procedimentos mais comuns.
CCMG7.	**Material didático**	Não há referências a material didático.

Anexo 1 - Caracterização do Conteúdo Matemático sobre os Números Racionais (CCMNRn)

CCMNR1.	**Referências à utilização didática da evolução histórica dos racionais**		Não existem referências históricas sobre os números racionais, nem sobre a sua possível utilização didática.
CCMNR2.	**Definição de número racional**	**1- Medida**	"dividindo a *unidade* em um certo número de partes iguais e tomando uma ou muitas das partes formadas, temos uma **fração**. O número três quartos é uma fração." (p. 61).
		2 - Quociente	Com efeito, para dividir 5 por 8, por exemplo, é preciso tomar a 8.ª parte de 5; ora, chegaremos evidentemente a este resultado tomando a 8.ª parte de cada uma das unidades que compõem o número 5, o que dá a fração 5/8.
		3 - Classes de equivalência	Não há evidência.
	Dízima	**1 - Finita**	A fração decimal é definida como "uma fração cujo denominador é 10 ou uma potência de 10." e o número decimal é "um número inteiro aumentado de uma fração decimal."
		2 - Infinita periódica	
	Abordagem inicial ao número racional	**1 - Fração**	A primeira abordagem é feita através da fração.
		2 - Decimal	A representação decimal é abordada a partir da relação com a fração decimal e da relação com o sistema de números inteiros.
	Densidade do conjunto dos números racionais		Nada a referir.

CCMNR3.	**Diferentes significados das frações em contexto**	**1- Quociente**	*Com efeito*, para dividir 5 por 8, por exemplo, é preciso tomar a 8.ª parte de 5; ora, chegaremos evidentemente a este resultado tomando a 8.ª parte de cada uma das unidades que compõem o número 5, o que dá a fração
		2 - Parte-todo (contínuo ou discreto)	divide uma laranja em quatro partes iguais e se tomam três dessas partes
		3 - Medida	Não há evidência.
		4 - Operador	
		5 - Razão ("parte-parte" e grandezas diferentes)	Não há evidência.
CCMNR4.	**Tipos de unidade**	**1 - Unidade contínua**	Nunes (1887) refere também exemplos de grandezas contínuas, como as medidas de comprimento.
		2 - Unidade discreta	Para Nunes (1887) no caso da ação de contar, a grandeza é formada por muitas partes distintas e semelhantes, que o autor designa por grandeza descontínua dando exemplos como um grupo de pessoas ou um monte de livros.
CCMNR5.	**Reconhecer frações equivalentes**		com efeito, comparemos as três frações 4/9, 4/(9.5) e (4.5/(9.5) . A 1.ª é 5 vezes maior do que a 2.ª; mas a 3.ª é também 5 vezes maior do que a 2.ª; logo a 1.ª e a 3.ª são equivalentes, isto é, têm o mesmo valor e diferente forma" Redução à sua forma mais simples com utilização do máximo divisor comum.
CCMNR6.	**Comparar e ordenar racionais**		Quanto ao valor da fração, Nunes (1887) ressalta em primeiro lugar que uma fração pode ser inferior, igual ou superior à unidade, conforme o numerador é menor, igual ou maior do que o denominador. Em segundo lugar destaca que entre frações com o mesmo denominador, é maior a que tiver maior numerador. Em terceiro e último salienta que entre frações com o mesmo numerador, é maior a que tiver menor denominador. A comparação de decimais é feita com recurso a um paralelismo com as frações decimais.

CCMNR7.	**Operações com números racionais (com frações e com decimais)**	**1 - Operações com frações**		Este autor começa por apresentar as regras das operações com números racionais na representação na forma de fração. Na apresentação dos procedimentos das operações com frações, Nunes (1887) utiliza essencialmente situações estritamente matemáticas, onde recorre muitas vezes à representação verbal ou à representação simbólica. A regra do procedimento é normalmente enunciada recorrendo à representação verbal.
		2 - Operações com decimais		Na adição e subtração com decimais estabelece a relação com estas operações com inteiros. A multiplicação e divisão com decimais são apresentadas a partir da relação com as operações com frações decimais.
CCMNR8.	**Decimais**	**Equívocos na utilização dos decimais**	**Mais algarismos, maior grandeza**	Destaca que uma determinada fração decimal é sempre inferior à unidade decimal da ordem imediatamente superior às suas unidades de maior valor, apresentando como exemplo que 0,07134 é inferior a 0,1
			Utilização do zero	Nos teoremas relativos aos números decimais, Nunes (1887) começa por referir que a supressão de zeros à direita não altera o valor de um número decimal, apresentando o exemplo da equivalência entre 13,576 e 13,57600
			Mais algarismos, menor grandeza	Não foi identificado.
			Valor de posição do sistema decimal	começa por destacar que estes têm o mesmo sistema de numeração que os números inteiros "todo o algarismo escrito à direita de um outro representa unidades 10 vezes menores que as deste outro."

Anexo 1 - Caracterização das Representações dos Números Racionais (CRNRn)

<table>
<tr><td>CRNR1.</td><td colspan="2">Verbais</td><td>“A fração três quartos escreve-se 3/4. 5/8 lê-se cinco oitavos.”
Utiliza designações como expressão fracionária para fração imprópria
Número fracionário é a designação utilizada para numeral misto.</td></tr>
<tr><td rowspan="4">CRNR2.</td><td rowspan="4">Simbólicas</td><td>1 - Numeral decimal</td><td>É utilizado o numeral decimal, mas a abordagem é feita através da fração decimal.
Nunes (1887) aborda logo de seguida a conversão de um número decimal em fração e a conversão de uma fração ordinária cujo denominador é uma potência de 10, em número decimal</td></tr>
<tr><td>2 - Numeral misto</td><td>É utilizado o numeral misto, que é designado por número fracionário. Estabelece relação entre o numeral misto e a fração imprópria.</td></tr>
<tr><td>3 - Fração</td><td>A fração três quartos escreve-se 3/4
3/7 : 4/11 = 3/7 x 11/4</td></tr>
<tr><td>4 - Percentagem</td><td>A percentagem é trabalhada no contexto do conteúdo dos juros.</td></tr>
</table>

CRNR3.	**Pictóricas (ou icónicas)**	**1 - Modelos de quantidade contínua**	**Modelos de área (ex. imagens de figuras planas, imagens de tiras de papel, imagens de peças de tangram)**	Não são utilizadas representações pictóricas
			Modelos de comprimento (reta numérica orientada, imagens de réguas, imagens de barras de Cuisenaire)	Não são utilizadas representações pictóricas
			Outros modelos de medida (imagens de copos medidores - volume, imagens de relógios - tempo, imagens de balanças - peso, imagens de pizas).	Não são utilizadas representações pictóricas
		2 - Modelos de quantidade discreta	**Imagens de objetos**	Não há evidência.
			Imagens de símbolos	Não há evidência.
			Imagens de pessoas	Não há evidência.
CRNR4.	**Ativas**	**1 - Objetos**		Não há referências a representações ativas.
		2 - Cuisenaire		Não há referências a representações ativas.
		3 - Tangram		Não há referências a representações ativas.

Anexo 1 - Caracterização das Situações Matemáticas e Contextos nos Números Racionais (CSMCNRn)

CSMCNR1.	**Situações**	**1 - Complexidade**	**1 - Exercícios**	Assim: 20 x$\frac{3}{4} = \frac{20}{4}$x 3 = 15.		Situação privilegiada na apresentação dos conteúdos.
			2 - Cenários para investigação	Não há evidência.		
		2 -Contexto	**1 - Situações matemáticas**	"Logo, para dividir um número por uma fração, multiplica-se o número pela fração divisor invertida. $\frac{3}{7} : \frac{4}{11} = \frac{3}{7}$ x $\frac{11}{4}$ 739 : 100 = 7,39; 38 : 1000 = 0,038		Situação privilegiada na apresentação dos conteúdos.
			2 - Situações semirreais	Um grupo de operários poderia fazer uma obra em 8 dias; um 2.º grupo faria a mesma obra em 12 dias. Empregam-se os 2/3 do 1.º grupo e os 3/4 do 2.º; pergunta-se em quanto tempo a obra estará feita?	Um comboio parte de A às 3 horas da tarde e chega a B no dia seguinte às 2h. da tarde; um outro comboio parte de A às 6h. da tarde e chega a B às 7h. da manhã. Pergunta-se a que horas terá lugar o encontro.	
			3 - Situações reais	Não há evidência.		

CSMCNR2.	Problemas	1. Tipologia de problemas	1 - Problemas de cálculo	Problemas que se resolvem com a utilização de uma das quatro operações aritméticas elementares			Há evidência.
				Problemas que se resolvem com a utilização de duas ou mais operações aritméticas elementares	Um editor publica um livro. A despesa de impressão e outras despesas elevam-se a 200$000 réis; vende este livro por dúzias, fazendo o primeiro abatimento de 25 por cento sobre o preço forte, que é de 400 réis, depois o abatimento do 13.º exemplar (dá 13 exemplares pelo preço de 12); nestas condições ganha 520$000 réis quando esgotada a edição. Pergunta-se quantos exemplares da obra se tiraram.		Representam a maioria dos problemas apresentados.
			2 - Problemas de processo, que implicam o uso de uma ou mais estratégias de resolução		Um grupo de operários poderia fazer uma obra em 8 dias; um 2.º grupo faria a mesma obra em 12 dias. Empregam-se os 2/3 do 1.º grupo e os 3/4 do 2.º; pergunta-se em quanto tempo a obra estará feita?	Um comboio parte de A às 3 horas da tarde e chega a B no dia seguinte às 2h. da tarde; um outro comboio parte de A às 6h. da tarde e chega a B às 7h. da manhã. Pergunta-se a que horas terá lugar o encontro.	
			3 - Problemas de aplicação que envolvem recolha de dados e tomada de decisões		Não há evidência.		
			4 - Problemas tipo puzle. Atividades recreativas ou lúdicas.		Não há evidência.		
		2. Formulação de problemas			Não há evidência.		

CSMCNR3.	**Contextos**	**1 - Contextos relacionados com a atividade comercial**	**Promoções**	Um editor publica um livro. As despesas de impressão e outras elevam-se a 200\$000 réis; vende este livro por dúzias, fazendo primeiro o abatimento de 25 por cento sobre o preço forte, que é de 400 réis, depois ao abatimento do 13.º exemplar (dá 13 exemplares pelo preço de 12); nestas condições, ganha 520\$000 réis quando esgotada a edição. Pergunta-se quantos exemplares da obra se tiraram.
			Salários	Há evidência.
			Comércio /Financeiro	Um negociante, declarado falido, não pode pagar senão 31 por cento aos seus credores; com 500\$000 a mais poderia pagar os $\frac{4}{7}$ do que deve. Qual o seu ativo, e qual o seu passivo?
		2 - Contextos relacionados com a medida	**Medidas de comprimento**	Há evidência.
			Medidas de área, volume, peso, capacidade	Há evidência. Um barril de 240 litros de vinho contém 13 por cento de álcool; quantos litros de água é preciso juntar para que a mistura não contenha mais que 8 por cento de álcool?
			Agrimensura	Fabrica-se com os restos de peixes um estrume chamado adubo-peixe. No estado pulverulento, este estrume representa 22 por cento do peso dos restos empregados na sua fabricação, e são precisos 400 kilos para estrumar um hectare de terreno. O preço da compra sendo 4\$000 réis os 100 kilos nos portos de embarque e o transporte custando 30 por cento do preço da compra, pede-se a quantia precisa para mandar estrumar uma propriedade de 187 Há. 65 a, e o peso dos restos de peixes empregados na fabricação do estrume.
CSMCNR4.	**Tarefas de sala com frações**	**1 - Identificação de quantidades**	**Encontrar a fração**	Não há evidência.
			Descobrir a parte	Não há evidência.
			Encontrar o todo	Não há evidência.
		2 - Comparação de quantidades distintas		Não há evidência.
		3 - Reconhecimento da equivalência de quantidades		Não há evidência.

Anexo 2 Ficha de registo de dados da obra Elementos de pedagogia para uso do magistério portuguez (1891)

Anexo 2 - Caracterização do autor 1 (CAn) – José Maria Graça Affreixo

CA1.	**Local e data de nascimento/Local e data de óbito**	Ovar em 24 de agosto de 1842/Lisboa em 1919
CA2.	**Centro de formação onde frequentou os estudos**	Seminário de Santarém. Curso da Escola Normal. Faculdade de Direito da Universidade de Coimbra, formando-se bacharel em Direito em 1887
CA3.	**Profissões e lugares onde exerceu a sua profissão (destaque para as funções relacionadas com a matemática).**	Professor do ensino primário. Fundou Escola Familiar Serpense onde exerceu funções docentes de Português, Francês e Latim. Professor da Escola Normal de Évora.
CA4.	**Relações com pessoas significativas na área da educação e do ensino da matemática**	Nada a referir.
CA5.	**Obras publicadas**	- Apontamentos para a história da pedagogia, 1883; - Elementos de Pedagogia, 1870; - Metodologia.
CA6.	**Outra informação relevante**	Participação ativa na vida das comunidades locais.
CA7.	**Referências bibliográficas**	Nada a referir.

Anexo 2 - Caracterização do autor 2 (CAn) - Henrique Augusto da Cunha Soares Freire

CA1.	**Local e data de nascimento/Local e data de óbito**	18 de julho de 1842, na Trafaria (Almada)/novembro de 1908, em São Brás de Alportel
CA2.	**Centro de formação onde frequentou os estudos**	Liceu municipal de Setúbal, tendo-se depois formado na Escola Normal de Marvila, obtendo a habilitação para o magistério primário.
CA3.	**Profissões e lugares onde exerceu a sua profissão (destaque para as funções relacionadas com a matemática).**	Lecionou no ensino primário. Subinspetor da instrução primária, em Leiria. Corpo docente da Casa Pia de Lisboa. Professor na Escola Normal de Évora. Subinspetor escolar no distrito de Faro.
CA4.	**Relações com pessoas significativas na área da educação e do ensino da matemática**	Nada a referir.
CA5.	**Obras publicadas**	- Apontamentos para a história da pedagogia, 1883; - Elementos de Pedagogia, 1870; - Metodologia.
CA6.	**Outra informação relevante**	Papel ativo na imprensa de educação ensino do final do século XIX. Papel de destaque no lançamento das bases da rede pública da instrução primária no final do século XIX. Participação em conferências pedagógicas.
CA7.	**Referências bibliográficas**	Correia (2003)

Anexo 2 - Caracterização Global da Obra (CGOn)

Título	Elementos de pedagogia para uso do magistério portuguez	
CGO1.	**Edição, ano, cidade, editora**	8.ª edição, 1891, Lisboa, Livraria Ferreira (composta sobre o texto da 7.ª edição, mas revista por José Maria da Graça Affreixo)
CGO2.	**Ano da primeira edição e edições conhecidas**	1.ª edição (1870?). Foram editadas pelos menos oito edições com diversas reformulações.
CGO3.	**Extensão e estrutura**	É uma obra com 292 páginas, dividida em 16 capítulos. Tem índice geral no final onde estão identificados os conteúdos. Não tem bibliografia final.
CGO4.	**Objetivos gerais da obra**	Compêndio de apoio aos alunos das escolas normais portuguesas 1.º e 2.º ano do curso. Criar uma obra que constitua uma referência para a pedagogia nacional, adaptada à sociedade nacional.
CGO5.	**Autores em que se baseia e outras influências (global e matemática)**	Braun, pedagogo do século XIX.
CGO6.	**Valorização global da obra (é citado em que obras das que são analisadas no trabalho)**	A obra não é citada noutras aqui analisadas.
CGO7.	**Questões globais sobre ensino, pedagogia, métodos, metodologia geral**	A pedagogia é considerada como um meio para atingir a educação. Metodologia são os meios utilizados pelo professor em cada ramo de ensino. No ensino da matemática são destacados os métodos intuitivos. No ensino e aprendizagem da matemática e das ciências destaca-se a importância das capacidades percetivas dos alunos. Destaca-se o método experimental no ensino das ciências.

Anexo 2 - Caracterização do Conteúdo Matemático Global (CCMGn)

CCMG1.	**Definição de matemática (aritmética)/Ensino da matemática (aritmética)**	O tratado dos números chama-se aritmética e o das linhas geometria
CCMG2.	**Noção de número e de quantidade/Ensino de …**	Contando as crianças diferentes objetos a uma e um, aos pares, às mãos, às dúzias, terão no que denomina *um* a unidade, no *total* dos objetos contados a quantidade, e na palavra de *relação* de grandeza, entre o que denominou um e o total, terá o número. (Affreixo & Freire, 1890, p. 223, itálicos no original).
CCMG3.	**Operações elementares**	O trabalho com as operações é centrado na utilização do contador horizontal.
CCMG4.	**Ideias sobre geometria**	O tratado dos números chama-se aritmética e o das linhas geometria. A prática é essencial no ensino da geometria. Iniciação do estudo das figuras planas e depois dos sólidos com três dimensões. Relação com os trabalhos manuais. Essencial a utilização de materiais como sólidos em madeira ou o material de Froebel.
CCMG5.	**Princípios sobre o papel da resolução de problemas**	Os problemas são essenciais no ensino da aritmética, devendo estar relacionados com o meio social e familiar dos alunos, com contextos relacionados com as compras, recados e trocos.
CCMG6.	**Noção de cálculo mental**	O uso doméstico da contagem antecede o ensino da aritmética, sendo o cálculo mental o mais usado correntemente na vida. O cálculo mental é utilizado na iniciação a todas as operações elementares, em estreita relação com os materiais didáticos, e precede todo o cálculo escrito.
CCMG7.	**Material didático**	Os materiais pedagógicos, como são designados na obra, são essenciais para tornar real e instrumental todo o ensino do cálculo. Pesos e medidas, sólidos geométricos, caixas de material Froebel e contadores mecânicos.

Anexo 2 - Caracterização do Conteúdo Matemático sobre os Números Racionais (CCMNRn)

<table>
<tr><td>CCMNR1.</td><td colspan="2">Referências à utilização didática da evolução histórica dos racionais</td><td>Não há evidência.</td></tr>
<tr><td rowspan="8">CCMNR2.</td><td rowspan="3">Definição de número racional</td><td>1- Medida</td><td>Não há evidência.</td></tr>
<tr><td>2 - Quociente</td><td>Não há evidência.</td></tr>
<tr><td>3 - Classes de equivalência</td><td>Não há evidência.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Dízima</td><td>1 - Finita</td><td>Não há evidência.</td></tr>
<tr><td>2 - Infinita periódica</td><td>Não há evidência.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Abordagem inicial ao número racional</td><td>1 - Fração</td><td>Não há evidência.</td></tr>
<tr><td>2 - Decimal</td><td>Não há evidência.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Densidade do conjunto dos números racionais</td><td>Não há evidência.</td></tr>
</table>

CCMNR3.	**Diferentes significados das frações em contexto**	**1- Quociente**	Não há evidência.
		2 - Parte-todo (contínuo ou discreto)	Não há evidência.
		3 - Medida	Não há evidência.
		4 - Operador	Não há evidência.
		5 - Razão ("parte-parte" e grandezas diferentes)	Não há evidência.
CCMNR4.	**Tipos de unidade**	**1 - Unidade contínua**	Não há evidência.
		2 - Unidade discreta	Na obra de Affreixo e Freire (1891) a unidade é discutida apenas quando é apresentada a definição de número. Contando as crianças diferentes objetos a uma e um, aos pares, às mãos, às dúzias, terão no que denomina um a unidade, no total dos objetos contados a quantidade, e na palavra de relação de grandeza, entre o que denominou um e o total, terá o número. (Affreixo & Freire, 1891, p. 223, itálicos no original).
CCMNR5.	**Reconhecer frações equivalentes**		Não há evidência.
CCMNR6.	**Comparar e ordenar racionais**		Não há evidência.

CCMNR7.	**Operações com números racionais (com frações e com decimais)**	**1 - Operações com frações**		Não há evidência.
		2 - Operações com decimais		Não há evidência.
CCMNR8.	**Decimais**	**Equívocos na utilização dos decimais**	**Mais algarismos, maior grandeza**	Não há evidência.
			Utilização do zero	Não há evidência.
			Mais algarismos, menor grandeza	Não há evidência.
			Valor de posição do sistema decimal	Não há evidência.

