

Universidade Nova de Lisboa
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Departamento de Matemática



Análise de um Produto Financeiro Complexo

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em
Matemática e Aplicações

Rui Emanuel Sanches Pereira

Orientador: Doutor Pedro José dos Santos Palhinhas
Mota, Professor Auxiliar, FCT

Júri:

Presidente: Doutor Manuel Leote Tavares Inglês Esquível
Vogais: Doutora Marta Cristina Vieira Faias Mateus
Doutor Luís Pedro Carneiro Ramos

Setembro de 2013

Análise de um Produto Financeiro Complexo

Copyright © Rui Emanuel Sanches Pereira, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa.

A Faculdade de Ciências e Tecnologia e a Universidade Nova de Lisboa têm o direito, perpétuo e sem limites geográficos, de arquivar e publicar esta dissertação através de exemplares impressos reproduzidos em papel ou de forma digital, ou por qualquer outro meio conhecido ou que venha a ser inventado, e de a divulgar através de repositórios científicos e de admitir a sua cópia e distribuição com objectivos educacionais ou de investigação, não comerciais, desde que seja dado crédito ao autor e editor.

Resumo

Esta tese é o resultado da análise de um Produto Financeiro Complexo construído a partir dos preços do mercado de futuros de matérias-primas. São apresentadas ideias gerais que contribuíram para o desenvolvimento da Análise Financeira. Recorre-se à medida AIC para determinar qual dos processos, Browniano Geométrico e Ornstein-Uhlenbeck Geométrico, melhor se adequa tendo em vista o estudo do produto. Procede-se à simulação dos preços através do método recorrente das densidades de transição, e elaborase um estudo da evolução do contrato e uma subsequente análise de sensibilidade.

Palavras-chave: Futuros, Matérias-Primas, AIC, Browniano Geométrico, Ornstein-Uhlenbeck Geométrico.

Abstract

This thesis results from the analysis of a Complex Financial Product built upon prices from the commodities' futures market. The general ideas which contributed to the development of Financial Analysis are presented. The AIC measure is employed in order to determine which of the following processes, Geometric Brownian or Geometric Ornstein-Uhlenbeck, best suits regarding the study of the product. One proceeds with prices' simulation through the recurrent method of transitional densities and elaborates a study of the contracts evolution followed by sensitivity analysis.

Keywords: Futures, Commodities, AIC, Geometric Brownian, Geometric Ornstein-Uhlenbeck.

Agradecimentos

A realização deste trabalho proporcionou uma visão mais ampla sobre os aspectos financeiros, contribuindo bastante para um enriquecimento pessoal. Os meus agradecimentos ao Professor Manuel Esquível, que propôs o tema do trabalho, e ao Professor Pedro Mota, pela sua orientação e apoio. Uma palavra de agradecimento é também dirigida à Professora Fernanda Cipriano, que sugeriu a hipótese da elaboração da minha dissertação nesta área.

Conteúdo

1	Porquê Mercados Financeiros?	3
1.1	Motivação	3
1.2	Mercados Financeiros	4
1.3	Sobre os Produtos	5
1.4	Modelação de Mercados Financeiros	5
1.5	Temas Centrais da Análise Financeira	5
1.6	Referências	7
2	Derivados Financeiros	9
2.1	Noção de activos	9
2.1.1	Um Conceito Fundamental sobre Activos	9
2.2	Noção de Portfolio	10
2.2.1	Um Conceito Fundamental sobre Retornos	10
2.3	Derivados Financeiros	11
2.3.1	Contratos Forward	11
2.3.2	Contratos Swap	12
2.3.3	Contratos de Futuros	12
2.3.4	Opções	13
2.4	Referências	15
3	Construção do Mercado	17
3.1	O Modelo Geral	17
3.1.1	Estrutura de Modelação	17
3.1.2	O Modelo do Mercado e Numerário	18
3.2	Opções sobre Futuros	18
3.2.1	Apreçamento e Arbitragem	19
3.3	O modelo de Black-Scholes	20
3.3.1	Descrição do Modelo	20
3.4	Referências	25
4	Análise Estocástica	27
4.1	O Processo Browniano Geométrico	27
4.2	O Processo Ornstein-Uhlenbeck Geométrico	28

4.3	Referências	32
5	Simulação de Trajectórias	33
5.1	Método Recorrente das Densidades de Transição	33
5.1.1	O Caso do Browniano Geométrico	33
5.1.2	O Caso do Ornstein-Uhlenbeck Geométrico	33
5.2	O Esquema de Euler	34
5.2.1	O Caso do Browniano Geométrico	34
5.2.2	O Caso do Ornstein-Uhlenbeck Geométrico	35
5.3	Resumo dos Dois Métodos de Aproximação	35
5.4	Referências	36
6	Estimação de Parâmetros	37
6.1	Método da Máxima Verosimilhança	37
6.1.1	Processo Browniano Geométrico	37
6.1.2	Processo de Ornstein-Uhlenbeck Geométrico	41
6.2	Referências	48
7	O Critério AIC	49
7.1	Sobre o AIC	49
7.2	Desenvolvimento do AIC: Ideias Gerais	49
7.3	Critério de Informação Akaike	50
7.4	Referências	52
8	O Produto	53
8.1	Descrição do Produto	53
8.2	Ajustamento dos Modelos e Selecção	55
8.2.1	Escolha do Modelo	56
8.2.2	Aplicação do AIC	59
9	Análise do Produto	61
9.1	Análise Teórica	61
9.1.1	Desenvolvimento do Produto Relativo à Condição A	61
9.2	Análise Empírica	65
9.2.1	Simulação do Produto	65
9.2.2	Análise dos Resultados	66
10	Análise de Sensibilidade	69
10.1	Alteração dos Limites de Fronteira	69
10.2	Alteração das Volatilidades	71
11	Considerações Finais	75
Appendix:		

A	Histogramas Obtidos	77
B	Distribuição Multinormal	85
	B.1 Definição e características	85
	B.2 Simulação de vectores multinormais	86
C	Movimento Browniano	87
	C.1 Definição	87
	C.2 Propriedades do Movimento Browniano	88
	C.2.1 Propriedades Gerais	88
	C.2.2 Propriedade de Markov	88
	C.2.3 Propriedade de Martingala	90
D	O Integral Estocástico	93
	D.1 Definição do Integral Estocástico	93
	D.1.1 Resultados Importantes	95
	D.2 A Fórmula de Itô	97
E	Teorema de Existência e Unicidade	101
F	Uma Breve Abordagem Histórica	113
	F.1 Os Três Percursos	113
	F.2 Novos Desenvolvimentos	114
	F.3 Extensão do Integral de Itô	116
	F.4 Desenvolvimentos na Economia	117

Lista de Figuras

8.1	Evolução dos Preços do Milho	54
8.2	Evolução dos Preços do Açúcar	54
8.3	Evolução dos Preços do Trigo	55
A.1	Histograma 1: Produto Simulado	77
A.2	Histograma 2: Limite Inferior: 60%	78
A.3	Histograma 3: Limite Inferior: 70%	79
A.4	Histograma 4: $2\sigma_{XX}, 2\sigma_{YY}, 2\sigma_{ZZ}$	80
A.5	Histograma 5: $3\sigma_{XX}, 3\sigma_{YY}, 3\sigma_{ZZ}$	81
A.6	Histograma 6: $5\sigma_{XX}, 5\sigma_{YY}, 5\sigma_{ZZ}$	82
A.7	Histograma 7: $10\sigma_{XX}, 10\sigma_{YY}, 10\sigma_{ZZ}$	83

Lista de Tabelas

9.1	Evolução Percentual Semestral	66
10.1	Evolução Percentual Semestral	69
10.2	Evolução Percentual Semestral	70
10.3	Alteração 1	71
10.4	Alteração 2	72
10.5	Alteração 3	72
10.6	Alteração 4	72

Nota Introdutória

A Análise Financeira centra-se no estudo da aplicação de métodos científicos, que são essencialmente matemáticos, aos investimentos. Um investimento define-se como um compromisso sobre recursos com o intuito de obter benefícios. Se o recurso em questão for monetário, então o investimento é feito tendo em vista a recolha de uma quantia monetária superior em tempo futuro. Porém, a teoria de investimentos abrange um caso bem mais interessantes, o estudo do desenvolvimento de fluxos de capital, conhecidos por *fluxos-de-caixa* dispendidos e recebidos durante um período de tempo. Nesta situação, o investidor tem que se adaptar ao padrão destes fluxos para que sejam o mais desejáveis possível. Toda esta actividade é realizada dentro de mercados, como iremos ver mais à frente.

Desde o início do século passado que a análise financeira tem vindo a crescer consideravelmente, tanto em termos de evolução como de interesse gerado nos seus intervenientes. Central a todo este estudo encontra-se o **Movimento Browniano**. Aplicado hoje às áreas da física e da engenharia, este processo foi na verdade introduzido do ponto de vista matemático pela primeira vez por Louis Bachelier numa tentativa de modelar os preços das acções na bolsa de Paris. Bachelier desempenhou um papel fulcral em Matemática Financeira moderna e é considerado por muitos como o seu fundador. A especulação sobre a natureza do preço das acções foi motivação suficiente para que esta teoria obtivesse bastantes seguidores, determinados em descobrir fórmulas de apreçamento. A “jóia da coroa” surge em 1973 pelo nome de *Fórmula de Black-Scholes*, a qual estima o preço de uma *opção* ao longo do tempo. Uma variante desta fórmula é a também conhecida *Fórmula de Black*.

Este trabalho centra-se na análise de um *Produto Financeiro Complexo construído a partir dos preços do mercado de futuros de matérias-primas*. O apreçamento deste contrato poderia ser feito recorrendo à *Fórmula de Black*, embora a sua aplicação esteja fora do âmbito deste trabalho. Contudo, dada a sua importância no âmbito da matemática financeira, são expostas as definições e teoremas essenciais à obtenção desta fórmula. Toda a terminologia é acompanhada pela denominação anglo-saxónica tão popular no meio finan-

ceiro e económico.

O texto começa por abordar os mercados financeiros em geral e os contratos aí aplicados. Segue-se uma exposição dos aspectos fundamentais à teoria da matemática financeira onde são feito os “preparativos” para o apreçamento. São estudados os processos mais comumente utilizados na modelação dos preços de ativos em matemática financeira, nomeadamente o *Processo Browniano Geométrico* e o *Processo Ornstein-Uhlenbeck Geométrico*. É conduzida uma análise aos dados históricos relativos aos preços das matérias primas através da estimação dos parâmetros correspondentes aos dois processos, recorrendo-se de seguida a um critério, *AIC*, com a capacidade de determinar o que melhor se ajusta aos dados e então decidir qual a adoptar no estudo do produto derivado.

Segue-se a simulação de preços das matérias primas, que são, na verdade *variáveis aleatórias correlacionadas*, recorrendo a métodos de aproximação numéricos relativos ao modelo que melhor se ajusta ao produto.

Desenvolve-se um estudo estatístico sobre o comportamento do produto derivado e conseqüentemente é elaborada uma *análise de sensibilidade* para estudar a possibilidade de proceder a alterações ao contrato de modo a ser mais “apetecível” do ponto de vista do investidor.

Em anexo, o leitor encontrará resultados recorrentes da análise estocástica, que está por detrás de toda a formalização da Teoria na Matemática Financeira. A exposição destes resulta de um interesse pessoal nesta matéria. É também apresentado um breve ensaio sobre a evolução histórica do cálculo estocástico e da matemática financeira.

Capítulo 1

Porquê Mercados Financeiros?

1.1 Motivação

Os mercados financeiros permitem a dotação eficiente de recursos tendo em conta o **tempo** e o **estado actual**.

O que é que isto quer dizer?

Suponhamos o caso de um empregado com um salário alto que quer gerir o seu dinheiro da melhor forma. Os mercados financeiros permitem investir o dinheiro em *acções (stocks)* e *obrigações (bonds)* de modo a financiar a aquisição de casa própria, estudos, reforma... há também a possibilidade de um dia não estar na mesma situação de conforto a nível monetário, pelo que pode rentabilizar os recursos de hoje para o futuro. Algum dinheiro é então aplicado num investimento que poderá ser necessário para uma altura em que esteja sem emprego; o dinheiro é, por assim dizer, transportado do *estado actual* para um infeliz *estado futuro* em que se verifique a impossibilidade de ganhar dinheiro.

Considere-se agora um agricultor com acesso aos mercados financeiros, mais propriamente, mercados de derivados (o que é raro acontecer). Este poderia realizar um *contrato de futuros* ou um *contrato forward* para **cobrir (hedge)** os preços dos seus produtos. Dado que uma geada fora da época pode destruir toda uma plantação, o agricultor poderá comprar *derivados temporais* que sejam liquidados nesta eventualidade e assim proteger (*cobrir*) o seu trabalho. Na ausência de mercados financeiros, o mercado existente é apenas o *mercado spot*; o agricultor está sujeito ao estado natural do mundo e, por conseguinte, aos preços que predominam naquele período de tempo.

A aplicação do dinheiro em mercados financeiros é uma boa alternativa a guardá-lo “debaixo do colchão”. Deste modo, o dinheiro disponível no *estado actual* não irá trazer quaisquer frutos numa situação futura, porventura muito menos confortável financeiramente.

1.2 Mercados Financeiros

Os mercados dividem-se em dois géneros: **mercados formais**, ou **bolsistas**¹, e **mercados informais**, ou **de balcão**² (ver [1] ou [6]). Os contratos realizados em *mercados bolsistas* são, como o próprio nome indica, aplicados em bolsa. Quer isto dizer que existe uma entidade organizadora que expõe a todos os investidores envolvidos a completa informação dos produtos em questão, sejam eles acções, matérias-primas ou qualquer outro, e as ofertas efectuadas são do conhecimento geral dos intervenientes; toda a procura e toda a oferta são confluídas para um único local, que pode ser físico ou electrónico. Dadas as características, este mercado é também referido como **mercado organizado**. Um **mercado de balcão**, denominado ainda de **mercado não organizado** é, por exemplo, um mercado de automóveis. No processo de aquisição de um automóvel, o comprador pode dirigir-se a múltiplos stands onde negociará bilateralmente com os vendedores.

Numa perspectiva mais abrangente, os mercados financeiros assentam nestes princípios:

- Recolha de informação: qualquer pessoa que negocie uma matéria-prima ou uma acção, tem estes elementos organizados num mercado; esta informação que é passada entre diferentes pessoas, reúne-se num mercado de modo a que todos os intervenientes a possam usar.
- Agregação de liquidez: toda a procura e oferta é reunida no mercado.
- Promoção de eficiência e equidade: procurar que todas as pessoas tirem benefícios da informação agregada no mercado; existem entidades reguladoras dentro dos mercados para impedir que alguns dos intervenientes tenham acesso a informação confidencial para benefício próprio. O mercado deve ser justo, em que todos tenham a mesma oportunidade, para que se revele eficiente.

Os instrumentos essenciais à existência dos mercados são os contratos financeiros, também designados de **derivados**. Naturalmente, os derivados distinguem-se pelas cláusulas que os compõem, mas também pelo mercado

¹Exchange-Traded Markets, na sua terminologia anglo-saxónica.

²Over the Counter Markets, em terminologia anglo-saxónica.

onde se inserem. Existem quatro derivados típicos: **forward**, **swap**, **futuros** e **opções**.³

1.3 Sobre os Produtos

Os produtos financeiros têm as seguintes funções:

- Cobrir o risco: através de, por exemplo, contratos de futuros ou derivados temporais para cobrir o risco.
- Permitir especulação.
- Criar fundos.
- Financiar obrigações (de transações passadas).

O nosso *espaço* de estudo é então constituído por dois subespaços: o dos **mercados financeiros** e o dos **produtos**.

1.4 Modelação de Mercados Financeiros

Grosso modo, a modelação de mercados divide-se em duas categorias (ver [3]):

- **Modelos em tempo discreto;**
- **Modelos em tempo contínuo.**

Por sua vez, os *modelos em tempo discreto* subdividem-se ainda em modelos em **período singular** e **multi-período**. São mercados em que o tempo progride em unidades discretas, como um semestre, um mês, um ano, etc.. A grande vantagem dos mercados em tempo discreto está na simplicidade dos métodos a aplicar, quando comparados com a sofisticação matemática dos modelos em tempo contínuo.

1.5 Temas Centrais da Análise Financeira

Existem três áreas centrais que constituem a análise financeira:

³Optou-se pela denominação anglo-saxónica destes dois tipos de contratos, bastante comum na literatura portuguesa e estrangeira, considerados mais simpáticos pelo autor em oposição a *a prazo* e *de permutações*, respectivamente.

- **Apreçamento de Derivados:** consiste na atribuição de preços a **activos financeiros (primary derivatives)**, tais como acções ou matérias-primas (commodities), e a **contratos financeiros (derivative securities)**, entre os quais *forwards*, *swaps*, *futuros* e *opções*. Normalmente, assume-se um preço para as primary derivatives e usa-se o **princípio de não-arbitragem** para o apreçamento dos contratos financeiros.
- **Geração de Portfolios:** escolha de uma estratégia comercial que maximize a vantagem do consumo do valor final
- **Gestão de Risco:** reside no entendimento dos riscos inerentes a um portfolio, ou seja, com base num portfolio poderemos observar o seu desenvolvimento em diferentes cenários.

Refira-se desde já que as áreas de aplicação relacionadas com apreçamento, portfolios e risco, geraram muitos problemas interessantes de matemática aplicada e particularmente, de investigação operacional, tanto a nível teórico como a um nível computacional.

1.6 Referências

- [1] A.B.D.P, Introdução aos Mercados de Futuros e Opções, Associação da Bolsa de Derivados dos Porto, 1996
- [2] Bingham, N. H., Kiesel, R., Risk-Neutral Valuation: Pricing and Hedging of Financial Derivatives, Springer-Verlag, 2004
- [3] Björk, T., Arbitrage Theory in Continuous Time, Oxford University Press Inc., 2009
- [5] Elliott, R. J., Kopp, P. E., Mathematics of Financial Markets, Springer, 2005
- [6] Hull, J. C., Options, Futures and Other Derivatives, Pearson Prentice Hall, 2006
- [11] Luenberger, D. G., Investment Science, Oxford University Press, 1998

Capítulo 2

Derivados Financeiros

2.1 Noção de activos

Definição 2.1.1

Chamamos **activo (asset)** a qualquer instrumento de investimento, i.e. um instrumento financeiro, que pode ser comprado ou vendido.

2.1.1 Um Conceito Fundamental sobre Activos

Suponhamos que queremos comprar um activo no instante $t = 0$ e vendê-lo em $t = 1$ (podemos definir este intervalo de tempo como um ano, um semestre, ...). O **retorno total R** deste investimento (ver [11]) é dado por

$$R = \frac{X_1}{X_0}$$

em que X_0 corresponde à quantia investida (em $t = 0$) e X_1 a quantia em $t = 1$. A **taxa de retorno r** define-se por

$$r = \frac{X_1 - X_0}{X_0}.$$

Temos então a seguinte relação

$$r = R - 1,$$

e podemos ainda observar que

$$R = r + 1 \Leftrightarrow \frac{X_1}{X_0} = 1 + r \Leftrightarrow X_1 = (1 + r)X_0,$$

ou seja, a *taxa de retorno* comporta-se como uma *taxa de juro*.

2.2 Noção de Portfolio

Definição 2.2.1

Suponhamos que se têm n activos diferentes. Estes podem ser combinados e formar um novo activo, definido como **portfolio**, ou **carteira**.

Definindo por X_{0i} , $i = 1, 2, \dots, n$ o valor do i -ésimo activo no instante $t = 0$, então o valor do portfolio é

$$X_0 = \sum_{i=1}^n X_{0i}.$$

Observando a expressão dada, podemos então escrever que

$$X_{0i} = w_i X_0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

onde w_i é uma *fracção* do portfolio, correspondente ao i -ésimo activo; nesta situação, dizemos que w_i corresponde ao **peso** do i -ésimo activo no portfolio, sendo então $\sum_{i=1}^n w_i = 1$.

2.2.1 Um Conceito Fundamental sobre Retornos

Seja R_i o **retorno total do activo i** ; por definição,

$$R_i = \frac{X_{1i}}{X_{0i}}.$$

Então:

$$\begin{aligned} X_{1i} = R_i X_{0i} &\Leftrightarrow X_{1i} = R_i w_i X_0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n X_{1i} = \sum_{i=1}^n R_i w_i X_0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow X_1 = \sum_{i=1}^n R_i w_i X_0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{X_1}{X_0} = \sum_{i=1}^n R_i w_i. \end{aligned}$$

Sendo

$$R = \frac{X_1}{X_0}$$

concluimos que

$$R = \sum_{i=1}^n R_i w_i.$$

Considerando r_i como **taxa de retorno do activo i**, temos que

$$r_i = \frac{X_{1i} - X_{0i}}{X_{0i}}.$$

$$\begin{aligned} r_i X_{0i} &= X_{1i} - X_{0i} \Leftrightarrow r_i w_i X_0 = X_{1i} - w_i X_0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n r_i w_i X_0 = X_1 - \underbrace{\sum_{i=1}^n w_i X_0}_1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n r_i w_i = \frac{X_1 - X_0}{X_0}, \end{aligned}$$

e portanto

$$r = \sum_{i=1}^n r_i w_i.$$

2.3 Derivados Financeiros

Definição 2.3.1

Um **derivado financeiro** (*derivative security*), ou **direito contingente** (*contingent claim*), é um contrato financeiro cujo valor à data de expiração se determina através do preço dos activos aos quais se refere, os chamados **activos subjacentes** (*naturalmente, subjacentes ao contrato*).

Nestes contratos inserem-se os **forward**, **swap**, **de futuros** e as **opções** (ver [3] ou [5]).

2.3.1 Contratos Forward

Forwards são contratos que permitem comprar uma matéria-prima ou uma acção numa data futura e com determinado preço, ambos especificados.

Definição 2.3.2

Um **contrato forward** atribui ao comprador o direito e a obrigação de adquirir, no momento presente, i.e. em $t = 0$, uma quantidade específica de um activo em determinado tempo futuro T , i.e. a data de maturidade, a um preço F especificado em $t = 0$.

Portanto, situando-nos em $t = 0$, especifica-se um preço F ; atingida a *data de maturidade*, i.e. o momento $t = T$, efectua-se a compra ao preço F . Essencialmente, está-se a definir o preço da matéria-prima ou acção no momento de elaboração do contrato.

Exemplos

- *Contrato Forward* para a entrega de acções com maturidade de 6 meses.
- *Contrato Forward* para venda de ouro com maturidade de 1 ano.
- *Contrato Forward* para converter euros em dólares com maturidade de 1 mês.

2.3.2 Contratos Swap

Definição 2.3.3

Os *swaps* são contratos que permitem trocar um tipo de fluxo-de-caixa por outro.

Exemplos

- Taxas de juro fixas *versus* taxas de juro flutuantes: uma das partes recebe a taxa de juro fixa e fica a pagar uma taxa flutuante, sendo que a outra faz o oposto.
- Swaps de matérias-primas, por exemplo swaps de ouro *versus* swaps de petróleo: num determinado período, uma das partes recebe o preço flutuante do ouro e a contraparte recebe um preço fixo; da mesma maneira, uma pessoa recebe o preço flutuante do petróleo e depois paga um preço fixo, durante um determinado período de tempo.
- Swaps de moeda.

Os *contratos swap* surgiram de modo a que se pudesse alterar a natureza dos *fluxos-de-caixa*. Querendo fixar o preço do petróleo para os próximos 5 anos, por exemplo, teremos que contactar alguém que nos pague o preço flutuante do petróleo, pelo qual pagaremos um preço fixo definido em $t = 0$, ou seja, data de celebração de contrato. Recebido o preço flutuante do petróleo, este dinheiro pode ser aplicado no *mercado spot* para comprar petróleo e para pagar preço fixo.

2.3.3 Contratos de Futuros

Os *futuros*, como as *opções* que veremos a seguir, são derivados que podem depender de uma grande quantidade de contratos ou matérias-primas **subjacentes (underlying)**. Inicialmente, estes contratos foram introduzidos para gestão de risco mas têm sido utilizados em especulação uma vez que permitem controlar grandes fortunas investindo muito pouco capital.

Os *contratos de futuros* desenvolveram-se como uma generalização dos *contratos forward*. Como já foi referido, estes contratos permitem comprar

ou vender uma matéria-prima a um certo preço e num dado momento, ambos especificados. No entanto, apresentam uma grande desvantagem: para uma mesma data de maturidade, pode verificar-se um preço *forward* diferente, dependendo de quem elabora o contrato. Como consequência, dá-se o caso em que temos dois contratos com as mesmas opções à data de maturidade e com preços distintos. Nesta situação, dizemos que não existe transparência nos preços; qualquer pessoa tem o preço que conseguir negociar e portanto não há a possibilidade de determinar qual o preço justo. Existe a liberdade de cobrar às pessoas preços diferentes por contratos com a mesma qualidade dada a falta de transparência. Os *contratos de futuros* vão evitar precisamente este tipo de situação, fixando um preço justo para todos os interessados.

Uma outra desvantagem dos *contratos forward* é a seguinte: para cada parte interessada em comprar o activo em questão (tomando a denominada *long position*), é necessário encontrar quem a venda (assumindo a *short position*). Esta situação é normalmente resolvida através dum *intermediário financeiro*, que tem precisamente a função de *intermediário*. Esta entidade garante simplesmente uma relação contratual entre as partes, assegurando a sua imparcialidade.

Os problemas inerentes aos *contratos forward* podem-se evitar quando aplicados num *mercado organizado*, i.e., em *bolsa*, pois são simplesmente comprados e vendidos como acções.

Definição 2.3.4

Um **contrato de futuros** envolve um acordo semelhante a um contrato *forward*, comercializado em *bolsa*.

A falta de transparência dos preços que, como foi referido, resulta na oferta de diferentes preços para contratos com a mesma qualidade, pode ser resolvida por *marking-to-market*. Este processo consiste no seguinte: através de um corretor da bolsa, celebra-se um contrato sem dispender qualquer quantia (como nos *contratos forward*) mas estabelecendo uma *conta de margem* com algum capital; à medida que os preços do contrato são alterados (recorde-se que o preço de um *contrato forward* flutua), i.e. sempre que há lucro ou perda, o corretor credita ou debita na conta. Quando o crédito da conta de margem se torna insuficiente, há que depositar dinheiro extra.

2.3.4 Opções

Os contratos acima referidos têm entre si um factor comum: uma **obrigação**. Definidas as cláusulas de um contrato, existe a *obrigação* de comprar o pro-

duto a um determinado preço e em dada altura. As **opções**, que surgem precisamente pela necessidade de flexibilizar o modelo de um contrato, podem ser **de compra (call option)** ou **de venda (put option)**, subdividindo-se ainda em **Europeias** e **Americanas**.

Definição 2.3.5

- Uma **opção de compra** é um contrato que atribui ao comprador o direito e não a obrigação de comprar 1 unidade do activo subjacente a um preço especificado K , o **preço de exercício**; uma **opção de compra** diz-se **Europeia** se o exercício é efectuado à **data de maturidade** T , especificada no contrato, e **Americana** quando o exercício pode ser efectuado em qualquer altura entre $t = 0$ (momento de celebração do contrato) e T .
- Uma **opção de venda** é um contrato que atribui ao comprador o direito e não a obrigação de vender 1 unidade do activo subjacente a um preço especificado K , o **preço de exercício**; uma **opção de venda** diz-se **Europeia** se o exercício é efectuado à **data de maturidade** T , especificada no contrato, e **Americana** quando o exercício pode ser efectuado em qualquer altura entre $t = 0$ (momento de celebração do contrato) e T .

Portanto, as *opções de compra e de venda Europeias* são exercidas apenas em $t = T$, enquanto que nas *Americanas* os processos de compra ou venda são exercidos entre $t = 0$ e $t = T$; se a *opção* é *de compra*, temos o direito de comprar, e se é *de venda*, temos o direito de vender.

Observa-se ainda que as *opções Americanas* são mais flexíveis que as *Europeias*, mas ambas são mais flexíveis que os outros contratos aqui abordados, uma vez que não existem obrigações, apenas direitos.

2.4 Referências

- [1] A.B.D.P, Introdução aos Mercados de Futuros e Opções, Associação da Bolsa de Derivados dos Porto, 1996
- [2] Bingham, N. H., Kiesel, R., Risk-Neutral Valuation: Pricing and Hedging of Financial Derivatives, Springer-Verlag, 2004
- [3] Björk, T., Arbitrage Theory in Continuous Time, Oxford University Press Inc., 2009
- [5] Elliott, R. J., Kopp, P. E., Mathematics of Financial Markets, Springer, 2005
- [6] Hull, J. C., Options, Futures and Other Derivatives, Pearson Prentice Hall, 2006
- [11] Luenberger, D. G., Investment Science, Oxford University Press, 1998
- [14] Neftci, S. N., An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives, Academic Press, 2000
- [15] Oksendal, B., Stochastic Differential Equations, Springer-Verlag, 1992

Capítulo 3

Construção do Mercado

3.1 O Modelo Geral

3.1.1 Estrutura de Modelação

Considera-se um espaço de probabilidade fixo $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ que modela todos os estados possíveis do mercado. O conjunto $\mathbb{T} = \{0, 1, \dots, T\}$ define todo o horizonte comercial em que a actividade económica é modelada, pelo que os elementos deste conjunto correspondem às datas de comercialização. Analisamos o caso finito, ou seja, *modelos de mercado finito*, que correspondem aos mercados reais e podem ser construídos de duas maneiras (ver [5]):

- i) Assume-se Ω como um espaço de probabilidades *finito* (i.e. existe um número finito de pontos ω tais que $\mathbb{P}[\{\omega\}] > 0$); neste caso, a σ -álgebra \mathcal{F} é o conjunto de partes de Ω , pelo que qualquer subconjunto de Ω é \mathcal{F} -mensurável.
- ii) Assume-se que a σ -álgebra \mathcal{F} relativa a Ω é finitamente gerada, i.e., existe uma partição finita \mathcal{P} de Ω em conjuntos A_1, A_2, \dots, A_n , disjuntos dois a dois e em que $\mathbb{P}[A_i] > 0$, $i = 1, \dots, n$, cuja união é Ω e gera \mathcal{F} ; deste modo, \mathcal{F} consiste de um número finito de eventos, precisamente os que podem ser expressos em termos de \mathcal{P} .

