



GUILHERME ANTÓNIO VIEIRA FERREIRA  
Licenciado em Matemática

# RELATÓRIO DE ESTÁGIO – CONEXÕES MATEMÁTICAS NO ÂMBITO DO ESTUDO DE FUNÇÕES

MESTRADO EM ENSINO DE MATEMÁTICA NO 3.º CICLO DO ENSINO  
BÁSICO E NO SECUNDÁRIO

Universidade NOVA de Lisboa  
Julho, 2023





# RELATÓRIO DE ESTÁGIO – CONEXÕES MATEMÁTICAS NO ÂMBITO DO ESTUDO DE FUNÇÕES

**GUILHERME ANTÓNIO VIEIRA FERREIRA**

Licenciado em Matemática

**Orientadora:** Doutora Helena Cristina Oitavem Fonseca da Rocha,  
Professora Auxiliar da Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade NOVA de Lisboa

**Coorientadora:** Doutora Alexandra Sofia da Cunha Rodrigues,  
Professora Auxiliar Convidada da Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade NOVA de Lisboa

## Júri:

**Presidente:** Doutor António Manuel Dias Domingos,  
Professor Auxiliar da Faculdade de Ciências e Tecnologia,  
Universidade NOVA de Lisboa

**Arguente:** Doutora Rosa Antónia de Oliveira Figueiredo  
Tomás Ferreira,  
Professora Auxiliar da Faculdade de Ciências da Universidade do  
Porto

**Orientadora:** Doutora Helena Cristina Oitavem Fonseca da Rocha,  
Professora Auxiliar da Faculdade de Ciências e Tecnologia,  
Universidade NOVA de Lisboa

**Vogal:** Mestre Helder Manuel da Conceição Barão Martins,  
Professor da Escola Secundária António Damásio

## **Relatório de Estágio – Conexões Matemáticas no âmbito do estudo de Funções**

Copyright © Guilherme António Vieira Ferreira, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade NOVA de Lisboa.

A Faculdade de Ciências e Tecnologia e a Universidade NOVA de Lisboa têm o direito, perpétuo e sem limites geográficos, de arquivar e publicar esta dissertação através de exemplares impressos reproduzidos em papel ou de forma digital, ou por qualquer outro meio conhecido ou que venha a ser inventado, e de a divulgar através de repositórios científicos e de admitir a sua cópia e distribuição com objetivos educacionais ou de investigação, não comerciais, desde que seja dado crédito ao autor e editor

## AGRADECIMENTOS

Ao David, por ter sido o colega de estágio e a fonte de motivação que foi, pelas parvoíces das tardes de quarta-feira e pelo companheirismo inquebrantável durante os períodos maus e bons.

À professora Alexandra Rodrigues, pela orientação que me deu e por nunca ter poupado nas palavras ao dar-me o seu parecer, que, podendo ser tanto duro como reconfortante, nunca deixou de ser construtivo.

Ao professor supervisor da prática pedagógica da turma principal, que, por um lado, confiou em mim e permitiu que adotasse o meu próprio perfil de professor, dando-me a autonomia possível, e, por outro, partilhou a sua experiência e conhecimento.

Aos meus pais, pela omnipresença ao longo destes dezoito anos académicos e por terem sido incansáveis nos esforços feitos para chegar onde cheguei, seja a nível emocional, financeiro ou tantos outros desprovidos de termos para enumeração.

À Filipa, por ter estado sempre presente, com uma atitude construtiva e carinhosa, e por ter sido, sem nunca ter pedido crédito por isso, a força propulsora para estar onde estou presentemente. As palavras escasseiam para agradecer dignamente, pelo que só me resta deixar a promessa de corresponder com o mesmo apoio.

Aos meus amigos mais chegados, que acompanharam a minha viagem pelas diferentes fases da redação deste relatório de estágio, bem como a montanha russa de emoções que foi consequência dessa viagem: Carolina, Maria, Mariana e Rui.

Aos meus alunos, em especial os que me ajudaram a levar a cabo o projeto de investigação, por me terem ajudado a perceber que o caminho é este.



## RESUMO

A presente dissertação, dividida em duas partes, descreve o trabalho desenvolvido no ano letivo 2022/2023. A Parte I consiste no relatório de estágio, onde consta a descrição das atividades realizadas no âmbito do estágio pedagógico. A Parte II é dedicada à investigação desenvolvida com um grupo de alunos da turma de 10.º ano associada ao estágio.

O trabalho de investigação teve como objetivo compreender que papel desempenham as conexões matemáticas na compreensão dos alunos sobre os conceitos do tópico de funções. Por forma a concretizar este objetivo, teve-se em consideração as seguintes questões de investigação:

1. Que estratégias usam os alunos na realização de tarefas que envolvem conexões matemáticas entre diferentes conceitos, processos e representações matemáticas?
2. Quais os momentos da realização de tarefas com conexões matemáticas nos quais os alunos manifestam mais dificuldades ou, em contrapartida, mais destreza?
3. De que forma contribuem as conexões matemáticas para a compreensão dos alunos sobre os conceitos do tópico de funções e para a manipulação dos mesmos?

O estudo assenta numa metodologia de investigação qualitativa com cinco estudos de caso. As técnicas de recolha de dados utilizadas foram a observação participante, a entrevista semiestruturada individual, o diário de bordo e a recolha documental.

A investigação permitiu concluir que: os alunos recorrem frequentemente ao uso de representações múltiplas de uma mesma situação matemática ao realizarem tarefas que envolvam conexões matemáticas; as dificuldades surgem principalmente na realização de generalizações e na componente analítica das resoluções; os alunos revelam destreza na transição entre diferentes representações de uma situação matemática e na interpretação de uma à luz das outras; as conexões matemáticas contribuem para a deteção de erros e para a associação de conceitos reais a conceitos matemáticos que os representam.

**Palavras chave:** Estágio Pedagógico, Conexões Matemáticas, Funções, Tarefas Matemáticas.



## ABSTRACT

The present dissertation, divided in two parts, reports the developed work in the 2022/2023 school year. Part I consists of the internship report, in which the activities done in the context of the pedagogical internship are described. Part II is dedicated to the developed research with a group of students from the 10th grade class.

The investigation had the main goal of understanding what is the role of mathematical connexions in the students' learning of the concepts on the topic of functions. To achieve that goal, the following investigation questions were considered:

1. What strategies do students use when doing mathematical tasks with mathematical connexions between different mathematical concepts, processes and representations?
2. In which moments do students exhibit more difficulties or dexterity when doing mathematical tasks with mathematical connexions?
3. How do mathematical connexions add to the students' understanding on the concepts of functions and on their capacity to handle them?

The study is settled on a qualitative research methodology with five case studies. The data collection techniques that were used were the participant observation, the individual semi-structured interview, the logbook and the documental collection.

The research led to the following conclusions: students frequently resort to the use of multiple representations of the same mathematical situation when doing tasks with mathematical connexions; the struggles emerge mainly when making generalizations and on the analytical part of the resolutions; students show dexterity when switching between representations of a mathematical situation and when interpreting one in the light of the others; mathematical connexions add to the error detection and the association between real concepts and the mathematical concepts that represent them.

**Keywords:** Pedagogical Internship, Mathematical Connexions, Functions, Mathematical Tasks.



# Índice

<b>PRIMEIRA PARTE</b> .....	1
<b>1. Prática Pedagógica Supervisionada</b> .....	3
<b>1.1 Planificações das aulas</b> .....	3
<b>1.2 Prática pedagógica no 10.º ano</b> .....	4
1.2.1 Aulas de 13 de outubro .....	4
1.2.2 Aulas de 7 de novembro .....	6
1.2.3 Aulas de 6 de dezembro .....	8
1.2.4 Aulas de 2 de fevereiro .....	9
1.2.5 Aulas de 6 de março .....	12
1.2.6 Aulas de 9 de março .....	13
1.2.7 Aulas de 22 de maio .....	15
<b>1.3 Prática pedagógica no 9.º ano</b> .....	16
1.3.1 Aulas de 21 de março .....	16
1.3.2 Aulas de 28 de março .....	17
<b>1.4 Prática não letiva</b> .....	18
1.4.1 XLI Olimpíadas Portuguesas da Matemática (9 de novembro) .....	18
1.4.2 Concurso Bebras (10 de novembro) .....	19
1.4.3 EXPO FCT NOVA (19 de abril) .....	19
1.4.4 Tarefa de Geometria Sintética no Plano com o GeoGebra (7 de junho) .....	20
<b>1.5 Reflexão sobre a Prática Pedagógica Supervisionada</b> .....	20
<b>SEGUNDA PARTE</b> .....	23
<b>1. Introdução</b> .....	25
<b>2. Fundamentação teórica</b> .....	27
<b>2.1 Conexões matemáticas</b> .....	27
<b>2.2 Tarefas e recursos promotores do estabelecimento de conexões matemáticas</b> .....	30
<b>2.3 Papel desempenhado pelas tarefas matemáticas</b> .....	32
<b>3. Metodologia</b> .....	35
<b>3.1 Investigação de natureza qualitativa</b> .....	35
3.1.1 Estudo de caso .....	36
3.1.2 Instrumentos de recolha de dados .....	36

<b>3.2 Procedimentos metodológicos</b> .....	38
3.2.1 <i>Escolha dos participantes</i> .....	38
3.2.2 <i>Operacionalização dos instrumentos de recolha de dados</i> .....	39
3.2.3 <i>Tarefas</i> .....	39
<b>4. Análise de dados</b> .....	43
<b>4.1 Estudo de caso: Mercúrio</b> .....	43
<b>4.2 Estudo de caso: Vénus</b> .....	52
<b>4.3 Estudo de caso: Júpiter</b> .....	63
<b>4.4 Estudo de caso: Saturno</b> .....	71
<b>4.5 Estudo de caso: Neptuno</b> .....	82
<b>5. Conclusões</b> .....	91
<b>5.1 Recontextualização da fundamentação teórica e do referencial metodológico</b> .....	91
<b>5.2 Considerações finais</b> .....	93
5.2.1 <i>Estratégias utilizadas pelos alunos</i> .....	93
5.2.2 <i>Momentos da realização das tarefas onde os alunos manifestaram mais dificuldades ou mais destreza</i> .....	94
5.2.3 <i>Contribuições das conexões matemáticas para a compreensão sobre os conceitos do tópico de funções</i> .....	94
<b>5.3 Propostas de futuras investigações</b> .....	95
<b>5. Referências</b> .....	97
<b>Anexo 1 (Plano de tema)</b> .....	101
<b>Anexo 2 (Resolução e distribuição de cotação de teste)</b> .....	106
<b>Anexo 3 (Exemplo de planificação de aula)</b> .....	109
<b>Anexo 4 (Ficha sobre funções com a utilização da calculadora gráfica)</b> .....	114
<b>Anexo 5 (Atividade com recurso à calculadora gráfica)</b> .....	117
<b>Anexo 6 (Atividade prática exploratória sobre a proporcionalidade inversa)</b> .....	118
<b>Anexo 7 (Tarefa de Geometria Sintética no Plano com o <i>GeoGebra</i>)</b> .....	119
<b>Anexo 8 (Tarefa 1 – A função quadrática em contextos semirreais)</b> .....	127
<b>Anexo 9 (Tarefa 2 – A função quadrática em resolução de problemas e em tarefas de modelação)</b> .....	131
<b>Anexo 10 (Tarefa 3 – Funções definidas por ramos em contextos semirreais)</b> .....	133

## Índice de Figuras

Figura 1.1 – Exercício 31 do manual Dimensões .....	8
Figura 1.2 – Exemplo 11 do manual Dimensões .....	8
Figura 1.3 – Exercício 33 do manual Dimensões .....	11
Figura 4.1.1 – Representação gráfica, expressão analítica e justificação dadas por Mercúrio .....	43
Figura 4.1.2 – Representações gráficas propostas por Mercúrio.....	44
Figura 4.1.3 – Cálculos e resposta final dados por Mercúrio.....	45
Figura 4.1.4 – Cálculos e resposta final dados por Mercúrio.....	45
Figura 4.1.5 – Janela do GeoGebra fornecida por Mercúrio .....	46
Figura 4.1.6 – Generalizações obtidas por Mercúrio.....	46
Figura 4.1.7 – Expressão analítica e representação gráfica propostas por Mercúrio .....	47
Figura 4.1.8 – Expressão analítica apresentada por Mercúrio.....	48
Figura 4.1.9 – Representação gráfica e expressão analítica propostas por Mercúrio.....	49
Figura 4.2.1 – Representação gráfica, expressão analítica e justificação dadas por Vénus.....	52
Figura 4.2.2 – Conclusão proposta por Vénus .....	54
Figura 4.2.3 – Cálculos e resposta final dados por Vénus .....	54
Figura 4.2.4 – Resolução de Vénus .....	55
Figura 4.2.5 – Janela do GeoGebra fornecida por Vénus.....	56
Figura 4.2.6 – Generalizações obtidas por Vénus .....	56
Figura 4.2.7 – Expressão analítica e representação gráfica apresentadas por Vénus.....	58
Figura 4.2.8 – Justificação proposta por Vénus.....	60
Figura 4.2.9 – Representação gráfica e expressão analítica propostas por Vénus .....	60
Figura 4.3.1 – Representações gráficas, expressões analíticas e justificações dadas por Júpiter .....	63
Figura 4.3.2 – Representações gráficas propostas por Júpiter .....	64
Figura 4.3.3 – Justificação apresentada por Júpiter .....	65
Figura 4.3.4 – Cálculos e resposta final dados por Vénus .....	66
Figura 4.3.5 – Janela do GeoGebra fornecida por Júpiter.....	67
Figura 4.3.6 – Generalizações obtidas por Júpiter .....	67
Figura 4.3.7 – Justificação apresentada por Júpiter .....	68
Figura 4.3.8 – Expressão analítica e representação gráfica apresentadas por Júpiter.....	68
Figura 4.3.9 – Expressão analítica e justificação dadas por Júpiter.....	69
Figura 4.4.1 – Representações gráficas, expressões analíticas e justificações dadas por Saturno.....	71
Figura 4.4.2 – Representações gráficas e justificação propostas por Saturno .....	72
Figura 4.4.3 – Justificação proposta por Saturno .....	72
Figura 4.4.4 – Cálculos e resposta final dados por Saturno.....	73
Figura 4.4.5 – Cálculos e resposta final dados por Saturno.....	74
Figura 4.4.6 – Cálculos realizados por Saturno .....	75
Figura 4.4.7 – Janela do GeoGebra fornecida por Saturno .....	76
Figura 4.4.8 – Generalizações obtidas por Saturno.....	76
Figura 4.4.9 – Expressão analítica, representação gráfica e resposta dadas por Saturno.....	77
Figura 4.4.10 – Resolução proposta por Saturno .....	79

Figura 4.5.1 – Representações gráficas, expressões analíticas e justificações dadas por Neptuno .....	82
Figura 4.5.2 – Relação estabelecida por Neptuno.....	83
Figura 4.5.3 – Representações gráficas e conclusão propostas por Neptuno.....	84
Figura 4.5.4 – Cálculos efetuados por Neptuno.....	84
Figura 4.5.5 – Resposta final dada por Neptuno.....	85
Figura 4.5.6 – Cálculos e resposta final dados por Neptuno .....	85
Figura 4.5.7 – Janela do GeoGebra fornecida por Neptuno .....	86
Figura 4.5.8 – Generalizações obtidas por Neptuno.....	87
Figura 4.5.9 – Expressão analítica e representação gráfica apresentadas por Neptuno.....	88

## Índice de Tabelas

Tabela 1 – Resumo da planificação das aulas de 13 de outubro .....	4
Tabela 2 – Resumo da planificação das aulas de 7 de novembro .....	6
Tabela 3 – Resumo da planificação das aulas de 6 de dezembro .....	8
Tabela 4 – Resumo da planificação das aulas de 2 de fevereiro.....	9
Tabela 5 – Resumo da planificação das aulas de 6 de março .....	12
Tabela 6 – Resumo da planificação das aulas de 9 de março .....	13
Tabela 7 – Resumo da planificação das aulas de 21 de março .....	16
Tabela 8 – Resumo da planificação das aulas de 28 de março .....	17



# **PRIMEIRA PARTE**



## **1. Prática Pedagógica Supervisionada**

Na primeira parte, encontra-se descrito o modo de funcionamento da prática pedagógica e as ações desenvolvidas pelo estagiário no âmbito da mesma, que decorreu ao longo do ano letivo de 2022/2023.

O estagiário acompanhou duas turmas, uma do 10.º ano de escolaridade (a turma principal), na qual foi realizado o projeto de investigação, e uma do 9.º ano de escolaridade (a turma secundária). No acompanhamento feito a cada uma das turmas, o estagiário foi supervisionado pelos professores titulares das mesmas, os professores cooperantes. Foram lecionadas 14 aulas de 45 minutos na turma principal, e 4 aulas de 45 minutos na turma secundária. Após a leção de cada aula procedeu-se a um momento de reflexão que envolvia o estagiário, o professor cooperante e os professores da FCT, António Domingos e Alexandra Rodrigues, sempre que possível.

Ao longo do ano letivo, o estagiário desenvolveu atividades diversas. Nomeadamente, participou nas reuniões gerais de professores, de grupo de recrutamento, de diretores de turma, de articulação curricular, de conselho de turma e de pais; realizou, com os professores cooperantes e com o colega de estágio, reuniões de articulação de estágio frequentes (18 no total); acompanhou o trabalho de Direção de Turma; efetuou planos de tema para cada um dos temas da disciplina de Matemática A, como exemplificado no Anexo 1; contribuiu para a elaboração de exercícios para os testes e efetuou a correção de testes de cinco alunos, por cada momento de avaliação; redigiu as resoluções e distribuições de cotação, sob aprovação do professor cooperante (Anexo 2); e participou, ainda, em atividades extracurriculares.

### **1.1 Planificações das aulas**

O núcleo de estágio era constituído pelos professores cooperantes (titulares de cada uma das turmas acompanhadas), que acompanharam e orientaram a prática pedagógica, e pelos dois estagiários. No âmbito das reuniões de articulação de estágio, o núcleo escolhia, agendava e, posteriormente, discutia a planificação de cada uma das aulas lecionadas. A escolha das aulas a lecionar tinha subjacente a iniciativa do estagiário. Efetuada a escolha das aulas, era elaborada uma planificação pelo estagiário que ia a discussão na reunião de articulação de estágio (a título de exemplo, é possível consultar uma das planificações de aulas no Anexo 3). Nesta, o grupo refletia sobre os conteúdos abordados, a sequência dos momentos das aulas e a(s) metodologia(s) adotada(s). A planificação das aulas passava por este processo o número de vezes considerado necessário até que se tratasse unanimemente de uma planificação consistente, adequada aos objetivos e bem enquadrada.