Anexo 2 - Caracterização das Representações dos Números Racionais (CRNRn)

CRNR1.	**Verbais**			Há uma referência verbal à importância da ideia de fração e de número decimal.
CRNR2.	**Simbólicas**	**Numeral decimal**		Não há evidência.
		Numeral misto		Não há evidência.
		Fração		Não há evidência.
		Percentagem		Não há evidência.
CRNR3.	**Pictóricas (ou icónicas)**	**Modelos de quantidade contínua**	**Modelos de área (ex. imagens de figuras planas, imagens de tiras de papel, imagens de peças de tangram)**	Não há evidência.
			Modelos de comprimento (reta numérica orientada, imagens de réguas, imagens de barras de Cuisenaire)	Não há evidência.
			Outros modelos de medida (imagens de copos medidores - volume, imagens de relógios - tempo, imagens de balanças - peso, imagens de pizas).	Não há evidência.
		Modelos de quantidade discreta	**Imagens de objetos**	Não há evidência.
			Imagens de símbolos	Não há evidência.
			Imagens de pessoas	Não há evidência.
CRNR4.	**Ativas**	**Objetos**		Não há evidência.
		Cuisenaire		Não há evidência.
		Tangram		Não há evidência.

Anexo 2 - Caracterização das Situações Matemáticas e Contextos nos Números Racionais (CSMCNRn)

CSMCNR1.	**Situações**	**Dimensão 1 Complexidade**	**Exercícios**	Não há evidência.
			Cenários para investigação	Não há evidência.
		Dimensão 2 Contexto	**Situações matemáticas**	Não há evidência.
			Situações semirreais	Há evidência.
			Situações reais	Não há evidência.

CSMCNR2.	**Problemas**	**Tipologia de problemas**	**Problemas de cálculo**	**Problemas que se resolvem com a utilização de uma das quatro operações aritméticas elementares**	Não há evidência.
				Problemas que se resolvem com a utilização de duas ou mais operações aritméticas elementares	Não há evidência.
			Problemas de processo, que implicam o uso de uma ou mais estratégias de resolução		Não há evidência.
			Problemas de aplicação que envolvem recolha de dados e tomada de decisões		Não há evidência.
			Problemas tipo puzle. Atividades recreativas ou lúdicas.		Não há evidência.
		Formulação de problemas			Não há evidência.

CSMCNR3.	**Contextos**	**Contextos relacionados com a atividade comercial**	**Promoções**	Não há evidência.
			Salários	Não há evidência.
			Comércio	Não há evidência.
		Contextos relacionados com a medida	**Medidas de comprimento, peso,**	Não há evidência.
			Medidas de área, volume	Não há evidência.
			Agrimensura	Não há evidência.
CSMCNR4.	**Tarefas de sala com frações**	**Identificação de quantidades**	**Encontrar a fração**	Não há evidência.
			Descobrir a parte	Não há evidência.
			Encontrar o todo	Não há evidência.
		Comparação de quantidades distintas		Não há evidência.
		Reconhecimento da equivalência de quantidades		Não há evidência.

Anexo 3 – Ficha de registo de dados da obra Arithmética prática e geometria elementar para o ensino das escolas normais (1903)

Caracterização do autor (CAn) – Francisco Adolpho Manso Preto

CA1.	**Local e data de nascimento/Local e data de óbito**	Não foi possível identificar.
CA2.	**Centro de formação onde frequentou os estudos**	Dissertação inaugural para o ato de conclusões magnas à Faculdade de Matemática da Universidade de Coimbra, sobre a vibração das cordas, para a obtenção do grau de doutor. Dissertação de concurso apresentada à Faculdade de Matemática da Universidade de Coimbra, em 1880.
CA3.	**Profissões e lugares onde exerceu a sua profissão (destaque para as funções relacionadas com a matemática).**	Docência no Liceu Central de Coimbra e na escola normal da mesma cidade.
CA4.	**Relações com pessoas significativas na área da educação e do ensino da matemática**	Cita como seus mestres os Doutores Rufino Guerra Osório, Jacome Luiz Sarmento, José Teixeira de Queiroz e Raymundo Venancio Rodrigues.
CA5.	**Obras publicadas**	Escripturação comercial, industrial e agrícola, para o ensino das Escolas Normais, Livraria Escolar Cruz (s.d.), Aritmética prática. Geometria elementar e Escrituração Comercial, 4.ª ed., Braga: Herdeiros do autor – Cruz & C.a. (1914), Elementos de geometria plana, 2.ª ed. (1893), Tratado de Aritmética, 2.ª ed. (1894), Aritmética prática, geometria elementar e escrituração comercial, 5.ª ed. (1915), Arithmética prática, geometria elementar e escrituração comercial, 5.ª ed., Braga: Cruz (1915), Arithmética prática, geometria elementar e escripturação comercial, 3.ª ed. Braga: Livraria Escolar da Cruz & Cia Ed. (1907), Aritmética prática e geometria elementar: para o ensino das escolas normaes (em conformidade com os programas de 4 de dezembro de 1902), Coimbra: Imprensa da Universidade (1903), Arithmetica pratica redigida em conformidade com o programa oficial de 14 de outubro de 1880, Coimbra: Imprensa da Universidade (1882), Arithmetica pratica redigida em conformidade com o programa oficial para uso dos alunos que frequentam o 1.º ano do curso geral dos lyceus e dos candidatos ao magisterio de instrucção primaria, Coimbra: Imprensa da Universidade (1881), Elementos de geometria plana redigidos em conformidade com os últimos programas oficiais para uso dos alunos do 1.º ano do curso geral dos lyceus, Coimbra: Imprensa da Universidade (1881).

CA6.	**Outra informação relevante**	Foi membro de uma comissão, composta por vinte e .um professores de liceus, dirigida por Jerónimo Northway do Vale, que analisou em 1904 o Projeto de reforma da Instrução Secundária, elaborado por Abel Andrade.
CA7.	**Referências bibliográficas**	Nada a referir.

Anexo 3 - Caracterização global da obra (CGOn)

Título	Arithmética prática e geometria elementar para o ensino das escolas normais	
CGO1.	**Edição, ano, cidade, editora**	1.ª edição, 1903, Coimbra, Imprensa da Universidade
CGO2.	**Ano da primeira edição e edições conhecidas**	1.ª edição em 1903, editada pelo menos até 1915 (5.ª edição)
CGO3.	**Extensão e estrutura**	A obra tem um total de 527 páginas. Obra dividida em três partes. As duas primeiras são constituídas por três livros e a última tem só um livro (tudo no mesmo volume). A obra apresenta o programa oficial dos cursos das escolas normais e indica onde cada conteúdo é trabalhado nos diferentes livros. Não tem bibliografia final.
CGO4.	**Objetivos gerais da obra**	A obra não apresenta objetivos gerais, a não ser a indicação de que serve para o ensino das escolas normais e está em conformidade com os programas de 1902.
CGO5.	**Autores em que se baseia e outras influências (global e matemática)**	Não há referências bibliográficas. A única citação é apresentada no frontispício da obra e cita Vallejo e a sua obra Tratado elementar de Matemáticas.
CGO6.	**Valorização global da obra (é citado em que obras das que são analisadas no trabalho)**	Não é citado nas outras obras analisadas neste trabalho.
CGO7.	**Questões globais sobre ensino, pedagogia, métodos, metodologia geral**	Não existem indicações gerais sobre o ensino, pedagogia, métodos ou metodologias.

Anexo 3 - Caracterização do Conteúdo Matemático Global (CCMGn)

CCMG1.	**Definição de matemática (aritmética)/Ensino da matemática (aritmética)**	define-a como a "ciência elementar dos números" (p. 7).
CCMG2.	**Noção de número e de quantidade/Ensino de …**	Medir uma grandeza é compará-la com outra conhecida, que se toma para unidade; Unidade é uma grandeza, tomada as mais das vezes arbitrariamente, que serve para medir as grandezas da mesma espécie; Número é o resultado da comparação da grandeza com a unidade; Quantidade é toda a grandeza avaliada em números; (p. 5, itálicos no original)
CCMG3.	**Operações elementares**	A adição é apresentada como "a operação que tem por fim formar um número que contenha tantas unidades, quantas são as contidas em muitos números dados. Distingue dois casos, quando as parcelas são números simples e quando as parcelas são números compostos, explicando depois a forma de fazer a adição nos dois casos. A subtração é introduzida no sentido de completar com um exemplo em que utiliza um contexto de alunos da escola normal "suponhamos que queremos saber quantos alunos frequentam a 2.ª classe duma escola normal, sabendo que na 2.ª e 3.ª classes, conjuntamente, há 96 e na 3.ª há 41 alunos" (Preto, 1903, p. 26). Apresenta uma segunda definição de subtração como "a operação, na qual, sendo dada a soma de duas parcelas e uma delas, se pede a outra." (Preto, 1903, p. 27). "multiplicação é a operação que tem por fim repetir um número tantas vezes quantas são as unidades de um outro número igualmente dado" (Preto, 1903, p. 39). "multiplicação é uma operação pela qual, sendo dados dois números, se determina um terceiro que se forma de um dos números dados, do mesmo modo que o outro número dado se forma da unidade" (p. 40). divisão, definida como "a operação que tem por fim decompor um número dado em tantas partes iguais, quantas são as unidades de um outro número dado." (Preto, 1903, p. 54, itálico no original). A divisão também é definida como a operação inversa da multiplicação "a operação pela qual, sendo dado o produto de dois fatores e um deles, se determina o outro." (Preto, 1903, p. 55) e ainda como "a operação pela qual se procura quantas vezes um número dado se contém noutro número também dado." (p. 55)
CCMG4.	**Ideias sobre geometria**	"a ciência que se ocupa da extensão e da forma dos corpos." (p. 322). São depois apresentadas as definições de volume, superfície, linhas e ponto, por esta ordem.

CCMG5.	**Princípios sobre o papel da resolução de problemas**	Trata dos problemas no contexto do cálculo de expressões numéricas, definindo-os da seguinte forma: Problema é uma questão que se pretende resolver e na qual, sendo conhecidos alguns números, se trata de achar, por meio das operações aritméticas executadas sobre eles, outros números correspondentes aos pedidos do problema. Os números conhecidos chamam-se dados do problema e os que se pretendem obter são as incógnitas. (p. 173, itálicos no original)
CCMG6.	**Noção de cálculo mental**	O cálculo mental é definido como "fazer as operações sem as escrever, é o que se indica pela expressão cálculo mental." (Preto, 1903, p. 78). Este autor apresenta diversas técnicas de cálculo mental para as diferentes operações aritméticas.
CCMG7.	**Material didático**	Não são referidos materiais didáticos.

Anexo 3 - Caracterização do Conteúdo Matemático sobre os Números Racionais (CCMNRn)

CCMNR1.	**Referências à utilização didática da evolução histórica dos racionais**		Não há evidência.
CCMNR2.	**Definição de número racional**	**1- Medida**	Quando a unidade não cabe um número inteiro de vezes no comprimento a medir, ao número chama-se fracionário, e o número que exprime o resto chama-se quebrado ou fração. Número inteiro é o que consta de unidades iguais; Número quebrado ou fração é o que consta de partes iguais da unidade; Número fracionário é o que consta de unidades iguais e partes também iguais da unidade. (p. 7, itálicos no original)
		2 - Quociente	Preto (1903) também estabelece a relação entre a definição de divisão e a fração, concluindo que “uma fração pode ser considerada como o quociente da divisão do numerador pelo denominador.” (p. 132)
		3 - Classes de equivalência	Não há evidência.
	Dízima	**1 - Finita**	No processo de conversão de fração ordinária em dízima, sempre chegamos no decurso das divisões a um resto 0.
		2 - Infinita periódica	No caso em que quociente tem um número ilimitado de algarismos decimais que, depois de um certo número de operações, se reproduzem constantemente e na mesma ordem. O autor designa por fração decimal periódica. O número decimal 3,459459459 …, em que o período 459 principia logo depois da vírgula é uma dízima periódica simples, se o período se inicia na segunda, terceira … casa de dízima diz-se que a dízima é periódica mista.
	Abordagem inicial ao número racional	**1 - Fração**	É primeiro trabalhada a representação do número racional como fração, sem nenhuma indicação explícita de que este conteúdo deveria ser trabalhado nessa sequência na escola com os alunos do ensino primário. São apresentadas regras para converter uma fração decimal numa dízima.
		2 - Decimal	A representação decimal só é apresentada depois de trabalhadas as frações decimais. São trabalhadas regras para a conversão de uma fração em dízima. Número decimal é o número que exprime de quantas unidades e partes decimais da unidade se compõe uma grandeza qualquer. (Preto, 1903, p. 156, itálicos no original)
	Densidade do conjunto dos números racionais		Não há evidência.

CCMNR3.	**Diferentes significados das frações em contexto**	**1- Quociente**	Não há evidência.
		2 - Parte-todo (contínuo ou discreto)	Quantas horas são os $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$ de $\frac{4}{5}$ de $\frac{5}{6}$ de 12 horas? Um hortelão quer levar para casa 12 peras; mas tem de atravessar duas portas e sabe que na primeira lhe tiraram a metade das peras que apanhou e na segunda a quarta parte do resto. Quantas peras deve apanhar?
		3 - Medida	
		4 - Operador	
		5 - Razão ("parte-parte" e grandezas diferentes)	Misturaram-se 250 litros de vinho de 120 réis o litro, 180 litros de 150 réis o litro e 200 litros de 160 réis o litro; a como se pode vender o decalitro da mistura.
CCMNR4.	**Tipos de unidade**	**1 - Unidade contínua**	Preto (1903) distingue duas espécies de grandezas, as contínuas e as descontínuas. grandezas contínuas, que exemplifica com a porção de azeite, considerando que “a porção de azeite varia de uma forma contínua e insensível, sem passar bruscamente de uma altura a outra. O mesmo acontece aos comprimentos, às áreas, aos volumes, etc.” (Preto, 1903, p. 4).
		2 - Unidade discreta	As grandezas descontínuas são aquelas que aumentam ou diminuem juntando-lhe objetos da mesma espécie, como os livros de uma biblioteca ou as árvores de um pomar.
CCMNR5.	**Reconhecer frações equivalentes**		“Uma fração não muda de valor quando se multiplicam ou quando se dividem ambos os seus termos pelo mesmo número. Assim teremos 2/3 = 4/6 = 6/9 = 8/12 … e 30/45 = 10/15 = 2/3 ” (pp. 136-137).
CCMNR6.	**Comparar e ordenar racionais**		Preto (1903), começa por comparar frações tomando a unidade como referência e apresentando a forma de identificar as frações que são maiores, iguais ou menores do que a unidade. Após o trabalho com a equivalência de frações, Preto (1903) trata da forma de comparar frações com o mesmo denominador, porque estas estão todas referidas ao que é designado por mesma unidade auxiliar, sendo suficiente comparar o numerador. A procura de frações equivalentes com o mesmo denominador é indicada como forma de comparar frações, pela facilidade em comparar estas frações.

CCMNR7.	**Operações com números racionais (com frações e com decimais)**	**1 - Operações com frações**		As operações e os seus procedimentos são apresentados com situações estritamente matemáticas, recorrendo à representação simbólica e à representação verbal, como no exemplo da adição de frações com denominadores diferentes: “reduzem-se primeiro ao mesmo denominador, e depois pratica-se a regra antecedente. Assim, para achar a soma das frações 2/3, 3/4 e 5/7 teremos, reduzindo-as ao mesmo denominador, $\frac{56}{84}+\frac{63}{84}+\frac{60}{84}=\frac{56+63+60}{84}=\frac{179}{84}=2\frac{11}{84}$. ” (Preto, 1903, p. 144).
		2 - Operações com decimais		As primeiras operações com decimais referem-se às regras da multiplicação e da divisão por 10, 100 1000.
CCMNR8.	**Decimais**	**Equívocos na utilização dos decimais**	**Mais algarismos, maior grandeza**	Não há evidência.
			Utilização do zero	“1.º Um número decimal não se altera, quando à direita do seu último algarismo se acrescenta qualquer número de zeros. Assim é 3,45 = 3,45000 ……” (p. 160).
			Mais algarismos, menor grandeza	Não há evidência.
			Valor de posição do sistema decimal	Também como consequência do sistema do valor de posição, se um determinado algarismo for deslocado para a esquerda passa a ter um valor dez vezes superior e se for deslocado para a direita passa a ter um valor dez vezes inferior, de onde Preto (1903)

Anexo 3 - Caracterização das Representações dos Números Racionais (CRNRn)

CRNR1.	**Verbais**			Escreve-se uma fração, colocando os dois números, *numerador* e *denominador*, separados por uma linha horizontal, o primeiro por cima da linha e o segundo por baixo. Assim, para representar a fração que provém de dividir a unidade em 8 partes iguais (*denominador*) e destas tomar 3 (*numerador*), escreveremos $\frac{3}{8}$.
CRNR2.	**Simbólicas**	**Numeral decimal**		Apresentado a partir da relação com as frações decimais, mas também estabelece relação com o sistema decimal.
		Numeral misto		A primeira referência surge como uma adição quando se pretende extrair o inteiro contido numa fração. Ex.: $\frac{46}{8} = 5 + \frac{6}{8}$. Aquando o autor refere a adição de frações e o resultado é maior do que a unidade o numeral misto já surge na sua forma habitual $\frac{5}{11} + \frac{3}{11} + \frac{8}{11} = \frac{16}{11} = 1\frac{5}{11}$. Só posteriormente o autor refere esta equivalência entre escrever $1\frac{5}{11}$ e $1 + \frac{5}{11}$.
		Fração		Assim, para representar a fração que provém de dividir a unidade em 8 partes iguais (*denominador*) e destas tomar 3 (*numerador*), escreveremos $\frac{3}{8}$.
		Percentagem		Surge no contexto das aplicações da aritmética, em contextos de vendas ou de juros. Para exprimir que 100 rende 5, 6 … escreve-se 5%, 6% que se lê 5 por cento, …
CRNR3.	**Pictóricas (ou icónicas)**	**Modelos de quantidade contínua**	**Modelos de área (ex. imagens de figuras planas, imagens de tiras de papel, imagens de peças de tangram)**	Não há evidência.
			Modelos de comprimento (reta numérica orientada, imagens de réguas, imagens de barras de Cuisenaire)	Não há evidência.
			Outros modelos de medida (imagens de copos medidores - volume, imagens de relógios - tempo, imagens de balanças - peso, imagens de pizas).	Não há evidência.
		Modelos de quantidade discreta	**Imagens de objetos**	Não há evidência.
			Imagens de símbolos	Não há evidência.
			Imagens de pessoas	Não há evidência.
CRNR4.	**Ativas**	**Objetos**		Não há referências a representações ativas.
		Cuisenaire		Não há referências a representações ativas.
		Tangram		Não há referências a representações ativas.

Anexo 3 - Caracterização das Situações Matemáticas e Contextos nos Números Racionais (CSMCNRn)

CSMCNR1.	**Situações**	**Dimensão 1 Complexidade**	**Exercícios**		Situação privilegiada na apresentação dos conteúdos. $\frac{5}{11}+\frac{3}{11}+\frac{8}{11}=\frac{16}{11}=1\,\frac{5}{11}$
			Cenários para investigação		Não há evidência.
		Dimensão 2 Contexto	**Situações matemáticas**		Situação privilegiada na apresentação dos conteúdos. $\frac{17}{12}+7=\frac{17+7\text{ x }12}{12}=\frac{17+84}{12}=\frac{101}{12}=8\,\frac{5}{12}$. 1. A soma de três números é igual ao quadrado de 432; o 1.º destes números é o dobro do 2.º que é igual a 37528; qual é o 3.º?
			Situações semirreais		Um hortelão quer levar para casa 12 peras; mas tem de atravessar duas portas e sabe que na primeira lhe tiraram a metade das peras que apanhou e na segunda a quarta parte do resto. Quantas peras deve apanhar?
			Situações reais		Não há evidência.
CSMCNR2.	**Problemas**	**Tipologia de problemas**	**Problemas de cálculo**	**Problemas que se resolvem com a utilização de uma das quatro operações aritméticas elementares**	Há evidência.
				Problemas que se resolvem com a utilização de duas ou mais operações aritméticas elementares	Um negociante comprou 350 metros de fazenda de duas qualidades, tanto de uma como de outra. A fazenda da 2.ª qualidade custou-lhe a 3$5000 réis o metro e 6 metros da de 1.ª qualidade valem tanto como 9 metros da de 2.ª. Quanto lhe custou a fazenda toda?
			Problemas de processo, que implicam o uso de uma ou mais estratégias de resolução		Há evidência.
			Problemas de aplicação que envolvem recolha de dados e tomada de decisões		Não há evidência.
			Problemas tipo puzle. Atividades recreativas ou lúdicas.		Não há evidência.
		Formulação de problemas			Não há evidência.