Note-se que a medida \mathbb{P} tem como objectivo identificar os acontecimentos considerados possíveis pelos investidores que podem, contudo, discordar na atribuição de probabilidades a esses acontecimentos; no entanto, o comportamento por eles tomado não vai alterar as probabilidades atribuídas aos acontecimentos.

A informação disponível aos investidores é dada por uma sucessão crescente (finita) de sub- σ -álgebras de \mathcal{F} da forma $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \dots \subset \mathcal{F}_T = \mathcal{F}$, a qual designamos por \mathbb{F} . Tem-se então que $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$ é uma filtração em $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Assume-se que \mathcal{F}_0 é trivial (i.e. contém apenas os conjuntos de medida- \mathbb{P} 0 ou 1) e que (Ω, \mathcal{F}_0) é completo (pelo que qualquer subconjunto

de um conjunto de medida nula tem medida nula e que \mathcal{F}_0 contém todos os conjuntos nulos- \mathbb{P}). Mais precisamente, a σ -álgebra \mathcal{F}_t contém toda a informação disponível até ao momento t .

Observe-se ainda que cada σ -álgebra \mathcal{F}_t é gerada por uma partição finita \mathcal{P}_t de Ω e que $\mathcal{P}_0 \subset \{\Omega\} \subset \mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}_2 \subset \dots \subset \mathcal{P}_T = \mathcal{P}$. No momento t , os investidores sabem qual a célula de \mathcal{P}_t que contém o verdadeiro estado do mercado.

Veremos de seguida as características inerentes à modelação de um mercado geral discreto.

3.1.2 O Modelo do Mercado e Numerário

Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um *espaço de probabilidades* e fixe-se um valor $d \in \mathbb{N}$ que determina a *dimensão* do mercado. O processo estocástico $S = \{S_t^i : t \in \mathbb{T}, i = 0, 1, \dots, d\}$, $(d + 1)$ -dimensional, representa o *processo de preços dos activos* ao longo do tempo. Assume-se que o *activo 0* é uma **obrigação sem risco**, pelo que o processo de preço S^0 é determinista; já os processos S^1, S^2, \dots, S^d não são deterministas, cujos d *activos* correspondentes são **acções de risco**.

Considera-se que o processo S é \mathbb{F} -adaptado, i.e. $\forall i \leq d, S_t^i$ é \mathcal{F}_t -mensurável, pelo que no momento t , os preços dos *activos* são todos conhecidos de 0 a t . Os investidores conhecem então os valores que preenchem o vector de preços $(S_u : u \leq t)$ no momento t e não dispõem de qualquer informação no período de tempo que se segue. Note-se que, nesta construção, é também frequente assumir a filtração \mathbb{F} gerada pelo processo de preços $S = (S^0, S^1, \dots, S^d)$; neste caso, $\mathcal{F}_t = \sigma(S_u : u \leq t)$ é a menor σ -álgebra tal que as variáveis aleatórias do conjunto $\{S_u = (S_u^0, S_u^1, \dots, S_u^d), u \leq t\}$ são \mathcal{F}_t -mensuráveis.

Assume-se também que pelo menos um dos processos de preços, conhecido por **numerário**, seja estritamente positivo na sua integridade, sendo que normalmente corresponde ao vector relativo ao preço da obrigação S^0 .

3.2 Opções sobre Futuros

A chamada *Fórmula de Black* é direccionada para o apreçamento de opções escritas sobre um contrato de futuros, como é o caso do contrato em estudo. Contudo, do ponto de vista prático este contrato não se enquadra na sua aplicação. No entanto, dada a sua relevância faremos de seguida um breve enquadramento sobre o apreçamento de produtos derivados num mercado financeiro, cuja modelação permitiu a elaboração da famosa *Fórmula de Black-Scholes* e da *Fórmula de Black* (ver [3]).

3.2.1 Apreçamento e Arbitragem

Definição 3.2.1

Considere-se um mercado financeiro e seja S o processo de preços. Um **derivado financeiro**, ou **direito contingente**, é dado por uma variável estocástica χ , \mathcal{F}_t -mensurável. O **preço do processo** denomina-se por $\Pi(t, \chi)$.

Podemos observar que, à data de maturidade T , o detentor do contrato obterá o valor χ ; este valor é conhecido uma vez que χ é \mathcal{F}_t -mensurável, o que quer dizer que, à data T , χ é conhecido.

Queremos então determinar qual o valor de $\Pi(t, \chi)$ para qualquer $t < T$. A Fórmula de Black-Scholes permite-nos determinar um preço único da opção através de algumas *assumpções*, que serão devidamente apresentadas após a formalização de novos conceitos.

Definição 3.2.2

Um **portfólio** é um vector $h = (h^1, \dots, h^N)$, N -dimensional, em que $h^i, i = 1, \dots, N$, representa o número de unidades do activo i compradas no momento $t = 0$ e mantidas até $t = 1$. O modelo foi definido de forma a que os activos sejam comprados com preços deterministas em $t = 0$ e vendidos em $t = 1$ com valores estocásticos. Consequentemente, o **processo valor** do portfólio é um processo estocástico da forma

$$V_t^h = \sum_{i=1}^N h^i S_t^i = h S_t, \quad t = 0, 1.$$

Definição 3.2.3

O portfólio h diz-se um **portfólio com arbitragem** se:

- $V_0^h = 0$;
- $V_1^h > 0$ q.c. (i.e., $\mathbb{P}[V_1^h(\omega_i) > 0] = 1, i = 1, \dots, M$, em que M é o dimensão do espaço dos estados).

Por outras palavras, h é um **portfólio com arbitragem** sempre que se dá um aumento estritamente positivo do valor investido, desde o momento $t = 0$ ao momento $t = T$. Consequentemente, h origina um lucro sem risco, ou seja, sem perda de capital, podendo concluir-se que qualquer mercado com arbitragem é um mercado em que não existe equilíbrio entre as partes.

Definição 3.2.4

O portfólio h é **auto-financiado** se o processo valor V_t^h satisfaz a condição

$$dV_t^h = \sum_{i=1}^N h_i(t) dS_i(t), \quad \text{i.e., } dV_t^h = h(t) dS_i(t).$$

Quer isto dizer que um portfolio diz-se **auto-financiado** quando todos os investimentos feitos dependem apenas do capital aplicado à data inicial. A partir deste momento, serão os ganhos ou perdas resultantes do valor investido que permitirão ou não um próximo investimento.

Definição 3.2.5

Uma possibilidade de **arbitragem** num mercado financeiro consiste num portfolio auto-financiado h que verifica:

- $V_0^h = 0$;
- $V_T^h \geq 0$, *q.c.*;
- $V_T^h > 0$, *q.c.*.

Uma oportunidade de arbitragem consiste então na possibilidade de obter-se capital sem qualquer risco.

Definição 3.2.6

Um mercado financeiro diz-se **livre de arbitragem** quando não existem oportunidades de arbitragem.

Podemos agora enunciar uma **assumpção** necessária à formalização:

- o mercado é **eficiente**, *i.e.*, é **livre de arbitragem**.

3.3 O modelo de Black-Scholes

Em 1973 a aplicação de opções em acções fez disparar a comercialização deste tipo de contratos. Este foi o ano da introdução da Fórmula de Black-Scholes, e desde então o crescimento das opções tem sido exponencial. O método desenvolvido por F. Black e M. Scholes foi destinado ao apreçamento e cobertura de *opções (de compra e de venda) Europeias*.

3.3.1 Descrição do Modelo

O modelo assenta em dois tipos de activos, cujos preços evoluem em tempo contínuo:

- um *activo sem risco* com preço B_t no instante t ;
- um *activo com risco* com preço S_t no instante t .

Definição 3.3.1

Um **activo sem risco**, é um activo cujo processo de preços B tem a dinâmica

$$dB(t) = r(t)B(t)dt,$$

sendo $r(t)$ um processo adaptado. No caso em que $r(t)$ é uma constante, o activo sem risco diz-se uma **obrigação**.

Podemos obter uma expressão para o processo $B(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{dB(t)}{dt} = r(t)B(t) &\Leftrightarrow \frac{\frac{dB(t)}{dt}}{B(t)} = r(t) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \int_0^t \frac{\frac{dB(t)}{dt}}{B(t)} dt = \int_0^t r(s) ds \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \ln(B(t))|_0^t = \int_0^t r(s) ds \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{B(t)}{B(0)} = e^{\int_0^t r(s) ds} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow B(t) = B(0)e^{\int_0^t r(s) ds} \end{aligned}$$

Definição 3.3.2

Um **activo com risco**, também denominado de **acção**, é um activo cujo processo de preços S tem a seguinte dinâmica:

$$dS(t) = S(t)\mu dt + S(t)\sigma dW_t.$$

As funções μ e σ são constantes e W_t é um Movimento Browniano.

Mais à frente poderemos constatar que $dS(t)$ tem solução

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t},$$

em que S_0 representa o **preço corrente (preço spot)** observado em $t = 0$. Verificaremos ainda que S_t tem *distribuição Log-Normal*, ou seja, este processo é solução de

$$dS(t) = S(t)\mu dt + S(t)\sigma dW_t$$

sse $\log(S_t)$ é um Movimento Browniano.

As *taxas de retorno* de uma obrigação e de uma acção são da forma

$$\frac{dB(t)}{B(t)dt} = r(t)$$

e

$$\frac{dS(t)}{S(t)dt} = \mu(t, S(t)) + \sigma(t, S(t)) \frac{dW_t}{dt},$$

respectivamente.

Observa-se que a *taxa de retorno* de $B(t)$ é localmente determinista, i.e., no momento t temos conhecimento completo do retorno. Quanto à *taxa de retorno* da *acção* $S(t)$, esta não é determinista, pois embora os termos $\mu(t, S(t))$ e $\sigma(t, S(t))$ sejam observáveis à data t , $\frac{dW_t}{dt}$ é um valor aleatório e portanto $S(t)$ tem uma taxa de desconto estocástica.

Podemos agora definir o **Modelo de Black-Scholes**:

Definição 3.3.3

O **Modelo de Black-Scholes** é formado por dois activos com dinâmicas de preços

$$dB(t) = rB(t)dt$$

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW_t$$

em que r , μ e σ são constantes.

Assumimos que o processo de preços é dado por $\Pi(t) = F(t, S(t))$; o nosso objectivo será encontrar uma expressão para F de modo a que o nosso mercado, dado pelo terno $(B(t), S(t), \Pi(t))$ seja livre de oportunidades de arbitragem.

Teorema 3.3.1 Equação de Black-Scholes

Considere-se o modelo de Black-Scholes num mercado livre de oportunidades de arbitragem e a função da forma $F(t, S(t)) = \Pi(t; \chi)$. Se F é a solução do problema de fronteira definido em $[0, T] \times \mathbb{R}^+$ e dado por

$$\frac{\partial F(t, s)}{\partial t} + rs \frac{\partial F(t, s)}{\partial s} + \frac{1}{2} s^2 \sigma^2 \frac{\partial^2 F(t, s)}{\partial s^2} - rF(t, s) = 0,$$

então F é a única função de apreçamento de um direito contingente χ .

A solução desta equação corresponde a fórmula do preço do *derivado financeiro* χ , naturalmente dada como função do preço do *activo subjacente* S . É importante salientar que não se obteve uma fórmula de apreçamento *absoluta* para o *direito contingente* χ . O apreçamento dos direitos contingentes é um apreçamento relativo, que é obtido através dos processos preços atribuídos aos *activos subjacentes*.

A questão central agora está em conhecer a expressão de $F(t, S(t))$. A conhecida *Equação de Feynman-Kac* permite-nos obter a função F , enunciada no teorema seguinte. Contudo, deve-se referir que este resultado é obtido através de uma mudança de medida de probabilidade; passamos da medida natural \mathbb{P} para uma medida \mathbb{Q} .

Explicitamente, a dinâmica de S será relativa à medida \mathbb{Q} ,

$$dS(t) = rS(t)dt + S(t)\sigma(t, S(t))d\tilde{W}(t)$$

em que $\tilde{W}(t)$ é um movimento Browniano relativamente à medida \mathbb{Q} .

Definição 3.3.4

Define-se a medida de probabilidade \mathbb{Q} por *medida de martingala*.

Teorema 3.3.2 *Risco Neutro*

O preço livre de arbitragem do direito contingente com *função de contrato* $\Phi(S(T))$ é dado pela função

$$F(t, s) = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\Phi(S(T))|S_t = s],$$

em que $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}$ representa a esperança relativa à medida \mathbb{Q} e s é o preço do activo subjacente à data t .

A mudança da medida de probabilidade revela-se fulcral num estudo mais aprofundado sobre apreçamento e arbitragem. Na verdade, sob a nova medida \mathbb{Q} verifica-se que o processo normalizado $\frac{S(t)}{B(t)}$ é uma martingala relativamente a \mathbb{Q} .

Proposição 3.3.3 *Propriedade de Martingala*

Considerando o processo de preços $\Pi(t)$ de qualquer activo (derivado ou subjacente) no modelo de Black-Scholes, teremos o processo normalizado dado por

$$Z(t) = \frac{\Pi(t)}{B(t)},$$

que é uma martingala relativamente à medida \mathbb{Q} .

Considerando os resultados obtidos anteriormente, podemos finalmente enunciar a *Fórmula de Black-Scholes*:

Teorema 3.3.4 *Fórmula de Black-Scholes*

O preço de uma *opção de compra Europeia* com preço de exercício K à data de maturidade T é dado pela expressão

$$F(t, s) = sG_N(d_1(t, s)) - e^{-r(T-t)}KG_N(d_2(t, s))$$

em que

G_N corresponde à função de distribuição de uma Normal reduzida;

$$d_1(t, s) = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \left(\ln\left(\frac{s}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) \right);$$

$$d_2(t, s) = d_1(t, s) - \sigma\sqrt{T-t}.$$

Se considerarmos o apreçamento de uma *opção de compra Europeia* subjacente a um *contrato de futuros*, poderemos aplicar a *Fórmula de Black*.

Teorema 3.3.5 Fórmula de Black

O preço no instante t de uma opção de compra Europeia com um preço de exercício K e data de maturidade T , escrita sobre um contrato de futuros com data de entrega T_1 ($T < T_1$), subjacente ao activo com preço S , é dado por

$$c = e^{-r(T-t)}(FG_N(d_1) - KG_N(d_2))$$

em que

F é o preço de futuros $F(T; T_1)$;

G_N representa a função de distribuição de uma Normal reduzida;

$$d_1(t, s) = \frac{\ln\left(\frac{F}{K}\right) + \frac{\sigma^2}{2}(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}};$$

$$d_2(t, s) = d_1(t, s) - \sigma\sqrt{T-t}.$$

3.4 Referências

- [2] Bingham, N. H., Kiesel, R., Risk-Neutral Valuation: Pricing and Hedging of Financial Derivatives, Springer-Verlag, 2004
- [3] Björk, T., Arbitrage Theory in Continuous Time, Oxford University Press Inc., 2009
- [4] Burnham, K. P., Anderson, D. R., Model Selection and Multimodel Inference, 2002
- [5] Elliott, R. J., Kopp, P. E., Mathematics of Financial Markets, Springer, 2005
- [6] Hull, J. C., Options, Futures and Other Derivatives, Pearson Prentice Hall, 2006
- [10] Lamberton, D., Lapeyre, B., Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance, Chapman & Hall/CRC, 2000
- [11] Luenberger, D. G., Investment Science, Oxford University Press, 1998
- [14] Neftci, S. N., An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives, Academic Press, 2000

Capítulo 4

Análise Estocástica

Uma *Equação Diferencial Estocástica* é uma expressão da forma

$$dX_t = \alpha(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t,$$

que deve ser interpretada na sua forma integral:

$$X_t = X_a + \int_a^t \alpha(s, X_s)ds + \int_a^t \sigma(s, X_s)dB_s, \quad a < t.$$

B_t é um processo Browniano e μ e σ designam-se por funções de *tendência* e *volatilidade*, respectivamente.

Analizamos de seguida soluções para casos particulares deste tipo de equações (ver [9] ou [16]).

4.1 O Processo Browniano Geométrico

O **Processo Browniano Geométrico** é uma ferramenta fundamental na modelação de preços de activos, sendo tipicamente escolhido na análise do comportamento do preço das acções ao longo do tempo.

Definição 4.1.1

O **Processo Browniano Geométrico** X_t é a solução da seguinte equação diferencial estocástica:

$$\begin{cases} dX_t = \alpha X_t dt + \sigma X_t dB_t \\ X_0 = x_0 \end{cases}$$

Qual o valor de X_t ?

Teorema 4.1.1

A equação diferencial linear estocástica dada por

$$\begin{cases} dX_t = (f(t)X_t + g(t)) dt + (\phi(t)X_t + \theta(t)) dZ_t \\ X_a = x \end{cases}$$

em que Z_t é um processo de Itô, tem solução

$$X_t = xe^{Y_t} + \int_a^t e^{Y_t - Y_s} g(s) ds + \int_a^t e^{Y_t - Y_s} \theta(s) dZ_s - \int_a^t e^{Y_t - Y_s} \phi(s) \theta(s) (dZ_s)^2,$$

$$\text{com } Y_t = \int_a^t f(s) ds + \int_a^t \phi(s) dZ_s - \frac{1}{2} \int_a^t \phi^2(s) (dZ_s)^2.$$

Aplicando o teorema anterior para a resolução da equação diferencial dada, temos que

$$dX_t = \underset{f(x)}{\alpha} X_t dt + \underset{\phi(t)}{\sigma} X_t dB_t,$$

pelo que a solução é dada por

$$X_t = X_0 e^{Y_t}.$$

Calculemos agora valor de Y_t , usando as regras do cálculo estocástico:

$$\begin{aligned} Y_t &= \int_0^t \alpha ds + \int_0^t \sigma dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2 (dB_s)^2 = \\ &= \alpha(t - 0) + \sigma(B_t - B_0) - \frac{1}{2} \sigma^2(t - 0) = \\ &= \left(\alpha - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma B_t \end{aligned}$$

A solução da equação diferencial linear estocástica é então

$$X_t = x_0 e^{(\alpha - \frac{1}{2} \sigma^2)t + \sigma B_t}.$$

O *Processo Browniano Geométrico* pode agora ser definido como se segue:

Definição 4.1.2 Um processo estocástico X_t diz-se um **Processo Browniano Geométrico** se, $\forall t \geq 0$,

$$X_t = X_0 e^{(\alpha - \frac{1}{2} \sigma^2)t + \sigma B_t},$$

em que B_t é o movimento Browniano.

4.2 O Processo Ornstein-Uhlenbeck Geométrico

Definição 4.2.1 A solução X_t da seguinte equação diferencial estocástica

$$\begin{cases} dX_t = \alpha(\theta - \log(X_t))X_t dt + \sigma X_t dB_t \\ X_0 = x_0 \end{cases}$$

define-se por **Processo Ornstein-Uhlenbeck Geométrico**.

A expressão para o processo Ornstein-Uhlenbeck Geométrico obtém-se recorrendo à *Fórmula de Itô*.

Definição 4.2.2

Um **Processo de Itô** é um processo estocástico da forma

$$X_t = X_a + \int_a^t g(s) ds + \int_a^t f(s) dB(s), \quad a \leq t \leq b,$$

em que X_a é \mathcal{F}_a -mensurável, $g \in \mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^1[a, b])$ e $f \in \mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^2[a, b])$.

Nota 4.2.1

- $\mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^1[a, b])$ representa o espaço de todos os processos estocásticos \mathcal{F}_t -adaptados $h(t, \omega)$ tais que $\int_a^t |h(t)| dt < \infty$ q.s.;
- $\mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^2[a, b])$ denota o espaço de todos os processos estocásticos \mathcal{F}_t -adaptados $h(t, \omega)$ tais que $\int_a^t |h(t)|^2 dt < \infty$ q.s..

Teorema 4.2.1 *Fórmula de Itô*

Sejam X_t um processo de Itô e $\varphi(t, x)$ uma função contínua com derivadas parciais contínuas $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ e $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$. Verifica-se que $\varphi(t, X_t)$ é um processo de Itô e que

$$\begin{aligned} \varphi(t, X_t) &= \varphi(a, X_a) + \int_a^t \frac{\partial \varphi}{\partial x}(s, X_s) f(s) dB_s + \\ &+ \int_a^t \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}(s, X_s) + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(s, X_s) g(s) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(s, X_s) f^2(s) \right) ds, \end{aligned}$$

cuja expressão é usualmente representada na seguinte forma diferencial:

$$d\varphi(t, X_t) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, X_t) dt + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t, X_t) dX_t + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(t, X_t) (dX_t)^2.$$

Aplicamos a *Fórmula de Itô* para resolver a equação diferencial não-linear estocástica.

Seja $\varphi(t, x) = \log(x)e^{\alpha t}$.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, x) = \alpha \log(x)e^{\alpha t}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t, x) = \frac{e^{\alpha t}}{x}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(t, x) = -\frac{e^{\alpha t}}{x^2}$$

Pela *Fórmula de Itô*:

$$\begin{aligned} d\varphi(t, X_t) &= \alpha \log(X_t) e^{\alpha t} dt + \frac{e^{\alpha t}}{X_t} dX_t + \frac{1}{2} \left(-\frac{e^{\alpha t}}{X_t^2} \right) (dX_t)^2 = \\ &= \alpha \log(X_t) e^{\alpha t} dt + \frac{e^{\alpha t}}{X_t} (\alpha(\theta - \log(X_t)) X_t dt + \sigma X_t dB_t) + \\ &+ \frac{1}{2} \left(-\frac{e^{\alpha t}}{X_t^2} \right) (\alpha(\theta - \log(X_t)) X_t dt + \sigma X_t dB_t)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
dX_t &= \alpha(\theta - \log(X_t))X_t dt + \sigma X_t dB_t \\
(dX_t)^2 &= (\alpha(\theta - \log(X_t))X_t dt + \sigma X_t dB_t)^2 = \\
&= (\alpha(\theta - \log(X_t))X_t)^2 \underbrace{(dt)^2}_0 + \\
&\quad + 2\alpha(\theta - \log(X_t))X_t \sigma X_t \underbrace{dt dB_t}_0 + (\sigma X_t)^2 \underbrace{(dB_t)^2}_{dt} = \\
&= \sigma^2 X_t^2 dt \\
d\varphi(t, X_t) &= \alpha \log(X_t) e^{\alpha t} dt + \frac{e^{\alpha t}}{X_t} (\alpha(\theta - \log(X_t))X_t dt + \sigma X_t dB_t) - \\
&\quad - \frac{1}{2} \frac{e^{\alpha t}}{X_t^2} \sigma^2 X_t^2 dt = \\
&= \alpha \log(X_t) e^{\alpha t} dt + e^{\alpha t} (\alpha(\theta - \log(X_t))) dt + e^{\alpha t} \sigma dB_t - \\
&\quad - \frac{1}{2} e^{\alpha t} \sigma^2 dt = \\
&= e^{\alpha t} \left(\alpha (\log(X_t) + \theta - \log(X_t)) - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + e^{\alpha t} \sigma dB_t = \\
&= e^{\alpha t} \left(\left(\alpha \theta - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dB_t \right) \\
d(\log(X_t) e^{\alpha t}) &= e^{\alpha t} \left(\left(\alpha \theta - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dB_t \right) \\
\log(X_t) e^{\alpha t} - \log(X_0) e^{\alpha 0} &= \int_0^t e^{\alpha s} \left(\alpha \theta - \frac{\sigma^2}{2} \right) ds + \int_0^t e^{\alpha s} \sigma dB_s \\
\log(X_t) e^{\alpha t} &= \log(x_0) + \left(\alpha \theta - \frac{\sigma^2}{2} \right) \int_0^t e^{\alpha s} ds + \sigma \int_0^t e^{\alpha s} dB_s = \\
&= \log(x_0) + \left(\alpha \theta - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{e^{\alpha t} - e^{\alpha 0}}{\alpha} + \sigma \int_0^t e^{\alpha s} dB_s = \\
&= \log(x_0) + \left(\theta - \frac{\sigma^2}{2\alpha} \right) (e^{\alpha t} - 1) + \sigma \int_0^t e^{\alpha s} dB_s \\
\log(X_t) &= e^{-\alpha t} \log(x_0) + \left(\theta - \frac{\sigma^2}{2\alpha} \right) (1 - e^{-\alpha t}) + \sigma \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dB_s
\end{aligned}$$

A solução pretendida é portanto

$$X_t = e^{e^{-\alpha t} \log(x_0) + \left(\theta - \frac{\sigma^2}{2\alpha} \right) (1 - e^{-\alpha t}) + \sigma \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dB_s}$$

Podemos agora reescrever a definição dada acima:

Definição 4.2.3

Um processo estocástico X_t diz-se um **Processo Ornstein-Uhlenbeck Geométrico**

se, $\forall t \geq 0$,

$$X_t = e^{e^{-\alpha t} \log(x_0) + \left(\theta - \frac{\sigma^2}{2\alpha}\right)(1 - e^{-\alpha t}) + \sigma \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dB_s},$$

em que B_s é o movimento Browniano.

4.3 Referências

- [9] Kuo, H.-H., Introduction to Stochastic Integration, Springer, 2006
- [14] Neftci, S. N., An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives, Academic Press, 2000
- [15] Oksendal, B., Stochastic Differential Equations, Springer-Verlag, 1992

Capítulo 5

Simulação de Trajectórias

Apresentam-se de seguida dois métodos de simulação de EDE's: o *Método Recorrente das Densidades de Transição* e o *Esquema de Euler*. Estas aproximações constroem-se sobre uma partição do intervalo $[0, T]$: $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = T$, e definindo $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ e $\Delta W_i = W_{i+1} - W_i$, $\forall i = 0, 1, \dots, n - 1$, sendo W_i um processo estocástico (ver [18]).

5.1 Método Recorrente das Densidades de Transição

5.1.1 O Caso do Browniano Geométrico

Recorde-se que o *Processo Browniano Geométrico* foi definido pela expressão

$$X_t = x_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t}.$$

A solução X_{i+1} condicional a X_i é dada por

$$X_{i+1} = X_i e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t_i + \sigma \Delta B_i}, \quad i = 0, 1, \dots, n - 1.$$

Observe-se que $\Delta B_i \sim N(0, \Delta t_i)$. As trajectórias serão então simuladas recorrendo ao processo recursivo

$$\begin{cases} Y_{i+1} = Y_i e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t_i + \sigma \sqrt{\Delta t_i} Z_i} \\ Y_0 = X_0 \end{cases}$$

em que $Z_i \sim N(0, 1)$, $i = 0, 1, \dots, n - 1$.

5.1.2 O Caso do Ornstein-Uhlenbeck Geométrico

O *Processo Ornstein-Uhlenbeck Geométrico* é dado por

$$X_t = e^{e^{-\alpha t} \log(x_0) + \left(\theta - \frac{\sigma^2}{2\alpha}\right)(1 - e^{-\alpha t}) + \sigma \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dB_s}.$$

Note-se que $\sigma \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dB_s \sim N\left(0, \frac{\sigma^2}{2\alpha}(1 - e^{-2\alpha t})\right)$. Escrevendo

$$X_{i+1} = e^{e^{-\alpha\Delta t_i} \log(X_i) + \left(\theta - \frac{\sigma^2}{2\alpha}\right)(1 - e^{-\alpha\Delta t_i}) + \sigma \int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{-\alpha(t_{i+1}-s)} dB_s},$$

as trajectórias deste processo obtêm-se recursivamente por

$$\begin{cases} Y_{i+1} = e^{e^{-\alpha\Delta t_i} \log(Y_i) + \left(\theta - \frac{\sigma^2}{2\alpha}\right)(1 - e^{-\alpha\Delta t_i}) + \sqrt{\frac{\sigma^2}{2\alpha}(1 - e^{-2\alpha t_i})} Z_i} \\ Y_0 = X_0 \end{cases}$$

com $Z_i \sim N(0, 1)$, $i = 0, 1, \dots, n - 1$.

5.2 O Esquema de Euler

Nesta secção obtemos expressões para simular EDE's procurando aproximações não da respectiva solução, que usualmente não é conhecida explicitamente, mas da própria equação diferencial.

As aproximações a X_i são dadas por Y_i , que é obtido recursivamente através do seguinte método:

$$\begin{cases} Y_0 = X_0 \\ Y_{i+1} = Y_i + \mu(t_i, Y_i)\Delta t + \sigma(t_i, Y_i)\sqrt{\Delta t_i}Z_i \end{cases}$$

em que $Z_i \sim N(0, 1)$.

5.2.1 O Caso do Browniano Geométrico

A aproximação de uma trajectória do processo da forma

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t$$

é dada por:

$$\begin{cases} Y_{i+1} = Y_i + \mu Y_i \Delta t + \sigma Y_i \sqrt{\Delta t} Z_i \\ Y_0 = X_0 \end{cases}$$

em que $Z_i \sim N(0, 1)$.

5.2.2 O Caso do Ornstein-Uhlenbeck Geométrico

Uma trajectória do processo

$$dX_t = \alpha(\theta - \ln(X_t))X_t dt + \sigma X_t dB_t$$

é aproximada por:

$$\begin{cases} Y_{i+1} = Y_i + \alpha(\theta - \ln(Y_i))Y_i \Delta t + \sigma Y_i \sqrt{\Delta t} Z_i \\ Y_0 = X_0 \end{cases}$$

com $Z_i \sim N(0, 1)$.

