

DISTRIBUIÇÃO HIPERBÓLICA DAS RENTABILIDADES ACCIONÁRIAS

J. C. Rodrigues da Costa

RESUMO:

Vários estudos referem que com esta nova distribuição vêm atenuadas as tradicionais insuficiências da distribuição Normal na caracterização do comportamento estocástico das variáveis financeiras – excesso de ocorrências em torno da moda e “fat tails”. A julgar pelas amostras estudadas do nosso mercado – 1988 a 1998/9 - também isso se verifica no segmento accionário da BVL para as rentabilidades logarítmicas diárias. Contudo, permanece a dúvida se, na prática, se justifica o acréscimo de esforço exigido na estimação dos quatro parâmetros desta nova distribuição, tendo em atenção que a Normal exige apenas dois. Por exemplo, em termos de VaR, o facto da distribuição Gaussiana prever, em algumas situações, maiores limiares de perdas em vários dos anos estudados tende a reduzir o interesse desse esforço adicional, dada a margem de folga que dessa forma se obtém em comparação com os valores produzidos pela hiperbólica.

1. Introdução

Com o desenvolvimento dos contratos de opção e dos modelos de quantificação do risco de variação de preço do tipo VaR, tem-se assistido a um esforço adicional de pesquisa no sentido de procurar conhecer melhor o comportamento estocástico das variáveis financeiras mais comuns: acções e taxas de juro.

No caso das acções, inicialmente e à falta de melhor descrição optou-se pelo modelo Gaussiano tradicional, mas cedo se constatou que essa distribuição, se goza de alguma simplicidade e grande difusão entre os técnicos, não se ajusta muito bem à realidade empírica dos mercados. De facto, as distribuições estatísticas das realizações históricas destes valores apresentam-se normalmente como leptocúrticas – grande concentração dos rendimentos periódicos em torno do valor modal – ao mesmo tempo que se, verificam importantes ocorrências em zonas significativamente afastadas da média - as conhecidas “fat tails”.

Esta má descrição da realidade pelo modelo Gaussiano clássico determinou duas vias diferentes de busca de soluções mais ajustadas à realidade:

- numa primeira, tem-se procurado encontrar uma distribuição que se ajuste melhor ao comportamento dos mercados, em especial, que descreva de forma mais próxima da realidade os valores junto ao centro e nos extremos das duas abas; idealmente, os parâmetros dessa distribuição seriam constantes ao longo do tempo;
- numa segunda via, tem-se procurado dar um carácter dinâmico aos modelos no sentido de que, qualquer que seja a distribuição escolhida, os seus parâmetros se adaptem, em cada instante, ao “estado de espírito” do mercado; a

modelização terá assim que descrever o próprio comportamento estocástico desses parâmetros da distribuição escolhida; dir-se-ia que se aceita ceder na qualidade do modelo de base porque este se vai “moldando” à evolução dos mercados ao longo do tempo.

A primeira linha de pesquisa conduziu à utilização de vários tipos de distribuição desde a lognormal por Fama (1965), passando pela de Pareto por Officer (1972), a de Student utilizada por Praetz (1972), até à curva logística de Balakrisnan (1992). A segunda linha de pesquisa - e em grande parte posterior à primeira - conduziu ao desenvolvimento de modelos do tipo ARCH, dos quais são mais frequentemente usados os da família GARCH - Bollerslev (1986).

Mais recentemente, têm aparecido novos trabalhos que, sem escamotear o carácter dinâmico dos modelos e, portanto, a variabilidade temporal dos seus parâmetros quantitativos, voltam a pôr a tónica numa melhor descrição estatística de cada amostra histórica. São exemplos os casos:

- da distribuição hiperbólica, curiosamente desenvolvida num ramo da física, Barndorff-Nielsen (1977),
- da distribuição hiperbólica generalizada, Karsten (1997)
- da distribuição de Laplace,
- e da distribuição Gaussiana Inversa Normal (NIG - “Normal Inverse Gaussian”).

Infelizmente, para o mercado financeiro português, poucas vezes se têm posto estas questões de modelização dos comportamentos estocásticos visto que, mercê de um conjunto de vicissitudes históricas que se têm sucedido ao longo deste século, os investidores pouco têm sentido a sua necessidade e, além disso, a indisponibilidade de uma massa estatística de dados não têm permitido a elaboração de estudos neste campo. Contudo, o recente acumular de dados produzidos pelo mercado de capitais nacional desde meados da década de 80 e dois acontecimentos pontuais determinaram, cada vez mais, uma inversão dessa postura.

Efectivamente, vale recordar que os nossos bancos têm agora possibilidade de adoptar modelos analíticos internos nos seus esforços de quantificação das suas necessidades de fundos próprios, e que, para esse efeito, um melhor conhecimento do comportamento dos mercados é um bom veículo para uma redução dessas necessidades de capital. Por outro lado, o lançamento pela BDP - Bolsa de Derivados do Porto dos Contratos de Opção sobre um índice accionário¹ recomenda que se aprofunde, para além daquilo que já é conhecido com o modelo Gaussiano, o conhecimento do comportamento estocástico do segmento mais líquido desse nosso mercado.

Neste trabalho procurou-se fazer uma primeira abordagem à caracterização não Gaussiana das acções na nossa Bolsa, utilizando-se o caso mais elementar da distribuição hiperbólica simples para modelizar o seu comportamento estatístico no tempo. Foram utilizadas três amostras: os índices BVL-Geral e BVL-30 e as acções da EDP.

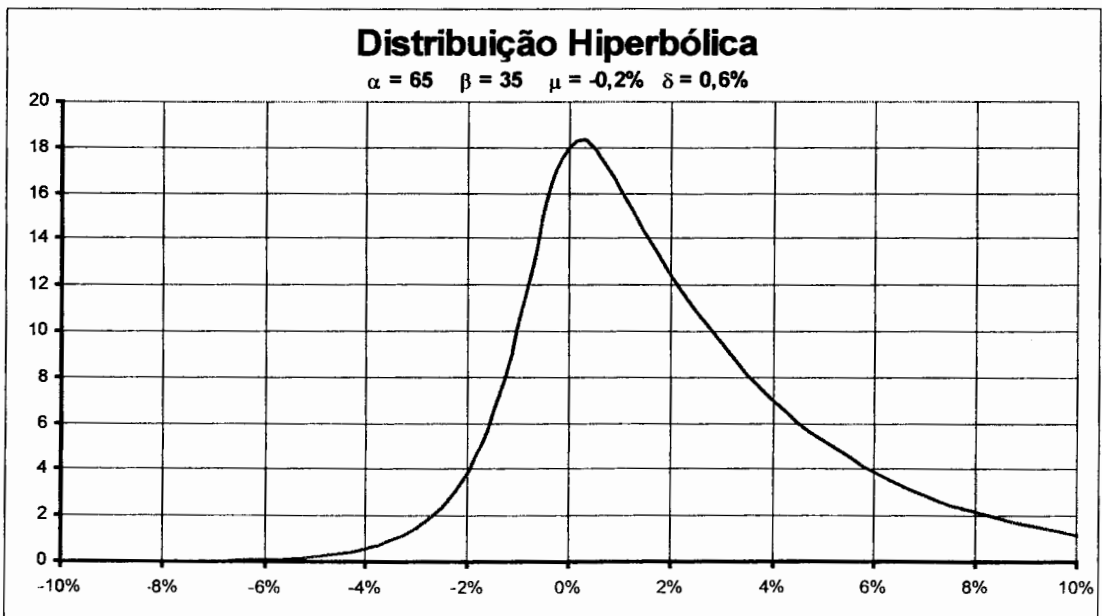
¹ Na realidade, as Calls e as Puts da BDP - Bolsa de Derivados do Porto incidem sobre os Futuros sobre o índice PSI-20.

2. Distribuição Hiperbólica

Enquanto que um comportamento gaussiano fica completamente definido pelo conhecimento da média μ e do desvio padrão σ da respectiva função densidade de probabilidade $f(x)$, a distribuição hiperbólica exige o conhecimento de quatro parâmetros para essa função

$$f(x) = \frac{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{2 \cdot \delta \cdot \alpha \cdot K_1 \left[\delta \cdot \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \right]} e^{-\alpha \cdot \sqrt{\delta^2 + (x-\mu)^2} + \beta \cdot (x-\mu)}$$

onde μ localiza a curva ao longo do eixo X, $\delta \geq 0$ é um factor de escala que amplia mais ou menos toda a curva no sentido do eixo Y e, portanto, impõe a amplitude da respectiva moda, e $\alpha > |\beta| \geq 0$ acabam, em conjunto, por caracterizar o grau de dispersão em torno da moda na medida em que estão relacionados com a velocidade de aproximação exponencial a zero das duas abas da curva quando $x \rightarrow \pm\infty$. Na expressão analítica anterior, $K_1[\]$ é a função modificada de Bessel de 3ª espécie e de ordem 1.



Note-se que esta distribuição, no caso geral, não será simétrica em torno do ponto $x = \mu$, visto que só por acaso será $\beta = 0$. Esta é uma primeira causa de um melhor ajustamento do modelo à realidade demonstrada empiricamente pelas variáveis financeiras, tendo em atenção que, frequentemente o terceiro momento (“skew”) não é nulo, ao contrário do que impõe o modelo de Gauss. Uma segunda vantagem resulta do maior peso da probabilidade acumulada sob as abas, como se verá adiante.

A origem do nome desta distribuição está no facto de o logaritmo da função densidade de probabilidade representar uma hipérbole²

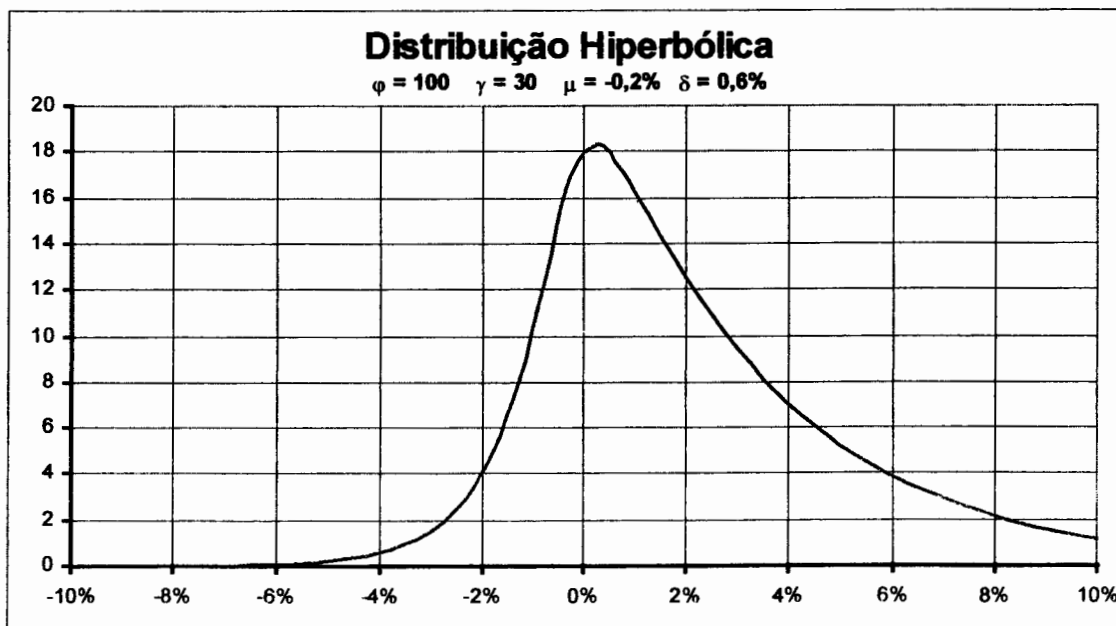
$$z = \text{Ln}[f(x)] = \underbrace{\text{Ln}\left(\frac{\sqrt{\varphi \cdot \gamma}}{\delta \cdot (\varphi + \gamma) \cdot K_1}\right)}_{\text{Constante C}} - \frac{1}{2} \cdot (\varphi + \gamma) \sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2} + \frac{1}{2} \cdot (\varphi - \gamma) \cdot (x - \mu)$$

Por razões de ordem prática é costume usar os parâmetros φ e γ em substituição de α e β :

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2}(\varphi + \gamma) & \varphi &= \alpha + \beta \\ \beta &= \frac{1}{2}(\varphi - \gamma) & \gamma &= \alpha - \beta \end{aligned} \Rightarrow$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{\varphi \cdot \gamma}}{\delta \cdot (\varphi + \gamma) \cdot K_1 \left[\delta \cdot \sqrt{\varphi \cdot \gamma} \right]} e^{-1/2 \cdot (\varphi + \gamma) \cdot \sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2} + 1/2 \cdot (\varphi - \gamma) \cdot (x - \mu)}$$

onde se tem que $\varphi, \gamma > 0$.



