Tiago João Páscoa Costa

Licenciado em Bioquímica

Princípio dos Grandes Desvios para Fluxos Estocásticos de Fluídos Viscosos

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em Matemática e Aplicações

Orientador: Dr Professora Maria Fernanda de Almeida Cipriano Salvador Marques, FCT-UNL

Membros do júri:
Professora Dra. Ana Bela Cruzeiro
Professor Dr. Manuel Esquível

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Outubro, 2015

Princípio dos Grandes Desvios para Fluxos Estocásticos de Fluídos Viscosos

Copyright © Tiago João Páscoa Costa, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa.

A Faculdade de Ciências e Tecnologia e a Universidade Nova de Lisboa têm o direito, perpétuo e sem limites geográficos, de arquivar e publicar esta dissertação através de exemplares impressos reproduzidos em papel ou de forma digital, ou por qualquer outro meio conhecido ou que venha a ser inventado, e de a divulgar através de repositórios científicos e de admitir a sua cópia e distribuição com objetivos educacionais ou de investigação, não comerciais, desde que seja dado crédito ao autor e editor.

Agradecimentos

Tanto a escolha de vir para o mestrado de matemática e aplicações para o ramo de análise numérica e equações diferenciais, como a escolha de fazer a tese de mestrado neste tema foram de facto um desafio. Desafio este, que dificilmente teria sido possível se não fosse por um conjunto de pessoas que me acompanharam durante todo o processo.

Em primeiro lugar gostaria de agradecer à Professora Dr. Fernanda Cipriano, não só por todo o apoio constante e disponibilidade demonstrada, mas principalmente por sempre estar disponível para me ensinar transmitindo o seu conhecimento com um interesse e entusiasmo únicos, que lhe são característicos.

Gostaria também de agradecer aos Professores Dr. Paula Rodrigues e Dr. Fábio Chalub que me orientaram num projeto de investigação que desenvolvi em paralelo com a tese. Agradeço pela paciência demonstrada, pela oportunidade de trabalhar numa área da matemática que inicialmente desconhecia mas onde acabei por descobrir um grande fascínio, e por todo o incentivo e apoio que me deram força para continuar o trabalho.

Aos amigos, pela companhia ao longo desta jornada. Em especial ao David Soares por todas as discussões e ideias partilhadas.

Por último mas não menos importante, queria também agradecer à minha família por estarem presentes sempre que precisei.

Resumo

Na literatura existem duas abordagens ao estudo do movimento dos fluídos: por um lado, a designada aproximação Euleriana, que consiste em determinar e estudar as propriedades de certas quantidades físicas, tais como a velocidade, pressão, etc. num determinado ponto fixo x do espaço e num determinado instante t; por outro lado, a aproximação Lagrangeana, onde o fluído é visto como um conjunto de partículas que partem de posições iniciais e à medida que o tempo evolui descrevem trajetórias no plano ou no espaço. Nesta perspetiva o movimento do fluído é visto como um fluxo de homeomorfismos ou difeomorfismos sobre a região ocupada pelo fluído.

Trabalhos recentes (cf. [2]) revelam que, para certos fluídos viscosos incompressíveis, apesar das quantidades físicas Eulerianas serem determinísticas, o movimento das partículas é intrinsecamente de natureza estocástica. Assim, na sua descrição Lagrangeana devem ser considerados fluxos estocásticos definidos como soluções de equações diferenciais estocásticas, cujo drift é o campo das velocidades definido como solução da equação de Navier-Stokes, e o coeficiente de difusão é proporcional à raiz quadrada da viscosidade.

Um dos problemas centrais em mecânica de fluídos é o fenómeno da turbulência, que do ponto de vista matemático passa pela compreensão do comportamento assimptótico dos fluídos viscosos quando a viscosidade tende para zero.

No contexto Euleriano, o estudo assimptótico das soluções da equação de Navier-Stokes quando a viscosidade tende para zero é um problema clássico, ainda não resolvido em dimensão três e em dimensão dois no caso de condições de fronteira de Dirichlet. Em domínios bidimensionais com condições de fronteira periódicas ou de slip, está provado que a solução de Navier-Stokes converge para a solução da equação de Euler, quando a viscosidade tende para zero.

Neste trabalho é considerada a aproximação Lagrangeana estocástica para fluídos viscosos incompressíveis, e pretendemos estabelecer um teorema de Schilder para o comportamento assimptótico de fluxos estocásticos definidos pelo campo das velocidades de Navier-Stokes, quando a viscosidade tende para zero.

Note-se que estamos perante um fluxo definido através da solução de uma equação diferencial estocástica em que o drift, sendo solução da equação de Navier-Stokes, não satisfaz a condição de Lipschitz. Por outro lado, o ruído W considerado é um movimento Browniano em dimensão infinita, mais precisamente um Browniano cilíndrico (construído a partir de um número

infinito de movimentos Brownianos). Neste contexto irregular, a existência e unicidade de fluxo não decorre de métodos clássicos. É importante realçar que na formulação do princípio dos grandes desvios, a existência e unicidade de solução das equações envolvidas é um requisito fundamental.

Assim, no Capítulo 3 vamos usar os método desenvolvidos por [5], [18] para provar a existência e unicidade de solução da equação diferencial estocástica.

No Capítulo 4 estabelecemos o princípio dos grandes desvios. A técnica utilizada para provar o princípio dos grandes desvios é a abordagem através da convergência fraca desenvolvida por R. P. Dupuis e Ellis [8], com base no princípio de Laplace. Estes métodos têm-se revelado altamente eficientes no caso de equações com coeficientes irregulares.

Nos dois primeiros capítulos da tese colecionamos os resultados clássicos que julgamos relevantes para a compreensão do tópico estudado e necessários para o estudo a desenvolver nos capítulos seguintes. As demonstrações mais simples serão apresentadas.

Abstract

In the literature there are two major approaches to the study of fluid movement: firstly, the designated Eulerian approach, which consists in determining and studying the properties of certain physical quantities such as speed, pressure, etc. in a certain fixed point x of space and a given time t; secondly, the Lagrange approach, where the fluid is seen as a collection of particles that leave the initial position and as time progresses describe trajectories in plane or space. In this perspective the fluid motion is seen as a flow of homeomorphisms or diffeomorphisms on the region occupied by the fluid.

Recent works (see [2]) show that, for certain imcompressible viscous fluids, despite the deterministic nature of the physical Eulerian quantities, the moviment of particles is inherently stochastic in nature. Thus, in its Lagragian description, stochastic flows as solutions of stochastic differential equations must be considered. In this case the drift the velocity field defined as the solution of Navier-Stokes equation, and the diffusion coefficient is proprotional to the square root of the viscosity.

One of the central problems in fluid mechanics is the phenomenon of turbulence, which from a mathematical point of view, involves the understanding of the asymptotic behavior of viscous fluids when the viscosity tends to zero.

In Eulerian context, the asymptotic study of solutions of the Navier-Stokes equation when the viscosity approaches zero is a classic problem, still unsolved in three dimension and dimension two in the case of Dirichlet boundary conditions. On bidimensional domain with periodic boundary conditions, or slip is proven that the Navier-Stokes solution converges to the solution of the Euler equation when the viscosity tends to zero.

In this work is considered the stochastic Lagrangian approach for incompressible viscous fluids, and aims to establish a Schilder's theorem for the asymptotic behavior of stochastic flows defined by the Navier-Stokes field of velocities, when the viscosity tends to zero.

Note that we are dealing with a flow defined by the solution of a stochastic differential equation in which the drift, being the solution to the Navier-Stokes equation, does not satisfy the Lipschitz condition. On the other hand, the noise W considered is a infinite dimensional Brownian motion, more precisely a cylindrical Brownian. In this irregular context, the existence and uniqueness of flow does not follow the classical methods.

It is noteworthy that in the formulation of the principle of large deviations, the existence and uniqueness of solution of the equations involved is a fundamental requirement.

Thus, in Chapter 3 we will use the method developed by [5], [18] to prove the existence and uniqueness of solutions to the stochastic differential equation.

In chapter 4 we established the principle of large deviations. The technique used to prove the principle of large deviations is the weak convergence approach developed by Dupuis and Ellis [8], based on the principle of Laplace. These methods have been highly efficient in the case of equations with irregular coefficients.

In the first two chapters of the thesis we have presented the classical results that we consider relevant to the understanding of the topic studied and necessary for the study developed in the following chapters. The simplest proofs are presented.

Conteúdo

1 Preliminares

1.1 Operadores de Hilbert-Schmidt e de classe traço

Operadores de Hilbert-Schmidt

Seja H um espaço de Hilbert separável, com norma $|.| = \sqrt{\langle .,. \rangle}$. Consideramos um operador linear $A : H \to H$ e representamos por A^* o seu adjunto.

Teorema 1.1 *Sejam $\{e_k\}$ e $\{d_k\}$ duas bases ortonormadas de H, então:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |Ae_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |Ad_k|^2 \tag{1}$$

Demonstração: Temos $|Ae_k|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle Ae_k, d_n \rangle|^2$, então

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |Ae_k|^2 &= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} |\langle Ae_k, d_n \rangle|^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} |\langle e_k, A^*d_n \rangle|^2 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} |\langle e_k, A^*d_n \rangle|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |A^*d_n|^2. \end{aligned}$$

Assim, obtemos

$$\sum_{k=1}^{\infty} |Ae_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |A^*d_k|^2. \tag{2}$$

Como a igualdade anterior é verificada para quaisquer duas bases ortonormadas de H, tomando $\{e_k\} = \{d_k\}$ deduzimos que:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |Ad_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |A^*d_k|^2. \tag{3}$$

Portanto o resultado (1) é consequência imediata de (2) e (3). $\square$

Definição 1.2 *Um operador linear $A : H \to H$ diz-se um operador de Hilbert-Schmidt se para alguma base ortonormada $\{e_k\}$ de H , $\sum_{k=1}^{\infty} |Ae_k|^2 < \infty$. A norma de Hilbert-Schmidt é definida pela seguinte expressão:*

$$||A||_{HS} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |Ae_k|^2 \right)^{1/2}.$$

Nota: Pelo Teorema 1.1 a norma de Hilbert-Schmidt de um operador A está bem definida, uma vez que não depende da escolha da base.

Teorema 1.3 *Sejam A e B operadores de Hilbert-Schmidt então, as seguintes afirmações verificam-se:*

(i) $||A^*||_{HS} = ||A||_{HS}$;

(ii) $||\alpha A||_{HS} = |\alpha|||A||_{HS}$, $\alpha \in \mathbb{R}$;

(iii) $||A+B||_{HS} \leq ||A||_{HS} + ||B||_{HS}$;

(iv) $||A|| \leq ||A||_{HS}$, *onde* $||A|| = \sup\limits_{x \neq 0} \dfrac{|Ax|}{|x|}$.

Demonstração: A propriedade (i) deduz-se diretamente do Teorema 1.1 e (ii) resulta trivialmente da definição da norma.

A proposição (iii) é obtida do facto de $|(A+B)x| \leq |Ax| + |Bx|$ e da desigualdade de Minkowski:

$$\Big(\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k + \beta_k|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leq \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2\Big)^{\frac{1}{2}} + \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |\beta_k|^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Para demonstrar (iv) observamos que

$$\begin{aligned} |Ax|^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} |\langle Ax, e_k\rangle|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, A^* e_k\rangle|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x|^2 |A^* e_k|^2 \\ &= |x|^2 \sum_{k=1}^{\infty} |A^* e_k|^2 = |x|^2 ||A^*||_2^2 = |x|^2 ||A||_2^2. \end{aligned}$$

Portanto, $|Ax| \leq |x|||A||_{HS}$. □

Vamos então denotar $L_{(2)}(H)$ como o espaço dos operadores de Hilbert-Schmidt de H e por $L(H)$ o espaço dos operadores lineares contínuos de H.

Nota: Pelo Teorema 1.3 (iv) temos $L_{(2)}(H) \subset L(H)$. Se H tem dimensão finita, então $L_{(2)}(H) = L(H)$. Se H tem dimensão infinita não é verificada a igualdade. Por exemplo, o operador identidade I de H pertence a $L(H)$ mas não pertence a $L_{(2)}(H)$.

Definição 1.4 *Sejam* A, $B \in L_{(2)}(H)$. *Definimos o produto interno de Hilbert-Schmidt* $\langle A, B\rangle_{HS}$ *por*

$$\langle A, B\rangle_{HS} = \sum_{k=1}^{\infty} \langle Ae_k, Be_k\rangle$$

Onde $\{e_k\}$ *é uma base ortonormada de* H.

Nota: É imediato que a série anterior converge, pois, $\langle Ae_k, Be_k\rangle \leq |Ae_k|^2 + |Be_k|^2$. Usando argumentos semelhantes aos do Teorema 1.1, temos também que $\langle A, B\rangle_{HS}$ está bem definido.

Teorema 1.5 $L_{(2)}(H)$ *com o produto interno* $\langle ., .\rangle_{HS}$ *é um espaço de Hilbert.*

Demonstração: Pelas alíneas (ii) e (iii) do Teorema 1.3 verificamos que $L_{(2)}(H)$ é um espaço vetorial. Temos também que $\langle A, A\rangle = ||A||^2_{HS}$. Portanto só temos que demonstrar que $L_{(2)}(H)$ é completo.
Seja $\{A_n\}$ uma sucessão de Cauchy em $L_{(2)}(H)$ então, pela alínea (iv) do Teorema 1.3 a sucessão $\{A_k\}$ é uma sucessão de Cauchy em $L(H)$. Como $L(H)$ com a norma do operador é um espaço de Banach, existe $A \in L(H)$ tal que $\lim_{n\to\infty} ||A_n - A|| = 0$. Vamos ver que $A \in L_{(2)}(H)$ e que $\lim_{n\to\infty} ||A_n - A||_{HS} = 0$. Fixemos $\epsilon > 0$, então para m, n suficientemente grandes $||A_n - A_m||_{HS} < \epsilon$. Logo

$$\sum_{k=1}^{s} |(A_n - A_m)e_k|^2 \leq ||A_n - A_m||^2_{HS} < \epsilon^2$$

para qualquer s e m, n suficientemente grandes. Como $\lim_{n\to\infty} ||A_n - A|| = 0$ fazemos m tender a infinito obtendo

$$\sum_{k=1}^{s} |(A_n - A)e_k|^2 \leq \epsilon^2$$

para qualquer s, e n suficientemente grande. Fazendo agora $s \to \infty$ temos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(A - A_n)e_k|^2 \leq \epsilon^2 < \infty.$$

Portanto, $A - A_n \in L_{(2)}(H)$, logo $A = A_n + (A - A_n) \in L_{(2)}(H)$ e como $||A - A_n||_2 \leq \epsilon$, para n suficientemente grande, temos que $\lim_{n\to\infty} ||A_n - A||_{HS} = 0$.

$\square$

Classe de operadores traço

Vamos agora introduzir algumas definições e teoremas necessários para definir a classe dos operadores traço.

Definição 1.6 *Um operador $A : H \to H$ diz-se compacto se a cada conjunto limitado de H faz corresponder um conjunto cujo fecho é compacto.*

Teorema 1.7 *Seja A um operador compacto, então A é limitado.*

Demonstração: Seja A um operador compacto, denotamos por $B(0,1)$ a bola em H de centro 0 e raio 1. Temos:

$$||A|| = \sup\{|Au| : u \in H \wedge |u| \leq 1\} = \sup\{|Au| : u \in B(0,1)\}.$$

Como $B(0,1)$ é limitado e A é um operador compacto, o fecho de $A(B(0,1))$ é compacto e portanto limitado. Logo $\exists k \in \mathbb{R} : \forall u \in B(0,1), |Au| \leq k$. Portanto $||A|| \leq k$.

Definição 1.8 *Um operador compacto A de $A : H \to H$ diz-se operador de classe traço se $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < \infty$, onde λ_n são os valores próprios de $(A^*A)^{\frac{1}{2}}$.*

1.2 Medidas Gaussianas em espaços de Hibert

Dado um espaço de Hilbert H, representamos por $\mathscr{B}(H)$ a σ-álgebra gerada pelos conjuntos abertos. Uma medida de probabilidade μ definida sobre o espaço mensurável $(H, \mathscr{B}(H))$ é denominada medida Gaussiana se para $h \in H$ existirem $n \in \mathbb{R}^1$ e $q \geq 0$ tais que,

$$\mu(\{x \in H; \langle h, x\rangle \in A\}) = \mathscr{N}(n,q)(A), \quad \forall A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^1)$$

onde $\mathscr{N}(n,q)(\cdot)$ denota a medida Gaussiana sobre $(\mathbb{R}^1, \mathscr{B}(\mathbb{R}^1))$ de média n e variância q :

$$\mathscr{N}(n,q)(A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi q}} \int_A \mathrm{e}^{\frac{-(x-n)^2}{2q}} dx.$$

Em particular, se μ for Gaussiana, os funcionais

$$H \to \mathbb{R}^1, \quad h \to \int_H \langle h, x\rangle \mu(dx),$$

$$H \times H \to \mathbb{R}^1, \quad (h_1, h_2) \to \int_H \langle h_1, x\rangle\langle h_2, x\rangle \mu(dx),$$

estão bem definidos. Vamos agora ver que estes funcionais são contínuos, para isso vamos introduzir o seguinte lema sobre medidas de probabilidade.

Lema 1.9 *Seja ν uma medida de probabilidade em $(H, \mathscr{B}(H))$. Vamos assumir que para algum $k \in \mathbb{N}$*

$$\int_H |\langle z, x\rangle|^k \nu(dx) < +\infty, \quad \forall z \in H.$$

Então existe uma constante $c > 0$ tal que

$$\left| \int_H \langle h_1, x\rangle ... \langle h_k, x\rangle \nu(dx) \right| \leq c|h_1|...|h_k|, \quad h_1...h_k \in H.$$

Demonstração: Seja U_n para $n \in \mathbb{N}$ o conjunto definido por

$$U_n = \left\{ z \in H : \int_H |\langle z, x\rangle|^k \nu(dx) \leq n \right\}.$$

Por hipótese $H = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$. Como H é um espaço métrico completo e U_n são conjuntos fechados, pelo argumento de categoria de Baire, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, $z_0 \in U_{n_0}$ e $r_0 > 0$ tal que $B(z_0, r_0) \subset U_{n_0}$. Logo

$$\int_H |\langle z_0 + y, x\rangle|^k \nu(dx) \leq n_0, \quad \forall y \in B(0, r_0).$$

Mas para qualquer $y \in B(0, r_0)$, temos

$$\int_H |\langle y, x\rangle|^k \nu(dx) \leq 2^k \int_H |\langle z_0 + y, x\rangle|^k \nu(dx) + 2^k \int_H |\langle z_0, x\rangle|^k \nu(dx) \leq 2^{k+1} n_0.$$

Assim, para qualquer $z \in H$ diferente de 0 podemos aplicar a desigualdade anterior a $y = r_0 \frac{z}{|Z|}$ obtendo

$$\int_H |\langle z, x\rangle|^k \nu(dx) \leq 2^{k+1} n_0 |z|^k r_0^{-k}.$$

Pela desigualdade

$$|\xi_1 \xi_2 ... \xi_k| \leq |\xi_1|^k + |\xi_2|^k + ... + |\xi_k|^k \quad \forall (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_k) \in \mathbb{R}^k,$$

constatamos que a transformação

$$H^k \to \mathbb{R}^1, \quad (h_1, .., h_k) \to \int_H \langle h_1, x\rangle ... \langle h_k, x\rangle \nu(dx)$$

é contínua.

$\square$

Decorre do lema anterior que se μ é uma medida Gaussiana, então existe um elemento $m \in H$ e um operador linear Q, tal que

$$\int_H \langle h, x\rangle \mu(dx) = \langle m, h\rangle, \quad \forall h \in H, \tag{4}$$

$$\int_H \langle h_1, x - m\rangle \langle h_2, x - m\rangle \mu(dx) = \langle Qh_1, h_2\rangle, \quad \forall h_1,\, h_2 \in H. \tag{5}$$

Ao vetor m chamamos média e a Q o operador de covariância de μ. O operador Q é simétrico e como

$$\langle Qh, h\rangle = \int_H \langle h, x - m\rangle^2 \mu(dx) \geq 0, \quad h \in H,$$

também é não negativo. Resulta de (4) e (5) que o funcional característico de uma medida Gaussiana μ com média m e operador de covariância Q, $\mathcal{N}(m, Q)$, é dado por

$$\hat{\mu}(\lambda) = \int_H e^{i\langle \lambda, x\rangle} \mu(dx) = e^{i\langle \lambda, m\rangle - \frac{1}{2}\langle Q\lambda, \lambda\rangle}.$$

Portanto $\hat{\mu}$ é unicamente determinado por m e Q. A medida Gaussiana de média m e operador de covariância Q será denotada por $\mathcal{N}(m, Q)$.

1.3 Processos Estocásticos

1.3.1 Processos com filtração

Vamos assumir que $I = [0, T]$ e que o espaço de probabilidade $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ está equipado com a família crescente de σ-álgebras $\{\mathscr{F}_t\}$, $t \in I$, a qual chamamos filtração. Iremos designar por $\mathscr{F}_{t+}$ a intersecção de todas as $\mathscr{F}_s$ onde $s < t$. Uma filtração diz-se normal se:

(i) $\mathscr{F}_0$ contém todos os conjuntos $A \in \mathscr{F}$ tal que $\mathbb{P}(A) = 0$;

(ii) $\mathscr{F}_{t+} = \mathscr{F}_t$ para qualquer $t \in T$.

Um processo X diz-se adaptado se para qualquer $t \in I$ a variável aleatória $X(t)$ é $\mathscr{F}_t$-mensurável.
X diz-se progressivamente mensurável se para cada $t \in [0, T]$ a aplicação

$$[0, t] \times \Omega \to E, \ \ (s, \omega) \to X(s, \omega)$$

é $\mathscr{B}([0, t]) \times \mathscr{F}_t$-mensurável. Representamos por $\mathscr{F}_\infty$ a σ-álgebra de subconjuntos de $[0, \infty) \times \Omega$, gerada pelos conjuntos da forma:

$$(s, t] \times F, \quad 0 \leq s < t < \infty, \quad F \in \mathscr{F}_s \text{ e } \{0\} \times F, \quad F \in \mathscr{F}.$$

Esta σ-álgebra diz-se σ-álgebra previsível e os seus elementos dizem-se conjuntos previsíveis. A restrição de $\mathscr{F}_\infty$ a $[0, T] \times \Omega$ vai ser denominada por $\mathscr{F}_T$.
Uma aplicação mensurável definida no espaço $([0, T] \times \Omega, \mathscr{F}_T)$ com valores em $(E, \mathscr{B}(E))$ designa-se um processo previsível. Um processo previsível é necessariamente adaptado. Reciprocamente, referimos um resultado que indica em que condições um processo adaptado é previsível (cf. [6]).

Teorema 1.10
As seguintes afirmações são verdadeiras:

(i) *Um processo adaptado Φ com valores em $L(U, H)$ tal que, para $u \in U$ e $h \in H$ arbitrários o processo $\langle \Phi(t)u, h \rangle$, $t \geq 0$ tem trajetórias contínuas à esquerda, é previsível.*

(ii) *Seja Φ um processo estocasticamente contínuo e adaptado no intervalo $[0, T]$. Então o processo Φ tem uma versão previsível em $[0, T]$.*

1.4 Processo de Wiener em dimensão infinita

Definição 1.11 *Seja U um espaço de Hilbert munido do produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Um processo estocástico $W(t)$, $t \geq 0$, com valores em U diz-se um Q-processo de Wiener se:*

(i) $W(0) = 0$,

(ii) W tem trajetórias contínuas,

(iii) W tem incrementos independentes,

(iv) A lei da variável aleatória $W(t) - W(s)$ é $\mathscr{N}(0, (t-s)Q)$, $\quad t \geq s \geq 0$,

onde Q é um operador traço não negativo em U, isto é, existe uma base ortonormada completa $\{e_k\}$ em U e uma sequência de números reais não negativos $\{\lambda_k\}$ tal que

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} ||Qe_k||_U = \sum_{k \in \mathbb{N}} ||\lambda_k e_k||_U < \infty.$$

Este operador Q é denominado operador de covariância.

Teorema 1.12 *Seja $W(t)$ um Q-processo de Wiener. Então verificam-se as seguintes afirmações:*

(i) W é um processo Gaussiano em U e

$$\mathbb{E}(W(t)) = 0, \quad Cov(W(t)) = tQ, \quad t \geq 0.$$

(ii) Para $t > 0$ arbitrário, W admite a expansão

$$W(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sqrt{\lambda_j} \beta_j(t) e_j, \tag{6}$$

onde

$$\beta_j(t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} \langle W(t), e_j \rangle, \quad j \in \mathbb{N}$$

são movimentos Brownianos com valores reais mutuamente independentes em $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, e a série (1) é convergente.

Demonstração: Seja $0 < t_1 < ... < t_n$ e seja $u_1, ..., u_n \in U$. Consideremos a variável aleatória Z definida por

$$\begin{aligned} Z = \sum_{k=1}^{n} \langle W(t_k), u_k \rangle &= \sum_{k=1}^{n} \langle W(t_1), u_k \rangle + \sum_{k=2}^{\infty} \langle W(t_2) - W(t_1), u_k \rangle \\ &+ ... + \langle W(t_n) - W(t_{n-1}), u_n \rangle. \end{aligned}$$

Como W tem incrementos independentes, Z é Gaussiana para qualquer escolha de $u_1, ..., u_n$ e obtemos (i).