5.3 Resumo dos Dois Métodos de Aproximação

É importante salientar que o **método Recorrente das Densidades de Transição é bastante mais preciso que o Esquema de Euler**; no primeiro estamos a recorrer à própria solução da equação diferencial estocástica para as simulações, enquanto que no segundo é utilizada uma discretização da EDE.

- **Processo Browniano Geométrico:**

Método Recorrente das Densidades de Transição:

$$Y_{i+1} = Y_i e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t_i + \sigma\sqrt{\Delta t_i}Z_i}$$

Esquema de Euler:

$$Y_{i+1} = Y_i + \mu Y_i \Delta t + \sigma Y_i \sqrt{\Delta t} Z_i$$

- **Processo de Ornstein-Uhlenbeck Geométrico:**

Método Recorrente das Densidades de Transição:

$$Y_{i+1} = e^{e^{-\alpha\Delta t_i} \log(Y_i) + \left(\theta - \frac{\sigma^2}{2\alpha}\right)(1 - e^{-\alpha\Delta t_i}) + \sqrt{\frac{\sigma^2}{2\alpha}(1 - e^{-2\alpha t})} Z_i}$$

Esquema de Euler:

$$Y_{i+1} = Y_i + \alpha(\theta - \ln(Y_i))Y_i \Delta t + \sigma Y_i \sqrt{\Delta t} Z_i$$

5.4 Referências

[8] Kloeden, P. E., Platen, E., Numerical Solution of Stochastic Differential Equations, Springer-Verlag 1995

[17] Seydel, R.U., Tools for Computational Finance, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009

Capítulo 6

Estimação de Parâmetros

6.1 Método da Máxima Verosimilhança

Em Análise Financeira utiliza-se tipicamente o logaritmo dos retornos que, na maioria dos casos, segue uma *distribuição Normal* ou *aproximadamente Normal*. Recorde-se que, nesta situação, as v.a.'s têm uma *distribuição Log-Normal*, que se recorda de seguida (ver [14]).

Seja $Y \sim N(\mu, \sigma)$. Se $Y = \ln(X)$, i.e., se $X = e^Y$, então

$$f_X(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{\sigma^2}}.$$

Diz-se portanto que X tem *distribuição Log-Normal* de parâmetros μ_X e σ_X^2 , e escreve-se

$$X \sim LN(\mu_X, \sigma_X^2),$$

em que $\mu_X = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$ e $\sigma_X^2 = e^{2\mu + 2\sigma^2} - e^{2\mu + \sigma^2}$.

6.1.1 Processo Browniano Geométrico

Na secção anterior obtivemos a expressão correspondente à solução condicional (ao instante anterior) do Processo Browniano Geométrico:

$$X_{i+1} = X_i e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t_i + \sigma\Delta B_i},$$

em que $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$, $\Delta B_i = B_{i+1} - B_i$, $i = 0, 1, \dots, n-1$.

Aplicando a *função logaritmo* temos que

$$\ln(X_{i+1}) = \ln(X_i) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t_i + \sigma\Delta B_i$$

ou

$$\ln\left(\frac{X_{i+1}}{X_i}\right) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t_i + \sigma\Delta B_i.$$

Obtenção da Distribuição

O processo Browniano Geométrico é dado por (ver [9] ou [16])

$$X_t = X_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t}.$$

Aplicando a função logaritmo a esta expressão ficamos com

$$\log(X_t) = \log(X_0) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t$$

ou

$$\ln\left(\frac{X_t}{X_0}\right) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\ln\left(\frac{X_t}{X_0}\right)\right] &= \mathbb{E}\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma B_t\right] = \\ &= \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma \underbrace{\mathbb{E}[B_t]}_0 = \\ &= \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t \\ \text{Var}\left(\ln\left(\frac{X_t}{X_0}\right)\right) &= \text{Var}\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma B_t\right) = \\ &= 0 + \sigma^2 \underbrace{\text{Var}(B_t)}_t = \\ &= \sigma^2 t \end{aligned}$$

e portanto

$$\ln(X_{i+1}|X_i = x_i) \sim N\left(\ln(x_i) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t_i, \sigma^2\Delta t_i\right).$$

A função de densidade dos logaritmos dos preços condicionais é dada por:

$$\begin{aligned} f(x_{i+1}) &= \frac{1}{x_{i+1}\sqrt{2\pi\sigma^2\Delta t}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(\ln(x_{i+1}) - (\ln(x_i) + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t))^2}{\sigma^2\Delta t}} = \\ &= \frac{1}{x_{i+1}\sqrt{2\pi\sigma^2\Delta t}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(\ln(\frac{x_{i+1}}{x_i}) - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t)^2}{\sigma^2\Delta t}}. \end{aligned}$$

Portanto, $\log(X_t)$ tem **distribuição Normal** pelo que X_t tem **distribuição Log-Normal**. Conhecida a distribuição de X_t , podemos agora aplicar o método da máxima verosimilhança para tentar obter os *estimadores de máxima verosimilhança* para os parâmetros μ e σ .

Aplicação do Método

A *função de verosimilhança* correspondente à expressão acima obtém-se da forma seguinte:

$$\begin{aligned} L(\mu, \sigma^2 | x_0, \dots, x_{n-1}) &= \prod_{i=0}^{n-1} \frac{1}{x_{i+1} \sqrt{2\pi\sigma^2\Delta t}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(\ln(\frac{x_{i+1}}{x_i}) - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t)^2}{\sigma^2\Delta t}} = \\ &= \frac{1}{\prod_{i=0}^{n-1} x_{i+1} \sqrt{2\pi\sigma^2\Delta t}} e^{-\sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\ln(\frac{x_{i+1}}{x_i}) - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t)^2}{2\sigma^2\Delta t}}, \end{aligned}$$

pelo que podemos calcular a *função de log-verosimilhança*:

$$\begin{aligned} l(\mu, \sigma^2 | x_0, \dots, x_{n-1}) &= \ln(\mu, \sigma^2 | x_0, \dots, x_{n-1}) = \\ &= -\sum_{i=0}^{n-1} \ln(x_{i+1} \sqrt{2\pi\sigma^2\Delta t}) - \\ &\quad - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\ln(\frac{x_{i+1}}{x_i}) - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t)^2}{2\sigma^2\Delta t} = \\ &= -\frac{n}{2} \ln(2\pi\sigma^2\Delta t) - \sum_{i=0}^{n-1} \ln(x_{i+1}) - \\ &\quad - \frac{1}{2\sigma^2\Delta t} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\ln\left(\frac{x_{i+1}}{x_i}\right) - \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t \right)^2. \end{aligned}$$

Os estimadores de μ e σ , $\hat{\mu}$ e $\hat{\sigma}^2$, são as soluções das seguintes equações:

$$\begin{cases} \hat{\mu} : \frac{\partial l(\mu, \sigma^2 | x_0, \dots, x_{n-1})}{\partial \mu} = 0 \\ \hat{\sigma}^2 : \frac{\partial l(\mu, \sigma^2 | x_0, \dots, x_{n-1})}{\partial \sigma^2} = 0 \end{cases}$$

$$\hat{\mu} : \frac{\partial l(\mu, \sigma^2 | x_0, \dots, x_{n-1})}{\partial \mu} = 0$$

CA :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\frac{1}{2\sigma^2\Delta t} \left(\ln\left(\frac{x_{i+1}}{x_i}\right) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t \right)^2 \right) &= 0 \\ -\frac{1}{2\sigma^2\Delta t} 2 \left(\ln\left(\frac{x_{i+1}}{x_i}\right) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t \right) (-\Delta t) &= 0 \\ \frac{1}{\sigma^2} \left(\ln\left(\frac{x_{i+1}}{x_i}\right) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t \right) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial l(\mu, \sigma^2 | x_0, \dots, x_{n-1})}{\partial \mu} = 0 &\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{1}{\sigma^2} \left(\ln \left(\frac{x_{i+1}}{x_i} \right) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t \right) \right) = 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n-1} \left(\ln \left(\frac{x_{i+1}}{x_i} \right) \right) - n \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t = 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \mu - \frac{\sigma^2}{2} = \frac{1}{n \Delta t} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left(\frac{x_{i+1}}{x_i} \right) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \mu = \frac{1}{n \Delta t} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left(\frac{x_{i+1}}{x_i} \right) + \frac{\sigma^2}{2} \Rightarrow \\
&\Rightarrow \hat{\mu} = \frac{1}{n \Delta t} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left(\frac{X_{i+1}}{X_i} \right) + \frac{\hat{\sigma}^2}{2}
\end{aligned}$$

$$\hat{\sigma}^2 : \frac{\partial l(\mu, \sigma^2 | x_0, \dots, x_{n-1})}{\partial \sigma^2} = 0$$

Note-se que

$$\mu = \frac{1}{n \Delta t} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left(\frac{x_{i+1}}{x_i} \right) + \frac{\sigma^2}{2} \Leftrightarrow \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left(\frac{x_{i+1}}{x_i} \right),$$

peço que podemos fazer uma substituição em $l(\mu, \sigma^2 | x_0, \dots, x_{n-1})$ de modo a simplificar os cálculos.

$$\begin{aligned}
l(\mu, \sigma^2 | x_0, \dots, x_{n-1}) &= -\frac{n}{2} \ln(2\pi\sigma^2\Delta t) - \sum_{i=0}^{n-1} \ln(x_{i+1}) - \\
&\quad - \frac{1}{2\sigma^2\Delta t} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\ln \left(\frac{x_{i+1}}{x_i} \right) - \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left(\frac{x_{i+1}}{x_i} \right) \right)^2.
\end{aligned}$$

CA:

$$\frac{\partial}{\partial \sigma^2} \left(-\frac{n}{2} \ln(2\pi\sigma^2\Delta t) \right) = -\frac{n}{2} \frac{2\pi\Delta t}{2\pi\sigma^2\Delta t} = -\frac{n}{2\sigma^2}$$

CA:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial \sigma^2} \left(-\frac{1}{2\sigma^2\Delta t} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\ln \left(\frac{x_{i+1}}{x_i} \right) - \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left(\frac{x_{i+1}}{x_i} \right) \right)^2 \right) = \\
&= \frac{1}{2\sigma^4\Delta t} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\ln \left(\frac{x_{i+1}}{x_i} \right) - \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left(\frac{x_{i+1}}{x_i} \right) \right)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial l(\mu, \sigma^2 | x_0, \dots, x_{n-1})}{\partial \sigma^2} = 0 &\Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4 \Delta t} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\ln \left(\frac{x_{i+1}}{x_i} \right) - \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left(\frac{x_{i+1}}{x_i} \right) \right)^2 = 0 &\Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow n = \frac{1}{\sigma^2 \Delta t} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\ln \left(\frac{x_{i+1}}{x_i} \right) - \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left(\frac{x_{i+1}}{x_i} \right) \right)^2 &\Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \sigma^2 = \frac{1}{n \Delta t} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\ln \left(\frac{x_{i+1}}{x_i} \right) - \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left(\frac{x_{i+1}}{x_i} \right) \right)^2 &\Rightarrow \\
\Rightarrow \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n \Delta t} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\ln \left(\frac{X_{i+1}}{X_i} \right) - \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left(\frac{X_{i+1}}{X_i} \right) \right)^2 &
\end{aligned}$$

Podemos observar que a expressão dada por $\hat{\mu}$ é relativa a uma *média* usual acrescida do factor $\frac{\hat{\sigma}^2}{2}$, sendo que $\hat{\sigma}^2$ corresponde à fórmula usual para a *variância*.

6.1.2 Processo de Ornstein-Uhlenbeck Geométrico

A expressão de aproximação condicional do Processo Ornstein-Uhlenbeck Geométrico, no instante t_{i+1} dado X_i , é:

$$X_{i+1} = e^{e^{-\alpha \Delta t_i} \ln(X_i) + \left(\theta - \frac{\sigma^2}{2\alpha}\right)(1 - e^{-\alpha \Delta t_i}) + \sigma \int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{-\alpha(t_{i+1}-s)} dB_s},$$

em que $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$, $\Delta B_i = B_{i+1} - B_i$, $i = 0, 1, \dots, n-1$, e portanto

$$\ln(X_{i+1}) = e^{-\alpha \Delta t_i} \ln(X_i) + \left(\theta - \frac{\sigma^2}{2\alpha}\right)(1 - e^{-\alpha \Delta t_i}) + \sigma \int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{-\alpha(t_{i+1}-s)} dB_s.$$

Obtenção da Distribuição

O processo Ornstein-Uhlenbeck Geométrico é dado por

$$X_t = e^{e^{-\alpha t} \log(X_0) + \left(\theta - \frac{\sigma^2}{2\alpha}\right)(1 - e^{-\alpha t}) + \sigma \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dB_s}.$$

Aplicando a função logaritmo a esta expressão ficamos com

$$\log(X_t) = e^{-\alpha t} \log(X_0) + \left(\theta - \frac{\sigma^2}{2\alpha}\right)(1 - e^{-\alpha t}) + \sigma \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dB_s,$$

pelo que condicionando a X_0 temos uma *distribuição Normal*, pois sabe-se que $\int_0^t f(s) dB_s$ tem distribuição Normal quando f é determinista.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\ln(X_t)] &= \mathbb{E} \left[e^{-\alpha t} \log(X_0) + \left(\theta - \frac{\sigma^2}{2\alpha} \right) (1 - e^{-\alpha t}) \right] + \\
&\quad + \underbrace{\mathbb{E} \left[\sigma \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dB_s \right]}_0 = \\
&= e^{-\alpha t} \log(X_0) + \left(\theta - \frac{\sigma^2}{2\alpha} \right) (1 - e^{-\alpha t}) \\
\text{Var}(\ln(X_t)) &= \underbrace{\text{Var} \left(e^{-\alpha t} \log(X_0) + \left(\theta - \frac{\sigma^2}{2\alpha} \right) (1 - e^{-\alpha t}) \right)}_0 + \\
&\quad + \text{Var} \left(\sigma \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dB_s \right) = \\
&= \mathbb{E} \left[\left(\sigma \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dB_s \right)^2 \right] - \\
&\quad - \left(\underbrace{\mathbb{E} \left[\left(\sigma \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dB_s \right) \right]}_0 \right)^2 = \\
&= \mathbb{E} \left[\left(\sigma \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dB_s \right)^2 \right]
\end{aligned}$$

Aplique-se a *Isometria de Itô*:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[\left(\sigma \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dB_s \right)^2 \right] &= \sigma^2 \int_0^t \left(e^{-\alpha(t-s)} \right)^2 ds = \\
&= \sigma^2 \int_0^t e^{-2\alpha(t-s)} ds = \\
&= \frac{\sigma^2}{2\alpha} e^{-2\alpha(t-s)} \Big|_0^t = \\
&= \frac{\sigma^2}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha t})
\end{aligned}$$

Temos portanto

$$\ln(X_{i+1}|X_i = x_i) \sim N \left(e^{-\alpha \Delta t_i} \ln(x_i) + \left(\theta - \frac{\sigma^2}{2\alpha} \right) (1 - e^{-\alpha \Delta t_i}) , \frac{\sigma^2}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha \Delta t_i}) \right)$$

A *função de densidade* da distribuição em causa é da forma

$$\begin{aligned}
f(x_{i+1}) &= \frac{1}{x_{i+1} \sqrt{2\pi \frac{\sigma^2}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha\Delta t})}} \times \\
&\times e^{-\frac{1}{2} \frac{(\ln(x_{i+1}) - (e^{-\alpha\Delta t} \ln(x_i) + (\theta - \frac{\sigma^2}{2\alpha})(1 - e^{-\alpha\Delta t})))^2}{\frac{\sigma^2}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha\Delta t})}} = \\
&= \frac{1}{x_{i+1} \sqrt{\pi \frac{\sigma^2}{\alpha} (1 - e^{-2\alpha\Delta t})}} \times \\
&\times e^{-\frac{(\ln(x_{i+1}) - (e^{-\alpha\Delta t} \ln(x_i) + (\theta - \frac{\sigma^2}{2\alpha})(1 - e^{-\alpha\Delta t})))^2}{\frac{\sigma^2}{\alpha} (1 - e^{-2\alpha\Delta t})}}.
\end{aligned}$$

Aplicação do Método

A função log-verosimilhança é dada por

$$\begin{aligned}
l(\mu, \sigma^2 | x_0, \dots, x_{n-1}) &= \\
&= \ln \left(\prod_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1}) \right) = \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \ln(f(x_{i+1})) = \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \left[\ln \left(\frac{1}{x_{i+1} \sqrt{\pi \frac{\sigma^2}{\alpha} (1 - e^{-2\alpha\Delta t})}} \right) - \right. \\
&\quad \left. - \sum_{i=0}^{n-1} \left[\frac{(\ln(x_{i+1}) - (e^{-\alpha\Delta t} \ln(x_i) + (\theta - \frac{\sigma^2}{\alpha})(1 - e^{-\alpha\Delta t})))^2}{\sigma^2 \Delta t} \right] \right] = \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \left[-\ln(x_{i+1}) - \frac{1}{2} \ln \left(\pi \frac{\sigma^2}{\alpha} (1 - e^{-2\alpha\Delta t}) \right) \right] - \\
&\quad - \frac{\alpha}{\sigma^2 (1 - e^{-\alpha\Delta t})} \times \\
&\quad \times \sum_{i=0}^{n-1} \left[\left(\ln(x_{i+1}) - \left(e^{-\alpha\Delta t} \ln(x_i) + \left(\theta - \frac{\sigma^2}{2\alpha} \right) (1 - e^{-\alpha\Delta t}) \right) \right)^2 \right] \\
&\left\{ \begin{array}{l} \hat{\theta} : \frac{\partial l(\mu, \sigma^2 | x_0, \dots, x_{n-1})}{\partial \theta} = 0 \\ \hat{\alpha} : \frac{\partial l(\mu, \sigma^2 | x_0, \dots, x_{n-1})}{\partial \alpha} = 0 \\ \hat{\sigma}^2 : \frac{\partial l(\mu, \sigma^2 | x_0, \dots, x_{n-1})}{\partial \sigma} = 0 \end{array} \right.
\end{aligned}$$

De modo a resolver o sistema acima, efectua-se as seguintes substituições:

$$\delta^2 = \frac{\sigma^2}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha\Delta t})$$

e

$$\gamma = \theta - \frac{\sigma^2}{2\alpha}.$$

Assim, a função logaritmo de verosimilhança será dada por:

$$\begin{aligned} l(\mu, \sigma^2 | x_0, \dots, x_{n-1}) &= -\frac{n}{2} \ln(2\pi\delta^2) - \sum_{i=0}^{n-1} \ln(x_{i+1}) - \\ &\quad - \frac{1}{2\delta^2} \sum_{i=0}^{n-1} [\ln(x_{i+1}) - \ln(x_i)e^{-\alpha\Delta t} - \gamma(1 - e^{-\alpha\Delta t})]^2 = \\ &= -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - n \ln(\delta) - \sum_{i=0}^{n-1} \ln(x_{i+1}) - \\ &\quad - \frac{1}{2\delta^2} \sum_{i=0}^{n-1} [\ln(x_{i+1}) - \ln(x_i)e^{-\alpha\Delta t} - \gamma(1 - e^{-\alpha\Delta t})]^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial \gamma} = 0 &\Leftrightarrow -\frac{2}{2\delta} \sum_{i=0}^{n-1} [\ln(x_{i+1}) - \ln(x_i)e^{-\alpha\Delta t} - \gamma(1 - e^{-\alpha\Delta t})] \times \\ &\quad \times (1 - e^{-\alpha\Delta t}) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n-1} [\ln(x_{i+1})(1 - e^{-\alpha\Delta t}) - \ln(x_i)e^{-\alpha\Delta t}(1 - e^{-\alpha\Delta t})] - \\ &\quad - \sum_{i=0}^{n-1} [\gamma(1 - e^{-\alpha\Delta t})^2] = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n-1} [\ln(x_{i+1}) - \ln(x_i)e^{-\alpha\Delta t} - \gamma(1 - e^{-\alpha\Delta t})] = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n-1} \ln(x_{i+1}) - \sum_{i=0}^{n-1} \ln(x_i)e^{-\alpha\Delta t} - n\gamma(1 - e^{-\alpha\Delta t}) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \gamma = \frac{1}{n(1 - e^{-\alpha\Delta t})} \left(\sum_{i=0}^{n-1} \ln(x_{i+1}) - \sum_{i=0}^{n-1} \ln(x_i)e^{-\alpha\Delta t} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial l}{\partial \alpha} = 0 &\Leftrightarrow -\frac{2}{2\delta^2} \sum_{i=0}^{n-1} (\ln(x_{i+1}) - \ln(x_i)e^{-\alpha\Delta t} - \gamma(1 - e^{-\alpha\Delta t})) \times \\
&\quad \times (\Delta t \ln(x_i)e^{-\alpha\Delta t} - \gamma\Delta te^{-\alpha\Delta t}) = 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n-1} (\ln(x_{i+1}) - \ln(x_i)e^{-\alpha\Delta t} - \gamma(1 - e^{-\alpha\Delta t})) \times \\
&\quad \times (\ln(x_i) - \gamma) \Delta te^{-\alpha\Delta t} = 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n-1} ((\ln(x_{i+1}) - \gamma) - (\ln(x_i) - \gamma)e^{-\alpha\Delta t}) (\ln(x_i) - \gamma) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n-1} \left((\ln(x_{i+1}) - \gamma) (\ln(x_i) - \gamma) - e^{-\alpha\Delta t} (\ln(x_i) - \gamma)^2 \right) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow e^{-\alpha\Delta t} = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} (\ln(x_{i+1}) - \gamma) (\ln(x_i) - \gamma)}{\sum_{i=0}^{n-1} (\ln(x_i) - \gamma)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial l}{\partial \delta} = 0 &\Leftrightarrow -\frac{n}{\delta} - \frac{1}{2} \left(-\frac{2}{\delta^3} \right) \times \\
&\quad \times \sum_{i=0}^{n-1} [\ln(x_{i+1}) - \ln(x_i)e^{-\alpha\Delta t} - \gamma(1 - e^{-\alpha\Delta t})]^2 = 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow -\frac{n}{\delta} = -\frac{1}{\delta^3} \times \\
&\quad \times \sum_{i=0}^{n-1} [\ln(x_{i+1}) - \ln(x_i)e^{-\alpha\Delta t} - \gamma(1 - e^{-\alpha\Delta t})]^2 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \delta^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} [\ln(x_{i+1}) - \ln(x_i)e^{-\alpha\Delta t} - \gamma(1 - e^{-\alpha\Delta t})]^2
\end{aligned}$$

Para simplificar a notação, escrevemos:

$$\begin{aligned}
S_x &= \sum_{i=0}^{n-1} \ln(x_i) \quad , \quad S_y = \sum_{i=0}^{n-1} \ln(x_{i+1}) \quad , \\
S_{xx} &= \sum_{i=0}^{n-1} (\ln(x_i))^2 \quad , \quad S_{yy} = \sum_{i=0}^{n-1} (\ln(x_{i+1}))^2 \quad , \\
S_{xy} &= \sum_{i=0}^{n-1} \ln(x_i) \ln(x_{i+1}) .
\end{aligned}$$

De modo a calcular uma expressão para o estimador de γ , fazemos desde já as seguintes substituições:

$$\begin{aligned}
\gamma &= \frac{S_y - e^{-\alpha\Delta t} S_x}{n(1 - e^{-\alpha\Delta t})} \\
e^{-\alpha\Delta t} &= \frac{S_{xy} - \gamma(S_y + S_x) + n\delta}{S_{xx} - 2\gamma S_x + n\gamma^2}
\end{aligned}$$

CA :

$$e^{-\alpha\Delta t} S_x = \frac{S_x - S_{xy} - \gamma(S_{xx} + S_{xy}) + n\gamma^2 S_x}{S_{xx} - 2\gamma S_x + n\gamma^2}$$

CA :

$$1 - e^{-\alpha\Delta t} = \frac{S_{xx} - 2\gamma S_x + n\gamma^2 - S_{xy} + \gamma(S_x + S_y) - n\gamma^2}{S_{xx} - 2\gamma S_x + n\gamma^2}$$

$$n(1 - e^{-\alpha\Delta t}) = \frac{nS_{xx} - 2n\gamma S_x + n^2\gamma^2 - nS_{xy} + n\gamma(S_x + S_y) - n^2\gamma^2}{S_{xx} - 2\gamma S_x + n\gamma^2}$$

Obtenha-se então um estimador para γ :

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{S_y - \frac{S_x S_{xy} - \gamma(S_{xx} + S_{xy}) + n\gamma^2 S_x}{S_{xx} - 2\gamma S_x + n\gamma^2}}{\frac{nS_{xx} - 2n\gamma S_x + n^2\gamma^2 - nS_{xy} + n\gamma(S_x + S_y) - n^2\gamma^2}{S_{xx} - 2\gamma S_x + n\gamma^2}} = \\ &= \frac{S_y S_{xx} - 2\gamma S_{xy} + n\gamma^2 S_y - S_x S_{xy} + \gamma(S_{xx} + S_{xy}) - n\gamma^2 S_x}{\frac{nS_{xx} - 2n\gamma S_x + n^2\gamma^2 - nS_{xy} + n\gamma(S_x + S_y) - n^2\gamma^2}{S_{xx} - 2\gamma S_x + n\gamma^2}} = \\ &= \frac{S_y S_{xx} - 2\gamma S_{xy} + n\gamma^2 S_y - S_x S_{xy} + \gamma(S_{xx} + S_{xy}) - n\gamma^2 S_x}{nS_{xx} - 2n\gamma S_x + n^2\gamma^2 - nS_{xy} + n\gamma(S_x + S_y) - n^2\gamma^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \gamma(nS_{xx} - 2n\gamma S_x + n^2\gamma^2 - nS_{xy} + n\gamma(S_x + S_y) - n^2\gamma^2) &= \\ = S_y S_{xx} - 2\gamma S_{xy} + n\gamma^2 S_y - S_x S_{xy} + \gamma(S_{xx} + S_{xy}) - n\gamma^2 S_x &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow n\gamma S_{xx} - 2n\gamma^2 S_x - n\gamma S_{xy} + n\gamma^2 S_x + n\gamma^2 S_y = & \\ = S_y S_{xx} - 2\gamma S_{xy} + n\gamma^2 S_y - S_x S_{xy} + \gamma S_{xx} + \gamma S_{xy} - n\gamma^2 S_x &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow n\gamma S_{xx} - n\gamma^2 S_x - n\gamma S_{xy} + n\gamma^2 S_y + 2\gamma S_{xy} - n\gamma^2 S_y - \gamma S_{xx} - & \\ - \gamma S_{xy} + n\gamma^2 S_x = S_y S_{xx} - S_x S_{xy} &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \gamma(n(S_{xx} - S_{xy}) - (S_{xx} - S_{xy})) = S_y S_{xx} - S_x S_{xy} &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \gamma = \frac{S_y S_{xx} - S_x S_{xy}}{n(S_{xx} - S_{xy}) - (S_{xx} - S_{xy})} \Rightarrow & \\ \Rightarrow \hat{\gamma} = \frac{S_Y S_{XX} - S_X S_{XY}}{n(S_{XX} - S_{XY}) - (S_{XX} - S_{XY})} & \end{aligned}$$

Obtido o estimador de γ , podemos estimar α :

$$e^{-\alpha\Delta t} = \frac{S_{xy} - \gamma(S_x + S_y) + n\gamma^2}{S_{xx} - 2\gamma S_x + n\gamma^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\alpha\Delta t = \ln\left(\frac{S_{xy} - \gamma(S_x + S_y) + n\gamma^2}{S_{xx} - 2\gamma S_x + n\gamma^2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha = -\frac{1}{\Delta t} \ln\left(\frac{S_{xy} - \gamma(S_x + S_y) + n\gamma^2}{S_{xx} - 2\gamma S_x + n\gamma^2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{\alpha} = -\frac{1}{\Delta t} \ln\left(\frac{S_{XY} - \hat{\gamma}(S_X + S_Y) + n\hat{\gamma}^2}{S_{XX} - 2\hat{\gamma}S_X + n\hat{\gamma}^2}\right)$$

Obtenha-se agora um estimador para δ^2 :

CA :

$$\begin{aligned}
& (\ln(x_{i+1}) - \ln(x_i)e^{-\alpha\Delta t} - \gamma(1 - e^{-\alpha\Delta t}))^2 = \\
& = (\ln(x_{i+1}) - \ln(x_i)e^{-\alpha\Delta t})^2 - 2(\ln(x_{i+1}) - \ln(x_{i+1})e^{-\alpha\Delta t}) \times \\
& \quad \times \gamma(1 - e^{-\alpha\Delta t}) + \gamma^2(1 - e^{-\alpha\Delta t})^2 = \\
& = (\ln(x_{i+1}))^2 - 2\ln(x_{i+1})\ln(x_i)e^{-\alpha\Delta t} + (\ln(x_i))^2e^{-2\alpha\Delta t} - \\
& \quad - 2(x_{i+1} - x_ie^{-\alpha\Delta t})\gamma(1 - e^{-\alpha\Delta t}) + \gamma^2(1 - e^{-\alpha\Delta t})^2 \\
\hat{\delta}^2 & = \frac{1}{n} \left(S_{YY} - 2S_Y S_X e^{-\hat{\alpha}\Delta t} + S_{XX} e^{-2\hat{\alpha}\Delta t} \right) - \\
& \quad - \frac{1}{n} 2\hat{\gamma} \left((S_Y - S_X e^{-\hat{\alpha}\Delta t}) (1 - e^{-\hat{\alpha}\Delta t}) + n\hat{\gamma}^2 (1 - e^{-\hat{\alpha}\Delta t})^2 \right)
\end{aligned}$$

Esta expressão representa então um estimador para δ^2 e uma vez que definimos por

$$\delta^2 = \frac{\sigma^2}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha\Delta t})$$

o que equivale a

$$\sigma^2 = \frac{2\alpha}{1 - e^{-2\alpha\Delta t}} \delta^2,$$

um estimador para σ^2 é

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}^2 & = \frac{2\hat{\alpha}}{1 - e^{-2\hat{\alpha}\Delta t}} \frac{1}{n} \left(S_{YY} - 2S_Y S_X e^{-\hat{\alpha}\Delta t} + S_{XX} e^{-2\hat{\alpha}\Delta t} \right) - \\
& \quad - \frac{2\hat{\alpha}}{1 - e^{-2\hat{\alpha}\Delta t}} \frac{1}{n} 2\hat{\gamma} \left((S_Y - S_X e^{-\hat{\alpha}\Delta t}) (1 - e^{-\hat{\alpha}\Delta t}) + n\hat{\gamma}^2 (1 - e^{-\hat{\alpha}\Delta t})^2 \right)
\end{aligned}$$

No caso de θ , observe-se que

$$\gamma = \theta - \frac{\sigma^2}{2\alpha} \quad \Leftrightarrow \quad \theta = \gamma + \frac{\sigma^2}{2\alpha}$$

pelo que, substituindo os parâmetros acima pelos seus estimadores já calculados, obtemos um estimador para θ :

$$\hat{\theta} = \hat{\gamma} + \frac{\hat{\sigma}^2}{2\hat{\alpha}}.$$

6.2 Referências

- [9] Kuo, H.-H., Introduction to Stochastic Integration, Springer, 2006
- [12] Miguens, F., Probabilidades e Estatística I, FCT-UNL, 2005
- [13] Miguens, F., Probabilidades e Estatística II, FCT-UNL, 2005
- [14] Mood, A. M., Graybill, F. A., Boes, D. C., Introduction to the Theory of Statistics, McGraw-Hill International Editions, 1963

Capítulo 7

O Critério AIC

7.1 Sobre o AIC

De modo a estudar a evolução do produto financeiro, é necessário conhecer qual o melhor processo a ajustar aos preços futuros das matérias primas, de entre os tipicamente escolhidos: Browniano Geométrico e Ornstein-Uhlenbeck Geométrico. O critério AIC é comumente usado para este efeito.