CSMCNR3.	**Contextos**	**Contextos relacionados com a atividade comercial**	**Promoções/Juros**	O capital 750$000 réis produziu 143$850 réis em 2 anos e 6 meses. Qual foi a taxa?
			Salários	Um rancho de 17 operários recebeu uma certa quantia por 15 dias de trabalho; se tivesse recebido mais 102$000 réis, teria ganho cada um 1$000 réis por dia. Quanto ganhou realmente cada operário?
			Comércio	Um negociante comprou 350 metros de fazenda de duas qualidades, tanto de uma como de outra. A fazenda da 2.ª qualidade custou-lhe a 3$5000 réis o metro e 6 metros da de 1.ª qualidade valem tanto como 9 metros da de 2.ª. Quanto lhe custou a fazenda toda?
		Contextos relacionados com a medida	**Medidas de comprimento, peso,**	Um negociante comprou 350 metros de fazenda de duas qualidades, tanto de uma como de outra. A fazenda da 2.ª qualidade custou-lhe a 3$5000 réis o metro e 6 metros da de 1.ª qualidade valem tanto como 9 metros da de 2.ª. Quanto lhe custou a fazenda toda?
			Medidas de área, volume	Há evidência.
			Agrimensura	Há evidência.
CSMCNR4.	**Tarefas de sala com frações**	**Identificação de quantidades**	**Encontrar a fração**	Não há evidência.
			Descobrir a parte	Não há evidência.
			Encontrar o todo	“A diferença entre os $\frac{3}{4}$ e os $\frac{2}{9}$ de uma herança é 1672$000; qual é o valor da herança?” (Preto, 1903, p. 156).
		Comparação de quantidades distintas		Não há evidência.
		Reconhecimento da equivalência de quantidades		Não há evidência.

Anexo 4 – Ficha de registo de dados da obra *Noções de Pedagogia Elementar* (1906)

Caracterização do autor (CAn) – José Augusto Coelho

CA1.	**Local e data de nascimento/Local e data de óbito**	Sendim (Tabuaço) - 02/01/1850 / Porto - 18/06/1925
CA2.	**Centro de formação onde frequentou os estudos**	Seminário de Lamego (conclusão do 2.º ano) Faculdade de teologia - Coimbra (frequência de 3 meses)
CA3.	**Profissões e lugares onde exerceu a sua profissão (destaque para as funções relacionadas com a matemática).**	Docente do Filosofia e História no ensino particular. Docente na Escola Normal do Porto, responsável pela cadeira de Ciências Físico Químicas e de Pedagogia. Docente na Escola Normal de Lisboa. Direção da Escola Normal de Lisboa para o sexo feminino.
CA4.	**Relações com pessoas significativas na área da educação e do ensino da matemática**	Nada a referir.
CA5.	**Obras publicadas**	- Princípios de Pedagogia, São Paulo, 4 vols. 1891-1893 - Elementos de Pedagogia para uso dos alunos das escolas normais primárias, Lisboa, 1894 - Manual prático de pedagogia para uso dos professores em geral e em especial dos professores do ensino médio e primário, Porto, 1894. - Organização Geral do Ensino Aplicável ao estado atual da - Nação Portuguesa, Porto, 1896. - O Ensino inicial da leitura, Lisboa, 1898. - Manual prático de pedagogia, Porto, 1901. - Noções de Pedagogia Elementar, Lisboa, 1903. - A Reforma do Ensino Primário, Porto, 1909.
CA6.	**Outra informação relevante**	Vogal no Conselho Superior de Instrução Pública. Intervenção relevante na imprensa. Autor ligado ao início da pedagogia científica em Portugal.
CA7.	**Referências bibliográficas**	- Correia (2003) - Fonseca (1925) - Júnior, F. (s.d.) - Gomes, J. (1977) - Fernandes, M. (1995). - Boto (2010).

Anexo 4 - Caracterização global da obra (CGOn)

Título	Noções de Pedagogia Elementar	
CGO1.	**Edição, ano, cidade, editora**	2.ª edição, 1906, Lisboa, Livraria Moderna Editora
CGO2.	**Ano da primeira edição e edições conhecidas**	1.ª edição 1903. São conhecidas pelo menos duas edições.
CGO3.	**Extensão e estrutura**	A obra tem um total de 335 páginas e está dividida em três partes. Cada parte está dividida em diferentes secções e capítulos. Não tem bibliografia final.
CGO4.	**Objetivos gerais da obra**	A obra serve de apoio à disciplina de Pedagogia e, em especial, metodologia do ensino primário; legislação da escola primária portuguesa, dos cursos das escolas normais e de habilitação para o magistério primário.
CGO5.	**Autores em que se baseia e outras influências (global e matemática)**	Herbert Spencer, Froebel.
CGO6.	**Valorização global da obra (é citado em que obras das que são analisadas no trabalho)**	Apesar da obra não ser citada em quaisquer das obras analisadas neste trabalho é de referir que se trata de uma obra e de um autor particularmente lido e divulgado no ensino normal, na área da pedagogia e da metodologia.
CGO7.	**Questões globais sobre ensino, pedagogia, métodos, metodologia geral**	Pedagogia é composta por processos de análise e de síntese. A metodologia é a parte da pedagogia que trata dos métodos e está dividida em metodologia geral e metodologia especial. Os métodos são "a ordem em que deverão ser dispostos os elementos do objeto de ensino, quer objetivos, quer subjetivos". Distingue modos de ensino (individual e simultâneo)

Anexo 4 - Caracterização do Conteúdo Matemático Global (CCMGn)

CCMG1.	**Definição de matemática (aritmética)/Ensino da matemática (aritmética)**	No ensino da aritmética, Coelho (1906) destaca a necessidade de se ensinar com processos ligados à realidade, para só depois abordar processos conceptuais.
CCMG2.	**Noção de número e de quantidade/Ensino de …**	a "geração dos números vai-se sempre efetuando por adição sucessiva de unidades" (Coelho, 1906, p. 96, itálico no original).
CCMG3.	**Operações elementares**	Coelho (1906) apresenta as operações após o trabalho com as contagens e construção do sistema numérico, recorrendo a materiais. Todo o trabalho com as operações é feito primeiro com recurso a materiais, depois com a representação pictórica e só depois recorrendo aos algarismos. A multiplicação é apresentada por Coelho (1906) como uma soma abreviada de parcelas iguais. Relativamente à adição, devia-se ir tomando sucessivamente objetos e agrupando-os sobre a mesa, formando diversos números.
CCMG4.	**Ideias sobre geometria**	É tratada primeiro a metodologia dos conteúdos de geometria porque se podem concretizar, estabelecendo-se depois uma ligação com as relações numéricas. o objeto da geometria como sendo "as formas da extensão em si e nas suas relações" (p. 84). Na escola primária o objeto de estudo deveria ser limitado "1.º - As formas da extensão em si e mais gerais; 2.º - As relações mais elementares entre essas formas predominando, pela sua aplicação prática, as de equivalência." (p. 84). O processo indicado por Coelho (1906) para o ensino da geometria nas escolas primárias e infantis é o do empírico e real.
CCMG5.	**Princípios sobre o papel da resolução de problemas**	O autor apresenta um quadro sinótico com um esquema do que deve ser o cálculo numérico no ensino primário onde propõe a utilização de "exercícios e aplicações de uso comum" e "exercícios sobre problemas de aritmética concreta", mas não explicita e nem apresenta exemplos.
CCMG6.	**Noção de cálculo mental**	Não há evidência.
CCMG7.	**Material didático**	Livros de texto como material de ensino. Coleção geral de formas geométricas elementares, coleção de objetos para concretizar as relações numéricas, lousas quadriculadas e papel quadriculado, material froebeliano ou outros objetos adaptados e um jogo para explorar e construir o sistema de numeração decimal.

Anexo 4 - Caracterização do Conteúdo Matemático sobre os Números Racionais (CCMNRn)

CCMNR1.	**Referências à utilização didática da evolução histórica dos racionais**		Não há evidência
CCMNR2.	**Definição de número racional**	**1- Medida**	Não há evidência.
		2 - Quociente	Não há evidência.
		3 - Classes de equivalência	Não há evidência.
	Dízima	**1 - Finita**	Apresenta a dízima referindo-se como decimal, estabelecendo uma relação com o estudo do sistema decimal. É feito a apresentação da fração.
		2 - Infinita periódica	Não há evidência.
	Abordagem inicial ao número racional	**1 - Fração**	Refere primeiro a fração na abordagem ao número racional, mas não discute se essa sequência deve ser utilizada no trabalho com os alunos no ensino primário.
		2 - Decimal	Refere a representação decimal depois do trabalho com a fração, estabelecendo a relação com o sistema de numeração decimal através de um jogo.
	Densidade do conjunto dos números racionais		Não há evidência.

CCMNR3.	**Diferentes significados das frações em contexto**	**1- Quociente**	Não há evidência.
		2 - Parte-todo (contínuo ou discreto)	A fração é tratada como a parte de um todo contínuo: suponha-se que se pretende, por exemplo, pôr diante dos olhos do aluno o que seja a relação numérica um quinto ou seja a fração expressa pelo seguinte símbolo: 1/5; para o conseguir, bastará mostrar ao aluno, por exemplo, uma laranja dividida em cinco partes iguais: tomando uma dessas partes, ter-se-á 1/5 da unidade total.” (Coelho, 1906, p. 99, itálico no original)
		3 - Medida	Não há evidência.
		4 - Operador	Não há evidência.
		5 - Razão ("parte-parte" e grandezas diferentes)	Não há evidência.
CCMNR4.	**Tipos de unidade**	**1 - Unidade contínua**	Nos exemplos apresentados no contexto dos números racionais, os primeiros exercícios referem-se a unidades contínuas, em situações em que a fração é vista como a parte de um todo, como por exemplo o encontrar 1/5 de uma laranja.
		2 - Unidade discreta	No caso dos decimais, Coelho (1892) também se refere a unidades compostas, quando trabalha a relação entre as diferentes unidades na representação decimal, como por exemplo as dezenas, centenas, milhares.
CCMNR5.	**Reconhecer frações equivalentes**		Se a fração é $\frac{4}{12}$, por exemplo , bastará tomar um objeto dividido em 12 partes iguais, e, por meio dele, evidenciar as modificações em questão. Assim, mostrar-se-á que, sendo o numerador multiplicado, por exemplo, por 3, a fração ficará três vezes maior, pois que se tomarão 3 vezes mais partes do objeto dividido sempre em 12 partes iguais; que sendo o denominador dividido por 2, ficará a fração duas vezes menor, porque as partes do objeto, ficando a ser apenas em número de 6, serão duplamente maiores do que as anteriores; e assim sucessivamente.
CCMNR6.	**Comparar e ordenar racionais**		A primeira referência à comparação e ordenação de números racionais é discutida com a comparação de frações, utilizando a unidade como referência. Coelho (1892) indica como identificar se a fração é maior, menor ou igual à unidade, comparando o numerador com o denominador. Coelho (1892) volta a trabalhar a comparação de frações, quando aborda a equivalência de frações.

CCMNR7.	**Operações com números racionais (com frações e com decimais)**	**1 - Operações com frações**		Coelho (1892) é possível verificar que este autor começa por abordar as operações com frações. Primeiro apresenta exemplos estritamente matemáticos para a adição e subtração de frações com o mesmo denominador, explicitando a regra verbalmente. Para as operações com denominadores diferentes o procedimento só é trabalhado após ser abordada a equivalência de frações.
		2 - Operações com decimais		Coelho (1892) apenas refere que as operações com estes números são de uma forma geral extremamente simples e de fácil apresentação aos alunos, não tratando, por isso, de quaisquer casos em particular.
CCMNR8.	**Decimais**	**Equívocos na utilização dos decimais**	**Mais algarismos, maior grandeza**	Não há evidência.
			Utilização do zero	Não há evidência.
			Mais algarismos, menor grandeza	Não há evidência.
			Valor de posição do sistema decimal	No que diz respeito à representação decimal dos números racionais, Coelho (1892) relaciona com o estudo do sistema decimal, utilizando um jogo

Anexo 4 - Caracterização das Representações dos Números Racionais (CRNRn)

CRNR1.	**Verbais**			Representação privilegiada, na relação com a representação em forma de fração. “Assim, suponha-se que se pretende, por exemplo, por diante dos olhos do aluno o que seja a relação numérica *um quinto* ou seja a fração expressa pelo seguinte símbolo: $\frac{1}{5}$” Também é referida a representação decimal
CRNR2.	**Simbólicas**	**Numeral decimal**		Os decimais começam por ser apresentados através de um jogo que recria o sistema decimal. A representação simbólica não é utilizada na obra.
		Numeral misto		Não há evidência.
		Fração		Um quinto ou seja a fração expressa pelo seguinte símbolo: $\frac{1}{5}$
		Percentagem		Não há evidência.
CRNR3.	**Pictóricas (ou icónicas)**	**Modelos de quantidade contínua**	**Modelos de área (ex. imagens de figuras planas, imagens de tiras de papel, imagens de peças de tangram)**	Não há evidência.
			Modelos de comprimento (reta numérica orientada, imagens de réguas, imagens de barras de Cuisenaire)	Não há evidência.
			Outros modelos de medida (imagens de copos medidores - volume, imagens de relógios - tempo, imagens de balanças - peso, imagens de pizas).	Não há evidência.
		Modelos de quantidade discreta	**Imagens de objetos**	Não há evidência.
			Imagens de símbolos	Não há evidência.
			Imagens de pessoas	Não há evidência.
CRNR4.	**Ativas**	**Objetos**		Há evidência, no trabalho com os decimais, através da utilização de um jogo, ou na fração com a utilização de laranja.
		Cuisenaire		Não há evidência.
		Tangram		Não há evidência.

Anexo 4 - Caracterização das Situações Matemáticas e Contextos nos Números Racionais (CSMCNRn)

CSMCNR1.	**Situações**	**Dimensão 1 Complexidade**	**Exercícios**		Situação privilegiada na apresentação dos conteúdos. “Desde que para o aluno é bem clara a noção de fração, será fácil levá-lo a somar ou subtrair frações quando tenham o mesmo denominador $\frac{6}{5}-\frac{2}{5}=\frac{4}{5}$
			Cenários para investigação		Não há evidência.
		Dimensão 2 Contexto	**Situações matemáticas**		Situação privilegiada na apresentação dos conteúdos. $\frac{6}{5}-\frac{2}{5}=\frac{4}{5}$
			Situações semirreais		É possível observar a referência a objetos quando são apresentadas algumas noções: “Se a fração é imprópria, se é, por exemplo, $\frac{6}{5}$ dois objetos, cada um deles divididos em 5 partes iguais, bastarão para por meio deles se realizar a apresentação.
			Situações reais		Não há evidência.
CSMCNR2.	**Problemas**	**Tipologia de problemas**	**Problemas de cálculo**	**Problemas que se resolvem com a utilização de uma das quatro operações aritméticas elementares**	Não há evidência.
				Problemas que se resolvem com a utilização de duas ou mais operações aritméticas elementares	Não há evidência.
			Problemas de processo, que implicam o uso de uma ou mais estratégias de resolução		Não há evidência.

			Problemas de aplicação que envolvem recolha de dados e tomada de decisões		Não há evidência.
			Problemas tipo puzle. Atividades recreativas ou lúdicas.		Não há evidência.
		Formulação de problemas			Não há evidência.

CSMCNR3.	**Contextos**	**Contextos relacionados com a atividade comercial**	**Promoções**		Não há evidência.
			Salários		Não há evidência.
			Comércio		Não há evidência.
		Contextos relacionados com a medida	**Medidas de comprimento, peso,**		Não há evidência.
			Medidas de área, volume		Não há evidência.
			Agrimensura		Não há evidência.
					Não há evidência.
					Não há evidência.
CSMCNR4.	**Tarefas de sala com frações**	**Identificação de quantidades**	**Encontrar a fração**		Não há evidência.
			Descobrir a parte		Não há evidência.
			Encontrar o todo		Não há evidência.
		Comparação de quantidades distintas			Não há evidência.
		Reconhecimento da equivalência de quantidades			Não há evidência.

Anexo 5 – Ficha de registo de dados da obra Súmula Didática - I Parte - Língua Maternal e Aritmética (1934)

Caracterização do autor (CAn) – Alberto Pimentel Filho

CA1.	**Local e data de nascimento/Local e data de óbito**	Lisboa - 21/11/1875 Lisboa - 15/07/1950
CA2.	**Centro de formação onde frequentou os estudos**	Escola Politécnica Escola Médico-Cirúrgica de Lisboa
CA3.	**Profissões e lugares onde exerceu a sua profissão (destaque para as funções relacionadas com a matemática).**	Professor na Escola Normal de Lisboa, onde exerceu a função de docente nas cadeiras de: Pedagogia de 2.ª classe; Ciências Físico-Químicas e Naturais ; Pedagogia Geral; História da Educação para as 2.ª e 3.ª classes.
CA4.	**Relações com pessoas significativas na área da educação e do ensino da matemática**	Nada a referir
CA5.	**Obras publicadas**	- História de um ideal, romance. - A morte do Cristo, monografia médica. - Nosografia de Camilo Castelo Branco, 2.ª edição. - Psicofisiologia, 2.ª edição. - Pedologia, 2 volumes. - Lições de Pedagogia Geral e de História da Educação, 2.ª edição. - Necessidade da Psicopedologia, separata da "Revista Escolar".
CA6.	**Outra informação relevante**	Filho do escritor Alberto Augusto de Almeida Pimentel. Médico diplomado na Escola Médico-Cirúrgica.
CA7.	**Referências bibliográficas**	- Amor (1934) - Nóvoa (2003b). - Pintassilgo (2006) - Pintassilgo e Pedro (2012b).

Anexo 5 - Caracterização global da obra (CGOn)

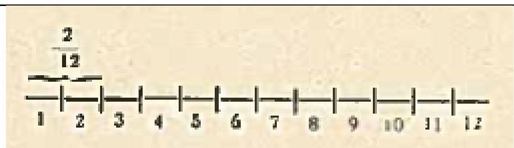
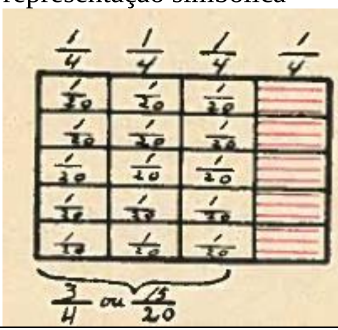
Título	**Súmula Didática - I Parte - Língua Maternal e Aritmética**	
CGO1.	**Edição, ano, cidade, editora**	1.ª edição, 1934 (1933), Lisboa, Livraria Editora Guimarães & Companhia.
CGO2.	**Ano da primeira edição e edições conhecidas**	1934 (1933). Não foram identificadas outras edições.
CGO3.	**Extensão e estrutura**	351 páginas; I parte - Metodologia geral (pp. 9 - 30); II parte - Metodologia especial (pp. 31 - 342): - Livro I - Didática da língua maternal (pp. 31 - 87) - Livro II - Didáctica da Aritmética (pp. 88 - 342) Não apresenta bibliografia final.
CGO4.	**Objetivos gerais da obra**	O volume é publicado devido à aceitação que os trabalhos do autor tiveram em Portugal e no Brasil. Foi escrito para o professorado primário. Papel de orientador da didáctica do ensino primário. Carácter prático.
CGO5.	**Autores em que se baseia e outras influências (global)**	Rousseau; Laurent; Grosgurin; Lay; Decroly e M.lle Degand; Laisant; Bourlet; Rousseau; Compayré; Cousinet; Dewey Grosgurin - Enseignement de l'Arithmétique. Méthodologie. Géneve, 1922, p.86. Laisant - Initiation Mathématique, 14 éme Édition, Paris, 1915, p. 63. Bourlet - Mathématiques, in Noveau Dictionaire de Pédagogie et d'Instruction Primaire, de Buisson, 1911; Cours Abrégé d'Arithemétique, Premier Cycle, 6iéme édition, 1906.
CGO6.	**Valorização global da obra (é citado em que obras das que são analisadas no trabalho)**	Pinheiro (1961)
CGO7.	**Questões globais sobre ensino, pedagogia, métodos, metodologia geral**	Métodos são um conjunto de processos raciocinados, regras e meios que seguimos para transmitir conhecimentos. Metodologia estuada os métodos e também pode ser designada por didática. Metodologia geral e metodologia especial para conhecimentos específicos. Distingue métodos, modos (individual, simultâneo e mútuo) e processos de ensino. Distingue método indutivo e método dedutivo, indicando o método indutivo como o mais adequado para o ensino da geometria e da aritmética. I. método indutivo sob a forma expositiva; II. método indutivo sob a forma interrogativa; III. método dedutivo sob a forma expositiva; IV. método dedutivo sob a forma interrogativa" (p. 16). O último é aconselhado para os alunos mais novos.