Vamos agora demonstrar (ii). Seja $t > s > 0$, então

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\beta_i(t)\beta_j(s)) =& \frac{1}{\sqrt{\lambda_i\lambda_j}}\mathbb{E}(\langle W(t), e_i\rangle\langle W(s), e_j\rangle)\\ =& \frac{1}{\sqrt{\lambda_i\lambda_j}}[\mathbb{E}(\langle W(t) - W(s), e_i\rangle\langle W(s), e_j\rangle)\\ &+ \mathbb{E}(\langle W(s), e_i\rangle\langle W(s), e_j\rangle)]\\ =& \frac{1}{\sqrt{\lambda_i\lambda_j}}s\langle Qe_i, e_j\rangle = s\delta_{ij}.\end{aligned}$$

Portanto, temos a independência de $\beta_i,\ i \in \mathbb{N}$. Para provar a representação (3) é suficiente observar que para $m \geq n \geq 1$

$$\mathbb{E}\left|\left|\sum_{j=n}^{m}\sqrt{\lambda_j}\beta_j(t)e_j\right|\right|^2 = t\sum_{j=n}^{m}\lambda_j;$$

e relembrar que por definição $\sum_{j=1}^{\infty}\lambda < \infty$. □

Vamos agora generalizar a definição para processos de Wiener num espaço de Hilbert U, onde o operador de covariância Q não é de um operador traço.

Seja $W(t)$ um processo de Wiener num espaço de Hilbert U e Q o seu operador de covariância. Então para cada $a \in U$ podemos definir o processo de Wiener com valores reais $W_a(t),\ t \geq 0$, por:

$$W_a(t) = \langle W(t), a\rangle,\ t \geq 0.$$

A transformação $a \to W_a$ é linear de U para o espaço dos processos estocásticos. É ainda contínua no seguinte sentido:

$$\forall t \leq 0, \{a_n\} \subset U,\ \lim_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}|W_a(t) - W_{a_n}(t)|^2 = 0. \tag{7}$$

Qualquer transformação linear $a \to W_a$ satisfazendo (4) é chamada processo de Wiener generalizado. Então, existe uma forma bilinear $K(a, b)$, a, $b \in U$ e $t > s > 0$ tal que :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\langle W(t),a\rangle\langle W(s),b\rangle] =& \mathbb{E}[(\langle W(t),a\rangle - \langle W(s),a\rangle)\langle W(s),b\rangle] \\ &+ \mathbb{E}[\langle W(s),a\rangle\langle W(s),b\rangle] \\ =& s\mathbb{E}[\langle W(1),a\rangle\langle W(1),b\rangle] = sK(a,b).\end{aligned}$$

A condição (4) implica que K é bilinear contínua em U, logo existe $Q \in L(U)$, tal que:

$$\mathbb{E}[W_a(t)W_b(s)] = s\langle Qa, b\rangle, \quad t > s \geq 0,\ a,\ b \in U. \tag{8}$$

O operador Q chama-se covariância do processo de Wiener generalizado $a \to W_a$. Este operador é auto adjunto e definido positivo.
Dado um operador Q, é relativamente fácil construir um processo de Wiener generalizado satisfazendo as condições mencionadas. De facto, seja $\{e_j\}$ uma base ortonormada completa de U, $\{\beta_j\}$ uma sucessão de processos de Wiener com valores reais, e $U_0 = Q^{1/2}(U)$, define-se:

$$W_a(t) = \sum_{j\in N}\langle Q^{1/2}e_j, a\rangle\beta_j, \quad t \geq 0,\ a \in U.$$

Como

$$\sum_{j\in N}|\langle Q^{1/2}e_j, a\rangle|^2 = |Q^{1/2}a|^2 < \infty$$

para cada $a \in U$, então existe uma versão de W_a que é um processo de Wiener.
Temos ainda que

$$\mathbb{E}[\langle W(t),a\rangle\langle W(s),b\rangle] = s\sum_{j\in N}\langle Q^{1/2}e_j, a\rangle\langle Q^{1/2}e_j, b\rangle = s\langle Qa, b\rangle.$$

Teorema 1.13 *Seja U_1 um espaço de Hilbert, tal que $U_0 = Q^{1/2}(U)$ está inserido em U_1 por uma inclusão de Hilbert-Schmidt J. Então*

$$W(t) = \sum_{n\in\mathbb{N}} Q^{1/2}e_j\beta_j(t), \quad t \geq 0, \tag{9}$$

define um processo de Wiener com valores em U_1. Além disso, se Q_1 for a covariância de W, então $Q_1^{1/2}(U_1)$ e $Q^{1/2}(U)$ são iguais.

Demonstração: Seja $g_j = Q^{1/2}e_j$, $j \in N$, então $\{g_j\}$ forma uma base ortonormada completa em U_0, e portanto

$$||JQ^{1/2}||_{H.S} = \sum_{n\in\mathbb{N}}|Jg_j|^2_{U_1} < \infty.$$

Consequentemente (6) define um processo de Wiener em U_1. Para a, $b \in U_1$ temos:

$$\begin{aligned}\langle Qa, b\rangle_{U_1} =& \mathbb{E}[\langle W(1), a\rangle_{U_1}\langle W(1), b\rangle_{U_1}] = \sum_{n\in\mathbb{N}}\langle Jg_j, a\rangle_{U_1}\langle Jg_j, b\rangle_{U_1}\\ =& \sum_{n\in\mathbb{N}}\langle g_j, J^*a\rangle_{U_0}\langle g_j, J^*b\rangle_{U_0} = \langle J^*a, J^*b\rangle_{U_0} = \langle JJ^*a, b\rangle_{U_1},\end{aligned}$$

o que implica $JJ* = Q_1$. Em particular,

$$|Q_1^{1/2}a|_{U_1}^2 = \langle J^*a, J^*a\rangle_{U_1} = |J^*a|_{U_0}^2, \quad a \in U_1.$$

Então pela **proposição A** (ver Apêndice) aplicada a $Q^{1/2} : U_1 \to U_1$ e $J : U_0 \to U_1$ temos $Q_1^{1/2}(U_1) = J(U_0) = U_0$ e $|Q_1^{-1/2}u|_{U_1} = |u|_{U_0}$, terminando assim a demonstração. $\square$

Então, admitindo um abuso de linguagem, podemos afirmar que um processo de Wiener generalizado em U é um Q-processo de Wiener num espaço de Hilbert maior U_1.
Quando o operador Q é a identidade, diz-se que este processo é um processo de Wiener cilíndrico ou movimento Browniano cilíndrico. Neste caso, temos um processo de Wiener generalizado com valores num espaço de Hilbert U_1, tal que $U_0 = Q^{1/2}(U)$ está "encaixado"em U_1 pois o operador identidade $I : U_0 \to U_0$ não é um operador traço. Então definimos U_1 como um espaço de Hilbert tal que $I : U_0 \to U_1$ seja um operador de Hilbert-Schmidt, e usamos este operador como o operador J do Teorema 1.13.

1.5 Integral estocástico em dimensão infinita

1.5.1 Definição do integral estocástico

Seja $W(t)$ um Q-processo de Wiener em $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ com valores num espaço de Hilbert U. Recordamos que $W(t)$ pode ser escrito na forma (6). Com o intuito de simplificar a notação vamos supor que $\lambda_k > 0$ para qualquer $k \in \mathbb{N}$. Vamos também assumir que dada uma filtração $\{\mathscr{F}_t\}_{t \geq 0}$ em $\mathscr{F}$,

(i) $W(t)$ é $\{\mathscr{F}_t\}$ - mensurável,

(ii) $W(t+h) - W(t)$ é independente de $\{\mathscr{F}_t\}$, $\forall h \geq 0,\ \forall t \geq 0$,
$\mathbb{E}[W(t+h) - W(t) | \mathscr{F}_t] = \mathbb{E}[W(t+h) - W(t)]$.

Se um Q-processo de Wiener W satisfaz (i), dizemos que W é adaptado a $\{\mathscr{F}_t\}$, se também for satisfeita a condição (ii) dizemos que W é um Q - processo de Wiener em relação a $\{\mathscr{F}_t\}$.

Nota: Dado um processo estocástico $X = \{X_t : t \in T\}$ com valores em num espaço mensurável (H, Σ), a filtração natural é definida como

$$\mathscr{F}_t = \sigma\big(\{X_s^{-1}(A) : s \leq t,\, A \in \Sigma\}\big).$$

Um processo estocástico é sempre adaptado relativamente à sua filtração natural.

Vamos então definir o integral estocástico para processos elementares. Fixemos $T < \infty$. Um processo $\phi(t)$, $t \in [0, T]$, com valores no espaço dos operadores limitados de $U \to H$, $L = L(U, H)$, diz-se elementar se existir uma sequência de tempos, $0 = t_0 < t_1 < ... < t_k = T$ e uma sucessão $\phi_0, \phi_1, ..., \phi_k$ de variáveis aleatórias com valores em L tomando um número finito de valores tal que ϕ_m são $\{\mathscr{F}_{t_m}\}$ mensuráveis e

$$\phi(t) = \phi_m, \quad t \in (t_m, t_{m+1}],\ m = 0, 1, ..., k.$$

Para processos elementares o integral estocástico é definido por:

$$\int_0^t \phi(s) dW(s) = \sum_{m=0}^{k-1} \phi_m (W_{t_{m+1 \wedge t}} - W_{t_{m \wedge t}})$$

e representa-se por $\phi.W(t)$, $t \in [0, T]$. Vamos agora relembrar o subspaço $U_0 = Q^{1/2}(U)$ de U introduzido na secção anterior, que com o produto interno definido por:

$$\langle u,v\rangle_0=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda}\langle u,e_k\rangle\langle v,e_k\rangle=\langle Q^{-1/2}u,Q^{-1/2}v\rangle,\ \ u,v\in U_0$$

é um espaço de Hilbert.
Consideramos o espaço dos operadores de Hilbert-Schmidt $L^0_{(2)}=L_{(2)}(U_0,H)$ de U_0 para H. Relembramos que pelo Teorema 1.5, o espaço $L^0_{(2)}$ também é um espaço de Hilbert equipado com a norma:

$$\begin{aligned}||\Psi||^2_{HS^0}=&\sum_{h,k=1}^{\infty}|\langle\Psi g_h,f_k\rangle|^2=\sum_{h,k=1}^{\infty}\lambda_h|\langle\Psi e_h,f_k\rangle|^2\\=&||\Psi Q^{1/2}||^2_{HS(U,H)}=Tr[(\Psi Q^{1/2})(\Psi Q^{1/2})^*],\end{aligned}$$

onde $\{g_j\}_{n\in\mathbb{N}}$, com $g_j=\sqrt{\lambda_j}e_j$, $\{e_j\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{f_j\}_{n\in\mathbb{N}}$ são bases ortonormadas de U_0, U e H, respetivamente.

Seja $\Phi(t)$, $t\in[0,T]$, um processo mensurável com valores em $L^0_{(2)}$, definimos as normas:

$$|||\Phi|||_t=\left[\mathbb{E}\int_0^t||\Psi||^2_{HS^0}ds\right]^{\frac{1}{2}}=\left[\mathbb{E}\int_0^t Tr[(\Psi Q^{1/2})(\Psi Q^{1/2})^*]ds\right]^{\frac{1}{2}},\ \ t\in[0,T].$$

Teorema 1.14 *Se um processo Φ é elementar e $|||\Phi|||_T<\infty$ então o processo $\Phi.W$ é uma martingala contínua, de quadrado integrável com valores em H e*

$$\mathbb{E}|\Phi.W(t)|^2=|||\Phi|||^2_t,\ \ 0\leq t\leq T. \tag{10}$$

Demonstração: Vamos mostrar que (10) é verificado para $t=t_m\leq T$. Define-se $\zeta_j=W(t_{j+1})-W(t_j)$, $j=1,...,m-1$. Então

$$\mathbb{E}|\Phi.W(t_m)|^2=\mathbb{E}\left|\sum_{j=1}^{m-1}\Phi(t_j)\zeta_j\right|^2=\mathbb{E}\sum_{j=1}^{m-1}|\Phi(t_j)\zeta_j|^2+2\mathbb{E}\sum_{i<j=1}^{m-1}\langle\Phi(t_i)\zeta_i,\Phi(t_j)\zeta_j\rangle.$$

Vamos focar-nos no termo $\mathbb{E}\sum_{j=1}^{m-1}|\Phi(t_j)\zeta_j|^2$. Sabemos que a variável aleatória $\Phi^*(t_j)f_l$ é $\mathscr{F}_{t_j}$-mensurável, e ζ_j é uma variável aleatória independente de $\mathscr{F}_{t_j}$. Então, tem-se

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|\Phi(t_j)\zeta_j|^2 =& \sum_{l=1}^{m-1} \mathbb{E}(|\langle \Phi(t_j)\zeta_j, f_l\rangle|^2) = \sum_{l=1}^{m-1} \mathbb{E}(\mathbb{E}[|\langle \zeta_j, \Phi^*(t_j) f_l\rangle|^2 | \mathscr{F}_{t_j}]) \\
=&(t_{j+1} - t_j) \sum_{l=1}^{m-1} \mathbb{E}(|\langle Q\Phi^*(t_j) f_l, \Phi^*(t_j) f_l\rangle|) \\
=&(t_{j+1} - t_j) \sum_{l=1}^{m-1} \mathbb{E}(|Q^{1/2}\Phi^*(t_j) f_l|^2) = (t_{j+1} - t_j)||\Phi(t_j)||^2_{HS^0}.
\end{aligned}$$

Usando o mesmo argumento deduzimos que

$$\begin{aligned}
&2\mathbb{E} \sum_{i<j=1}^{m-1} \langle \Phi(t_i)\zeta_i, \Phi(t_j)\zeta_j\rangle \\
=&2 \sum_{i<j=1}^{m-1} \mathbb{E}\Big[\mathbb{E}\big(\langle \Phi(t_i)\zeta_i, \Phi(t_j)\zeta_j\rangle | \mathscr{F}_{t_{i+1}}\big)\Big] = 0,
\end{aligned}$$

pois W tem incrementos independentes e média 0. □

Nota: Reparamos que tal como no caso de dimensão infinita, o integral estocástico é uma isometria do espaço dos processos elementares equipado com a normal $|||.|||_T$ para o espaço $\mathscr{M}^2_T(H)$ das martingalas com valores em H.

Relativamente à propriedade de martingala, definindo $s = t'_m < t$, temos

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big[\int_0^t \Phi(u)dW(u)|\mathscr{F}_s\Big] =& \int_0^s \Phi(u)dW(u) + \mathbb{E}\Big[\sum_{j=m'}^{m-1} \Phi_j\zeta_i|\mathscr{F}_s\Big] \\
=& \int_0^s \Phi(u)dW(u),
\end{aligned}$$

uma vez que W tem incrementos independentes e média 0.

Para estender a definição de integral estocástico a processos mais gerais é conveniente interpretar estes processos como variáveis aleatórias, definidas no espaço produto $\Omega_T = [0,T] \times \Omega$, equipado com a σ-álgebra $\mathscr{B}([0,T]) \times \mathscr{F}$. O produto da medida de Lebesgue em $[0,T]$ e a medida de probabilidade $\mathbb{P}$ denota-se por $\mathbb{P}_T$.

Acontece que a σ-álgebra considerada não é adequada devido à não adaptabilidade dos processos considerados, portanto não pode ser utilizada. A escolha correta é a σ-álgebra $\mathscr{P}_T$ introduzida na Secção 2.3.1.. Iremos agora verificar que a classe dos integrandos são aplicações mensuráveis de $(\Omega_T, \mathscr{P}_T)$ para $(L^0_{(2)}, \mathscr{B}(L^0_{(2)}))$.

Teorema 1.15 *As seguintes afirmações são verdadeiras:*

(i) Se uma aplicação $\Phi : \Omega_T \to L$, é L-previsível, então Φ também é $L^0_{(2)}$-previsível. Em particular, os processos elementares são $L^0_{(2)}$-previsíveis.

(ii) Se Φ é um processo $L^0_{(2)}$-previsível tal que $|||\Phi|||_T < \infty$, então existe uma sucessão $\{\Phi_n\}$ de processos elementares tal que $|||\Phi - \Phi_n|||_T \to 0$ quando $n \to \infty$.

Demonstração: Sejam $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ bases ortonormadas de U e H respetivamente. Como os operadores

$$f_k \otimes e_j.u = f_k\langle e_j, u\rangle, \;\; u \in U,\, k, j \in \mathbb{N}$$

são linearmente densos em $L^0_{(2)}$ e para $T \in L^0_{(2)}$ arbitrário,

$$\langle f_k \otimes e_j, T\rangle_{L^0_{(2)}} = \lambda_j \langle Te_j, f_k\rangle_H.$$

Pela proposição B do Apêndice, fica demonstrado (i).
Vamos agora considerar (ii). Como o espaço L é denso em $L^0_{(2)}$ pela proposição C do Apêndice existe uma sucessão $\{\Phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de processos elementares L-previsíveis em $[0, T]$ tal que:

$$||\Phi(t, \omega) - \Phi_n(t, \omega)||_{HS^0} \downarrow 0,$$

para $(t, \omega) \in \Omega_T$. Consequentemente $|||\Phi - \Phi_n|||_T \downarrow 0$. Então é suficiente demonstrar que para $A \in \mathscr{P}_T$ arbitrário e para qualquer $\epsilon > 0$ existe uma soma finita Γ de conjuntos disjuntos da forma

$$(s, t] \times F, 0 \leq s < t < T,\, F \in \mathscr{F}_s\, e\, \{0\} \times F,\, F \in \mathscr{F}_0 \tag{11}$$

tal que

$$\mathbb{P}_T\{(A\backslash\Gamma) \cup (\Gamma\backslash A)\} < \epsilon. \tag{12}$$

Para mostrar este facto vamos denotar por $\mathscr{K}$ a família de todas as somas finitas de conjuntos da forma (11), com $s \leq t \leq T$. É fácil verificar que $\mathscr{K}$ é um

π-sistema (ver Apêndice). Seja $\mathscr{G}$ a família de todos os conjuntos $A \in \mathscr{P}_T$ que podem ser aproximados por elementos de $\mathscr{K}$. Temos $\mathscr{K} \subset \mathscr{G}$ e as condições da Proposição D do Apêndice são verificadas. Portanto $\sigma(\mathscr{K}) = \mathscr{P}_T = \mathscr{G}$. $\square$

Podemos então estender a definição de integral estocástico a todos os processos previsíveis com valores em $L^0_{(2)}$ Φ em que $|||\Phi|||_T < \infty$.

Até agora a construção do integral estocástico foi feita com base na suposição de que o operador Q é de classe traço, só assim um Q-processo de Wiener tem valores em U. Contudo, é possível estender a definição do integral estocástico ao caso dos processos de Wiener generalizados, onde o operador de covariância não é necessariamente de classe traço. Como anteriormente iremos denotar $U_0 = Q^{1/2}(U)$ com a norma induzida $||u||_0 = ||Q^{-1/2}(u)||$, $u \in U_0$, e $L^0_{(2)} = L_{(2)}(U_0, H)$.

Começamos por introduzir um teorema necessário para fazer a generalização do integral estocástico a processos mais gerais.

Teorema 1.16 *Seja Z uma variável aleatória com valores em U, média 0, e covariância Q, e R um operador de Hilbert-Schmidt de U_0 para H. Se $\{R_n\} \subset L^0_{(2)}$ for tal que*

$$\lim_{n\to\infty} ||R - R_n||_{HS^0} = 0,$$

existe uma variável aleatória RZ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}||RZ - R_n Z||^2_{HS^0} = 0.$$

RZ é independente da escolha de $\{R_n\}$

Demonstração: A demonstração deste teorema é uma consequência direta da identidade

$$\mathbb{E}|SZ|^2 = ||SQ^{1/2}||^2_{HS(U,H)},$$

válida para operadores lineares limitados $S : U \to H$. $\square$

Estamos então em condições de generalizar a definição de integral estocástico.

Seja W_a, $a \in U$, um processo de Wiener generalizado, com covariância Q. Pelo Teorema 1.13, existe uma sucessão $\{\beta_j\}$ de processos de Wiener independentes e uma base ortonormada $\{e_j\}$ em U tal que

$$W_a(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \langle a, Q^{1/2} e_j \rangle \beta_j(t), \quad a \in U,\ t \geq 0,$$

e a expressão

$$W(t) = \sum_{j=1}^{\infty} Q^{1/2} e_j \beta_j(t)$$

define um processo de Wiener num espaço de Hilbert $U_1 \supset U_0$ (com uma inclusão de Hilbert-Schmidt). Se $\Phi \in L^0_{(2)}$ então as variáveis aleatórias $\Phi W(t)$, $t \geq 0$, são definidas por

$$\Phi W(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \Phi Q^{1/2} e_j \beta_j(t).$$

Portanto a construção do integral estocástico

$$\int_0^t \Phi(s) dW(s), \quad t \geq 0$$

pode feita no caso em que o traço de Q não é finito. Basta ter em consideração que as variáveis aleatórias da forma

$$\Phi_{t_j}(W_{t_{j+1}} W_{t_j})$$

são definidas duma forma única quando $\Phi_{t_j} \in L^0_{(2)}$.

De seguida, apresentamos três teoremas que constituem a base do cálculo estocástico.

1.5.2 Fórmula de Itô

Seja Φ um processo estocástico integrável em $[0,T]$ com valores em $L^0_{(2)}$, φ um processo previsível integrável em $[0,T]$ (no sentido de Bochner), $\mathbb{P}$-quase por toda a parte ($\int_\Omega ||X(t,\omega)||\mathbb{P}(d\omega) < \infty,\ \ t \in [0,T]$), e $X(0)$ uma variável aleatória $\mathscr{F}_0$-mensurável com valores em H. Então o seguinte processo

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \varphi(s)ds + \int_0^t \Phi(s)dW(s),\ \ t \in [0,T]$$

está bem definido. Assumindo que a função $F : [0,T] \times H \to \mathbb{R}$ e as suas derivadas parciais F_t, F_x, F_{xx} são uniformemente contínuas em conjuntos limitados de $[0,T] \times H$, temos o seguinte teorema:

Teorema 1.17 *(Fórmula de Itô) Nas condições acima mencionadas temos que, para qualquer $t \in [0,T]$,*

$$\begin{aligned} F(t, X(t)) = F(0, X(0)) &+ \int_0^t \langle F_x(s, X(s)), \Phi(s)dW(s)\rangle \\ &+ \int_0^t \Big\{ F_t(s, X(s)) + \langle F_x(s, X(s)), \varphi(s)\rangle \\ &+ \frac{1}{2} Tr\big[F_{xx}(s, X(s)), (\Phi(s)Q^{1/2})(\Phi(s)Q^{1/2})^*\big]\Big\} ds. \end{aligned}$$

1.5.3 Teorema de Fubini

Seja $(E, \mathscr{E})$ um espaço mensurável e $\Phi : (t, \omega, x) \to \varphi(t, \omega, x)$ uma aplicação mensurável de $(\Omega_T \times E, \mathscr{P}_T \times \mathscr{B}(E))$ para $(L^0_{(2)}, \mathscr{B}(L^0_{(2)}))$. Então para $x \in E$, $\Phi(.,.,x)$ é um processo previsível com valores em $L^0_{(2)}$. Seja ainda μ uma medida finita e positiva em $(E, \mathscr{E})$. Temos a seguinte versão estocástica do Teorema de Fubini.

Teorema 1.18 *(Teorema de Fubini) Assumindo que se verificam as condições acima mencionadas e supondo ainda que*

$$\int_E |||\Phi(.,.,x)|||_T \mu(dx) < \infty,$$

tem-se, $\mathbb{P}$-quase toda a parte,

$$\int_E \left[\int_0^T \Phi(t,x)dW(t)\right]\mu(dx) = \int_0^T \left[\int_E \Phi(t,x)\mu(dx)\right]dW(t).$$

1.5.4 Teorema de Girsanov

Teorema 1.19 *(Teorema de Girsanov) Seja $W(t)$ um Q-processo de Wiener em relação à filtração $\{\mathscr{F}_t\}$ no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ e Ψ um processo estocástico $\mathscr{F}_t$-mensurável com valores em U_0 tal que*

$$\mathbb{E}\left(e^{\int_0^T \langle \Psi(s), dW(s)\rangle_0 - \frac{1}{2}\int_0^T |\Psi(s)|_0^2 ds}\right) = 1.$$

Então o processo

$$\widehat{W}(t) = W(t) - \int_0^t \Psi(s)ds, \ \ t \in [0, T],$$

é um Q-processo de Wiener em relação à filtração $\{\mathscr{F}_t\}$ no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathscr{F}, \widehat{\mathbb{P}})$, onde

$$d\widehat{\mathbb{P}}(\omega) = e^{\int_0^T \langle \Psi(s), dW(s)\rangle_0 - \frac{1}{2}\int_0^T |\Psi(s)|_0^2 ds} d\mathbb{P}(\omega).$$

As demonstrações destes três teoremas fundamentais podem ser encontradas em [6].

2 Princípio de Laplace

2.1 Introdução

Neste capítulo abordamos a teoria dos grandes desvios que se ocupa do estudo assimptótico de determinadas esperanças.
Consideramos uma sucessão de variáveis aleatórias $\{X^n, \in \mathbb{N}\}$ definidas num certo espaço de probabilidade $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, tomando valores num espaço métrico separável $(\mathscr{X}, d)$.
Em vez de uma sucessão, podemos partir de uma família de variáveis aleatórias $\{X^\epsilon, \epsilon > 0\}$. As duas aproximações estão relacionadas tomando $\epsilon = \frac{1}{n}$.

