



Bruno Alexandre Rosário Cardoso

Licenciado em Ciências de Engenharia Mecânica

Optimização topológica robusta aplicada a treliças 2D e 3D

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em
Engenharia Mecânica

Orientador: Prof. Doutor João Mário Burguete Botelho
Cardoso, Prof. Auxiliar, FCT-UNL

Júri:

Presidente: Prof. Doutora Raquel Albuquerque Soares Brás de Almeida

Vogais: Prof. Doutor Pedro Samuel Gonçalves Coelho
Prof. Doutor João Mário Burguete Botelho Cardoso



FACULDADE DE
CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Dezembro, 2018

Agradecimentos

Começo por agradecer ao Professor João Cardoso pelo apoio, orientação e esclarecimentos dados durante a elaboração deste trabalho. A disponibilidade e simpatia com que sempre me recebeu ao longo deste período foram uma grande ajuda para conseguir concluir esta etapa académica.

Uma palavra de apreço também ao excelente corpo docente da FCT, em especial ao do Departamento de Engenharia Mecânica e Industrial (DEMI), pelos conhecimentos transmitidos e pela disponibilidade que sempre demonstrou para com os alunos.

Agradeço à minha família, em especial aos meus pais, pelo apoio e motivação que sempre me deram ao longo destes anos. Pelo esforço que fizeram para eu poder aqui chegar, a eles dedico este trabalho.

Um obrigado também aos vários amigos que fiz durante estes anos, que me acompanharam não só em tempos livres bem passados, mas também em longas noites de estudo que, graças a eles, foram passadas sempre com espírito de entreajuda e boa disposição.

Resumo

Será objectivo desta dissertação dar continuidade ao trabalho realizado por André Teixeira, que desenvolveu uma metodologia para otimizar topologicamente uma treliça tendo em conta a incerteza do módulo de elasticidade dos seus elementos. Procurar-se-á expandir este método para casos em que a incerteza ocorre também nas coordenadas dos nós. O método será testado não só em otimização de treliças planas (2D) mas também em treliças espaciais (3D), um tópico ainda muito pouco explorado. Será utilizado o PROAES, um programa em linguagem MATLAB/Octave desenvolvido no DEMI com várias funcionalidades, nomeadamente a capacidade de analisar modelos estruturais – Barra 2D, Barra 3D, Viga 2D e Viga 3D – pelo método dos elementos finitos, e o cálculo de derivadas de medidas de desempenho estrutural em relação a variáveis de projeto. O programa apresenta uma estrutura modular de forma a permitir a sua integração com outros programas, permitindo assim realizar optimização de estruturas e respectiva análise de fiabilidade.

Para testar a metodologia proposta são escolhidos alguns exemplos publicados por outros autores, tendo-se constatado uma excelente correspondência nos resultados obtidos. Considera-se por isso validada a metodologia desenvolvida.

Abstract

It will be the objective of this dissertation to continue the work done by André Teixeira, which developed a methodology to optimize the topology of a truss taking into account the uncertainty of the modulus of elasticity of its elements. In this work this methodology will be expanded for cases in which the uncertainty also occurs in the coordinates of the nodes. Further, the method will be tested not only with plane trusses (2D) but also with space trusses (3D), a topic still very unexplored. It will be used PROAES, a program written in MATLAB/Octave language developed in DEMI with several functionalities, namely the ability to analyze structural models – 2D Bar, 3D Bar, 2D Beam and 3D Beam – by the finite element method, and the calculation of derivatives of structural performance measures with respect to design variables. The program presents a modular structure in order to allow its integration with other programs, thus enabling optimization of structures and their reliability analysis.

In order to test the proposed methodology, some examples published by other authors have been chosen, and an excellent match was found in the obtained results. The methodology is therefore validated.

Índice de Conteúdo

AGRADECIMENTOS	I
RESUMO	III
ABSTRACT	V
ÍNDICE DE CONTEÚDO.....	VII
ÍNDICE DE TABELAS.....	IX
ÍNDICE DE FIGURAS.....	XI
SIGLAS E SÍMBOLOS	XVII
1. INTRODUÇÃO	1
1.1. Motivação	2
1.2. Objectivos.....	2
1.3. Estrutura	2
2. OPTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL.....	5
2.1. História	5
2.2. Optimização Clássica	6
2.3. Optimização considerando incerteza.....	9
2.3.1. Optimização baseada na fiabilidade – RBDO	10
2.3.2. Optimização robusta – RDO	15
3. MÉTODO.....	23
3.1. PROAES e Optimtool	23
3.2. Formulação	27
3.2.1. Desvio Padrão	27
3.3. Exemplo de aplicação.....	29
3.3.1. Resultados	31
4. OPTIMIZAÇÃO: ESTRUTURAS 2D E 3D	37
4.1. Estrutura 2D: Incerteza no módulo de elasticidade.....	37
4.1.1. Formulação do problema	38
4.1.2. Resultados	40

4.2. Estrutura 2D: Incerteza na posição dos nós.....	50
4.2.1. Formulação do problema	51
4.2.2. Resultados	52
4.3. Estrutura 3D: Incerteza no módulo de elasticidade.....	58
4.3.1. Formulação do problema	59
4.3.2. Resultados	60
5. CONCLUSÕES E FUTUROS TRABALHOS	71
BIBLIOGRAFIA.....	73

Índice de Tabelas

Tabela 1 – Gammas de espessura [4]	31
Tabela 2 – Exemplo de Aplicação: Percentagens de volume ($\alpha=0$).....	32
Tabela 3 – Exemplo de Aplicação: Percentagens de volume ($\alpha=0.1$).....	32
Tabela 4 – Exemplo de Aplicação: Percentagens de volume ($\alpha=0.2$).....	32
Tabela 5 – Exemplo de Aplicação: Percentagens de volume ($\alpha=0.3$).....	33
Tabela 6 – Exemplo de Aplicação: Percentagens de volume ($\alpha=0.4$).....	33
Tabela 7 – Exemplo de Aplicação: Percentagens de volume ($\alpha=0.5$).....	33
Tabela 8 – Exemplo de Aplicação: Percentagens de volume ($\alpha=0.6$ a 1).....	33
Tabela 9 – Incerteza no E : Percentagens de volume ($\alpha=0$ a 0.2)	41
Tabela 10 – Incerteza no E : Percentagens de volume ($\alpha=0.3$ a 0.5)	43
Tabela 11 – Incerteza no E : Percentagens de volume ($\alpha=0.6$ a 0.8)	44
Tabela 12 – Incerteza no E : Percentagens de volume ($\alpha=0.9$ a 1)	46
Tabela 13 – Incerteza nos nós: Percentagens de volume ($\alpha=0$ a 0.5).....	54
Tabela 14 – Incerteza nos nós: Percentagens de volume ($\alpha=0.6$ a 1).....	55
Tabela 15 – Incerteza no E (3D): Percentagens de volume ($\alpha=0$ a 0.5).....	66
Tabela 16 – Incerteza no E (3D): Percentagens de volume ($\alpha=0.6$ a 1).....	67

Índice de Figuras

Figura 1 – (a) método convencional de projecto; (b) método de optimização de projecto [12].....	6
Figura 2 – Optimização Dimensional [14]	7
Figura 3 – a) Optimização de forma: variáveis definem a fronteira do material [14]; b) Optimização de forma: variáveis definem posição dos nós[13].....	8
Figura 4 – a) Optimização topológica baseada na distribuição de material [14]; b) Optimização topológica <i>Ground Structure</i> [15].....	8
Figura 5 – Optimização em cada fase de projecto [16]	9
Figura 6 – Gráfico representativo do cálculo da probabilidade de falha [18]	11
Figura 7 – Região admissível e região de falha; x – variáveis de projecto, $g(x)$ – função de estado limite [17].....	11
Figura 8 – Comparação entre o FORM e o SORM [20]	12
Figura 9 – PROAES: - Análise de EF [55].....	23
Figura 10 – PROAES e a análise de sensibilidades [55].....	24
Figura 11 – Interação entre o PROAES e a <i>toolbox optimtool</i> [55].....	25
Figura 12 – Cálculos efectuados na função “myfun”	26
Figura 13 – Estrutura de 38 elementos com carga vertical.....	28
Figura 14 – Distribuição normal de E	28
Figura 15 – Convergência do valor do Desvio Padrão: 5000 iterações; erro de 2%	29
Figura 16 – Estrutura de 38 elementos com carga horizontal [3].....	30
Figura 17 – Estrutura Optimizada: $\alpha=0$	32
Figura 18 – Estrutura Optimizada: $\alpha=0.1$	32
Figura 19 – Estrutura Optimizada: $\alpha=0.2$	32
Figura 20 – Estrutura Optimizada: $\alpha=0.3$	33
Figura 21 – Estrutura Optimizada: $\alpha=0.4$	33

Figura 22 – Estrutura Optimizada: $\alpha=0.5$	33
Figura 23 – Estrutura Optimizada: $\alpha=0.6$ a 1	33
Figura 24 – Gráfico dos valores normalizados da média e desvio padrão da flexibilidade para diferentes valores de α , com 10% de variabilidade.....	34
Figura 25 – Resultados da optimização com 10% de variabilidade: Coluna da esquerda – Resultados obtidos; Coluna da direita: Resultados de Asadpoure et al. [40]	34
Figura 26 – Resultados de optimização com 20% de variabilidade	35
Figura 27 – Gráfico dos valores normalizados da média e desvio padrão da flexibilidade para diferentes valores de α , com 20% de variabilidade.....	35
Figura 28 – Resultados de optimização com 30% de variabilidade	36
Figura 29 – Gráfico dos valores normalizados da média e desvio padrão da flexibilidade para diferentes valores de α , com 30% de variabilidade.....	36
Figura 30 – <i>Ground Structure</i> : 200 barras	37
Figura 31 – Dimensões e numeração dos nós da <i>Ground Structure</i>	37
Figura 32 – Estrutura resultante de optimização determinística [40].....	38
Figura 33 – Estrutura optimizada: $\alpha=0$	40
Figura 34 – Estrutura optimizada: $\alpha=0.1$	40
Figura 35 – Estrutura optimizada: $\alpha=0.2$	40
Figura 36 – Estrutura optimizada: $\alpha=0.3$	43
Figura 37 – Estrutura optimizada: $\alpha=0.4$	43
Figura 38 – Estrutura optimizada: $\alpha=0.5$	43
Figura 39 – Estrutura optimizada: $\alpha=0.6$	44
Figura 40 – Estrutura optimizada: $\alpha=0.7$	44
Figura 41 – Estrutura optimizada: $\alpha=0.8$	44
Figura 42 – Estrutura optimizada: $\alpha=0.9$	45
Figura 43 – Estrutura optimizada: $\alpha=1$	45
Figura 44 – Variação da média e do desvio padrão normalizados	46
Figura 45 – Resumo dos resultados obtidos	47

Figura 46 – Comparação com resultados de [40]: $\alpha=0$	48
Figura 47 – Comparação com resultados de [40]: $\alpha=0.3$	48
Figura 48 – Comparação com resultados de [40]: $\alpha=0.7$	48
Figura 49 – Comparação com resultados de [40]: $\alpha=1$	49
Figura 50 – Resultados assimétricos da otimização com 300 elementos.....	49
Figura 51 – <i>Ground Structure</i> : 38 barras	50
Figura 52 – Dimensões e numeração dos nós e barras da <i>Ground Structure</i>	50
Figura 53 – Otimização determinística [38].....	51
Figura 54 – Estrutura ótima: $\alpha=0$	52
Figura 55 – Estrutura ótima: $\alpha=0.1$	52
Figura 56 – Estrutura ótima: $\alpha=0.2$	53
Figura 57 – Estrutura ótima: $\alpha=0.3$	53
Figura 58 – Estrutura ótima: $\alpha=0.4$	53
Figura 59 – Estrutura ótima: $\alpha=0.5$	53
Figura 60 – Estrutura ótima: $\alpha=0.6$	53
Figura 61 – Estrutura ótima: $\alpha=0.7$	53
Figura 62 – Estrutura ótima: $\alpha=0.8$	54
Figura 63 – Estrutura ótima: $\alpha=0.9$	54
Figura 64 – Estrutura ótima: $\alpha=1$	54
Figura 65 – Resumo dos resultados obtidos	56
Figura 66 – Variação da média e do desvio padrão normalizados	57
Figura 67 – Comparação do resultado obtido (esquerda) com o de Fu et al. (direita)	57
Figura 68 – <i>Ground Structure</i> 3D [58].....	58
Figura 69 – <i>Ground Structure</i> e numeração dos nós	59
Figura 70 – Dimensões: Plano XY	59
Figura 71 – Dimensões: Plano YZ	59
Figura 72 – Comparação do resultado obtido (esquerda) com o de [58] (direita).....	60

Figura 73 – Estrutura óptima: $\alpha=0$	61
Figura 74 – Estrutura óptima: Plano XY	61
Figura 75 – Estrutura óptima: Plano XZ	61
Figura 76 – Estrutura óptima: $\alpha=0.1$	61
Figura 77 – Estrutura óptima: Plano XY	61
Figura 78 – Estrutura óptima: Plano XZ	61
Figura 79 – Estrutura óptima: $\alpha=0.2$	62
Figura 80 – Estrutura óptima: Plano XY	62
Figura 81 – Estrutura óptima: Plano XZ	62
Figura 82 – Estrutura óptima: $\alpha=0.3$	62
Figura 83 – Estrutura óptima: Plano XY	62
Figura 84 – Estrutura óptima: Plano XZ	62
Figura 85 – Estrutura óptima: $\alpha=0.4$	63
Figura 86 – Estrutura óptima: Plano XY	63
Figura 87 – Estrutura óptima: Plano XZ	63
Figura 88 – Estrutura óptima: $\alpha=0.5$	63
Figura 89 – Estrutura óptima: Plano XY	63
Figura 90 – Estrutura óptima: Plano XZ	63
Figura 91 – Estrutura óptima: $\alpha=0.6$	64
Figura 92 – Estrutura óptima: Plano XY	64
Figura 93 – Estrutura óptima: Plano XZ	64
Figura 94 – Estrutura óptima: $\alpha=0.7$	64
Figura 95 – Estrutura óptima: Plano XY	64
Figura 96 – Estrutura óptima: Plano XZ	64
Figura 97 – Estrutura óptima: $\alpha=0.8$	65
Figura 98 – Estrutura óptima: Plano XY	65
Figura 99 – Estrutura óptima: Plano XZ	65

Figura 100 – Estrutura óptima: $\alpha=0.9$	65
Figura 101 – Estrutura óptima: Plano XY	65
Figura 102 – Estrutura óptima: Plano XZ	65
Figura 103 – Estrutura óptima: $\alpha=1$	66
Figura 104 – Estrutura óptima: Plano XY	66
Figura 105 – Estrutura óptima: Plano XZ	66
Figura 106 – Variação da média e do desvio padrão normalizados	68
Figura 107 – Resumo dos resultados obtidos	70

Siglas e Símbolos

A	Área de secção transversal
A_{max}	Área de secção transversal máxima
A_{min}	Área de secção transversal mínima
α	Coefficiente de peso da robustez
β	Índice de fiabilidade
C	Flexibilidade (<i>compliance</i>)
CV	Coefficiente de variação
d	Deslocamento nodal
E	Módulo de elasticidade
E	Valor esperado
$f(x)$	Função objectivo
$f_x(x)$	Função densidade de probabilidade conjunta
FDP	Função densidade de probabilidade
FORM	<i>First order reliability method</i>
f	Carregamentos externos
$g_j(x)$	Constrangimentos de desigualdade
$g(x)$	Função de estado limite
$h_k(x)$	Constrangimentos de igualdade
L	Comprimento do elemento
MPP	<i>Most probable point</i>
P_f	Probabilidade de falha
$P_{f_{máx}}$	Probabilidade máxima de falha
p	Fracção volúmica

Q	Efeito do carregamento
R	Resistência estrutural
RBDO	<i>Reliability based design optimization</i>
RDO	<i>Robust design optimization</i>
RTO	<i>Robust topology optimization</i>
SQP	<i>Sequential quadratic programming</i>
SORM	<i>Second order reliability method</i>
μ	Valor médio
V	Volume
V_{adm}	Volume admissível
V_0	Volume de referência
x	Variável de projecto
x^{min}	Valor mínimo da variável de projecto
x^{max}	Valor máximo da variável de projecto
xy	Variável de posição do nó
σ	Desvio padrão
ω_μ	Coefficiente de peso da média
ω_σ	Coefficiente de peso do desvio padrão
$\nabla f(x)$	Vector gradiente
Δx_i	Termo de perturbação

1. Introdução

As treliças são estruturas bastante comuns nas mais variadas aplicações de engenharia. A sua optimização em fases de projecto pode levar a significativas melhorias de performance bem como a uma utilização mais eficiente de material utilizado na sua construção.

De entre os vários tipos de optimização estrutural, destaca-se a optimização topológica, uma ferramenta poderosa para alcançar novas soluções em projectos de engenharia, apresentando grande liberdade no que toca à concepção de novas estruturas quando comparada com outros tipos de optimização. Este método procura a distribuição óptima de material dentro de um domínio contínuo definido, tendo em conta a função objectivo e restrições delineadas. Contudo, para estruturas reticuladas, este tipo de optimização pode ser feito a partir de um meio descontínuo onde estão discretizados um elevado número de elementos ligando um conjunto de nós predefinidos. O resultado será a distribuição óptima das áreas de secção pelos vários elementos sendo que no final irão figurar apenas os elementos com áreas acima de um mínimo admissível, minimizando o volume de material e respeitando os constrangimentos.

No entanto, as suas soluções determinísticas apresentam o problema de inerente risco de falha dada a grande sensibilidade que podem apresentar a pequenas variações dos parâmetros de projecto. Apesar do uso de coeficientes de segurança para compensar as incertezas e simplificações associadas à modelação da geometria, carregamentos e propriedades do material da estrutura, estes costumam ser demasiado conservativos, não impedindo que a solução óptima continue a apresentar grande sensibilidade às perturbações [1].

A necessidade de introduzir incerteza nos processos de optimização resultou, de um modo geral, em duas metodologias – optimização robusta (RDO – *robust design optimization*) e optimização baseada na fiabilidade (RBDO – *reliability-based design optimization*). Enquanto que a RBDO procura uma solução que minimize a probabilidade de falha tendo em conta constrangimentos de fiabilidade, a RDO tem como objectivo apresentar soluções robustas. O conceito de robustez surgiu no início da década de 80 quando Taguchi apresentou o primeiro método de desenvolvimento de um projeto tendo em conta a incerteza associada aos parâmetros de interesse [2]. A RDO é um método que procura minimizar a variabilidade em torno do resultado pretendido, tendo em conta a incerteza associada aos seus componentes bem como a outros parâmetros de projecto. A combinação desta última com os métodos de optimização topológica resulta na optimização topológica robusta (RTO – *robust topology optimization*), uma área que tem sido alvo de inúmeros trabalhos por parte de investigadores nos últimos anos e no qual se insere a presente dissertação.

1.1. Motivação

Grande parte da investigação na área da otimização estrutural feita até aos dias de hoje concentrou-se em problemas determinísticos, ignorando as inerentes incertezas associadas à maioria dos projetos de engenharia. Incertezas essas que podem ser associadas à volatilidade da informação a recolher do mundo real, ou à impossibilidade de medir/estimar com exatidão os diversos parâmetros com interesse para o projeto.

O complexo ambiente onde a grande maioria das aplicações de engenharia são introduzidas não permite pôr de parte as hipotéticas variações da informação recolhida, que por mais insignificantes que sejam podem tornar a solução obtida através da otimização clássica sem qualquer sentido prático. A consequente necessidade de introduzir incerteza nos parâmetros de projeto deu origem à Otimização Robusta, uma área que tem vindo a despertar grande interesse por parte de investigadores devido aos avanços tecnológicos não só na área dos materiais, mas também nos processos de fabrico [1].

1.2. Objectivos

Será objectivo desta dissertação dar continuidade ao trabalho realizado por André Teixeira [3], que desenvolveu uma metodologia para otimizar topologicamente uma treliça tendo em conta a incerteza do módulo de elasticidade dos seus elementos. Procurar-se-á expandir este método para casos em que a incerteza ocorre também nas coordenadas dos nós. O método será testado não só em otimização 2D mas também em domínios 3D, um tópico ainda muito pouco explorado que é exemplificado em [4] e [5]. Tal como em [3], será utilizado o PROAES, um programa em linguagem MATLAB/Octave desenvolvido no DEMI com várias funcionalidades, nomeadamente a capacidade de analisar modelos estruturais – Barra 2D, Barra 3D, Viga 2D e Viga 3D – pelo método dos elementos finitos, e o cálculo de derivadas de medidas de desempenho estrutural em relação a variáveis de projeto.

1.3. Estrutura

A presente dissertação encontra-se estruturada em 5 capítulos. No capítulo 1 são descritos os objectivos deste trabalho e qual a sua motivação. No capítulo 2 é apresentado um enquadramento histórico da optimização estrutural, seguido de uma descrição de alguns conceitos sobre a optimização estrutural clássica e sobre dois métodos de optimização considerando incerteza – RBDO e RDO. Para cada um destes métodos é aqui também exposto o estado da arte. No capítulo 3 é descrito o método que será usado na dissertação e exemplificada a sua aplicação através de um exemplo. No capítulo 4 são apresentados os resultados de optimizações de estruturas

bidimensionais, bem como um exemplo de otimização 3D. O capítulo 5 está reservado às conclusões e a sugestões para futuros trabalhos.

2. Otimização Estrutural

2.1. História

A otimização como conceito matemático teve a sua origem em 1826 quando Fourier procurou otimizar uma função linear sujeita a restrições lineares (programação linear). No entanto foi necessário mais de um século para que se notasse a importância prática destes problemas, quando em 1939 Kantorovich criou o primeiro algoritmo para a sua resolução [6].

A otimização associada ao projeto estrutural deu os primeiros passos através dos trabalhos de otimização estrutural de Maxwell (1864) [7] e Michell (1904) [8], mas foi nas décadas de 40 e 50 que acontecimentos históricos como a 2ª Guerra Mundial, o início da exploração espacial e o aparecimento dos primeiros computadores digitais deram um grande impulso aos métodos numéricos de otimização estrutural, sendo que foi também nesta altura que foi desenvolvido o método dos elementos finitos, uma das mais importantes ferramentas da mecânica estrutural. Em 1960 Lucien Schmit publicou em [9] um método inovador onde combina a programação matemática com o método dos elementos finitos, tendo sido essa a base da maioria dos métodos de otimização estrutural desenvolvidos daí em diante.

Na década de 60 a otimização era utilizada em fases mais adiantadas de projeto, onde as variáveis consideradas eram, por exemplo, o comprimento ou a espessura dos elementos da estrutura - Otimização de dimensões (*Sizing optimization*). De modo a poder introduzir a otimização em fases mais precoces de projeto, nos anos 70 começa a surgir maior interesse na otimização de forma (*Shape optimization*), onde as variáveis de projeto definem a fronteira do material dos elementos da estrutura a partir de topologias predefinidas, ou, para o caso específico de treliças, definem a posição dos nós.

Nos anos 80 começam a surgir os primeiros trabalhos de investigação científica relevantes na área da otimização topológica [10][11], que pode ser descrita como uma otimização que define a distribuição ótima de material dentro do domínio contínuo considerado inicialmente. No entanto, para estruturas reticuladas, este tipo de otimização pode ser feito a partir de meios discretos através do método *Ground Structure*, onde se procura descobrir qual a distribuição ótima de áreas de secção pelos vários elementos, a partir de uma topologia inicial com um número de barras predefinido. Na estrutura final ficarão apenas os elementos que tenham área superior a um mínimo admissível.

A otimização topológica, não só por ser o método mais recente, mas também por revelar ser de grande utilidade na área da mecânica estrutural, é nos dias de hoje o método mais explorado por parte de engenheiros e investigadores.

2.2. Otimização clássica

A introdução de modelos matemáticos, representativos dos sistemas em estudo, veio trazer alguma formalidade ao processo iterativo presente nas complexas fases de projecto. Nos métodos mais convencionais a definição e actualização das variáveis de projecto em cada iteração recorria a métodos heurísticos e à experiência do projectista (Figura 1-a), enquanto que num processo de optimização essa definição é feita através de algoritmos que, gerando vários conjuntos de variáveis de projecto, verificam a tendência do problema e direccionam as variáveis para valores que permitem alcançar o valor óptimo da função objectivo, tendo em conta os constrangimentos impostos (Figura 1-b) [12].

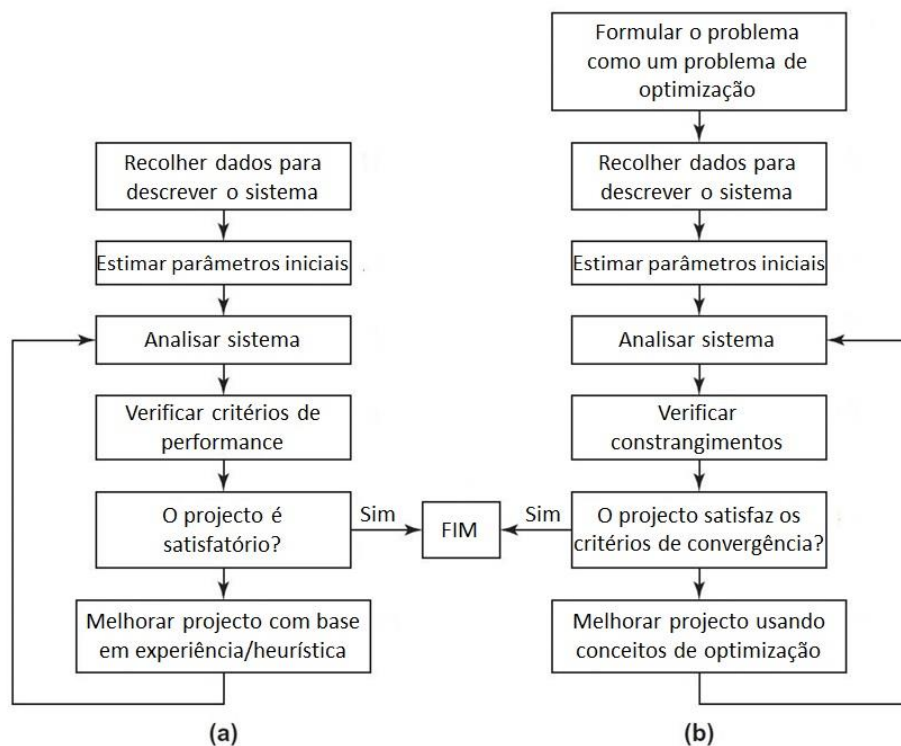


Figura 1 – (a) método convencional de projecto; (b) método de optimização de projecto; [12]

A formulação standard de um problema de optimização pode ser expressa da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
& \min_x && f(x) \\
& \text{sujeito a} && \\
& && g_j(x) \leq 0 ; j = 1, \dots, m \\
& && h_k(x) = 0 ; k = 1, \dots, p \\
& && x_i^{min} \leq x_i \leq x_i^{max} ; i = 1, \dots, n
\end{aligned} \tag{1}$$

Onde se procura minimizar uma função objectivo $f(x)$ sujeita a m constrangimentos de desigualdade $g_j(x)$ e a p constrangimentos de igualdade $h_k(x)$. O problema é função das n variáveis de projecto x_i às quais se impõe um valor máximo x_i^{max} e um valor mínimo x_i^{min} . As funções do problema – função objectivo e restrições – dependem apenas das variáveis de projecto, sendo que estas são em maior número que o número de constrangimentos de igualdade, caso contrário o sistema de equações será indeterminado (mais constrangimentos que variáveis de projecto) ou terá uma solução única (igual número de constrangimentos e variáveis de projecto). Quanto aos constrangimentos de desigualdade não existem quaisquer restrições.

