

SOCIEDADE PORTUGUESA DE CIÊNCIAS DA EDUCAÇÃO
Secção de Educação e Matemática

Aprendizagens em Matemática

Editores:

Ana Maria Boavida
António Domingos
José Manuel Matos
Margarida Junqueira

1997

Data de publicação: Agosto de 1997

Capa: Arq. J. Simões Raposo

Tiragem: 400 exemplares

Impressão: GRAFIS, Coop. de Artes Gráficas, CRL

Depósito Legal: 114928/97

ÍNDICE

Prefácio.....	1
CONFERÊNCIAS PLENÁRIAS	3
<i>La géométrie et les figures dynamiques à l'écran de l'ordinateur: Passages d'un monde à l'autre</i>	
Colette Laborde.....	5
<i>The theorems of sun a teaching experiment on conjecturing and proving in the 8th grade</i>	
Maria G. Bartolini Bussi e Barbara Bergamini	21
<i>Aprendizagens em Matemática: problemáticas da investigação portuguesa</i>	
José Manuel Matos.....	43
GRUPOS DE DISCUSSÃO	63
Grupo I. O conhecimento matemático dos alunos: suas construções e produções	
Joana Porfírio.....	65
<i>As concepções dos alunos sobre sucessão convergente: resultados preliminares</i>	
Eduarda Moura e Maria José Costa	67
<i>A aprendizagem da subtração</i>	
Maria de Lurdes Serrazina e Isolina Oliveira.....	83
Grupo II. Capacidade de matematização	
Ana Paula Mourão.....	89
<i>O Cabri-géomètre na resolução de problemas: Processos evidenciados e construção de conhecimentos por alunos do 6º ano de escolaridade</i>	
Maria Isabel Coelho.....	97
Grupo III. A contextualização das aprendizagens em Matemática	
Madalena Pinto dos Santos.....	111
<i>Como é que as emoções estão presentes na aprendizagem da Matemática?</i>	
Ilda Couto Lopes.....	113

COMUNICAÇÕES.....	161
<i>Modelo de ensino não assumido: xeque-mate aos paradigmas de aprendizagem?</i>	
João David Vieira.....	163
<i>Capacidade de interligação da álgebra à geometria com ajuda da calculadora (gráfica)</i>	
J. Orlando Freitas	169

Prefácio

Publicamos neste livro um conjunto de trabalhos subordinados ao tema Aprendizagens em Matemática. Estes trabalhos foram apresentados ao V Encontro de Investigação em Educação Matemática organizado pela Secção de Educação e Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação que decorreu em Tróia, entre 28 e 30 de Abril de 1996 e contou com cerca de oitenta participantes. Pretendeu este encontro reflectir sobre problemáticas e metodologias de investigação neste domínio, considerando as aprendizagens como fenómenos individuais, sociais, cognitivos, afectivos e culturais. Neste âmbito, o programa do encontro incluiu três sessões plenárias, três grupos de discussão, comunicações e uma mesa redonda.

Os grupos de discussão ocuparam grande parte do encontro, funcionando em paralelo e tendo como temas aglutinadores

- 1) o conhecimento matemático dos alunos, as suas construções e produções,
- 2) a capacidade de matematização e
- 3) a contextualização das aprendizagens em Matemática.

De modo a estimular a troca de ideias, foram apresentadas, em cada grupo, comunicações que se prendiam directamente com a problemática em debate.

Um dos grandes objectivos dos grupos de discussão foi proporcionar contextos favoráveis ao estudo aprofundado de cada um dos temas referidos. Neste sentido, no primeiro dia do encontro solicitou-se a cada um dos participantes que optasse por um único destes grupos e nele se mantivesse durante os dois dias.

No final do encontro decorreu uma Mesa Redonda em que se apresentaram sínteses do que de mais significativo se debateu em cada um dos grupos de discussão.

Este livro decorre precisamente deste trabalho, apresentando sucessivamente as conferências plenárias, as diversas apresentações nos grupos de discussão, bem como resumos dos mesmos da responsabilidade das dinamizadoras e ainda outras comunicações.

*Ana Maria Boavida
António Domingos
José Manuel Matos
Margarida Junqueira*

CONFERÊNCIAS PLENÁRIAS

La géométrie et les figures dynamiques à l'écran de l'ordinateur: Passages d'un monde à l'autre

Colette Laborde, Université Joseph Fourier

Résumé

On distingue deux mondes :

- le monde des objets théoriques de la géométrie
- et le monde des représentations dynamiques de ces objets à l'écran de l'ordinateur.

Il est très tentant d'utiliser les possibilités de visualisation et d'exploration de ce deuxième monde pour organiser un apprentissage de la géométrie. On fait l'hypothèse que chaque monde nécessite de la part des élèves des traitements spécifiques et surtout que des liens soient établis entre les deux mondes. L'exposé précisera la nature de ces traitements et de ces liens, il montrera que leur disponibilité chez les élèves nécessite un apprentissage et proposera quelques classes de problèmes susceptibles de favoriser un tel apprentissage.

I — Le géométrique et le spatio-graphique

1.1 — La distinction entre théorique et spatio-graphique

On considère la géométrie comme un corps de connaissances théoriques, même si elle a pu se développer partiellement sous la pression d'exigences du monde réel. On distingue les objets et relations géométriques qui sont de nature théorique, de leurs extériorisations dans des systèmes de signifiants divers. On s'intéresse en particulier aux *réalités spatio-graphiques* (dessins produits par la trace du plomb sur le papier, d'un bâton sur le sable, d'électrons sur l'écran de l'ordinateur) qui représentent ces objets théoriques. En tant que réalités de l'espace sensible, elles donnent à voir des relations spatiales. Les objets et relations de la géométrie sollicitent de la part de l'individu des connaissances et contrôles théoriques tandis que les réalités spatio-graphiques sollicitent d'abord une appréhension et des contrôles perceptifs (parfois aidés d'instruments). Ce n'est que lors d'un processus d'interprétation en termes de géométrie, qu'elles appellent des connaissances théoriques.

L'existence de ces deux modes de connaissances et de contrôles a été exprimée dans plusieurs recherches, sous des noms parfois différents : dessin/figure (Parzysz, 1988, Arsac, 1989, Laborde & Capponi, 1994), *figural concept* (Fishbein, 1993, Mariotti, 1995), *problématique pratique* / *problématique théorique* (Salin et

Berthelot, 1994). Duval (1988, 1994), Matos (1992) et Salin & Berthelot (*op.cit.*) ont montré que l'appréhension perceptive peut s'ériger en obstacle à une interprétation géométrique. En particulier, des dessins prototypiques et les traitements associés (Matos, 1992, p.109) se sont installés. Pluvinae (1989) et Rauscher (1993) ont proposé l'expression *géométrie de traitement* pour désigner les traitements de dessins contrôlés par des connaissances géométriques dans l'enseignement de la géométrie au collège.

1.2 — *Les micromondes*

Un micromonde est une création d'un monde de réalités artificielles fournissant un modèle (au sens des logiciens) d'une théorie. Ce monde comporte des objets sur lesquels on peut agir grâce à des actions, on peut aussi créer de nouveaux objets. Une fois créés, les objets ont un comportement régulé par la théorie sous jacente au modèle. Même si l'utilisateur du micro-monde peut agir sur ces objets, ces derniers présentent donc une certaine autonomie, de la même manière qu'on ne peut faire n'importe quoi avec un objet matériel. Un micromonde comme Cabri-géomètre (Laborde & Straesser, 1990) permet de créer des réalités spatio-graphiques d'objets géométriques à l'aide de commandes exprimées en termes de primitives géométriques (droite perpendiculaire à, médiatrice de, milieu de, ...). Ces dessins à l'écran de l'ordinateur peuvent être saisis par l'un de leurs éléments que l'on déplace à l'aide de la souris, le dessin se déforme alors en conservant les propriétés géométriques qui ont servi à le construire et celles qui en découlent dans une géométrie *grosso modo* euclidienne. On pourrait comparer ces réalités que sont les Cabri-dessins aux objets physiques du monde réel, en déclarant de façon rapide qu'ils résistent aux manipulations de l'individu en suivant des lois de la géométrie. Cette métaphore condense la philosophie des micromondes: il s'agit d'offrir une réalité matérielle incarnant une théorie mais une réalité épurée de tous les bruits parasites de l'authentique réel (Minsky-Papert, 1970, Thompson, 1985). Une certaine philosophie de l'apprentissage imprègne donc la notion de micromonde dans ses débuts euphoriques : en interagissant avec ces réalités artificielles, l'élève reconstruirait une théorie comme modèle des comportements qu'il observe et des rétroactions qu'il reçoit.

Un nouveau couple modèle/système émerge de cette philosophie, le modèle est une construction mentale effectuée par le sujet humain interagissant avec le micromonde, le système est le micro-monde. Le modèle est du côté théorique, le système est du côté du réel. Le ressort des micromondes tient donc à cette double démarche de modélisation, de la théorie à un modèle sous forme de réalités élaboré par le concepteur du micromonde, du monde de réalités à une théorie reconstruite par le sujet qui interagit avec le micromonde.

Une convergence de plusieurs recherches à la fin des années 80 a mis en évidence la faillibilité de la philosophie initiale des micromondes: les apprentissages attendus de la seule confrontation des élèves aux micromondes ne se produisaient pas. (Hoyles & Sutherland, 1990, Hillel & Kieran, 1987). Certains ont pris conscience de la nécessité de l'organisation didactique d'un milieu, des interventions de l'enseignant et des phases d'institutionnalisation et d'une analyse des micromondes en termes de validité épistémologique (Balacheff & Sutherland, 1994).

1.3 — Interprétation de la résolution d'un problème de géométrie scolaire en termes de spatio-graphique/théorique

Un problème de géométrie est donné à l'élève dont on attend une réponse officielle exprimée dans la théorie et obtenue à l'aide de moyens de nature théorique. Les réalités spatio-graphiques sont des moyens considérés dans le système didactique comme auxiliaires, pourvoyeurs d'idées mais les éléments de la solution ne peuvent y faire appel en disant en tirer des informations (Hachette Collège 4ème, 1992, p. 138, élèves de 13-14 ans):

Certaines impressions sont parfois mauvaises. L'utilisation des instruments permet seulement de se faire une idée de certaines propriétés d'une figure [...] Quand on affirme un résultat, il faut le prouver en utilisant une ou plusieurs propriétés étudiées en classe.

Il n'est pas licite en classe de 3ème en France de conclure à l'équidistance d'un point de deux autres points, par une évaluation qu'elle soit à l'œil ou instrumentée sur le dessin même si c'est un dessin dynamique comme un Cabri-dessin.

Notons cependant que la situation n'est pas si simple, et que du moins dans l'enseignement secondaire, on ne peut reprendre l'affirmation de Hardy (1940, p. 125):

It is plain first, that the truth of the theorems which I prove is in no way affected by the quality of my drawings. Their function is merely to bring home my meaning to my hearers, and if I can do that, there would be no gain in having them redrawn by the most skilful draughtsman.

Certaines informations utilisées dans les démonstrations sont dans les faits tirées du dessin, telles celles relatives à l'ordre, à la position des points dans les différentes régions que l'on peut distinguer dans le dessin, à certaines intersections. Une des premières démonstrations faite à l'école secondaire est celle de l'intersection des trois médiatrices d'un triangle. Sa rédaction dans un manuel français actuel de 5ème (élèves de 12-13 ans) (Collection Cinq sur Cinq, 1995, p.119) est la suivante: "Marquer trois points L, M, et N non alignés. Tracer les droites D et Δ , médiatrices respectives des segments [LM] et [MN]; soit A leur point d'intersection..." Elle prend pour évidence l'intersection de deux des médiatrices,

à l'instar des Elements d'Euclide qui dès la première proposition du livre I (construction d'un triangle équilatéral de côté AB donné) affirme l'existence de l'intersection des deux cercles, l'un de centre A et de rayon AB, l'autre de centre B et de rayon AB.

La qualité et la précision du dessin sont donc dans ce contexte susceptibles d'affecter les évidences perceptives et donc les démonstrations qui s'appuient sur elles.

Notre analyse sera donc fondée sur deux hypothèses de travail

1 — l'élaboration d'une solution à un problème de géométrie est faite d'une succession d'allers et retours entre théorie et spatio-graphique selon le schéma suivant (Fig.1):

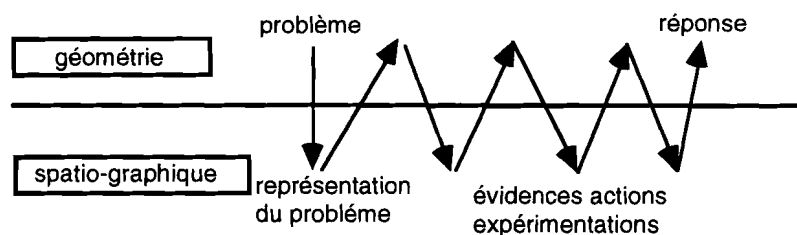


Fig.1

2 — la rédaction d'une solution officielle nécessite *parfois* le recours à des évidences perceptives tirées du spatio-graphique. Le problème pour les élèves est dans la juste appréciation suivant les canons scolaires (variables suivant les niveaux) de ce *parfois*, c'est-à-dire de savoir distinguer les évidences qu'ils sont en droit d'utiliser pour une démonstration de celles dont l'enseignant attend une justification théorique.

II — Allers et retours entre géométrie et spatio-graphique

Dans ces allers et retours entre géométrie (ou théorique) et spatio-graphique lors de la recherche de la solution à un problème, les élèves travaillent à trois niveaux :

- au niveau spatio-graphique, dans lequel ils repèrent des invariants spatio-graphiques. Citons en quelques uns :
 - . la localisation d'un objet par rapport à un autre: à l'intérieur ou à l'extérieur, l'ordre de points alignés, la proximité, l'intersection,...
 - . les formes : circulaire, carrée, l'alignement, la tangence, la symétrie,...
 - . les coïncidences d'objets,
 - . l'estimation de longueurs, de tailles,

Soulignons que ces invariants spatio-graphiques ne sont pas spontanés chez les élèves et sont le résultat d'un apprentissage. Ainsi, les premières formes reconnues par les élèves sont circulaires et carrées, mais plus tard après un apprentissage de la géométrie, les élèves savent reconnaître la forme d'une ellipse, ou d'une parabole. L'apprentissage de ces invariants se fait donc en interaction avec l'apprentissage de la géométrie.

- au niveau théorique, dans lequel les élèves ont recours à des définitions, théorèmes qu'ils utilisent dans des implications
- dans la mise en relation entre spatio-graphique et théorique. De l'observation d'élèves résolvant un problème de géométrie, nous avons dégagé plusieurs modalités sous lesquelles peut s'effectuer cette mise en relation:
 - . interprétation géométrique immédiate d'un invariant spatio-graphique,
 - . raison géométrique donnée à l'existence d'un invariant spatio-graphique repéré,
 - . prédiction sur le spatio-graphique issue de connaissances géométriques: si l'on dessine un cercle de rayon OM , il devrait toucher la droite D en M parce que D est perpendiculaire à OM ,
 - . expérimentation sur le dessin fondée sur des connaissances géométriques : si ce quadrilatère est un carré, ses diagonales devraient être perpendiculaires. Vérifions sur le dessin si elles le sont, elles ne le sont pas donc le quadrilatère considéré n'est pas un carré.

L'observation d'élèves travaillant dans l'environnement informatique Cabri-géomètre nous a montré que les mises en relation entre spatio-graphique et théorique avaient aussi lieu, peut-être même de façon plus importante qu'en papier crayon. En effet, les fonctionnalités de l'environnement Cabri-géomètre permettent davantage d'expérimentations sur le dessin à l'écran de l'ordinateur : on peut déplacer un élément du dessin et observer les modifications du dessin, on peut mesurer, on peut vérifier certaines relations géométriques entre objets. Donnons un exemple: on conjecture que deux droites D et D' sécantes en A sont perpendiculaires, on peut tracer une perpendiculaire D'' à D' par A et vérifier visuellement si D'' et D restent en coïncidence lors du déplacement d'un des objets du dessin. Les expérimentations sont donc non seulement potentiellement plus nombreuses mais de nature différentes puisque le comportement du dessin est contrôlé par une théorie géométrique. Cette dernière caractéristique nous semble fondamentale pour l'apprentissage: elle permet la confrontation des attentes de l'élève à ce qu'il observe sur l'écran qui a lieu de façon indépendante de sa volonté; l'ordinateur est alors susceptible d'opposer un démenti à ce que l'élève

supposait. De la contradiction naît un déséquilibre cognitif, dont on sait qu'il peut être moteur pour l'évolution des connaissances.

Dans ces observations d'élèves travaillant avec Cabri-géomètre, nous avons de plus relevé une nouvelle catégorie de mises en relation entre spatio-graphique et géométrie dont certains travaux (Jones, 1995, Hoelzl, 1994 & 1995, Noss & Hoyles, 1996) rendent compte. Les élèves combinent des invariants spatio-graphiques et des relations géométriques pour caractériser des objets géométriques. Ainsi dans Jones (1995), deux élèves britanniques caractérisent le centre O d'un cercle tangent en P à une droite $D1$ et à une droite $D2$ comme l'intersection d'une perpendiculaire à $D1$ issue de P et d'une perpendiculaire à $D2$ qu'on fait bouger jusqu'à ce que O soit à égale distance de $D1$ et $D2$ (Fig.2).

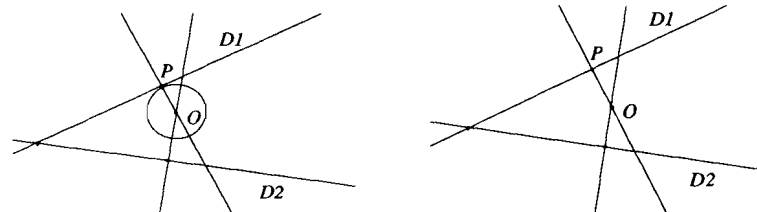


Fig.2

Cette nouvelle catégorie de mises en relation nous semble importante car elle constitue probablement une évolution dans la recherche des élèves, un pont entre des constatations spatio-graphiques et des relations géométriques sur lequel l'enseignant peut s'appuyer.

De la même façon que nous avons supposé que les invariants spatio-graphiques sont construits par les élèves, nous faisons l'hypothèse que les mises en relation entre spatio-graphique et géométrie se forment au cours du temps chez les élèves tout au long de l'apprentissage de la géométrie. Nous voudrions montrer dans le paragraphe suivant, que certaines situations rendues possibles par les logiciels de géométrie dynamique contribuent à leur construction.

III — Situations d'apprentissage de la géométrie en lien avec le visuel

Dans cette perspective d'usage de logiciels de géométrie dynamique, la géométrie est introduite comme permettant de produire, de prédire et d'expliquer des phénomènes repérés visuellement. Deux principes nous paraissent importants pour guider le choix des phénomènes visuels utilisés: la construction d'une progression, le rétablissement de la saillance de certaines propriétés.

III.1 — Deux principes

Une progression

Puisqu'il s'agit déjà d'apprendre à repérer les phénomènes visuels pertinents du point de vue de la géométrie, une progression est à construire dans l'enseignement. Ainsi en première étape, ce sont des évidences sensibles dont la reconnaissance n'exige pas de culture géométrique préalable qu'il vaut mieux soumettre d'abord aux apprenants. Des recherches en psychologie, en particulier piagétienne, on sait que les phénomènes d'apparition et de disparition font partie de ces évidences reconnues par tous les enfants dès leur plus jeune âge, ou encore que la position d'un point à l'intérieur d'une région ou à l'extérieur est perçue relativement tôt.

En début d'enseignement secondaire, on peut ainsi introduire la distinction segment droite qui ne peut apparaître sur le plan spatio-graphique (droite et segment ont des tracés limités) et que l'on ne peut appréhender que sur le plan géométrique. On fait dépendre l'existence d'un objet du point construit par le logiciel comme point d'intersection d'un segment et d'une droite dans un cas, de deux droites dans l'autre. Dans le premier cas, l'objet disparaît lors du déplacement de la droite, dans l'autre il est toujours visible (Fig.3).



Fig.3 Le disque qui disparaît est image de l'autre par une symétrie centrale de centre P, point d'intersection de la droite et du segment AB.

Le phénomène visuel de disparition/apparition versus permanence trouve son explication dans la distinction géométrique segment/droite. (cf. Capponi & Laborde, 1994, pp.24-25 à propos du pied de la perpendiculaire à un segment).

La discussion de la position de l'orthocentre d'un triangle se fait également à partir d'un phénomène visuel aisément reconnaissable par des élèves de début de collège. Bergue (1992) rapporte ainsi qu'ayant demandé à ses élèves de caractériser les triangles dont l'orthocentre est à l'extérieur du triangle, les élèves ont proposé "Ces triangles sont les triangles ayant deux angles obtus". Un tel énoncé débouche sur un travail au plan géométrique, les élèves n'arrivant pas à

produire à l'écran un tel triangle malgré leurs efforts, cherchent âprement à savoir le pourquoi de cette impossibilité.

La visualisation d'un phénomène comme celui de l'intersection en un point de trois droites ou de l'alignement de trois points n'est pas spontanée chez les élèves car elle repose déjà sur la connaissance du caractère remarquable du phénomène géométrique associé. Ce n'est donc qu'en un deuxième temps, après avoir suscité la prise de conscience de leur caractère extraordinaire, que l'on peut utiliser de tels phénomènes visuels comme origine de problèmes. Si l'on reprend la métaphore vygostkienne de *zone de développement proximal* (Vygotski, 1985), les phénomènes visuels donnés à étudier doivent se situer à une *distance critique* des connaissances des élèves.

Cela nous conduit à expliciter un deuxième principe dans l'organisation d'un enseignement fondé sur ce jeu entre visualisation et interprétation géométrique.

Le rétablissement d'une saillance

Les contraintes du système didactique (temps, nécessité d'injecter suffisamment souvent du nouveau) conduisent à privilégier les phénomènes mathématiques remarquables et évidemment à ne pas s'étendre sur le banal. Un exemple simple : l'enseignement accorde ainsi une place plus importante à la parabole qu'à l'ellipse ou l'hyperbole ; cette disproportion dans le temps et la place consacrés à un objet d'enseignement peuvent conduire l'élève à imaginer que l'ensemble des coniques fourmille de paraboles et qu'il faut fouiner pour débusquer une hyperbole ou une ellipse dans cette famille. Il y a assimilation des proportions relatives du temps consacré aux objets à leur importance relative dans l'ensemble des objets mathématiques. En un mot, trop de remarquable nuit au remarquable ; le caractère extraordinaire d'un phénomène ne prend sens que relativement à d'autres phénomènes.

Le faible coût de calcul ou de tracé de dessins apporté par les nouvelles technologies change de façon décisive la proportion remarquable/banal dans l'enseignement. L'enseignant peut se permettre de consacrer quelque temps à travailler sur des propriétés d'énoncé exotique souvent à la forme négative, comme : dans un quadrilatère les médiatrices des côtés ne se coupent pas en général en un même point... et à enclencher en demandant "sauf si ?". Seuls certains quadrilatères ont les médiatrices de leurs côtés concourantes. La propriété correspondante pour les triangles devient du coup beaucoup plus impressionnante et son étude chargée de signification.

De la même façon, trois minutes de recherche infructueuse avec Cabri-géomètre de cinq points par lesquels passerait une parabole, suffisent à convaincre que les conditions pour obtenir une parabole sont plus contraignantes. En un mot,

les nouvelles technologies permettent de soumettre les élèves à un plus grand nombre de situations et de les relativiser, c'est-à-dire de faire prendre conscience du domaine de validité des propriétés étudiées, de leur dépendance de conditions : l'intersection des trois médiatrices d'un triangle est attachée ainsi à la présence de points cocycliques. Si l'on reprend les termes de Halbwichs (1981), on viserait ainsi à ce que l'élève construise une *signification* à la propriété, en en mettant en évidence une *raison*.

III.2 — Situations nouvelles

Citons quelques situations permettant l'usage de savoirs géométriques à des fins de production, prédiction ou explication de phénomènes visuels.

Construction de dessins dynamiques d'objets géométriques dont la description est donnée sous forme discursive

On retrouve ici le problème classique de construction géométrique mais le contexte de l'ordinateur introduit deux contraintes supplémentaires.

Si l'on prend l'exemple de Cabri-géomètre, le dessin obtenu doit résister au déplacement et satisfaire visuellement aux propriétés spatiales attendues. La construction d'une tangente issue d'un point donné à un cercle, faite par le seul contrôle perceptif (on déplace la droite jusqu'à ce qu'elle "touche" le cercle) est invalidée immédiatement dès que l'on déplace le point ou le cercle. En raison de la contrainte de résistance au déplacement, le dessin doit être obtenu par l'usage des primitives disponibles. La seconde contrainte intervient alors, on ne peut utiliser que les primitives à disposition. Le choix des primitives offertes peut s'avérer crucial sur la nature de la solution à élaborer. Par exemple, la suppression de la mise à disposition de la primitive "milieu d'un segment" ou de celle "parallèle à une droite" peut complètement modifier la nature de la tâche. On retrouve ici le même type de modifications que celui entraîné par le passage d'une construction à la règle et au compas à une construction au seul compas.

Ainsi, construire une parallèle à une droite (D) donnée passant par un point P donné à l'aide des seules primitives symétrie axiale (réflexion) et symétrie centrale donnant l'image d'un point, est une tâche qui nécessite d'utiliser des propriétés comme "la droite qui joint un point et son image par symétrie axiale est perpendiculaire à l'axe", ou comme "l'image d'une droite par une symétrie centrale est une droite parallèle", ou encore "la composition de deux symétries centrales est une translation". Ces propriétés font partie des curricula de l'école moyenne (13-14 ans) et l'on attend que les élèves sachent y avoir recours dans les démonstrations. Dans Cabri-géomètre, elles sont utilisées différemment.

D'une part elles sont utilisées dans l'action en servant à produire un dessin et non plus un discours, d'autre part la situation de dessin est inverse de celle sur papier crayon : en papier crayon, on utilise la perpendicularité pour produire l'image d'un point par symétrie et non la symétrie pour obtenir une perpendiculaire. La symétrie devient un outil de production d'une propriété géométrique reconnue d'abord visuellement par les élèves; l'intensité de la réaction d'élèves devant cet aspect opératoire de la symétrie¹, constatée à plusieurs reprises, nous conduit à nous demander si la prise de conscience du *lien de nécessité* entre symétrie et perpendicularité n'est pas plus forte dans ce contexte. Or la présence de ce lien de nécessité chez les élèves est indispensable pour qu'ils puissent faire des démonstrations. En cela, nous rejoignons complètement les idées développées par Rauscher et Pluinage (*op.cit.*) et Rauscher (*op.cit.*) sur l'importance d'une *géométrie de traitement* préalable à une géométrie de la démonstration.

Les boîtes noires ou la reproduction de dessins dynamiques

Il s'agit dans ces tâches de reproduire, à l'aide du logiciel, un dessin dynamique donné à l'écran de façon à obtenir un dessin identique de même comportement (Charrière, 1994). La reproduction se faisant à l'aide des primitives géométriques du logiciel, requiert une analyse du dessin en termes de ces primitives qui soit fondée sur des expérimentations : une supposition est émise relativement à l'existence d'une propriété satisfaite par le dessin, par exemple que trois points sont alignés, on construit une droite passant par deux d'entre eux et l'on vérifie visuellement, si au cours des modifications du dessin entraînées par le déplacement d'un de ses éléments, la droite passe toujours par le troisième point. Des inférences mettant en jeu des connaissances géométriques peuvent être incluses dans ces expérimentations, comme nous l'avons décrit (§ II).

Ce type de tâche est pratiqué depuis longtemps en géométrie papier crayon sous la forme de ce qu'on appelle les jeux de message en géométrie, où des élèves émetteurs communiquent sous forme verbale la description d'un dessin de façon à ce que des élèves récepteurs reproduisent à l'identique le dessin. En papier crayon, la tâche est de reproduire le dessin c'est-à-dire un ensemble de relations spatiales; la géométrie est un instrument fiable d'analyse qui permet de le décrire, de façon à ce qu'il soit reproduit exactement mais les élèves nous ont montré que d'autres moyens de description sont possibles, par exemple en termes spatiaux ("aller vers la droite et tracer un segment de 4cm, puis tracer vers le haut..." ou "tracer vers le nord..."). Faiblesse supplémentaire de ces situations de communication, comme l'écrit Margolinas (1993) : il se peut qu'une description qui ne soit pas en termes géométriques ou qui soit inexacte, donne lieu à un décodage par les récepteurs qui fournisse un dessin identique. La validation est un point faible de ces situations. La

nature différente du Cabri-dessin, produit d'une suite d'actions en termes de primitives géométriques, ainsi que la validation par la déformation du dessin reproduit, disqualifient le recours au spatial et placent le problème d'emblée sur le plan géométrique pour les élèves.

Identification géométrique d'objets donnés par un dessin dynamique

Un bon exemple de telles tâches est donné par l'identification de transformations géométriques (Sorribas, 1995). De nombreuses variations sont possibles :

- la transformation est donnée comme une macro-construction inconnue qui permet d'obtenir l'image de n'importe quel point ,
ou qui permet d'obtenir l'image de n'importe quelle droite;
- la transformation est donnée par un seul couple $(P, T(P))$ où P est déplaçable; on peut alors utiliser la fonctionnalité lieu géométrique et chercher le lieu de $T(P)$ quand P décrit un cercle ou une droite. $T(P)$ a été obtenu à partir de P soit par une primitive du logiciel, soit par une construction géométrique dont les étapes intermédiaires sont cachées (une fonctionnalité du logiciel permet de cacher les tracés).

L'identification d'une transformation par ses invariants est l'instrument de solution, la recherche par tâtonnements de la transformation inconnue étant trop longue et inefficace. Ce qui est nouveau dans le contexte de l'ordinateur, est que cette identification passe par l'interprétation du comportement spatial des points et de leurs images à l'écran et le repérage de coïncidences visuelles. De plus, la transformation concerne ici tous les points de l'écran et non les seuls tracés sur le dessin puisque le point P est déplaçable. On permet ainsi de rendre davantage compte de la transformation en tant que transformation ponctuelle susceptible de s'appliquer à tous les points du plan.

Prédictions géométriques sur des points mobiles

Les lieux (courbes diverses) qui sur le plan géométrique peuvent être considérés comme des ensembles de points, peuvent sur le plan spatial être vues comme trajectoire d'un point mobile. Il y a là une source importante de phénomènes visuels donnant lieu à des explications ou des prédictions de type géométrique. Citons un exemple à propos des coniques.

Dans Cabri-géomètre II, on construit le lieu des centres de cercles tangents à un cercle donné (C) passant par un point donné F . On construit la conique passant par cinq des points de ce lieu. C'est une hyperbole comme l'indique le logiciel si F est à l'extérieur de (C) . Soit A un point du cercle et P le point correspondant de l'hyperbole (centre du cercle tangent en A à (C)). Lorsque le point A par la

fonctionnalité d'animation du logiciel décrit le cercle (C), il est facile de suivre visuellement la trajectoire du point P se mouvant sur une branche de l'hyperbole, disparaître en dehors de l'écran et revenir sur l'autre branche. On pose alors la question de prédire où se situent les points du cercle (C) qui correspondent au changement de branche pour P (Fig.4). Seule une construction géométrique permet d'obtenir une réponse fiable et valable si l'on déplace le cercle (C) ou si l'on fait varier son rayon.

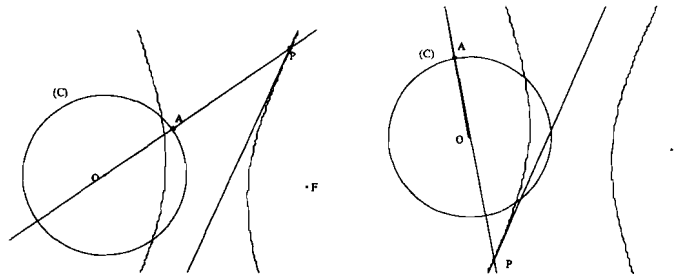


Fig.4 Deux instantanés du mouvement de P sur sa trajectoire

IV — Conclusion : des conditions à mettre en place

Les différentes situations proposées ci-dessus ont toutes en commun

- de susciter une question à partir d'un phénomène spatial constaté visuellement,
- de favoriser une réponse sur le plan géométrique et de disqualifier ou rendre inefficace une solution par tâtonnement spatial contrôlé au seul niveau perceptif.

Leur bon fonctionnement en classe est tributaire de plusieurs conditions,

- le phénomène spatial doit être appréhendé par l'élève et susciter une interrogation ;
- l'élaboration de la solution doit être possible au regard des connaissances des élèves mais non disponible immédiatement ;
- le choix du logiciel; l'interface est un élément clé sous deux aspects : elle assure la communication élève machine et doit minimiser les difficultés externes aux mathématiques de type complexité de syntaxe, usages spécifiques ; elle doit être flexible et adaptable au niveau des élèves pour permettre à l'enseignant de construire ses situations en fonction de ses objectifs d'apprentissage. Evidemment la modélisation géométrique sous-jacente au logiciel se doit de ne pas fournir des résultats spatiaux à l'écran en contradiction avec les résultats géométriques.

Enfin le rôle de l'enseignant n'est pas seulement crucial dans la construction des situations proposées aux élèves, il importe ensuite dans la gestion de la classe au cours du déroulement de la situation dont il ne faut pas cacher la complexité qui par certains aspects contribue justement à la richesse de l'apprentissage: investissement plus important des élèves dans l'action, en général plus grand nombre de solutions possibles élaborées par les élèves, différence de rythme de travail entre élèves.

Références

- Arsac, G. (1989) La construction du concept de figure chez les élèves de 12 ans, *Actes de la 13ème conférence Psychology of Mathematics Education* (Vol. I, pp. 85-92) Paris: Ed. GR Didactique.
- Balacheff, N & Sutherland, R. (1994) Epistemological domain of validity of microworlds The case of Logo and Cabri-géomètre In R. Lewis & P. Mendelsohn (eds) *Lessons from Learning* (IFIP Transactions, A 46, 137-150) Amsterdam : North Holland and Elsevier Science B.V.
- Bergue, D. (1992) Une utilisation du logiciel Géomètre" en 5ème, *Petit x*, 29, 5-13
- Capponi, B. & Laborde, C. *Cabri-classe*, Argenteuil, France : Editions Archimède
- Charriere, P.-M. (1994) *Boîtes noires avec Cabri-géomètre*, polycopié, disponible au Centre Informatique Pédagogique de Genève.
- Duval, R. (1988) Pour une approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence, *Annales de didactique et de sciences cognitives*, Université Louis Pasteur et IREM de Strasbourg, (Vol 1, 57-74).
- Duval, R. (1994) Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique, *REPERES-IREM* n°17, octobre 1994, 121-138.
- Fishbein, E. (1993) The theory of figural concepts, *Educational Studies in Mathematics*, 24, 139-162.
- Guillerault, M. (1991) *La gestion des menus dans Cabri-géomètre. Etude d'une variable didactique*, Mémoire de DEA de Didactique des Disciplines Scientifiques, Université Grenoble 1.
- Halbwachs, F. (1981) Significations et raisons dans la pensée scientifique, *Archives de Psychologie*, 49, 199-229.
- Hardy, G. H. (1940) *A mathematician's apology*, (Réédition 1992), Cambridge (UK): Canto édition.
- Hillel, J., Kieran C. (1987) Schemas used by 12-year-olds in solving selected turtle geometry tasks, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 8(1.2), 61-102.
- Hoelzl, R. (1994) *Im Zugmodus der Cabri-Geometrie: Interaktionsstudien und Analysen zum Mathematiklernen mit dem Computer*, Deutscher Studien Verlag, Weinheim.

- Hoelzl, R. (1995) Between drawing and figure. In R. Sutherland & J. Mason (Eds.) *Exploiting mental imagery with computers in mathematics education* (pp. 117-124). Berlin: Springer.
- Hoyles, C. & Sutherland, R. (1990). Pupil collaboration and teacher intervention in the LOGO environment, *Journal für Mathematik-Didaktik*, 4, 323-343.
- Jones, K. (1995) Intuition and geometrical problem solving, In C. Mammana (ed.) *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century* (pp. 112-21). University of Catania, Italy.
- Laborde, C. & Capponi, B. (1994). Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*.14(1) 165-210.
- Laborde, J.-M. & Straesser, R. (1990). Cabri -géomètre: a microworld of geometry for guided discovery learning, *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 5, 171-77.
- Margolinas, C. (1993) *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques*, La Pensée Sauvage.
- Mariotti, M.,A. (1995) Images and concepts in geometrical reasoning. In R. Sutherland & J. Mason (Eds.) *Exploiting mental imagery with computers in mathematics education* (pp. 97-116). Berlin: Springer.
- Matos, J. M. (1992) Cognitive models in geometry learning In J. P. Ponte, J. F. Matos, J. M. Matos, D. Fernandes (eds), *Mathematical problem solving and new information technologies* (pp. 93-112), Berlin: Springer.
- Minsky, M. & Papert, S. (1970) *Draft of a proposal to ARPA for research on artificial intelligence at MIT*;1970-1971, Boston: MIT.
- Noss, R. & Hoyles, C. (1996) *Windows on mathematical meanings — learning cultures and computers*, Dordrecht: Kluwer.
- Parzysz, B. (1988) Knowing vs Seeing, Problems of the plane representation of space geometry figures, *Educational Studies in Mathematics*, 19, 79-92.
- Pluvinage, F. (1989) Aspects multidimensionnels du raisonnement géométrique, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 2, ULP et IREM de Strasbourg, 5-24.
- Rauscher J. C. (1993) *L'hétérogénéité des professeurs face à des élèves hétérogènes. Le cas de l'enseignement de la géométrie au début du collège*, Thèse de l'Université des Sciences Humaines de Strasbourg.
- Salin, M.-H. & Berthelot, R. (1994) Phénomènes liés à l'insertion de situations didactiques dans l'enseignement élémentaire de la géométrie, In M. Artigue et al. (eds), *Vingt ans de didactique des mathématiques en France* (pp.275-82). Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Sorribas, J.-P. (1995) Quelques problèmes pédagogiques posés par l'utilisation des outils informatiques, *Bulletin de l'APMEP*, 398, 507-517.

Thompson, P. W. (1985) *Mathematical microworld and intelligent computer assisted instruction*. In G. E. Kearsley (ed.) *Artificial intelligence and instruction : applications and methods* Reading MA : Addison Wesley.

Vygotski, L. (1985) *Pensée et langage*, traduction française, Paris: Editions Sociales.

Notes

1 "c'est pas possible, ça nous donne la perpendiculaire, c'est un coup de pot" (Guillerault, 1991)

Colette Laborde, Université Joseph Fourier, BP 53, 38041 Grenoble Cedex 9,
França. Colette.Laborde@imag.fr.

Notes

1 "c'est pas possible, ça nous donne la perpendiculaire, c'est un coup de pot" (Guillerault, 1991)

The theorems of sun a teaching experiment on conjecturing and proving in the 8th grade

Maria G. Bartolini Bussi e Barbara Bergamini, Università di Modena

1. Introduction

The paper analyses some of the research problems that are coped with and raised by a long term teaching experiment on the theorems of sun in the 8th grade. By *theorems of sun* we mean the complex of geometrical properties of a mathematical model of sunshadows, that is realised within affine geometry of threedimensional space: the model considers straight lines, directions, planes and their mutual relationships (e.g. being superimposed, incident, parallel, skew; forming an angle).

Two 8th grade classrooms (15 + 21 students) have been engaged in the experiment. The classrooms of the Junior High School Focherini at Carpi (Modena) are taught by R. Garuti, who implements the project of the Genoa Group (directed by P. Boero).

The teaching experiment has been developed in October 1995 over a period of one month by means of a strict and functional interlacement of individual tasks, two-by-two tasks, interactions with the teacher, whole class discussion. The students had extensive experience in the field of sunshadows; besides they had already made some experiences in producing abstract, general and conditional statements in arithmetic and geometry as well and in producing argumentations to justify their conjectural statements (Boero & Garuti, 1994; Boero & al., 1995).

The starting point of the teaching experiment under scrutiny was the following task:

In the past years we observed that the shadows of two vertical sticks on the horizontal ground are always parallel. What can be said of the parallelism of shadows in the case of a vertical stick and an oblique stick? Can shadows be parallel? At times? When? Always? Never? Formulate your conjecture as a general statement.

The analysis that will be presented in this paper is complementary to analyses produced by other authors (Boero & al., 1996a, 1996b). In the former, they highlight the possibility that in an adequate educational context the majority of grade 8th students successfully implement a process of theorem (conjecture and

proof) production, characterised by a strong cognitive link between conjecture production (and the related argumentation) and proof construction. In the latter, they analyse the crucial role that can be played by the dynamic exploration of the problem situation in the production and proof of the conjecture required to solve the problem.

In this paper we shall sketch an analysis from a Vygotskian perspective of the function of semiotic mediation and social interaction in shaping the classroom processes: they represent two crucial features of the educational context, (for an introduction to the deep connection between semiotic mediation and social interaction in classroom processes, see Bartolini Bussi to appear) and contribute to defining the teacher's role in the overall development of the experiment.

2. Methodological problems: long term teaching experiments

2.1. The teacher's role in research activity

Before entering the specificity of this teaching experiment, a sketchy introduction to the general problems involved by the design, the implementation, the analysis and the public presentation of findings of a long term teaching experiment is required.

We claim that long term teaching experiments are the privileged setting where to study deep changes in the development of mathematical thinking. Teachers are usually well aware of this fact and sometimes they feel ill at ease with the short term detailed observations of researchers that are not supposed to grasp the very important things of the teaching-learning process. Anyway, in most cases the time of educational research does not fit for the time of teaching and learning (Newmann & al., 1989). A reason for this choice, conflictual with teachers' needs, can easily be found in the extreme difficulty to design, implement, analyse and present findings (in either verbal — e. g. lectures — or written — e. g. reports, papers — form) of long term experiments.

No long term experiment can be implemented in any classroom without the strong involvement of the teacher: as it is the teacher who has the institutional responsibility for teaching, s/he can 'lend' her/his classroom for a session (short term experiment), but not for a month or several months. So the first observation concerns the role of teachers in research about long term experiments: *the teacher has to be a member of the research team from the very beginning (design phase).*

2.2. The intermediate analysis.

In the design phase, a problem comes immediately to the foreground: as the experiment consists of several sessions, *how long and how deep is it necessary or*

timely to analyse classroom data between two sessions of the experiment? Surely at the very beginning, only a coarse grain planning of the experiment can be done on the base of a former epistemological and didactical analysis: yet data from the classroom can upset this analysis and suggest a change in the strategy. When the experiment contains also teacher led sessions (and this is usually the case in long term experiments) the quality of teacher's management can be very different with different reactions from the classroom.

The designers have different choices:

to press the experiment in a short period	to dilate the experiment over a long period
making sketchy analysis between sessions	making detailed analysis between sessions,
and emphasising the continuous and global feature of experience	and reestablishing the continuous and global feature of experience by a careful recourse to contract

Surely in the first case, the detailed analysis, that is postponed, could point at inappropriate choices; but in the second case, the effort in reestablishing the continuous and global feature could result very time consuming (long teacher introductions; replication of problems to put again students in situation; reading of previous documents, and so on) and, anyway, not always successful.

No best choice exists: every choice has to be discussed by the research team (that includes the teacher) and carefully examined on the base of available information about the classroom. Some classroom may be already accustomed to have long intervals between two sessions on the same problems; others may not be. In this case the teacher can offer an invaluable cooperation to settle the design.

2.3. *Theoretical frameworks*

In the design and the analysis phases some *theoretical framework* for the study of long term processes is surely needed. Until now research in mathematics education has produced at least two different models of design-analysis of long term processes that have different diffusion:

- 1) the model of didactical engineering (Artigue, 1992, Douady, 1996);
- 2) the model of activity theory (Christiansen & Walther, 1986, Bartolini Bussi to appear).

It is beyond the scope of this paper to produce a comparison and contrast between the two models. We can refer to a previous analysis (Bartolini Bussi,

1994), by recalling that from then an increasing consideration of the teacher's role has been introduced in the former too.

The model of activity theory allows to encompass in the same structure both short term and long term processes, by relating them to each other. An example of implementation of this kind of analysis is in Bartolini Bussi & Boni (1995) and Bartolini Bussi (to appear). After Leont'ev (1978) it is useful to distinguish between the levels of *activity*, *actions* and *operations*. The first is the global level and corresponds to motives (the objects of teaching in the broad sense, including not only the mastery of mathematical concepts and procedures but also the attitudes toward mathematics); activity is realised by means of actions, defined by conscious goals (they include, for instance, the school tasks, either individually or collectively solved); actions are realised by means of operations, that directly depend on the conditions of attaining concrete goals.

Several kinds of analysis can be made on the same teaching experiment:

- (a) *coarse grain analysis* (level activity-actions), concerning the coherence between general motives and conscious goals of situations implemented in the classrooms;
- (b) *fine grain analysis* (levels activity-actions-operations), concerning the coherence between general motives, conscious goals and teacher's operations to attain the above goals;
- (c) *short term analysis* of effects, concerning the immediate effects of teacher's operations on classroom processes;
- (d) *long term analysis* of effects, concerning the traces of motives in pupils' protocols.

In this paper, we shall present only a coarse grain analysis of the teaching experiment on the theorems of sun and shall give some isolated examples of fine grain analysis.

2.4. *Communication of findings*

Last but not least, we wish to address the issue of public communication of findings of long term teaching experiments. How to convey the sense of a long term teaching experiment? A lot of information are supposed to be necessary concerning the theoretical framework, the hypotheses to be tested, the a-priori analysis of the crucial tasks, the methods for collecting data, a chronicle of the sessions, the analysis of the chronicle with reference to design, the functioning of each session of the chronicle, the analysis of the functioning by means of some tools from the theoretical framework, the analysis of the relation between short term and long term processes and so on. Moreover, any description is organised in a

linear way, while the time of activity is better described by means of circular or spiral metaphor.