Anexo 5 - Caracterização do Conteúdo Matemático Global (CCMGn)

CCMG1.	**Definição de matemática (aritmética)/Ensino da matemática (aritmética)**	O ensino da Aritmética constituía o principal objetivo do ensino primário geral, depois do ensino da língua materna. Destaca a Aritmética pela racionalidade dos seus conhecimentos e pelas aplicações práticas. A Aritmética é uma ciência onde o método indutivo deveria ter uma aplicação constante
CCMG2.	**Noção de número e de quantidade/Ensino de …**	A noção de quantidade, grandeza ou coleção deveria ser apresentada aos alunos através de diversas coleções de objetos A noção de grandeza contínua será dada ao iniciar-se o estudo das frações, porque só então a poderemos fazer induzir de casos concretos.
CCMG3.	**Operações elementares**	Todas as operações deveriam ser apresentadas através de casos concretos. A multiplicação deveria ser apresentada como uma forma abreviada de representar uma adição de parcelas iguais e a divisão como uma série de subtrações sucessivas. Na divisão, Pimentel Filho (1934) distingue dois casos, a divisão como partilha e a divisão como conteúdo.
CCMG4.	**Ideias sobre geometria**	Utilização do método indutivo para o ensino da geometria
CCMG5.	**Princípios sobre o papel da resolução de problemas**	Para este autor, os problemas propostos na escola primária deveriam ter um caráter prático. Mas este caráter prático não está só relacionado com a adaptação dos problemas a questões da vida quotidiana, refere-se também à atividade mental para os resolver.
CCMG6.	**Noção de cálculo mental**	Deve estar presente em todos os níveis de escolaridade. Deve ser condicionado pela idade dos alunos e pelo nível de escolaridade. Os pontos de apoio do cálculo mental são individuais.
CCMG7.	**Material didático**	No seu trabalho, Pimentel Filho (1934) refere materiais didáticos idênticos ao material multibásico. Diversas coleções de objetos.

Anexo 5 - Caracterização do Conteúdo Matemático sobre os Números Racionais (CCMNRn)

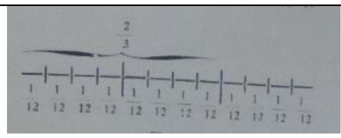
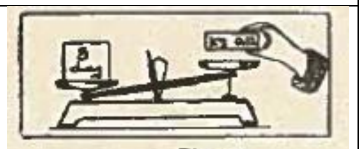
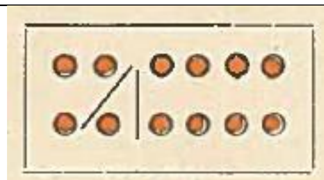
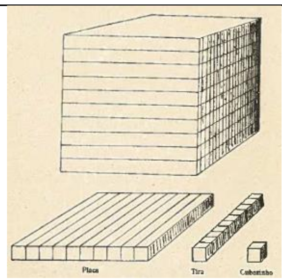
<table>
<tr><td>CCMNR1.</td><td colspan="2">Referências à utilização didática da evolução histórica dos racionais e a sua utilização didática</td><td>Não há evidência.</td></tr>
<tr><td rowspan="8">CCMNR2.</td><td rowspan="3">Definição de número racional</td><td>1- Medida</td><td>Não há evidência.</td></tr>
<tr><td>2 - Quociente</td><td>Implícito na apresentação da divisão de frações (p. 177).</td></tr>
<tr><td>3 - Classes de equivalência</td><td>Não há evidência.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Dízima</td><td>1 - Finita</td><td>Designada por dízima exata ou limitada</td></tr>
<tr><td>2 - Infinita periódica</td><td>Apresenta a dízima infinita periódica pela conversão de frações</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Abordagem inicial ao número racional</td><td>1 - Fração</td><td>Apresenta primeiro a fração, mas não explicita se isso também deve ser feito com os alunos do ensino primário. Indica que após o trabalho com as frações ordinárias será mais fácil aos alunos perceberem as frações decimais.</td></tr>
<tr><td>2 - Decimal</td><td>Os decimais são apresentados a partir da relação com as frações decimais. Depois é estabelecida a relação com o sistema decimal de numeração.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Densidade do conjunto dos números racionais</td><td>Não há evidência.</td></tr>
</table>

CCMNR3.	**Diferentes significados das frações em contexto**	**1- Quociente**	Um exemplo apresenta a fração como quociente, mas não explicitando diferença para outros significados da fração em contexto "6.º ¿Se eu quiser dividir um queijo por 8 pessoas, que porção de queijo darei a cada uma? E se o dividir por seis pessoas? E por 5?"
		2 - Parte-todo (contínuo ou discreto)	Pimentel Filho (1934) privilegia a introdução da fração como uma relação entre a parte e um todo de uma unidade contínua.
		3 - Medida	
		4 - Operador	Introduz a fração como operador num exemplo, mas sem explicitar anteriormente "2.º João tem 12 soldados de chumbo. ¿ Se der metade, com quantos ficará?"
		5 - Razão ("parte-parte" e grandezas diferentes)	Não há evidência.
CCMNR4.	**Tipos de unidade**	**1 - Unidade contínua**	Grandeza contínua precede o estudo das frações. aquelas que "podem ser divididas em partes iguais, e distribuídas, sem que cada parte resultante da divisão deixe de ter as mesmas propriedades que tinha a grandeza primitiva de que as destacamos" (p. __)
		2 - Unidade discreta	grandezas descontínuas são definidas como não podendo ser fracionadas sem perderem a sua identidade, ou seja, numa coleção de grandezas descontínuas, que podem ser semelhantes ou não, se partirmos uma dessas grandezas, ela deixa de poder figurar na coleção, que por sua vez fica incompleta
CCMNR5.	**Reconhecer frações equivalentes**		Através da representação pictórica associada à representação simbólica 
CCMNR6.	**Comparar e ordenar racionais**		Recomenda a utilização da concretização e de modelos pictóricos.

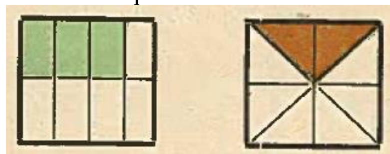
CCMNR7.	**Operações com números racionais (com frações e com decimais)**	**1 - Operações com frações**		As operações são apresentadas com contextos semirreais. 2.º De dois copos iguais, um, está cheio até um terço, o outro até aos três quartos. ¿ Que sucederá se eu despejar o primeiro no segundo?
		2 - Operações com decimais		As operações são apresentadas com contextos semirreais. “¿Duas tiras de papel, uma de m 2,45 e outra de m 0,25, que comprimento fazem?”
CCMNR8.	**Decimais**	**Equívocos na utilização dos decimais**	**Mais algarismos, maior grandeza**	
			Utilização do zero	É identificado que a colocação do zero à direita da última ordem não altera o valor.
			Mais algarismos, menor grandeza	
			Valor de posição do sistema decimal	É utilizado para identificar as ordens e o seu valor no sistema decimal.

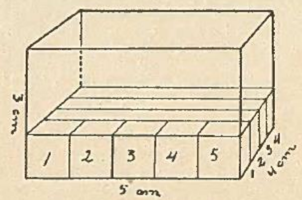
Anexo 5 - Caracterização das Representações dos Números Racionais (CRNRn)

CRNR1.	**Verbais**		Recorre à relação entre a representação verbal, simbólica e pictórica. “Dois oitavos, mais dois oitavos, mais dois oitavos, são seis oitavos. Podemos pois escrever $\frac{2}{8}+\frac{2}{8}+\frac{2}{8}=\frac{6}{8}$,”
CRNR2.	**Simbólicas**	**Numeral decimal**	Começa por ser apresentado em relação com as frações decimais e depois é estabelecida a relação com o sistema decimal.
		Numeral misto	É referido como número fracionário.
		Fração	Em relação com a representação ativa, pictórica e verbal. Podemos, pois, escrever $\frac{2}{8}+\frac{2}{8}+\frac{2}{8}=\frac{6}{8}$,”
		Percentagem	Não há evidência.

<table>
<tr><td rowspan="6">CRNR3.</td><td rowspan="6">Pictóricas (ou icónicas)</td><td rowspan="3">Modelos de quantidade contínua</td><td>Modelos de área (ex. imagens de figuras planas, imagens de tiras de papel, imagens de peças de tangram)</td><td>
$4\,X\,\frac{2}{25}=\frac{4\,X\,2}{25}=\frac{8}{25}$ (Pimentel Filho, 1934, p. 173)</td></tr>
<tr><td>Modelos de comprimento (reta numérica orientada, imagens de réguas, imagens de barras de Cuisenaire)</td><td></td></tr>
<tr><td>Outros modelos de medida (imagens de copos medidores - volume, imagens de relógios - tempo, imagens de balanças - peso, imagens de pizas).</td><td>
Fig 71</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Modelos de quantidade discreta</td><td>Imagens de objetos</td><td>
Fig. 26</td></tr>
<tr><td>Imagens de símbolos</td><td></td></tr>
<tr><td>Imagens de pessoas</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">CRNR4.</td><td rowspan="3">Ativas</td><td colspan="2">Objetos</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Cuisenaire</td><td>Não há evidência.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tangram</td><td>Não há evidência.</td></tr>
</table>

Anexo 5 - Caracterização das Situações Matemáticas e Contextos nos Números Racionais (CSMCNRn)

CSMCNR1.	**Situações**	**Dimensão 1 Complexidade**	**Exercícios**		Utilizados para a primeira apresentação das noções, referindo a utilização da concretização e recorrendo à representação pictórica.
			Cenários para investigação		Não há evidência.
		Dimensão 2 Contexto	**Situações matemáticas**		Calcular a diferença das duas partes coloridas: Unidade: o quadrado  $\frac{3}{8}$ - $\frac{2}{8} = \frac{1}{8}$
			Situações semirreais		6.º Um barrote tem de comprimento m $4\frac{1}{4}$. Corta-se-lhe um pedaço de m $1\frac{1}{8}$. ¿ Quantos metros ficaram? $4\frac{1}{4} - 1\frac{1}{8} = 3\frac{1}{8}$, dizendo $4 - 1 = 3$; $\frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{2}{8} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$
			Situações reais		Não há evidência.
CSMCNR2.	**Problemas**	**Tipologia de problemas**	**Problemas de cálculo**	**Problemas que se resolvem com a utilização de uma das quatro operações aritméticas elementares**	
				Problemas que se resolvem com a utilização de duas ou mais operações aritméticas elementares	12.º Vendendo certa mercadoria por 280 escudos, tiramos um lucro igual aos $\frac{2}{5}$ do preço da compra. ¿ Qual foi o preço da compra?
			Problemas de processo, que implicam o uso de uma ou mais estratégias de resolução		
			Problemas de aplicação que envolvem recolha de dados e tomada de decisões		Não há evidência.
			Problemas tipo puzle. Atividades recreativas ou lúdicas.		Não há evidência.
		Formulação de problemas			Não há evidência.

CSMCNR3.	**Contextos**	**Contextos relacionados com a atividade comercial**	**Promoções**	
			Salários	
			Comércio	Vendendo certa mercadoria por 280 escudos, tiramos um lucro igual aos $\frac{2}{5}$ do preço da compra. Qual foi o preço da compra?
		Contextos relacionados com a medida	**Medidas de comprimento**	Uma locomotiva percorre 8hm 9 dam e 4m por minuto. Qual é a sua velocidade em metros por segundo? Quantos km terá percorrido em 6h,5?
			Medidas de área, volume, peso, capacidade	*¿ Quantos centímetros cúbicos tem êste paralelepípedo ?* (Figura 63).  Fig. 63 (Grosgurin)
			Agrimensura	Uma propriedade compõe-se de um campo de 9ha e 7a; de um prado de 506a,25 e um bosque de 14ha,7 e de um jardim de 69a e 6ca. Qual é a superfície desta propriedade?
CSMCNR4.	**Tarefas de sala com frações**	**Identificação de quantidades**	**Encontrar a fração**	
			Descobrir a parte	
			Encontrar o todo	2.º «*Um mastro está cravado no solo um metro. A parte fora da terra está pintada de azul, de branco e de vermelho, de maneira que cada côr tem o mesmo comprimento. O comprimento pintado de azul excede em* $\frac{5}{6}$ *de metro a metade da porção do mastro enterrada no solo. Pregunta-se o comprimento total do mastro.*» (Bourlet).
		Comparação de quantidades distintas		

		Reconhecimento da equivalência de quantidades	

Anexo 6 – Ficha de registo de dados da obra *Notas de Didáctica Especial* (1944)

Caracterização do autor (CAn) – José Maria Gaspar

CA1.	**Local e data de nascimento/Local e data de óbito**	Ega, Condeixa-a-Nova - 29/10/1910 Ega, Condeixa-a-Nova - 30/09/1987
CA2.	**Centro de formação onde frequentou os estudos**	Seminário de Coimbra - Estudos preparatórios de Filosofia e Teologia Escola do Magistério Primário de Coimbra Faculdade de Letras - Curso de Ciências Pedagógicas
CA3.	**Profissões e lugares onde exerceu a sua profissão (destaque para as funções relacionadas com a matemática).**	- Escolas do ensino primário, em Coimbra. - Diretor escolar adjunto, em Viana do Castelo. - Escola do Magistério Primário de Coimbra.
CA4.	**Relações com pessoas significativas na área da educação e do ensino da matemática**	Nada a referir.
CA5.	**Obras publicadas**	- Deus, Pátria, Família: ensaio pedagógico, Porto, 1942. - Notas de Didáctica Especial, José Maria Gaspar Orbelino Geral Ferreira, 1944. - Legislação e Administração Escolares, José Maria Gaspar e Orbelino Geraldes Ferreira, de 1945. - O cinema e a escola, de 1948, - Educação do adulto iletrado: orientação psico-pedagógica e didáctica, escrito em 1953, em colaboração com Francisco de Sousa Loureiro. - O problema missionário e a educação, Coimbra, 1964.
CA6.	**Outra informação relevante**	Nada a referir.
CA7.	**Referências bibliográficas**	- Pinheiro (1996, 1999) - Castelo (2003)

Anexo 6 - Caracterização do autor (CAn) – Orbelino Geraldes Ferreira

CA1.	**Local e data de nascimento/Local e data de óbito**	Vila Nova de Foz Côa - 18/07/1914 Lisboa - 13/01/1965
CA2.	**Centro de formação onde frequentou os estudos**	Escola Normal Primária de Coimbra
CA3.	**Profissões e lugares onde exerceu a sua profissão (destaque para as funções relacionadas com a matemática).**	Professor oficial em Oliveira do Hospital e em Vila Nova de Tazem. Em 1943 foi nomeado professor de Didáctica Especial e de Legislação e Administração Escolares na Escola do Magistério Primário de Lisboa.
CA4.	**Relações com pessoas significativas na área da educação e do ensino da matemática**	Nada a referir.
CA5.	**Obras publicadas**	- Notas de Didáctica Especial, José Maria Gaspar Orbelino Geral Ferreira, 1944. - Legislação e Administração Escolares, José Maria Gaspar e Orbelino Geraldes Ferreira, de 1945. - Tradição Pedagógica Portuguesa, Lisboa, de 1952. - Brasil pedagógico, Lisboa, de 1953. - Didática prática, Lisboa, s/d. - Badaladas, Lisboa, de 1957. - Braseiro da morte, de 1963.
CA6.	**Outra informação relevante**	- Colaborador regular na imprensa pedagógica. - Coordenador da página "Magistério Primário" na revista O Educador.
CA7.	**Referências bibliográficas**	- O Educador, n.º 987, 25/09/1952 - Nóvoa (2003b). - Pintassilgo (2016).

Anexo 6 - Caracterização global da obra (CGOn)

Título	**Notas de Didáctica Especial**	
CGO1.	**Edição, ano, cidade, editora**	1.ª edição, 1944, Lisboa, B.U. Amaral
CGO2.	**Ano da primeira edição e edições conhecidas**	1944 2 edições (1944 e 1946)
CGO3.	**Extensão e estrutura**	Total de 484 páginas. Dividido em 10 capítulos e secções. 1. Programa; 2. Didática Especial; 3. Didática da Aritmética; 4. Didática da Leitura;5. Didática da Escrita; 6. Didática da Ortografia; 7. Didática da Geografia; 8. Didática da História Pátria; 9. Didática do Desenho; 10. Didática dos trabalhos manuais. Não apresenta bibliografia final.
CGO4.	**Objetivos gerais da obra**	Organização de uma obra que ajudasse na interpretação dos programas e nas dificuldades iniciais da vida escolar. Os autores (1944) salientam que a reabertura das escolas do magistério primário teria imposto a necessidade do aparecimento de um livro mais organizado e completo, mas as necessidades já indicadas anteriormente teriam levada à edição mais apressada da obra aqui em análise.
CGO5.	**Autores em que se baseia e outras influências (global)**	Claude Benard Montessori, Decroly, Cousinet e McKhinder.
CGO6.	**Valorização global da obra (é citado em que obras das que são analisadas no trabalho)**	A obra é referida na bibliografia de Pinheiro (1961).
CGO7.	**Questões globais sobre ensino, pedagogia, métodos, metodologia geral**	Didática é uma das ciências da educação. Conjunto das ciências da educação é designado por pedagogia. A didática especial é a didática de cada disciplina. A didática especial relaciona-se com a psicofisiologia, pedologia e com a metodologia. A didática apresenta aspetos de ciência que é aceite e um caráter de arte que depende da execução pessoal.

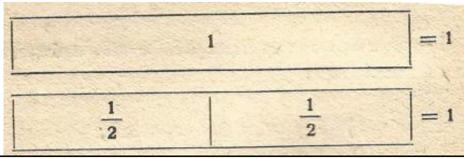
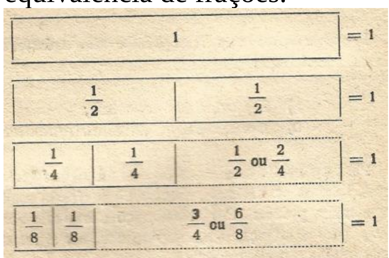
Anexo 6 - Caracterização do Conteúdo Matemático Global (CCMGn)

CCMG1.	**Definição de matemática (aritmética)/Ensino da matemática (aritmética)**	Gaspar e Ferreira (1944) começam por definir a importância da aritmética na vida individual e social, salientando que esta tem uma aplicação constante, mais do que a própria leitura. Destacam depois que também a escola primária reconhece a importância desta disciplina, dedicando uma especial atenção ao seu ensino, tanto utilitário como formativo. O fim do ensino da aritmética na escola primária é referido por Gaspar e Ferreira (1944) como sendo o de cultivar o cálculo infantil e o de facultar às crianças "meios de resolver rápida, lógica e sensatamente os problemas escolares e, depois, os da vida a que se destina." (p. 18)
CCMG2.	**Noção de número e de quantidade/Ensino de …**	No ensino dos números, Gaspar e Ferreira (1944) valorizam a sequência que começa com a concretização, através da contagem de objetos, para depois aparecerem os números e só no final serem utilizados os algarismos
CCMG3.	**Operações elementares**	Para Gaspar e Ferreira (1944) os sinais das operações deveriam surgir ainda com os traços "// + /// = ///// e //// - / = ///." (p. 38), passando-se depois à numeração árabe corrente com utilização de números até à dezena. As operações devem ser primeiro ensinadas com a aplicação de problemas e só depois ensinadas em abstrato. O ensino das operações deveria ser graduado em dificuldade crescente. Destacam a importância do erro e da correção na aprendizagem das operações.
CCMG4.	**Ideias sobre geometria**	O objetivo de o ensino da geometria "habituar a criança a observar e distinguir as formas e dimensões dos objetos." (Gaspar & Ferreira, 1944, p. 78). Deve ter o quotidiano por base. Na escola primária, o ensino da geometria deve ser concreto e prático, dada a abstração desta disciplina, destacam Gaspar e Ferreira (1994), referindo que o ambiente propício à sua aprendizagem são o recreio, a rua e os passeios escolares. o ensino da geometria deve ser prático e utilitário, apresentando exemplos de um ensino indutivo para esta disciplina. destacam a relação com as outras disciplinas, particularmente com os trabalhos manuais e com o desenho.
CCMG5.	**Princípios sobre o papel da resolução de problemas**	Gaspar e Ferreira (1944) consideram que o interesse pela aprendizagem das operações faz-se pela necessidade de resolver problemas, conseguindo-se a atenção do aluno com o apelo à vida real. O ensino dos problemas deveria ter início o mais cedo possível. Os problemas podem servir para ensinar todas as noções de aritmética.