Em optimização de estruturas é bastante comum a função objectivo descrever o peso ou o custo de uma estrutura, no entanto poderá ter outros significados consoante o problema em análise. O mesmo se aplica aos constrangimentos, que podem estar relacionados com os deslocamentos, as tensões, as frequências naturais, etc. A função objectivo e os constrangimentos dependem, explícita ou implicitamente, das variáveis de projecto, que são quem define o tipo de optimização. A optimização dimensional (sizing optimization) utiliza variáveis que definem a espessura de um elemento, sem alterar a forma ou topologia da estrutura inicial (Figura 2). Neste caso as variáveis podem tomar valor discretos, quando, por exemplo, o problema está sujeito ao uso de componentes normalizados, ou valores contínuos apenas limitados pelos constrangimentos impostos. Este tipo de optimização é também bastante utilizado em materiais compósitos, procurando optimizar a espessura de placas, o número de lâminas, ou a orientação das fibras de cada lâmina [13]

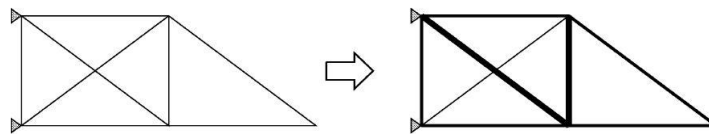


Figura 2 – Optimização Dimensional [14]

As variáveis de projecto podem também definir o contorno/forma dos limites de uma estrutura predefinida (Figura 3.a), ou, para o caso de treliças, definir a posição dos nós (Figura 3.b). Tratam-se de variáveis contínuas, também designadas variáveis geométricas, e definem a

optimização de forma (*shape optimization*). Este tipo de optimização está bastante dependente da estrutura inicial, uma vez que esta mantém a sua topologia ao longo da optimização, ou seja, partindo de uma topologia sub-ótima o resultado final será também não óptimo.

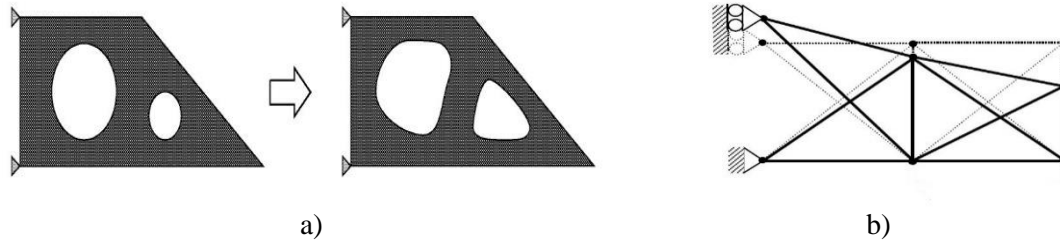


Figura 3 – a) Optimização de forma: variáveis definem a fronteira do material [14]; b) Optimização de forma: variáveis definem a posição dos nós [13].

A limitação que uma topologia fixa provoca nas optimizações de forma e de dimensão foi ultrapassada com a introdução de variáveis topológicas, originando o método de optimização mais recente, a optimização topológica. Este tipo de optimização recorre a um meio contínuo onde está disposta uma malha fina de elementos finitos, cuja densidade é dada pelas variáveis de projecto booleanas após a análise de elementos finitos – 0 significa material inexistente/desnecessário; 1 significa existência de material com máxima densidade (Fig 4.a). A optimização topológica pode ser também aplicada a meios discretos, nesse caso aplica-se a *Ground Structure Approach*, utilizada especificamente para optimização de treliças. Neste caso, partindo de uma estrutura com vários elementos definidos entre os nós existentes, o método procura a distribuição óptima das áreas de secção pelos vários elementos, sendo que apenas figuram na estrutura final os elementos com uma área acima de um mínimo estipulado (Fig 4.b).

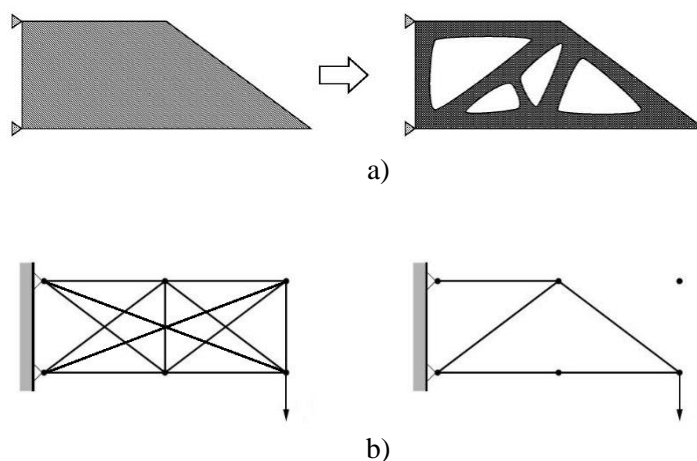


Figura 4 – a) Optimização topológica baseado na distribuição de material [14]; b) Optimização topológica *Ground Structure Approach* [15].

Estes três métodos de optimização são, de certo modo, complementares entre si, visto que podem ser aplicados em fases diferentes de projecto (Figura 5). Por exemplo a optimização topológica é normalmente aplicada em fases de projecto bastante precoces, dada a grande liberdade que tem para definir uma estrutura. Por outro lado, a optimização dimensional é aplicada em fases relativamente avançadas, visto que, para ser aplicada, a topologia e a forma da estrutura já devem estar praticamente definidas. Um bom projecto é, por isso, resultado de uma boa combinação de métodos de optimização.

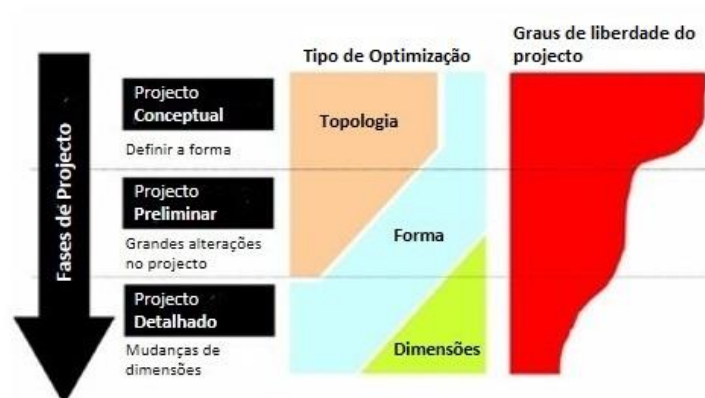


Figura 5- Optimização em cada fase de projecto [16].

2.3. Optimização considerando incerteza

As tolerâncias de fabrico, o ambiente envolvente, os carregamentos e as propriedades dos materiais constituintes são alguns exemplos de fontes de incerteza que devem ser tidos em conta durante o projecto de uma estrutura. Negligenciar ou desconhecer a incerteza de parâmetros pode levar a projectos demasiado arriscados ou, pelo contrário, excessivamente conservativos.

Gerir adequadamente a incerteza durante um projecto de engenharia passa por 3 etapas:

1. Quantificar matematicamente as incertezas. Para esta tarefa é bastante comum ser utilizada a teoria da probabilidade, descrevendo a incerteza através de variáveis aleatórias e de distribuições probabilísticas.
2. Analisar e quantificar a influência da incerteza na performance da estrutura. Para além de ajudar os engenheiros a perceber o impacto que as incertezas têm num projecto, permite avaliar algumas características do mesmo, como a fiabilidade e a robustez.
3. Atenuar os efeitos da incerteza através da escolha apropriada das variáveis de projecto. Trata-se de um processo iterativo onde o projecto vai sofrendo actualizações sucessivas até estar optimizado.

Tendo em conta estas etapas, vários foram os métodos que foram surgindo para lidar com a incerteza, destacando-se a optimização baseada na fiabilidade (RBDO – *Reliability-Based Design Optimization*) e a optimização robusta (RDO – *Robust Design Optimization*), que podem utilizar métodos probabilísticos e que têm vindo a ganhar cada vez mais popularidade.

2.3.1. Optimização baseada na fiabilidade – RBDO

Na RBDO a fiabilidade pode ser definida como a probabilidade de um sistema funcionar sem falhas durante um período de tempo especificado e sujeito às condições impostas. Neste método são adicionados constrangimentos probabilísticos que, relacionados com os parâmetros incertos do problema, definem a probabilidade de falha de uma estrutura. Esta probabilidade é definida por uma função denominada estado limite, e pode ser de três tipos [17]:

1. Estado limite final: relacionado com a perda de capacidade da estrutura em suportar carregamentos.
2. Estado limite de utilização: alusivo à degradação do material e/ou componentes da estrutura, que já não consegue desempenhar as funções para que foi projectada.
3. Estado limite de fadiga: relativo à perda de rigidez da estrutura quando sujeita a repetidos ciclos de tensão.

Em mecânica estrutural, uma função de estado limite simples pode ser definida recorrendo apenas a duas variáveis: a que define a resistência/capacidade da estrutura face ao carregamento (R) e a que define os efeitos desse carregamento (Q). O estado limite pode então ser definido como a capacidade da estrutura em satisfazer os requisitos de projecto:

- $Q > R$ – A estrutura não cumpre os requisitos de projecto.
- $R > Q$ – A estrutura cumpre os requisitos de projecto.

A probabilidade de falha é então definida matematicamente da seguinte forma,

$$P_f = P(R < Q) = P(R - Q < 0) = P\left(\frac{R}{Q} < 1\right) \quad (2)$$

As variáveis R e Q são definidas recorrendo a funções densidade de probabilidade (FDP) a partir das quais é então possível o cálculo da probabilidade de falha (Figura 6).



Figura 6 – Gráfico representativo do cálculo da probabilidade de falha; FDP – Função Densidade de Probabilidade [18].

A função de estado limite pode ser expressa em função de variáveis (x_1, x_2, \dots, x_n) que caracterizam a resistência da estrutura e os carregamentos a que está sujeita,

$$g(x) = R(x) - Q(x) \quad (3)$$

Esta função tem de ser maior que zero, definindo assim a região admissível do espaço de resultados do problema, representada na figura 7 para um problema com apenas duas variáveis.

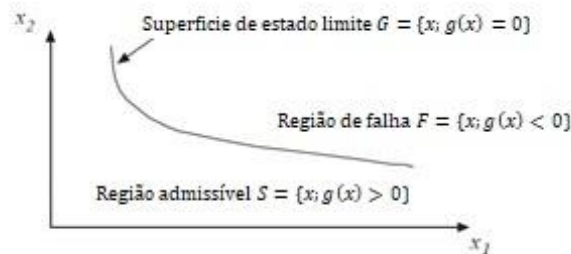


Figura 7 – Região admissível e região de falha; x -variáveis de projecto, $g(x)$ -função de estado limite [17]

O cálculo da probabilidade de falha definida em (2) é feito recorrendo à seguinte equação,

$$P_f = \int_{g(x) \leq 0} f_x(x) dx \quad (4)$$

Esta fórmula recorre à função densidade de probabilidade conjunta das variáveis (x_1, x_2, \dots, x_n) , $f_x(x)$, sendo apenas aplicável a variáveis contínuas.

Apesar de aparentemente simples, o cálculo integral necessário para chegar à probabilidade de falha (4) apresenta grande dificuldade de resolução na maioria dos casos, sendo necessárias

técnicas numéricas especiais que podem, mesmo assim, não ser adequadas [18]. Para ultrapassar esta dificuldade foram criados vários índices de fiabilidade, um método alternativo para analisar a equação (4). O mais recente foi proposto por Hasofer e Lind [19], tratando-se da distância mais curta entre a origem e um ponto na superfície de estado limite, $g(x) = 0$, também designado de *Most Probable Point* (MPP),

$$\beta = \frac{\mu_R - \mu_Q}{\sqrt{\sigma_R^2 - \sigma_Q^2}} \quad (5)$$

Visto que só necessita dos dois primeiros momentos das variáveis R e Q (média e desvio padrão), o índice β é um método de segunda ordem que avalia a fiabilidade estrutural, sendo aplicável quando a função de estado limite é semelhante à da equação (3) e as variáveis R e Q são independentes e definidas através de distribuições normais. As mesmas condições são necessárias para que haja uma relação directa entre a probabilidade de falha, P_f , e o índice de fiabilidade,

$$P_f = \Phi(-\beta) \quad (6)$$

No entanto, esta igualdade apenas se verifica quando P_f é linear. Dois dos métodos mais comuns para conseguir uma estimativa de P_f e de β para casos em que a função $g(x)$ é não linear são o *First Order Reliability Method* (FORM) e o *Second Order Reliability Method* (SORM). A estratégia destes métodos passa pela substituição da função estado limite, $g(x)$, por uma função linear que aproxima $g(x)$ no MPP, aproximação essa que é obtida através de uma expansão de Taylor de primeira ordem, no caso do FORM, e de segunda ordem no caso do SORM. Apesar da maior precisão do SORM (Figura 8), a sua utilização pode não ser tão eficiente quando comparado com o FORM, dada a necessidade de calcular segundas derivadas. Quando estas são calculadas numericamente o SORM necessita de um número consideravelmente maior de iterações [20].

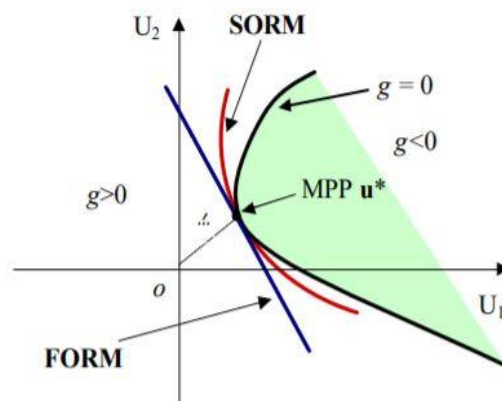


Figura 8 – Comparação entre o FORM e o SORM [20].

Uma otimização tendo em conta a fiabilidade pode ser definida da seguinte forma

$$\begin{aligned}
 & \min_x && f(x) \\
 & \text{sujeito a} && \\
 & && P_f(g(x) \leq 0) \leq P_{f_{\text{máx}}} \quad (7) \\
 & && x_i^{\text{min}} \leq x_i \leq x_i^{\text{max}} ; i = 1, \dots, n
 \end{aligned}$$

Onde se procura minimizar uma função objectivo $f(x)$ que depende das n variáveis de projecto que se encontram limitadas por um valor máximo e um valor mínimo, x_i^{max} e x_i^{min} . Estas variáveis terão que ser estabelecidas de modo a respeitar o constrangimento relacionado com a probabilidade de falha, que deve ser menor que um valor estabelecido, $P_{f_{\text{máx}}}$.

- Estado da Arte

Na última década vários têm sido os trabalhos da comunidade científica em torno do método RBDO.

Halil et al. [21] otimiza estruturas offshore com constrangimentos de fiabilidade baseados nos estados limite associados às cargas críticas, às frequências naturais e à instabilidade. O constrangimento relativo às frequências naturais é um meio de ter em conta o efeito da resposta dinâmica da estrutura às cargas cíclicas a que está sujeita (ondas marítimas), visto que a otimização é feita considerando apenas respostas estáticas. O processo é baseado num sistema de algoritmos integrados, que procedem à análise estrutural (SAPO), à otimização (SQP) e à análise de fiabilidade (FORM).

Yang et al. [22] propôs a aplicação de um algoritmo PSO – *Particle Swarm Optimization* – modificado para obter o design ótimo de uma treliça de 10 barras. O algoritmo PSO simula a adaptação/integração de seres vivos em populações da sua espécie (enxames, cardumes, etc), no entanto este é aplicado nos mais variados domínios, entre eles a otimização estrutural. Neste trabalho a sua modificação passa pela introdução de estímulos que orientam a procura em direcção à superfície de estado limite (*boundary-approaching*). Esta é uma abordagem semelhante à formulada também por Yang [23], onde ao PSO é acrescentada, para além da *boundary-approaching*, a capacidade de *auto-tuning*, que se trata da capacidade do algoritmo ir ajustando automaticamente alguns parâmetros ao longo da otimização.

Coelho et al. [24] apresenta uma formulação para a resolução de otimizações multiobjectivo, um tipo de otimização em que não existe – ou é bastante improvável que haja – uma única solução que satisfaça da melhor maneira todos os objectivos. É por isso utilizado o conceito de *Pareto dominance*, onde são consideradas múltiplas soluções (*Pareto set*) e cada solução maximiza a qualidade de um ou mais objectivos/constrangimentos em detrimento de outros objectivos/constrangimentos. O método passa por incorporar a formulação de otimização de fiabilidade numa variante do algoritmo genético para otimização multiobjectivo – *Non-dominated sorting genetic algorithm II* (NSGA II) – e de seguida utilizar uma expansão em caos polinomial de modo a decompor as respostas aleatórias, diminuindo assim o número de avaliações necessárias.

Tsai et al. [25] a otimização de fiabilidade recorre à ferramenta PDS – *Probabilistic Design System* – do ANSYS para fazer as análises de fiabilidade e para obter os valores óptimos das variáveis de projecto, variáveis essas que são formuladas probabilisticamente com base na relação entre as tensões e a fiabilidade da estrutura. Os modelos de otimização são formulados a partir da teoria SSI – *Stress-strength interference* – em que o modelo usa o *universal generating function method* para que a tensão e a resistência possam ser representadas por variáveis aleatórias contínuas ou discretas.

Liu et al. [26] desenvolveu uma técnica de análise de fiabilidade baseada num modelo híbrido composto por modelos de probabilidade, onde os parâmetros incertos são tratados como variáveis aleatórias baseadas em distribuições de probabilidade, e por modelos de elipsoides convexas, onde as hipóteses de solução se encontram num intervalo definido por funções convexas. Para evitar que a complexidade do modelo híbrido leve a um processo de otimização pouco eficiente, é criado um modelo equivalente que posteriormente é solucionado recorrendo ao algoritmo SQP.

Xia et al. [27] conjuga o modelo probabilístico com variáveis intervalares, que, tal como grande parte dos métodos híbridos, apresenta grandes custos computacionais, não só na avaliação da função objectivo como na análise de fiabilidade. Para melhorar a eficiência computacional é aplicada uma HPRMM – *Hybrid Perturbation Random Moment Method* – para estimar o valor da função objectivo, enquanto que a estimativa da fiabilidade é obtida através da HPIMM – *Hybrid Perturbation Inverse Mapping Method*.

Meng et al. [28] desenvolve um método híbrido baseado no SAP (*Sequential Approximate Programming*), que se baseia na aplicação de um critério *distance-checking* para medir a distância entre o ponto em iteração e os constrangimentos probabilísticos, seguido da aplicação do método convexo aproximado para diminuir o número de avaliações da função e, conseqüentemente,

aumentar a eficiência e reduzir o custo computacional. O método apresenta a eficiência do SAP e a precisão do SORM. Esta abordagem é similar à apresentada por Meng [29], onde é proposta uma versão melhorada do SAP que recorre a um método baseado no SORM.

Cheng et al. [30] procura minimizar o peso de uma treliça de aço sujeita a constrangimentos determinísticos de tensão e deflexão, para além do constrangimento probabilístico de falha da estrutura. Enquanto que os determinísticos são analisados através do método dos elementos finitos, o constrangimento probabilístico recorre ao método de primeira ordem FORM para ser verificado. Após se obter os valores das funções dos constrangimentos, a optimização de fiabilidade é resolvida recorrendo ao algoritmo genético convencional.

Ho-Huu et al. [31] propôs um método para optimização multiobjectivo dividido em duas etapas. Na primeira são obtidas múltiplas soluções do problema através de uma variante do algoritmo genético (NSGA II). As soluções obtidas na primeira etapa são avaliadas numa segunda etapa quanto à sua fiabilidade, tendo em conta a incerteza dos parâmetros, através do método FORM.

Keshtegar et al. [32] utiliza o método FORM juntamente com o método de procura de Armijo (*finite-based Armijo line search*), que se trata de um algoritmo que calcula a direcção e tamanho do passo a dar em cada iteração (*steplength*).

2.3.2. Optimização Robusta – RDO

O conceito de robustez surgiu no início da década de 80 quando Taguchi apresentou um dos primeiros métodos de desenvolvimento de um produto ou processo tendo em conta a incerteza associada [33]. De um modo geral a sua metodologia tem três objectivos [34]:

- Obter produtos insensíveis às características do ambiente que podem afetar a sua performance;
- Obter produtos insensíveis á variabilidade dos seus componentes;
- Determinar as condições de funcionamento para obter resultados o mais próximos possível do pretendido, minimizando a variabilidade em torno desse valor;

A robustez pode então ser definida como a insensibilidade que o resultado de uma otimização apresenta relativamente à incerteza dos parâmetros de projecto. Um projecto robusto assegura que o desempenho (*performance*) médio da estrutura é óptimo e que a sua variação é mínima.

Em otimização topológica de treliças habitualmente procura-se minimizar a flexibilidade de uma estrutura sujeita a constrangimentos de volume e de área,

$$\begin{aligned}
 & \min_{A_i} && C(A_i) = f^T d \\
 & \text{sujeito a} && \sum_i^n A_i L_i \leq V_{adm}, \quad \frac{V_{adm}}{V_0} = p \\
 & && A_{min} \leq A_i \leq A_{m\acute{a}x}; \quad i = 1, \dots, n
 \end{aligned} \tag{8}$$

Onde f são os carregamentos externos, e d os deslocamentos nodais. O constrangimento de área é relativo às secções transversais dos n elementos da estrutura, que se encontram limitadas por um máximo, A_{max} , e um mínimo, A_{min} . O volume é calculado através das áreas de secção transversal, A_i , e do comprimento dos elementos, L_i , e o seu valor admissível, V_{adm} , é definido recorrendo a uma fração volúmica, p , de um volume de referência, V_0 .

Numa otimização robusta procura minimizar-se a dispersão da função objectivo tendo em conta as incertezas associadas, uma vez que a dispersão é equivalente à sensibilidade. Isto implica que o desvio padrão da função objectivo deve ser reduzido. Uma vez que o valor esperado da função objectivo também deve ser minimizado, a otimização robusta torna-se numa otimização multiobjectivo,

$$\begin{cases} \min \mu_c = E(C(x)) \\ \min \sigma_c = \sqrt{E[(C(x) - \mu_c)^2]} \end{cases} \tag{9}$$

No entanto é possível combinar estas duas minimizações numa única função objectivo, recorrendo à soma ponderada de ambas,

$$C(x) = \omega_\mu \mu_c + \omega_\sigma \sigma_c \tag{10}$$

onde ω_μ e ω_σ são os coeficientes de peso que permitem dar mais importância à média, μ_c , ou ao desvio padrão, σ_c .

Para se obter uma função f normalizada é necessário substituir os coeficientes de peso por $\omega_\mu = \frac{\alpha}{\mu^*}$ e $\omega_\sigma = \frac{1-\alpha}{\sigma^*}$,

$$C = \alpha \frac{\mu_c}{\mu^*} + (1 - \alpha) \frac{\sigma_c}{\sigma^*} \quad (11)$$

O parâmetro α varia entre 0 e 1 e serve para controlar a importância a dar à robustez – quanto menor for α maior o nível de robustez – e os parâmetros μ^* e σ^* , que têm apenas o propósito da normalização, são calculados através de otimizações com $\alpha = 1$ e $\alpha = 0$, respectivamente.

Um problema de otimização topológica robusta de treliças tem então a seguinte forma,

$$\begin{aligned} \min_{A_i} \quad & C = \alpha \frac{\mu_c}{\mu^*} + (1 - \alpha) \frac{\sigma_c}{\sigma^*} \\ \text{sujeito a} \quad & \sum_i^n A_i L_i \leq V_{adm}, \quad \frac{V_{adm}}{V_0} = p \\ & A_{min} \leq A_i \leq A_{máx}; \quad i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (12)$$

Para casos em que as forças aplicadas são constantes, o valor esperado da flexibilidade, μ_c , pode ser calculado a partir do valor esperado dos deslocamentos nos nós com a respectiva força aplicada, uma vez que $C = f^T d$. Já o desvio padrão, σ_c , apresenta, na maioria das vezes, grandes dificuldades relativamente ao seu cálculo analítico [1], sendo por isso usual o uso de técnicas de aproximação. A utilizada neste trabalho será a aproximação demonstrada em [12], onde se recorre a uma expansão de Taylor de primeira ordem da função objectivo $f(x)$ no ponto μ_x ,

$$f(x) \cong f(\mu_x) + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) (x_i - \mu_{x_i}) \quad (13)$$

para se calcular o desvio padrão como se demonstra de seguida,

$$\begin{aligned} \sigma_f^2 &\cong \text{Var} \left[f(\mu_x) + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) (x_i - \mu_{x_i}) \right] \\ &= \text{Var}[f(\mu_x)] + \text{Var} \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) (x_i - \mu_{x_i}) \right] \\ &= 0 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \text{Var}[x_i] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \sigma_{x_i}^2 \\
\sigma_f &= \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \sigma_{x_i}^2} \tag{14}
\end{aligned}$$

Como referido anteriormente, a robustez mede a sensibilidade que uma solução apresenta relativamente a pequenas variações dos parâmetros de projecto. A análise de sensibilidade consiste na avaliação numérica das derivadas parciais da função objectivo em ordem às variáveis de projecto (vector gradiente),

$$\nabla f(x) = \left[\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \quad \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} \quad \dots \quad \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \right]^T \tag{15}$$

O cálculo analítico do gradiente de funções complexas pode ser bastante complicado ou mesmo impossível de se efectuar, usando-se, por isso, métodos de aproximação para conseguir obter resultados. Um dos métodos mais eficazes é o método das diferenças finitas, que, recorrendo a uma aproximação em série de Taylor da função $f(x)$, desenvolve várias expressões para o cálculo da derivada:

$$\text{Diferenças finitas progressivas: } \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = \frac{f(x_i + \Delta x_i) - f(x_i)}{\Delta x_i} \tag{16}$$

$$\text{Diferenças finitas regressivas: } \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_i - \Delta x_i)}{\Delta x_i} \tag{17}$$

$$\text{Diferenças finitas centrais: } \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = \frac{f(x_i + \Delta x_i) - f(x_i - \Delta x_i)}{2\Delta x_i} \tag{18}$$

A definição do termo de perturbação - Δx_i - é de grande importância, uma vez que existem dois tipos de erro associados a uma má definição deste parâmetro. Para perturbações com passo muito grande pode surgir o erro por truncamento, que resulta da negligência de termos da expansão de Taylor [35]. Para um passo demasiado pequeno surgirão erros de arredondamento devido a avaliação numérica imprecisa, uma perturbação na ordem de 1% é normalmente uma escolha com bons resultados caso a função não seja excessivamente não linear [13].