Yet, how much time is usually given to a lecturer? how much space to the author of a research report? how much space to the author of a paper? Time and space constraints are supposed to fit for the need of the presentation of the findings of either a very large research study but with only statistical analysis, on the one side, or a very narrow research study that concerns qualitative research, on the other side. Meeting the needs of the presentation of the findings of a qualitative study of long term processes probably requires a creative answer that recurs to new technologies, with the joint use of different media (e. g. videotapes, hypertexts).

3. The social dimension of the problem of proof: hints from the international literature

Some historians emphasise the role played by philosophical debates in the early development of mathematical proof, especially as far as *reductio ad absurdum* is concerned. Surely this position has to be complemented by the analysis of intrinsic features of mathematical statements (see Arsac, 1987 for a critical discussion of this issue); yet it is quite convincing that debating and discussing some conflictual problems was one of the roots of mathematical proof in the Greek age.

The introduction of social aspects into the analysis of proof in mathematics results in broadening the meaning of proof, as it is conceived in the logical foundations of mathematics. The analysis of the role of proofs within the whole system of modern mathematics cannot avoid to consider these issues. We can quote the analyses of the factors in the acceptance of mathematical theorems (Hanna, 1983; Neubrand, 1989), that can be reconstructed on the basis of the well-documented public discussions that have taken place in recent years about some recently tackled famous mathematical theorems. The confessions of famous mathematicians about their own way of working and about the functioning of the scientific community are helpful. We can quote from Thurston (1994) his initial discomfort, when he was a graduate student in Berkeley, in realising that *mathematical knowledge and understanding were embedded in the minds and in the social fabric of the community of people thinking about a particular topic* rather than in a well ordered set of written documents. The organic psychological and social process of evolution of mathematics is illustrated by Thurston with reference to the famous Andre Wiles's proof of Fermat's Last Theorem, which was believed by experts as basically correct on the base of high-level ideas, long before details could be checked. What is stressed by Thurston is that communication

within mathematical community happens often by informal contact, where people learn to understand and copy each other's way of thinking, by means of the whole of mental facilities, not only logical and linguistic ones but also spatial, visual, kinaesthetic, intuitive, metaphorical, associative ones and so on. In this informal contact it is not (at least not always) the proof to be communicated, but rather the underlying ideas, idioms or circumlocutions that can justify the result. And the interlocutors are usually more interested in (and good at) detecting potential weakness or flaws that checking formal correctness of proofs.

From this sketchy analysis of present development of mathematics, the deep link between proofs and other ways of justifying a statement in front of a community, so that it can resist to cross examination, seems to be unquestionable. This does not mean that proofs are not important for mathematicians, but rather that mathematicians are interested in understanding the whole process of producing conjectures about meaningful properties and justifying them in manifold ways, by means of the reference to special cases and to high-level ideas as well, and that formal proofs are only a part of the process.

If we wish to transpose some feature of this process to the classroom, we have to reproduce in meaningful situations, the whole process of conjecture production (and argumentation) and proof construction.

Yet, cognitive and didactical research has often emphasised the difference between argumentation and proof. We can quote the cognitive analysis carried out by Duval (1991) and the didactical analysis carried out by Balacheff (1988). The first author underlines the structural differences between deductive organisation and argumentative organisation of reasoning. Even if the second author acknowledges the driving function of situations of interaction where interlocutors are to be convinced in the approach to proof, he emphasises the risk that argumentative behaviours get the upper hand over mathematical behaviours.

So, we are supposed to be in a contradictory situation: on the one side, mathematics, as it is experienced by working mathematicians, has a strong social nature; on the other side, the emphasis on social aspects could create true obstacles to the development of mathematical thinking in the classroom.

Hence, a relevant set of research problems, dependent on each other, arise:

- 1) to design and implement a long term teaching experiment where the links between conjecture production and proof construction are explicitly taken into account;
- 2) to analyse the long term teaching experiments, from the standpoint of continuity/discontinuity between the different phases (exploring — conjecturing — arguing — proving);
- 3) to analyse the individual mental processes underlying;

- 4) to analyse the didactical management of the different phases of the experiment.

The first and the second problems are addressed by Boero & al. (1996a); the third by Boero & al. (1996b) and the fourth by this paper.

The whole study is an example of research for innovation, with a twofold aim (Arzarello & Bartolini Bussi to appear)

- *to produce paradigmatic examples of improvement in mathematics teaching;
- *to study the conditions for their realisation as well as the possible factors of ineffectiveness.

4. The chronicle of the main phases of the teaching experiment

The experiment was developed in 10-13 hours as follows (see Boero & al., 1996a, 1996b).

a) Setting the problem : The following problem was introduced by the teacher: In the past years we observed that the shadows of two vertical sticks on the horizontal ground are always parallel. What can be said of the parallelism of shadows in the case of a vertical stick and an oblique stick? Can shadows be parallel? At times? When? Always? Never? Formulate your conjecture as a general statement. The students started to work individually or in pairs. Some thin, long sticks and three polystyrene platforms were handed, in order to support the dynamic exploration process of the problem situation.

b) Producing conjectures: Many students started to work with the thin sticks or with pencils. They started to move the sticks or to move themselves to see what happened. Other students closed their eyes. The absence of sunlight or spotlight in the classroom hindered the experimental verification of conjectures they were formulating: it was the mind's eyes that were 'looking'. The teacher walked in the classroom. When she realised that a student or a pair of students was close to produce a statement, she tried to help him/her to express it by words and to write it down all that s/he was gesturing. Students individually wrote down their conjectures. The produced conjectures were different:

- 1) *the shadows are always parallel;*
- 2) *the shadows are never parallel;*
- 3w — 3i) *the shadows are parallel when (or if) a condition is realised;*
- 4ow — 4oi) *the shadows are parallel only when (or only if) a condition is realised;*
- 5w — 5i) *the shadows are not parallel when (or if) a condition is not realised.*

In short, all the 36 students took part in the conjecturing phase, producing:

* a 'correct' statement with justification	21 students
* a 'correct' statement without justification	6 students
* an incorrect statement (always-never)	9 students.

Statements were not produced in standard geometrical terms, but by means of gestures, drawings, metaphors and imprecise words. Judgement about correctness was made by interpreting student expression with the help of gestures.

c) **Discussing conjectures:** The conjectures were discussed, with the help of the teacher, to elicit the individual ways of attacking the problem:

- * moving nothing;
- * moving everything;
- * moving the sun;
- * moving the oblique stick;
- * moving the ground floor (i. e. the polystyrene platforms);
- * moving the observer.

Then the statements of different correct conjectures were collectively obtained to reflect the different approaches to the problem by the students.

During this phase a special role was played by a student (Simone), who had produced an interesting and well argued conjecture, that referred to an imaginary vertical stick with the same base point as the oblique stick (see Appendix 1). He explained his conjecture in his own classroom and was invited by the teacher to come also to the other classroom. Hence Simone's strategy of imaginary vertical stick was shared property in both classrooms.

d) **Arranging statements:** Through different discussions, under the guidance of the teacher, the following statements, 'cleaned' from most of metaphors and more precise from a linguistic point of view than those produced by students at the beginning, were collectively attained:

α) If sun rays belong to the vertical plane of the oblique stick, shadows are parallel.

β) If the oblique stick moves along a vertical plane containing sun rays, then shadows are parallel.

γ) The shadows of the two sticks will be parallel only if the vertical plane of the oblique stick contains sun rays.

The first two statements stand for two different ways of approaching the problem on the part of the students: the movement of the sun and the movement of the sticks; the third statement makes explicit the uniqueness of the situation in which shadows are parallel.

After further discussion the collective construction of the two statements below was attained:

1) *If sun rays belong to the vertical plane of the oblique stick, shadows are parallel. Shadows are parallel only if sun rays belong to the vertical plane of the oblique stick.*

2) *If the oblique stick is on a vertical plane containing sun rays, shadows are parallel. Shadows are parallel only if the oblique stick is on a vertical plane containing sun rays.*

In order to help the students in the proving stage it was preferred not to express the statement in its standard, compact mathematical form *if and only if* (its meaning in common Italian cannot be distinguished from the meaning of *only if*)

e) Preparing proof: The following activities were performed:

- individual search for analogies and differences between one's own initial conjecture and the three 'cleaned' statements considered during the stage d);

- individual task: *What do you think about the possibility of testing our conjectures by experiment?*

- discussion concerning students' answers to the preceding question.

During the discussion, gradually students realised that an experimental testing was 'very difficult', because one should have checked what happens 'in all the infinitely many positions of the sun and in all the infinitely many positions of the sticks'.

f) Proving that the condition is sufficient: The students worked in pairs, before individual wording of the proof text; sticks and polystyrene platforms were still available to encourage the reconstruction of conjecture. The teacher walked in the classroom to interact with pairs of students.

g) The script of the proof: The produced proofs were shared and compared, under the guidance of the teacher, up to the production of scripts of the proof; as an homework, students were requested to compare their own proof with the scripts and to detect the logical holes, if any.

h) Proving that the condition is necessary: In a short discussion guided by the teacher the proof was built collectively; the individual wording of the proof text followed.

i) Generalisation: One of the students suggested to generalise the statement to the case of two skew sticks, without any information about verticality; the task was solved individually and then discussed collectively.

j) Evaluation: A final discussion was led by the teacher, followed by a comprehensive individual report about the whole activity.

The following materials were collected: videotapes of the initial stages (a and b); tape-records of discussions and teacher-students interactions; all the students' individual written texts.

5. Coarse grain analysis of the experiment

5.1. *The individualisation of the motives of activity*

The motives of activity can be elicited through intensive and systematic discussions with the designers of the teaching experiment and through the recourse to the existing written materials (Boero & al., 1996a, 1996b). The motives are the true objects of the teaching-learning activity, that cannot be conveyed by the teacher as such, but are to be transposed into specific goals of tasks. They are supposed to have guided the design of the teaching-learning activity and they are to be found in the classroom development of activity.

Three different sets of motives can be elicited:

1 a) Dynamic exploration (conjecture): The dynamic exploration of the problem situation up to the finding of a temporal section of the exploration process (i. e. the conjecture C), where shadows are parallel;

1 b) Dynamic exploration (proof of the sufficient condition): The dynamic exploration of the situation C identified by the conjecture up to the finding of a logical chain between the hypothesis (i. e. the conjecture) and the thesis (i. e. the parallelism of shadows);

1 c) Dynamic exploration (proof of the necessary condition): The dynamic exploration of the situation $\neg C$ where the conditions of the conjecture are not satisfied up to the finding of a contradiction between the situation $\neg C$ and the parallelism of shadows (Boero & al., 1996b).

2 a) Conjecture production: The production of a conjecture about shadow parallelism, through an intense argumentative activity, intermingling with the justification of the plausibility of choices;

2 b) Proof construction: The construction of a proof about shadow parallelism, through the organisation of some of the produced arguments according to a logical chain (Boero & al., 1996a);

3 a) Experiments and argumentation: Argumentation as individual wording of results of real (e. g. by drawing, by constructing, by handling, by gesturing, by looking et and so on) or mental experiments, that can be addressed to an interlocutor to justify the choice of the conjecture;

3 b) Experiments and proof: proof as a social act that results in a chain of statements from 'old' knowledge to 'new' knowledge ('old' and 'new' are referred to the community of the classroom), which validates a general statement without testing it in individual cases and resists cross examination.

5.2. Motives in the classroom development of activity

The motives 1a, 1b and 1c can be found a posteriori in the quality of activity set up in the classroom: for instance, on the action level, the proposal of sticks and polystyrene platforms to encourage dynamic experiments in all the phases of activity; the slowness in substituting the dynamic metaphors with standard expression of euclidean geometry, in the conjecture statements and in the proofs as well. These choice are evident in the structure of individual tasks, as described in the chronicle, and could be found in fine grain analysis too, at the operation level: the Appendix 2 is an example of teacher intentional agreement in using metaphors, gesturing and temporal connectives during student-teacher interaction. Further details can be found in Boero & al. (1996b).

The motives 2a and 2b can be found in the explicit continuity between the conjecture production phase and the proof production phase: for instance, the proposal of the same tools (sticks and polystyrenes platforms); the recourse to similar metaphors and gestures; the call of Simone to offer his argumentation (Appendix 1), as a potential shift between argumentation and proof. The chosen scripts of proof (Appendix 3 and 4) are resonant with the statements produced by students as conjectures or argumentations. Further details can be found in Boero & al. (1996a).

The motives 3a and 3b can be found by analysing the alternation of individual (or in pairs) work with teacher-student interaction and teacher-led whole class discussions. We can summarise the chronicle of the experiment in the Table I

The two-column table points at the different management of different phases of the experiment.

The early production of conjectures (phases a-b) was generally done by means of an extensive exploration of the space where the sticks and the sun were imagined to be (Boero & al., 1996b). This exploration had to be individual, as it had to meet the need of individual time. Surely the individual process can be interpreted as the internalisation of already experienced collective processes, guided by the teacher or by more expert peers. Simone's conjecture (Appendix 1) could be interpreted as a sequence of successive answers to self posed questions. Working in pairs proved to be useful because of practical needs: when a student tried to keep two pens in the hands and to simulate with gestures the sunrays that draw shadows, two hands were not enough. So two students helped each other in moving sticks and sun all around while making experiments. But other students worked alone, maybe closing his/her own eyes. The individualised interaction with the teacher aimed at helping students to realise exploration and to translate into words the results of such an exploration. It did not result easy to translate gestures and eye movements into words: so, for instance, right words were lacking to

describe the situation where the student forearm (in place of the oblique stick) rotated around the elbow. The recourse to gestures and to metaphors that recalls the real exploration was not inhibited but rather encouraged by the teacher herself, as the exemplary excerpt of the Appendix 2 clearly shows. The emphasis on gestures and on either real or mental experience became a habit for the development of the whole teaching experiment.

Table 1

Individual or in pairs work Individualized interaction with teacher	Whole class work Teacher led discussion
a) setting the problem	
b) producing conjectures	c) discussing conjectures
	d) arranging conjectures (socially shared statements)
e) preparing proof: — comparing individual statement and socially shared statements	
e) preparing proof: — the possibility of testing	e) preparing proof: — the possibility of testing
f) producing proof (sufficient condition)	
	g) producing proof (sufficient condition): — official scripts
g) producing proof (sufficient condition): — comparing individual proof and official scripts to detect logical holes if any	
	h) producing proof (necessary condition)
i) generalising to any pair of skew sticks	
	i) generalising to any pair of skew sticks
	j) evaluating: final discussion
j) evaluating: comprehensive report	

The phase of discussing conjectures (phase c) up to the agreement on some socially shared statements aimed:

1) to reconstruct a correct process of global exploration for those students that had not yet explored globally the space and that had produced wrong conjectures (*always parallel; never parallel*);

2) to construct a shared meaning for the manifold kinds of metaphors used by the students to express the condition for parallelism (e. g. *the sun sees the sticks parallel; the sticks meet the sunrays in the same way; the oblique stick is along the direction of sunrays* and so on) and to relate them to each other.

Moreover, it aimed to produce socially shared statements (phase d), which could have been appropriated by the students as representing all that they meant. The following phase (e) of individual comparison of one's own statement with the socially shared ones was designed to force students to make an individual effort for finding relations between their statements and the socially shared ones. Having a socially shared statement, that is expressed in words in a way that can be understood by others, is actually a prerequisite for producing proof, as proving is a social act, that has a sense within a scientific community.

The further activities to prepare proof (phase e) were designed to exclude the possibility of testing the condition. It was necessary to enhance students' critical detachment from statements, motivate them to proving and make clear that since then classroom work would have concerned the validity of the statement 'in general'.

The production of proofs of the socially shared statements could be started. Proving, as it was meant by these students, means producing arguments to explain *why* the statement was true, in such a way that the arguments could resist any cross-examination. The students did not need proofs to convince themselves that the statements were true. The repeated exploration of space had already convinced everybody. Yet they were aware that experiments could not show why the statements were true. The aim of proving was to connect, in unquestioned way, *the new knowledge* produced by exploration (i. e. the sufficient — and later the necessary — condition for shadow parallelism) to the old knowledge, that had already been institutionalised in the classroom (i. e. the shadow parallelism for two vertical sticks). Proving is connecting two texts by words without any further need to produce experiments. This does not mean that experiments were not needed to produce proofs, but the experiments, if any, were to be translated into texts.

The production of proof was individual at the very beginning, to allow individual time of reflection (phase f). The individualised interaction with pairs of students aimed at recalling them the kind of questions to be answered (*why*). Later (phase g), individual proofs were compared and evaluated collectively up to the

production of socially shared scripts. The Appendix 3 sketchily shows two of the socially shared scripts of the proof of the sufficient condition. But a new return to the individual dimension was necessary to guarantee that the students were able to relate their own product to the socially shared one.

The proof of the necessary condition (phase h) was managed in a teacher led discussion. Showing the non existence of other positions naturally leads to a *reductio ad absurdum* (see Appendix 4) and such way of reasoning was not supposed to be at disposal of many students. Hence the teacher preferred to propose herself a solution while discussing with students.

The generalisation to the case of any pair of skew sticks (phase i) was proposed by a student and transformed by the teacher into an individual task, to allow individual time of reflection and then discussed collectively as usual.

The final discussion was an habit of the classroom to initiate the personal process of evaluation (phase j) of the whole experiment, that was later transferred to the individual plane.

6. Discussion

If we go though the experiment once more, we notice the continuous and intentional recourse to different systems of *tools of semiotic mediation* during the whole experiment. The teacher's intervention, in the phase b, aimed at reconstructing the needed unity between gestures, eye movements and words: according to Vygotskij (1978), the unity of perception, speech and action, where different tools of semiotic mediation (e. g. words, images, gestures) are involved, produces the internalisation of the visual field, where it will be possible to design strategies for problem solving. The encouragement to explore spatially was made throughout the whole experiment at the cost of minimising the reference to standard geometry. Students produced their conjecture as a hypothesis concerning the phenomenon of sunshadows; when they verified their conjecture most of them seemed to be aware of the fact that they had to get the truth of the statement by reasoning. Most of them produced a validation realised through a deductive reasoning. Actually their reasoning started from properties considered as true ('two vertical sticks produce parallel shadows') and get the truth of the statement in the 'scenery' determined by the hypothesis. In this way, students produced neither a statement of geometry 'strictu sensu', nor a formal proof: objects were not yet geometric entities, deduction was not yet formal derivation. But their deductive reasoning shared some crucial aspects with the construction of a mathematical proof (Boero & al., 1996a). A still open problem concerns the ways of shifting from the use of these systems of tools of semiotic mediation to the system of tools of elementary geometry, where both statements and proofs are decontextualised.

As concerns the problem of *social interaction*, we have already observed that the initial work in pairs corresponded to practical needs. Usually the two students of the same pair were articulating the same voice (in the sense of Bakhtin, see Wertsch, 1991), as they did not introduce different perspectives on the task. They were usually making experiments together, helping each other. They could formulate a wrong or a right conjecture, but every conjecture was based on real or mental experiment: if the exploration was limited to very specific situations, the conjecture was likely to be wrong; if it was global, the conjecture was likely to be correct, provided a suitable transposition of words (Boero et al., 1996b). The subsequent interaction with the teacher introduced, as we have seen a few lines above, a different voice, that represented the need of wording the conjecture, expressed until then by gestures, eye movements and interrupted sentences.

In the further activity, the choice of individual or collective work met different needs:

- 1) allowing each student an individual time for an individual way of coping with tasks;
- 2) producing socially shared solutions of the given tasks;
- 3) allowing each student an individual time to appropriate socially shared knowledge;
- 4) producing socially shared statements, to be proved;
- 5) agreeing on scripts of proof, acceptable by the scientific community as validation of statements.

The first three issues are general ways of working in those classrooms which practice mathematical discussion (Bartolini Bussi to appear) and can be applied to a whichever problem. The last two issues are strictly dependent on the epistemological analysis of proof as a social (not individual) act. Shifting the problem of proof to the social level was necessary.

As we have seen, in this classroom conjecture and argumentation (either right or wrong ones) could be produced individually (or working in pairs), with the help of the teacher only for wording the result. The split between conjecture and argumentation was not always well defined, as both were produced as texts describing the results of some real or mental experiment: some students could use as arguments the statements that other students had produced as conjectures and viceversa. Organising these statements into an ordered logical chain required the adhesion to some rule of communication, that resulted in the standard scripts of proof. The teacher's role as representative of the scientific community in the classroom could not be substituted and was actually different from the role played in the conjecture production phase.

In the previous analyses (Boero & al., 1996a, 1996b) two elements of discontinuity in the whole process of exploring — conjecturing — arguing — proving were found:

(a) the function of sun or stick movement in exploring and in proving were different and aimed to find discontinuities to select the situation of the conjecture in exploring and to find continuities to connect the old and the new knowledge in proving;

(b) the split of the proof into two different phases (the sufficient condition/the necessary condition) introduced, for proving, a break into two parts, that in exploring had been elements of the same global process.

The different weight of the social aspects seems to introduce a further element of discontinuity between the conjecture production phase (mainly based on individual work) and the proof construction phase (mainly based on collective work). What has to be emphasised is that the presence of the teacher oriented the last activity towards the production of proofs rather than the production of convincing arguments only. Yet the fine grain analysis of the strategies of communications (operation level) that were used by the teacher during interaction with pairs and whole class interaction in order to assure this development is far beyond the scope and space of this paper.

References

- Arsac, G. (1987), L'origine de la démonstration: Essai d'épistémologie didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 8, 267-312.
- Artigue, M. (1992), Didactical engineering. In R. Douady & A. Rouchier (Eds.) *Research in Didactic of Mathematics*, (pp. 41-66), Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Arzarello, F. & Bartolini Bussi, M. (to appear), Italian trends of research in mathematics education: a national case study in the international perspective. In A. Sierpiska & J. Kilpatrick (eds.) *What is research in mathematics education and what are its results*. Dordrecht: Kluwer.
- Balacheff, N. (1988), Une étude des processus de preuve en mathématiques chez des élèves de collège, Thèse d'état, Grenoble: Université Joseph Fourier.
- Bartolini Bussi, M. (1994), Theoretical and empirical approaches to classroom interaction. In Biehler, Scholz, Strasser & Winkelmann (eds.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline* (pp. 121-132). Dordrecht: Kluwer.
- Bartolini Bussi, M. & Boni, M. (1995), Analisi dell'interazione verbale nella discussione matematica: un approccio Vygotskiano, *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, 18, 221-256.
- Bartolini Bussi, M. (to appear), Mathematical discussion and perspective drawing in primary school. *Educational Studies in Mathematics*, 31 (1996), issue 1-2.

- Bergamini, B. (1996), I Teoremi del Sole: un esperimento didattico su congetture e dimostrazioni in terza media, Università di Modena: unpublished thesis.
- Boero, P. & Garuti, R. (1994), Approaching rational geometry: from physical relationships to conditional statements, *Proceedings of the 18th PME Conference*. Lisboa.
- Boero, P., Chiappini, G., Garuti, R. & Sibilla, A. (1995), Towards statements and proofs in elementary arithmetic: an exploratory study about the role of teachers and the behaviour of students, *Proceedings of the 19th PME Conference*. Recife.
- Boero, P., Garuti, R., Lemu, E. & Mariotti, M. A. (1996a), Challenging the traditional school approach to theorems: a hypothesis about the cognitive unity of theorems, *Proceedings of the 20th PME Conference*. Valencia (Spain).
- Boero, P., Garuti, R. & Mariotti, M. A. (1996b), Some dynamic mental processes underlying producing and proving conjectures, Proceedings of the 20th pme conference, *Proceedings of the 20th PME Conference*. Valencia (Spain).
- Christiansen, B. & Walther, G. (1986), Task and activity. In B. Christiansen, A. G. Howson, & M. Otte (eds.), *Perspectives on mathematics education*, 243-307. D.Reidel Publishing Company.
- Douady, R. (1996), Didactic engineering and the acquisition of knowledge in the secondary school. In E. Barbin & R. Douady (eds.), *Teaching mathematics: the relationship between knowledge*, *Curriculum and Practice*, 241-256.
- Duval, R. (1991), Structure du raisonnement deductif et apprentissage de la demonstration, *Educational Studies in Mathematics*, 22, 233-261.
- Hanna, G. (1983), Rigorous proofs in mathematics education, Toronto: The Ontario Institute for Studies in Education.
- Leont'ev., A. N.(1978): *Activity, consciousness and personality*, Englewood Cliffs: Prentice Hall (original Russian Edition 1975, Italian translation 1977).
- Neubrand M. (1989), Remarks on the acceptance of proofs: the case of some recently tackled major theorems, *For the Learning of Mathematics*, 9, 2-6.
- Newmann, D., Griffin, P. & Cole, M. (1989), The construction zone: working for cognitive change in school, Cambridge MA: Cambridge University Press.
- Thurston, B. (1994), On proof and progress in mathematics, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 30, 161-177.
- Vygotsky, L. S. (1978), *Mind in society. The development of higher psychological processes*, Cambridge Ma: Harvard University Press.
- Wertsch, J. (1991). *Voices of the mind: a sociocultural approach to mediated action*. Harvester Wheatsheaf.

Notes

- 1 "c'est pas possible, ça nous donne la perpendiculaire, c'est un coup de pot" (Guillerault, 1991)

Acknowledgement

The research has the financial support of the CNR and of the MURST. The teaching experiment has been designed by P. Boero and R. Garuti (whom we wish to thank here for the invaluable cooperation). Classroom observation was done by R. Garuti in cooperation with B. Bergamini, who entered the experiment as a part of her thesis in Mathematics (Bergamini, 1996).

*Mariolina Bartolini Bussi, via Campi 213/B, I 41100 Modena, Itália.
bartolini@dipmat.unimo.it.*

Appendices

1 — Simone's conjecture

If we took into consideration two sticks, of which one vertical, the shadows shall be parallel when the two sticks are viewed parallel by the sun.

If we suppose that the person is looking in the position of the sun, by going round the sticks we can observe that the sticks are parallel in a certain position and the shadows are also parallel since the difference in position of the two sticks cannot be seen from that position.

Thinking about the shadow space we can say that the non-vertical stick seems to be within the shadow space.

Let's imagine an imaginary vertical stick representing the oblique one, in line with the sun rays and the same stick, the oblique one cannot be seen so it seems to be vertical, forming parallel shadows. The shadows can be parallel if the sun is situated along the direction of the oblique stick [with a gesture that was observed by the teacher he indicated the vertical plane of the oblique stick]

During the subsequent discussion, Simone explained how he produced this conjecture. Simone's gestures showed that he moved the polystyrene plane supporting the sticks 'at random' (notice should also be paid to the generality of his reasoning) after identifying himself with the sun. Then, he placed a new stick (which he calls 'imaginary stick') in the same position he had described in the written text, making the polystyrene plane rotate until the non-vertical stick is completely hidden by the 'imaginary' vertical one. At this point he said: well, now in this position the shadows are parallel because....and repeated what he had written.

2 — The importance of gestures

The excerpt is taken from the discussion of individual conjectures (phase c)

[...]

Teacher Be attentive. Gestures are important as I have seen several students doing what G. has done. It is an imitation a positive imitation. We learn by imitation too.

Well, he [M.] has started in this way [the teacher handle both sticks in the position of the task, then she tilts the oblique stick until it is vertical, while she is speaking]

Then he has tilted this. This is the situation of last year. He has tilted it in this way.[She tilts the oblique stick in different ways] Then he has tried to tilt it in this way and says: 'If I tilt it along this direction [the teachers creates by gesturing the plane of sunrays through the oblique stick who has become vertical] the shadows are still parallel. If I tilt it along this direction, out of sunrays, the shadows are no more parallel.

[...]

Teacher *Good boy! M. has kept the sun motionless and moved the stick. F. has advised him to move the sun [...] and actually they are two different ways to look at things. But I wish to see G. Go with your display. You have told me something in three seconds. Let us see if she can say it now in three seconds.*

G. *Now ...*

Teacher *G.'s hypothesis.*

G. *I've said that the shadows are not always parallel.*

Teacher *Just a moment. Be attentive: it is a real newness.*

G. *I have said that if I make the sticks to touch the ground and I see that they are not parallel, also the shadows are not parallel. It depends on the way ...*

[...]

Teacher *No, she has not tilted by chance.*

I. *Is there the shadow where the stick touches the floor?*

Voices *She says that it works.*

Teacher *No, she says ... and she pulls down with the same hand. [the teacher repeats G.'s gesture]*

D. *It is as if they were shadows ...*

Teacher *... as if they were shadows because she finds the direction.*

D. *Because the direction is as if rays arrived and pushed down the sticks.[she follows with fingers two imaginary rays that hit the tip of the sticks and push them towards shadows]*

3 — Two scripts for the sufficient condition

If the sun is along the vertical plane of the oblique stick, the shadow of the oblique stick is aligned with the shadow of the vertical imaginary stick. The shadow of the vertical stick and of the vertical imaginary stick are parallel (as both are vertical). Hence (because of transitive property) the shadow of the oblique stick is parallel to the shadow of the vertical stick.

If the oblique stick belongs to the vertical plane of sunrays, it can move in this plane by rotating around its base point. In all the positions, its shadow is on the same line. This is true also for the vertical position. The shadow of the vertical stick and of the oblique stick (when it is in the vertical position) are parallel. Hence, (because of transitive property) the shadow of the oblique stick is parallel to the shadow of the vertical stick.

4 — A script for the necessary condition

We have three sticks: a vertical stick, a oblique stick a vertical imaginary stick with the same base point of the oblique stick. If we move the oblique stick out of the vertical stick of sunrays, its shadow is no more aligned with the shadow of the vertical imaginary stick. Actually the shadow goes from the vertical plane of sunrays through the vertical imaginary stick to the parallel vertical plane through the tip of the oblique stick. The shadow of the vertical stick is parallel to the shadow of the vertical imaginary stick, but the latter is incident

not parallel to the shadow of the oblique stick. Hence the shadows of the vertical stick and of the oblique stick are not parallel.

Aprendizagens em Matemática: problemáticas da investigação portuguesa

José Manuel Matos, Universidade Nova de Lisboa

A investigação em Educação Matemática em Portugal tem-se vindo a desenvolver nos últimos dez anos. Desde 1985 que temos assistido a uma proliferação de trabalhos produzidos no contexto de mestrados, doutoramentos e projectos que nos permitem a produção das primeiras reflexões sobre o estado da Educação Matemática no nosso país. Até agora foram publicados três trabalhos portugueses meta-investigação, isto é, estudos sistemáticos tentando abarcar numa visão global o conjunto de investigações sobre uma determinada temática. Dois deles abarcam a globalidade das investigações sobre Educação Matemática em Portugal (Matos, 1994; Ponte, 1993a), e um terceiro (Ponte, 1993b) aprofundou as investigações relacionadas com os professores. Este trabalho deve ser entendido como mais uma meta-investigação que procurará obter um retrato das problemáticas de investigação sobre aprendizagens de Matemática em Portugal. Mais especificamente, procurar-se-á conhecer a distribuição destas investigações ao longo dos últimos anos; identificar os tópicos matemáticos que foram objecto de estudo; e, finalmente, o peso relativo dos trabalhos efectuados no âmbito de mestrados, doutoramentos ou projectos de investigação. Trata-se de um trabalho inicial que pretende efectuar um primeiro balanço da investigação nesta área. Trabalhos posteriores procurarão desenvolver uma análise mais aprofundada das temáticas envolvidas na investigação sobre as aprendizagens em Matemática em Portugal.

Conforme se pode constatar pelo título, este trabalho circula em torno de quatro termos-chave: *aprendizagem da Matemática, Portugal, investigação e problemática*. Debrucemo-nos um pouco sobre eles. Os dois primeiros termos são razoavelmente claros. Incluiremos na *aprendizagem da Matemática* não só os aspectos do domínio cognitivo, mas também afectivo e social. Estudaremos ainda trabalhos que se debruçam sobre aprendizagens da Matemática em todos os níveis etários. O termo *Portugal* refere-se ao âmbito do trabalho e não à autoria. Embora existam trabalhos de investigação feitos por portugueses no estrangeiro, estudaremos aqui apenas aqueles que incluem participantes portugueses. Um

terceiro termo-chave é *investigação*. Embora existam trabalhos de investigação teóricos relacionados com aprendizagens da Matemática, nomeadamente teses de mestrado (Andrade, 1988; Borralho, 1990; Cebola, 1992; Mourão, 1988), pensamos que para a discussão que pretendemos efectuar é mais importante focar a atenção nos trabalhos que incluem uma componente de confronto com a realidade, mesmo que à custa de um enfraquecimento da sua reflexão teórica. Exigiremos ainda que os trabalhos apresentem uma clareza na apresentação de objectivos, uma metodologias e resultados. O último termo-chave é a palavra *problemática*. Enquanto que os termos anteriores foram utilizados como modo de seleccionar os trabalhos objectos de estudo, este termo procura indicar o foco onde vai incidir este texto. Significa ele que procuraremos caracterizar os temas, os assuntos, ou as questões de investigação que têm vindo a ser preferidas pelos investigadores portugueses. Existe naturalmente uma certa dose de subjectividade numa tal caracterização, já que muitos trabalhos envolvem múltiplos objectivos, donde a selecção dos mais relevantes será naturalmente motivo de controvérsia.

Metodologia

Este trabalho foi efectuado essencialmente através da análise de material de origem diversa: teses, comunicações a seminários de investigação, revistas (*Quadrante*, etc.), actas de ProfMats, relatórios de projectos, e publicações diversas. Foi depois feita uma análise qualitativa dos objectivos de cada trabalho, bem como foram identificados outros elementos de interesse (datas, tipo de trabalho, etc.) que sofreram um tratamento quantitativo.

Tomaremos em consideração a data de apresentação final, no caso dos trabalhos do tipo de teses, e de publicação nos outros casos. De um modo geral os

Distribuição cronológica das investigações

Foram encontradas referências a 84 trabalhos de investigação sobre aprendizagens em Matemática em Portugal. Trata-se de um número elevado, em especial se nos recordarmos que os trabalhos de investigação só nos últimos dez anos começaram a fazer parte integrante da Educação Matemática portuguesa. Observemos a evolução temporal quantitativa das investigações sobre este tema.

Quadro 1. Distribuição dos estudos por anos

Anos	46-47	58	79-81	84-86	87-88	89-90	91-92	93-94	95-96
Nº de trabalhos	4	1	6	13	6	11	12	21	10

A figura 1 revela a distribuição temporal destes trabalhos.

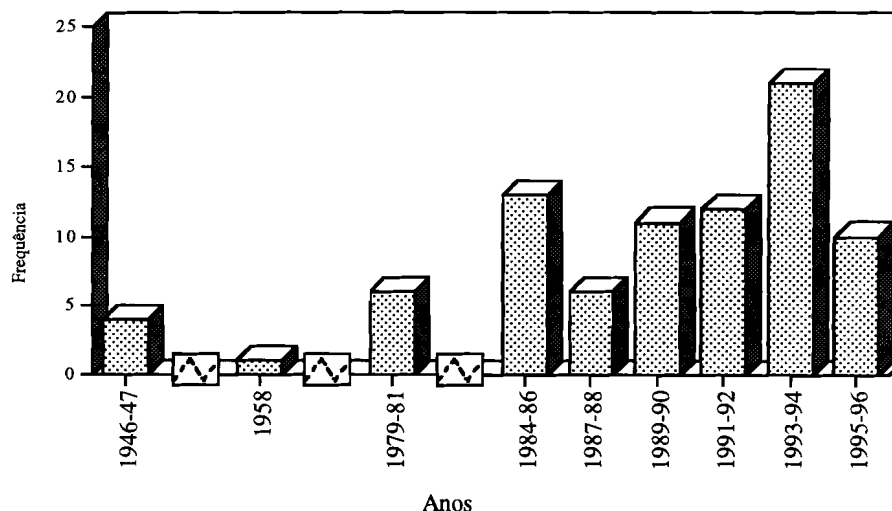


Figura 1. Visão cronológica das investigações sobre aprendizagem da Matemática

Este gráfico é caracterizado pela existência de três momentos com um grande número de trabalhos (46-47, 79-81, 84-86), a que se seguem momentos de paragem, ou de diminuição acentuada. Na parte direita do gráfico assiste-se a um crescimento mais ou menos constante. A coluna referente a 95-96 está obviamente incompleta, e por isso não é claro se existirá algum pico anormal em 93-94.

Os trabalhos mais antigos que encontramos relacionados com a investigação das aprendizagens da Matemática em Portugal datam da segunda metade dos anos 40. Trata-se de um conjunto de quatro trabalhos de temática semelhante publicados entre 1946 e 1947. Três deles (Alves, 1946; Alves, 1947b; Pereira e Brito, 1946) analisavam a fiabilidade a validade de alguns exames, e um outro (Alves, 1947a) estudava “algumas deficiências em Matemática de alunos dos liceus”. Todo estes quatro trabalhos revelam uma grande preocupação com o rigor metodológico. Pereira e Brito (1946) fazem uma apologia da utilização de métodos estatísticos em

educação defendendo que a experiência pedagógica sem a estatística é “navegar sem rumo” (p. 15), que “não é admissível que um professor — de qualquer grau de ensino ou grupo — não esteja familiarizado com termos como estes: mediana, quartil, distribuição normal, coeficiente de variação de Pearson, etc.” (p. 15). Os autores defendem a realização de “estudos das questões pedagógicas pelos métodos da Estatística” (p. 16) levados a cabo por entidades oficiais.

O progresso do professor, o controlo da sua acção, quanto à didáctica, as alterações nos programas, enfim toda a escola receberia a mais benéfica influência. A escola, quanto ao ensino transformar-se-ia numa casa de vidro. Seria a verdadeira inspecção... sem inspectores, aquela que todo o ensino português de todos os graus de ensino tanto precisa (p. 16).

Estes quatro trabalhos são publicados pela *Gazeta de Matemática* no curto espaço de dois anos, precisamente antes dos acontecimentos que conduziram à expulsão de muitos matemáticos do ensino, e, tal como a própria vida da *Gazeta*, não tiveram sequência. Contêm uma problemática clara e revelam preocupações metodológicas de carácter científico. Só mais de dez anos depois, em 1958, conseguimos encontrar um novo trabalho, desta vez sem identificação do autor (1958), publicado nos *Cadernos de Psicologia e Pedagogia*, que se debruça sobre as notas dos alunos em Matemática.

O segundo grupo de trabalhos de investigação relacionados com a aprendizagem da Matemática ocorre no final dos anos 70. Viviam-se na altura a implementação do Ensino Secundário Unificado e o Gabinete de Estudos e Planeamento do então Ministério da Educação e Ciência (GEP) decide efectuar um extenso programa de avaliação desta reforma. É inserido neste contexto que se vão realizar diversos estudos específicos sobre a Matemática (Catela, 1980; Catela e Kilborn, 1979; Leal e Fägerlind, 1981; Leal e Kilborn, 1981). Em simultâneo com estes trabalhos aparecem duas comunicações de João Pedro da Ponte (1981a; 1981b) que, embora não constituindo ainda verdadeiros trabalhos de investigação apresentam alguns dados sobre a aprendizagem de alguns tópicos (Linguagem matemática e vectores).

Apenas a partir de 1984 assistimos a uma corrente sustentada de trabalhos de investigação que persiste até aos dias de hoje. Esta corrente inicia-se com um pico inicial resultante dos trabalhos produzidos no âmbito de mestrados efectuados em Boston por futuros docentes das Escolas Superiores de Educação. Depois deste momento com grande ímpeto inicial o número de trabalhos diminui consideravelmente, para depois começarem a aumentar, à medida que vão aparecendo programas de mestrado em universidades portuguesas e que são proporcionados por diversas instituições financiadoras meios para o desenvolvimento de projectos.

Problemáticas de investigação

Estes trabalhos apresentam problemáticas muito diversificadas. Por um lado, cada estudo envolve um amplo leque de objectivos, por outro, o conjunto destes trabalhos abrange uma multiplicidade de tópicos, perspectivas e metodologias.

Destacam-se, no entanto, seis grandes áreas. Existem, em primeiro lugar, estudos sobre as aprendizagens produzidas em ambientes inovadores. Tratam-se de trabalhos que procuram intervir na realidade matemática escolar e conhecer os efeitos produzidos, em especial sobre as aprendizagens. Um segundo tema de estudos incide sobre o conhecimento específico de temas ou processos matemáticos revelado pelos alunos mas em que não foi efectuado nenhum tipo de intervenção educativa. Um terceiro tema de estudos focou as atitudes dos alunos perante a Matemática, ou perante determinados aspectos do seu ensino ou aprendizagem. A avaliação global do desempenho matemático dos alunos constitui um quarto tema de estudos e estudos sobre a avaliação na sala de aula um quinto tema. Por último, encontram-se estudos relacionados com as interações sociais na sala de aula. O quadro seguinte apresenta a distribuição dos estudos pelas diversas problemáticas.

Quadro 2. Distribuição dos estudos pelas diversas problemáticas

Temas	Nº de trabalhos
Ambientes de inovação	25
Conhecimento matemático	31
Atitudes	9
Desempenho global	10
Avaliação na sala de aula	7
Interações	2
<i>Total</i>	<i>84</i>

Dominam os trabalhos que envolveram ambientes de inovação ou que estudaram os conhecimentos específicos dos alunos. Os restantes temas apenas receberam a atenção de um terço dos estudos. Vejamos com mais atenção os trabalhos sobre ambientes de inovação pedagógica, o conhecimento matemático e as atitudes.

Investigações relacionadas com ambientes de inovação

As experiências de inovação pedagógica constituem uma das temáticas onde mais investigações sobre as aprendizagens da Matemática se puderam desenvolver. De um modo geral, o investigador preparou um contexto de inovação segundo

determinados princípios pedagógicos, experimentou-o num contexto educativo e uma das vertentes analisada são os efeitos qualitativos ou quantitativos produzidos sobre a aprendizagem. Existem outras investigações relacionadas com ambientes de inovação que aqui não serão referidas, dado não incluírem a aprendizagem como um dos seus objectos de análise. O quadro seguinte traça um panorama diacrónico destas investigações agrupadas em quatro áreas de trabalho:

Quadro 3. Investigações relacionadas com ambientes de inovação

Áreas Anos	Tecnologia	Resolução de problemas	Capacidades complexas	Remediação
1984-86	(Matos e Ponte, 1986)			
1987-88	(Matos, 1987) (Delgado e Garcia, 1988)			(Neves, 1988)
1989-90	(Almeida, 1989) (Moreira, 1989) (Fernandes, 1990b) (Machado, 1990)	(Almeida, 1990)	(Zambujo, 1989)	
1991-92	(Carrapiço, 1991) (Duarte, 1991) (Saraiva, 1992)	(Botelho, 1991) (Palhares, 1992) (Pires, 1992)	(Carreira, 1992)	(Marchand, 1991)
1993-94	(Borges, 1994) (Fernandes, 1994)	(Porfírio, 1993)	(Gordo, 1993)	(Almeida, Fernandes e Mourão, 1993)
1995-96	(Cardoso, 1995)	(Afonso, 1995)		

Vejamos mais em detalhe as quatro grandes áreas exploradas por estes 25 trabalhos. A primeira prende-se com a utilização da tecnologia, computadores e calculadoras, e envolve metade dos trabalhos efectuados. Foram estudadas as estratégias utilizadas por alunos em jogos de computador (Matos e Ponte, 1986), linguagens de programação (Almeida, 1989; Borges, 1994; Carrapiço, 1991; Matos, 1987), utilização de folhas de cálculo (Fernandes, 1994; Moreira, 1989), bem como programas de computador específicos (Duarte, 1991; Fernandes, 1990b; Machado, 1990; Saraiva, 1992) ou o impacto do computador na modificação de atitudes (Delgado e Garcia, 1988). Foram ainda estudadas calculadoras gráficas (Cardoso, 1995). O desenvolvimento de ambientes de aprendizagem recorrendo à resolução de problemas constitui uma outra área presente nestes trabalhos, como método de ensino (Botelho, 1991; Palhares, 1992; Pires, 1992), relacionada com o estudo de

atitudes (Almeida, 1990), utilizando a calculadora (Porfírio, 1993), ou ainda como uma via de formação de professores (Afonso, 1995).

Existem ainda mais duas temáticas envolvendo ambientes de inovação que foram investigadas por um pequeno número de estudos. Uma delas analisou o desenvolvimento de capacidades matemáticas complexas: a modelação (Carreira, 1992; Zambujo, 1989) e a visualização espacial (Gordo, 1993). A outra temática procurou desenvolver intervenções centradas nos alunos com desempenho escolar mais baixo, quer através do recurso ao computador (Neves, 1988), quer pelo desenvolvimento de currículos específicos (Almeida e outros, 1993; Marchand, 1991).

A figura 2 permite uma comparação entre a evolução do total de estudos que estamos a analisar e a evolução do número de estudos envolvendo ambientes de inovação pedagógica, pelo menos os que consideramos neste estudo.

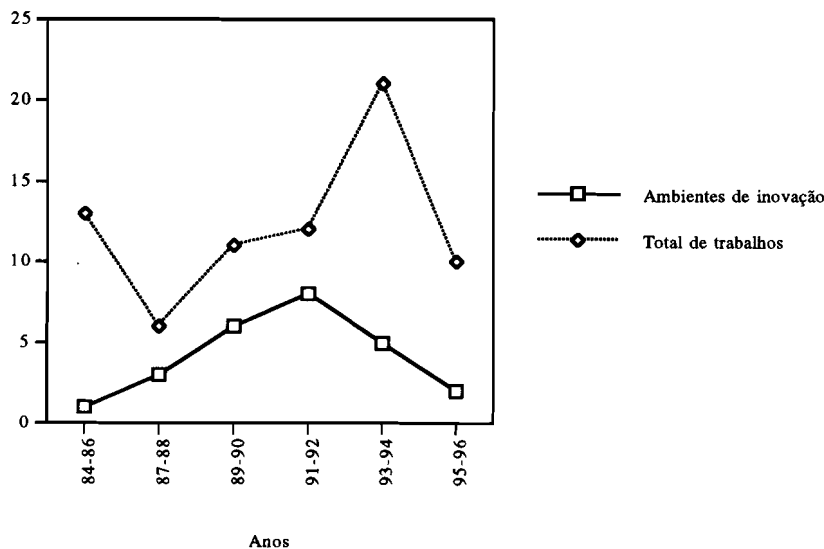


Figura 2

Constatamos que os trabalhos envolvendo ambientes de inovação apenas começam a aparecer a partir de 1986. Verifica-se ainda que o seu crescimento acompanha o ritmo do crescimento global dos estudos sobre as aprendizagens até 1991-92. Nestes anos, dos 12 trabalhos de investigação que referimos neste trabalho, 8 estiveram relacionados com inovações pedagógicas. Reconhecemos a fase de desenvolvimento do campo da Educação Matemática a que João Pedro da Ponte (1993a) chamou de *desenvolvimento*, durante a qual a investigação

procurou sobretudo desenvolver alternativas pedagógicas a programas considerados desadequados, centradas na utilização didáctica das tecnologias e na resolução de problemas. Depois de 1991-92 é bastante significativo o grande aumento de trabalhos no período 1993-94, e a quebra do número de estudos envolvendo ambientes inovadores.