CCMG6.	**Noção de cálculo mental**	O cálculo mental é valorizado na obra, indicando-se que preceda o cálculo escrito. A falta de cálculo mental é referida como uma das dificuldades na resolução de problemas.
CCMG7.	**Material didático**	Manipulação de objetos conhecidos dos alunos nas contagens. Materiais relacionados com o sistema métrico. Material Montessori, jogos infantis com cartões e cubos coloridos. Tabuinhas de diferentes formas, tamanhos, pesos e cores (Decroly). Caixas ou tabuleiros para o ensino das operações fundamentais (Método McKinder). Quadros com desenhos de animais. Apesar da concretização ser muitas vezes destacada no ensino da aritmética, os autores também referem várias vezes que esta não se deve prolongar, havendo a necessidade de os alunos desenvolverem a capacidade de se abstrair

Anexo 6 - Caracterização do Conteúdo Matemático sobre os Números Racionais (CCMNRn)

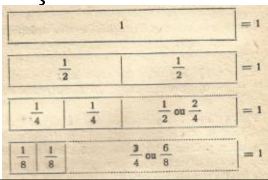
CCMNR1.	**Referências à utilização didática da evolução histórica dos racionais e a sua utilização didática**		Não há evidência.
CCMNR2.	**Definição de número racional**	**1- Medida**	Não há evidência.
		2 - Quociente	Não há evidência.
		3 - Classes de equivalência	Não há evidência.
	Dízima	**1 - Finita**	Não há evidência.
		2 - Infinita periódica	Não há evidência.
	Abordagem inicial ao número racional	**1 - Fração**	Abordagem paralela da representação em fração e decimal, mas não existe uma discussão explícita dessa situação, apenas a referência a que a representação decimal facilita a compreensão pela sua relação com o sistema numérico e com o sistema métrico.
		2 - Decimal	Abordagem paralela da representação em fração e decimal, mas não existe uma discussão explícita dessa situação, apenas a referência a que a representação decimal facilita a compreensão pela sua relação com o sistema numérico e com o sistema métrico.
	Densidade do conjunto dos números racionais		Não há evidência.

CCMNR3.	**Diferentes significados das frações em contexto**	**1- Quociente**	Não há evidência.
		2 - Parte-todo (contínuo ou discreto)	Os exemplos apresentados referem-se sempre à fração como parte de um todo de uma unidade contínua. 
		3 - Medida	Não há evidência.
		4 - Operador	Não há evidência.
		5 - Razão ("parte-parte" e grandezas diferentes)	Não há evidência.
CCMNR4.	**Tipos de unidade**	**1 - Unidade contínua**	As primeiras noções apresentadas no contexto do estudo dos números racionais referem-se a grandezas contínuas, que se deve principalmente ao facto da abordagem proposta por estes autores relacionar, quase desde o início, a representação dos números racionais na forma de fração e na representação decimal.
		2 - Unidade discreta	As referências a conjuntos discretos são apenas apresentadas quando os autores destacam os materiais que podem ser utilizados no ensino das frações, onde se referem a desenhos de grupos de objetos ou de animais
CCMNR5.	**Reconhecer frações equivalentes**		Utilizam um esquema que evidencia a equivalência de frações. 
CCMNR6.	**Comparar e ordenar racionais**		Utilizam modelos de quantidade contínua para evidenciar comparação entre frações. O trabalho centra-se na comparação e ordenação de frações unitárias.

CCMNR7.	**Operações com números racionais (com frações e com decimais)**	**1 - Operações com frações**		Não aprofundam as operações com frações centrando-se apenas alguns casos de adição de frações com o mesmo denominador.
		2 - Operações com decimais		Apresentam apenas algumas críticas à forma como seriam trabalhadas as operações com decimais no ensino primário, mas não têm uma proposta de sequência de ensino.
CCMNR8.	**Decimais**	**Equívocos na utilização dos decimais**	**Mais algarismos, maior grandeza**	Não há evidência.
			Utilização do zero	Não há evidência.
			Mais algarismos, menor grandeza	Não há evidência.
			Valor de posição do sistema decimal	Não há evidência.

Anexo 6 - Caracterização das Representações dos Números Racionais (CRNRn)

<table>
<tr><td>CRNR1.</td><td colspan="2">Verbais</td><td>É utilizada a representação verbal em relação com a representação pictórica e simbólica. Destaca-se a dificuldade e abstração de algumas designações como os avos.</td></tr>
<tr><td rowspan="4">CRNR2.</td><td rowspan="4">Simbólicas</td><td>1 - Numeral decimal</td><td>São apresentados em relação com as frações. Destacam-se alguns exemplos de decimais que equivalem a frações de referência como $\frac{1}{2} = 0{,}5$; $\frac{1}{4} = 0{,}25$.</td></tr>
<tr><td>2 - Numeral misto</td><td>Não há evidência.</td></tr>
<tr><td>3 - Fração</td><td>A representação na forma de fração é privilegiada na relação com a representação pictórica e verbal.</td></tr>
<tr><td>4 - Percentagem</td><td>Não há evidência.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="6">CRNR3.</td><td rowspan="6">Pictóricas (ou icónicas)</td><td rowspan="3">1 - Modelos de quantidade contínua</td><td>Modelos de área (ex. imagens de figuras planas, imagens de tiras de papel, imagens de peças de tangram)</td><td>É a representação privilegiada na iniciação do trabalho com as frações.
</td></tr>
<tr><td>Modelos de comprimento (reta numérica orientada, imagens de réguas, imagens de barras de Cuisenaire)</td><td>É referida verbalmente a utilização de modelos de comprimento como segmentos de reta “a concretização pode fazer-se com tiras de papel ou até com um simples traço no quadro ou nas ardósias” (Gaspar & Ferreira, 1944, p. 52).</td></tr>
<tr><td>Outros modelos de medida (imagens de copos medidores - volume, imagens de relógios - tempo, imagens de balanças - peso, imagens de pizas).</td><td>Não há evidência.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">2 - Modelos de quantidade discreta</td><td>Imagens de objetos</td><td>Não há evidência.</td></tr>
<tr><td>Imagens de símbolos</td><td>Não há evidência.</td></tr>
<tr><td>Imagens de pessoas</td><td>Não há evidência.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">CRNR4.</td><td rowspan="3">Ativas</td><td colspan="2">1 - Objetos</td><td>É referida a utilização de tiras de papel, metro articulado, laranja, régua, vara</td></tr>
<tr><td colspan="2">2 - Cuisenaire</td><td>Não há evidência.</td></tr>
<tr><td colspan="2">3 - Tangram</td><td>Não há evidência.</td></tr>
</table>

Anexo 6 - Caracterização das Situações Matemáticas e Contextos nos Números Racionais (CSMCNRn)

CSMCNR1.	**Situações**	**1 - Complexidade**	**1 – Exercícios**		Situação privilegiada com apoio na representação simbólica.
			2 - Cenários para investigação		Não há evidência.
		2 -Contexto	**1 - Situações matemáticas**		Situação privilegiada.
			2 - Situações semirreais		"E quanto ganharás tu em 10 dias, como empregado de escritório, se tiveres o vencimento anual de 9.000$00?" (p. 62)
			3 - Situações reais		"Problemas reais serão os relacionados com a vida diária do aluno: a família, a igreja, a região, a alimentação, etc., e nos seus dados podem surgir óptimos elementos formativos". (p. 60)
CSMCNR2.	**Problemas**	**Tipologia de problemas**	**1 - Problemas de cálculo**	**Problemas que se resolvem com a utilização de uma das quatro operações aritméticas elementares**	"Quanto gasta em rebuçados, no mês de fevereiro dum ano bissexto, um menino que todos os dias compra 0$30 deles" (p. 65).
				Problemas que se resolvem com a utilização de duas ou mais operações aritméticas elementares	"Ganhando 7$50 por dia, quantas semanas precisa de trabalhar a mãe do António, para lhe comprar um fato que fica pronto por 225$00" (p. 68).
			2 - Problemas de processo, que implicam o uso de uma ou mais estratégias de resolução		Não há evidência.
			3 - Problemas de aplicação que envolvem recolha de dados e tomada de decisões		Não há evidência.
			4 - Problemas tipo puzle. Atividades recreativas ou lúdicas.		Não há evidência.
		Formulação de problemas			Não há evidência.

CSMCNR3.	**Contextos**	**1 - Contextos relacionados com a atividade comercial**	**Promoções**	
			Salários	"Ganhando 7$50 por dia, quantas semanas precisa de trabalhar a mãe do António, para lhe comprar um fato que fica pronto por 225$00" (p. 68).
			Comércio	"Quanto ganha o teu pai numa pipa de vinho que comprou por 750$00 se a vendeu a 2$00 o litro?" (p. 62)
		2 - Contextos relacionados com a medida	**Medidas de comprimento**	É referida a utilização de medidas de comprimento para a formulação de problemas, mas não são apresentados exemplos.
			Medidas de área, volume, peso, capacidade.	É referida a utilização de medidas de capacidade para a formulação de problemas, mas não são apresentados exemplos.
			Agrimensura	Não há evidência.
CSMCNR4.	**Tarefas de sala com frações**	**1 - Identificação de quantidades**	**Encontrar a fração**	Não há evidência.
			Descobrir a parte	Não há evidência.
			Encontrar o todo	Não há evidência.
		2 - Comparação de quantidades distintas		Não há evidência.
		3 - Reconhecimento da equivalência de quantidades		Não há evidência.

Anexo 7 – Ficha de registo de dados da obra Introdução ao Estudo de Didáctica Especial: para uso dos alunos-mestres das escolas do magistério primário (2.ª edição revista e aumentada)

Caracterização do autor (CAn) – José Eduardo Moreirinhas Pinheiro

CA1.	**Local e data de nascimento/Local e data de óbito**	Coimbra, 20 de agosto de 1923 Lisboa, 16 de fevereiro de 2017
CA2.	**Centro de formação onde frequentou os estudos**	- Curso Complementar de Letras no Liceu Nacional de D. João, em 1944. - Curso da Escola do Magistério Primário de Coimbra, em 1946. - Curso de Ciências Pedagógicas na Universidade de Coimbra, em 1953.
CA3.	**Profissões e lugares onde exerceu a sua profissão (destaque para as funções relacionadas com a matemática).**	- Professor do ensino primário em Coimbra e na Figueira da Foz. - Professor na Escola do Magistério Primário de Lisboa. - Docente nos cursos especiais para regentes. - Quadro da ESELx, na secção dos reservados do Centro de Documentação e Informação.
CA4.	**Relações com pessoas significativas na área da educação e do ensino da matemática**	Nada a referir.
CA5.	**Obras publicadas**	- Introdução ao estudo da didáctica especial para uso dos alunos-mestres das escolas do magistério primário. Lisboa: Oficinas de S. José. [2ª ed. 1961, 3ª ed. 1967]. - Didáctica da gramática. Lisboa: Escolas Profissionais Salesianas (1963). - Notas para a história do ensino em Portugal. Lisboa: Escola Superior de Educação.
CA6.	**Outra informação relevante**	- Nos últimos anos de vida dedicou-se ao estudo e divulgação da história da educação em Portugal.
CA7.	**Referências bibliográficas**	- Ferreira (2016).

Anexo 7 - Caracterização global da obra (CGOn)

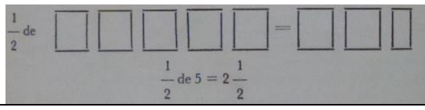
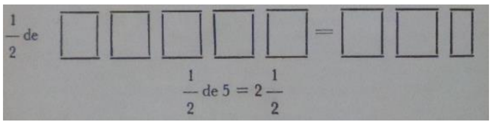
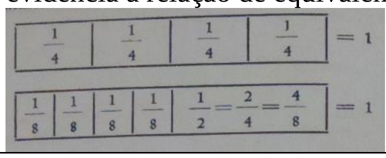
Título	Introdução ao Estudo de Didáctica Especial: para uso dos alunos-mestres das escolas do magistério primário (2.ª edição revista e aumentada)	
CGO1.	**Edição, ano, cidade, editora**	2.ª edição (revista e aumentada). 1961, Lisboa,
CGO2.	**Ano da primeira edição e edições conhecidas**	1.ª edição - 1960. São conhecidas 3 edições.
CGO3.	**Extensão e estrutura**	Total de 133 páginas, divididas em 15 capítulos. Tem uma bibliografia final. Cada capítulo aborda uma didática específica. Didática da aritmética e didática da língua materna ocupam uma parte significativa da obra.
CGO4.	**Objetivos gerais da obra**	Facilitar o trabalho dos alunos-mestres das Escolas do Magistério Primário na sua preparação teórica para a função docente. Destina-se a alunos que ainda não têm conhecimentos gerais e,por isso, utiliza linguagem simples. A 2.ª edição é justificada pelos pedidos de colegas e alunos.
CGO5.	**Autores em que se baseia e outras influências (global)**	Decroly A. Rude, Aguayo, Benedi, Solana ou Theobaldo M. Santos, Pimentel Filho Ayres, Ballard, Burt, Claparède, Courtis, Dottrens e Thorndike. Jean Pointud e Jean Tronchère.
CGO6.	**Valorização global da obra (é citado em que obras das que são analisadas no trabalho)**	A obra não é citada nas outras obras analisadas neste trabalho.
CGO7.	**Questões globais sobre ensino, pedagogia, métodos, metodologia geral**	A Pedagogia é definida como a "ciência e a arte da Educação" que só o desenvolvimento das ciências experimentais teria permitido considerar como ciência. pedagogia como uma ciência normativa, que "considera os factos à luz duma certa doutrina e estuda-os com a ajuda dos métodos das ciências positivas. E como o seu objeto é o ser humano, tem necessariamente de se apoiar numa Moral." A Educação deveria ser sistemática e dirigir-se a todas as faculdades, tanto físicas, morais como intelectuais. Didática é uma das ciências da educação. derivada da palavra grega didaktiké, quer dizer arte de ensinar; conjunto de preceitos que têm por fim tornar o ensino eficiente. Dida´tica como arte e ciência. Método do questionamento. Métodos e metodologia.

Anexo 7 - Caracterização do Conteúdo Matemático Global (CCMGn)

CCMG1.	**Definição de matemática (aritmética)/Ensino da matemática (aritmética)**	Objetivos do ensino da Aritmética na escola primária: a) Facultar à criança os conhecimentos indispensáveis para resolver as questões de número e quantidade. b) Proporcionar a resolução de problemas práticos da vida corrente. c) Criar e desenvolver hábitos úteis de pensamento e ação. (pp. 55-56)
CCMG2.	**Noção de número e de quantidade/Ensino de …**	As noções de número e de quantidade são apresentadas em sequências de ensino que envolvem a manipulação de objetos, a representação pictórica e a representação abstrata.
CCMG3.	**Operações elementares**	Pinheiro (1961) destaca as sete operações fundamentais definidas para a Aritmética, por este método "1 – soma; 2 – diferença; 3 – decomposição; 4 – complementação; 5 – multiplicação; 6 – divisão (partilha); 7 – divisão (conteúdo)" (Pinheiro, 1961, p. 63) (método Kühnel). Resolução e formulação de problemas na iniciação à numeração.
CCMG4.	**Ideias sobre geometria**	Pinheiro (1961) destaca que no ensino da geometria se podem utilizar o método analítico e o método sintético. método analítico, Pinheiro (1961) descreve-o como sendo um método que "parte dos corpos para atingir as linhas" (p. 87). No segundo caso, método sintético, "parte-se das linhas para chegar aos corpos." (Pinheiro, 1961, p. 87). Para Pinheiro (1961) na escola primária deve-se ensinar a geometria indutivamente, tendo como ponto de partida a observação, a análise e a imaginação da criança. estabelecida uma relação entre o ensino da geometria e o desenvolvimento de disciplinas como os trabalhos manuais e o desenho.
CCMG5.	**Princípios sobre o papel da resolução de problemas**	Principal objetivo da aritmética é a resolução de problemas com finalidades educativas e utilitárias. No que diz respeito à resolução de problemas, Pinheiro (1961) distingue o que designa por cinco momentos lógicos: 1.º - leitura repetida, para apreender o sentido do problema, 2.º - explicação deste, 3.º - raciocínio, 4.º - resolução e 5.º - verificação e comprovação do resultado. De entre os cinco momentos para a resolução de problemas, Pinheiro (1961) salienta a importância da explicação e do raciocínio, considerando os outros momentos como atividades mecânicas
CCMG6.	**Noção de cálculo mental**	A falta de cálculo mental é apontado como um problema no ensino da aritmética. O cálculo mental deve preceder o cálculo escrito na resolução de problemas. Desenvolvimento de sentido crítico.
CCMG7.	**Material didático**	Caixa métrica, ábaco ou contador, jogos aritméticos como Montessori, Decroly ou MacKinder. Jogos educativos de Decroly. Barras de Montessori. Os planos de aula apresentam a utilização de materiais didáticos e a manipulação individual dos materiais.

Anexo 7 - Caracterização do Conteúdo Matemático sobre os Números Racionais (CCMNRn)

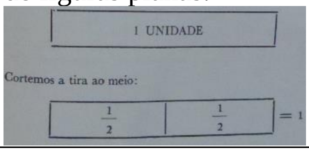
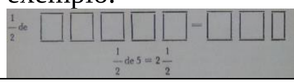
CCMNR1.	**Referências à utilização didática da evolução histórica dos racionais**		Não há evidência.
CCMNR2.	**Definição de número racional**	**1- Medida**	Não há evidência.
		2 - Quociente	Não há evidência.
		3 - Classes de equivalência	Não há evidência.
	Dízima	**1 - Finita**	Não há evidência.
		2 - Finita periódica	Não há evidência.
	Abordagem inicial ao número racional	**1 - Fração**	A fração é apresentada após o trabalho com os decimais
		2 - Decimal	Pinheiro (1961), a primeira abordagem aos números racionais é feita a partir da representação decimal, números decimais como são designados por Pinheiro (1961), seguindo as instruções dos programas da época, pela sua relação com o sistema métrico.
	Densidade do conjunto dos números racionais		Não há evidência.