Este tipo de análise é normalmente a etapa mais exigente em termos computacionais num processo de optimização, no entanto é de extrema importância visto que é usada com grande frequência por métodos de programação matemática.

- Estado da Arte

O crescente interesse no tema faz da optimização robusta um tópico bastante explorado e que tem suscitado grande interesse no domínio da investigação. Mais especificamente no tema da optimização topológica robusta, vários têm sido os trabalhos publicados nos últimos anos.

Ben-Tal e Nemirovski [36] procuram optimizar a rigidez de uma estrutura sujeita a vários casos de carregamento e a pequenas forças com incerteza na intensidade e direcção que podem actuar em qualquer um dos nós activos da treliça, recorrendo à programação semidefinida.

Sandgren e Cameron [37] recorrem a uma combinação entre o método de Monte Carlo e o algoritmo genético para minimizar o peso de uma estrutura. O problema está sujeito a constrangimentos de tensão e deslocamento, e considera incertezas na geometria e material da estrutura, bem como no carregamento.

Guest e Igusa [38] apresentam um algoritmo para optimizar estruturas com incerteza no carregamento ou na posição dos nós. O carregamento apresenta incerteza na intensidade e localização e é modelado probabilisticamente, sendo que o seu efeito é quantificado através de perturbações estocásticas. Para o caso da incerteza na posição dos nós é demonstrado que, para pequenas incertezas, o problema pode ser reformulado através de um problema equivalente com incerteza nas forças.

Kanno e Guo [39] recorrem a uma optimização robusta formulada através de programação inteira mista (MIP). O método tem uma abordagem probabilística para representar a incerteza no carregamento, sendo que a optimização está sujeita a restrições de tensão, onde as áreas de secção são variáveis discretas.

Asadpoure et al. [40] apresentam um método onde é considerada a incerteza probabilística nas propriedades do material e na geometria da estrutura. Recorrendo a métodos de perturbação para quantificar a incerteza associada à rigidez da estrutura, o processo procura minimizar a função objectivo que é dada pela soma ponderada da média e desvio padrão da flexibilidade.

Guest et al [41] complementam o trabalho desenvolvido em [38] e [40] ao introduzir na função objectivo o efeito não linear da eventual instabilidade devida a desalinhamentos dos elementos estruturais. Para isso são introduzidos efeitos não lineares de 1ª ordem relativos à flambagem.

Kang e Bai [42] propõem um novo método para medir a robustez em treliças com incerteza no módulo de elasticidade e nas cargas aplicadas, baseado em modelos convexos não probabilísticos.

Richardson et al. [43] procuraram otimizar estruturas 2D e 3D, domínio contínuo e treliças, com incerteza no material, utilizando uma expansão do polinómio caos para propagar essa incerteza. Foi utilizado o método estocástico de elementos finitos e os parâmetros incertos foram modelados através de campos espaciais aleatórios e discretizados através de expansões de Karhunen-Loève.

Richardson et al. [44] formularam uma optimização multiobjectivo para treliças de modo a obter soluções ótimas de Pareto, procurando minimizar o valor esperado e o desvio padrão da flexibilidade.

Hashimoto e Kanno [45] focaram-se na optimização de treliças com incerteza nos nós, através de uma formulação do tipo “*worst case*”, onde se procura minimizar a flexibilidade da estrutura quando sujeita à combinação mais desfavorável dos parâmetros incertos, recorrendo para isso a programação semidefinida.

Changizi et al [46] desenvolveram um método de optimização para elementos viga baseado na tensão (*stress-based*) onde se consideram as incertezas geométricas da estrutura. O valor esperado da tensão é avaliado em pontos pré-estabelecidos cujo valor máximo é utilizado para expressar a resposta da estrutura. Resposta essa que é relacionada com o parâmetro incerto através de métodos analíticos e utilizando algoritmos baseados no gradiente.

Sun et al. [47] convertem os multiobjectivos de uma optimização em uma única função objectivo através de um modelo de decisão multicritério que faz uso do método relacional de grey e da análise de componentes principais. A optimização recorre ao método de Taguchi no seu processo iterativo.

Gao et al. [48] utilizaram um método para treliças que consiste em colocar nós na intersecção das trajectórias da 1ª e 3ª tensões principais, que são obtidas resolvendo o problema determinístico

equivalente. O modelo baseia-se em programação linear e recorre ao algoritmo do ponto interior.

Zhou et al. [49] consideram uma optimização composta por variáveis contínuas e descontínuas. Enquanto as primeiras são representadas por números reais, as segundas são definidas através de código binário. O processo de optimização recorre a um “*mix-coded*” do algoritmo genético.

Fu et al. [50] apresentam um método de optimização que procura minimizar o valor médio da flexibilidade de uma estrutura com incerteza na posição dos nós, incerteza essa que é modelada probabilisticamente. A técnica recorre ao método das perturbações de [38] e ao método da optimização topológica proporcional.

Liu et al. [51] procuram resolver casos de optimização com incerteza no carregamento recorrendo à optimização de dois níveis, onde o problema se divide em dois subproblemas que formam uma estrutura hierárquica. No problema “*lower level*” obtém-se o pior caso relativamente às múltiplas possibilidades de carregamento recorrendo à “*Wolfe duality*”, e de seguida, no “*upper level*” o problema de optimização é resolvido deterministicamente com o carregamento obtido no “*lower level*”.

Changizi e Jalalpour [52] propõem um algoritmo de optimização de estruturas com elementos viga tendo em conta incertezas no material ou na posição dos nós. Enquanto que a incerteza nos nós é modelada através de variáveis aleatórias independentes, o material tem um módulo de elasticidade cuja incerteza é expressa através de um campo aleatório. O algoritmo recorre ao método de perturbação estocástico para relacionar as incertezas e a resposta da estrutura, procurando optimizar a função objectivo que é dada pelo valor esperado e desvio padrão da flexibilidade.

Peng et al. [53] visam a optimização topológica baseada na distribuição de material com incerteza no carregamento recorrendo ao algoritmo de penalização SIMP e a um método de perturbação para calcular a resposta da estrutura na forma da média e desvio padrão da flexibilidade.

Zheng et al. [54] expõem um método de optimização para domínios contínuos com incerteza nas forças aplicadas cuja magnitude e direcção são dadas por uma distribuição normal. O método recorre a uma formulação semi-analítica para calcular a média e desvio padrão da flexibilidade da estrutura, cujos resultados são depois avaliados recorrendo a um índice de robustez dado por um coeficiente de variação genérico (GCV)

3. Método

Neste trabalho procurar-se-á otimizar topologicamente treliças utilizando o método *Ground Structure*. Será considerada a incerteza em alguns parâmetros de projecto – módulo de elasticidade e coordenadas dos nós – tendo como objectivo projectar estruturas robustas, ou seja, será aplicado um método de optimização topologica robusta de treliças. Para tal será utilizado o programa PROAES em conjunto com a *toolbox* de optimização do MATLAB (*optimtool*).

3.1. PROAES e Optimtool

O PROAES é um programa desenvolvido no DEMI, composto por um conjunto de módulos escritos em linguagem MATLAB com várias competências, como por exemplo:

- Realizar análises estruturais pelo método dos elementos finitos;
- Calcular derivadas de funções associadas às performances em ordem a variáveis de projecto – análise de sensibilidade;
- Optimizar modelos estruturais tendo em conta os constrangimentos definidos.

A análise de elementos finitos recorre a um ficheiro de dados com extensão **.inp** onde se define a estrutura a ser analisada – nós, elementos, materiais, apoios, cargas aplicadas, etc. Os resultados da análise são escritos pelo PROAES num ficheiro com extensão **.out** (Figura 9)

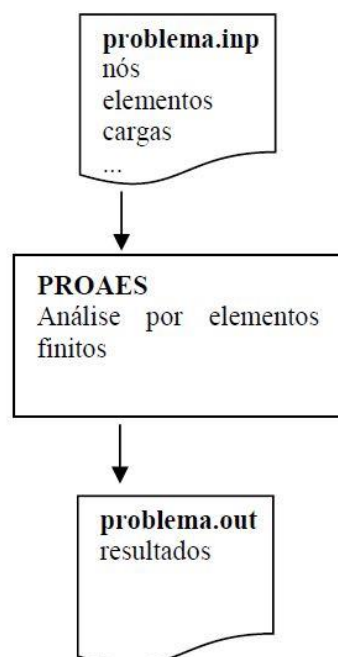


Figura 9 – PROAES: Análise de EF [55]

A análise da estrutura quanto à sua robustez é possível devido à capacidade do programa em calcular as derivadas das performances em ordem às variáveis de projecto do problema – análise de sensibilidades. Esta análise é feita através do método contínuo, que, para além de ser insensível ao valor do incremento das variáveis, apresenta resultados bastante precisos com uma rapidez consideravelmente superior à apresentada pelo método das diferenças finitas. O fluxograma da figura 10 esquematiza o funcionamento do programa.

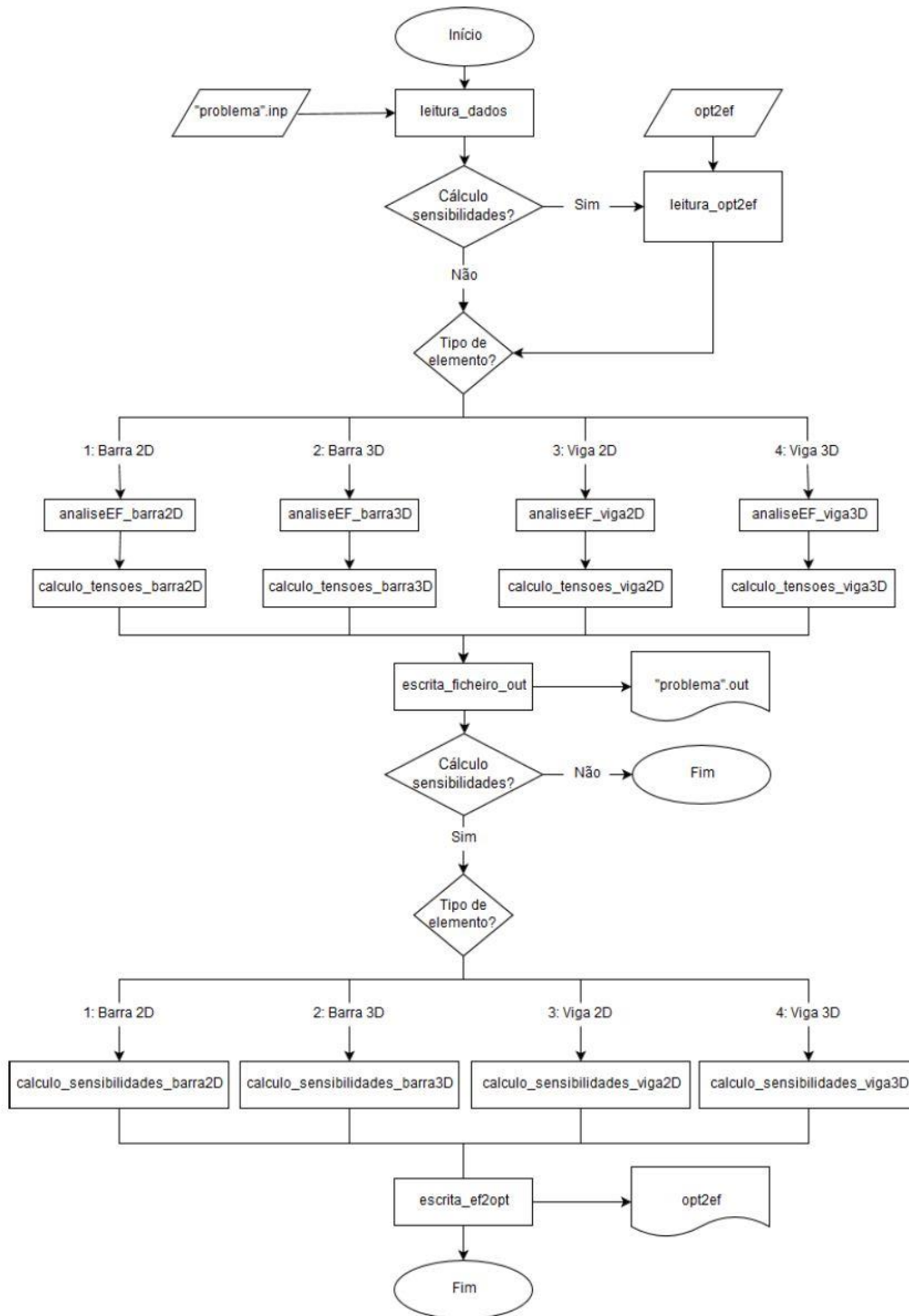


Figura 10 – PROAES e a análise de sensibilidades [55]

Relativamente à vertente de optimização, o PROAES trabalha em conjunto com a toolbox de optimização do MATLAB – *Optimtool* – sendo que neste caso para além do ficheiro **.inp** também é necessário definir os ficheiros “*myfun*” e “*mycon*”, ambos de extensão **.m**. A seguinte figura esquematiza a troca de informações entre o PROAES e o *optimtool*,

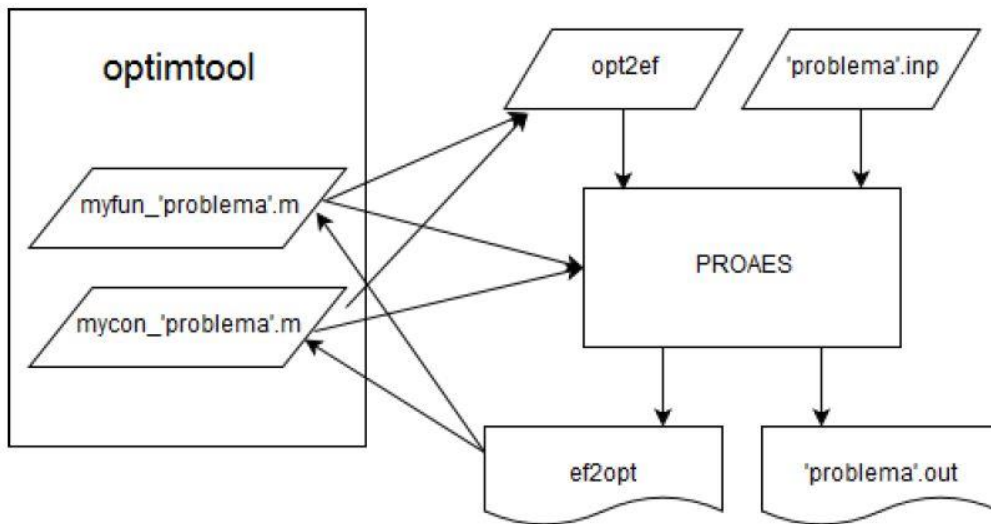


Figura 11 – Interação entre o PROAES e a *toolbox optimtool* [55]

Sendo que o “*opt2ef*” é um ficheiro necessário para o funcionamento da componente de optimização do PROAES, onde se definem o tipo de análise, o número de variáveis e o respectivo valor, e que performances se pretendem. Este ficheiro é automaticamente escrito quer pelo “*myfun*” quer pelo “*mycon*”. O ficheiro “*myfun*” irá escrever o “*opt2ef*” e de seguida executar o PROAES, fazendo não só a análise de elementos finitos, mas também o cálculo das sensibilidades e performances pretendidas. O ficheiro “*ef2opt*” resultante da análise irá permitir chegar aos valores da média e desvio padrão da flexibilidade, e consequentemente da própria flexibilidade (Figura 12). O “*ef2opt*” é o ficheiro onde são escritos os resultados por parte do PROAES após o cálculo da função objectivo. Este ficheiro permite verificar se a solução óptima foi obtida, se tal não se verificar o “*opt2ef*” é alterado e é feita uma nova análise. O processo é repetido até que não seja possível melhorar a estrutura sem violar um dos constrangimentos. Por sua vez, o ficheiro “*mycon*” é onde se define a restrição volúmica, sendo o seu funcionamento semelhante ao do “*myfun*”. Para uma explicação mais detalhada consultar [55].

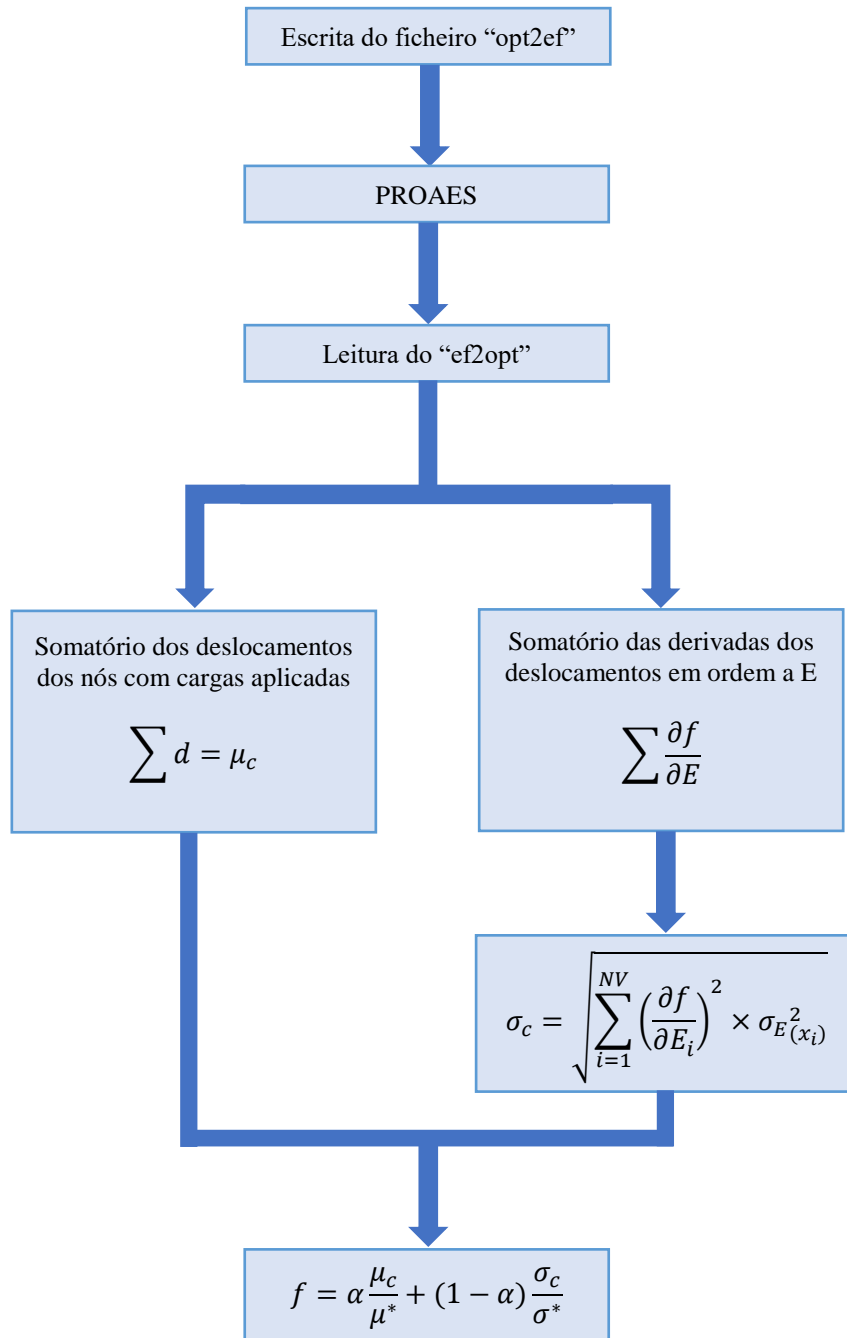


Figura 12 – Cálculos efectuados na função “myfun”

A *optimtool* é uma *toolbox* do MATLAB que disponibiliza algoritmos para a resolução de vários tipos de problemas de optimização (minimização linear e não linear, com e sem constrangimentos, minimização semi-infinita, etc). É aqui onde se definem o ponto inicial da optimização, o número máximo de iterações, as tolerâncias, o método de cálculo das derivadas, etc.

O algoritmo usado, definido através da *optimtool*, será o da Programação Quadrática Sequencial (*Sequential Quadratic Programming* – SQP). Trata-se de um algoritmo que, desde a

sua popularização na década de 70, é considerado um dos melhores métodos para a resolução de otimizações não lineares constringidas. Como o próprio nome indica, o método é uma técnica de otimização sequencial que, para obter a direção de busca, recorre a aproximações dadas por subproblemas de programação quadrática. Estes subproblemas são formados por uma função objectivo quadrática e por constringimentos lineares, recriando as propriedades do problema original em dado ponto, sendo a razão da sua utilização a relativa facilidade com que são resolvidos. O processo decorre de maneira iterativa, sendo de esperar que a sequência de aproximações venha a convergir na solução do problema [56].

3.2. Formulação

A formulação matemática dos problemas de otimização seguirá a que foi deduzida em 2.3.2.,

$$\begin{aligned} \min_{A_i} \quad & C = \alpha \frac{\mu_c}{\mu^*} + (1 - \alpha) \frac{\sigma_c}{\sigma^*} \\ \text{sujeito a} \quad & \sum_i^n A_i L_i \leq V_{adm}, \quad \frac{V_{adm}}{V_0} = p \\ & A_{min} \leq A_i \leq A_{m\acute{a}x}; \quad i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (19)$$

O constringimento relativo às áreas é definido na *optimtool*, onde são definidos os limites máximo e mínimo das áreas de secção transversal dos elementos. Relativamente à restrição volúmica, esta é definida no ficheiro “mycon”. O cálculo dos dois primeiros momentos da flexibilidade é feito como o descrito em 2.3.2., a média μ_c será o valor esperado de $C = f^T d$ e o desvio padrão σ_c será calculado recorrendo à fórmula (14).

3.2.1. Desvio padrão

Visto que o desvio padrão será calculado recorrendo a uma aproximação de primeira ordem, realizou-se um teste simples para verificar a sua precisão, que consistiu na análise de uma treliça de 38 barras (Figura 13), sujeita a uma carga pontual vertical, e com incerteza no módulo de elasticidade (E).

O valor do desvio padrão da flexibilidade calculado através da fórmula (14) foi comparado com o resultado obtido através do método de Monte-Carlo.

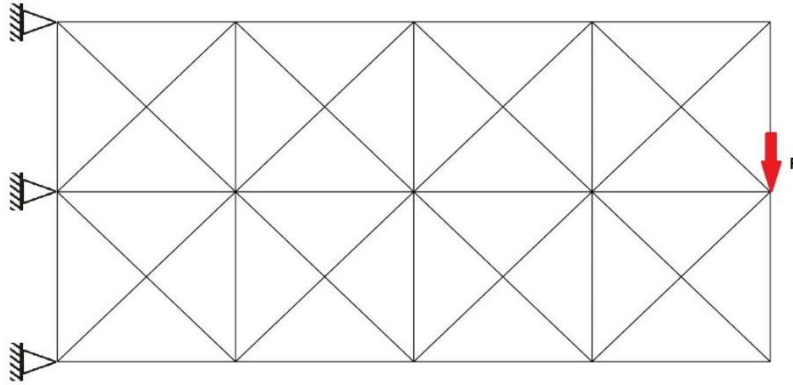


Figura 13 – Estrutura de 38 elementos com carga vertical

- Aproximação de 1ª ordem

Recorrendo a um ficheiro opt2ef definiu-se o tipo de análise – Performance e Sensibilidades; o número total de variáveis e o respectivo valor – 38 variáveis de projecto (área) e 38 variáveis com incerteza (E), para as quais se pretende obter as derivadas; o número de performances (uma) e que tipo de performance (deslocamento). O módulo de elasticidade considerado foi definido como tendo um valor médio de 210 GPa e um coeficiente de variação de 10% ($\sigma_E = 21$ GPa), ficando a equação (14) com a seguinte configuração

$$\sigma_c = \sqrt{\sum_{i=1}^{Var} \left(\frac{\partial f}{\partial E_i}\right)^2} \times (210 \times 10^8)^2 \quad (20)$$

- Monte-Carlo

O método de Monte-Carlo é um método estatístico que recorre a um número elevado de amostragens de uma variável aleatória de modo a estimar os parâmetros estatísticos de uma função dessa variável. Neste caso as variáveis são os módulos de elasticidade das 38 barras, consideradas independentes, e os seus valores são gerados respeitando uma distribuição normal com média de 210 GPa e desvio padrão de 21 GPa (Figura 14).

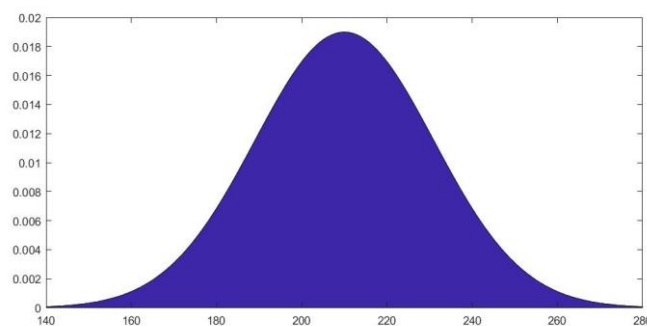


Figura 14 – Distribuição normal de E

Após se gerar 38 módulos de elasticidade estes são escritos no ficheiro opt2ef, seguindo-se a análise da estrutura com o PROAES. Foram realizadas 5 mil iterações, obtendo-se assim 5 mil valores do deslocamento, um valor que se mostrou suficiente para se obter convergência de valor do desvio padrão da flexibilidade da estrutura.

- Resultado

A comparação de resultados mostrou que o erro, calculado por comparação com os valores obtidos pela fórmula (14), é pequeno o suficiente – na ordem dos 2% (Figura 15) – para que o uso da aproximação seja considerado eficiente.