Na planificação estavam contemplados os conteúdos a lecionar, a sequência dos momentos das aulas, as metodologias a adotar e, ainda, potenciais obstáculos ao bom funcionamento das aulas, bem como à sua eficácia. Por último, já depois de lecionadas as

aulas e feita a reflexão com o professor cooperante (e com os professores da FCT, quando estiveram presentes) era redigida uma reflexão escrita.

## 1.2 Prática pedagógica no 10.º ano

Durante o ano letivo, como já referido, lecionaram-se 14 aulas, assistidas pelo núcleo de estágio. No 1.º período, lecionaram-se três blocos de duas aulas de 45 minutos nos dias 13 de outubro, 7 de novembro e 6 de dezembro, cujos tópicos foram, respetivamente: a equação cartesiana da mediatriz de um segmento de reta; a relação entre o vetor diretor e o declive de uma reta e a relação entre o paralelismo de retas e a igualdade do declive; e, por último, a equação vetorial e as equações paramétricas da reta no espaço. No 2.º período, lecionaram-se três blocos de duas aulas de 45 minutos nos dias 2 de fevereiro e 6 e 9 de março, cujos tópicos foram, respetivamente: reflexões e simetrias em gráficos de funções; a função quadrática em contextos reais; e, por fim, a função módulo. Quanto ao 3.º período, foi lecionado um bloco de duas aulas de 45 minutos a 22 de maio, cujo tópico abordado foi a resolução de exercícios e problemas sobre funções com a utilização da calculadora gráfica (Anexo 4).

A turma é caracterizada por uma atitude coletiva de serenidade, por vezes chegando à apatia. No entanto, quando é fomentado o trabalho a pares, a grande maioria responde e, independentemente do resultado, há um esforço generalizado para ultrapassar os obstáculos, salva exceções pontuais. O aproveitamento global da turma é mediano, havendo grandes concentrações de alunos com classificações bastante elevadas e outras francamente baixas. Esta última realidade deve-se ao desenquadramento de alguns alunos. De resto, é um grupo unido, sentindo-se um espírito coletivista e de interajuda.

### 1.2.1 Aulas de 13 de outubro

As aulas de 13 de outubro centraram-se na equação cartesiana da mediatriz de um segmento de reta. Segue-se um resumo da planificação das aulas (Tabela 1).

*Tabela 1 – Resumo da planificação das aulas de 13 de outubro*

<b>Tema e Tópico</b>	Geometria Analítica no Plano: Condições e conjuntos
<b>Sumário</b>	Equação cartesiana da mediatriz de um segmento de reta.
<b>Objetivos (AEs)</b>	Reconhecer o significado da equação da mediatriz de um segmento de reta.
<b>Recursos</b>	Manual.

<p><b>Momentos das aulas</b></p>	<p>Esclarecimento de dúvidas do TPC;</p> <p>Contextualização sobre a mediatriz de um segmento de reta recorrendo ao seu significado geométrico;</p> <p>Exemplos de mediatrizes simples que não exijam o cálculo direto. Nomeadamente, mediatriz de pontos que partilhem uma das coordenadas ((1,2) e (3,2): <math>x = 2</math>, reta vertical) e mediatriz de pontos cujas coordenadas são simétricas ((-2,2) e (2, -2): <math>y = x</math>, bissetriz dos quadrantes ímpares);</p> <p>Exposição da fórmula da equação cartesiana da mediatriz de um segmento de reta (estabelecendo a ponte com o significado geométrico, o facto de ser a reta equidistante a dois pontos, traduz-se numa igualdade de distâncias);</p> <p>Resolução de exercícios de aplicação.</p>
<p><b>Metodologia adotada</b></p>	<p>As aulas foram de carácter expositivo, apelando à participação ativa e recorrente dos alunos;</p> <p>A nível de conceitos, procurou-se estabelecer pontes com conhecimentos previamente adquiridos e fornecer várias lentes sobre as quais os alunos podem encarar os novos conteúdos;</p> <p>Os alunos foram encorajados a resolver os exercícios autonomamente ou com o colega de carteira e, ainda, a partilhar as suas resoluções no quadro, de modo a gerar um ambiente de reflexão coletiva.</p>

### Reflexão

Após a leção destas aulas, constatou-se que a preparação foi pouco profunda. Não tanto quanto à sequência e organização dos momentos das aulas, mas sim na ausência do exercício mental de imaginar as aulas em concreto, o que conduziu a situações que requerem melhoria.

A primeira situação prende-se com um dos exercícios contemplados no TPC. Era um exercício com uma subtilidade que escapou ao estagiário aquando do esclarecimento de dúvidas e que carecia de uma revisão dos exercícios anterior à leção das aulas. Outro ponto que pediu aperfeiçoamento foi a gestão de tempo, tanto a nível de planeamento como a nível de monitorização. A intervenção do professor cooperante, no sentido de sugerir que se avançasse para o seguinte momento, impediu que o esclarecimento de dúvidas se alongasse por muitos minutos, o que foi benéfico pois este levaria à perda de tempo indispensável à

eficácia e bom funcionamento das aulas. Por último, segue-se a organização do quadro, onde faltou adotar a perspectiva do aluno, no sentido de tornar clara a estruturação dos conceitos. Em particular, falhou a enumeração dos exemplos dados e o realce de aspetos importantes como a designação de conceitos novos e o recurso a técnicas matemáticas que são novidade para o aluno (em particular, o recurso a um ponto genérico). Um aspeto que não foi tido em consideração e que passou a ser algo com muita relevância depois destas aulas foi a gestão a fazer entre o esclarecimento de dúvidas individual e o progresso das aulas no geral. Independentemente dos percalços, sente-se que os alunos responderam bem, empenhando-se ao longo das aulas.

Esta experiência trouxe lucidez e compreensão no que toca à gestão de tempo, à boa organização do quadro e à gestão dos momentos de esclarecimento de dúvidas. Ganhou-se, desta forma: uma abordagem mais focada na perspectiva do aluno no momento do planeamento das aulas; uma noção de como gerir o tempo disponível face aos momentos das aulas pensados; e, por fim, uma atitude de seleção crítica nos momentos de esclarecimento de dúvidas.

### 1.2.2 Aulas de 7 de novembro

As aulas de 7 de novembro centraram-se na equação vetorial de uma reta. Segue-se um resumo da planificação das aulas (Tabela 2).

*Tabela 2 – Resumo da planificação das aulas de 7 de novembro*

<b>Tema e Tópico</b>	Cálculo vetorial no plano
<b>Sumário</b>	Equação vetorial de uma reta.
<b>Objetivos (AEs)</b>	Relação entre as coordenadas de um vetor diretor e o declive da reta; Paralelismo de retas e igualdade do declive. Reconhecer o significado e aplicar na resolução de problemas a equação vetorial de uma reta no plano.
<b>Recursos</b>	Manual.
<b>Momentos das aulas</b>	Esclarecimento de dúvidas do TPC; Exposição sobre o conceito de vetor diretor (estabelecendo a relação entre este e o declive de uma reta); Resolução de exercícios de aplicação; Exposição da propriedade do paralelismo de retas (a partilha

	<p>do valor do declive);</p> <p>Exposição sobre a equação vetorial de uma reta (noção intuitiva partindo de vários pontos obtidos partindo de um ponto A pertencente à reta e da sua adição com múltiplos do vetor diretor da reta; posterior formalização do conceito)</p> <p>Resolução de exercícios de aplicação (nos quais se fez a introdução natural do sistema de equações paramétricas de uma reta).</p>
<b>Metodologia adotada</b>	<p>As aulas foram de carácter expositivo, apelando à participação ativa e recorrente dos alunos;</p> <p>A nível de conceitos, procurou-se estabelecer pontes com conhecimentos previamente adquiridos e fornecer várias lentes sobre as quais os alunos podem encarar os novos conteúdos;</p> <p>Os alunos foram encorajados a resolver os exercícios autonomamente ou com o colega de carteira e, ainda, a partilhar as suas resoluções no quadro, de modo a gerar um ambiente de reflexão coletiva.</p>

### **Reflexão**

Não foi possível cumprir a planificação. Porém, os ajustes feitos no decorrer das aulas consideraram-se adequados, mantendo a coerência das mesmas, bem como o seu fio condutor. Sentiu-se haver melhorias a fazer no tocante à parte meramente matemática: a nível de notação (em operações com pontos e/ou vetores) e a nível de terminologia (ao ter-se designado, erroneamente, as coordenadas de um vetor por abcissa e ordenada). A inconsistência relativamente aos conceitos matemáticos pode desorientar os alunos no momento da compreensão dos mesmos, tornando a aprendizagem menos fluida do que o pretendido, pelo que este é um aspeto a ter em atenção.

Um outro pormenor a atentar foi o TPC atribuído aos alunos. Tinha sido estipulado *a priori* um conjunto de exercícios que, em parte, pressupõem a introdução de um conceito (o sistema de equações paramétricas da reta). Uma vez que este conceito acabou por não ser introduzido, devido ao alongamento de outros momentos das aulas, realçou-se a importância de reajustar os conteúdos do TPC previamente estipulado de modo a que estes estejam circunscritos aos conteúdos abordados em aula.

Refletindo de um ponto de vista evolutivo, verificaram-se aspetos positivos, nomeadamente, na organização do quadro e no planeamento mais minucioso e atento.

Por último, relativamente aos exemplos e exercícios pensados para usar em aula, estes não tiveram o efeito desejado. Ainda que parecessem adequados no momento do planeamento, o Exercício 31 (Figura 1.1) e o Exemplo 11 (Figura 1.2) não desempenharam o papel pretendido: ilustrar e consolidar conceitos e relações entre estes.

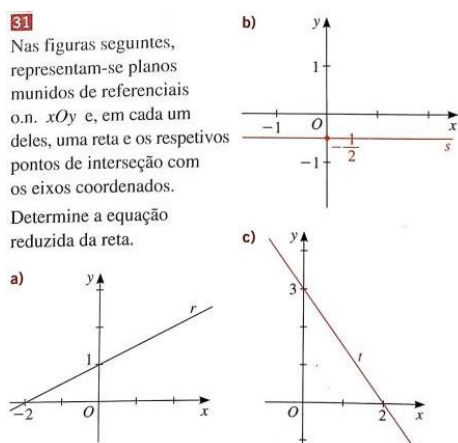


Figura 1.1 – Exercício 31 do manual *Dimensões* (Negra et al., 2015a, p. 57)

**EXEMPLO 11**  
 Uma equação vetorial da reta que passa pelo ponto  $A(-1, 4)$  e tem a direção do vetor  $\vec{u}(2, 1)$  é  
 $(x, y) = (-1, 4) + k(2, 1), k \in \mathbb{R}$   
 e uma equação vetorial da reta paralela a esta que passa pelo ponto  $B(4, 0)$ , porque tem a direção de  $\vec{u}$ , é  
 $(x, y) = (4, 0) + k(2, 1), k \in \mathbb{R}$

Figura 1.2 – Exemplo 11 do manual *Dimensões* (Negra et al., 2015a, p. 61)

Num cenário hipotético no qual fosse possível repetir as aulas, seriam postos de parte o exemplo e o exercício acima, sendo possível dedicar mais tempo à realização de outros exercícios.

### 1.2.3 Aulas de 6 de dezembro

As aulas de 6 de dezembro centraram-se na equação vetorial da reta no espaço. Segue-se um resumo da planificação das aulas (Tabela 3).

Tabela 3 – Resumo da planificação das aulas de 6 de dezembro

Tema e Tópico	Cálculo vetorial no espaço
Sumário	Equação vetorial da reta no espaço; Sistema de equações paramétricas da reta no espaço.
Objetivos (AEs)	Reconhecer o significado da equação vetorial da reta no espaço.
Recursos	Manual.

<b>Momentos das aulas</b>	<p>Esclarecimento de dúvidas do TPC;</p> <p>Exposição sobre a equação vetorial da reta no espaço e o respetivo sistema de equações paramétricas (generalização natural do caso do plano);</p> <p>Resolução de exercícios de aplicação.</p>
<b>Metodologia adotada</b>	<p>As aulas foram de carácter expositivo, apelando à participação ativa e recorrente dos alunos;</p> <p>A nível de conceitos, procurou-se estabelecer pontes com conhecimentos previamente adquiridos e fornecer várias lentes sobre as quais os alunos podem encarar os novos conteúdos;</p> <p>Os alunos foram encorajados a resolver os exercícios autonomamente ou com o colega de carteira e, ainda, a partilhar as suas resoluções no quadro, de modo a gerar um ambiente de reflexão coletiva.</p>

### **Reflexão**

As aulas decorreram bem, tanto a nível da gestão de tempo, como na colaboração por parte dos alunos, que trabalharam ao longo das aulas.

Há a apontar alguns lapsos na resolução dos exercícios do TPC nos quais havia dúvidas. Tratou-se, essencialmente, de erros de transcrição e não se sente que tenham perturbado a compreensão dos alunos, nem o funcionamento das aulas. No entanto, é algo a evitar, no sentido de prevenir fragilidades na aprendizagem dos alunos.

Relativamente a uma das dificuldades que se previam e que se confirmaram, o paralelismo de retas no espaço, conclui-se que uma estratégia mais eficaz seria a de abordar o assunto após a generalização da equação vetorial da reta e do sistema de equações paramétricas. É uma nota rápida de se fazer e poderá elucidar os alunos numa fase mais precoce, o que é positivo.

#### *1.2.4 Aulas de 2 de fevereiro*

As aulas de 2 de fevereiro centraram-se nas reflexões e simetrias em gráficos de funções. Segue-se um resumo da planificação das aulas (Tabela 4).

*Tabela 4 – Resumo da planificação das aulas de 2 de fevereiro*

<b>Tema e Tópico</b>	Funções reais de variável real: Reflexões e gráficos de funções
----------------------	---

<b>Sumário</b>	Reflexões e simetrias em gráficos de funções; Relações entre o gráfico de uma função e os gráficos das funções $-f(x)$ e $f(-x)$ .
<b>Objetivos (AEs)</b>	Reconhecer e interpretar graficamente a relação entre o gráfico de uma função e os gráficos das funções $af(x)$ , $f(bx)$ , $f(x + c)$ e $f(x) + d$ , $a$ , $b$ , $c$ e $d$ números reais, $a$ e $b$ não nulos e usá-las na resolução de problemas e em contextos de modelação.
<b>Recursos</b>	Manual; Calculadora gráfica.
<b>Momentos das aulas</b>	<p>Esclarecimento de dúvidas do TPC;</p> <p>Breve recapitulação das transformações de funções previamente estudadas (translações verticais e horizontais e homotetias verticais e horizontais);</p> <p>Recurso a uma função <math>f</math> em particular, bem como ao seu gráfico, para ilustrar de forma intuitiva e visual a que transformações correspondem os gráficos das funções <math>-f(x)</math> e <math>f(-x)</math>;</p> <p>Generalização e formalização dos conceitos;</p> <p>Realização de uma atividade com recurso à calculadora gráfica (Anexo 5).</p>
<b>Metodologia adotada</b>	<p>Estas aulas foram assistidas pelos professores da FCT, os professores Alexandra Rodrigues e António Domingos.</p> <p>As aulas foram parcialmente de carácter expositivo, apelando à participação ativa e recorrente dos alunos, e de carácter exploratório no momento da realização da atividade;</p> <p>A nível de conceitos, procurou-se estabelecer pontes com conhecimentos previamente adquiridos e fornecer várias lentes sobre as quais os alunos podem encarar os novos conteúdos;</p> <p>Os alunos foram encorajados a resolver os exercícios autonomamente ou com o colega de carteira e, ainda, a partilhar as suas resoluções no quadro, de modo a gerar um ambiente de reflexão coletiva.</p>

## Reflexão

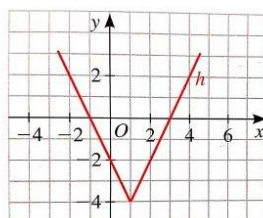
As aulas funcionaram bem na sua generalidade. Os alunos envolveram-se e, apesar de alguma agitação na segunda parte das aulas, esta não comprometeu a produtividade dos mesmos.

Entre os aspetos positivos, verificou-se uma evolução na logística das aulas, mais especificamente no encadeamento dos diferentes momentos, bem como na gestão temporal, o que possibilitou instaurar a dinâmica pretendida. Sentiu-se, também, um à vontade crescente do professor estagiário com o quadro que não se tinha manifestado nas aulas anteriores. A comunicação com os alunos, ainda que esteja muito dependente da colaboração dos mesmos, foi outro aspeto positivo.

Havendo a possibilidade de se repetir estas aulas, seria dada uma maior ênfase na introdução da tarefa final. Despender-se-ia do tempo necessário para dar as indicações necessárias para a realização da tarefa, uma vez que a distribuição dos enunciados sem fazer qualquer menção prévia instaurou burburinho e desorientação que, não só prejudicaram o momento das aulas que estava a decorrer (a realização do Exercício 33 (Figura 1.3)), como também a atividade que se seguiu.

**33**

A figura seguinte representa parte do gráfico de uma função  $h$ .



Represente graficamente as funções definidas por:

- a)  $f(x) = -h(x)$
- b)  $g(x) = -h(x) + 2$
- c)  $t(x) = -h(x - 2)$
- d)  $i(x) = -h(2x)$

Figura 1.3 – Exercício 33 do manual *Dimensões*  
(Negra et al., 2015b, p. 45)

A nível das dificuldades sentidas, a busca pelo equilíbrio entre o rigor matemático e a acessibilidade da linguagem matemática trouxe alguns desafios. A notação usada para a função definida por  $f(-x)$ , mais especificamente,  $p^*(x)$ , foi infeliz. Esta notação dificultou a apreensão do conceito matemático por parte dos alunos, sendo algo a reter para uma próxima vez.

### 1.2.5 Aulas de 6 de março

As aulas de 6 de março centraram-se na aplicação de uma tarefa sobre a função quadrática em contextos semirreais. Segue-se um resumo da planificação das aulas (Tabela 5).