<table>
<tr><td rowspan="5">CCMNR3.</td><td rowspan="5">Diferentes significados das frações em contexto</td><td>1- Quociente</td><td>Não há evidência.</td></tr>
<tr><td>2 - Parte-todo (contínuo ou discreto)</td><td>Trabalho centrado na relação parte todo de uma unidade contínua</td></tr>
<tr><td>3 - Medida</td><td>Não há evidência.</td></tr>
<tr><td>4 - Operador</td><td>Também é apresentado um exemplo em que a fração surge como operador multiplicativo partitivo de uma unidade discreta. Pinheiro (1961) não explicita nenhuma indicação a diferenciar estes dois tipos de situações. "Calcula 1/2 de 5"
</td></tr>
<tr><td>5 - Razão ("parte-parte" e grandezas diferentes)</td><td>Não há evidência.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">CCMNR4.</td><td rowspan="2">Tipos de unidade</td><td>1 - Unidade contínua</td><td>No contexto do ensino dos números racionais, o trabalho centra-se inicialmente na representação decimal, razão pela qual o autor privilegia grandezas contínuas, essencialmente relacionadas com as respetivas unidades de medida.</td></tr>
<tr><td>2 - Unidade discreta</td><td>Pinheiro (1961) também apresenta situações onde recorre a conjuntos discretos, principalmente quando trabalha a fração como operador partitivo multiplicativo.
</td></tr>
<tr><td>CCMNR5.</td><td colspan="2">Reconhecer frações equivalentes</td><td>Apresenta um modelo de quantidade contínua que evidencia a relação de equivalência entre frações.
</td></tr>
<tr><td>CCMNR6.</td><td colspan="2">Comparar e ordenar racionais</td><td>O autor trabalha essencialmente com os decimais utilizando o valor de posição.
Na comparação e ordenação de frações utiliza modelos de quantidade contínua para comparar e ordenar frações unitárias.</td></tr>
</table>

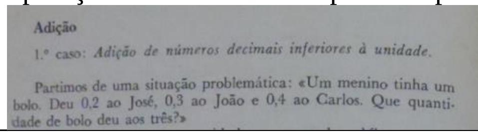
CCMNR7.	**Operações com números racionais (com frações e com decimais)**	**1 - Operações com frações**		Nesta obra não existe um trabalho específico para as operações com frações, para além daquele que surge na apresentação da noção onde existem apenas adições com frações com o mesmo denominador.
		2 - Operações com decimais		As operações com decimais são trabalhadas antes das frações. Sequência de trabalho para enquadrar o algoritmo das operações. Alguns exemplos são enquadrados com um contexto e modelados com representação pictórica.
CCMNR8.	**Decimais**	**Equívocos na utilização dos decimais**	**Mais algarismos, maior grandeza**	Não há evidência.
			Utilização do zero	Não há evidência.
			Mais algarismos, menor grandeza	Não há evidência.
			Valor de posição do sistema decimal	Na representação decimal do número racional é destacada a relação com o sistema decimal e com o sistema métrico.

Anexo 7 - Caracterização das Representações dos Números Racionais (CRNRn)

CRNR1.	**Verbais**		É uma representação privilegiada pelo autor, estabelecendo a relação com a representação simbólica e a representação pictórica.
CRNR2.	**Simbólicas**	**1 - Numeral decimal**	É uma representação privilegiada pelo autor, sendo a primeira abordagem aos números racionais feita a partir desta representação.
		2 - Numeral misto	Não há evidência.
		3 - Fração	É apresentada após o trabalho com os decimais, mas não estabelece uma relação evidente com a representação decimal. Na apresentação da fração estabelece a relação com modelos pictóricos.
		4 - Percentagem	Não há evidência.

<table>
<tr><td rowspan="6">CRNR3.</td><td rowspan="6">Pictóricas (ou icónicas)</td><td rowspan="3">1 - Modelos de quantidade contínua</td><td>Modelos de área (ex. imagens de figuras planas, imagens de tiras de papel, imagens de peças de tangram)</td><td>Representação utilizada na apresentação dos decimais e das frações. Imagens de tiras de papel e de figuras planas.
</td></tr>
<tr><td>Modelos de comprimento (reta numérica orientada, imagens de réguas, imagens de barras de Cuisenaire)</td><td>Não há evidência.</td></tr>
<tr><td>Outros modelos de medida (imagens de copos medidores - volume, imagens de relógios - tempo, imagens de balanças - peso, imagens de pizas).</td><td>Não há evidência.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">2 - Modelos de quantidade discreta</td><td>Imagens de objetos</td><td>É utilizada apenas num exemplo.
</td></tr>
<tr><td>Imagens de símbolos</td><td>Não há evidência.</td></tr>
<tr><td>Imagens de pessoas</td><td>Não há evidência.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">CRNR4.</td><td rowspan="3">Ativas</td><td colspan="2">1 - Objetos</td><td>São apresentados exemplos onde se faz referência à utilização de tiras de papel para modelar a situação.</td></tr>
<tr><td colspan="2">2 - Cuisenaire</td><td>Não há evidência.</td></tr>
<tr><td colspan="2">3 - Tangram</td><td>Não há evidência.</td></tr>
</table>

Anexo 7 - Caracterização das Situações Matemáticas e Contextos nos Números Racionais (CSMCNRn)

CSMCNR1.	**Situações**	**1 - Complexidade**	**1 - Exercícios**		São as situações privilegiadas na apresentação dos conteúdos, tanto nos decimais como nas frações.
			2 - Cenários para investigação		Não há evidência.
		2 -Contexto	**1 - Situações matemáticas**		As situações matemáticas estritamente numéricas são privilegiadas na apresentação dos conteúdos.
			2 - Situações semirreais		Os problemas com um contexto são muitas vezes destacados no discurso do autor, mas não são apresentados muitos exemplos.
			3 - Situações reais		Há no discurso do autor referências à adaptação dos contextos à realidade dos alunos.
CSMCNR2.	**Problemas**	**Tipologia de problemas**	**1 - Problemas de cálculo**	**Problemas que se resolvem com a utilização de uma das quatro operações aritméticas elementares**	Tipo de problema utilizado na apresentação de algumas operações com decimais. Apresenta poucos exemplos.  Adição 1.º caso: *Adição de números decimais inferiores à unidade.* Partimos de uma situação problemática: «Um menino tinha um bolo. Deu 0,2 ao José, 0,3 ao João e 0,4 ao Carlos. Que quantidade de bolo deu aos três?»
				Problemas que se resolvem com a utilização de duas ou mais operações aritméticas elementares	Não há evidência.
			2 - Problemas de processo, que implicam o uso de uma ou mais estratégias de resolução		Não há evidência.
			3 - Problemas de aplicação que envolvem recolha de dados e tomada de decisões		Não há evidência.
			4 - Problemas tipo puzle. Atividades recreativas ou lúdicas.		Não há evidência.
		Formulação de problemas			É referida a importância da formulação de problemas para compreensão das noções já trabalhadas e aquisição de hábitos de análise de situações mais complexas.

CSMCNR3.	**Contextos**	**1 - Contextos relacionados com a atividade comercial**	**Promoções**	Não há evidência.
			Salários	Não há evidência.
			Comércio	Há exemplos de problemas com atividades comerciais: O José comprou 2,5 dm de fazenda por 45\$00. Qual foi o preço do metro?
		2 - Contextos relacionados com a medida	**Medidas de comprimento**	São apresentados alguns exemplos no contexto dos decimais. 3 × 2 déc. = 6 déc., para 7 déc. falta 1 déc.. E mostrará a décima que sobejou. A seguir: 0,6 : 0,2 Obs.: Utilizando o metro articulado, é fácil explicar casos como este: 0,40 : 0,2 — assinalando com o giz os pedaços correspondentes a 2 décimas.
			Medidas de área, volume, peso, capacidade	Quero engarrafar o vinho de um garrafão de 5 litros, em garrafas de 2,5 dl cada uma: Quantas garrafas posso encher? Quanto apurarei na venda se vender cada uma a 2\$50?
			Agrimensura	Não há evidência.
CSMCNR4.	**Tarefas de sala com frações**	**1 - Identificação de quantidades**	**Encontrar a fração**	Não há evidência.
			Descobrir a parte	Não há evidência.
			Encontrar o todo	Não há evidência.
		2 - Comparação de quantidades distintas		Não há evidência.
		3 - Reconhecimento da equivalência de quantidades		Não há evidência.

Anexo 8 – Ficha de registo de dados da obra Didáctica do Cálculo – 1.º e 2.º volume - (1972, 1974)

Caracterização do autor (CAn) – Gabriel Gonçalves

CA1.	**Local e data de nascimento/Local e data de óbito**	Não foi possível identificar o local e a data de nascimento e de óbito. 19?? - 19??
CA2.	**Centro de formação onde frequentou os estudos**	Não foi possível identificar o centro de formação onde frequentou os estudos.
CA3.	**Profissões e lugares onde exerceu a sua profissão (destaque para as funções relacionadas com a matemática).**	- Professor da Escola do Magistério do Porto - Inspetor Orientador do Ministério da Educação.
CA4.	**Relações com pessoas significativas na área da educação e do ensino da matemática**	Nada a referir.
CA5.	**Obras publicadas**	- Didática do Cálculo (2 volumes). Duas edições (1.º volume 1970 e 1972/2.º volume 1972 e 1974). - Didatica da Língua Nacional, 1.º edição em 1967 (4.ª edição em 1973).
CA6.	**Outra informação relevante**	Nada a referir.
CA7.	**Referências bibliográficas**	Nada a referir.

Anexo 8 - Caracterização global da obra (CGOn)

CGO1.	**Edição, ano, cidade, editora**	2 volumes, 2.º edição (1.º volume 1972 e 2.º volume 1974), Porto, Porto Editora
CGO2.	**Ano da primeira edição e edições conhecidas**	1.º edição do 1.º volume - 1970 1.ª edição do 2.º volume - 1972 São conhecidas duas edições da obra.
CGO3.	**Extensão e estrutura**	2 volumes com um total de 492 páginas. 1.º volume 244 páginas e 2.º volume 248 páginas. Está organizado em 52 capítulos que cobrem todo o programa do ensino primário elementar da disciplina Aritmética e Geometria, da 1.ª à 4.ª classe.
CGO4.	**Objetivos gerais da obra**	Destinava-se principalmente aos alunos-mestres das escolas do magistério primário, embora também pudesse ser aproveitado por todos aqueles que se interessam pelos problemas do ensino. Dar resposta ao pedido de alguns alunos-mestres que pretendiam a publicação do resumo das lições realizadas na escola, para facilitar a sistematização que era difícil a partir dos apontamentos tirados na aula. Sugerir, a quem não tem grande experiência, uma orientação e uma série de técnicas e formas de atividade, capazes de o ajudar a tornar o ensino da matemática mais intuitivo e ativo.
CGO5.	**Autores em que se baseia e outras influências (global)**	Freinet André Revuz, Junquera Muné, Norma Osório, Montessori, Decroly, MacKinder, Dienes, Cuisenaire, Cousinet, Buisse, Robert Dottrrens, Charles Augustine.
CGO6.	**Valorização global da obra (é citado em que obras das que são analisadas no trabalho)**	É uma obra editada posteriormente a todas as outras trabalhadas nesta investigação. Não é citada nas outras obras analisadas neste trabalho.
CGO7.	**Questões globais sobre ensino, pedagogia, métodos, metodologia geral**	Pedagogia é a ciência da condução de uma classe. Distingue método analítico, quando se entra nas noções pela sua decomposição, de método sintético, quando se começa por ter em conta os elementos, para depois articular e chegar ao objeto. Relaciona o método analítico, a análise, com o método indutivo, e o método sintético, a síntese, com o método dedutivo. Aprendizagem ativa, experimental e viva. o método heurístico ativo no ensino da matemática. A importância do conhecimento estruturado.

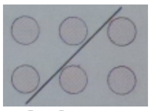
Anexo 8 - Caracterização do Conteúdo Matemático Global (CCMGn)

CCMG1.	**Definição de matemática (aritmética)/Ensino da matemática (aritmética)**	A aritmética deve desenvolver a plasticidade do pensamento, através das inter-relações que estuda. Gonçalves (1974) salienta a importância do ensino da aritmética no ensino primário, reforçando que não se devem perder de vista dois princípios, o ensino racional e o ensino prático.
CCMG2.	**Noção de número e de quantidade/Ensino de …**	Este autor refere-se pela primeira vez à unidade quando trabalha o estudo inicial do sistema de numeração, apresentando exemplos de unidades discretas simples. Ainda no trabalho com o sistema decimal, Gonçalves (1972) destaca o que designa por conjuntos-unidade, referindo-se a unidades discretas compostas como a dezena, a centena, a dúzia ou o quarteirão. Para Gonçalves (1972) esta é uma ampliação do conceito de unidade.
CCMG3.	**Operações elementares**	Na adição identifica a ação de juntar, na subtração distingue duas ações, tirar e achar a diferença, na multiplicação salienta a ideia de uma soma de parcelas iguais e na divisão distingue também duas ideias, a de partilhar e a de achar o conteúdo.
CCMG4.	**Ideias sobre geometria**	Para Gonçalves (1974) o ensino da geometria deve ser simultaneamente utilitário, formativo, intuitivo e ativo. Gonçalves (1974) salienta também a necessidade de associar disciplinas como os trabalhos manuais ao ensino da geometria.
CCMG5.	**Princípios sobre o papel da resolução de problemas**	Para Gonçalves (1972) a aprendizagem da aritmética deve ser feita a partir de situações problemáticas da vida real. Explica a importância dos problemas em dois sentidos "precedem a ideação no cálculo e seguem-na na aplicação de quanto foi apreendido." (Gonçalves, 1972, p. 41) Gonçalves (1972) relaciona a aprendizagem da resolução de problemas, com a sua prática, destacando a importância de resolver problemas em todas as atividades e matérias, enunciando três condições às quais a formulação de problemas deve obedecer: "a) estimular o pensamento reflexivo; b) ter importância ou valor educativo; c) satisfazer o interesse infantil." (Gonçalves, 1972, p. 42, itálico no original)
CCMG6.	**Noção de cálculo mental**	Para Gonçalves (1972) o cálculo mental é uma atividade essencial na resolução de problemas, podendo ser exato ou aproximado. O cálculo mental tem um valor formativo, prático e preventivo contra resultados incongruentes. Apresenta estratégias de cálculo mental.

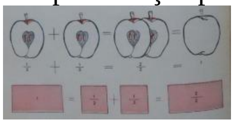
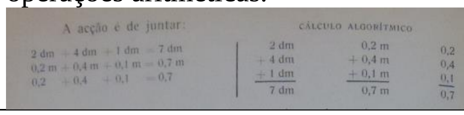
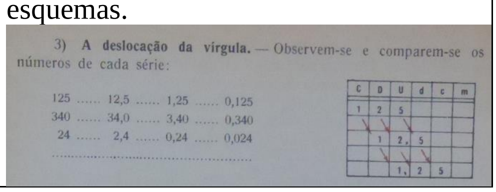
CCMG7.	**Material didático**	No material objetivo docente, identifica as 1) rodelas de várias cores, para as contagens e decomposições, as 2) varetas para a numeração e as operações, 3) contas para contar e enfiar, do método MacKinder para a escrita e leitura de números, 4) botões, 5) cápsulas de garrafas, 6) conchas, 7) seixos do mar ou do rio, 8) frutos secos não comestíveis, 9) metro articulado, 10) moedas, 11) ábacos, para contagens e cálculos, 12) pranchetas retangulares com pregos, para fixação das rodelas, 13) vasilhas, para encher e vazar, 14) balanças e material para pesagens, 15) dispositivos (tabuleiros) para a concretização da adição e da divisão, 16) réguas montessorianas, para a composição e decomposição numérica e concretização das operações, e 17) material morfocromático de Cuisenaire. No que diz respeito ao material objetivo discente, Gonçalves (1972) refere as caixas de cálculo com grãos, discos de cartão, ábacos em formato reduzido, material Cuisenaire, dinheiro e régua. 1) placas numéricas, as 2) plaquetas ideonuméricas, para a realização de cálculos, perceção intuitiva de número, composição e decomposição, 3) algarismos móveis e 4) sinais das operações. No ponto quatro, Gonçalves (1972) destaca outro material, principalmente para uso na geometria e nas grandezas e medidas.

Anexo 8 - Caracterização do Conteúdo Matemático sobre os Números Racionais (CCMNRn)

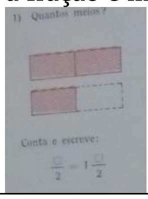
CCMNR1.	**Referências à utilização didática da evolução histórica dos racionais**		Não há evidência.
CCMNR2.	**Definição de número racional**	**1- Medida**	Não há evidência.
		2 - Quociente	número fracionário é uma ideia e a sua representação simbólica denomina-se fração (numeral do número fracionário), a qual pode ter a forma a/b, e que a e b designam números naturais, podendo também referir-se a como dividendo e b como divisor, sendo $b \neq 0$. (Gonçalves, 1974, p. 144, itálicos e negritos no original)
		3 - Classes de equivalência	Não há evidência.
	Dízima	**1 - Finita**	Trabalha a conversão de fração ordinária em dízima finita, indicando um processo para verificar se a fração dará, ou não, uma dízima finita.
		2 - Infinita periódica	Não há evidência.
	Abordagem inicial ao número racional	**1 - Fração**	Gonçalves (1974) considera que a aritmética apresenta a fração como um caso de nova realidade de uma nova numeração e, por isso, o seu estudo não devia ser paralelo ao estudo dos números inteiros.
		2 - Decimal	A iniciação aos números racionais centra-se inicialmente no trabalho com a representação decimal. Esta opção de Gonçalves (1974) também é justificada pelas orientações do programa do ensino primário em vigor na época. Aprofunda esta questão da forma de iniciar o estudo dos números racionais citando metodólogos que apresentam opiniões divergentes.
	Densidade do conjunto dos números racionais		Não há evidência.

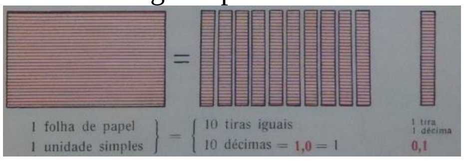
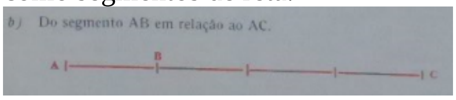
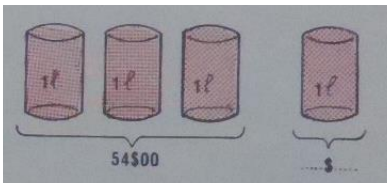
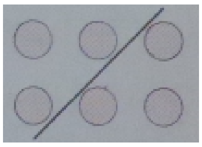
CCMNR3.	**Diferentes significados das frações em contexto**	**1- Quociente**	No terceiro conceito que Gonçalves (1974) distingue nas frações, apresenta um exemplo que remete para o que se pode designar como a fração como o quociente entre dois números inteiros, numa situação de partilha equitativa.
		2 - Parte-todo (contínuo ou discreto)	O primeiro exemplo refere-se ao que se pode enquadrar na fração como a parte de um todo de uma unidade contínua “1) Na partilha de um conjunto contínuo ele significa «uma ou mais das partes iguais em que se dividiu esse conjunto».” (Gonçalves, 1974, p. 143, aspas no original)
		3 - Medida	Não há evidência.
		4 - Operador	segundo exemplo, Gonçalves (1974) apresenta a fração no que se pode enquadrar como parte de um todo de um conjunto discreto, ou operador partitivo multiplicativo “2) Na partilha de um conjunto descontínuo, ele significa «uma ou mais das partes iguais desse conjunto» (de coisas, pessoas, etc.).” (Gonçalves, 1974, p. 143,
		5 - Razão ("parte-parte" e grandezas diferentes)	Quarto significado que o conceito de fração pode encerrar, referindo-se à fração como uma razão “a razão das propriedades numéricas de dois conjuntos”.
CCMNR4.	**Tipos de unidade**	**1 - Unidade contínua**	As unidades mais destacadas são as unidades contínuas, porque as medidas de comprimento são o contexto privilegiado por Gonçalves (1974) para fazer a abordagem aos decimais.
		2 - Unidade discreta	São apresentados exemplos onde são utilizadas unidades discretas. 4) Procedam também as crianças à partição em duas partes iguais de conjuntos determinados: «separe, com uma linha (ponteiro, régua, etc.) metade das coisas deste conjunto». (Gonçalves, 1974, p. 147 
CCMNR5.	**Reconhecer frações equivalentes**		Apresenta exemplos de situações em que diferentes frações representam a mesma quantidade. Apresenta depois a generalização.
CCMNR6.	**Comparar e ordenar racionais**		Começa por trabalhar com a comparação de decimais recorrendo a esquemas que

		trabalham com o valor de posição do sistema decimal. Na comparação de frações começa por utilizar a unidade como referência. Utiliza depois uma sequência onde começa por comparar frações unitárias, frações com o meso denominador, frações com o mesmo numerador, frações equivalentes, comparação com a unidade e frações maiores do que a unidade.