Investigações sobre o conhecimento matemático

As investigações sobre o conhecimento matemático constituem o grupo mais numeroso (mais de um terço) das investigações estudadas. Normalmente o investigador prepara um conjunto de instrumentos (testes, entrevistas estruturadas, etc.) com os quais procura conhecer qualitativa ou quantitativamente o conhecimento sobre um determinado tópico matemático de alunos ou de futuros professores. Algumas destas investigações procuram não perder o contacto com a realidade escolar, e tentam recolher dados em contextos de sala de aula. O quadro 3 apresenta um agrupamento destes 31 trabalhos em seis grandes áreas.

Quadro 4. Investigações relacionadas com o conhecimento matemático

Áreas Anos	Números e operações	Geometria	Álgebra	Funções e Análise	Probabilidades	Linguagem matemática
1979-81		(Ponte, 1981b)				(Ponte, 1981a)
1984-86	(Lopes, 1985) (Rodrigues, 1985) (Serrazina, 1985)	(Costa, 1984) (Matos, 1984) (Cordeiro, 1985) (Vilela, 1985)	(Matos, 1985)	(Ponte, 1985)		
1987-88	(Morgado, 1988)					
1989-90	(Alverca, 1990)	(Ceia, 1990)		(João e Rodrigues, 1990)	(Fernandes, 1990a)	(Maia, 1990)
1991-92	(Andrade e Paiva, 1992) (Morgado, 1991)					
1993-94	(Oliveira, 1994)	(Belchior, 1994) (Frutuoso e Nunes, 1994) (Mourão, 1994)		(Cabrita, 1994) (Domingos, 1994) (Jorge, 1994) (Rodrigues, 1994)		
1995-96		(Junqueira, 1995) (Pires, 1995) (Torres, 1996)		(Martinho, 1996)		

A área do conhecimento matemático é caracterizada por uma grande dispersão de trabalhos. Podemos, no entanto, agrupá-los em seis grandes temáticas. A primeira é a dos números e suas operações, na qual a maior parte das investigações assumem um enquadramento piagetiano. Foram assim investigados o conceito de número (Lopes, 1985; Morgado, 1988; Rodrigues, 1985; Serrazina, 1985), as suas operações (Alverca, 1990; Morgado, 1991), e os números racionais (Andrade e Paiva, 1992; Oliveira, 1994). A segunda temática relaciona-se com a aprendizagem da geometria e foram estudados vectores (Ponte, 1981b), comprimento, área e volume (Cordeiro, 1985; Costa, 1984; Frutuoso e Nunes, 1994; Pires, 1995; Vilela, 1985), as figuras geométricas (Ceia, 1990) e a sua construção (Junqueira, 1995), níveis de conhecimento geométrico (Belchior, 1994; Matos, 1984), bem como a representação geométrica (Mourão, 1994; Torres, 1996). Apenas um trabalho (Matos, 1985) se debruçou sobre a terceira temática, a aprendizagem de álgebra. Em relação à quarta temática, o estudo de funções e da análise, foram investigados a proporcionalidade (Cabrita, 1994), o conceito de função (Domingos, 1994; Ponte, 1985), as sucessões (Jorge, 1994), o infinito (João e Rodrigues, 1990; Martinho, 1996; Rodrigues, 1994). Apenas um estudo (Fernandes, 1990a) abordou a quinta temática, relacionada com a aprendizagem das probabilidades, e dois trabalhos (Maia, 1990; Ponte, 1981a) se debruçaram sobre o último tema, a linguagem matemática.

Estudos sobre atitudes e concepções dos alunos

Identificámos 9 trabalhos centrados nas atitudes e concepções dos alunos sobre a Matemática e diversos aspectos relacionados com a sua aprendizagem. Foram estudados diversos aspectos relacionados com a participação de alunos em olimpíadas da Matemática (Castro, 1985; Mesquita, 1985), a influência de aspectos familiares na atitude dos alunos perante a escola (Ceia, 1985), atitudes e concepções perante a Matemática (Abrantes, 1994; Matos, 1991; Santos, Carapeto, Almeida e Vermelho, 1988), perante a resolução de problemas (Almeida, 1987), a reforma (Ponte, Matos, Guimarães, Leal e Canavarro, 1994), ou o desempenho matemático (Oliveira, 1996).

À primeira vista poderíamos pensar estarmos perante um número reduzido de trabalhos. Este tema foi, no entanto, abordado como foco secundário em muitos trabalhos. Foram deste modo estudadas as atitudes dos alunos perante a Matemática (Leal e Fägerlind, 1981; Mendonça, 1980), perante a tecnologia (Borges, 1994; Delgado e Garcia, 1988; Fernandes, 1994; Junqueira, 1995; Matos, 1987; Moreira, 1989; Neves, 1988; Saraiva, 1992), os materiais (Fernandes, 1990b), a

modelação (Carreira, 1992; Zambujo, 1989), a resolução de problemas (Porfírio, 1993).

Quadro 5. Investigações relacionadas com atitudes e concepções dos alunos

Áreas Anos	Matemática	Tecnologia	Modelação	Outros
1979-81	(Leal e Fägerlind, 1981) (Mendonça, 1980)			
1984-86				(Castro, 1985) (Ceia, 1985) (Mesquita, 1985)
1987-88	(Santos e outros, 1988)	(Almeida, 1987) (Delgado e Garcia, 1988) (Matos, 1987) (Neves, 1988)		
1989-90		(Moreira, 1989)	(Zambujo, 1989)	(Fernandes, 1990b)
1991-92	(Matos, 1991)	(Saraiva, 1992)	(Carreira, 1992)	
1993-94	(Abrantes, 1994)	(Borges, 1994) (Fernandes, 1994)		(Ponte e outros, 1994) (Porfírio, 1993)
1995-96		(Junqueira, 1995)		(Oliveira, 1996)

Este quadro revela-nos que o estudo das atitudes e concepções dos alunos sobre a Matemática e sobre diversos aspectos da sua aprendizagem tem vindo regularmente a ser o foco de alguns trabalhos. Verificamos ainda que muitos estudos que envolveram o uso educativo da tecnologia (folha de cálculo, Logo, etc.) se preocuparam em conhecer as reacções dos alunos a estas inovações curriculares. De entre os restantes tópicos estudados, apenas se destaca ligeiramente o estudo das atitudes dos alunos num contexto educativo recorrendo à modelação.

Estudos de desempenho matemático global

Pelo menos desde 1947 que se têm vindo a efectuar trabalhos procurando caracterizar o desempenho matemático dos alunos portugueses. A maior parte destes estudos recorrem a amostras numerosas, mais ou menos representativas da população nacional. Algumas vezes são estudadas as notas ou os resultados dos alunos em testes escolares, mas na maior parte das vezes é solicitado o

preenchimento de um inquérito, ou de um teste, ou a efectivação de uma tarefa estruturada. Trata-se de investigações que, pelos recursos que mobilizam e pelas expectativas que criam (“mas afinal os nossos alunos sabem ou não sabem Matemática?”), ou “será que o dinheiro gasto pelos contribuintes na educação está a ser bem aplicado?”), estão sujeitas a uma exposição pública bastante acentuada, muitas vezes distorcendo o seu significado e empolando a sua relevância.

Quadro 6. Investigações relacionadas com o desempenho global

Áreas Anos	Reformas curriculares	Comparações internacionais	Competências básicas	Classificações de exames
1946-47			(Alves, 1947a)	
1958				(1958)
1979-81	(Catela e Kilborn, 1979) (Catela, 1980) (Leal e Fägerlind, 1981)		(Leal e Kilborn, 1981)	
1993-94		(Ramalho, 1994) (Ramalho e Correia, 1994)		
1995-96		(Amaro, Cardoso e Reis, 1996)	(Benavente, Rosa, Costa e Ávila, 1996)	

Existem três tipos de estudos que apreciaram o desempenho global dos alunos em Matemática. Um primeiro está relacionado com a avaliação de alterações curriculares. Assim aconteceu com os trabalhos da iniciativa do GEP a que fizemos referência (Catela, 1980; Catela e Kilborn, 1979; Leal e Fägerlind, 1981) e que procuraram conhecer os efeitos sobre a aprendizagem da reforma que implantou o ensino unificado. Seria de esperar que estudos com objectivos semelhantes tivessem sido efectuados aquando da implementação da recente reforma, mas tal não aconteceu. Um segundo tipo é constituído pela recente participação portuguesa em dois estudos internacionais, o SIAEP (Ramalho, 1994) e o TIMSS (Amaro e outros, 1996), tendo o SIAEP motivado um estudo sequencial (Ramalho e Correia, 1994). A preocupação com competências matemáticas básicas tem surgido periodicamente e constitui o terceiro tipo de estudos. Estes trabalhos apresentam influências que vão desde o comportamentalismo (Alves, 1947a), o movimento americano “Back to Basics” (Leal e Kilborn, 1981), ou o conceito de literacia (Benavente e outros, 1996). Um último tipo de estudos de avaliação dos

desempenhos globais é constituído pela análise de resultados de exames. Apenas foi identificado um trabalho nestas condições (1958).

Tipos de trabalho

As investigações estudadas tiveram a sua origem em trabalhos para a obtenção de graus académicos, conforme pode ser observado no quadro seguinte. De entre estes destacam-se naturalmente os mestrados que representam mais de metade dos estudos, tendo as teses de doutoramento uma expressão reduzida. Os projectos de investigação têm vindo a assumir um papel maior, embora ainda minoritário, na gestação de investigações, tendo-se vindo a assistir, a pouco e pouco, à realização de teses em estreita colaboração com projectos de investigação.

Quadro 7. Tipos de trabalhos de investigação

Tipos de trabalho	Nº de trabalhos
Teses de mestrado	43
Teses de doutoramento	7
Projectos de investigação	15
Outros	19
<i>Total</i>	<i>84</i>

Em conclusão

O conjunto das 84 investigações estudadas revelaram preocupações que podem ser sintetizadas em quatro grandes ideias. Muitas investigações procuraram comparar os conhecimentos dos alunos com as expectativas curriculares. Posto de outro modo, compararam o currículo intencionado com o atingido. Outras estudaram as aprendizagens dos alunos num contexto de inovação, procurando determinar os pontos nos quais os alunos melhoravam significativamente a qualidade das suas aprendizagens matemáticas. Embora a maior parte dos trabalhos analisados se possam enquadrar nos dos grupos anteriores, apareceram ainda duas outros tipos de preocupações. A primeira procurou caracterizar, normalmente de um ponto de vista qualitativo, o conhecimento dos alunos, sem qualquer preocupação de tipo comparativo. Uma segunda, procurou interpretar o conhecimento dos alunos à luz de uma determinada teoria de aprendizagem.

Conforme referimos, uma visão de conjunto destas investigações mostram-nos uma diversidade de abordagens e problemáticas. Se, por um lado, esta característica tem como aspecto positivo possibilitar uma visão abrangente das aprendizagens, tem, por outro lado, um forte aspecto negativo. Constata-se que poucos (muito poucos) trabalhos se referem a outras investigações portuguesas realizadas na

mesma área. Aparentemente, apesar de existirem muitos estudos, os seus efeitos na constituição de uma comunidade de investigação e de um conhecimento partilhado por essa comunidade são muito diminutos. A pouca dimensão assumida pelos trabalhos associados a projectos de investigação, normalmente efectuados por equipas estáveis, com linhas de trabalho definidas para o longo prazo, e a predominância de trabalhos associados à obtenção de graus académicos podem explicar esta situação.

Conforme referimos, este é um primeiro levantamento, tendo ficado múltiplos aspectos por explorar. Falta, em primeiro lugar, uma síntese global do resultados das investigações, que revele resultados, bem como novas questões para a investigação futura. Mas faltam também análises históricas que nos permitam analisar a evolução das problemáticas, das metodologias, e dos paradigmas.

Referências

- (1958). Será a Matemática a disciplina em que os alunos dos liceus dão menos rendimento? *Cadernos de Psicologia e Pedagogia*, 1/2, 41-51.
- Abrantes, P. (1994). *O trabalho de projecto e a relação dos alunos com a Matemática. A experiência do Projecto MAT789* (Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.
- Afonso, P. J. M. (1995). *O vídeo como recurso didáctico para a identificação e desenvolvimento de processos metacognitivos em futuros professores de Matemática durante a resolução de problemas* (Tese de Mestrado, Universidade do Minho). Lisboa: APM.
- Almeida, D. (1987). Atitudes dos alunos face à resolução de problemas: Influência do tipo e da forma do problema. *Profmat, Revista Teórica e de Investigação sobre o Ensino da Matemática*, 3, 85-98.
- Almeida, L. S. (1990). *Relatório da avaliação externa do Projecto "Ensinar é Investigar"*. Braga:
- Almeida, L. S., Fernandes, J. A. e Mourão, A. P. (Eds.). (1993). *Ensino-aprendizagem da Matemática. Recuperação de alunos com baixo desempenho*. Riba d'Ave: Didáxis.
- Almeida, M. d. C. (1989). *Computer programming and ninth-grade students' understanding of variable* (Tese de Doutoramento, Universidade de Vanderbilt). Lisboa: APM.
- Alverca, C. M. (1990). *Estudo sobre a ocorrência de erros na resolução de situações problemáticas na Matemática*. Diploma de Estudos Avançados não publicada, ISPA/Universidade de Bristol, Lisboa.
- Alves, M. T. (1946). Resultados de um exame de Matemática — 1º Ciclo. *Gazeta de Matemática*, 30, 13-15.

- Alves, M. T. (1947a). Algumas deficiências em Matemática de alunos dos liceus. *Gazeta de Matemática*, 32, 14-16.
- Alves, M. T. (1947b). Resultados dum exame de Geometria — 1º Ciclo. *Gazeta de Matemática*, 33, 13-16.
- Amaro, G., Cardoso, F. e Reis, P. (1996). *TIMSS. Terceiro Estudo Internacional de Matemática e de Ciências. Relatório Nacional. Desempenho dos alunos em Matemática — 7º e 8º anos*. Lisboa: IIE.
- Andrade, A. J. S. (1988). *Le sens des mathématiques. Contribution à une compréhension personnalisée de leur apprentissage*. Diplôme d'Études Approfondies não publicada, Université François-Rabelais, Tours.
- Andrade, A. J. S. e Paiva, A. L. B. d. (1992). Contributo para a gestão do paradoxo em educação: O caso $\sqrt{2}$. Em APM (Ed.), *Profmat 92* (pp. 113-114). Viseu: APM.
- Belchior, M. d. C. d. L. e. S. P. (1994). *Níveis de pensamento geométrico e atitudes face à Geometria e ao ensino de futuros professores*. Tese de mestrado não publicada, Universidade do Minho, Braga.
- Benavente, A., Rosa, A., Costa, A. F. d. e Ávila, P. (1996). *A literacia em Portugal. Resultados de uma pesquisa extensiva e monográfica*. Lisboa: Instituto de Ciências Sociais da Universidade de Lisboa.
- Borges, C. M. d. C. L. (1994). *A linguagem Logo no ensino/aprendizagem de conceitos geométricos no 7º ano de escolaridade*. Tese de Mestrado não publicada, Universidade de Aveiro, Aveiro.
- Borrvalho, A. (1990). *Aspectos metacognitivos na resolução de problemas de Matemática* (Tese de Mestrado, Universidad de Salamanca). Lisboa: APM.
- Botelho, D. (1991). *Interação e desenvolvimento: Análise procedimental de situações de resolução e co-resolução de problemas*. Tese de Mestrado não publicada, ISPA, Lisboa.
- Cabrita, I. (1994). Futuros-professores perante problemas envolvendo o conceito de proporcionalidade: Processo(s) de resolução e propostas de abordagem didáctica. Em A. P. Mourão, I. Rocha, J. A. Fernandes e L. S. Almeida (Eds.), *V Seminário de Investigação em Educação Matemática — Actas* (pp. 223-247). Lisboa: APM.
- Cardoso, M. T. P. (1995). *O papel da calculadora gráfica na aprendizagem de conceitos de análise matemática: Estudo de uma turma do 11º ano com dificuldades* (Tese de Mestrado, Universidade do Porto). Lisboa: APM.
- Carrapiço, F. J. M. (1991). *Contributos da linguagem Logo para a diferenciação na criança do conceito espacial esquerda-direita*. Tese de mestrado não publicada, Universidade do Minho, Braga.
- Carreira, S. (1992). *A aprendizagem da Trigonometria num contexto de aplicações e modelação com recurso à folha de cálculo* (Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

- Castro, J. M. B. P. d. (1985). *An analysis of motivation factors which influence children to participate in mathematical olympiads*. Tese de Mestrado não publicada, Boston University, Boston.
- Catela, M. E. (1980). *Ensino Secundário Unificado. A aprendizagem da Matemática em perspectiva: 9º ano de 1978/79 e sua relação com os 7º e 8º anos de 1977/78*. Lisboa: GEP.
- Catela, M. E. e Kilborn, W. (1979). *Ensino Secundário Unificado. A aprendizagem da Matemática em 1977/78. 7º e 8º anos*. Lisboa: GEP.
- Cebola, G. (1992). *The use of calculators in mathematical problem solving* (Tese de Mestrado, University of London). Lisboa: APM.
- Ceia, M. (1990). Os conceitos de quadrado e rectângulo no 1º ciclo do Ensino básico. Em P. Abrantes e A. Silva (Eds.), *ProfMat 90 — Actas* (Vol. 2, pp. 137-147). Lisboa: APM.
- Ceia, M. J. M. (1985). *Interactions between students' and parents' attitudes towards school and students' achievement in language and mathematics*. Tese de Mestrado não publicada, Boston University, Boston.
- Cordeiro, M. J. P. (1985). *Concept of volume measurement in Portuguese children entering grades 2, 4 and 5*. Tese de Mestrado não publicada, Universidade de Boston, Boston.
- Costa, C. M. S. A. (1984). *Prospective primary teachers' understanding about area*. Tese de Mestrado não publicada, Boston University, Boston.
- Delgado, M. J. e Garcia, M. C. (1988). A utilização do computador na aula de Matemática e as suas implicações na modificação do locus de controlo. Em J. F. Matos e M. d. L. Couceiro (Eds.), *Actas do Encontro Nacional ProfMat 88* (pp. 179-188). Lisboa: APM.
- Domingos, A. M. D. (1994). *A aprendizagem de funções num ambiente computacional com recurso a diferentes representações* (Tese de mestrado, Universidade Nova de Lisboa). Lisboa: APM.
- Duarte, F. B. M. (1991). *O computador e o programa "estdfunc" no estudo das funções* (Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: Projecto Minerva.
- Fernandes, D. M. (1994). *Utilização da folha de cálculo no 4º ano de escolaridade. Estudo de uma turma*. Tese de Mestrado não publicada, Universidade do Minho, Braga.
- Fernandes, J. A. d. S. (1990a). *Concepções erradas na aprendizagem de conceitos probabilísticos*. Tese de Mestrado não publicada, Universidade do Minho, Braga.
- Fernandes, M. H. P. L. (1990b). *Efeitos de três métodos de ensino na aprendizagem do conceito de número racional no segundo ciclo do ensino básico* (Tese de Mestrado, Universidade do Minho). Lisboa: APM.

- Frutuoso, C. e Nunes, M. d. F. (1994). Concepções erradas sobre o conceito de área em alunos do 5º ano. Em A. Vieira, E. Veloso e L. Vicente (Eds.), *ProfMat 94 — Actas* (pp. 226-231). Lisboa: APM.
- Gordo, M. d. F. (1993). *A visualização espacial e a aprendizagem da Matemática. Um estudo no 1º ciclo do Ensino Básico*. Tese de Mestrado não publicada, Universidade Nova de Lisboa, Lisboa.
- João, M. O. e Rodrigues, M. (1990). Modelos construídos pelos alunos sobre o conceito de infinito. Em P. Abrantes e A. Silva (Eds.), *ProfMat 90 — Actas* (Vol. 2, pp. 149-163). Lisboa: APM.
- Jorge, F. R. D. (1994). *O computador e a educação matemática: Abordagens do tópico sucessões* (Tese de Mestrado, Universidade do Minho). Lisboa: APM.
- Junqueira, M. M. B. d. B. (1995). *Aprendizagem da Geometria em ambientes computacionais dinâmicos. Um estudo no 9º ano de escolaridade* (Tese de Mestrado, Universidade Nova de Lisboa). Lisboa: APM.
- Leal, L. C. e Fägerlind, I. (1981). *Ensino Secundário Unificado. A aprendizagem da Matemática — Influência da escola e da família — 7º, 8º e 9º anos de escolaridade de 1977 a 1979*. Lisboa: GEP.
- Leal, L. C. e Kilborn, W. (1981). *Ensino Secundário Unificado. A aprendizagem da Matemática — A capacidade em cálculo básico matemático*. Lisboa: GEP.
- Lopes, C. A. d. O. (1985). *The logical reasoning on conservation, seriation, and classification of grade 1 of 23 Marinha Grande children in Portugal*. Tese de Mestrado não publicada, Universidade de Boston, Boston.
- Machado, J. E. N. L. (1990). *Os computadores na facilitação da aprendizagem: Estudo tomando as reduções de amplitudes e as equações trigonométricas*. Tese de Mestrado não publicada, Universidade do Minho, Braga.
- Maia, J. J. G. d. S. (1990). *O tipo de escrita da língua materna e a sua influência na aprendizagem da Matemática* (Tese de Mestrado, Universidade do Minho). Lisboa: APM.
- Marchand, H. M. d. O. (1991). *Apprentissage opératoire chez des enfants de milieux socio-culturels défavorisés*. Lisboa: INIC.
- Martinho, M. H. S. d. S. (1996). *O infinito através da obra de M. C. Escher. Uma experiência sobre a concepções acerca do infinito numa turma de Métodos Quantitativos* (Tese de mestrado, Universidade do Minho). Lisboa: APM.
- Matos, J. F. (1985). Dificuldades conceptuais na tradução de problemas para equação. *Profmat, Revista Teórica e de Investigação sobre o Ensino da Matemática, 1*, 249-271.
- Matos, J. F. (1987). *A natureza do ambiente de aprendizagem criado com a utilização da linguagem Logo no Ensino Primário e as suas implicações na construção do conceito de variável*. Lisboa: Projecto Minerva.

- Matos, J. F. (1991). *Logo na Educação Matemática: Um estudo sobre as concepções e atitudes dos alunos* (Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.
- Matos, J. M. (1984). *Van Hiele levels of preservice primary teachers in Portugal* (Tese de Mestrado, Boston University). Lisboa: APM.
- Matos, J. M. (1994). Algumas linhas de força da investigação em Educação Matemática em Portugal. Em A. P. Mourão, I. Rocha, J. A. Fernandes e L. S. Almeida (Eds.), *V Seminário de Investigação em Educação Matemática — Actas* (pp. 5-16). Lisboa: APM.
- Matos, J. M. e Ponte, J. (1986). Students' strategies and reasoning processes in computer educational games. Em *Proceedings of the Tenth International Conference Psychology of Mathematics Education* (pp. 451-456). Londres: University of London.
- Mendonça, M. A. (1980). *Ensino Secundário Unificado. Relatório de avaliação do 7º ano de escolaridade — 1976/77*. Lisboa: GEP.
- Mesquita, A. M. J. L. d. (1985). *Analysis of solutions and attitudes in Portuguese mathematical olympiads*. Tese de Mestrado não publicada, Boston University, Boston.
- Moreira, M. L. R. (1989). *A folha de cálculo na educação matemática* (Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: Projecto Minerva, FCL.
- Morgado, L. (1991). Word problems — The construction of multiplicative structures. Em F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of the Fifteenth PME Conference* (Vol. III, pp. 25-32). Genova, Italy: Università di Genova.
- Morgado, L. M. d. A. (1988). *Aprendizagem operatória da conservação das quantidades numéricas*. Coimbra: Instituto Nacional de Investigação Científica.
- Mourão, A. P. (1988). *Teaching mathematics in mixed ability classes* (Tese de Mestrado, University of London). Lisboa: APM.
- Mourão, A. P. (1994). 'Figuras tridimensionais' — O que são? Em A. P. Mourão, I. Rocha, J. A. Fernandes e L. S. Almeida (Eds.), *V Seminário de Investigação em Educação Matemática — Actas* (pp. 125-136). Lisboa: APM.
- Neves, M. A. F. (1988). *O computador na recuperação em Geometria de alunos do 9º ano* (Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: Projecto Minerva.
- Oliveira, A. M. B. d. (1996). *Atribuições causais e expectativas de controlo do desempenho na Matemática*. Tese de Doutoramento não publicada, Universidade do Minho, Braga.
- Oliveira, I. (1994). *O conceito de número racional em alunos do 6º ano de escolaridade. Estratégias e dificuldades conceptuais* (Tese de mestrado, ISPA). Lisboa: APM.

- Palhares, P. (1992). *The introduction of a problem solving strategy as a mean to teach mental arithmetic* (Tese de Mestrado, University of London). Lisboa: APM.
- Pereira, A. N. e Brito, J. X. d. (1946). Os pontos de exame de Geometria do 1º Ciclo na época de Julho. I — Julho de 1945 (liceus de Lisboa). *Gazeta de Matemática*, 29, 13-16.
- Pires, I. V. (1992). *Processos de resolução de problemas. Uma abordagem à construção do conhecimento matemático por crianças do ensino primário* (Tese de Mestrado, Universidade Nova de Lisboa). Lisboa: APM.
- Pires, M. C. V. (1995). *Os conceitos de perímetro e área em alunos do 6º ano: Concepções e processos de resolução de problemas* (Provas públicas para professor-adjunto, ESE de Bragança). Lisboa: APM.
- Ponte, J. (1985). Concepções e dificuldades dos alunos em raciocínio funcional. *Profmat, Revista Teórica e de Investigação sobre o Ensino da Matemática*, 1, 234-248.
- Ponte, J. P., Matos, J. F., Guimarães, H. M., Leal, L. C. e Canavarro, A. P. (1994). Teachers' and students' views and attitudes towards a new mathematics curriculum: A case study. *Educational Studies in Mathematics*, 26, 347-365.
- Ponte, J. P. d. (1981a). No Ensino Secundário: Prioridade à linguagem da lógica ou à linguagem da teoria dos conjuntos? Em *VIII Jornadas Luso-Espanholas de Matemática. Actas* (Vol. IV, pp. 127-136). Coimbra: Departamento de Matemática, Universidade de Coimbra.
- Ponte, J. P. d. (1981b). Vectores no Ensino Secundário. Em *VIII Jornadas Luso-Espanholas de Matemática. Actas* (Vol. IV, pp. 119-125). Coimbra: Departamento de Matemática, Universidade de Coimbra.
- Ponte, J. P. d. (1993a). A Educação Matemática em Portugal: Os primeiros passos de uma comunidade de investigação. *Quadrante, Revista Teórica e de Investigação*, 2(2), 95-125.
- Ponte, J. P. d. (1993b). O professor de Matemática: Um balanço de dez anos de investigação. *Quadrante, Revista Teórica e de Investigação*, 3(2), 79-114.
- Porfírio, J. M. (1993). *A resolução de problemas na aula de Matemática: Uma experiência no 7º ano de escolaridade* (Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.
- Ramalho, G. (1994). *As nossas crianças e a Matemática. Caracterização da participação dos alunos portugueses no "Second International Assessment of Educational Progress"*. Lisboa: DEPGEF, Ministério da Educação.
- Ramalho, G. e Correia, T. (1994). Análise dos erros e estratégias utilizadas por alunos de 9 anos no teste de Matemática incluído no "Second International Assessment of Educational Progress": Medida e geometria. Em A. P. Mourão, I. Rocha, J. A. Fernandes e L. S. Almeida (Eds.), *V Seminário de Investigação em Educação Matemática — Actas* (pp. 51-72). Lisboa: APM.

- Rodrigues, A. M. L. (1985). *Conservation of number, seriation, and classification abilities of rural Portuguese children at first and second years of priery school*. Tese de Mestrado não publicada, Universidade de Boston, Boston.
- Rodrigues, M. (1994). *O conceito de infinito em futuros professores de Matemática* (Tese de Mestrado, Universidade de Aveiro). Lisboa: APM.
- Santos, A. L., Carapeto, A., Almeida, D. e Vermelho, T. (1988). A disciplina de Matemática: Perspectivas dos alunos. Em J. F. Matos e M. d. L. Couceiro (Eds.), *Actas do Encontro Nacional ProfMat 88* (pp. 113-157). Lisboa: APM.
- Saraiva, M. (1992). *O computador na aprendizagem da Geometria. Uma experiência com alunos do 10º ano de escolaridade* (Tese de Mestrado, Faculdade de Ciências de Lisboa). Lisboa: Projecto Minerva, FCUL.
- Serrazina, M. d. L. M. (1985). *Conservation of number, seriation, and classification abilities of urban Portuguese children at first and second years of priery school* (Tese de Mestrado, Universidade de Boston). Lisboa: APM.
- Torres, I. M. V. d. R. (1996). *A representação do espaço segundo as abordagens linear e flexível: Estudo comparativo com alunos do 8º ano*. Tese de Mestrado não publicada, Universidade do Minho, Braga.
- Vilela, M. d. C. M. (1985). *Concept of area among Portuguese rural children entering grades 5 and 6*. Tese de Mestrado não publicada, Boston University, Boston.
- Zambujo, M. C. (1989). *O ensino da Matemática na época dos computadores: Uma abordagem pluridisciplinar a partir do estuário do Tejo* (Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

José Manuel Matos, Faculdade de Ciências e Tecnologia, 2825 MONTE DA CAPARICA. jmm@mail.fct.unl.pt

GRUPOS DE DISCUSSÃO

Grupo I. O conhecimento matemático dos alunos: suas construções e produções

Dinamizadora: Joana Porfírio

As comunicações e intervenções curtas que foram integradas neste grupo constituíram o ponto de partida para uma discussão mais aprofundada em torno dos questões identificadas previamente:

- o que significa saber Matemática?
- que tipo de experiências matemáticas devem ter os alunos?
- que tipo de conhecimentos matemáticos deverão ter os alunos?

As três comunicações que foram apresentadas neste grupo de discussão centraram-se nos seguintes temas:

- desempenhos de alunos em tarefas estatística (Carolina Carvalho);
- concepções dos alunos sobre sucessões convergentes (Eduarda Moura);
- aprendizagem da subtração (Lurdes Serrazina e Isolina Oliveira).

Na sua comunicação, Carolina Carvalho, com base na análise do desempenho dos alunos na resolução de duas tarefas estatísticas "equivalentes", uma apresentada por meio de gráficos de barras e outra apresentada por meio de um gráfico circular, refere a diferente adesão dos alunos a cada uma das tarefas, a maior dificuldade na tarefa em que os dados estão apresentados por meio de um gráfico de barras e a ausência de estratégias de verificação.

Nas outras duas comunicações e nas duas intervenções curtas realizadas neste grupo de discussão foram apresentados algumas conclusões preliminares de estudos realizados no âmbito do projecto AMECC. Eduarda Moura, analisa as conexões estabelecidas por dois alunos entre os conceitos de monotonia de uma sucessão, de sucessão e de sucessão convergente. Lurdes Serrazina e Isolina Oliveira, depois de uma breve referência relativa à literatura sobre a aprendizagem da subtração, analisam a evolução do desempenho de dois alunos na resolução de problemas de subtração.

Em intervenções curtas, Graça Cebola e Cristolinda Costa contribuem para a discussão apresentando alguns aspectos relativos à aprendizagem das equações e da proporcionalidade. Graça Cebola analisa a evolução do desempenho de um aluno em relação a uma mesma tarefa relativa ao tópico "resolução de equações".

Cristolinda Costa descreve a forma como um aluno recorre aos "métodos próprios" para resolver situações de proporcionalidade.

Todas as contribuições referidas anteriormente, contribuíram de uma forma decisiva para envolver os participantes neste grupo numa discussão bastante viva e interessante em torno dos seguintes aspectos:

- diversidade de desempenho dos alunos perante uma mesma tarefa;
- modelos que os alunos usam para resolver tarefas;
- aspectos múltiplos de um mesmo conceito.

Finalmente, foram dados alguns contributos no sentido de clarificar algumas "implicações" para o ensino. Nomeadamente, foram discutidos aspectos relativos à forma de lidar com os "modelos próprios" dos alunos no sentido de criar condições para a sua evolução.

*Joana Porfírio, Escola Superior de Educação de Setúbal, Lugar de Estefanilha,
2900 SETÚBAL*

As concepções dos alunos sobre sucessão convergente: resultados preliminares

Eduarda Moura, Universidade Lusíada

Maria José Costa, Escola Secundária de Augusto Gomes

Introdução

Nesta comunicação serão apresentados resultados preliminares resultantes da análise de três das nove entrevistas efectuadas no âmbito da investigação sobre Sucessões Convergentes, uma das unidades integradas no Projecto AMECC (Matos, 1994).

Em Moura e Costa (1995) propusemos fazer o levantamento das concepções alternativas de sucessão convergente e investigar, por outro lado, as relações entre os conceitos de monotonia e de sucessão e, por outro, entre os conceitos de sucessão e de sucessão convergente, considerando, ainda, ser necessário estudar as conexões existentes entre estes conceitos:

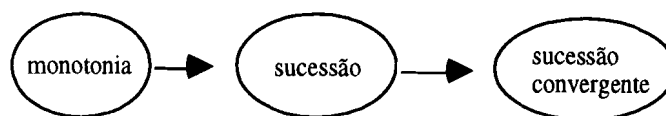


Figura 1. Que conexões?

Procedimentos

A turma que participou neste estudo era constituída por 26 alunos que frequentam o Curso do Ensino Secundário desde o 1º ano da generalização dos novos planos curriculares. Foi pedido ao professor que seleccionasse os 6 alunos a entrevistar segundo os seguintes critérios:

- frequentassem o 11º ano pela primeira vez, de preferência que não frequentassem aulas de explicações de Matemática;
- segundo critérios definidos pelo professor, dois dos alunos tivessem já demonstrado desempenho alto, dois alunos desempenho médio e dois alunos desempenho baixo.

Dos seis alunos seleccionados quatro são do sexo masculino e dois do sexo feminino. Nesta comunicação os resultados apresentados emergem da análise das entrevistas feitas com os dois alunos de desempenho alto e os quais designaremos pelos nomes de Anabela e Henrique.

Todos os alunos foram entrevistados três vezes tendo cada uma das entrevistas a duração mínima de 45 minutos e máxima de 60. A primeira entrevista ocorreu imediatamente antes de ser leccionado o tema "Sucessões Convergentes", a segunda imediatamente depois de leccionada a referida unidade e a terceira três meses após a segunda entrevista. Designaremos estas entrevistas por E1, E2 e E3.

Dado que um dos objectivos gerais do projecto AMECC é o de investigar a aprendizagem no contexto escolar (Matos, 1994, pp. 110), os protocolos das entrevistas foram desenvolvidos tendo em conta não só a revisão de literatura (Moura e Costa, 1995) mas também os livros de texto usados pela turma (Lopes et al., 1993, 1994) e o conhecimento da planificação global da unidade, inclusive de algumas das situações a serem trabalhadas com a turma. As situações apresentadas aos alunos durante as entrevistas foram as seguintes:

- (1) Sucessão não monótona, limitada e divergente
- (2) Sucessão definida por ramos, não monótona e constante a partir de certa ordem
- (3) Sucessão decrescente, igual a zero a partir de certa ordem
- (4) Sucessão não monótona, convergente
- (5) Sucessão crescente e não limitada

Em cada uma destas cinco situações, foi apresentada uma tabela de valores; nos casos em que os alunos não fizeram espontaneamente a representação gráfica dos valores dados, também lhes foi fornecida essa representação. Nos casos (2), (4) e (5) foi também providenciada a expressão algébrica da sucessão.

Na segunda entrevista foram novamente apresentadas as situações da primeira, tendo sido acrescentadas as expressões algébricas de três leis de correspondência, nas seguintes condições:

- duas correspondências não unívocas, uma delas definida por ramos;
- uma sucessão definida por ramos não monótona e não limitada;

Na terceira entrevista foram repetidas todas as situações da segunda. Todas as entrevistas foram semi-estruturadas e os protocolos foram baseados nas seguintes perguntas:

1. Para cada situação:
 - (a) Esta situação é uma sucessão?¹;
 - (b) Como poderias obter o termo, por exemplo, de ordem 50?;
 - (c) Qual o comportamento da sucessão quando n aumenta indefinidamente?

2. Compara as sucessões em termos do seu comportamento, quando n aumenta indefinidamente: qual delas tem comportamento mais parecido com o da situação (2)?;
3. Inventa uma sucessão que se aproxime, por exemplo, de 1,5 ;
4. Inventa uma sucessão que não se aproxima de nenhum número.

As situações (1) e (3), correspondentes a situações em que não é possível ou seria bastante difícil obter o termo geral, foram escolhidas porque nos interessava saber aprofundadamente o que os alunos aceitam como sendo sucessões. Vejamos as situações:

- Situação (1): Com este dado (um dado tetraédrico) fizemos 34 lançamentos cujos resultados registámos na seguinte tabela. Imagina que o dado é lançado indefinidamente;
- Situação (3): Com este pêndulo fizemos a seguinte experiência: Levantamos o pêndulo de tal forma que o fio esticado coincidissem com a marca 90 na régua circular (Figura 2). Seguidamente, largámos o pêndulo nessa posição. Como sabes o pêndulo oscila em torno da marca 0 até que pára. Registámos, então, 38 amplitudes correspondentes ao ângulo que o fio do pêndulo fez com a direcção A0. A partir do momento que o pêndulo pára o ângulo que faz com A0 é, indefinidamente, de 0 graus.

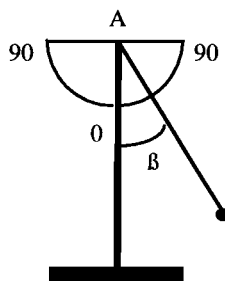


Figura 2. A situação "pêndulo"

Ambas as situações aqui descritas foram exemplificadas e quase todos os alunos fizeram, durante as entrevistas, experiências quer com o pêndulo quer com o dado.

Durante uma das entrevistas piloto os alunos insistiram que tanto na situação (1) como (3) o conjunto de números registado não era uma sucessão porque não apresentava nenhuma lei; essa insistência levou-nos a aprofundar o significado que o aluno atribui a "lei" e a incluir no protocolo da primeira entrevista a pergunta "e

o que é uma lei?" nos casos em que o aluno recusou aceitar a sequência de números como sucessão por "não ter lei". Tanto esta pergunta como a introdução de leis não unívocas nas segunda e terceira entrevistas visaram o aprofundamento desse significado, no sentido de compreendermos o conceito sucessão dos alunos.

Na situação (5) a sucessão em causa, $b_n=(75 \times 0.07)^n$, foi apresentada através de um problema de juros, vejamos como:

- Se 75 contos forem investidos a uma taxa anual de 0.07 (7%) e os juros sobre os 75 contos são acumulados, ao fim de cada ano, numa conta aberta para o efeito. O saldo dessa conta decorridos n anos é dado por $b_n=(75 \times 0.07)^n$.

As situações (1), (3) e (5) foram muitas vezes designadas pelos alunos e por nós durante as entrevistas por "dado", "pêndulo" e "banco", respectivamente. No Quadro I podemos ver as sucessões e leis escolhidas para concretizar as situações das entrevistas.

Análise

Com base na transcrição das entrevistas realizadas a constituição de categorias foi feita seguindo a metodologia de análise de dados expressa em Bogdan e Biklen (1994). Nesta comunicação analisaremos os significados de sucessão, comportamento de uma sucessão "no infinito" e sucessão convergente durante as três entrevistas, E1, E2 e E3, cada uma delas realizada com os alunos Henrique e Anabela em simultâneo.

A decisão de entrevistar os alunos aos pares deve-se ao facto de os sujeitos que participaram neste estudo serem jovens com idade de 16 anos e com uma agenda bastante ocupada. O horário da turma ocupava não só todas as tardes até 18:30 como ainda três manhãs; combinado com este horário os alunos prosseguiam actividades extra-curriculares como música e desporto, por exemplo. Em face desta agenda os alunos ficam com pouco tempo disponível para a colaboração em outros projectos, nomeadamente de investigação. Com o objectivo de satisfazer a exigência do projecto AMECC (Matos, 1994, p. 114) de que as primeiras e segundas entrevistas fossem feitas imediatamente antes e imediatamente depois do ensino do conceito em questão, ficou decidido que os alunos seriam entrevistados aos pares, agrupados segundo o seu desempenho e garantida a disponibilidade dos alunos nas alturas certas.

O formato da entrevista em pares resulta em desvantagens e em vantagens; algumas das desvantagens detectadas foram por nós previstas, como por exemplo, em certas partes da entrevista um dos alunos poder omitir-se escutando mais do que falando ou a personalidade de um deles sobrepôr-se à do outro não deixando que

	não monótona limitada divergente	não monótona const. a partir de certa ordem	decrecente zero a partir de certa ordem	não monótona limitada convergente	crescente não limitada	lei não unívoca	não, monótona definida por ramos não limitada
E1	"dado"	$a_3 = a_{10} = a_{100} = a_{1000} =$ $= a_{10000} = a_{100000} = 7$ todos os outros termos são iguais a 2	"pêndulo"	$3 + \frac{(-1)^n}{n}$	"banco"		
E2	"dado"	$u_3 = u_{10} = u_{100} = u_{1000} =$ $= u_{10000} = u_{100000} = 7$ todos os outros termos são iguais a 2	"pêndulo"	$3 + \frac{(-1)^n}{n}$	"banco"	$x_n = 3n^3$ $b_n = \begin{cases} 3, & \text{se } n \text{ é par} \\ -4, & \text{se } n \text{ é quadrado perfeito} \\ -2, & \text{nos restantes casos} \end{cases}$	$z_n = \begin{cases} 2^{n-1}, & \text{se } n \text{ é par} \\ 4n + 10, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$
E3	$y_n = 5 \times (-1)^n$	$u_3 = u_{10} = u_{100} = u_{1000} =$ $= u_{10000} = u_{100000} = 7$ todos os outros termos são iguais a 2	"pêndulo"	$3 + \frac{(-1)^n}{n}$	"banco"	$x_n = 3n^3$ $b_n = \begin{cases} 3, & \text{se } n \text{ é par} \\ -4, & \text{se } n \text{ é múltiplo de } 3 \\ -2, & \text{nos restantes casos} \end{cases}$	$z_n = \begin{cases} 2^{n-1}, & \text{se } n \text{ é par} \\ 4n + 10, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$

este pudesse exprimir a sua opinião livremente. Porém, quando os alunos se encontravam em desacordo e pedíamos a um deles que explicasse ao outro o que queria dizer, resultaram diálogos interessantes em que os entrevistadores estiveram "quase" ausentes.

Nas duas secções que se seguem tentaremos descrever os conceitos de sucessão e sucessão convergente revelados pela Anabela e pelo Henrique.

Sucessão e lei

Na primeira entrevista o Henrique afirma que sucessão é uma correspondência com domínio N ; contudo, o conceito que ele deixa transparecer para sucessão é uma sequência de números, obtidos por uma lei, ou uma regra, que transforma números naturais. Tem de ser possível "criar uma função" para essa sequência de números constituir uma sucessão. A situação do dado, por exemplo, não constitui uma sucessão: *"Isto tinha de ter uma regra, uma lei... Só que nós aqui não podemos fazer isso, porque [lança o dado] dá resultado [à sorte]..."* e ainda *"Sim, só que eu não posso... criar uma função para este tipo, para este conjunto de solução. É impossível criar uma função para este conjunto..."*.

Ambos os alunos tinham a ideia de que uma sucessão tinha de apresentar uma lei e, quando interrogados sobre o que é uma lei, responderam prontamente como se já tivessem pensado nisso, vejamos o Henrique:

Nós sabemos que a Matemática... para interpretar a lei sabemos que a Matemática é um discurso demonstrativo, n'ê? E como tal, rege-se de leis para que esse discurso seja válido! [que] permite à Matemática fazer... tudo portanto, tudo o que pretende fazer, tudo o que pretende escrever ou demonstrar que seja válido!... É isso que eu interpreto como lei, é algo que possibilita à Matemática criar soluções válidas... É isso...

e a Anabela :

Pronto então eu acho que ao dizer isso [as funções têm de ter uma lei] tem a ver com um número... um número quando substituído pela sua função dá uma imagem, pronto... e entretanto na mesma função substituída por outro número, vai dar, pode dar o mesmo número, pode dar outro número; mas é qualquer coisa, qualquer processo que há ali, ou uma soma, uma subtracção, uma divisão ou multiplicação, que dá outro número qualquer!

A Anabela é clara relativamente ao que pensa ser uma lei: tem de ter uma expressão algébrica que envolva as operações que ela conhece e que "dê para todos os números".