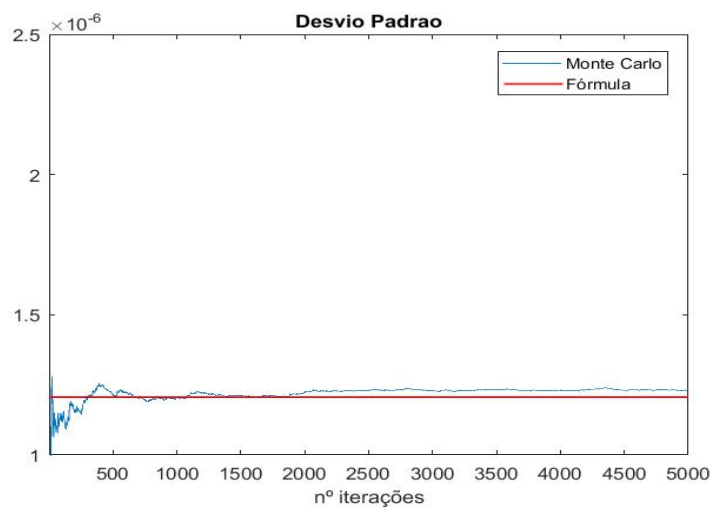


Figura 15-Convergência do valor do Desvio Padrão: 5000 iterações; erro de 2%

3.3. Exemplo de aplicação

Como exemplo do método anteriormente descrito, será de seguida apresentado o exemplo já estudado por André Teixeira em [3].

Neste exemplo submeteu-se a optimização uma treliça de 38 barras (Figura 16) com incerteza no módulo de elasticidade,

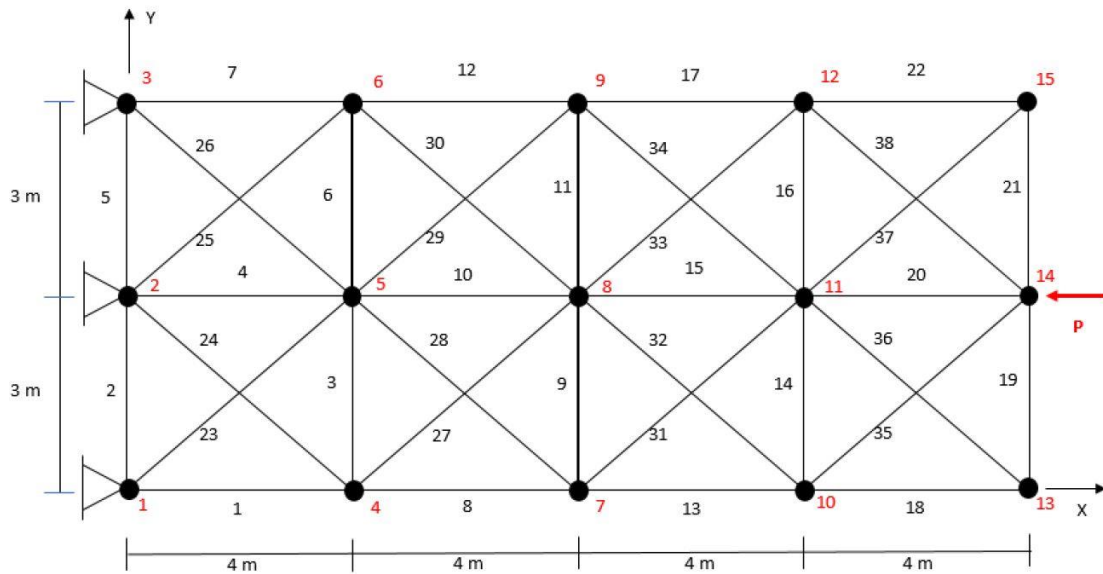


Figura 16 – Estrutura de 38 elementos com carga horizontal [3].

A estrutura é composta por 15 nós e 38 elementos barra com módulo de elasticidade de 210 GPa, com uma área inicial de $3.14159 \times 10^{-4} \text{m}^2$. A treliça irá suportar uma carga horizontal de 100 N no nó 14 e possui 3 apoios fixos nos nós 1, 2 e 3. Os seus elementos horizontais têm um comprimento de 4 m enquanto que os verticais têm 3 m.

A otimização respeita um constrangimento de área,

$$1 \times 10^{-8} \text{ m}^2 < A_i < 3.14 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

e um constrangimento de volume,

$$V \leq V_{m\acute{a}x} = 4.96372 \times 10^{-3} \text{ m}^3$$

com um valor limite que corresponde ao volume das 4 barras horizontais que estão na direcção da força aplicada (barras 4, 10, 15 e 20) considerando a área máxima, ou seja, a expectável solução determinística.

Após a obtenção dos parâmetros de normalização, o problema de otimização terá a seguinte forma,

$$\min_{A_i} C = \alpha \frac{\mu_c}{2.82304 \times 10^{-5}} + (1 - \alpha) \frac{\sigma_c}{8.69738 \times 10^{-7}}$$

sujeito a

$$V \leq V_{m\acute{a}x} = 4.96372 \times 10^{-3} \text{ m}^3$$





$$A_{min} \leq A_i \leq A_{m\acute{a}x}; i = 1, \dots, n$$
(21)

3.3.1. Resultados

Foram realizadas otimizações para três valores de variabilidade: 10%, 20% e 30%. A formulação (21) está definida para uma variabilidade de 10%, para 20% e 30% é necessário calcular e modificar o parâmetro σ^* para cada um dos casos.

Os resultados numéricos foram convertidos em figuras representativas da estrutura ótima resultante de cada otimização. Para tal recorreu-se a um programa MATLAB que considera quatro gamas de espessura para a linha representativa de cada área (Tabela 1).

Tabela 1 – Gamas de espessura [3].

Gamas de Valores	Espessura
$1.5 \times 10^{-4} < A_i < 3.14 \times 10^{-4}$	
$1 \times 10^{-4} < A_i < 1.5 \times 10^{-4}$	
$5 \times 10^{-5} < A_i < 1 \times 10^{-4}$	
$1 \times 10^{-5} < A_i < 5 \times 10^{-5}$	

- Variabilidade 10% ($\sigma_E = 21$ GPa)

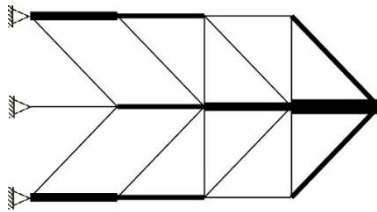


Figura 17 – Estrutura Otimizada:
 $\alpha=0$

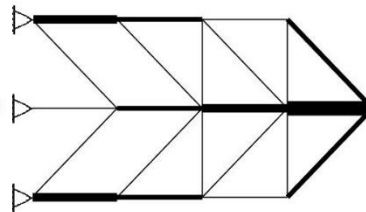


Figura 18 – Estrutura Otimizada:
 $\alpha=0.1$

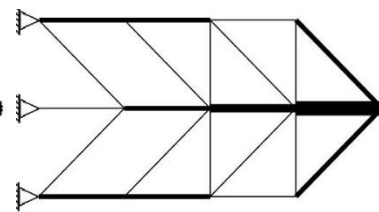


Figura 19 – Estrutura Otimizada:
 $\alpha=0.2$

Tabelas 2(esquerda), 3(centro) e 4(direita) – Exemplo de Aplicação: Percentagens de volume ($\alpha=0$), ($\alpha=0.1$) e ($\alpha=0.2$)

$\alpha=0$	
Elemento	% Volume
1	8.37%
4	1.05%
7	8.35%
8	6.28%
9	0.80%
10	4.93%
11	0.79%
12	6.24%
13	3.60%
14	1.71%
15	9.33%
16	1.70%
17	3.58%
20	16.10%
23	1.81%
26	1.80%
27	1.90%
30	1.90%
31	2.82%
34	2.82%
35	6.42%
38	6.48%

$\alpha=0.1$	
Elemento	% Volume
1	7.99%
4	1.27%
7	8.01%
8	6.26%
9	0.83%
10	5.45%
11	0.84%
12	6.26%
13	3.76%
14	1.83%
15	9.17%
16	1.83%
17	3.74%
20	15.5%
23	1.99%
26	1.99%
27	1.70%
30	1.69%
31	2.78%
34	2.78%
35	6.60%
38	6.60%

$\alpha=0.2$	
Elemento	% Volume
1	7.56%
4	1.63%
7	6.32%
8	6.26%
9	0.87%
10	6.15%
11	0.87%
12	6.30%
13	3.96%
14	1.98%
15	8.89%
16	1.98%
17	3.96%
20	14.80%
23	2.23%
26	2.25%
27	1.29%
30	1.29%
31	2.76%
34	2.76%
35	6.84%
38	6.82%

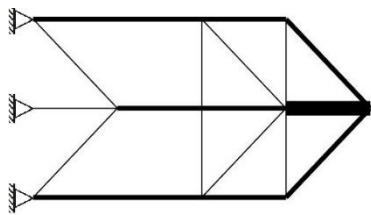


Figura 20 – Estrutura Optimizada:
 $\alpha=0.3$

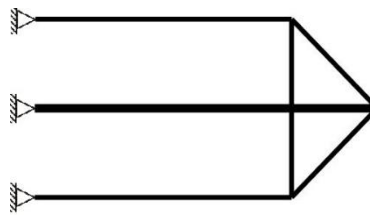


Figura 21 – Estrutura Optimizada
 $\alpha=0.4$

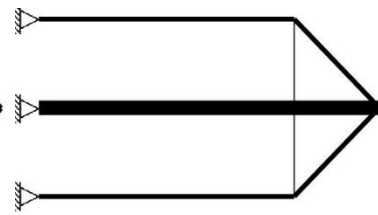


Figura 22 – Estrutura Optimizada:
 $\alpha=0.5$

Tabelas 5(esquerda), 6(centro) e 7(direita) – Exemplo de Aplicação: Percentagens de volume ($\alpha=0.3$), ($\alpha=0.4$) e ($\alpha=0.5$)

$\alpha=0.3$	
Elemento	% Volume
1	6.66%
4	2.72%
7	6.68%
8	6.66%
9	0.91%
10	7.99%
11	0.90%
12	6.66%
13	4.43%
14	2.29%
15	7.99%
16	2.29%
17	4.42%
20	13.50%
23	2.68%
26	2.68%
31	2.74%
34	2.74%
35	7.52%
38	7.52%

$\alpha=0.4$	
Elemento	% Volume
1	5.67%
4	10.30%
7	5.69%
8	5.69%
10	10.30%
12	5.69%
13	5.69%
14	3.04%
15	10.30%
16	3.04%
17	5.67%
20	10.30%
35	9.33%
38	9.35%

$\alpha=0.5$	
Elemento	% Volume
1	4.18%
4	14.20%
7	4.18%
8	4.18%
10	14.20%
12	4.18%
13	4.18%
14	2.31%
15	14.20%
16	2.31%
17	4.18%
20	14.20%
35	6.68%
38	6.68%

A partir de $\alpha = 0.6$ a estrutura passa a ser idêntica à solução determinística ($\alpha = 1$).



Figura 23 – Estrutura Optimizada:
 $\alpha=0.6$ a 1

Tabela 8 – Exemplo de Aplicação: Percentagens de volume ($\alpha=0.6$ a 1)

$\alpha=0.6$ a 1	
Elemento	% Volume
4	25%
10	25%
15	25%
20	25%

Na figura 24 é possível verificar a variação dos valores normalizados da média, μ_c , e desvio padrão, σ_c , da flexibilidade com a variação do coeficiente de peso, α .

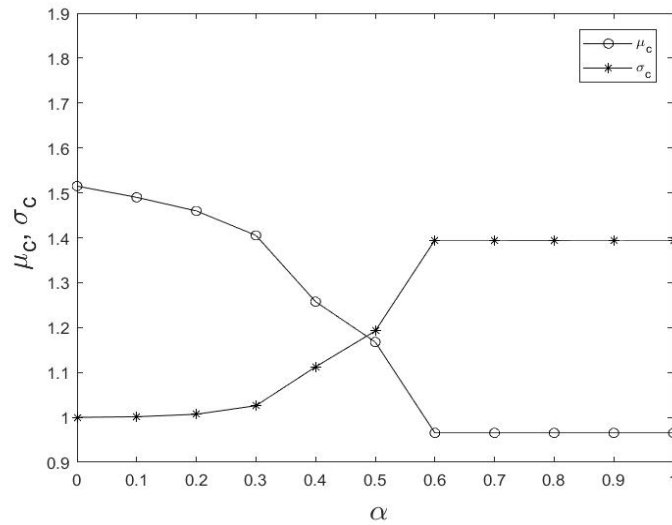


Figura 24 – Gráfico dos valores normalizados da média e desvio padrão da flexibilidade para diferentes valores de α , com 10% de variabilidade.

Asadpoure et al. [40] procederam a uma otimização idêntica. Apesar da escassez de dados para uma comparação mais precisa, a análise visual dos resultados obtidos em ambos os casos permite constatar bastantes semelhanças (Figura 25).

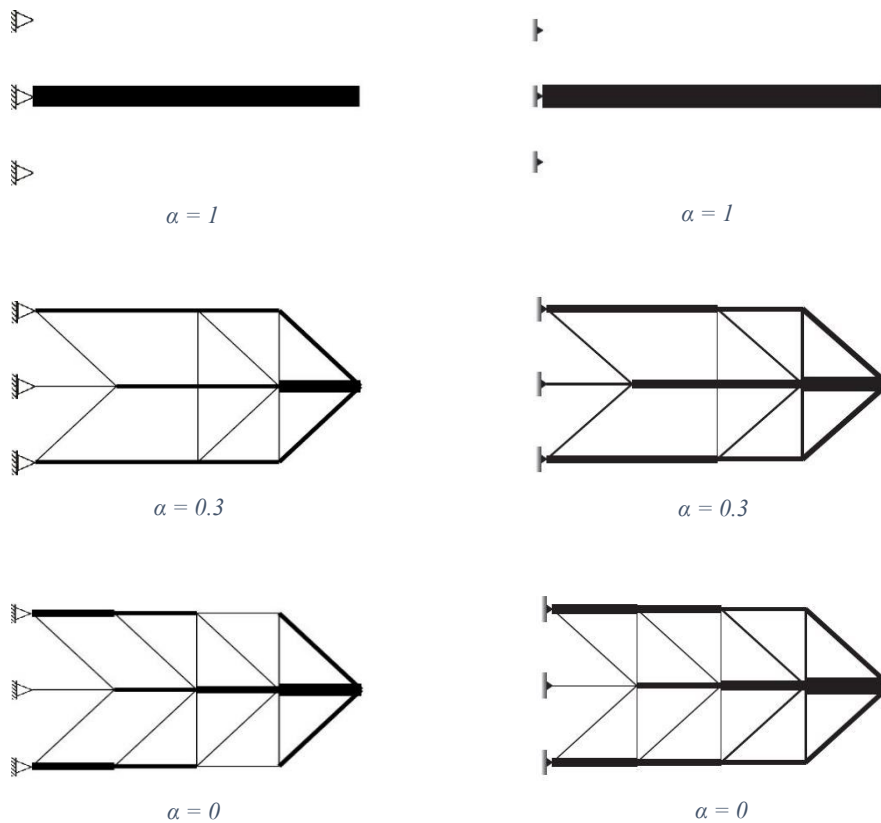


Figura 25 – Resultados da otimização com 10% de variabilidade: Coluna da esquerda – Resultados obtidos; Coluna da direita – Resultados de Asadpoure et al. [40]

- Variabilidade de 20% ($\sigma_E = 42$ GPa)

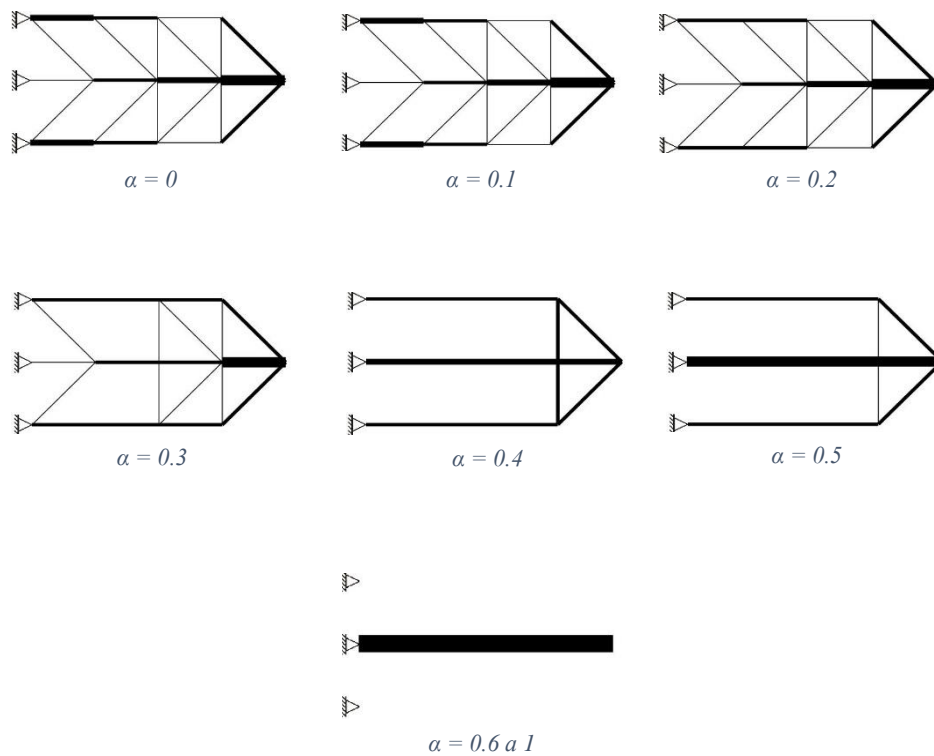


Figura 26 – Resultados da otimização com 20% de variabilidade

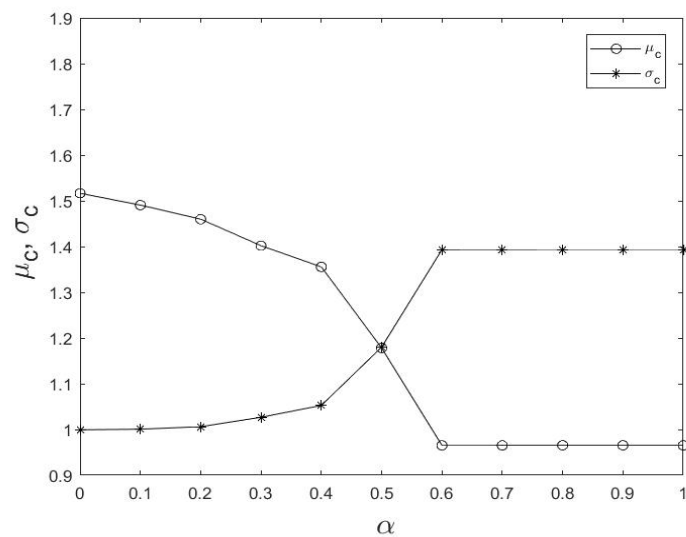


Figura 27 - Gráfico dos valores normalizados da média e desvio padrão da flexibilidade para diferentes valores de α , com 20% de variabilidade.

- Variabilidade de 30% ($\sigma_E = 63$ GPa)

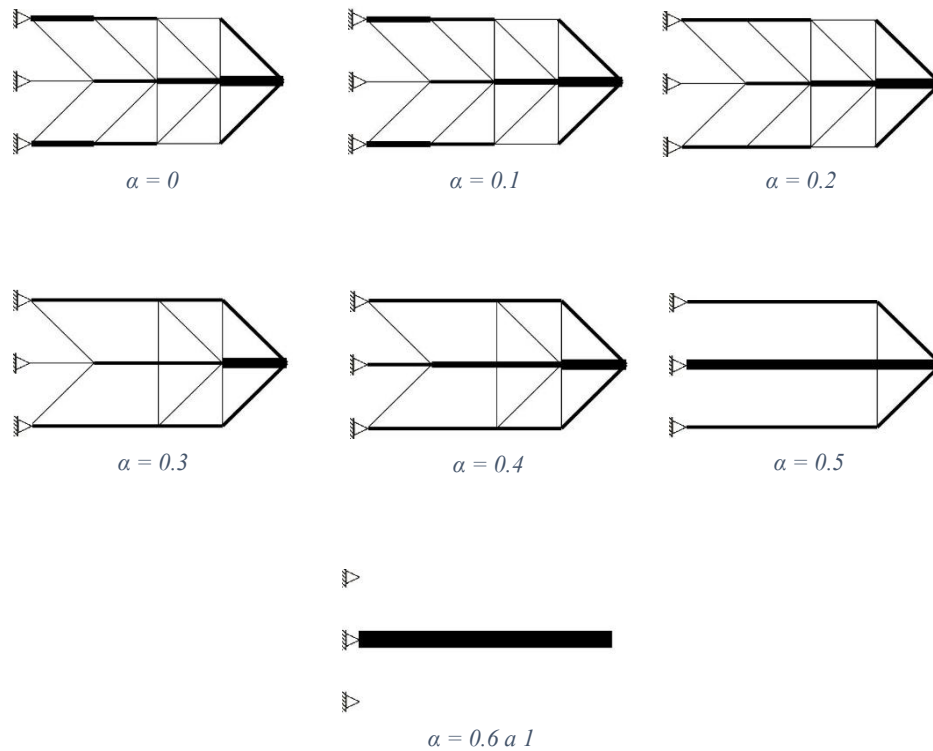


Figura 28 - Resultados da otimização com 30% de variabilidade

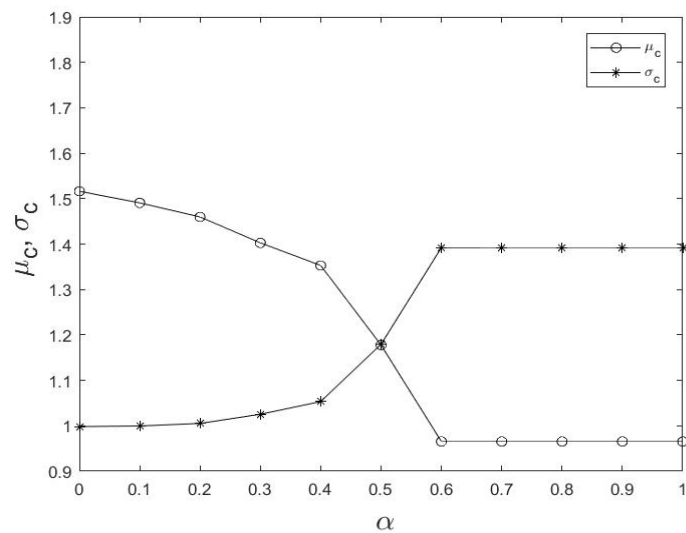


Figura 29 - Gráfico dos valores normalizados da média e desvio padrão da flexibilidade para diferentes valores de α , com 30% de variabilidade.

4. Optimização: Estruturas 2D e 3D

4.1. Estrutura 2D: Incerteza no módulo de elasticidade

Neste exemplo, já estudado em [40], será analisada uma estrutura 2D, sujeita a três cargas pontuais, e que se encontra discretizada através da *Ground Structure* da figura 30. A treliça apresenta incerteza relativamente ao módulo de elasticidade dos elementos constituintes e tem as seguintes características:

- 25 nós;
- 200 elementos barra;
- 1 apoio fixo no nó 1;
- 1 apoio móvel no nó 5;
- 3 cargas pontuais nos nós 2, 3 e 4;
-  rea inicial de sec o das barras: 0.005 m^2
- Elementos horizontais – 0.75 m
- Elementos verticais – 1 m

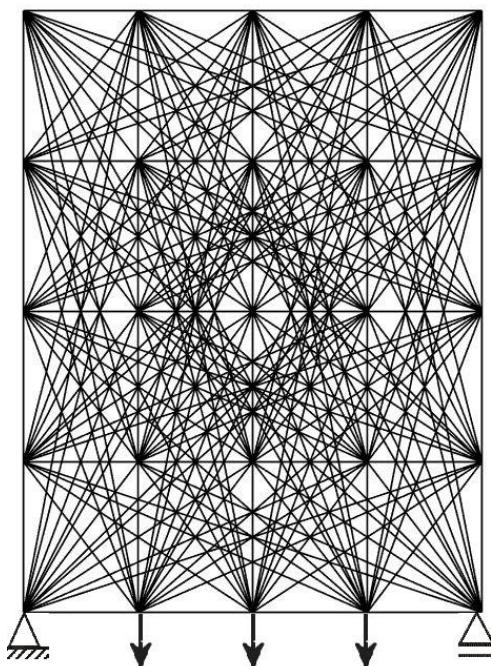


Figura 30 - *Ground Structure*: 200 barras

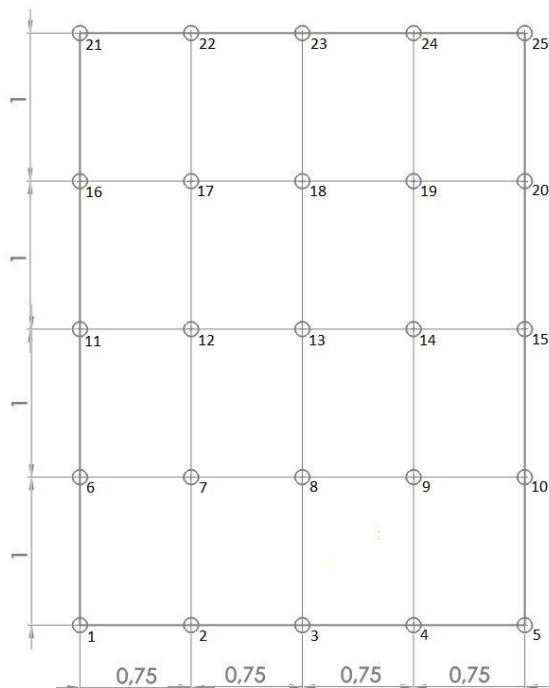


Figura 31 – Dimensões e numera o dos nós da *Ground Structure*

4.1.1. Formulação do problema

- Variável de Projecto

As variáveis de projecto serão as áreas das secções transversais dos 200 elementos barra que formam a *Ground Structure* inicial. Os seus valores são válidos num intervalo de variação contínuo definido pelo constrangimento.

- Função objectivo

A função a minimizar traduz a flexibilidade da estrutura, é calculada a partir dos deslocamentos dos nós e das forças exteriores aplicadas e é definida através da fórmula deduzida em 2.3.2,

$$C = \alpha \frac{\mu_c}{\mu^*} + (1 - \alpha) \frac{\sigma_c}{\sigma^*} \quad (22)$$

- Constrangimentos

A optimização deverá respeitar dois constrangimentos lineares: Área de secção transversal e Volume admissível. O constrangimento de volume seguirá a fórmula apresentada em [40],

$$V \leq V_{m\acute{a}x} = \frac{5L^2}{12} \quad (23)$$

onde L é o comprimento horizontal da treliça: 3 m.