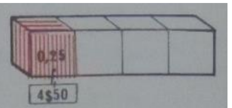
<table>
<tr><td>CCMNR7.</td><td>Operações com números racionais (com frações e com decimais)</td><td colspan="2">1 - Operações com frações</td><td>Não atribui muita relevância às operações com frações porque considera que no ensino primário não é comum surgirem problemas que envolvam cálculos com frações. A adição e a subtração de frações é apresentada recorrendo à representação pictórica e simbólica. </td></tr>
<tr><td></td><td></td><td colspan="2">2 - Operações com decimais</td><td>As operações com decimais são trabalhadas antes das frações. A sequência de trabalho apresentada centra-se nos algoritmos das diferentes operações aritméticas.

</td></tr>
<tr><td>CCMNR8.</td><td>Decimais</td><td>Equívocos na utilização dos decimais</td><td>Mais algarismos, maior grandeza</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>Utilização do zero</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>Mais algarismos, menor grandeza</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>Valor de posição do sistema decimal</td><td>Na comparação e ordenação de decimais destaca-se o valor de posição do sistema decimal, recorrendo a esquemas.

</td></tr>
</table>

Anexo 8 - Caracterização das Representações dos Números Racionais (CRNRn)

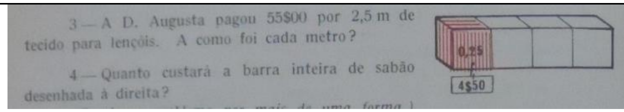
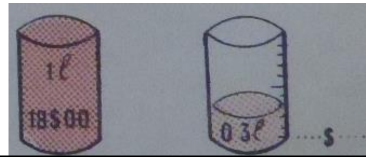
<table>
<tr><td>CRNR1.</td><td colspan="2">Verbais</td><td>Recorre à representação verbal, que relaciona com a representação pictórica e representação simbólica em decimal, fração e percentagem.</td></tr>
<tr><td rowspan="4">CRNR2.</td><td rowspan="4">Simbólicas</td><td>1 - Numeral decimal</td><td>É a primeira representação simbólica utilizada pelo autor para representar os números racionais.</td></tr>
<tr><td>2 - Numeral misto</td><td>O numeral misto é utilizado nalguns problemas quando a fração é maior do que a unidade.

</td></tr>
<tr><td>3 - Fração</td><td>A fração é utilizada. O autor apresenta a ideia de fração com um amplo recurso a modelos pictóricos e referências a representações ativas.</td></tr>
<tr><td>4 - Percentagem</td><td>Tem um capítulo dedicado à percentagem que relaciona com o estudo das frações e das frações decimais.</td></tr>
</table>

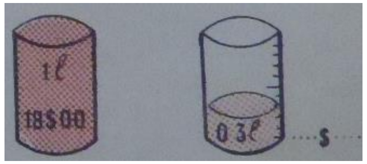
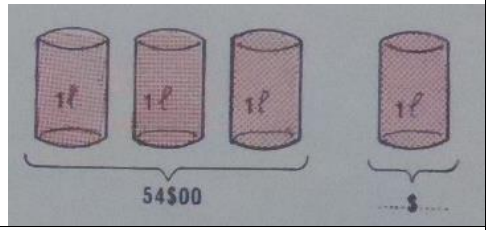
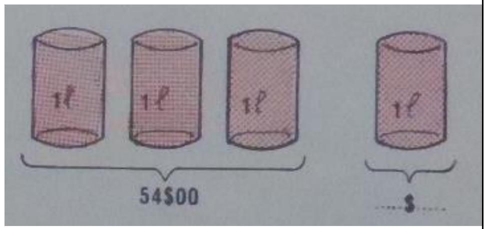
CRNR3.	**Pictóricas (ou icónicas)**	**1 - Modelos de quantidade contínua**	**Modelos de área (ex. imagens de figuras planas, imagens de tiras de papel, imagens de peças de tangram)**	Recorre frequentemente a modelos de área como figuras planas. 
			Modelos de comprimento (reta numérica orientada, imagens de réguas, imagens de barras de Cuisenaire)	Utiliza modelos de comprimento, como segmentos de reta. 
			Outros modelos de medida (imagens de copos medidores - volume, imagens de relógios - tempo, imagens de balanças - peso, imagens de pizas).	Os modelos de medida são utilizados não só para apresentar as noções, mas também para representar a resolução dos problemas. 
		2 - Modelos de quantidade discreta	**Imagens de objetos**	Utiliza modelos de quantidade discreta  4) Procedam também as crianças à partição em duas partes iguais de conjuntos determinados: «separe, com uma linha (ponteiro, régua, etc.) metade das coisas deste conjunto». (Gonçalves, 1974, p. 147)
			Imagens de símbolos	Não há evidência.
			Imagens de pessoas	Não há evidência.
CRNR4.	**Ativas**	**1 - Objetos**		Faz referência à utilização de objetos como tiras de papel.
		2 - Cuisenaire		Não há evidência.
		3 - Tangram		Não há evidência.

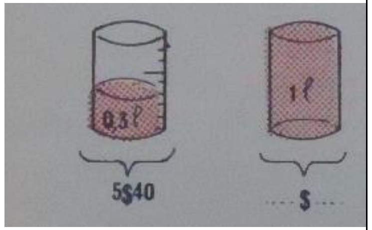
Anexo 8 - Caracterização das Situações Matemáticas e Contextos nos Números Racionais (CSMCNRn)

CSMCNR1.	**Situações**	**1 - Complexidade**	**1 - Exercícios**		Situações utilizadas na abordagem inicial dos decimais e na apresentação de noções das frações.
			2 - Cenários para investigação		Não há evidência.
		2 -Contexto	**1 - Situações matemáticas**		As situações matemáticas estritamente numéricas são utilizadas na apresentação das noções. 3) Exercícios de análise Ex.: 1 u = 5 d + 5 d 1 = 0,5 + 0,5 = 0,5 + 0,1 + 0,1 + 0,1 + 0,1 + 0,1 = 0,2 + 0,2 + 0,2 + 0,2 + 0,2
			2 - Situações semirreais		São as situações privilegiadas no trabalho com os decimais e com as frações.
			3 - Situações reais		Não há evidência.
CSMCNR2.	**Problemas**	**Tipologia de problemas**	**1 - Problemas de cálculo**	**Problemas que se resolvem com a utilização de uma das quatro operações aritméticas elementares**	Recorre frequentemente a problemas que envolvem a utilização de uma ou mais operações. *— Se três décimos (0,3) de um queijo custarem 12$60, quanto custará o queijo inteiro?*
				Problemas que se resolvem com a utilização de duas ou mais operações aritméticas elementares	Recorre frequentemente a problemas que envolvem a utilização de uma ou mais operações. 3 — A D. Augusta pagou 55$00 por 2,5 m de tecido para lençóis. A como foi cada metro? 4 — Quanto custará a barra inteira de sabão desenhada à direita? 
			2 - Problemas de processo, que implicam o uso de uma ou mais estratégias de resolução		Não há evidência.
			3 - Problemas de aplicação que envolvem recolha de dados e tomada de decisões		Não há evidência.

			4 - Problemas tipo puzle. Atividades recreativas ou lúdicas	Não há evidência.
		Formulação de problemas		Não há evidência.

CSMCNR3.	**Contextos**	**1 - Contextos relacionados com a atividade comercial**	**Promoções**	
			Salários	
			Comércio	
		2 - Contextos relacionados com a medida	**Medidas de comprimento**	De uma peça de fazenda óis de 2,5 m se podem fazer?
			Medidas de área, volume, peso, capacidade	1) Cada litro de azeite custa 18$00. Quanto custarão 0,3l desse azeite? 
			Agrimensura	A quinta do Sr. Tinoco é formada por um pomar com a área de 2500 ca, um campo com 248,5 a e uma horta com 1600 m2. De quantos ares é a superfície total da quinta?
CSMCNR4.	**Tarefas de sala com frações**	**1 - Identificação de quantidades**	**Encontrar a fração**	O autor apresenta a tipificação de situações que se enquadram neste tipo de tarefas. 1) Com 54$00, que porção de azeite se pode comprar, de preço de 18$00 o litro? 2) Com 5$40, que porção de azeite se pode comprar, do preço de 18$00 o litro? (Gonçalves, 1974, p. 82)
			Descobrir a parte	O autor apresenta a tipificação de situações que se enquadram neste tipo de tarefas.

				1) Cada litro de azeite custa 18$00. Quanto custarão 0,3l desse azeite?  Como vimos (p. 65) o problema pode solucionar-se, racionalmente, achando primeiro o valor de cada unidade decimal (18$00 : 10 = 1$80) e multiplicando-o depois pelo número delas (1$80 x 3 = 5$40). (Gonçalves, 1974, p. 79) 1 
			Encontrar o todo	O autor apresenta a tipificação de situações que se enquadram neste tipo de tarefas. 1) Compraram-se três litros de azeite por 54$00. A como saiu o litro? 

				2) Compraram-se três decilitros (0,3l) de azeite por 5$40. A como saiu o litro do mesmo azeite?  O sentido do 1.º problema é nitidamente partitivo (54$00 : 3 = 18$00). (Gonçalves, 1974, p. 80)
		2 - Comparação de quantidades distintas		Não há evidência.
		3 - Reconhecimento da equivalência de quantidades		Não há evidência.

Anexos 9 - Instrumento de caracterização do conhecimento profissional do professor quanto à definição de número racional (CCMNR2, CCMNR3) [182]

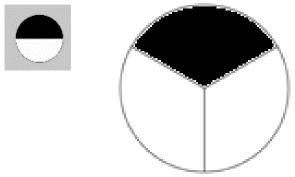
Conhecimento do conteúdo	
Conhecimento comum do conteúdo (CCK)	**Conhecimento especializado do conteúdo (SCK)**
- A definição de número racional apresentada refere-se a um conhecimento científico que é comum a obras que não são destinadas ao ensino básico como as definições de Caraça (2003) -medida; Campos Ferreira (1990) – quociente; ou Santos (2014) e Guerreiro (1989) – classes de equivalência. - A definição de número racional inclui uma definição de fração decimal e de dízima. - A definição apresentada inclui a referência à densidade do conjunto dos números racionais como em Klein (2009), (Caraça, 2003) ou Ferreira (1989).	A definição de número racional apresentada refere-se a um conhecimento do conteúdo que é apresentado em contextos de ensino destacando-se os diferentes significados das frações em contexto (quociente, parte todo, medida, operador, razão) (Monteiro & Pinto, 2005)

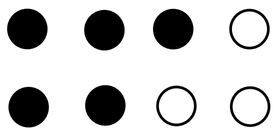
[182] O instrumento aqui apresentado é baseado no modelo de Ball et al. (2008). Destaca-se, no entanto, como os próprios autores referidos salientam no seu trabalho, que o modelo pretende realçar a complexidade do conhecimento do professor para ensinar matemática. As categorias distinguidas não se pretendem estanques, mas em relação umas com outras, como parte de um todo. No instrumento aqui apresentado não se utilizam todas as categorias do modelo por se considerar que, para os níveis de ensino em questão, primeiros anos de escolaridade, a categoria do conhecimento comum do conteúdo integra também a categoria do conhecimento do horizonte matemático.

Conhecimento pedagógico do conteúdo		
Conhecimento do conteúdo e dos alunos (KCS)	**Conhecimento do conteúdo e do seu ensino (KCT)**	**Conhecimento do conteúdo e do currículo (KCCu)**
A parte da obra que se dedica à definição de número racional inclui indicações sobre a necessidade dos futuros professores terem conhecimento de dificuldades que usualmente os alunos têm na compreensão dos números racionais. Ex.: Os alunos considerarem frações como dois números, resultante da interferência com o conhecimento que têm dos números naturais; apresentarem dificuldades porque no conjunto dos racionais cada elemento pode ser representado de diferentes formas (Vamvakoussi & Vosniadou, 2007).	A parte da obra que se dedica à definição do número racional indica ou discute uma sequência de ensino que inclui atividades que põem em evidência aspetos discutidos no conhecimento científico comum e para ensinar, como a utilização de diferentes representações ou de determinadas sequências de ensino. Ex.: A proposta de ensino recorre a diferentes representações do número racional e estabelece relações entre as representações; a sequência de ensino propõe situações que exploram os diferentes significados das frações em contexto (Monteiro & Pinto, 2005); a proposta de ensino discute as vantagens e desvantagens da iniciação aos números racionais ser trabalhada através da forma de fração ou da representação decimal.	A parte da obra que se dedica à definição de número racional inclui indicações sobre a necessidade de se identificar o que o currículo prescrito indica como definição de número racional. São apresentadas indicações sobre tópicos do programa já lecionados, ou que irão ser lecionados, neste conteúdo. São apresentadas indicações sobre o conteúdo de outras disciplinas do mesmo nível em que se possam estabelecer relações com este conteúdo.

Anexo 10 - Instrumento de caracterização do conhecimento profissional do professor quanto aos tipos de unidade (CCMNR4)

<table>
<tr><th colspan="2">Conhecimento do conteúdo</th></tr>
<tr><th>Conhecimento comum do conteúdo (CCK)</th><th>Conhecimento especializado do conteúdo (SCK)</th></tr>
<tr><td>A definição de unidade contínua e unidade discreta refere-se a um conhecimento que é comum a obras que não são destinadas ao ensino básico como as definições apresentadas por Caraça (2003) para conjunto contínuo, conjunto denso ou conjunto numerável.</td><td>São referidos diferentes tipos de unidades: simples ou compostas, discretas ou contínuas (Monteiro & Pinto, 2005).

A apresentação das unidades é feita de forma a que na relação parte todo se tenha em conta o tamanho da unidade (ex: apresente-se sempre a unidade de referência e não se apresente para uma mesma situação unidades com tamanhos diversos de forma a que resulte numa má interpretação - metade de uma determinada unidade seja menor que um terço de uma outra unidade).
</td></tr>
</table>

Conhecimento pedagógico do conteúdo		
Conhecimento do conteúdo e dos alunos (KCS)	**Conhecimento do conteúdo e do seu ensino (KCT)**	**Conhecimento do conteúdo e do currículo (KCCu)**
A parte da obra que se dedica à definição da unidade inclui indicações sobre as dificuldades que os alunos podem apresentar. Ex: confundir a unidade de referência levando a confusões entre a relação parte todo com a parte parte. (Lamon, 2006; Monteiro & Pinto, 2005)  A figura pode prestar-se a diferentes leituras conforme a unidade que for considerada (ex.: $1\frac{1}{4}$; $\frac{5}{8}$; $2\frac{1}{2}$).	A parte da obra que se dedica à definição da unidade indica ou discute uma sequência de ensino que inclui atividades que põem em evidência aspetos discutidos no conhecimento científico comum e para ensinar. Ex: São propostas tarefas diversas que incluem unidades contínuas e unidades discretas; existe uma definição explícita da unidade nas tarefas apresentadas; são propostas tarefas de reconstrução da unidade que passe pela identificação de uma fração unitária, identificação da unidade para chegar à fração pretendida (Monteiro & Pinto, 2005; Lamon, 2006).	A parte da obra que se dedica tipos de unidade inclui indicações sobre a necessidade de se identificar o que o currículo prescrito indica como definição de número racional. São apresentadas indicações sobre tópicos do programa já lecionados, ou que irão ser lecionados, neste conteúdo. São apresentadas indicações sobre o conteúdo de outras disciplinas do mesmo nível em que se possam estabelecer relações com este conteúdo.

Anexo 11 - Instrumento de caracterização do conhecimento profissional do professor quanto ao reconhecimento de frações equivalentes (CCMNR5)

Conhecimento do conteúdo	
Conhecimento comum do conteúdo (CCK)	**Conhecimento especializado do conteúdo (SCK)**
A definição de frações equivalentes refere-se a um conhecimento que é comum a obras que não são destinadas ao ensino básico como a definição de Santos (2014), para determinar quando é que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ $(com\ a, c \in\ \mathbb{Z}\ e\ b, d\ \in\ \mathbb{N})$ representam o mesmo número racional, basta verificar que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd} \Leftrightarrow ad = bc$.	A definição de frações equivalentes apresentada refere-se a um conhecimento científico que é apresentado em contextos de ensino que envolve o raciocínio operativo, o raciocínio multiplicativo e a conservação do todo e das partes (Kamii & Clark, 1995).

Conhecimento pedagógico do conteúdo		
Conhecimento do conteúdo e dos alunos (KCS)	**Conhecimento do conteúdo e do seu ensino (KCT)**	**Conhecimento do conteúdo e do currículo (KCCu)**
A parte da obra que se dedica à equivalência de frações inclui indicações sobre as dificuldades que os alunos podem apresentar em relação a esta noção. Ex.: relacionar "nomes" diferentes ao mesmo número, imaginar ou ignorar linhas que dividem uma unidade - quando a equivalência de frações é apresentada em representações pictóricas que mostram, por exemplo, a unidade dividida em quatro partes e depois em duas partes e indicam a equivalência entre metade e dois quartos) (Lamon, 2002; Kammi & Clark, 1995).	A parte da obra que se dedica à definição de frações equivalentes indica ou discute uma sequência de ensino que ponha em evidência a necessidade de se irem considerando várias partições de uma quantidade sem a alterar (Lamon, 2002), manipulação de materiais, utilização de representações pictóricas para mostrar a equivalência de frações, matematização de situações reais e utilização de registos informais (Kammi & Clark, 1995).	A parte da obra que se dedica à equivalência de frações inclui indicações sobre a necessidade de se identificar o que o currículo prescrito indica como trabalho a realizar com a equivalência de frações, sobre tópicos do programa já lecionados, ou que irão ser lecionados, neste conteúdo. São apresentadas indicações sobre o conteúdo de outras disciplinas do mesmo nível em que se possam estabelecer relações com este conteúdo.

Anexo 12 - Instrumento de caracterização do conhecimento profissional do professor quanto à comparação e ordenação de frações (CCMNR6)

Conhecimento do conteúdo	
Conhecimento comum do conteúdo (CCK)	**Conhecimento especializado do conteúdo (SCK)**
O conhecimento apresentado para a comparação e ordenação de frações refere-se a um conhecimento que é comum a obras que não são destinadas ao ensino básico como a definição de Caraça (2003) um número racional $r = \frac{m}{n}$, todo o número racional $s = \frac{p}{q}$ onde p = m . k e q = n . k (k qualquer inteiro não nulo), é igual a r ou Santos (2014) no caso de $\mathbb{Q}$ esta relação de ordem pode ser definida por $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ *se e só se* $cb - ad \in \mathbb{Z}_{+}$. (pp. 132-133).	Na comparação e ordenação de números racionais são realçados aspetos como os destacadas por Post et al. (1985): 1) tamanho da fração depende da relação entre os dois números naturais operados, ou seja, da razão entre os dois números envolvidos na representação da fração, 2) existe uma relação inversa entre o número de partes e o tamanho de cada parte, 3) quando as frações têm o mesmo denominador há uma relação direta entre o número de partes tomadas e a grandeza da fração.

Conhecimento pedagógico do conteúdo		
Conhecimento do conteúdo e dos alunos (KCS)	**Conhecimento do conteúdo e do seu ensino (KCT)**	**Conhecimento do conteúdo e do currículo (KCCu)**
A parte da obra que se dedica à ordenação e comparação de frações inclui indicações sobre as dificuldades que os alunos podem apresentar em relação a esta noção como confusões de linguagem "mais" "menos", "maior", "menor" (ex.: no contexto das frações maior pode significar maior número de partes em que partimos a unidade ou maior área coberta por cada uma das partes) (Post et al., 1986).	A parte da obra que se dedica à definição de frações equivalentes indica ou discute uma sequência de ensino que ponha em evidência a necessidade de se irem considerando várias partições de uma quantidade sem a alterar (Lamon, 2002), sequência de ensino que inclua ordenação de frações unitárias, ordenação de frações não unitárias, ordenação de frações com o mesmo denominador, com o mesmo numerador e com numeradores e denominadores diferentes (Behr et al., 1984). Comparar números racionais na sua representação decimal (Post et al., 1993). Utilizar frações equivalentes (Orto net al., 1995) e números de referência (Bezuk & Kramer, 1989) para estabelecer comparações entre números racionais.	A parte da obra que se dedica à comparação e ordenação de números racionais inclui indicações sobre a necessidade de se identificar o que o currículo prescrito indica em relação a este aspeto. São apresentadas indicações sobre tópicos do programa já lecionados, ou que irão ser lecionados, neste conteúdo. São apresentadas indicações sobre o conteúdo de outras disciplinas do mesmo nível em que se possam estabelecer relações com este conteúdo.