Começamos por apresentar um dos conceitos fundamentais nesta teoria que é a noção de *rate function*.

Definição 2.1 *Uma função $I : \mathscr{X} \to [0, \infty]$ diz-se rate function se para cada $M < \infty$ o conjunto de nível $\{x \in \mathscr{X} : I(x) \leq M\}$ for um subconjunto compacto de $\mathscr{X}$.*

Podemos facilmente verificar que qualquer função com conjuntos de nível compactos é automaticamente semicontínua inferiormente e, portanto, o seu ínfimo é atingido em qualquer conjunto não vazio.

Vamos introduzir o princípio dos grandes desvios.

Definição 2.2 *Seja I uma rate function em $\mathscr{X}$. Dizemos que uma sucessão de variáveis aleatórias $\{X^n\}$ satisfaz o princípio dos grandes desvios em $\mathscr{X}$ com a rate function I se forem verificadas as seguintes condições:*

(i) ***Limite superior dos grandes desvios.*** *Para cada subconjunto fechado F de $\mathscr{X}$*

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log P\{X^n \in F\} \leq - \inf_{x \in F} I(x).$$

(ii) ***Limite inferior dos grandes desvios.*** *Para cada subconjunto aberto G de $\mathscr{X}$*

$$\liminf_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log P\{X^n \in G\} \geq - \inf_{x \in G} I(x).$$

Nota: Veremos mais tarde que se uma sucessão de variáveis aleatórias satisfaz o princípio dos grandes desvios com uma *rate function* I, então essa *rate function* é única.
Podemos exprimir o princípio dos grandes desvios formalmente pela expressão

$$P\{X^n \in dx\} \asymp exp[-nI(x)]dx,$$

permitindo escrever

$$\mathbb{E}\{exp[-nh(X^n)]\} = \int_{\mathscr{X}} exp[-nh(x)]P\{X^n \in dx\} \asymp \int_{\mathscr{X}} exp[-n(h(x)+I(x))]dx.$$

Nem sempre é fácil ou possível analisar os limites considerados no princípio dos grandes desvios, sendo muitas vezes mais simples avaliar o comportamento assimptótico de expressões da forma

$$\frac{1}{n} \log \mathbb{E}\{exp[-nh(X^n)]\}, \tag{13}$$

onde h é qualquer função contínua e limitada de $\mathscr{X}$ para $\mathbb{R}$. O estudo assimptótico destas esperanças conduz-nos ao princípio de Laplace.

2.2 Formulação equivalente

Nesta secção vamos introduzir o princípio de Laplace, baseado no estudo do comportamento assimptótico de expressões do tipo (13) e provar a sua equivalência com o princípio dos grandes desvios.

Definição 2.3 *Seja I uma rate function em $\mathscr{X}$. Dizemos que uma sucessão $\{X^n\}$ satisfaz o princípio de Laplace em $\mathscr{X}$ com uma rate function I, se para qualquer função contínua e limitada $h : \mathscr{X} \to \mathbb{R}$,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{E}\{exp[-nh(X^n)]\} = -\inf_{x\in\mathscr{X}}\{h(x) + I(x)\}.$$

O termo limite superior do princípio de Laplace refere-se à validade de

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{E}\{exp[-nh(X^n)]\} \leq -\inf_{x\in\mathscr{X}}\{h(x) + I(x)\},$$

enquanto o termo limite inferior do princípio de Laplace é referente à validade de

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{E}\{exp[-nh(X^n)]\} \geq -\inf_{x\in\mathscr{X}}\{h(x) + I(x)\}$$

para qualquer função contínua e limitada h.

Teorema 2.4 *Seja $\{X^n\}$ uma sucessão que satisfaz o princípio dos grandes desvios em $\mathscr{X}$ com uma rate function I. Então para todas as funções contínuas e limitadas $h : \mathscr{X} \to \mathbb{R}$,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{E}\{exp[-nh(X^n)]\} = -inf_{x\in\mathscr{X}}\{h(x) + I(x)\}.$$

Mais concretamente, temos as seguintes implicações:
(i) O limite superior do princípio dos grandes desvios implica que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{E}\{exp[-nh(X^n)]\} \leq -inf_{x\in\mathscr{X}}\{h(x) + I(x)\}.$$

(ii) O limite inferior do princípio dos grandes desvios implica que

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{E}\{exp[-nh(X^n)]\} \geq -inf_{x\in\mathscr{X}}\{h(x) + I(x)\}.$$

Demonstração: (i) Como h é limitada existe um $M \in (0, \infty)$ tal que $-M \leq$

$h(x) \leq M$ para qualquer $x \in \mathscr{X}$. Seja N um inteiro positivo e $j \in \{1, 2, \ldots, N\}$ vamos considerar os conjuntos fechados da forma

$$F_{N,j} = \left\{ x \in \mathscr{X} : -M + \frac{2(j-1)M}{N} \leq -h(x) \leq -M + \frac{2jM}{N} \right\}.$$

Pelo limite superior dos grandes desvios obtemos

$$\begin{aligned}
&\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{E}\{exp[-nh(X^n)]\} \\
&\qquad \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \left(\sum_{j=1}^{\infty} \int_{F_{N,j}} exp[-nh(X^n)] P\{X^n \in dx\} \right) \\
&\qquad \leq \max_{j\in\{1,2,\ldots,N\}} \left\{ -M + \frac{2jM}{N} - \inf_{x\in F_{N,j}} \{I(x)\} \right\} \\
&\qquad \leq \max_{j\in\{1,2,\ldots,N\}} \sup_{x\in F_{N,j}} \left\{ -h(x) - I(x) \right\} + \frac{2jM}{N} \\
&\qquad \leq \sup_{x\in\mathscr{X}} \left\{ -h(x) - I(x) \right\} + \frac{2M}{N}.
\end{aligned}$$

Tomando $N \to \infty$, obtemos o limite superior do princípio de Laplace,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{E}\{exp[-nh(X^n)]\} \leq \sup_{x\in\mathscr{X}} \left\{ -h(x) - I(x) \right\} = -\inf_{x\in\mathscr{X}} \{h(x) + I(x)\}.$$

Agora vamos demonstrar (ii). Seja x um elemento arbitrário de $\mathscr{X}$ e $\epsilon > 0$. Se aplicarmos o limite inferior do princípio dos grandes desvios ao conjunto aberto $G = \{y \in \mathscr{X} : h(y) < h(x) + \epsilon\}$, obtemos:

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{E}\{exp[-nh(X^n)]\} &\geq \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{E}\{_G(X^n) exp[-nh(X^n)]\} \\
&\geq -h(x) - \epsilon + \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log P\{X^n \in G\} \\
&\geq -h(x) - \epsilon - \inf_{x\in G} \{I(x)\} \\
&\geq -h(x) - I(x) - \epsilon.
\end{aligned}$$

Como $x \in \mathscr{X}$ e $\epsilon > 0$, obtemos o limite inferior do princípio de Laplace,

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{E}\{exp[-nh(X^n)]\} \geq -\inf_{x\in\mathscr{X}} \{h(x) + I(x)\}.$$

□

O resultado que vamos apresentar de seguida corresponde ao recíproco do resultado expresso no teorema anterior.

Teorema 2.5 *O princípio de Laplace implica o princípio dos grandes desvios com a mesma rate function. Mais precisamente, se I é uma rate function em $\mathscr{X}$ e o limite*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{E}\{exp[-nh(X^n)]\} = -\inf_{x\in\mathscr{X}} \{h(x) + I(x)\}$$

é válido para qualquer função h contínua e limitada, então $\{X^n\}$ satisfaz o princípios dos grandes desvios em $\mathscr{X}$ com a mesma rate function I.

Demonstração: Seja I uma *rate function* em $\mathscr{X}$, vamos assumir que para todas as funções h contínuas e limitadas temos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{E}\{exp[-nh(X^n)]\} = -\inf_{x\in\mathscr{X}} \{h(x) + I(x)\}.$$

Vamos começar por provar que para cada conjunto fechado F, a sucessão $\{X^n\}$ satisfaz o limite superior do princípio dos grandes desvios,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log P\{X^n \in F\} \leq -\inf_{x\in F} I(x).$$

Dado um conjunto fechado F definimos a função não negativa e semicontínua inferiormente,

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in F \\ \infty & \text{se } x \in F^c \end{cases}$$

Seja $d(x, F)$ a distância de x a F. Para $j \in \mathbb{N}$ definimos

$$h_j(x) = j(d(x, F) \wedge 1).$$

Então h_j é uma função limitada e contínua, e h_j converge para φ quando $j \to \infty$. Portanto

$$\frac{1}{n} \log P\{X^n \in F\} = \frac{1}{n} \log \mathbb{E}\{exp[-n\varphi(X^n)]\} \leq \frac{1}{n} \log \mathbb{E}\{exp[-nh_j(X^n)]\}.$$

Logo

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log P\{X^n \in F\} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{E}\{exp[-nh_j(X^n)]\} = -\inf_{x\in\mathscr{X}} \{h_j(x) + I(x)\}$$

Completamos a demonstração referente ao limite superior do princípio dos grandes desvios mostrando que

$$\lim_{j\to\infty} \inf_{x\in\mathscr{X}} \{h_j(x) + I(x)\} = \inf_{x\in\mathscr{X}} I(x).$$

Como $h_j \leq \varphi$ temos

$$\inf_{x\in\mathscr{X}}\{h_j(x)+I(x)\} \leq \inf_{x\in\mathscr{X}}\{\varphi(x)+I(x)\} \leq \inf_{x\in F} I(x).$$

Logo

$$\limsup_{j\to\infty} \inf_{x\in\mathscr{X}}\{h_j(x)+I(x)\} \leq \inf_{x\in F} I(x).$$

Portanto só resta verificar que

$$\liminf_{j\to\infty} \inf_{x\in\mathscr{X}}\{h_j(x)+I(x)\} \geq \inf_{x\in F} I(x).$$

Pelo limite de Laplace

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\mathbb{E}\{exp[-nh(X^n)]\} = -\inf_{x\in\mathscr{X}}\{h(x)+I(x)\}$$

podemos concluir, definindo $h(x) = 0$ para $x \in \mathscr{X}$, que o ínfimo da *rate function* em $\mathscr{X}$ é zero.
Vamos então assumir que $\inf_{x\in F} I(x) > 0$ (o caso em que $\inf_{x\in F} I(x) = 0$ é trivial). Supomos também que $\inf_{x\in F} I(x) < \infty$. Como $h_j = 0$ em F,

$$\begin{aligned}\inf_{x\in\mathscr{X}}\{h_j(x)+I(x)\} &= \min\big(\inf_{x\in F}\{h_j(x)+I(x)\}, \inf_{x\in F^c}\{h_j(x)+I(x)\}\big)\\ &= \min\big(\inf_{x\in F} I(x), \inf_{x\in F^c}\{h_j(x)+I(x)\}\big).\end{aligned}$$

Portanto só precisamos de ver que

$$\liminf_{j\to\infty} \inf_{x\in F^c}\{h_j(x)+I(x)\} \geq \inf_{x\in F} I(x).$$

Suponhamos, com vista ao absurdo, que

$$\liminf_{j\to\infty} \inf_{x\in F^c}\{h_j(x)+I(x)\} < \inf_{x\in F} I(x).$$

Então existe um subsucessão de $j \in \mathbb{N}$ e $\epsilon \in (0, \frac{1}{2}\inf_{x\in F} I(x))$ tal que, para qualquer j pertencente à subsucessão,

$$\inf_{x\in F^c}\{h_j(x)+I(x)\} \leq \inf_{x\in F} I(x) - 2\epsilon.$$

Temos também que para cada j existe $x_j \in F^c$ tal que

$$h_j(x_j)+I(x_j) \leq \inf_{x\in F} I(x) - \epsilon.$$

Então $d(x_j, F) \to 0$ em j, caso contrário $h_j(x_j) = j(d(x_j, F)\wedge 1) \to \infty$, o que contraria o facto de $\inf_{x\in F} I(x) < \infty$. A convergência $d(x_j, F) \to 0$

implica que existe uma sucessão $\{y_i\}$ em F tal que $d(x_j, y_j) \to 0$. Usaremos agora o facto que $\sup_j I(x_j) \leq \inf_{x \in F} I(x) - \epsilon$. Como I tem conjuntos de nível compactos, existe uma outra subsucessão e um ponto $x^* \in \{x \in \mathscr{X} : I(x) \leq \inf_{x \in F} I(x) - \epsilon\}$ tal que $d(x_j, x^*) \to 0$. O facto que $d(x_j, y_j) \to 0$ implica que $d(y_j, x^*) \to 0$. Mas como $y_j \in F$ para qualquer $j \in \mathbb{N}$ e F é fechado, $x^* \in F$ e portanto $I(x^*) \geq \inf_{x \in F} I(x)$. Isto contradiz o facto de $x^* \in \{x \in \mathscr{X} : I(x) \leq \inf_{x \in F} I(x) - \epsilon\}$. Esta contradição completa a demonstração.

Vamos agora demonstrar que o princípio de Laplace implica que se verifique o limite inferior do princípio dos grandes desvios.
Seja G um conjunto aberto. Se $\inf_{x \in G} I(x) = \infty$ então o resultado está demonstrado. Vamos então assumir que $\inf_{x \in G} I(x) < \infty$. Seja $x \in G$ e $M > 0$ tal que $I(x) < M$. Então existe $\delta > 0$ tal que $B(x, \delta) = \{y \in \mathscr{X} : d(y, x) < \delta\}$ é um subconjunto de G. Definimos

$$h(y) = M\left(\frac{d(y, x)}{\delta} \wedge 1\right).$$

Esta função é contínua, limitada e satisfaz $h(x) = 0$, $h(y) = M$ para $y \in B(x, \delta)^c$ e $0 \leq h(z) \leq M$ para qualquer $z \in \mathscr{X}$. Então temos que

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\{exp[-nh(X^n)]\} \\
&\quad e^{-nM} P\{X^n \in B(x, \delta)^c\} + P\{X^n \in B(x, \delta)\} \leq e^{-nM} + P\{X^n \in B(x, \delta)\}
\end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{aligned}
\max\left(\liminf_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log P\{X^n \in B(x, \delta)\}, -M\right) &\geq \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{E}\{exp[-nh(X^n)]\} \\
&= -\inf_{y \in \mathscr{X}} \{h(y) + I(y)\} \\
&\geq -h(x) - I(x) \\
&= -I(x).
\end{aligned}$$

Como $M > I(x)$ e $B(x.\delta) \subset G$, temos que

$$\liminf_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log P\{X^n \in G\} \geq \liminf_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log P\{X^n \in B(x, \delta)\} \geq -I(x).$$

Logo

$$\liminf_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log P\{X^n \in G\} \geq \inf_{x \in G} I(x),$$

ficando assim completa a demonstração do teorema. □

2.3 Resultados elementares

Nesta secção vamos ainda apresentar alguns resultados bem conhecidos mas que julgamos relevantes para a compreensão do princípio dos grandes desvios.

Teorema 2.6 *Unicidade da rate function - Seja $\{X^n\}$ uma sucessão de variáveis aleatórias satisfazendo o princípio dos grandes desvios em $\mathscr{X}$ com duas rate functions I e J. Então $I(\xi) = J(\xi)$ para qualquer $\xi \in \mathscr{X}$.*

Demonstração: Definimos a função contínua e limitada h_j como $h_j(x) = j(d(x,\xi) \wedge 1)$ com $\xi \in \mathscr{X}$ e $j \in \mathbb{N}$. Pelo Teorema 2.4, $\{X^n\}$ satisfaz o princípio de Laplace com as mesmas *rate functions.* Portanto

$$\lim_{j\to\infty} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{E}\{exp[-nh_j(X^n)]\} = \lim_{j\to\infty} \inf_{x\in\mathscr{X}} \{h_j(x) + I(x)\} = I(\xi)$$

e

$$\lim_{j\to\infty} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{E}\{exp[-nh_j(X^n)]\} = \lim_{j\to\infty} \inf_{x\in\mathscr{X}} \{h_j(x) + J(x)\} = J(\xi),$$

logo $I(\xi) = J(\xi)$. □

Teorema 2.7 *Princípio da contração - Sejam $\mathscr{X}$ e $\mathscr{Y}$ espaços métricos separáveis, I uma rate function em $\mathscr{X}$, e $f : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ uma função contínua. As seguintes proposições são verdadeiras:*

(i) Para cada $y \in \mathscr{Y}$

$$J(y) = \inf\{I(x) : x \in f^{-1}(y)\}$$

é uma rate function em $\mathscr{Y}$.

(ii) Se $\{X^n\}$ satisfaz o princípio de Laplace em $\mathscr{X}$ com uma rate function I, então $\{f(X^n)\}$ satisfaz o princípio de Laplace em $\mathscr{Y}$ com uma rate function J.

Demonstração: (i) Seja $M < \infty$ definimos os conjuntos de nível

$$L_j(M) = \{y \in \mathscr{Y} : J(y) \leq M\} \text{ e } L_i(M) = \{x \in \mathscr{X} : I(x) \leq M\}.$$

A definição de J implica que $L_j(M) \supset f(L_i(M))$. Por outro lado, como I é uma rate function, para cada $y \in f(\mathscr{X})$ o ínfimo na definição de J é atingido num determinado x pertencente ao conjunto fechado $f^{-1}(y)$. Então $L_j(M) \subset f(L_i(M))$, o que implica que $L_j(M) = f(L_i(M))$. Como f é contínua e os conjuntos de nível de I são compactos temos que, pela conclusão anterior, os conjuntos de nível de J são compactos. Como J é não negativa, temos que J é uma rate function em $\mathscr{Y}$.

(ii) Para qualquer função contínua e limitada $h : \mathscr{Y} \to \mathbb{R}$, a composição $h \circ f$ é uma função contínua e limitada de $\mathscr{X}$ para $\mathbb{R}$ portanto,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{E}\{exp[-nh(f(X^n))]\} = -\inf_{x\in\mathscr{X}}\{h(f(x))+I(f(x))\} = -\inf_{y\in\mathscr{Y}}\{h(y)+J(y)\}.$$

Como na demonstração da proposição (i) já tínhamos concluído que J é uma rate function, a demonstração de (ii) está concluída. □

2.4 Entropia relativa e representação variacional do processo de Wiener

A entropia relativa vai ter um papel importante na definição da *rate function*. Seja (V, A) um espaço mensurável. Definimos por $\mathscr{P}(V)$ o conjunto das medidas de probabilidade em (V, A). Para $P \in \mathscr{P}(V)$ a entropia relativa $R(.||P)$ é uma correspondência de $\mathscr{P}(V)$ para $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ definido por

$$R(Q||P) = \int_V \left(\log \frac{dQ}{dP} \right) dQ$$

no caso de $Q \in \mathscr{P}(V)$ ser absolutamente contínua em relação a P, caso contrário $R(Q||P) = \infty$.
Para $t \in \mathbb{R}$ definimos $t^- = -(t \wedge 0)$. Como $s(\log s)^-$ é limitado para $s \in [0, \infty]$, quando $Q \in \mathscr{P}(V)$ é absolutamente contínua em relação a P temos

$$\int_V \left(\log \frac{dQ}{dP} \right)^- dQ = \int_V \frac{dQ}{dP} \left(\log \frac{dQ}{dP} \right)^- dP < \infty.$$

Segue então que $\int_V \left(\log \frac{dQ}{dP} \right) dQ$ está bem definido e que

$$R(Q||P) = \int_V \frac{dQ}{dP} \left(\log \frac{dQ}{dP} \right) dP.$$

□

Vamos agora inserir um lema necessário para estabelecer uma formulação variacional para o processo de Wiener.

Lema 2.8 *Seja (V, A) um espaço mensurável e P, Q medidas de probabilidade sobre V. Então $R(Q||P) \geq 0$ e $R(Q||P) = 0$ se e só se $Q = P$.*

Demonstração: Para provar a não negatividade temos apenas de considerar o caso em que $R(Q||P) < \infty$. Como $s \log s \geq s - 1$, existindo igualdade apenas quando $s = 1$ temos

$$R(Q||P) = \int_V \frac{dQ}{dP} \left(\log \frac{dQ}{dP} \right) dP \geq \int_V \left(\frac{dQ}{dP} - 1 \right) dP = 0$$

quando $dQ/dP = 1$, quase por toda a parte, ou seja, quando $Q = P$. □

Teorema 2.9 *Seja* (V, A) *um espaço mensurável,* $k : V \to \mathbb{R}$ *uma função mensurável limitada e* P *uma medida de probabilidade em* V*. Verificam-se as seguintes proposições:*

(i) *Tem-se a representação variacional*

$$-\log \int_V e^{-k} dP = \inf_{Q \in \mathscr{P}(V)} \left\{ R(Q||P) + \int_V k dQ \right\}. \tag{14}$$

(ii) *Seja* Q_0 *uma medida de probabilidade em* V *absolutamente contínua em relação a* P *e satisfazendo*

$$\frac{dQ_0}{dP}(x) = e^{-k(x)} \, \frac{1}{\int_V e^{-k} dP},$$

então o ínfimo na equação (11) é único e é atingido em Q_0*.*

Demonstração: Para a parte (i) é suficiente mostrar que

$$-\log \int_V e^{-k} dP = \inf \left\{ R(Q||P) + \int_V k dQ : Q \in \mathscr{P}(V), \; R(Q||P) < \infty \right\}.$$

Se $R(Q||P) < \infty$, então Q é absolutamente contínua em relação a P, como P é absolutamente contínua em relação a Q_0, então Q também é absolutamente contínua em relação a Q_0. Logo

$$\begin{aligned} R(Q||P) &+ \int_V k dQ \\ &= \int_V \left(\log \frac{dQ}{dP} \right) dQ + \int_V k dQ \\ &= \int_V \left(\log \frac{dQ}{dQ_0} \right) dQ + \int_V \left(\log \frac{dQ_0}{dP} \right) dQ + \int_V k dQ \\ & R(Q||Q_0) - \log \int_V e^- k dP. \end{aligned}$$

Como $R(Q||Q_0) \geq 0$ e $R(Q||Q_0) = 0$ se e só se $Q = Q_0$, completamos, não só a demonstração de (i), mas de (ii), pois o mínimo da representação variacional é a atingido em Q_0. $\square$

Terminamos esta secção com um resultado obtido em [1], relativo à representação variacional de um processo de Wiener cilíndrico. Aqui, W^∞ designa o espaço de Wiener definido por W_t e A representa o conjuntos dos processos estocásticos com valores no espaço de Cameron-Martin associado.

Lema 2.10 *Seja F uma função mensurável limitada definida em W^∞ com valores reais, então temos que*

$$-\log \mathbb{E}(e^{-F(W)}) = \inf_{h \in A} \mathbb{E}\bigg(F(W+h) + \frac{1}{2}||h||^2_{\mathbb{H}} \bigg).$$

3 Existência e unicidade de Fluxo Estocástico

Neste capítulo vamos definir fluxos estocásticos para equações diferenciais estocásticas com drift e coeficiente de difusão irregulares em que o movimento Browniano considerado é um movimento Browniano cilíndrico sobre um espaço de Hilbert adequado. Em [2] é provada a existência de fluxo fraco (no sentido estocástico) para uma equação diferencial estocástica deste tipo, onde o drift é solução da equação de Navier-Stokes. Neste trabalho estabeleceremos um teorema geral de existência e unicidade de solução forte (no sentido estocástico). A noção de fluxo que vamos apresentar corresponde a uma generalização estocástica da noção de fluxo (ver [18]), definido quase seguramente relativamente à medida de Lebesgue, introduzida por DiPerna Lions [7], no contexto determinístico, para campos de velocidade em espaços de Sobolev. O método utilizado em [7] consiste na utilização da equação do transporte para provar a existência e unicidade do fluxo. Os mesmos resultados foram obtidos em [5] utilizando uma aproximação estritamente Lagrangeana, em vez da equação do transporte. Em [18] é adotado este método Lagrangeano para provar a existência e unicidade de fluxo estocástico para equações diferenciais estocásticas definidas através de um Browniano em dimensão finita e coeficientes irregulares independentes do tempo. Neste trabalho seguimos métodos análogos aos considerados em [5], [18].

3.1 Formulação do problema

Sejam $W_t^{k_1}$, $W_t^{k_2}$, $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$, movimentos Brownianos independentes com valores em $\mathbb{R}$, definidos sobre um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathscr{F}, P)$. Consideramos o processo estocástico W_t definido da seguinte forma

$$W_t = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2/\{(0,0)\}} W_t^{k_1} e_{k_1} + W_t^{k_2} e_{k_2} = (\ldots, \underbrace{W_t^{k_1}, W_t^{k_2}}_{\text{posição k}}, \ldots)$$

onde $e_{k_1} = (\ldots, 0, 0, \underbrace{1, 0}_{\text{posição k}}, 0, 0, \ldots)$ e $e_{k_2} = (\ldots, 0, 0, \underbrace{0, 1}_{\text{posição k}}, 0, 0, \ldots)$ formam uma base ortonormada de l^2.