A área máxima é definida recorrendo à análise da figura 32, que se trata da estrutura obtida em [40] para uma optimização determinística ($\alpha = 1$),

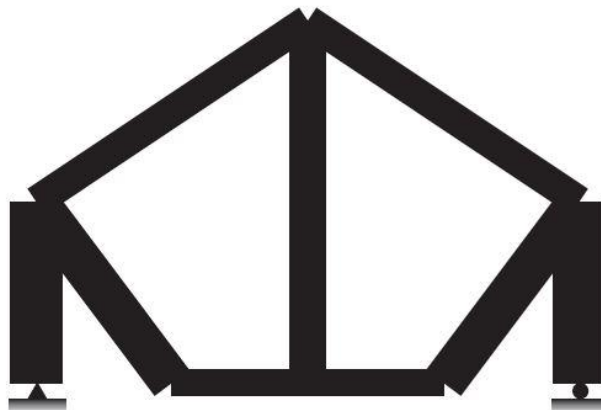


Figura 32 – Estrutura resultante de optimização determinística [40].

O somatório do comprimento das barras é de aproximadamente 11,60 m. Uma vez que, para $L=3\text{m}$, o volume admissível é de 3.75 m^3 teremos então,

$$A_{m\acute{a}x} = \frac{3.75}{11.60} \cong 0.323 \text{ m}^2$$

No entanto, como se pode facilmente constatar pela figura, a secção não é idêntica em todos os elementos, por isso o valor de área anteriormente obtido deve ser ligeiramente ampliado. Relativamente ao valor mínimo admissível, só serão consideradas barras com área de secção superior a $1 \times 10^{-8} \text{ m}^2$.

Os constrangimentos serão então os seguintes:

- $\sum A_i L_i \leq V_{m\acute{a}x} = 3.75 \text{ m}^3$
- $1 \times 10^{-8} \text{ m}^2 < A_i \leq 0.45 \text{ m}^2; i = 1 \dots 200$

- Normalização da função objectivo

Para proceder à normalização da função será necessário executar uma optimização determinística e outra considerando apenas o desvio padrão, obtendo-se assim, respectivamente, os valores para os parâmetros μ^* e σ^* .

- $\alpha = 1$

$$C = 4.1667 \times 10^{-2} \text{ Nm} = \mu^*$$

- $\alpha = 0$

$$C = 6.9589 \times 10^{-4} \text{ Nm} = \sigma^*$$

O problema terá, portanto, a seguinte formulação

$$\begin{aligned} \min_{A_i} \quad & C = \alpha \frac{\mu_c}{4.1667 \times 10^{-2}} + (1 - \alpha) \frac{\sigma_c}{6.9589 \times 10^{-4}} \\ \text{sujeito a} \quad & \\ & V \leq V_{m\acute{a}x} = 3.75 \text{ m}^3 \\ & 1 \times 10^{-8} \text{ m}^2 \leq A_i \leq 0.45 \text{ m}^2 \end{aligned} \tag{24}$$

- Módulo de elasticidade – Incerteza

Tal como indicado em [40], em cada barra será considerada uma variável aleatória independente, o módulo de elasticidade, com uma distribuição normal com um valor médio de 100 Pa e um coeficiente de variação (CV) de 10%. O seu desvio padrão será então dado por

$$\sigma_E = CV \times \mu_E = 0.1 \times 100 = 10 \text{ Pa}$$

e será utilizado no cálculo do desvio padrão da flexibilidade,

$$\sigma_c = \sqrt{\sum_{i=1}^{NV} \left(\frac{\partial f}{\partial E_i} \right)^2} \times 10^2 \quad (25)$$

4.1.2. Resultados

Foram realizadas otimizações para valores de α entre 0 a 1, com incrementos de 0.1. Tal como no exemplo demonstrado em 3.3., os resultados numéricos de cada otimização foram transformados em figuras recorrendo a um programa MATLAB especialmente desenvolvido para o efeito.

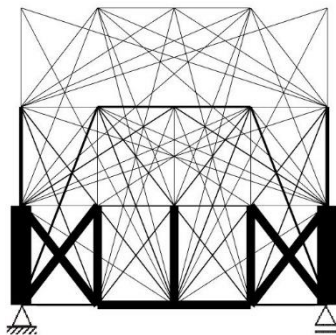


Figura 33 – Estrutura otimizada:
 $\alpha=0$

- $C = 0.96622 \text{ Nm}$
- $\sigma_c = 0.96622 \text{ Nm}$
- $\mu_c = 1.50055 \text{ Nm}$
- 78 elementos

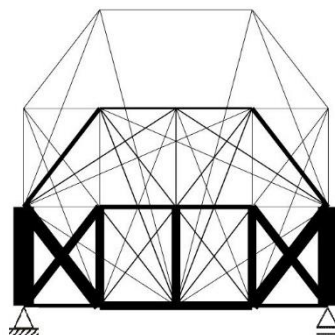


Figura 34 – Estrutura otimizada:
 $\alpha=0.1$

- $C = 0.99725 \text{ Nm}$
- $\sigma_c = 0.97142 \text{ Nm}$
- $\mu_c = 1.23013 \text{ Nm}$
- 56 elementos

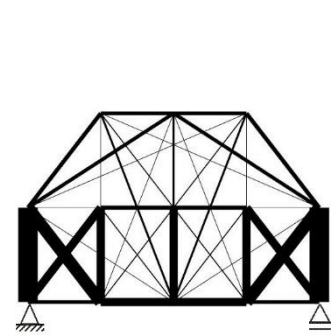


Figura 35 – Estrutura otimizada:
 $\alpha=0.2$

- $C = 1.01892 \text{ Nm}$
- $\sigma_c = 0.98121 \text{ Nm}$
- $\mu_c = 1.17002 \text{ Nm}$
- 40 elementos

Tabela 9 – Incerteza no E: Percentagens de volume ($\alpha=0$ a 0.2)

Elemento		$\alpha=0$	$\alpha=0.1$	$\alpha=0.2$
Nó i	Nó j	%Volume	%Volume	%Volume
1	2	1.17%	1.39%	1.49%
1	6	8.69%	9.05%	8.84%
1	7	3.64%	5.24%	5.34%
1	12	2.30%	-	-
2	3	2.90%	3.73%	3.92%
2	6	5.14%	7.42%	7.82%
2	7	3.75%	3.33%	3.35%
2	8	1.15%	1.23%	1.19%
2	11	1.49%	0.40%	-
2	13	0.45%	0.25%	0.14%
2	18	0.40%	-	-
3	4	2.90%	3.73%	3.93%
3	6	0.58%	0.65%	0.55%
3	7	0.98%	0.94%	1.21%
3	8	3.74%	3.70%	3.67%
3	9	0.98%	0.94%	1.21%
3	10	0.58%	0.65%	0.55%
3	12	1.56%	1.96%	2.64%
3	14	1.56%	1.96%	2.64%
3	16	0.03%	-	-
3	17	1.58%	1.10%	-
3	19	1.58%	1.10%	-
3	20	0.03%	-	-
4	5	1.17%	1.39%	1.49%
4	8	1.15%	1.23%	1.19%
4	9	3.75%	3.33%	3.34%
4	10	5.14%	7.41%	7.82%
4	13	0.45%	0.25%	0.14%
4	15	1.49%	0.40%	-
4	18	0.40%	-	-
5	9	3.64%	5.24%	5.33%
5	10	8.69%	9.05%	8.83%
5	14	2.30%	-	-
6	7	0.15%	0.14%	0.14%
6	11	1.85%	0.26%	-
6	12	0.49%	2.71%	3.05%
6	13	1.13%	1.82%	2.41%
6	14	0.58%	0.95%	0.86%
6	15	0.30%	-	-
6	17	0.81%	0.57%	-
6	19	0.52%	-	-
7	8	0.69%	1.73%	1.88%

Tabela 9 – Incerteza no E: Percentagens de volume ($\alpha=0$ a 0.2)
(Continuação)

Elemento		$\alpha=0$	$\alpha=0.1$	$\alpha=0.2$
Nó i	Nó j	%Volume	%Volume	%Volume
7	11	1.11%	0.02%	-
7	12	0.42%	0.20%	0.21%
7	14	0.08%	-	-
8	9	0.69%	1.73%	1.88%
8	12	1.08%	1.22%	1.17%
8	13	0.13%	0.76%	1.17%
8	14	1.08%	1.22%	1.16%
8	17	0.89%	-	-
8	19	0.89%	-	-
9	10	0.15%	0.14%	0.14%
9	12	0.08%	-	-
9	14	0.42%	0.20%	0.21%
9	15	1.11%	0.02%	-
10	11	0.30%	-	-
10	12	0.58%	0.95%	0.88%
10	13	1.13%	1.82%	2.40%
10	14	0.49%	2.71%	3.03%
10	15	1.85%	0.26%	-
10	17	0.52%	-	-
10	19	0.81%	0.57%	-
11	12	0.08%	0.02%	-
11	16	0.01%	-	-
11	17	0.41%	0.12%	-
11	18	0.33%	-	-
11	19	0.30%	-	-
11	20	0.01%	-	-
12	13	0.80%	1.15%	1.37%
13	14	0.80%	1.15%	1.36%
14	15	0.08%	0.02%	-
15	16	0.01%	-	-
15	17	0.30%	-	-
15	18	0.33%	-	-
15	19	0.41%	0.13%	-
15	20	0.01%	-	-
17	18	0.22%	0.17%	-
18	19	0.22%	0.17%	-

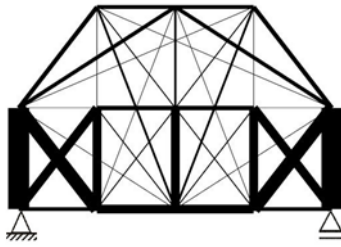


Figura 36 – Estrutura Optima:
 $\alpha=0.3$

- $C = 1.03617 \text{ Nm}$
- $\sigma_c = 0.99007 \text{ Nm}$
- $\mu_c = 1.14375 \text{ Nm}$
- 40 elementos

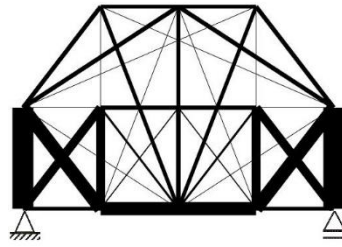


Figura 37 – Estrutura Optima:
 $\alpha=0.4$

- $C = 1.04861 \text{ Nm}$
- $\sigma_c = 1.00762 \text{ Nm}$
- $\mu_c = 1.11012 \text{ Nm}$
- 38 elementos

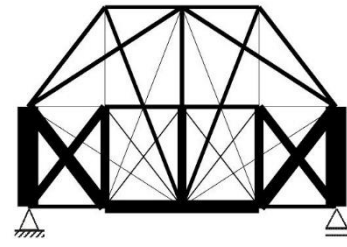


Figura 38 -Estrutura Optima:
 $\alpha=0.5$

- $C = 1.05751 \text{ Nm}$
- $\sigma_c = 1.02015 \text{ Nm}$
- $\mu_c = 1.09493 \text{ Nm}$
- 36 elementos

Tabela 10 – Incerteza no E : Percentagens de volume ($\alpha=0.3$ a 0.5)

Elemento		$\alpha=0.3$	$\alpha=0.4$	$\alpha=0.5$
Nó i	Nó j	%Volume	%Volume	%Volume
1	2	1.49%	1.46%	1.36%
1	6	8.88%	8.96%	9.22%
1	7	5.09%	4.84%	4.34%
2	3	3.98%	4.07%	4.08%
2	6	7.99%	8.28%	8.59%
2	7	3.21%	3.00%	2.75%
2	8	1.06%	0.82%	0.71%
2	13	0.09%	0.13%	0.09%
3	4	3.98%	4.07%	4.08%
3	6	0.39%	0.21%	0.08%
3	7	1.24%	1.34%	1.21%
3	8	3.26%	2.44%	2.71%
3	9	1.24%	1.34%	1.21%
3	10	0.39%	0.20%	0.06%
3	12	3.22%	4.27%	4.25%
3	14	3.215	4.28%	4.26%
4	5	1.49%	1.46%	1.36%
4	8	1.06%	0.82%	0.71%
4	9	3.21%	2.99%	2.75%
4	10	7.98%	8.30%	8.60%
4	13	0.09%	0.13%	0.10%
5	9	5.11%	4.83%	4.35%
5	10	8.88%	8.96%	9.22%
6	7	0.15%	0.20%	0.19%
6	12	2.97%	2.73%	2.79%
6	13	2.96%	4.00%	4.55%
6	14	0.64%	0.20%	-
7	8	1.86%	1.84%	1.69%

Tabela 10 – Incerteza no E : Percentagens de volume ($\alpha=0.3$ a 0.5)
(Continuação)

Elemento		$\alpha=0.3$	$\alpha=0.4$	$\alpha=0.5$
Nó i	Nó j	%Volume	%Volume	%Volume
7	12	0.20%	0.12%	0.11%
8	9	1.86%	1.84%	1.69%
8	12	0.81%	-	-
8	13	1.52%	2.12%	2.49%
8	14	0.82%	-	-
9	10	0.15%	0.20%	0.19%
9	14	0.20%	0.11%	0.10%
10	12	0.63%	0.20%	-
10	13	2.95%	4.01%	4.55%
10	14	2.98%	2.73%	2.80%
12	13	1.37%	1.25%	1.38%
13	14	1.38%	1.25%	1.38%

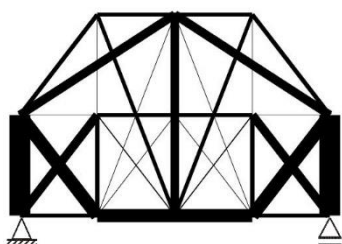


Figura 39 – Estrutura Otimizada:
 $\alpha=0.6$

- $C = 1.06331$ Nm
- $\sigma_c = 1.03864$ Nm
- $\mu_c = 1.07981$ Nm
- 34 elementos

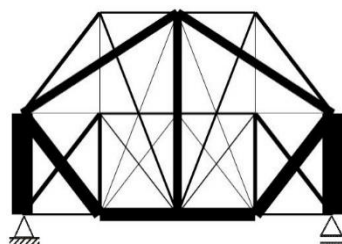


Figura 40 – Estrutura Otimizada:
 $\alpha=0.7$

- $C = 1.06487$ Nm
- $\sigma_c = 1.07780$ Nm
- $\mu_c = 1.05932$ Nm
- 34 elementos

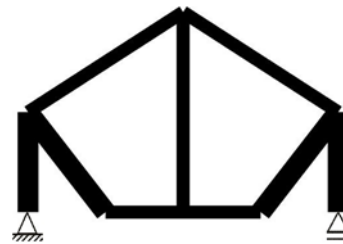


Figura 41 – Estrutura Otimizada:
 $\alpha=0.8$

- $C = 1.03096$ Nm
- $\sigma_c = 1.14924$ Nm
- $\mu_c = 1.00139$ Nm
- 10 elementos

Tabela 11 – Incerteza no E : Percentagens de volume ($\alpha=0.6$ a 0.8)

Elemento		$\alpha=0.6$	$\alpha=0.7$	$\alpha=0.8$
Nó i	Nó j	%Volume	%Volume	%Volume
1	2	1.20%	0.92%	-
1	6	9.58%	10.17%	12.00%
1	7	3.70%	2.76%	-
2	3	4.09%	4.10%	4.24%
2	6	9.07%	9.85%	12.67%
2	7	2.40%	1.84%	-
2	8	0.60%	0.49%	-
2	13	0.07%	0.04%	-
3	4	4.09%	4.10%	4.21%
3	7	1.01%	0.70%	-
3	8	3.13%	4.06%	7.78%

Tabela 11 – Incerteza no E : Percentagens de volume ($\alpha=0.6$ a 0.8)
(Continuação)

Elemento		$\alpha=0.6$	$\alpha=0.7$	$\alpha=0.8$
Nó i	Nó j	%Volume	%Volume	%Volume
3	9	1.01%	0.70%	-
3	12	4.07%	3.39%	-
3	14	4.07%	3.39%	-
4	5	1.20%	0.92%	-
4	8	0.60%	0.49%	-
4	9	2.40%	1.84%	-
4	10	9.07%	9.85%	12.70%
4	13	0.07%	0.04%	-
5	9	3.70%	2.76%	-
5	10	9.58%	10.16%	12.00%
6	7	0.17%	0.13%	-
6	12	2.71%	2.29%	-
6	13	5.31%	6.92%	13.23%
7	8	1.47%	1.11%	-
7	12	0.10%	0.10%	-
8	9	1.47%	1.12%	-
8	13	2.98%	3.97%	7.81%
9	10	0.17%	0.13%	-
9	14	0.10%	0.10%	-
10	13	5.31%	6.92%	13.24%
10	14	2.71%	2.29%	-
12	13	1.37%	1.18%	-
13	14	1.37%	1.18%	-

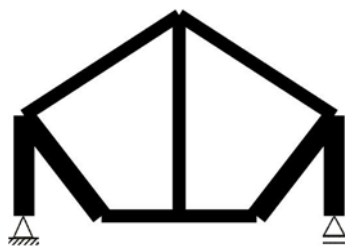


Figura 42 – Estrutura Optima:
 $\alpha=0.9$

- $C = 1.01514 \text{ Nm}$
- $\sigma_c = 1.14798 \text{ Nm}$
- $\mu_c = 1.00039 \text{ Nm}$
- 10 elementos

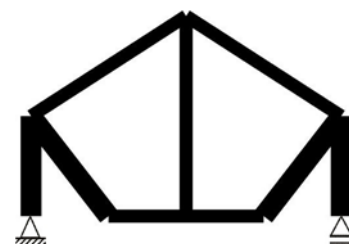


Figura 43 – Estrutura Optima:
 $\alpha=1$

- $C = 1.00000 \text{ Nm}$
- $\sigma_c = 1.30665 \text{ Nm}$
- $\mu_c = 1.00000 \text{ Nm}$
- 10 elementos

Tabela 12 – Incerteza no E: Percentagens de volume ($\alpha=0.9$ a 1)

Elemento		$\alpha=0.9$	$\alpha=1$
Nó i	Nó j	%Volume	%Volume
1	6	12.00%	12.00%
2	3	4.36%	4.49%
2	6	12.61%	12.48%
3	4	4.35%	4.49%
3	8	7.89%	8.00%
4	10	12.61%	12.49%
5	10	12.00%	11.98%
6	13	13.10%	12.99%
8	13	7.92%	8.02%
10	13	13.14%	12.97%

O gráfico da figura 44 permite perceber que com o aumento do valor esperado da flexibilidade dá-se uma diminuição do desvio padrão e vice-versa, ou seja, não é possível minimizar ambos simultaneamente. Esta particularidade pode ser entendida como o custo da robustez da estrutura, isto é, quanto mais robusta a estrutura maior o valor esperado da flexibilidade – neste exemplo há uma variação de cerca de 50% de μ_c entre $\alpha = 0$ e $\alpha = 1$ – o que demonstra a importância de estabelecer um bom ponto de equilíbrio entre ambos os objectivos.

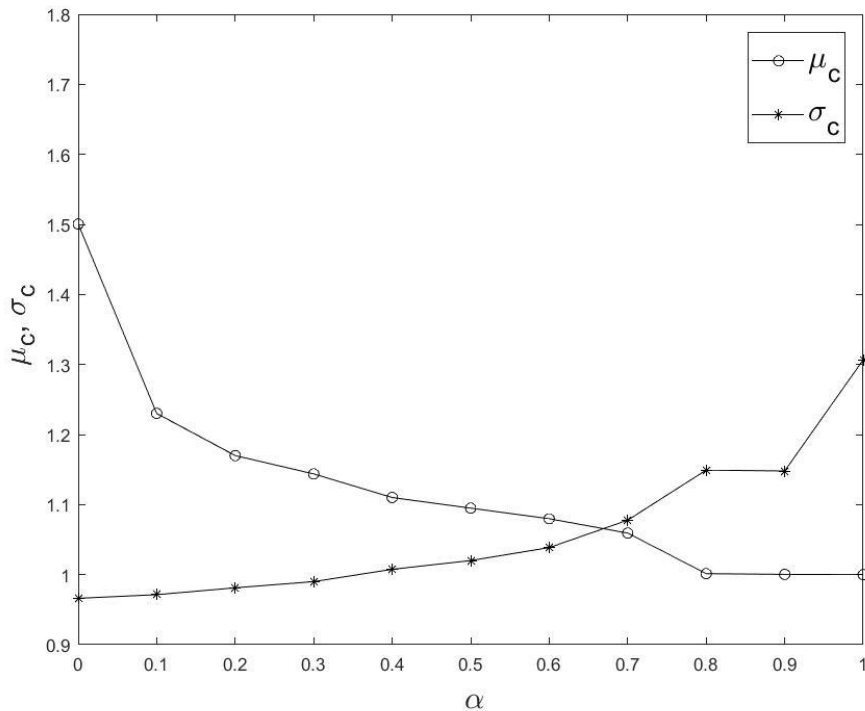


Figura 44 – Variação da média e do desvio padrão normalizados

- Resumo

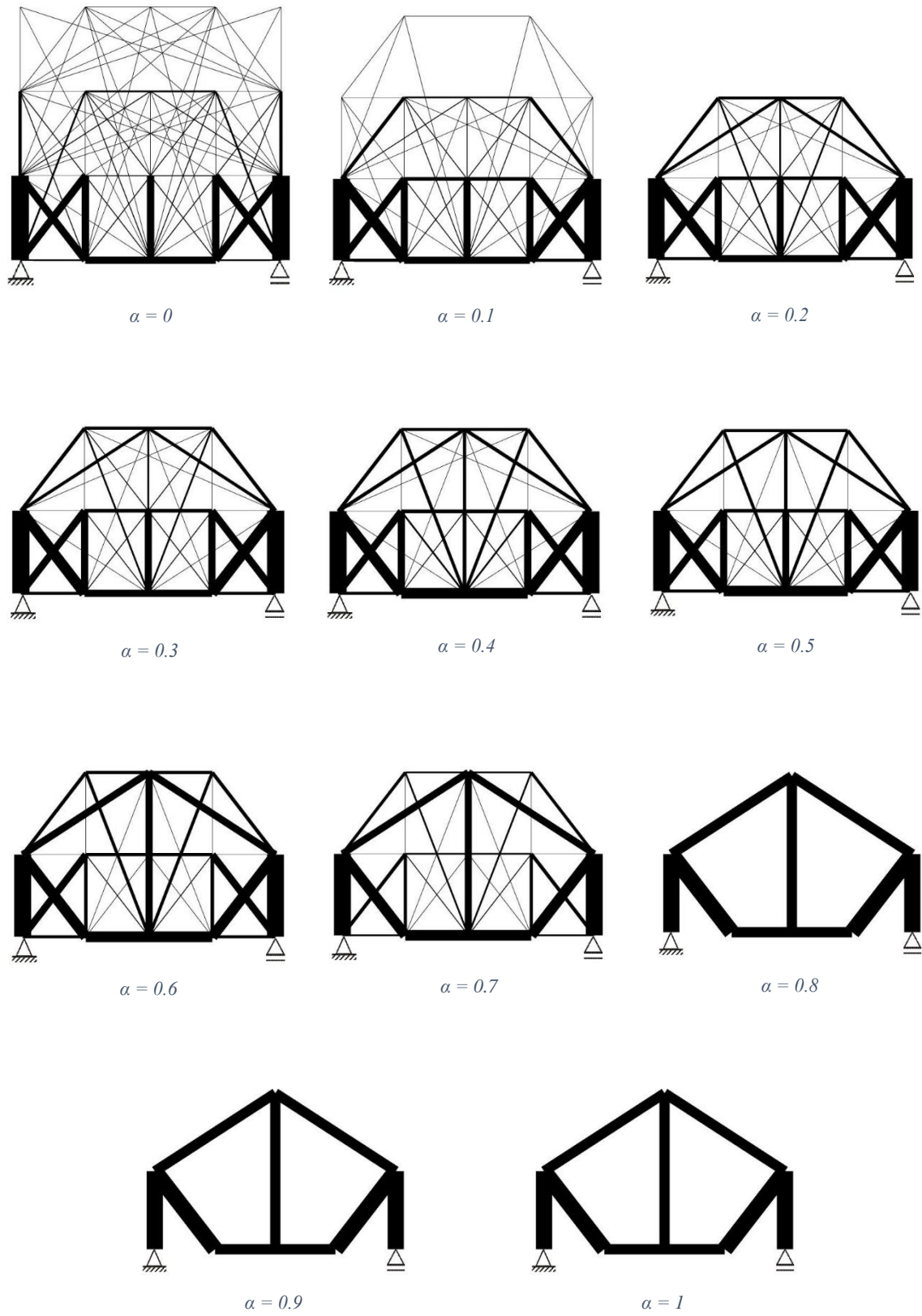


Figura 45 – Resumo dos resultados obtidos

Como referido no início do capítulo, Asadpoure et al. [40] também procedeu a uma optimização similar, no entanto, tal como no exemplo 3.3., os dados que permitiriam uma comparação exacta (valores máximos e mínimos de áreas, áreas após optimização, ponto inicial, etc) não estão disponíveis, restando assim apenas a comparação visual com as figuras disponíveis no artigo.

Apesar do desenho da estrutura ter alguma sensibilidade relativamente à interpretação que se faz dos valores obtidos (espessuras, percentagem volúmica mínima, etc) as figuras seguintes permitem verificar uma boa similaridade entre os resultados obtidos e os de Asadpoure.