² Note-se que, na distribuição Gaussiana, o logaritmo de $f(x)$ representa uma parábola

$$z = C - \frac{(x - \mu)^2}{2 \cdot \sigma}$$

onde C é uma constante. Nesse sentido, a distribuição normal poderia ser chamada de *parabólica*.

Para valores de x afastados de μ , a função $f(x)$ aproxima-se de uma de duas exponenciais bastante mais simples, o que pode ser visto logaritmizando-a como segue:

$$\left\{ \begin{array}{l} z = \text{Ln}[f(x)] \cong C - \frac{1}{2} \cdot (\varphi + \gamma) \cdot |x - \mu| + \frac{1}{2} \cdot (\varphi - \gamma) \cdot (x - \mu) \\ \text{para } x > \mu \Rightarrow z \cong C - \gamma \cdot (x - \mu) \\ \text{para } x < \mu \Rightarrow z \cong C + \varphi \cdot (x - \mu) \end{array} \right.$$

o que torna claro o significado dos parâmetros φ e γ :

- φ mede a taxa de decréscimo da função densidade quando $x \rightarrow -\infty$
- γ mede a taxa de decréscimo da função densidade quando $x \rightarrow +\infty$

isto é, para $x \ll \mu$, a função aproxima-se de zero, aproximadamente, segundo

$$f(x) = \frac{\sqrt{\varphi \cdot \gamma}}{\delta \cdot (\varphi + \gamma) \cdot K_1[\]} \cdot e^{+\varphi \cdot (x - \mu)}$$

e, para $x \gg \mu$, a função aproxima-se de zero, aproximadamente, segundo

$$f(x) = \frac{\sqrt{\varphi \cdot \gamma}}{\delta \cdot (\varphi + \gamma) \cdot K_1[\]} \cdot e^{-\gamma \cdot (x - \mu)}$$

Note-se que estas duas exponenciais “correm” por cima da verdadeira curva da hiperbólica pelo que acumulam maior probabilidade entre quaisquer dois pontos x_1 e x_2 .

É a evolução mais lenta para zero - segundo uma exponencial em x e não em x^2 - que permite que esta distribuição descreva melhor que a Normal as ocorrências muito afastadas da moda, quer para um lado quer para o outro. De facto, a probabilidade acumulada à esquerda e à direita da moda e em zonas dela afastadas - isto é, para acontecimentos raros - pode ser aqui maior do que naquela.

A moda desta distribuição é caracterizada por

$$X_{\text{moda}} = \mu + \frac{\delta \cdot (\varphi - \gamma)}{2 \cdot \sqrt{\varphi \cdot \gamma}} \quad f(x_{\text{moda}}) = \frac{\sqrt{\varphi \cdot \gamma}}{\delta \cdot (\varphi + \gamma) \cdot K_1[\delta \cdot \sqrt{\varphi \cdot \gamma}]} \cdot e^{-\delta \cdot \sqrt{\varphi \cdot \gamma}}$$

A função geradora de momentos (em termos de α e β) é dada por

$$M(t) = e^{\mu.t} \cdot \frac{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{\sqrt{\alpha^2 - (\beta+t)^2}} \cdot \frac{K_1(\delta \cdot \sqrt{\alpha^2 - (\beta+t)^2})}{K_1(\delta \cdot \sqrt{\alpha^2 - \beta^2})}$$

donde se tira que a média é dada por

$$X_m = \mu + \frac{\delta \cdot (\varphi - \gamma)}{2 \cdot \sqrt{\varphi \cdot \gamma}} \cdot \frac{K_0(\delta \cdot \sqrt{\varphi \cdot \gamma})}{K_1(\delta \cdot \sqrt{\varphi \cdot \gamma})} + \frac{(\varphi - \gamma)}{\varphi \cdot \gamma}$$

3. As amostras utilizadas

3.1. O índice BVL-Geral

A série histórica deste índice existe, numa base diária, desde o início de 1988, o que, até ao final de 1998, fornece um conjunto de 11 anos completos com 2650 valores do índice. Este indicador só é calculado uma vez por dia com base nas cotações de fecho da sessão de bolsa.

A carteira deste índice inclui todas as emissões de ações ordinárias admitidas ao Mercado de Cotações Oficiais (MCO) da BVL e a sua metodologia de cálculo corrige os efeitos das variações de preços que resultem de meras operações contabilísticas da emitente sem qualquer significado em termos da riqueza do accionista como nos casos do pagamento de dividendos, da incorporação de reservas, “stock splits”, etc.



A análise incidu sobre a série total dos 11 anos e sobre cada um desses anos isoladamente³.

É interessante notar, desde já, a variabilidade do comportamento do índice ao longo desses anos, o que não é de estranhar atendendo a que os mercados não são estáveis: partindo de um valor de base de 1000 pontos no início de 1988, atingiu um mínimo de 537,20 pontos, em 13/Jan/93, e um máximo de 3162,51 pontos em 22/Abr/98.

RESUMO DO COMPORTAMENTO DO ÍNDICE BVL-Geral		
Data	Valor Índice	Rentab Logar
5-Jan-88	1000.00	
3-Jan-89	718.94	-33.00%
2-Jan-90	951.07	27.98%
2-Jan-91	634.12	-40.54%
3-Feb-92	601.53	-5.28%
4-Jan-93	547.48	-9.41%
3-Jan-94	849.69	43.96%
2-Jan-95	917.42	7.67%
2-Jan-96	877.17	-4.49%
2-Jan-97	1163.47	28.25%
2-Jan-98	1965.78	52.45%
4-Jan-99	2518.14	24.76%

Seria assim de prever que os parâmetros estatísticos da distribuição variassem de amostra anual para amostra anual.

3.2. Índice BVL-30

A série histórica deste indicador existe desde o início de 1993, o que, até ao final de 1998, fornece uma amostra de 1483 valores correspondentes aos 6 anos da série. Trata-se de um índice semelhante ao anterior e que utiliza a mesma metodologia de cálculo. No entanto, assenta numa carteira reduzida de 30 valores considerados como os mais “representativos” do Mercado de Cotações Oficiais (MCO). Embora, desde o início de 1996, já seja actualizado de minuto a minuto, apenas foi utilizada a série dos valores de fecho (mais longa) como forma de não encurtar excessivamente a amostra.

A razão da utilização deste segundo indicador em adição ao BVL-Geral resulta de a carteira daquele índice englobar apenas as acções mais significativas e líquidas do mercado nacional e não a totalidade do Mercado de Cotações Oficiais: interessava saber se os dois comportamentos estocásticos seriam ou não diferentes tendo em atenção essa diferença de carteiras. Acresce que essas 30 acções tendem a ser as mais utilizadas pelos investidores nas suas operações de compra e venda sendo, portanto, aque-

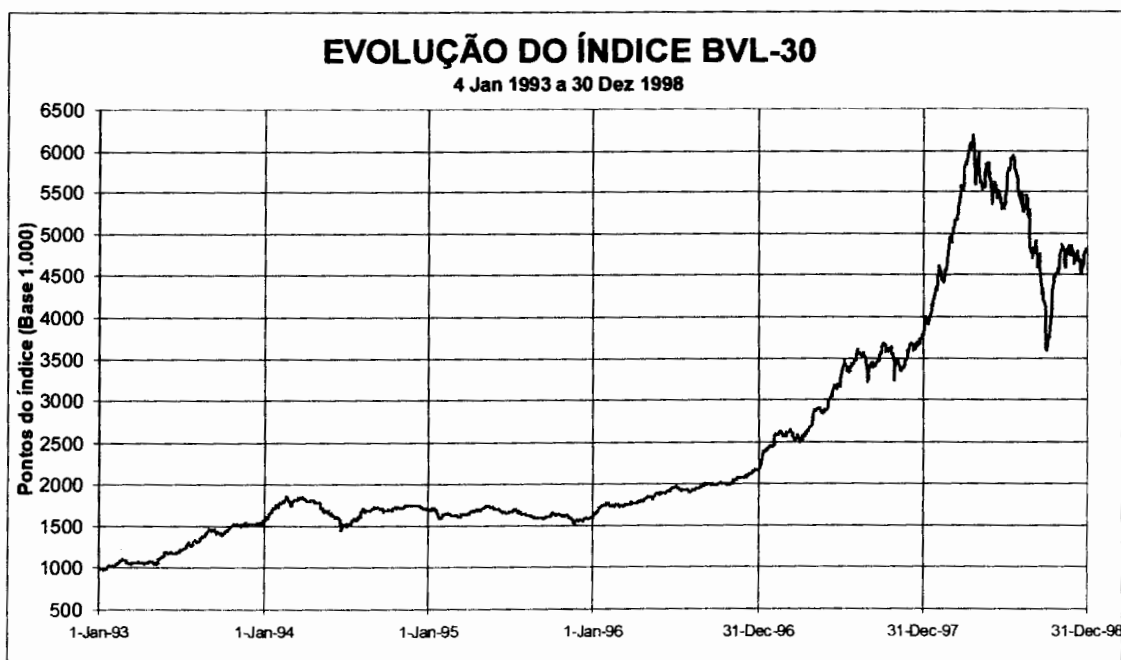
³ O número de sessões de bolsa por ano - a dimensão da amostra anual - não foi sempre igual, não só por efeito da variação do número de dias úteis por ano mas, acima de tudo, porque, durante 1988 e até Maio de 1989, só havia 4 sessões de bolsa por semana (segundas-feiras sem sessão).

las que mais facilmente poderão ser objecto de mecanismos de gestão da exposição ao risco de variação de preço.

De novo, este índice demonstrou alguma instabilidade ao longo dos 6 anos analisados tal como indicado na tabela e no gráfico seguintes:

RESUMO DO COMPORTAMENTO DO ÍNDICE BVL-30		
Data	Valor Índice	Rentab Logar.
4-Jan-93	1000.00	
3-Jan-94	1572.53	45.27%
2-Jan-95	1693.82	7.43%
2-Jan-96	1602.81	-5.52%
2-Jan-97	2165.58	30.09%
2-Jan-98	3879.28	58.30%
4-Jan-99	4986.55	25.11%

- valor de base inicial: 1 000 pontos em 4 de Janeiro de 1993
- mínimo de 980,14 pontos verificado 13/Jan/93
- máximo de 6 176,89 pontos verificado em 22/Abr/98



3.3. Acções da EDP

A admissão inicial à cotação ocorreu em 17 de Junho de 1997 o que acaba por disponibilizar uma série histórica excessivamente curta. Estamos assim perante um caso extremo, mas infelizmente típico, das limitações estatísticas da nossa realidade de

mercado. Apesar disso, trata-se de uma das mais importantes emissões domésticas como se pode aferir pelos seguintes dados de bolsa:

- representou cerca de 10,4% do volume de transacções ao longo de 1998;
- e uma capitalização bolsista de 10% no final desse ano⁴.

É, portanto, um dos “papéis” mais usados nas carteiras dos investidores. Acresce que, ao contrário dos índices, para os acções individuais se dispõe não só das cotações de fecho como também das de abertura.

Ora, sabendo-se que as cotações de abertura são obtidas por leilão e que as de fecho correspondem, tão só, às do último negócio do dia, esta dupla informação permite aferir, para um valor tão líquido como este, os efeitos potenciais resultantes das alegadas “puxadas” de preços que se verifiquem no encerramento das sessões de bolsa com o objectivo de influenciar essas últimas cotações⁵.

Pese embora o risco de perda de comparabilidade com os índices anteriores, a série foi prolongada até 26 de Fevereiro de 99 com o objectivo de a estender um pouco mais.

4. Rentabilidade periódica utilizada

A partir das séries históricas dos valores dos índices ou das cotações das acções da EDP, foi calculada uma rentabilidade diária através de

$$(r_d)_t = \text{Ln}\left(\frac{V_t}{V_{t-1}}\right)$$

A escolha de uma rentabilidade logarítmica em vez de uma simples variação percentual $\Delta V/V$ resulta de aquela permitir uma melhor aproximação ao modelo já que a distribuição hiperbólica, tal como a Normal, se estende desde $-\infty$ até $+\infty$, enquanto que a máxima variação percentual negativa não pode ultrapassar -100% com preços V_t necessariamente positivos. Além disso, as rentabilidades logarítmicas acumulam-se ao longo do tempo por simples adição algébrica, enquanto que as outras obrigam a cálculos mais complicados.