O **AIC (Akaike Information Criterion)**¹ é um critério que mede o grau de adaptabilidade de modelos estatísticos. Foi desenvolvido segundo o pressuposto de que a *informação K-L* (Kullback-Leibler), uma medida fundamental em estatística que mede o ajustamento de duas distribuições, seria fundamental para permitir fazer a escolha do melhor modelo, entrando deste modo na chamada *entropia de informação*.²

7.2 Desenvolvimento do AIC: Ideias Gerais

A *informação K-L* consiste na informação perdida quando um modelo g é usado como aproximação à realidade f e é definida pelo integral

$$I(f, g) = \int f(x) \ln \left(\frac{f(x)}{g(x|\theta)} \right) dx$$

para funções contínuas f e g . Dado que o melhor modelo é o que tem menor perda de informação relativa a outros, este será então obtido minimizando $I(f, g)$ relativamente a g .

Uma vez que não existe o conhecimento total da realidade dos parâmetros θ nos modelos $g_i(x|\theta)$ propostos ao ajustamento, $I(f, g)$ não pode ser apli-

¹Desenvolvido pelo estatístico japonês Hirotugu Akaike no início da década de 70.

²Conceito introduzido por Claude E. Shannon no artigo “Uma Teoria Matemática de Comunicação” em 1948.

cado directamente no modelo. Existe uma grande diferença entre os modelos cujos parâmetros são conhecidos e aqueles em que é necessária uma estimação dos parâmetros, cujo grau de incerteza é tipicamente substancial. Este facto influencia a forma de aplicar a informação K-L uma vez que se minimiza, não a informação K-L conhecida, mas a informação K-L estimada.

A partir da *informação K-L*, temos que

$$\begin{aligned} I(f, g) &= \int f(x) \ln(f(x)) dx - \int f(x) \ln(g(x|\theta)) dx = \\ &= \mathbb{E}_f [\ln(f(x))] - \mathbb{E}_f [\ln(g(x|\theta))], \end{aligned}$$

em que se considera a função f fixa e portanto $\mathbb{E}_f [\ln(f(x))]$ é constante para todos os modelos, pelo que podemos escrever

$$I(f, g) = c - \mathbb{E}_f [\ln(g(x|\theta))].$$

Assim, temos apenas que calcular a esperança $\mathbb{E}_f [\ln(g(x|\theta))]$ relativa a cada modelo do espaço de modelos dado. Para que o critério de selecção seja completamente rigoroso, será ainda necessário estimar

$$\mathbb{E}_y \left[\mathbb{E}_x \left[\ln(g(x|\hat{\theta}(y))) \right] \right].$$

Note-se que $\mathbb{E}_x \left[\ln(g(x|\hat{\theta}(y))) \right]$ corresponde a $\mathbb{E}_f [\ln(g(x|\theta))]$, em que θ é substituído pelo respectivo estimador de *máxima verosimilhança*, com base no modelo em questão g e na amostra y , constituída por valores aleatórios pertencentes à mesma distribuição da amostra x e que lhe são independentes. Existe uma relação entre a informação K-L e a teoria de verosimilhança, mais propriamente, o valor maximizado da função de log-verosimilhança é uma estimativa de $\mathbb{E}_y \left[\mathbb{E}_x \left[\ln(g(x|\hat{\theta}(y))) \right] \right]$. Concluiu-se que um bom estimador de $\mathbb{E}_y \left[\mathbb{E}_x \left[\ln(g(x|\hat{\theta}(y))) \right] \right]$ para amostras grandes é dado pela expressão

$$\ln(L(\hat{\theta}|x)) - K.$$

Assim,

$$\ln(L(\hat{\theta}|x)) - K = c - \hat{\mathbb{E}}_{\hat{\theta}}[I(f, \hat{g})],$$

em que $\hat{g} = g(\cdot|\hat{\theta})$.

7.3 Critério de Informação Akaike

O **Critério de Informação Akaike**, ou **AIC**, para um modelo M foi então definido por

$$AIC(M) = -2 \ln(L(\hat{\theta}|x)) + 2K,$$

em que $\ln(L(\hat{\theta}|x))$ representa o máximo da função de log-verosimilhança, $\hat{\theta}$ o estimador de máxima verosimilhança de θ e K o número de parâmetros do modelo. O melhor modelo a ajustar tem o menor valor AIC correspondente. Note-se que o AIC identifica o melhor modelo a adoptar de entre o espaço de modelos e não determina o grau de qualidade de ajustamento aos dados; quer isto dizer que o melhor modelo de entre os possíveis é obtido através deste critério, seja ou não adequado.

O primeiro termo relativo à expressão que identifica este critério mostra-se mais favorável aos modelos mais complexos, com um número crescente de parâmetros, que por sua vez influencia o critério de modo adverso. Um termo de correcção foi introduzido ao critério, dando origem ao chamado **AIC Corrigido**. Este novo critério aplica-se quando o número K de parâmetros é muito grande em relação à dimensão n da amostra e é dado pela seguinte expressão:

$$AIC_c(M) = -2 \ln(L(\hat{\theta}|x)) + 2K \frac{n}{n - K - 1}.$$

7.4 Referências

- [4] Burnham, K. P., Anderson, D. R., Model Selection and Multimodel Inference, 2002

Capítulo 8

O Produto

8.1 Descrição do Produto

Em estudo encontra-se um *Produto Financeiro Complexo*, cujo retorno está indexado à evolução do valor do **contrato de futuros** de 3 mercadorias agrícolas, ou *matérias-primas*: *Milho*, *Açúcar* e *Trigo*. O contrato tem o prazo de 3 anos, sujeito a um mecanismo de reembolso antecipado no final de cada semestre que poderá determinar o seu vencimento antes da sua *maturidade*. As seguintes cláusulas são determinantes à evolução do produto, cujo desempenho será observado durante os seis semestres decorrentes da data inicial:

- Se a cotação de fecho do contrato de futuros da Mercadoria com pior desempenho for igual ou superior ao seu Valor Inicial, haverá lugar ao reembolso antecipado do produto ao Valor Nominal, acrescido de um cupão no semestre de 3, 50% sobre o Valor Nominal; i.e., o contrato termina com um reembolso acrescido de 3, 50% sobre o valor investido.
- Se a cotação de fecho do contrato de futuros da Mercadoria com pior desempenho for inferior ao seu Valor Inicial, mas igual ou superior a 65% do seu Valor Inicial, será pago um cupão no semestre de 3, 50% sobre o Valor Nominal e o produto continua para o semestre seguinte; i.e., o contrato continua para o semestre seguinte, com um pagamento de juro de 3, 50% sobre o valor investido.
- Se a cotação de fecho do contrato de futuros da Mercadoria com pior desempenho for inferior a 65% do seu Valor Inicial, não será pago qualquer cupão e o produto continua para o semestre seguinte; i.e., o contrato continua para o semestre seguinte.

A evolução dos preços das matérias primas em questão pode ser observada pelos gráficos apresentados nas *Figuras* 8.1, 8.2 e 8.3.

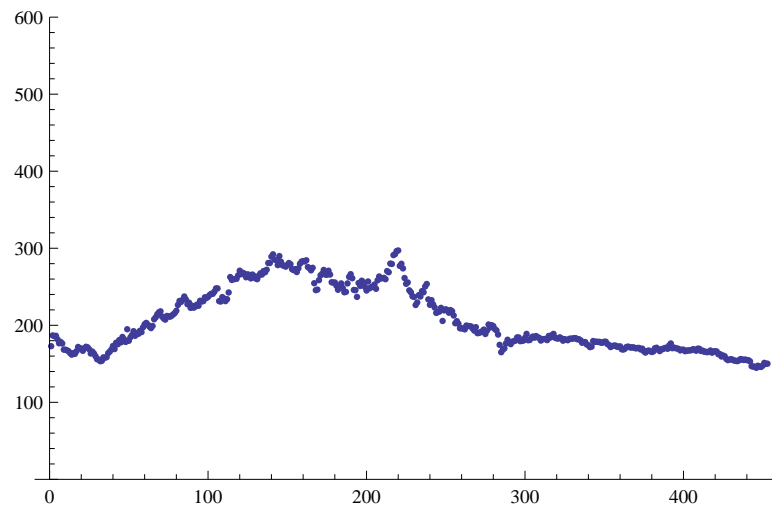


Figura 8.1: Evolução dos Preços do Milho

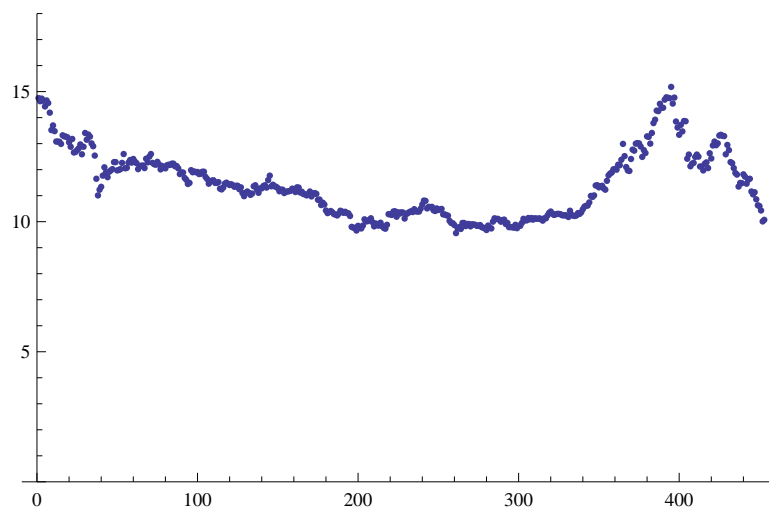


Figura 8.2: Evolução dos Preços do Açúcar

Queremos agora explorar as características do produto em si, tendo em atenção as estatísticas dos valores históricos das matérias-primas.

Os dados históricos correspondem a uma amostra de dimensão $l = 453$ dias e foram organizados em vectores da forma

$$(M_l, A_l, T_l),$$

em que M_l , A_l e T_l correspondem aos preços do *milho*, do *açúcar* e do *trigo* no instante l , respectivamente.

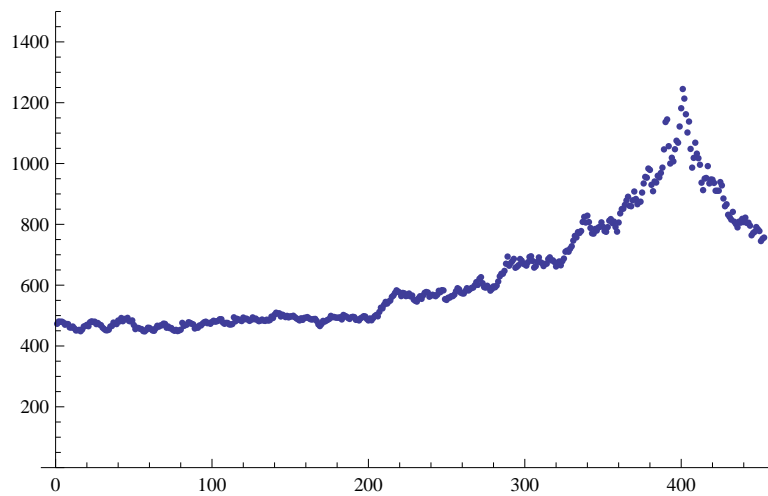


Figura 8.3: Evolução dos Preços do Trigo

Foram estimados o vector média e a matriz de covariâncias:

$$\hat{\underline{\mu}} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 206.44 \\ 11.44 \\ 627.75 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\underline{\Sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36139.6 & -5.38227 & -27646.3 \\ -5.38227 & 1.64088 & 70.2147 \\ -27646.3 & 70.2147 & 34013.2 \end{pmatrix}$$

8.2 Ajustamento dos Modelos e Selecção

O progresso do contrato em questão depende do retorno dos preços simulados ao longo de seis semestres em consonância com as **3 condições de fronteira** discriminadas acima.

Procuramos ajustar os preços históricos aos dois modelos apresentados, pelo que consideramos as 3 variáveis aleatórias

$$X_t^1, X_t^2, X_t^3$$

que representam os preços das matérias-primas **milho**, **açúcar** e **trigo**, respectivamente, no instante t .

Em primeira instância, poderíamos simular os preços individualmente ao longo do tempo recorrendo ao sistema

$$\begin{cases} dX_t^1 = \mu_1 X_t^1 dt + \sigma_1 X_t^1 dB_t^1 \\ dX_t^2 = \mu_2 X_t^2 dt + \sigma_2 X_t^2 dB_t^2 \\ dX_t^3 = \mu_3 X_t^3 dt + \sigma_3 X_t^3 dB_t^3 \end{cases}$$

no caso do *Processo Browniano Geométrico*, ou

$$\begin{cases} dX_t^1 = \alpha_1(\theta_1 - \ln(X_t^1))X_t^1 dt + \sigma_1 X_t^1 dB_t^1 \\ dX_t^2 = \alpha_2(\theta_2 - \ln(X_t^2))X_t^2 dt + \sigma_2 X_t^2 dB_t^2 \\ dX_t^3 = \alpha_3(\theta_3 - \ln(X_t^3))X_t^3 dt + \sigma_3 X_t^3 dB_t^3 \end{cases}$$

no caso do *Processo Ornstein-Uhlenbeck Geométrico* ser o que melhor se ajusta aos dados. Note-se que B_t^j , $j = 1, 2, 3$, é um movimento Browniano.

Contudo, a aplicação destas fórmulas assume o pressuposto de *independência* entre as variáveis aleatórias. Uma análise mais rigorosa obriga ao uso da *função de densidade conjunta* das três matérias-primas.

8.2.1 Escolha do Modelo

Procedamos à determinação do processo que melhor se ajusta aos dados históricos de modo a iniciar a simulação. Para tal, recorreremos ao **AIC**, cuja estatística se recorda abaixo:

$$AIC(M) = -2 \ln(L(\hat{\theta}|x)) + 2K;$$

$\ln(L(\hat{\theta}|x))$ é o valor da função de log-verosimilhança, $\hat{\theta}$ o estimador de máxima verosimilhança de θ e K o número de estimadores do modelo M . Temos então a calcular os valores $AIC(BG)$ e $AIC(OG)$, relativos aos processos Browniano Geométrico e Ornstein-Uhlenbeck Geométrico, respetivamente; opta-se pelo processo cujo valor AIC correspondente seja inferior.

Como já foi referido, tipicamente em análise financeira simula-se os *logaritmos dos preços*, ou mesmo os *logaritmos dos retornos dos preços*, cujas distribuições são Normais e portanto, conhecidas. Note-se ainda que, uma vez não pressuposta a independência entre as três variáveis aleatórias, a função log-verosimilhança a aplicar no teste obtém-se através da *função de densidade de probabilidade conjunta* de uma *distribuição Normal tridimensional*. Esta função é definida por

$$f_{X_i^1, X_i^2, X_i^3}(x_i^1, x_i^2, x_i^3) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 |\Sigma|}} e^{-\frac{1}{2}(x_i - \underline{\mu})\Sigma^{-1}(x_i - \underline{\mu})^T}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

em que:

$$\underline{x}_i = (x_i^1, x_i^2, x_i^3), \quad \underline{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \mu_3), \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix},$$

sendo $\underline{\mu}$ o vector dos valores médios e Σ a matriz de covariâncias.

A correspondente função *log-verosimilhança* obtém-se da forma seguinte:

$$\begin{aligned} & \ln \left(\prod_{i=0}^{n-1} f_{X_i^1, X_i^2, X_i^3}(x_i^1, x_i^2, x_i^3) \right) = \\ & = \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left(f_{X_i^1, X_i^2, X_i^3}(x_i^1, x_i^2, x_i^3) \right) = \\ & = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\ln \left(\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 |\Sigma|}} \right) - \frac{1}{2} (\underline{x}_i - \underline{\mu}) \Sigma^{-1} (\underline{x}_i - \underline{\mu})^T \right) = \\ & = -\frac{n}{2} \ln ((2\pi)^3 |\Sigma|) - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (\underline{x}_i - \underline{\mu}) \Sigma^{-1} (\underline{x}_i - \underline{\mu})^T. \end{aligned}$$

Processo Browniano Geométrico

Para $j = 1, 2, 3$, temos que

$$\begin{array}{llll} X_0^j & \rightarrow & \frac{X_1^j}{X_0^j} & \rightarrow & \ln \left(\frac{X_1^j}{X_0^j} \right) = Y_0^j \\ X_1^j & \rightarrow & \frac{X_2^j}{X_1^j} & \rightarrow & \ln \left(\frac{X_2^j}{X_1^j} \right) = Y_1^j \\ X_2^j & \rightarrow & \frac{X_3^j}{X_2^j} & \rightarrow & \ln \left(\frac{X_3^j}{X_2^j} \right) = Y_2^j \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ X_n^j & \rightarrow & \frac{X_n^j}{X_{n-1}^j} & \rightarrow & \ln \left(\frac{X_n^j}{X_{n-1}^j} \right) = Y_{n-1}^j \end{array}$$

Já vimos que

$$Y_i^j = \ln \left(\frac{X_{i+1}^j}{X_i^j} \right) \sim N \left(\left(\mu_j - \frac{\sigma_j^2}{2} \right) \Delta t_i, \sigma_j^2 \Delta t_i \right), \quad i = 0, \dots, n-1, \quad j = 1, 2, 3.$$

Verifica-se então que

$$(Y_i^1, Y_i^2, Y_i^3) \sim N(\underline{m}_{BG}, \Sigma_{BG}), \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

para $\underline{m}_{BG} = (m_1, m_2, m_3)$, $m_j = \left(\mu_j - \frac{\sigma_j^2}{2}\right) \Delta t_i$, $j = 1, 2, 3$ e Σ_{BG} a matriz de covariâncias.

Temos então a função log-verosimilhança dada por

$$\begin{aligned} \ln \left(\prod_{i=0}^{n-1} f_{Y_i^1, Y_i^2, Y_i^3}(y_i^1, y_i^2, y_i^3) \right) &= \\ &= -\frac{n}{2} \ln((2\pi)^3 |\Sigma_{BG}|) - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (\underline{y}_i - \underline{m}_{BG}) \Sigma_{BG}^{-1} (\underline{y}_i - \underline{m}_{BG})^T, \end{aligned}$$

em que

$$\hat{\underline{m}}_{BG} = \begin{pmatrix} 0.00027105 \\ -0.00084443 \\ 0.00103895 \end{pmatrix}$$

e

$$\hat{\Sigma}_{BG} = \begin{pmatrix} 0.000122449 & 2.04534 \times 10^{-6} & 0.0000655499 \\ 2.04534 \times 10^{-6} & 0.00028272 & 4.64414 \times 10^{-6} \\ 0.0000655499 & 4.64414 \times 10^{-6} & 0.000387376 \end{pmatrix},$$

são os estimadores usuais.

Processo Ornstein-Uhlenbeck Geométrico

A função logaritmo aplicada à variável aleatória preço X_i tem distribuição dada por

$$\ln(X_{i+1}|X_i = x_i) \sim N \left(e^{-\alpha \Delta t_i} \ln(x_i) + \left(\theta - \frac{\sigma^2}{2\alpha} \right) (1 - e^{-\alpha \Delta t_i}), \frac{\sigma^2}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha \Delta t_i}) \right),$$

na qual observamos que o termo condicionante $\ln(X_i)$ não é independente de $\ln(X_{i-1})$.

Seja $j = 1, 2, 3$.

$$\begin{aligned} X_0^j &\rightarrow \ln(X_0^j) = Z_0^j \\ X_1^j &\rightarrow \ln(X_1^j) = Z_1^j \\ X_2^j &\rightarrow \ln(X_2^j) = Z_2^j \\ &\vdots \\ X_n^j &\rightarrow \ln(X_n^j) = Z_n^j \end{aligned}$$

Temos então que

$$Z_{i+1}^j | Z_i^j = z_i^j \sim N \left(e^{-\alpha_j \Delta t_i} z_i^j + \left(\theta_j - \frac{\sigma_j^2}{2\alpha_j} \right) (1 - e^{-\alpha_j \Delta t_i}), \frac{\sigma_j^2}{2\alpha_j} (1 - e^{-2\alpha_j \Delta t_i}) \right),$$

peço que o vector para a média é condicional ao do instante anterior, sendo ainda diferente para as três variáveis aleatórias (o que não se verificou no processo anterior).

$$(Z_i^1, Z_i^2, Z_i^3) \sim N(\underline{m}_{OUG}^i, \Sigma_{OUG})$$

Apresentam-se a matriz de covariâncias

$$\hat{\Sigma}_{OUG} = \begin{pmatrix} 8.72845 & 0.016993 & -0.671576 \\ 0.016993 & 0.0119506 & 0.00588434 \\ -0.671576 & 0.00588434 & 0.07175 \end{pmatrix}$$

e as estimativas γ , α , β e θ necessárias à obtenção da lista de vectores para a média, composta pelos 453 valores correspondentes aos dados históricos.

$$\hat{\underline{m}}_{OUG}^i = \begin{pmatrix} m_1^i \\ m_2^i \\ m_3^i \end{pmatrix}$$

$$\hat{\gamma} = \begin{pmatrix} -0.00878007 \\ 2.32276 \\ 2.32276 \end{pmatrix} \quad \hat{\alpha} = \begin{pmatrix} 0.00393827 \\ 0.00822981 \\ 0.00116773 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} 0.0773761 \\ 0.000282109 \\ 0.000385898 \end{pmatrix} \quad \hat{\theta} = \begin{pmatrix} 9.81483 \\ 2.3399 \\ 7.44303 \end{pmatrix}$$

A função log-verosimilhança é dada por

$$\begin{aligned} \ln \left(\prod_{i=1}^n f_{Z_i^1, Z_i^2, Z_i^3}(z_i^1, z_i^2, z_i^3) \right) &= \\ &= -\frac{n}{2} \ln((2\pi)^3 |\Sigma_{OUG}|) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\underline{z}_i - \underline{m}_{OUG}^i) \Sigma_{OUG}^{-1} (\underline{z}_i - \underline{m}_{OUG}^i)^T. \end{aligned}$$

8.2.2 Aplicação do AIC

Obtidas as *funções de log-verosimilhança* para a *distribuição Normal tridimensional* e conhecidas as estimativas de cada um dos processos, procedemos à aplicação do AIC.

Cálculo do Valor AIC

Note-se que foram estimados seis parâmetros para o *Processo Browniano Geométrico* e nove para o *Processo Ornstein-Uhlenbeck Geométrico*. Os valores obtidos foram os seguintes:

- $AIC(BG)=-7501.68$
- $AIC(OUG)=-390.234$

Dado que o menor valor AIC determina o processo a escolher na simulação, procedemos então com o Processo Browniano Geométrico.

Capítulo 9

Análise do Produto

A evolução do contrato é determinada pelas três condições de fronteira referidas na *secção 8.1*, que apresentamos sinteticamente:

A terminus (reembolso+juro);

B continua (juro);

C continua.

9.1 Análise Teórica

9.1.1 Desenvolvimento do Produto Relativo à Condição A

Os retornos dos preços dos três produtos seguem uma distribuição multinormal de dimensão 3:

$$Y_i = (Y_i^1, Y_i^2, Y_i^3) \sim N(\underline{m}, \Sigma), \quad i = 1, \dots, n.$$

Verifica-se para o caso tridimensional (à semelhança do unidimensional) que

$$\sum_{i=0}^{n-1} Y_i \sim N(n\underline{m}, n\Sigma)$$

uma vez que são variáveis aleatórias independentes. Portanto, uma vez que se considera que um ano tem 240 dias úteis, para os primeiros 120 dias temos

$$\left(\sum_{i=0}^{118} Y_i^1, \sum_{i=0}^{118} Y_i^2, \sum_{i=0}^{118} Y_i^3 \right) \sim N(119\underline{\mu}, 119\Sigma).$$

De acordo com as condições que definem a evolução do produto, é necessário analisar o retorno dos preços entre as datas inicial e final do semestre; por outras palavras, há que obter o retorno $\frac{X_{119}^j}{X_0^j}$, o que equivale a conhecer o logaritmo dos retornos, $\ln \left(\frac{X_{119}^j}{X_0^j} \right)$. Repare-se que

$$\ln \left(\frac{X_{119}^j}{X_0^j} \right) = \ln \left(\frac{X_1^j}{X_0^j} \frac{X_2^j}{X_1^j} \frac{X_3^j}{X_2^j} \dots \frac{X_{119}^j}{X_{118}^j} \right) = \sum_{i=0}^{118} \ln \left(\frac{X_{i+1}^j}{X_i^j} \right), \quad j = 1, 2, 3,$$

e portanto

$$\left(\ln \left(\frac{X_{119}^1}{X_0^1} \right), \ln \left(\frac{X_{119}^2}{X_0^2} \right), \ln \left(\frac{X_{119}^3}{X_0^3} \right) \right) \sim N(119\mu, 119\Sigma)$$

Defina-se a variável aleatória que representa o retorno entre $t = 0$ e $t = k$:

$$M_k^j = \ln \left(\frac{X_k^j}{X_0^j} \right).$$

A Probabilidade de A ocorrer no 1º semestre, quando $k = 119$, usando o *Teorema da Probabilidade Total* ([14]) é dada por

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} [\min(M_{119}^1, M_{119}^2, M_{119}^3) > 0] = \\ & = \mathbb{P} [\min(M_{119}^1, M_{119}^2, M_{119}^3) > 0 \mid \min(M_{119}^1, M_{119}^2, M_{119}^3) = M_{119}^1] \times \\ & \quad \times \mathbb{P}[\min(M_{119}^1, M_{119}^2, M_{119}^3) = M_{119}^1] + \\ & \quad + \mathbb{P} [\min(M_{119}^1, M_{119}^2, M_{119}^3) > 0 \mid \min(M_{119}^1, M_{119}^2, M_{119}^3) = M_{119}^2] \times \\ & \quad \times \mathbb{P}[\min(M_{119}^1, M_{119}^2, M_{119}^3) = M_{119}^2] + \\ & \quad + \mathbb{P} [\min(M_{119}^1, M_{119}^2, M_{119}^3) > 0 \mid \min(M_{119}^1, M_{119}^2, M_{119}^3) = M_{119}^3] \times \\ & \quad \times \mathbb{P}[\min(M_{119}^1, M_{119}^2, M_{119}^3) = M_{119}^3] = \\ & = \mathbb{P} [M_{119}^1 > 0] \mathbb{P}[\min(M_{119}^1, M_{119}^2, M_{119}^3) = M_{119}^1] + \\ & \quad + \mathbb{P} [M_{119}^2 > 0] \mathbb{P}[\min(M_{119}^1, M_{119}^2, M_{119}^3) = M_{119}^2] + \\ & \quad + \mathbb{P} [M_{119}^3 > 0] \mathbb{P}[\min(M_{119}^1, M_{119}^2, M_{119}^3) = M_{119}^3]. \end{aligned}$$

Uma vez que

$$M_{118}^j = \ln \left(\frac{X_{119}^j}{X_0^j} \right) = \sum_{i=0}^{118} \ln \left(\frac{X_{i+1}^j}{X_i^j} \right) \sim N(119\bar{m}^j, 119\Sigma), \quad j = 1, 2, 3,$$

então já vimos que

$$(M_{118}^1, M_{118}^2, M_{118}^3) \sim N(119\bar{m}, 119\Sigma).$$

Observe-se também que

$$\begin{aligned}
\forall t, \mathbb{P} \left[\ln \left(\frac{X_t^j}{X_0^j} \right) > 0 \right] &= \mathbb{P} \left[X_t^j > X_0^j \right] = \\
&= \mathbb{P} \left[X_0^j e^{\left(\mu_j - \frac{\sigma_j^2}{2} \right) t + \sigma_j \Delta B_t} > X_0^j \right] = \\
&= \mathbb{P} \left[\left(\mu_j - \frac{\sigma_j^2}{2} \right) t + \sigma_j \Delta B_t > 0 \right] = \\
&= \mathbb{P} \left[-\frac{\left(\mu_j - \frac{\sigma_j^2}{2} \right) t}{\sigma_j} < \Delta B_t \right] = \\
&= \int_{-\frac{\left(\mu_j - \frac{\sigma_j^2}{2} \right) t}{\sigma_j}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx.
\end{aligned}$$

Podemos então calcular o valor da probabilidade

$$\mathbb{P} \left[\min(M_{119}^1, M_{119}^2, M_{119}^3) > 0 \right],$$

dado por

$$\begin{aligned}
&\int_{-\frac{\left(\mu_1 - \frac{\sigma_1^2}{2} \right) 120}{\sigma_1}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{240\pi}} e^{-\frac{x_1^2}{240}} dx_1 \times \\
&\times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{x_1}^{+\infty} \int_{x_1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 |\Sigma|}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{m})\Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{m})^T} dx_3 dx_2 dx_1 + \\
&+ \int_{-\frac{\left(\mu_2 - \frac{\sigma_2^2}{2} \right) 120}{\sigma_2}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{240\pi}} e^{-\frac{x_2^2}{240}} dx_2 \times \\
&\times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{x_2}^{+\infty} \int_{x_2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 |\Sigma|}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{m})\Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{m})^T} dx_3 dx_1 dx_2 + \\
&+ \int_{-\frac{\left(\mu_3 - \frac{\sigma_3^2}{2} \right) 120}{\sigma_3}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{240\pi}} e^{-\frac{x_3^2}{240}} dx_3 \times \\
&\times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{x_3}^{+\infty} \int_{x_3}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 |\Sigma|}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{m})\Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{m})^T} dx_1 dx_2 dx_3.
\end{aligned}$$

Recorreu-se à aplicação dos métodos numéricos do programa *Mathematica*, que se revelou um processo lento na obtenção da resposta.