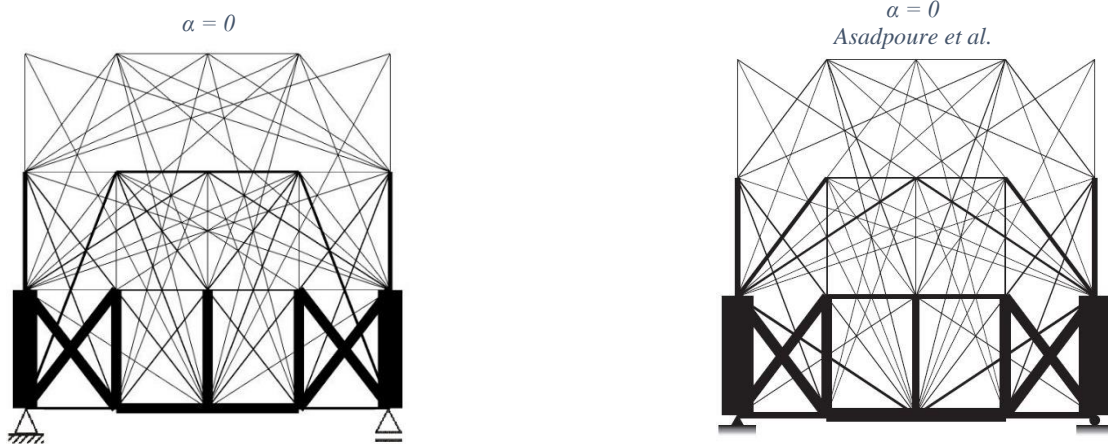


Figura 46 – Comparação com resultados de [40]: $\alpha=0$

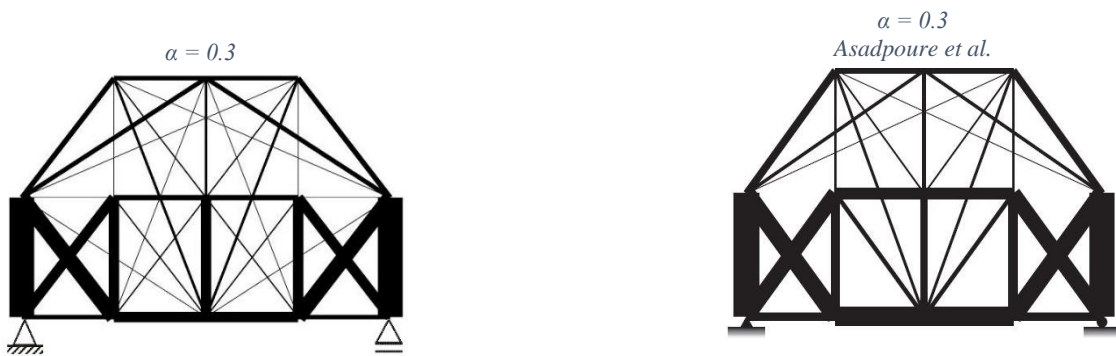


Figura 47 – Comparação com resultados de [40]: $\alpha=0.3$



Figura 48 – Comparação com resultados de [40]: $\alpha=0.7$

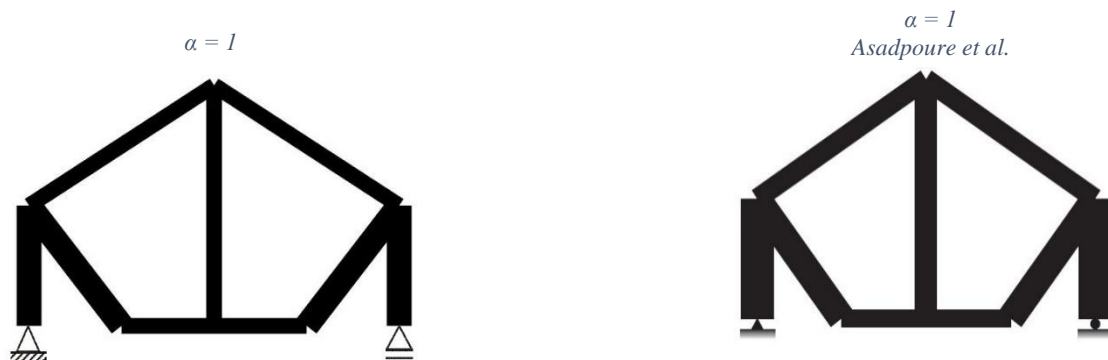


Figura 49 – Comparação com resultados de [40]: $\alpha=1$

Neste exemplo a área mínima considerada para a elaboração gráfica da estrutura foi estabelecida de modo a obter uma estrutura para $\alpha = 0$ o mais semelhante possível à de Asadpoure (Figura 46), tendo sido esse valor de $1 \times 10^{-4} \text{ m}^2$.

A primeira abordagem a este problema foi feita considerando a existência de elementos entre todos os pares possíveis de nós, o que perfazia 300 elementos. Apesar desta configuração apresentar alguma redundância, visto que contava com 100 elementos sobrepostos, seria de esperar que se conseguissem resultados semelhantes aos obtidos com a versão de 200 elementos, apesar do maior custo computacional (otimizações mais morosas). No entanto tal não se verificou e houve mesmo alguma dificuldade em obter estruturas simétricas (Figura 50), sendo que uma possível explicação passa pela dificuldade que o algoritmo eventualmente possa ter quando aplicado em problemas com elevado número de variáveis, um dos pontos fracos atribuídos ao SQP. Esta adversidade levou à simplificação da estrutura para 200 elementos, sem qualquer elemento sobreposto, sendo esta uma abordagem semelhante à exemplificada por Fu et al. [50]

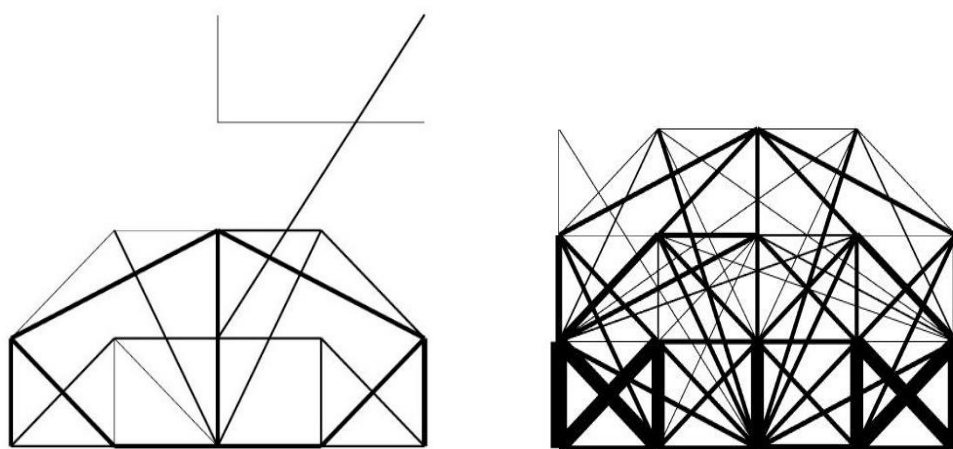


Figura 50 – Resultados assimétricos da otimização com 300 elementos

4.2. Estrutura 2D: Incerteza na posição dos nós

Neste segundo exemplo irá ser analisada uma treliça 2D, desta vez com incerteza associada às coordenadas dos nós, à semelhança do efectuado em [38],[41],[45],[46] e [50]. A estrutura, representada pela *Ground Structure* da figura 51, estará sujeita a uma única carga pontual e tem as seguintes características:

- 15 nós;
- 38 elementos de barra;
- 3 nós encastrados: nó 1, nó 6 e nó 11;
- 1 carga pontual no nó 10;
- Área inicial de secção das barras: 0.00150 m^2
- Elementos horizontais – 1 metro;
- Elementos verticais – 0.75 metros.

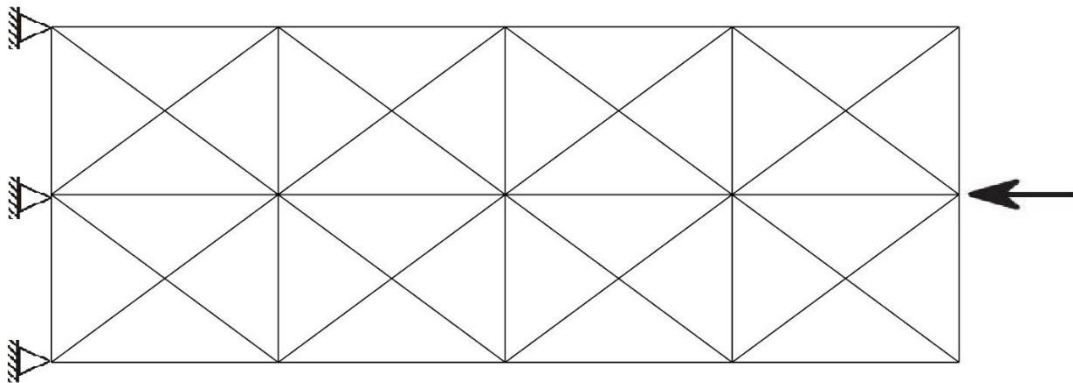


Figura 51 – *Ground Structure*: 38 barras

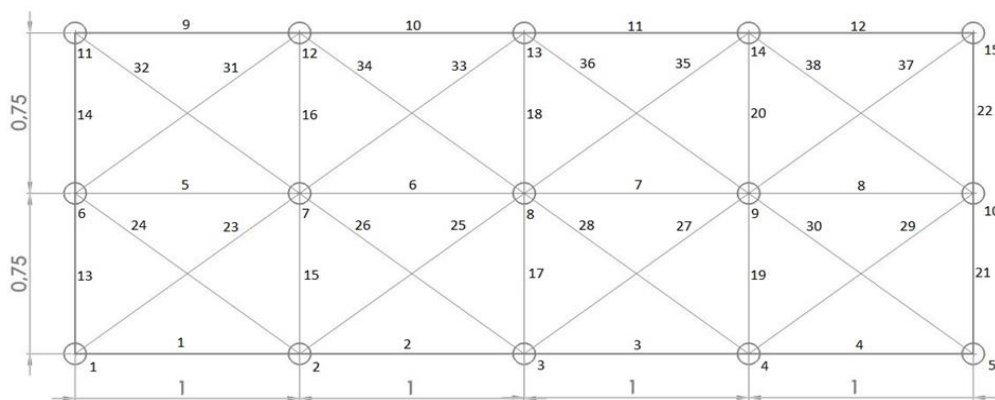


Figura 52 – Dimensões e numeração dos nós e barras da *Ground Structure*

4.2.1. Formulação do problema

- Variáveis de projecto

As variáveis de projecto serão as áreas das secções transversais dos 38 elementos barra que compõem a *Ground Structure* inicial.

- Constrangimentos

O resultado da optimização de uma estrutura sujeita a este tipo de carga, sem ter em consideração qualquer tipo de incerteza, são as 4 barras horizontais que estão na direcção da força aplicada (Figura 53)

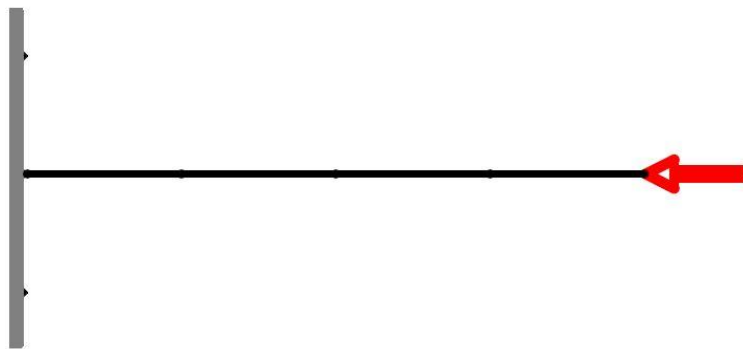


Figura 53 – Optimização determinística [38].

O valor máximo considerado para as áreas será de 0.0150 m^2 e o volume máximo irá ser a área máxima multiplicado pelo comprimento das barras da solução determinística – 4 m.

$$V_{m\acute{a}x} = 4 \times 0.0150 = 0.06 \text{ m}^3$$

- Problema

O problema de optimização, já normalizado, terá assim a seguinte formulação:

$$\begin{aligned} \min_{A_i} \quad & C = \alpha \frac{\mu_c}{1.33333 \times 10^{-6}} + (1 - \alpha) \frac{\sigma_c}{4.07935 \times 10^{-9}} \\ \text{sujeito a} \quad & V \leq V_{m\acute{a}x} = 0.06 \text{ m}^3 \\ & 1 \times 10^{-8} \text{ m}^2 \leq A_i \leq 0.0150 \text{ m}^2 \end{aligned} \tag{26}$$

- Coordenadas dos nós – Incerteza

O desvio padrão da flexibilidade será novamente calculado pela fórmula (14), no entanto, neste caso, o desvio padrão das coordenadas dos nós será dado em função do comprimento de um elemento horizontal (1 m), como feito em alguns dos trabalhos referidos anteriormente. Será considerado um coeficiente de variação de 1% e ambas as coordenadas (xy) de todos os nós serão consideradas com incerteza, sendo modeladas por variáveis aleatórias independentes com distribuição normal.

$$\sigma_{xy} = 0.01L_{xx} = 0.01 \text{ m}$$

o desvio padrão terá então a seguinte forma

$$\sigma_c = \sqrt{\sum_{i=1}^{NV} \left(\frac{\partial f}{\partial xy}\right)^2} \times 0.01^2 \quad (27)$$

4.2.2. Resultados

Tal como no exemplo anterior, foram realizadas otimizações com α a variar entre 0 e 1, com incrementos de 0.1.

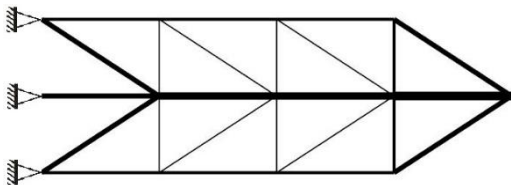


Figura 54 – Estrutura ótima: $\alpha=0$

- $C = 0.98024 \text{ Nm}$
- $\sigma_c = 0.98024 \text{ Nm}$
- $\mu_c = 1.29614 \text{ Nm}$
- 24 elementos

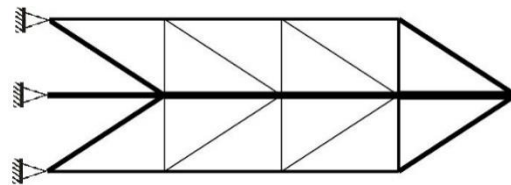


Figura 55 – Estrutura ótima: $\alpha=0.1$

- $C = 1.00926 \text{ Nm}$
- $\sigma_c = 0.98118 \text{ Nm}$
- $\mu_c = 1.26194 \text{ Nm}$
- 24 elementos

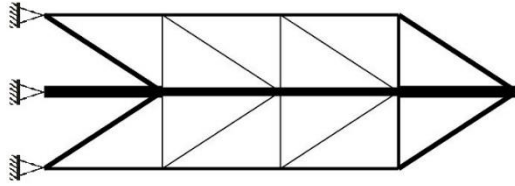


Figura 56 – Estrutura optima: $\alpha=0.2$

- $C = 1.02760 \text{ Nm}$
- $\sigma_c = 1.00044 \text{ Nm}$
- $\mu_c = 1.13623 \text{ Nm}$
- 24 elementos

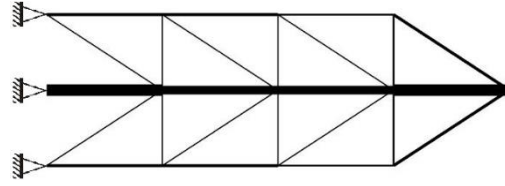


Figura 57 – Estrutura optima: $\alpha=0.3$

- $C = 1.04281 \text{ Nm}$
- $\sigma_c = 1.00532 \text{ Nm}$
- $\mu_c = 1.13029 \text{ Nm}$
- 24 elementos

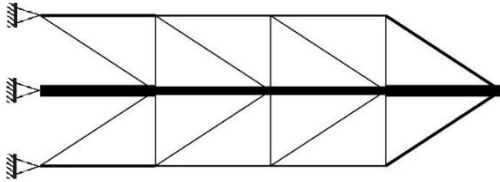


Figura 58 – Estrutura optima: $\alpha=0.4$

- $C = 1.04992 \text{ Nm}$
- $\sigma_c = 1.01840 \text{ Nm}$
- $\mu_c = 1.09720 \text{ Nm}$
- 24 elementos

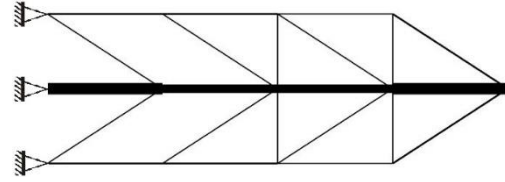


Figura 59 – Estrutura optima: $\alpha=0.5$

- $C = 1.05001 \text{ Nm}$
- $\sigma_c = 1.03405 \text{ Nm}$
- $\mu_c = 1.06597 \text{ Nm}$
- 22 elementos

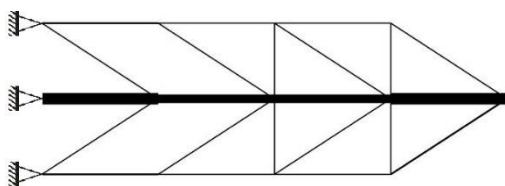


Figura 60 – Estrutura optima: $\alpha=0.6$

- $C = 1.05389 \text{ Nm}$
- $\sigma_c = 1.04577 \text{ Nm}$
- $\mu_c = 1.05930 \text{ Nm}$
- 22 elementos

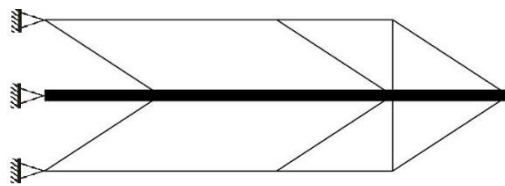


Figura 61 – Estrutura optima: $\alpha=0.7$

- $C = 1.04635 \text{ Nm}$
- $\sigma_c = 1.07068 \text{ Nm}$
- $\mu_c = 1.03594 \text{ Nm}$
- 18 elementos

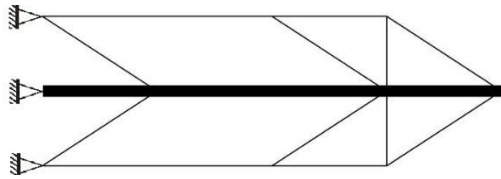


Figura 62 – Estrutura optima: $\alpha=0.8$

- $C = 1.04179 \text{ Nm}$
- $\sigma_c = 1.08684 \text{ Nm}$
- $\mu_c = 1.03102 \text{ Nm}$
- 18 elementos

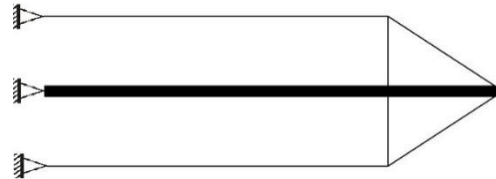


Figura 63 – Estrutura optima: $\alpha=0.9$

- $C = 1.03599 \text{ Nm}$
- $\sigma_c = 1.15727 \text{ Nm}$
- $\mu_c = 1.02251 \text{ Nm}$
- 14 elementos

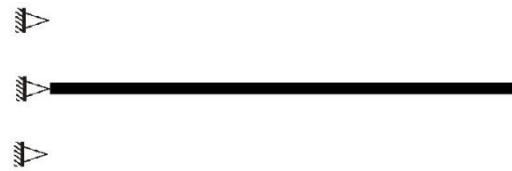


Figura 64 – Estrutura optima: $\alpha=1$

- $C = 1.00000 \text{ Nm}$
- $\sigma_c = 1.44707 \text{ Nm}$
- $\mu_c = 1.00000 \text{ Nm}$
- 4 elementos

Tabela 13 – Incerteza nos nós: Percentagens de volume ($\alpha=0$ a 0.5)

Elemento	$\alpha=0$	$\alpha=0.1$	$\alpha=0.2$	$\alpha=0.3$	$\alpha=0.4$	$\alpha=0.5$
	%Volume	%Volume	%Volume	%Volume	%Volume	%Volume
1	3.07%	2.89%	2.28%	2.23%	1.73%	1.06%
2	2.34%	2.28%	1.94%	1.79%	1.40%	0.93%
3	2.31%	2.04%	1.68%	1.43%	0.99%	0.69%
5	7.81%	9.34%	21.09%	21.07%	22.76%	24.63%
6	13.97%	14.65%	16.27%	16.57%	17.97%	19.49%
7	14.61%	15.22%	16.70%	17.00%	18.40%	19.68%
8	17.43%	18.26%	20.82%	21.65%	23.57%	24.85%
9	3.15%	2.94%	2.27%	2.11%	1.64%	1.05%
10	2.39%	2.30%	1.91%	1.93%	1.44%	0.97%
11	2.26%	2.10%	1.58%	1.36%	0.98%	0.76%
15	0.16%	0.14%	0.14%	0.17%	0.18%	-
16	0.15%	0.14%	0.15%	0.19%	0.17%	-
17	0.15%	0.14%	0.15%	0.19%	0.19%	0.13%
18	0.13%	0.14%	0.15%	0.21%	0.18%	0.13%
19	2.51%	1.81%	1.14%	1.01%	0.52%	0.31%

Tabela 13 – Incerteza nos nós: Percentagens de volume ($\alpha=0$ a 0.5) (Continuação)

Elemento	$\alpha=0$	$\alpha=0.1$	$\alpha=0.2$	$\alpha=0.3$	$\alpha=0.4$	$\alpha=0.5$
	%Volume	%Volume	%Volume	%Volume	%Volume	%Volume
20	2.00%	1.83%	1.12%	0.90%	0.49%	0.38%
23	5.48%	5.25%	0.43%	0.55%	0.43%	0.24%
25	0.46%	0.44%	0.32%	0.38%	0.37%	0.24%
27	0.73%	0.73%	0.62%	0.74%	0.64%	0.36%
29	5.97%	5.66%	3.76%	3.29%	2.16%	1.69%
32	5.50%	5.24%	0.43%	0.55%	0.43%	0.24%
34	0.46%	0.44%	0.31%	0.39%	0.39%	0.24%
36	0.75%	0.72%	0.62%	0.69%	0.67%	0.35%
38	6.22%	5.28%	4.13%	3.61%	2.31%	1.34%

Tabela 14 – Incerteza nos nós: Percentagens de volume ($\alpha=0.6$ a 1)

Elemento	$\alpha=0.6$	$\alpha=0.7$	$\alpha=0.8$	$\alpha=0.9$	$\alpha=1$
	%Volume	%Volume	%Volume	%Volume	%Volume
1	1.03%	0.69%	0.54%	0.32%	-
2	0.86%	0.49%	0.40%	0.18%	-
3	0.47%	0.45%	0.27%	0.32%	-
5	25.00%	25.00%	24.28%	23.87%	25.00%
6	19.90%	21.59%	22.01%	24.05%	25.00%
7	20.19%	21.78%	21.73%	23.14%	25.00%
8	24.93%	25.00%	24.76%	24.82%	25.00%
9	1.01%	0.61%	0.71%	0.28%	-
10	0.73%	0.56%	0.37%	0.17%	-
11	0.72%	0.36%	0.51%	0.35%	-
15	-	-	-	-	-
16	-	-	-	-	-
17	0.15%	-	-	-	-
18	0.14%	-	-	-	-
19	0.22%	0.17%	0.18%	0.15%	-
20	0.26%	0.19%	0.17%	0.18%	-
23	0.26%	0.25%	0.30%	-	-
25	0.28%	-	-	-	-
27	0.43%	0.24%	0.27%	-	-
29	1.25%	0.66%	1.31%	0.47%	-
32	0.26%	0.25%	0.29%	-	-
34	0.27%	-	-	-	-
36	0.48%	0.23%	0.33%	-	-
38	0.94%	0.72%	0.66%	0.43%	-

- Resumo

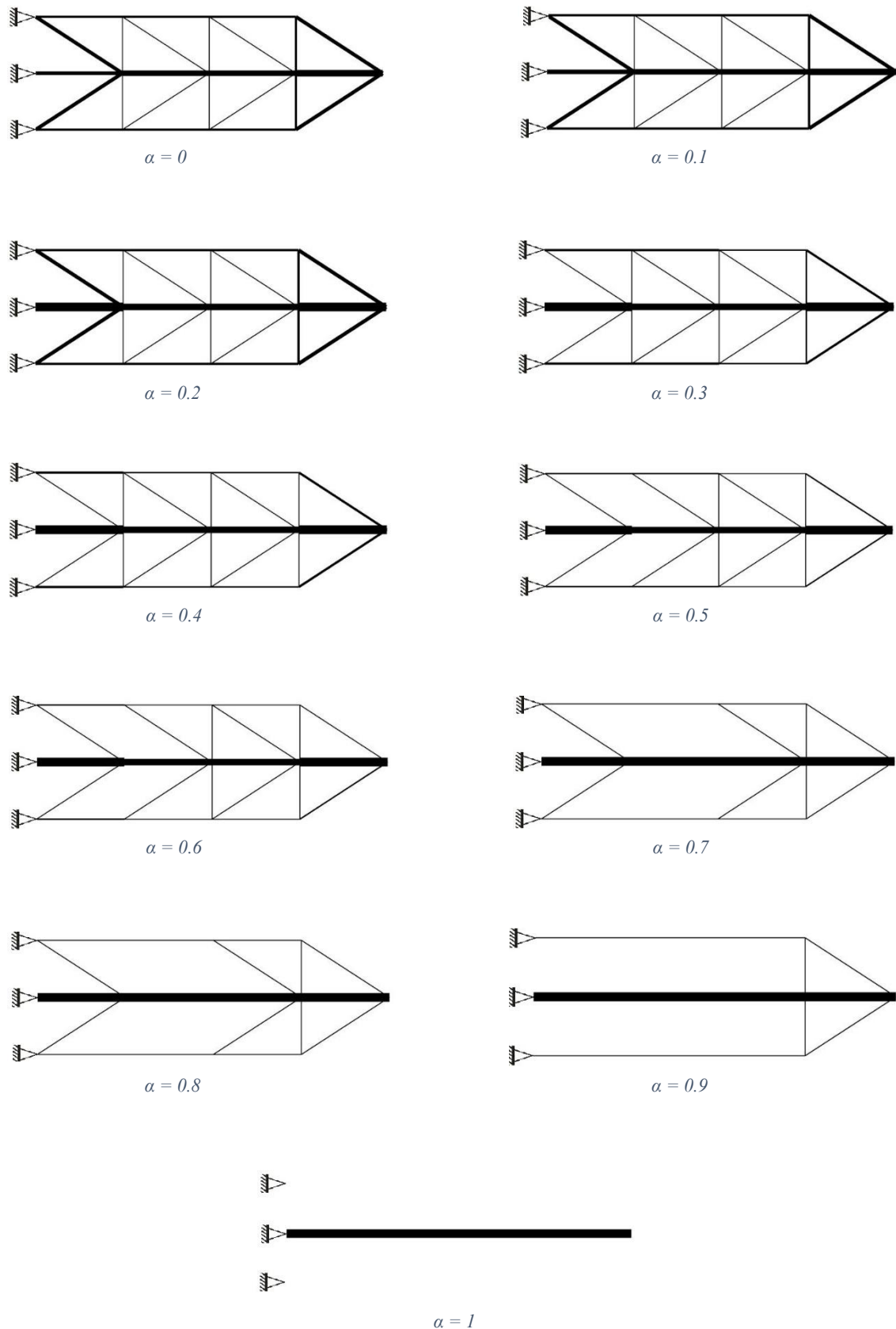


Figura 65 – Resumo dos resultados obtidos

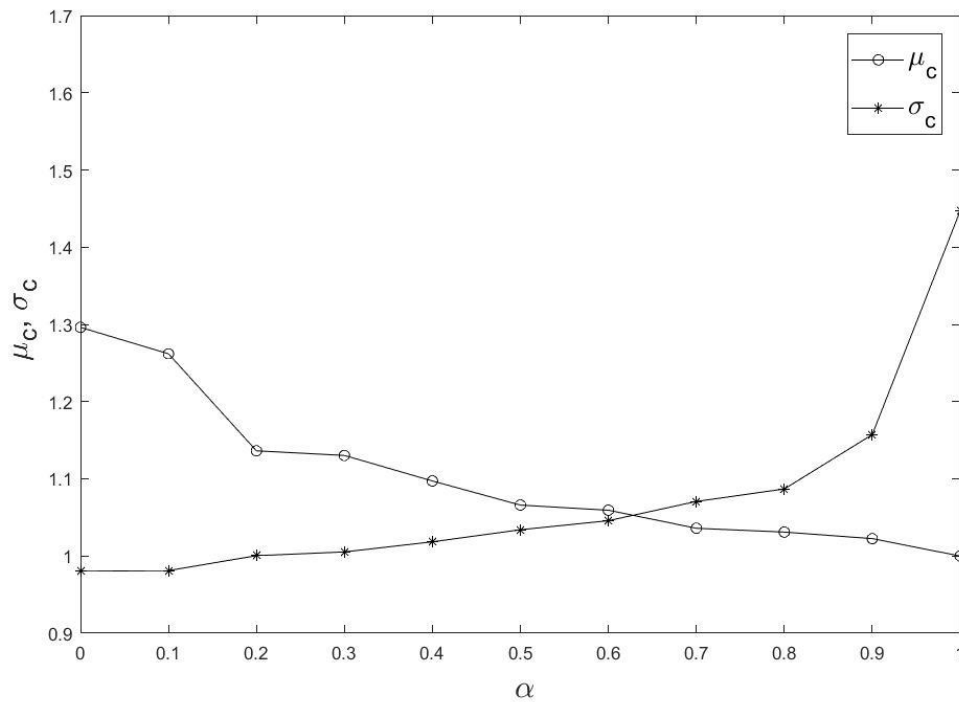


Figura 66 – Variação da média e do desvio padrão normalizados

Foi também executada uma otimização com $\alpha=0$ mas desta feita com um coeficiente de variação das coordenadas dos nós de 10%, à semelhança do que foi feito por Fu et al. [50], para comparação de resultados.