A visão de lei do Henrique é menos restrita que a de Anabela. Para o Henrique na situação (2) está definida uma sucessão; segundo ele, está criada uma regra: a lei que define a sucessão não tem de fornecer uma só expressão para nela serem substituídos todos os números naturais: *"Todos os termos são iguais! Quer dizer, se o a_5 , se o a_{10} , se o a_{20} , é igual a 7 e se nos dizem que todos os termos são [iguais a 2] ... eu acho que, que está aqui criada uma regra!..."*. A primeira

reacção de Anabela à situação (2) é a de duvidar da legalidade (em Matemática) de se poder escrever tal coisa:

Podem-se fazer sucessões com... com números e depois dar o... dar logo à partida, por exemplo, para a ordem a_5 o valor... o valor? Eu posso fazer uma sucessão em que escreva, sucessão... uma sucessão qualquer que nos dê igual a 2, ou $n=2$ excepto a_5 que tem de ser igual a... eu posso escrever mesmo isto? Isto passa a ser uma... é uma sucessão, com estas restrições?

Tanto a Anabela como o Henrique parecem ter uma ideia do que é próprio acontecer quando estão a tratar de "coisas da Matemática", como se houvesse um conjunto de regras que lhes permitisse fazer só algumas coisas.

Para a Anabela a situação (2) poderá ser um tipo especial de lei mas não o que ele pensava que deveria ser uma lei: "*É uma lei com excepções! Pois. Mas assim então não é lei! Assim com isto, acho que não consigo fazer uma lei*". Lei tem um carácter determinístico, é a transcrição de um fenómeno físico, é algo a que os números "estão submetidos" correspondendo a um certo acontecimento que os determina e que em Matemática é expresso por uma fórmula:

Não, mas eu acho que estávamos a falar em leis, era a submeter por exemplo, o $n=n+1$ [$un=n+1$], ou isso. Então aí, não tinha nada a ver com isto! Não é? Aqui [situação (2)] já estamos a pôr tudo em excepções, e a lei que nós estávamos a fazer é sem excepção nenhuma. Pronto, ou admitimos uma lei que era a lei que ia ser aplicada a isto, todos os termos são iguais a 2, com estas excepções, não é? ou senão ...

Nas segunda e terceira entrevistas, tanto o Henrique como a Ana parecem ter-se libertado da necessidade de uma sucessão ter de apresentar uma lei com características determinísticas: uma sequência de números define uma sucessão se for uma correspondência entre números naturais e números reais. Esta posição é mais visível na terceira entrevista do que na segunda em que se verifica ainda uma necessidade de justificar a lei. A Anabela refere-se ao facto de já ter estudado em Probabilidades de que quando n aumenta indefinidamente, no caso do "dado", a probabilidade de sair 1, 2, 3, ou 4 é igual e consequentemente há uma lei (em Probabilidades) que rege aquela sucessão:

Apesar de não estar muito convencida sei que isto são sucessões e sei que, daqui a bocado ... daqui ... se isto fosse feito indefinidamente assim ... isto ia dar o mesmo... ia dar parecido com ... cada vez mais parecido do ... Ora bem, quantas é que são? São 4 então ia aparecer quase o mesmo número de 1, de 2, de 3 e de 4 porque a sorte é mais ou menos ... é considerada 0,5 ... não é?.

Fora esta necessidade de explicar a lei no caso do dado, a Anabela aceita como sucessão qualquer correspondência entre números naturais e reais não deixando de expressar, no entanto, uma certa decepção que é como que aprovada pelo Henrique:

Aa... não sei! É que, a mim custa-me aceitar que isto [dado] é uma sucessão embora saiba que isto é uma sucessão! [E- E porquê?] Porque eu estou habituada a ter tudo em termos gerais ... estou habituada sempre a fazer o n ... ao n corresponde um $n+1$ ou um $n+20$ ou um n sobre 2, assim uma coisa ... [e Henrique completa:] " Pois ... E aqui...e como neste caso não não...não podemos ter isso, é impossível!.

No entanto a posição mantida por ambos na segunda entrevista é a de que uma sucessão é uma correspondência com domínio N , não exigindo que a correspondência seja unívoca; na verdade todas as correspondências que apresentámos, unívocas ou não, foram consideradas sucessões (ver Quadro II), vejamos o seguinte diálogo:

H- Não ... são são sucessões. São tudo sucessões ...[E2- Todas?];

H- Uma divergente, outra não divergente ... mas são sucessões!; [E2- Porquê?]; A- Bem, eu começo a achar que isto das sucessões é assim: há uns números quaisquer que têm uma correspondência a outros números quaisquer ...; [interrompe o Henrique] H- Os números naturais. A- Exacto, exacto, números naturais faz corresponder números reais ... acho que é assim [...].

Esta posição é mantida mesmo depois de lhes ser pedido para fazer a representação gráfica das sucessões. Sucessão é uma colecção de números e este conceito vai ser confirmado e defendido na terceira entrevista em que a palavra lei esteve omissa. Não falaram de leis nem precisaram que a sucessão "tivesse uma lei":

Esta, prontos, é uma sucessão porque são uma sucessão de números, -é que uma sucessão podem não ser expressa, pode não ser... nós estamos habituados àquelas sucessões [em] que uma pessoa transformam os números, mas pode não, pode ser assim uma coisa deste género [dado]

Na terceira entrevista, a Anabela suspeita que a correspondência da sucessão tem de ser unívoca somente quando faz a representação gráfica da sucessão: nessa altura lembra-se que afinal a uma ordem só pode corresponder um valor numérico. O facto de a Anabela se lembrar, através da aparência do gráfico, que a correspondência tem de ser unívoca não muda a posição tomada por Henrique que continua a defender que as únicas correspondências que não são sucessões são aquelas que têm um domínio que não está contido nos números naturais. No seguinte quadro resumimos as posições tomadas pelos alunos durante as três entrevistas relativamente a sucessão e lei:

Quadro II. Sucessões e leis

	sujeito	sucessões	não sucessões	lei
E1	Anabela	banco; s_n	dado; pêndulo e a_n	banco, s_n e pêndulo ² a_n é lei \checkmark excepções
E1	Henrique	banco, s_n e a_n	dado	todas menos dado
E2	Anabela	todas	domínio $\neq N$	
E2	Henrique	todas	domínio $\neq N$	
E3	Anabela	todas unívocas	não unívocas; domínio $\neq N$	palavra omissa
E3	Henrique	todas	domínio $\subsetneq N$	palavra omissa

Comportamento no infinito e convergência

Nesta secção tentaremos explicitar o que os alunos entendem por:

- comportamento de uma sucessão quando n aumenta indefinidamente, antes de terem sido ensinados sobre o que é uma sucessão convergente e,
- sucessão convergente.

Tentaremos, através desta explicitação, dar uma visão da forma de aprendizagem do conceito de sucessão convergente e veremos ainda de que forma a noção de sucessão que estes alunos têm intervém no significado de convergência.

Começemos por considerar o que é dito pelos alunos sobre comportamento de uma sucessão no infinito para cada uma das sucessões apresentadas:

Quadro III. Comportamento no infinito

sucessão	comportamento no infinito
"pêndulo"	mantém-se zero
"dado"	varia entre 1, 2, 3, 4 mantém-se no 1, 2, 3, 4
$3 + \frac{(-1)^n}{n}$	não estabiliza = não se mantém num número há uma aproximação dos valores
"banco"	aumenta sempre tende para infinito = cada vez vai aumentando, é crescente
1.5; 1.5; 1.5; 1.5;.....	está em 1.5 é de 1.5 não se aproxima de 1.5, está lá

Esta forma de se exprimirem é usada antes de terem pensado no gráfico da sucessão e é sempre usada nas segunda e terceira entrevistas como parte do processo de classificar uma sucessão do ponto de vista da convergência.

Além da linguagem acima descrita os alunos fizeram gestos, falaram sobre linhas das quais a sucessão se aproximava e fizeram figuras para exprimir o comportamento da sucessão. O que foi entendido por comportamento no infinito, foi descrever quando é que a sucessão crescia ou decrescia e com que regularidade o fazia. Parece-nos que a regularidade que exigiam a uma sequência de números para ser sucessão é transferida para o processo de descrição do comportamento no infinito e, depois da unidade de ensino, para estudar a sua convergência.

A forma de descrever o comportamento da sucessão através de características referentes à monotonia — querendo nós dizer que a descrição do comportamento da sucessão é feito descrevendo a forma como a sucessão cresce ou decresce e a

regularidade com que o faz — é um instrumento usado pelos alunos nas três entrevistas.

No caso do Henrique detectamos que este aluno na primeira entrevista defendia uma posição que deixava transparecer a seguinte noção: uma sucessão quando decresce (cresce) então diminui (aumenta) até infinito. No caso da sucessão da situação (4) o Henrique procurou descrever o comportamento da sucessão através de duas subsucessões, a dos pares e a dos ímpares: depois de ter descoberto que uma das sucessões crescia enquanto a outra decrescia, conjecturou que ambas se encontrariam e depois continuariam uma a crescer e outra a decrescer:

Mas é que dá sempre [argumentando com Anabela], porque ... Se isto é ... uma infinidade de vezes, isso obrigatoriamente tem de acontecer ... portanto é óbvio que ... se eles aqui mantêm esta diferença e portanto se um vai aumentando e outro vai diminuindo portanto o 0 e o 0.1 não é?... Obviamente que depois ... depois de passar de ambos serem iguais de ambos ... da diferença ser, portanto seja nula, depois vão continuar a... pela mesma ordem que aqui estão!... Ou seja, um aumenta e o outro diminui!...

Na primeira entrevista o Henrique não imaginava que uma sucessão pudesse crescer indefinidamente e ser ao mesmo tempo limitada uma vez que defendeu esta noção repetidas vezes argumentando com a Anabela; esta, apesar de afirmar compreender o que ele queria dizer e até concordar com o raciocínio, sabia que apesar de uma sucessão estar sempre a aumentar podia ser limitada. O argumento da Anabela a rebater a ideia do Henrique de que as duas subsucessões se encontrariam e depois se afastariam, foi sempre de natureza algébrica:

Se dividires aqui por um n° muito grande, um a dividir por um n° muito grande vai dar um n° muito pequenino, não é? Depois a continuar a dividir por um n° muito grande de ordem seguinte vai continuar a dar um n° pequenino e até ainda mais pequenino ... vai ser diferença só dos sinais, um vai ser positivo outro vai ser negativo! [H- Sim!]. Assim sendo vais sempre subtrair ou somar um n° diferente, não é? Se sabes que um a dividir por n dá um n° infinito de números ... [...]E agora faz outra vez a diferença porque vais verificar é que a diferença deste para este vai ser maior do que a diferença deste para este, vai ser sempre a diminuir! Mas não se chegam a encontrar, não se conseguem chegar a encontrar porque os números vão sempre existir, apesar de, ui! não haver máquina de calcular para eles, percebes?, vão continuar sempre ... um a dividir por qualquer coisa vai dar sempre um número cada vez menor!... Como é que eu te hei-de explicar, espera aí!... Um a dividir...

O Henrique, mesmo nas duas últimas entrevistas, em que já aceitava que uma sucessão pudesse ser crescente e limitada, continuava a insistir que tinha razão no seu raciocínio: apenas não tinha admitido a hipótese da sucessão, apesar de estar sempre a crescer e do conjunto das imagens ser infinito, ter um "tecto", uma "barreira".

Em qualquer dos casos, para a Anabela e o Henrique, ver como a sucessão cresce ou decresce constitui um instrumento para conhecer o comportamento da sucessão e nas duas últimas entrevistas para as classificar de convergentes ou divergentes, como veremos adiante.

No Quadro IV expomos alguns exemplos de gestos e expressões usados pelos alunos para expressar o comportamento da sucessão. Seguidamente, apresentamos figuras feitas por ambos os alunos para descrever o comportamento das sucessões apresentadas.

Quadro IV. Gestos e expressões

sucessão	exemplos de gestos e expressões
pêndulo	<ul style="list-style-type: none"> •H- <i>Mantém-se no mesmo número depois fica sempre assim... oscilação... pois fica sempre vai assim mantém-se sempre em zero</i> A- <i>É</i> [faz gesto com o lápis indicando linha horizontal] "
dado	<ul style="list-style-type: none"> •"vai também andar por aqui a saltar" [faz gesto para cima e para baixo]
$3 + \frac{(-1)^n}{n}$	<ul style="list-style-type: none"> •Ao que parece eles estão-se a aproximar até chegar uma linha! [Figura 3.] •Vai-se continuar por aqui...e depois até o meu lápis poder fazer isto [anda com o lápis para cima e para baixo a oscilar de cada vez menos] <i>porque eu não consigo fazer, é assim</i> [desenha no gráfico que lhe demos]
banco	<ul style="list-style-type: none"> •Mas é sempre $5,25 + 5,25 + 5,25 \dots$ Por isso vai ser assim uma recta, por aí fora! <i>É isso!... Mantém-se sempre a aumentar, mas ... assim constante!</i> [faz gesto com o lápis no ar a subir, a desenhar uma recta, ao mesmo tempo que sibila como se um foguete subisse no ar]. •"Mas vai ser constante, vai-te constante "(i.é aumenta com acréscimo constante).

Nos gestos e expressões e nas figuras está presente a linguagem, que na literatura é chamada de dinâmica, e que os ajuda a expressar o que querem dizer sobre o comportamento da sucessão no infinito.

Ao nível da segunda entrevista as representações gráficas feitas por estes alunos ainda são contínuas como se desenhassem funções definidas em \mathbb{R} ; já na terceira entrevista os gráficos são desenhados de forma discreta e os alunos mostram grande facilidade em os fazer.

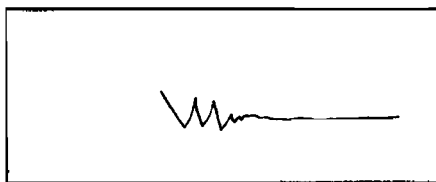


Figura 3. Aproximar uma linha

As figuras usadas pelos alunos para expressar o comportamento no infinito das sucessões são outro indício da confirmação da nossa ideia de que o modo como uma sucessão cresce ou decresce é um poderoso instrumento de análise para o aluno. Relativamente à situação (4), Anabela diz à medida que desenha: "Ao que parece eles estão-se a aproximar de chegar a uma linha":

E o Henrique, mesmo depois de lhe apresentarmos a representação gráfica dos primeiros 34 termos da situação (4), insiste na sua teoria das subsucessões que se afastam à medida que n aumenta indefinidamente e desenha por cima do gráfico que lhe demos:

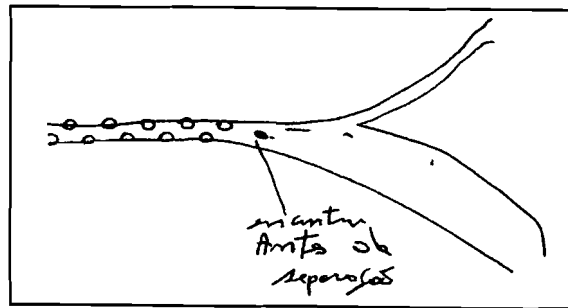


Figura 4. Crescente até ao infinito

Tanto o Henrique como a Anabela hesitam, mesmo na terceira entrevista, em aceitar como convergente uma sucessão constante a partir de certa ordem:

A- Sim, claro! Convergir ... convergir é mesmo ... tender para ... mas não chegar!

H- Só que neste caso aqui por exemplo, aqui chega! [pêndulo]

A- Pois chega, essa é a minha dúvida, não sei se ...

[E- E agora esta aqui, é convergente, a do pêndulo?]

H- Pois, mas era isso que nós estávamos a ver ... Porque nós não sabemos se o convergir implica chegar a ... a esse valor.

Relativamente à situação do pêndulo, a posição que os alunos defendem é interessante: apesar de considerarem que esta converge para zero porque vai a decrescer até zero, de vez em quando hesitam, porque a sucessão "não sai de 0" a partir de certa ordem; se não fosse a característica da sucessão decrescer até zero com uma certa regularidade (a regularidade dada pela lei física que, segundo os entrevistados, define a variação medida) os alunos provavelmente considerariam a sucessão não convergente:

H — É que aqui há uma aproximação de valores, para zero, não é?

[E- Então para convergir tem que haver aproximação, é isso que estamos aqui, que estão a tentar dizer?]

H — Tem que haver uma aproximação, mas neste caso não é uma aproximação é um valor exacto, é isso.

Na segunda e terceira entrevistas os alunos, quando interrogados sobre convergência de uma sucessão, começam por descrever o comportamento da sucessão no infinito tal como na primeira entrevista. Podemos também notar que usam um certo conhecimento sobre procedimentos para discernir sobre a convergência das sucessões apresentadas e usam esses procedimentos, juntamente com o tipo de sucessão, para decidir sobre a sua convergência. Exemplo de tais procedimentos são: uma sucessão quando converge é para um só valor e a sucessão $(-1)^n$ é uma sucessão divergente porque as sub-sucessões "n par" e "n ímpar" "não têm a mesma convergência":

A- Mas só uma coisa ... divergir é convergir para dois números então, não é?

H- Oh Anabela ... por exemplo ... -1 se n par e 1 se n é ímpar ... é divergente, não converge para um número, pois não?

A- Não ...

H- Isto é que é uma sucessão divergente!

Estes dois procedimentos foram usados por ambos para argumentar sobre a convergência das sucessões com ramos, mesmo que algumas vezes os "ramos" correspondessem a um número finito de termos.

Para distinguir as situações de sucessões monótonas limitadas das não limitadas, os alunos usaram a noção de "tecto" ou "barreira". Foi assim que distinguiram as sucessões "banco" e $3 - \frac{1}{n}$, ambas crescentes: "*Só que esta [banco] sobe sempre sem nenhum tecto, sobe sempre sem nenhum tecto e esta sobe sempre com tecto*". A Anabela esclarece estes termos usando quase a definição formal de convergência, embora não distinga bem entre essa definição e a definição de sucessão limitada: o que ela pretende é enquadrar os valores, no caso de estes se encontrarem "a tender" para algum número.

O raciocínio que eu fiz aqui foi que ao 3 somando ou diminuindo, nunca se conseguia atingir o 3 mas ia sempre para lá, e conseguia definir uma vizinhança a partir da qual todos os números, a partir da qual todos os números estavam ao lado do 3 a menos de 0.0..., tá bem nesta também consigo definir uma vizinhança, mas... se eu puser uma vizinhança...oops, calma!

Imaginando-nos no lugar de um aluno poderíamos resumir a sua posição sobre sucessões convergentes da seguinte maneira:

• Se a sucessão é definida por uma "fórmula" então "é fácil": basta ver para que número tende ou de que linha o gráfico se aproxima, para que linha é que o gráfico vai; se tal não acontece então é porque a sucessão aumenta sempre (num sentido global) mas sem "tecto" em oposição a uma sucessão que aumenta sempre mas com "tecto" e que é convergente.

- Se a sucessão é definida por ramos então a sucessão $(-1)^n$ é o modelo de sucessão divergente: se a sucessão admite subsucessões “que têm a mesma convergência”, a sucessão é convergente; caso contrário, é como a sucessão $(-1)^n$ e é divergente.

- O caso da sucessão constante a partir de certa ordem é tratado à parte porque esta não tende — “é”, “está lá” — o gráfico não se aproxima de nenhuma linha e por isso os alunos não se sentem confortáveis para a considerar convergente.

Parece-nos não exagerado afirmar que os alunos decidem sobre a convergência de uma sucessão com base na tipologia da sucessão, a saber: se está definida por ramos, se é constante, se é constante a partir de uma certa ordem, ou se é dada por uma só fórmula. Além de considerarem o “género” da sucessão, os alunos começam por determinar de que forma a sucessão cresce ou decresce para verem qual é o “ponto” para o qual a sucessão tende.

A noção de sucessão limitada, permitindo ao aluno arranjar uma vizinhança que “englobe” a sucessão a partir de certa ordem, ajuda-o a diferenciar sucessões em termos de convergência; permite, por exemplo, distinguir entre a do “banco” e a $3 - \frac{1}{n}$, porque esta “cresce com um tecto”, logo passa a ser convergente em vez de “crescer sem tecto” e tender para mais infinito.

Como despertar para o infinito?

À laia de conclusão podemos adiantar que, nesta investigação, foram vislumbradas dimensões não aprofundadas na literatura, nomeadamente: a escolha de um método, por parte dos alunos, para decidir sobre a convergência de uma sucessão associado, ao modo como a sucessão está definida e à forma como esta decresce ou cresce.

Os métodos até agora explicitados revelam que os alunos resolveram com grande eficiência quase todas as situações apresentadas, embora fosse desejável que despertassem para o infinito, isto é, que reconhecessem que as implicações da frase “quando n tende para infinito” passam por considerar que o comportamento da sucessão no infinito é caracterizado por qualquer segmento final e não por um qualquer segmento inicial, independentemente da ordem de grandeza deste.

Podemos sugerir que a sucessão constante a partir de uma certa ordem tem um papel neste despertar: não a classificaram na tipologia “sucessão de valor constante k , é convergente para k ”.

Dado que as noções do que é uma sucessão são transferidas para a investigação para decidir sobre a convergência da mesma, será, talvez, benéfico que os alunos contactem na sala de aula com situações reais — como a situação do

pêndulo e do dado, ou seja, com sucessões definidas por outros meios que não algébricos e interpretadas nas entrevistas como definidas por leis "não perfeitas". Os gráficos das sucessões revelaram-se instrumentos que ajudaram no discernimento de que uma correspondência para definir uma sucessão tem de ser unívoca.

Para terminar colocaríamos uma pergunta: Que concepções do infinito têm os alunos? Nesta investigação as concepções de infinito reveladas foram contextualizadas na situação das sucessões: "o n tende para infinito", "infinito é o resultado de uma sucessão crescente — aumentando sempre". Talvez despertar para o infinito torne as concepções de infinito catalogadas na revisão de literatura mais explícitas.

Referências

- Bogdan, R. e Biklen, S. (1994), *Investigação qualitativa em educação*. Porto: Porto Editora.
- DGEBS (1991). *Matemática e Métodos Quantitativos. Organização curricular e programas*. Direcção Geral do Ensino Secundário. Ministério da Educação.
- Lopes et al., (1993), *Matemática 10 . (2º Volume)*. Porto: Contraponto,.
- Lopes et al., (1994), *Matemática 11. (2º Volume)*. Porto: Contraponto.
- Matos, J. M. (1994), *Os métodos próprios dos alunos*. Actas do V SIEM, Leiria.
- Moura, E. e Costa, M. J. (1995), *Concepções dos alunos sobre sucessões convergentes: uma revisão de literatura*. Actas do VI SIEM, Évora.

Notas

1A pergunta 1 (a) não foi feita para as situações (4) e (5) que foram apresentadas como sucessões.

2Lei física

Agradecimentos

O Projecto AMECC foi apoiado pela JNICT e pelo IIE.

*Eduarda Moura, R. José Santos Ramos, 274, Gueifães, 4470 MAIA.
ajmachia@fc.up.pt.*

A aprendizagem da subtracção

O caso do Miguel e da Catarina

Maria de Lurdes Serrazina, Escola Superior de Educação de Lisboa
Isolina Oliveira, Escola Básica 2,3 Damião de Gois

Esta comunicação refere-se ao estudo da aprendizagem da subtracção que está a ser realizado no âmbito do projecto AMECC¹. A revisão de literatura subjacente a este estudo foi apresentada no V SIEM². Foi também aí analisada uma categorização das situações aditivas e subtractivas.

A metodologia do estudo consistiu na realização de três entrevistas individuais a seis alunos que estavam a frequentar pela primeira vez o primeiro ano de escolaridade. A primeira entrevista teve lugar antes da subtracção ter sido formalmente abordada pela professora, a segunda imediatamente a seguir a essa abordagem e a terceira três meses depois. As entrevistas foram áudio e vídeo-gravadas e posteriormente transcritas.

Aquí vamos apresentar duas situações escolhidas pela riqueza de procedimentos revelados palas crianças.

As situações que seleccionámos para esta comunicação (integrada num grupo de discussão) são:

- *Mudar juntando* — falta o fim — é uma das situações aditivas mais simples.

Exemplo: O Pedro tinha 4 reбуçados. A Ana deu ao Pedro mais 5 reбуçados. Quantos reбуçados tem o Pedro agora?

- *Tornar igual* — diferença desconhecida — é uma situação subtractiva.

Exemplo: A Susana tem 8 berlindes. O Pedro tem 3 berlindes. Quantos berlindes tem o Pedro que ganhar para ter tantos como a Susana?

Nesta comunicação apresentámos um vídeo das situações acima descritas das entrevistas realizadas a dois alunos, e os participantes foram convidados a visioná-lo. Propusemos ainda que após o visionamento a discussão se centrasse nas seguintes questões:

- Que estratégias foram utilizadas por cada um dos alunos?

Há diferenças/semelhanças nas estratégias usadas na primeira, segunda e terceira entrevistas?

- Há consistência na(s) estratégia(s) que as crianças usam?
- Os sistemas de signos (por exemplo, a representação utilizando os dedos) são facilitadores ou inibidores do raciocínio?
- Que aspectos não cognitivos ressaltam da situação de entrevista? De que modo interferem na resolução das situações?

Descrição das situações

Mudar juntando — falta o fim

Miguel

Perante uma situação do tipo: “O Pedro tinha 4 berlindes, deram-lhe 5, com quantos ficou?”, nas três entrevistas o Miguel resolveu a situação através de contagem um a um, começando sempre a partir do 1. Contou cada um dos conjuntos e depois voltou a contar todos novamente. Quando solicitado fez o registo $4+5=9$. A estratégia usada pelo Miguel, em todas as entrevistas foi a da modelação directa (Bergeron e Herscovics (1990) em que os objectos foram usados como representações directas dos entes do problema.

Catarina

Na primeira entrevista a Catarina resolveu uma situação do tipo: “A Bárbara tem 6 bombons. A Ana deu à Bárbara mais 7 bombons. Quantos bombons tem a Bárbara agora?” por contagem um a um, isto é, contou seis berlindes, depois mais sete e, por fim, contou-os todos juntos. Na segunda entrevista começou por fazer o registo escrito $6+3=9$ e, de seguida, procurou materiais disponíveis para contar de modo idêntico ao da entrevista anterior. Na entrevista realizada três meses depois a Catarina não procedeu a modelação directa, e após ser confrontada com a situação respondeu quase de imediato “dezanove” e depois registou $15+4=19$.

A Catarina usou procedimentos de solução diferentes ao longo das três entrevistas, conseguindo sempre com facilidade resolver a situação *Mudar juntando — falta o fim*.

Tornar igual — Juntar a diferença desconhecida

Miguel

Na primeira entrevista para a situação “tu tens 5 berlindes e o teu amigo Ricardo tem 8, quantos tu tens de ganhar para ter tantos como ele?” o Miguel contou por duas vezes e deu uma boa resposta.

Na segunda entrevista, numa primeira situação de comparar, transcreve-se parte do diálogo mantido entre a entrevistadora (E) e o Miguel (M):

E: Tu tinhas 4 cubinhos azuis e o Fábio 7 cubinhos verdes. Quantos tu tens a menos que ele?

M: Tenho 4

E: Tu tens 4 e ele tem 7

M: Tenho menos 1

Mostrou-se desinteressado. Mas a entrevistadora continuou:

E: Pronto. Tu tens esses 4 cubinhos e o teu amigo Fábio tem esses 7. Quantos é que tu tens de ganhar para ficares com os mesmos que ele?

M: (fez a contagem, contou 7, separou 4) 3

Questões afectivas parecem estar presentes. Bastou mudar a pergunta “quantos tens a menos que ele?” para “quantos tens de ganhar?”, para o Miguel se voltar a interessar pelo problema e o resolver correctamente. Este facto está de acordo com os resultados da literatura (Nunes e Bryant, 1996), em que se considera a situação apresentada já não é a mesma, isto é, de uma situação de Comparar passou-se para uma de Tornar igual, que é mais fácil.

Na terceira entrevista na situação (15,8) o Miguel conta um a um até 15. Depois conta um a um até 8 e responde 3. Questionado pela entrevistadora o Miguel retoma a contagem e à terceira vez consegue resolver a situação.

Mais uma vez, em qualquer das entrevistas, a situação é resolvida recorrendo à contagem e através da modelação directa.

Catarina

Na primeira e na segunda entrevistas a Catarina recorreu à modelação, aplicou o conhecimento da equivalência de subconjuntos e respondeu bem para a situação: “A Ana tem 8 bonecas. A Bárbara tem 5 bonecas. Quantas bonecas a Bárbara tem de ganhar para ter tantas bonecas como a Ana?”.

Na terceira respondeu quase de imediato “sete” para a situação (12,5) — e tentou a representação escrita, registando $12+7=12$.

Neste tipo de problemas, a Catarina consegue resolvê-los recorrendo à correspondência um a um, que em certa medida é sugerida pela questão colocada. No entanto, tem dificuldades na escrita formal, como se pode verificar na situação da terceira entrevista. A Catarina resolveu-a mentalmente com facilidade mas o mesmo não aconteceu quando tentou representar simbolicamente a situação.

Discussão

Da análise do vídeo e da discussão surgida foram evidenciados alguns aspectos que se podem resumir do seguinte modo:

Ao longo das três entrevistas o Miguel utiliza preferencialmente estratégias de contagem, que se podem enquadrar na “modelação directa”.²

O que é facto é que ele resolve as situações com a ajuda dos materiais e muitas vezes por tentativa e erro, mas chega a uma solução verbal.

Foge ao registo, por dificuldades na escrita dos números, não só no traço como na identificação dos mesmos. Por exemplo, na última entrevista, tinha que perguntar sempre como se escreviam os números quando maiores que 10. Duma forma perfeitamente à vontade registava a situação e perguntava “12 é um 1 e ?” Obtida a resposta completava os registos.

Neste aspecto é de salientar uma evolução da segunda para a terceira entrevista, onde se verificam mais registos e com uma maior correcção na escrita (menos inversões).

A Catarina começa por recorrer à utilização de materiais para resolver as situações, na primeira entrevista, na segunda usa-os como meio de confirmação do que já registou por escrito e na terceira abandona por completo o recurso aos materiais.

Se na primeira entrevista nunca recorre à escrita simbólica, na segunda e na terceira, após a aprendizagem formal, a aluna usa-a com frequência para representar as situações, embora nem sempre com facilidade.

Ao longo das três entrevistas observa-se uma progressão, podendo afirmar-se que se na primeira a aluna se mantinha no nível I das estruturas conceptuais de adição e subtracção², também usava já procedimentos característicos do nível II, isto é, conduzia os processos de solução tendo uma contagem abreviada da soma começando essa contagem na primeira parcela. Em determinadas situações (não discutidas nesta comunicação), durante a terceira entrevista, a aluna consegue chegar à solução através de factos deduzidos, usando factos numéricos que já conhece como passos intermédios, o que corresponde a procedimentos de nível III.

Em suma, ao longo das três entrevistas observa-se que a Catarina vai desenvolvendo a compreensão dos conceitos de adição e de subtracção, tornando-se capaz de usar os diferentes sistemas de representação e coordenando estratégias que lhe permitem lidar com as situações que envolvem esses conceitos.

Referências

- Nunes, T. e Bryant, P. (1996). *Children doing mathematics*. Blackwell Publishers.
Serrazina, Maria de Lurdes (1995). Aprendizagem da subtracção — uma revisão de literatura, Em *Actas do V Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Notas

- 1 Projecto AMECC - Aprendizagens em Matemática, um estudo sobre a construção de conceitos
- 2 ver "Aprendizagem da Subtracção - uma revisão de literatura, Serrazina (1995)
- 3 ver "Aprendizagem da Subtracção - uma revisão de literatura, Serrazina (1995)
- 3 ver "Aprendizagem da Subtracção - uma revisão de literatura, Serrazina (1995)

Agradecimentos

O Projecto AMECC foi apoiado pela JNICT e pelo IIE.

*Maria de Lurdes Serrazina, Escola Superior de Educação de Lisboa, Av.
Carolina Michaelis de Vasconcelos, 1500 LISBOA. lslm@mail.telepac.pt.
Isolina Oliveira, R. Cidade da Beira, 46, 9ºD, 1800 LISBOA.
joao.miranda@ip.pt.*

Grupo II. Capacidade de matematização

Dinamizadora: Ana Paula Mourão

O segundo grupo de discussão tinha como objectivo principal, no âmbito das aprendizagens dos alunos, o debate de problemáticas e metodologias de investigação particularmente relacionadas com a capacidade de matematização, nas suas vertentes de abstracção, visualização, interligação de representações e modelação.

O grupo reuniu sempre em plenário e o debate, que se desenvolveu em três sessões de trabalho ao longo dos dois dias do encontro, contou com uma introdução muito curta ao tema de discussão, com a apresentação de comunicações orais, seleccionadas de entre as inicialmente oferecidas no âmbito do encontro, intervenções curtas convidadas e o envolvimento dos participantes.

Desenvolvimento dos trabalhos

Introdução

Poderíamos pensar na capacidade *de matematização*, de uma forma simplista, como a *capacidade de trazer a Matemática para o dia-a-dia*, isto é, de introduzir num qualquer contexto ou situação não matemáticos pensamentos ou métodos matemáticos (raciocínios, leis, conceitos, símbolos, ...). Esta introdução poderia assumir diferentes níveis de sistematização dependendo da intencionalidade com que a *Matemática é trazida para ...* — por exemplo, ao ordenar, organizar e ou estruturar uma situação, a matematização pode estar presente de uma forma não intencional e, neste sentido, todos matematizamos ainda que possamos estar inconscientes do uso que fazemos da Matemática. Farão parte integrante do processo de matematização estes *ordenar e organizar* do dia-a-dia ou será que só podemos falar de matematização quando *pensamos matematicamente* as situações de uma forma deliberada ou quando *fazemos matemática*'?

Estas ideias sugerem um conjunto de questões que, ao serem colocadas no início deste debate, pretendem servir um objectivo duplo: contribuir para uma eventual clarificação de terminologias e orientar a discussão no sentido de identificar problemáticas de investigação e possíveis metodologias a usar.

Um primeiro grupo de questões poderia ser organizado em torno de uma procura de significados e interpretações de termos que surgem, de uma forma natural, em qualquer discussão do tema em causa — O que se entende por *capacidade de matematização*?, Será o mesmo que *pensar matematicamente* ou que *raciocínio Matemático*? Ao termo *pensar matematicamente* são frequentemente associados vários outros termos, como formulação de conjecturas, argumentação, particularização, generalização, sistematização e outros, que traduzem processos que o indivíduo pode desenvolver quando envolvido em actividades matemáticas. Serão estes processos *raciocínios matemáticos* ou existirá apenas um *raciocínio matemático* que resulta, em cada momento, da combinação destes processos?

Um outro aspecto, directamente relacionado com a questão anterior, diz respeito à abrangência do tema — Especificaram-se vertentes da capacidade de matematização: abstracção, visualização, interligação de representações e modelação. Serão estas vertentes únicas?, que relação existe entre estas vertentes e os processos acima referidos?, que processos cognitivos são exigidos aos alunos no desenvolvimento de tais vertentes?

Um segundo grupo de questões surge de interesses e ou necessidades de investigação e pode envolver, entre outras, as seguintes formulações — A capacidade de matematização pode ser ensinada e/ou desenvolvida na escola?, qual a contribuição da matemática escolar para tal desenvolvimento?, como medir (se isso interessar) esse desenvolvimento?, o que se tem feito em Portugal, nesta área?, como têm sido divulgados os resultados de investigação?, qual o impacto que estes resultados têm tido na comunidade de Educação Matemática?, tem existido alguma interacção entre os resultados de investigações nacionais e o currículo ou a formação de professores?

Comunicações orais

As três comunicações orais inseridas neste grupo, cujas apresentações e subsequentes debates ocuparam grande parcela do tempo destinado aos trabalhos do grupo de discussão, foram introduzidas em momentos distintos de reunião do grupo. Serão referenciadas aqui de uma forma muito breve pois os seus textos podem ser consultados neste mesmo volume.

Paulo Afonso apresentou um estudo exploratório, elaborado conjuntamente com Cândida Moreira, sobre o papel das video-gravações no desenvolvimento de estratégias metacognitivas de futuros professores de Matemática enquanto resolvidores de problemas. Os resultados apresentados apontam para uma influência positiva do uso do vídeo no desenvolvimento das capacidades de pensar sobre o pensar e de resolver problemas. Esta comunicação suscitou algumas

questões gerais sobre resolução de problemas e formação de professores — como por exemplo, que formação específica dar aos futuros professores de modo a que estes se revelem bons resolvedores de problemas?, ou quanto tempo é necessário trabalhar com os professores de modo a que estes adquiram hábitos metacognitivos? — e outras questões mais específicas sobre o papel mediador que o vídeo pode desempenhar no desenvolvimento de processos de auto-avaliação.

Isabel Amorim, na sua comunicação, analisou o papel da folha de cálculo como amplificador conceptual ou organizador conceptual da actividade de alunos do 11º ano de escolaridade quando estes se encontram envolvidos na exploração de problemas de modelação matemática. Um dos resultados apresentados pela autora salienta a ideia de que a folha de cálculo funciona como amplificador conceptual ou organizador conceptual dependendo das características pessoais dos alunos, da natureza do problema, das interacções entre os elementos do grupo de trabalho e das interacções com a ferramenta computacional. No final, foram levantadas algumas questões em torno dos conceitos de amplificador conceptual e organizador conceptual e do papel que o computador e, particularmente, a folha de cálculo podem assumir junto destes conceitos.

Maria Isabel Coelho apresentou um estudo sobre processos de resolução de problemas revelados, por alunos do 6º ano de escolaridade, durante a resolução de problemas, que envolviam conceitos relacionados com quadriláteros e simetrias, com o auxílio do Cabri-géomètre. Além da identificação e interpretação dos processos evidenciados a autora analisou as interacções estabelecidas entre os alunos e destes com o software e o papel deste último como facilitador da aprendizagem. Esta apresentação suscitou algumas questões específicas sobre o software em si — algumas particularidades técnicas sobre o seu funcionamento- e sobre o seu potencial como organizador ou reorganizador conceptual, particularmente de conceitos geométricos.

Debate e intervenções curtas

O tempo ocupado pelo debate não directamente relacionado com as comunicações apresentadas não foi muito e nem sempre revelou o mesmo nível de dinamismo. Nalguns instantes, parece ter mesmo surgido, entre os presentes, uma certa sensação de dificuldade de envolvimento denunciada numa ou noutra expressão interrogativa que parecia querer perguntar *por onde começar?*, *como responder às questões inicialmente colocadas?*. No entanto convém salientar que se a abordagem a algumas questões iniciais foi superficial o mesmo não aconteceu em relação a outras. Para este facto contribuíram muito significativamente as intervenções curtas convidadas que a seguir se sintetizam.

Conceição Costa explorou diversas vertentes de um dos processos usados no pensamento matemático — a visualização. Como a Geometria, a visualização "está relacionada com os mais diversos ramos da Matemática" e é multifacetada — com raízes na Matemática e com aspectos históricos, filosóficos, psicológicos, pedagógicos e tecnológicos importantes (Zimmermann e Cunningham, 1991). O termo visualização tem diferentes conotações ou significados, onde ressaltam diferentes modos de pensamento visual-espacial e é sempre considerado de grande importância. As definições e as reflexões sobre visualização a seguir apresentadas, evidenciam esses diferentes significados ligados quer à Matemática, à investigação científica, à Educação Matemática e à Psicologia:

- "visualização é um processo pelo qual as representações mentais ganham existência" (Dreyfus, 1991).

- "visualização é o processo de formar imagens (mentalmente ou com papel e lápis ou com a ajuda do computador) e usar tais imagens adequadamente para descobrir e compreender Matemática" (Zimmermann e Cunningham, 1991).

- "o termo visualização científica é comumente corrente para o uso da tecnologia gráfica do computador" (Cunningham, 1991).

- "visualização do ponto de vista da educação matemática inclui duas direções: a interpretação e compreensão de modelos visuais e a capacidade de traduzir em informação de imagens visuais o que é dado de forma simbólica" (Dreyfus, 1991).

- "a visualização é uma das grandes componentes das tarefas espaciais, e é definida como a compreensão e a execução de movimentos imaginados de objectos no espaço a duas e a três dimensões" (Bishop, citado em Clements e Battista, 1992).

- "visualização é a acção de "ver" mentalmente tanto objectos concretos (uma cadeira, uma mesa ...) como conceitos abstractos (paz, esperança, função matemática) e pode ser o resultado de diferentes estímulos visuais, por exemplo representações gráficas" (Mariotti e Pesci, 1993).

- "visualização é a relação entre imagens" (Solano e Presmeg, 1995).

- "o sentido espacial joga um grande papel no raciocínio matemático e também o termo sentido espacial tem sido conhecido por uma variedade de outras classificações desde visualização espacial, raciocínio espacial, percepção espacial, imagética visual ou rotações mentais" (Wheatley, 1990).

Parece então importante clarificar os conceitos, as representações, os processos, as capacidades espaciais, as competências de visualização envolvidos no pensamento visual-espacial usado pelo aluno quando executa tarefas específicas para a aprendizagem da Matemática. Interessa saber: será que as competências de visualização são ensináveis e podem ser melhoradas com a prática?; em que medida as concepções que os professores da escola elementar têm sobre a Matemática e

sobre o que é ensinar Matemática interferem no seu envolvimento em tarefas que dão ênfase ao raciocínio visual-espacial?, como vão influenciar o envolvimento dos alunos?; que tipo de formação dar aos professores da escola elementar de forma a convencê-los da funcionalidade de representações particulares para favorecerem a aquisição de capacidades, a construção de conceitos ou mesmo o melhoramento de certos processos de pensamento?

Num outro momento, José Manuel Matos partilhou com o grupo uma perspectiva de criação/desenvolvimento da Matemática como um processo social que não se desenvolve de uma forma isolada mas que acontece em contextos e/ou comunidades. Contribuem para esse processo variáveis pessoais de cada indivíduo participante — as suas experiências, cognições, intuições, emoções, ... -, aspectos culturais e sociais de cada comunidade e aspectos intrínsecos à própria Matemática, entre outros. Neste processo é útil considerar duas vertentes nas quais todos estes aspectos e variáveis se interrelacionam — o raciocínio matemático e a actividade matemática.

Dreyfus (1991) caracteriza o raciocínio matemático referindo-se a dois tipos de pensamento matemático — o pensamento matemático avançado e o elementar — distinguindo o primeiro do segundo pela sua complexidade e pela forma com que se lida com essa complexidade — através dos processos de representação e abstracção. Segundo este autor, quando falamos sobre qualquer objecto ou processo matemático, cada um de nós relaciona-o com algo que tem em mente — uma representação mental do objecto -, e quando comunicamos com outros usamos representações simbólicas externas, escritas ou faladas; os símbolos permitem tornar explícitos conhecimentos pessoais implícitos — os significados. As representações mentais são talvez mais importantes que as simbólicas para a aprendizagem e pensamento matemáticos. A representação mental refere-se a esquemas internos que o indivíduo usa para interagir com o mundo exterior o que poderá significar a possibilidade do indivíduo criar várias representações mentais diferentes para um mesmo conceito matemático. O sucesso das aprendizagens matemáticas está relacionado com representações mentais ricas dos conceitos e, por seu turno, uma representação mental, de um dado conceito, é rica se contiver muitos aspectos relacionados desse mesmo conceito. Como, então, identificar e analisar as representações mentais de conceitos matemáticos junto dos alunos?, como enriquecer essas representações mentais de modo que a aprendizagem seja cada vez mais significativa?

Relativamente à segunda vertente, Fischbein (1978) refere que a actividade matemática envolve três componentes: a formal, a algorítmica e a intuitiva. A componente formal diz respeito às definições, teoremas, axiomas, leis,

demonstrações, que permitem exprimir os conceitos matemáticos através de proposições consideradas adaptáveis a todas as circunstâncias; a componente algorítmica envolve as competências que são adquiridas através de treino sistemático e que permitem uma certa economia de pensamento ao adaptar um conjunto de procedimentos a situações problemáticas; finalmente, a componente intuitiva que diz respeito àquelas cognições que nos aparecem como evidentes por si próprias, e onde a imaginação, a visualização e experiências anteriores desempenham um papel fundamental. A actividade matemática ocorre em interações sociais, por exemplo, num contexto de sala de aula. Como, em termos de investigação, considerar as diversas variáveis intervenientes (sociais/individuais, afectivas/cognitivas e culturais) num contexto deste tipo?, Que influência têm estas variáveis nas aprendizagens dos alunos e, particularmente, no desenvolvimento da capacidade de matematização?

Nota final

Em jeito de conclusão gostaria de mencionar que estes momentos de debate parecem ter constituído um primeiro contacto com um tema que apresenta imensas potencialidades de investigação e que entre alguns presentes parece ter surgido interesse em posteriores debates organizados talvez em torno de vertentes específicas.

Finalmente, gostaria de salientar algumas palavras-chave a este debate. Embora uma grande parte já tenha sido mencionada ao longo deste resumo como, por exemplo, raciocínio matemático, representação, multiplicidade de representações, interligação de representações, visualização, actividade matemática, discurso social, contexto, amplificador conceptual, organizador conceptual, etc., houve outros termos que, tendo surgido em diferentes momentos, não foram aprofundados, não por não terem sido considerados relevantes, mas porque o debate, entretanto, havia tomado outras direcções. São exemplo destes termos: experiência matemática, experiência em pensamento, exploração (explorar — conjecturar — provar), resolução de problemas, etc.

Referências

- Clements, D. e Battista, M. (1992). *Geometry and spatial reasoning*. Em Douglas A. Grows (Eds.) *Handbook of research on mathematics teaching*. Nova Iorque: Macmillan Publishing Company.
- Dreyfus, T. (1990). *Advanced Mathematical thinking*. Em P. Neshier e J. Kilpatrick (Eds.) *Mathematics and cognition*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Dreyfus, T. (1991). *Advanced mathematical thinking processes*. Em D. Tall (Ed.) *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht: Kluwer.