No caso da EDP e porque se trata de acções isoladas, houve ainda que corrigir a queda de cotações devida ao pagamento de um dividendo bruto por acção de 129\$866666 em 18/Maio/98:

⁴ Valores referidos à totalidade do segmento MCO da BVL.

⁵ Até 26 de Fevereiro de 1999, as cotações de fecho para todos os valores negociados na BVL correspondiam aos preços do último negócio realizado. Isto tornava estas cotações vulneráveis às manipulações de final de sessão, principalmente nos “títulos” com menor actividade porque mais facilmente se poderia influenciar essa cotação de fecho com um pequeno negócio. Com a entrada do novo sistema de negociação - o LIST - em 1/Março/99, foi alterado o regulamento de negociação no sentido de introduzir uma chamada no final da sessão para os “títulos” do contínuo com menor liquidez. De qualquer forma, o período da análise ainda não beneficiou desta melhoria.

$$(r_d) = \text{Ln}\left(\frac{V_t + D_t}{V_{t-1}}\right)$$

Atendendo ao regime de liquidação das operações de bolsa então em vigor (em T+4), essa correcção foi feita no primeiro dia em que as acções se transaccionaram ex-dividendo, isto é, em 12/Maio.

5. Ajustamento da distribuição hiperbólica às séries históricas

5.1. Metodologias de ajustamento

Com o tradicional modelo Gaussiano de descrição do comportamento estocástico das rentabilidades diárias, a densidade de probabilidade $f(x)$ é ajustada adoptando-se simplesmente a média e o desvio padrão da amostra histórica. No caso da hiperbólica há, contudo, que obter quatro parâmetros distintos para caracterizar por completo a correspondente função densidade de probabilidade, com a agravante de nenhum deles igualar qualquer daqueles dois momentos.

Foram testados vários critérios e comparados os respectivos resultados no sentido de permitir concentrar a análise apenas num deles:

a) Máxima Verosimilhança (MV)

Para uma amostra de n pontos x_i , o estimador habitualmente utilizado é o seguinte

$$\text{Ln}(L) = \sum_{i=1}^n \text{Ln}[f(x_i; \varphi, \gamma, \delta, \mu)]$$

No entanto, se esses n pontos forem organizados segundo um histograma com m classes de igual amplitude ℓ , é possível uma simplificação se se assumir que todos os q_j pontos de uma mesma classe ocorrem no respectivo ponto médio x_j :

$$\text{Ln}(L) = \sum_{j=1}^m q_j \cdot \text{Ln}[f(x_j; \varphi, \gamma, \delta, \mu)]$$

Como esta aproximação reduz significativamente o peso dos cálculos de maximização do estimador para séries muito longas, foi esta a metodologia usada neste método da MV. Dentro desta metodologia foram testadas duas soluções alternativas:

- maximizar o estimador logarítmico impondo que o parâmetro μ deve garantir uma igualdade entre a média da distribuição ajustada e a média da amostra inicial (solução designada por “otimização de 3 parâmetros”)

$$\mu = X_m - \frac{\delta \cdot (\varphi - \gamma)}{2 \cdot \sqrt{\varphi \cdot \gamma}} \cdot \frac{K_0(\delta \cdot \sqrt{\varphi \cdot \gamma})}{K_1(\delta \cdot \sqrt{\varphi \cdot \gamma})} - \frac{(\varphi - \gamma)}{\varphi \cdot \gamma}$$

- maximizar o estimador sem essa imposição sobre a média (“otimização de 4 parâmetros”).

b) Mínimos Quadráticos (MQ)

Voltando a usar o histograma para cada série, os parâmetros da hiperbólica foram estimados através da minimização das diferenças entre as quantidades q_j do histograma e as quantidades teóricas previstas para cada classe:

$$\text{Min} \sum_{j=1}^m [q_j - n \cdot l \cdot f(x_j; \varphi, \gamma, \delta, \mu)]^2$$

onde l mede a largura das classes.

De novo esta metodologia de otimização foi objecto das duas técnicas alternativas já referidas em termos de restrição sobre a média.

5.2. Qualidade do ajustamento

A qualidade da descrição da realidade histórica pela distribuição hiperbólica foi aferida através do cálculo da média quadrática dos erros constatados classe a classe

$$\sigma_\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{m} \cdot \sum_{j=1}^m [q_j - n \cdot l \cdot f(x_j)]^2}$$

Como seria de esperar, a metodologia MQ conduz a menores erros médios quadráticos, pelo que foi esta a técnica adoptada para as várias séries históricas. Para comparação, foi também feito o cálculo do correspondente erro médio quadrático para a distribuição Normal ajustada a cada série.

Alguns autores têm testado a hipótese de a amostra modelizada pela distribuição hiperbólica provir de uma tal população aplicando um teste χ^2 ao somatório

$$\sum_{j=1}^m \frac{[q_j - nI.f(x)]^2}{q_j}$$

A conclusão a que chegam é de que, de uma maneira geral, as várias séries históricas aderem suficientemente bem a uma tal distribuição a um nível de confiança de 95% ou de 99%. No entanto, só conseguem estes resultados após expurgarem essas séries de alguns dos pontos mais desviados, justificando essa atitude com o facto de os mercados terem sofrido grandes perturbações políticas e/ou económicas nesses dias.

Não parecendo coerente tentar modelizar uma realidade empírica com uma dada distribuição e depois, para garantir um bom ajuste do modelo, retirar os casos que não satisfazem esse mesmo modelo, este teste não foi aplicado às séries portuguesas.

5.3. Linguagem informática usada nos cálculos

Dada a grande difusão da aplicação Excel no mercado e nos utilizadores nacionais, optou-se por fazer todas as operações de optimização recorrendo-se exclusivamente a esta linguagem. De salientar duas funções muito usadas:

- “Frequency” para obter a distribuição das rentabilidades empíricas diárias pelas **m** classes dos histogramas,
- “Solver” para maximizar ou minimizar os estimadores referidos.

6. Resultados

6.1. Índice BVL-Geral

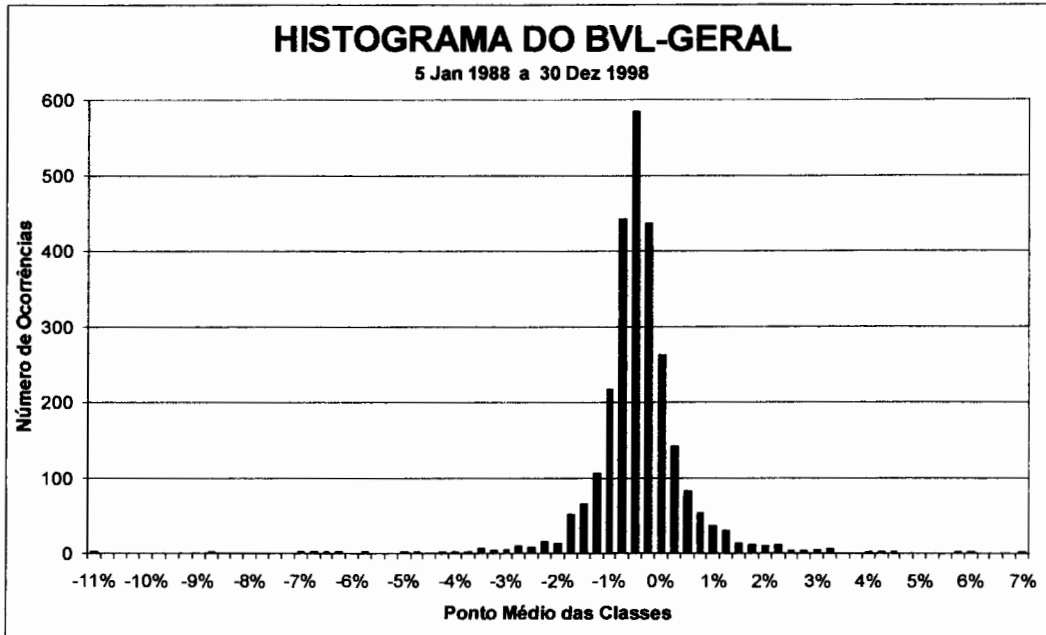
Esta série foi utilizada para testar as várias metodologias e soluções alternativas atrás descritas e, portanto, orientar os trabalhos sobre as restantes séries históricas.

A série completa dos 11 anos seguidos apresenta os seguintes indicadores de síntese em relação ao comportamento das rentabilidades logarítmicas diárias:

BVL-GERAL 1988-98	
RENTABILIDADE LOGARÍTMICA	
<i>n</i>	2 649
<i>Máx</i>	7.57%
<i>Mín</i>	-10.81%
<i>Média</i>	0.033%
<i>D. Padrão</i>	0.919%

O ponto de partida para o ajustamento da distribuição hiperbólica e da Normal foi o histograma obtido para os dados reais e para as seguintes classes⁶:

- 76 classes de igual amplitude
- amplitude de 0,25% de rentabilidade logarítmica diária
- Mínimo diário de -10,40%
- Máximo diário de +7,60%



Ajustando a hiperbólica pelo critério da Máxima Verosimilhança (com e sem a restrição sobre a média), os parâmetros obtidos para essa distribuição são os seguintes:

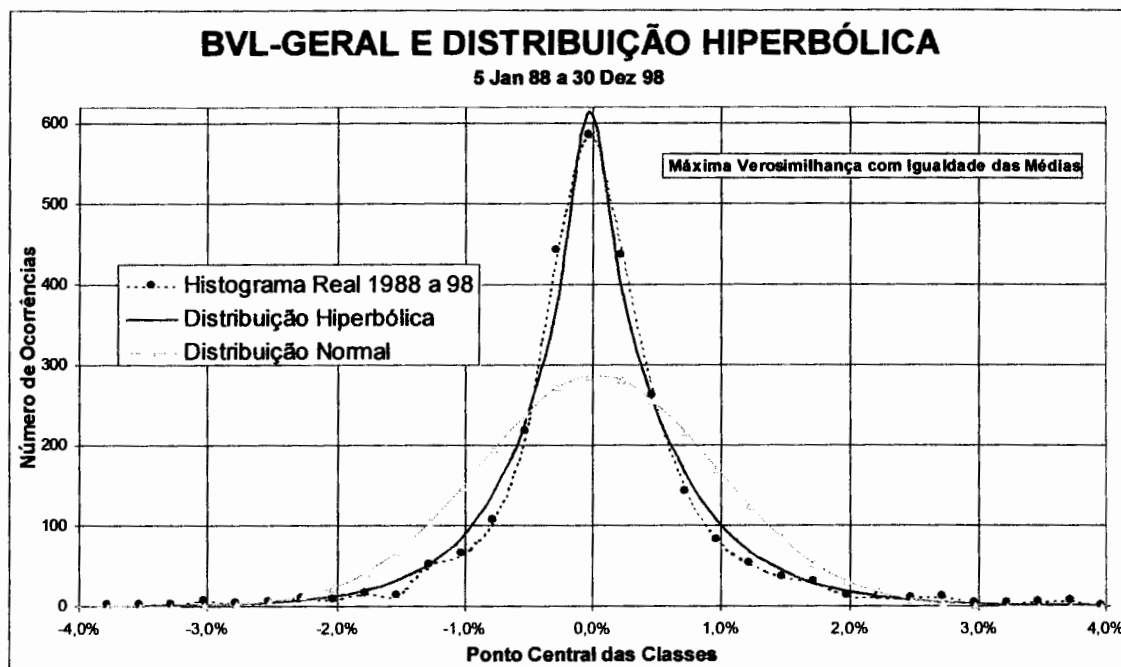
RENTABILIDADE LOGARÍTMICA DIÁRIA DO BVL-Geral de 1988 a 1998 (2 649 pontos)		
	Máxima Verosimilhança	
	Optimização de 3 parâmetros	Optimização de 4 parâmetros
φ	195,768	195,976
γ	175,659	175,321
μ	-0,0250%	-0,0250%
δ	4,00E-10	4,00E-11
Erro médio quadrático	12,14	12,15

As reduzidas diferenças entre os parâmetros da hiperbólica ajustada pelas duas alternativas permitem que se adopte aquela alternativa que impõe a restrição sobre a

⁶ Na realidade, a classe mais baixa é definida pelo seu limite superior (-10,40%, nela cabendo todos os valores abaixo desse limite).

média na medida em que é a mais coerente com o método usado na distribuição Normal. Para efeitos de comparação, refira-se que o erro médio quadrático da Normal assim ajustada é de 50,49.