Este processo estocástico corresponde a um processo de Wiener cilíndrico sobre o espaço de Hilbert l^2. O operador de covariância Q é o operador identidade em l^2. Uma vez que o operador identidade não é um operador traço, pelo Teorema 1.13 sabemos que W_t toma valores num espaço de Hilbert maior que l^2, mais precisamente W_t pode ser considerado como Q-processo de Wiener num espaço de Hilbert l_*^2, tal que $l_*^2 \supset l^2$ e a operação de inclusão de l^2 em l_*^2 seja um operador de Hilbert-Schmidt.

Vamos definir $\mathscr{F}_t$, , $t \leq T$, como a σ-álgebra gerada por $\{W_s, s \leq t\}$.

Nota: Daqui em diante a esperança $\mathbb{E}$ é tomada em relação à medida de probabilidade P.

Consideremos a seguinte equação diferencial estocástica

$$dX_t = u(X_t, t)dt + \sigma(X_t)dW_t, \;\; X_0 = x, \;\; x \in \mathbb{T}^2 \tag{15}$$

onde $\mathbb{T}^2$ corresponde ao toro bidimensional, o drift $u \in L^2\left((0,T); H^1(\mathbb{T}^2)\right)$ e o coeficiente de difusão σ está definido formalmente da seguinte forma:

$$\sigma(x) = \begin{pmatrix} \ldots, A_k^1(x), B_k^1(x), \ldots \\ \ldots, A_k^2(x), B_k^2(x), \ldots \end{pmatrix} \tag{16}$$

onde $A_k^1(x) = \frac{k_2 \cos(k.x)}{|k|^\beta}$, $A_k^2(x) = -\frac{k_1 \cos(k.x)}{|k|^\beta}$, $B_k^1(x) = \frac{k_2 \sin(k.x)}{|k|^\beta}$, $B_k^2(x) = -\frac{k_1 \sin(k.x)}{|k|^\beta}$, com $k = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2/\{(0,0)\}$ e $\beta > 3$

Vamos verificar que para cada $x \in \mathbb{T}^2$, $\sigma(x)$ está bem definido como um operador de Hilbert-Schmidt de l^2 em $\mathbb{R}^2$.

Introduzimos algumas notações. Dado $h \in l^2$ representaremos por $\langle \sigma(x), h \rangle$ o campo vetorial em $\mathbb{R}^2$ correspondente a imagem de h por $\sigma(x)$. Uma vez que $\sigma(x)$ pode formalmente ser identificada com a matriz (16), indicamos por $\sigma_{i,\cdot}(x)$ a linha i e por $\sigma_{\cdot,j}(x)$ a coluna j. Assim, podemos escrever

$$\langle \sigma(x), h \rangle = \left(\langle \sigma_{1,\cdot}(x), h \rangle_{l^2}, \langle \sigma_{2,\cdot}(x), h \rangle_{l^2}\right)$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle_{l^2}$ denota o produto interno usual em l^2. No caso em que u, z são dois vetores em $\mathbb{R}^2$, $\langle u, z \rangle$ representa o produto interno usual em $\mathbb{R}^2$.

Lema 3.1 *Seja $\sigma(x)$ definido em (16), então tem-se:*
(i) $\sigma : \mathbb{T}^2 \to L_{(2)}\big(l^2; \mathbb{R}^2\big)$,

(ii) $div\, \sigma_{\cdot,l} := \partial_i \sigma_{i,l}$.

Demonstração

$$
\begin{aligned}
||\sigma(x)||_{HS}^2 &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^2/\{(0,0)\}} |A_k^1 e_{k_1}|^2 + |A_k^2 e_{k_1}|^2 + |B_k^1 e_{k_2}|^2 + |B_k^2 e_{k_2}|^2 \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}^2/\{(0,0)\}} \frac{1}{|k|^{2\beta}}\big((k_2\cos(k.x))^2 + (k_2\sin(k.x))^2\big) \\
&+ \frac{1}{|k|^{2\beta}}\big((k_1\cos(k.x))^2 + (k_1\sin(k.x))^2\big) \\
&\leq \sum_{k\in\mathbb{Z}^2/\{(0,0)\}} \frac{1}{|k|^{2\beta}}\big(2k_2^2 + 2k_1^2\big) \leq 2\sum_{k\neq 0}\frac{1}{|k|^{2\beta-2}}
\end{aligned}
$$

que converge pois $\beta > 3$.

A demonstração da proposição (ii) sai do directamente do facto que, para qualquer $k \in \mathbb{Z}^2/\{(0,0)\}$

$$\partial_1 A_k^1(x) + \partial_2 A_k^2(x) = \partial_1\left(\frac{k_2\cos(k.x)}{|k|^\beta}\right) - \partial_2\left(\frac{k_1\cos(k.x)}{|k|^\beta}\right) = 0$$

e

$$\partial_1 B_k^1(x) + \partial_2 B_k^2(x) = \partial_1\left(\frac{k_2\sin(k.x)}{|k|^\beta}\right) - \partial_2\left(\frac{k_1\sin(k.x)}{|k|^\beta}\right) = 0.$$

□

Pelo Lema 3.1 (i) verificamos que tomando espaços de Hilbert adequados, o coeficiente de difusão da equação (15) pode ser considerado como um operador de Hilbert-Schmidt. Assim, o integral estocástico que aparece na equação (15) está bem definido. Estamos perante uma equação diferencial estocástica em $\mathbb{R}^2$, definida por um movimento Browniano em dimensão infinita e drift em $L^2((0,T);H^1(\mathbb{T}^2))$.

Vamos agora introduzir alguns lemas preliminares que utilizaremos mais adiante.

Lema 3.2 *Seja $\beta > 3$ e $x \in \mathbb{T}^2$. Definindo*

$$|||\nabla\sigma(x)||| := \sum_{k\in\mathbb{Z}^2/\{(0,0)\}} |\nabla\big(\sigma(x)e_{k_1}\big)|^2 + |\nabla\big(\sigma(x)e_{k_2}\big)|^2,$$

temos $|||\nabla\sigma(x)||| \leq C$.

Demonstração:

$$\begin{aligned}|\nabla\big(\sigma(x)e_{k_1}\big)|^2 &= \left|\begin{pmatrix}\partial_1 A_k^1(x) & \partial_2 A_k^1(x)\\ \partial_1 A_k^2(x) & \partial_2 A_k^2(x)\end{pmatrix}\right|^2\\ &= |\partial_1 A_k^1(x)|^2 + |\partial_2 A_k^1(x)|^2 + |\partial_1 A_k^2(x)|^2 + |\partial_2 A_k^2(x)|^2.\end{aligned}$$

Analogamente temos que

$$|\nabla\big(\sigma(x)e_{k_2}\big)|^2 = |\partial_1 B_k^1(x)|^2 + |\partial_2 B_k^1(x)|^2 + |\partial_1 B_k^2(x)|^2 + |\partial_2 B_k^2(x)|^2.$$

Logo

$$\begin{aligned}|||\nabla\sigma(x)||| &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^2/\{(0,0)\}} |\nabla\big(\sigma(x)e_{k_1}\big)|^2 + |\nabla\big(\sigma(x)e_{k_2}\big)|^2\\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^2/\{(0,0)\}} |\partial_1 A_k^1(x)|^2 + |\partial_2 A_k^1(x)|^2 + |\partial_1 A_k^2(x)|^2 + |\partial_2 A_k^2(x)|^2\\ &+ |\partial_1 B_k^1(x)|^2 + |\partial_2 B_k^1(x)|^2 + |\partial_1 B_k^2(x)|^2 + |\partial_2 B_k^2(x)|^2.\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}|\partial_1 A_k^1(x)|^2 + |\partial_2 A_k^1(x)|^2 &= \frac{1}{|k|^{2\beta}}\big((k_1^2+k_2^2)k_2^2\sin^2(kx)\big)\\ &\leq \frac{k_2^2}{|k|^{2\beta-2}}\end{aligned}$$

e analogamente

$$|\partial_1 A_k^2(x)|^2 + |\partial_2 A_k^2(x)|^2 \leq \frac{k_1^2}{|k|^{2\beta-2}},$$

$$|\partial_1 B_k^1(x)|^2 + |\partial_2 B_k^1(x)|^2 \leq \frac{k_2^2}{|k|^{2\beta-2}},$$

$$|\partial_1 B_k^2(x)|^2 + |\partial_2 B_k^2(x)|^2 \leq \frac{k_1^2}{|k|^{2\beta-2}}$$

temos que

$$\begin{aligned}|||\nabla\sigma(x)||| &\leq \sum_{k\in\mathbb{Z}^2/\{(0,0)\}} \frac{1}{|k|^{2\beta-2}}\big(2k_1^2+2k_2\big)\\ &= 2\sum_{k\in\mathbb{Z}^2/\{(0,0)\}} \frac{1}{|k|^{2\beta-4}}.\end{aligned}$$

Que é uma série convergente
□

Vamos agora observar que para a equação (15) com o coeficiente de difusão (16) o integral de Itô coincide com o integral de Stratonovich (cf. [2]).

Lema 3.3 *A equação (15)*

$$\begin{pmatrix} dX_t^1 \\ dX_t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_t^1(X_t(x))dt \\ u_t^2(X_t(x))dt \end{pmatrix}$$
$$+ \begin{pmatrix} \sum_{k\in\mathbb{Z}^2/\{(0,0)\}} \frac{1}{|k|^\beta}\big(A_k^1(X_t(x))dW_k^1(t) + B_k^1(X_t(x))dW_k^2(t)\big) \\ -\sum_{k\in\mathbb{Z}^2/\{(0,0)\}} \frac{1}{|k|^\beta}\big(A_k^2(X_t(x))dW_k^1(t) + B_k^2(X_t(x))dW_k^2(t)\big) \end{pmatrix}$$

pode ser escrita como

$$\begin{pmatrix} dX_t^1 \\ dX_t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_t^1(X_t(x))dt \\ u_t^2(X_t(x))dt \end{pmatrix}$$
$$+ \begin{pmatrix} \sum_{k\in\mathbb{Z}^2/\{(0,0)\}} \frac{1}{|k|^\beta}\big(A_k^1(X_t(x))\circ dW_k^1(t) + B_k^1(X_t(x))\circ dW_k^2(t)\big) \\ -\sum_{k\in\mathbb{Z}^2/\{(0,0)\}} \frac{1}{|k|^\beta}\big(A_k^2(X_t(x))\circ dW_k^1(t) + B_k^2(X_t(x))\circ dW_k^2(t)\big), \end{pmatrix}$$

ou seja, a contração de Itô é zero.

demonstração: Temos

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^2/\{(0,0)\}} \frac{1}{|k|^\beta}\big(A_k^1(X_t(x))\circ dW_k^1(t) + B_k^1(X_t(x))\circ dW_k^2(t)\big)$$
$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}^2/\{(0,0)\}} \frac{1}{|k|^\beta}\big(A_k^1(X_t(x))dW_k^1(t) + B_k^1(X_t(x))dW_k^2(t)\big)$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}^2/\{(0,0)\}} \frac{1}{|k|^\beta}\Big[A_k^1(X_t(x))\partial_1\big(A_k^1(X_t(x))\big)dt + A_k^2(X_t(x))\partial_2\big(A_k^1(X_t(x))\big)dt\Big]$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}^2/\{(0,0)\}} \frac{1}{|k|^\beta}\Big[B_k^1(X_t(x))\partial_1\big(B_k^1(X_t(x))\big)dt + B_k^2(X_t(x))\partial_2\big(B_k^1(X_t(x))\big)dt\Big]$$

e, $\forall\, k \in \mathbb{Z}^2/\{(0,0)\}$, verifica-se que

$$A_k^1(x)\partial_1\big(A_k^1(x)\big) + A_k^2(x)\partial_2\big(A_k^1(x)\big) + B_k^1(x)\partial_1\big(B_k^1(x)\big) + B_k^2(x)\partial_2\big(B_k^1(x)\big)$$
$$= -\frac{k_1k_2^2cos(k.x)sen(k.x)}{|k|^{2\beta}} + \frac{k_1^2k_2cos(k.x)sen(k.x)}{|k|^{2\beta}}$$
$$+ \frac{k_1k_2^2cos(k.x)sen(k.x)}{|k|^{2\beta}} - \frac{k_1^2k_2cos(k.x)sen(k.x)}{|k|^{2\beta}} = 0.$$

Portanto, obtemos

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^2/\{(0,0)\}} \frac{1}{|k|^\beta}\big(A_k^1(X_t(x))\circ dW_k^1(t) + B_k^1(X_t(x))\circ dW_k^2(t)\big)$$
$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}^2/\{(0,0)\}} \frac{1}{|k|^\beta}\big(A_k^1(X_t(x))dW_k^1(t) + B_k^1(X_t(x))dW_k^2(t)\big).$$

Analogamente, também obtemos

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^2/\{(0,0)\}} \frac{1}{|k|^\beta}\big(A_k^2(X_t(x))\circ dW_k^1(t) + B_k^2(X_t(x))\circ dW_k^2(t)\big)$$
$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}^2/\{(0,0)\}} \frac{1}{|k|^\beta}\big(A_k^2(X_t(x))dW_k^1(t) + B_k^2(X_t(x))dW_k^2(t)\big).$$

□

Definição 3.4 *Seja $X_t(\omega, x)$ um processo estocástico definido em $\mathbb{R}_+\times\Omega\times\mathbb{T}^2$ com valores em $\mathbb{T}^2$. Diz-se que X é um fluxo estocástico da equação (15) quase por toda a parte se:*

(A) Para $x \in \mathbb{T}^2$, $t \mapsto X_t(x)$ é um processo estocástico adaptado à filtração $\mathscr{F}_t$ contínuo quase por toda parte tal que, $\forall T > 0$,

$$\int_0^T |u\big(X_s(x), s\big)|ds + \int_0^T |\sigma\big(X_s(x)\big)|^2 < \infty,$$

e $X_t(x)$ é solução da equação

$$X_t(x) = x + \int_0^t u\big(X_s(x), s\big)ds + \int_0^t \sigma\big(X_s(x)\big)dW_s, \ \ \forall t \geq 0.$$

(B) Para qualquer $T \geq 0$ existe $K_{T,u,\sigma} > 0$ tal que para qualquer $\varphi \in L^+$, onde L^+ é o espaço de todas as funções Borel-mensuráveis não negativas, temos

$$\sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}\int_{\mathbb{T}^2} \varphi\big(X_t(x)\big)dx \leq K_{T,b,\sigma}\int_{\mathbb{T}^2}\varphi(x)dx.$$

Veremos mais tarde que para a equação diferencial estocástica (15) tem-se $K_{T,u,\sigma} = 1$.

Estamos então em condições de introduzir dois lemas que funcionaram como a base para a demonstração da existência e unicidade.

Lema 3.5 *Sejam $X_t(x)$ e $\hat{X}_t(x)$ dois fluxos estocásticos quase por toda a parte definidos por (u,σ) e $(\hat{u},\hat{\sigma})$, respetivamente. onde $u,\hat{u} \in L^2\big([0,T];H^1(\mathbb{T}^2)\big)$, $\sigma,\hat{\sigma} : \mathbb{T}^2 \mapsto L_{(2)}(l^2,\mathbb{R}^2)$, e $K_{T,u,\sigma} = K_{T,\hat{u},\hat{\sigma}} = 1$. Então, $\forall\delta > 0\ \exists C_1, C_2$ tal que*

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\int_{\mathbb{T}^2} \log\left(\frac{\sup_{t\in[0,T]}|X_t(x)-\hat{X}_t(x)|^2}{\delta^2}+1\right)dx \\
&\leq \frac{C_1}{\delta}\left(\int_0^T\int_{\mathbb{T}^2}|u(x,t)-\hat{u}(x,t)| + \left\{\int_0^T\int_{\mathbb{T}^2}\|\sigma(x)-\hat{\sigma}(x)\|_{HS}^2\right\}^{\frac{1}{2}}\right. \\
&\left.+\frac{1}{\delta}\int_0^T\int_{\mathbb{T}^2}\|\sigma-\hat{\sigma}\|_{HS}^2\right)+C2,
\end{aligned}
$$

onde C_1 não depende de $u,\hat{u}\,,\sigma,\hat{\sigma}$ e

$$
C_2 = C_{21}\int_0^T\int_{\mathbb{T}^2}|\nabla\hat{u}(x,t)| + C_{22}\left\{\int_0^T\int_{\mathbb{T}^2}|||\nabla\sigma(x)|||\right\}^{\frac{1}{2}} + C_{23}\int_0^T\int_{\mathbb{T}^2}|||\nabla\hat{\sigma}(x)|||.
$$

Nota: As desigualdades D1 e D2 utilizadas na próxima demonstração encontram-se no Apêndice.

Demonstração: Seja $Z_t(x) = X_t(x) - \hat{X}_t(x)$, pela fórmula de Itô temos

$$
\begin{aligned}
&\log\left(\frac{|Z_t|^2}{\delta^2}+1\right) = \\
&\quad 2\int_0^t \frac{\langle Z_s, u(X_s,s)-\hat{u}(\hat{X}_s,s)\rangle}{|Z_s|^2+\delta^2}ds + 2\int_0^t\frac{\langle Z_s,\big(\sigma(X_s)-\hat{\sigma}(\hat{X}_s)\big)dW_s\rangle}{|Z_s|^2+\delta^2} \\
&\quad + \int_0^t \frac{||\sigma(X_s)-\hat{\sigma}(\hat{X}_s)||_{HS}^2}{|Z_s|^2+\delta^2}ds - 2\int_0^t\frac{|(\sigma(X_s)-\hat{\sigma}(\hat{X}_s))^\top Z_s|^2}{|Z_s|^2+\delta^2}ds \\
&\quad = I_1(t)+I_2(t)+I_3(t)+I_4(t).
\end{aligned}
$$

Para $I_1(t)$ temos,

$$
\begin{aligned}
I_1(t) &= 2\int_0^t \frac{\langle Z_s, u(X_s,s)-\hat{u}(\hat{X}_s,s)\rangle}{|Z_s|^2+\delta^2}ds \\
&= 2\int_0^t \frac{\langle Z_s, u(X_s,s)-\hat{u}(X_s,s)\rangle}{|Z_s|^2+\delta^2}ds + 2\int_0^t \frac{\langle Z_s, \hat{u}(X_s,s)-\hat{u}(\hat{X}_s,s)\rangle}{|Z_s|^2+\delta^2}ds \\
&\leq 2\int_0^t \frac{|Z_s||u(X_s,s)-\hat{u}(X_s,s)|}{|Z_s|^2+\delta^2}ds + 2\int_0^t \frac{|Z_s||\hat{u}(X_s,s)-\hat{u}(\hat{X}_s,s)|}{|Z_s|^2+\delta^2}ds.
\end{aligned}
$$

Como $\frac{|x|}{|x|^2+\delta^2} \le \frac{1}{2\delta}$ e $\frac{|x|}{|x|^2+\delta^2} \le \frac{1}{\sqrt{|x|^2+\delta^2}}$ verificamos que

$$I_1(t) \le \frac{1}{\delta}\int_0^t |u(X_s,s) - \hat{u}(X_s,s)|ds + 2\int_0^t \frac{|\hat{u}(X_s,s) - \hat{u}(\hat{X}_s,s)|}{\sqrt{|Z_s|^2+\delta^2}}ds = I_{11}(t) + I_{12}(t).$$

Seja $f^*(T) = \sup_{t\in[0,T]} |f(t)|$. Considerando $I_{11}(t)$, deduzimos que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\int_{\mathbb{T}^2} |I_{11}^*(T)| &\le \frac{1}{\delta}\mathbb{E}\int_0^T\int_{\mathbb{T}^2} |u(X_t,t) - \hat{u}(X_t,t)|dt = \frac{1}{\delta}\int_0^T \mathbb{E}\int_{\mathbb{T}^2} |u(X_t,t) - \hat{u}(X_t,t)|dt \\ &= \frac{1}{\delta}\int_0^T\int_{\mathbb{T}^2} |u(x,t) - \hat{u}(x,t)|.\end{aligned}$$

Usando as desigualdades $D1$ e $D2$, verificamos que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\int_{\mathbb{T}^2} |I_{12}^*(T)| &= \mathbb{E}\int_{\mathbb{T}^2}\int_0^T \frac{|\hat{u}(X_t,t) - \hat{u}(\hat{X}_t,t)|}{\sqrt{|Z_t|^2+\delta^2}}dt \\ &\overset{D1}{\le} C_{21}'\mathbb{E}\int_0^T\int_{\mathbb{T}^2} \big([M_R|\nabla\hat{u}|](X_t,t) + [M_R|\nabla\hat{u}|](\hat{X}_t,t)\big)dt \\ &\le C_{21}'\int_0^T \mathbb{E}\int_{\mathbb{T}^2} [M_R|\nabla\hat{u}|](X_t,t) + \int_{\mathbb{T}^2} [M_R|\nabla\hat{u}|](\hat{X}_t,t)dt \\ &\le 2C_{21}'\int_0^T\int_{\mathbb{T}^2} [M_R|\nabla\hat{u}|](x,t)) \overset{D2}{\le} C_{21}\int_0^T\int_{\mathbb{T}^2} |\nabla\hat{u}(x,t)|.\end{aligned}$$

Para $I_2(t)$ temos que pela desigualdade de Burkholder-Davis-Gundy $\left(E(M_t^*) \le C\mathbb{E}\left([M]_t^{\frac{1}{2}}\right)\right)$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\int_{\mathbb{T}^2} |I_2^*(T)| &= 2\mathbb{E}\int_{\mathbb{T}^2} \sup_{t\in[0,T]}\left|\int_0^t \frac{\langle Z_s, \big(\sigma(X_s) - \hat{\sigma}(\hat{X}_s)\big)dW_s\rangle}{|Z_s|^2+\delta^2}\right| \\ &\le 2\int_{\mathbb{T}^2}\left\{\mathbb{E}\left[\int_0^t \frac{\langle Z_s, \big(\sigma(X_s) - \hat{\sigma}(\hat{X}_s)\big)dW_s\rangle}{|Z_s|^2+\delta^2}\right]_T\right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\le C_{\mathbb{T}^2}\left\{\int_{\mathbb{T}^2}\mathbb{E}\int_0^T \frac{|Z_t|^2\|\sigma(X_t) - \hat{\sigma}(\hat{X}_t)\|_{HS}^2}{(|Z_t|^2+\delta^2)^2}dt\right\}^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Raciocinando como para I_1 temos

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\int_{\mathbb{T}^2}|I_2^*(T)| &\leq C_{\mathbb{T}^2}\Big\{\int_{\mathbb{T}^2}\mathbb{E}\int_0^T\frac{|Z_t|^2\|\sigma(X_t)-\hat{\sigma}(\hat{X}_t)\|_{HS}^2}{(|Z_t|^2+\delta^2)^2}dt\Big\}^{\frac{1}{2}}\\
&\leq \frac{C_{\mathbb{T}^2}}{\delta}\Big\{\int_{\mathbb{T}^2}\mathbb{E}\int_0^T\|\sigma(X_t)-\hat{\sigma}(X_t)\|_{HS}^2dt\Big\}^{\frac{1}{2}}\\
&+C_{\mathbb{T}^2}\Big\{\int_{\mathbb{T}^2}\mathbb{E}\int_0^T\frac{\|\hat{\sigma}(X_t)-\hat{\sigma}(\hat{X}_t)\|_{HS}^2}{|Z_t|^2+\delta^2}dt\Big\}^{\frac{1}{2}}\\
&=\frac{C_{\mathbb{T}^2}}{\delta}\Big\{\mathbb{E}\int_{\mathbb{T}^2}I_{21}(T)\Big\}^{\frac{1}{2}}+C_{\mathbb{T}^2}\Big\{\mathbb{E}\int_{\mathbb{T}^2}I_{22}(T)\Big\}^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Tal como no caso anterior temos para $I_{21}(T)$ que

$$\frac{C_{\mathbb{T}^2}}{\delta}\Big\{\mathbb{E}\int_{\mathbb{T}^2}I_{21}(T)\Big\}^{\frac{1}{2}}\leq\frac{C_{\mathbb{T}^2}}{\delta}\Big\{\int_0^T\int_{\mathbb{T}^2}\|\sigma(x)-\hat{\sigma}(x)\|_{HS}^2\Big\}^{\frac{1}{2}}.$$

Para $I_{22}(T)$, usando as desigualdades D1 e D2, obtemos

$$\begin{aligned}
C_{\mathbb{T}^2}\Big\{\mathbb{E}\int_{\mathbb{T}^2}I_{22}(T)\Big\}^{\frac{1}{2}} &\overset{D1}{\leq} C_{22}'\Big\{\mathbb{E}\int_0^T\int_{\mathbb{T}^2}\big([M_R|||\nabla\hat{\sigma}|||](X_t)+[M_R|||\nabla\hat{\sigma}|||](\hat{X}_t)\big)\Big\}^{\frac{1}{2}}\\
&\leq C_{22}'\Big\{\int_0^T\mathbb{E}\int_{\mathbb{T}^2}[M_R|||\nabla\hat{\sigma}|||](X_t)+\int_{\mathbb{T}^2}[M_R|||\nabla\hat{\sigma}|||](\hat{X}_t)\Big\}^{\frac{1}{2}}\\
&\leq 2C_{22}'\Big\{\int_0^T\int_{\mathbb{T}^2}[M_R|||\nabla\hat{\sigma}|||](x)\Big\}^{\frac{1}{2}}\overset{D2}{\leq} C_{22}\Big\{\int_0^T\int_{\mathbb{T}^2}|||\nabla\hat{\sigma}(x)|||\Big\}^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Vamos agora examinar $I_3(t)$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\int_{\mathbb{T}^2}I_3^*(T) &= \mathbb{E}\int_0^T\int_{\mathbb{T}^2}\frac{\|\sigma(X_t)-\hat{\sigma}(\hat{X}_t)\|_{HS}^2}{|Z_t|^2+\delta}dt\\
&\leq\frac{1}{\delta^2}\mathbb{E}\int_0^T\int_{\mathbb{T}^2}\|\sigma(X_t)-\hat{\sigma}(X_t)\|_{HS}^2dt+\mathbb{E}\int_0^T\int_{\mathbb{T}^2}\frac{\|\hat{\sigma}(X_t)-\hat{\sigma}(\hat{X}_t)\|_{HS}^2}{|Z_t|^2+\delta^2}dt.
\end{aligned}$$

Então, tal como na estimativa de $I_2(t)$ temos:

$$\mathbb{E}\int_{\mathbb{T}^2}I_3^*(T)\leq\frac{1}{\delta^2}\int_0^T\int_{\mathbb{T}^2}\|\hat{\sigma}(x)-\hat{\sigma}(x)\|_{HS}^2+C_{23}\int_0^T\int_{\mathbb{T}^2}|||\nabla\hat{\sigma}(x)|||.$$

Uma vez que $I_4(T)$ é negativo pode ser desprezado.