- Mariotti, A. e Pesci, A. (1993). Visualization in problem solving and learning. *Proceedings of PME XVII*.
- Solano, A. e Presmeg, N. (1995). Visualization as a relation of images. *Proceedings of PME XIX*.
- Wheatley, G. (1990). Spatial sense and mathematics learning. *Arithmetic Teacher*, Feb.
- Zimmermann, W. e Cunningham, S. (1991). Editors introduction: What is mathematical visualization. Em W. Zimmermann e S. Cunningham (Eds.) *Visualization in teaching and learning mathematics*. Washington: Mathematics Association of America.

Agradecimento

A autora agradece a colaboração prestada por Maria da Conceição Costa e José Manuel Matos na redacção destas notas.

Ana Paula Mourão, R. Cândido de Oliveira, 62, 4^oE, 4710 BRAGA.
amourao@iep.uminho.pt.

O Cabri-géomètre na resolução de problemas: Processos evidenciados e construção de conhecimentos por alunos do 6º ano de escolaridade

Maria Isabel Coelho, Escola Básica 2.3 do Fundão

Introdução

A importância da resolução de problemas como suporte de construção de ideias matemáticas tem sido defendida por vários autores (Abrantes, Leal e Veloso, 1994; Arsac, Germain e Mante, 1988; Barbin e Charlot, 1986; Boavida, 1992; Direcção Geral do Ensino Básico e Secundário (DGEBS), 1991a, b; Laborde, 1993a; National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), 1989/1991). A resolução de problemas apresenta-se, assim, como uma das componentes do contexto favorável à construção de conhecimento matemático.

Estudos recentes, quer em resolução de problemas, quer em construtivismo, apontam a importância do contexto: parte do significado de qualquer conceito é sempre herdado do contexto em que foi utilizado (Boavida, 1992; Brown, Collins e Duguid, citados em Teodoro, 1992; Lester e Charles, 1992; Steffe e Kieran, 1994).

As Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC), quando devidamente utilizadas, podem constituir potentes ambientes de ensino-aprendizagem, nomeadamente no domínio da Matemática (Laborde, 1993b; Laborde e Laborde, 1992; Noss, citado em Ponte, 1992; Schwartz, 1993).

Desde que os computadores passaram a ser utilizados em Matemática, diverso *software* tem sido desenvolvido com o objectivo de potenciar os processos de aprendizagem. A importância das representações externas no ensino-aprendizagem da geometria torna-a num domínio particularmente apropriado para explorar as potencialidades do computador.

O trabalho que aqui se apresenta resume um estudo que teve como objectivo analisar, de modo holístico, os processos evidenciados em resolução de problemas e a construção de conhecimento relativo a quadriláteros e simetria, em ambiente geométrico dinâmico (AGD), assim como o papel deste como facilitador da aprendizagem (Coelho, 1995).

Diagramas e ensino-aprendizagem da geometria

A geometria assume grande relevo nos novos programas de Matemática, pelas suas possibilidades de ligação à realidade, pela fácil interacção com outras áreas da disciplina, pelas potencialidades que apresenta para o desenvolvimento de capacidades de raciocínio e de resolução de problemas (DGEBS, 1991a; Geddes e Fortunato, 1993; Junqueira, 1994b).

As formas geométricas têm natureza dual: são encaradas quer como os objectos da teoria, quer como os respectivos modelos (Junqueira, 1993; Laborde, 1993b). As figuras têm simultaneamente o estatuto de *significante* e *significado* (Laborde e Laborde, 1992). A figura é o objecto teórico, diferente da respectiva representação material, o desenho ou diagrama.

O carácter dual das formas tem repercussões significativas no ensino-aprendizagem da geometria. "Como representações de figuras, os desenhos provocam percepções visuais e sugerem conceitos teóricos." (Laborde e Laborde, 1992, p. 179), podendo os aspectos teóricos e perceptuais entrar em conflito.

Os diagramas têm um lugar importante no ensino-aprendizagem da geometria por serem inspiradores de intuições e facilitarem a passagem gradual do concreto ao abstracto, isto é, do desenho à figura

Segundo Yerushalmy e Chazan (1993), os diagramas constituem um dos processos mais vulgares de representar e comunicar o conhecimento geométrico. Como entidades materiais, os desenhos não são perfeitos. O aspecto visual do desenho pode trazer dificuldades à compreensão da figura que representa. A particularidade dos diagramas pode provocar que características irrelevantes sejam consideradas como propriedades; o uso de desenhos em posições prototípicas pode dificultar a interpretação de diagramas não *standardizados* e provocar confusões entre o referente e o referido. Já em 1945, Pólya, ao referir-se à utilização de desenhos em problemas geométricos, alega que "As diferentes partes da figura não devem exibir relações aparentes que não sejam exigidas pelo problema.", (p. 84).

Laborde (1993b) alega que o conhecimento geométrico é modificado quando mediado pelo computador. Os AGD não oferecem, apenas, a possibilidade de efectuar qualquer construção geométrica, de modo mais rápido e preciso do que em ambientes de papel e lápis; o movimento e a modificação dos desenhos possibilitam uma mais fácil visualização de propriedades e relações geométricas, permitindo minorar a influência de elementos distractores. A variabilidade dos diagramas permite investigar se uma afirmação que se revelou verdadeira, num caso particular, continua a sê-lo noutros casos e estabelecer a sua generalização.

A utilização de *software* que propicie a generalização de propriedades afigurou-se-nos como extremamente proveitosa para o desenvolvimento do

pensamento geométrico de alunos que se encontrem no, ou na transição para, o segundo nível de van Hiele (nível de análise), caracterizado precisamente pela capacidade de descoberta e generalização, a partir da experimentação.

Cabri-Géomètre: Razões de uma escolha

O Cabri-Géomètre, o Geometric Supposer e, ainda, os programas derivados do Logo são paradigmas de micromundos geométricos. Foram concebidos com o intuito de efectuar desenhos, como materializações de figuras.

O processo de comunicação com o computador baseia-se na descrição explícita das figuras. Esta explicitação traduz-se pela selecção de opções, tanto no Cabri-Géomètre como no Supposer, ou pela escrita de uma lista de comandos nos programas de filosofia Logo. O processo de construção está assim intimamente ligado com estruturas profundas da geometria.

A associação de diversos desenhos à mesma figura é possibilitada pela funcionalidade de repetição (Laborde, 1993a, b). Um desenho está correctamente construído quando, ao ser-lhe aplicada a função de repetição, origina outros desenhos que mantêm as propriedades da figura significada, enquanto que características não pertinentes são alvo de modificação.

Os três AGD a que nos referimos diferenciam-se, principalmente, pelo modo como se traduz a repetição.

Em qualquer dos programas Logo só é possível fazer variar um desenho através de procedimentos próprios da linguagem de programação. A utilização de *software* deste tipo por principiantes pode reduzir-se ao nível do desenho e não chegar ao nível da figura, caso não saibam utilizar os procedimentos de repetição.

No Supposer, qualquer construção pode ser repetida a partir de objectos de base diferentes. A repetição é discreta e o utilizador apenas tem um controle indirecto sobre a mesma, visto que esta se produz, muitas das vezes, a partir de uma forma aleatória.

No Cabri-Géomètre, a variabilidade obtém-se por manipulação directa do desenho. Esta característica é a que mais diferencia o CABRI dos outros micromundos a que nos temos vindo a referir. "Uma nova dimensão foi acrescentada ao espaço gráfico (...): o movimento." (Laborde, 1993b, p. 56). Na perspectiva de Laborde e Strässer (1990), o CABRI poderá mesmo ser considerado um micromundo completo, devido à funcionalidade de manipulação directa.

Tendo comparado o modo como se processa a repetição no *software* em causa, o CABRI afigurou-se-nos como o mais apropriado para o estudo que pretendíamos realizar. Acresce, ainda, o facto de existir a tradução em português da versão 1.7. e do programa ter disponíveis mensagens de "Ajuda" que podem ser

consultadas para cada operação a efectuar; ser possível suprimir algumas opções, em função dos objectivos definidos e do nível etário dos alunos.

Razões de ordem metodológica vieram, também, influir na nossa escolha. Tanto o "Jornal de Sessão" como o "Histórico" apresentam potencialidades que os permitem encarar, quanto à recolha de dados, como meios complementares das observações e dos registos audio ou vídeo.

Completando o *software* educativo

Tal como referido em Freitas (1992), o *software* educativo é constituído por um ou mais programas de computador, manuais e, eventualmente, outro material de suporte. No presente estudo, utilizámos a versão 1.7 do Cabri-Géomètre para MS-DOS. Substituímos o manual de referência por dois guiões por nós estruturados. O material de suporte consistiu num pacote formado por treze ficheiros-base. Estes, complementados por esclarecimentos constantes dos guiões de trabalho, constituiriam arquivos de informação que poderiam ser utilizados pelos alunos e alvo de posterior manipulação.

Tarefas-problema

Visto o estudo pretender analisar os processos em resolução de problemas e a construção de conhecimentos decorrente e/ou relacionada com essa mesma resolução, os problemas por nós seleccionados-construídos situam-se na intersecção dos problemas de processo com os de conteúdo (Fernandes, Borralho e Amaro, 1994; Fonseca, 1995).

Adoptámos para os nossos problemas a designação de "Tarefas-Problema". Diversas estratégias poderiam ser utilizadas para a resolução de uma tarefa-problema (no que se assemelhavam a problemas abertos, segundo a terminologia de Arsac et al., 1988). Para determinar a solução, os alunos deveriam mobilizar noções já adquiridas que lhe permitissem a construção de novos conceitos. Assim, os problemas que utilizámos eram semelhantes a situações-problema, conforme Arsac et al. (1988).

O trabalho com alunos desenvolveu-se em duas fases. A primeira destinava-se ao ensino em resolução de problemas, manipulação do Cabri-Géomètre e aquisição de conceitos básicos relativos a quadriláteros e simetria. As tarefas para esta fase foram perspectivadas em termos sistémicos das três áreas de ensino. Utilizámos quatro tarefas que forneceram o contexto para o ensino do CABRI e que permitiram que os alunos construíssem alguns quadriláteros. Os triângulos constituíam os elementos matemáticos de partida, as primitivas, segundo Scaife (referido em Teodoro, 1992). A simetria axial era a operação que, ao actuar sobre os triângulos, permitia a construção dos quadriláteros.

A recolha de dados foi efectuada, principalmente, enquanto os alunos resolviam seis problemas. Duas dessas tarefas-problema visavam a construção de um rectângulo e de um paralelogramo obliquângulo, a partir dos pontos médios de dois lados opostos. As três últimas tarefas eram variantes do problema de Varignon e respectivas extensões.

Desenvolvimento do estudo

O estudo decorreu durante os anos lectivos de 1993/94 e 94/95. Nele participaram, durante cerca de cinco meses, seis alunos do 6º ano de escolaridade duma escola da Beira Interior. Estes foram seleccionados entre dezasseis voluntários que tinham utilizado, no ano anterior, o Cabri-Géomètre na perspectiva de ferramenta de desenho e que já estavam, de algum modo, habituados a resolver problemas.

Os critérios de selecção dos alunos tiveram por base as "categorias alargadas e interdependentes de factores" que, segundo Lester (1994, p. 26), parecem influenciar o desempenho em resolução de problemas. Pelo cruzamento desses critérios, formaram-se três grupos de dois alunos, igualmente distribuídos por sexos.

O quadro que segue resume a conjugação de propriedades definidoras dos grupos.

	Nível em Matemat. e L. Portu- guesa ¹	Nível global ¹	Perseve- rança- Participa- ção no trabalho de grupo ¹	Opinião sobre resolução de problemas	Habilita- ções literárias da mãe
Grupo A: Nuno e Filipa	Superior a 3.	Níveis não inferiores a 3; moda igual ou superior a 4.	Progresso avaliado como "Muito".	Muito positiva e justificação plausível.	Curso médio/superior.
Grupo B: Catarina e Pedro	Não inferior a 3, não sendo simultaneamente 4 nas duas disciplinas.	Níveis não inferiores a 3; moda inferior a 4.	Progresso avaliado como "Médio".	Muito positiva mas sem justificação plausível; positiva.	2º ciclo ou 4ª classe.
Grupo C: Paula e Rui	Nível inferior a 3 em, pelo menos, uma das disciplinas.	Pelo menos, um nível inferior a 3.	Progresso avaliado como "Médio" ou "Pouco".	Pouco positiva.	

Todas as actividades foram realizadas fora do horário lectivo. Decorreram em três sessões de duas horas semanais, durante a fase de ensino que ocorreu em simultâneo para os três grupos, entre meados de Janeiro de 94 e o final do 2º

Período desse ano lectivo. A maioria dos trabalhos que serviram de base à recolha de dados tiveram lugar durante o 3º Período e foram essencialmente realizados em grupo, tendo, no entanto, havido alguns momentos de trabalho individual.

Método

Atendendo à natureza das questões a investigar, optámos por um estudo descritivo/interpretativo (Merriam, 1988). A insuficiência de dados relevantes em resolução de problemas e construção de conhecimentos sobre quadriláteros e simetria, em AGD, conduziu-nos a um estudo de características exploratórias (Yin, 1989).

A recolha de dados baseou-se, principalmente, na observação participante e na entrevista. Os documentos produzidos pelos alunos complementaram aquelas duas fontes de recolha de dados, tendo os ficheiros e Jornais de Sessão, com a "resolução" das tarefas-problema, assumido especial importância.

Enquanto procedíamos à recolha de dados, começámos a identificar diferenças significativas entre os intervenientes. Terminada aquela fase do estudo, optámos por nos focalizar em dois alunos, o Nuno e o Rui, o que nos conduziu a dois estudos longitudinais de caso, seleccionados através de critérios de caso extremo (Goetz e LeCompte, referidos em Matos, 1991).

Resolução de problemas em ambiente geométrico dinâmico

Os resultados relativos à Compreensão do Problema, assim como os referentes à Execução do Plano são consistentes com os existentes na literatura.

A interpretação do enunciado foi um dos pontos críticos da resolução dos problemas, para os alunos mais fracos. Mesmo os alunos "bons", que nunca demonstraram dificuldades de compreensão, revelaram ter a concepção da dificuldade desta fase. Após terem resolvido a tarefa da construção do rectângulo a partir dos pontos médios de dois lados opostos, escreveram em "Opiniões":

"Ambos achamos mais difícil compreender o enunciado do problema."

As dificuldades de interpretação, mais notórias no caso do Rui, relacionavam-se com a não compreensão de termos e conceitos específicos (opostos, adjacentes, paralelismo, perpendicularidade) e/ou com a não identificação de elementos do problema (dados, condições, questões).

Nas duas primeiras tarefas, observámos que todos os alunos passaram à execução, sem qualquer plano, ou com um plano muito incompleto, o que é muito característico da segunda fase de Pólya.

Quase sistematicamente, os alunos intercalavam a organização e a execução do plano. Este facto leva-nos a colocar uma primeira questão: Será que os alunos planeiam uma parte do problema e testam a eficácia do planeado, através da

execução que, num AGD, se torna muito mais rápida e precisa do que em ambientes de "papel e lápis"? E que, depois de confirmarem a eficácia do planeado, se sentem mais confiantes para continuarem a organização do plano, cuja validade volta a ser testada através da execução, e assim, até chegarem à solução? Todo este processo não traduzirá uma estratégia de "tentativa e erro globalizante"?

Na execução, detectámos um outro "tipo" de tentativa e erro que designámos por "estratégias parciais de tentativa e erro", as quais foram mais notórias nos grupos B e C. O CABRI, como um "espelho intelectual" (Schwartz, 1993), permitia aos alunos receber *feedback* sobre a correcção ou incorrecção de determinado traçado. Terá a facilidade de utilização de procedimentos de tentativa e erro possibilitada pelo *software* influenciado positivamente a fase de execução?

Os alunos de todos os grupos verificavam, frequentemente, os passos intermédios, através da manipulação directa de elementos livres ou semi-livres. Neste aspecto, afigura-se-nos haver uma modificação significativa em relação aos processos usuais referidos na literatura, "o seguir em frente, sem se fazer a verificação de cada passo", Pólya (1945/1975, p. 59). A evidência fornecida aponta para que esta alteração esteja relacionada com as características dinâmicas do micromundo e pelos aspectos perceptual e conceptual do *feedback*.

A omissão da verificação dos resultados tem sido, vulgarmente, apontada como uma das características dos processos em resolução de problemas. Neste estudo, recolhemos evidência de que os alunos avaliavam a solução. O modo sistemático como procediam à verificação de passos intermédios parece ter contribuído para este resultado.

Acabámos de referir que os resultados eram verificados por todos os grupos. No entanto, não encontrámos a mesma regularidade a nível do reconhecimento de múltiplas soluções nem da generalização dos resultados. Estes processos só se tornaram evidentes para os alunos dos grupos A e B.

A verificação da existência de mais de uma solução parece dever-se aos arrastamentos, visto ter sido através desta funcionalidade que os alunos chegavam a essas conclusões.

Os alunos "bons" e "médios" verificavam os resultados na figura: arrastavam pontos livres e semi-livres "para ver se está certo em todos os casos". Simultaneamente, a funcionalidade de repetição fornecia-lhes escoras para poderem concluir da manutenção da condição.

Creemos, assim, poder concluir que os processos relativos às terceira e quarta fases de Pólya foram positivamente influenciados pelas características do micromundo.

Construção de conhecimentos em ambiente geométrico dinâmico

O construtivismo defende que não é possível afirmar se determinado conhecimento foi "aprendido". De acordo com Simon (1995), considerámos que houve aprendizagem se o conhecimento "funcionou" ou se revelou "viável", na medida em que se coadunou ao que o aluno necessitava para resolver determinada tarefa.

As simetrias

A construção de propriedades dos quadriláteros passava pela viabilização de simetrias, com maior incidência na existência de eixos.

Inicialmente, verificaram-se sub-estratégias de tentativa e erro para determinação do simétrico de um ponto. Estes procedimentos subsistiram no grupo C, durante toda a experiência.

Qualquer que fosse o tipo de simetria, a maioria dos alunos verificava a sua existência, através da dobragem de *prints* dos quadriláteros em estudo. Só depois, passavam à construção em computador. O Nuno foi o único aluno que utilizou, quase exclusivamente, o CABRI para explorar as simetrias.

O nível concreto em que os alunos se encontravam e hábitos de trabalho em ambientes de "papel e lápis" poderão constituir possíveis explicações para a preferência demonstrada para a exploração da simetria através da dobragem de *prints*?

O rectângulo e o paralelogramo obliquângulo

Duas das tarefas-problema permitiram a viabilização de conhecimentos relacionados com o paralelogramo (obliquângulo e rectângulo). No entanto, os alunos manifestaram mais facilidade na construção de conhecimentos relacionados com o rectângulo do que com o paralelogramo obliquângulo. O facto de serem possíveis mais estratégias de tentativa e erro, durante a construção do rectângulo, poderá ser uma das justificações para a maior facilidade de funcionamento de conhecimentos referentes a este quadrilátero.

Outra das hipóteses que aventamos para a maior facilidade de construção do rectângulo prende-se com a preferência que os alunos demonstraram em trabalhar com a perpendicularidade do que com o paralelismo. Numa das sessões, perguntámos se gostavam mais do paralelismo ou da perpendicularidade, se achavam o traçado em algum dos casos mais fácil ou mais difícil.

Eles: "Achamos a perpendicularidade mais fácil."

Nós: "Porquê?"

Nuno: "Porque vemos logo o ângulo, vemos logo que o ângulo é recto e com o paralelismo não vemos o ângulo."

Com o prosseguimento do estudo, continuou a manifestar-se a preferência da perpendicularidade em relação ao paralelismo. Será que o micromundo proporciona uma mais fácil conjugação dos *feedback* visual e conceptual no caso da perpendicularidade do que no do paralelismo? A evidência recolhida apontou nesse sentido.

A maior dificuldade de construção de conhecimentos referentes ao paralelogramo poderá ser explicada pelo facto de um mesmo aluno se encontrar em diferentes estádios de van Hiele em relação àqueles dois quadriláteros?

Durante o estudo, observámos que a definição de rectângulo foi, geralmente, feita de modo formal. Para definirem o paralelogramo, os alunos recorreram, na maior parte das vezes, a uma lista exhaustiva de propriedades.

A conjectura de que existam sub-níveis diferentes de van Hiele para os dois quadriláteros poderá ser sustentada se atendermos que os alunos, quando chegam ao 6º ano de escolaridade, têm tido contactos muito mais frequentes com o rectângulo do que com o paralelogramo, tanto na realidade escolar como extra-escolar.

O problema de Varignon e a construção de relações

O problema de Varignon e respectivas extensões permitiram que os alunos dos grupos A e B estabelecessem relações entre os elementos dos dois quadriláteros constantes daquelas tarefas-problema. Designavam as relações como "propriedades entre figuras". Aliás, o grupo B, antes de chegar às relações, começou por enunciar propriedades comuns e não comuns aos dois quadriláteros.

O grupo C não conseguiu resolver o problema de Varignon por não ter feito funcionar a noção de relação. Apenas, conseguiram descobrir propriedades comuns (por exemplo, "Nos dois, a soma dos ângulos é 360º), primeiro estádio por que tinha passado o grupo B.

Parece-nos, assim, haver um "contínuo" no modo como os diferentes grupos construíram a ideia de "relação".

Creemos, também, que o problema de Varignon não teria sido tão facilmente resolvido pelos alunos dos grupos A e B, caso a construção se tivesse efectuado em contextos de "papel e lápis" ou computacionais não dinâmicos. Quantos desenhos teria sido preciso executarem para poderem concluir que o quadrilátero dos pontos médios de qualquer quadrilátero é sempre um paralelogramo? Teriam crianças deste nível etário a capacidade e perseverança para executarem vários desenhos até validarem a solução de qualquer uma das extensões?

Classificação lógica de quadriláteros

A possibilidade de alunos do 6º ano de escolaridade efectuarem a classificação lógica de quadriláteros foi um dos aspectos orientadores da formulação do problema.

Há evidência que os alunos do grupo A foram capazes de classificar logicamente os quadriláteros considerados neste estudo (papagaios e paralelogramos). Desde o início da experiência que o Nuno utilizou a manipulação directa para transformar determinado quadrilátero noutra incluído naquele. Posteriormente, também a Filipa efectuou arrastamentos com o mesmo objectivo. O assunto nunca foi abordado em termos de classificação mas de "parentescos". Estes eram traduzidos por árvores de família, à medida que os alunos faziam os arrastamentos. Os alunos deste grupo aproveitavam todas as oportunidades para "transformar figuras noutras". Estes procedimentos verificaram-se, quase sempre, por iniciativa dos alunos.

No relatório final, a Filipa escreveu:

(...) foi onde aprendi coisas novas sobre quadriláteros e nunca pensei que o mundo dos quadriláteros era tão giro e divertido onde se pudesse fazer problemas tão engraçados como os que fizemos. Nunca pensei que os quadriláteros como nós também tivessem graus de parentesco.

Os alunos do grupo B também foram capazes de classificar alguns paralelogramos, recorrendo, igualmente, aos arrastamentos. No entanto, não revelavam a mesma apetência que os do grupo A, visto que só agiam nesse sentido, quando solicitados.

Nunca tivemos oportunidade de abordar este assunto, de forma sistemática, com os alunos do grupo C, visto terem demorado, quase sempre, muito tempo para compreenderem o problema. Os resultados que obtivemos não foram suficientes para estabelecer conclusões.

Em relação aos grupos A e B, pensamos existir evidência de que a manipulação directa se revelou como um sólido "andaime" da classificação lógica de quadriláteros.

A manipulação directa

Não foi apenas na classificação de quadriláteros que os arrastamentos forneceram "escoras" à construção de conhecimento geométrico. Pensamos ter, já, apresentado alguns resultados que sustentam ter esta funcionalidade influenciado positivamente alguns processos em resolução de problemas, assim como a indução e a generalização.

Verificou-se que os alunos que mais progrediram na construção do domínio dos quadriláteros (grupo A) foram precisamente os que mais utilizaram a manipulação directa. Pelo contrário, os alunos do grupo C foram os que utilizaram o

software numa perspectiva mais estática e também os que menos progrediram na construção de conhecimentos.

O quadro que segue pretende resumir os principais aspectos em que incidiu a manipulação directa do *software*.

	Grupo A	Grupo B	Grupo C
Verificação de passos intermédios	Muito frequente	Muito frequente	Muito frequente
Verificação da condição	Muito frequente	Muito frequente	Pouco frequente
Generalização da solução	Sempre	Sempre	Pouco frequente
Exploração de propriedades e relações	Muito frequente	Muito frequente	Pouco frequente
Exploração de simetrias	Frequente	Pouco frequente	Nunca
Classificação de quadriláteros	Muito frequente	Quando solicitados	Nunca

Os resultados da experiência permitem presumir que o *software* influenciou, positivamente, quer alguns processos em resolução de problemas, quer a construção de conhecimentos na área de quadriláteros, pela possibilidade de utilização de estratégias de tentativa e erro, pela natureza do *feedback* e pela funcionalidade de repetição relacionada com o movimento, caso em que a geometria assume a sua natureza dinâmica.

Referências

- Abrantes, P., Leal, L. C. e Veloso, E. (1994). Pode haver um currículo de Matemática centrado na resolução de problemas? *Resolução de problemas: processos cognitivos, concepções de professores e desenvolvimento curricular* (pp. 239-252). Lisboa: IIE.
- Arsac, G., Germain, G. e Mante, M. (1988). *Problème ouvert et situation-problème*. Lyon: IREM de l'Université Claude Bernard.
- Barbin, E. e Charlot, B. (1986). L'enseignement par situations-problèmes. Em IREM Pays de Loire (Ed.), *L'enseignement des mathématiques par situations-problèmes au collège*, pp.9-19. Le Mans.
- Boavida, A. M. (1992). Resolução de problemas: Que rumos para a educação matemática? Em M. Brown, D. Fernandes, J. F. Matos, J. P. Ponte (Eds.), *Educação Matemática* (pp. 105-114). Lisboa: IIE.

- Coelho, M. I. (1995). *O Cabri-Géomètre na resolução de problemas. Estudo sobre processos evidenciados e construção de conhecimentos por alunos do 6º ano de escolaridade* (Tese de mestrado não publicada). Universidade de Aveiro.
- DGEBS (1991a). *Programa de Matemática — Organização curricular e programas, Ensino Básico 2º Ciclo (I)*. Lisboa: INCM, EP.
- DGEBS (1991b). *Programa de Matemática — Plano de Organização do Ensino-Aprendizagem, Ensino Básico 2º Ciclo (II)*. Lisboa: INCM, EP.
- Fernandes, D., Borralho, A. e Amaro, G. (1994). Processos de resolução de problemas: Revisão e análise crítica de investigação que utilizou esquemas de codificação. *Resolução de problemas: processos cognitivos, concepções de professores e desenvolvimento curricular* (pp.35-63). Lisboa: IIE.
- Fonseca, L. (1995). *Três futuros professores perante a resolução de problemas: Concepções e processos utilizados*. (Tese de mestrado não publicada). Universidade do Minho.
- Freitas, J. C. (1992). As NTIC na educação: Esboço de um quadro global. *Educação e computadores*, pp.27-68. Lisboa: Ministério da Educação — GEP.
- Geddes, D. e Fortunato, I. (1993). Geometry: Research and classroom activities. Em D. T. Owens (Ed.), *Research ideas for the classroom. Middle grades mathematics* (pp. 199-222). Nova Iorque: Macmillan e NCTM.
- Junqueira, M. (1993). Conjecturas e provas informais em geometria com recurso a ferramentas computacionais. *Quadrante*, 2(1), 63-78.
- Junqueira, M. (1994a). Processos de realização, justificação e investigação de construções em ambientes geométricos dinâmicos. Comunicação apresentada no V SIEM, Leiria: 7-8 de Novembro de 1994.
- Junqueira, M. (1994b). Construções geométricas em ambientes dinâmicos no 9º ano. *ProfMat 94 — Actas*, pp. 206-215. Lisboa: APM.
- Kaput, J. J. e Thompson, P. W. (1994). Technology in mathematics education research: The first 25 years in the JRME. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25 (6), pp. 676-684.
- Laborde, C. (1993a). Do the pupils learn and what do they learn in a computer based environment? The case of Cabri-Géomètre. Em B. Jaworski (Ed.), *Proceedings of the conference Technology in Mathematics Teaching 93* (pp. 39-52). Birmingham: University of Birmingham.
- Laborde, C. (1993b). The computer as part of learning environments: The case of geometry. Em C. Keitel e K. Ruthven (Eds.), *Learning from computers: Mathematics education and technology*, pp. 48-67. Berlin: Springer-Verlag.

- Laborde, C. e Laborde, J. M. (1992). Problem solving in geometry: From microworlds to intelligent computer environments. Em J. Ponte, J. F. Matos, J. M. Matos e D. Fernandes (Eds.), *Mathematical problem solving and new information technologies: Research in contexts of practice* (pp. 177-192). Berlim: Springer-Verlag.
- Laborde, J. M. e Strässer, R. (1990). Cabri-Géomètre: A microworld of geometry guided discovery learning. *International reviews on mathematical education-Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 90 (5), 171-177.
- Lester, F. K. (1994). O que aconteceu à investigação em resolução de problemas de matemática? A situação nos Estados Unidos. *Resolução de problemas: processos cognitivos, concepções de professores e desenvolvimento curricular* (pp. 13- 31). Lisboa: IIE.
- Lester, F. K e Charles, R. I (1992). A framework for research on problem-solving instruction. Em J. Ponte, J. F. Matos, J. M. Matos e D. Fernandes (Eds.), *Mathematical problem solving and new information technologies: Research in contexts of practice* (pp. 1-15). Berlim: Springer-Verlag.
- Matos, J. F. (1991). *LOGO na educação matemática: Um estudo sobre as concepções e atitudes dos alunos* (Tese de doutoramento). Lisboa: Projecto Minerva, Departamento de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.
- Merriam, S. B. (1988). *Case study research in education: A qualitative approach*. São Francisco: Jossey-Bass.
- NCTM (1989/1991). *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar*. APM/IIE.
- Pólya, G. (1945/1975). *A arte de resolver problemas*. Rio de Janeiro: Interciência.
- Ponte, J. P. (1992). Concepções dos professores de Matemática e processos de formação. Em M. Brown, D. Fernandes, J. F. Matos, J. P. Ponte (Eds.), *Educação matemática* (pp. 185-239). Lisboa: IIE.
- Schwartz, J. L. (1993). A personal view of the Supposer: Reflections on particularities and generalities in educational reform. Em J. L. Schwartz, M. Yerushalmy e B. Wilson (Eds.), *The Geometric Supposer: What is it a case of?* (pp. 3-15). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Steffe, L.P. e Kieran, T. (1994). Radical constructivism and mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(6), 711-733.
- Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26 (2), 114-145.
- Teodoro, V. D. (1992). Educação e computadores. *Educação e computadores*, 9-25. Lisboa: Ministério da Educação — GEP.

Yerushalmy, M. e Chazan, D. (1993). Overcoming visual obstacles with the aid of the Supposer. Em J. L. Schwartz, M. Yerushalmy e B. Wilson (Eds.), *The Geometric Supposer: What is it a case of?* (pp. 26-56), Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Yin, R. (1989). *Case study research: Design and methods*. Londres: Sage.

Referência de software

Cabri-Géomètre (versão 1.7): Laboratoire de Structures Discrètes et de Didactique, LSD2-IMAG, CNRS — Université Joseph Fourier. Grenoble.

Notas

1 No último período de 1992 / 93.

Isabel Coelho, R. Cidade da Covilhã, 25, 3ºE, 6230 FUNDÃO.

Grupo III. A contextualização das aprendizagens em Matemática

Dinamizadora: Madalena Pinto dos Santos

O resumo apresentado no programa para este grupo de discussão, propunha como temas de reflexão as seguintes questões:

1. Que relação existe entre contexto e aprendizagem da Matemática?
2. A aprendizagem será um fenómeno culturalmente situado?
3. Que questões se colocam à investigação desta problemática?

A discussão decorreu ao longo de três sessões tendo sido apresentadas, em cada uma delas, uma comunicação que foi discutida com os(as) autores(as), mas que funcionou também como ponto de partida para o debate entre os participantes sobre as questões propostas. Pretendeu-se e foi razoavelmente conseguido que durante as duas primeiras sessões o debate se centrasse nas duas primeiras questões e que a terceira fosse mais especificamente abordada na última sessão.

Na primeira sessão foi feita uma breve apresentação (pela dinamizadora) de diferentes formas de se encarar: (i) o *Contexto*, (ii) a *Aprendizagem* e (iii) a *Matemática*. Nesta apresentação realçaram-se alguns aspectos destes conceitos que pudessem ajudar a reflectir sobre a relação entre o contexto escolar das aprendizagens da Matemática e a natureza humana e cultural da própria Matemática. Por exemplo, o contexto foi entendido não tanto como algo que é exterior ao indivíduo, distinto dele e que o constrange, mas sim como algo que é construído pelas partes em interacção. Por outro lado, apresentou-se três metáforas do processo de aprendizagem que se relacionam com outras três perspectivas de a olharmos: aprendizagem enquanto (i) construção — processo individual subordinado ao desenvolvimento, (ii) apropriação — processo socio-cultural e (iii) participação — um aspecto da actividade situada cultural e historicamente.

Ainda nesta sessão foi apresentada uma comunicação — "Como é que as emoções estão presentes na aprendizagem da Matemática", por Ilda Lopes — em que era abordada a relação entre emoções e aprendizagem, assim como a relação entre emoção e racionalidade. Ficaram no ar perguntas, tais como: (i) porque é que se colocam as emoções, habitualmente, de fora da aprendizagem da Matemática? e (ii) será que se pode aprender na ausência das emoções? Na segunda sessão foi apresentado um projecto de investigação — "Um projecto de interacção entre pares

na sala de aula", por M. César, E. Cardo, M. H: Costa, E. Guerra, M. Manderico, M. Torres — a decorrer em turmas de 7º, 8º e 10º anos de escolaridade de várias escolas. Com este projecto procura estudar-se o papel das interações dos alunos na construção do seu conhecimento matemático através da implementação de uma dinâmica de aula baseada no trabalho em díade como preparação dos alunos para o trabalho em grupo. A discussão desenrolou-se essencialmente em torno de questões práticas da experiência relatada na comunicação. No entanto, desta apresentação e da sua discussão, ficou saliente a importância da participação dos alunos como elemento fundamental da aprendizagem da Matemática, assim como a noção de que o contexto é algo mutável e constantemente reajustado pelos próprios intervenientes na aula.

Na última sessão procurou discutir-se, essencialmente, os aspectos relacionados com a investigação desta problemática. João Filipe Matos apresentou a comunicação "Aprendizagem da Matemática em contexto: Perspectivas actuais" que impulsionou a discussão da referida temática entre os presentes. Nesta comunicação foram apresentadas duas ferramentas conceptuais que parecem ser prometedoras em termos de investigação da aprendizagem da Matemática: (i) metáforas conceptuais (Lakoff) e (ii) Participação Legítima Periférica (Lave). A discussão desenrolou-se à volta de questões como por exemplo: (i) dúvidas dos presentes sobre alguns dos conceitos apresentados; (ii) razões para que as ferramentas sejam consideradas prometedoras; e (iii) necessidade e utilidade de maior diálogo e trabalho conjunto com práticos de outras áreas de saber (ex. psicólogos, sociólogos, antropólogos, professores de outras disciplinas,...) para enriquecimento da capacidade de estudo da aprendizagem da Matemática.

*Madalena Pinto dos Santos, Pr. Luanda, 8, 6ºE, 2780 OEIRAS.
emada@cc.fc.ul.pt.*

Como é que as emoções estão presentes na aprendizagem da Matemática?

Ilda Couto Lopes^(a), Escola Secundária de S. Pedro

Introdução

A actualidade do Mundo em que vivemos é marcada por exigências no campo da aprendizagem da Matemática. A sociedade actual espera que as escolas garantam que todos os estudantes tenham a oportunidade de se tornarem matematicamente alfabetizados, sejam capazes de prolongarem a sua aprendizagem, tenham iguais oportunidades de aprenderem e de se tornarem aptos a compreenderem as questões em aberto numa sociedade tecnológica. Por vários motivos, os resultados à disciplina de Matemática vão interferir directa ou indirectamente, nas escolhas de um curso médio ou superior, nas saídas profissionais possíveis e /ou na selecção de candidatos para este ou aquele ofício, chegando, mesmo, numa grande parte das situações, a ser apresentado como um obstáculo muito difícil de ultrapassar. Como educadora matemática e, em primeiro lugar como cidadã que sente como prioritária a alfabetização matemática de todas as pessoas, sinto a preocupação de compreender, ou melhor, tentar compreender possíveis razões do insucesso sistemático e continuado dos nossos jovens face à aprendizagem de Matemática. Têm-se feito muitas investigações nas concepções, nas atitudes perante a Matemática, na resolução de problemas, na aprendizagem, no tipo de ensino, no tipo de actividades, nos materiais computacionais utilizados, etc., mas verifica-se nestes trabalhos que há a omissão de um aspecto da pessoa humana que me parece primordial: as suas emoções. Porventura por ser tão óbvio termos emoções este aspecto tão característico e tão complexo do ser humano tem sido tão pouco estudado e aprofundado. Confesso que, particularmente, esta dimensão do ser humano (e, em particular como professora e educadora matemática), me desafia de uma forma muito especial uma vez que parto do pressuposto de que se conseguirmos perceber e compreender de que forma as emoções estão presentes na aprendizagem de Matemática poderemos ultrapassar alguns obstáculos encontrados na sala de aula que consideramos estarem, humanamente, no limiar do insolúvel. Sem dúvida, que o problema central deste trabalho e o que me mobiliza, como objectivo a médio e a longo prazo é a melhoria da aprendizagem da Matemática por parte dos alunos e estou consciente que este tipo de investigação

comporta algumas oportunidades de compreendermos os aspectos emocionais do ser humano no trato e relacionamento dos nossos jovens com a Matemática. Não estou alheia a que existe uma sensibilidade maior por parte do cidadão comum aos aspectos emocionais e à sua importância quer na racionalidade quer, especificamente, na tomada de decisões; isto deve-se em muito ao livro de António Damásio "O erro de Descartes" e aos avanços promissores nos campos da neurobiologia e da neurociência. Num artigo recente da revista *Visão* nº 133, de Outubro de 1995, e num artigo "Sociedade: Razão e Coração" de Nancy Gibbs escrevia-se "Os estudantes deprimidos ou irritados não conseguem aprender. As crianças com dificuldade em serem aceites pelos companheiros têm duas a oito vezes mais possibilidades de desistirem. A incapacidade para distinguir sentimentos de aflição ou enfrentar a frustração tem sido relacionada com desordens alimentares nas raparigas".

Por todos estes argumentos apresentados este trabalho visará estabelecer algumas pontes entre as emoções e a aprendizagem não por elas estarem separadas mas porque nós as temos separadas nos nossos esquemas conceptuais. É de referir que em toda a nossa História e em todo o nosso legado cultural partimos do pressuposto de que somos constituídos por corpo e cérebro, razão e coração, inato e adquirido numa dualidade de realidades separadas e com alguns pontos de contacto. Devemos esta dualidade científica à obra de Descartes. Nos dias de hoje há um conjunto de investigadores que rejeitam esta dualidade como referencial científico e firmam-se sobre o pressuposto de que há um único organismo biologicamente constituído por um corpo, propriamente dito, e por um cérebro que não têm razão de ser um sem o outro; há as emoções e a razão que funcionam numa interdependência estreita; que o que é geneticamente inato num ser humano cresce e desenvolve-se em estreito relacionamento com o meio ambiente natural, social e económico. Por isso, apesar de fisicamente ir separar, no trabalho, as emoções da aprendizagem faço-o por uma questão prática de apresentação. Em termos filosóficos estou convicta que a pessoa é uma unidade, é um todo em que os diversos aspectos que a caracterizam convergem para o seu desempenho nos diversos sectores da sua vida: humanos, sociais, culturais, etc..

Assim, este trabalho será constituído por três grandes partes: A- O que se sabe acerca das emoções; B — As emoções e a Educação Matemática; C — Aprendizagem e Currículo. Na parte A, este trabalho tenta apresentar um conjunto de ideias muito gerais acerca do que se sabe acerca das emoções e pretende fazer uma introdução mais concreta e profunda ao estudo das emoções, que são do conhecimento geral, nos aspectos mais pertinentes que lhes estão associados para a compreensão da interrelação com a aprendizagem da Matemática na sala de aula. Todos nós consideramos óbvia a importância dos aspectos emocionais para a

predisposição ou sua falta, na aprendizagem da Matemática e, mesmo, para a criação de atitudes favoráveis à Matemática. Esta parte fundamenta-se, essencialmente sobre um trabalho de Robert Dantzer (1988), uma síntese denominada "Les Émotions" da colecção *que sais je?*

Na parte B apresentarei uma perspectiva do que se tem feito na educação matemática na investigação dos afectos e aspectos afectivos. Para isso recorrerei aos autores Fennema e McLeod nos seus artigos datados de 1987 e de 1991, respectivamente. Tecerei algumas considerações acerca do que é do conhecimento geral da Educação Matemática em Portugal na área dos aspectos afectivos e das emoções em particular, das suas necessidades e limitações.

Na parte C farei uma reflexão acerca da Aprendizagem de Matemática focando, especificamente, algumas teorias da aprendizagem, e do Desenvolvimento Curricular e da sua relação com os aspectos afectivos. Focarei também a urgência de considerar os aspectos afectivos nos trabalhos de investigação na Educação Matemática de uma forma integrada com os aspectos cognitivos e vice-versa, num trabalho articulado e de colaboração dos saberes e dos saberes fazer entre os investigadores que estão mais sensibilizados quer para os aspectos afectivos quer para os aspectos cognitivos.

A — O que se sabe acerca das emoções?

I — Natureza e funções das emoções

1. Natureza das emoções

As emoções são um elemento bastante essencial da nossa existência e determinam, na vida humana, muitas das decisões que marcam indelevelmente o rumo e o percurso da humanidade e de cada homem. Assim, trata-se de um tema do interesse da filosofia. Por outro lado, como as emoções se manifestam através de modificações somáticas e fisiológicas no nosso corpo tem sido objecto do interesse dos biólogos.

Assim, "o estudo das emoções tem sido feito com base em duas tradições diferentes: a da filosofia e a da biologia. O filósofo interessa-se pela natureza das emoções, pelas suas relações com as forças da vida afectiva que são as paixões e os sentimentos e o que as diferencia da vida racional e reflexiva." (Dantzer, 1988, 10). Este autor usa a diferenciação entre emoções, paixões e sentimentos e afirma que "a emoção pode ser mais que uma simples reacção e constituir uma verdadeira atitude, uma avaliação dos seus próprios estados em relação, eventualmente, com outra pessoa, juiz ou partido" (Dantzer, 1988, 11). Dantzer afirma que segundo esta concepção filosófica, é possível distinguir três níveis de classificação das emoções:

1) as emoções fundamentais que são simplesmente reacção a um acontecimento exterior real ou imaginário (o desgosto e o medo, por exemplo);

2) as emoções derivadas que são fundadas sobre as emoções geradas pela imagem que se tem da consciência de outro (o desprezo que é o desgosto pela pretensões duma outra consciência, a desconfiança que é o medo do mistério posto por outros);

3) as emoções terciárias que nascem da consciência de si face ao olhar de uma outra pessoa (a vergonha que é o desprezo de si, a timidez que é o medo do seu próprio valor tal e qual é percebido por outros).

"Para o **biólogo**, pelo contrário, a emoção não é acessível a não ser através das modificações objectivas que a acompanham: interessa-se pelas modificações comportamentais e fisiológicas que tomam lugar nos indivíduos face a situações «emocionais» e investiga os mecanismos que estão na base destas reacções. Alguns biólogos chegam, mesmo a negar a noção de emoção, na medida em que as respostas que eles estudam podem ser explicadas directamente pelas características da situação causal, independentemente de todo o processo mental intermediário. Um dos comportamentalistas mais influentes, Skinner, não hesitou em escrever que as emoções são um dos melhores exemplos das causas fictícias às quais nós tendemos a atribuir os comportamentos. Esta posição que é característica da doutrina behaviourista pura na qual somente os elementos objectivos do comportamento são reais, não é unanimemente partilhada: a maior parte do biólogos admite que as emoções têm um papel determinante na organização dos comportamentos; reconhecem, contudo que não são directamente acessíveis e que elas devem ser apreendidas indirectamente, pelo estudo das suas manifestações.

Para o **psicólogo experimental**, as emoções são os estados centrais induzidos por certos estímulos e que se traduzem por modificações numa grande variedade de comportamentos. Assim, um indivíduo submetido a um acontecimento totalmente inesperado e relativamente ao qual tem dificuldade em perceber a evolução sente que o medo o toma; simultaneamente ele interrompe o que estava previsto ser feito e imobiliza-se ou procura fugir à situação de ansiedade. Segundo esta concepção, o organismo é submetido aos constrangimentos do meio envolvente: ele dá resposta aos estímulos externos mas sem grande capacidade de iniciativa.

A **psicologia cognitiva** rejeita esta passividade do organismo nas suas interacções com o meio envolvente: um indivíduo perante uma situação dada num momento preciso da sua existência não reage unicamente em função das características sensoriais dos estímulos aos quais é exposto; o modo como ele vai tratar a informação que ele recebe depende, de facto, da sua experiência anterior e da sua expectativa; a sua percepção dos acontecimentos não é, assim, linear assim como as suas possibilidades de acção. Por outras palavras, a emoção nasce da

interpretação da situação e não propriamente da situação em si. Esta posição implica uma relação de dependência entre as emoções e a cognição. A natureza exacta desta relação é, ainda, objecto de numerosas controvérsias." (Dantzer, 1988,11-13)

Em todas estas perspectivas referidas e que denotam uma evolução no estudo das emoções assim como um enriquecimento do próprio conceito, as emoções são tratadas como algo estranho ao ser que as possui e que as sofre e, por isso, se estudam as maiores ou menores relações de dependência ou de independência, por exemplo, das emoções com as aquisições cognitivas. Voltaremos a falar neste aspecto mais adiante.