Tabela 5 – Resumo da planificação das aulas de 6 de março

<b>Tema e Tópico</b>	Funções reais de variável real: Função quadrática
<b>Sumário</b>	Reflexões e simetrias em gráficos de funções; Relações entre o gráfico de uma função e os gráficos das funções $-f(x)$ e $f(-x)$ .
<b>Objetivos (AEs)</b>	Reconhecer e interpretar graficamente a relação entre o gráfico de uma função e os gráficos das funções $af(x)$ , $f(bx)$ , $f(x + c)$ e $f(x) + d$ , $a$ , $b$ , $c$ e $d$ números reais, $a$ e $b$ não nulos e usá-las na resolução de problemas e em contextos de modelação.
<b>Recursos</b>	Manual; Calculadora gráfica (facultativo).
<b>Momentos das aulas</b>	Aplicação de uma tarefa para a recolha de dados a realizar no âmbito da investigação presente no relatório de estágio. Esclarecimento de dúvidas do TPC e realização de exercícios.
<b>Metodologia adotada</b>	As aulas cingiram-se à realização autónoma da tarefa acima referida por parte dos alunos. Uma vez que a tarefa estava enquadrada no projeto de investigação, o professor estagiário adotou o papel de observador participante, optando por esclarecer dúvidas que pusessem em causa a recolha de dados, abstendo-se de fazer o mesmo para os conceitos matemáticos.

#### Reflexão

As aulas cingiram-se à realização de uma tarefa, que durou os noventa minutos das aulas, não havendo oportunidade para o esclarecimento de dúvidas e realização dos exercícios agendados, que foram adiados para as aulas seguintes.

No que toca ao funcionamento das aulas, os alunos levaram mais tempo na resolução de alguns problemas do que se tinha antecipado. Além disso, houve mais troca de impressões entre os alunos do que se previa, pelo que as características das aulas divergiam do que se antevia, havendo algum burburinho de fundo. Porém, considerou-se que esta realidade não comprometeu nem a realização da tarefa nem o aproveitamento dos alunos.

### 1.2.6 Aulas de 9 de março

As aulas de 9 de março centraram-se na função módulo. Segue-se um resumo da planificação das aulas (Tabela 6).

Tabela 6 – Resumo da planificação das aulas de 9 de março

<b>Tema e Tópico</b>	Estudo de funções elementares e operações algébricas com funções: Função módulo
<b>Sumário</b>	Função módulo; Resolução de condições com módulos.
<b>Objetivos (AEs)</b>	Reconhecer, interpretar e representar graficamente funções definidas por ramos e a função módulo e usá-los na resolução de problemas e em contextos de modelação.
<b>Recursos</b>	Manual; Calculadora gráfica.
<b>Momentos das aulas</b>	<p>Esclarecimento de dúvidas do TPC;</p> <p>Breve menção sobre as funções definidas por ramos introduzidas nas aulas anteriores, visando ao estabelecimento de uma ponte natural com o caso particular da função módulo;</p> <p>Apresentação do conceito de módulo sob duas perspetivas: uma operação que devolve o valor absoluto do número em causa e a distância desse número à origem da reta real;</p> <p>Generalização para um número real genérico <math>a</math>, com o objetivo de obter intuitivamente a expressão que designar-se-á por função módulo;</p> <p>Formalização do conceito de função módulo;</p> <p>Realização de exercícios de aplicação com vista à introdução de ferramentas e procedimentos matemáticos: a resolução de equações com módulos e a resolução de inequações com módulos (recurso à resolução gráfica com auxílio da calculadora, para motivar a posterior transposição para a resolução analítica).</p>

<p><b>Metodologia adotada</b></p>	<p>Estas aulas foram assistidas pelos professores da FCT, os professores Alexandra Rodrigues e António Domingos.</p> <p>As aulas foram parcialmente de carácter expositivo, apelando à participação ativa e recorrente dos alunos, e de carácter exploratório no momento da realização da tarefa;</p> <p>A nível de conceitos, procurou-se estabelecer pontes com conhecimentos previamente adquiridos e fornecer várias lentes sobre as quais os alunos podem encarar os novos conteúdos;</p> <p>Os alunos foram encorajados a resolver os exercícios autonomamente ou com o colega de carteira e, ainda, a partilhar as suas resoluções no quadro, de modo a gerar um ambiente de reflexão coletiva.</p>
-----------------------------------	--

### **Reflexão**

Na generalidade, as aulas não decorreram conforme o pretendido. Ainda que a matéria tenha sido lecionada, que o primeiro terço das aulas tenha sido produtivo e que parte da turma tenha tirado partido da mesma, sente-se que não se cumpriu com os objetivos.

O ponto de rutura deu-se na exposição da resolução de equações que envolvem módulos. Em termos práticos, não ajudou ter-se partido de imediato do caso geral com um número real  $a$  e um  $d > 0$  quaisquer. Esta abordagem criou confusão, não só na compressão dos alunos, como na dinâmica das aulas. Apesar de se ter partido para um exemplo prático na tentativa de colmatar a ineficácia do caso geral, não foi possível instaurar um ambiente calmo, atribuindo-se esta situação à falta de assertividade num momento em que era importante dominar a aula e redirecionar a mesma.

Este ponto de rutura levou à necessidade de suprimir partes das aulas que estavam previstas, nomeadamente o uso da calculadora gráfica e do projetor. Considera-se que foi tomada a decisão acertada, uma vez que se tratam de atividades nas quais os alunos têm mais liberdade, promovendo naturalmente algum burburinho. Tal não seria favorável atendendo ao estado agitado da turma. Por outro lado, a supressão feita mudou drasticamente as características pensadas para as aulas, que passaram, deste modo, a estar mais centradas não só no quadro, como no professor.

Sente-se que foi enriquecedor experienciar as consequências que a imprevisibilidade das dificuldades que um conceito acarreta tem na dinâmica de uma aula. Constatou-se que a exposição relativa à resolução de equações com módulos seria um momento fulcral a ter em atenção. Uma potencial solução seria recorrer-se a um exemplo prático na resolução de equações com módulos e ser-se mais assertivo para com a turma no momento em que as

aulas estavam a tomar características indesejáveis. Não obstante, constata-se que as alterações feitas no decorrer das aulas foram adequadas à maximização possível do aproveitamento dos alunos.

### 1.2.7 Aulas de 22 de maio

As aulas de 22 de maio cingiram-se à realização de uma ficha de funções com uso da calculadora gráfica (Anexo 4). Segue-se um resumo da planificação das aulas (Tabela 7).

*Tabela 7 – Resumo da planificação das aulas de 22 de maio*

<b>Tema e Tópico</b>	Estudo de funções elementares e operações algébricas com funções: Função módulo
<b>Sumário</b>	Realização de uma ficha de funções com uso da calculadora gráfica.
<b>Objetivos (AEs)</b>	Tirar partido da utilização da tecnologia nomeadamente para experimentar (...), comunicar (...). Utilizar a tecnologia para fazer verificações e resolver problemas numericamente (...) Utilizar a tecnologia gráfica (...) no estudo de funções (...).
<b>Recursos</b>	Calculadora gráfica.
<b>Momentos das aulas</b>	Esclarecimento de dúvidas do TPC; Realização de uma ficha de funções com uso da calculadora gráfica.
<b>Metodologia adotada</b>	No momento da implementação da ficha de funções com uso de calculadora gráfica, é necessário apoiar os alunos, procurando um equilíbrio entre a liberdade dada aos mesmos na resolução dos exercícios e problema e a monitorização para que a atividade seja benéfica. Nesse sentido, deve-se prestar auxílio aos alunos que tenham dificuldades procedimentais relativas ao uso da calculadora e conceituais no que toca aos conteúdos da disciplina.

### **Reflexão**

As aulas decorreram conforme o esperado. Os alunos empenharam-se na realização das várias questões contidas na ficha e foi possível que estes explorassem os conceitos matemáticos e a técnicas matemáticas subjacentes às mesmas.

Mediante o funcionamento natural das aulas, não foi possível realizar a última questão da ficha. No entanto, considera-se ter sido benéfico que os alunos dispusessem de mais tempo para explorarem ao máximo as questões realizadas e para redigirem resoluções completas e bem fundamentadas.

Desta forma, foram cumpridos os objetivos previamente estipulados para as aulas e estas foram ao encontro das competências que se pretendia desenvolver.

### 1.3 Prática pedagógica no 9.º ano

Durante o ano letivo, lecionaram-se 4 aulas de 45 minutos, assistidas pelo professor cooperante da turma secundária (do 9.º ano) e pelo colega de estágio. As 4 aulas foram lecionadas no 2.º período, nos dias 21 e 28 de março (um bloco de duas aulas por dia), tendo como tópico principal a proporcionalidade inversa.

A turma era constituída por 19 alunos. O ambiente era de alguma agitação que era, ainda assim, rapidamente controlada pelo professor cooperante. O aproveitamento da turma era muito baixo. Não obstante, era possível criar um ambiente de trabalho com a turma, independentemente de se tratar de uma aula de natureza mais clássica ou, em oposição, mais inovadora.

#### 1.3.1 Aulas de 21 de março

As aulas de 21 de março centraram-se no conceito de proporcionalidade inversa. Segue-se um resumo da planificação das aulas (Tabela 7).

*Tabela 7 – Resumo da planificação das aulas de 21 de março*

<b>Tema e Tópico</b>	Funções: Função de proporcionalidade inversa
<b>Sumário</b>	Revisões sobre a função afim; Proporcionalidade inversa.
<b>Objetivos (AEs)</b>	Representar e interpretar graficamente uma função (incluindo a de proporcionalidade inversa e a do tipo $y = ax^2, a \neq 0$ ), e relacionar a representação gráfica com a algébrica e reciprocamente.
<b>Recursos</b>	Manual. Ficha de suporte a uma atividade prática.
<b>Momentos das aulas</b>	Revisão sobre os diferentes casos de função afim: constante, linear e geral (com ênfase na função linear, de

	<p>proporcionalidade direta, para estabelecer a ponte com o novo conceito);</p> <p>Exemplos práticos visando à introdução natural e intuitiva ao conceito de relação de proporcionalidade inversa;</p> <p>Atividade prática exploratória (Anexo 6), na qual os alunos descobrem por si próprios o comportamento de uma relação de proporcionalidade inversa, bem como a forma da representação gráfica de uma função de proporcionalidade inversa;</p> <p>Generalização e formalização do conceito de função de proporcionalidade inversa no quadro.</p>
<b>Metodologia adotada</b>	<p>As aulas foram de caráter exploratório quase na totalidade, pelo que o professor estagiário circulou pelos diferentes grupos durante a realização da atividade prática, tirando as dúvidas pertinentes que não comprometessem a aprendizagem dos alunos.</p>

### Reflexão

As aulas decorreram conforme o expectável. Grande parte dos alunos esteve envolvida, tanto no momento de exposição, como no da realização da atividade.

A turma beneficiaria se tivesse havido mais tempo para o momento final da segunda aula, quando foi feita a generalização do conceito, mas considera-se ter havido mais vantagens ao permitir que os alunos despendessem do tempo necessário para a resolução da tarefa na sua íntegra.

#### 1.3.2 Aulas de 28 de março

As aulas de 28 de março centraram-se, novamente, no conceito de proporcionalidade inversa, desta vez focando-se na resolução de exercícios e/ou problemas. Segue-se um resumo da planificação das aulas (Tabela 8).

*Tabela 8 – Resumo da planificação das aulas de 28 de março*

<b>Tema e Tópico</b>	Funções: Função de proporcionalidade inversa
<b>Sumário</b>	Resolução de exercícios.

<b>Objetivos (AEs)</b>	Representar e interpretar graficamente uma função (incluindo a de proporcionalidade inversa e a do tipo $y = ax^2, a \neq 0$ ), e relacionar a representação gráfica com a algébrica e reciprocamente.
<b>Recursos</b>	Manual.
<b>Momentos das aulas</b>	Recordar a expressão de uma função de proporcionalidade inversa (salientando a constante de proporcionalidade e o seu significado); Resolução de exercícios.
<b>Metodologia adotada</b>	As aulas centraram-se quase na totalidade na resolução de exercícios na carteira, autonomamente ou com o colega, pelo que o professor estagiário encontrou-se, intermitentemente, a circular pela sala a esclarecer dúvidas ou no quadro a apresentar resoluções.

### **Reflexão**

As aulas decorreram num ambiente calmo e os alunos trabalharam, ultrapassando as expectativas, principalmente no que concerne aos alunos que revelavam menos empenho nas aulas da disciplina. Constatou-se que a metodologia, ainda que tenha assentado numa abordagem clássica (começando com uma curta revisão do conceito alvo de estudo e passando posteriormente à realização de exercícios) foi eficaz.

Numa hipotética repetição das aulas, tentar-se-ia expor algumas das resoluções dos exercícios realizadas pelos alunos, solicitando que estes fossem ao quadro, no sentido de criar um ambiente de reflexão e discussão construtiva que abarcasse toda a turma. Ainda que esta estratégia conduzisse a uma redução do número de exercícios realizados, pensa-se que traria vantagens.

### **1.4 Prática não letiva**

Na presente secção, são descritas as atividades não letivas nas quais o professor estagiário participou ao longo do ano letivo.

#### *1.4.1 XLI Olimpíadas Portuguesas da Matemática (9 de novembro)*

No dia 9 de novembro, dezoito alunos da escola participaram nas XLI Olimpíadas Portuguesas de Matemática (<https://olimpiadas.spm.pt/index.php?id=68&tipo=1>). Os professores estagiários tiveram a oportunidade de integrar a organização desta iniciativa.

Num primeiro momento, no seguimento da realização da prova, cada um corrigiu metade das provas realizadas na escola, sob aprovação posterior do professor cooperante. Posteriormente, criaram o ficheiro com a lista compilada dos participantes e os respetivos resultados, enviando, por fim, os mesmos para a entidade organizadora.

Foi uma experiência gratificante participar nesta iniciativa e colaborar com o professor dinamizador da mesma na escola em causa.

#### *1.4.2 Concurso Bebras (10 de novembro)*

O concurso *Bebras – Castor Informático* (<https://bebras.dcc.fc.up.pt>) é uma iniciativa que alberga inúmeros países e que procura fomentar o desenvolvimento de competências associadas ao pensamento computacional.

No contexto da implementação do concurso na escola, os estagiários fizeram parte do grupo dinamizador, tomando parte, nomeadamente, na inscrição dos alunos participantes, nos momentos de aplicação do enunciado, na introdução das respostas dos alunos na plataforma indicada para o efeito e na comunicação com a entidade organizadora da iniciativa. Tudo isto sempre sob aval do professor cooperante.

Integrar esta iniciativa interdisciplinar foi enriquecedor, por um lado, pelas vantagens que a mesma traz às aprendizagens dos alunos e ao desenvolvimento de competências em específico (presentes nas recentes Novas Aprendizagens Essenciais de Matemática do Ensino Secundário) e, por outro lado, pela oportunidade de tomar conhecimento da logística necessária à implementação deste tipo de projeto.

#### *1.4.3 EXPO FCT NOVA (19 de abril)*

Os professores estagiários acompanharam as turmas que foram à EXPO FCT NOVA. Seguiram de perto a comunicação que foi sendo feita entre o professor cooperante e os organizadores da iniciativa e estiveram presentes na entrega e recolha das autorizações dos Encarregados de Educação.

No dia da visita de estudo foram com as turmas participantes e os restantes professores acompanhantes, fazendo o trajeto desde a Escola até à Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova. No local da visita, depois de serem distribuídos os *kits* a que os alunos tinham direito, estes foram livres de fazer um de três percursos, nomeadamente, Percurso Marie Curie, Percurso Albert Einstein e Percurso Nikola Tesla. Cada um dos percursos procura despertar o interesse e dar as primeiras luzes de um conjunto de áreas do conhecimento, naturalmente associadas às áreas da ciência nas quais cada um dos cientistas que dão nome aos percursos se especializou, respetivamente, Química, Física e Engenharia. No fim da visita de estudo as turmas e os professores acompanhantes reuniram-se no ponto de encontro previamente marcado e fizeram juntos o percurso de regresso para a escola.

Como consequência desta visita de estudo, as turmas participantes realizaram um trabalho de grupo a apresentar perto do final do 3.º período. O trabalho consistia num póster científico que abordava um tema escolhido pelos alunos em articulação com, pelo menos, dois dos seguintes temas científicos: o método científico; a relação entre as ciências e a tecnologia; e, por último, os modelos matemáticos. Os professores estagiários estiveram igualmente presentes na apresentação dos pósteres.

#### *1.4.4 Tarefa de Geometria Sintética no Plano com o GeoGebra (7 de junho)*

Os estagiários redigiram uma tarefa e a respetiva proposta de resolução (Anexo 7) para o Grupo de Recrutamento 500. Esta tarefa aborda um tema que ganhou relevância recentemente, ao ser contemplado nas Novas Aprendizagens Essenciais do Ensino Secundário: a Geometria Sintética no Plano.

O objetivo da tarefa, cujo primeiro público-alvo concerne os professores do Grupo de Recrutamento 500, é o de familiarizar os docentes com as ferramentas do *GeoGebra*. Fica como sugestão a aplicação desta tarefa às turmas dos docentes, com vista a que os alunos possam, também eles, familiarizar-se com as ferramentas deste *software* de geometria dinâmica que trás benefícios às suas aprendizagens.

A apresentação da tarefa ao Grupo de Recrutamento 500 estava prevista para o dia 7 de junho, tendo sido adiada para data a combinar, devido a reuniões mais prementes. A sessão está prevista para uma duração de uma hora e meia: meia hora para a contextualização da tarefa (nomeadamente, no que toca às Novas Aprendizagens Essenciais do Ensino Secundário) e a restante hora para aplicação da tarefa e partilha de resoluções.

Dar esta contribuição para o Grupo de Recrutamento 500 acrescentou valor ao estágio pedagógico, na medida em que foi possível compreender de um ponto de vista prático como funciona o trabalho colaborativo nesta estrutura escolar.

### **1.5 Reflexão sobre a Prática Pedagógica Supervisionada**

As vivências e o conhecimento acumulados neste ano letivo de estágio pedagógico foram importantes para a vida docente que se seguirá. Foi enriquecedor ter um primeiro contacto com a vertente mais organizacional do ambiente escolar, no que toca à burocracia, às reuniões e ao funcionamento de cada estrutura escolar. Houve igualmente benefícios na oportunidade de perceber a dinâmica da carreira docente e vivenciá-la de um lugar no qual há tempo e espaço para reflexão e se tem o parecer de pessoas experientes. Nomeadamente, do professor cooperante e dos professores da FCT, a professora Alexandra Rodrigues e o professor António Domingos.

Considera-se importante o contacto que se teve com as estruturas escolares, como é exemplo a integração nas diferentes reuniões. É certo que cada agrupamento escolar tem o

seu funcionamento. No entanto, compreender como as informações e medidas atuantes vão chegando e se vão especificando da estrutura mais geral (como o corpo docente) às mais particulares (como os Grupos de Recrutamento ou, ainda, os Grupos de Articulação Curricular), é benéfico e dá significado a estas estruturas e ao objetivo comum da comunidade escolar. Os assuntos abordados nas diferentes reuniões acrescentaram valor à experiência docente, em particular os assuntos tratados nas reuniões de conselho de turma. Foram ilustrativos do impacto que uma ação integradora pode ter na vida escolar de um aluno, bem como no seu sucesso e na sua motivação.