Juntando todas as estimativas obtidas, verificamos que

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\int_{\mathbb{T}^2} \log\left(\frac{\sup_{t\in[0,T]}|X_t(x)-\hat{X}_t(x)|^2}{\delta^2}+1\right)\\
&\quad\le \frac{1}{\delta}\int_0^T\int_{\mathbb{T}^2}|u(x,t)-\hat{u}(x,t)| + C_{21}\int_0^T\int_{\mathbb{T}^2}|\nabla\hat{u}(x,t)|\\
&\quad+\frac{C_{\mathbb{T}^2}}{\delta}\left\{\int_0^T\int_{\mathbb{T}^2}\|\sigma(x)-\hat{\sigma}(x)\|_{HS}^2\right\}^{\frac{1}{2}}+C_{22}\left\{\int_0^T\int_{\mathbb{T}^2}|||\nabla\hat{\sigma}(x)|||\right\}^{\frac{1}{2}}\\
&\quad+\frac{1}{\delta^2}\int_0^T\int_{\mathbb{T}^2}\|\sigma(x)-\hat{\sigma}(x)\|_{HS}^2+C_{23}\int_0^T\int_{\mathbb{T}^2}|||\nabla\hat{\sigma}(x)|||\\
&\quad\le\frac{C_1}{\delta}\left(\int_0^T\int_{\mathbb{T}^2}|u(x,t)-\hat{u}(x,t)|+\left\{\int_0^T\int_{\mathbb{T}^2}\|\sigma(x)-\hat{\sigma}(x)\|_{HS}^2\right\}^{\frac{1}{2}}\right.\\
&\quad\left.+\frac{1}{\delta}\int_0^T\int_{\mathbb{T}^2}\|\sigma(x)-\hat{\sigma}(x)\|_{HS}^2\right)+C_2,
\end{aligned}
$$

onde $C_1=\max\{C_{\mathbb{T}^2},1\}$ e

$$
C_2=C_{21}\int_0^T\int_{\mathbb{T}^2}|\nabla\hat{u}(x,t)|+C_{22}\left\{\int_0^T\int_{\mathbb{T}^2}|||\nabla\hat{\sigma}(x)|||\right\}^{\frac{1}{2}}+C_{23}\int_0^T\int_{\mathbb{T}^2}|||\nabla\hat{\sigma}(x)|||.
$$

$\square$

Lema 3.6 *Seja* $\phi(\omega,x)=\sup_{t\in[0,T]}|X_t(\omega,x)-\hat{X}_t(\omega,x)|^2$. *Se existir* $M>0$ *tal que*

$$
\int_{\mathbb{T}^2}\log\left(\frac{\phi(\omega,x)}{\delta^2}+1\right)dx\le M.
$$

Então, existe $R>0$ *tal que*

$$
\int_{\mathbb{T}^2}\phi(\omega,x)dx\le\frac{4R^2}{M}+\delta^2(e^{M^2}-1)|\mathbb{T}^2|.
$$

Demonstração: Seja $f(\omega,x)=\log\left(\frac{\phi(\omega,x)}{\delta^2}+1\right)$ e

$$
A(\omega)=\{x\in\mathbb{T}^2 : f(\omega,x)\ge M^2\}
$$

temos que:

$$
\int_{\mathbb{T}^2}\phi(\omega,x)dx=\int_{\mathbb{T}^2}\phi(\omega,x)\mathbf{1}_{A(\omega)}dx+\int_{\mathbb{T}^2}\phi(\omega,x)\mathbf{1}_{A(\omega)^c}dx=I_1(\omega)+I_2(\omega)
$$

Se $f(\omega, x) \leq M^2$ então $\phi(\omega, x) \leq \delta^2(e^{M^2} - 1)$, logo

$$I_2(\omega) \leq \int_{\mathbb{T}^2} \delta^2(e^{M^2} - 1)\mathbf{1}_{A(\omega)^c} dx \leq \delta^2(e^{M^2} - 1)|\mathbb{T}^2|$$

Para $I_1(\omega)$, como $X_t : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ então existe $R > 0$ tal que $|X_t| \leq R$ $\forall t \in [0, T]$ logo,

$$I_1(\omega) \leq 4R^2 \int_{\mathbb{T}^2} \mathbf{1}_{A(\omega)} dx.$$

Pela desigualdade de Chebyshev obtem-se

$$I_1(\omega) \leq \frac{4R^2}{M^2} \int_{A(\omega)} f(\omega, x)dx \leq \frac{4R^2}{M^2} \int_{\mathbb{T}^2} \log\left(\frac{\phi(\omega, x)}{\delta^2} + 1\right)dx \leq \frac{4R^2}{M}.$$

□

Lema 3.7 *Seja $u \in L^2\big([0, T]; H^1(\mathbb{T}^2)\big)$ tal que $div\, u = 0$, e σ definido em (16). Então existe $u_n(x, t) \in L^2\big([0, T]; C^\infty(\mathbb{T}^2)\big)$, $\sigma_n(x) \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$ tal que:*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t \int_{\mathbb{T}^2} |u_n - u| = 0 \quad \lim_{n\to\infty} \int_0^t \int_{\mathbb{T}^2} |\sigma_n - \sigma|^2 = 0 \tag{17}$$

e

$$\sup_n \left(\int_{\mathbb{T}^2} |\nabla u_n| dx + \int_{\mathbb{T}^2} |||\nabla \sigma_n||| dx \right) < \infty. \tag{18}$$

Demonstração: É uma consequência direta do Lema 3.1 definindo, $\sigma_n = \sigma_{\{|k|<n\}}$ e $u_n(x, t) = u(x, t) * \varrho_n(x)$ onde $\varrho_n(x) = n^d \varrho(nx)$ e $\varrho \in C_c^\infty(\mathbb{T}^2)$, $\varrho \leq 1$, $\int \varrho = 1$.

□

Lema 3.8 *Sejam $\sigma_n = \sigma_{\{|k|<n\}}$ e $u_n(x, t) = u(x, t) * \varrho_n(x)$ definidos no lema anterior. Então, $div\, u_n = 0$ e $div\, \sigma_{n\,\cdot\, j} = 0$.*

Demonstração: A condição $div\, \sigma_{n\,\cdot\, j} = 0$ é consequência da definição de σ_n do Lema 3.1 (ii). Vamos verificar que $div\, u_n = 0$. Por hipótese $div\, u = 0$, então

$$div\, u_n = div\, \big(u * \varrho_n\big)(x) = \int_{\mathbb{T}^2} div\, \big(u(x - y, t)\big) \varrho_n(y) dy = 0.$$

□

3.2 Existência e unicidade

Teorema 3.9 *Sejam* $u \in L^2\big([0,T];\, H^1(\mathbb{T}^2)\big)$ *tal que* $\operatorname{div} u = 0$, *e* σ *definido em (16). Então existe um fluxo estocástico* X_t *definido quase seguramente nas varáveis* ω *e* x *que é solução da equação*

$$dX_t = u(X_t,t)dt + \sigma(X_t)dW_t, \;\; X_0 = x \tag{19}$$

no sentido da Definição 3.4, cuja constante
$K_{T,b,\sigma} = 1$.

Demonstração: A demonstração está dividida em três partes.

Parte 1. Existência. Sejam $u_n(x,t)$ e $\sigma_n(x)$ definidos como no Lema 3.7 e seja X_n tal que,

$$dX_{n,t} = u_n(X_{n,t},t)dt + \sigma_n(X_{n,t})dW_t, \quad X_{n,0} = x.$$

Vamos assumir que para qualquer função φ mensurável e não negativas se tem

$$\sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}\int_{\mathbb{T}^2} \varphi\big(X_{n,t}(x)\big)dx \le \int_{\mathbb{T}^2} \varphi(x)dx. \tag{20}$$

Este resultado será demonstrado posteriormente.
Vamos demonstrar que, para $q \in [1,2]$,

$$\lim_{n,m\to\infty} \mathbb{E}\int_{\mathbb{T}^2} \sup_{t\in[0,T]} |X_{n,t} - X_{m,t}|^q dx = 0. \tag{21}$$

Como para $t \in [0,T]$, $X_{n,t} : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$, existe $R > 0$ tal que $E|X_{n,T}|^2 < R$.
É então suficiente provar a seguinte convergência em probabilidade, $\forall \eta > 0$

$$\lim_{n,m\to\infty} P\bigg\{\omega : \int_{\mathbb{T}^2} \Phi_{n,m}(\omega,x)dx \ge \eta\bigg\} = 0, \tag{22}$$

onde $\Phi_{n,m}(\omega,x) = \sup_{t\in[0,T]} |X_{n,t}(\omega,x) - X_{m,t}(\omega,x)|^2$.

Definindo

$$\xi_{n,m}(\omega) = \int_{\mathbb{T}^2} \log\left(\frac{\Phi_{n,m}(\omega,x)}{\delta^2} + 1\right)dx$$

e aplicando o Lema 3.5 com

$$\delta = \delta_{n,m} = \int_0^T \int_{\mathbb{T}^2} |u_n - u_m| + \left\{\int_0^T \int_{\mathbb{T}^2} |\sigma_n - \sigma_m|^2\right\}^{\frac{1}{2}},$$

obtemos

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\xi_{n,m}\right) \leq & \frac{C_1}{\delta_{n,m}}\Bigg(\int_0^T\int_{\mathbb{T}^2}|u_n-u_m| + \left\{\int_0^T\int_{\mathbb{T}^2}|\sigma_n-\sigma_m|^2\right\}^{\frac{1}{2}}\Bigg)\\ & + \frac{C_1}{\delta_{n,m}^2}\int_0^T\int_{\mathbb{T}^2}|\sigma_n-\sigma_m|^2 + C_2 \leq 2C_1+C_2 \leq C_3,\end{aligned}$$

onde C_3 é uma constante independente de n, m.
Portanto, pelo Lema de Chebyshev, existe $M_1 > 0$ tal que $\forall M > M_1$ tal que,

$$P\big(\xi_{n,m} > M\big) \leq \epsilon$$

para quaisquer n, $m \in \mathbb{N}$.

Seja R a constante considerada no Lema 3.6. Podemos escolher $M \geq M_1 \vee \frac{8R^2}{\eta}$ e n, m suficientemente grandes tal que

$$\delta_{n,m} < \left(\frac{\eta}{2\big(e^{M^2}-1\big)|\mathbb{T}^2|}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Assim, pelo Lema 3.6 deduzimos que

$$\Omega_{n,m}^M = \left\{\omega : \int_{\mathbb{T}^2}\Phi_{n,m}dx \geq \eta;\ \xi_{n,m} \leq M\right\} = \emptyset.$$

Observando que para quaisquer mensuráveis A e B se verifica $P(A) \leq P(A\cap B) + P(B^c)$, obtemos

$$P\left\{\omega : \int_{\mathbb{T}^2}\Phi_{n,m}(\omega,x)dx \geq \eta\right\} \leq P(\Omega_{n,m}^M) + P(\xi_{n,m} > M) \leq \epsilon.$$

Portanto (22) verifica-se. Designamos por $X_t(\omega,x) \in L^2(\Omega\times\mathbb{T}^2; C[0,T])$ o processo limite. Em particular, existe uma subsucessão X_{n_k} tal que quase seguramente para todo $(\omega,x) \in \Omega\times\mathbb{T}^2$

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{t\in[0,T]}\big|X_{n_k,t}(\omega,x) - X_t(\omega,x)\big| = 0.$$

Parte 2. Solução da equação. Vamos agora ver que $X_t(\omega,x)$ satisfaz a equação (19). Para efeitos de notação vamos considerar o índice da subsucessão n_k como n.

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\int_{\mathbb{T}^2}\int_0^t |u(X_s,s) - u_n(X_{n,s},s)|ds\\ &\quad\leq \mathbb{E}\int_{\mathbb{T}^2}\int_0^t |u(X_s,s)-u(X_{n,s},s)|ds + \mathbb{E}\int_{\mathbb{T}^2}\int_0^t |u(X_{n,s},s)-u_n(X_{n,s},s)|ds\\ &\quad= \mathbb{E}\int_{\mathbb{T}^2} I_1(t) + \mathbb{E}\int_{\mathbb{T}^2} I_2(t)\end{aligned}$$

Pela desigualdade de Burkholder-Davis-Gundy temos também que

$$\mathbb{E}\int_{\mathbb{T}^2}\left|\int_0^t |\big(\sigma(X_s)-\sigma_n(X_{n,s})\big)|dW_s\right| \leq \int_{\mathbb{T}^2} E\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_0^t |\big(\sigma(X_s)-\sigma_n(X_{n,s})\big)|dW_s\right|$$
$$\leq C(\mathbb{T}^2)\bigg\{\int_{\mathbb{T}^2}\mathbb{E}\int_0^T ||\sigma(X_s)-\sigma_n(X_{n,s})||^2_{HS}ds\bigg\}^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq +C(\mathbb{T}^2)\bigg\{\int_{\mathbb{T}^2}\mathbb{E}\int_0^T ||\sigma(X_t)-\sigma(X_{n,t})||^2_{HS}dt+\int_{\mathbb{T}^2}\mathbb{E}\int_0^T ||\sigma(X_{n,t})-\sigma_n(X_{n,t})||^2_{HS}dt\bigg\}^{\frac{1}{2}}$$
$$= C'(\mathbb{T}^2)\bigg\{\mathbb{E}\int_{\mathbb{T}^2} I_3(T)+\mathbb{E}\int_{\mathbb{T}^2} I_4(T)\bigg\}^{\frac{1}{2}}$$

Para $I_1(t)$ vamos definir $F(x,t)=u(x,t)$. Pelo Teorema de Lusin, dado $\epsilon>0$ existe um conjunto compacto $K_\epsilon\subset\mathbb{T}^2\times[0,T]$ com $m(K_\epsilon)>1-\frac{\epsilon^2}{9}$, onde m é a medida produto em $\mathbb{T}^2\times[0,T]$, tal que a restrição de F a K_ϵ é uniformemente contínua. Então temos que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\int_{\mathbb{T}^2} I_1(t)\leq \mathbb{E}\int_{\mathbb{T}^2}\int_0^T &|u(X_t,t)-u(X_{n,t},t)|\big\{1_{K_\epsilon}\big(X_t,t\big)1_{K_\epsilon}\big(X_t^n,t\big)\\ &+1_{K_\epsilon}\big(X_t,t\big)1_{K_\epsilon^c}\big(X_t^n,t\big)+1_{K_\epsilon^c}\big(X_t,t\big)1_{K_\epsilon}\big(X_t^n,t\big)\\ &+1_{K_\epsilon^c}\big(X_t,t\big)1_{K_\epsilon^c}\big(X_t^n,t\big)\big\}dt = I_{11}+I_{12}+I_{13}+I_{14}.\end{aligned}$$

Para I_{11}, usando a continuidade uniforme de F em K_ϵ, podemos verificar que

$$\mathbb{E}\int_{\mathbb{T}^2}\int_0^T |u(X_t,t)-u(X_{n,t},t)|1_{K_\epsilon}\big(X_t,t\big)1_{K_\epsilon}\big(X_t^n,t\big)dt\to 0,\ \ n\to\infty.$$

Vamos agora considerar I_{12}. Pela desigualdade de Cauchy-Schwartz temos

$$\begin{aligned}I_{12}&=\mathbb{E}\int_{\mathbb{T}^2}\int_0^T |u(X_t,t)-u(X_{n,t},t)|1_{K_\epsilon}\big(X_t,t\big)1_{K_\epsilon^c}\big(X_t^n,t\big)dt\\ &\leq\bigg\{\mathbb{E}\int_{\mathbb{T}^2}\int_0^T |u(X_t,t)-u(X_{n,t},t)|^2dt\bigg\}^{\frac{1}{2}}\bigg\{\mathbb{E}\int_{\mathbb{T}^2}\int_0^T 1_{K_\epsilon}\big(X_t,t\big)1_{K_\epsilon^c}\big(X_t^n,t\big)dt\bigg\}^{\frac{1}{2}}\\ &\leq\bigg\{\mathbb{E}\int_{\mathbb{T}^2}\int_0^T |u(X_t,t)-u(X_{n,t},t)|^2dt\bigg\}^{\frac{1}{2}}\bigg\{\mathbb{E}\int_{\mathbb{T}^2}\int_0^T 1_{K_\epsilon^c}\big(X_t^n,t\big)dt\bigg\}^{\frac{1}{2}}\leq C\frac{\epsilon}{3}.\end{aligned}$$

Analogamente ao caso de I_{12} temos que $I_{13}\leq C\frac{\epsilon}{3}$ e $I_{14}\leq C\frac{\epsilon}{3}$. Logo, pela arbitrariedade de ϵ obtemos

$$\mathbb{E}\int_{\mathbb{T}^2} I_1(t)\to 0,\ \ n\to\infty.$$

Para $I_2(t)$, temos

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\int_{\mathbb{T}^2} I_2(t) &= \int_0^t \mathbb{E}\int_{\mathbb{T}^2} |u(X_{n,s},s) - u_n(X_{n,s},s)|ds \\
&\leq \int_0^T \int_{\mathbb{T}^2} |u(x,t) - u_n(x,t)|dt \to 0, \ \ n \to \infty,
\end{aligned}
$$

pelo lema 3.7.

Finalmente para $I_4(T)$ temos

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\int_{\mathbb{T}^2} I_4(T) &= \mathbb{E}\int_{\mathbb{T}^2}\int_0^T ||\sigma(X_{n,t}) - \sigma_n(X_{n,t})||_{HS}^2 dt \\
&= \mathbb{E}\int_0^T \int_{\mathbb{T}^2} \sum_{k\in\mathbb{Z}^2:\,|k|>n} |A_k^1 e_{k_1}|^2 + |A_k^2 e_{k_1}|^2 + |B_k^1 e_{k_2}|^2 + |B_k^2 e_{k_2}|^2 dt.
\end{aligned}
$$

Como pelo lema 3.1 $||\sigma(x)||_{HS}^2 < C$, e por definição $||\sigma_n(x)||_{HS}^2 < ||\sigma(x)||_{HS}^2$ temos que

$$
\mathbb{E}\int_0^T \int_{\mathbb{T}^2} \sum_{k\in\mathbb{Z}^2:\,|k|>n} |A_k^1 e_{k_1}|^2 + |A_k^2 e_{k_1}|^2 + |B_k^1 e_{k_2}|^2 + |B_k^2 e_{k_2}|^2 dt \to 0, \ \ n \to \infty.
$$

A demonstração de que $E\big[\int_{\mathbb{T}^2} I_3(t)\big] \to 0, \ \ n \to \infty$ é semelhante ao estudo de $E\big[\int_{\mathbb{T}^2} I_1(t)\big]$.

Colecionando todas estas estimativas, fica demonstrada a existência de solução da equação diferencial (19).

Parte 3. Unicidade. Demonstração:(Unicidade) Sejam $X_t(x)$ e $\hat{X}_t(x)$ dois fluxos estocásticos quase por toda a parte de (19). Raciocinando como na demonstração da existência deduzimos a seguinte expressão:

$$
\mathbb{E}\int_{\mathbb{T}^2} \log\left(\frac{|X_t - \hat{X}_t|^2}{\delta^2} + 1\right) dx \leq C.
$$

Como C é independente de δ, tomando $\delta \to 0$, obtemos

$$
|X_t - \hat{X}_t|^2 = 0.
$$

Portanto provámos a unicidade. $\square$

Seja φ uma função mensurável não negativa. Vamos demonstrar a propriedade

$$\sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}\int_{\mathbb{T}^2} \varphi(X_n(x,t))dx = \int_{\mathbb{T}^2} \varphi(x)dx \tag{23}$$

que assumimos como verdadeira durante a demonstração.

Definimos

$$\rho_t^n(x) := exp\bigg\{ \int_0^t div\, u_n\big(X_s(x),s\big)ds + \int_0^t div\, \sigma_n\big(X_{n,s}(x)\big)dW_s^n \bigg\} \tag{24}$$

onde $div\, \sigma^{\cdot l} := \partial_i \sigma^{il}$. Temos o seguinte resultado:

Lema 3.10 *Seja $\rho_t^n(x)$ definido como (24), então*

$$\det\big(\nabla X_n(x,t)\big) = p_t^n(x) \tag{25}$$

e

$$\det\big(\nabla X_n^{-1}(x,t)\big) = 1. \tag{26}$$

Demonstração: Para efeitos de notação iremos ignorar os índices n nesta demonstração.

Pelo Lema 3.3 temos equivalência entre o integral de Itô e o integral de Stratonovich, então podemos escrever a equação (19) na forma de Stratonovich:

$$dX = u(X,t)dt + \sigma(X) \circ dW_t, \;\; X_0 = x.$$

Seja W_t^l a aproximação linearizada de W_t, temos a seguinte equação diferencial ordinária

$$dX_l = u(X_l,t)dt + \sigma(X_l)W_t^l dt.$$

Pela proposição G do Apêndice temos

$$\det\big(\nabla X_l(x,t)\big) = exp\bigg\{ \int_0^t div\, u\big(X_l(x,s),s\big)ds + \int_0^t div\, \sigma\big(X_l(x,s)\big)W_s^l ds \bigg\},$$

portanto pelo teorema do limite, demonstrado em H. Kunita [10], temos que

$$\det\big(\nabla X(x,t)\big) = exp\bigg\{ \int_0^t div\, u\big(X(x,s),s\big)ds + \int_0^t div\, \sigma\big(X(x,s)\big) \circ dW_s \bigg\}$$

fica então demonstrado (25) reescrevendo o integral de Stratonovich como um integral de Itô.

Vamos agora definir

$$Y^t_{s,\tau}(x) = x - \int_s^\tau u\big(Y^t_{r,\tau}(x), r\big)dr + \int_s^\tau \sigma\big(Y^t_{r,\tau}(x)\big)dW^t_r,$$

onde $W^t_r := W_{t-r} - W_t$. Então $Y^t_{s,t} := X^{-1}_{s,t}$ e tal como no caso anterior

$$\det\big(\nabla X_t^{-1}\big) = \det\big(\nabla X_{0,t}^{-1}\big) = exp\bigg\{\int_0^t -div\, u\big(X^{-1}_{s,t}, s\big)ds + \int_0^t div\, \sigma\big(X^{-1}_{s,t}\big)W_s\bigg\}.$$

Portanto pelo Lema 3.8 obtemos que

$$\det\big(\nabla X_t^{-1}\big) = 1.$$

□

O lema anterior permite-nos concluir que

$$\sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}\int_{\mathbb{T}^2} \varphi(X_n(x,t))dx = \int_{\mathbb{T}^2} \varphi(x)dx. \tag{27}$$

Vamos agora provar que no limite ainda é verificada a mesma condição.

Lema 3.11 *Seja X_t a solução da equação diferencial estocástica (19) e $\varphi \in C(\mathbb{T}^2)$, então temos que*

$$\sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}\int_{\mathbb{T}^2} \varphi(X(x,t))dx = \int_{\mathbb{T}^2} \varphi(x)dx. \tag{28}$$

demonstração: Pela equação temos que

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}\int_{\mathbb{T}^2} \varphi(X_n(x,t))dx = \int_{\mathbb{T}^2} \varphi(x)dx. \tag{29}$$

Então, como $X_n(x,t) \to X(x,t)$ quase seguramente, $|X_n(x,t)| \leq R$, para $R > 0$ independente de n e φ é uniformemente contínua, pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue temos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{T}^2} \varphi(X_n(x,t))dx = \int_{\mathbb{T}^2} \varphi(X(x,t))dx. \tag{30}$$

□

4 Princípio de grandes desvios

Neste capítulo estamos interessados em estabelecer um princípio dos grandes desvios para a família de variáveis aleatórias $\{X^\epsilon, \epsilon > 0\}$ definidas como soluções das equações diferenciais estocásticas

$$dX_t^\epsilon(x) = u^\epsilon\left(X_t^\epsilon(x), t\right) dt + \sqrt{\epsilon}\sigma(X_t^\epsilon(x))dW_t \tag{31}$$

onde o drift $u^\epsilon(x,t) :\ \mathbb{T}^2 \times [0,T] \to \mathbb{R}^2$ é solução da equação de Navier-Stokes

$$\begin{cases} \frac{\partial u^\epsilon}{\partial t} + (u^\epsilon.\nabla)u^\epsilon = \epsilon\Delta u^\epsilon + \nabla p \\ \nabla.u^\epsilon = 0 \\ u^\epsilon(x,0) = u_0(x), \ \ u_0 \in H^1(\mathbb{T}^2). \end{cases} \tag{32}$$

Vamos usar a técnica desenvolvida em [8], a qual está baseada na representação variacionais de certos funcionais do processo X^ϵ, na convergência em lei do processo X^ϵ, e ainda na equivalência entre o princípio dos grandes desvios e o princípio de Laplace.