De qualquer modo há um conjunto de investigadores de várias áreas da ciência (neurologia, biologia, psicologia, linguística) que partem do pressuposto que a experiência consciente é fruto de uma mente incorporizada num determinado corpo. Nesta perspectiva as emoções e a aprendizagem, por exemplo, fazem parte de um mesmo ser e são interinfluenciáveis de tal modo que uma aprendizagem provoca alterações nos estados emocionais e as emoções ocorridas vão facilitar ou não a aprendizagem. Esta perspectiva é muito recente e é consequência dos grandes avanços dos campos da neurobiologia e da neurociência. Trata-se de uma perspectiva emergente que parte do pressuposto que a pessoa é **um** ser, um único organismo em que a razão e as emoções são aspectos indissociáveis de uma mente de um cérebro num corpo. Nos países de expressão anglo-saxónica há o termo *embodied* para designar esta característica de tudo se passar num corpo e de ser por ele enformado e influenciado.



Fig. 1: Relação entre emoções e aprendizagem

Nesta perspectiva não podemos falar de emoções e de aprendizagem como manifestações independentes com uma interface de relacionamento; teremos de assumir que emoções e aprendizagem são diferentes aspectos de um ser com uma mente de um cérebro de um corpo. Isto é, não partimos do pressuposto filosófico de Descartes e do seu dualismo, mas temos como pressuposto o monismo: o ser humano é um organismo determinado por várias facetas entre as quais a aprendizagem e as emoções se interrelacionam de uma forma indissociável; isto é, a aprendizagem faz-se tendo como pano de fundo situações emocionais e as emoções

sentidas de uma forma consciente ou inconsciente direccionam e facilitam ou não a aprendizagem efectuada.

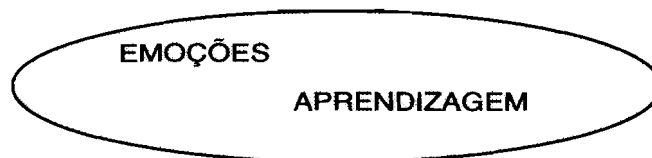


Fig. 2: Relação entre emoções e aprendizagem

Damáσιο na sua obra "O erro de Descartes" defende a tese de um organismo único que interage com o meio envolvente: não só um corpo, não só um cérebro mas um organismo constituído com corpo e cérebro. "Em conclusão, as representações que o nosso cérebro cria para descrever uma situação e os movimentos formulados como resposta a essa situação dependem de interacções mútuas cérebro-corpo.[...] Fazer a mente surgir, não de um cérebro sem corpo mas de um organismo, é compatível com uma série de suposições.(Damásio, 1995, 236-237). Continua afirmando que a concepção de organismo humano e a relação entre emoção e razão que emerge dos resultados discutidos no seu livro sugerem, no entanto, "que o fortalecimento da racionalidade requer que seja dada uma maior atenção à vulnerabilidade do mundo interior."(Damásio, 1995, 253)

É claro que as relações de uma mente com o cérebro e deste com o corpo do qual faz parte é um tema polémico e não consensual. No entanto é aos enormes progressos nos campos da neurologia, da neurociência e das ciências médicas que se colocam estas hipóteses que a confirmarem-se poderão proporcionar abordagens substantivamente diferentes daquelas em que estamos enformados pela herança de Descartes.

2 — Funções das emoções

Qual é a importância das emoções no ser humano?

Dantzer responde da seguinte forma: "a universalidade das emoções através das culturas no homem e no reino animal deixa pensar que se tratam de processos adaptativos, favorecendo a sobrevivência do indivíduo e da espécie. É tão importante ter medo dos predadores como reconhecer o carácter nocivo ou benéfico dos diversos alimentos. Os medos das crianças, tais como o medo da noite, o medo de estar só ou o medo gerado pelas modificações súbitas no meio ambiente são o resultado de uma longa série de associações na história da humanidade entre estas situações e um potencial perigo.

As emoções jogam, igualmente um papel organizador importante na avaliação do mundo que nos rodeia: entre os conceitos que construímos é difícil de encontrar um mais fundamental que a dicotomia agradável/desagradável ou benéfico/nocivo. Esta categorização motiva e orienta a acção.

Uma outra função importante das emoções é representada pelo seu valor de sinal. Utilizando a postura, a expressão facial, a gestualidade e expressão vocal daqueles que me rodeiam, posso ter acesso aos seus estados emocionais. Se eu sei que o meu companheiro está triste, posso predizer com alguma precisão as suas reacções posteriores e, assim, posso ajustar, conseqüentemente, o meu próprio comportamento. Mais ainda, um indivíduo inexperiente pode fundamentar-se na interpretação afectiva dos acontecimentos de uma pessoa mais experiente para reagir de uma forma apropriada. [...] Esta função de sinal das emoções encontra-se, também nos animais"(Dantzer, 1988,13-14).

Como vimos as emoções têm três grandes funções: uma função de adaptação favorecendo a sobrevivência do indivíduo e da espécie; uma função de avaliação do mundo que nos rodeia e uma função de sinal. Estas duas últimas terão bastante importância no processo de ensino aprendizagem uma vez que, na sala de aula, o conjunto professor-alunos é caracterizado por emitir e receber um conjunto de sinais reveladores do seu estado emocional que podem proporcionar ou não um bom ambiente. Este ambiente não é percebido por cada um do mesmo modo: cada um percebe-o de uma forma específica atendendo à sua especificidade, às suas experiências anteriores e ao ambiente cultural em que está imerso. Neste sentido, será possível um aluno não gostar de Matemática mas ter de estudar para "sobreviver" na sociedade em que vivemos.

Damásio também afirma que "a um nível prático, a função atribuída às emoções na criação da racionalidade tem implicações em algumas das perguntas com que a nossa sociedade se defronta actualmente, entre elas a educação e a violência"(Damásio, 1995, 253); a este propósito, Daniel Goleman, autor de investigação comportamental sobre como a mente processa os sentimentos afirma que o debate sobre inteligência emocional é mais premente nas escolas, onde tanto os riscos como as oportunidades lhe parecem maiores. É de opinião que em vez de constantes intervenções de crise, ou de declarações de guerra à droga, à gravidez das jovens ou à violência é tempo de fazer medicina preventiva: os estudantes deprimidos ou irritados não conseguem aprender; as crianças com dificuldades em serem aceites pelos companheiros têm duas a oito vezes mais possibilidades de desistirem. O problema da educação e, em particular, da aprendizagem na sala de aula, é multifacetado e, por isso mesmo, devemos tentar perceber de que modo cada uma das suas facetas interage para o problema no seu todo. Esta será, também, outra das nossas grandes preocupações: que a preocupação pelas emoções não nos

impeça de percebermos o carácter holístico da aprendizagem dos nossos jovens na nossa sociedade.

3 — Teorias das emoções

Para o estudo das emoções ser feito precisamos de perceber em que referenciais teóricos nos podemos situar e quais são os seus pressupostos. Assim, segundo Dantzer, "as teorias propostas para estudar as emoções variam segundo a perspectiva de estudo. As **teorias evolutivas** especulam sobre os elementos que conferem vantagens selectivas às capacidades de expressão das emoções. A principal contribuição para estas teorias foi dada por Darwin na sua maior obra sobre a expressão das emoções no homem e no animal. Segundo Darwin, três princípios presidiram ao desenvolvimento das emoções:

a) O princípio de utilidade: todo o acto gratificante ou redutor de tensão transforma-se em hábito por força da repetição, se bem que ele aparece automaticamente logo que a emoção é sentida de novo, mesmo se isso não serve para nada; o processo evolutivo reduz estes actos ao estado de esboço mas sem os fazer desaparecer: a careta de raiva do homem é parecida ao aparecimento das babas do animal que está prestes a atacar;

b) O princípio de oposição ou de antítese: as emoções antagónicas geram comportamentos antagónicos: o cão que vai atacar com a cabeça alta, o pêlo eriçado, a cauda hirta e o corpo em tensão; pelo contrário, o cão que reconhece o seu dono estende-se no solo, levanta a cabeça e abana a cauda;

c) O princípio de acção directa de excitação nervosa sobre o corpo: os circuitos nervosos controlando a expressão motora das emoções são de qualquer modo, pré-transmitidos e tornam-se cada vez mais permeáveis à medida que são solicitados. Esta teoria foi a primeira a atrair a atenção sobre a possibilidade de caracterizar as emoções segundo a sua expressão somática[...].

As **teorias cognitivas** da emoção debateram, durante muito tempo, a relação entre emoções em funções cognitivas. Os desenvolvimentos mais recentes destas teorias insistem no papel dos factores de personalidade e da experiência anterior.

As **teorias fisiológicas** acentuam o seu estudo sobre o tipo de relações possíveis entre a emoção, enquanto estado mental ou cognitivo, e a sua expressão somática. Dois pontos de vista extremos foram expressos, um fazendo da percepção das modificações viscerais consecutivas aos acontecimentos do meio ambiente a fonte da emoção, e a outra reduzindo estas modificações a simples correlações. Resumindo estas teorias de modo caricatural, pode-se dizer que se trata de saber se eu tenho medo porque eu corro ou se eu corro porque tenho medo[...]; discutiremos igualmente a validade de um outro grupo de teorias fisiológicas das emoções, as **teorias da activação**: estas teorias reconhecem uma influência das modificações

fisiológicas sobre as emoções, mas somente numa dimensão unicamente de intensidade: a emoção sentida é tanto mais intensa quanto a fisiologia é mais perturbada, mas a qualidade da emoção não é afectada." (Dantzer, 1988,14-17)

II — Expressão das emoções

Se eu vejo alguém que tem a boca e os olhos, grandes, abertos, as sobrancelhas esticadas para o alto e faz um «oh» exclamativo, não tenho dúvidas em reconhecer a surpresa. Do mesmo modo, sei que devo desconfiar dum gato rente ao solo, que agita a cauda nervosamente, tem as orelhas erguidas, as garras de fora, a boca aberta com os dentes a verem-se, porque se me aproximo tenho fortes hipóteses que ele me ataque. Estes dois exemplos mostram que tanto no homem como no animal, as emoções não ficam puramente internas, mas são expressas por mímicas, posturas e movimentos e mesmo por gesticulações e vocalizações características. Os trabalhos realizados ao longo destes últimos 20 anos permitiram-nos avançar, consideravelmente, no conhecimento nas modalidades de expressão das emoções: agora é possível responder, com alguma precisão, a questões relacionadas com a especificidade da expressão emocional (diferentes emoções terão expressões diferentes?) e a universalidade da expressão emocional (a expressão é independente da raça e de factores socioculturais?).

1 — Métodos de estudo da expressão das emoções no sujeito humano

Quando reflecti acerca das emoções e de que modos se poderiam identificar as emoções e distingui-las apercebi-me que se era difícil observá-las com algum rigor, mais difícil seria descrevê-las por forma a que houvesse uma comunicação, minimamente clara e que fosse fiel ao observado e representasse com o máximo de fidelidade as emoções sentidas. No trabalho de síntese de Dantzer há a constatação de quais os métodos usados para o efeito até 1988 e quais as suas possibilidades e limitações.

Assim, Dantzer refere que "o essencial dos trabalhos no sujeito humano reporta-se às mímicas faciais e, em menor grau, sobre as posturas, as gesticulações e as características acústicas da voz.

No domínio da expressão facial das emoções, os **métodos subjectivos** consistem em apresentar a um grupo de sujeitos experimentais, fotografias, diapositivos ou excertos de vídeo de pessoas que mimam uma emoção ou a sentem verdadeiramente (uma criança a tomar uma vacina, por exemplo) e pedir-lhes que reconheçam a emoção expressa seja espontaneamente (de escolha livre), seja através de uma lista fornecida (escolha limitada). Pode-se, igualmente, apreciar a intensidade da emoção através de uma pontuação numa escala linear de três ou mais pontos. Um outro método subjectivo consiste em projectar filmes curtos contendo cenas

destinadas a suscitar emoções tais como a alegria ou o horror, a registar a expressão dos sujeitos e a compará-la com a descrição dos sentimentos sentidos.

Os **métodos objectivos** são baseados sobre a caracterização dos grupos musculares implicados nas mímicas faciais. Cada uma das partes móveis do rosto é animada por um ou mais músculos e as relações entre as contracções de cada um desses músculos e as modificações de aparência da face são bem conhecidas. Assim, a contracção do músculo zigomático levanta os cantos da boca enquanto que o músculo depressivo do ângulo dos lábios os abaixa; um sorriso irónico põe em jogo, simultaneamente, estes dois músculos. Muitos sistemas de medida da expressão facial das emoções estão disponíveis. Todos utilizam como suporte do trabalho uma banda de registo vídeo da face dos sujeitos submetidos à experiência. O sistema de codificação das acções faciais (Facial Action Coding System, FACS) elaborado por Ekman e Friesen na Universidade de Califórnia em S. Francisco distinguindo 44 unidades de acção([As unidades descritivas são designadas de unidades de acção em alternância a unidades musculares. São o produto das possibilidades de acção do aparelho muscular e do que um observador pode distinguir nas suas melhores condições de observação]), correspondendo a tantas outras modificações de expressão do rosto sob a acção de um ou de um grupo de músculos faciais bem precisos, 8 posições da testa e 6 posições dos olhos"(Dantzer, 1988, 19-20). Neste sistema tem-se como pressuposto de que há seis emoções de base: felicidade, medo, desgosto, tristeza, surpresa e cólera. A familiarização com este sistema de codificação demora entre 44 e 100 horas de trabalho assíduo e obtém o acordo da ordem dos 80% entre observadores treinados. Há um outro sistema similar proposto por Carroll Izard, da Universidade de Delaware, um pouco menos complexo, o sistema de codificação discriminativo dos movimentos da face (Maximally Discriminating Facial Movement Coding System que tem por abreviatura Max). Este sistema só considera as mudanças de aparência da face que permitem discriminar entre muitas emoções. Neste sistema considera-se nove emoções elementares: alegria, surpresa, tristeza, cólera, desgosto, desconfiança, medo, vergonha/timidez e culpabilidade. A familiarização com o Max demora cerca de 11 horas e obtém o mesmo grau de acordo que o FACS. Izard propõe a organização dos resultados da descodificação de vídeo segundo um «afectograma» onde se representa a evolução no tempo das diversas expressões faciais observadas. A importância de uma emoção dada no afectograma pode ser apreciada por um índice afectivo que exprime o tempo de aparição da emoção considerada em relação ao tempo total, em percentagem; mais ainda, para avaliar o modo como uma emoção expressa por um indivíduo influencia um outro indivíduo, é possível realizar um afectograma diádico que sobrepõe os afectogramas individuais.

Estes métodos têm como limitação o facto de que nem todos os estados emocionais se associam e/ou dão lugar a modificações de expressão facial; as emoções podem ser escondidas de um modo voluntário ou, mesmo, involuntário e não se ter acesso às modificações de expressão facial. O registo da actividade eléctrica dos músculos do rosto (electromiograma facial) permite, apesar de tudo, pôr em evidência as diferentes contracções musculares conforme o tipo de emoção sentida, na ausência de qualquer outra manifestação externa de emoção.

2 — Reconhecimento das emoções no sujeito humano

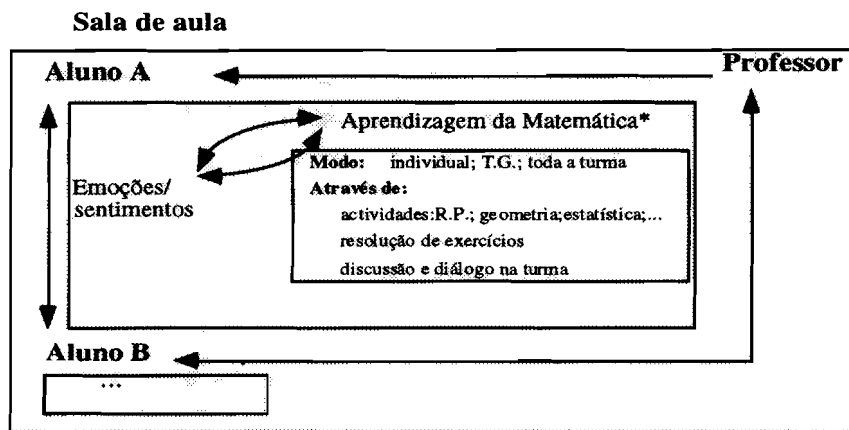
Segundo Dantzer não são experimentadas grandes dificuldades em reconhecer a emoção sentida por outra pessoa a partir de fotografias dos rostos das pessoas. Refere que há emoções mais facilmente reconhecíveis que outras, como por exemplo a alegria é identificável entre os 96% e 99% dos casos. Refere, ainda, que o medo é das emoções mais difíceis de identificar (as respostas correctas variam entre os 51% e os 78%) enquanto que a tristeza, a cólera, a surpresa e o desgosto são medianamente identificáveis. Acrescenta que o **nível de educação** não influencia de forma significativa a identificação das emoções e que as mulheres são, no geral, melhores que os homens. Que o reconhecimento é mais fácil a partir de fotografias de pessoas que sentiram verdadeiramente as emoções do que em fotografias de actores ou pessoas que representaram as emoções; afirma, ainda, que a expressão emocional é tanto mais clara quanto for sentida em mais alto grau.

Apesar do reconhecimento de uma emoção noutra pessoa se fazer em grande parte a partir da observação do seu rosto há, ainda, outros indicadores que nos permitem completar essa identificação tais como os índices vocais que jogam um papel determinante e, em menor grau, os parâmetros acústicos (tonalidade, gama de frequências, intensidade e tempo). Não é por acaso que, quando estamos ao telefone, conseguimos identificar com alguma precisão alguns estados emocionais do nosso interlocutor.

Outro factor determinante para a identificação das emoções sentidas por alguém é o contexto em que são sentidas: muitas vezes é difícil distinguir se uma pessoa, fora de contexto, chora de felicidade ou de tristeza.

Em síntese, poderíamos dizer que é possível reconhecer as emoções nas pessoas essencialmente através das expressões faciais; os índices vocais e os seus parâmetros acústicos jogam, relativamente, um papel mais secundário; o contexto em que a pessoa está inserida é outro elemento bastante determinante. Poderíamos ainda referir que a expressão emocional é tanto mais clara quanto for sentida em mais alto grau e, por isso, é possível que nem todas as emoções sentidas possam ser identificadas devido, possivelmente, à sua pouca intensidade. A sua identificação é,

regra geral, mais facilmente feita pelas mulheres e não depende do nível de educação de quem as está a fazer.



Ao reflectirmos sobre as nossas aulas facilmente recordamos "passagens" ricas em expressões emocionais que nos foram determinantes para gerir quer o funcionamento da sala de aula quer o nosso relacionamento por vezes difícil com alguns alunos. Não é, assim, despropositado, que invistamos na tarefa a que nos propomos: tentar compreender de que modo as emoções estão presentes na aprendizagem da Matemática no contexto da sala de aula.

Poderíamos perguntar, então:

O modo como percebemos e exprimimos as emoções é universal ou varia segundo a raça e os factores culturais?

A resposta a esta pergunta, segundo Dantzer, tem suscitado grandes controvérsias apaixonadas entre os antropólogos e os psicólogos. Há duas concepções que têm prevalecido durante muito tempo: uma acentuando as diferenças culturais e a outra acentuando o carácter inato das emoções e, por isso, universal. Dantzer afirma que na obra comemorativa do centenário de Darwin, Ekman apresenta de forma detalhada as posições defendidas por cada uma das concepções referidas e considera anedótico as observações que lhes servem de suporte afirmando haver uma grande confusão entre as modalidades de expressão das emoções e as regras socioculturais que modelam a expressão das emoções e conclui que está de acordo com o que foi postulado por Darwin, que a expressão

das emoções é universal e que as diferenças culturais interferem, sobretudo, sobre as regras de expressão das emoções. A atestar esta conclusão Dantzer, refere numerosos estudos que confirmaram estes resultados.

Como facto curioso é de referir que as possibilidades de expressão facial das emoções só estão verdadeiramente desenvolvidas nos primatas; estas possibilidades estão intimamente ligadas ao desenvolvimento da musculatura da face e, em particular, à capacidade de dissociar os movimentos dos lábios dos das narinas graças ao músculo que envolve os lábios. Será errado atribuir estas modificações evolutivas aos estrangimentos da expressão emocional; Dantzer refere, ainda, que o número de emoções diferentes que um indivíduo pode exprimir sobre o seu rosto varia de 6 a 9, mas mantém-se quando passamos do macaco, ao chimpanzé e ao homem. É também curioso que nas culturas ocidentais há mais de 1000 termos diferentes para designar as diferentes emoções, mas no uso da linguagem comum não se utilizam mais do que 10 termos para as referir.

3 — Factores de variação na expressão das emoções

Perante uma mesma situação duas pessoas diferentes têm expressões emocionais diferentes. Esta afirmação é óbvia e levanta uma questão bastante pertinente: se as expressões emocionais dependem da personalidade da pessoa que as possui, as características individuais são inatas ou, pelo contrário são adquiridas em resultado da educação? Responder a esta questão remete-nos para o estudo da influência dos factores genéticos(a natureza) e dos factores do meio ambiente(a cultura) no desenvolvimento das emoções. No entanto, Dantzer considera esta separação bastante artificial na medida em que os factores genéticos interagem de modo permanente com o meio ambiente em cada etapa do desenvolvimento.

Em trabalhos feitos em gémeos monozigóticos e dizigóticos estudando o determinismo genético das emoções sobre os traços da personalidade revelaram que, de um modo geral, os **factores genéticos** têm uma influência moderada mas constante. Assim o determinismo genético não é a único factor que influencia, o sexo e a idade também são factores determinantes. Os **factores de desenvolvimento** também influenciam as emoções e a respectiva intensidade uma vez que, por exemplo, os medos do recém-nascido não são os mesmos que os medos de um indivíduo formado e há emoções como a piedade e o orgulho que aparecem mais tardiamente. Há, ainda factores de experiência anterior que influenciam de modo profundo o comportamento posterior de uma pessoa. É consensual que o meio ambiente social pode afectar o comportamento, já é mais difícil de compreender porquê. O meio ambiente exerce três tipos de efeitos sobre o desenvolvimento: tem uma função de manutenção, uma facilitação das transições na manutenção e uma função indutiva sobre as possibilidades de aprendizagem em

geral e mais particularmente sobre a formação de estratégias sociais. Assim, por exemplo, a formação de tendências como a agressividade, a timidez, e a curiosidade dependem não do meio ambiente enquanto tal mas do modo como o indivíduo aprende a dialogar com ele. Ao longo do desenvolvimento, segundo Dantzer, o indivíduo constrói pouco a pouco uma personalidade onde os aspectos emocionais definem o temperamento. É fácil reconhecer a existência de temperamentos diferentes consoante as pessoas e isso desde a nascença; já é mais difícil de os medir de modo objectivo e de compreender o seu determinismo.

Em síntese, os factores de variação na expressão das emoções são de ordem genética mas de uma forma moderada mas constante enquanto podemos ainda encontrar factores de ordem do desenvolvimento, factores de experiência anterior assim como influências da personalidade e do temperamento nas emoções sentidas. Dizendo de outra forma, as emoções são inatas mas também têm muito de adquirido pela educação dependendo de factores socio-culturais. Até há bem pouco tempo tem-se sobrevalorizado os factores genéticos talvez até por ser mais fácil de isolar as variáveis a estudar. No entanto cada vez mais se assiste a estudos que têm em conta as influências culturais sobre a experiência consciente e sobre as situações emocionais vividas. Este tipo de influências é muito mais difícil de ser estudado uma vez que se tratam de fenómenos muito mais complexos e de difícil estudo.

III — Conclusão

Segundo Dantzer, o olhar de cada um de nós sobre o mundo que nos rodeia é marcado pelas nossas preferências e as nossas aversões; a intuição e a nossa predilecção guiam as nossas decisões em muito maior número do que a razão. Face a isto afirma que é importante compreender em que é que consistem as emoções e em como elas podem ser dominadas e orientadas.

Assume que a tarefa não é fácil uma vez que as emoções cobrem domínios tradicionais como a biologia e a psicologia; que a emoção é uma experiência consciente que é antes de mais pessoal; pode ser estimada pelos seus aspectos subjectivos, tal como são expressos pelo sujeito ou por manifestações objectivas somáticas (mímica, postura ou comportamento) ou viscerais (respostas fisiológicas, reacções hormonais) que podem ser medidas por um observador externo.

Cada um destes aspectos não é a emoção mas, na melhor das hipóteses um seu indicador; este indicador é de qualquer maneira imperfeito porque "enviesado" pelo meio sócio-cultural e pela personalidade do sujeito. De qualquer modo, as emoções não são substancialmente diferentes das outras operações mentais tais como, a percepção, a memória ou a formação de conceitos. Os processos que não são directamente observáveis podem ser, mesmo assim, estudados: se presentemente se compreendem melhor as operações mentais que o cérebro realiza é porque a

psicologia cognitiva reconheceu a realidade desses processos e em vez de se limitar aos seus aspectos subjectivos procurou traduzi-los em respostas observáveis de modo objectivo.

A nossa compreensão da experiência emocional beneficiou desta mudança radical de concepção. Apesar do conhecimento destes processos estar bastante desenvolvido há todo um mundo desconhecido que é preciso desbravar. Dantzer dá-nos conta da controvérsia que existe na actualidade a propósito da relação entre emoções e cognição sendo extremada pelas duas seguintes posições: "para uns a aparição de uma emoção está dependente de um avaliação cognitiva da situação provocadora; para outros, a informação aferente pode ser transformada directamente em emoção, sem mediação cognitiva: para escapar ao ataque de um predador, o animal não tem tempo de avaliar, de comparar e de se relembrar; ele deve agir rápida e instintivamente. Contudo pode-se argumentar que, mesmo neste caso, a identificação do perigo necessita do mínimo de comparação entre informação sensorial e uma representação interna do mundo envolvente, o que já é uma forma de cognição; para as reacções indispensáveis à sobrevivência do indivíduo e da espécie, pode-se pensar que esta operação toma lugar no seio de circuitos rígidos, pré-transmitidos de qualquer modo; a dependência face aos programas de base deveriam, contudo, diminuir à medida que aumenta a complexificação das relações com o meio envolvente, em particular nas suas componentes sociais; nas espécies mais evoluídas e no indivíduo adulto, a diversidade e a plasticidade das emoções resultam da influência crescente dos processos de aprendizagem e das capacidades de simbolização" (Dantzer, 1988, 114-115)

O trabalho realizado por Dantzer dá-nos uma panorâmica geral do que se fez no campo das Emoções até ao ano de 1988. Em termos de teorias comportamentalistas muito se fez e muito se conhece, mas, em simultâneo apareceu um vasto campo desconhecido até então; isto é, as respostas encontradas proporcionaram e levaram a outras tantas perguntas ainda sem resposta. Na década de 90 assiste-se à emergência duma perspectiva de, tratamento das emoções assente no princípio filosófico do monismo relativamente ao corpo-cérebro como constituintes de um único organismo em oposição ao dualismo de Descartes. Assim, as emoções são fruto de uma mente característica de um organismo e, como tal, que sofre influências determinantes do meio envolvente e, em particular das suas componentes sociais e culturais. Apesar de vários autores considerarem que há emoções universais, entre os quais Ekman, não podemos ignorar que os domínios da ciência social incluindo psicologia social, psicologia desenvolvimental, psicologia cultural, antropologia médica e psicopatologia apontam para a perspectiva de

emoção e cultura estão mútua e reciprocamente relacionadas. "A presente ênfase na cultura não parte do pressuposto de que os processos biológicos e fisiológicos não são importantes na emoção. Pelo contrário, a investigação geral nos aspectos biológicos, demonstrou, amplamente que estes processos são pivôs e cruciais nos processos emocionais. [O que é proposto por Kitayama, na obra "Emotion and Culture"] é que o desenvolvimento e organização dos processos emocionais e experiência, com todas as suas sustentações biológicas, é significativamente influenciada, sustentado ou modificado pelos sistemas de significados nos quais o eu, outros ou acontecimentos sociais ou objectos que são significantes. A extensão da influência cultural pode ser maior do que previamente foi assumido na psicologia. Esta visão de emoção a partir de uma perspectiva cultural salienta, ilumina aspectos da emoção que não têm sido captados pela corrente universalística, e principalmente biológica." (Kitayama, 1992, 2) Este autor afirma que a emoção pode ser conceptualizada de uma forma enriquecida como sendo social na natureza ou parafraseando Lutz(1988), afirma que a emoção é "tudo menos natural".

B — Os afectos e a Educação Matemática

Nesta secção apresentarei dois artigos da área da Educação Matemática que trabalham os aspectos afectivos:

1) Fennema, Elizabeth (1987) em "Um Estudo em Afecto e Matemática: Um Modelo Genérico Proposto para a Investigação" aborda os seguintes tópicos:

- Trabalho descritivo em afecto
- Metodologia tradicional
- Metodologia da Ciência Cognitiva e afecto
- Afecto e resultados educacionais
- O modelo do comportamento autónomo da aprendizagem
- Diferenças de género em Matemática
- O modelo
- Um modelo genérico
- Um modelo genérico para a investigação em afecto e produtos

2) McLeod, Douglas (1991) em "Reconceptualização da Investigação dos Afectos em Educação Matemática", aborda os seguintes tópicos:

- *Terminologia e conhecimento básico;
- *Teorias psicológicas e afecto;
- *Aproximação cognitiva à investigação em afecto;
- *Crenças, atitudes e emoções na aprendizagem da Matemática: reconceptualizando o domínio afectivo

*Conceitos do domínio afectivo relatados (confiança, auto-conceito, auto-eficácia, ansiedade matemática, atribuições causais, atribuições do esforço e da capacidade)

*Tópicos do domínio cognitivo relatados (autonomia, estética, intuição, metacognição, contexto social, tecnologia)

*Teorias e métodos para a investigação no domínio afectivo.

O texto 1) apresenta um modelo genérico para a investigação em afectos e resultados. É de referir que Fennema trabalha francamente no paradigma quantitativo e, por isso, faz referência a variáveis, estudos do tipo causa e efeito.

O texto 2) é uma revisão teórica dos trabalhos já feitos a nível americano no domínio dos afectos e em domínios correlacionados. McLeod, neste artigo, aponta para a utilidade da utilização do paradigma qualitativo na investigação no domínio afectivo apesar da maior parte dos artigos considerados na revisão de literatura fazerem uso de métodos quantitativos e de se compreenderem no paradigma quantitativo.

A leitura do livro "O erro de Descartes" de António Damásio apesar de não ser do domínio da Educação Matemática pode ajudar-nos a fundamentar a urgência e a pertinência de se focar a investigação sobre o papel das emoções no desenvolvimento da racionalidade de uma pessoa e de, conseqüentemente, ser um contributo muito importante na fundamentação da necessidade de investigação dos domínios afectivo e cognitivo de uma forma integrada:

"Não se pretende negar com isto que as emoções e os sentimentos podem provocar distúrbios destrutivos nos processos de raciocínio em determinadas circunstâncias. O bom senso tradicional ensinou-nos que isso acontece na realidade, e investigações recentes sobre o processo normal de raciocínio têm igualmente colocado em evidência a influência potencialmente prejudicial das emoções. É, por isso, ainda mais surpreendente e inédito que a ausência de emoções não seja menos incapacitadora nem menos susceptível de comprometer a racionalidade que nos torna distintamente humanos e nos permite decidir em conformidade com um sentido de futuro pessoal, convenção social e princípio moral.

Tão pouco se pretende afirmar que, quando as emoções têm uma acção positiva, tomam as decisões por nós ou que não somos seres racionais. Limite-me a sugerir que **certos aspectos do processo da emoção e do sentimento são indispensáveis para a racionalidade**. No que têm de melhor, os sentimentos encaminham-nos na direcção correcta, levam-nos para o lugar apropriado do espaço de tomada de decisão onde podemos tirar partido dos instrumentos da lógica. Somos confrontados com a incerteza quando temos de fazer um juízo moral, decidir o rumo de uma relação pessoal, escolher meios que impeçam a nossa

pobreza na velhice ou planejar a vida que se nos apresenta pela frente. As emoções e os sentimentos, juntamente com a oculta maquinaria fisiológica que lhes está subjacente, auxiliam-nos na assustadora tarefa de fazer previsões relativamente a um futuro incerto e planejar as nossas acções de acordo com essas previsões"(Damásio, 1995, p.14-15).

Relativamente a trabalhos académicos portugueses no domínio da Educação Matemática não conheço algum cujo foco sejam as emoções apesar de haver diversos trabalhos que estudam e se debruçam sobre crenças e atitudes que são consideradas por McLeod do domínio afectivo. É de salientar que em muitos trabalhos até agora saídos a lume no âmbito das atitudes no contexto da Educação Matemática incluem referências a sentimentos tais como ansiedade, confiança, frustração e satisfação para descrever respostas a tarefas matemáticas propostas.

1. O modelo genérico de investigação de Fennema

Fennema no seu artigo "The study of affect and mathematics: a proposed generic model for research" apresenta uma visão global acerca dos estudos do afecto e da Matemática. Começa por referir as metodologias utilizadas neste tipo de estudos: a metodologia tradicional e a metodologia da ciência cognitiva ligada ao afecto. Refere-se aos diversos estudos realizados e ao seu âmbito. Apresenta, ainda, o Modelo de Aprendizagem para o Comportamento de Autonomia (ALB) baseado, essencialmente, no incremento de actividades que proporcionem a autonomia dos jovens não esquecendo os factores que influenciam todo este processo:

- 1) o sistema de crenças internas donde se destacam
 - a) a confiança na sua capacidade de fazer Matemática;
 - b) a utilidade percebida da Matemática;
 - c) a atribuição causal.
- 2) factores externos e sociais
 - Sala de aula (influências na ...)
 - Professor (o que diz, o que faz;
as suas crenças e expectativas;
as actividades proporcionadas;
o modo como trata os alunos).
- 3) importância dos resultados da Educação Matemática.

De seguida fundamenta através de seis razões porque é importante o estudo da influência do afecto na educação matemática, a saber: primeira: a selecção de variáveis afectivas relevantes está baseada na teoria — o facto de que a variável confiança em aprender Matemática proporcionou resultados bastantes significativos não foi uma questão de sorte; segunda: a variável a ser estudada devia estar definida de uma forma clara e precisa em contraste com as primeiras

investigações em atitudes; terceira: a variável foi transposta e definida claramente com respeito à Matemática; quarta: a variável foi medida usando um método que atestava a sua validade e fidedignidade; quinta: os resultados de conteúdo foram especificados claramente em relação à Matemática; sexta: foi tido como hipótese que as variáveis definidas com clareza estavam relacionadas com os resultados através de certas variáveis mediadoras. Refere as tendências dos trabalhos nesta área, na actualidade e que demorou as duas últimas décadas para reunirem conhecimento acerca das cognições matemáticas dos alunos para perceber o modo como esse conhecimento podia ser aplicado nas decisões acerca do currículo de Matemática (Fennema, Carpenter e Peterson, 1986). Formula o desejo que não demore tanto tempo para se perceber o suficiente acerca dos afectos e dos processos mentais para se desenvolverem as necessárias implicações no currículo.

Síntese

Considera que há duas áreas na metodologia tradicional que podem orientar-nos: a primeira é decidir quais são as variáveis que se podem estudar; a segunda refere-se ao cuidado com o qual o trabalho é feito. De uma forma minuciosa propõe um conjunto de conselhos que um investigador deve tentar seguir se quiser fazer uma investigação nesta área: não havendo dúvidas de que um trabalho de investigação deve ser cuidadosamente planeado para que possa, posteriormente, ser transformado em conhecimento replicável; que se devem definir quais são as variáveis que se vão estudar em relação com a Matemática e medi-las cuidadosamente. Fennema alerta que o trabalho na área cognitiva das crianças resultou em conhecimento importante por causa da modelação e hipóteses cuidadosas e espera que o trabalho no domínio afectivo resulte do mesmo modo. Considera, ainda, que as duas perspectivas teóricas que se podem complementar serão as abordagens diferencial e cognitiva. Apresenta ainda um conjunto de problemas inerentes a esta área tais como: se na nossa sociedade somos educados para ocultar muitas das nossas emoções, crenças e sentimentos, mesmo perante nós próprios, como identificar essas manifestações afectivas sem invadir a privacidade pessoal. Pergunta mesmo, se nós temos o direito, em termos éticos, de o fazer. Refere que o trabalho no domínio afectivo é essencial mas bastante difícil. No entanto, para Fennema, há o pressuposto que os afectos influenciam a aprendizagem matemática e que se deve continuar a investir na investigação no domínio afectivo até que muitos alunos aprendam Matemática e se sintam bem como alunos de Matemática.

Comentário: A abordagem que a Fennema faz é, caracteristicamente, na defesa e apologia da utilização dos métodos quantitativos numa abordagem positivista e, por isso, há uma grande preocupação na definição de variáveis e, a nível geral, pela validade e fidedignidade do estudo. Este tipo de estudos tiveram uma importância

determinante numa dada época e se há resultados de estudos no domínio afectivo devem-se ao uso do paradigma tradicional. Contudo há algumas lacunas que parece que não podem ser ultrapassadas com o uso do mesmo tipo de metodologias.

2. Reconceptualização da investigação dos afectos na Educação Matemática — McLeod

2.1. Justificação da pertinência do estudo do domínio afectivo na Educação Matemática

Para McLeod os aspectos afectivos jogam um papel central na aprendizagem e instruções matemáticas. Começa por lembrar que quando os professores falam acerca das suas turmas quase que se remetem a referir o entusiasmo ou hostilidade dos seus alunos relativamente à Matemática; comentários acerca de gostar ou detestar a Matemática são muito comuns nos relatórios das actividades lectivas. Embora o afecto seja um aspecto central dos estudantes e professores, McLeod afirma que a investigação dos afectos na educação matemática continua a ser periférica a este domínio. "Se a investigação na aprendizagem e na instrução serve para maximizar o seu impacto nos alunos e professores, os aspectos afectivos necessitam ocupar um lugar mais central nas mentes dos investigadores" (McLeod, 1991, 575) É de opinião que a investigação em educação matemática pode ser reforçada se os investigadores integrarem os aspectos afectivos nos estudos de cognição e instrução.

Os esforços actuais para a reforma do currículo da Matemática atribuíram uma importância especial ao papel do aspecto afectivo. O NCTM (National Council of Teachers of Mathematics reafirmou a centralidade dos aspectos afectivos na sua publicação recente das Normas (Standards) do curriculum e da avaliação (Comissão das Normas para a Matemática Escolar, 1989). Dois dos seus maiores objectivos neste documento ocupam-se com ajudar os alunos a compreender o valor da Matemática e com desenvolver a confiança dos alunos. Nesta Norma na disposição para a Matemática, são recomendadas a avaliação da confiança dos alunos, o seu interesse, a sua perseverança e curiosidade. De um modo análogo, no relatório do Conselho Nacional de Investigação (National Research Council, 1989) no futuro da educação matemática (*Everybody Counts*) põe bastante ênfase na necessidade da mudança das crenças e atitudes do público, em geral, em relação à Matemática. Afirma, ainda, que segundo esta perspectiva o progresso da educação matemática requererá mudanças nas respostas afectivas tanto das crianças como dos adultos (McLeod refere que as pessoas dos Estados Unidos assumem que aprender Matemática depende mais das capacidades do que do esforço; aceitam,

passivamente, o seu insucesso a Matemática; e tanto os adultos como as crianças proclamam, passiva e naturalmente, a sua ignorância a esta disciplina).

McLeod baseado em trabalhos de Dossey, Mullis, Lindquist e Chambers (1988) relativos ao que se passa nos Estados Unidos e em trabalhos de Foxman, Martini e Mitchell, 1982; McLean, 1982 em estudos relativos ao que se passa noutros países, afirma que, conforme os estudantes avançam em escolaridade menos confiantes são na sua relação com a Matemática. Considera, ainda que, apesar dos esforços para avaliar programas, promover a reforma e incrementar a Educação Matemática, estes esforços são feitos à base de questionários com o fim de obter consenso no que se refere às crenças e atitudes; contudo considera que ainda não foi encontrado uma estrutura teórica para avaliar os afectos que incluísse dados de uma escala mais específica e estudos qualitativos que permitissem outro tipo de abordagem às respostas afectivas dos alunos. Considera que é importante incrementar a **teoria no domínio afectivo** e o uso de **diversos métodos de investigação**.

2.2. Terminologia e teorias psicológicas

McLeod vai utilizar a nomenclatura que foi proposta por Simon (1982) para o domínio afectivo: afectos é o termo geral e os termos usados para referir subconjuntos mais específicos dos afectos serão as crenças (tradução da palavra "beliefs"), as atitudes e as emoções; vai fundamentar-se nos fundamentos teóricos para a investigação em afectos na teoria de Mandler (1984) que foi o primeiro psicólogo cognitivista a esforçar-se por aplicar as suas ideias à Educação Matemática e que ilustrou como é que os afectos podiam ser incorporados em estudos cognitivos do ensino e aprendizagem de Matemática e em que muitas das suas ideias são compatíveis com outros teóricos cognitivistas. Segundo Hart (1989b) e Simon (1982) a descrição de fenómenos do domínio afectivo não é uma tarefa fácil uma vez que os mesmos termos têm significados diferentes conforme são utilizados em psicologia ou em Educação Matemática e mesmo dentro do mesmo domínio científico usando a mesma terminologia pode não se estar a estudar o mesmo fenómeno. Esta situação ilustra bem a complexidade e a dificuldade de trabalhar de uma forma adequada no domínio afectivo. Apesar de haver várias revisões de literatura sobre o domínio afectivo na Educação Matemática elas focam, essencialmente, as atitudes relativas à Matemática mais do que tentar descrever e analisar todas as componentes do domínio afectivo. Refere, ainda que, que são marcados pelo paradigma tradicional na investigação educacional, com ênfase nos métodos quantitativos, nos testes de papel e lápis dentro de uma perspectiva positivista da psicologia behaviourista e/ou diferencial.

McLeod apresenta sumariamente as teorias psicológicas dominantes e a sua influência no estudo dos afectos: considera que o **behaviourismo** e a sua influência foi um importante factor para o facto do domínio afectivo ter sido negligenciado uma vez que de uma forma extrema consideravam as emoções construções imaginárias e tinham relutância em analisar os processos do domínio afectivo que utilizavam a introspecção e os relatórios verbais. Por outro lado o trabalho dos investigadores seria muito mais simples se as emoções fossem supérfluas como Norman (1981) referiu. Uma outra possível causa da lacuna do estudo do domínio afectivo na ciência cognitiva foi o desejo de evitar complexidade segundo Gardner (1985). Apresenta, de seguida, a influência da **psicologia diferencial e a psicologia social** como tendo dado bastante atenção à noção de aspectos afectivos especialmente ao estudo das atitudes. O trabalho dentro desta perspectiva dá ênfase às definições dos termos, é caracterizado pela preocupação com os aspectos de medição e pela sua confiança nos questionários e pelos métodos quantitativos. McLeod refere uma grande quantidade de trabalhos e autores dentro da ciência cognitiva e considera que quase tudo o que sabemos dentro do domínio afectivo se deve ao paradigma tradicional e apresenta a Fennema como grande defensora dos métodos e contribuições quantitativas; no entanto comenta que nada do paradigma tradicional da psicologia diferencial, rigorosamente aplicado, tenha produzido grande conhecimento acerca dos afectos na Educação Matemática. Contudo este conhecimento tem sido particularmente útil nas diferenças de participação na Matemática (Fennema, 1989; Fennema e Leder, 1990); no entanto noutros tópicos há resultados de investigação que são contraditórios e confusos. Apesar das limitações das teorias psicológicas McLeod chama à atenção de que é importante não esquecer o que se tem aprendido ao longo dos tempos, apesar de novas abordagens no estudos dos afectos promoverem o progresso da investigação e a utilização de novos paradigmas poderem liderar reconceptualizações facilitadoras. Por último, apresenta o paradigma alternativo dentro do trabalho da **psicologia desenvolvimental** e com a influência crescente da psicologia cognitiva do passado recente. Este novo paradigma de investigação nos afectos dentro da aprendizagem matemática pode ser caracterizado pela ênfase nos aspectos teóricos, o seu interesse pelos métodos qualitativos, o uso de entrevistas e protocolos em que se pensa em voz alta e a sua atenção nas crenças e emoções tanto como nas atitudes. Os autores que apresentam análises com estas características com algumas aplicações e extensões dentro da Educação Matemática são: Bassarear (1989), Goldin (1988) e McLeod e Adams (1989).

2.3. Síntese da teoria de Mandler

Segundo Mandler há, pelo menos, três grandes facetas da experiência afectiva dos estudantes em Matemática. A primeira é que os estudantes têm certas crenças acerca da Matemática e acerca deles próprios que jogam um papel importante no desenvolvimento das suas respostas afectivas às situações matemáticas (O papel da cultura que enforma estas crenças parece ser particularmente importante). Segundo, já que as interrupções e os bloqueios parecem ser inevitavelmente uma parte da aprendizagem da Matemática, os estudantes experienciarão tanto emoções positivas como negativas enquanto aprendem Matemática; essas emoções serão tanto mais notadas quanto as tarefas forem mais novas. Terceiro, os estudantes desenvolverão atitudes positivas ou negativas perante a Matemática (ou partes do curriculum matemático) conforme encontrarem repetidamente as mesmas ou situações matemáticas similares. Assim em primeiro lugar estão consideradas as crenças, em segundo as emoções e, por último, as atitudes como resultantes de uma certa habituação ou rotina.