A probabilidade de A ocorrer no semestre $k = 2$ é dada por

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}[\min(M_{119}^1, M_{119}^2, M_{119}^3) < 0 \wedge \min(M_{239}^1, M_{239}^2, M_{239}^3) > 0] = \\
& = \mathbb{P}[\min(M_{119}^1, M_{119}^2, M_{119}^3) < 0 \wedge \min(M_{239}^1, M_{239}^2, M_{239}^3) > 0 \mid \\
& \quad \mid \min(M_{119}^1, M_{119}^2, M_{119}^3) = M_{119}^1 \wedge \min(M_{239}^1, M_{239}^2, M_{239}^3) = M_{239}^1] \times \\
& \times \mathbb{P}[\min(M_{119}^1, M_{119}^2, M_{119}^3) = M_{119}^1 \wedge \min(M_{239}^1, M_{239}^2, M_{239}^3) = M_{239}^1] + \\
& + \mathbb{P}[\min(M_{119}^1, M_{119}^2, M_{119}^3) < 0 \wedge \min(M_{239}^1, M_{239}^2, M_{239}^3) > 0 \mid \\
& \quad \mid \min(M_{119}^1, M_{119}^2, M_{119}^3) = M_{119}^1 \wedge \min(M_{239}^1, M_{239}^2, M_{239}^3) = M_{239}^2] \times \\
& \times \mathbb{P}[\min(M_{119}^1, M_{119}^2, M_{119}^3) = M_{119}^1 \wedge \min(M_{239}^1, M_{239}^2, M_{239}^3) = M_{239}^2] + \\
& + \mathbb{P}[\min(M_{119}^1, M_{119}^2, M_{119}^3) < 0 \wedge \min(M_{239}^1, M_{239}^2, M_{239}^3) > 0 \mid \\
& \quad \mid \min(M_{119}^1, M_{119}^2, M_{119}^3) = M_{119}^1 \wedge \min(M_{239}^1, M_{239}^2, M_{239}^3) = M_{239}^3] \times \\
& \times \mathbb{P}[\min(M_{119}^1, M_{119}^2, M_{119}^3) = M_{119}^1 \wedge \min(M_{239}^1, M_{239}^2, M_{239}^3) = M_{239}^3] + \\
& + \mathbb{P}[\min(M_{119}^1, M_{119}^2, M_{119}^3) < 0 \wedge \min(M_{239}^1, M_{239}^2, M_{239}^3) > 0 \mid \\
& \quad \mid \min(M_{119}^1, M_{119}^2, M_{119}^3) = M_{119}^2 \wedge \min(M_{239}^1, M_{239}^2, M_{239}^3) = M_{239}^1] \times \\
& \times \mathbb{P}[\min(M_{119}^1, M_{119}^2, M_{119}^3) = M_{119}^2 \wedge \min(M_{239}^1, M_{239}^2, M_{239}^3) = M_{239}^1] + \\
& + \mathbb{P}[\min(M_{119}^1, M_{119}^2, M_{119}^3) < 0 \wedge \min(M_{239}^1, M_{239}^2, M_{239}^3) > 0 \mid \\
& \quad \mid \min(M_{119}^1, M_{119}^2, M_{119}^3) = M_{119}^2 \wedge \min(M_{239}^1, M_{239}^2, M_{239}^3) = M_{239}^2] \times \\
& \times \mathbb{P}[\min(M_{119}^1, M_{119}^2, M_{119}^3) = M_{119}^2 \wedge \min(M_{239}^1, M_{239}^2, M_{239}^3) = M_{239}^2] + \\
& + \mathbb{P}[\min(M_{119}^1, M_{119}^2, M_{119}^3) < 0 \wedge \min(M_{239}^1, M_{239}^2, M_{239}^3) > 0 \mid \\
& \quad \mid \min(M_{119}^1, M_{119}^2, M_{119}^3) = M_{119}^2 \wedge \min(M_{239}^1, M_{239}^2, M_{239}^3) = M_{239}^3] \times \\
& \times \mathbb{P}[\min(M_{119}^1, M_{119}^2, M_{119}^3) = M_{119}^2 \wedge \min(M_{239}^1, M_{239}^2, M_{239}^3) = M_{239}^3] + \\
& + \mathbb{P}[\min(M_{119}^1, M_{119}^2, M_{119}^3) < 0 \wedge \min(M_{239}^1, M_{239}^2, M_{239}^3) > 0 \mid \\
& \quad \mid \min(M_{119}^1, M_{119}^2, M_{119}^3) = M_{119}^3 \wedge \min(M_{239}^1, M_{239}^2, M_{239}^3) = M_{239}^1] \times \\
& \times \mathbb{P}[\min(M_{119}^1, M_{119}^2, M_{119}^3) = M_{119}^3 \wedge \min(M_{239}^1, M_{239}^2, M_{239}^3) = M_{239}^1] + \\
& + \mathbb{P}[\min(M_{119}^1, M_{119}^2, M_{119}^3) < 0 \wedge \min(M_{239}^1, M_{239}^2, M_{239}^3) > 0 \mid \\
& \quad \mid \min(M_{119}^1, M_{119}^2, M_{119}^3) = M_{119}^3 \wedge \min(M_{239}^1, M_{239}^2, M_{239}^3) = M_{239}^2] \times \\
& \times \mathbb{P}[\min(M_{119}^1, M_{119}^2, M_{119}^3) = M_{119}^3 \wedge \min(M_{239}^1, M_{239}^2, M_{239}^3) = M_{239}^2] + \\
& + \mathbb{P}[\min(M_{119}^1, M_{119}^2, M_{119}^3) < 0 \wedge \min(M_{239}^1, M_{239}^2, M_{239}^3) > 0 \mid \\
& \quad \mid \min(M_{119}^1, M_{119}^2, M_{119}^3) = M_{119}^3 \wedge \min(M_{239}^1, M_{239}^2, M_{239}^3) = M_{239}^3] \times \\
& \times \mathbb{P}[\min(M_{119}^1, M_{119}^2, M_{119}^3) = M_{119}^3 \wedge \min(M_{239}^1, M_{239}^2, M_{239}^3) = M_{239}^3] = \\
& = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \mathbb{P}[M_{119}^i < 0 \wedge M_{239}^j > 0] \times \\
& \times \mathbb{P}[\min(M_{119}^1, M_{119}^2, M_{119}^3) = M_{119}^i \wedge \min(M_{239}^1, M_{239}^2, M_{239}^3) = M_{239}^j]
\end{aligned}$$

Podemos desde já inferir que este tipo de abordagem faz-se acompanhar de um certo grau de complexidade. Pensando no cálculo seguinte, a probabilidade de A ocorrer no 3º semestre será dada por uma expressão da forma

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{q=1}^3 \mathbb{P}[M_{119}^i < 0 \wedge M_{239}^j < 0 \wedge M_{359}^q > 0] \times \\ \times \mathbb{P}[\min(M_{119}^1, M_{119}^2, M_{119}^3) = M_{119}^i \wedge \min(M_{239}^1, M_{239}^2, M_{239}^3) = M_{239}^j \wedge \\ \wedge \min(M_{359}^1, M_{359}^2, M_{359}^3) = M_{359}^q],$$

em que temos a somar 27 parcelas.

Observa-se que o número de parcelas a somar no cálculo de probabilidades semestrais segue uma progressão geométrica da forma 3^k , $k = 1, \dots, 6$.

Uma vez que os métodos numéricos aplicados na obtenção da probabilidade referente ao 1º semestre são de resposta lenta e observando a complexidade crescente de cálculo ao longo dos restantes semestres e os meios computacionais disponíveis, conclui-se que esta análise será muito pouco vantajosa do ponto de vista prático.

Decidimos prosseguir a análise do contrato recorrendo a **métodos de Monte Carlo**.

9.2 Análise Empírica

9.2.1 Simulação do Produto

Simularam-se 10000 contratos para os 3 anos correspondentes ao prazo definido. Considerou-se que cada mês tem aproximadamente 20 dias úteis e que existem 5 feriados ao ano. Assim, cada ano terá 240 dias úteis, pelo que cada semestre é constituído por 120 dias.

Geração de Vectores Multinormais de Dimensão 3

Recorremos à função

$$MultinormalDistribution[\mu, \Sigma]$$

do programa *Mathematica*, a qual permite gerar vectores multinormais de dimensão 3; cada coordenada corresponde ao *logaritmo do retorno do preço* de cada uma das matérias-primas.

Aplicação das Cláusulas Referentes ao Contrato

Construiu-se uma lista de 720 vectores por cada simulação e determinou-se em cada semestre o valor mínimo de entre os três logaritmos dos retornos dos preços entre a data inicial e a data referente ao semestre em questão;

por outras palavras, calculou-se para cada t_k tal que $t_k = 120k$, $k = 1, \dots, 6$, o valor

$$\min \left(\frac{X_{120k}^1}{X_0^1}, \frac{X_{120k}^2}{X_0^2}, \frac{X_{120k}^3}{X_0^3} \right), k = 1, \dots, 6.$$

Identificou-se a matéria-prima correspondente a cada um destes valores e foi obtido o seu preço em cada semestre, ou seja, em cada t_k , $k = 1, \dots, 6$. Estes preços foram analisados tendo em vista as 3 condições de fronteira do contrato.

O processo acima foi efectuado para as 10000 simulações realizadas, construindo-se semestralmente histogramas que descrevem a evolução do produto. Criou-se também uma tabela de probabilidades correspondente.

9.2.2 Análise dos Resultados

Observe-se a tabela de probabilidades relativa aos estados A, B e C:

	1º	2º	3º	4º	5º
A	0.15	0.16	0.14	0.12	0.09
B	0.81	0.50	0.28	0.16	0.09
C	0.04	0.19	0.27	0.28	0.26

Tabela 9.1: Evolução Percentual Semestral

A probabilidade da situação *A* ocorrer, entre o primeiro semestre e o terceiro, inclusivé, mantém-se sensivelmente na ordem dos 15 pontos percentuais; decresce até aos 8% observados à data de observação final.

A probabilidade do caso *B* é bastante elevada à primeira data de observação, 81%, decrescendo consideravelmente durante os semestres seguintes; no segundo semestre atinge ainda os 50%, sendo que no último é inferior a 10%.

A probabilidade de *C* não atinge cinco pontos percentuais à primeira data de observação, crescendo até ao quarto semestre onde atinge o valor máximo de 28%; é decrescente no último semestre, terminando nos 26%.

No geral, conclui-se que:

- **Ao longo do tempo de vida do contrato, a probabilidade do produto passar ao semestre seguinte é decrescente. No primeiro semestre é de 85%, onde apenas em 4% dos casos não há qualquer pagamento.**

- No terceiro semestre existe ainda uma probabilidade superior a 50% do contrato não terminar, sendo a diferença entre os dois valores em questão de apenas 1 ponto percentual.
- O contrato atinge a maturidade em 35% dos casos, 9% dos quais com pagamento de juro.

Capítulo 10

Análise de Sensibilidade

10.1 Alteração dos Limites de Fronteira

Na presente secção alteramos ligeiramente o contrato, fazendo variar o limite percentual de fronteira inferior. Analisamos dois casos.

- Percentagem do limite inferior: 60%

As probabilidades de evolução semestral dos 10000 contratos simulados podem ser observadas na tabela seguinte:

	1º	2º	3º	4º	5º
A	0.15	0.16	0.14	0.12	0.09
B	0.84	0.58	0.35	0.20	0.12
C	0.01	0.11	0.21	0.24	0.23

Tabela 10.1: Evolução Percentual Semestral

Em *A* não se verificam alterações relativamente à tabela analisada anteriormente uma vez que só o limite inferior foi alterado.

Como na situação anterior, há uma tendência de decréscimo no *caso B* durante os 3 anos, sendo bastante acentuada no terceiro semestre, com 35% de valor. A probabilidade é também muito alta no início, sendo que atinge sensivelmente os 12 pontos percentuais no final no quinto semestre.

A *situação C* tem uma probabilidade quase nula na primeira observação; apresenta uma evolução sensivelmente constante a partir do terceiro semestre, inclusivé, terminando com 23% de probabilidade no quinto semestre.

Concluimos que a redução do limite inferior não gera alterações ao contrato em *A*. Como seria de esperar, *caso B* é ligeiramente fa-

vorecido relativamente ao caso anterior, reduzindo a probabilidade da *situação C*. Contudo, as probabilidades semestrais do contrato continuar para o semestre seguinte são exactamente as mesmas excepto no terceiro semestre, onde há um pequeno acréscimo de 3 pontos percentuais.

- Percentagem do limite inferior: 70%

Os resultados são os seguintes:

	1º	2º	3º	4º	5º
A	0.15	0.16	0.14	0.12	0.09
B	0.76	0.43	0.23	0.13	0.07
C	0.09	0.26	0.32	0.31	0.27

Tabela 10.2: Evolução Percentual Semestral

Relativamente às duas situações analisadas anteriormente, a probabilidade de *B* ocorrer diminui. No primeiro semestre, atinge ainda sensivelmente os 76%, reduzindo para 43% na data de observação seguinte e registando-se apenas 7 pontos percentuais no quinto semestre.

Por outro lado, o *caso C* apresenta maiores níveis probabilísticos, sensivelmente de 10% à primeira data de observação e chegando aos 32% no terceiro semestre; termina nos 27%.

As alterações dos valores nas situações *B* e *C* são novamente opostas, o que é natural uma vez que o caso *A* não se altera.

Conclui-se que o aumento percentual do limite inferior favorece a situação em que não há qualquer pagamento sob a forma de juro ou reembolso, o que se acentua até ao quarto semestre, inclusivé.

Podemos concluir os seguintes factos:

- Não se verifica qualquer alteração no caso *A*; a probabilidade do contrato terminar não passa dos 16%, atingindo à quinta data de observação o valor mínimo de 9%.
- A probabilidade de pagamento de juro é sempre muito alta no início do contrato, sendo que diminui acentuadamente a partir do quarto semestre, inclusivé.
- A partir do terceiro semestre há uma grande tendência para não se verificar a situação de qualquer pagamento.

- As probabilidades de ocorrência dos 3 casos são praticamente as mesmas no que diz respeito ao contrato original e às respectivas alterações; verifica-se apenas uma pequena flutuação de sensivelmente 3 pontos percentuais à terceira e quinta datas de observação.
- A alteração do limite inferior para 70% permite que o número de casos em que não há qualquer pagamento de juro seja ligeiramente superior.

10.2 Alteração das Volatilidades

Definimos novas matrizes de correlação, aumentando os valores das variâncias σ_{XX} , σ_{YY} , σ_{ZZ} , pelo que a diagonal da matriz de covariância é a única afectada na geração dos preços.

O desempenho do contrato é analisado em cada caso ao longo dos 6 semestres.

- **Alteração 1:** $2\sigma_{XX}, 2\sigma_{YY}, 2\sigma_{ZZ}$

	1º	2º	3º	4º	5º
A	0.15	0.18	0.15	0.12	0.08
B	0.71	0.40	0.23	0.18	0.11
C	0.14	0.27	0.29	0.22	0.30

Tabela 10.3: Alteração 1

O *caso A* mantém-se com valores próximos das situações já analisadas.

No primeiro semestre, os *casos A* e *C* apresentam valores muito próximos, contrariamente ao que acontece às datas restantes.

Verifica-se um decréscimo considerável da probabilidade em *B* entre a primeira e a segunda datas de observação; na segunda, atinge um valor de 40%, o que não se havia ainda verificado.

- **Alteração 2:** $3\sigma_{XX}, 3\sigma_{YY}, 3\sigma_{ZZ}$

Nesta situação, não existem alterações a evidenciar relativamente à anterior.

- **Alteração 3:** $5\sigma_{XX}, 5\sigma_{YY}, 5\sigma_{ZZ}$

	1º	2º	3º	4º	5º
A	0.14	0.19	0.15	0.13	0.09
B	0.64	0.34	0.27	0.11	0.07
C	0.22	0.33	0.25	0.28	0.23

Tabela 10.4: Alteração 2

	1º	2º	3º	4º	5º
A	0.14	0.20	0.17	0.13	0.09
B	0.53	0.28	0.15	0.09	0.06
C	0.33	0.39	0.35	0.28	0.23

Tabela 10.5: Alteração 3

As probabilidades relativas ao *caso A* no segundo e terceiro semestres são ligeiramente superiores àquelas observadas nas situações anteriores.

A probabilidade em *B* está muito próxima dos 50% já no primeiro semestre, o que ainda não se tinha verificado em qualquer uma das situações analisadas; esta probabilidade é novamente decrescente, diminuindo para 28 pontos percentuais já no segundo semestre e chegando aos 6 na data de observação final.

O *caso C* apresenta inicialmente uma probabilidade superior a 30%, o que é também algo de novo; atinge uma probabilidade de 35% no terceiro semestre e termina na ordem dos 23%.

• **Alteração 4:** $10\sigma_{XX}, 10\sigma_{YY}, 10\sigma_{ZZ}$

	1º	2º	3º	4º	5º
A	0.14	0.20	0.17	0.13	0.08
B	0.38	0.20	0.11	0.06	0.04
C	0.48	0.46	0.38	0.30	0.24

Tabela 10.6: Alteração 4

O *caso A* não apresenta quaisquer alterações de relevância relativamente à situação anterior.

O *caso B* atinge os valores mais baixos registados até agora; não chega a atingir os 40% no primeiro semestre, sendo que nas duas últimas datas ronda os 5%.

As probabilidades em *C* aumentam novamente; na primeira data de ob-

servação o valor está muito próximo de 50%, reduzindo para metade no quinto semestre, sendo que no terceiro a probabilidade é ainda de 38%.

Conclusões:

- À medida que os valores das volatilidades aumentam, a probabilidade do contrato atingir a maturidade sem a ocorrência de pagamento de juro semestral segue a mesma tendência.
- A probabilidade de vencimento do contrato antes da sua maturidade está sensivelmente entre 8% e 20% em qualquer dos casos analisados.
- Com excepção da última alteração contratual, a probabilidade de haver pagamento de juro é a mais elevada no primeiro semestre e superior a 50%; tem tendência a decrescer, terminando com um valor inferior a 15% em todas as situações.

Capítulo 11

Considerações Finais

Os estudos relativos à Análise Financeira exigem hoje uma grande dedicação a nível intelectual. A grande evolução do estudo sobre Investimentos, conduzido pelo extraordinário desenvolvimento do cálculo estocástico, aliada ao elevado crescimento de informação e às tecnologias computacionais, levaram à expansão global da actividade financeira. É um dos temas da actualidade, objecto de vários debates que são amplamente divulgados pela comunicação social.

Este trabalho pretendeu dar a conhecer os princípios fundamentais que moldam os mercados financeiros, sendo analisado um produto financeiro particular.

A rigorosa teoria exposta assenta em conceitos matemáticos, cuja explicação é dada à luz da Teoria das Finanças. Note-se que esta teoria expressa-se na sua grande parte em linguagem matemática, sendo que alguns dos seus aspectos podem apenas ser representados em terminologia matemática.

É de salientar a aplicação da Fórmula de Itô no tratamento das equações diferenciais estocásticas, que proporciona as expressões dos processos estocásticos que modelam os *valores dos preços*.

Actualmente, segue-se um critério no processo de ajustamento de modelos; seria uma boa aposta futura o desenvolvimento de um método que atribua um grau de ajustamento aos modelos em questão.

Dada a complexidade do *contrato* em estudo, não foi possível uma análise puramente teórica, pelo que se recorreu a simulação. Os Métodos de Monte-Carlo permitiram tirar as conclusões que se seguem sobre a evolução do Produto:

- As probabilidades de vencimento antes da maturidade são muito próximas, quer no contrato inicial, quer nas subsequentes alterações; no primeiro semestre é em média de 15% e chega a atingir os 20 pontos percentuais no segundo, decrescendo até rondar os 9%.
- A probabilidade semestral de não haver reembolso antecipado é superior a 50% até à quarta data de observação, inclusivé.
- A alteração do limite inferior para 70% aumenta a probabilidade de não haver pagamento de juro a partir do terceiro semestre, inclusivé.
- É mais provável que não haja qualquer pagamento de juro, desde a primeira data de observação, quando se dá um aumento das volatilidades para um valor dez vezes superior ao inicial.

Apêndice A

Histogramas Obtidos

Apresentam-se os histogramas relativos às *Tabelas 9.1 e 10.1 - 10.6*, respectivamente. Cada figura é composta por 6 histogramas, correspondentes aos 6 semestres, sendo em cada um apresentadas as frequências absolutas dos estados *A*, *B* e *C*, por esta ordem.