O gráfico seguinte ilustra o grau de ajustamento da hiperbólica e da Normal ao histograma real, demonstrando a superior qualidade da descrição proporcionada pela nova distribuição.

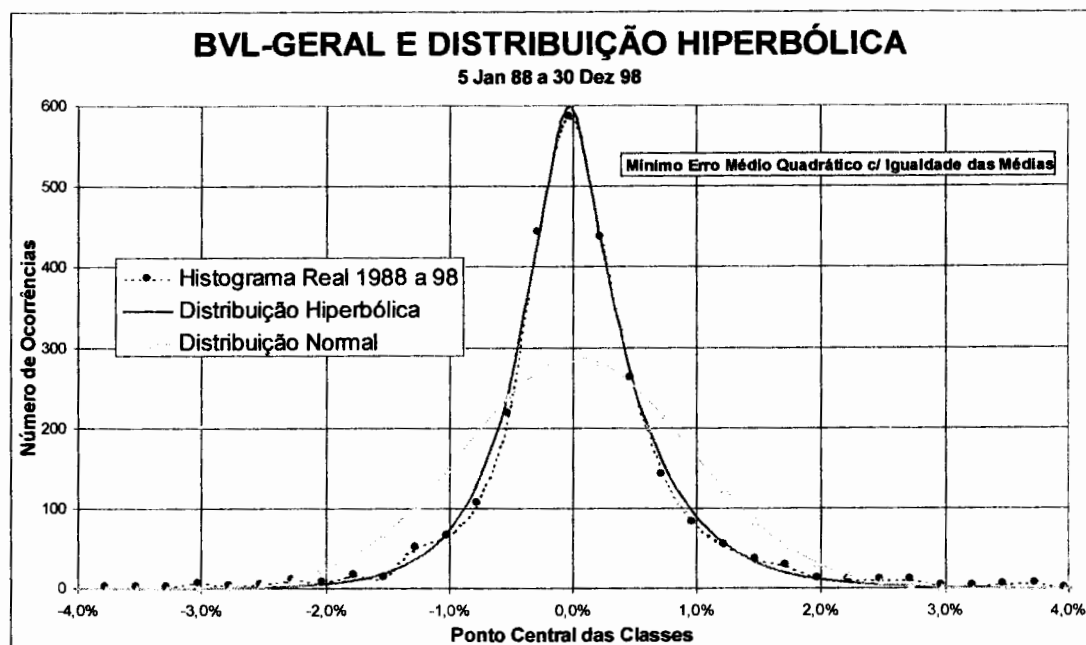


Por outro lado, ajustando a hiperbólica pela metodologia da minimização do Erro Médio Quadrático, obtiveram-se os seguintes parâmetros:

RENTABILIDADE LOGARÍTMICA DIÁRIA DO BVL-Geral de 1988 a 1998 (2 649 pontos)		
	<i>Mínimo Erro Médio Quadrático</i>	
	Optimização de 3 parâmetros	Optimização de 4 parâmetros
φ	254.992	255.999
γ	212.557	211.129
μ	-0.0519%	-0.0522%
δ	1.58E-03	1.56E-03
Erro médio quadrático	6,22	6,18

De novo as diferenças entre parâmetros obtidos pelas duas alternativas são muito reduzidos. O gráfico seguinte ilustra o grau de ajustamento da hiperbólica e da Normal ao histograma real por este segundo critério. Aqui a hiperbólica ainda se ajusta melhor à realidade empírica, tal como expresso pelo erro médio quadrático.

Com base nestes quatro resultados, a análise dos comportamentos deste índice numa base anual (11 anos separados) foi feita utilizando-se apenas a metodologia da minimização do erro médio quadrático com imposição de uma igualdade entre a média da amostra e a média da curva ajustada.



Análise Anual do BVL-Geral

A série histórica total foi aqui dividida pelos 11 anos civis, sendo cada um deles analisado de acordo com uma metodologia uniforme em relação a:

- classes do histograma: as que foram definidas no estudo da série completa,
- critério de ajustamento: minimização do erro médio quadrático.

A tabela seguinte coloca, lado a lado, os parâmetros reais da média e do desvio-padrão para esses diversos anos bem como os quatro parâmetros das hiperbólicas ajustadas a cada ano, comparando-os com os da totalidade do universo amostrado⁷.

RENTABILIDADES LOGARÍTMICAS DIÁRIAS DO BVL-Geral												
% por dia												
	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1988-98
n	197	229	246	245	249	250	246	246	247	246	248	2649
Xm	-0,165%	0,120%	0,162%	-0,009%	0,048%	0,171%	0,033%	-0,019%	0,114%	0,204%	0,094%	0,033%
σ	1,279%	1,195%	0,757%	0,785%	0,371%	0,605%	0,719%	0,457%	0,367%	1,036%	1,642%	0,919%
φ	190,5802	241,5432	259,3595	404,6596	437,3865	485,1988	305,1687	433,0107	456,253	157,3851	137,4692	254,9915
γ	150,5028	259,9753	212,9917	293,6414	537,0349	278,4166	221,3769	339,9874	318,2896	189,7084	135,957	212,5574
μ	-0,3192%	0,1496%	-0,2464%	-0,1376%	0,0131%	-0,1733%	-0,1073%	-0,0968%	0,0060%	0,3199%	0,0779%	-0,0519%
δ	2,414E-03	1,000E-07	1,000E-08	3,038E-03	2,453E-03	7,883E-03	1,828E-03	1,884E-03	1,307E-03	1,764E-03	1,717E-02	1,576E-03
Constante C	96,682	125,210	116,950	292,292	458,469	1343,756	152,803	262,806	226,128	94,031	325,351	130,497
Erro Médio Quadrático nos Ajustamentos das Distribuições												
Normal	3,748	6,685	5,015	5,531	2,881	2,544	3,883	3,387	2,616	3,489	1,913	50,493
Hiperb.	1,988	1,631	1,543	1,430	0,687	2,274	1,287	0,612	1,015	1,170	1,469	6,224

⁷ Ver em anexo os gráficos para cada um dos anos em causa.

Verifica-se que a média diária X_m segue, como não podia deixar de ser, o mesmo comportamento anual já anteriormente identificado na tabela resumo do capítulo 3.1. e que a volatilidade σ anual varia de ano para ano, crescendo bastante em 1997 e 98. O excesso de volatilidade de 1988 e 89 pode ser atribuído às sequelas da crise de Out/87 bem como à ausência de sessões de bolsa às 2^a feiras⁸.

Apesar da descrição “quase perfeita” da realidade empírica proporcionada pela distribuição hiperbólica, observa-se que todos os seus parâmetros ainda variam de ano para ano, apesar de se manterem dentro da mesma ordem de grandeza. Não seria de prever que a natural instabilidade dos mercados permitisse uma constância desses parâmetros no tempo. De notar que, quanto menor a volatilidade σ , maiores são os valores de φ e de γ , o que está de acordo com o significado destes dois indicadores.

A qualidade do ajustamento - medida pelo desvio médio quadrático em relação ao histograma - varia de ano para ano, mas a este facto não é indiferente a escolha das classes utilizadas em cada ano – número, amplitude e limites – já que isso afecta a forma mais ou menos irregular daquele. De facto, a comparabilidade entre os diversos resultados impõe um único conjunto de classes em toda esta análise, mas com amostras anuais com cerca de 250 pontos (ou menos ainda, em 88 e 89) a dispersão natural desses valores pelas 76 classes afecta a regularidade do histograma em alguns anos e, por arrasto, a possibilidade de um bom ajustamento de $f(x)$. Portanto, um dos inconvenientes desta modelização é necessitar de amostras com uma dimensão mínima avantejada para se poder estimar os seus parâmetros sem grande dependência das classes escolhidas.

6.2. Índice BVL-30

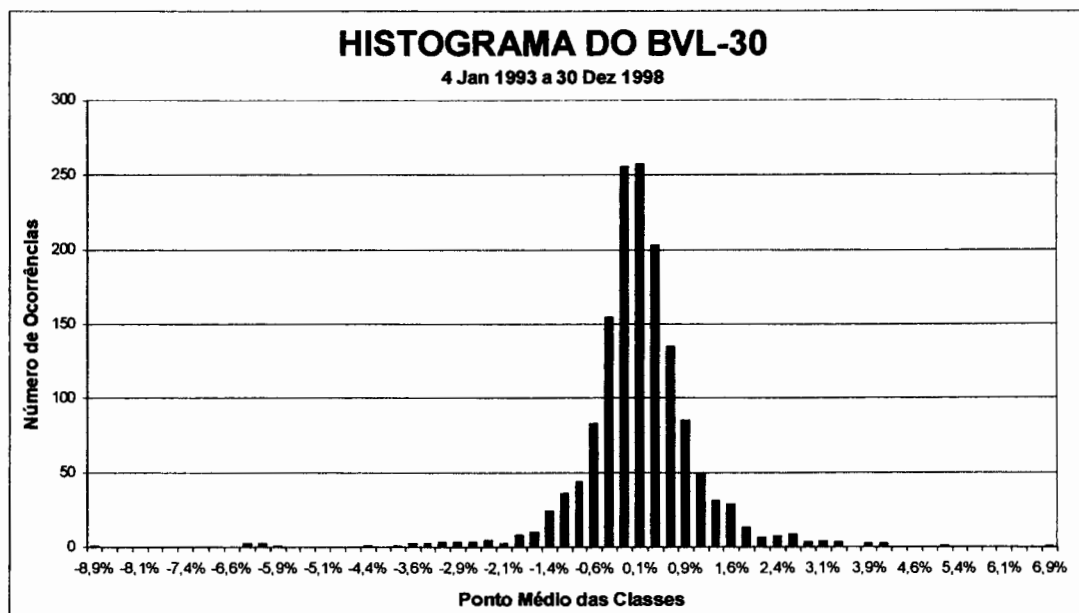
A série total, entre 1993 e 1998, apresenta os seguintes indicadores de síntese:

BVL-30 1993-98	
RENTABILIDADE LOGARÍTMICA	
<i>n</i>	1 482
<i>Máx</i>	6.90%
<i>Mín</i>	-8.94%
<i>Média</i>	0.106%
<i>D. Padrão</i>	0.986%

O histograma correspondente foi desenhado com:

- 64 classes de igual amplitude
- amplitude de 0,25%
- Mínimo diário de - 8,75%
- Máximo diário de + 7,00%

⁸ O facto de em 1988 (e até Maio de 89) não ter havido sessão de bolsa às 2^afeiras pode ter exagerado um pouco a volatilidade σ nesses 2 anos visto que, com fins-de-semana mais longos, são concebíveis maiores variações de preços entre cada 6^a feira e a 3^a feira seguinte. Poder-se-á melhorar a comparabilidade desses dois anos com os restantes anualizando os valores do desvio-padrão pela regra da raiz quadrada do número de sessões do ano. Dessa forma, o ano de 88 passaria a ter uma volatilidade de $1,279\% \cdot (197/247)^{1/2} = 1,142\%$

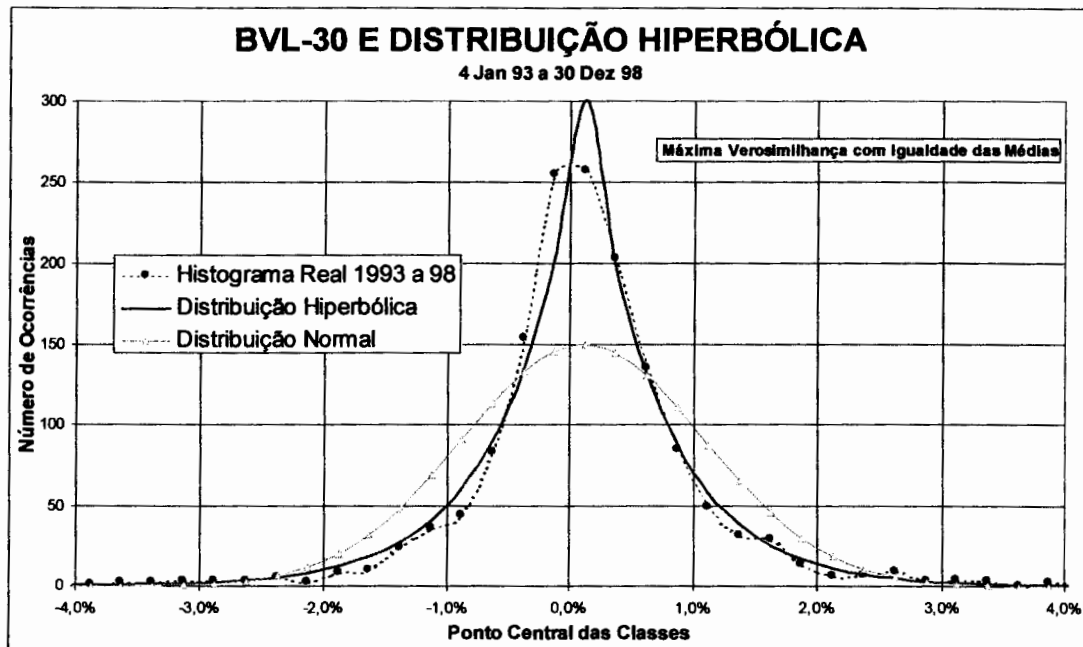


Ajustando a distribuição hiperbólica a este histograma pela metodologia da Máxima Verosimilhança (com e sem restrição sobre a média), os parâmetros obtidos foram os seguintes:

RENTABILIDADE LOGARÍTMICA DIÁRIA DO BVL-30 de 1993 a 1998 (1 482 pontos)		
	<i>Máxima Verosimilhança</i>	
	Optimização de 3 parâmetros	Optimização de 4 parâmetros
φ	159,878	160,205
γ	164,949	164,748
μ	0,1250%	0,1250%
δ	1,95E-09	1,95E-10
Erro médio quadrático	9,58	9,59

De novo, as reduzidas diferenças em termos dos parâmetros da hiperbólica permitem que se adopte a metodologia com a restrição sobre a média por ser a mais coerente com o ajustamento usado na Normal. Para efeitos de comparação, refira-se que o erro médio quadrático da Normal ajustada é de 24,04.

O gráfico seguinte ilustra o grau de ajustamento da hiperbólica e da Normal ao histograma real. De notar, mais uma vez, a superior qualidade da descrição proporcionada pela hiperbólica face à tradicional aproximação Gaussiana.

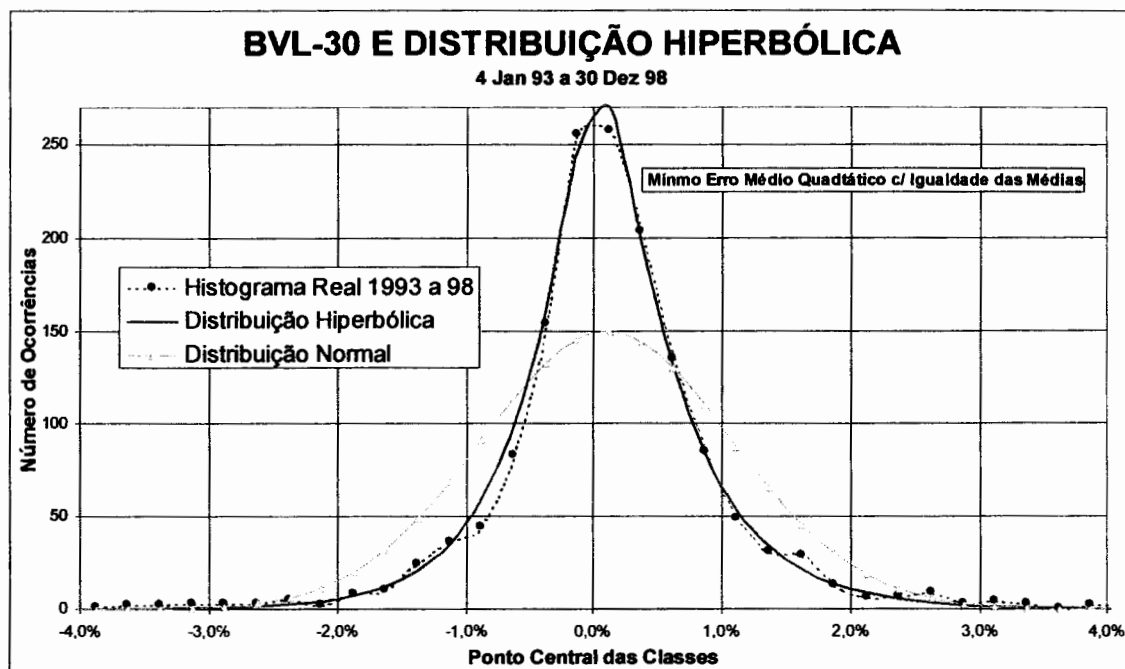


Por outro lado, ajustando a hiperbólica pela minimização do Erro Médio Quadrático, obtiveram-se os seguintes parâmetros:

RENTABILIDADE LOGARÍTMICA DIÁRIA DO BVL-30 de 1993 a 1998 (1 482 pontos)		
	<i>Mínimo Erro Médio Quadrático</i>	
	Optimização de 3 parâmetros	Optimização de 4 parâmetros
φ	213,992	232,555
γ	186,833	169,361
μ	0,0297%	-0,0064%
δ	2,24E-03	1,99E-03
Erro médio quadrático	4,04	3,45

Qualquer destes valores, bem como os da tabela anterior, não podem ser comparados com os do BVL-Geral dada a diferença de anos cobertos pelas duas análises.

O gráfico seguinte ilustra e compara as duas distribuições – a hiperbólica ajustada pela MQ e a Normal – com o histograma inicial.



Análise Anual do BVL-30

Mais uma vez se optou, para esta análise anual, pelo critério da minimização do Erro Médio Quadrático com imposição da restrição sobre a média. A tabela seguinte resume os resultados e compara-os com os valores “médios” obtidos para a totalidade da série entre 1993 e 1998⁹.

RENTABILIDADES LOGARÍTMICAS DIÁRIAS DO BVL-30							
% por dia							
	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1993-98
n	249	246	246	247	246	248	1 482
Xm	0,180%	0,033%	-0,023%	0,121%	0,227%	0,096%	0,106%
σ	0,661%	0,818%	0,473%	0,419%	1,132%	1,736%	0,986%
ϕ	312,895	283,715	401,659	442,075	150,189	114,878	213,992
γ	235,187	231,659	395,345	335,469	208,992	124,646	186,833
μ	0,0124%	-0,0689%	-0,0297%	0,0249%	0,4532%	0,2139%	0,0297%
δ	5,596E-03	3,399E-03	4,11E-03	2,519E-03	3,792E-03	1,527E-02	2,238E-03
Constante C	327,195	193,975	532,629	310,367	116,793	185,880	117,025
Erro Médio Quadrático nos Ajustamentos das Distribuições							
Normal	1,984	4,207	2,140	2,298	3,435	2,084	24,040
Hiperb.	1,346	1,937	0,821	0,882	1,298	1,574	4,036

De novo se observa uma variabilidade dos parâmetros da hiperbólica ao longo dos 6 anos traduzindo as alterações de “estado de espírito” dos mercados.

Comparando os parâmetros obtidos anualmente para o BVL-30 com os correspondentes para o BVL-Geral (nos mesmos anos), observam-se repetidas diferenças entre os dois índices, algumas das quais significativas. De qualquer forma os parâmetros

⁹ Neste caso a dimensão das 6 amostras anuais é quase uniforme visto que em todos os anos cobertos já houve 5 sessões de bolsa por semana, ao contrário dos anos de 1988 e de 1989 incluídos na análise do BVL-Geral.

mantêm-se nos dois casos dentro da mesma ordem de grandeza, com excepção de μ que chega a trocar de sinal. Valerá pois a pena começar sempre optar por um dos dois índices aquando de um qualquer estudo sobre o nosso mercado, não sendo válido extrapolar os parâmetros hiperbólicos de um para o outro.

A qualidade do ajustamento da hiperbólica varia de ano para ano¹⁰ pelas mesmas razões já referidas para o BVL-Geral: reduzida dimensão das amostras anuais (um pouco menos de 250 pontos) e utilização de um único conjunto de classes em todos estes anos. E comparando os dois índices, não se pode concluir de tão reduzida história acumulada – apenas 6 anos – qual deles se “encaixa” melhor na descrição hiperbólica dos respectivos rendimentos logarítmicos diários.

6.3. Acções da EDP

A série histórica disponível é muito curta em virtude de cobrir apenas o período entre a admissão inicial à cotação (1ª fase da privatização) em 17 de Junho de 1997 e o último dia de negociação com o sistema TRADIS¹¹.

Neste caso a análise debruçou-se sobre os preços de fecho bem como sobre os da pré-abertura com o objectivo de verificar as consequências, em termos do modelo, das frequentemente referidas manipulações no fecho da sessão. Recorde-se que as regras prevaletentes no período estudado não obrigavam a um leilão no encerramento da sessão, enquanto que na pré-abertura a formação do primeiro preço foi feita sempre a partir de um tal leilão.

A síntese dos dados estatísticos da série das rentabilidades logarítmicas diárias¹² é dada no seguinte quadro:

EDP Junho/97 a Fev/99		
RENTABILIDADE LOGARÍTMICA		
	Abertura	Fecho
n	420	420
Máx	10,591%	6,690%
Mín	-11,868%	-6,499%
Média	0,046%	0,042%
D.Padrão	1,945%	1,761%

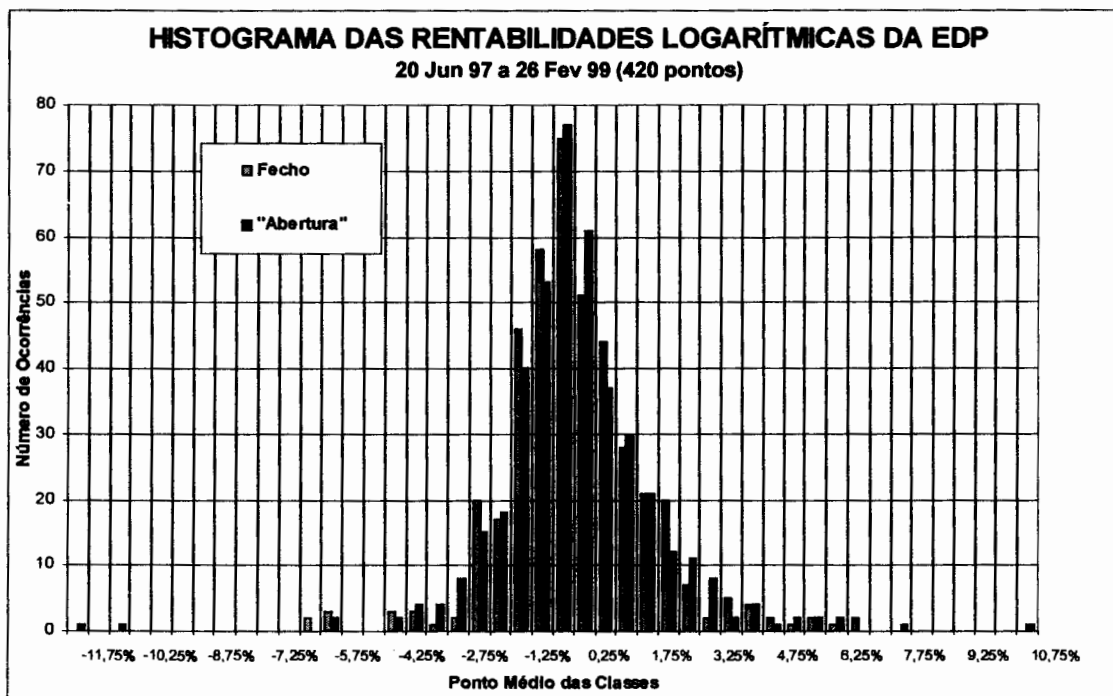
¹⁰ Em anexo fornece-se o conjunto dos gráficos comparativos entre a realidade empírica traduzida pelo histograma e a distribuição hiperbólica ajustada bem como a aproximação tradicional pela distribuição Normal.

¹¹ Em 1 de Março de 1999 o sistema de negociação TRADIS foi substituído pelo novo sistema LIST e introduzidas novas regras de negociação e novos segmentos de mercado (em particular, alguns valores mobiliários passaram a ter um leilão de fecho diário).

¹² Provavelmente porque na 1ª fase da privatização, em 16/Junho/97, a colocação de acções no mercado constituiu uma IPO – Initial Public Offering, verificaram-se grandes oscilações de preços nos primeiros dias de negociação em bolsa. Por essa razão foram excluídas as rentabilidades deste “papel” relativas às primeiras sessões, arrancando-se a série histórica desses rácios apenas em 20 de Junho de 97.