Mandler tenta caracterizar, ainda que de uma forma sumária e breve, os três níveis de aspectos afectivos com que trabalha. Assim, as crenças são largamente cognitivas na sua origem e desenvolvem-se durante e por um longo período de tempo. As emoções, por outro lado, podem envolver pouca avaliação cognitiva, e podem aparecer e desaparecer rapidamente, tal como a frustração de resolver um problema difícil é seguida da alegria de ter encontrado a solução. Contudo, McLeod pensa que as crenças, atitudes e emoções representam níveis crescentes de envolvimento de intensidade e resposta afectiva e, ao mesmo tempo, níveis decrescentes de envolvimento cognitivo, aumentando a intensidade de resposta e diminuindo a estabilidade de níveis de resposta. Relativamente às crenças McLeod apresenta as seguintes categorias: crenças acerca da Matemática, acerca do eu, acerca do ensinar Matemática e acerca do contexto social; fala das atitudes e apresenta revisão de literatura nessa área; detém-se, ainda, nas emoções e constata que as reacções emocionais não têm sido consideradas na investigação dos afectos na Educação Matemática. Esta lacuna explica-se, segundo McLeod, devido ao facto da investigação dos aspectos afectivos andar muitas das vezes à procura de factores estáveis e que pudessem ser medidos por questionários. Isto é, a investigação preocupava-se mais com os produtos do que com os processos, e mais com as crenças e atitudes do que com as emoções.

2.4. Investigação da Educação Matemática em emoções

Contudo há um número de estudos que olharam para os processos envolvidos na aprendizagem da Matemática e esses estudos tiveram em conta, algumas vezes, as emoções. Assim temos o estudo mais antigo que foi feito por Bloom e Broder

(1950) acerca dos processos de resolução de problemas; o trabalho de Buxton (1981) que estudou o pânico gerado pela realização das tarefas matemáticas; Buxton interpretou os dados a partir da perspectiva de Skemp (1979) acerca do domínio afectivo e sugeriu um certo número de estratégias para alterar as crenças dos alunos com vista a reduzir a intensidade das respostas emocionais. Há, ainda, investigadores que investigaram factores que estão relacionados com a influência das emoções nos processos cognitivos em Matemática, tais como: Wagner, Rachlin e Jansen (1984) que fizeram um relatório dos estudantes de álgebra a resolverem problemas e referiram as suas emoções; Mason, Burton e Stacey (1982) que falaram acerca da satisfação da experiência do "Aha!" na resolução de problemas matemáticos; Lawer (1981) também documenta as respostas positivas que acompanha os momentos de *insight* quando uma criança se apercebe das relações entre duas ideias importantes. No entanto há outro conjunto de estudos que se focaram directamente sobre o papel das emoções na aprendizagem da Matemática: McLeod, Metzger e Craviotto (1989) apresentam um relatório das reacções emocionais dos peritos e dos que iniciam a resolução de problemas; Bassarear (1989) conduziu extensas entrevistas a dois alunos de um curso superior observando a interacção entre as suas crenças, emoções e atitudes com o nível de realização na sala de aula de Matemática. Este conjunto de dados destas entrevistas sugere o modo determinante que as respostas emocionais podem ter na aprendizagem matemática dos alunos.

Apesar dos comentários acerca das emoções aparecerem nos textos de investigação na educação matemática uma vez por outra, há estudos que contêm medições das mudanças fisiológicas que acompanham as emoções. Assim, Gentry e Underhill (1987) reuniram dados contendo medidas da ansiedade através da tensão nos músculos durante tarefas de papel e lápis; também Dew, Galassi e Galassi (1984) compararam medidas fisiológicas do batimento cardíaco e da condutividade da pele em tarefas de papel e lápis que levavam à ansiedade.

Em síntese, a investigação nas respostas emocionais à Matemática existe mas, segundo McLeod, nunca ocupou um papel proeminente na investigação do domínio afectivo em Matemática. O autor crê que isto se deve ao facto de não haver uma estrutura teórica na qual se interprete o papel das emoções na aprendizagem da Matemática. Apresenta de seguida alguns instrumentos teóricos que podem servir de suporte à criação dessa estrutura teórica: a teoria de Mandler (1984); o volume editado por Harré (1986) "The social construction of emotions" que apresenta uma abordagem construtivista dos aspectos afectivos e que constituirá um óptimo instrumento de trabalho para os investigadores que se situem fortemente numa linha e perspectiva construtivista; e o trabalho de Case e al. (1988) que integra o pensamento neopiagetiano acerca da cognição e apresenta

uma tentativa de explicar o desenvolvimento da emoção — será, possivelmente, um bom instrumento de trabalho para os investigadores que utilizem a perspectiva da psicologia desenvolvimental. Case e os seus colegas não aplicaram a sua abordagem ao campo da educação matemática.

McLeod conclui dizendo o conjunto de dados existentes vindos de diversas fontes e de diversas perspectivas teóricas sugerem que a cuidadosa observação dos alunos e as entrevistas detalhadas poderão ajudar os investigadores nas suas análises dos estados emocionais dos alunos em Matemática (McLeod, 1988).

2.5. Conceitos do domínio afectivo e alguns tópicos relacionados com o domínio cognitivo

McLeod afirma que dentro duma visão global acerca da teoria do domínio afectivo há alguns conceitos deste domínio que se podem considerar como mini-teorias tais como: a confiança que é considerada como uma crença acerca da competência em Matemática; o auto-conceito que pode ser considerado como uma generalização da confiança na aprendizagem da Matemática (Reyes, 1984); a auto-eficácia como sendo uma variação da noção de auto-conceito (Bandura, 1977); a ansiedade relativa à Matemática; as relações causais; os atributos de esforço e capacidade; a incapacidade induzida e aprendida; e motivação. Apresenta alguns tópicos característicos da investigação no domínio cognitivo tais como: autonomia, estética, intuição metacognição e contexto social afirmando que a sua posição neste artigo tal como na teoria de Mandler (1984) é que os domínios afectivo e cognitivo estão intimamente relacionados, isto é, as respostas afectivas não ocorrem na ausência de avaliações cognitivas, de acordo com a teoria.

De todos estes tópicos irei deter-me sobre o contexto social por me parecer fundamental na relação entre os factores afectivos e o ensino-aprendizagem da Matemática uma vez que as pessoas estão imersas num determinado contexto social.

a) Contexto social

A ênfase no papel dos factores contextuais vieram da antropologia onde os estudos da aprendizagem em ambientes fora da escola levaram a novos insights (Lave, 1988). A aplicabilidade destes insights dentro da escola torna-se, por vezes, pouco clara.

A análise do contexto social foi tanto do interesse dos psicólogos como dos antropólogos. Saxe (1990) estudou o desenvolvimento do pensamento matemático com a ênfase na interacção da cultura com a cognição; muitos destes exemplos foram trazidos de investigações de como as crianças brasileiras desenvolviam as suas capacidades matemáticas através do seu trabalho como vendedores. Outro trabalho de outra área é o de Magnusson (1981) que fez uma análise de situações características que são importantes para a psicologia, tais como: complexidade,

clareza, tarefas, regras, papéis, espaços físicos, outras pessoas, expectativas, tonalidades afectivas e emoções.

Outra abordagem do contexto social é a que é proporcionada pelo trabalho de Bishop (1988) na enculturação matemática. A sua análise da cultura matemática dá bastante ênfase às crenças e atitudes e defende a tese de que deve haver um currículo que induza, adequadamente, os alunos na cultura da nossa disciplina. Noutra trabalho que pretendia clarificar o papel do contexto social na aprendizagem, Newman e al. (1989) argumentaram que a mudança cognitiva é mais um processo social do que individual, sugerindo que os investigadores devem dar mais atenção ao contexto e às interações sociais dos alunos. Noutra perspectiva, Cocking e Mestre (1988) e Orr (1987) procuraram as influências culturais da aprendizagem matemática que causavam problemas particulares a alunos membros de grupos linguísticos minoritários (ou outros). Com o trabalho de Fennema (1989) sobre as diferenças de género na realização matemática em que os factores afectivos têm um papel importante, parece razoável tomar como hipótese que os factores afectivos são, particularmente, importantes nas diferenças de realização entre grupos provenientes de diferentes backgrounds culturais.

A investigação que foi feita nesta área indica o papel significante da família dos alunos nas suas crenças e atitudes relativamente à escola em geral e, em particular, à Matemática (Parsons, Adler e Kaczala, 1982; Stevenson e al., 1986; Stigler e Perry, 1988).

A presença da tecnologia na sala de aula é um dos aspectos do contexto social do ensino-aprendizagem. Kaput (1989) numa análise de simulação do impacto que os computadores podem ter no ensino da sala de aula, notou que os alunos que aprendem num ambiente em que haja computadores podem ter respostas afectivas muito diferentes daqueles alunos que não têm. Turkle (1984) apresentou uma análise interessante de como a visão do computador se desenvolve desde a criança até à idade em que o computador é um objecto para ser dominado e que pode reflectir a nossa identidade.

2.6. Teorias e métodos de investigação no domínio afectivo

A maior parte da investigação no domínio afectivo utilizou o paradigma tradicional da investigação quantitativa, e como Fennema (1989) referiu, esta abordagem produziu informação válida no domínio afectivo. Contudo, McLeod afirma que, nestes recentes anos, a investigação no domínio cognitivo fez um uso bem sucedido tanto de técnicas qualitativas como de técnicas quantitativas. Tal combinação de técnicas parece-lhe apropriado, a McLeod, para o domínio afectivo. Howe (1988) notou que muitos investigadores tinham um compromisso ideológico com um conjunto de métodos de investigação, partindo do pressuposto de que a

pureza do método é necessária para o desenvolvimento da teoria. Contudo, segundo Howe (1988), não há evidência convincente que os métodos qualitativos e quantitativos sejam incompatíveis. Dada a natureza da investigação no domínio afectivo parece a McLeod, que o uso de uma variedade de métodos de investigação tem possibilidades de contribuir bastante para o desenvolvimento do domínio em questão desde que os dados sejam interpretados de uma forma inteligente. Para McLeod apesar da abordagem tradicional de investigação ter contribuído para o conhecimento mais aprofundado de aspectos do domínio afectivo argumenta que o uso de dados qualitativos possibilitar-nos-iam completar a nossa compreensão acerca deles. As medidas das reacções emocionais à Matemática podem ser feitas quantitativamente (por exemplo, as medições do batimento cardíaco), mas parece-lhe muito mais natural que a investigação na sala de aula de Matemática de alguns aspectos se faça através do uso de técnicas qualitativas. Um estudo utilizou os gráficos onde se representavam as reacções emocionais durante um episódio de resolução de problemas, feitas pelos próprios alunos, tentando assinalar os "altos" e "baixos" que eles sentiram em diversas alturas; também lhes foi pedido que especificassem as razões para os sentimentos positivos e negativos (McLeod, Craviotto e Ortega, 1990). Outro método possível de ser utilizado é o registo em diário, feito pelos alunos, com regularidade, acerca da Matemática- pode permitir-nos a acesso a respostas afectivas (Adams, 1989). McLeod acrescenta que se a investigação em afectos nos vai ajudar a compreender o papel dos afecto no ensino-aprendizagem de Matemática, os estudos em afecto devem ser integrados com os estudos cognitivos.

Integrando afectos nos estudos cognitivos da aprendizagem matemática incrementaria a investigação tanto da cognição como dos afectos.

a) Integrando investigação dos afectos na aprendizagem

Os trabalhos de que se vão falar, em seguida, tentam integrar investigação em afectos e cognição usando tanto métodos quantitativos como qualitativos. Marshall (1989) apresentou um relatório sobre as reacções afectivas dos alunos do 6º grau a problemas de história. O propósito deste estudo era perceber como se desenvolviam os esquemas dos problemas de história. Na análise de Marshall estas respostas emocionais e atitudinais foram relacionadas com vários componentes dos esquemas envolvidos na resolução de problemas de história.

Lester e al. (1989) num trabalho com problemas de história, com alunos do 7º grau, trabalharam o papel da metacognição na resolução de problemas. Os dados deste estudo promoveram a visão de que o contexto social e as crenças nele geradas têm uma importante influência tanto nas respostas afectivas como nos actos metacognitivos.

Estes estudos da aprendizagem dos alunos indiciam que os afectos jogam um papel importante na realização matemática dos alunos (aprendizes). O estudo de Silver e Metzger (1989) ligando a investigação em afecto com cognição recolheu dados na realização de peritos através de entrevista a matemáticos que faziam investigações e da resolução de problemas com a técnica de falar em voz alta. Um resultado impressionante destes dados foi o papel importante que a estética joga na monitorização e avaliação da realização dos peritos. Os aspectos estéticos da experiência da resolução de problemas estão claramente relacionados com as respostas emocionais dos peritos, incluindo a sua satisfação do problema. Taylor (1990) investigou as atitudes dos matemáticos acerca da Matemática.

Uma variedade de estudos com uma orientação cognitiva incluíram factores afectivos como uma importante parte da sua investigação Assim, Peterson e Swing (1982) completaram uma série de estudos que incluíam entrevistas extensas com estudantes a quem era pedido que comentassem tanto os assuntos afectivos como cognitivos; Ginsburg e Allardice (1984) proporcionaram uma visão intrigante acerca do modo como as crenças e as emoções podem contribuir para as dificuldades de crianças pequenas que têm insucesso a Matemática. Estes e outros estudos sugerem que os métodos usuais de investigação em cognição podem ser adaptados para incluírem atenção de uma forma apropriada ao papel dos afectos na aprendizagem da Matemática.

b) Integrando investigação dos afectos no ensino

A investigação em professores e ensino em educação matemática raramente tem como foco os factores afectivos que são frequentemente visíveis na sala de aula. Neste item vai-se apresentar artigos que incluem afectos. Assim Cobb e al. (1989) reuniu um conjunto extenso de dados em como um professor do 2º grau lidava com as emoções na aprendizagem de Matemática. Os dados foram recolhidos através de uma observação cuidadosa ao longo de um ano lectivo. Sowder (1989) num estudo de estágio de professores que trabalhavam as capacidades de estimação investigou a tolerância dos professores face ao erro, a que é que atribuíam o sucesso ou o fracasso, e outras crenças acerca da Matemática e deles próprios. Através de consideráveis entrevistas com um só dos professores conseguiu criar um perfil das crenças que caracterizavam um bom e um mau estimador.

Grouws e Cramer (1989) observou 6 professores peritos em resolução de problemas e tentou identificar as características afectivas das salas de aula desses professores durante as aulas de resolução de problemas. As entrevistas com os professores ajudaram a indentificar as estratégias que levavam a um bom clima afectivo na sala de aula. Tittle (1987) investigou como é que as características afectivas dos alunos podem ser fornecidas aos professores, para assim trabalharem

as características afectivas dos alunos como as cognitivas. Brophy (1983) também escreveu acerca das estratégias para promoverem um clima motivacional nas salas de aula através de estratégias de encorajamento e entusiasmo na aprendizagem, reduzindo a ansiedade e induzindo a curiosidade. Thompson e Thompson (1989) discutiram como é que os alunos reagem aos esforços do professor de forma a providenciar o clima para a resolução de problemas matemáticos.

Estes estudos de professores e ensino fornecem uma informação útil acerca do modo como as crenças, emoções e atitudes têm um papel importante no ensino da Matemática. Também demonstram como os factores afectivos podem ser incorporados nos estudos cognitivos do ensino. Se os estudos dos afectos são isolados, não têm um impacto significativo nos investigadores que estão interessados de uma forma especial na cognição. Se a investigação nos afectos pode ser integrada nos estudos cognitivos do ensino e aprendizagem, o nosso conhecimento dos factores afectivos poderá ter um impacto muito maior na instrução.

2.7. Conclusão

McLeod termina o seu artigo fazendo uma síntese acerca de como os afectos se ligam à educação matemática dizendo que a investigação em afectos tem sido volumosa mas não particularmente poderosa na influência do campo da educação matemática. Diz que lhe parece que a investigação na instrução avança, na maior parte, dos casos, sem qualquer atenção particular aos aspectos afectivos. De um modo análogo, afirma que há pouca atenção à investigação nos afectos na maior parte dos esforços de desenvolvimento curricular, e à excepção das diferenças de género em Matemática, a investigação nos afectos tem pouco impacto no desenvolvimento curricular ou na formação de professores em Matemática. A maior dificuldade que McLeod identifica é a inexistência de fortes fundamentos teóricos. A inexistência de uma estrutura teórica em que a investigação nos afectos se possa fazer leva a que não se estabeleçam ligações com os fundamentos teóricos da investigação cognitiva existente da educação matemática. Assim a investigação nos afectos aparece para os investigadores interessados na cognição como uma manta de retalhos com determinados aspectos que não são relacionados entre si tais como: motivação, atitudes, e relações causais. Assim McLeod faz algumas recomendações no sentido de os investigadores em aspectos afectivos terem mais cuidado com a contribuição que esta pode ter com a estrutura teórica da investigação cognitiva. Faz uma recomendação semelhante aos investigadores interessados nos aspectos cognitivos. Propõe, assim, que os investigadores nos aspectos afectivos e nos aspectos cognitivos se aproximem e entendam que só têm a ganhar com a sua

articulação através da troca de experiências, resultados, instrumentos de trabalho e métodos de investigação.

McLeod vai mais longe e afirma que há questões de investigação em que a colaboração de investigadores com diferentes perspectivas é necessária. Apresenta como exemplo a situação apresentada por Schoenfeld (1985) das crenças serem zona de intersecção entre os aspectos afectivos e os aspectos cognitivos: uma vez que as crenças pertencem à zona de intersecção dos aspectos afectivos e cognitivos será muito mais enriquecedor serem trabalhadas de uma, forma articulada com a colaboração dos saberes e dos saberes fazer de investigadores mais interessados nas duas áreas.

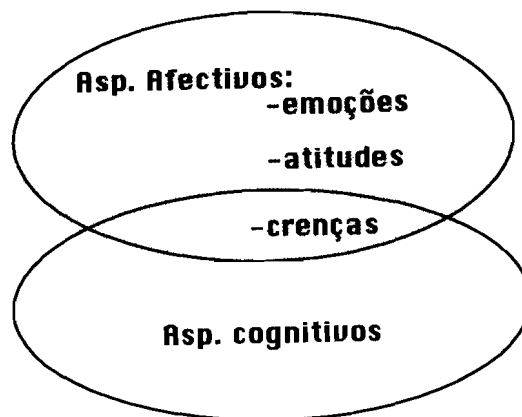


Fig. 3: As crenças pertencem à zona de intersecção

Argumenta que os domínios das atitudes e das emoções precisa de ser organizado e por isso precisam de ser analisados e clarificados no domínio da educação matemática. Apresenta como avanços teóricos fundamentais a teoria de Mandler (1984) e os trabalhos de Ortony e al. (1988) como proporcionadores de ajuda nestes esforços na determinação de **quando é que respostas emocionais podem ser a fonte de posteriores atitudes perante a Matemática.**

Apresenta como um tópico de importância especial a relação entre os aspectos afectivos e as capacidades de ordem superior uma vez que os esforços da corrente reforma curricular dão ênfase à resolução de problemas não rotineiros, à aplicação da Matemática a novas situações e à comunicação matemática. Refere que a novidade (tal como a dificuldade) dessas mudanças no currículo causarão respostas afectivas mais intensas para muitos alunos e professores. Argumenta que a investigação dessas respostas afectivas é determinante no sucesso do movimento da reforma. Apresenta como exemplo o movimento da Reforma da Matemática

moderna: os responsáveis esperavam que tanto os alunos como os professores respondessem entusiasticamente às abstrações matemáticas como os matemáticos fizeram; as pessoas que estão envolvidas no movimento da reforma precisam de saber quais são as implicações afectivas das mudanças para os alunos e professores, particularmente daqueles que se sentem fora da comunidade matemática.

Apresenta outra área de necessidade de investigação nos afectos: o uso da tecnologia na instrução matemática. Refere que o rápido desenvolvimento tecnológico no suporte da educação matemática levou a mudanças na organização da sala de aula e na definição das tarefas matemáticas. O advento das calculadoras gráficas e dos sistemas de manipulação simbólicos, por exemplo, pode, eventualmente, resultar em mudanças significativas na Matemática que ensinamos. Essas mudanças no currículo serão acompanhadas por mudanças nas crenças acerca da Matemática, e por oportunidades para mais experiências emocionais positivas na educação matemática. A investigação poderá orientar os nossos esforços para incrementar respostas afectivas positivas à Matemática através do uso criativo da tecnologia.

Por último McLeod fala dos métodos utilizados na investigação no domínio afectivo apelando para a necessidade de desenvolver uma grande variedade de métodos. Diz que o debate entre qualitativo versus quantitativo está no seu termo e que é tempo de se usar inteligentemente os múltiplos métodos de investigação que se adequam a cada problema proposto; que o uso de entrevistas clínicas e das observações minuciosas pode promover uma compreensão muito pobre acerca dos aspectos afectivos no ensino-aprendizagem da Matemática. Termina com a expectativa de que se os aspectos afectivos podem ser relacionados de muito perto com o estudo dos factores cognitivos, então o estudo do domínio afectivo deve receber mais atenção no desenvolvimento do currículo, na formação de professores e na investigação do ensino-aprendizagem da Matemática.

3 — *Conclusão*

Da revisão de literatura feita por McLeod há três ideias fundamentais em todo o seu trabalho:

- Os aspectos afectivos são de tal modo importantes na aprendizagem que é tempo de se investir profundamente no seu estudo por forma a percebermos as suas implicações e influências no processo da aprendizagem não de uma forma causal mas de uma forma holística e descritiva; contudo é chegado o tempo de fazer este estudo de uma forma integrada, isto é, é impossível continuar-se a estudar a cognição e os afectos de uma forma independente procurando os pontos de contacto: têm de ser estudados de uma forma integrada, em articulação e em

colaboração pelos investigadores que ora estão mais sensibilizados para os problemas da cognição ora para os problemas do domínio afectivo.

- Os métodos utilizados no estudo dos aspectos afectivos têm sido em grande parte oriundos do paradigma tradicional de investigação — paradigma quantitativo: foi uma contribuição muito grande e é quase a única existente; no entanto há muitos aspectos dos factores afectivos que estão por desbravar e há a convicção de que a utilização de métodos e metodologias diferentes no paradigma interpretativo pode permitir novas conceptualizações dos domínios afectivo e cognitivo mais próximas das situações concretas de aprendizagem.

- A reforma do curriculum de Matemática que tem sido feita sem a consideração dos aspectos afectivos quer nos seus pressupostos quer na avaliação da sua implementação, tem cada vez mais de ter em conta os factores afectivos da aprendizagem; por isso McLeod considera urgente que os aspectos afectivos sejam considerados nos pressupostos de uma reforma curricular e no processo da sua implementação.

McLeod, na sua revisão de literatura, explícita, por várias vezes, os aspectos estudados que têm ligação ao curriculum ou os aspectos que deveriam ser alvo de um estudo concreto dentro do curriculum.

Fennema também apela para a importância dos aspectos afectivos e dos processos mentais na determinação de uma reforma do curriculum e formula os votos de que não demore muito tempo à constatação da importância destes para se poder proceder às alterações adequadas no curriculum e a tomarem-se as decisões adequadas à situação.

Esta ligação dos aspectos afectivos às reformas curriculares e, a um currículo específico, parece-me ser um aspecto novo e que pode levar a mudanças substanciais no ensino-aprendizagem da Matemática.

De seguida partiremos para a reflexão das teorias de aprendizagem existentes, quais os seus proponentes, qual a sua filiação psicológica, quais os conceitos principais com que trabalha, quais os processos que salienta e quais as variáveis envolvidas

C — Aprendizagem e curriculum

1. Teorias da aprendizagem e a sua relação com os aspectos afectivos

Ao tentar perceber os referenciais em que se situam algumas teorias da aprendizagem encontrei três grandes correntes psicológicas (por exemplo Lopes, J. B., 1995), a saber: o behaviourismo, o cognitivismo e o humanismo.

O **behaviourismo** pressupõe que o aluno é uma caixa negra. O que interessa é conceber estímulos adequados para produzir uma determinada resposta. Para esta

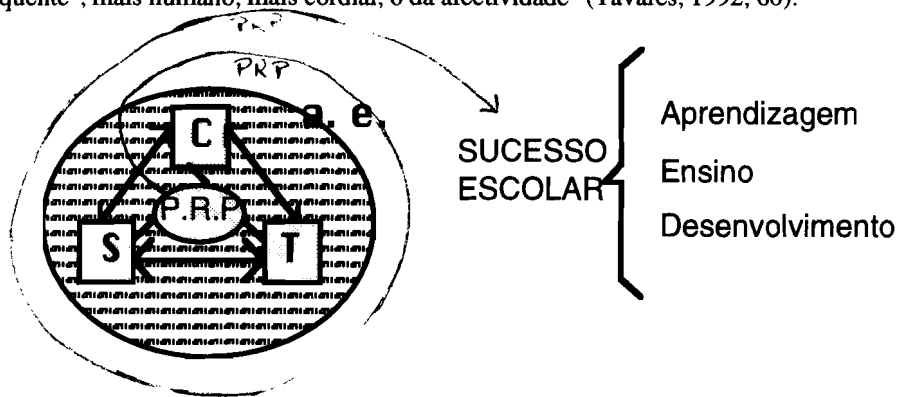
corrente é inacessível teorizar sobre o que se passa na caixa negra. Esta corrente teve muito êxito e foi dominante porque permitia uma visão e uma acção determinista, com efeitos práticos imediatamente visíveis.

O **cognitivismo** pressupõe que o aluno não é uma caixa negra; tenta iluminar a caixa negra, procurando descrever e/ou inferir os mecanismos da aprendizagem. Deu origem a modelos genéticos da aprendizagem. Nesta corrente cabem teorias como as de Piaget, Ausubel e o construtivismo que são "modalidades" do cognitivismo. No construtivismo o aluno constrói o seu conhecimento, não o adquire. No construtivismo social o aluno constrói o seu conhecimento em negociação permanente com os outros no grupo social em que está inserido ao fazer a aprendizagem.

O **humanismo** é uma corrente psicológica que procura realçar não apenas a natureza cognitiva do conhecimento mas, também, a componente afectiva e todas as outras, considerando o aluno como um todo.

Ao tentar perceber quais as teorias de aprendizagem e se elas tinham espaço para a inclusão dos aspectos afectivos recorri à sistematização de Lopes, J. B. (1995, no prelo). Consultando esta grelha (ver anexo) verifico que as duas teorias que explicitam a inclusão ou melhor a consideração dos aspectos afectivos na aprendizagem são a do Processamento da Informação da corrente psicológica cognitivista apenas no que se refere à ligação das emoções aos processos de memorização e a do Desenvolvimento Humano cujas fontes são a ciência cognitiva, a neurociência, a ecologia cognitiva, e a inteligência artificial. Neste referencial teórico fala-se em encorajamento em oposição a motivação e fala-se na envolvente afectivo-relacional e pertence à corrente psicológica humanista. Assim Tavares (1992, 57) afirma "Pode acontecer que os objectivos estejam bem definidos, os métodos, as estratégias e os processos correctos, as tarefas adequadas às capacidades e aptidões dos alunos, interessantes e motivadoras, úteis e actualizadas, contudo os alunos não aprendem nem se desenvolvem. Que fazer diante desta situação? Rotulá-los pura e simplesmente de *estúpidos*, *imbecis*, *cábulas* e outros nomes que para além de desaconselhados podem ser altamente lesivos e injustos? Descarregar as culpas sobre as famílias, os professores dos anos anteriores, o sistema escolar, o país e o próprio Estado? Não será esse, com certeza, o modo mais adequado de actuar. A experiência diz, aliás confirmada por múltiplas investigações levadas a cabo nessa direcção que, na grande maioria dos casos, o insucesso escolar parece não estar directamente ligado com situações de incapacidade dos sujeitos mas sim com os processos e a envolvente afectivo-relacional. Começa, de facto, a emergir o contexto do processo de ensino aprendizagem não só na sua dimensão psicopedagógica mas, sobretudo, na sua dimensão afectiva e social, como principal responsável pelo baixo rendimento escolar e eventualmente pelo próprio

insucesso." Nesta envolvente afectivo-relacional há um processo que Tavares designa de *encorajamento utilizado pelos professores*. Tavares defende que o encorajamento deveria ser definido como um processo de incutir coragem, força interior e confiança (reforçando a noção proposta por Martin (1980:1) de que "*Encouragement is the process of encouraging: of imparting courage or confidence. The encouragement process is not a way of inducing students to conform through the of praise or reward but a process of helping students to change their views of self, others and the world*") e que sejam quais forem as suas formas pressupõe "amor e firmeza, solidez e "fiabilidade". [...]A esta luz, o encorajamento não pode ser considerado apenas como um factor ou uma simples variável do processo de ensino-aprendizagem. Pelo contrário, ela revela-se cada vez mais como que a sua própria atmosfera. Por outras palavras, vista pelo seu lado mais "quente", mais humano, mais cordial, o da afectividade" (Tavares, 1992, 60).



Legenda:

- S- sujeito
- T- tarefas
- C- conhecimento
- P.R.P.-proc. res. de problemas
- atmosfera envolvente

Para Tavares o processo de ensino-aprendizagem é centrado num processo de resolução de problemas de uma forma muito lata e não referente a um conteúdo disciplinar específico e a atmosfera envolvente ou envolvente afectivo-relacional é o pano de fundo onde o ensino-aprendizagem se efectua. Esta teoria emergente tem a propriedade de considerar o aluno como um todo tentando integrar todas as suas facetas determinantes.

2. *Curriculum e a sua relação com os aspectos afectivos*

Da bibliografia que trata do currículo irei utilizar algumas referências de três documentos que a nível nacional me parecem marcos indicadores da evolução do desenvolvimento curricular: a publicação da APM "Renovação do currículo de Matemática" de 1988, os programas da reforma do ensino que foram generalizados neste ano lectivo de 1995/96 e a tese de doutoramento de Paulo Abrantes de 1994.

Em 1988 no Seminário de Vila Nova de Milfontes os seus participantes reflectiram e fizeram sair a lume um documento "Renovação do currículo de Matemática- documentos para discussão 1". Este documento foi uma referência de tal maneira importante para muitos professores a ponto de alguns a considerarem a "bíblia". Sem dúvida que é um marco no domínio da Educação Matemática em Portugal, no domínio específico do curriculum. Escrevia-se que:

"1. Cada vez mais se compreende melhor, e se exige mais, que, em educação em geral, e, no ensino de uma disciplina em particular, *currículo* tenha um significado amplo e seja encarado como um conjunto organizado de objectivos, orientações metodológicas, conteúdos e processos de avaliação.[...]

2. Um currículo, seja qual for, assenta e traduz um conjunto de premissas teóricas gerais que definem a sua filosofia. Estas premissas do currículo que aqui chamamos pressupostos, princípios e orientações, vão, de certo modo, determinar, por um lado a sua organização, e por outro o significado, conteúdo, e alcance das suas componentes (objectivos, metodologias, conteúdos avaliação)." (APM, 1988, 11)

Nas suas orientações e no ponto 15, dos objectivos curriculares, é referido no seu ponto b) que se devem "contemplar equilibradamente os vários domínios cognitivo, afectivo e social" (APM, 1988, 21)

Com a Reforma do ensino em Portugal iniciada em 1989 e atingindo a sua generalização em 1995/96 passam a ser considerados como objectivos gerais três grandes grupos de objectivos: Valores/Atitudes, Capacidades/Aptidões e Conhecimentos. Esta proposta que considera os Valores/Atitudes como um conjunto de objectivos gerais representa um grande avanço relativamente à proposta curricular anterior, pelo menos, no plano teórico! No entanto na implementação prática do currículo proposto os professores têm grande dificuldade de implementar, de facto, os grupos de objectivos Valores/Atitudes, Capacidades/Aptidões e, nestes, o primeiro é deveras o mais difícil. Não nos podemos esquecer que o peso de toda uma prática secular de incidência a avaliação do ensino-aprendizagem sobre, exclusivamente, o domínio cognitivo é muito forte e determina muito do que se passa na actualidade

Consultando a tese de doutoramento Abrantes (1994) em que se fala explicitamente das tendências curriculares em Matemática refere-se que no período

de 1950-1980 identificaram-se cinco tendências de desenvolvimento curricular em Matemática:

- a) perspectiva behaviourista;
- b) perspectiva da Matemática Moderna;
- c) perspectiva estruturalista;
- d) perspectiva formativa;
- e) perspectiva do ensino integrado.

É de salientar que já na perspectiva formativa são considerados com fundamentais as situações de ensino adequado em que os conteúdos devem ser determinados pelas estruturas de desenvolvimento da personalidade dos alunos (e não pelas das ciências) e o currículo deve proporcionar situações em que os alunos se envolvam com interesse de modo a que a sua actividade se traduza em aprendizagem. A perspectiva integradora parte dos mesmos pressupostos teóricos da perspectiva formativa valorizando em igualdade de circunstâncias os conteúdos e os métodos. Contudo, nestas tendências, encontramos com bastante incidência a valorização do domínio cognitivo mas a omissão do domínio afectivo. É de referir que o conhecimento do domínio afectivo na área da educação matemática a nível nacional é um terreno muito pouco trabalhado e reflectido. Concerteza não será por falta do interesse que suscita mas, talvez, pela complexidade dos processos envolvidos, pela ausência de um estrutura teórica que seja referencial que suporte os diferentes contributos que vão aparecendo e por ser, a nível internacional uma área pouco desbravada. No entanto Fennema explícita a urgência da integração dos aspectos afectivos quer nas propostas de renovação curricular quer mesmo na avaliação dos processos de implementação das reformas curriculares que se vão implementando. Também McLeod sente a necessidade de se investir na investigação dos aspectos afectivos no desenvolvimento curricular apresentando como um exemplo simples a presença do suporte tecnológico dentro da sala de aula como implicando mudanças na Matemática que se ensina e, conseqüentemente, mudanças no currículo não só em termos de orientações metodológicas, conteúdos mas também de objectivos e processos de avaliação. McLeod defende que estas mudanças levarão a mudanças nas crenças acerca da Matemática, e pode possibilitar oportunidades para experiências emocionais positivas na educação matemática.

3. Perspectivas futuras

Depois de tudo o que foi exposto parece-me urgente que se invista de uma forma organizada, sistemática, integrada e articulada na investigação dos aspectos afectivos da aprendizagem, não nas suas relações causais mas na sua importância como um processo que está omnipresente no processo de ensino-aprendizagem.

Será que podemos aprender na ausência de das emoções ou de estados emocionais? Se elas estão lá, na, durante e depois da aprendizagem porque é que teimamos em considerá-las como laterais, processos insignificantes ou mesmo inexistentes? Faz-me lembrar as simplificações que fazemos quando estamos a resolver um problema ou situação problemática. Mas, mesmo nestas situações, os matemáticos estão conscientes que essas simplificações são uma primeira abordagem e valem apenas por isso, indo de seguida, considerar os mesmos problemas sem as simplificações feitas para perceberem se de facto são ou não determinantes no problema que se estuda. Poderia ainda fazer uma outra comparação: no livro da Flatland o cubo é percebido de diferentes modos conforme atravessa o plano por um vértice, por uma aresta ou por uma face. Os seres da Flatland têm diferentes percepções do cubo mas nenhum deles tem acesso ao que é verdadeiramente um cubo uma vez que nenhum deles tem uma visão holística dele. Ou, ainda, aquela situação que é da nossa cultura: se um conjunto de cegos tentasse descrever um elefante tendo cada um percebido diferentes partes do elefante, a tromba, o rabo, o focinho, a barriga, etc., concerteza que todos eles tinham acesso a uma parte concreta do corpo do elefante, todos teriam a sua razão mas nenhum deles teria ficado com o acesso acerca do que realmente era um elefante. Utilizei estas comparações para defender o seguinte argumento: o ensino-aprendizagem tem sido estudado do ponto de vista cognitivo e este estudo é determinante no domínio da educação matemática. No entanto parece-me ser consensual que é importante integrar os aspectos cognitivos com os aspectos afectivos no estudo do ensino-aprendizagem por forma a proporcionarmos avanços na conceptualização do processo de ensino-aprendizagem por forma a tornarmos a Matemática acessível a todos de uma forma agradável. Esta tentativa pode constituir um passo em frente no acesso aos processos complexos da aprendizagem por forma a constituir dados determinantes para o desenvolvimento curricular. Sinto que os educadores matemáticos se podem comparar àquele conjunto de cegos que tentam perceber o que é um elefante: o que é, realmente, o processo de ensino-aprendizagem? Como o compreender de uma forma mais global? Como tornar o processo de ensino aprendizagem mais acessível a todos os nossos jovens por forma a tornarmos-los cidadãos críticos, activos e com capacidade de se adaptarem a esta sociedade em célere mudança?

Estas perguntas e este anseio de perceber um pouco mais deve mobilizar a comunidade de educadores não de uma forma isolada mas convergente para a construção de uma epistemologia que considere os factores afectivos como mais um aspecto determinante no processo do ensino-aprendizagem.

Os avanços de diversas áreas científicas (a neurociência, a psicologia cognitiva, a neurologia) cada vez mais induzem a que os diversos processos estão

intimamente ligados e relacionados quer a nível fisiológico, psicológico e mental. Sempre que incidimos o nosso estudo sobre uma sua parte temos de ter consciência que o fazemos de uma forma parcial devido às nossas limitações de seres humanos e não nos podemos esquecer que temos de integrar o nosso estudo parcelar num todo que foi espartilhado para estudo já que a **vida** que acontece não se faz por partes: **é um todo!**

Referências

- Abrantes, P. (1994). O trabalho de projecto e a relação dos alunos com a Matemática — a experiência do projecto **MAT₇₈₉**. Colecção Teses APM. Lisboa
- APM, (1988). Renovação do currículo de Matemática. APM. Lisboa
- Bogdan, R. e Biklen, S. (1994). Investigação qualitativa em educação- uma introdução à teoria e aos métodos. Porto Editora. Porto
- Damáσιο, A. (1994). O erro de Descartes — emoção, razão e cérebro humano. (2ª Ed.). Publicações Europa-América.
- Dantzer, R. (1988). Les émotions. Que sais je? PUF. Paris
- Crespo, E.(1986). A regional variation: emotions in Spain. The social construction of emotions. (pp. 209-217). New York
- Ekman, P. (1989). La mesure de la expression faciale. Les émotions le cerveau et les émotions: ce qu'on sait aujourd'hui. Science e Vie. Nº 168
- Fennema, E. (1987). The study of affect and mathematics: a proposed generic model for research. in D. B. McLeod e V. M. Adams (Eds.), Affect and mathematical problem solving -a new perspectiv.(pp.205-219. New York: Springler-Verlag.
- Gibbs, N. (1995). Razão e coração. Visão. Nº 133. Lisboa
- Lopes, I. e Matos, J. (1995). Aspectos afectivos da actividade matemática escolar dos alunos — projecto de investigação.
- Lopes, I. (1995). Influência das emoções e dos sentimentos na aprendizagem da Matemática escolar dos alunos — uma reflexão acerca da metodologia a adoptar. Trabalho para a disciplina de Investigação Educacional II do Curso de Mestrado em Educação da FCUL
- Lopes, J. B. (1995). Metodologia da Física. UTAD. Vila Real (no prelo)
- Kitayama, S. e Markus, H. (1994). Introduction to cultural psychology and emotion research. Emotion and Culture-empirical studies of mutual influence. American Psychology Association. Washinton, DC.
- Matos, J. e Santos, M. (1995). Matemática e Realidade- aprendizagem situada. Projecto MARE -FCUL
- McLeod, D. (1991). Research on affect in mathematics education: a reconceptualization.(pp.575-596)
- NCTM, (1991). Trad. da APM. Normas para o currículo e a avaliação em Matemática escolar. APM e IIE. Lisboa.

- Rossmann, G. e Marshall, C. (1995). *Designing qualitative research* (2ª Ed.), Sage Publications. London
- Tavares, J. (1992). *A aprendizagem como construção de conhecimento pela via de resolução de problemas e da reflexão*. CIDInE. Aveiro.
- Wierzbicka, A. (1993). *Emotion, Language, and cultural scripts. Emotion and culture- empirical studies of mutual influence*. EUA
-

Notas

- (a) Versão inicial da comunicação apresentada no V Encontro de Investigação em Educação Matemática, sob o tema "Aprendizagens em Matemática", realizado em Tróia, de 28 a 30 de Abril de 1996. O projecto em que este trabalho se insere está a ser desenvolvido com o apoio do Instituto de Inovação Educacional, dentro da Medida 2 do Sistema de Incentivos à Qualidade da Educação.

Ilda Lopes, Av. da Europa, 15, 5ºE, 5000 VILA REAL.

Anexo A

Neste documento anexo apresento o problema que me leva ao estudo dos aspectos afectivos como uma componente determinante no processo de ensino-aprendizagem:

1. Definir o problema

Este trabalho de investigação, por tudo o que já foi argumentado, tem como problema central estudar de que forma os aspectos afectivos e, em particular, as emoções influenciam a aprendizagem da Matemática dos alunos na sala de aula. Este problema será estudado tentando responder de um modo interpretativo às seguintes perguntas:

I-Como é que a racionalidade na aprendizagem da Matemática passa ou não por questões de ordem afectiva e, especialmente, por aspectos emocionais e/ou sentimentos ligados à Matemática e à sua aprendizagem?

II-De que modo é que os aspectos emocionais facilitam e/ou provocam obstáculos na aprendizagem da Matemática em situação de sala de aula?

Uma vez que as perguntas apresentadas são demasiado gerais, tentamos elaborar questões mais específicas e concretas. Apesar destas questões estarem elaboradas deste modo, elas constituem, apenas, uma catapulta que nos lança, de uma forma direccionada para a observação da realidade. A pergunta I é uma pergunta demasiado geral e pode ser a base de sustentação para a generalidade da investigação em termos da influência dos aspectos afectivos na aprendizagem da Matemática escolar dos alunos. A pergunta II apesar de ser, também, geral já nos orienta mais para o campo de investigação das emoções e sentimentos e a sua influência na aprendizagem da Matemática escolar dos alunos. Uma vez que o nosso problema de estudo é a influência das emoções na aprendizagem da Matemática e que optamos por um estudo qualitativo o objectivo é gerar questões dentro do próprio estudo. É que, sabe-se muito pouco acerca do tema, e estamos convencidos que conforme formos observando, iremos obter dados para podermos ir reformulando as questões e, naturalmente, formularmos outras mais pertinentes e adequadas à realidade da vivência de emoções geradas a partir da realização das tarefas propostas na sala de aula de Matemática. Assim, as perguntas mais específicas à pergunta II são as seguintes:

1- Que actividades e suas características e em que condições *despertam* e *mobilizam* os alunos na aprendizagem?

1.1.-Haverá aspectos específicos da aprendizagem de Matemática, na sala de aula, que promovam o envolvimento emocional positivo dos jovens? Quais são?

1.2. Que tipo de actividades mobilizam mais os alunos na aprendizagem da Matemática? Porquê?

Quais as circunstâncias que se reúnem para promover essa mobilização? Quais os sentimentos que lhe estão associados?

1.3. Qual o modo de trabalho na sala de aula (individual, em grupo, com toda a turma, etc.) que proporciona uma satisfação maior no jovem?

Que tipo de circunstâncias proporcionam essa satisfação e porquê?

1.4. Que tipo de emoções/sentimentos são despertados na realização das tarefas propostas?

E como são evidenciadas?

Como são reconhecidas?

2.-De que modo o professor mobiliza emocionalmente ou não o jovem/aluno para a aprendizagem? Que factos se podem salientar em toda a conduta na sala de aula? Que atitudes são mais significativas?

Como é que os alunos evidenciam as emoções/sentimentos?

Como são reconhecidos?

2.1 As mesmas atitudes provocam emoções/sentimentos iguais em alunos diferentes? o que é que é relevante nesta diferença?

2.2 De que modo o ambiente gerado, na sala de aula, proporciona um maior compromisso e um maior investimento por parte do jovem/aluno para ultrapassar as suas próprias dificuldades?

[As perguntas 1.2. e 2. são perguntas subsidiárias das questões da investigação do nosso estudo porque, concerteza que o aluno não está isolado na sala de aula, mantendo relações estreitas com o professor através das tarefas propostas para realização das actividades matemáticas na sala de aula.]

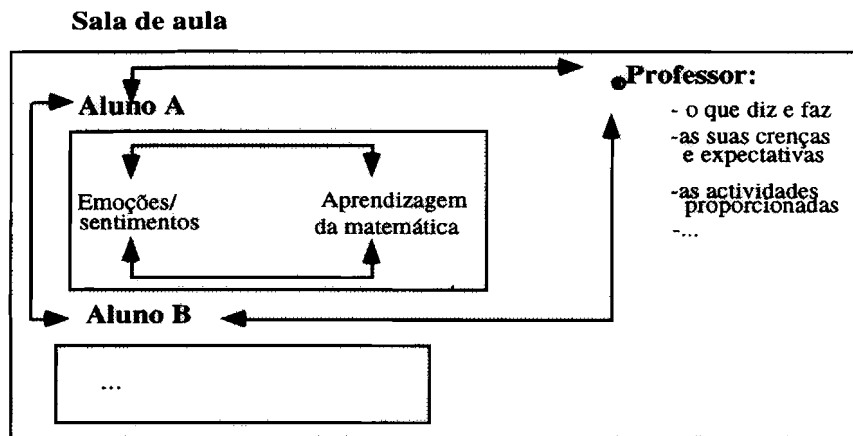
Respostas a estas questões poderão contribuir de forma relevante para a compreensão da teia de relações que promovem ou obstruem emocionalmente a racionalidade e a aprendizagem da Matemática na sala de aula. É considerável que muitas vezes a aprendizagem da Matemática fica comprometida pela dificuldade que o aluno/jovem tem em relacionar-se com o professor de Matemática. Ou pelo entusiasmo que lhe suscita o próprio entusiasmo do professor e as suas convicções da importância e o valor da Matemática na sociedade em que vivemos ou pela falta de convicção no que está a fazer ou pelo pouco gosto em trabalhar com jovens na sua educação/formação.

As considerações feitas anteriormente bem como a definição do problema e subproblemas justificam os seguintes objectivos para o projecto:

-Perceber de que modo os aspectos afectivos e, em particular, os aspectos emocionais ligados à disciplina de Matemática influenciam a aprendizagem da Matemática em situação de sala de aula;

-Descrever situações de sala de aula (actividades e suas condições de implementação, aspectos específicos da Matemática,...) na disciplina de Matemática que provocaram um envolvimento emocional positivo/negativo dos jovens.