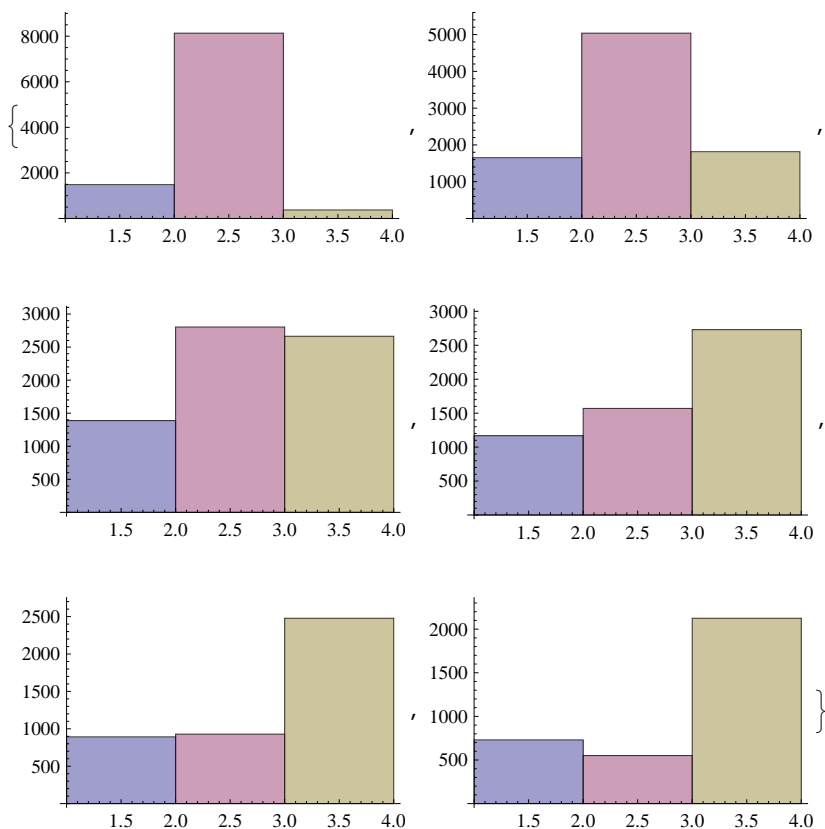


Figura A.1: Histograma 1: Produto Simulado

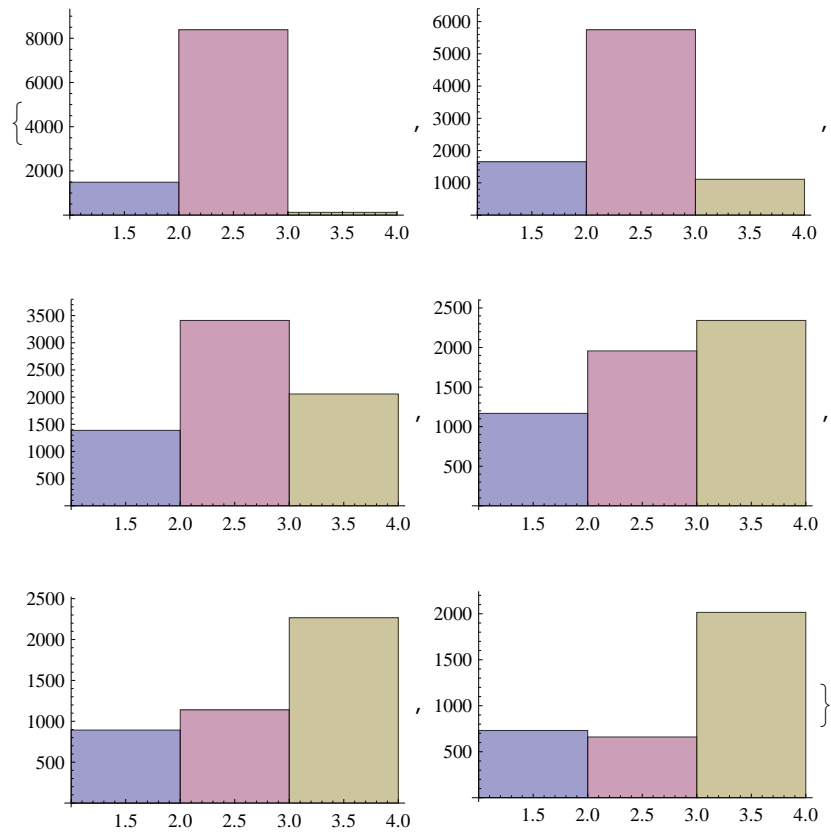


Figura A.2: Histograma 2: Limite Inferior: 60%

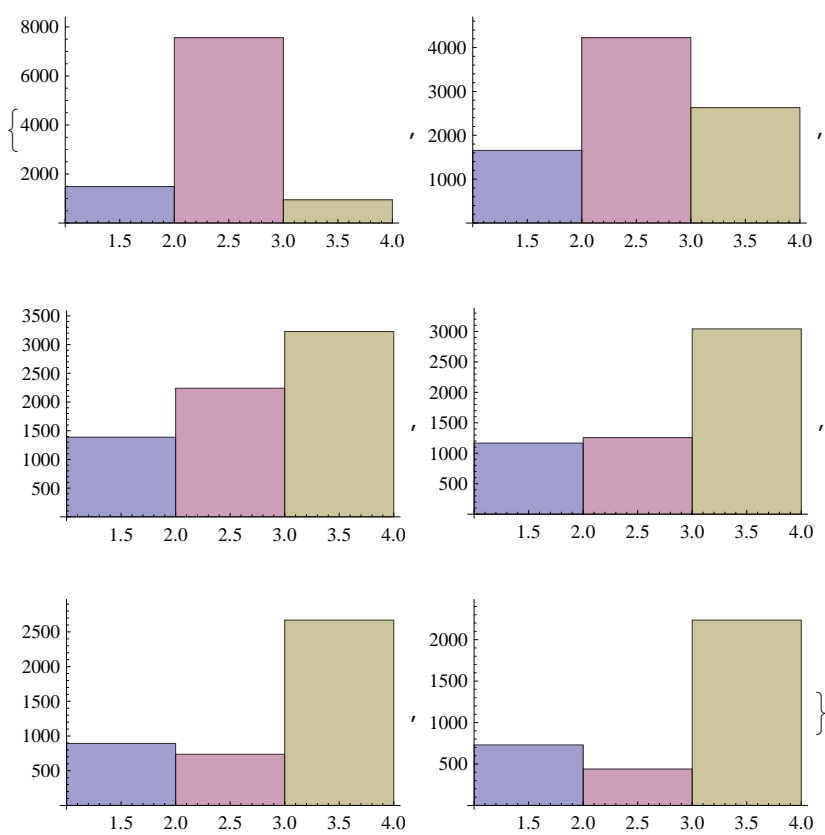


Figura A.3: Histograma 3: Limite Inferior: 70%

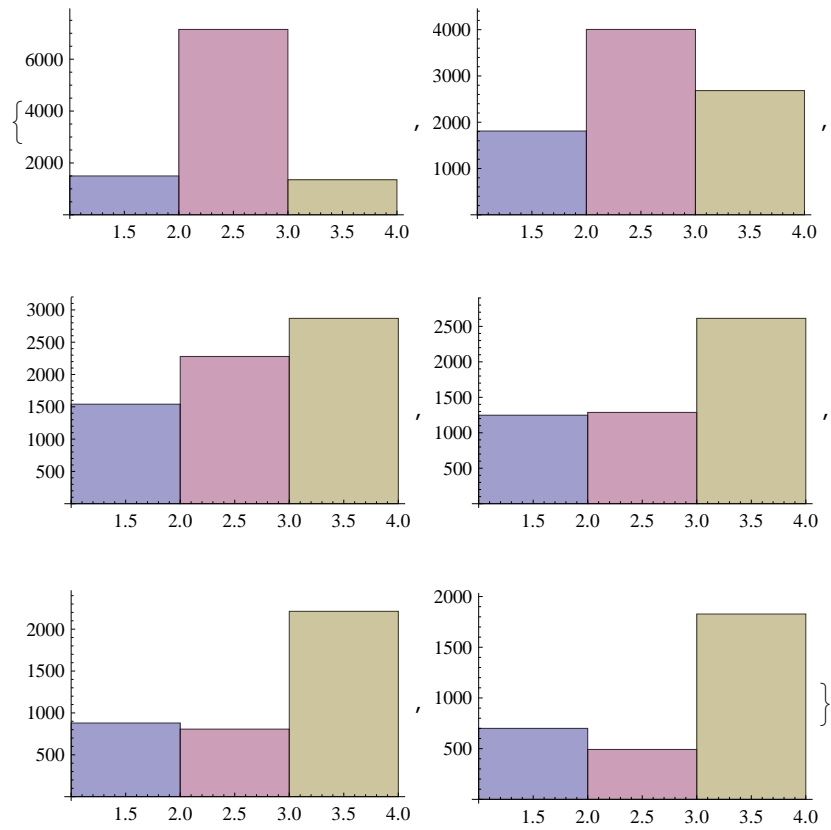


Figura A.4: Histograma 4: $2\sigma_{XX}, 2\sigma_{YY}, 2\sigma_{ZZ}$

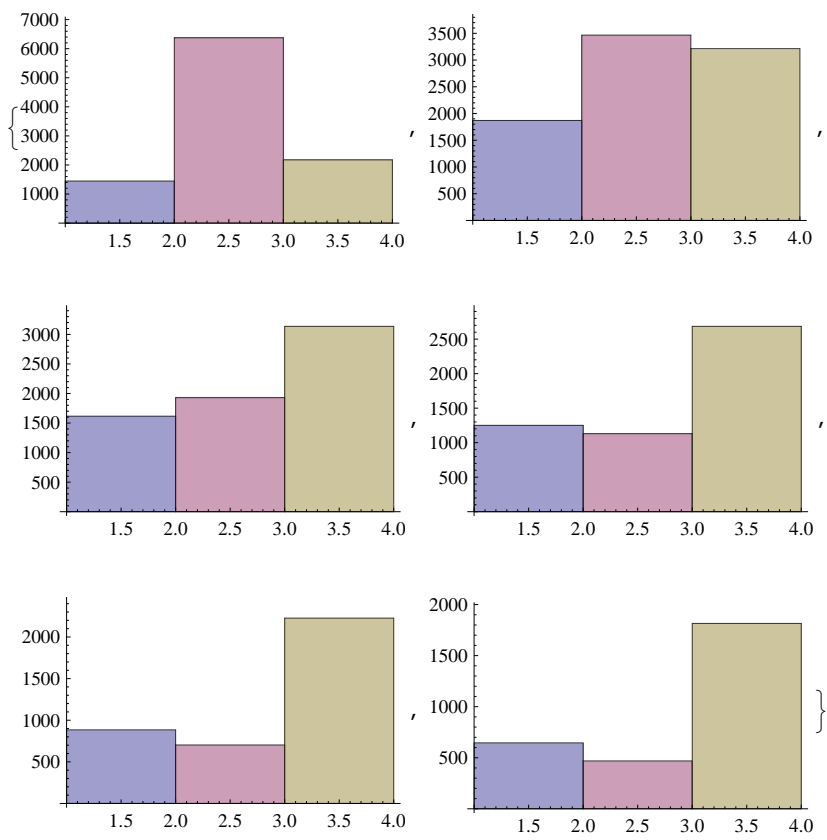


Figura A.5: Histograma 5: $3\sigma_{XX}, 3\sigma_{YY}, 3\sigma_{ZZ}$

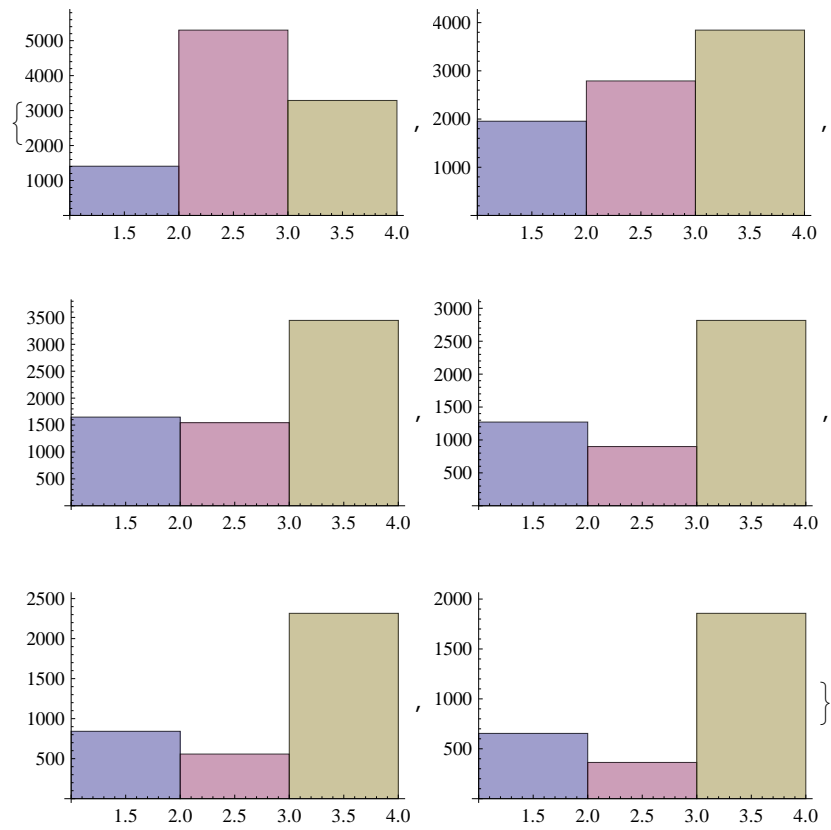


Figura A.6: Histograma 6: $5\sigma_{XX}, 5\sigma_{YY}, 5\sigma_{ZZ}$

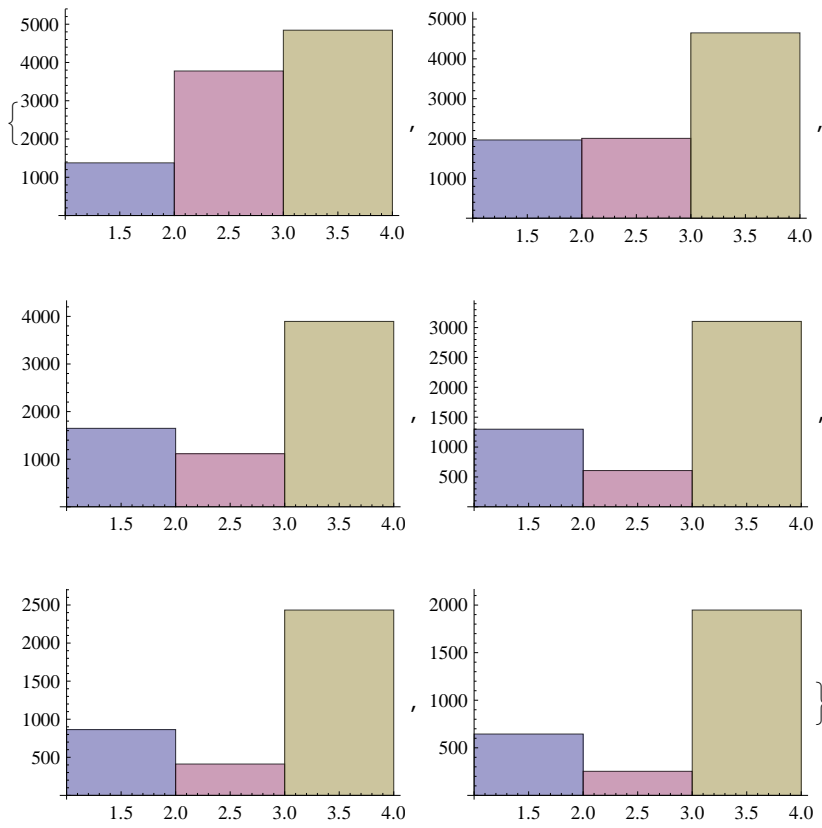


Figura A.7: Histograma 7: $10\sigma_{XX}, 10\sigma_{YY}, 10\sigma_{ZZ}$

Apêndice B

Distribuição Multinormal

B.1 Definição e características

A distribuição Multinormal é muito importante em análise financeira, uma vez que inclui uma diversidade de aplicações nomeadamente mean-variance analysis e asset allocation, sendo também fulcral ao Movimento Browniano e à Fórmula de Black-Scholes.

Definição B.1.1 *Um vector n -dimensional \mathbf{X} tem **distribuição multinormal** com **vector médio** μ e **matriz de covariâncias** Σ sse a sua função de densidade é dada por*

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |\Sigma|}} e^{-\frac{1}{2}(x - \mu)^T \Sigma^{-1} (x - \mu)}.$$

Nestas condições, escreve-se

$$\mathbf{X} \sim MN_n(\mu, \Sigma)$$

sendo que n representa a dimensão de \mathbf{X} .

Se $\mu = \mathbf{0}$ e $\Sigma = \mathbf{I}_n$, i.e., quando $\mathbf{X} \sim MN_n(\mathbf{0}, \mathbf{I}_n)$, dizemos que X tem **distribuição Multinormal Reduzida**. Neste caso, verifica-se que X_i são *independentes* uma vez que a distribuição de densidade conjunta é o produto das distribuições marginais: $f_X(x) = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{(2\pi)^n} e^{-\frac{x_i^2}{2}}$

Proposição B.1.1 *A função geradora de momentos de \mathbf{X} é da forma*

$$M_X(s) = \mathbb{E}[e^{s^T X}] = e^{\mu^T s + \frac{1}{2} s^T \Sigma s}.$$

Proposição B.1.2 *A distribuição marginal de um vector aleatório multinormal é normal.*

Proposição B.1.3 *A distribuição condicional de uma distribuição multinormal é também multinormal.*

Particularizando novamente, $\mathbf{X}_2 | \mathbf{X}_1 = \mathbf{x}_1 \sim \text{MN}(\boldsymbol{\mu}_{21}, \boldsymbol{\Sigma}_{21})$, onde $\boldsymbol{\mu}_{21} = \boldsymbol{\mu}_2 + \boldsymbol{\Sigma}_{21}\boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1}(\mathbf{x}_1 - \boldsymbol{\mu}_1)$ e $\boldsymbol{\Sigma}_{21} = \boldsymbol{\Sigma}_{22} + \boldsymbol{\Sigma}_{21}\boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{12}$.

Proposição B.1.4 *A combinação linear $\mathbf{AX} + \mathbf{B}$ de um vector multinormal \mathbf{X} tem também distribuição multinormal de vector médio $\mathbf{A}\mathbb{E}[\mathbf{X}] + \mathbf{B}$ e matriz de covariâncias $\mathbf{ACov}(\mathbf{X})\mathbf{A}^T$.*

B.2 Simulação de vectores multinormais

O algoritmo seguinte¹ permite gerar vectores com distribuição Normal de média $\boldsymbol{\mu}$ e matriz de covariâncias $\boldsymbol{\Sigma}$:

1. Gerar o vector \mathbf{x} : $x_i \sim N(0, 1)$.
2. Obter as matrizes Φ e Λ , $m \times m$. As colunas de Φ são constituídas pelos vectores próprios normalizados de $\boldsymbol{\Sigma}$; a matriz Λ é uma matriz diagonal construída através dos valores próprios de $\boldsymbol{\Sigma}$, colocados na ordem correspondente às colunas de Φ .
3. Calcular $\mathbf{y} = \mathbf{Q}\mathbf{x} + \boldsymbol{\mu}$, em que $\mathbf{Q} = \Lambda^{\frac{1}{2}}\Phi$; o vector \mathbf{y} segue uma distribuição multinormal de parâmetros $\boldsymbol{\mu}$ e $\boldsymbol{\Sigma}$.

¹István T. Hernádvölgyi, 1998. Generating Random Vectors From the Multivariate Normal Distribution

Apêndice C

Movimento Browniano

O Movimento Browniano é um processo tipicamente usado em análise financeira, estando por detrás da metodologia da modelação da conhecida fórmula de Black-Scholes.

C.1 Definição

Definição C.1.1 *Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidades. Um processo estocástico é uma **função mensurável** $X(t, \omega)$ definida no **espaço produto** $[0, +\infty[\times \Omega$.*

Em particular, verifica-se que:

- para cada t fixo, $X(t, \cdot)$ é uma variável aleatória:
 $X(t, \cdot) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$
 $\omega \rightarrow X(t, \omega)$ é uma variável aleatória;
- para cada w fixo, $X(\cdot, w)$ é uma função mensurável, designada de caminho ou trajectória:
 $X(\cdot, \omega) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$
 $t \rightarrow X(t, \omega)$ é uma trajectória.

Por conveniência, o processo $X(t, \omega)$ escreve-se $X(t)$ ou X_t .

Definição C.1.2 *Um processo estocástico $B(t, \omega)$ diz-se um **Movimento Browniano** se verifica as seguintes propriedades:*

- (i) $\mathbb{P}(\{\omega : B(0, \omega) = 0\}) = 1$, i.e., as trajectórias partem em zero q.s.;
- (ii) $\forall 0 \leq s < t, \forall a < b$,

$$P(a \leq B(t) - B(s) \leq b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2(t-s)}} dx,$$

i.e., a variável aleatória $B(t) - B(s)$ tem distribuição Normal com média 0 e variância $t - s$;

(iii) $\forall 0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$, $B(t_1), B(t_2) - B(t_1), \dots, B(t_n) - B(t_{n-1})$ são independentes, i.e., $B(t, \omega)$ tem incrementos independentes;

(iv) $\mathbb{P}(\{\omega : B(\cdot, \omega) \text{ cont\u00ednua}\}) = 1$ i.e. as traject\u00f3rias $B(t, \omega)$ s\u00e3o fun\u00e7\u00f5es cont\u00ednuas q.s..

C.2 Propriedades do Movimento Browniano

C.2.1 Propriedades Gerais

Seja $B(t)$ um movimento Browniano. As propriedades apresentadas de seguida seguem directamente da defini\u00e7\u00e3o de movimento Browniano.

Proposi\u00e7\u00e3o C.2.1

- $\forall t > 0$, $B(t)$ segue uma distribui\u00e7\u00e3o Normal com m\u00e9dia 0 e vari\u00e2ncia t , i.e., $B(t) \sim \mathcal{N}(0, t)$
- $\forall s, t \geq 0$, $\mathbb{E}[B(s)B(t)] = \min(s, t)$

Proposi\u00e7\u00e3o C.2.2 Invari\u00e2ncia por Transla\u00e7\u00e3o

Para $t_0 \geq 0$ fixo, o processo estoc\u00e1stico $\tilde{B}(t) = B(t + t_0) - B(t_0)$ \u00e9 um movimento Browniano.

Nota C.2.1 *Esta propriedade significa que um movimento Browniano d\u00e1 lugar a um novo movimento Browniano em qualquer momento.*

Proposi\u00e7\u00e3o C.2.3 Invari\u00e2ncia Escalar

$\forall \lambda > 0$ real, o processo estoc\u00e1stico $\tilde{B}(t) = \frac{B(\lambda t)}{\sqrt{\lambda}}$ \u00e9 um movimento Browniano.

Nota C.2.2 *Como consequ\u00eancia desta propriedade, tem-se que $\forall \lambda > 0$, $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$, os vectores aleat\u00f3rios $(B(\lambda t_1), B(\lambda t_2), \dots, B(\lambda t_n))$ e $(\sqrt{\lambda}B(t_1), \sqrt{\lambda}B(t_2), \dots, \sqrt{\lambda}B(t_n))$ t\u00eam a mesma distribui\u00e7\u00e3o.*

C.2.2 Propriedade de Markov

Sabemos que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[B(t_1) \leq a_1, B(t_2) \leq a_2, \dots, B(t_n) \leq a_n] &= \\
&= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n t_1(t_2 - t_1) \dots (t_n - t_{n-1})}} \times \\
&\times \int_{-\infty}^{a_n} \dots \int_{-\infty}^{a_2} \int_{-\infty}^{a_1} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x_1^2}{t_1} + \frac{(x_2 - x_1)^2}{t_2 - t_1} + \dots + \frac{(x_n - x_{n-1})^2}{t_n - t_{n-1}} \right)} dx_1 dx_2 \dots dx_n = \\
&= \int_{-\infty}^{a_n} \dots \int_{-\infty}^{a_2} \int_{-\infty}^{a_1} f_{(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})}(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n
\end{aligned}$$

A Lei da Probabilidade Total diz-nos que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[X_t \in A] &= \mathbb{P}[X_t \in A | X_{t_1} = x_1, X_{t_2} = x_2, \dots, X_{t_n} = x_n] \times \\
&\times \mathbb{P}[X_{t_1} = x_1, X_{t_2} = x_2, \dots, X_{t_n} = x_n]
\end{aligned}$$

em que X_t é um processo estocástico e $t_1 < t_2 < \dots < t_n$, portanto

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[X_t \in A | X_{t_1} = x_1, X_{t_2} = x_2, \dots, X_{t_n} = x_n] &= \\
&= \int_A \frac{f_{(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}, X_t)}(x_1, x_2, \dots, x_n, y)}{f_{(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})}(x_1, x_2, \dots, x_n)} dy = \\
&= \frac{\int_A f_{(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}, X_t)}(x_1, x_2, \dots, x_n, y) dy}{f_{(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})}(x_1, x_2, \dots, x_n)}.
\end{aligned}$$

No caso do processo X_t ser Browniano, tem-se

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[B_t \in B | B_{t_1} = x_1, B_{t_2} = x_2, \dots, B_{t_n} = x_n] &= \\
&= \frac{\int_B f_{(B_{t_1}, B_{t_2}, \dots, B_{t_n}, B_t)}(x_1, x_2, \dots, x_n, y) dy}{f_{(B_{t_1}, B_{t_2}, \dots, B_{t_n})}(x_1, x_2, \dots, x_n)}
\end{aligned}$$

Observe-se agora que

$$\begin{aligned}
f_{(B_{t_1}, B_{t_2}, \dots, B_{t_n}, B_t)}(x_1, x_2, \dots, x_n, y) &= \\
&= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{n+1} t_1(t_2 - t_1) \dots (t_n - t_{n-1})(t - t_n)}} \times \\
&\times e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x_1^2}{t_1} + \frac{(x_2 - x_1)^2}{t_2 - t_1} + \dots + \frac{(x_n - x_{n-1})^2}{t_n - t_{n-1}} + \frac{(y - x_n)^2}{t - t_n} \right)}
\end{aligned}$$

e que

$$\begin{aligned}
f_{(B_{t_1}, B_{t_2}, \dots, B_{t_n})}(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \\
&= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n t_1(t_2 - t_1) \dots (t_n - t_{n-1})}} \times \\
&\times e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x_1^2}{t_1} + \frac{(x_2 - x_1)^2}{t_2 - t_1} + \dots + \frac{(x_n - x_{n-1})^2}{t_n - t_{n-1}} \right)}
\end{aligned}$$

logo

$$\frac{f_{(B_{t_1}, B_{t_2}, \dots, B_{t_n}, B_t)}(x_1, x_2, \dots, x_n, y)}{f_{(B_{t_1}, B_{t_2}, \dots, B_{t_n})}(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-t_n)}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(y-x_n)^2}{t-t_n}}.$$

Dado que

$$\mathbb{P}[B_t \in B | B_{t_n} = x_n] = \frac{\int_B f_{(B_{t_n}, B_t)}(x_n, y) dy}{f_{B_{t_n}}(x_n)}$$

e uma vez que

$$\frac{f_{(B_{t_n}, B_t)}(x_n, y)}{f_{B_{t_n}}(x_n)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 t_n(t-t_n)}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x_n^2}{t_n} + \frac{(y-x_n)^2}{t-t_n} \right)}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi t_n}} e^{-\frac{1}{2} \frac{x_n^2}{t_n}}} = \frac{e^{-\frac{1}{2} \frac{(y-x_n)^2}{t-t_n}}}{\sqrt{2\pi(t-t_n)}}$$

conclui-se a seguinte relação:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[B_t \in B | B_{t_1} = x_1, B_{t_2} = x_2, \dots, B_{t_n} = x_n] &= \\ &= \int_B \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-t_n)}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(y-x_n)^2}{t-t_n}} dy = \\ &= \mathbb{P}[B_t \in B | B_{t_n} = x_n]. \end{aligned}$$

Nesta situação, em que $\mathbb{P}[B_t \in B | B_{t_1} = x_1, B_{t_2} = x_2, \dots, B_{t_n} = x_n] = \mathbb{P}[B_t \in B | B_{t_n} = x_n]$, dizemos que B_t satisfaz a **Propriedade de Markov**.

C.2.3 Propriedade de Martingala

Definição C.2.1 *Seja T um intervalo em \mathbb{R} ou o conjunto dos inteiros positivos. A uma família crescente de σ -álgebras $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t : t \in T\}$ chamamos **Filtração** em T ; o processo estocástico $X_t, t \in T$, diz-se adaptado à filtração \mathbb{F} , ou simplesmente **\mathbb{F} -adaptado**, sse $\forall_{t \in T} X_t$ é \mathcal{F}_t -mensurável.*

Definição C.2.2 *O processo estocástico $X_t, t \in T$ diz-se uma **Martingala** relativamente à filtração \mathbb{F} se são verificadas as seguintes propriedades:*

- 1) X_t é \mathbb{F} -adaptado
- 2) $X_t \in \mathcal{L}^1(\Omega)$
- 3) $\forall_{\substack{s, t \in T \\ s \leq t}} \mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s$ q.s.

$X_t, t \in T$, diz-se uma **submartingala** ou uma **supermartingala**, quando substituímos a última expressão pela desigualdade $\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s] \geq X_s$ ou $\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s] \leq X_s$, respectivamente.

Prova-se que o movimento Browniano é uma martingala relativamente à filtração $\mathcal{F}_t = \sigma(\{B(s) : s \leq t\})$:

1) $\forall_t B(t)$ é \mathcal{F}_t -mensurável

2) Pela *Desigualdade de Schwarz*, $\mathbb{E}[|B(t)|] \leq \left(\int_{\Omega} |B(t)|^2 d\mathbb{P} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} 1^2 d\mathbb{P} \right)^{\frac{1}{2}} =$
 $\mathbb{E}[|B(t)|^2] \Rightarrow$
 $\Rightarrow \mathbb{E}[|B(t)|] \leq (\mathbb{E}[|B(t)|^2])^{\frac{1}{2}} = (\mathbb{V}[B(t)])^{\frac{1}{2}} = t^{\frac{1}{2}} < \infty$

3) $\forall_{\substack{s, t \in T \\ s \leq t}} \mathbb{E}[B_t|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[(B_t - B_s) + B_s|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[\underbrace{(B_t - B_s)}_{\text{indep de } \mathcal{F}_s}] + \mathbb{E}[\underbrace{B_s}_{\in \mathcal{F}_s}|\mathcal{F}_s] =$
 $\underbrace{\mathbb{E}[B_t - B_s]}_0 + B_s = B_s$

Apêndice D

O Integral Estocástico

D.1 Definição do Integral Estocástico

O nosso objectivo é definir o integral da forma

$$\int_a^b f(t) dB(t)$$

em que $B(t; \omega)$ é um *movimento Browniano* e $f(t)$ uma *variável aleatória* e não uma *função determinista*, como é o caso do *Integral de Wiener*. A abordagem seguida é muito semelhante àquela adoptada para definir este integral, mas há que ter em consideração a diferença crucial que distingue estes dois integrais: o facto de f ser, ou não, uma *função determinista*.

Fixamos um *movimento Browniano* $B(t)$ e uma *filtração* $\{\mathcal{F}_t : a \leq t \leq b\}$ tais que:

- $\forall t, B(t)$ é \mathcal{F}_t -mensurável;
- $\forall s \leq t, B(t) - B(s)$ é independente da σ -álgebra \mathcal{F}_s .

Definimos também o novo espaço, $L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$, o qual contém todos os processos estocásticos $f(t, \omega)$, $a \leq t \leq b$, $\omega \in \Omega$, e que satisfaz:

- $f(t, \omega)$ é $\{\mathcal{F}_t\}$ -adaptado;
- $\int_a^b \mathbb{E}[|f(t)|^2] dt < \infty$.

Vamos então definir o integral $\int_a^b f(t) dB(t)$, com $f \in L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$. A análise que se segue relativa a este integral divide-se em três etapas.

1)

Seja f um *processo estocástico em escada* em $L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$; f é da forma

$$f(t, \omega) = \sum_{i=1}^n \xi_{i-1}(\omega) \mathbb{1}_{[t_{i-1}, t_i]}(t)$$

em que ξ_{i-1} é \mathcal{F}_{t-1} -mensurável e $\mathbb{E}[\xi_{i-1}^2] < \infty$. Define-se então

$$I(f) = \sum_{i=1}^n \xi_{i-1} (B(t_{i-1}) - B(t_i))$$

pelo *Integral Estocástico* de f .

Lemma D.1.1 *Seja $I(f) = \sum_{i=1}^n \xi_{i-1} (B(t_{i-1}) - B(t_i))$. Então tem-se que:*

i) $\mathbb{E}[I(f)] = 0$;

ii) $\mathbb{E}[|I(f)|^2] = \int_a^b \mathbb{E}[|f(t)|^2] dt$.

2)

Lemma D.1.2 *Seja $f \in L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$. Então existe uma sucessão de processos estocásticos em escada $\{f_n(t) : n \geq 1\}$ em $L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$ tal que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \mathbb{E}[|f_n(t) - f(t)|^2] dt = 0.$$

3)

Considera-se finalmente o caso $f \in L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$, que permite definir o *Integral Estocástico*, também denominado de *Integral de Itô*:

Definição D.1.1 *Define-se o **Integral de Itô** de $f \in L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$ pela expressão*

$$I(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b I(f_n) dB(t),$$

denotado por $\int_a^b f(t) dB(t)$.

Nota D.1.1 *A aplicação $I(f)$, $f \in L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$, é **linear**, i.e.*

$$\forall_{a, b \in \mathbb{R}} \forall_{f, g \in L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)} I(f + g) = I(f) + I(g).$$

D.1.1 Resultados Importantes

Teorema D.1.3 *O Integral de Itô é uma **martingala** relativamente à filtração $\{\mathcal{F}_t : a \leq t \leq b\}$*

Temos então a provar que, se $f \in L_{ad}^2([a, d] \times \Omega)$, então o processo estocástico $X_t = \int_a^t f(s) dB(s)$ é uma *martingala* relativamente a $\{\mathcal{F}_t\}$.

Seja $f \in L_{ad}^2([a, d] \times \Omega)$; então existe uma sucessão de processos estocásticos em escada $\{f_n\}_{n=1}^\infty \in L_{ad}^2([a, d] \times \Omega)$ tal que

$$f_n \longrightarrow f \in L_{ad}^2([a, d] \times \Omega)$$

i.e.

$$\int_a^b \mathbb{E} [|f_n(u) - f(u)|^2] du \longrightarrow 0.$$

O *integral estocástico* de f_n é dado por $X_t^{(n)} = \int_a^t f_n(u) dB(u) \forall n \in \mathbb{N}$.

$$\forall_{s < t} X_t - X_s = (X_t - X_t^{(n)}) + (X_t^{(n)} - X_s^{(n)}) + (X_s^{(n)} - X_s) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[X_t - X_s | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[X_t - X_t^{(n)} | \mathcal{F}_s] + \underbrace{\mathbb{E}[X_t^{(n)} - X_s^{(n)} | \mathcal{F}_s]}_{\mathbb{E}[X_t^{(n)} - X_s^{(n)}] = 0} +$$

$$+ \mathbb{E}[X_s^{(n)} - X_s | \mathcal{F}_s] =$$

$$= \mathbb{E}[X_t - X_t^{(n)} | \mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[X_s^{(n)} - X_s | \mathcal{F}_s]$$

$$\text{Se } \mathbb{E}[X_t - X_s | \mathcal{F}_s] = 0 \Leftrightarrow \mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] - \underbrace{\mathbb{E}[X_s | \mathcal{F}_s]}_{X_s} = 0 \Leftrightarrow \mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] =$$

X_s i.e., X_t é uma *martingala*.

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left| \mathbb{E}[X_t - X_t^{(n)} | \mathcal{F}_s] \right|^2 \right] &\stackrel{\text{Des. Jensen}}{\leq} \mathbb{E} \left[\mathbb{E}[|X_t - X_t^{(n)}|^2 | \mathcal{F}_s] \right] \stackrel{\mathbb{E}[\mathbb{E}[X | \mathcal{G}] = \mathbb{E}[X]]}{=} \\ &= \mathbb{E} \left[|X_t - X_t^{(n)}|^2 \right] = \\ &= \int_a^t \mathbb{E} [|f(u) - f_n(u)|^2] \leq \\ &\leq \int_a^b \mathbb{E} [|f(u) - f_n(u)|^2] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \mathbb{E}[X_t - X_t^{(n)} | \mathcal{F}_s] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ q.s.}$$

Utilizando o mesmo processo, verificamos que

$$\mathbb{E}[X_s - X_s^{(n)} | \mathcal{F}_s] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ q.s.}$$

Temos então que $\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s$ e portanto X_t é uma *martingala*.