Os histogramas obtidos para as duas séries cronológicas foram desenhados dentro dos seguintes parâmetros:

- 47 classes de igual amplitude
- amplitude de 0,25%
- Mínimo diário de - 12,0%
- Máximo diário de +11,0%



Note-se que, em comparação com as cotações de fecho, as de abertura apresentaram um certo número de variações diárias muito diferentes da média do período – “outliers” mais afastados do centro – bem como uma maior volatilidade σ . Em parte isto foi devido a acontecimentos pontuais ocorridos nos dias 28 e 29 de Outubro de 97 e em 1 de Outubro de 98 quando as rentabilidades logarítmicas se afastaram muito do “habitual”:

Rent Diária	Abertura	Fecho
<i>Média</i>	0,046%	0,042%
28/Out/97	-11,868%	-5,706%
29/Out/97	10,591%	5,739%
1/Out/98	-10,511%	-6,091%

Mas, mesmo sem esses 3 dias, as cotações de abertura continuam a mostrar-se ligeiramente mais voláteis do que as de fecho como se pode ver na tabela seguinte.

EDP Junho/97 a Fev/99		
Excluindo 28/29 de Out/97 e 1/Out/98		
	Abertura	Fecho
n	417	417
Máx	7,595%	6,690%
Mín	-8,449%	-6,499%
Média	0,046%	0,042%
D. Padrão	1,763%	1,688%

Nesta perspectiva, para valores mobiliários como a EDP, perde razão de ser a afirmação tradicional de um menor significado económico das cotações de fecho, facto que se poderá atribuir à grande dificuldade de influenciar o preço do último negócio do dia quando se trata de “papéis” muito líquidos.

Ajustando a distribuição hiperbólica pela minimização do Erro Médio Quadrático (com restrição sobre a média) e sem excluir aqueles 3 dias singulares foram obtidos os seguintes parâmetros:

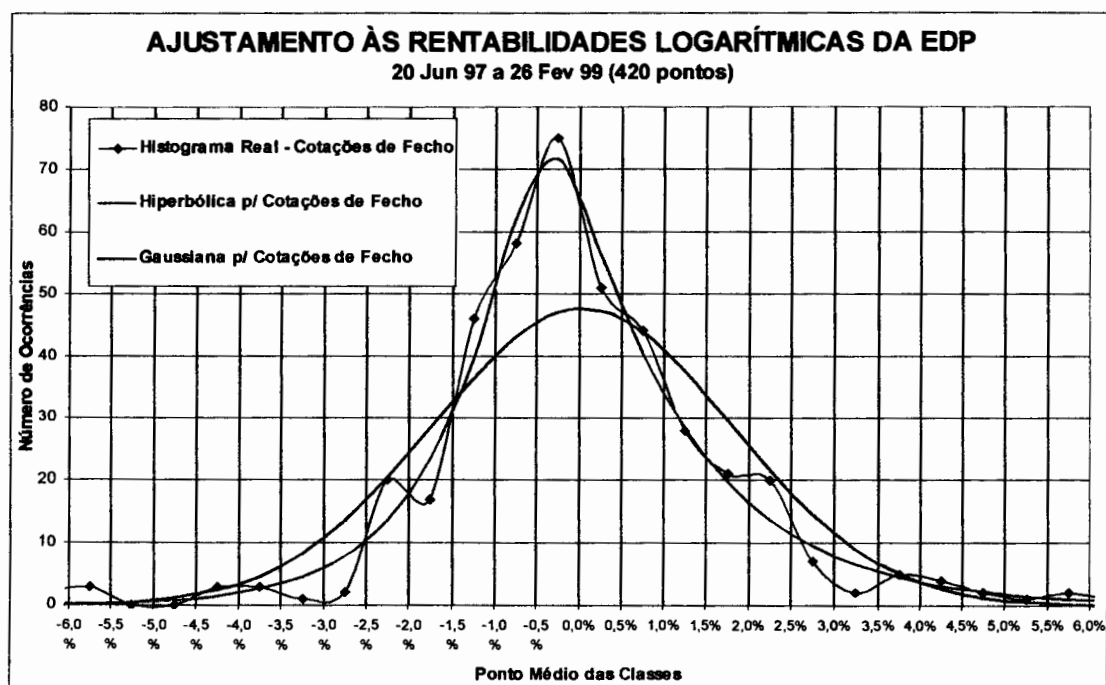
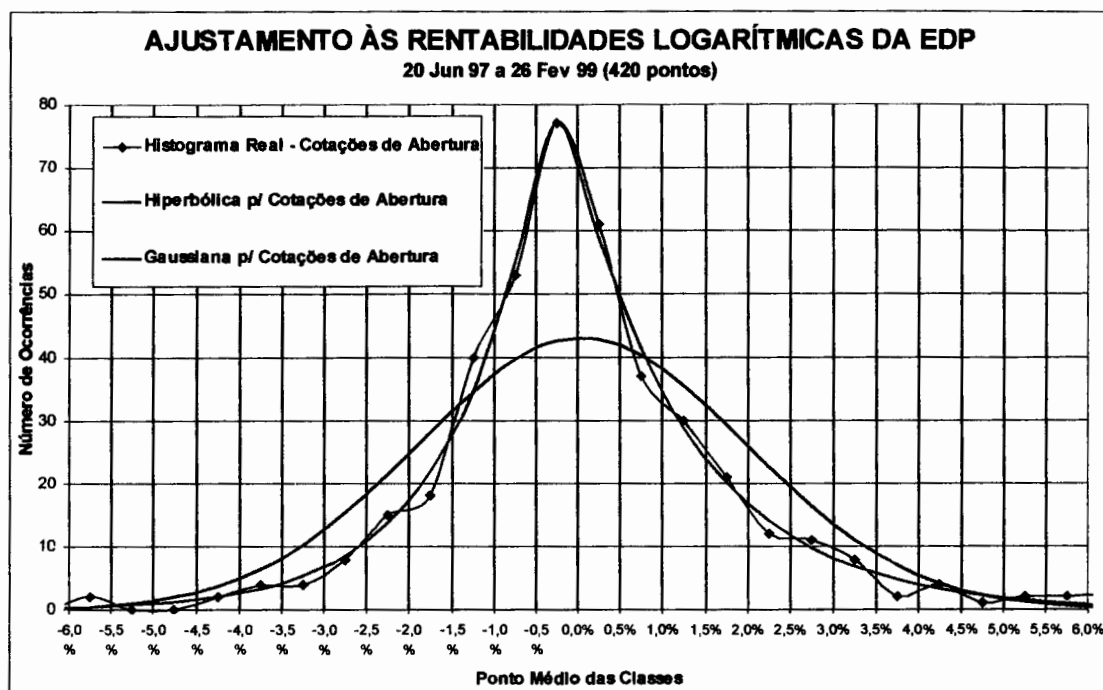
RENTABILIDADE LOGARÍTMICA DIÁRIA DA EDP		
20/Jun/97 a 26/Fev/99 (420 pontos)		
<i>Mínimo Erro Médio Quadrático (com igualdade das médias)</i>		
	Abertura	Fecho
φ	94,079	110,472
γ	72,623	73,809
μ	-0,2740%	-0,4472%
δ	1,62E-03	4,01E-03
Erro médio quadrático	1,49	2,65

Observam-se algumas diferenças entre os 4 parâmetros da distribuição hiperbólica para as duas séries de cotações o que alerta para a importância da escolha das cotações representativas diárias no estudo do mercado de capitais nacional. Os erros médios quadráticos para as Normais ajustadas são bastante maiores:

- Cotações de abertura: 6,96
- Cotações de fecho: 6,08

Os gráficos seguintes comparam a qualidade do ajustamento da hiperbólica ao histograma com a tradicional curva Normal.

As diferenças na qualidade do ajustamento destas hiperbólicas aos dois histogramas – cotações de abertura e de fecho – poderão ser atribuídas em parte à pequena dimensão da amostra e aos subsequentes efeitos sobre a regularidade da sua distribuição pelas classes escolhidas.



7. Medida do Var

Nos modelos de cálculo do VaR – Value at Risk de uma carteira de activos financeiros é frequente aceitar um comportamento estocástico simplificado para cada um deles traduzido por uma distribuição Normal das rentabilidades periódicas em que se aceita uma média nula (ou igual à média recente) e se utiliza uma variância estimada

Essa averiguação das diferenças entre os limites vale previstos para os 3 activos analisados pelos dois modelos e para as situações mais frequentes de níveis de confiança de 95% (típico do modelo RiskMetrics) e de 99% (valor recomendado pelo BIS).

7.1. Cálculo da probabilidade acumulada

Os limiares de perda para a distribuição hiperbólica terão de ser calculados a partir de um dos dois integrais seguintes:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{\sqrt{\varphi \cdot \gamma}}{\delta \cdot (\varphi + \gamma) \cdot \mathbf{K}_1[\delta \cdot \sqrt{\varphi \cdot \gamma}]} e^{-1/2(\varphi + \gamma) \cdot \sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2} + 1/2(\varphi - \gamma) \cdot (x - \mu)} dx$$

ou

$$F(x) = y \int_y^{+\infty} \frac{\sqrt{\varphi \cdot \gamma}}{\delta \cdot (\varphi + \gamma) \cdot \mathbf{K}_1[\delta \cdot \sqrt{\varphi \cdot \gamma}]} e^{-1/2(\varphi + \gamma) \cdot \sqrt{\delta^2 + (y - \mu)^2} + 1/2(\varphi - \gamma) \cdot (y - \mu)} dy$$

tica, esses dois valores se situam de tal forma afastados da moda da distribuição hiperbólica que não se comete um grande erro substituindo aqueles integrais por aproximações onde a hipérbole da exponencial é substituída pelas suas duas assíntotas:

- para valores $x < \mu$ e suficientemente afastados da moda

$$F(x) \cong \frac{\sqrt{\varphi \cdot \gamma}}{\delta \cdot (\varphi + \gamma) \cdot \mathbf{K}_1[\delta \cdot \sqrt{\varphi \cdot \gamma}]} \cdot \int_{-\infty}^x e^{+\varphi(x - \mu)} dx = C \cdot \frac{1}{\varphi} \left[e^{+\varphi(x - \mu)} \right]_{-\infty}^x = \frac{C}{\varphi} \cdot e^{+\varphi(x - \mu)}$$

- para valores $y > \mu$ e suficientemente afastados da moda

$$F(x) \cong \frac{\sqrt{\varphi \cdot \gamma}}{\delta \cdot (\varphi + \gamma) \cdot K_1[\delta \cdot \sqrt{\varphi \cdot \gamma}]} \cdot \int_y^{+\infty} e^{-\gamma(x-\mu)} dx = -C \cdot \frac{1}{\gamma} \left[e^{+\gamma(x-\mu)} \right]_y^{+\infty} = \frac{C}{\gamma} \cdot e^{+\gamma(y-\mu)}$$

Isto permite estimar os dois limiares x e y através de:

- para $x < \mu$ e, por exemplo, para 95% de confiança

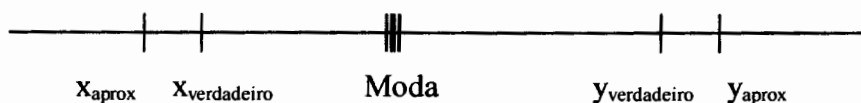
$$\text{limite inferior } x = \mu + \frac{1}{\varphi} \cdot \text{Ln} \left(\frac{5\% \cdot \varphi}{C} \right)$$

- para $y > \mu$ e para 99% de confiança

$$\text{limite superior } y = \mu + \frac{1}{\gamma} \cdot \text{Ln} \left(\frac{C}{1\% \cdot \gamma} \right)$$

Como estas funções exponenciais simplificadas “correm” por cima da verdadeira função integranda, a probabilidade entre $-\infty$ e um dado x produzida pelo integral aproximado é sempre maior do que a verdadeira. E o mesmo se passa para o integral entre um dado y e $+\infty$.

Isto significa que esta simplificação estima por excesso os limiares x e y do VaR no sentido de que os valores rigorosos estarão sempre mais próximos da moda do que os estimados com esta simplificação¹³.