No tocante às aulas lecionadas, estas constituíram um marco essencial na aprendizagem do estagiário. Passar pela experiência de lecionar uma aula e ter a possibilidade de refletir, tanto individualmente como com o núcleo de estágio, considera-se crucial na desconstrução de ideias castradoras para o processo ensino-aprendizagem e na fomentação de uma atitude inovadora, construtiva e otimista. A carreira docente é repleta de nuances (a organização, a pedagogia, os laços estabelecidos com os alunos) e o professor tem a autonomia de encontrar um equilíbrio que favoreça o seu exercício profissional e a aprendizagem e bem-estar dos alunos. As aulas lecionadas neste ano letivo, ainda que tenham consistido numa pequena amostra daquilo que será a vida docente, trouxeram a possibilidade de experienciar a busca por este equilíbrio. Apesar destas aulas terem contemplado momentos pontuais de atividades exploratórias, foram maioritariamente de carácter expositivo. Este facto, aliado à percepção de que esta é uma abordagem menos adequada para o processo de aprendizagem de alguns alunos, levou a concluir que a prática profissional que se avizinha será caracterizada pela implementação de um ensino de índole exploratória, que tenha o foco no aluno. Nesta vertente de ensino, o objetivo é levar o aluno a fazer uso dos conhecimentos previamente adquiridos e a descobrir por si próprio os novos conceitos e as relações entre os mesmos, sob a monitorização do professor. Esta abordagem, para além de ir ao encontro da tese defendida neste projeto de investigação, tem a vantagem de moldar o currículo ao perfil de cada aluno, ao invés do contrário.

As turmas acompanhadas possuíam características extraordinariamente diferentes como, aliás, será de esperar ao longo dos anos que se seguem. Se, por vezes, pode ser frustrante descobrir as metodologias e/ou medidas atuantes que conquistem e consigam levar a turma onde se pretende, parece, também, ser a parte mais gratificante e entusiasmante da vida profissional de um professor. Este ano letivo permitiu o desenvolvimento das competências de organização, de capacidade de raciocínio posicional (mais concretamente, de encarar a perspetiva do aluno), de conhecimento sobre as práticas de ensino, de avaliação e de classificação, ao poder pôr-se em prática ideias pessoais ou de outrem, que foram confirmadas ou desconstruídas.

Desta forma, com todo o conhecimento adquirido e com todo o conhecimento que se descobriu que está por adquirir, o estágio pedagógico foi simultaneamente disruptivo e edificante, ao clarificar como se processa a vida docente em todas as suas dimensões.



**SEGUNDA PARTE**



## 1. Introdução

O tema de estudo escolhido, as conexões matemáticas, sempre conferiu um aspeto de relevo e de interesse no percurso do investigador, inclusivamente quando este desconhecia o conceito, realidade que mudou apenas muito recentemente. A multiplicidade de maneiras que existem de encarar objetos e/ou situações matemáticas era o propulsor para querer ir mais além, o que lhe despertava a motivação intrínseca e o gosto inerente à matemática. A visão holística e enquadrada da matemática, em detrimento da estereotipada visão isolada e procedimental, sempre lhe fez sentido. A seguinte passagem, na qual o investigador se vê refletido, confirma esta inclinação:

a utilização de estratégias matemáticas locais situadas no contexto são mais eficazes do que os algoritmos que são em geral ensinados na escola — estes são procedimentos genéricos poderosos mas que acabam por ter dificuldade em se adequar a muitos contextos extra-escolares (Canavarro, 2017, p. 41).

Na perspetiva de um formando a frequentar formação para professor de matemática este interesse foi refinado e o relevo das conexões matemáticas adquiriu outras proporções. Um dos pontos de viragem consistiu num maior fascínio pelas conexões matemáticas externas à matemática (isto é, as conexões estabelecidas entre conceitos matemáticos e outras áreas do saber), quando na perspetiva de aluno as conexões internas sempre o haviam cativado mais (abordar-se-á estes dois tipos de conexões em maior detalhe).

Há, ainda, outros três aspetos propulsores à escolha do tema, para além do gosto intrínseco pelo mesmo. Nomeadamente: a procura pela visão holística do ensino; um processo ensino-aprendizagem centrado no aluno; e a necessidade de se ter expectativas altas dos alunos.

O primeiro dos aspetos é algo que surge em qualquer projeto educativo, bem como nas Aprendizagens Essenciais e no seu enquadramento com o Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória. As conexões matemáticas, neste caso as externas, albergam um enorme potencial para a interdisciplinaridade e para a compreensão da utilidade da Matemática no quotidiano. Canavarro (2017) sintetiza, da seguinte forma, as vantagens do recurso às conexões para a aprendizagem dos alunos, referindo que estas conduzem: a uma compreensão mais profunda; a uma conceção da Matemática provida de sentido; ao desenvolvimento de competências transversais; a uma visão favorável sobre a Matemática; e, por último, à aprendizagem de conteúdos que extravasam a disciplina.

O segundo aspeto é de grande importância, uma vez que o estabelecimento de conexões matemáticas toma lugar no processo mental de cada um. Ora, se o pretendido é promover a aquisição de conexões matemáticas nos alunos, é importante centrar o processo nos mesmos e moldar o ensino-aprendizagem em torno destes, nomeadamente na escolha

e/ou na redação de tarefas que desempenhem um papel auxiliar. Falar-se-á dos tipos de tarefas (bem como das suas características) que, até hoje, aparentam ser mais eficientes na promoção de conexões matemáticas.

Por último, um assunto que traça tangentes no campo da psicologia, mas que já tem demonstrações suficientes da sua veracidade: ter expectativas elevadas de outras pessoas desencadeia um conjunto de comportamentos que aumenta a probabilidade dessas pessoas alcançarem bons resultados. O historiador holandês Bregman (2019) aborda este assunto de forma concisa. Apesar de apresentar a realidade para a generalidade das pessoas, revela premência ao tocar no caso da educação, referindo um estudo feito com uma turma (Ellison, 2015). As conclusões são simples: os alunos que foram aleatoriamente escolhidos como inteligentes tiveram melhor desempenho, uma vez que lhes foi prestado um melhor serviço de ensino. Outros estudos que comprovam a teoria são referidos, alguns dos quais extravasam o campo da educação (Eden, 2016; Jussim & Harber, 2005; Silverman, 1988; Weinstein, 2018).

Com vista ao estudo da influência e do benefício do uso de conexões matemáticas na compreensão dos conceitos do tópico de funções por parte dos alunos, este trabalho de investigação foi orientado pelas seguintes questões de investigação:

1. Que estratégias usam os alunos na realização de tarefas que envolvem conexões matemáticas entre diferentes conceitos, processos e representações matemáticas?
2. Quais os momentos da realização de tarefas com conexões matemáticas nos quais os alunos manifestam mais dificuldades ou, em contrapartida, mais destreza?
3. De que forma contribuem as conexões matemáticas para a compreensão dos alunos sobre os conceitos do tópico de funções e para a manipulação dos mesmos?

No tocante à organização do documento, após este breve primeiro capítulo de introdução, seguem-se outros quatro capítulos: o segundo, onde está contemplada a fundamentação teórica, que constitui o referencial teórico do trabalho de investigação e da análise dos dados; o terceiro, no qual é justificada a metodologia utilizada no âmbito da recolha e do tratamento de dados; o quarto, onde se encontram a descrição e a análise dos dados recolhidos no âmbito do presente trabalho de investigação; e, por último, o quinto capítulo, no qual são expostas as conclusões da investigação realizada.

## 2. Fundamentação teórica

Este capítulo procura servir de alicerce à investigação que teve lugar com o objetivo de compreender que papel desempenham as conexões matemáticas na compreensão dos alunos sobre os conceitos do tópico de funções. Neste seguimento, referenciam-se, por um lado, autores considerados marcantes na evolução do conceito de conexões matemáticas e, por outro, autores cujas ideias inerentes a este conceito salientam a sua relevância, fundamentando a recolha e a interpretação dos dados recolhidos aquando do trabalho de investigação. Para além das conexões matemáticas, que são o epicentro deste trabalho, fundamenta-se a importância das tarefas matemáticas no processo aprendizagem-ensino, uma vez que estas são indispensáveis para a metodologia estipulada. Parte significativa deste tópico passa por expor o que se consideram boas características observáveis em tarefas matemáticas.

### 2.1 Conexões matemáticas

Silva (2010) refere que um dos registos mais antigos que faz menção do uso de conexões matemáticas toma forma num trabalho do matemático Felix Klein, datado de 1908. Como tal, há evidências de que este conceito já foi introduzido há, pelo menos, mais de um século. Por outro lado, Canavarro (2017) menciona a importância da adoção de um termo específico para o conceito de conexões matemáticas por parte do NCTM no ano de 2000, defendendo que esta decisão atribuiu às conexões matemáticas um lugar privilegiado, semelhante ao da resolução de problemas ou do raciocínio matemático (Ponte, 2010). Este autor acrescenta que o NCTM contribuiu para o destaque das conexões matemáticas, ao afirmar que:

todos os alunos devem: (i) reconhecer e usar conexões entre ideias matemáticas; (ii) compreender a forma como as ideias matemáticas se interrelacionam e se constroem umas a partir das outras para produzir um todo coerente; e (iii) reconhecer e aplicar a Matemática em contextos exteriores a ela própria (NCTM, 2007, p. 71).

Numa publicação posterior, o NCTM (2017) acrescenta que:

um ensino eficaz da matemática envolve os alunos no estabelecimento de conexões entre representações matemáticas, no sentido do aprofundamento da compreensão dos conceitos e procedimentos matemáticos, e assume-as como ferramentas para a resolução de problemas (p. 24).

Por fim, é notável o crescente valor atribuído às conexões nos documentos das Aprendizagens Essenciais de Matemática do Ensino Básico de 2021, que definem que o

estabelecimento de conexões matemáticas, tanto internas como externas, constitui um dos objetivos gerais para a aprendizagem da matemática (Canavarro et al., 2021).

Para concretizar o conceito de conexão matemática, é benéfico começar por considerar os diversos tipos de conexões matemáticas. Na comunidade científica aparenta haver uma evolução na sua categorização. Primeiramente, surge a seguinte tripartição: conexões dentro da própria matemática, conexões da matemática com a realidade, conexões da matemática com outras áreas científicas (Boavida et al., 2008). Outros autores, eventualmente, sugerem uma bipartição do primeiro tipo, as conexões entre ideias matemáticas de um mesmo tema e entre ideias matemáticas de temas distintos (Ponte, 2010). Por fim, autores como Ferreira (2012) sistematizam a categorização da seguinte forma:

1. Conexões matemáticas dentro da matemática
  - a) entre ideias de um mesmo tema
  - b) entre ideias de temas distintos
2. Conexões matemáticas fora da matemática
  - a) com a realidade
  - b) com outras áreas científicas

À margem desta categorização, Businskas (2008) apresenta uma definição de conexão matemática de caráter mais mental ao estipular que uma conexão consiste num objeto mental passível de memorizar e de ser matéria de discussão. Jacinto e Pires (2019) reiteram esta definição e afirmam que este objeto mental pode ser uma ferramenta a usar futuramente em raciocínios matemáticos. Assim, o estabelecimento de conexões matemáticas consiste, na ótica da primeira autora, num processo mental que tem por base reconhecer ou estabelecer ligações entre ideias matemáticas (Businskas, 2008). Canavarro (2017) também aborda um tipo de conexões sobre as quais afirma não ser dado tanto destaque, as conexões que se referem às diferentes fases de desenvolvimento das ideias e conceitos matemáticos. Este tipo de conexões está intrinsecamente ligado ao processo ensino-aprendizagem e é frequentemente enunciado como a consideração do conhecimento prévio e/ou adquirido dos alunos.

Desta forma, para efeitos do estudo realizado, entende-se por “conexão matemática” uma relação passível de estabelecer entre um conceito matemático e qualquer outro conceito, seja ele igualmente matemático, situação na qual se está perante uma conexão interna, ou não matemático, estando-se, neste caso, perante uma conexão externa.

De regresso à categorização acima, Ferri (2010) dá particular importância às conexões com a realidade, preconizando que a matemática deve, ao invés de ser vista como uma coleção de receitas predefinidas, ser sim um potencial catalisador da compreensão e interação com o mundo que nos rodeia. Esta investigadora salienta, por estes motivos, a importância da modelação matemática para o estabelecimento de conexões matemáticas.

Atendendo à visão da generalidade dos autores, a importância e o papel de relevo que as conexões matemáticas desempenham é inquestionável. À luz das afirmações contempladas no documento das Aprendizagens Essenciais do Ensino Básico de 2021, Mendes (2022) corrobora que:

as conexões internas auxiliam os alunos a desenvolver uma compreensão aprofundada das ideias e conceitos matemáticos relacionando os diferentes temas entre si. Já as conexões externas com outras áreas do saber ou com contextos da realidade permitem aos alunos perceber que podem usar ideias e conhecimentos matemáticos para compreender e agir sobre outras disciplinas ou sobre o meio que os rodeia (p. 6).

Além disso, nas Aprendizagens Essenciais do Ensino Secundário, homologadas em janeiro de 2023, explicita-se que:

a resolução de problemas, tal como a modelação, devem constituir o contexto para o estabelecimento de conexões entre diferentes conceitos e áreas da Matemática, assim como entre a Matemática e outras áreas do saber, permitindo uma abordagem integrada e significativa para os alunos na sua atividade matemática (Silva et al., 2023, p. 5).

Neste seguimento, as Aprendizagens Essenciais do ensino secundário realçam a riqueza das conexões matemáticas no desenvolvimento de competências como o espírito crítico e o recurso à matemática em contextos reais. O NCTM (2007) também não deixa margem para dúvidas ao afirmar que encarar e manipular objetos matemáticos sob diferentes pontos de vista confere à matemática grande parte do seu poder.

É útil, neste momento, tomar alguns exemplos para cada tipo de conexões, atendendo à categorização supramencionada, bem como comentar alguns deles, quando pertinente. Referir-se-ão os tipos 1 e 2 por conexões *intramatemáticas* e *extramatemáticas*, respetivamente, adotando a terminologia usada por alguns autores (Blum et al., 2007; Noss et al., 1997).

i. Sobre as conexões intramatemáticas dentro de um mesmo tema surgem exemplos como as representações dos números racionais sob as formas decimal e fracionária ou as representações algébrica e trigonométrica dos números complexos (Ponte, 2010).

ii. No que concerne às conexões intramatemáticas entre temas distintos os espaços geométricos são um bom exemplo, uma vez que relacionam a álgebra e a geometria de uma forma natural. Os números complexos voltam a ser um ótimo recurso de conexões neste outro tipo, relacionando a álgebra com transformações geométricas (nas operações de números complexos) ou com trigonometria (na transição entre as diferentes representações), havendo mais relações, como salienta Ponte (2010). O surgimento dos números complexos no 10.º ano

das novas Aprendizagens Essenciais do ensino secundário é revelador da importância que este tema tem para o estabelecimento de conexões matemáticas e na sua capacidade propulsora de aprendizagens enriquecedoras.

iii. Quanto às conexões extramatemáticas com a realidade, Ponte (2010) refere que a estatística constitui um tema repleto de possibilidades para as trabalhar, reforçando a vantagem em traduzir por números e/ou gráficos situações da vida real, inclusivamente recorrendo a dados atinentes aos alunos. Segundo Mendes (2022), este tipo de conexões abarca um grande potencial para associar a matemática à cultura ou à história. A título de exemplo, os islâmicos, já no séc. IX, usavam resoluções de triângulos para determinarem a direção de Meca e poderem rezar segundo os seus preceitos (Estrada et al., 2000). Além disto, as conexões da matemática com a realidade apresentam a face mais utilitária da mesma, que contém interesse para alguns alunos. A modelação e a otimização são áreas da matemática pertinentes neste tipo de conexões, bem como o uso das tecnologias (em particular da calculadora gráfica), uma vez que conduzem a uma aproximação natural entre o modelo matemático (...) e o mundo real (Duarte, 2010).

iv. Restam as conexões extramatemáticas com outras áreas do saber. A ligação da matemática com a física é uma das mais naturais, surgindo em situações desde a descrição matemática da cinemática de um corpo, onde se recorre a vetores e a operações com os mesmos, a questões relacionadas com erros de aproximação. Apesar de se ter invocado a disciplina mais tradicional de se associar à matemática, pode-se ir mais longe, associando-a a disciplinas de línguas. Por exemplo, de entre as competências necessárias para a estruturação de um texto encontra-se o pensamento algorítmico (ou computacional), competência recentemente adicionada às Aprendizagens Essenciais (tanto do ensino básico como do secundário).

Estes são alguns dos múltiplos exemplos de cada tipo de conexões matemáticas, bem como do conjunto de competências que o seu estabelecimento permite desenvolver. No entanto, é necessário proporcionar experiências de aprendizagem conducentes ao desenvolvimento dessas conexões, momento onde o papel do professor é crucial (Cebola, 2011). Neste sentido, procurar-se-á explorar os diferentes tipos de tarefas nas páginas seguintes e, entre estes, quais os mais adequados e férteis para a promoção do estabelecimento de conexões matemáticas.

## **2.2 Tarefas e recursos promotores do estabelecimento de conexões matemáticas**

O cerne desta secção já foi superficialmente mencionado. Ainda assim, é importante dedicar-lhe mais algumas linhas, uma vez que as tarefas propostas e os recursos subjacentes são prementes nos momentos em que o professor pretende promover o estabelecimento de

pontes e relações entre conceitos, procedimentos e representações (Jacinto & Pires, 2019). Cavaco (2015) confirma esta realidade, ao afirmar que:

a seleção das tarefas é um aspeto que se reveste da maior importância. O professor deve ser capaz de analisar se uma tarefa é ou não adequada aos seus alunos, deve estar disponível para os ouvir e interpretar os erros emergentes e/ou pensamento incompleto dos alunos, de forma a promover o desenvolvimento das diversas competências. Assim, nesta linha de pensamento, a escolha de cada tarefa exige o conhecimento matemático específico, mas também um conhecimento daquilo que os formandos sabem (p. 70).

Jacinto e Pires (2019) referem que, entre os tipos de tarefas que são propícias para desenvolver pensamento matemático e o estabelecimento de conexões matemáticas, destacam-se os problemas, as explorações, as investigações ou as tarefas de modelação. Canavarro (2017) destaca a modelação matemática, descrevendo este tipo de atividade como um processo que “consiste essencialmente em matematizar, através de um objeto matemático, uma dada situação de modo a ficar tratável, retirando dessa matematização a possibilidade de agir sobre a situação real, tirando benefícios desse uso da Matemática” (p. 40). Independentemente do tipo de tarefa pelo qual se opta, o professor é o agente mais importante nos processos de redação/escolha e subsequente implementação da tarefa em busca dos resultados pretendidos (Ponte, 2014).