O pricípio dos grandes desvios que vamos provar indica que à medida que $\epsilon \to 0$, o fluxo de Navier-Stokes vai-se concentrando a uma velocidade exponencial em torno do fluxo de Euler X_t, definido pela equação diferencial ordinária

$$dX_t(x) = u\big(X_t(x), t\big), \tag{33}$$

onde o campo das velocidades u é solução da equação de Euler

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + (u.\nabla)u = \nabla p \\ \nabla.u = 0 \\ u(x,0) = u_0(x), \ \ u_0 \in H^1(\mathbb{T}^2). \end{cases} \tag{34}$$

Começamos por investigar o comportamento assimptótico do drift da equação (31) quando a viscosidade tende para zero.

Lema 4.1 *Seja $u^\epsilon(x,t)$ solução da equação de Navier-Stokes (32). Então $u^\epsilon(x,t) \in L^2\left((0,T);\ H^1(\mathbb{T}^2)\right) \cap C\left([0,T];\ L^2(\mathbb{T}^2)\right)$ e*

$$||u^\epsilon||_{L^\infty((0,T);H^1(\mathbb{T}^2))} \leq C, \quad ||\partial_t u^\epsilon||_{L^\infty((0,T);H^{-1}(\mathbb{T}^2))} \leq C \tag{35}$$

onde C é uma constante independente de ϵ.

Demonstração: Seja u^ϵ a solução da equação de Navier stokes (32). Recordamos que rotacional de u^ϵ está definido por $w^\epsilon = \partial_1 u_2^\epsilon - \partial_2 u_2^\epsilon$. Vamos aplicar o operador curl à equação (32) e deduzir a equação para o rotacional w^ϵ.

$$\begin{aligned}
&\partial_t w^\epsilon + \partial_1(u_1^\epsilon\partial_1 u_2^\epsilon + u_2^\epsilon\partial_2 u_2^\epsilon) - \partial_2(u_1^\epsilon\partial_1 u_2^\epsilon + u_2^\epsilon\partial_2 u_1^\epsilon)\\
&= \epsilon\big(\partial_1(\partial_1^2 u_2^\epsilon + \partial_2^2 u_2^\epsilon) - \partial_2(\partial_1^2 u_2^\epsilon + \partial_2^2 u_2^\epsilon)\big)\\
&\iff \partial_t w^\epsilon + \partial_1(u_1^\epsilon\partial_1 u_2^\epsilon + u_2^\epsilon\partial_2 u_2^\epsilon) - \partial_2(u_1^\epsilon\partial_1 u_2^\epsilon + u_2^\epsilon\partial_2 u_1^\epsilon)\\
&= \epsilon\Delta w^\epsilon. \qquad (36)
\end{aligned}$$

Como $\nabla.u = 0$ temos

$$\begin{aligned}
&\partial_1(u_1^\epsilon\partial_1 u_2^\epsilon + u_2^\epsilon\partial_2 u_2^\epsilon) - \partial_2(u_1^\epsilon\partial_1 u_2^\epsilon + u_2^\epsilon\partial_2 u_1^\epsilon)\\
&= \partial_1 u_1^\epsilon\partial_1 u_2^\epsilon + u_1^\epsilon\partial_1^2 u_2^\epsilon + \partial_1 u_2^\epsilon\partial_2 u_2^\epsilon + u_2^\epsilon\partial_1\partial_2 u_2^\epsilon\\
&- (\partial_2 u_1^\epsilon\partial_1 u_1^\epsilon + u_1^\epsilon\partial_1\partial_2 u_1^\epsilon + \partial_2 u_2^\epsilon\partial_2 u_1^\epsilon + u_2^\epsilon\partial_2^2 u_1^\epsilon)\\
&= u^\epsilon.\nabla w^\epsilon + \partial_1 u_1^\epsilon\partial_1 u_2^\epsilon + \partial_1 u_2^\epsilon\partial_2 u_2^\epsilon - \partial_2 u_1^\epsilon\partial_1 u_1^\epsilon - \partial_2 u_2^\epsilon\partial_2 u_1^\epsilon\\
&= u^\epsilon.\nabla w^\epsilon + \partial_1 u_1^\epsilon(\partial_1 u_2^\epsilon - \partial_2 u_1^\epsilon) + \partial_2 u_2^\epsilon(\partial_1 u_2^\epsilon - \partial_2 u_1^\epsilon)\\
&= u^\epsilon.\nabla w^\epsilon + \nabla.u^\epsilon(\partial_1 u_2^\epsilon - \partial_2 u_1^\epsilon) = u^\epsilon.\nabla w^\epsilon.
\end{aligned}$$

Então w^ϵ verifica a seguinte equação com derivadas parciais

$$\partial_t w^\epsilon + u^\epsilon.\nabla w^\epsilon = \epsilon\Delta w^\epsilon.$$

Multiplicando ambos os membros da equação por $w^\epsilon(t)$ e integrando sobre $\mathbb{T}^2$ obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{T}^2} w^\epsilon\partial_t w^\epsilon + \int_{\mathbb{T}^2} u^\epsilon w^\epsilon\nabla w^\epsilon = \epsilon\int_{\mathbb{T}^2} w^\epsilon\Delta w^\epsilon\\
&\iff \frac{1}{2}\frac{d}{dt}||w^\epsilon||_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}^2}\nabla.u^\epsilon(w^\epsilon)^2 = -\epsilon\int_{\mathbb{T}^2}|\nabla w^\epsilon|\\
&\iff ||w^\epsilon(t)||_{L^2}^2 \le ||w_0||_{L^2}^2 = C
\end{aligned}$$

onde $w_0^\epsilon = \big(\partial_1 u_2 - \partial_2 u_1\big)(0)$. Então

$$\sup_{t\in[0,T]}||w^\epsilon(t)||_{L^2}^2 \le C.$$

Como $\nabla.u^\epsilon = 0$ sabemos que existe uma função $h^\epsilon(t,x)$ tal que $u^\epsilon = (-\partial_2 h^\epsilon, \partial_1 h^\epsilon)$. Então

$$\Delta h^\epsilon = w^\epsilon. \qquad (37)$$

Pela teoria clássica das equações elípticas se $w^\epsilon \in L^2(\mathbb{T}^2)$ tem-se $h \in H^2(\mathbb{T}^2)$ e

$$||h^\epsilon||_{H^2(\mathbb{T}^2)} \le C'||w^\epsilon||_{L^2(\mathbb{T}^2)} \le C,$$

o que implica que

$$||u^\epsilon||_{H^1(\mathbb{T}^2)} \leq ||h^\epsilon||_{H^2(\mathbb{T}^2)} \leq C.$$

Portanto, a primeira expressão de (35) verifica-se.

Para deduzir a segunda estimativa de (35) tomamos a derivada no tempo em ambos os membros da equação (37) obtendo

$$\Delta \partial_t h^\epsilon(t) = \partial_t w^\epsilon(t). \tag{38}$$

Então, temos a estimativa

$$||\partial_t h^\epsilon(t)||_{L^2(\mathbb{T}^2)} \leqslant C||G^\epsilon(t)||_{H^{-2}(\mathbb{T}^2)} \quad \text{q.s. } t \in (0,T), \tag{39}$$

onde $G^\epsilon = \mathrm{div}(-u^\epsilon\, \omega^\epsilon) + \epsilon \,\triangle \omega^\epsilon$. Pelas estimativas obtidas temos $||G^\epsilon(t)||_{H^{-2}(\Omega)} \leqslant C$ e, portanto, a segunda expressão de (35) verifica-se.

□

A existência e unicidade da familia de soluções da forma (31) é obtida notanto que pelo lema 4.1 $u^\epsilon \in L^2\left((0,T);\, H^1(\mathbb{T}^2)\right)$ para qualquer $\epsilon > 0$ e portanto podemos aplicar o Teorema 3.9

Convém referir que embora e equação de Euler corresponda à equação de Navier-Stokes com o parâmetro da viscosidade igual a zero, a demonstração de que as soluções da equação de Navier-Stokes convergem para as soluções da equação de Euler, quando $\epsilon \to 0$, é um problema clássico em mecânica de fluídos. No entanto, no caso de um domínio bidimensional com condições de fronteira periódicas, as estimativas uniformes obtidas no lema anterior permitem provar esta convergência.

Lema 4.2 *Sejam (u^ϵ), $\epsilon > 0$, soluções da equação de Navier-Stokes (32), então existe uma subsucessão de (u^ϵ) tal que*

$$u^\epsilon \rightharpoonup u \qquad \textit{fracamente-* em} \;\; L^\infty((0,T); H^1(\mathbb{T}^2)), \tag{40}$$

$$u^\epsilon \to u \qquad \textit{fortemente em} \;\; L^2(\mathbb{T}^2 \times (0,T)) \tag{41}$$

e a função limite u é solução da equação de Euler (34).

Demonstração: A convergência (40) é consequência imediata da primeira estimativa em (35). A convergência (40) resulta das estimativas (35) e do resultado de compacidade no Corolário 4 de [14]. Usando os resultados de convergência (40) e (41) podemos passar ao limite a equação de Navier-Stokes, no sentido das distribuições, obtendo a equação de Euler. □

4.1 Rate function

Seja l^2 o espaço de Hilbert das sucessões com valores em $\mathbb{R}$ com produto interno usual $\langle \cdot, \cdot \rangle_{l^2}$ e norma $|| \cdot ||_{l^2}$ considerado na Secção 4.1. Definimos $\mathbb{H}$ como o espaço das funções absolutamente contínuas definidas em $[0, T]$ com valores em l^2 com o quadrado da derivada integrável, ou seja:

$$\mathbb{H} = \{h : \|h\|^2_{\mathbb{H}} = \int_0^T ||\dot{h}_s||^2_{l^2} < \infty\}.$$

Designamos por A a classe de todos os processos h com valores em l^2_* previsíveis para a σ-álgebra $\mathscr{F}_t$, satisfazendo

$$\mathbb{E}\bigg(\int_0^T ||\dot{h}_s||^2_{l^2} \bigg) < \infty.$$

Seja u solução da equação de Euler (34). Dada uma função $h \in \mathbb{H}$, consideramos a seguinte equação diferencial ordinária, usualmente referida como equação de controle determinística:

$$dX_t^h(x) = x + \int_0^t \langle \sigma\big(X_s^h(x)\big), \dot{h}_s \rangle_{l^2} ds + \int_0^t u\big(X_s^h(x), s\big) ds. \tag{42}$$

Definimos a função

$$\begin{aligned} S : \mathbb{H} &\to C\big([0, T];\ L^2(\mathbb{T}^2)\big) \\ h &\to S(h) = X_t^h(x) \end{aligned} \tag{43}$$

onde X_t^h é solução da equação (42). O lema a seguir garante que a função S está bem definida.

Lema 4.3 *Dado $h \in \mathbb{H}$, a equação (42) tem uma única solução X_t^h.*

Demonstração: Começamos por reparar que o teorema de existência e unicidade, Teorema 3.9, aplica-se a qualquer equação cujo drift seja um campo de vetores em $L^2\left((0, T);\ H^1(\mathbb{T}^2)\right)$ com divergência nula, e o coeficiente de difusão seja igual a 0. Portanto, considerando o drift $u^h(x, t) = \langle \sigma(x), \dot{h}_t \rangle + u\big(x, t\big)$ só temos de verificar que

(i) $\langle \sigma\big(x\big), \dot{h}_t \rangle_{l^2} \in L^2\left((0, T);\ H^1(\mathbb{T}^2)\right)$,

(ii) $div\, \langle \sigma\big(x\big), \dot{h}_t \rangle = 0$.

Como $div\,\sigma = 0$ e h_t é independente de x, temos $div\,\langle\sigma(x), \dot{h}_s\rangle = 0$. Para verificar (i) observamos que

$$\int_0^T \int_{\mathbb{T}^2} |\langle\sigma(x), \dot{h}_t\rangle|^2 dxdt \leq \int_0^T ||\dot{h}_t||_{l^2}^2 dt \int_{\mathbb{T}^2} ||\sigma(x)||_{HS}^2 dx < \infty.$$

Pelo Lema 3.2, deduzimos que

$$\int_0^T \int_{\mathbb{T}^2} |\nabla\langle\sigma(x), \dot{h}_t\rangle|^2 dxdt \leq \int_0^T ||\dot{h}_t||_{l^2}^2 dt \int_{\mathbb{T}^2} |||\nabla\sigma(x)|||dx < \infty.$$

$\square$

Através da função S definimos a função $I : C\big([0,T];\, L^2(\mathbb{T}^2)\big) \mapsto \mathbb{R}$ como

$$I(f) := \frac{1}{2} \inf_{\{h\in\mathbb{H}:\, S(h)=f\}} ||h||_{\mathbb{H}}^2. \tag{44}$$

O nosso objetivo é verificar que I é uma *rate function* (cf. Definição 2.1). Neste sentido, começamos por demonstrar dois lemas auxiliares.

Lema 4.4 *$\forall N > 0$, o conjunto $\{S(h) \,:\, ||h||_{\mathbb{H}} \leq N\}$ é pré-compacto em $C\big([0,T]; L^2(\mathbb{T}^2)\big)$.*

Demonstração: Seja $\{S_n\}_{n\geq 1}$ uma sucessão de elementos do conjunto $\{S(h) : ||h||_H \leq N\}$. Então existe uma sucessão $\{h_n\}_{n\geq 1}$ de elementos de $\{h : ||h||_H \leq N\}$, tal que $S_n = S(h_n)$. Como $\mathbb{H}$ munido da topologia fraca é localmente compacto, existe uma subsucessão $\{h_{n_k}\}_{n_k\geq 1}$ que converge fracamente para h^* pertencente a $\{h : ||h||_H \leq N\}$.
Nota: De modo a simplificar a notação vamos omitir o k, isto é, usamos a mesma notação para sucessões e subsucessões.
Vamos provar que a subsucessão $\{S_n\}_{n\geq 1} = \{S(h_{n_k})\}_{n\geq 1}$ tem uma subsucessão de cauchy, ou seja

$$\lim_{n,m\to+\infty} \int_{\mathbb{T}^2} \sup_{[0,T]} |X_t^{h_n} - X_t^{h_m}|^2 dx = 0 \tag{45}$$

onde $X_t^{h_n}$ e $X_t^{h_n}$ são soluções de (42) com campos de velocidades $u^{h_n}(x,t) = \langle\sigma(x), \dot{h}_n(t)\rangle + u\big(x,t\big)$ e $u^{h_m}(x,t) = \langle\sigma(x), \dot{h}_m(t)\rangle + u\big(x,t\big)$, respetivamente.
Para demonstrar (45) é suficiente ver que $\forall\epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} :\ \forall n, m > N$

$$\int_{\mathbb{T}^2} \Phi_{h_n,h_m} dx \leq \epsilon$$

onde $\Phi_{h_n,h_m} = \sup\limits_{[0,T]} |X_t^{h_n} - X_t^{h_m}|^2$. Vamos então definir

$$\xi_{h_n,h_m} = \int_{\mathbb{T}^2} \log\left(\frac{\Phi_{h_n,h_m}}{\delta^2} + 1\right) dx.$$

Tal como na demonstração do Lema 3.9 temos que para $\varphi \in L+$,

$$\int_{\mathbb{T}^2} \varphi(X_t^{h_n}) = \int_{\mathbb{T}^2} \varphi(x) \tag{46}$$

Então podemos aplicar o Lema 3.5 escolhendo

$$\delta = \delta_{h_n,h_m} = \int_0^T \int_{\mathbb{T}^2} |u^{h_n} - u^{h_m}|$$

obtendo

$$\begin{aligned}\xi_{h_n,h_m} &\leq 1 + C \int_{\mathbb{T}^2} \int_0^T |\nabla u^h| \leq 1 + C \int_{\mathbb{T}^2} \int_0^T |\nabla \langle \sigma, h_s \rangle| + |\nabla u^h| \\ &\leq \int_{\mathbb{T}^2} \int_0^T ||\nabla \sigma||_{HS} ||h_s||_{l^2} + |\nabla u^h| = M_1\end{aligned}$$

Onde M_1 é independente de h_n pois $\{h_n\}_{n\geq 1}$ uma sucessão de elementos de $\{h : ||h||_H \leq N\}$. Logo pelo lema 3.6 $\forall M \geq M_1$, e porque existe $R > 0$ tal que $|X_t^{h_n}| \leq R$ temos

$$\int_{\mathbb{T}^2} \Phi_{h_n,h_m} dx \leq \frac{4R^2}{M} + \delta^2 \big(e^{M^2} - 1\big) |\mathbb{T}^2|.$$

Pela convergência fraca de $\{h_n\}$ em l^2 e aplicando o teorema de Lebesgue obtemos

$$\begin{aligned}\lim_{n,m\to 0} \int_0^T \int_{\mathbb{T}^2} |u^{h_n} - u^{h_m}| &= \lim_{n,m\to 0} \int_0^T \int_{\mathbb{T}^2} |\langle \sigma(x), h_n - h_m \rangle| \\ &= \lim_{n,m\to 0} \int_0^T \int_{\mathbb{T}^2} | \left(\langle \sigma_{1,\cdot}(x), h_n - h_m \rangle_{l^2} \right), \langle \sigma_{2,\cdot}(x), h_n - h_m \rangle_{l^2} | \\ &= 0.\end{aligned}$$

Podemos escolher $M \geq M_1 \vee \frac{8R^2}{\epsilon}$ e n, m suficientemente grandes tal que:

$$\xi_{h_n,h_m} < \left(\frac{\epsilon}{2\big(e^{M^2} - 1\big)|\mathbb{T}^2|} \right)^{\frac{1}{2}}$$

obtendo

$$\int_{\mathbb{T}^2} \Phi_{h_n,h_m} dx \leq \epsilon.$$

$\square$

Lema 4.5 *A aplicação $h \mapsto S(h)$ é contínua sobre $\mathbb{H}$ munido da topologia fraca.*

Demonstração: A demonstração deste lema é análoga à demonstração do Lema 4.4 tomando uma sucessão $\{h_n\}_{n\geq 1}$ de elementos de $\{h : ||h||_{\mathbb{H}} \leq N\}$ que converge fracamante para h. $\square$

Dispondo dos resultados obtidos nos dois lemas anteriores estamos agora em condições de provar que I é uma *rate function.*

Lema 4.6 *Verificam-se as seguintes proposições:*

(i) Para qualquer $f \in C\big([0,T]; L^2(\mathbb{T}^2)\big)$, se $I(f) < \infty$, então existe $h_0 \in \mathbb{H}$ tal que $2I(f) = ||h_0||^2_{\mathbb{H}}$.

(ii) $I(f)$ é uma rate function em $C\big([0,T]; L^2(\mathbb{T}^2)\big)$.

Demonstração: (i) Pela definição de $I(f)$, existe uma sucessão $\{h_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{H}$ tal que $||h_n||^2_{\mathbb{H}} \searrow 2I(f)$ e $S(h_n) = f$. Seja $N := \sup_n ||h_n||_{\mathbb{H}}$, então existe uma subsucessão $\{h_{n_k}\}$ e h_0 tal que $h_{n_k} \rightharpoonup h_0$ em B_N. Então $||h_0||^2_{\mathbb{H}} \leq \liminf_{k\to\infty} ||h_{n_k}||^2_{\mathbb{H}} = 2I(f)$. Pelo Lema 4.5 temos que $S(h_0) = f$, portanto $2I(f) = ||h_0||^2_{\mathbb{H}}$.
(ii) Para cada $a < \infty$, temos que $A := \{f : I(f) \leq a\} \subset \{S(h); ||h||^2_{\mathbb{H}} \leq 2a\}$. Pelo Lema 4.4, para demonstrar (ii) só precisamos de ver que A é fechado em $C\big([0,T]; L^2(\mathbb{T}^2)\big)$. Seja $\{f_n\}$ uma sucessão de elementos de A tal que $f_n \to f$ em $C\big([0,T]; L^2(\mathbb{T}^2)\big)$. Por (i) podemos escolher $h_n \in B_{2a}$ tal que $S(h_n) = f_n$. Pela compacidade de B_{2a} existe uma subsucessão $\{h_{n_k}\}$ e $h \in B_{2a}$ tal que $h_{n_k} \rightharpoonup h$ em B_{2a}. Pelo Lema 4.5 temos que $f_{n_k} = S(h_{n_k}) \to S(h)$, logo $f = S(h)$ e A é fechado. $\square$

4.2 Representação variacional

Como já referimos, para estabelecer o princípio dos grandes desvios necessitamos de uma representação variacional de certos funcionais do processo

X_t^ϵ definido como solução da equação diferencial estocástica (31). Esta representação é obtida em função das soluções da seguinte equação diferencial estocástica:

$$dX_t^{\epsilon,h} = u^\epsilon\big(X_t^{\epsilon,h}, t\big)dt + \langle \sigma\big(X_t^{\epsilon,h}\big), \dot{h}_t \rangle_{l^2} dt + \sqrt{\epsilon}\sigma\big(X_t^{\epsilon,h}\big)dW_t, \ \ X_0^h = x \in \mathbb{T}^2. \tag{47}$$

onde $h \in A$. Esta equação tem uma única solução forte $X_t^{\epsilon,h}$ e é usualmente referida como a equação de controle estocástica.

Lema 4.7 *Seja X_t^ϵ, $\epsilon > 0$, a solução forte de (31). Então para qualquer função limitada $f : C\big([0,T]; L^2(\mathbb{T}^2)\big)$ temos a seguinte representação variacional*

$$-\epsilon \log \mathbb{E}(e^{-\frac{1}{\epsilon}f(X_t^\epsilon)}) = \inf_{h \in A} \mathbb{E}\Bigg(f(X_t^{\epsilon,h}) + \frac{1}{2}||h||_{\mathbb{H}}^2 \Bigg). \tag{48}$$

onde $X_t^{\epsilon,h}$ é solução de (47).

Demonstração: Como X^ϵ é uma solução forte de (31), existe uma função mensurável $\Phi^\epsilon : C([0,T]; l_*^2) \mapsto C\big([0,T]; L^2(\mathbb{T}^2)\big)$ tal que

$$X_t^\epsilon(x) = \Phi^\epsilon(W)(x,t), \quad q.s. \quad \text{em} \ \ \mathbb{T}^2 \times [0,T].$$

Por outro lado temos que

$$\begin{aligned}
\Phi^\epsilon\left(W + \frac{h}{\sqrt{\epsilon}}\right)(x,t) =& x + \sqrt{\epsilon}\int_0^t \sigma\left(\Phi^\epsilon\left(W + \frac{h}{\sqrt{\epsilon}}\right)(x,s)\right) d\left(W + \frac{h}{\sqrt{\epsilon}}\right)(s) \\
&+ \int_0^t u\left(\Phi^\epsilon\left(W + \frac{h}{\sqrt{\epsilon}}\right)(x,s)\right) ds \\
&= x + \sqrt{\epsilon}\int_0^t \sigma\left(\Phi^\epsilon\left(W + \frac{h}{\sqrt{\epsilon}}\right)(x,s)\right) dW_s \\
&+ \int_0^t \left\langle \sigma\left(\Phi^\epsilon\left(W + \frac{h}{\sqrt{\epsilon}}\right))(x,s)\right), \dot{h}_s \right\rangle_{l^2} ds \\
&+ \int_0^t u\left(\Phi^\epsilon\left(W + \frac{h}{\sqrt{\epsilon}}\right)(s,x)\right) ds.
\end{aligned}$$

Então, pela unicidade da solução de (47) temos

$$X^{\epsilon,h} = \Phi^\epsilon\left(W + \frac{h}{\sqrt{\epsilon}}\right).$$

Aplicando o Lema 2.10, obtém-se

$$\begin{aligned}
-\epsilon\log\mathbb{E}(e^{-\frac{1}{\epsilon}f(X^\epsilon)}) &= -\epsilon\log\mathbb{E}(e^{-\frac{1}{\epsilon}f\circ\Phi^\epsilon(W)}) \\
&= \epsilon\inf_{h\in A}\mathbb{E}\left(\frac{1}{\epsilon}f\circ\Phi^\epsilon(W+h)+\frac{1}{2}||h||^2_{\mathbb{H}}\right) \\
&= \inf_{h\in A}\mathbb{E}\left(f\circ\Phi^\epsilon(W+h)+\frac{1}{2}||\sqrt{\epsilon}h||^2_{\mathbb{H}}\right) \\
&= \inf_{h\in A}\mathbb{E}\left(f\circ\Phi^\epsilon\left(W+\frac{h}{\sqrt{\epsilon}}\right)+\frac{1}{2}||h||^2_{\mathbb{H}}\right) \\
&= \inf_{h\in A}\mathbb{E}\left(f(X^{\epsilon,h}_t)+\frac{1}{2}||h||^2_{\mathbb{H}}\right).
\end{aligned}$$

□

4.3 Tightness

Seja $A_N := \{h\in A : ||h(\omega)||_{\mathbb{H}} \leq N\, q.s\}$. Dada uma família $\{h^\epsilon, \epsilon>0\}$ em A_N, definimos $X^{\epsilon,h_\epsilon}_t$ como a solução da equação (47) com h^ϵ na posição de h, isto é

$$\begin{cases} dX^{\epsilon,h_\epsilon}_t = \sqrt{\epsilon}\sigma\big(X^{\epsilon,h_\epsilon}_t\big)dW_t + \langle\sigma\big(X^{\epsilon,h_\epsilon}_t\big),\dot{h}^\epsilon_t\rangle_{l^2}dt + u^\epsilon\big(X^{\epsilon,h_\epsilon}_t,t\big)dt \\ X^{\epsilon,h_\epsilon}_0 = x,\ \ x\in\mathbb{T}^2. \end{cases} \tag{49}$$

Estamos interessados em verificar que a família de variáveis aleatórias

$$\left\{\left(h^\epsilon, X^{\epsilon,h^\epsilon}\right), \epsilon>0\right\}$$

tem uma subsucessão que converge em lei, quando $\epsilon\to 0$.