7.2. Comparação das estimativas do VaR pela hiperbólica e pela Normal

a) Índice BVL-Geral

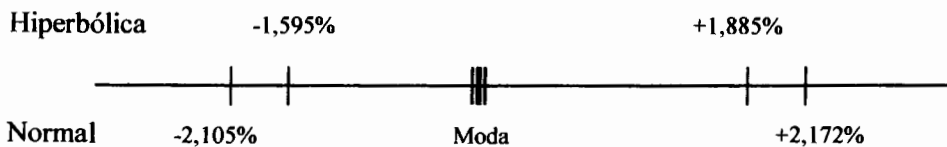
O quadro seguinte indica os limites superior e inferior do VaR a 95% e a 99% para a distribuição hiperbólica ajustada (segundo MQ) a cada um dos 11 anos da série e compara-os com os limiares que seriam obtidos com a distribuição Normal. De uma maneira geral, a estimativa Gaussiana é mais pessimista do que a que se obtém com este novo modelo estatístico, visto que:

¹³ Ver adiante a ordem de grandeza para o erro decorrente desta aproximação para o caso real do BVL-Geral.

RENTABILIDADES LOGARÍTMICAS DIÁRIAS DO BVL-Geral												
% por dia												
	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1988-98
n	197	229	246	246	249	260	246	246	247	246	248	2649
Xm	-0,165%	0,120%	-0,162%	-0,009%	-0,048%	0,171%	0,033%	-0,019%	0,114%	0,204%	0,094%	0,033%
σ	1,279%	1,195%	0,757%	0,785%	0,371%	0,605%	0,719%	0,457%	0,367%	1,036%	1,642%	0,919%
φ	190,5802	241,5433	259,3595	404,6596	437,3865	485,1988	305,1687	433,0107	456,253	157,3851	137,4692	254,9915
γ	150,5028	259,9753	212,9917	293,6414	537,0349	278,4166	221,3769	339,9874	318,2896	189,7084	135,957	212,5574
μ	-0,3192%	0,1496%	-0,2464%	-0,1376%	0,0131%	-0,1733%	-0,1073%	-0,0968%	0,0060%	0,3199%	0,0779%	-0,0519%
δ	2,414E-03	1,000E-07	1,000E-08	3,038E-03	2,453E-03	7,883E-03	1,828E-03	1,884E-03	1,307E-03	1,764E-03	1,717E-02	1,576E-03
Constante C	96,682	125,210	116,950	292,292	458,469	1343,756	152,803	262,808	228,128	94,031	325,351	130,497
Erro Médio Quadrático nos Ajustamentos das Distribuições												
Normal	3,748	6,685	5,015	5,531	2,881	2,544	3,883	3,387	2,616	3,489	1,913	50,493
Hiperb.	1,988	1,631	1,543	1,430	0,687	2,274	1,287	0,612	1,015	1,170	1,469	6,224
Limites de Confiança à esquerda e à direita para 5%												
Dist Hiperb												
Lim inferior	-1,535%	-0,819%	-1,094%	-0,797%	-0,683%	-1,001%	-0,862%	-0,673%	-0,497%	-1,256%	-2,728%	-0,964%
Lim superior	1,377%	1,021%	0,879%	0,881%	0,541%	1,468%	1,078%	0,709%	0,840%	1,529%	2,923%	1,128%
Dist Normal												
Xm - 1,645 σ	-2,269%	-1,846%	-1,408%	-1,301%	-0,659%	-0,825%	-1,150%	-0,770%	-0,489%	-1,501%	-2,607%	-1,479%
Xm + 1,645 σ	1,939%	2,087%	1,084%	1,282%	0,563%	1,166%	1,216%	0,732%	0,717%	1,909%	2,795%	1,546%
Excesso Hip	-31%	-53%	-21%	-35%	0%	24%	-18%	-8%	11%	-18%	5%	-31%
Limites de Confiança à esquerda e à direita para 1%												
Dist Hiperb												
Lim inferior	-2,379%	-1,485%	-1,715%	-1,195%	-1,051%	-1,332%	-1,390%	-1,045%	-0,850%	-2,279%	-3,899%	-1,595%
Lim superior	2,447%	1,640%	1,634%	1,429%	0,841%	2,046%	1,805%	1,182%	1,345%	2,377%	4,107%	1,885%
Dist Normal												
Xm - 2,326 σ	-3,140%	-2,660%	-1,924%	-1,836%	-0,912%	-1,237%	-1,640%	-1,082%	-0,739%	-2,206%	-3,725%	-2,105%
Xm + 2,326 σ	2,810%	2,901%	1,599%	1,817%	0,816%	1,578%	1,705%	1,043%	0,967%	2,615%	3,913%	2,172%
Excesso Hip	-19%	-44%	-5%	-28%	9%	20%	-4%	5%	29%	-3%	5%	-19%

- no conjunto dos 11 anos, e para um grau de confiança de 95%, a distribuição hiperbólica prevê limiares VaR que são, em “média”¹⁴, 31% menores (mais optimista) do que os da Normal no sentido de que estão mais perto da moda do que os de esta última;
- para 99% de confiança, são cerca de 19% menores;
- para cada um dos 11 anos considerados isoladamente essas percentagens variam de ano para ano, havendo períodos em que, pelo contrário, é a estimativa tradicional que é mais optimista que a hiperbólica;
- o excesso de VaR previsto pela Normal é mais nítido para valores $x < \mu$, facto que se torna relevante para perdas em posições longas detidas neste índice.

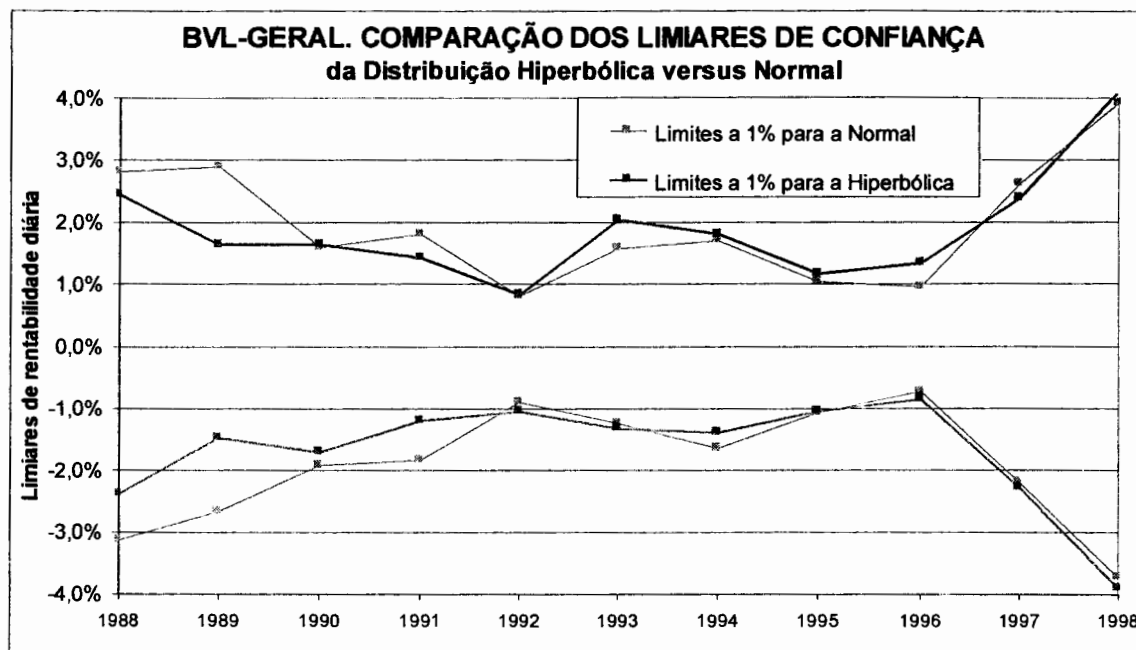
11 anos do BVL-Geral com um grau de confiança de 99%



¹⁴ Esta percentagem é dada por

$$\text{Excesso da hiperbolica} = \frac{(\text{limite superior} - \text{limite inferior})_{\text{hiperb}}}{(\text{limite superior} - \text{limite inferior})_{\text{Gauss}}} - 1$$

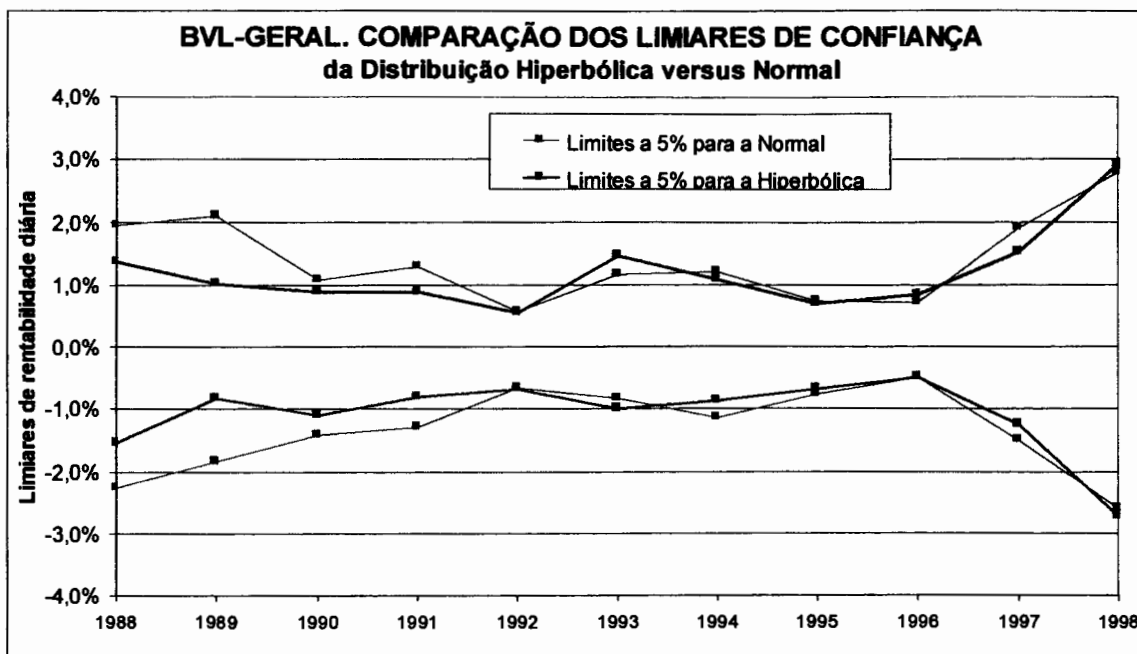
Para se visualizar o grau da diferença entre os resultados da Normal e da hiperbólica, os dois gráficos seguintes desenham as linhas que unem os limiares de perdas ao longo daqueles 11 anos de análise.



O facto de estas comparações assentarem em cálculos aproximados para a hiperbólica não é relevante a julgar pela pequena dimensão do erro daí resultante. A tabela seguinte compara os limiares x e y produzidos pelo método da assíntota da hiperbólica com os correspondentes valores rigorosos, para o caso concreto da distribuição ajustada à série dos 11 anos do índice BVL-Geral.

ERROS NO CÁLCULO DOS LIMIARES		
BVL-Geral 1988-98		
	Limiar inferior x	Limiar superior y
Grau de confiança de 1%		
• valor teórico	-1,589%	+1,879%
• aproximado	-1,595%	+1,885%
Grau de confiança de 5%		
• valor teórico	-0,955%	+1,118%
• aproximado	-0,964%	+1,128%

Não há uma razão teórica que justifique que os VaR's obtidos pela hiperbólica sejam necessariamente mais ou menos exigentes do que os previstos pela Normal. Tudo depende dos parâmetros concretos da distribuição, do lado da curva onde se situa a perda potencial (posições longas ou curtas) e do grau de confiança escolhido.



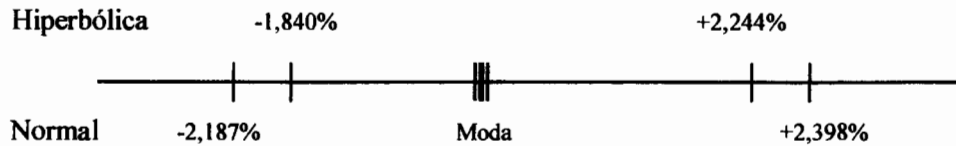
b) Índice BVL-30

O quadro seguinte indica os limites superior e inferior para a distribuição hiperbólica ajustada a cada um dos seis anos da série e compara-os com os limiares que seriam obtidos com a distribuição Normal.