-Estudar qual o papel do professor na promoção e estímulo da aprendizagem de Matemática dos jovens/alunos em situação de sala de aula.



Assim, este estudo poderá ter resultados significativos tanto no aspecto teórico como em termos práticos. No plano teórico, permitindo conhecer com mais rigor o modo como os aspectos afectivos e, em particular, as emoções/sentimentos promovem ou não a aprendizagem da Matemática. No plano prático, permitindo formular recomendações acerca da condução das aulas de Matemática de forma a que os alunos se envolvam emocionalmente e, assim, tenham uma aprendizagem mais efectiva da Matemática.

Anexo B. Grelha de teorias da aprendizagem. (Lopes, 1995)

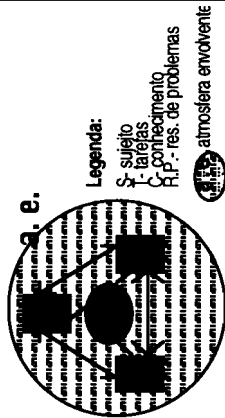
TEORIA	AUTOR	FILIAÇÃO	CONCEITOS	PROCESSOS	VARIÁVEIS
Aprendizagem social	Bandura	Fundamental/ behaviourista e com alguma influência cognitivista .	-Auto-estimulação -Modelação -Auto-regulação	-Há associação estímulo-resposta $C=f$ Legenda: P - personalidade A - ambiente C - comportamento C - comportamento resposta -Processos de atenção, retenção, reprodução motora e motivação.	-Evento a ser modelado -Determinante antecedente -Determinante consequente
Aprendizagem significativa	Ausubel	Fundamental/ cognitivista e com alguma influência behaviourista	-Aprendiz. significativa -Aprendizagem receptiva -Aprendiz. de conteúdos com sentido (lógico e psicológico) -Estrutura cognitiva -Subsunção (e subsunso-res)	-Reconciliação integrativa -Subsunção -Assimilação -Diferenciação progressiva -Consolidação Primeiro aprende-se a imagem representativa do conceito e só depois se aprende a fazer a sua representação verbal	-Conteúdos com sentido -Organizadores avançados -Reconciliação integrativa -Diferenciação progressiva -Significados
Aprendizagem por descoberta	Bruner	Fundamental/ cognitivista e com alguma influência behaviourista	-Representação do mundo (activo, iconico e simbólico) -Linguagens -Integração (transcende a evidência) -Invariância de quantidades	-Aprendizagem por descoberta -Rearranjar evidências para facilitar a descoberta -Resolução de problemas Sequência de aprendizagens Estrutura é o modo de apresentação nas diferentes linguagens	-Resolver problemas -Motivação heurística -Resolução de problemas -Relações entre o material aprendido -Aplicações a novas situações

TEORIA	AUTOR	FILIAÇÃO	CONCEITOS	PROCESSOS	VARIÁVEIS
Tipos de aprendizagem hierarquizada	Gagné	Fundamental/ behaviourista e c/ elementos de processo- informação	-Aprendizagem- mudança de comportamento não atribuível à maturação -Hierarquização da aprendizagem -Factores externos (contiguidade, repetição, reforço) Factores internos (informação, habilidades intelectuais, estratégias) -Contiguidade, repetição, reforço	-Fases do acto de aprendizagem -Tipos de aprendizagem correspondentes a cada fase -Uma aprendizagem de ordem superior só pode ter lugar depois das anteriores estarem efectuadas -Resolução de problemas (última fase)	-Informação verbal -Habilidade intelectual -Estratégias cognitivas -Atitude -Habilidades motoras
Condicionamento operante	Skinner	Behaviourista	-Estímulo -Reforço (Pos., neg. e punição) -Contingência de reforço -Controle aversivo -Arranjos dos reforços -Encadeamento -Modelagem -Enfraquecimento -Respostas: respondente e operantes -Condiciona. operatório	-Associação entre estímulo e resposta -Instrução programada (sequência correcta de materiais a serem aprendidos) -Minimizar o erro -Feedback (correção de respostas)	Estímulo -Reforço -Contingências de reforço -Instrução programada -Resposta respondente e operante

TEORIA	AUTOR	FILIAÇÃO	CONCEITOS	PROCESSOS	VARIÁVEIS
Processamento da informação	Vários	Cognitivista	<ul style="list-style-type: none"> - Codificação - Armazenamento - Recuperação - Registo sensorial - Memória a curto prazo - Memória a longo prazo - Declínio - Interferência - Engrena (locus físico da memória) 	<ul style="list-style-type: none"> - Memória a curto prazo (só pode reter 7 itens; dura até 1 minuto) - Memória a longo prazo (código imagético + verbal) - Formação de conceitos (identificação das características dos estímulos e sua posterior organização) - Ligação entre emoções e memória (sobre-aprendizagem; reduz a ansiedade) - Esquecimento - Organização do conhecimento - Diferenças individuais no processo de entrada na informação - Diferenças individuais no armazenamento da informação 	<ul style="list-style-type: none"> - Velocidade de pensamento - Processos atencionais - Codificação - Estratégias de ensino - Técnicas de agrupamento - Competências de recuperação
Construtivismo social	Vygotsky	Cognitivista e construtivista	<ul style="list-style-type: none"> - História interna dos conceitos - A palavra é uma generalização de tipo primitivo - O conceito precisa de funções intelectuais complexas - Conceitos espontâneos - Conceitos não espontâneos (científicos) (Diferem quanto à sua relação com a experiência da criança e quanto à atitude da criança para com os objectos) - Zona de desenvolvimento proximal (período sensível) 	<ul style="list-style-type: none"> - O ensino directo de conceitos é impossível - O conceito espontâneo é não consciente e a atenção está centrada no objecto ao qual o conceito se refere. - A escrita representa um avanço em relação à fala - A imitação não é uma actividade mecânica mas inteligente - Se as crianças forem capazes de fazer uma tarefa com ajuda, mais tarde podem fazê-la sem ajuda - A aprendizagem promove o desenvolvimento e vice-versa - O conceito científico desenvolve-se de forma descendente até ao nível elementar e concreto - O conceito espontâneo tem um movimento ascendente. - Um conceito quotidiano abre caminho para um conceito científico, cria uma série de estruturas necessárias para a evolução dos aspectos primitivos e elementares de um conceito - O conceito científico fornece estruturas para o desenvolvimento ascendente em relação à consciência e uso deliberado 	

TEORIA	AUTOR	FILIAÇÃO	CONCEITOS	PROCESSOS	VARIÁVEIS
Desenvolvimento cognitivo	Piaget	Cognitivista	-Tipos de aprendizagem: *o desenvolvimento da nossa inteligência resulta da nossa actuação sobre as coisas *a aquisição de respostas ou estruturas resulta da acção das coisas sobre nós -Inteligência, adaptação, equilíbrio, assimilação, acomodação, organização e função reguladora -Assimilação, acomodação e equilíbrio -Operações -Estádio -Retenção figurativa e operacional	-Resolução de problemas -Função, estrutura da inteligência -Estágios de desenvolvimento -A aprendizagem deve estar relacionada com o estádio de desenvolvimento -Equilíbrio -Estimulação do desenvolvimento cognitivo pela acção -Ensino crítico	-Equilíbrio -Estádio de desenvolvimento -Motivação interna -Reestruturação das estruturas

TEORIA	AUTOR	FILIAÇÃO	CONCEITOS	PROCESSOS	VARIÁVEIS
Desenvolvimento humano (Teoria emergente e ainda não estabelecida)	Sternberg J. Tavares Butler e outros	Humanismo c/ influências de: -Ciência cognitiva -Neurociência -Ecologia cognitiva -Inteligência artificial	Inteligência ↔ Sabedoria ↔ Criatividade -Estádios pós-formais -Sabedoria (julgamento, justiça, sagacidade, discernimento, busca de formação) -Criatividade (imaginativa, não convencional, estética, flexível) -Assimilação, acomodação e equilíbrio -Estrutura -Schèmes -Envolvente afectivo-re-lacional -Encorajamento -Níveis de perícia em domínios específicos -Reestruturação	-Resolver problemas (modo normal de funcionamento) -Formular problemas -Tomada de decisão -Metacognição (aprender a aprender, conhecer, pensar, reflectir, conhecer os mecanismos do próprio pensamento e seu controle) -Implicação no desenvolvimento de processos de ensino-aprendizagem apropriados -Rigorosa selecção da estrutura das tarefas e da sua sequência tendo em conta o desenvolvimento (cognitivo, afectivo, social, axiológico, linguístico) e os conhecimentos	-Estrutura e sequência de tarefas -Distância óptima entre o ponto de partida e o ponto de chegada -Clarificação da organização dos conteúdos (estruturaturação forte e débil) -Envolvente do ensino-aprendizagem -Encorajamento -Problemas com diferentes finalidades didácticas -Níveis de perícia em domínios específicos -Valores



COMUNICAÇÕES

Modelo de ensino não assumido: xeque-mate aos paradigmas de aprendizagem?

João David Vieira, Universidade de Aveiro

Esta comunicação insere-se no tema “Aprendizagens em Matemática”.

Que aprendizagens? Como se processam as aprendizagens?

Que ensino para as aprendizagens desejadas?

Há numerosa literatura e classificações para todo o gosto. Citarei, a título de exemplo, alguns trabalhos recentes.

• Rouche, no seu artigo “*Du savoir à l' élève ou de l' élève au savoir?*” [5] apresenta uma classificação devida a Treffers, A. e recorre ao conceito de *tipo ideal* introduzido por Max Weber (1951) no âmbito da Sociologia. Ilustra com exemplos o esquema *triex* de Stein, S. (1987) sobre as três fases essenciais, no seu entender, da actividade matemática, a saber, *exploração*, *extracção*, *explicação*.

• Em *Ensino das Ciências e Formação de Professores*, [6], no tema *Percurso de Mudança na Didáctica das Ciências. Sua fundamentação epistemológica*, são tratados vários paradigmas de aprendizagem (por transmissão, por descoberta, por resolução de problemas, ..., e por mudança conceptual — paradigma que se considera emergente) e faz-se a sua fundamentação epistemológica.

De raiz empirista-behaviorista, uns, cognitivo-constructivista, outros.

• Tavares, J., em *A aprendizagem como construção de conhecimento pela via da resolução de problemas e da reflexão* [4], apresenta vários estudos e projectos sobre o processo de ensino-aprendizagem, nomeadamente a influência da psicologia cognitiva no seu desenvolvimento recente.

Deixando de lado a redundância do termo “reflexão”, detenho-me nas expressões *construção de conhecimento* e *resolução de problemas*. Sobre esta última expressão, em *O Erro de Descartes* [1] lê-se: “A resolução de um problema de Matemática (entre outros) envolve, em geral, várias *opções de resposta*. (...) Para chegar a uma *selecção da resposta final* é preciso recorrer ao raciocínio e isso implica ter em mente uma grande quantidade de factos e de resultados correspondentes a acções hipotéticas e confrontá-los com os objectivos intermédios e finais, requerendo todos eles um *método*, uma espécie de *plano de jogo* escolhido entre os diversos planos que ensaiámos no passado em inúmeras ocasiões. A finalidade do raciocínio é *decidir* e a decisão consiste em *escolher uma*

opção de resposta. (...) As estratégias de raciocínio envolvem objectivos, opções de acção, previsões de resultados e planos para a implementação de objectivos em diversas escalas de tempo.”

O *conhecimento*, devido ao “design“ do cérebro depende de vários sistemas localizados em regiões separadas. Por isso o cérebro tem acesso e retém o conhecimento “não de uma forma integrada, mas de uma forma espacialmente distribuída“ pelo que as *decisões* requerem ainda a *atenção* e a *memória de trabalho*.¹

O tipo de raciocínio matemático releva predominantemente da razão teórica, mas nos *processos de aprendizagem* estão igualmente envolvidas a *intuição*, a *racionalidade do senso comum* e a *emoção* (todos nós sabemos como a relação professor-aluno, por exemplo, pode ser inibidora ou potenciadora de um bom desempenho, por parte do aluno, a nível de raciocínio e de decisão). É bem conhecido, para quem ensina Matemática, o peso do sentido usual de alguns conceitos (por exemplo, *limite* como algo de inatingível ou que não pode ser ultrapassado), bem como de conhecimentos adquiridos anteriormente e mal digeridos (por exemplo, multiplicar aumenta sempre o resultado, donde o erro frequente “ o quadrado de x é maior do que x ” sem cuidar de saber qual o domínio de x).

Ora este complexo processo da formação do conhecimento e das actividades de *raciocínio* e *decisão* tem que ser tomado em conta no ainda mais complexo processo de ensino-aprendizagem.

É provável que os novos dados da neuro-biologia obriguem a alterar alguns dos esquemas até agora em vigor, mas penso que, no essencial, a alteração não será muito profunda para quem já tinha em consideração a interacção das componentes de ordem perceptiva, afectiva, social e cognitiva.

Passarei agora a referir algumas experiências que fiz (uma delas ainda está em curso).

1. Sem referência específica a este ou àquele paradigma, guiando-me por um padrão de exigência, tentando sempre construir um ambiente de grande lealdade e abertura entre os principais actores do processo — professor e alunos —, procurei que o aluno tivesse um papel activo na aquisição dos seus próprios conhecimentos. Assim, desde 1966 eliminei as aulas práticas tradicionais (resolução de exercícios e/ou problemas), onde os alunos, na sua maioria, actuavam como meros copistas, para as transformar em laboratórios, oficinas, onde a interacção teoria-prática era fundamental. Exigia-se que os alunos soubessem utilizar minimamente os instrumentos de trabalho (noções desenvolvidas nas aulas teóricas, notas de curso, livros e documentos de trabalho previamente distribuídos). Ora esta exigência não

era satisfeita por grande número de alunos o que determinava um razoável insucesso (o termo “insucesso” traduz apenas que o número de reprovações era grande; ora numa população adulta, informada e conhecendo as regras do jogo, este número é apenas um parâmetro para a medição do sucesso, não permitindo, só por si, pôr em causa o método utilizado). Só em 1975 e 1976 penso ter tido um real sucesso, mas nestes casos houve factores extrínsecos ao processo que para tal contribuíram e que levaram os alunos a aderir efectivamente ao método proposto.

Este tipo de trabalho poderá enquadrar-se num paradigma de aprendizagem por mudança e/ou aquisição conceptual. Só que, no método que utilizei tomando como modelo as aulas laboratoriais de Física e/ou de Química, o professor é bem mais do que um *facilitador de aprendizagens*. Tem que ter *competência*, grande *firmeza de orientação*, e permitir grande *liberdade de acção* no âmbito do contrato didáctico estabelecido (implícita ou explicitamente). O seu papel é estruturante, integrador de conhecimentos já adquiridos e institucionalizador de conhecimentos novos. Quando assumido, este tipo de trabalho devolve ao professor o seu papel de *mestre*².

Seja onde for que se centrem os métodos de ensino, o Professor é a pedra de toque de todo o sistema de ensino-aprendizagem.

2. Um “puzzle” ou como não se faz Matemática.

O ambiente é de Seminário e os estudantes são finalistas (5º ano) de licenciatura em Ensino de Matemática. O tema geral do Seminário é *Demonstração*. O trabalho proposto foi retirado de [3]. Manda-se construir um triângulo equilátero de lado dado e manda-se dividi-lo em quatro partes mediante o traçado, segundo certas regras, de três segmentos bem definidos. Recortados os quatro bocados (três quadriláteros e um triângulo) pretende-se que os alunos formem *figuras conhecidas* (rectângulos, quadrados, trapézios, etc.) com as quatro peças e justifiquem as respostas dadas.

Os treze alunos, em quatro grupos, tinham 30 minutos para a exploração do “puzzle” e produção de um relatório por grupo.

Ao fim de mais de uma hora todos os grupos afirmaram ter formado um quadrado e um dos grupos tinha ainda conseguido formar um trapézio. A identificação destas figuras era feita por simples afirmação expressa no relatório. Questionados sobre as razões que sustentavam tais afirmações as repostas obtidas foram: “vê-se” e/ou “medimos os lados com uma régua e são iguais” (caso do quadrado (!?) ... que afinal não era um quadrado).

O trabalho desenvolvido não saíu do estágio perceptivo, tendo sido utilizados apenas modelos de tipo intuitivo — *não se fez Matemática*³.

Ora uma boa exploração da proposta de trabalho poderia envolver conteúdos dos programas de Geometria dos 7º, 8º e 9º anos de escolaridade, a saber: construção de figuras geométricas, mediatriz, bissetriz, perpendicularidade, paralelismo, semelhança de triângulos, alguns resultados relativos a triângulos rectângulos incluindo o teorema de Pitágoras, ângulos determinados por uma secante em duas paralelas e teorema de Thales. O trabalho permitia ainda a formulação de conjecturas, exigia que se fizessem demonstrações (para confirmar ou infirmar as conjecturas) e se produzissem enunciados de teoremas.

Após discussão e várias semanas todos os grupos apresentaram trabalhos com 10 a 20 páginas de demonstrações.

3. Saber ler: uma experiência em desenvolvimento.

Esta experiência desenvolve-se no âmbito de um Seminário anual do 4º ano da licenciatura em Ensino de Matemática .

Os conceitos propostos como objectos de estudo foram *limite e continuidade*. Todos os alunos (89) tinham já frequentado (pelo menos) a disciplina de Topologia no ano anterior. Foram impostos dois textos-base: *Topologie Générale*, N. Bourbaki (cap. 1e2) e *Introdução à Análise Funcional*, A. Machado (primeiras 60 páginas). Foram exigidos apenas dois conceitos novos : o de *filtro* e o de *sucessão generalizada*.

Pretende-se que os alunos adquiram a capacidade de *ler e interpretar* textos de Matemática relativamente exigentes. É dada especial atenção às definições e teoremas simples, nomeadamente caracterizações de conceitos.

Cada aluno deve elaborar uma pequena monografia (20 pg.) sobre um dos dois grandes temas propostos.

Atendendo aos objectivos fixados a monografia só será discutida caso os alunos obtenham uma classificação mínima de 10 valores num teste escrito que constará apenas de questões relativas à compreensão dos conceitos básicos da matéria em questão.

Os alunos contam com a orientação e a disponibilidade total do professor.

A experiência parece encaminhar-se para um desastre.⁴

Em todas as situações tenho pretendido desenvolver a capacidade crítica e o espírito de autonomia dos alunos, mas os resultados têm sido decepcionantes.

4. A experiência dos Estágios.

Durante quatro anos fui coodenador dos estágios de Matemática e, cumulativamente, orientador científico de um dos núcleos.

De um modo geral assisti a aulas acríticas, sem estratégias bem definidas, cujo modelo era expor de modo *seguidista* o que vinha no manual adoptado. Apenas alguns exemplos:

. Em “Limites de uma função real de variável real” o livro adoptado começa com a introdução, sem qualquer explicação, do conceito de ponto de acumulação de um conjunto? Pois bem, é assim que se começa a aula. E às perguntas “o que é isso?” , “para que serve?” seguia-se a resposta : “é preciso para definir limite” .

. No livro adoptado “ $2x$ ” é classificado como *monómio e não polinómio*? É assim que tal é exposto (e onde param os conhecimentos sobre o anel de polinómios?).

A esta prática de ensino, que não é, de modo nenhum, utilizada apenas por jovens estagiários inexperientes, onde são dominantes o “seguidismo” do texto do livro e o acriticismo, tudo acompanhado com muitos exercícios, propostos sem estratégia e resolvidos sem discussão, chamo eu o *expositivismo*. Trata-se de um verdadeiro modelo de ensino, não assumido. Este modelo não é do estilo *magister dixit* nem segue os modelos ditos de *transmissão*, onde o conhecimento é suposto fluir do (saber do) professor para o (saber do) aluno.

No *expositivismo* o saber está no manual (bom ou mau).

O paradigma cognitivo-constructivista de aprendizagem por mudança conceptual é considerado um paradigma emergente [6].

Mas que mudanças conceptuais poderão ter lugar em tais circunstâncias? Como poderá florescer o paradigma de *avaliação emancipatória* [2] , que tem por base a construção do *eu competente* de Habermas, e pretende desenvolver a *autonomia crítica reflexiva* , num processo de permanente reflexão sobre a teoria e a prática?

No entanto é preciso que estes paradigmas se desenvolvam, se afirmem. É necessário e urgente desestruturar (desconstruir) este bloco anquilosante e extremamente pesado do desinteresse, da desmotivação, do “facilitismo”, do sucesso administrativo, da infantilização do ensino, reestruturando (reconstruindo) lentamente, mas com determinação, uma mentalidade-outra, onde a exigência seja um valor e onde a irreverência e o lúdico convivam com a aprendizagem de hábitos de trabalho e com a valorização do esforço.

Criem-se e institucionalizem-se os laboratórios de Matemática. Formem-se professores exigentes. Captemos bons alunos para os cursos de ensino.

É óbvia a necessidade de uma tomada de consciência da situação actual e a urgência do desenvolvimento de estratégias de acção que nela provoquem um corte radical. Esta referência à necessidade de tomada de consciência seguida de acção, faz-me lembrar um grande pedagogo, Paulo Freire, e o seu princípio de

conscientização. Com ele aprendi, no início dos anos 70, a fazer do processo de ensino-aprendizagem, seja qual for a especificidade das matérias envolvidas, um processo exigente que desenvolva nos seus agentes capacidades que os tornem seres cada vez mais livres.

Referências

- [1] Damásio, A., *O erro de Descartes*, 13ª ed., 1995
- [2] Medeiros, M. F., *Paradigma de avaliação emancipatória e acção supervisor-cidadania e espaço público*, Educação, nº 29, 1995, Porto Alegre, Brasil
- [3] Picard, Mireille, *Initiation à la démonstration ...*, Bul. APMEP, nº , 1995
- [4] Tavares, J. , CIDINE, 1992
- [5] Bul. APMEP, nº 397, 1995.
- [6] Ensino das Ciências e Formação de Professores, nº 1, Proj. MUTARE, U.Aveiro. Coordenação de F. Cachapuz, 1992.
- [7] Vieira, J. D., *Didáctica da Matemática: Um Caminho para o Sucesso?*, Actas do 2º Encontro Nacional de Didácticas e Metodologias de Ensino, Universidade de Aveiro, 1991.

Notas

- ¹ O destaque em itálico não consta do texto original.
- ² Não confundir com o título atribuído a um possuidor de um mestrado.
- ³ O mesmo problema posto a 25 professores de várias escolas do País mereceu um tratamento semelhante por parte da maioria dos grupos.
- ⁴ No momento em que revejo estas notas posso já afirmar que esta previsão se confirmou.

João David Vieira, Dep. de Matemática da Universidade de Aveiro, Campo Universitário de Santiago, 3800 AVEIRO.

Capacidade de interligação da álgebra à geometria com ajuda da calculadora (gráfica)

J. Orlando Freitas, Universidade da Madeira

*A Geometria grega pode ser comparada a um elemento manual,
a Álgebra árabe a uma produção automática, a uma máquina
Luci L. Radice*

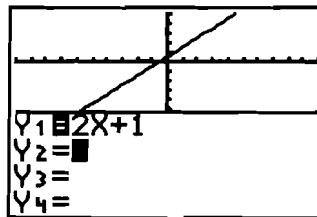
Já é do nosso conhecimento que a geometria analítica é “a geometria que usa sistemas de coordenadas e métodos algébricos na representação de pontos, rectas e curvas”. A geometria analítica parece consistir na associação de três factores: a expressão de uma realidade geométrica por uma relação entre quantidades variáveis, o uso das coordenadas e o princípio da representação gráfica. Ora, se cada um destes factores surge muito cedo no desenvolvimento da geometria anterior a Descartes, eles não tinham sido no entanto encadeados.

A ideia de caracterizar um ponto do plano por meio das suas coordenadas surge na Grécia antiga. Apolónio (séc. III a.C.) caracterizou as secções cónicas através das suas coordenadas, sem as designar por esse nome e sem lhes atribuir valores numéricos. Também na mais alta antiguidade, a observação astronómica conduziu a referenciar as direcções no espaço por duas coordenadas angulares: altura acima do horizonte e afastamento em relação ao meridiano. Contudo, a interpretação das relações entre essas coordenadas, ou seja, a geometria analítica, só aparece muitos séculos depois.

Um diagrama cartesiano é uma coisa que se vê agora todos os dias, que todos compreendem, ainda que não saibam que aquelas figurinhas se chamam assim: diagramas cartesianos. Quando jogamos à “batalha naval”, para nos referirmos a um lugar temos uma letra e um número, ou seja, duas coordenadas. Quando analisamos um mapa do mundo ou mesmo uma planta de Tróia ou do Funchal, utilizamos duas coordenadas para indicar o destino desejado. Para os aviões em pleno voo é preciso mais um número para dar a sua altitude. E se quisermos, usamos uma quarta coordenada para o tempo.

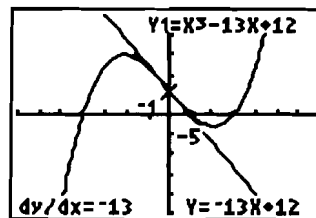
Descartes construiu, ou melhor, finalizou a construção da ponte que une a geometria à álgebra. Não é de estranhar o facto dos alunos apresentarem grande dificuldade em percorrer esta *ponte*, visto ter sido preciso vários séculos (quase vinte) para que os génios matemáticos a construíssem.

A calculadora gráfica (CG) é um instrumento que ajuda os alunos na ligação álgebra-geometria. A primeira vez que se fala aos alunos: “Seja a recta (cartesiana) $y=2x+1$ ”, eles ficam espantados. Mas se, antes de fazermos tal afirmação, mandarmos os alunos executarem o gráfico correspondente à função dada analiticamente por $y=2x+1$ (ver figura em baixo), os alunos rapidamente percebem por que é que se chama recta à expressão $y=2x+1$ e algumas depois também já começam a chamar recta a tal expressão.



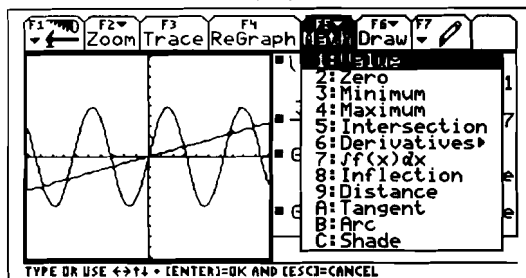
Muitos são os problemas em que se manda calcular a derivada de uma função num dado ponto e depois pede-se a equação da recta tangente ao gráfico nesse mesmo ponto; isto tudo, na maioria das vezes, sem apoio ao esboço gráfico. Com a CG pode-se em primeiro lugar visualizar graficamente o que se pede para depois fazê-lo analiticamente. Em diálogo com a colega Teresa Fontes, do Núcleo Regional da Madeira da APM — que conjuntamente temos dinamizado o uso de CG nas aulas e na formação de professores — afirmou fortemente (quando abordávamos este último exemplo da tangente a um ponto do gráfico): “Só o impacte visual...” Acho que esta pequena afirmação diz muito... A seguir é exemplificado na CG TI-82 para $f: x \rightarrow x^3 - 13x + 12$.

Exemplo na TI-82.

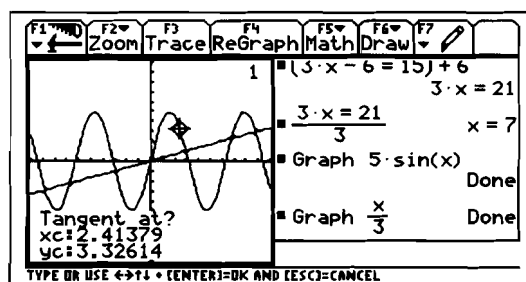


O exemplo seguinte, é na nova TI-92, a recta tangente a um ponto do gráfico de $y=5\sin x$.

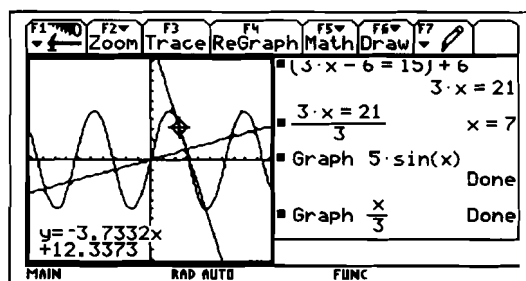
(F5):MATH



(A):TANGENT



Observe a questão apresentada por cima das coordenadas do cursor. Precisamos de especificar o ponto onde queremos desenhar a tangente. (ENTER)



A adesão dos professores de Matemática ao uso de CG tem sido muito lenta. O Funchal não é excepção, pois prova disso é o número de inscrições de professores às Sessões Práticas dinamizadas pelo Núcleo da Madeira da APM. Quanto aos alunos a situação é diferente. Com a experiência que tenho, acho que se o professor apostar forte no uso deste instrumento, o número de alunos que adere à CG é significativo. Nos dois anos transactos tive em média 2 CG por turma.

Este ano estou a apostar forte em 2 turmas de 11º ano e tenho em média 20% de alunos por turma com CG e de vez em quando sempre aparece um novo aluno que adere. De notar que numa turma a adesão foi muito maior e as notas do primeiro período nessa mesma turma foram muito melhores. Por isso a desculpa de muitos professores e alunos de que “pelo facto de não ser permitido CG nos Exames/Provas não vale a pena” é uma autêntica farsa. Os testes que usei nas duas turmas foram iguais, e na turma que aderiu menos não houve ninguém que se destacasse, ao contrário da outra. De notar que o teste foi elaborado de tal forma que quem tivesse CG não tirasse grande partido. O maior sucesso de adesão a CG este ano, é numa turma de 9º ano da estagiária Júlia, na Escola Secundária Jaime Moniz (Funchal), na qual cerca de 50% (em aproximadamente 30 alunos) adquiriram a TI-80 da *Texas Instruments*. E quando numa aula a professora levou exemplares da TI-82 (do Núcleo Regional da APM) para os outros alunos (incluindo a do *ViewScreen*), grande parte dos que compraram a TI-80, depois de ver a maior capacidade da TI-82, acabaram por se arrepender da escolha.

A seguir são apresentados dois grandes handicaps da TI-82. Na primeira figura está a opção CALC da parte gráfica da TI-82 e à direita está a sucessão de Fibonacci, o que não é possível executar na TI-82.

MODE/CLIC	
1:	value
2:	root
3:	minimum
4:	maximum
5:	intersect
6:	dy/dx
7:	∫f(x)dx

n	Un	
1	1	
2	1	
3	2	
4	3	
5	5	
6	8	
7	13	
Un=13		

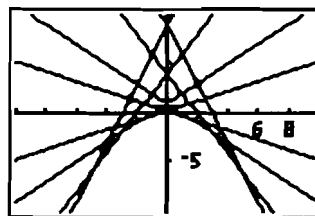
Os professores mais novos são os que aderem mais a este novo instrumento. Mas sempre aparece um com cabelos brancos interessado a aventurar-se. Tenho encontrado pessoas que mal aprendem alguma coisa sobre CG querem logo usá-la nas aulas, levando exemplares para os alunos. Costumo afirmar com letras maiúsculas: “É UMA AVENTURA USAR CALCULADORAS GRÁFICAS...”, principalmente quando se tem pouca experiência. É que, para pôr os alunos a trabalhar minimamente com CG leva o seu tempo e a preparação do professor é importante para tirar as dúvidas aos alunos, dúvidas estas muito distintas do método tradicional de ensino.

Mesmo sem fazer um teste estatístico como deve ser, vê-se que a motivação dos alunos aumenta e que o rendimento dos alunos mais fracos vai subindo gradualmente (este último aspecto, no início é mais difícil de ser detectado, mas com

o tempo vai sendo significativo). Actualmente, o uso de CG é algo novo para a maioria dos alunos e, só por isso, já ganhamos muito na motivação. O seu uso não é sinónimo de facilidade no ensino da Matemática, para além de motivar abre portas que antes ninguém pensava explorar na sala de aulas. O primeiro exemplo que pode ser aqui apresentado e que é bastante sugestivo é o “Teorema da Marion”, o qual é apresentado na capa da revista Educação \e/ Matemática, da APM nº 34 (2º semestre de 1995). Pode-se perguntar: Depois da conjectura, será preciso a demonstração? Eduardo Veloso, na sua comunicação no ProfMat 95, afirmou que não é preciso. Eu, pelo contrário afirmo que é preciso. Exemplo é o famoso Teorema de Pitágoras, o qual já era conjecturado há muitos séculos antes de Pitágoras, e era usado na “corda de 13 nós” pelos egípcios.

Uma das grandes vantagens da CG é que, por um lado, permite ao aluno investigar. Por exemplo, podemos mandar a turma investigar qual o efeito geométrico quando se varia o parâmetro b na família de funções definida analiticamente por $f(x)=2x+bx-1$. Aqui interliga-se bem a álgebra com a geometria, pois a uma variação de um número corresponde uma alteração no plano cartesiano. Por outro lado, pode-se ver determinados padrões geométricos que antes ninguém se atrevia a apresentá-los nas aulas. Como primeiro exemplo, vejamos a representação gráfica da família de rectas dadas por $y=mx+m^2$, em que sobressai uma parábola como exemplificado na figura seguinte.

$$\begin{array}{l} Y_1 \square -X/2 + (-1/2)^2 \\ Y_2 \square -1X + (-1)^2 \\ Y_3 \square -2X + (-2)^2 \\ Y_4 \square -3X + (-3)^2 \\ Y_5 \square X/2 + (1/2)^2 \\ Y_6 \square 1X + 1^2 \\ Y_7 \square 2X + 2^2 \\ Y_8 \square 3X + 3^2 \end{array}$$



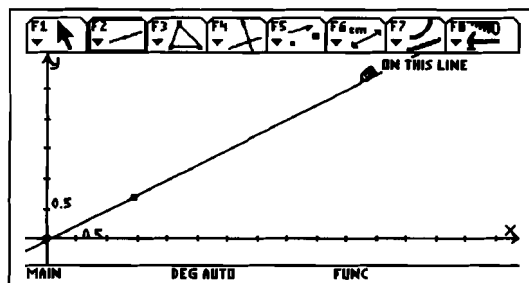
O segundo exemplo, foi-me apresentado pelo Professor Sousa Ramos, durante uma aula da disciplina Introdução à Computação, no meu 1º ano de Faculdade, que nos disse que com uma simples aplicação (neste momento não me lembro exactamente qual, mas apresento uma do mesmo género) $(x, y) \rightarrow (x^2 - y^2 + a, 2xy + b)$ e imprimirmos os pontos imagem num referencial cartesiano para determinados valores iniciais das constantes a e b surge fractais. Na altura, a maioria de nós achou a afirmação um *caos*, visto não estarmos a visualizar um exemplo nesse preciso momento. A figura seguinte mostra-nos a famosa curva de SAN MARCO, para $a=-1$ e $b=0$, obtida numa calculadora TI-82.

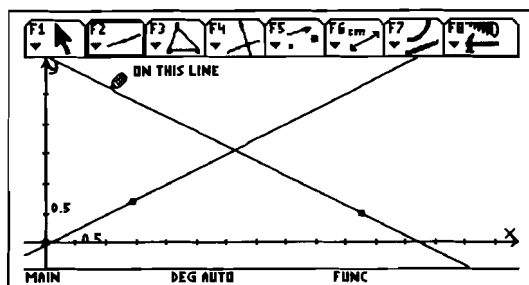


Como numa das escolas a que estou ligado encontram-se alguns colegas professores do ensino secundário do meu curso universitário, acabei por mostrar-lhes este exemplo, e uma das que tinha alguma dificuldade na altura ainda ficou novamente espantada. O que leva a pensar que a assimilação da Matemática faz-se muito demorosamente. E se tivermos sempre um outro caminho para chegar ao que se quer porque não usá-lo? De qualquer maneira na Matemática é preciso sempre sair de casos particulares e generalizar o que se está estudando. E aí é preciso desenvolver bastante o raciocínio abstracto. "... a Matemática trata de noções e verdades de natureza abstracta. Aliás, essa é umas das razões da sua força e sua importância. A afirmação $2 \times 5 = 10$ tanto se aplica aos dedos de duas mãos quanto aos jogadores que disputam um jogo de basquete." (Lima, Elon Lages, 1995)

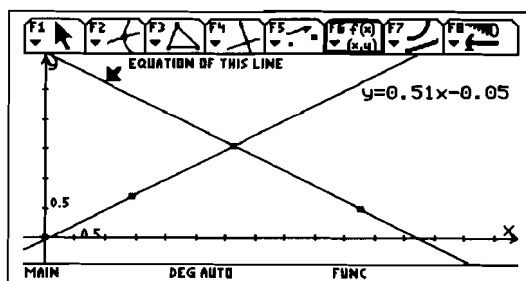
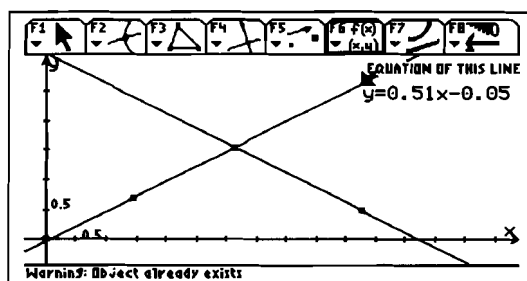
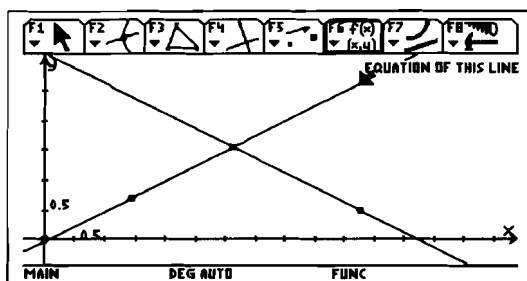
Quase sempre passamos da geometria analítica para a geometria euclideana, o contrário é pouco usual. Mas com as novas tecnologias, ao trabalhar na geometria interactiva é já possível fazer a correspondência com as respectivas equações/coordenadas. É exemplificado a seguir com a intersecção de duas rectas na nova TI-92, em que primeiro se desenha as rectas, acha-se o ponto intersecção e só depois é que se pede as equações das rectas e as coordenadas da intersecção.

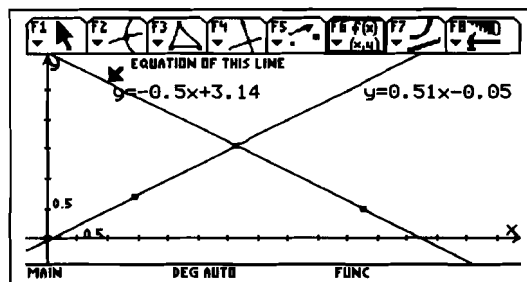
1º Desenhar as rectas.



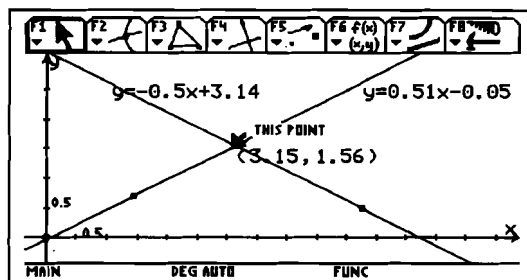
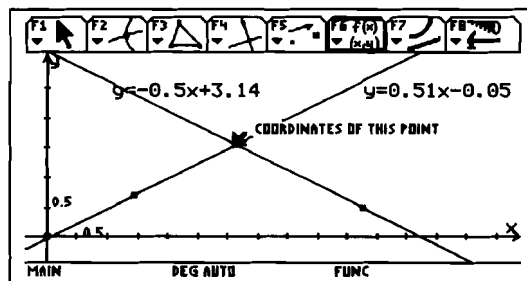


2º Mandar apresentar as equações das rectas.



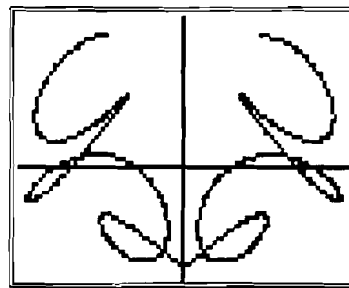
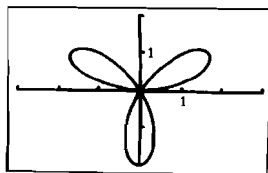


3º Mandar apresentar as coordenadas do ponto intersecção às duas rectas.



Este exemplo mostra as potencialidades do novo *software* em Matemática. O que faz com que a ordem de abordar os assuntos possa ser contrária ao habitual. Até que o exemplo apresentado tem mais a ver com a ordem que os alunos têm contacto com os objectos matemáticos. Primeiro eles aprendem a desenhar rectas e mesmo sem serem grandes algebristas podem associar equações algébricas aos traços.

Devido às exigências da sociedade e da tecnologia, alguns tópicos da Matemática passam a serem ignorados no ensino da Matemática (por exemplo as tábuas de logaritmos e o algoritmo da raiz quadrada) e outros passam a ser de primeiro plano (algoritmos para a computação). Um tema que não se dá no secundário mas que pode ser dado com as calculadoras gráficas é a representação em coordenadas polares. O exemplo da figura da esquerda é para a curva dada por $y = \sin 3$ (é usada a calculadora CASIO 7700G). A representação em paramétricas também serve para fazermos um pouco de arte na Matemática. A figura da direita é de uma calculadora CASIO CFX9800G, para a curva dada por $f(x,y) = (\sin T + \sin 0,15T, 1T + 3\sin(1,3T) - 8)$



John Allen Paulos, no seu livro *Analfabetismo em Matemática e suas consequências* afirma: “Gostaria imensamente de ganhar 5 dólares cada vez que um aluno, no fim do curso secundário, ainda é capaz de escrever, em um exame de álgebra, que $(x + y)^2 = x^2 + y^2$ ”. Se os alunos associassem a geometria a muitos dos resultados algébricos, penso que melhorariam a sua álgebra. Pois neste exemplo citado geometricamente é difícil de se enganar como mostra a figura seguinte.

y	xy	y^2
x	x^2	xy
	x	y

Tal como já temos presente, o poder gráfico e algébrico das calculadoras e dos computadores minimiza um pouco as propriedades operatórias e resultados geométricos, mas não os substituem em todas as áreas da Análise Matemática nem da Geometria. Na geometria analítica o Teorema de Pitágoras está *disfarçado* pela definição da distância (euclidiana) entre dois pontos do plano.

Os perigos do uso da calculadora são enormes e, como tal, é preciso alertá-los e combatê-los. Como já afimei anteriormente, o uso só por si da calculadora não é sinónimo de aumento no rendimento escolar em Matemática.

A ênfase dada neste projecto [Proposta ao Programa de Matemática] é discutível. O apelo insistente à calculadora, calculadora gráfica e computador, a importância que lhes é dada, sobretudo como meio conducente à apreensão de conceitos, é excessiva, pois são meras ferramentas auxiliares. A Proposta não alerta para os perigos da má utilização destas tecnologias. Quanto aos benefícios, a matéria é controversa entre os especialistas, pelo que se aconselha prudência. A este propósito, observa-se ainda a necessidade de formação dos docentes para integrar estes meios no ensino, uma vez que tal preparação não fez parte da formação inicial da maioria.

Não será de transferir a aprendizagem do uso destes meios e as actividades com eles relacionadas para *aulas laboratoriais* (de 2 ou 3 horas por semana) e reservar as aulas da disciplina de Matemática para Matemática?

(A Presidente da SPM, no Boletim da SPM nº 33, pág. 8)

É preciso que matemáticos, pedagogos e psicólogos trabalhem em equipe para estudarem bons caminhos de introduzir a calculadora na disciplina de Matemática. Pois muito trabalho existe pela frente.

Bibliografia

- 1] BROWNELL, W.A. *Psychological Consideration in the Learning and the Teaching of Arithmetic*. The Teaching of Arithmetic (pp.1-31). New York: NCTM e Columbia University, 1935.
- 2] CASIO (1995). *As calculadoras e o Ensino (Livro Pedagógico)*. Lisboa.
- 3] Davis, R. (1984). *Learning Mathematics: The Cognitive Approach to Mathematics Education*. Alex Publishing Co.
- 4] FREITAS, J. Orlando (1992). *Demonstração por computador*. O Professor.
- 5] FREITAS, J. Orlando (1993). *A geometria torna-se álgebra*. Educação e Matemática, 26: pg. 18.
- 6] FREITAS, J. Orlando (1995). *Dificuldade na visualização dos objectos matemáticos*. Revista do Professor de Matemática, 29: pg. 9-12. Sociedade Brasileira de Matemática (SBM).
- 7] KUTZLER, B. (1995). *The TI-92 Workshop*. Preprinter
- 8] LEVINE, M. (1992). *Effective Problem Solving*. New Jersey : Prentice Hall.
- 9] LIMA, Elon Lages (1995). *Sobre o Ensino da Matemática*. Revista do Professor de Matemática, 28, pp. 1-5. SBM
- 10] NCTM (1991). *Professional Standards for Teaching Mathematics*.
- 11] NOWAK, Ray (1995). *Mathematical Peepshows (na TI-82)*. Brendan Kelly Publishing Inc.
- 12] RADICE, L. Lucio (1971). *La Matematica da Pitagora a Newton*. Roma: Editori Riuniti.
- 13] SANT, J.M. (1995) *O Cabri-Géomètre*. Revista do Professor de Matemática, 29, pp. 136-40. SBM
- 14] TI (Texas Instruments) (1995). TI-92 Guidebook.

15] VÁRIOS autores (1987). *Galileu, Descartes e o Mecanismo*. Lisboa: Gradiva.

Agradecimentos

Em primeiro lugar tenho a agradecer à minha mulher por ter lido e dado sugestões, a maioria das quais foram aceites, apesar de não ser adepta da Matemática. Agradeço também ao Programa Educacional da *Texas Instruments*, mais nomeadamente a Miguel Sottomayor, por ter cedido a TI-92 e os *preprinters*.

Tenho a agradecer ao CITMA (Centro de Investigação e Tecnológico da Madeira) por ter cedido uma Bolsa de Estudo de Curta Duração para a minha participação neste Encontro.

*José Orlando de Freitas, R. das Murteiras, 9, 9050 FUNCHAL.
orlando@dragoeiro.uma.pt.*