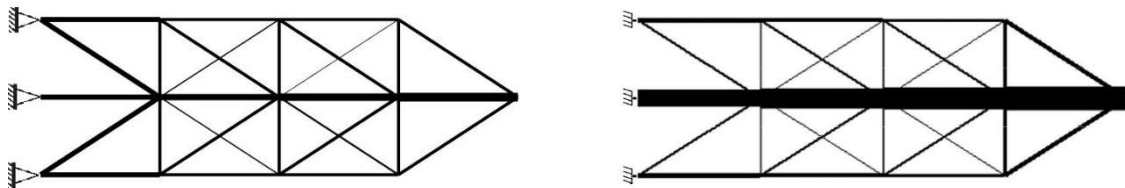


Figura 67 – Comparação do resultado obtido (esquerda) com o de Fu et al. (direita)

As estruturas são idênticas, reforçando assim a validade da metodologia para otimizações com incerteza nas coordenadas dos nós.

4.3. Estrutura 3D: Incerteza no módulo de elasticidade

Neste capítulo será feita uma abordagem à otimização robusta tridimensional, um tópico muito pouco explorado ([36],[37],[42],[43], [49],[57]) na literatura pesquisada até à data.

A estrutura estudada foi concebida com base numa treliça que se encontra no artigo de Bendsoe et al. [58], onde não são apresentados resultados numéricos para a treliça mas apenas uma imagem em perspectiva da solução obtida.

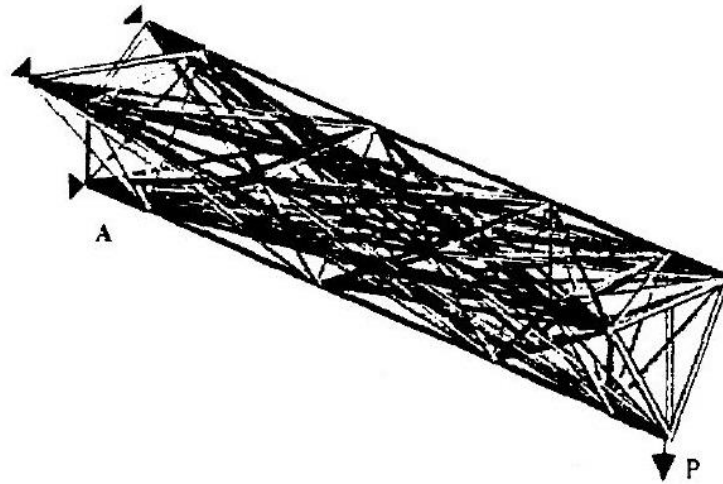


Figura 68 – Ground Structure 3D. Adaptado de [58]

A inexistência de trabalhos de otimização robusta com estruturas semelhantes não torna possível a comparação de resultados como em exemplos anteriores.

Neste caso será submetida a otimização uma estrutura tridimensional semelhante à da figura 68, com uma carga pontual numa extremidade. A estrutura apresenta incerteza relativamente ao módulo de elasticidade das barras que compõe a *Ground Structure* inicial e tem as seguintes características:

- 18 nós
- 63 elementos barra
- 3 apoios fixos: nós 1, 7 e 13
- 1 carga vertical no nó 6
- Área inicial de secção das barras: 0.001 m^2

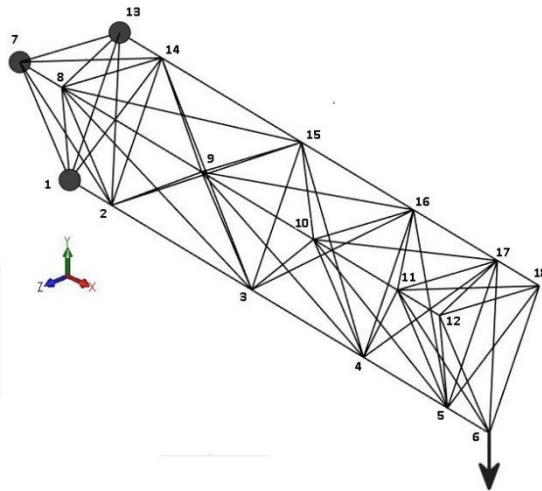


Figura 69 – Ground Structure e numeração dos nós

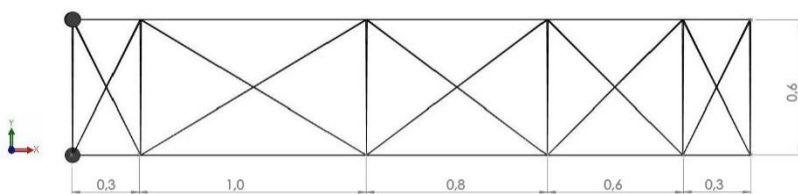


Figura 70 – Dimensões: Plano XY

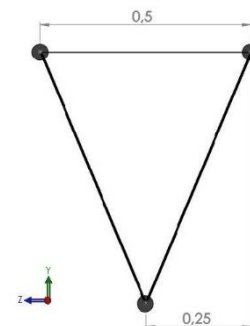


Figura 71 – Dimensões: Plano YZ

4.3.1. Formulação do problema

- Variável de Projecto

A optimização irá procurar os valores óptimos das 63 áreas de secção transversal das barras da *Ground Structure* da figura 69.

- Constrangimentos

A área máxima de secção transversal será de 0.01 m^2 . Para definir o valor máximo do volume recorreu-se ao PROAES, sendo considerada a *Ground Structure* inicial com áreas de secção de 0.01 m^2 (0.45977 m^3). O seu valor máximo, definido como constrangimento no processo de optimização, será 10% desse valor.

- Problema

O problema terá então a seguinte formulação

$$\begin{aligned} \min_{A_i} \quad & C = \alpha \frac{\mu_c}{5.3381 \times 10^{-5}} + (1 - \alpha) \frac{\sigma_c}{1.2221 \times 10^{-6}} \\ \text{sujeito a} \quad & \\ & V_{m\acute{a}x} = 4.5977 \times 10^{-2} \text{ m}^3 \\ & 1 \times 10^{-8} \text{ m}^2 \leq A_i \leq 0.010 \text{ m}^2 \end{aligned} \quad (28)$$

- Módulo de elasticidade – Incerteza

O módulo de elasticidade, bem como a incerteza associada, serão configurados de maneira idêntica à do exemplo da treliça de 200 barras do capítulo 4.1., com um valor médio de 200 GPa e um coeficiente de variação de 10%. A fórmula do desvio padrão da flexibilidade será por isso a seguinte

$$\sigma_c = \sqrt{\sum_{i=1}^{NV} \left(\frac{\partial f}{\partial E_i} \right)^2 \times (200 \times 10^8)^2} \quad (29)$$

4.3.2. Resultados

Para verificar o funcionamento do método em estruturas tridimensionais, começou-se por verificar a semelhança entre o resultado obtido e o apresentado em [58],

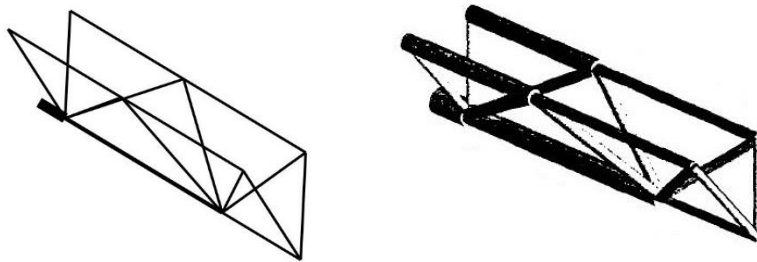


Figura 72 – Comparação do resultado obtido (esquerda) com o de [58] (direita)

Como se pode verificar, as estruturas são praticamente idênticas, exceptuando a espessura dos elementos, sempre sensível à interpretação gráfica que se faz dos resultados obtidos.

Relativamente à optimização da estrutura, os resultados foram os seguintes:

- $\alpha = 0$

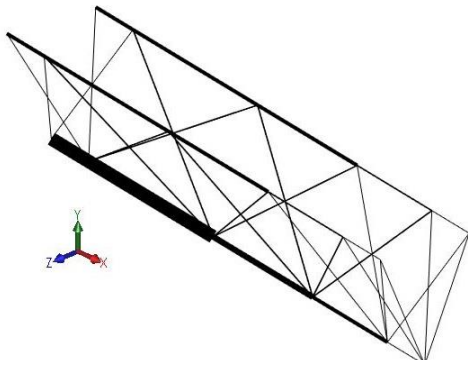


Figura 73 – Estrutura óptima: $\alpha=0$

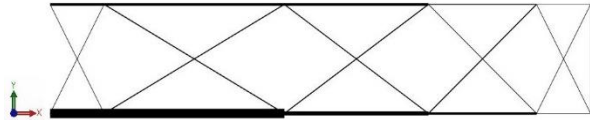


Figura 74 – Estrutura óptima: Plano XY

- $C = 0.99680 \text{ Nm}$
- $\sigma_c = 0.99680 \text{ Nm}$
- $\mu_c = 1.10910 \text{ Nm}$
- 37 elementos

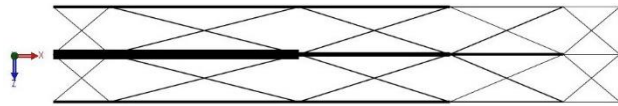


Figura 75 – Estrutura óptima: Plano XZ

- $\alpha = 0.1$

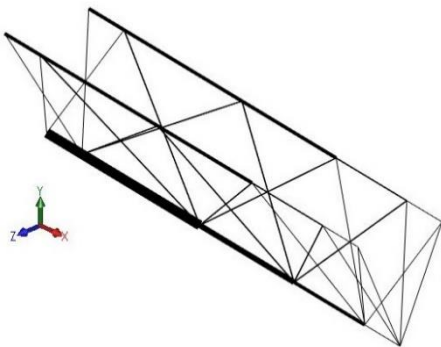


Figura 76 – Estrutura óptima: $\alpha=0.1$

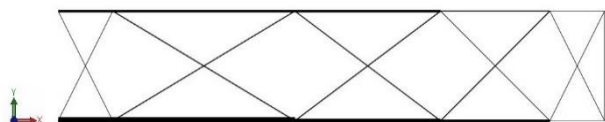


Figura 77 – Estrutura óptima: Plano XY

- $C = 1.00737 \text{ Nm}$
- $\sigma_c = 0.99746 \text{ Nm}$
- $\mu_c = 1.09655 \text{ Nm}$
- 37 elementos

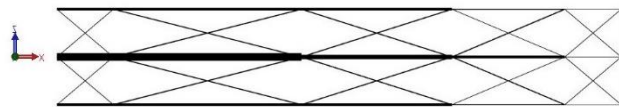


Figura 78 – Estrutura óptima: Plano XZ

- $\alpha = 0.2$

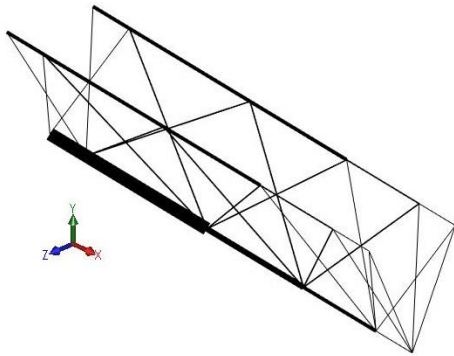


Figura 79 – Estrutura óptima: $\alpha=0.2$

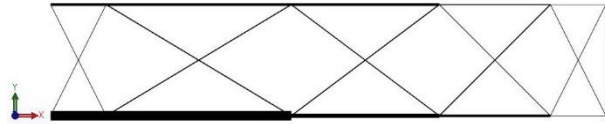


Figura 80 – Estrutura óptima: Plano XY

- $C = 1.01666 \text{ Nm}$
- $\sigma_c = 0.99931 \text{ Nm}$
- $\mu_c = 1.08607 \text{ Nm}$
- 37 elementos

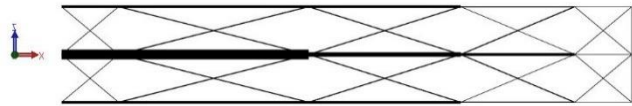


Figura 81 – Estrutura óptima: Plano XZ

- $\alpha = 0.3$

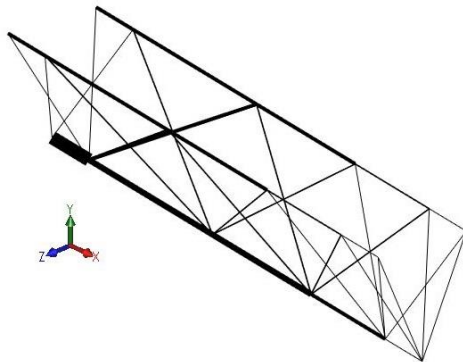


Figura 82 – Estrutura óptima: $\alpha=0.3$

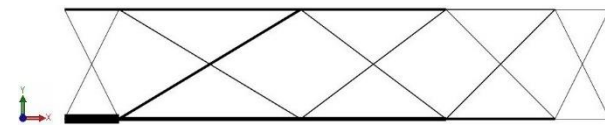


Figura 83 – Estrutura óptima: Plano XY

- $C = 1.02473 \text{ Nm}$
- $\sigma_c = 1.00264 \text{ Nm}$
- $\mu_c = 1.07627 \text{ Nm}$
- 37 elementos



Figura 84 – Estrutura óptima: Plano XZ

- $\alpha = 0.4$

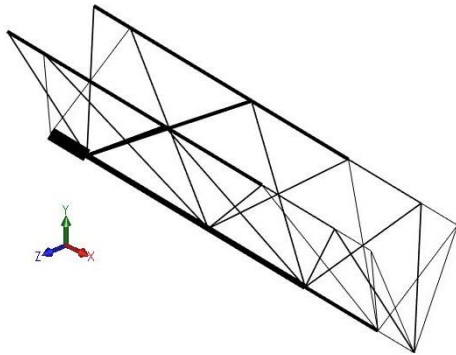


Figura 85 – Estrutura óptima: $\alpha=0.4$

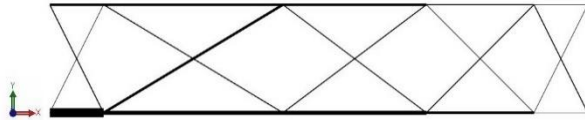


Figura 86 – Estrutura óptima: Plano XY

- $C = 1.03099 \text{ Nm}$
- $\sigma_c = 1.01042 \text{ Nm}$
- $\mu_c = 1.06185 \text{ Nm}$
- 37 elementos

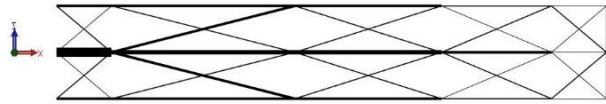


Figura 87 – Estrutura óptima: Plano XZ

- $\alpha = 0.5$

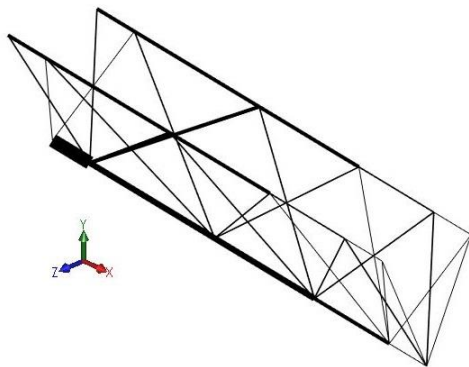


Figura 88 – Estrutura óptima: $\alpha=0.5$

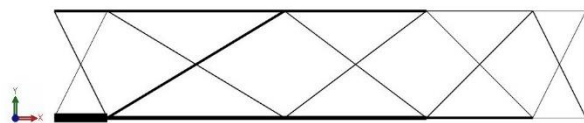


Figura 89 – Estrutura óptima: Plano XY

- $C = 1.03492 \text{ Nm}$
- $\sigma_c = 1.02165 \text{ Nm}$
- $\mu_c = 1.04819 \text{ Nm}$
- 37 elementos

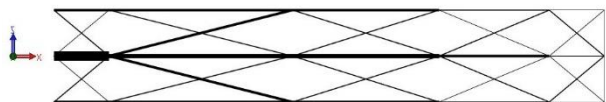


Figura 90 – Estrutura óptima: Plano XZ

- $\alpha = 0.6$

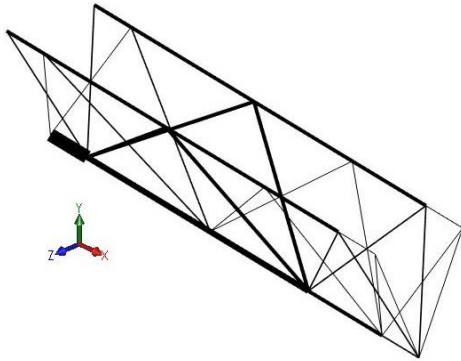


Figura 91 – Estrutura óptima: $\alpha=0.6$

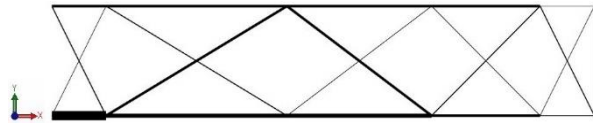


Figura 92 – Estrutura óptima: Plano XY

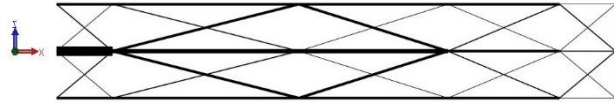


Figura 93 – Estrutura óptima: Plano XZ

- $C = 1.03611 \text{ Nm}$
- $\sigma_c = 1.03855 \text{ Nm}$
- $\mu_c = 1.03449 \text{ Nm}$
- 37 elementos

- $\alpha = 0.7$

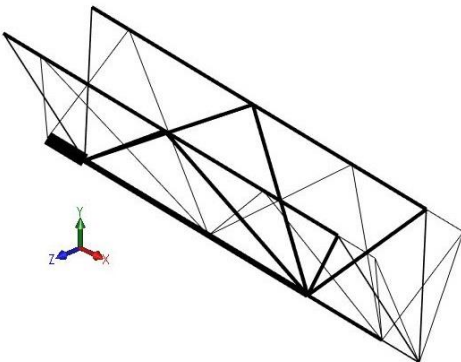


Figura 94 – Estrutura óptima: $\alpha=0.7$

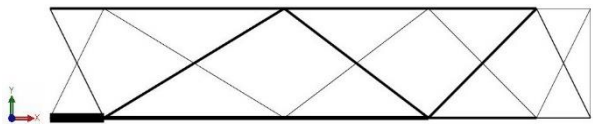


Figura 95 – Estrutura óptima: Plano XY

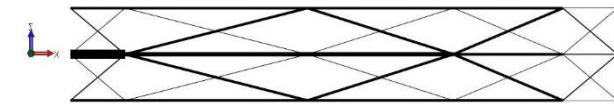


Figura 96 – Estrutura óptima: Plano XZ

- $C = 1.03364 \text{ Nm}$
- $\sigma_c = 1.06845 \text{ Nm}$
- $\mu_c = 1.01872 \text{ Nm}$
- 37 elementos

- $\alpha = 0.8$

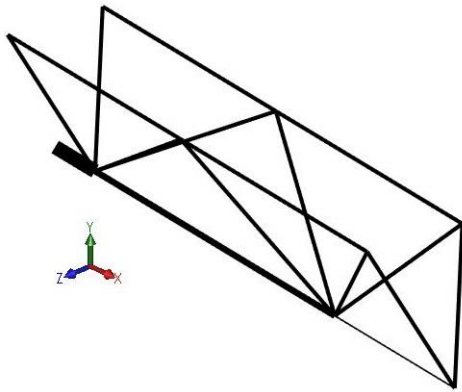


Figura 97 – Estrutura óptima: $\alpha=0.8$

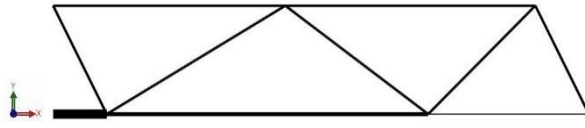


Figura 98 – Estrutura óptima: Plano XY

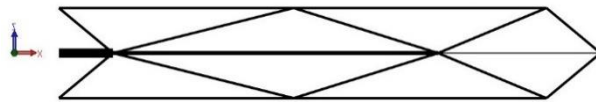


Figura 99 – Estrutura óptima: Plano XZ

- $C = 1.02503 \text{ Nm}$
- $\sigma_c = 1.11167$
- $\mu_c = 1.00336 \text{ Nm}$
- 23 elementos

- $\alpha = 0.9$

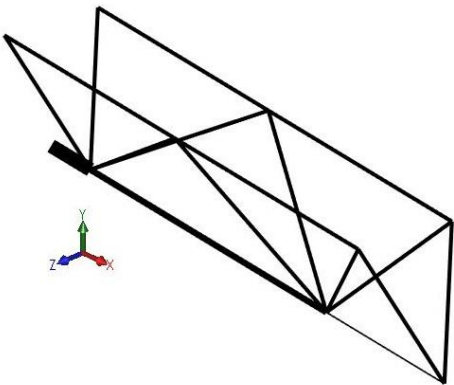


Figura 100 – Estrutura óptima: $\alpha=0.9$

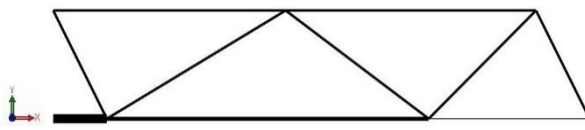


Figura 101 – Estrutura óptima: Plano XY

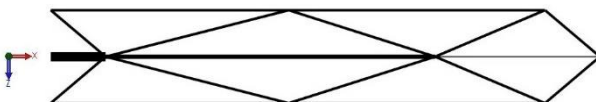


Figura 102 – Estrutura óptima: Plano XZ

- $C = 1.01339 \text{ Nm}$
- $\sigma_c = 1.12562$
- $\mu_c = 1.00092 \text{ Nm}$
- 23 elementos

- $\alpha = 1$

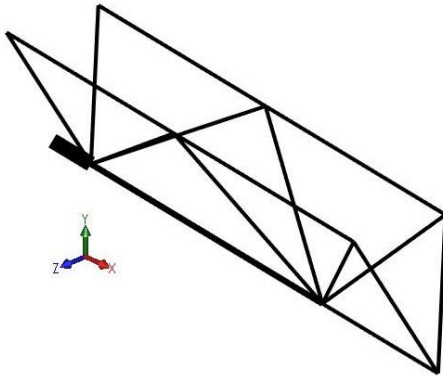


Figura 103 – Estrutura óptima: $\alpha=1$

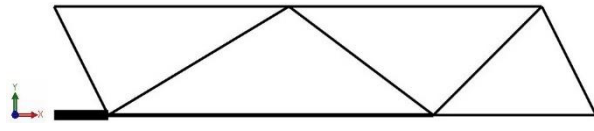


Figura 104 – Estrutura óptima: Plano XY

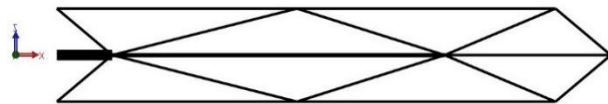


Figura 105 – Estrutura óptima: Plano XZ

- $C = 1.00000 \text{ Nm}$
- $\sigma_c = 1.14371 \text{ Nm}$
- $\mu_c = 1.00000 \text{ Nm}$
- 23 elementos

Tabela 15 – Incerteza no E (3D): Percentagens de volume ($\alpha=0$ a 0.5)

Elemento		$\alpha=0$	$\alpha=0.1$	$\alpha=0.2$	$\alpha=0.3$	$\alpha=0.4$	$\alpha=0.5$
Nó i	Nó j	%Volume	%Volume	%Volume	%Volume	%Volume	%Volume
1	2	6.53%	6.53%	6.53%	6.53%	6.53%	6.53%
2	3	21.75%	21.75%	21.75%	21.62%	20.63%	19.49%
3	4	9.75%	9.55%	9.34%	9.17%	9.20%	9.30%
4	5	2.09%	2.10%	2.11%	2.11%	2.08%	2.02%
5	6	0.14%	0.16%	0.19%	0.22%	0.26%	0.30%
7	8	2.80%	2.80%	2.80%	2.81%	2.83%	2.85%
8	9	10.37%	10.14%	9.91%	9.70%	9.68%	9.71%
9	10	3.49%	3.46%	3.44%	3.42%	3.37%	3.29%
10	11	0.94%	0.98%	1.01%	1.06%	1.14%	1.23%
11	12	0.07%	0.08%	0.09%	0.09%	0.10%	0.09%
13	14	2.80%	2.80%	2.80%	2.81%	2.83%	2.85%
14	15	10.37%	10.14%	9.91%	9.70%	9.68%	9.71%
15	16	3.49%	3.47%	3.44%	3.42%	3.37%	3.29%
16	17	0.94%	0.98%	1.01%	1.06%	1.14%	1.23%
17	18	0.07%	0.08%	0.09%	0.09%	0.10%	0.09%
6	12	0.42%	0.44%	0.46%	0.48%	0.48%	0.46%
18	6	0.42%	0.44%	0.46%	0.48%	0.48%	0.46%
1	8	0.53%	0.55%	0.58%	0.60%	0.59%	0.56%
1	14	0.53%	0.55%	0.58%	0.60%	0.59%	0.56%
2	7	0.62%	0.66%	0.70%	0.74%	0.83%	0.95%