Começamos por provar alguns lemas com o intuito de demonstrar que as leis de $(h^\epsilon, X^{h_\epsilon}_t)$ com $\epsilon\in[0,\epsilon_0]$ são *tight* em $B_N\times C\big([0,T];L^2(\mathbb{T}^2)\big)$.

Lema 4.8 *Sejam $X^{\epsilon,h_\epsilon}_t$, $\epsilon>0$, soluções de (49), então existe uma função contínua $g(\cdot)$ independente de ϵ tal que*

$$\lim_{t\to 0} g(t) = 0,$$

e para $x,z\in\mathbb{T}^2$ tem-se

$$\mathbb{E}\int_{\mathbb{T}^2}\sup_{t\in[0,T]}|X^{\epsilon,h_\epsilon}_t(x) - X^{\epsilon,h_\epsilon}_t(x+z)|^2 \leq g(|z|).$$

Demonstração: Seja $Z_t^\epsilon(x) = |X_t^{\epsilon,h_\epsilon}(x) - X_t^{\epsilon,h_\epsilon}(x+z)|$, $\sigma^\epsilon(x) = \sqrt{\epsilon}\sigma(x)$ e $u^{h_\epsilon}(x,t) = \langle \sigma(x), \dot{h}_t^\epsilon \rangle_{l^2} + u^\epsilon(x,t)$. Pela fórmula de Itô temos

$$\begin{aligned}
&\log\left(\frac{|Z_t^\epsilon|^2}{\delta^2} + 1\right) = \\
&2\int_0^t \frac{\langle Z_s^\epsilon, u^{h_\epsilon}\big(X_s^{\epsilon,h_\epsilon}(x), s\big) - u^{h_\epsilon}\big(X_s^{\epsilon,h_\epsilon}(x+z), s\big)\rangle}{|Z_s^\epsilon|^2 + \delta^2} ds \\
&+ 2\int_0^t \frac{\langle Z_s^\epsilon, \big(\sigma^\epsilon\big(X_s^{\epsilon,h_\epsilon}(x)\big) - \sigma^\epsilon\big(X_s^{\epsilon,h_\epsilon}(x+z)\big)dW_s\rangle}{|Z_s^\epsilon|^2 + \delta^2} \\
&+ \int_0^t \frac{||\sigma^\epsilon\big(X_s^{\epsilon,h_\epsilon}(x)\big) - \sigma^\epsilon\big(X_s^{\epsilon,h_\epsilon}(x+z)\big)||_{HS}^2}{|Z_s^\epsilon|^2 + \delta^2} ds \\
&- 2\int_0^t \frac{|\sigma^\epsilon\big(X_s^{\epsilon,h_\epsilon}(x)\big) - \sigma^\epsilon\big(X_s^{\epsilon,h_\epsilon}(x+z)\big)^\top Z_s^\epsilon|^2}{|Z_s^\epsilon|^2 + \delta^2} ds + \log\left(\frac{|z|^2}{\delta^2} + 1\right) \\
&= I_1(t) + I_2(t) + I_3(t) + I_4(t) + \log\left(\frac{|z|^2}{\delta^2} + 1\right).
\end{aligned}$$

Dada uma função f denotamos $f^*(T) := \sup_{t\in[0,T]} |f(t)|$. Tal como na demonstração do Lema 3.5 abandonamos $I_4(t)$ por ser negativo. Para $I_2(t)$ temos

$$\begin{aligned}
&E\int_{\mathbb{T}^2} I_2^*(T)dx \\
&\leq C_{21}\left\{\int_0^T \mathbb{E}\int_{\mathbb{T}^2} M_R|||\nabla\sigma^\epsilon\big(X_t^{\epsilon,h_\epsilon}(x)\big)||| + M_R|||\nabla\sigma^\epsilon\big(X_t^{\epsilon,h_\epsilon}(x+z)\big)|||\right\}^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C_{21}\left\{\int_0^T \int_{\mathbb{T}^2} 2M_R|||\nabla\sigma^\epsilon|||\right\}^{\frac{1}{2}} \overset{D2}{\leq} C_{22}\left\{\int_0^T \int_{\mathbb{T}^2} |||\nabla\sigma^\epsilon|||\right\}^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C_{22}\left\{\epsilon_0\int_0^T \int_{\mathbb{T}^2} |||\nabla\sigma|||\right\}^{\frac{1}{2}} = C_2
\end{aligned}$$

e para $I_3(t)$,

$$\begin{aligned}
E\int_{\mathbb{T}^2} I_3^*(T) &\leq C_{31}\int_0^T \mathbb{E}\int_{\mathbb{T}^2} M_R|||\nabla\sigma^\epsilon\big(X_t^{\epsilon,h_\epsilon}(x)\big)||| + M_R|||\nabla\sigma^\epsilon\big(X_t^{\epsilon,h_\epsilon}(x+z)\big)||| \\
&\leq C_{32}\epsilon_0\int_0^T \int_{\mathbb{T}^2} M_R|||\nabla\sigma||| \overset{D2}{\leq} C_{33}\int_0^T \int_{\mathbb{T}^2} |||\nabla\sigma||| = C3.
\end{aligned}$$

Finalmente para $I_1(t)$,

$$E\int_{\mathbb{T}^2} I_1^*(T)dx \leq C_{11}\int_0^T \mathbb{E}\int_{\mathbb{T}^2} M_R|\nabla u^{h_\epsilon}\big(X_t^{h_\epsilon}(x),t\big)| + M_R|\nabla u^{h_\epsilon}\big(X_t^{h_\epsilon}(x+z),t\big)|$$
$$\leq \mathbb{E}\int_{\mathbb{T}^2}\int_0^T |\nabla u^{h_\epsilon}\big(X_t^{h_\epsilon}(x),t\big)| + \mathbb{E}\int_{\mathbb{T}^2}\int_0^T |\nabla u^{h_\epsilon}\big(X_t^{h_\epsilon}(x+z),t\big)|.$$

Então, pela definição de u^{h_ϵ}, temos

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\int_{\mathbb{T}^2}\int_0^T |\nabla u^{h_\epsilon}\big(X_t^{h_\epsilon}(x+z),t\big)| \\
&\qquad \leq \mathbb{E}\int_{\mathbb{T}^2}\int_0^T |\nabla u^{\epsilon}\big(X_t^{h_\epsilon}(x+z),t\big)| + \mathbb{E}\int_{\mathbb{T}^2}\int_0^T |\nabla\langle \sigma^\epsilon\big(X_t^{h_\epsilon}(x+z)\big), \dot{h}_t^\epsilon\rangle_{l^2}| \\
&\qquad \leq \mathbb{E}\int_{\mathbb{T}^2}\int_0^T |\nabla u^{\epsilon}\big(X_t^{h_\epsilon}(x+z),t\big)| + \mathbb{E}\int_{\mathbb{T}^2}\int_0^T \epsilon_0|||\nabla \sigma\big(X_t^{h_\epsilon}(x+z)\big)|||\,||\dot{h}_t^\epsilon||_{l^2}.
\end{aligned}$$

Uma vez que $h^\epsilon \in A_N$, pelos Lemas 3.2 e 4.1 temos que

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\int_{\mathbb{T}^2}\int_0^T |\nabla u^{\epsilon}\big(X_t^{h_\epsilon}(x+z),t\big)| + \mathbb{E}\int_{\mathbb{T}^2}\int_0^T \epsilon_0|||\nabla \sigma\big(X_t^{h_\epsilon}(x+z)\big)|||\,||\dot{h}_t^\epsilon||_{l^2} \\
&\leq \mathbb{E}\int_{\mathbb{T}^2}\int_0^T |\nabla u^{\epsilon}\big(X_t^{h_\epsilon}(x+z),t\big)| + \epsilon_0\mathbb{E}\int_{\mathbb{T}^2}\left\{\int_0^T |||\nabla \sigma\big(X_t^{h_\epsilon}(x+z)\big)|||^2\int_0^T ||\dot{h}_t^\epsilon||_{l^2}^2\right\}^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \mathbb{E}\int_{\mathbb{T}^2}\int_0^T |\nabla u^{\epsilon}\big(X_t^{h_\epsilon}(x+z),t\big)| + \epsilon_0 C'\sqrt{N}\left\{\mathbb{E}\int_{\mathbb{T}^2}\int_0^T |||\nabla \sigma\big(X_t^{h_\epsilon}(x+z)\big)|||^2\right\}^{\frac{1}{2}} \\
&= \int_0^T\int_{\mathbb{T}^2}|\nabla u^\epsilon| + \epsilon_0 C'\left\{N\int_0^T\int_{\mathbb{T}^2}|||\nabla\sigma|||^2\right\}^{\frac{1}{2}} = C_1'.
\end{aligned}$$

Analogamente temos

$$\mathbb{E}\int_{\mathbb{T}^2}\int_0^T |\nabla u^{h_\epsilon}\big(X_t^{h_\epsilon}(x),t\big)| \leq C_1''.$$

Então definindo $C_1 = C_1' + C_1''$ temos que

$$\mathbb{E}\int_{\mathbb{T}^2} I_1^*(T)dx \leq C_1.$$

Juntando as três estimativas obtém-se

$$\mathbb{E}\int_{\mathbb{T}^2}\log\left(\frac{\sup_{t\in[0,T]}|X_t^{\epsilon,h_\epsilon}(x) - X_t^{\epsilon,h_\epsilon}(x+z)|^2}{\delta^2} + 1\right)dx \leq \log\left(\frac{|z|^2}{\delta^2}+1\right) + C, \tag{50}$$

onde $C = C_1 + C_2 + C_3$ é independente de h_ϵ, ϵ.

Pela concavidade da função logaritmo e pelo facto de $X_t^{\epsilon,h_\epsilon}$ ser limitado, existe $R' > 0$ tal que $|X_t^{\epsilon,h_\epsilon}| \leq \frac{\sqrt{R'}}{2}$, temos

$$\log\left(\frac{\sup_{t\in[0,T]}|Z_t^\epsilon|^2}{\delta^2}+1\right)R' \geq \log\left(\frac{R'}{\delta^2}+1\right)\sup_{t\in[0,T]}|Z_t^\epsilon|^2. \tag{51}$$

Portanto pelas equações (50) e (51), tomando $\delta^2 = |z|^2$

$$\mathbb{E}\int_{\mathbb{T}^2}\sup_{t\in[0,T]}|X_t^{\epsilon,h_\epsilon}(x) - X_t^{\epsilon,h_\epsilon}(x+z)|^2 \leq \frac{R'}{\log\left(\frac{R'}{|z|^2}+1\right)}\big(\log(2)+C\big). \tag{52}$$

Então

$$\mathbb{E}\int_{\mathbb{T}^2}\sup_{t\in[0,T]}|X_t^{\epsilon,h_\epsilon}(x) - X_t^{\epsilon,h_\epsilon}(x+z)|^2$$
$$\leq \frac{R'}{\log\left(\frac{R'}{|z|^2}+1\right)}\big(\log(2)+C\big) \leq g(|z|) \to 0, \quad |z| \to 0.$$

□

Lema 4.9 *Sejam $X_t^{\epsilon,h_\epsilon}$, $\epsilon > 0$, soluções de (49), então existe uma função contínua $f(\cdot)$ independente de ϵ tal que*

$$\lim_{t\to 0} f(t) = 0,$$

e para $r, t > 0$ tal que $0 \leq t \leq t + r \leq T$,tem-se

$$\mathbb{E}\int_{\mathbb{T}^2}\sup_{t\in[0,T-r]}|X_{t+r}^{\epsilon,h_\epsilon}(x) - X_t^{\epsilon,h_\epsilon}(x)|^2 \leq f(|r|).$$

Demonstração: Seja $Z_t(x) = X_{t+r}^{\epsilon,h_\epsilon}(x) - X_t^{\epsilon,h_\epsilon}(x)$ tal como na demonstração do lema anterior existe $R' > 0$ tal que $|Z_t(x)| \leq R'$. Aplicando a fórmula de

Itô a $|X^{h_\epsilon}_{t+r}(x) - X^{h_\epsilon}_t(x)|^2$ obtemos

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\int_{\mathbb{T}^2} |X^{\epsilon,h_\epsilon}_{t+r}(x) - X^{h_\epsilon}_t(x)|^2 \\
&\quad = \mathbb{E}\int_{\mathbb{T}^2}\int_t^{t+r} \langle Z_s, u^{h_\epsilon}\big(X^{\epsilon,h_\epsilon}_s, s\big)\rangle ds + \mathbb{E}\int_{\mathbb{T}^2}\int_t^{t+r} ||\sigma\big(X^{\epsilon,h_\epsilon}_s\big)||_{HS} dt \\
&\quad + \mathbb{E}\int_{\mathbb{T}^2}\int_t^{t+r} \langle Z_s, \sigma\big(X^{\epsilon,h_\epsilon}_s\big) dW_s\rangle \\
&\quad \leq \mathbb{E}\int_{\mathbb{T}^2} I_1(t) + I_2(t) + I_3(t).
\end{aligned}
$$

Como $[0,T]$ é compacto o supremo em t é atingido. Então para $I_1(t)$, tal como no lema anterior, podemos escrever

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\int_{\mathbb{T}^2} \sup_{t\in[0,T-r]} \int_t^{t+r} \langle Z_s, u^{h_\epsilon}\big(X^{h_\epsilon}_s, s\big)\rangle ds \leq \mathbb{E}\int_{\mathbb{T}^2}\int_{t_1}^{t_1+r} R'|u^{h_\epsilon}\big(X^{h_\epsilon}_s, s\big)| ds \\
&\quad \leq R'\mathbb{E}\int_{\mathbb{T}^2}\int_{t_1}^{t_1+r} |u^\epsilon\big(X^{h_\epsilon}_s, s\big)| ds + R'\mathbb{E}\int_{\mathbb{T}^2}\int_{t_1}^{t_1+r} |\langle \sigma^\epsilon\big(X^{h_\epsilon}_s\big), \dot{h}^\epsilon_t\rangle_{l^2}| \\
&\quad = R'\int_{t_1}^{t_1+r}\int_{\mathbb{T}^2} |u^\epsilon| + \epsilon_0 R' C'\Big\{N\int_{t_1}^{t_1+r}\int_{\mathbb{T}^2} ||\sigma||^2_{HS}\Big\}^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \leq R'\Big\{\int_{\mathbb{T}^2}\int_{t_1}^{t_1+r} |u^\epsilon|^2 ds\Big\}^{\frac{1}{2}} \Big\{\int_{\mathbb{T}^2}\int_{t_1}^{t_1+r} 1\, ds\Big\}^{\frac{1}{2}} + \epsilon_0 R' C''\Big\{N\int_{t_1}^{t_1+r} 1\, ds\Big\}^{\frac{1}{2}} \\
&\quad = C_1|r|^{\frac{1}{2}}. \qquad (53)
\end{aligned}
$$

Para $I_2(t)$ deduzimos que

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\int_{\mathbb{T}^2} \sup_{t\in[0,T-r]} \int_t^{t+r} ||\sigma\big(X^{h_\epsilon}_s\big)||^2_{HS} dt &\leq \mathbb{E}\int_{\mathbb{T}^2}\int_{t_2}^{t_2+r} ||\sigma\big(X^{h_\epsilon}_s\big)||^2_{HS} dt \\
&= \int_{\mathbb{T}^2}\int_{t_2}^{t_2+r} ||\sigma(x))||^2_{HS} dt \leq |r|\int_{\mathbb{T}^2} ||\sigma(x))||^2_{HS} = C_2|r|. \qquad (54)
\end{aligned}
$$

Finalmente para $I_3(t)$, usando a desigualdade de Burkholder-Davis-Gundy, derivamos a seguinte estimativa

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\int_{\mathbb{T}^2}\sup_{t\in[0,T-r]}\int_t^{t+r}\langle Z_s,\sigma\big(X_s^{h_\epsilon}\big)dW_s\rangle &\le \int_{\mathbb{T}^2}E\sup_{t\in[0,T-r]}\left|\int_t^{t+r}\langle Z_s,\sigma\big(X_s^{h_\epsilon}\big)dW_s\rangle\right| \\
&\le C_{31}\left\{\int_{\mathbb{T}^2}E\sup_{t\in[0,T-r]}\int_t^{t+r}|Z_s|^2||\sigma\big(X_s^{h_\epsilon}\big)||_{HS}^2 ds\right\}^{\frac{1}{2}} \\
&= C_{31}\left\{\int_{\mathbb{T}^2}\mathbb{E}\int_{t_3}^{t_3+r}|Z_s|^2||\sigma\big(X_s^{h_\epsilon}\big)||_{HS}^2 ds\right\}^{\frac{1}{2}} \\
&\le C_{31}R'\left\{\int_{\mathbb{T}^2}\mathbb{E}\int_{t_3}^{t_3+r}||\sigma\big(X_s^{h_\epsilon}\big)||_{HS}^2 ds\right\}^{\frac{1}{2}} = C_3|r|^{\frac{1}{2}}. \qquad (55)
\end{aligned}
$$

Juntando as estimativas (53), (54) e (55), para $|r|\le 1$ obtemos

$$
\mathbb{E}\int_{\mathbb{T}^2}\sup_{t\in[0,T-r]}|X_{t+r}^{h_\epsilon}(x)-X_t^{h_\epsilon}(x)|^2\le C|r|^{\frac{1}{2}},
$$

Onde $C=C_1+C_2+C_3$ é independente de h_ϵ, ϵ. Portanto

$$
\mathbb{E}\int_{\mathbb{T}^2}|X_{t+r}^{h_\epsilon}(x)-X_t^{h_\epsilon}(x)|^2\le f(|r|)\to 0,\ \ |r|\to 0.
$$

□

Vamos agora demonstrar três lemas que quando conjugados provam que as leis de $(h^\epsilon, X_t^{\epsilon,h_\epsilon})$ com $\epsilon\in[0,\epsilon_0]$ são *tight* em $B_N\times C\big([0,T];L^2(\mathbb{T}^2)\big)$. Vamos denotar por P^ϵ a lei de $X_t^{\epsilon,h_\epsilon}$, definida sobre a σ-álgebra de Borel do espaço $C([0,T];L^2(\mathbb{T}^2))$.

Lema 4.10 *Sejam $\epsilon>0$ e P^ϵ a lei de $X_t^{\epsilon,h_\epsilon}$. Para qualquer $\eta>0$ e $M>0$, existem $\delta_1(\eta)$, $\delta_2(\eta)>0$ tal que,*

$$
P^\epsilon\big(K_\eta\big)>1-\eta
$$

onde

$$
K_\eta:=\left\{y\in C([0,T];L^2(\mathbb{T}^2)):\sup_{t\in[0,T-r];\,r<\delta_1}\int_{\mathbb{T}^2}|y_{t+r}(x+z)-y_t(x)|^2<M,\ \ |z|<\delta_2\right\}.
$$

Demonstração: Pelos Lemas 4.8 e 4.9 temos que

$$
\begin{aligned}
P^{\epsilon}\big(K_{\eta}^{c}\big) &\leq P\bigg\{\omega \in \Omega : \sup_{t\in[0,T-r]} \int_{\mathbb{T}^2} |X_{t+r}^{\epsilon,h_\epsilon}(x+z) - X_t^{\epsilon,h_\epsilon}(x)|^2 \geq M\bigg\} \\
&\leq \frac{1}{M}\mathbb{E}\bigg[\sup_{t\in[0,T-r]} \int_{\mathbb{T}^2} |X_{t+r}^{\epsilon,h_\epsilon}(x+z) - X_t^{\epsilon,h_\epsilon}(x)|^2\bigg] \\
&\leq \frac{1}{M}\mathbb{E}\bigg[2\int_{\mathbb{T}^2} \sup_{t\in[0,T-r]} \Big(|X_{t+r}^{\epsilon,h_\epsilon}(x+z) - X_t^{\epsilon,h_\epsilon}(x+z)|^2 + |X_t^{\epsilon,h_\epsilon}(x+z) - X_t^{\epsilon,h_\epsilon}(x)|^2\Big)\bigg] \\
&\leq \frac{1}{M}\big(g(|z|) + f(|r|).
\end{aligned}
$$

Então, podemos escolher $\delta_1(\eta), \delta(\eta)_2 > 0$ tais que $f(|\delta_1|) \leq \frac{M\eta}{2}$ e $(g(|\delta_2|) \leq \frac{M\eta}{2}$. Portanto

$$P^{\epsilon}\big(K_{\eta}^{c}\big) < \eta$$

e como consequência

$$P^{\epsilon}\big(K_{\eta}\big) > 1 - \eta.$$

$\square$

Vamos agora ver que K_η é compacto em $C([0,T]; L^2(\mathbb{T}^2))$. Começamos por demonstrar o seguinte lema análogo ao Teorema de Ascoli-Arzelà.

Lema 4.11 *Consideremos o espaço $C\big([0,T]; L^2(S)\big)$ onde S é um conjunto limitado de R^d. Então uma família de funções $\{f_t(x)^\epsilon\} \subset C\big([0,T]; L^2(S)\big)$ é relativamente compacta em $C\big([0,T]; L^2(S)\big)$, se forem satisfeitas as seguintes condições:*

(i) Para qualquer $t \in [0,T]$, $\int_{\mathbb{T}^2} |f_t^\epsilon(x+z) - f_t^\epsilon(x)|^2 dx \to 0$ quando $|z| \to 0$ uniformemente em ϵ.

(ii) f_t^ϵ é equicontínua em ϵ, ou seja,

$$\lim_{\gamma\to 0} \sup_{\epsilon, |t'-t''|\leq\gamma} ||f_{t'}^\epsilon - f_{t''}^\epsilon||_{L^2(\mathbb{T}^2)} = 0.$$

Demonstração: Começamos por observar que para t fixo o conjunto

$$K' = \bigg\{f_t^\epsilon \in L^2(S) : \int_{\mathbb{T}^2} |f_t^\epsilon(x+z) - f_t^\epsilon(x)|^2 \to 0 \quad \text{uniformemente}\bigg\}$$

é compacto em $L^2(\mathbb{T}^2)$. De facto este resultado é consequência do Critério de compacidade de Riesz-Fréchet-Kolmogorov (ver Apêndice proposição E). Então para t fixo, a sucessão $\{f_t^\epsilon(.)\}$ tem uma subsucessão convergente. Por outro lado como $[0,T]$ é compacto, existe um subconjunto contável e denso, $\{t_n\} \subset [0,T]$ tal que, para qualquer $\delta > 0$, existe um subconjunto finito $\{t_n;\, 1 \leq n \leq k(\delta)\}$ satisfazendo a condição

$$\sup_{t\in[0,T]} \inf_{1\leq j\leq k(\delta)} |t - t_j| \leq \delta.$$

A demonstração da inequação anterior é a seguinte. A compacidade de $[0,T]$ implica que este conjunto é totalmente limitado. Ou seja, para qualquer $\gamma > 0$ existe um conjunto finito de pontos $\{t_n^\gamma\}$ pertencentes a $[0,T]$ tal que para qualquer ponto de $[0,T]$ existe um ponto em $\{t_n^\gamma\}$ cuja distância entre estes dois pontos é inferior a γ. Escolhendo $\gamma = 1, 2^{-1}, 3^{-1}, \ldots,$ e guardando os respetivos conjuntos finitos $\{t_n^\gamma\}$, obtemos a sucessão $\{t_n\}$ considerada na desigualdade.
Aplicamos então o processo diagonal de escolha à sucessão $\{f_t^\epsilon(.)\}$, para obtermos uma subsucessão $\{f_t^{\epsilon_k}(.)\}$ que converge simultaneamente para $t = t_1, t_2, \ldots, t_k, \ldots$. Pela equicontinuidade de $\{f_t^\epsilon(.)\}$ existe, para cada $\delta > 0$ um $\gamma = \gamma(\delta) > 0$ tal que $|t' - t''| \leq \gamma$, implica que $||f_{t'}^\epsilon - f_{t''}^\epsilon||_{L^2(S)} \leq \delta$ para qualquer ϵ. Portanto para qualquer $t \in [0,T]$, existe j, com $j \leq k(\delta)$ tal que,

$$\begin{aligned}
||f_t^{\epsilon_k'} - f_t^{\epsilon_k''}||_{L^2(S)} &\leq ||f_t^{\epsilon_k'} - f_{t_j}^{\epsilon_k'}||_{L^2(S)} + ||f_{t_j}^{\epsilon_k'} - f_{t_j}^{\epsilon_k''}||_{L^2(S)} + ||f_{t_j}^{\epsilon_k''} - f_t^{\epsilon_k''}||_{L^2(S)} \\
&\leq 2\delta + ||f_{t_j}^{\epsilon_k'} - f_{t_j}^{\epsilon_k''}||_{L^2(S)}.
\end{aligned}$$

Portanto, $\lim_{\epsilon_k', \epsilon_k'' \to \infty} \sup_{t\in[0,T]} ||f_t^{\epsilon_k'} - f_t^{\epsilon_k''}||_{L^2(S)} \to 0.$ □

Com recurso ao lema anterior estamos em condições de demonstrar a compacidade de K_η.