É expectável que uma tarefa considerada boa para a promoção e para o desenvolvimento de conexões matemáticas albergue determinada(s) característica(s). A literatura que aborda este assunto é vasta, existindo uma multiplicidade de possíveis características, entre estas ressaltam as seguintes:

- i. a presença de um elevado nível de exigência cognitiva (Stein & Smith, 1998);
- ii. a exploração de representações múltiplas e das suas inter-relações (Canavarro, 2017; NCTM, 2017);
- iii. o recurso a tecnologias, nomeadamente à calculadora gráfica, a *software* de geometria dinâmica ou a sensores (Duarte, 2010; Santos-Trigo, 2004; Silva, 2010; Yao & Manouchehri, 2019);
- iv. a presença de múltiplas soluções (Leikin & Levav-Waynberg, 2007).

Considera-se profícuo expandir o que foi dito para algumas das características listadas. A primeira destas aparenta ser a mais transversal ao tipo de tarefas promotoras de conexões matemáticas. Desde a resolução de problemas a tarefas de exploração, ou do uso de tecnologias à modelação, todos estes tipos de tarefa conferem um elevado grau de exigência cognitiva, quando bem operacionalizadas. Assim, fica à vista um ponto de toque com uma

realidade abordada na introdução: a necessidade (ou, pelo menos, o benefício) de se ter expectativas elevadas dos alunos.

Sobre a segunda característica, Canavarro (2017) afirma que a representação de conceitos matemáticos constitui, por um lado, uma ferramenta de comunicação matemática e, por outro lado, uma oportunidade para encarar objetos ou conceitos matemáticos sob diferentes “lentes”, permitindo uma compreensão profunda e diversa dos mesmos. Não obstante, a autora reforça que não é suficiente conhecer diferentes representações sobre uma ideia. A compreensão profunda e significativa dessa ideia advém do estabelecimento de pontes entre as diferentes representações disponíveis e da capacidade de interpretar umas à luz das outras.

No tocante ao recurso a tecnologias, Paiva (2019) salienta a importância do *feedback* visual providenciado pelo computador, mais especificamente num ambiente de Geometria Dinâmica, no desenvolvimento do raciocínio e conhecimento matemático. Este autor afirma que as eventuais dessintonias entre o que é pretendido pelo aluno e o que este observa no ecrã promovem a procura por novas estratégias para a resolução da tarefa proposta. Duarte (2010) sublinha que as tecnologias proporcionam atividades dinâmicas e interativas que evidenciam conexões matemáticas. Estas ferramentas providenciam a quebra de algumas fronteiras artificiais tipicamente experienciadas entre os diferentes tópicos da matemática (NCTM, 2007). Além disso, a tecnologia potencia o contacto com e a manipulação de distintas representações de uma dada ideia matemática, bem como a capacidade de transitar de uma (representação) para a outra. A calculadora gráfica é um instrumento a valorizar neste âmbito, aspeto que constitui um ponto de toque com a segunda característica mencionada. O uso de sensores, fortemente associado à prática da modelação matemática, é uma fonte igualmente rica de conexões matemáticas, visto que este instrumento proporciona uma ligação robusta entre o modelo matemático e o modelo real (Duarte, 2010). O autor afirma, ainda, que o recurso a sensores conduz os alunos a uma compreensão mais profunda e plena da situação real que é alvo de estudo, uma vez que os dados recolhidos são muito próximos dos valores reais.

### **2.3 Papel desempenhado pelas tarefas matemáticas**

Abordaram-se tarefas e subjacentes recursos eficazes para o estabelecimento de conexões matemáticas. Na presente secção discute-se o papel desempenhado por este instrumento fulcral na aprendizagem matemática: as tarefas matemáticas. O NCTM (2017) expõe que a investigação relativa ao uso de tarefas matemáticas que decorreu nos últimos vinte anos culminou em três conclusões: que diferentes tarefas proporcionam diferentes oportunidades à aprendizagem dos alunos; que tarefas que impliquem pensamento e raciocínio de nível elevado produzem mais aprendizagem do que tarefas procedimentais; e que as tarefas de elevada exigência cognitiva são as de mais difícil implementação.

Acrescenta, ainda, que o professor de Matemática deve colocar tarefas aos alunos que sejam baseadas (i) em Matemática correta e significativa; (ii) no conhecimento das compreensões, interesses e experiências dos alunos; e (iii) no conhecimento das diversas maneiras como diferentes alunos aprendem Matemática. Além disso, aponta que as tarefas a propor devem:

- Envolver os alunos em atividades intelectuais;
- Desenvolver as compreensões e capacidades matemáticas dos alunos;
- Estimular os alunos a fazer ligações e a desenvolver um quadro coerente de ideias matemáticas;
- Exigir a formulação e resolução de problemas e o raciocínio matemático;
- Promover a comunicação acerca da Matemática;
- Representar a Matemática como uma atividade humana em constante desenvolvimento;
- Promover o desenvolvimento da disposição de todos os alunos para fazer Matemática.

As expectativas que um professor tem dos seus alunos é um aspeto importante, como foi já mencionado algumas vezes. Quando a comunidade científica considera que as melhores tarefas são as que apresentam exigências cognitivas de nível elevado, assistimos a uma confirmação desse aspeto, salientando, por um lado, o interesse da realização de tarefas e, por outro, a premência para que estas possuam boas características por forma a serem ricas para a aprendizagem dos alunos. Neste âmbito, Stein e Smith (1998) apresentam uma lista de fatores associados com a manutenção de exigências cognitivas de nível elevado que pode ser traduzida nas boas práticas (por parte do docente) abaixo listadas:

- Apoiar o pensamento e o raciocínio do aluno;
- Dar ao aluno os meios necessários para a avaliação do seu próprio progresso;
- Estimular justificações e generalizações através do questionamento e de *feedback*;
- Contemplar o conhecimento prévio do aluno aquando da redação da tarefa;
- Estabelecer conexões conceptuais (entre a matemática e a realidade);
- Providenciar o tempo necessário à exploração da atividade.

Pelas razões apresentadas nesta secção, o recurso à realização de tarefas matemáticas no processo de aprendizagem-ensino revela-se útil e frutífero. Um aspeto frequentemente destacado prende-se com o tempo e a ponderação que o professor investe no momento da redação de uma tarefa ou da procura pela mesma. Isto porque não basta a aplicação de uma tarefa por si só, é necessário que esta procure enriquecer deliberadamente a aprendizagem dos alunos e promover o seu desenvolvimento, não só na esfera do conhecimento

matemático, mas também de competências como o pensamento crítico ou o trabalho entre pares (Canavarro, 2017).

No capítulo seguinte, atinente à metodologia aplicada, tem-se em consideração os aspetos referidos nesta secção, nomeadamente no carácter das tarefas criadas e escolhidas. Os dados teóricos presentes na secção anterior desempenharam um papel igualmente importante tanto na interpretação dos dados recolhidos, como nas respostas dadas às questões de investigação.

### **3. Metodologia**

No capítulo que se segue, encontra-se a sustentação teórica que levou à escolha do tipo de metodologia utilizado no trabalho de investigação, bem como os procedimentos metodológicos adotados. Há a salientar a importância das intenções expostas relativamente às tarefas aplicadas (Anexos 8, 9 e 10), uma vez que estas são o objeto principal da recolha de dados.

Com vista ao estudo da influência e do benefício do uso de conexões matemáticas na compreensão dos conceitos do tópico de funções por parte dos alunos, este trabalho de investigação foi orientado pelas seguintes questões de investigação:

1. Que estratégias usam os alunos na realização de tarefas que envolvem conexões matemáticas entre diferentes conceitos, processos e representações matemáticas?
2. Quais os momentos da realização de tarefas com conexões matemáticas nos quais os alunos manifestam mais dificuldades ou, em contrapartida, mais destreza?
3. De que forma contribuem as conexões matemáticas para a compreensão dos alunos sobre os conceitos do tópico de funções e para a manipulação dos mesmos?

#### **3.1 Investigação de natureza qualitativa**

A metodologia utilizada neste projeto de investigação é de natureza qualitativa e de carácter interpretativo (Bogdan & Biklen, 1994), cujas principais características (não necessariamente presentes na sua totalidade) seguem abaixo:

1. O ambiente de recolha é natural e o investigador é o agente principal no tocante à recolha de dados.
2. Os dados recolhidos são de índole interpretativa e/ou descritiva.
3. O enfoque da investigação é o processo, não o produto final ou os resultados obtidos.
4. A análise dos dados segue um cariz indutivo, pelo que o estudo está isento da obrigação de refutar ou confirmar hipóteses.
5. O significado atribuído pelos participantes aos momentos alvo de investigação reveste-se de grande importância.

No presente trabalho de investigação as primeiras quatro características são tidas em conta. O ambiente natural cinge-se à sala de aula.

### *3.1.1 Estudo de caso*

No que concerne à estratégia utilizada, optou-se por efetuar estudos de caso, estratégia metodológica de índole empírica relativa a um determinado fenómeno que tem lugar em contexto real (Yin, 2003). Este é o tipo de estudo mais predominante no âmbito da investigação sobre a educação e o ensino da matemática. Um caso pode ser constituído por um indivíduo, um grupo, uma comunidade, etc. Yin (2003) afirma que o estudo de caso se trata de uma estratégia eficaz quando a investigação em causa procura responder a questões que se prendam com o “como” e o “porquê” e quando esta decorre num ambiente real, no qual o investigador não possui controlo sobre os acontecimentos. Desta forma, este é um tipo de estudo que se adequa à investigação realizada, uma vez que esta decorreu em ambientes naturais, em sessões que ocorreram ou em ambiente de sala de aula ou numa sala à parte.

Yin (2003) identifica três tipos de estudos de caso: (i) o exploratório, no qual o tema em estudo é pouco conhecido e onde os dados não procuram adquirir conhecimento, mas sim identificar problemas e dar resposta aos objetivos do estudo; (ii) descritivo, no qual são obtidos relatos com detalhe; e (iii) explicativo, no qual os dados evidenciam relações de causa-efeito. Na investigação realizada, optou-se pelo terceiro destes tipos de estudo de caso, uma vez que, por um lado, as conexões matemáticas têm sido um alvo do trabalho de vários investigadores e, por outro lado, o estudo procura identificar os efeitos do recurso a conexões matemáticas na compreensão dos conceitos matemáticos por parte dos alunos.

Cohen et al. (2007) defendem haver cinco componentes de investigação de particular relevância aquando da realização de um estudo de caso: (i) as questões de investigação, que contribuem para a construção de uma boa estratégia de investigação. Para evitar desvios do objetivo do estudo, é necessário clarificar a que questões o investigador gostaria de obter resposta; (ii) propostas de estudo, sendo que cada proposta se foca num assunto que deverá ser tido em atenção – por exemplo, as consequências que algo tem no estudo em causa; (iii) a unidade de análise, que define o que é o “caso” no estudo em causa, podendo, como referido acima, consistir numa pessoa, num grupo, numa comunidade, etc; (iv) a relação entre os dados recolhidos e as propostas de estudo, nomeadamente identificar pontos de toque dos dados recolhidos para diferentes casos; e, por último, (v) os critérios para interpretar os dados recolhidos, uma vez que, independentemente da veracidade dos dados recolhidos, alguns destes podem ser irrelevantes para o estudo, comprometendo a eficácia do mesmo.

### *3.1.2 Instrumentos de recolha de dados*

Face à metodologia adotada, é necessário escolher instrumentos de recolha de dados que subsidiem a investigação a realizar. Desta forma, os instrumentos de recolha de dados escolhidos foram os seguintes: i) observação; ii) entrevista; iii) diário de bordo; e iv) recolha documental (Bogdan & Biklen, 1994).

### i) Observação

Neste estudo optou-se por uma observação de índole sistemática, tipo de observação que alberga uma estrutura bem definida sobre a qual são apontados, com tanta minúcia quanto possível, os acontecimentos e a frequência com que estes ocorrem. Além do mais, optou-se, como dito acima, por uma observação participante, na qual se pressupõe que o investigador se situa no ambiente natural dos intervenientes do estudo. O observador, devido à sua característica de participante, está em condições mais favoráveis à compreensão de todas as nuances do grupo alvo de estudo (hábitos, atitudes, interesses, etc.), facto que lhe confere uma maior imparcialidade no momento da recolha de dados (Richardson, 1999). Bogdan e Biklen (1994) reforçam as vantagens deste instrumento, afirmando que a observação participante é aquela em que o investigador se introduz no mundo das pessoas que pretende estudar, tentando conhecê-las e dando-se a conhecer de modo a ganhar a sua confiança, sendo capaz de elaborar um registo de tudo aquilo que ouve e observa, do modo mais natural possível.

O investigador, que desempenhava simultaneamente o papel de professor, interveio sempre que solicitado pelos participantes, não comprometendo a primazia do estudo: que cada aluno desenvolvesse e descobrisse por si mesmo o seu caminho na resolução das tarefas. O investigador procurou fazer uso da vantagem da confiança que a observação participante fomenta entre o investigador e os participantes, mencionada pelos últimos autores. Procurou-se instaurar um maior à-vontade por parte dos participantes em ambiente de entrevista, de maneira a que estes desenvolvessem mais as suas respostas e pontos de vista.

### ii) Entrevista

Segundo Poupart (2008), a entrevista enquanto estratégia de uma metodologia qualitativa, proporciona uma interação rica em possíveis interpretações. Possibilita, ainda, conhecer e compreender obstáculos com os quais os entrevistados se deparam, constituindo este método uma ferramenta de informação resultante da experiência individual de cada participante.

Para Yin (2003) a entrevista é uma das fontes de informação mais importantes nos estudos de caso e Bogdan e Biklen (1994) afirmam que esta tem como função averiguar a forma mediante a qual o entrevistado interpretou os dados fornecidos.

No âmbito do estudo realizado, o objetivo principal das entrevistas foi compreender o raciocínio desenvolvido pelos alunos na resolução das tarefas propostas. A escolha de entrevistas semiestruturadas deve-se à procura pela mitigação de possíveis enviesamentos nos dados recolhidos. Isto porque entrevistas estruturadas, pelo seu carácter menos flexível, podem conduzir excessivamente os dados ou torná-los menos ricos.

O investigador teve o cuidado de manter a sua imparcialidade, ainda que tivesse uma relação interpessoal com os alunos. Desta forma, procurou-se que as questões colocadas tomassem a forma de uma conversa descontraída, fomentando a sinceridade dos

entrevistados e levando-os a expressarem-se livremente e a fundamentarem as suas opiniões, sem que estes se sentissem objeto de avaliação.

### iii) Diário de bordo

Segundo Bogdan e Biklen (1994), o diário de bordo consiste num relato escrito minucioso do que o investigador experiencia no decurso da recolha de dados. Este pode ser acompanhado de reflexões feitas no momento e *a posteriori*.

Considerou-se que o diário de bordo seria um instrumento essencial na recolha de dados uma vez que este permite que qualquer informação considerada importante, ou que possa vir a ser importante no momento da análise de dados, não seja perdida. Além disso, o carácter cronológico desta ferramenta possibilita uma sistematização natural dos dados.

### iv) Recolha documental

A recolha documental desempenha, no âmbito deste projeto de investigação, duas funções. Por um lado, esta consistiu numa pura estratégia de recolha de dados, por outro lado, como referido na secção seguinte, esta funcionou como uma espécie de triagem para a fase seguinte de investigação. Mais especificamente, a escolha dos entrevistados, mediante as observações feitas, tanto nos momentos de resolução das tarefas, como na análise destas resoluções.

## **3.2 Procedimentos metodológicos**

Na presente secção expõe-se as opções tomadas relativamente aos procedimentos metodológicos adotados. Aborda-se a escolha dos participantes, que foram alguns dos alunos da turma principal acompanhada (10.º ano de escolaridade); a operacionalização dos instrumentos de recolha de dados; e as tarefas matemáticas, que constituem o objeto central da recolha de dados.

### *3.2.1 Escolha dos participantes*

A escolha dos participantes teve em consideração a diversidade do grupo de alunos escolhidos, tanto no que respeita ao seu aproveitamento na disciplina, como ao nível de envolvimento do aluno durante as aulas de matemática. O investigador considerou uma característica fundamental que todos os alunos escolhidos tinham de manifestar: uma predisposição para olhar para situações e conceitos matemáticos com profundidade, em busca de uma visão mais ampla e holística dos mesmos e para encarar essas situações e conceitos de vários prismas. Neste sentido, teve-se em conta a participação dos alunos nas aulas, as resoluções de fichas e de testes e o interesse demonstrado em encarar a Matemática como uma disciplina articulada com as restantes disciplinas e áreas do saber.

### *3.2.2 Operacionalização dos instrumentos de recolha de dados*

As três tarefas foram aplicadas nos dias 6, 9 e 23 de março. As datas de aplicação das três tarefas foram previamente combinadas com os alunos. Posteriormente, o investigador realizou uma entrevista semiestruturada individual.

Conforme o previsto, aquando da realização das tarefas, o investigador encontrava-se em regime de observador-participante. Desta forma, observou os alunos e apontou no diário de bordo informações que considerou relevantes, independentemente destas provirem da resolução escrita ou de comentários orais, e, em simultâneo, interveio para esclarecer eventuais questões que não comprometessem a autenticidade dos dados (por exemplo, questões sobre a apresentação das respostas) e para clarificar certas partes do enunciado, no caso da maioria dos alunos não compreender o mesmo (algo que poria em causa a recolha de dados). No fim de cada tarefa procedeu-se à recolha documental: as folhas onde os alunos escreveram as suas resoluções e eventuais folhas para a realização de cálculos auxiliares. Por fim, foram realizadas, nos dias 20 a 28 de abril, entrevistas individuais semiestruturadas (uma entrevista por participante), nas quais o investigador pôde recolher informação que complementou os dados contemplados na resolução dos alunos. Nomeadamente, nos motivos pelos quais o aluno efetuou determinado raciocínio.