Teorema D.1.4 *Seja $f \in L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$. O Integral Estocástico, dado pelo processo*

$$X_t = \int_a^t f(s) dB(s)$$

tem trajectórias contínuas quase seguramente no intervalo $[a, b]$.

Seja f_n um processo estocástico em escada:

$$f_k(s, \omega) = \sum_{i=1}^k \xi_{i-1}(\omega) \mathbb{1}_{[t_{i-1}, t_i]}(s);$$

note-se que ξ_{i-1} é $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$ -mensurável. Temos que

$$X_t^n(\omega) = \sum_{i=1}^{k-1} \xi_{i-1}(\omega)(B(t_i) - B(t_{i-1})) + \xi_{k-1}(\omega)(B(t_k) - B(t_{k-1})).$$

O movimento Browniano tem trajectórias contínuas quase seguramente; X_t é uma combinação linear de funções contínuas q.s. e então, para quase todo o ω , as trajectórias $X_{(\cdot)}(\omega)$ são contínuas em $[a, b]$.

Seja agora $f \in L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$; então

$$\exists \{f_k\}_{k=1}^\infty \in L_{ad}^2([a, b] \times \Omega) : \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \mathbb{E} [|f_n(t) - f(t)|^2] dt = 0$$

Sabemos que X_t^n e X_t são martingalas, pelo que $X_t^n - X_t$ é uma martingala. Pela Desigualdade de Submartingala de Doob,

$$\mathbb{P} \left[\sup_{a \leq t \leq b} |X_t^n - X_t| \geq \frac{1}{n} \right] \leq n \mathbb{E} [|X_b^n - X_b|],$$

e pela Desigualdade de Schwarz,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [|X_b^n - X_b|] &\leq (\mathbb{E} [|X_b^n - X_b|^2])^{\frac{1}{2}} = \\ &= \left(\int_a^b \mathbb{E} [|f_k(s) - f(s)|^2] ds \right)^{\frac{1}{2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \mathbb{E} [|f_n(t) - f(t)|^2] dt = 0$, podemos escrever

$$\int_a^b \mathbb{E} [|f_n(s) - f(s)|^2] ds < \frac{1}{n^6}, \forall n \geq 1.$$

Temos então que

$$\mathbb{P} \left[\sup_{a \leq t \leq b} |X_t^n - X_t| \geq \frac{1}{n} \right] \leq \frac{1}{n^2}$$

Uma vez que $\sum_n \frac{1}{n^2} < \infty$, pelo Lema de Borel-Cantelli,

$$\mathbb{P} \left[\sup_{a \leq t \leq b} |X_t^n - X_t| \geq \frac{1}{n} \text{ n.i.p.} \right] = 0.$$

Observando o complementar do conjunto $\{A_n \text{ n.i.p.}\}$, podemos concluir que

$$\mathbb{P} \left[\sup_{a \leq t \leq b} |X_t^n - X_t| \geq \frac{1}{n} \text{ n.f.p.} \right] = 1.$$

Temos então que $\exists \Omega_0 : \mathbb{P}[\Omega_0] = 1$ tal que, $\forall \omega \in \Omega_0$, a partir de certa ordem $N(\omega)$,

$$\sup_{a \leq t \leq b} |X_t^n(\omega) - X_t(\omega)| < \frac{1}{n}, \forall n \geq N(\omega)$$

Por outras palavras, $X_t^n(\omega)$ converge uniformemente para $X_t(\omega)$ em $[a, b]$, $\forall \omega \in \Omega_0$.

Mas $\forall n$, $X_{(\cdot)}^n(\omega)$ é contínua q.s., i.e. $\exists \Omega_n : \mathbb{P}[\Omega_n] = 1 : X_{(\cdot)}^n(\omega)$ é contínua $\forall \omega \in \Omega_n$.

Fazendo $\Omega_\cap = \cap_{n=0}^\infty \Omega_n$, onde $\mathbb{P}[\Omega_\cap] = 1$, temos que, $\forall \omega \in \Omega_\cap$, $\{X_{(\cdot)}^n(\omega)\}_{n=1}^\infty$ é uma sucessão de funções contínuas que converge uniformemente para $X_{(\cdot)}(\omega)$.

D.2 A Fórmula de Itô

Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^2$; a expansão de Taylor de f é dada por:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0 + \lambda(x - x_0))(x - x_0)^2, \lambda \in]0, 1[.$$

Note-se que

$$f(B(t)) - f(B(a)) = \sum_{i=1}^n (f(B(t_i)) - f(B(t_{i-1})))$$

Aplicando novamente a expansão de Taylor a $f(x)$ em $B(t_i)$, temos para $0 < \lambda < 1$,

$$f(B(t_i)) = f(B(t_{i-1})) + f'(B(t_{i-1}))(B(t_i) - B(t_{i-1})) + \\ + \frac{1}{2!} f''(B(t_{i-1}) + \lambda(B(t) - B(t_{i-1}))) (B(t_i) - B(t_{i-1}))^2,$$

ou seja,

$$f(B(t_i)) - f(B(t_{i-1})) = f'(B(t_{i-1}))(B(t_i) - B(t_{i-1})) + \\ + \frac{1}{2} f''(B(t_{i-1}) + \lambda(B(t) - B(t_{i-1}))) (B(t_i) - B(t_{i-1}))^2.$$

Aplique-se o somatório em n à expressão anterior:

$$\underbrace{f(B(t)) - f(B(a))}_{\int_a^t df(B(s))} = \sum_{i=1}^n f'(B(t_{i-1}))(B(t_i) - B(t_{i-1})) + \\ + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} f''(B(t_{i-1}) + \lambda(B(t) - B(t_{i-1}))) (B(t_i) - B(t_{i-1}))^2$$

Temos o seguintes resultados:

$$\sum_{i=1}^n f'(B(t_{i-1}))(B(t_i) - B(t_{i-1})) \xrightarrow{\|\Delta_n\| \rightarrow 0} \int_a^t f'(B(s)) dB(s) \text{ em proba-} \\ \text{bilidade;} \\ \sum_{i=1}^n f''(B(t_{i-1}) + \lambda(B(t) - B(t_{i-1}))) (B(t_i) - B(t_{i-1}))^2 \xrightarrow{\|\Delta_n\| \rightarrow 0} \int_a^t f''(B(s)) ds.$$

Podemos então enunciar a **Fórmula de Itô**:

Teorema D.2.1 *Se $f \in C^2$, então*

$$f(B(t)) - f(B(a)) = \int_a^t f'(B(s)) dB(s) + \frac{1}{2} \int_a^t f''(B(s)) ds$$

em que $\int_a^t f'(B(s)) dB(s)$ é o integral de Itô e $\int_a^t f''(B(s)) ds$ é o integral de Riemann para cada trajetória $B(s)$.

A Fórmula de Itô pode ser expressa de forma analítica:

$$df(B(t)) = f'(B(t))dB(t) + \frac{1}{2} f''(B(t))dt$$

No caso $f = f(t, x)$ tem-se:

$$df(t, B(t)) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, B(t))dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, B(t))dB(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, B(t))dt$$

Definição D.2.1 *Chama-se **Processo de Itô** a um processo estocástico X_t da forma*

$$X_t = X_a + \int_a^t f(s) dB(s) + \int_a^t g(s) ds$$

com $t \in [a, b]$, em que $f = f(t, w) \in \mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^2([a, b]))$ e $g = g(t, w) \in \mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^1([a, b]))$.

Na sua forma diferencial, o processo de Itô X_t é dado por

$$dX_t = f(t)dB(t) + g(t)dt.$$

Teorema D.2.2 *Seja X_t um processo de Itô e considere-se a função $\theta \in C^2$. Então X_t é um **processo de Itô**.*

Este resultado diz-nos que, compondo uma função de classe C^2 com um Browniano, obtemos um Processo de Itô.

Apresenta-se de seguida uma demonstração simbólica deste resultado:

Se $f = f(t, x)$, já vimos que:

$$df(t, B(t)) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, B(t))dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, B(t))dB(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, B(t))dt.$$

Neste caso, com $\theta = \theta(t, x)$ e X_t temos que

$$\begin{aligned} \underbrace{d\theta(t, X_t)}_{Y_t} &= \frac{\partial \theta}{\partial t}(t, X_t)dt + \frac{\partial \theta}{\partial x}(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}(t, X_t)dt = \\ &= \left(\underbrace{\frac{\partial \theta}{\partial t}(t, X_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}(t, X_t)}_{g(t)} \right) dt + \underbrace{\frac{\partial \theta}{\partial x}(t, X_t)}_{f(t)} dX_t. \end{aligned}$$

Aplicando a expansão de Taylor a $\theta = \theta(t, x)$, verifica-se que:

$$d\theta(t, X_t) = \frac{\partial \theta}{\partial t}(t, X_t)dt + \frac{\partial \theta}{\partial x}(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}(t, X_t)(dX_t)^2$$

Observe-se agora o seguinte resultado:

\times	$dB(t)$	dt
$dB(t)$	dt	0
dt	0	0

Então,

$$\begin{aligned} (dX_t)^2 &= (f(t)dB(t) + g(t)dt)^2 = \\ &= (f(t)dB(t))^2 + 2(f(t)dB(t)g(t)dt) + (g(t)dt)^2 = \\ &= f^2(t) \underbrace{(dB(t))^2}_{dt} + 2 \underbrace{(f(t)g(t)dB(t)dt)}_0 + \underbrace{g^2(t)(dt)^2}_0 = \\ &= f^2(t)dt \end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{aligned}
d\theta(t, X_t) &= \frac{\partial\theta}{\partial t}(t, X_t)dt + \frac{\partial\theta}{\partial x}(t, X_t)(f(t)dB(t) + g(t)dt) + \\
&\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}(t, X_t)(f(t)dB(t) + g(t)dt)^2 = \\
&= \frac{\partial\theta}{\partial t}(t, X_t)dt + \frac{\partial\theta}{\partial x}(t, X_t)f(t)dB(t) + \frac{\partial\theta}{\partial x}(t, X_t)g(t)dt + \\
&\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}(t, X_t)f^2(t)dt = \\
&= \left(\underbrace{\frac{\partial\theta}{\partial t}(t, X_t) + \frac{\partial\theta}{\partial x}(t, X_t)g(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}(t, X_t)f^2(t)}_{\tilde{g}(t)} \right) dt + \\
&\quad + \underbrace{\frac{\partial\theta}{\partial x}(t, X_t)f(t)}_{\tilde{f}(t)} dB(t)
\end{aligned}$$

Tem-se finalmente que $dY_t = d\theta(t, X_t) = \tilde{f}(t)dB(t) + \tilde{g}(t)dt$.

Teorema D.2.3 *Seja $f \in L^2_{ad}([a, b] \times \Omega)$. Então o integral de Itô dado por $\int_a^b f(t) dB_t$ é uma variável aleatória que verifica as duas propriedades:*

- $\mathbb{E}[\int_a^b f(t) dB_t] = 0$;
- $\mathbb{E} \left[\left| \int_a^b f(t) dB_t \right|^2 \right] = \int_a^b E[|f(t)|^2] ds$, conhecida por **Isometria de Itô**.

Apêndice E

Teorema de Existência e Unicidade

Apresenta-se nesta secção o *Teorema de Existência e Unicidade de uma Equação Diferencial Estocástica*.

Considerem-se o movimento Browniano $B(t)$ e a filtração $\{\mathcal{F}_t : a \leq t \leq b\}$ tais que:

- $B(t)$ é $\{\mathcal{F}_t\}$ -mensurável $\forall t$;
- $B(t) - B(s)$ é independente de $\{\mathcal{F}_s\} \forall s \leq t$

Sejam $\sigma(t, x)$ e $f(t, x)$ funções mensuráveis de $t \in [a, b]$ e $x \in \mathbb{R}$.

A equação integral estocástica, EIE,

$$X_t = \xi + \int_a^t \sigma(s, X_s) dB(s) + \int_a^t f(s, X_s) ds, \quad a \leq t \leq b$$

pode ser representada pela seguinte equação diferencial estocástica - EDE:

$$dX_t = \sigma(t, X_t) dB(t) + f(t, X_t) dt, \quad a \leq t \leq b.$$

Definição E.0.2 Um processo estocástico X_t , $a \leq t \leq b$ diz-se uma solução da EIE acima se satisfaz:

- $\sigma(t, X_t) \in \mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^2[a, b])$;
- as trajectórias de $f(t, X_t) \in L^1[a, b]$ q.s.
- X_t verifica-se q.s.

Considerem-se as seguintes definições:

Definição E.0.3 *Condição de Lipschitz*

Diz-se que uma função mensurável $g(t, x)$ em $[a, b] \times \mathbb{R}$ **satisfaz a condição de Lipschitz** em x se existe uma constante $K > 0$ tal que

$$|g(t, x) - g(t, y)| \leq K|x - y|, \forall a \leq t \leq b, x, y \in \mathbb{R}$$

Definição E.0.4 *Condição de Crescimento Linear*

Diz-se que uma função mensurável $g(t, x)$ em $[a, b] \times \mathbb{R}$ **satisfaz a condição de Crescimento Linear** em x se existe uma constante $K > 0$ tal que

$$|g(t, x)| \leq K(1 + |x|), \forall a \leq t \leq b, x \in \mathbb{R}$$

Lemma E.0.4 *Sejam $\sigma(s, x)$ e $f(t, x)$ funções mensuráveis em $[a, b] \times \mathbb{R}$ que satisfazem a condição de Lipschitz; considere-se a v.a. ξ \mathcal{F}_a -mensurável tal que $\mathbb{E}[\xi^2] < \infty$. Então, a EIE apresentada tem no máximo uma solução contínua X_t .*

Sejam X_t e Y_t duas soluções contínuas da EIE indicada:

$$\begin{aligned} X_T &= \xi + \int_a^t \sigma(s, X_s) dB(s) + \int_a^t f(s, X_s) ds \\ Y_T &= \xi + \int_a^t \sigma(s, Y_s) dB(s) + \int_a^t f(s, Y_s) ds \end{aligned}$$

e seja

$$Z_t = X_t - Y_t = \int_a^t (\sigma(s, X_t) - \sigma(s, Y_t)) dB(s) + \int_a^t (f(s, X_t) - f(s, Y_t)) ds$$

É válida a expressão $(a + b)^2 \leq (a^2 + b^2)$, pelo que

$$\begin{aligned} Z_t^2 &\leq 2 \left[\left(\int_a^t (\sigma(s, X_t) - \sigma(s, Y_t)) dB(s) \right)^2 \right] + \\ &\quad + 2 \left[\left(\int_a^t (f(s, X_t) - f(s, Y_t)) ds \right)^2 \right] \\ \mathbb{E}[Z_t^2] &\leq 2 \mathbb{E} \left[\left(\int_a^t (\sigma(s, X_t) - \sigma(s, Y_t)) dB(s) \right)^2 \right] + \\ &\quad + \mathbb{E} \left[\left(\int_a^t (f(s, X_t) - f(s, Y_t)) ds \right)^2 \right] \end{aligned}$$

$$\sigma \text{ é Lipschitz} \Rightarrow |\sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s)| \leq K|X_s - Y_s|$$

$$f \text{ é Lipschitz} \Rightarrow |f(s, X_s) - f(s, Y_s)| \leq K|X_s - Y_s|$$

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left[\left(\int_a^t (\sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s)) dB(s) \right)^2 \right] = \\
& = \int_a^t \mathbb{E} \left[\underbrace{(\sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s))^2}_{\leq K|X_s - Y_s|} \right] ds \leq \\
& \leq \int_a^t \mathbb{E} [K^2 |X_s - Y_s|^2] ds = \\
& = K^2 \int_a^t \mathbb{E} [|Z_s|^2] ds,
\end{aligned}$$

pelo que

$$\begin{aligned}
& \int_a^t (f(s, X_t) - f(s, Y_t)) ds \stackrel{\substack{\text{Des.} \\ \text{Schwarz}}}{\leq} \\
& \leq \left(\int_a^t |1|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^t |f(s, X_t) - f(s, Y_t)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left[\left(\int_a^t (f(s, X_t) - f(s, Y_t)) ds \right)^2 \right] \leq \\
& \leq \mathbb{E} \left[(t-a) \int_a^t \underbrace{(f(s, X_t) - f(s, Y_t))^2}_{K|X_s - Y_s|} ds \right] \leq \\
& \leq E [(t-a)K^2 |X_s - Y_s|^2] = \\
& \leq (b-a)K^2 E [|Z_s|^2]
\end{aligned}$$

Obtivemos então a seguinte desigualdade:

$$\mathbb{E}[Z_t^2] \leq 2K^2(b-a+1) \int_a^t E[Z_s^2] ds.$$

Verifica-se que a expressão acima satisfaz a desigualdade dada por

$$\phi(t) \leq f(t) + \beta \int_a^t \phi(s) ds, \forall t \in [a, b],$$

em que $\phi, f \in L^1[a, b]$ e β uma constante positiva. No nosso caso, temos que:

$$\phi = \mathbb{E}[Z_t^2], \quad \beta = 2K^2(b-a+1), \quad f(s) = 0.$$

Sabemos que, se ϕ satisfaz $\phi(t) \leq f(t) + \beta \int_a^t \phi(s) ds$, então

$$\phi(t) \leq f(t) + \beta \int_a^t f(s) e^{\beta(t-s)} ds$$

i.e., ϕ satisfaz a **Desigualdade de Bellman-Gronwall**. Tem-se portanto

$$\mathbb{E}[Z_t^2] \leq 0 + 2K^2(b-a+1) \int_a^t 0e^{2K^2(b-a+1)(t-s)} ds$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z_t^2] \leq 0 &\implies E[Z_t^2] = 0, \forall t \in [a, b] \implies \\ &\implies Z_t = 0 \text{ q.s. } \forall t \in [a, b] \implies \\ &\iff \exists C_t : \mathbb{P}[C_t] = 1 : \forall \omega \in C_t, X_t(\omega) = Y_t(\omega) \end{aligned}$$

Uma vez que C_t depende de t , o conjunto $\cap C_t$ não é numerável, pelo que não é necessariamente um conjunto com probabilidade 1. Temos então a construir um outro conjunto com probabilidade 1 em que $X_t = Y_t$.

$$X_t = Y_t \iff \exists A : \mathbb{P}[A] = 0 : \forall \omega \in A, X_t(\omega) = Y_t(\omega)$$

Ora,

ω fixo: X_t é contínua em $[a, b]$ com valores e, \mathbb{R} ;

ω fixo: Y_t é contínua em $[a, b]$ com valores e, \mathbb{R} ;

Seja $C = \cap C_r : r \in \mathbb{Q}$; uma vez que \mathbb{Q} é numerável, $\mathbb{P}[C] = 1$ e portanto, $\forall \omega \in C, X_r(\omega) = Y_r(\omega), t \in [a, b]$. Ou seja, $\forall \omega \in C, X_t(\omega) = Y_t(\omega), t \in \mathbb{Q} \cap [a, b]$

Por hipótese, X_t é um processo contínuo, i.e., $\exists A_1 : \mathbb{P}[A_1] = 1 : \forall \omega \in A_1, X_{(\cdot)}(\omega)$ é contínuo em $[a, b]$.

Por hipótese, Y_t é um processo contínuo, i.e., $\exists A_2 : \mathbb{P}[A_2] = 1 : \forall \omega \in A_2, Y_{(\cdot)}(\omega)$ é contínuo em $[a, b]$.

Seja agora $A = C \cap A_1 \cap A_2; \mathbb{P}[A] = 1$.

$\forall \omega \in A, X_{(\cdot)}(\omega)$ é uma função definida em $[a, b]$, contínua (porque $\omega \in A_1$) em $[a, b]$.

$\forall \omega \in A, Y_{(\cdot)}(\omega)$ é uma função definida em $[a, b]$, contínua (porque $\omega \in A_2$) em $[a, b]$.

$$X_{(\cdot)}(\omega) = Y_{(\cdot)}(\omega) \text{ em } \mathbb{Q} \cap [a, b].$$

Dado que $\mathbb{Q} \cap [a, b]$ é denso em $[a, b]$, então $X_{(\cdot)}(\omega) = Y_{(\cdot)}(\omega)$ em $[a, b]$.

Obtivemos assim um conjunto A de medida 1 tal que $\forall \omega \in A$, as trajectórias são iguais.

Teorema E.0.5 *Sejam $\sigma(t, x)$ e $f(t, x)$ funções mensuráveis em $[a, b] \times \mathbb{R}$ que satisfazem as condições de Lipschitz e de crescimento linear em x . Considere-se a variável aleatória ξ \mathcal{F}_a -mensurável tal que $\mathbb{E}[\xi^2] < \infty$. Então a EIE tem **uma solução única contínua** X_t .*

Por hipótese, temos que:

- $|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq C(|x - y|); |\sigma(t, x)|^2 \leq C(1 + x^2)$
- $|f(t, x) - f(t, y)| \leq C(|x - y|); |f(t, x)|^2 \leq C(1 + x^2)$

Seja $\{X_t^{(n)}\}_{n=1}^\infty$ uma sucessão definida por: contínua de processos estocásticos, dada indutivamente por:

- $X_t^{(1)} \equiv \xi$
- $X_t^{(n+1)} = \xi + \int_a^t \sigma(s, X_s^{(n)}) dB(s) + \int_a^t f(s, X_s^{(n)}) ds$

Observa-se que $X_t^{(1)} \in L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$ e assume-se, por indução, que $X_t^{(n)} \in L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$.

Considerem-se as condições de crescimento linear:

$$\begin{aligned} |\sigma(t, X_t^{(n)})|^2 &\leq C(1 + (X_t^{(n)})^2) \implies \\ \implies \int_a^b |\sigma(t, X_t^{(n)})|^2 dt &\leq \int_a^b C(1 + (X_t^{(n)})^2) dt = \\ &= C(b - a) + C \int_a^b |X_t^{(n)}|^2 dt \implies \\ \implies \mathbb{E} \left[\int_a^b |\sigma(t, X_t^{(n)})|^2 dt \right] &\leq C(b - a) + C \mathbb{E} \left[\int_a^b |X_t^{(n)}|^2 dt \right] \stackrel{\text{Teo. Fubini}}{\downarrow} \\ &= C(b - a) + C \int_a^b \mathbb{E} [|X_t^{(n)}|^2] dt < \infty, \end{aligned}$$

uma vez que $X_t^{(n)} \in L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$;

$$\begin{aligned} |f(t, X_t^{(n)})|^2 &\leq C(1 + (X_t^{(n)})^2) \implies \\ \implies |f(t, X_t^{(n)})| &\leq \sqrt{C(1 + (X_t^{(n)})^2)} \implies \\ \implies \int_a^t |f(s, X_s^{(n)})| ds &\leq \int_a^t \sqrt{C(1 + (X_s^{(n)})^2)} ds \end{aligned}$$

que por sua vez,

$$\begin{aligned}
& \int_a^b \sqrt{C(1 + (X_s^{(n)})^2)} ds \stackrel{\substack{Des. \\ Schwarz}}{\leq} \\
& = \left(\int_a^b |\sqrt{C}|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b \left| \sqrt{1 + (X_s^{(n)})^2} \right|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} = \\
& = \sqrt{C(b-a)} \left(\int_a^b (1 + |X_t^{(n)}|^2) dt \right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \\
& \Rightarrow \int_a^t |f(s, X_s^{(n)})| ds \leq \sqrt{C(b-a)} \left(\int_a^b (1 + |X_t^{(n)}|^2) dt \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \text{ q.s.},
\end{aligned}$$

dados que

$$\begin{aligned}
X_t^{(n)} \in L_{ad}^2([a, b] \times \Omega) & \Leftrightarrow \int_a^b \mathbb{E} [|X_t^{(n)}|^2] dt < \infty \Leftrightarrow \mathbb{E} \left[\int_a^b |X_t^{(n)}|^2 dt \right] < \\
\infty & \Rightarrow \int_a^b |X_t^{(n)}|^2 dt < \infty.
\end{aligned}$$

Temos então que

$$\mathbb{E} \left[\int_a^b |\sigma(t, X_t^{(n)})|^2 dt \right] < \infty, \quad \int_a^t |f(s, X_s^{(n)})| ds < \infty$$

e portanto $\int_a^b \sigma(t, X_t^{(n)}) dB(s)$ é o *integral de Itô* e $\int_a^t f(s, X_s^{(n)}) ds$ é o *integral de Lebesgue* em t para quase todo $\omega \in \Omega$.

Logo $X_t^{(n+1)}$ é um processo estocástico contínuo adaptado à filtração $\{\mathcal{F}_t\}$.

Note-se agora pela expressão $|a + b + c|^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$ que, se

$$X_t^{(n+1)} = \xi + \int_a^t \sigma(s, X_s^{(n)}) dB(s) + \int_a^t f(s, X_s^{(n)}) ds$$

então

$$\left| X_t^{(n+1)} \right|^2 = 3 \left(\xi^2 + \left(\int_a^t \sigma(s, X_s^{(n)}) dB(s) \right)^2 + \left(\int_a^t f(s, X_s^{(n)}) ds \right)^2 \right)$$

e portanto

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left[\left| X_t^{(n+1)} \right|^2 \right] = \\
& 3 \left(\xi^2 + \mathbb{E} \left[\underbrace{\left(\int_a^t \sigma(s, X_s^{(n)}) dB(s) \right)^2}_{< \infty} \right] + \mathbb{E} \left[\underbrace{\left(\int_a^t f(s, X_s^{(n)}) ds \right)^2}_{< \infty} \right] \right) \implies \\
& \implies \mathbb{E} \left[\left| X_t^{(n+1)} \right|^2 \right] < \infty \\
& \implies \int_a^b \mathbb{E} \left[\left| X_t^{(n+1)} \right|^2 \right] dt < \infty \therefore X_t^{(n+1)} \in L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)
\end{aligned}$$

Obtivemos, por indução, a sucessão contínua de processos estocásticos $\{X_t^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ definida no espaço $L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$.

Vamos agora estimar o valor de $\mathbb{E} \left[\left| X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)} \right|^2 \right]$.