Lema 4.12 *Seja K_η o conjunto definido em (4.10). Então temos que K_η é compacto em $C\big([0,T]; L^2(\mathbb{T}^2)\big)$.*

Demonstração: Por definição de k_η tomando $r = 0$ verificamos a condição (i) do Lema 4.11 e tomando $z = 0$ verificamos a condição (ii) do Lema 4.11. □

Lema 4.13 *As seguintes proposições são verdadeiras:*

(i) As leis de $\{(h^\epsilon, X_t^{\epsilon,h_\epsilon}, W\}$ *em* $B_N \times C\big([0,T]; L^2(\mathbb{T}^2)\big) \times C([0,T]; l_*^2)$ *são tight.*

(ii) Existe um espaço de probabilidade $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathscr{F}}, \tilde{P})$, *uma sucessão de processos estocásticos* $\{(\tilde{h}^\epsilon, \tilde{X}_t^{\epsilon,\tilde{h}_\epsilon}, \tilde{W})\}$ *e um processo estocástico* $\{(h, X_t^h, W)\}$ *definidos neste espaço de probabilidade tomando valores em* $B_N \times C\big([0,T]; L^2(\mathbb{T}^2)\big) \times C([0,T]; l_*^2)$ *tal que:*

(a) $\{(\tilde{h}^\epsilon, \tilde{X}_t^{\epsilon,\tilde{h}_\epsilon}, \tilde{W})\}$ *tem a mesma lei que* $\{(h^\epsilon, X_t^{\epsilon,h_\epsilon}, W)\}$ *para cada* ϵ.

(b) $\{(\tilde{h}^\epsilon, \tilde{X}_t^{\epsilon,\tilde{h}_\epsilon}, \tilde{W})\} \to \{(h, X_t^h, W)\}$ *em* $B_N \times C\big([0,T]; L^2(\mathbb{T}^2)\big) \times C([0,T]; l_*^2)$ *quase seguramente relativamente a* P, *quando* $\epsilon \to 0$.

(c) X^h *é solução da seguinte equação diferencial (42).*

Demonstração: (i) Os Lemas 4.10 e 4.12 provam que as leis de $(h^\epsilon, X_t^{\epsilon,h_\epsilon}, W)$ com $\epsilon \in [0, \epsilon_0]$ são *tight* em $B_N \times C\big([0,T]; \mathbb{T}^2\big) \times C([0,T]; l_*^2)$.

(ii) As existências de $\{(\tilde{h}^\epsilon, \tilde{X}_t^{\epsilon,\tilde{h}_\epsilon}, \tilde{W})\}$ e $\{(h, X_t^h, W)\}$ e (a), (b) são consequência direta de (i) pela aplicação do teorema de representação de Skorohod. Para (c) reparando que $\tilde{W}$ tem a mesma lei que W, sabemos que $\tilde{W}$ é um Browniano em $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathscr{F}}, \tilde{P})$. Seja ϕ definido como no Lema 4.7. Por (a) e

$$X^{\epsilon,h_\epsilon} = \Phi(W + h^\epsilon) \ \ quase\, seguramente - P$$

temos que

$$\tilde{X}^{\epsilon,h_\epsilon} = \Phi(\tilde{W}^\epsilon + \tilde{h}^\epsilon) \ \ quase\, seguramente - \tilde{P}.$$

Então, pelo argumento da unicidade, $\tilde{X}^{\epsilon,\tilde{h}_\epsilon}$ satisfaz a equação diferencial

$$\tilde{X}_t^{\epsilon,\tilde{h}_\epsilon}(x) = x + \sqrt{\epsilon}\int_0^t \sigma\big(\tilde{X}_s^{\epsilon,\tilde{h}_\epsilon}(x)\big)d\tilde{W}_s + \int_0^t \langle \sigma\big(\tilde{X}_s^{\epsilon,\tilde{h}_\epsilon}(x)\big), \dot{\tilde{h}}_s^\epsilon \rangle_{l^2} ds + \int_0^t u^\epsilon\big(\tilde{X}_s^{\epsilon,\tilde{h}_\epsilon}(x), s\big)ds.$$

Então, vamos ver que X^h satisfaz a equação diferencial (42). Como

$$\mathbb{E}\int_{\mathbb{T}^2}\int_0^t \sigma\big(\tilde{X}_s^{\epsilon,\tilde{h}_\epsilon}(x)\big)d\tilde{W}_s < C$$

onde C não depende de ϵ nem de $\tilde{h}_\epsilon$. Temos

$$\lim_{\epsilon\to 0}\sqrt{\epsilon}\mathbb{E}\int_{\mathbb{T}^2}\int_0^t \sigma\big(\tilde{X}_s^{\epsilon,\tilde{h}_\epsilon}(x)\big)d\tilde{W}_s = 0.$$

Pelo Lema 4.2 (ii) temos que $u^{\tilde{h}_\epsilon}(x,t) \to u(x,t)$ em $L^2\big([0,T]\times\mathbb{T}^2\big)$. Portanto, tal como na demonstração do Teorema 3.9, aplicando o teorema de Lusin provamos que

$$\lim_{\epsilon\to 0}\mathbb{E}\int_{\mathbb{T}^2}\int_0^t u^{\tilde{h}_\epsilon}\big(\tilde{X}_s^{\epsilon,\tilde{h}_\epsilon}(x),s\big)ds = \mathbb{E}\int_{\mathbb{T}^2}\int_0^t u\big(X_s^h(x),s\big)ds.$$

Voltando a usar argumentos semelhantes aos usados na demonstração do Teorema 3.9 como $\tilde{h}_\epsilon \rightharpoonup h$ temos pelo teorema de Lusin

$$\lim_{\epsilon\to 0}\mathbb{E}\int_{\mathbb{T}^2}\int_0^t \langle\sigma\big(\tilde{X}_s^{\epsilon,\tilde{h}_\epsilon}(x)\big),\dot{\tilde{h}}_s^\epsilon\rangle_{l^2}ds = \mathbb{E}\int_{\mathbb{T}^2}\int_0^t \langle\sigma\big(X_s^h(x)\big),\dot{h}_s\rangle_{l^2}ds,$$

Portanto, tomando o limite quando $\epsilon \to 0$, obtemos que (h, X^h) satisfaz a equação (42). $\square$

4.4 Teorema de Schilder

Estamos então em condições de demonstrar o resultado fundamental deste capítulo.

Teorema 4.14 ***Princípio de Laplace:*** *$\{X^\epsilon\}$ satisfaz o princípio de Laplace em $C\big([0,T];L^2(\mathbb{T}^2)\big)$ com a rate function $I(f)$.*

Demonstração: Seja g uma função contínua e limitada com valores em $C\big([0,T];L^2(\mathbb{T}^2)\big)$.
Limite inferior do princípio de Laplace: Pelo Lema 4.7, temos que

$$-\epsilon\log\mathbb{E}\bigg(\exp\Big[-\frac{g(X^\epsilon)}{\epsilon}\Big]\bigg) = \inf_{h\in A}\mathbb{E}\bigg(g(X^{\epsilon,h}) + \frac{1}{2}||h||_{\mathbb{H}}^2\bigg) \tag{56}$$

Fixemos $\delta > 0$. Para cada $\epsilon > 0$ existe $h^\epsilon \in A$ tal que

$$\inf_{h\in A}\mathbb{E}\bigg(g(X^{\epsilon,h}) + \frac{1}{2}||h||_{\mathbb{H}}^2\bigg) \geq \mathbb{E}\bigg(g(X^{\epsilon,h^\epsilon}) + \frac{1}{2}||h^\epsilon||_{\mathbb{H}}^2\bigg) - \delta.$$

Como g é limitada, temos

$$\frac{1}{2}\sup_{\epsilon>0}\mathbb{E}\big(||h^\epsilon||_{\mathbb{H}}^2\big) \leq 2||g||_\infty + \delta.$$

Definimos

$$\tau_N^\epsilon := \left\{ t \in [0,T] : \int_0^t ||\dot{h}^\epsilon(s)||_{l^2}^2 ds \geq N \right\}$$

e

$$h_N^\epsilon(t) := h^\epsilon(t \wedge \tau_N^\epsilon).$$

Então $h_N^\epsilon(t) \in A_N$ e

$$P(\omega : ||h_N^\epsilon(\omega) - h^\epsilon(\omega)||_{\mathbb{H}} \neq 0) = P(\omega : \tau_N^\epsilon(\omega) < T) \leq \frac{2(2||g||_\infty + \delta)}{N}.$$

Logo

$$\mathbb{E}\left(g\big(X^{\epsilon,h^\epsilon}\big) + \frac{1}{2}||h^\epsilon||_{\mathbb{H}}^2 \right) - \delta \geq \mathbb{E}\left(g\big(X^{\epsilon,h_N^\epsilon}\big) + \frac{1}{2}||h_N^\epsilon||_{\mathbb{H}}^2 \right) - \frac{2||g||_\infty(2||g||_\infty + \delta)}{N} - \delta.$$

Pelo Lema 4.13,

$$\begin{aligned}
&\liminf_{\epsilon \to 0} \mathbb{E}\left(g(X^{\epsilon,h_N^\epsilon}) + \frac{1}{2}||h_N^\epsilon||_{\mathbb{H}}^2 \right) \\
&\quad = \liminf_{\epsilon \to 0} \mathbb{E}^{\tilde{P}}\left(g\big(\tilde{X}^{\epsilon,\tilde{h}_N^\epsilon}\big) + \frac{1}{2}||\tilde{h}_N^\epsilon||_{\mathbb{H}}^2 \right) \\
&\quad \geq \mathbb{E}^{\tilde{P}}\left(g(S(h)) + \frac{1}{2}||h||_{\mathbb{H}}^2 \right) \\
&\quad \geq \inf_{\{(f,h) \in C([0,T];L^2(\mathbb{T}^2)) \times \mathbb{H} :\, f = S(h)\}} \left(g(f) + \frac{1}{2}||h||_{\mathbb{H}}^2 \right) \\
&\quad \geq \inf_{f \in C([0,T];L^2(\mathbb{T}^2))} \{g(f) + I(f)\}.
\end{aligned}$$

Portanto, temos

$$\begin{aligned}
&\liminf_{\epsilon \to 0} -\epsilon \log \mathbb{E}\left(\exp\left[-\frac{g(X^\epsilon)}{\epsilon} \right] \right) \\
&\qquad \geq \inf_{f \in C([0,T];L^2(\mathbb{T}^2))} \{g(f) + I(f)\} - \frac{2||g||_\infty(2||g||_\infty + \delta)}{N} - \delta
\end{aligned}$$

Fazendo então $N \to \infty$ e $\delta \to 0$ fica provada o limite inferior do princípio de Laplace.

Limite superior do princípio de Laplace: Fixemos $\delta > 0$. Devido ao facto de g ser limitada, existe $f_0 \in C\big([0,T]; L^2(\mathbb{T}^2)\big)$ tal que

$$g(f_0) + I(f_0) \leq \inf_{f \in C([0,T];L^2(\mathbb{T}^2))} \{g(f) + I(f)\} + \delta.$$

Então, escolhemos $h_0 \in \mathbb{H}$ tal que $\frac{1}{2}||h_0||^2_{\mathbb{H}} = I(f_0)$ e $f_0 = S(h_0)$. Por (56) e pelo Lema 4.13 temos que

$$\begin{aligned}
&\limsup_{\epsilon\to 0} -\epsilon \log \mathbb{E}\bigg(\exp\bigg[-\frac{g(X^\epsilon)}{\epsilon}\bigg]\bigg) \\
&\quad = \limsup_{\epsilon\to 0} \inf_{h\in A} \mathbb{E}\bigg(g(X^{\epsilon,h}) + \frac{1}{2}||h||^2_{\mathbb{H}}\bigg) \\
&\quad \le \limsup_{\epsilon\to 0} \mathbb{E}\bigg(g(X^{\epsilon,h_0}) + \frac{1}{2}||h_0||^2_{\mathbb{H}}\bigg) \\
&\quad = g(S(h_0)) + \frac{1}{2}||h_0||^2_{\mathbb{H}} \le g(f_0) + I(f) \\
&\quad \le \inf_{f\in C([0,T];L^2((T)^2))} \{g(f) + I(f)\} + \delta.
\end{aligned}$$

Considerando $\delta \to 0$, obtemos o limite do princípio de Laplace. $\square$

Teorema 4.15 ***Princípio dos grandes desvios:*** *$\{X^\epsilon\}$ satisfaz o princípio dos grandes desvios em $C\big([0,T]; L^2(\mathbb{T}^2\big)$ com a rate function $I(f)$.*

Demonstração: A demonstração deste teorema sai diretamente do teorema anterior e da equivalência entre o princípio de Laplace e o princípio dos grandes desvios demonstrada na secção 3.2. $\square$

5 Apêndice

Proposição A: Sejam E, E_1 e E_2 espaços de Hilbert e $A_1 : E_1 \to E$, $A_2 : E_2 \to E$ dois operadores lineares contínuos. Vamos denotar por $A_1^* : E \to E_1$ e por $A_2^* : E \to E_2$ os operadores adjuntos correspondentes
Então as seguintes afirmações são verdadeiras:

(i) $A_1(E_1) \subset A_2(E_2)$ se e só se existir uma constante $k > 0$ tal que $|A_1^* h| \leq k|A_2^*|$ para qualquer $h \in E$,

(ii) Se $|A_1^* h| = |A_2^* h|$ qualquer $h \in E$, então $A_1(E_1) = A_2(E_2)$ e $|A_1^{-1}h| = |A_2^{-1}h|$ para qualquer $h \in A_1(E_1)$.

A demonstração desta proposição pode ser encontrada em [6], página 429.

Proposição B: Seja K um espaço de Hilbert separável e K_1 um subconjunto linearmente denso de K. Se $X : \Omega \to K$ for tal que para $k \in K_1$ arbitrário, $\langle k, X \rangle$ é $\mathscr{F}$-mensurável então X é uma variável aleatória de $(\Omega, \mathscr{F})$ para $(K, \mathscr{B}(K))$.

Proposição C: Seja E um espaço métrico separável com uma métrica ρ e seja X uma variável aleatória com valores em E. Então existe uma sucessão $\{X_m\}$ de variáveis aleatórias simples (tomando um numero finito de valores) com valores em E, tal que para qualquer $\omega \in \Omega$, a sucessão $\{p(X(\omega), X_m(\omega))\}$ é monotonamente decrescente para 0.

Demonstração: Seja $E_0 = \{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ um subconjunto numerável e denso de E. Para $m \in \mathbb{N}$ definimos para $\omega \in \Omega$,

$$p_m(\omega) = \min\{\rho(X(\omega), e_k),\ k = 1 \dots m\}$$

$$k_m(\omega) = \min\{k \leq m :\ \rho_m(\omega) = \rho(X(\omega, e_k)\}$$

$$X_m(\omega) = e_{k_m(\omega)}$$

Obviamente X_m são variáveis aleatórias simples pois:

$$X_m(\Omega) \subset \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$$

Além disso, pela densidade de E_0 a sucessão $\{\rho_m(\omega)$ é monotonamente decrescente para 0 para qualquer $\omega \in \Omega$. Fica então demonstrada a proposição pois, $\rho_m(\omega) = \rho(X(\omega, X_m(\omega))$.

Seja $\mathscr{K}$ uma coleção de subconjuntos de Ω. À mais pequena σ-álgebra em Ω que contém $\mathscr{K}$, $(\sigma(\mathscr{K})$, chamamos a σ-álgebra gerada por $\mathscr{K}$.
Uma coleção $\mathscr{K}$ de subconjuntos de Ω diz-se ser um π-sistema se $\emptyset \in \mathscr{K}$ e se A, $B \in \mathscr{K}$ então $A \cap B \in \mathscr{K}$.

Proposição D: Seja $\mathscr{K}$ um π-sistema, e seja $\mathscr{G}$ a mais pequena família de subconjuntos de Ω tal que:

(i) $\mathscr{K} \subset \mathscr{G}$,

(ii) $A \in \mathscr{G}, \implies A^c \in \mathscr{G}$

(iii) $A_i \in \mathscr{G}, \forall\, i \in \mathbb{N}, e\, A_n \cap A_m = \emptyset, \forall\, n \neq m, \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{G}$.

Então $\mathscr{G} = \sigma(\mathscr{K})$.

Demonstração: Como $\sigma(\mathscr{K})$ satisfaz (i), $(ii)\, e\, (iii)$, temos que $\mathscr{G} \subset \sigma(\mathscr{K})$. Para provar a inclusão contrária basta mostrar que $\mathscr{G}$ é um π-sistema, pois é fácil de ver que se um π-sistema satisfaz as condições (ii) e (iii), então é uma σ-álgebra. Seja $B \in \mathscr{G}$, definimos,

$$\mathscr{G}_B = \{A \in \mathscr{G} :\, A \cap B \in \mathscr{G}\}.$$

$\mathscr{G}_B$ satisfaz (ii), pois se $B \in \mathscr{G}$ e $A \cap B \in \mathscr{G}$ então $A \cap B^c = A \cap (A \cap B)^c \in \mathscr{G}$. Além disso é óbvio que $\mathscr{G}_A$ satisfaz (iii), e se $A \in \mathscr{K}$ a condição (i) também é satisfeita. Portanto, para $A \in \mathscr{K}$, $\mathscr{G}_A = \mathscr{G}$, e assim provamos que se $A \in \mathscr{K}$ e se $B \in \mathscr{G}$ então $A \cap B \in \mathscr{G}$. Mas isto implica que $\mathscr{K} \subset \mathscr{G}_B$, e consequentemente $\mathscr{G}_B = \mathscr{G}$ para qualquer $B \in \mathscr{G}$.

Proposição E: (Critério de compacidade de Riesz-Fréchet-Kolmogorov).

Seja $\mathscr{F}$ um subconjunto limitado de $L^p(\mathbb{R}^N)$, para $1 \leq p \leq \infty$. Suponhamos que

$$\lim_{|h| \to 0} ||f(. - h) - f||_p = 0, \text{ uniformemente em} f \in \mathscr{F}$$

Então $\mathscr{F}$ é relativamente compacto em $L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

Proposição F: (Teorema de Lusin).

Seja $\big(X, \Sigma, \mu)$ um espaço de Radon mensurável e Y um espaço topológico completamente separável, seja

$$f : X \to Y$$

uma função mensurável. Dado $\epsilon > 0$, para cada $A \in \Sigma$ de medida finita, existe um conjunto fechado E com $\mu(A/E) < \epsilon$ tal que a restrição de f a E é contínua. Se A for localmente compacto, podemos escolher E compacto e encontrar uma função contínua $f_\epsilon : X \to Y$ com suporte compacto coincidente com f em E.

Proposição G:(Transformação Jacobiana)

Dada uma velocidade $u(x,t)$, $X(x,t) = (X_1, X_2, \ldots, X_N)^t$ é a localização para um determinado tempo t, de uma partícula do fluído inicialmente colocada no ponto, $(x_1, x_2, \ldots, x_N)$. A seguinte equação diferencial ordinária não linear

$$\frac{dX}{dt}(x,t) = u(X(x,t),t), \;\; X(x,0) = x \tag{57}$$

define uma família indexada no tempo de transformações com a seguinte interpretação: um domínio inicial $\Gamma \subset \mathbb{R}^N$ num fluído evolui no tempo para $X(\Gamma, t) = \{X(x,t) : x \in \Gamma\}$, com um vetor u tangente à trajetória da partícula.

Consideramos o Jacobiano da transformação $X(x,t)$,

$$J(x,t) = det(\nabla X(x,t)) \tag{58}$$

onde $\nabla = \big[(\partial/\partial x_1), \ldots, \partial/\partial x_N\big]$. Vamos introduzir o seguinte lema sobre a evolução no tempo do jacobiano:

Lema 5.1 *Seja $X(x,t)$ definido pelo campo de velocidades regular $u \in \mathbb{R}^N$ como solução da equação (57). Então*

$$\frac{dJ}{dt}(x,t) = (div\, u)|_{X(x,t),t)} J(x,t). \tag{59}$$

demonstração: Devido à multi-linearidade do determinante nas colunas pudemos calcular a derivada no tempo de J.

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{d}{dt} \det \left[\frac{\partial X^i}{\partial x_j}(x,t) = \sum_{i,j} A_i^j \frac{d}{dt} \frac{\partial X^i}{\partial x_j}(x,t) \right]$$

onde A_i^j são os menores do elemento $\partial X^i / \partial x_j$ da matriz ∇X. Os menores satisfazem a identidade

$$\sum_j A_i^j \frac{\partial X^k}{\partial x_j} = \delta_i^k J$$

onde $\delta_i^k = 1$ se $k = i$ e $\delta_i^k = 0, k \neq i$. Logo, pela equação (57), obtemos

$$\frac{dJ}{dt} = \sum_{i,j,k} A_i^j \frac{\partial X^k}{\partial x_j} \frac{\partial u^i}{\partial x_k} = \sum_{i,k} \frac{\partial u^i}{\partial x_k} \delta_i^k J = J\, div\, u.$$

□

Vamos introduzir algumas desigualdades.
Seja f uma função localmente integrável em $\mathbb{R}^d$, a função de máximo local é definida como $\forall R > 0$

$$M_R f(x) = \sup_{0<r<R} \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} f(x+y) dy.$$

Desigualdade 1 (D1) Seja $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ tal que $\nabla f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$. Então existe $C_d > 0$ e um conjunto de medida nula A tal que para qualquer x, $y \in A^c$ com $|x - y| \leq R$,

$$|f(x) - f(y)| \leq C_d |x-y| \big(M_R |\nabla f|(x) + M_R |\nabla f|(y) \big).$$

Desigualdade 2 (D2) Seja $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^d)$ com $p > 1$. Então para algum $C_{d,p} > 0$ e para qualquer N, $R > 0$,

$$\left(\int_{B_N} (M_R |f|)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C_{d,p} \left(\int_{B_{N+R}} |f|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

As referências e demonstrações destas desigualdades podem ser encontradas em [9].

Referências

[1] Budhiraja A., Dupuis P., A Variational Representation for Positive Functionals of Infinite Dimensional Brownian Motion. Probability and Mathematical Statistics. 39-61 **20** (2001)

[2] Cipriano F., Cruzeiro A.B., Navier-Stokes Equation and Diffusions on the Group of Homeomorphisms of the Torus. Russian Math. Surveys, Commun. Math. Phys. 255–269 **275** (2007)

[3] Cipriano F., Cruzeiro A.B., Flows associated with irregular $\mathbb{R}^d$ - vector fields. J. Differential Equations, 183-201 **219** (2005)

[4] Constantin P, Iyer G, A Stochastic Lagrangian Representation of the Three-Dimensional Incompressible Navier-Stokes Equations, Communications on Pure and Applied Mathematics 289-449 **61** (2008)

[5] Crippa, G; De Lellis, C Estimates and Regularity Results for the Diperna-Lions Flow Journal fur die Reine und Angewandte Mathematik 15 – 46 **616** (2008)

[6] Da Prato G. Zabczyk,Stochastic Equations inInfinite Dimensions (second edition), Cambridge University Press, Cambrige (2014).

[7] DiPerna R. J., Lions P. L., Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces, Invent. Math. 98, 511-547 (1989).

[8] Dupuis P., Ellis R. S.,A Weak Convergence Approach to the Theory of Large Deviations,John Wiley & Sons, (1997).

[9] Evans C. L. Gariepy R. F., Measure Theory and Fine Properties of Functions (Studies in Advance Mathematics), CRC Press, Inc (1992).

[10] Kunita H., Stochastic Flows and Stochastic Differential Equations, Cambridge University Press, Cambrige (1990).

[11] Kuo H.,Gaussian Measures in Banach Spaces, Springer Verlag, New York (2006).

[12] Majda A. J., Bertozzi A. J., Vorticity and Incompressible Flow, Cambridge University Press, Cambrige (2003).

[13] Malliavin P., Integration and Probability, Springer Verlag, New York (1995).

[14] Simon J., Compact Sets in the space $L^p(0,T;B)$. Annali di Matematica Pura ed Applicata, 65–96, **146**, n. 1 (1986).

[15] Ren J., Zhang X., Schilder theorem for the Brownian motion on the diffeomorphism group of the circle. Journal of Functional Analysis 107 – 133 **224** (2005)

[16] Ustunel A. S., Zakai M.,Transformation of Measure on Wiener Space, Springer Verlag, New York (2000).

[17] Zhang X, Homeomorphic flows for multi-dimensional SDEs with non-Lipschitz coefficients, Stochastic Processes and their Applications, 435–448 **115** (2005)

[18] Zhang X., Stochastic flows of SDEs with irregular coefficients and stochastic transport equations, Bull. Sci. math. 340–378 **134** (2010)

[19] Zhu K.,Operator Theory in Function Spaces: (second edition), Mathematical Surveys and Monographs, vol. 138 (2007).