### *3.2.3 Tarefas*

A recolha de dados tem como objeto central três tarefas individuais. A primeira, a aplicar em sala de aula a todos os alunos da turma, por uma questão de abrangência, e as segunda e terceira a aplicar a um grupo reduzido de alunos, numa sala à parte, de modo a focalizar os dados. No decorrer tanto da aula como dos segundo e terceiro momentos de aplicação de tarefas, o investigador recorreu à observação direta (participante) e ao diário de bordo como instrumentos de recolha de dados. No fim desses momentos, procedeu à recolha das resoluções realizadas pelos alunos para posterior análise (recolha documental). Em último lugar, realizou entrevistas individuais (semiestruturadas) com as finalidades de compreender o raciocínio do aluno entrevistado, bem como as decisões que tomou aquando da resolução da tarefa, e de concluir de que modo o recurso a tarefas que envolvem conexões matemáticas influenciou a compreensão, a interpretação e o raciocínio do aluno. Um aspeto a atentar é o termo “semirreal”. Uma situação semirreal é uma simplificação de uma situação real de modo a que esta seja tratável ao nível de ensino em questão (Skovsmose, 2000). A título de exemplo, quando é abordada a queda de um paraquedista seria impraticável considerar conceitos como a resistência do ar ou a velocidade terminal com alunos do 10.º ano.

### **Tarefa 1 – A função quadrática em contextos semirreais**

A primeira tarefa (Anexo 8) estabelece pontes entre a função quadrática e a sua representação gráfica com situações em contextos semirreais. Nomeadamente, com áreas de figuras geométricas, com a expressão da energia cinética e com o problema clássico do lançamento do projétil. A tarefa está dividida em três pequenos grupos de questões relacionadas, respetivamente, com esses três assuntos.

O primeiro grupo e a primeira parte do terceiro grupo concernem uma resposta flexível, onde os alunos têm a possibilidade de providenciar justificações, mesmo que a sua resposta não seja a mais intuitiva ou a mais esperada na ótica do professor/investigador. São fornecidas quatro representações gráficas e pede-se ao aluno que escolha qual delas melhor representa uma função que descreve o arremesso de um objeto (portanto, a sua altura em função do tempo) e, ainda, que justifique as razões que o levaram a excluir as restantes representações. Estas características valorizam a reflexão por parte do aluno, independentemente da resposta fornecida.

O segundo grupo, que encara a energia cinética como uma função quadrática, procura que os alunos, através da substituição do parâmetro  $m$  (associado à massa) por diferentes valores, concluam de que forma o coeficiente do termo quadrático influencia a representação gráfica de uma função quadrática. As características deste grupo conferem inúmeras vantagens ao aprofundamento da compreensão dos alunos. Nomeadamente, estabelece pontes entre os conceitos físicos e as suas representações matemáticas (através do uso de letras representativas desses conceitos físicos para as variáveis independente e dependente); promove o uso de raciocínio de nível elevado, na associação dos valores que fazem sentido para as grandezas físicas com o domínio e o contradomínio da função; e fomenta a formulação de conjecturas e a realização de extrapolações, uma vez que é possível concluir que o coeficiente do termo quadrático influencia a proximidade da representação gráfica ao eixo das ordenadas.

A última questão, apesar de ter uma componente analítica mais forte e, portanto, ser um grupo de resposta mais fechada, promove o uso do espírito crítico, ao solicitar que o aluno interprete o resultado dos cálculos efetuados à luz do contexto semirreal em causa e justifique a origem concetual desses mesmos cálculos. Isto permite que um enunciado, ainda que analítico, conduza a um envolvimento mais profundo na resolução das alíneas.

### **Tarefa 2 – A função quadrática em resolução de problemas e em tarefas de modelação**

A segunda tarefa (Anexo 9) é constituída por um problema que aborda uma situação em contexto semirreal e por uma pequena atividade de modelação. Na resolução do problema, que possui um enunciado extenso com a descrição minuciosa da situação em

estudo (a marcação de um livre num jogo de futebol), o aluno é confrontado com os obstáculos que situações problemáticas da vida real podem acarretar, uma vez que os aspetos que influenciam a leitura e resolução da situação são de uma quantidade muito superior à de problemas ou exercícios académicos. Esta característica do primeiro grupo da tarefa leva o aluno a imergir-se no problema, tratando os dados fornecidos e trabalhando-os de forma a poder compreender a situação exposta.

Na atividade de modelação, na qual o objeto de estudo é a equação reduzida da função quadrática ( $y = a(x - h)^2 + k$ ), os alunos devem encontrar valores para os parâmetros  $a$ ,  $h$  e  $k$  de tal forma que parte da parábola representativa da função quadrática se ajuste a uma porção de uma imagem fornecida, mais especificamente, ao arco central da Ponte 25 de Abril. Esta atividade é realizada recorrendo às funcionalidades gráficas *GeoGebra*, usando seletores para os parâmetros acima. Terminada esta parte de modelação, os alunos devem estabelecer pontes entre estes parâmetros e determinadas características da função. Nomeadamente, as coordenadas do vértice da parábola, o contradomínio da função, a equação do seu eixo de simetria da parábola e, por último, a existência de zeros.

### **Tarefa 3 – Funções definidas por ramos em contextos semirreais**

A terceira e última tarefa (Anexo 10), começa com um grupo semelhante ao primeiro grupo da primeira tarefa, na qual o aluno deve escolher uma de quatro representações gráficas. Neste caso, a situação que a função descreve é o trajeto percorrido por um submarino que parte da superfície da água, desce e torna a subir até regressar à superfície. Uma vez mais, o aluno deve justificar as razões que o levaram a excluir as restantes opções.

No segundo grupo, mantendo o contexto semirreal do trajeto descrito por um submarino, procura-se aprofundar a compreensão da função módulo e fortalecer a transição entre a representação que recorre ao módulo e a definição por ramos. Uma vantagem deste grupo reside na possibilidade de várias estratégias de resolução. Mais concretamente, os alunos podem recorrer ao uso de transformações de funções sob a função elementar do módulo ou, por outro lado, podem definir diretamente a função por ramos encarando a subida e a descida do submarino como funções afim.

No último grupo da tarefa, é dado um problema que exige autonomia por parte do aluno. A situação semirreal usada é a da subida (de helicóptero) de um paraquedista e eventual salto em queda livre. Neste problema, por motivos pedagógicos, não se tem em conta os fenómenos físicos da resistência do ar e da velocidade terminal. O aluno deve escolher uma velocidade (constante) de subida do helicóptero, restrita a um valor máximo pelo enunciado, e deve construir a função definida por ramos que descreve a situação, mediante a velocidade escolhida.

### **Características das tarefas**

Na secção 2.2 da fundamentação teórica, discorreu-se sobre boas características para tarefas que visam promover o estabelecimento de conexões matemáticas. Na redação das tarefas aplicadas na investigação considerou-se estas características, que se evidenciam agora.

Quanto aos tipos de tarefa, Jacinto e Pires (2019) referem que, entre outros, as explorações (presentes nas primeira e terceira tarefas), os problemas e as tarefas de modelação (ambos presentes na segunda tarefa), encontram-se entre os (tipos de tarefa) que conduzem ao estabelecimento de conexões matemáticas.

Relativamente às características conducentes ao estabelecimento de conexões matemáticas, a presença de um elevado nível de exigência cognitiva, referida por Stein e Smith (1998), está presente em todas as tarefas. À exceção do terceiro grupo da primeira tarefa, todas as questões envolvem comunicação matemática, justificação de opções tomadas, tratamento de dados e o uso de espírito crítico.

A exploração de representações múltiplas e das suas inter-relações, referida por Canavaro (2017) e pelo NCTM (2017), encontra-se igualmente em todas as tarefas. Nomeadamente, na transição dos contextos semirreais para a linguagem matemática e na insistente relação entre o domínio de uma função, a sua expressão analítica e a sua representação gráfica.

O recurso a tecnologias, especificamente a *software* de geometria dinâmica (*GeoGebra*), referido por Yao e Manouchehri (2019), encontra-se presente no segundo grupo da segunda tarefa, no qual é garantida a vantagem do *feedback* providenciado pelo computador, mencionado por Paiva (2019), o facto de este promover o desenvolvimento do raciocínio e do conhecimento matemático. Se, por um lado, a generalização pedida na alínea a) decorre naturalmente dos exercícios mecanicistas realizados pelos alunos, por outro lado, as generalizações pedidas nas alíneas seguintes requerem que o aluno recorra a estratégias como a tentativa erro e a generalização partindo do particular.

A presença de múltiplas soluções, referida por Leikin e Levav-Waynberg (2007), é mais uma característica presente em todas as tarefas. Nas questões relacionadas com a escolha de uma das representações gráficas, ainda que haja uma opção mais expetável por parte do professor, é possível fornecer respostas distintas com argumentos válidos. As atividades de exploração, como os grupos dois das primeira e terceira tarefas, e a pequena atividade de modelação da segunda tarefa também viabilizam a presença de soluções múltiplas. Cada aluno pode chegar a conclusões diferentes e apresentar as mesmas de formas distintas, o que conduz a um enriquecimento da compreensão dos conceitos.

## 4. Análise de dados

No presente capítulo constam a descrição e subsequente análise dos cinco estudos de caso da investigação realizada. O investigador aplicou três tarefas, a primeira numa das aulas lecionadas e as duas seguintes em sessões fora de contexto de aula com os alunos participantes. Optou-se pelo uso dos nomes fictícios Mercúrio, Vénus, Júpiter, Saturno e Neptuno por forma a manter o anonimato dos participantes. Nas transcrições de excertos das entrevistas, o investigador é identificado pela letra I, ao passo que o entrevistado é identificado pela inicial do seu nome fictício, como por exemplo M para Mercúrio.

### 4.1 Estudo de caso: Mercúrio

Mercúrio é uma aluna com um nível de aproveitamento muito bom na disciplina de Matemática e realiza um estudo regular, como refere na entrevista:

I: Fala-me dos teus hábitos de estudo especificamente em relação à disciplina de Matemática.

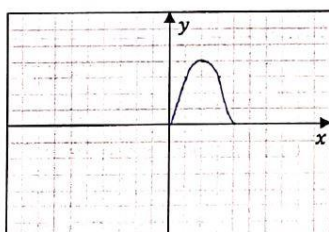
M: Eu costumo fazer os trabalhos de casa que o professor manda e, depois, mais perto do teste faço fichas de preparação.

Revela não só destreza na componente mais mecanicista da disciplina, como também aptidão para interpretar situações novas e fora do comum, nas quais faz um uso proficiente dos conhecimentos adquiridos e procura obter uma compreensão mais profunda e holística.

#### Tarefa 1 – A função quadrática em contextos semirreais

No grupo um desta tarefa, as representações algébrica e gráfica das funções em causa estão coerentes, incluindo certas minúcias, como os valores do domínio que fazem sentido na situação em causa e a representação exata do contradomínio. Não obstante, há um preciosismo que escapa na representação gráfica, onde não estão representadas bolas abertas nos pontos devidos, como é possível observar na Figura 4.1.1.

1.2 A área de um retângulo cujos lados medem  $x$  e  $4 - x$ .



Expressão analítica:  $-x^2 + 4x$

Domínio:  $[0, 4]$

$A = \int_0^4 (-x^2 + 4x) dx$   
 $= \left[ -\frac{x^3}{3} + 2x^2 \right]_0^4$   
 $= \left( -\frac{64}{3} + 32 \right) - \left( 0 + 0 \right)$   
 $= \frac{32}{3}$   
 $x \geq 0$  porque distâncias são  
positivas e  $y > 0$  porque áreas  
são positivas

Figura 4.1.1 – Representação gráfica, expressão analítica e justificação dadas por Mercúrio (Fonte própria)

Quando entrevistada, a aluna detetou rapidamente a incoerência entre o domínio dado e a representação gráfica, tendo referido que falta “marcar se é aberto ou fechado”. Ao ser inquirida se, nesse caso, faria mais sentido colocar bolas abertas na representação gráfica ou incluir os valores no domínio, defendeu que seria mais adequado colocar as bolas abertas, uma vez que “a área de um quadrado de lado zero não faz sentido, porque o quadrado não existe”.

À parte este pormenor, as justificações fornecidas são completas e estão bem expostas, como comprova a Figura 4.1.1, o que demonstra a destreza de Mercúrio na articulação dos conhecimentos matemáticos obtidos em situações particulares.

As respostas dadas nos grupos 2 e 3 corroboram estas observações, com a ressalva da falta de uma generalização na questão 2.1 (Figura 4.1.2), onde, sendo pedido para estudar como o valor do parâmetro  $m$  afeta o gráfico da função, é de esperar que se chegue a uma conclusão.

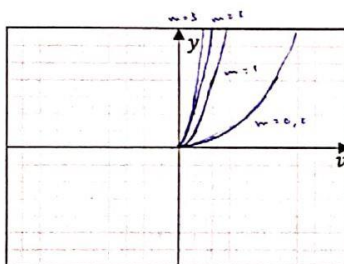


Figura 4.1.2 – Representações gráficas propostas por Mercúrio  
(Fonte própria)

Na entrevista, a aluna chegou a uma conclusão exposta em linguagem corrente: “a abertura da parábola fica mais estreita quanto maior for o valor da massa”. Por um lado, esta afirmação evidencia a utilidade do recurso a ferramentas, a ideias e a conhecimentos matemáticos para a compreensão de conceitos de outras áreas do saber (Mendes, 2022). Por outro lado, tratando-se de uma questão que envolve a conexão de conceitos físicos (a energia cinética e a massa) com o conceito matemático de função quadrática, a conclusão obtida revela o benefício que tarefas ou problemas que envolvam conexões matemáticas trazem ao aprofundamento da compreensão de conceitos matemáticos, particularmente no tópico de funções.

### **Tarefa 2 – A função quadrática em resolução de problemas e em tarefas de modelação**

Na primeira alínea da questão 1, houve um erro algébrico proveniente da omissão de passos (Figura 4.1.3). Para a realização desta alínea era necessário determinar as coordenadas do vértice da parábola associada à função quadrática dada. Para tal, havia duas abordagens possíveis, ou recorrer às fórmulas para as coordenadas do vértice da parábola ( $x_v =$

$-\frac{b}{2a}, y_V = f(x_V)$ ), ou usar a técnica do completamento do quadrado, como a aluna tentou fazer. No entanto, como conseguiu observar na entrevista, não teve em conta a troca de sinal da parcela  $0,32x$  que decorre da colocação do fator  $-0,01$  em evidência.

1.

a)  $f(x) = -0,01x^2 + 0,32x$   
 $f(x) = -0,01(x + 16)^2 + 2,56$

$V(-16; 2,56)$

a altura máxima atingida pela bola foi de 2,56 m

Figura 4.1.3 – Cálculos e resposta final dados por Mercúrio  
(Fonte própria)

Apesar do erro, que se manteve na resolução das restantes alíneas, Mercúrio foi bem-sucedida nos raciocínios feitos, como será visto posteriormente. Ao ser questionada sobre o valor obtido para a abcissa do vértice da parábola representativa da situação semirreal em estudo, esta disse ter notado de imediato a incongruência, uma vez que tal valor implicaria que a bola se deslocasse no sentido oposto ao do remate, uma atitude que sublinha a riqueza das conexões matemáticas para o desenvolvimento do espírito crítico (Silva et al., 2023).

A resolução da alínea seguinte é necessário realizar dois cálculos. Mediante o contexto do problema, é preciso avaliar se a bola passa pela barreira – equivalente a saber se  $f(9,15)$  é superior à altura do jogador mais alto da barreira (1,93) – e avaliar se a bola entra na baliza – equivalente a saber se  $f(25)$  é inferior à altura da baliza.

Como ilustra a Figura 4.1.4, a aluna realiza esses cálculos e chega à conclusão certa, revelando uma incorreção na cadeia de desigualdades apresentada ( $2,44 > 2,09 > 1,93$ ), uma vez que as desigualdades relevantes são “ $2,09 > 1,93$ ” e “ $1,75 < 2,44$ ”.

b)

$25\text{ m}$

$2,56\text{ m}$

$2,44\text{ m}$

$f(25) = 0,32 \times 25 - 0,01 \times 25^2$   
 $f(25) = 1,75\text{ m}$

$f(9,15) = 0,32 \times 9,15 - 0,01 \times 9,15^2$   
 $f(9,15) = 2,44\text{ m}$

$2,44 > 2,09 > 1,93$   
 s.m., o líric resulta a golo

Figura 4.1.4 – Cálculos e resposta final dados por Mercúrio  
(Fonte própria)

Mercúrio detetou e corrigiu esta incorreção durante a entrevista. É de salientar o esboço auxiliar realizado pela aluna, uma vez que este evidencia uma compreensão pluridimensional do problema posto. Mercúrio revela não ter dificuldade nem na transição entre cada uma das representações, nem na interpretação de uma à luz das outras. Esta competência é, para Canavarro (2017), essencial. A aluna consegue, ainda, enriquecer essas representações com os dados fornecidos no enunciado do problema.

No grupo dois desta tarefa, Mercúrio demonstra possuir capacidade de generalização, como é possível aferir observando a Figura 4.1.5 e a Figura 4.1.6.

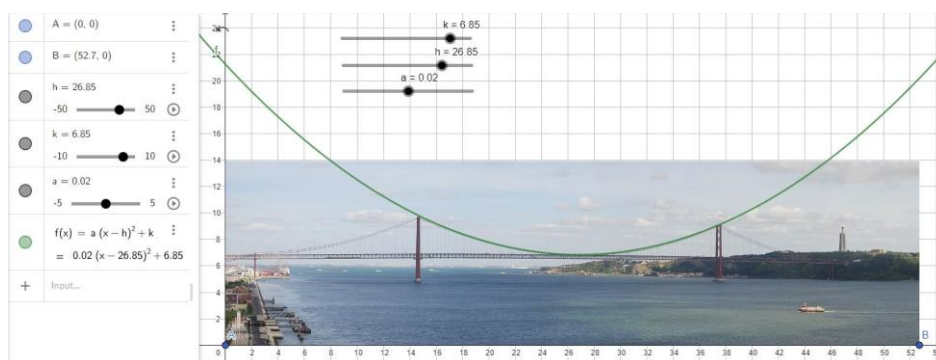


Figura 4.1.5 – Janela do GeoGebra fornecida por Mercúrio  
(Fonte própria)

2.

2.1  $f(x) = 0,02(x - 26,85)^2 + 6,85$   $B = 52,7$

2.2 a)  ~~$V(h, k)$~~   $V(h, k)$

b)  $f(x) = a(x+h)^2 + k, x \in \mathbb{R}$  (OPP)

~~$a > 0, \text{CDf} = [k, +\infty[$~~   $a > 0, \text{CDf} = [k, +\infty[ ; a < 0, \text{CDf} = ]-\infty, k]$

c)  $x = h$

d) os zeros dependem ~~de~~ ~~simetria~~ de  $a, h, k$

$$0 = a(x+h)^2 + k$$

$$0 = ax^2 + 2ahx + ah^2 + k$$

Figura 4.1.6 – Generalizações obtidas por Mercúrio  
(Fonte própria)

A aluna consegue transitar do caso particular, obtido através da realização da pequena atividade de modelação, para as generalizações solicitadas no enunciado, à exceção da alínea d), que exige um pensamento mais complexo.