Tabela 15 – Incerteza no E (3D): Percentagens de volume ($\alpha=0$ a 0.5) (Continuação)

Elemento		$\alpha=0$	$\alpha=0.1$	$\alpha=0.2$	$\alpha=0.3$	$\alpha=0.4$	$\alpha=0.5$
Nó i	Nó j	%Volume	%Volume	%Volume	%Volume	%Volume	%Volume
2	13	0.62%	0.66%	0.70%	0.74%	0.83%	0.95%
2	9	0.62%	0.66%	0.70%	0.74%	0.83%	0.95%
2	15	2.55%	2.57%	2.59%	2.63%	2.82%	3.08%
3	10	2.55%	2.57%	2.59%	2.63%	2.82%	3.08%
3	16	1.32%	1.33%	1.35%	1.36%	1.31%	1.21%
3	8	1.32%	1.33%	1.35%	1.36%	1.31%	1.21%
3	14	1.91%	1.92%	1.92%	1.92%	1.82%	1.67%
4	9	1.91%	1.91%	1.92%	1.92%	1.82%	1.67%
4	15	1.71%	1.74%	1.77%	1.82%	1.97%	2.18%
4	17	1.71%	1.74%	1.77%	1.82%	1.97%	2.18%
4	11	1.12%	1.16%	1.20%	1.25%	1.37%	1.53%
5	10	1.12%	1.16%	1.20%	1.25%	1.37%	1.53%
5	16	0.90%	0.92%	0.94%	0.96%	0.93%	0.87%
5	18	0.90%	0.92%	0.94%	0.96%	0.93%	0.87%
5	12	0.53%	0.55%	0.58%	0.60%	0.59%	0.56%
6	17	0.53%	0.55%	0.58%	0.60%	0.59%	0.56%
12	17	0.62%	0.66%	0.70%	0.74%	0.83%	0.95%

Tabela 16 – Incerteza no E (3D): Percentagens de volume ($\alpha=0.6$ a 1)

Elemento		$\alpha=0.6$	$\alpha=0.7$	$\alpha=0.8$	$\alpha=0.9$	$\alpha=1$
Nó i	Nó j	%Volume	%Volume	%Volume	%Volume	%Volume
1	2	6.53%	6.53%	6.53%	6.53%	6.53%
2	3	18.08%	16.11%	13.91%	13.40%	12.82%
3	4	9.52%	10.06%	10.79%	10.54%	10.26%
4	5	1.90%	1.63%	1.24%	1.30%	1.36%
5	6	0.36%	0.47%	0.61%	0.64%	0.68%
7	8	2.87%	2.87%	2.88%	2.96%	3.05%
8	9	9.83%	10.19%	10.70%	10.45%	10.18%
9	10	3.16%	2.90%	2.55%	2.63%	2.72%
10	11	1.37%	1.59%	1.88%	1.96%	2.04%
11	12	0.08%	0.05%	-	-	-
13	14	2.87%	2.87%	2.88%	2.96%	3.05%
14	15	9.83%	10.19%	10.70%	10.45%	10.18%
15	16	3.16%	2.89%	2.55%	2.63%	2.72%
16	17	1.37%	1.59%	1.88%	1.96%	2.04%
17	18	0.08%	0.05%	-	-	-
6	12	0.40%	0.24%	-	-	-
18	6	0.40%	0.24%	-	-	-
1	8	0.48%	0.29%	-	-	-
1	14	0.48%	0.29%	-	-	-
2	7	1.11%	1.39%	1.78%	1.86%	1.93%
2	13	1.11%	1.39%	1.78%	1.86%	1.93%

Tabela 16 – Incerteza no E (3D): Percentagens de volume ($\alpha=0.6$ a 1) (Continuação)

Elemento		$\alpha=0.6$	$\alpha=0.7$	$\alpha=0.8$	$\alpha=0.9$	$\alpha=1$
Nó i	Nó j	%Volume	%Volume	%Volume	%Volume	%Volume
2	9	1.11%	1.39%	1.78%	1.86%	1.93%
2	15	3.49%	4.25%	5.26%	5.31%	5.36%
3	10	3.49%	4.25%	5.26%	5.31%	5.36%
3	16	1.02%	0.61%	-	-	-
3	8	1.03%	0.61%	-	-	-
3	14	1.39%	0.82%	-	-	-
4	9	1.39%	0.82%	-	-	-
4	15	2.50%	3.07%	3.84%	3.92%	4.01%
4	17	2.50%	3.07%	3.84%	3.92%	4.01%
4	11	1.77%	2.20%	2.78%	2.86%	2.95%
5	10	1.77%	2.20%	2.77%	2.86%	2.95%
5	16	0.75%	0.45%	-	-	-
5	18	0.75%	0.45%	-	-	-
5	12	0.48%	0.29%	-	-	-
6	17	0.48%	0.29%	-	-	-
12	17	1.11%	1.39%	1.78%	1.86%	1.93%

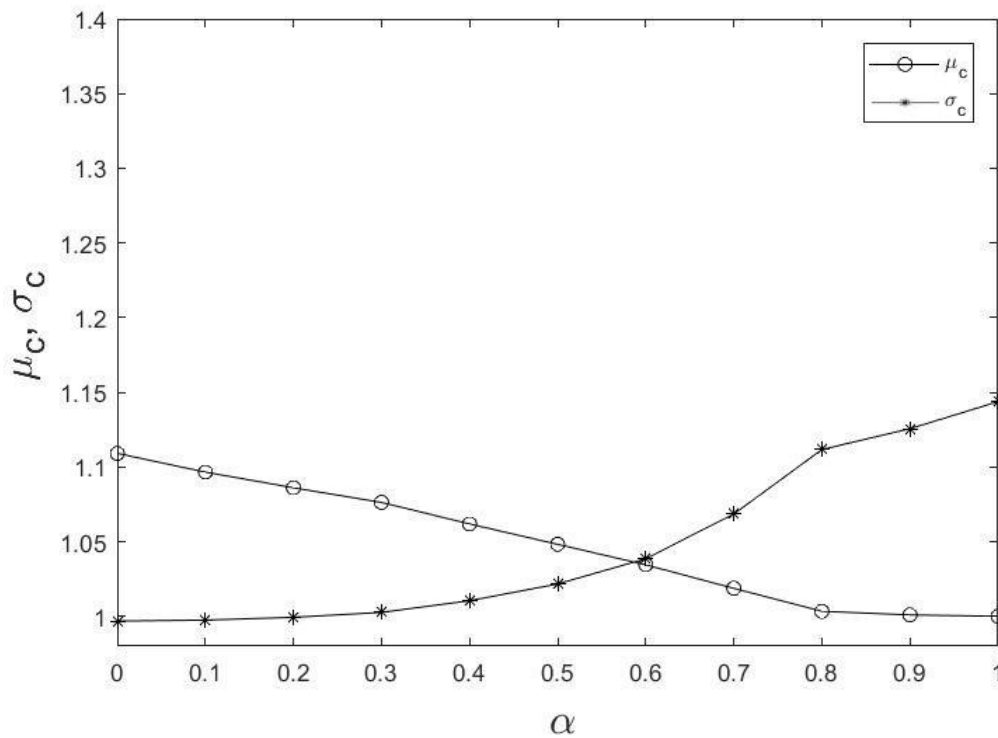


Figura 106 – Variação da média e do desvio padrão normalizados

Um pouco à semelhança do que sucedeu em 4.1, neste exemplo começou por se considerar uma *Ground Structure* com 123 elementos, o que corresponde a quase todas as combinações possíveis entre nós, no entanto os resultados não foram satisfatórios. Apesar de também se ter conseguido obter a estrutura determinística idêntica à da figura 72, os resultados alcançados

durante a otimização não foram coerentes, verificando-se uma grande aleatoriedade na variação dos valores das áreas. Após se verificar este problema a estrutura foi reduzida para 63 elementos, resultando na treliça da figura 69, similar à usada por João Marmeleiro [59].

- Resumo

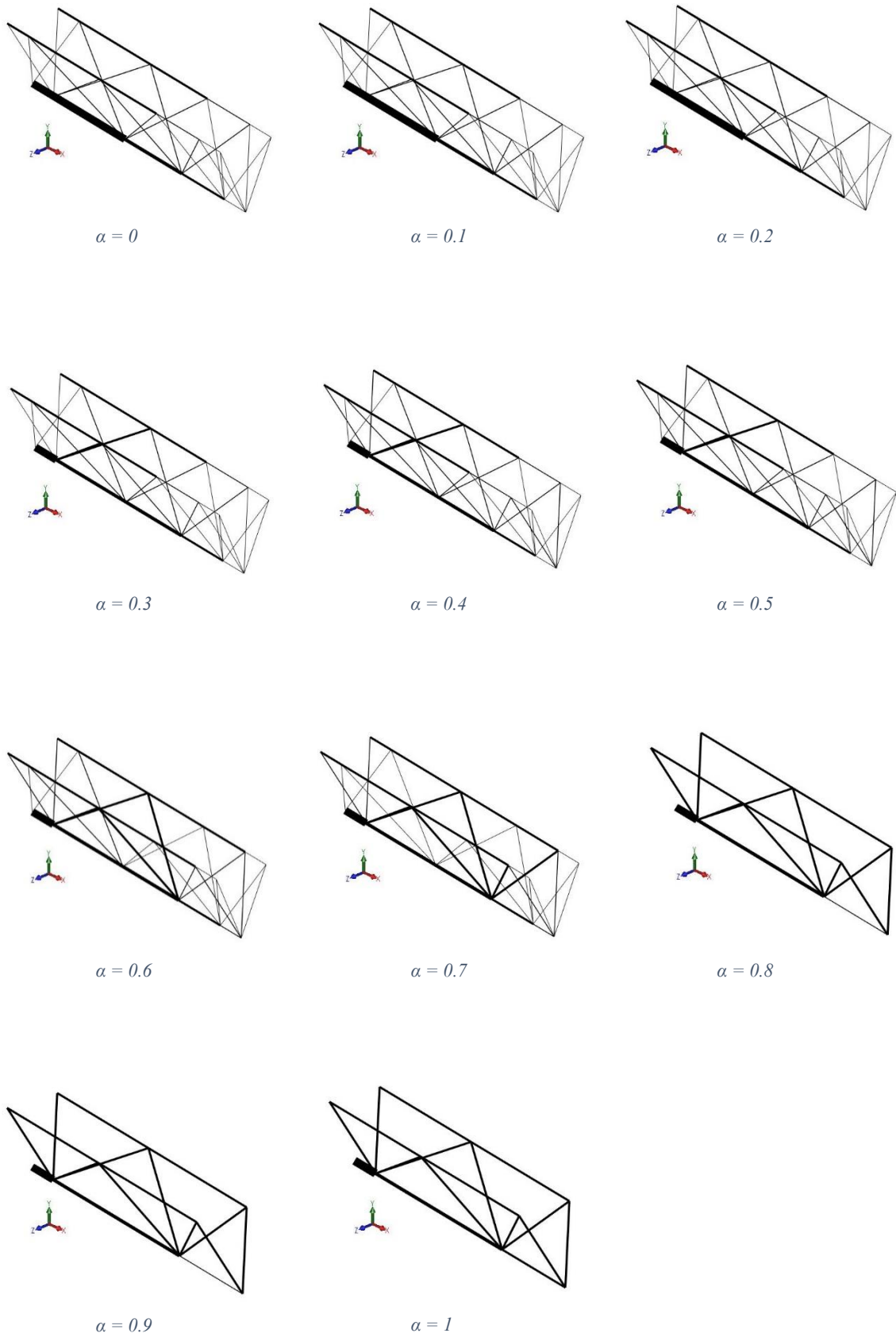


Figura 107 – Resumo dos resultados obtidos

5. Conclusões e futuros trabalhos

O trabalho desenvolvido teve como principal objectivo aplicar um método recente de optimização robusta em problemas de optimização de topologia baseados no conceito de *Ground Structure* onde ainda não tinha sido testado:

- a) A existência de incerteza no módulo de elasticidade em estruturas com elevado número de elementos;
- b) O efeito da incerteza nas coordenadas dos nós;
- c) A aplicação da metodologia em estruturas tridimensionais.

A aplicação do método é feita com recurso à utilização do programa PROAES, que tem a capacidade de fazer análises de elementos finitos e análises de sensibilidades, em conjunto com a ferramenta de optimização do MATLAB, a *optimtool*.

No primeiro exemplo testado foi optimizada uma estrutura 2D composta por 200 barras com incerteza relativamente ao módulo de elasticidade. A comparação dos resultados obtidos com os que se encontram noutros trabalhos permite verificar a qualidade/coerência dos mesmos, sendo que as poucas diferenças encontradas podem, eventualmente, estar relacionadas com a impossibilidade de verificar parâmetros como o volume máximo, área máxima, etc., que não se encontram especificados nos artigos utilizados para comparação. Numa primeira abordagem foi considerada uma *Ground Structure* com 300 elementos – semelhante à de 200, mas com elementos sobrepostos – no entanto não foram conseguidos resultados coerentes, tendo sido por isso reduzido o número de elementos para 200, diminuindo também substancialmente o tempo das optimizações. Este problema pode estar relacionado com a dificuldade em lidar com um número elevado de variáveis que é atribuída ao algoritmo de optimização utilizado, o SQP.

Na segunda optimização foi considerada uma estrutura 2D com 38 barras, mas desta vez com incerteza nas coordenadas x e y de todos os nós. A comparação dos resultados obtidos com os encontrados na literatura pesquisada permitiu constatar que são bastante satisfatórios.

Por último aplicou-se a metodologia a uma estrutura 3D com 63 elementos barra e com incerteza no módulo de elasticidade. Tal como no primeiro exemplo, foi necessário reduzir o número de elementos, que inicialmente eram 123, para conseguir bons resultados. De realçar que foi possível chegar à solução determinística com a *Ground Structure* de 123 elementos, no entanto a introdução de incerteza na optimização levou a resultados pouco conseguidos, o mesmo se passou no exemplo em que houve uma redução de 300 para 200 elementos, o que permite concluir que o método apresenta alguma dificuldade em optimizar estruturas que apresentem um certo

nível de redundância. Não havendo trabalhos de otimização robusta com estruturas semelhantes, apenas foi possível comparar a estrutura obtida a partir de uma otimização determinística, sendo que o resultado foi praticamente idêntico ao encontrado na bibliografia. No entanto foi possível verificar que ao se fazer variar α houve uniformidade na variação das áreas, ou seja, com o aumento da componente determinística notou-se um reforço dos elementos constituintes da estrutura determinística, permitindo avaliar positivamente a competência do método quando aplicado em estruturas tridimensionais.

Para futuros trabalhos propõem-se novos testes em estruturas com elevado número de elementos, procurando averiguar a origem da dificuldade verificada nesta dissertação, sugerindo-se a mudança do algoritmo SPQ para o algoritmo MMA. Será também de grande interesse aplicar o método a estruturas com incerteza no carregamento, bem como aumentar a complexidade das estruturas 3D.

Bibliografia

- [1] H. G. Beyer and B. Sendhoff, “Robust optimization - A comprehensive survey,” *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 196, no. 33–34, pp. 3190–3218, 2007.
- [2] N. Semioshkina and G. Voigt, “An overview on Taguchi Method,” *J. Radiat. Res.*, vol. 47 Suppl A, no. 2, pp. A95–A100, 2006.
- [3] A. Teixeira, “Otimização de topologia de treliças considerando incerteza,” Dissertação de Mestrado, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa, 2017.
- [4] J. N. Richardson, R. F. Coelho, and S. Adriaenssens, “A unified stochastic framework for robust topology optimization of continuum and truss-like structures,” *Eng. Optim.*, vol. 48, no. 2, pp. 334–350, 2016.
- [5] T. Zegard and G. H. Paulino, “GRAND3 — Ground structure based topology optimization for arbitrary 3D domains using MATLAB,” *Struct. Multidiscip. Optim.*, vol. 52, no. 6, pp. 1161–1184, 2015.
- [6] C. Van De Panne and F. Rahnamat, “The First Algorithm for Linear Programming : An Analysis of Kantorovich’s Method,” *Econ. Plan.*, vol. 19, no. 2, pp. 76–91, 1985.
- [7] J. C. Maxwell, “On reciprocal figures and diagrams of forces,” *Philosophical Magazine Series 4*, vol. 27, no. 182. Scientific Papers, Cambridge University Press, U.K., VOL. 2, pp. 250–261, 1864.
- [8] A. G. M. Michell, “The limits of economy of material in frame-structures,” *Philosophical Magazine Series 6*, vol. 8, no. 47. Philosophical Magazine, Series 6, Vol. 8, No. 47, pp. 589–597, 1904.
- [9] L. A. Schmit, “Structural design by systematic synthesis,” *Proc. of the Second ASCE Conference on Electronic Computation*. Proc. 2nd Conference on Electronic Computation ASCE, Pittsburgh, pp. 105–122, 1960.
- [10] M. P. Bendsøe, “Optimal shape design as a material distribution problem,” *Struct. Optim.*, vol. 1, no. 4, pp. 193–202, 1989.
- [11] M. P. Bendsøe and N. Kikuchi, “Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method,” *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 71, no. 2, pp. 197–224, 1988.
- [12] J. Arora, *Introduction to Optimum Design, Third Edition*. Academic Press, 2011.
- [13] P. Coelho, “Métodos computacionais em Engenharia Mecânica,” Apontamentos da unidade curricular, DEMI, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa, 2018.

- [14] K. Ghabraie, "Applications of Topology Optimization Techniques in Seismic Design of Structure," in *Structural Seismic Design Optimization and Earthquake Engineering, IGI Global*, pp. 232-268, 2012.
- [15] Peter W. Christensen and Anders Klarbring, *An Introduction to Structural Optimization*, vol. 153, no. 9. 2008.
- [16] P. Coelho, "Tópicos avançados em mecânica estrutural," Apontamentos da unidade curricular, DEMI, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa 2018.
- [17] V. T. O. Gan and C. Engineering, "Reliability and Reliability-Based Design Optimization," vol. 30, pp. 237–249, 2006.
- [18] Nowak and Collins, "Reliability of Structures." McGraw-Hill, 2000.
- [19] N. Lind, "An Exact and Invariant First Order Reliability Format," no. July, 2015.
- [20] X. Du, "First Order and Second Reliability Methods," in *Probabilistic Engineering Design*, Missouri University of Science and Technology, 2005.
- [21] H. Karadeniz, V. Toğan, and T. Vrouwenvelder, "An integrated reliability-based design optimization of offshore towers," *Reliab. Eng. Syst. Saf.*, vol. 94, no. 10, pp. 1510–1516, 2009.
- [22] I. T. Yang and Y. H. Hsieh, "Boundary-approaching Particle Swarm Optimization in Reliability-based Design Optimization," no. 4, pp. 2210–2214, 2010.
- [23] I. T. Yang and Y. H. Hsieh, "Reliability-based design optimization with discrete search space," *Qual. Reliab. (ICQR), 2011 IEEE Int. Conf.*, no. 4, pp. 90–94, 2011.
- [24] R. F. Coelho and P. Bouillard, "with Stochastic Metamodels," *Evol. Comput.*, vol. 19, no. 4, pp. 525–560, 2011.
- [25] Y.-T. Tsai, K.-H. Lin, and Y.-Y. Hsu, "Reliability design optimisation for practical applications based on modelling processes," *J. Eng. Des.*, vol. 24, no. 12, pp. 849–863, 2013.
- [26] X. Liu and Z. Zhang, "A hybrid reliability approach for structure optimisation based on probability and ellipsoidal convex models," *J. Eng. Des.*, vol. 25, no. 4–6, pp. 238–258, 2014.
- [27] B. Xia, H. Lü, D. Yu, and C. Jiang, "Reliability-based design optimization of structural systems under hybrid probabilistic and interval model," *Comput. Struct.*, vol. 160, pp. 126–134, 2015.
- [28] Z. Meng, H. Zhou, G. Li, and H. Hu, "A hybrid sequential approximate programming method for second-order reliability-based design optimization approach," *Acta Mech.*, vol. 228, no. 5, pp. 1965–1978, 2017.
- [29] Z. Meng, H. Zhou, H. Hu, and B. Keshtegar, "Enhanced sequential approximate programming using second order reliability method for accurate and efficient structural

- reliability-based design optimization,” *Appl. Math. Model.*, vol. 62, pp. 562–579, 2018.
- [30] J. Cheng and H. Jin, “Reliability-based optimization of steel truss arch bridges,” *Int. J. Steel Struct.*, vol. 17, no. 4, pp. 1415–1425, 2017.
- [31] V. Ho-Huu, D. Duong-Gia, T. Vo-Duy, T. Le-Duc, and T. Nguyen-Thoi, “An efficient combination of multi-objective evolutionary optimization and reliability analysis for reliability-based design optimization of truss structures,” *Expert Syst. Appl.*, vol. 102, pp. 262–272, 2018.
- [32] B. Keshtegar and S. Chakraborty, “An efficient-robust structural reliability method by adaptive finite-step length based on Armijo line search,” *Reliab. Eng. Syst. Saf.*, vol. 172, no. December 2017, pp. 195–206, 2018.
- [33] G. Taguchi, *Quality Engineering through Design Optimization*. New York: Kraus International Publications, 1984.
- [34] D. C. Montgomery, *Design and Analysis of Experiments*, vol. 48, no. 1. 2006.
- [35] R. Haftka and Z. Gurdal, *Elements of Structural Optimization*. Springer Netherlands, 1992.
- [36] A. Ben-Tal and A. Nemirovski, “Robust Truss Topology Design via Semidefinite Programming,” *SIAM J. Optim.*, vol. 7, no. 4, pp. 991–1016, 1997.
- [37] E. Sandgren and T. M. Cameron, “Robust design optimization of structures through consideration of variation,” *Comput. Struct.*, vol. 80, no. 20–21, pp. 1605–1613, 2002.
- [38] J. K. Guest and T. Igusa, “Structural optimization under uncertain loads and nodal locations,” *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 198, no. 1, pp. 116–124, 2008.
- [39] Y. Kanno and X. Guo, “A mixed integer programming for robust truss topology optimization with stress constraints,” *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 83, no. 13, pp. 1675–1699, 2010.
- [40] A. Asadpoure, M. Tootkaboni, and J. K. Guest, “Robust topology optimization of structures with uncertainties in stiffness - Application to truss structures,” *Comput. Struct.*, vol. 89, no. 11–12, pp. 1131–1141, 2011.
- [41] M. Jalalpour, T. Igusa, and J. K. Guest, “Optimal design of trusses with geometric imperfections: Accounting for global instability,” *Int. J. Solids Struct.*, vol. 48, no. 21, pp. 3011–3019, 2011.
- [42] Z. Kang and S. Bai, “On robust design optimization of truss structures with bounded uncertainties,” *Struct. Multidiscip. Optim.*, vol. 47, no. 5, pp. 699–714, 2013.
- [43] J. N. Richardson, R. F. Coelho, and S. Adriaenssens, “Robust topology optimization of 2D and 3D continuum and truss structures using a spectral stochastic finite element method,” pp. 1–11, 2013.
- [44] J. N. Richardson, R. Filomeno Coelho, and S. Adriaenssens, “Robust topology optimization of truss structures with random loading and material properties: A

- multiobjective perspective,” *Comput. Struct.*, vol. 154, pp. 41–47, 2015.
- [45] D. Hashimoto and Y. Kanno, “A semidefinite programming approach to robust truss topology optimization under uncertainty in locations of nodes,” *Struct. Multidiscip. Optim.*, vol. 51, no. 2, pp. 439–461, 2015.
- [46] N. Changizi, H. Kaboodanian, and M. Jalalpour, “Stress-based topology optimization of frame structures under geometric uncertainty,” *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 315, pp. 121–140, 2017.
- [47] G. Sun, H. Zhang, J. Fang, G. Li, and Q. Li, “A new multi-objective discrete robust optimization algorithm for engineering design,” *Appl. Math. Model.*, vol. 53, pp. 602–621, 2018.
- [48] G. Gao, Z. Liu, Y. Li, and Y. Qiao, “A new method to generate the ground structure in truss topology optimization,” *Eng. Optim.*, vol. 49, no. 2, pp. 235–251, 2017.
- [49] P. Zhou, J. Du, and Z. Lü, “Interval analysis based robust truss optimization with continuous and discrete variables using mix-coded genetic algorithm,” *Struct. Multidiscip. Optim.*, vol. 56, no. 2, pp. 353–370, 2017.
- [50] Z. Fu, C. Wang, and J. Zhao, “Truss topology optimization under uncertain nodal locations with proportional topology optimization method,” *Mech. Based Des. Struct. Mach.*, vol. 45, no. 2, pp. 190–206, 2017.
- [51] J. T. Liu and H. C. Gea, “Robust topology optimization under multiple independent unknown-but-bounded loads,” *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 329, pp. 464–479, 2018.
- [52] N. Changizi and M. Jalalpour, “Robust topology optimization of frame structures under geometric or material properties uncertainties,” *Struct. Multidiscip. Optim.*, vol. 56, no. 4, pp. 791–807, 2017.
- [53] X. Peng, J. Li, S. Jiang, and Z. Liu, “Robust topology optimization of continuum structures with loading uncertainty using a perturbation method,” *Eng. Optim.*, vol. 50, no. 4, pp. 584–598, 2018.
- [54] Y. Zheng, L. Gao, M. Xiao, H. Li, and Z. Luo, “Robust topology optimization considering load uncertainty based on a semi-analytical method,” *Int. J. Adv. Manuf. Technol.*, vol. 94, no. 9–12, pp. 3537–3551, 2018.
- [55] PROAES, “Manual de Utilização,” Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa, 2009.
- [56] P. T. Boggs and J. W. Tolle, “Sequential Quadratic Programming,” *Acta Numer.*, vol. 4, pp. 1–51, 1995.
- [57] X. Zhang, A. S. Ramos, and G. H. Paulino, “Material nonlinear topology optimization using the ground structure method with a discrete filtering scheme,” *Struct. Multidiscip. Optim.*, vol. 55, no. 6, pp. 2045–2072, 2017.

- [58] M. P. Bendsoe, A. Ben-Tal, and J. Zowe, “Optimization Methods for Truss Geometry and Topology Design,” *Struct. Multidiscip. Optim.*, vol. 7, no. 3, pp. 141–159, 1994.
- [59] J. Marmeleiro, “PROAES – Programa de análise de estruturas para aplicação em otimização e análise de fiabilidade,” Dissertação de Mestrado, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa, 2017.