Anexo 13 – Instrumento de caracterização do conhecimento profissional do professor quanto às operações no conjunto dos números racionais (CCMNR7) [183]

Conhecimento do conteúdo	
Conhecimento comum do conteúdo (CCK)	**Conhecimento especializado do conteúdo (SCK)**
- As operações com os números racionais são apresentadas de uma forma idêntica a outras obras que não são dedicadas ao ensino básico, como em Caraça (2003).	- Na apresentação das operações com os números racionais são destacados aspetos como os diferentes sentidos que as operações podem ter quando são apresentadas em contexto: adição (juntar e acrescentar), subtração (retirar, completar e comparar), (Vale & Pimentel, 2004) multiplicação (adição de parcelas iguais, comparação multiplicativa, razão escalar e o operador partitivo multiplicativo) (Taber, 2002) e a divisão (medida, partilha e operação inversa da multiplicação) (Pinto & Monteiro 2008). - São realçadas as consequências das operações com números racionais não negativos, nomeadamente a multiplicação ou a divisão por números menores do que 1. - Os procedimentos das operações são justificados.

[183] O instrumento aqui apresentado é baseado no modelo de Ball et al. (2008). Destaca-se, no entanto, como os próprios autores referidos salientam no seu trabalho, que o modelo pretende realçar a complexidade do conhecimento do professor para ensinar matemática. As categorias distinguidas não se pretendem estanques, mas em relação umas com outras, como parte de um todo. No instrumento aqui apresentado não se utilizam todas as categorias do modelo por se considerar que, para os níveis de ensino em questão, primeiros anos de escolaridade, a categoria do conhecimento comum do conteúdo integra também a categoria do conhecimento do horizonte matemático.

Conhecimento pedagógico do conteúdo		
Conhecimento do conteúdo e dos alunos (KCS)	**Conhecimento do conteúdo e do seu ensino (KCT)**	**Conhecimento do conteúdo e do currículo (KCCu)**
A parte da obra que se dedica às operações com números racionais inclui indicações sobre as dificuldades que os alunos usualmente têm nestas operações, tanto na representação na forma de fração como na representação decimal. Ex.: adicionar ou subtrair os numeradores e os denominadores na representação em fração, adicionar ou subtrair os numeradores mesmo quando não têm os mesmos denominadores, não colocar as ordens corretamente quando adicionam ou subtraem na representam decimal, não aplicarem corretamente as operações em situações concretas de um problema.	A parte da obra que se dedica às operações com números racionais inclui atividades ou sequências de atividades, ou discute vantagens e desvantagens da apresentação de uma determinada atividade ou representação. Ex.: A proposta de ensino apresenta contextos que explorem os diferentes sentidos das operações; a sequência de ensino explora diferentes representações das operações, como o arranjo retangular na multiplicação ou os modelos de quantidades contínuas na adição e na subtração.	A parte da obra que se dedica à definição de número racional inclui indicações sobre a necessidade de se identificar o que o currículo prescrito indica como definição de número racional. São apresentadas indicações sobre tópicos do programa já lecionados, ou que irão ser lecionados, neste conteúdo. São apresentadas indicações sobre o conteúdo de outras disciplinas do mesmo nível em que se possam estabelecer relações com este conteúdo.

Anexo 14 – Síntese da caracterização do conhecimento profissional do professor no desenvolvimento do sentido de número racional, nos manuais.

1. Caracterização do conhecimento profissional do professor quanto à definição de número racional (CCMNR2, CCMNR3, CCMNR8)[184]

Obra	Conhecimento do conteúdo	
	Conhecimento comum do conteúdo	**Conhecimento especializado do conteúdo**
Nunes (1887)	Há evidência.	Implícito.
Affreixo e Freire (1891)	Não há evidência.	Não há evidência
Preto (1903)	Há evidência.	Implícito.
Coelho (1892, 1906)	Não há evidência.	Implícito.
Pimentel Filho (1934)	Implícito.	Implícito.
Gaspar e Ferreira (1944)	Não há evidência.	Implícito.
Pinheiro (1961)	Não há evidência.	Implícito.
Gonçalves (1972, 1974)	Há evidência.	Há evidência.

[184] Nesta síntese identifica-se se foram, ou não, encontradas evidências de cada domínio do conhecimento profissional. O conhecimento implícito na obra significa que embora o autor não explicite esse conhecimento, os exemplos que apresenta permitem inferir que esse domínio do conhecimento profissional seria trabalhado.

1. Caracterização do conhecimento profissional do professor quanto à definição de número racional (**CCMNR2, CCMNR3, CCMNR8**)[185]

Obra	Conhecimento pedagógico do conteúdo		
	Conhecimento do conteúdo e dos alunos	**Conhecimento do conteúdo e do seu ensino**	**Conhecimento do conteúdo e do currículo**
Nunes (1887)	Há evidência.	Há evidência.	Não há evidência.
Affreixo e Freire (1891)	Não há evidência.	Não há evidência.	Não há evidência.
Preto (1903)	Há evidência.	Há evidência.	Não há evidência.
Coelho (1892, 1906)	Não há evidência.	Implícito.	Não há evidência.
Pimentel Filho (1934)	Implícito.	Há evidência.	Há evidência.
Gaspar e Ferreira (1944)	Não há evidência.	Há evidência.	Há evidência.
Pinheiro (1961)	Não há evidência.	Há evidência.	Há evidência.
Gonçalves (1972, 1974)	Há evidência	Há evidência.	Há evidência.

[185] Nesta síntese identifica-se se foram, ou não, encontradas evidências de cada domínio do conhecimento profissional. O conhecimento implícito na obra significa que embora o autor não explicite esse conhecimento, os exemplos que apresenta permitem inferir que esse domínio do conhecimento profissional seria trabalhado.

2. Caracterização do conhecimento profissional do professor quanto aos tipos de unidade (**CCMNR4**)[186]

Obra	**Conhecimento do conteúdo**	
	Conhecimento comum do conteúdo	**Conhecimento especializado do conteúdo**
Nunes (1887)	Há evidência.	Há evidência.
Affreixo e Freire (1891)	Não há evidência.	Não há evidência.
Preto (1903)	Há evidência.	Há evidência.
Coelho (1892, 1906)	Não há evidência.	Implícito.
Pimentel Filho (1934)	Implícito.	Há evidência.
Gaspar e Ferreira (1944)	Não há evidência.	Implícito.
Pinheiro (1961)	Não há evidência.	Implícito.
Gonçalves (1972, 1974)	Implícito.	Há evidência.

[186] Nesta síntese identifica-se se foram, ou não, encontradas evidências de cada domínio do conhecimento profissional. O conhecimento implícito na obra significa que embora o autor não explicite esse conhecimento, os exemplos que apresenta permitem inferir que esse domínio do conhecimento profissional seria trabalhado.

2. Caracterização do conhecimento profissional do professor quanto aos tipos de unidade (**CCMNR4**)[187]

Obra	**Conhecimento pedagógico do conteúdo**		
	Conhecimento do conteúdo e dos alunos	**Conhecimento do conteúdo e do seu ensino**	**Conhecimento do conteúdo e do currículo**
Nunes (1887)	Implícito.	Implícito.	Há evidência.
Affreixo e Freire (1891)	Não há evidência.	Não há evidência.	Não há evidência.
Preto (1903)	Implícito.	Implícito.	Há evidência.
Coelho (1892, 1906)	Não há evidência.	Não há evidência.	Não há evidência.
Pimentel Filho (1934)	Implícito.	Há evidência.	Há evidência.
Gaspar e Ferreira (1944)	Não há evidência.	Não há evidência.	Há evidência.
Pinheiro (1961)	Não há evidência.	Não há evidência.	Há evidência.
Gonçalves (1972, 1974)	Implícito.	Há evidência.	Há evidência.

[187] Nesta síntese identifica-se se foram, ou não, encontradas evidências de cada domínio do conhecimento profissional. O conhecimento implícito na obra significa que embora o autor não explicite esse conhecimento, os exemplos que apresenta permitem inferir que esse domínio do conhecimento profissional seria trabalhado.

3. Caracterização do conhecimento profissional do professor quanto ao reconhecimento de frações equivalentes (**CCMNR4**)[188]

Obra	**Conhecimento do conteúdo**	
	Conhecimento comum do conteúdo	**Conhecimento especializado do conteúdo**
Nunes (1887)	Há evidência.	Há evidência.
Affreixo e Freire (1891)	Não há evidência.	Não há evidência.
Preto (1903)	Há evidência.	Há evidência.
Coelho (1892, 1906)	Não há evidência.	Há evidência.
Pimentel Filho (1934)	Implícito.	Há evidência.
Gaspar e Ferreira (1944)	Não há evidência.	Implícito.
Pinheiro (1961)	Não há evidência.	Implícito.
Gonçalves (1972, 1974)	Há evidência.	Implícito.

[188] Nesta síntese identifica-se se foram, ou não, encontradas evidências de cada domínio do conhecimento profissional. O conhecimento implícito na obra significa que embora o autor não explicite esse conhecimento, os exemplos que apresenta permitem inferir que esse domínio do conhecimento profissional seria trabalhado.

3. Caracterização do conhecimento profissional do professor quanto ao reconhecimento de frações equivalentes (**CCMNR4**)[189]

Obra	**Conhecimento pedagógico do conteúdo**		
	Conhecimento do conteúdo e dos alunos	**Conhecimento do conteúdo e do seu ensino**	**Conhecimento do conteúdo e do currículo**
Nunes (1887)	Não há evidência.	Não há evidência.	Não há evidência.
Affreixo e Freire (1891)	Não há evidência.	Não há evidência.	Não há evidência.
Preto (1903)	Não há evidência.	Não há evidência.	Não há evidência.
Coelho (1892, 1906)	Não há evidência.	Há evidência.	Não há evidência.
Pimentel Filho (1934)	Implícito.	Há evidência.	Não há evidência.
Gaspar e Ferreira (1944)	Implícito.	Há evidência.	Não há evidência.
Pinheiro (1961)	Implícito.	Há evidência.	Não há evidência.
Gonçalves (1972, 1974)	Implícito.	Há evidência.	Não há evidência.

[189] Nesta síntese identifica-se se foram, ou não, encontradas evidências de cada domínio do conhecimento profissional. O conhecimento implícito na obra significa que embora o autor não explicite esse conhecimento, os exemplos que apresenta permitem inferir que esse domínio do conhecimento profissional seria trabalhado.

4. Caracterização do conhecimento profissional do professor quanto à comparação e ordenação de frações (**CCMNR4**)[190]

Obra	Conhecimento do conteúdo	
	Conhecimento comum do conteúdo	**Conhecimento especializado do conteúdo**
Nunes (1887)	Há evidência.	Há evidência.
Affreixo e Freire (1891)	Não há evidência.	Não há evidência.
Preto (1903)	Há evidência.	Há evidência.
Coelho (1892, 1906)	Não há evidência.	Não há evidência.
Pimentel Filho (1934)	Não há evidência.	Há evidência.
Gaspar e Ferreira (1944)	Não há evidência.	Há evidência.
Pinheiro (1961)	Não há evidência.	Há evidência.
Gonçalves (1972, 1974)	Não há evidência.	Há evidência.

[190] Nesta síntese identifica-se se foram, ou não, encontradas evidências de cada domínio do conhecimento profissional. O conhecimento implícito na obra significa que embora o autor não explicite esse conhecimento, os exemplos que apresenta permitem inferir que esse domínio do conhecimento profissional seria trabalhado.

4. Caracterização do conhecimento profissional do professor quanto à comparação e ordenação de frações (**CCMNR4**)[191]

Obra	**Conhecimento pedagógico do conteúdo**		
	Conhecimento do conteúdo e dos alunos	**Conhecimento do conteúdo e do seu ensino**	**Conhecimento do conteúdo e do currículo**
Nunes (1887)	Não há evidência.	Há evidência.	Não há evidência.
Affreixo e Freire (1891)	Não há evidência.	Não há evidência.	Não há evidência.
Preto (1903)	Não há evidência.	Há evidência.	Não há evidência.
Coelho (1892, 1906)	Não há evidência.	Há evidência.	Não há evidência.
Pimentel Filho (1934)	Há evidência.	Há evidência.	Não há evidência.
Gaspar e Ferreira (1944)	Implícito.	Há evidência.	Não há evidência.
Pinheiro (1961)	Implícito.	Implícito.	Não há evidência.
Gonçalves (1972, 1974)	Implícito.	Há evidência.	Não há evidência.

[191] Nesta síntese identifica-se se foram, ou não, encontradas evidências de cada domínio do conhecimento profissional. O conhecimento implícito na obra significa que embora o autor não explicite esse conhecimento, os exemplos que apresenta permitem inferir que esse domínio do conhecimento profissional seria trabalhado.

5. Caracterização do conhecimento profissional do professor quanto às operações no conjunto dos números racionais (**CCMNR4**)[192]

Obra	**Conhecimento do conteúdo**	
	Conhecimento comum do conteúdo	**Conhecimento especializado do conteúdo**
Nunes (1887)	Há evidência.	Implícito.
Affreixo e Freire (1891)	Não há evidência.	Não há evidência.
Preto (1903)	Há evidência.	Há evidência
Coelho (1892, 1906)	Há evidência.	Não há evidência.
Pimentel Filho (1934)	Não há evidência.	Há evidência.
Gaspar e Ferreira (1944)	Não há evidência.	Não há evidência.
Pinheiro (1961)	Não há evidência.	Há evidência (decimais).
Gonçalves (1972, 1974)	Não há evidência.	Implícito (frações)/Há evidência (decimais).

[192] Nesta síntese identifica-se se foram, ou não, encontradas evidências de cada domínio do conhecimento profissional. O conhecimento implícito na obra significa que embora o autor não explicite esse conhecimento, os exemplos que apresenta permitem inferir que esse domínio do conhecimento profissional seria trabalhado.

5. Caracterização do conhecimento profissional do professor quanto às operações no conjunto dos números racionais (**CCMNR4**)[193]

Obra	**Conhecimento pedagógico do conteúdo**		
	Conhecimento do conteúdo e dos alunos	**Conhecimento do conteúdo e do seu ensino**	**Conhecimento do conteúdo e do currículo**
Nunes (1887)	Não há evidência.	Implícito.	Não há evidência.
Affreixo e Freire (1891)	Não há evidência.	Não há evidência.	Não há evidência.
Preto (1903)	Não há evidência.	Implícito.	Não há evidência.
Coelho (1892, 1906)	Não há evidência.	Não há evidência.	Não há evidência.
Pimentel Filho (1934)	Há evidência.	Há evidência.	Não há evidência.
Gaspar e Ferreira (1944)	Não há evidência.	Implícito (frações). Há evidência (decimais).	Não há evidência.
Pinheiro (1961)	Há evidência (decimais).	Implícito (frações)/Há evidência (decimais).	Não há evidência.
Gonçalves (1972, 1974)	Há evidência (decimais).	Implícito (frações)/Há evidência (decimais).	Não há evidência.

[193] Nesta síntese identifica-se se foram, ou não, encontradas evidências de cada domínio do conhecimento profissional. O conhecimento implícito na obra significa que embora o autor não explicite esse conhecimento, os exemplos que apresenta permitem inferir que esse domínio do conhecimento profissional seria trabalhado.

Anexo 15 – Síntese da caracterização das representações utilizadas no desenvolvimento do trabalho com os números racionais nos manuais.[194]

Obra		Simbólicas				Pictóricas (icónicas)		Ativas	
	Verbais	**Numeral decimal**	**Numeral misto**	**Fração**	**Percentagem**	**Modelos de quantidade contínua**	**Modelos de quantidade discreta**	**Estruturados**	**Não estruturados**
Nunes (1887)	Sim (+).	Sim (+).	Sim.	Sim (+).	Sim.	Não.	Não	Não.	Não.
Affreixo e Freire (1891)	Não.	Não.	Não.	Não.	Não.	Não.	Não.	Não.	Não.
Preto (1903)	Sim	Sim	Sim.	Sim.	Sim.	Não.	Não.	Não.	Não.
Coelho (1892, 1906)	Sim.	Sim	Não.	Sim.	Não.	Não.	Não.	Sim.	Não.

[194] Nesta síntese identifica-se as representações utilizadas nos manuais. O Sim (+) identifica a representação mais utilizada e o Sim (-) identifica um tipo de representado que foi encontrado no manual, mas que não é predominante.

Obra	Verbais	Simbólicas: Numeral decimal	Simbólicas: Numeral misto	Simbólicas: Fração	Simbólicas: Percentagem	Pictóricas (icónicas): Modelos de quantidade contínua	Pictóricas (icónicas): Modelos de quantidade discreta	Ativas: Estruturados	Ativas: Não estruturados
Pimentel Filho (1934)	Sim.	Sim.	Sim.	Sim.	Sim.	Sim (círculos, segmentos de reta).	Sim (-)	Sim	Sim
Gaspar e Ferreira (1944)	Sim.	Sim.	Não	Sim.	Não.	Sim (retângulos)	Não.	Não	Sim
Pinheiro (1961)	Sim.	Sim.	Sim	Sim.	Não.	Sim (retângulos)	Não.	Não	Sim
Gonçalves (1972, 1974)	Sim.	Sim.	Não.	Sim.	Sim.	Sim (círculos, segmentos de reta).	Sim (-).	Sim.	Sim.

Anexo 16 - Síntese da caracterização das situações matemáticas e contextos utilizados no desenvolvimento do trabalho com os números racionais nos manuais.[195]

Obra	Situações					Problemas					Contextos		Tarefas com frações		
	Complexidade		Contexto			Tipologia									
	Exercícios	Investigação	Estritamente numéricas	Semirreais	Reais	Cálculo	Processo	Aplicação	Recreativo	Formulação	Comercial	Medida	Identifica quantidades	Comparação quantidades	Reconhecimento de equivalência
Nunes (1887)	Sim (+)	Não	Sim (+)	Sim (+)	Não	Sim (+)	Sim (-)	Não	Não	Não	Sim (+)	Sim (+)	Não	Não	Não
Affreixo e Freire (1891)	Não	Não	Não	Não	Não	Não	Não	Não	Não	Não	Não	Não	Não	Não	Não
Preto (1903)	Sim (+)	Não	Sim (+)	Sim (+)	Não	Sim (+)	Sim (-)	Não	Não	Não	Sim (+)	Sim (+)	Não	Não	Não
Coelho (1892, 1906)	Sim (+)	Não	Sim (+)	Não	Não	Não	Não	Não	Não	Não	Não	Não	Não	Não	Não

195 Nesta síntese identifica-se as representações utilizadas nos manuais. O Sim (+) identifica a representação mais utilizada e o Sim (-) identifica um tipo de representado que foi encontrado no manual, mas que não é predominante.

Obra	Situações					Problemas					Contextos		Tarefas com frações		
	Complexidade		Contexto			Tipologia									
	Exercícios	Investigação	Estritamente numéricas	Semirreais	Reais	Cálculo	Processo	Aplicação	Recreativo	Formulação	Comercial	Medida	Identifica Quantidades	Comparação quantidades	Reconhecimento de equivalência
Pimentel Filho (1934)	Sim (+)	Não	Sim (+)	Sim (+)		Sim (+)	Sim (-)	Não	Não	Não	Sim (+)	Sim (+)	Não	Não	Não
Gaspar e Ferreira (1944)	Sim	Não	Sim	Sim (-)		Sim (-)	Não	Não	Não	Não	Sim (-)	Sim (-)	Não	Não	Não
Pinheiro (1961)	Sim (+)	Não	Sim (+)	Sim (-)		Sim (-)	Não	Não	Não	Sim	Não	Sim	Não	Não	Não
Gonçalves (1972, 1974)	Sim (+)	Não	Sim (+)	Sim (+)		Sim (+)	Sim (-)	Não	Não	Não	Sim (+)	Sim (+)	Sim (+)	Não	Não

Anexo 17 – Digitalização dos documentos legais utilizados como fonte na investigação (disponibilizados em formato digital – *PDF*).

Documentos legislativos disponibilizados em:

https://drive.google.com/drive/folders/1T09bCYu0zaLhMajcMK6pi3QP9sTyvqHT?usp=sharing

Anexo 18 – Digitalização dos manuais utilizados como fonte na investigação (disponibilizados em formato digital – *PDF*).

Manuais digitalizados disponíveis em:

https://drive.google.com/drive/folders/1jxXLnUfgwWTVtcG_jLnvR7g7xk3YiN9D?usp=sharing