### Tarefa 3 – Funções definidas por ramos em contextos semirreais

Na questão 1.2 desta tarefa, Mercúrio refere não ter tido dificuldade na obtenção da expressão analítica da função em causa (Figura 4.1.7), ainda que não se lembresse das técnicas

ou do raciocínio necessários para obter a expressão analítica equivalente recorrendo à função módulo.

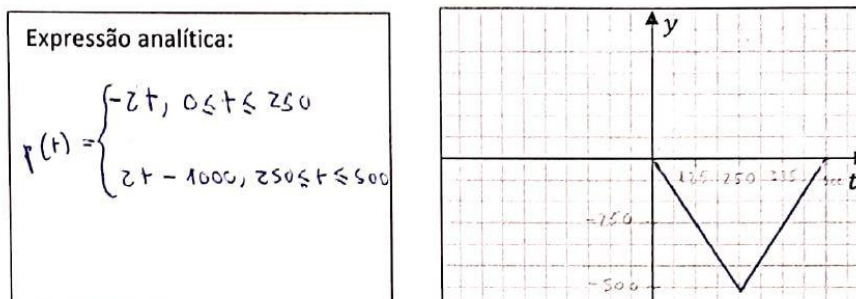


Figura 4.1.7 – Expressão analítica e representação gráfica propostas por Mercúrio  
(Fonte própria)

No seguimento deste comentário, o investigador lembrou o conceito de transformações de funções. A aluna deduziu autonomamente as operações necessárias que se traduzem nas transformações geométricas desejadas, partindo da função módulo,  $|x|$ :

I: Como sabes que a representação gráfica da função pode ser descrita por uma função módulo, podes pensar nas transformações de funções que conheces.

M: Como vai descer num fator de 2 e crescer num fator de 2, fica  $2|x|$ . Agora é só fazer o vértice, que seria  $(250, -500)$ .

I: Certo. Que expressão analítica obterias, nesse caso?

M:  $2|x - 250| - 500$ .

Um aspeto que evidencia a apropriação por parte da aluna de um hábito relacionado com conexões é o uso da letra  $p$  para definir a função de profundidade, sem ter sido mencionado no enunciado. Este facto põe em evidência a apropriação deste tipo de técnica, algo que faz sentido que tenha ocorrido na última tarefa, uma vez que os participantes tiveram tempo de habituação suficiente ao tipo de tarefa realizado.

Quando o investigador colocou uma questão sobre o uso de letras representativas do seu significado real para as variáveis independente e dependente, Mercúrio deu o seu parecer:

I: Relativamente ao uso das letras  $t$  e  $v$  para a variável independente das situações descritas, de que forma achas que esse uso impacta a compreensão, não só da situação descrita, como dos conceitos matemáticos?

M: Eu acho que em termos analíticos a letra da variável não faz muita diferença. Mas quando é para comparar com situações reais ajuda a transportar o raciocínio para essa situação específica.

Esta vantagem que a aluna salienta (isto é, a do aprofundamento da compreensão da situação semirreal em estudo), situa-se na linha de pensamento de Ferri (2010), quando a autora refere conexões com a realidade. Além do mais, Mercúrio valoriza o uso de letras representativas do significado das variáveis. Esta conexão extramatemática simples acresce valor a problemas que façam uso da mesma e revelam ajudar na compreensão da situação descrita e da utilização da matemática no estudo da mesma.

Na questão 1.3, a aluna esquece-se de limitar de forma completa os valores da variável  $t$  para cada ramo (Figura 4.1.8), indicando apenas, ainda que corretamente, o valor da transição de um ramo para o outro.

$$p(t) = \begin{cases} -2t, & t \leq 250 \\ 4t - 1000, & t > 250 \end{cases}$$

Figura 4.1.8 – Expressão analítica apresentada por Mercúrio  
(Fonte própria)

Em contexto de entrevista, Mercúrio deteta a irregularidade:

I: Explica-me a tua escolha para as condições impostas em relação ao tempo.

M: Comparando com a alínea 1.2, aqui [no extremo superior do intervalo do segundo ramo da questão 1.2] está 500, só que aqui [no extremo superior do intervalo do segundo ramo da questão 1.3] seria diferente porque ele sobe mais depressa.

I: Certo. No entanto, o submarino não sobe indefinidamente. Correto? Pelo que haverá, eventualmente um limite temporal.

M: Sim. Como a velocidade é o dobro, demora metade do tempo, que é 125s.

I: Qual seria, então, o limite superior?

M: 375s.

I: E o mesmo se aplica ao primeiro ramo, certo?

M: Sim, começaria em 0s.

A aluna faz uma transição proficiente entre os conceitos matemáticos de domínio e de declive para os conceitos físicos de grandezas e de velocidade, algo que foi, segundo a mesma, potencializado pelas características da tarefa. Nomeadamente, no que toca ao uso constante de representações múltiplas e da relação entre as mesmas (Canavarró, 2017) e à presença de várias soluções possíveis (Leikin & Levav-Waynberg, 2007).

Mercúrio complementa a sua resposta, referindo que um eventual obstáculo na determinação da mesma está relacionado com a impossibilidade de fornecer uma expressão analítica que recorra à função módulo, em oposição à situação da questão 1.2. Para tal, dá um argumento geométrico, mencionando que “os dois lados não seriam simétricos”. Especula,

por fim, que o recurso a um esboço da representação gráfica aquando da realização desta alínea teria sido útil, tanto na limitação dos valores para  $t$ , como na chegada à conclusão da impossibilidade de aglutinar os ramos numa função com módulo, sublinhando o que Canavarro (2017) preconiza, quando menciona que não é suficiente tomar conhecimento das diferentes representações de um conceito matemático. Com efeito, é necessário saber interrelacioná-los e interpretá-los à luz uns dos outros. Este comentário da aluna alinha-se com a resolução que apresenta para a última questão desta tarefa (Figura 4.1.9), na qual não revela qualquer dificuldade na limitação dos valores de  $t$  para os diferentes ramos, mesmo tratando-se de uma questão que apresenta um grau mais elevado de complexidade.

Na questão 2, Mercúrio não apresenta cálculos para a obtenção dos ramos e das limitações dos mesmos relativamente à variável independente (Figura 4.1.9).

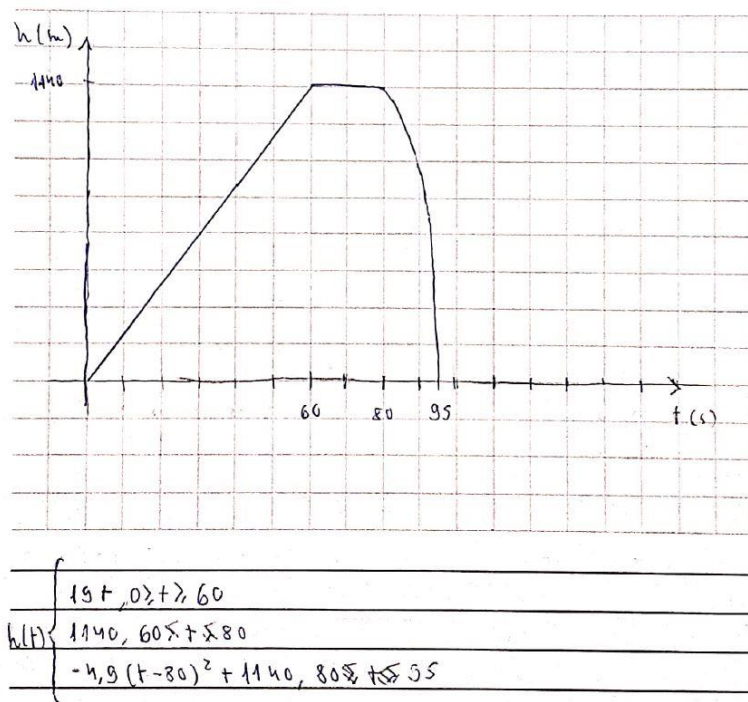


Figura 4.1.9 – Representação gráfica e expressão analítica propostas por Mercúrio (Fonte própria)

No entanto, justifica na entrevista:

I: Quero que me fales da obtenção dos segundo e terceiro ramos.

M: Então, este [o segundo] é constante.

I: E vem donde esse valor?

M: Deve ser o produto do tempo que ele subiu pela velocidade a que ele subia.

I: E por último, o terceiro ramo?

M: É esta expressão [a expressão quadrática dada pelo enunciado], só que com os valores do vértice.

I: E em relação à restrição do tempo para o terceiro ramo?

M: Então, aqui [extremo superior] calculei o zero para poder ver o máximo de tempo que ele estaria no ar até cair e aqui [extremo inferior] é do tempo anterior.

Relativamente ao tipo de tarefas realizado e ao que estas podem acrescentar à aprendizagem matemática, bem como ao aprofundamento das aprendizagens adquiridas, a aluna partilha a sua visão:

I: Olhando para o tipo de tarefas que realizámos, que benefícios ou desvantagens achas que o uso das mesmas pode trazer, não só para a aprendizagem, mas também para o aprofundamento da compreensão das situações matemáticas apresentadas?

M: Como nós estamos habituados a fazer as tarefas de uma certa maneira, quando fizemos as tarefas inicialmente foi um bocado um choque, porque é diferente do que estamos habituados a fazer e é difícil pensar nas situações reais. Mas eu acho que, primeiro, torna as coisas mais divertidas e também ajuda a transportar a matemática para a realidade e não é só coisas abstratas. É mais concreto e é mais fácil de visualizar e perceber os conceitos.

É, assim, salientada a importância da apropriação da realização deste tipo de tarefas por parte dos alunos, para que estes tirem o proveito máximo da atividade no que toca à sua aprendizagem.

### **Considerações finais**

Mercúrio mostrou à-vontade na realização das tarefas desde a primeira aplicação. É notória uma apropriação progressiva de estratégias de resolução que envolvem conexões matemáticas, como o recurso a representações diversas de uma mesma situação ou a utilização de letras representativas do significado semirreal da variável, e é, também, visível uma desenvoltura crescente nas resoluções apresentadas, evidenciada pelo rigor e minúcia cada vez maiores. Sobre um dos aspetos acima, o recurso a representações múltiplas de uma mesma situação é um aspeto que sobressai neste estudo de caso. O recurso a diagramas ou esboços representativos das situações colocadas nos enunciados conduz a uma resolução mais completa e reveladora de uma compreensão mais profunda por parte da aluna (Canavarro, 2017). Este uso sistemático evidencia, também, um uso proficiente das ferramentas matemáticas.

Nas resoluções apresentadas por Mercúrio, é possível destacar algumas estratégias utilizadas pela aluna: o recurso a diagramas auxiliares, verificado na alínea 1b) da tarefa 2 (Figura 4.1.4); a designação atribuída a variáveis mediante o conceito que estas representam,

nas questões 1.2 e 2 da tarefa 3 (Figura 4.1.7 e Figura 4.1.9), estratégia que a aluna partilha ser benéfica “quando é para comparar com situações reais”, pois “ajuda a transportar o raciocínio para essa situação específica”.

A aluna manifesta destreza em momentos como a transição entre diferentes representações de uma mesma situação matemática e a interpretação de uma à luz das outras, nas questões 1 da tarefa 1 e 1a) da tarefa 2 (Figura 4.1.1 e Figura 4.1.3); e na obtenção de uma função, partindo de um conjunto de dados fornecidos no enunciado, na questão 1.2 da tarefa 3) (Figura 4.1.7). Em oposição a estes momentos, Mercúrio revela menos proficiência na capacidade de generalização, na questão 2.1 da tarefa 1 (Figura 4.1.2) e na alínea 2.2d) da tarefa 2 (Figura 4.1.6).

Por fim, relativamente às contribuições das conexões matemáticas para a compreensão da aluna sobre os conceitos do tópico de funções, destacam-se a compreensão da forma como os coeficientes dos termos de uma função quadrática afetam a sua representação gráfica, na questão 2.1 da tarefa 1 (Figura 4.1.2); a facilitação da deteção do erro proveniente do contexto semirreal dado, na alínea 1a) da tarefa 2 (Figura 4.1.3); o desenvolvimento da capacidade de encarar a mesma situação matemática de vários pontos de vista (nomeadamente, recorrendo a representações múltiplas), na alínea 1b) da tarefa 2 (Figura 4.1.4) e na questão 1.2 da tarefa 3 (Figura 4.1.7 e segundo excerto da entrevista); a promoção de uma transição proficiente entre os conceitos matemáticos e conceitos doutras áreas científicas, como a transição do domínio e do declive para os conceitos físicos de grandezas e de velocidade, presentes na questão 1.3 da tarefa 3 (Figura 4.1.8 e quarto excerto da entrevista); e a facilitação da visualização e compreensão dos conceitos, relacionando a matemática com a realidade e tornando as coisas menos abstratas, apontado por Mercúrio no último excerto da entrevista.

## 4.2 Estudo de caso: Vénus

Vénus é um aluno dedicado com um nível de aproveitamento bom na disciplina de Matemática. A sua zona de conforto está circunscrita à memorização dos mecanismos algébricos, bem como das fórmulas. O aluno revela menos destreza e segurança no tocante à transição dos objetos/conceitos matemáticos para o seu significado em diferentes contextos reais.

Vénus refere, na entrevista, como realiza o seu estudo da disciplina de Matemática:

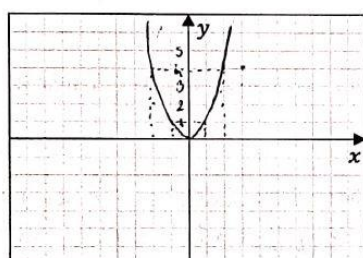
I: Fala-me dos teus hábitos de estudo especificamente em relação à disciplina de Matemática.

V: Este ano é mais fácil de estudar, porque os trabalhos de casa em si, como são muitos, também ajudam um bocado a manter o hábito de estudo recorrente. Mas em altura de testes começo a refazer exercícios, uma semana antes, talvez. Para além da repetição de exercícios uso o caderno de atividades e a *internet*, se conseguir arranjar alguma coisa de jeito.

### Tarefa 1 – A função quadrática em contextos semirreais

As respostas dadas no primeiro grupo desta tarefa revelam algumas dificuldades por parte do aluno em trabalhar conceitos matemáticos em contextos semirreais. Há incoerências entre os domínios apresentados e as representações gráficas providenciadas. Ainda assim, na justificação dada na alínea 1.1, quando afirma que as áreas são sempre positivas, é estabelecida uma das conexões expectáveis nesta alínea (Figura 4.2.1).

1.1 A área de um quadrado cujo lado mede  $x$ .



Expressão analítica:  $y = x^2$

Domínio:  $\mathbb{R}^+$

sendo o lado do quadrado  $x$  e todos os lados desta figura geométrica não iguais  $A(x) = l^2 = x^2$  sendo  $y = x^2$ , para objetos simétricos as imagens serão iguais. sendo as áreas valores apenas positivos,  $D = \mathbb{R}^+$

Figura 4.2.1 – Representação gráfica, expressão analítica e justificação dadas por Vénus (Fonte própria)

Com efeito, está em falta a associação do conceito físico que a variável independente,  $x$ , representa (neste caso, uma medida), pelo que é possível recorrer ao mesmo argumento, uma vez que todas as medidas são positivas. A incongruência já referida entre o domínio dado e a representação gráfica é justificada na entrevista:

I: O que representa o  $x$ ?

V: Um lado.

I: E o  $x$  está relacionado com que eixo e com que conjunto?

V: Com as abcissas e com o domínio.

I: Detetas, então, alguma coisa que alterarias?

V: Ok, já percebi. Eu pus o domínio como  $\mathbb{R}^+$ , mas estava a ver como as imagens, porque as imagens é que vão ser só positivas. O domínio vai ser  $\mathbb{R}$ .

Vénus, ainda que não detete que  $x$  representa uma medida e, logo, que este deve ter valores positivos, revela ter estabelecido uma conexão entre a representação gráfica que forneceu na sua resolução e o novo domínio proposto.

O investigador questiona o aluno sobre o significado da variável  $x$  em contexto real:

I: Detetaste uma incoerência entre a representação gráfica e o domínio. No entanto, que conceito real representa a variável  $x$ ?

V: Teoricamente o  $x$  vai ser o lado. Então tem de ser sempre positivo também.

I: Nesse caso, o que ajustarias na resolução?

V: Nesse caso, a representação gráfica é que não devia ser assim.

I: Certo. Achas que a componente analítica da resolução te fez esquecer do contexto real que o problema ilustra?

V: Até ao domínio não. Mas quando passei da expressão analítica para o gráfico, acho que me esqueci do contexto real.

Vénus revela, por um lado, a capacidade de detetar as incorreções da sua resolução e associa, ainda, a analiticidade à não contemplação do contexto semirreal. Este último facto confirma uma das conclusões enumeradas pelo NCTM (2017) relativa à investigação sobre o uso de tarefas matemáticas, mais especificamente, que tarefas que impliquem pensamento e raciocínio de nível elevado produzem mais aprendizagem do que tarefas procedimentais.

No segundo grupo, ainda que, na resposta à alínea 2.1, não tenha sido estabelecida a conexão (extramatemática) da forma como a variação do parâmetro  $m$ , associado à massa, afeta a representação gráfica da função  $E_C$ , o aluno revela capacidade para fazer extrapolações. Nomeadamente, na resposta dada na alínea 2.2 (Figura 4.2.2).

2.2 Atendendo aos valores que fazem sentido para  $m$  e para  $v$  explica que forma terá o gráfico da função  $E_c$ .

sendo os valores de  $m$  e  $v$  sempre positivos, ou seja, nenhum deles pode ser negativo, a concavidade vai estar voltada para cima pois  $m > 0$  e não vão haver quaisquer valores negativos pois  $v > 0$ .

Figura 4.2.2 – Conclusão proposta por Vénus  
(Fonte própria)

Como é possível observar, partindo dos casos particulares experimentados, Vénus é capaz de generalizar que formato terá o gráfico da função  $E_c$ , independentemente do valor de  $m$ .

### Tarefa 2 – A função quadrática em resolução de problemas e em tarefas de modelação

No primeiro grupo desta tarefa, Vénus faz uma boa seleção e posterior utilização dos dados fornecidos. Não obstante, a resposta dada à pergunta feita na alínea b), ainda que esteja correta, está incompleta (Figura 4.2.3).

b) baliza = 2,44 m,  $f(25) = 0,32 \times 25 + 0,01 \times 25^2 = 8$   
 ~~$f(25) = 8 - 6,25 = 1,75$  m (altura)~~  
 → Resulta em golo, caso a barreira da bola não seja impedida pelo jogador de 1,95 m e caso não bata num dos postes.