RENTABILIDADES LOGARÍTMICAS DIÁRIAS DO BVL-30							
% por dia							
	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1993-98
n	249	246	248	247	246	248	1 482
Xm	0,180%	0,033%	-0,023%	0,121%	0,227%	0,096%	0,106%
σ	0,661%	0,818%	0,473%	0,419%	1,132%	1,736%	0,986%
φ	312,895	283,715	401,659	442,075	150,189	114,878	213,992
γ	235,187	231,859	395,345	335,469	208,992	124,648	186,833
μ	0,0124%	-0,0689%	-0,0297%	0,0249%	0,4532%	0,2139%	0,0297%
δ	5,596E-03	3,399E-03	4,11E-03	2,519E-03	3,792E-03	1,527E-02	2,238E-03
Constante C	327,195	193,975	532,629	310,367	116,793	185,880	117,025
Erro Médio Quadrático nos Ajustamentos das Distribuições							
Normal	1,984	4,207	2,140	2,298	3,435	2,084	24,040
Hiperb.	1,346	1,937	0,821	0,882	1,298	1,574	4,036
Limites de Confiança à esquerda e à direita para 5%							
Dist Hiperb							
Lim inferior	-0,959%	-0,991%	-0,846%	-0,573%	-1,374%	-2,813%	-1,088%
Lim superior	1,427%	1,148%	0,803%	0,895%	1,608%	2,938%	1,383%
Dist Normal							
Xm - 1,645 σ	-0,907%	-1,311%	-0,802%	-0,568%	-1,636%	-2,759%	-1,516%
Xm + 1,645 σ	1,267%	1,378%	0,756%	0,810%	2,089%	2,951%	1,727%
Excesso Hip	10%	-21%	6%	7%	-20%	1%	-24%
Limites de Confiança à esquerda e à direita para 1%							
Dist Hiperb							
Lim inferior	-1,474%	-1,558%	-1,247%	-0,937%	-2,446%	-4,214%	-1,840%
Lim superior	2,111%	1,842%	1,211%	1,375%	2,378%	4,229%	2,244%
Dist Normal							
Xm - 2,326 σ	-1,357%	-1,868%	-1,124%	-0,853%	-2,407%	-3,941%	-2,187%
Xm + 2,326 σ	1,717%	1,935%	1,078%	1,095%	2,861%	4,133%	2,398%
Excesso Hip	17%	-11%	12%	19%	-8%	5%	-11%

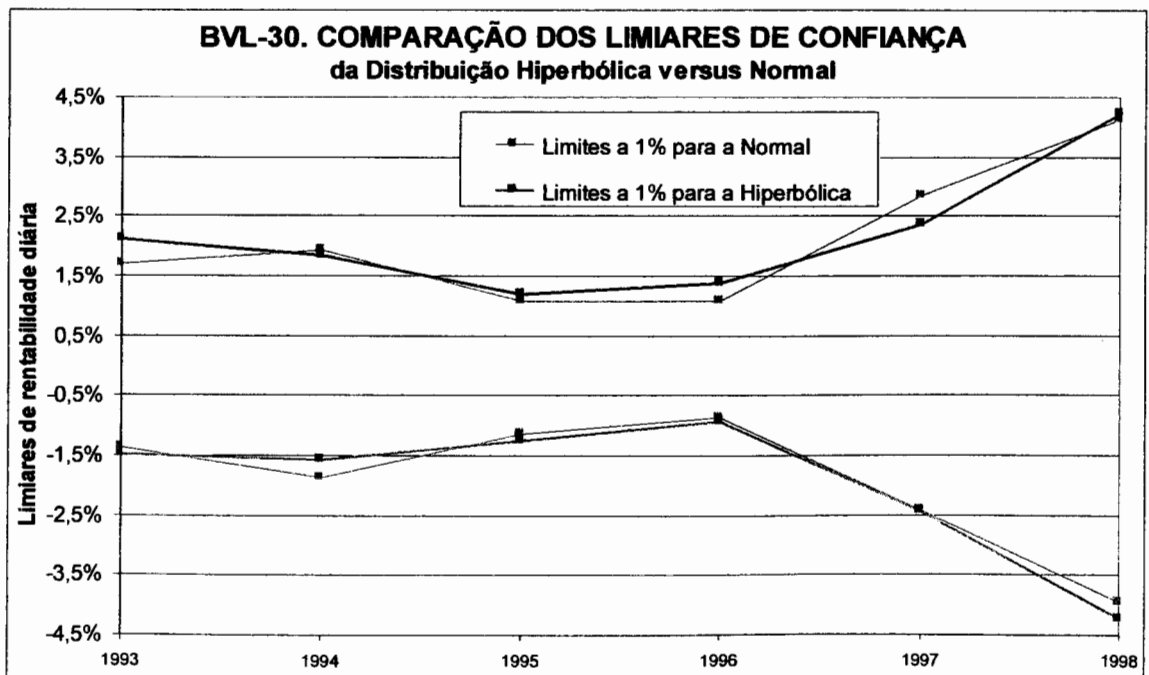
De novo e de uma maneira geral, a estimativa tradicional é mais pessimista do que a que se obtém como este novo modelo estatístico:

6 anos do BVL-30 com um grau de confiança de 99%



- no conjunto dos 6 anos a hiperbólica prevê limiares 24% menores para um grau de confiança de 95%; e 11% menores para um grau de confiança de 99%;
- há variações significativas de ano para ano, inclusivamente com situações inversas daquelas “médias”, isto é, com a estimativa tradicional a ser a mais optimista.

Para se visualizar do grau de diferença entre os resultados da Normal e da hiperbólica, o gráfico seguinte desenha as linhas limites ao longo daqueles seis anos.

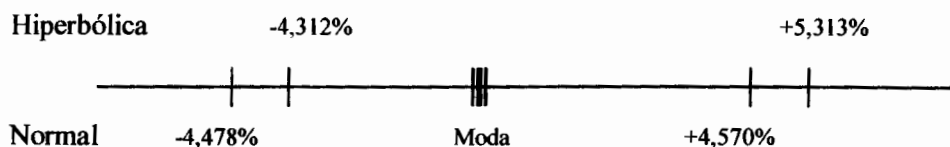


c) Cotações da EDP

A tabela seguinte resume os parâmetros da distribuição hiperbólica ajustada e estima os limiares de perdas para um grau de confiança de 99%. Neste activo e ao

contrário dos dois índices anteriores, a hiperbólica prevê valores de VaR mais exigentes, “em média”, do que a Normal.

EDP (cotações de abertura) com um grau de confiança de 99%



Mas analisando este ponto ao pormenor, observa-se que a assimetria da distribuição hiperbólica conduz a maiores limiares de previsões de perdas do que a distribuição Gaussiana para posições curtas neste “título”, e a previsões menores para posições longas.

RENTABILIDADES LOGARÍTMICAS DIÁRIAS DA EDP		
% por dia		
20/Jun/97 a 26/Fev/99		
	Abertura	Fecho
n	420	420
Média	0,046%	0,042%
σ	1,945%	1,761%
ϕ	94,079	110,472
γ	72,623	73,809
μ	-0,2740%	-0,4474%
δ	1,617E-03	4,008E-03
Constante C	41,974	49,685
Erro Médio Quadrático nos Ajustamentos das Distribuições		
Normal	6,963	6,245
Hiperbólica	1,487	2,647
Limites de Confiança à esquerda e à direita para 1%		
Distribuição Hiperbólica		
Lim inferior	-4,312%	-3,894%
Lim superior	5,313%	5,257%
Distribuição Normal		
Lim inferior	-4,478%	-4,053%
Lim superior	4,570%	4,137%
Excesso da Hiperbólica	6%	12%

8. Conclusão

As amostras estudadas cobrem um período muito provavelmente não representativo visto que foi nele que:

- mercado de capitais nacional cresceu a partir de um situação muito incipiente,
- sofreu os efeitos das privatizações,
- recebeu os influxos decorrentes da nossa “promoção” a mercado maduro (1997),
- adaptou-se à abertura das nossas fronteiras financeiras (e à estabilidade cambial do escudo),
- e incorporou os contratos sobre índices e sobre acções da Bolsa de Derivados do Porto (Junho de 1996).

As principais conclusões deste primeiro estudo sobre esta nova descrição estatística da nossa realidade accionária são as seguintes:

- i. Parece poder concluir-se, a partir desta amostra constituída pelos dois índices e um valor mobiliário líquido, que a distribuição hiperbólica se ajusta bastante melhor às rentabilidades logarítmicas diárias de activos accionários portugueses do que a tradicional Normal;
- ii. Apesar da melhor descrição da realidade estocástica das variáveis financeiras em comparação com a Normal, a escolha desta nova distribuição não elimina a necessidade de considerar a variabilidade dos parâmetros do modelo – ϕ , γ , δ , μ – ao longo do tempo;
- iii. Infelizmente os dados disponíveis no país ainda só cobrem um horizonte temporal muito curto, e isso não permite tirar, desde já, quaisquer conclusões quanto à forma como aqueles 4 parâmetros evoluem no tempo; acresce que, no caso estudado, o aumento de volatilidade verificado em 1997 e 98 poderá estar associado a um fenómeno não recorrente correspondente à saída do mercado nacional do grupo dos países emergentes (anunciado no início de 97 e concretizado em Dezembro desse ano) e a sua inclusão no grupo dos países desenvolvidos;
- iv. É possível ajustar essa distribuição à realidade empírica a partir do histograma das ocorrências históricas pelo método da *minimização do erro médio quadrático* e utilizando o programa Excel, e a convergência do processo numérico de optimização da distribuição hiperbólica é relativamente rápida; isto dispensa o recurso a programas de minimização especialmente concebidos para o caso;
- v. Contudo, este processo de ajustamento da distribuição ao histograma peca pela exigência de uma dimensão mínima das amostras que dilua os efeitos da escolha discricionária das classes do histograma - número, largura e limites das classes;
- vi. Ao contrário do que se poderia esperar tendo em atenção a mais rápida convergência para zero da curva de Gauss nas duas abas, nem sempre se verifica que o valor do VaR previsto pela hiperbólica é mais exigente (maior em módulo) do que pela Normal: os limiares de perdas VaR da hiperbólica são mais favoráveis nos índices e menos favoráveis na EDP;
- vii. Em termos de VaR, a assimetria desta nova distribuição permite tratar de forma diferenciada as posições longas das posições curtas em activos financeiros; não há nenhuma razão teórica que sugira que a distribuição hiperbólica tenha de prever VaR's mais ou menos exigentes, mas poder-se-á antever que, dando ela uma descrição mais próxima da realidade empírica, os valores VaR desta estarão mais próximos dos resultados verificados ex-post;
- viii. É razoável simplificar o cálculo do VaR pela hiperbólica usando a aproximação das exponenciais simples para a função densidade de probabilidade desta distribuição;

- ix. Em termos de VaR e em comparação com a Normal, fica a dúvida se o esforço adicional exigido pelo ajustamento da hiperbólica à realidade histórica se justifica; tanto mais que, em muitos casos, os limites de perdas potenciais previstos pela Normal já são mais exigentes do que pela hiperbólica e, portanto, o recurso àque-la aproximação mais simples até garante uma margem de segurança reforçada para as IF's.

9. Bibliografia

- Barndorff-Nielsen, O. E., 1977, *Exponentially decreasing distributions for the logarithm of particule size*, Proceedings of the Royal Society London A, 353: 401 – 419.
- Bollerslev, T., 1986, *Generalized autoregressive conditional heteroscedasticity*, Journal of Econometrics, 31: 307 – 327.
- Bollerslev, T.; Chou, R. Y. and Kroner, K. F., 1992, *ARCH modeling in finance*, Journal of Econometrics, 52: 5 – 59.
- Eberlein, E. and Keller, U., 1984, *Hyperbolic Distributions in Finance*, Working Paper nº1, Center for Data Analysis and Model Building, University of Freiburg.
- Eberlein, E.; Keller, U. and Prause, K., Jul/98, *New Insights into Smile, Mispricing and Value at Risk: the Hyperbolic Model*, The Journal of Business, Vol 71, nº 3.
- Kuchler, U.; Neumann, K.; Sorensen, M. and Streller, A., *Stock Returns and Hyperbolic Distributions*.
- Officer, R., 1972, *The distribution of stock returns*, Journal of the American Statistical Association, 67: 807 – 812.
- Praetz, P. B., 1972, *The distribution of Share Price Changes*, Journal of Business, Vol. 45: 49 – 55.
- Prause, K., Set/97, *Modelling financial data using generalized hyperbolic distributions*, Working Paper nº 48, Center for Data Analysis and Model Building, University of Freiburg.

ANEXO