Seja

$$X_t^{(n+1)} = \xi + \int_a^t \sigma(s, X_s^{(n)}) dB(s) + \int_a^t f(s, X_s^{(n)}) ds = \xi + Y_t^{(n+1)} + Z_t^{(n+1)}$$

em que $Y_t^{(n+1)} = \int_a^t \sigma(s, X_s^{(n)}) dB(s)$ e $Z_t^{(n+1)} = \int_a^t f(s, X_s^{(n)}) ds$. Pela expressão $(a+b)^2 \leq (a^2 + b^2)$, tem-se:

$$\begin{aligned}
\left| X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)} \right|^2 &= \left| \left(\xi + Y_t^{(n+1)} + Z_t^{(n+1)} \right) - \left(\xi + Y_t^{(n)} + Z_t^{(n)} \right) \right|^2 = \\
&= \left| \left(Y_t^{(n+1)} - Y_t^{(n)} \right) + \left(Z_t^{(n+1)} - Z_t^{(n)} \right) \right|^2 = \\
&\leq 2 \left(\left| Y_t^{(n+1)} - Y_t^{(n)} \right|^2 + \left| Z_t^{(n+1)} - Z_t^{(n)} \right|^2 \right) \implies \\
\implies \mathbb{E} \left[\left| X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)} \right|^2 \right] &\leq \\
&\leq 2 \left(\mathbb{E} \left[\left| Y_t^{(n+1)} - Y_t^{(n)} \right|^2 \right] + \mathbb{E} \left[\left| Z_t^{(n+1)} - Z_t^{(n)} \right|^2 \right] \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[\left| Y_t^{(n+1)} - Y_t^{(n)} \right|^2 \right] &= \mathbb{E} \left[\left| \int_a^t \underbrace{\sigma(s, X_s^{(n)}) - \sigma(s, X_s^{(n-1)})}_{\in L_{ad}^2([a,b] \times \Omega)} dB(s) \right|^2 \right] = \\
&= \int_a^t \mathbb{E} \left[\left| \sigma(s, X_s^{(n)}) - \sigma(s, X_s^{(n-1)}) \right|^2 \right] ds \stackrel{\text{Lipschitz}}{\leq} \\
&\leq \int_a^t \mathbb{E} \left[\left(C \left| X_s^{(n)} - X_s^{(n-1)} \right| \right)^2 \right] ds \leq \\
&\leq C^2 \int_a^t \mathbb{E} \left[\left| X_s^{(n)} - X_s^{(n-1)} \right|^2 \right] ds \implies \\
\implies \mathbb{E} \left[\left| Y_t^{(n+1)} - Y_t^{(n)} \right|^2 \right] &\leq C^2 \int_a^t \mathbb{E} \left[\left| X_s^{(n)} - X_s^{(n-1)} \right|^2 \right] ds \\
\left| Z_t^{(n+1)} - Z_t^{(n)} \right|^2 &= \left| \int_a^t \left(f(s, X_s^{(n)}) - f(s, X_s^{(n-1)}) \right) ds \right|^2 \leq \\
&\left(\int_a^t \left| f(s, X_s^{(n)}) - f(s, X_s^{(n-1)}) \right| ds \right)^2 \stackrel{\text{Lipschitz}}{\leq} \\
&\leq \left(\int_a^t \left| X_s^{(n)} - X_s^{(n-1)} \right| ds \right)^2 \stackrel{\text{Schwarz}}{\leq} \\
&\leq \int_a^t |C|^2 ds \int_a^t \left| X_s^{(n)} - X_s^{(n-1)} \right|^2 ds \leq \\
&\leq C^2 (b-a) \int_a^t \left| X_s^{(n)} - X_s^{(n-1)} \right|^2 ds \implies \\
\implies \mathbb{E} \left[\left| Z_t^{(n+1)} - Z_t^{(n)} \right|^2 \right] &\stackrel{\substack{\text{Teo} \\ \text{Fubini}}}{\leq} C^2 (b-a) \int_a^t \mathbb{E} \left[\left| X_s^{(n)} - X_s^{(n-1)} \right|^2 \right] ds
\end{aligned}$$

Temos então que

$$\mathbb{E} \left[\left| X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)} \right|^2 \right] \leq C^2 (1 + b - a) \int_a^t \mathbb{E} \left[\left| X_s^{(n)} - X_s^{(n-1)} \right|^2 \right] ds$$

Note-se agora que:

$$\begin{aligned}
\left| X_t^{(2)} - X_t^{(1)} \right|^2 &= \left| \int_a^t \sigma(s, X_s^{(1)}) dB(s) + \int_a^t f(s, X_s^{(1)}) ds \right|^2 \leq \\
&\leq 2 \left(\left(\int_a^t \sigma(s, X_s^{(1)}) dB(s) \right)^2 + \left(\int_a^t f(s, X_s^{(1)}) ds \right)^2 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[\left(\int_a^t \sigma(s, X_s^{(1)}) dB(s) \right)^2 \right] &= \int_a^t \mathbb{E} \left[|\sigma(s, X_s^{(1)})|^2 \right] ds \leq \\
&\leq \int_a^t \mathbb{E} \left[C(1 + (X_s^{(1)})^2) \right] ds = \\
&= C \int_a^t (1 + \mathbb{E} [\xi^2]) ds
\end{aligned}$$

e, de modo semelhante,

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_a^t f(s, X_s^{(1)}) ds \right)^2 \right] = (b-a)C \int_a^t (1 + \mathbb{E} [\xi^2]) ds,$$

logo

$$\mathbb{E} \left[|X_t^{(2)} - X_t^{(1)}|^2 \right] \leq 2C(1+b-a) \int_a^t (1 + \mathbb{E} [\xi^2]) ds$$

Repare-se agora que

$$\begin{aligned}
|X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}| &= |\xi + Y_t^{(n+1)} + Z_t^{(n+1)} - (\xi + Y_t^{(n)} + Z_t^{(n)})| = \\
&= |(Y_t^{(n+1)} - Y_t^{(n)}) - (Z_t^{(n+1)} - Z_t^{(n)})| = \\
&= |Y_t^{(n+1)} - Y_t^{(n)}| + |Z_t^{(n+1)} - Z_t^{(n)}| \implies \\
\implies |X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}| &= |Y_t^{(n+1)} - Y_t^{(n)}| + |Z_t^{(n+1)} - Z_t^{(n)}| \iff \\
\iff \sup_{a \leq t \leq b} |X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}| &\leq \\
&\leq \sup_{a \leq t \leq b} |Y_t^{(n+1)} - Y_t^{(n)}| + \sup_{a \leq t \leq b} |Z_t^{(n+1)} - Z_t^{(n)}| \implies \\
\implies \left\{ \sup_{a \leq t \leq b} |X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}| > \frac{1}{n^2} \right\} &\subset \\
&\subset \left\{ \sup_{a \leq t \leq b} |Y_t^{(n+1)} - Y_t^{(n)}| > \frac{1}{2n^2} \right\} \cup \left\{ \sup_{a \leq t \leq b} |Z_t^{(n+1)} - Z_t^{(n)}| > \frac{1}{2n^2} \right\}
\end{aligned}$$

Verifiquemos esta última implicação pela passagem a complementar:

$$\begin{aligned}
&\left\{ \sup_{a \leq t \leq b} |X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}| > \frac{1}{n^2} \right\} \subset \\
&\subset \left\{ \sup_{a \leq t \leq b} |Y_t^{(n+1)} - Y_t^{(n)}| > \frac{1}{2n^2} \right\} \cup \left\{ \sup_{a \leq t \leq b} |Z_t^{(n+1)} - Z_t^{(n)}| > \frac{1}{2n^2} \right\}
\end{aligned}$$

\iff

$$\left\{ \sup_{a \leq t \leq b} |Y_t^{(n+1)} - Y_t^{(n)}| \leq \frac{1}{2n^2} \right\} \cap \left\{ \sup_{a \leq t \leq b} |Z_t^{(n+1)} - Z_t^{(n)}| \leq \frac{1}{2n^2} \right\} \subset \\ \subset \left\{ \sup_{a \leq t \leq b} |X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}| \leq \frac{1}{n^2} \right\}$$

Considere-se um elemento ω tal que:

$$\sup_{a \leq t \leq b} |Y_t^{(n+1)}(\omega) - Y_t^{(n)}(\omega)| \leq \frac{1}{2n^2} \wedge \sup_{a \leq t \leq b} |Z_t^{(n+1)}(\omega) - Z_t^{(n)}(\omega)| \leq \frac{1}{2n^2}$$

Observando a desigualdade acima, tem-se:

$$\begin{aligned} \sup_{a \leq t \leq b} |X_t^{(n+1)}(\omega) - X_t^{(n)}(\omega)| &\leq \sup_{a \leq t \leq b} |Y_t^{(n+1)}(\omega) - Y_t^{(n)}(\omega)| + \\ &\quad + \sup_{a \leq t \leq b} |Z_t^{(n+1)}(\omega) - Z_t^{(n)}(\omega)| \leq \\ &\leq \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2n^2} = \\ &= \frac{1}{n^2} \implies \\ \implies \sup_{a \leq t \leq b} |X_t^{(n+1)}(\omega) - X_t^{(n)}(\omega)| &\leq \frac{1}{2n^2} \end{aligned}$$

A desigualdade de conjuntos é assim válida, pelo que o seu complementar também o é. Fica assim provada a implicação.

Recordem-se agora as desigualdade de Doob e de Chebychev, que serão aplicadas aos conjuntos obtidos como se segue

$$\begin{aligned} &\mathbb{P} \left[\sup_{a \leq t \leq b} |Y_t^{(n+1)} - Y_t^{(n)}| > \frac{1}{2n^2} \right] = \\ &= \mathbb{P} \left[\sup_{a \leq t \leq b} |Y_t^{(n+1)} - Y_t^{(n)}|^2 > \frac{1}{4n^4} \right] \stackrel{Doob}{\leq} \\ &\leq 4n^4 \mathbb{E} \left[|Y_b^{(n+1)} - Y_b^{(n)}| \right] \leq \\ &\leq 4n^4 C^2 \int_a^b \mathbb{E} \left[|X_t^{(n)} - X_t^{(n-1)}|^2 \right] dt \leq \\ &\leq 4n^4 C^2 \rho \frac{\beta^{n-1} (b-a)^n}{n!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P} \left[\sup_{a \leq t \leq b} |Z_t^{(n+1)} - Z_t^{(n)}| > \frac{1}{2n^2} \right] = \\
& = \mathbb{P} \left[\sup_{a \leq t \leq b} |Z_t^{(n+1)} - Z_t^{(n)}|^2 > \frac{1}{4n^4} \right] \stackrel{Doob}{\leq} \\
& \leq 4n^4 \mathbb{E} \left[|Z_b^{(n+1)} - Z_b^{(n)}| \right] \leq \\
& \leq 4n^4 (b-a) C^2 \int_a^b \mathbb{E} \left[|X_t^{(n)} - X_t^{(n-1)}|^2 \right] dt \leq \\
& \leq 4n^4 C^2 (b-a) \rho \frac{\beta^{n-1} (b-a)^n}{n!}
\end{aligned}$$

Temos então que

$$\mathbb{P} \left[\left\{ \sup_{a \leq t \leq b} |X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}| > \frac{1}{n^2} \right\} \right] \leq 2\rho \frac{n^4 \beta^n (b-a)^n}{n!}$$

e, aplicando o *Cr terio d'Alembert*   série $\sum_n \frac{n^4 \beta^n (b-a)^n}{n!}$, verificamos que esta é convergente:

$$\left| \frac{\frac{(n+1)^4 \beta^{(n+1)} (b-a)^{(n+1)}}{(n+1)!}}{\frac{n^4 \beta^n (b-a)^n}{n!}} \right| = \frac{(n+1)^4 \beta (b-a)}{n^5} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Seja agora

$$A_n = \left\{ \omega \in \Omega : \sup_{a \leq t \leq b} |X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}| > \frac{1}{n^2} \right\}.$$

Pelo resultado anterior, $\mathbb{P}[A_n] < \infty$. Aplicando o *Lema de Borel-Cantelli*, temos que $\mathbb{P}[\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_n A_n] = 0$, ou seja, $\omega \in A_n$ para infinitas n ocorrências com probabilidade zero; por outras palavras, ω pertence q.s. a um número finito de A_n , i.e., q.s. $\exists N = N(\omega) : \forall n > N, \omega \notin A_n$. Então,

$$\omega : \sup_{a \leq t \leq b} |X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}| \leq \frac{1}{n^2} \text{ q.s.}$$

Temos que

$$\sup_{a \leq t \leq b} |X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}| \leq \frac{1}{n^2}$$

e $\frac{1}{n^2}$ é uma série numérica convergente, o que implica que

$$\sum_n (X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)})$$

é uniformemente convergente em t , $\forall \omega \in B : \mathbb{P}[B] = 1$, o que por sua vez implica que $X_t^{(n)}$ é uniformemente convergente em t q.s..

Defina-se $X_t = \lim_{n \rightarrow \infty} X_t^{(n)}$. Note-se agora que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left| X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)} \right|^2 \right] &= \int_{\Omega} \left| X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)} \right|^2 d\mathbb{P} \leq \\ &\leq \rho \frac{\beta^n (b-a)^n}{n!} \implies \\ &\implies \left(\int_{\Omega} \left| X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)} \right|^2 d\mathbb{P} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \rho^{\frac{1}{2}} \frac{\beta^{\frac{n}{2}} (b-a)^{\frac{n}{2}}}{n!} \implies \\ &\implies \left\| X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)} \right\|_{L^2(\Omega)} \text{ é convergente } \implies \\ &\implies \xi + \sum_{n+1}^{\infty} (X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}) \text{ é convergente em } L^2(\Omega) \forall t. \end{aligned}$$

Temos, com probabilidade 1, que $\lim_{n \rightarrow \infty} X_t^{(n)} = X_t$ uniformemente para $t \in [a, b]$. Verifica-se também que, para cada t ,

$$\|X_t\| = \|\xi\| + \sum_{n+1}^{\infty} \frac{\beta^{\frac{n}{2}} (b-a)^{\frac{n}{2}}}{n^{\frac{1}{2}}!},$$

pelo que

$$\mathbb{E} \left[\int_a^b |X_t|^2 dt \right] < \infty$$

e então

$$X_t \in L_{ad}^2([a, b] \times \Omega) \subset \mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^2[a, b]).$$

Aplicando o limite, quando $n \rightarrow \infty$ à expressão inicial

$$X_t^{(n+1)} = \xi + \int_a^t \sigma(s, X_s^{(n)}) dB(s) + \int_a^t f(s, X_s^{(n)}) ds$$

ficamos com

$$X_t = \xi + \int_a^t \sigma(s, X_s) dB(s) + \int_a^t f(s, X_s) ds,$$

e portanto esta expressão é *uma solução* da EIE dada.

Apêndice F

Uma Breve Abordagem Histórica

F.1 Os Três Percursos

O Movimento Browniano inicia a nossa pequena abordagem histórica sobre a matemática financeira, naturalmente desenvolvida sobre a análise estocástica. São três personagens que procuraram modelar o processo Browniano, num estudo independente: Thorvald Nicolai Thiele, Louis Bachelier e Albert Einstein.

Thorvald N. Thiele, de Copenhaga, criou um movimento Browniano através da sua análise de time series em 1880; a sua contribuição é descrita por G. A. Hald no seu artigo de 1981 intitulado *T. N. Thiele's Contributions to Statistics* (International Statistics Review 49 1-20).

Louis Bachelier foi o primeiro matemático a usar este processo no âmbito da matemática financeira. Considerado por muitos como o seu fundador, o parisiense Bachelier criou um movimento Browniano ao tentar modelar a dinâmica de preços da bolsa de Paris no ano de 1900. Analisando o Teorema do Limite Central, bem como as suas consequências, e consciencializando-se de que a bolsa deveria ser possuidora da propriedade de *falta de memória*, Bachelier concluiu que os incrementos dos preços das acções deveriam ser independentes e seguir uma distribuição normal. Esta ideia foi combinada com a já conhecida propriedade de Markov e a teoria de semigrupos; tendo também conhecimento de que o kernel Gaussiano é a solução fundamental da equação do calor, relacionou o movimento Browniano com esta equação. Bachelier modelou então o comportamento preços da acções da bolsa de Paris através do movimento Browniano.

Albert Einstein modelou o movimento Browniano, numa nomenclatura mo-

derna, como um processo estocástico com trajectórias contínuas e com incrementos gaussianos, independentes e estacionários. Esta modelação, feita em 1905, destinava-se a descrever o movimento de partículas pequenas suspensas num líquido, o que provaria aos seus colegas a natureza moléculas da matéria.

De entre estas três propostas de modelação, foi a última que provocou um impacto imediato, sendo as restantes apenas reconhecidas largos anos após as suas publicações. Einstein, contudo, não teve a capacidade de provar a existência do seu modelo para o movimento Browniano como uma entidade matemática. Terá sido Wiener, em 1923, a construir o *Movimento Browniano* como um ente matemático, seguindo as pegadas de Einstein e aplicando *séries de Fourier* combinadas com o *Integral de Daniell*.¹ Provou também muitas das propriedades das trajectórias, cujo estudo perdura ainda nos dias de hoje.

F.2 Novos Desenvolvimentos

O desenvolvimento da *teoria de integração estocástica* foi motivado pela *teoria dos processos de Markov*. Em 1931, Andrey N. Kolmogorov publica o artigo *Sobre Métodos Analíticos na Teoria da Probabilidade*, onde refere a construção do Movimento Browniano de Bachelier e desenvolve grande parte da sua teoria de processos de Markov, destacando-se o facto de um processo de Markov contínuo depender essencialmente de dois parâmetros: *volatilidade* e *coeficiente de difusão*. Kolmogorov relacionou então as distribuições de probabilidade dos processos com as soluções de equações diferenciais parciais, as quais revolveu e são hoje conhecidas por *Equações de Kolmogorov*. Análise de semigrupo e do seu gerador infinitesimal. "Feynman"

A construção de um *diferencial estocástico* para o estudo dos processos de Markov foi motivação suficiente para Kyoshi Itô ser conhecido hoje como o *pai da integração estocástica*. O artigo de Kolmogorov, citado acima, e o de William Feller intitulado *Sobre a Teoria dos Processos Estocásticos*, publicado em 1936, tiveram uma contribuição fundamental para o seu estudo, como se pode analisar pelas suas próprias palavras: "Nestes artigos vi um método analítico poderoso para estudar as probabilidades de transição do processo, nomeadamente a equação parabólica de Kolmogorov e a sua extensão por Feller. Mas queria estudar as trajectórias de processos de

¹Percy J. Daniell publicou em 1918, o artigo intitulado *Uma Forma Geral de Integral* onde abordava uma extensão do integral de Riemann. A sua construção do integral caracteriza-se essencialmente por não utilizar teoria da medida e não ter uma relação directa com convergência de métricas.

Markov da mesma maneira que Lévy observava os processos diferenciais. Observando o pano de fundo intuitivo sobre o qual Kolmogorov derivou a sua equação (explicado na introdução do artigo), apercebi-me de que uma partícula Markoviana representaria um processo de tempo diferencial homogéneo para futuro infinitesimal em qualquer instante, e cheguei à noção de uma equação diferencial estocástica que governava as trajectórias de um processo de Markov que podia ser formulizada em termos de diferenciais de um único processo diferencial”.²

É curioso observar que os métodos usados por Kolmogorov no estudo dos processos de Markov eram chamados “analíticos”, enquanto que os de Itô relativos aos diferenciais estocásticos diziam-se “probabilísticos”. Esta situação mereceu a atenção de Joseph Doob, o qual argumentou sobre ambos métodos serem probabilísticos.

O primeiro artigo sobre integração estocástica publicado por Itô, em 1944, foi intitulado *Integral Estocástico*. Itô construiu uma *equação diferencial estocástica* da forma

$$dX_t = \sigma(X_t)dW_t + \mu(X_t)dt$$

em que de W_t representa um processo de Wiener standard. Numa tentativa de relacionar as trajectórias de X_t com a função de transição do coeficiente de difusão, demonstrou que a distribuição de X_t é solução da *equação forward de Kolmogorov*. Este estudo culminou numa extensão da fórmula de mudança de variáveis da *integração de Riemann-Stieltjes*, a conhecida **Fórmula de Itô**:

$$f(X_t) = f'(X_t)dX_t + \frac{1}{2}f''(X_t)d(), f \in C^2.$$

Esta expressão é também comumente designada por **Lema de Itô**, devido à obra de H. P. McKean, Jr., intitulada *Integrais Estocásticos*. Publicada em 1969, este texto teve uma grande influência na popularização do trabalho de Kiyoshi Itô e estudos relacionados, pois consistiu na primeira exposição literária onde estes conceitos foram abordados e explicados. A construção de McKean enunciava a expressão $f(X_t) = f'(X_t)dX_t + \frac{1}{2}f''(X_t)d()$, $f \in C^2$ como um *lema*, daí este resultado tão fundamental ser também conhecido por esta nomenclatura.

Um dos aspectos determinantes da análise estocástica lida com o espaço onde vivem os factores integrantes; não é possível integrar todos os processos estocásticos contínuos dado que o movimento Browniano tem trajectórias de variação quadrática não-limitada *quase seguramente* em qualquer intervalo

²Itô, K., 1987 Foreword, K. Itô Collected Papers, Springer-Verlag, Heidelberg, xiii-xvii.

de tempo finito. Itô admite que os factores integrantes sejam *adaptados* à filtração de σ -álgebras subjacente gerada pelo movimento Browniano, i.e., o espaço de integração é limitado aos factores integrantes que ele chamou de *não antecipados*. A propriedade de independência dos incrementos do movimento Browniano pode então ser aplicada, servindo mesmo para provar a **Isometria de Itô** para o processo contínuo não-antecipado H :

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_0^t H_s dW_s \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^t H_s^2 ds \right].$$

Refira-se que a σ -álgebra natural gerada por factores integrantes simples é hoje conhecida por σ -álgebra *previsível*.

A investigação de Itô relativa à aplicação dos processos de Markov como solução de equações diferenciais estocásticas, que envolvia o movimento Browniano e *processos de Poisson*, motivou bastante a comunidade matemática no final da década de 60 e início dos anos 70.

F.3 Extensão do Integral de Itô

Foi no ano que 1953 que Joseph Doob publicou *Processos Estocásticos*. É uma obra de influência notável para as investigações que viriam a surgir neste ramo e lida precisamente com a extensão do integral estocástico, i.e., o Integral de Itô. O autor fez uso da propriedade de independência dos incrementos do Browniano, que considerava não ter sido ainda devidamente explorada, e estendeu o integral estocástico do movimento Browniano a processos com incrementos ortogonais em L^2 e depois a processos com incrementos ortogonais condicionais, conhecidos por *martingalas*. Doob chegou ao *teorema de decomposição de submartingalas* tendo em vista a obtenção de uma martingala M_t tal que $M_t^2 - F(t)$ fosse também uma martingala, sendo processos $F(t)$ crescente e não-aleatório. Perante o facto de M^2 ser uma martingala quando M o é, procurou um resultado de decomposição análogo em tempo contínuo e estendeu a *Isometria de Itô* através do resultado dado por

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_0^t H_s dM_s \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^t H_s^2 dF_s \right],$$

em que F_s é um processo não decrescente e não-aleatório e sendo $M_t^2 - F_t$ e o integral estocástico martingalas.

Surge então a hipótese de estender o teorema da decomposição de Doob para submartingalas indexadas de acordo com o tempo, que é devida aos desenvolvimentos paralelos entre a *teoria potencial probabilística* e a *teoria*

potencial axiomática e também à necessidade da extensão do integral estocástico para martingalas em geral.

Em 1962, Paul-André Meyer publica o artigo *Um Teorema de Decomposição para Supermartingalas*, escrito na linguagem da teoria potencial. Meyer estabelece a existência da decomposição de Doob para submartingalas em tempo contínuo, que se verifica apenas assumindo que a submartingala satisfaz a *Classe (D)*, expressão cunhada como reconhecimento a Doob significando que a submartingala tem uma propriedade uniforme de integrabilidade quando indexada por tempos de paragem. Propõe também uma extensão do integral estocástico de Doob, cujo espaço dos factores integrantes é constituído por processos conjuntamente mensuráveis e adaptados à filtração subjacente de σ -álgebras. No ano seguinte, o mesmo autor produz *Decomposição de Supermartingalas: o Teorema de Unicidade*. Neste artigo, faz uma conjectura sobre a unicidade de decomposição de Doob, provada como verdadeira através do conceito de *martingala local*, introduzido em 1965 por Satosi Watanabe e Kiyoshi Itô através da análise de funcionais multiplicativos de processos de Markov. Ficou então provado que, independentemente de pertencer à Classe(D), qualquer submartingala X tem uma decomposição única da forma

$$X_t = M_t + A_t$$

em que M_t é uma martingala local, A_t é um processo previsível não-decrescente e $A_0 = 0$. Este resultado é hoje conhecido como **Teorema de Decomposição de Doob-Meyer**. No mesmo artigo, Meyer apresenta também uma análise da estrutura de martingalas em L^2 , que permitiu o desenvolvimento total da teoria de integração estocástica.

F.4 Desenvolvimentos na Economia

No ano de 1964, o estatístico Jimmie Savage deparou-se, por acaso, com um pequeno livro por Bachelier durante uma pesquisa na universidade em Chicago. Publicado em 1914, esta obra apresentava estudos sobre especulação e investimento. Tanto Kolmogorov como Doob citam Bachelier e é claramente plausível que Itô conhecesse também o trabalho deste matemático francês, pelo que podemos afirmar que esta foi uma redescoberta do estudo de Bachelier, direccionado agora para as finanças.

Savage comunica a sua descoberta ao economista Paul Samuelson o qual, fascinado pela direcção que o trabalho de Bachelier poderia levar, percorreu o país na década seguinte dando conferências sobre *apreçamento*. Samuelson defendia a natureza aleatória dos preços das acções, como Bachelier

o fez 65 anos antes, e comprovou-o do ponto de vista económico no artigo *Prova de que os Preços Antecipados Apropriadamente Flutuam Aleatoriamente*, publicado em 1965. O autor assume o postulado de que os preços descontados dos *contratos de futuros* seguem uma martingala, permitindo demonstrar que as alterações dos preços de futuros são não correlacionadas ao longo do tempo, uma generalização do modelo de *passeio aleatório*. Esta proposição foi estendida a funções arbitrárias do *preço spot*, o que anteviu uma aplicação a imediata às *opções*. Mais tarde, verificar-se-ia a verificar que estas ideias e resultados são o pilar da *teoria do apreçamento de opções*.

É ainda de salientar que este artigo em conjugação com o do economista americano Eugene Fama publicado em 1965, *O Comportamento dos Preços de Acções*, serve de base ao que se conhece actualmente como “a hipótese do mercado eficiente”. Esta hipótese revolucionou o empirismo financeiro e é ainda hoje debatida.

Samuelson publica ainda em 1965 *Teoria Racional de Apreçamento Warrant* e neste artigo teve o apoio de H. McKean Jr., o qual elaborou um apêndice matemático é descrito que o movimento Browniano é um bom modelo para o apreçamento de preços de acções. McKean Jr. colaborou no mesmo ano com Itô na publicação literária *Processos de Difusão e as Suas Trajectórias* e Samuelson, sentindo-se desconfortável com o novo cálculo estocástico, ter-se-á mais tarde associado a Robert C. Merton na sua pesquisa. Em *Teoria Racional de Apreçamento Warrant*, Samuelson expõe as falhas do modelo de Bachelier, o qual não assegura que os preços das acções são sempre positivos e revela-se inconsistente relativamente aos princípios económicos, suplantando-as pela aplicação do movimento Browniano. É também neste artigo que são definidos os termos “Europeia” e “Americana”, referentes aos contratos de opções. Estes termos surgem a partir da seguinte ocorrência. Samuelson dirigiu-se a Wall Street para discutir opções com profissionais da área, onde lhe foi explicado que havia dois tipos de contratos de opções: um mais complexo, que poderia ser exercido numa qualquer altura que antecederesse a data de maturidade, e um mais simples, o qual seria apenas exercido à data de maturidade; comentando-se que apenas uma mente Europeia, em oposição à mente Americana, teria a capacidade compreender o contrato complexo, baptizou no seu artigo os dois tipos de opções com estes termos, invertendo-lhes a ordem. Samuelson apresenta as fórmulas para estas opções, derivadas de modo bastante semelhante à forma usada para obter a famosa *Fórmula de Black-Scholes* quase uma década mais tarde, a qual se distingue pela aplicação do *princípio da não-arbitragem*. Este artigo destaca-se também pela determinação do preço de uma opção Americana através da relação desta, feita pela primeira vez, com um problema sem fronteira para a equação do calor. Note-se que o apêndice de McKean é construído através de equações diferenciais, tempos e paragem e técnicas

da teoria potencial iniciadas por Gilbert Hunt e desonvolvidas por Evgenii Dynkin, e curiosamente, o cálculo estocástico não é aplicado explicitamente.

Em 1969, Samuelson e Merton publicam o artigo *Um Modelo Completo para Apreçamento de Garantias que Maximiza a Vantagem*. São publicadas aqui resultados que, conjuntamente com os anteriores, permitem a Fischer Black, Myron Scholes e também ao próprio Merton, desenvolver as fórmulas do apreçamento de opções. A estrutura matemática segue de perto a que Samuelson descreve no artigo *Teoria Racional de Apreçamento Warrant*, referido acima. Contudo, o postulado invocado neste último, de que os payoffs descontados de opções seguem uma martingala, surge agora como implicação de uma decisão de otimização, e prova-se que o preço das opções pode ser visto como o seu valor de desconto esperado; este, no lugar de ser calculado usando as probabilidades conhecidas, é obtido através da vantagem ou das probabilidades de risco ajustado, as quais se tornariam conhecidas por *probabilidades sem risco* e que já eram familiares a Samuelson desde 1953. Novamente, o princípio da não-arbitragem não é enunciado, apesar de conhecido por Samuelson e Merton, e portanto ainda não foi possível derivar a Fórmula de Black-Scholes. Este princípio foi aplicado pela primeira vez no artigo *O Custo do Capital, Corporação Financeira, e a Teoria do Investimento* pelos economistas Franco Modigliani e Merton H. Miller em 1958, 11 anos antes da publicação de Samuelson e Merton, e destinava-se a provar uma relação de apreçamento uma diversidade de contratos financeiros. Modigliani e Miller mostram a equivalência entre a dívida de duas firmas diferentes e preços justos, originando o famoso *Teorema Modigliani-Miller*. Estava então aberto o caminho para que Black e Scholes pudessem derivar, usando a Fórmula de Itô, a equação diferencial Black-Scholes-Merton e resolvê-la, cuja solução é dada pela fórmula de Black-Scholes. Este resultado surgiu em 1973 no artigo *O Apreçamento de Opções e Responsabilidades Corporativas*, o qual foi originalmente rejeitado para publicação por duas vezes, primeiro pela *Revista de Economia Política* e depois pelo *Jornal de Economia e Estatística*. Motivados pelos comentários de Miller e Fama, os autores submeteram uma versão revista do texto novamente à *Revista de Economia Política*, que foi aceite e garantiu o Prêmio Nobel da Economia atribuído a ambos em 1997.

Bibliografia

- [1] A.B.D.P, Introdução aos Mercados de Futuros e Opções, Associação da Bolsa de Derivados dos Porto, 1996
- [2] Bingham, N. H., Kiesel, R., Risk-Neutral Valuation: Pricing and Hedging of Financial Derivatives, Springer-Verlag, 2004
- [3] Björk, T., Arbitrage Theory in Continuous Time, Oxford University Press Inc., 2009
- [4] Burnham, K. P., Anderson, D. R., Model Selection and Multimodel Inference, 2002
- [5] Elliott, R. J., Kopp, P. E., Mathematics of Financial Markets, Springer, 2005
- [6] Hull, J. C., Options, Futures and Other Derivatives, Pearson Prentice Hall, 2006
- [7] Jarrow, R. and Protter, P., “A Short History of Stochastic Integration and Mathematical Finance. The early years, 1880 - 1970”, Cornell University, 2003
- [8] Kloeden, P. E., Platen, E., Numerical Solution of Stochastic Differential Equations, Springer-Verlag 1995
- [9] Kuo, H.-H., Introduction to Stochastic Integration, Springer, 2006
- [10] Lamberton, D., Lapeyre, B., Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance, Chapman & Hall/CRC, 2000
- [11] Luenberger, D. G., Investment Science, Oxford University Press, 1998
- [12] Miguens, F., Probabilidades e Estatística I, FCT-UNL, 2005
- [13] Miguens, F., Probabilidades e Estatística II, FCT-UNL, 2005
- [14] Mood, A. M., Graybill, F. A., Boes, D. C., Introduction to the Theory of Statistics, McGraw-Hill International Editions, 1963

- [15] Neftci, S. N., An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives, Academic Press, 2000
- [16] Oksendal, B., Stochastic Differential Equations, Springer-Verlag, 1992
- [17] Pultr, A., “Daniell’s Version of Lebesgue Integral”, Charles University, 2010
- [18] Seydel, R.U., Tools for Computational Finance, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009