Figura 4.2.3 – Cálculos e resposta final dados por Vénus  
(Fonte própria)

O aluno recorre à condição que confirma se a bola passa ou não por baixo da baliza nas circunstâncias descritas (equivalentemente, se  $f(25) < 2,44$ ). No entanto, não reconhece que tem dados suficientes para avaliar se a bola passa ou não por cima da barreira. Não lhe ocorre que poderia, inclusivamente, utilizar uma estratégia análoga à que utilizou para avaliar se a bola entra na baliza. Na entrevista, com alguma ajuda, Vénus conclui que era possível completar a resposta:

I: Vamos olhar para a alínea b). Qual é a ideia do exercício?

V: Teoricamente, há condições impostas que podem não permitir [que o livre resulte em golo].

I: Certo. E qual é que foi a [condição] que tu confirmaste que resultaria?

V: Os impedimentos eram ser impedido pela barreira ou pelo jogador que estava nela, o mais alto, e entrar na baliza.

I: E tu confirmaste [que aconteceria] o quê?

V: Confirmei a altura a que a bola entraria na baliza. Ou seja, se a bola entraria na baliza.

I: E tal aconteceria se passasse na barreira, como mencionaste na tua resposta final. E a minha pergunta é: não poderias confirmar se passa na barreira? (...) Não poderias pegar na mesma estratégia que pegaste aqui [na confirmação da condição de passar por baixo da barra]?

V: Ah, claro. Teoricamente, utilizava os 9,15 e calculava  $f(9,15)$ .

I: Certo, e que condição teria de ser verificada por esse valor?

V: Tem que ser superior aos 1,95.

Um aspeto importante na resolução apresentada é o facto de o aluno não ter esboçado o diagrama representativo da situação desta alínea. O não reconhecimento da possibilidade de fornecer uma resposta mais completa ou, pelo menos, mais determinística, reforça a importância das representações múltiplas que Canavarro (2017) afere. Esta observação é realçada com a resolução da alínea seguinte.

Na alínea c), Vénus faz o raciocínio geométrico necessário. O aluno recorre a um diagrama que descreve a situação, levando-o a compreender o enunciado, a realizar os raciocínios necessários e, por fim, a dar uma resposta completa (Figura 4.2.4).

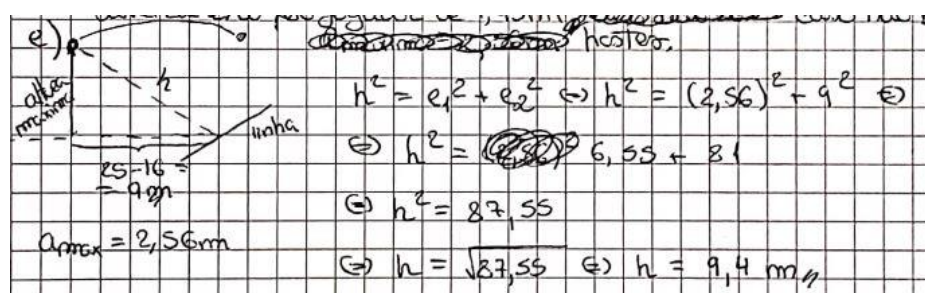


Figura 4.2.4 – Resolução de Vénus  
(Fonte própria)

Como referido há dois parágrafos, as resoluções e respostas finais de Vénus evidenciam a importância das representações múltiplas e como o recurso às mesmas conduz de forma natural a uma compreensão mais profunda do problema em causa e, logo, a uma resposta mais completa.

No grupo dois desta tarefa, o aluno encontra valores para os parâmetros por forma a que a representação gráfica da função modele o arco central da ponte (Figura 4.2.5), conforme pedido no enunciado.

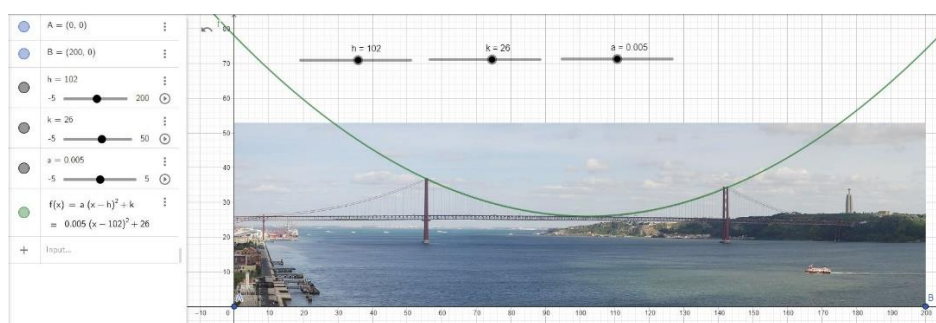


Figura 4.2.5 – Janela do GeoGebra fornecida por Vénus  
(Fonte própria)

Quando Vénus procura generalizar o que obteve para qualquer função quadrática escrita na forma apresentada, tem sucesso em fazê-lo para a alínea a), como se pode observar na Figura 4.2.6, apresentando uma incorreção, quando refere “o simétrico de  $h$ ”. Na realidade, o simétrico de  $h$  é o valor que adiciona a  $x$  na expressão fornecida ( $y = a(x - h)^2 + k$ ). Porém, a ordenada do vértice da parábola é precisamente  $h$ , não o seu simétrico. Este erro reforça o ponto de vista defendido por Ferri (2010), quando a autora encara a Matemática como um catalisador da compreensão do mundo e não uma coleção de receitas predefinidas.

~~2.2 - a) V(x, y), em coordenadas do vértice da parábola, vai relacionar-se com os parâmetros h e k, sendo x o valor do simétrico de h e y o valor de k.~~

→ B(200, 0)

parábola

2.2 - a) V(x, y), em coordenadas do vértice da parábola, vai relacionar-se com os parâmetros h e k, sendo x o valor do simétrico de h e y o valor de k.

b) o sentido do domínio vai depender da concavidade da parábola (voltada para cima ou para baixo), ou seja, vai relacionar-se com o coeficiente, a.

c) a equação do eixo de simetria da parábola irá ter o mesmo valor que a abcissa do vértice, isto é, o eixo de simetria será igual ao simétrico de h.

d) A existência de raízes depende da interseção da parábola com o eixo das abcissas, relacionando-se com o parâmetro k que é responsável pelas transições do gráfico segundo o eixo O<sub>x</sub>.

Figura 4.2.6 – Generalizações obtidas por Vénus  
(Fonte própria)

Em relação à alínea b), o aluno refere que o sentido da concavidade da parábola afeta o contradomínio, mas não menciona o papel desempenhado pelo parâmetro  $k$ , isto é, o de limitar o contradomínio. Também não traduz matematicamente o que explicou em linguagem corrente, ainda que não tenha sido pedido pelo enunciado. Além disso, mesmo que não afete a realização desta tarefa em específico, Vénus associa o conceito de “declive” ao parâmetro  $a$  de uma parábola. É certo que este parâmetro está, tal como o declive de uma função afim, relacionado com velocidade com a qual a função varia. No entanto, não é correta a designação atribuída pelo aluno. Na alínea c), Vénus chega à generalização esperada, mantendo o erro no

qual incorreu na alínea a), relativo à designação do “simétrico de  $h$ ”. Por último, na alínea d), o aluno identifica corretamente que a existência de zeros depende do valor de  $k$ , mas, desta vez, não menciona o papel desempenhado pelo parâmetro  $a$ , uma vez que só para certas combinações dos valores de  $a$  e de  $k$  é verificada a existência de zeros.

Por forma a compreender a ausência da menção dos parâmetros acima referidos,  $k$  para a alínea b) e  $a$  para a alínea d), o investigador questionou Vénus:

I: Gostava que fundamentasses a tua resposta na alínea b). Dizes corretamente que o parâmetro  $a$  afeta o contradomínio. No entanto, a resposta está completa?

V: O  $k$  também vai afetar.

I: Certo. Tu disseste que  $a > 0$  é um caso e que  $a < 0$  é outro caso. Portanto, qual será o contradomínio para cada um dos casos?

V: Calma, mas eu não tenho valores.

I: Exato. O objetivo deste conjunto de alíneas é precisamente generalizar, isto é, dar uma resposta para valores genéricos de cada parâmetro, tal como fizeste para a alínea a).

V: Ah, ok. [esboça numa folha o caso para  $a > 0$ ] Então, vai ser  $[k, +\infty[$ .

I: Exato, e nesse caso tens  $a > 0$ . Como é para o outro caso?

V: Então, fica  $] - \infty, k]$ .

O aluno revela, desta forma, conseguir fazer uma exaustão dos casos possíveis, com alguma orientação do investigador. Conclui-se que possui destreza na identificação de casos distintos, mas tem dificuldades na exaustão dos mesmos. A vantagem sobre as conexões intramatemáticas proferida por Mendes (2022) é ilustrada na crescente compreensão do problema por parte de Vénus, o que mostra a utilidade deste tipo de conexões para o desenvolvimento da compreensão aprofundada das ideias e conceitos matemáticos que a autora refere.

### **Tarefa 3 – Funções definidas por ramos em contextos semirreais**

Na resposta dada à pergunta 1.2 (Figura 4.2.7), é cometido um erro de transposição dos dados fornecidos pelo enunciado para os cálculos realizados. O enunciado afirma que o submarino percorre 2 metros de profundidade por segundo na descida e Vénus traduz esta afirmação pelo facto do ponto de coordenadas  $(1, 2)$  pertencer ao gráfico. O lapso repete-se na tradução matemática da afirmação “atinge uma profundidade máxima de 500 metros”, onde o aluno aponta, desta vez, que o ponto de coordenadas  $(250, 500)$  pertence ao gráfico da função em estudo. Estas interpretações entram em conflito com a representação gráfica apresentada, onde os pontos acima referidos deveriam ser, na realidade, os pontos de coordenadas  $(1, -2)$  e  $(250, -500)$ .

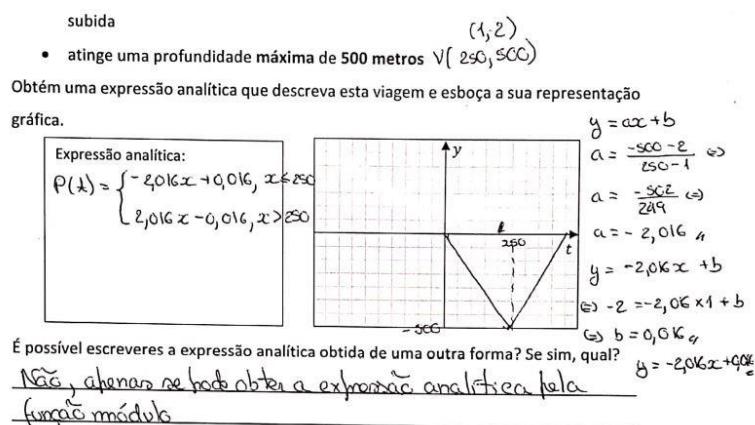


Figura 4.2.7 – Expressão analítica e representação gráfica apresentadas por Vénus (Fonte própria)

Com vista à compreensão do raciocínio realizado pelo aluno, questionou-se o mesmo em contexto de entrevista:

I: Olhemos, agora, para a tua proposta de resolução do problema 1.2.

V: Estava a ver as contas que eu tinha feito no declive. Não percebo onde fui buscar aqueles valores. Porque ela parte no instante 0, portanto onde é que eu fui buscar o [ponto] (1,2)? Ah, não. Está certo!

I: Mais ou menos. Acho que houve um problema na tradução dos dados do enunciado para os teus cálculos. Porque, apesar de se deslocar  $2m/s$ , o enunciado diz que desce.

V: Ah! Devia ser  $-2$ .

I: Exato. E repara nas incoerências quando passas para o cálculo. De onde provêm essas incoerências?

V: Com os pontos (1,2) e (250,500) devia ficar  $500 - 2$  sobre  $250 - 1$ .

I: Exato. E percebes o porquê de usares  $-500$ , de um momento para o outro? (...) Repara na representação gráfica que apresentaste.

V: Ah! Sim. Tirei o  $-500$  da representação gráfica.

I: Sim. E porque é que não deu certo?

V: Ah... depois não fiz o mesmo com o  $-2$  e o  $-1$ .

Revela-se, com este diálogo, ser intuitivo abordar situações semirreais, independentemente de os dados retirados não se encontrarem em conformidade com essa ideia intuitiva. No caso desta resolução, é intuitivo que o submarino inicie o seu deslocamento na superfície da água e que desça, pelo que Vénus apresenta uma representação gráfica com o aspeto acima (Figura 4.2.7). No entanto, os dados retirados, como foi já referido, entram em conflito com esta representação, o que conduz ao declive obtido para a função afim de cada ramo. Esta resolução é um bom exemplo da riqueza que provém da reflexão feita em relação

à compreensão que se tem de um problema. O próprio aluno, ao referir “Não percebo onde fui buscar aqueles valores”, evidencia uma atitude crítica e explícita a deteção de uma irregularidade, competências que Silva et al. (2023) propõem ser desenvolvidas através do uso de conexões matemáticas. Explorar essas irregularidades é benéfico para a aprendizagem dos alunos e para a compreensão dos conceitos matemáticos, nomeadamente no tópico de funções.

Em contexto de entrevista, Vénus partilha o seu parecer relativamente à designação de uma variável com recurso a uma letra representativa do seu significado:

I: O uso de  $v$  ou de  $t$  para a variável independente de cada uma das situações descritas cria, na tua ótica, confusão ou faz sentido? E em que medida é que [este uso] ajuda a estudar e compreender situações de contexto real?

V: Simplifica um bocado mais as coisas, o uso do  $v$  e do  $t$ . Porque nós associamos o  $t$  e já sabemos que é o tempo, é um bocado mais intuitivo do que tiver lá o  $x$ . Porque o  $t$  nós dizemos: ok, não há tempos negativos é a partir do 0. A mesma coisa com as velocidades. Teoricamente, não há velocidades negativas. Portanto é do 0 para a frente, é o módulo da velocidade, ou seja, nós sabemos que ali tem que haver uma restrição obrigatória. No  $x$ , como nós fazemos vários exercícios e que envolvem n situações distintas, nós acabamos se calhar por fazer um bocado de confusão, e daí cairmos um bocado no erro como nesta questão [1.1 da Tarefa 1] aqui atrás.

I: Portanto, achas que traz benefícios tanto para a compreensão dos conceitos das ferramentas matemáticas?

V: Sim, traz, por causa disso. Facilita a aprendizagem.

A visão exposta pelo aluno clarifica a importância de abordar contextos reais e de recorrer a técnicas que facilitem a boa transição de conceitos específicos para as ferramentas matemáticas às quais recorrer. O facto de Vénus afirmar que a designação de uma variável com recurso a uma letra representativa do seu significado conduz, de forma natural, às restrições a impor aos valores da variável evidencia uma vantagem importante advinda de um hábito simples, que salienta a importância da compreensão de interpretar uma representação de um conceito matemático à luz de outras representações desse mesmo conceito (Canavarro, 2017).

Na justificação fornecida na pergunta seguinte (Figura 4.2.8), o aluno revela possuir intuição sobre o entendimento da simetria da função módulo, seja esta mais geométrica (relacionada com as inclinações das semirretas) ou mais algébrica (relacionada com os valores dos declives das semirretas).

O facto de não ser uma função módulo, não se pode obter directamente a expressão analítica da segunda reta que sobe 4m por segundo.

Figura 4.2.8 – Justificação proposta por Vénus  
(Fonte própria)

Na questão final desta tarefa, Vénus propõe uma resolução fundamentada (Figura 4.2.9), tanto a nível dos cálculos auxiliares, como da representação gráfica e da expressão analítica fornecidas. Porém, não refere as restrições da variável independente em dois dos ramos. Esta situação já se verificou nas alíneas anteriores e revela alguma falta de proficiência na transição entre a representação gráfica e a expressão analítica (verificada, ainda, no primeiro grupo da Tarefa 1).

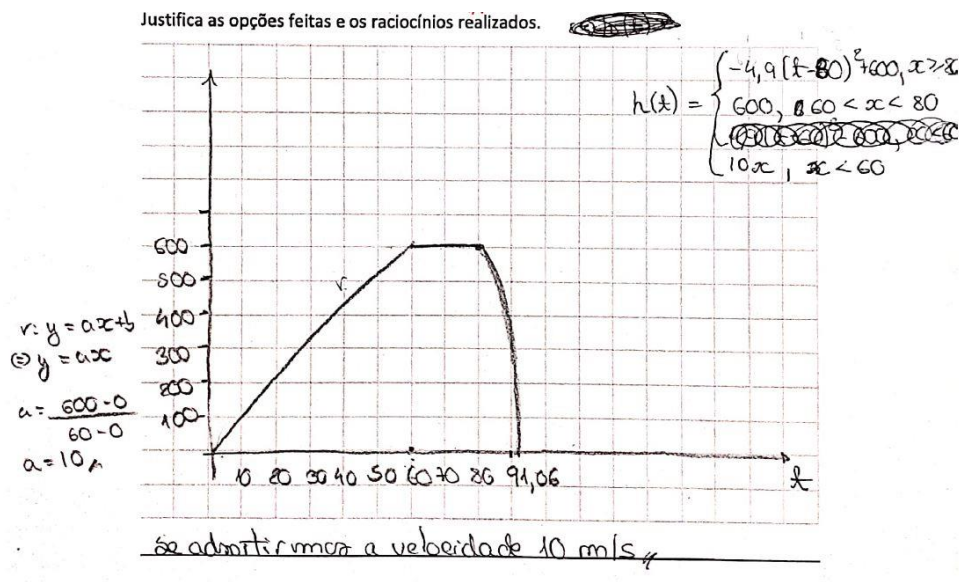


Figura 4.2.9 – Representação gráfica e expressão analítica propostas por Vénus  
(Fonte própria)

Como salientado no problema anterior, as incongruências verificadas na resolução constituem oportunidades ricas para o aprofundamento da aprendizagem. A deteção de erros por parte do aluno leva ao fortalecimento das conexões matemáticas estabelecidas, o que promove a utilização proficiente das diferentes representações matemáticas de uma mesma realidade, ao invés do mero conhecimento de cada uma dessas representações (Canavarro, 2017).

O aluno partilha, ainda, a sua visão no que respeita à aplicação de tarefas como as que foram realizadas na investigação:

I: Tendo em conta o tipo de tarefas que realizámos, que benefícios achas que o uso das mesmas pode trazer, não só para a aprendizagem, mas também para o aprofundamento da compreensão das situações matemáticas apresentadas, que envolver contextos doutras disciplinas?

V: Começando com a Matemática relativamente a contextos doutras disciplinas, neste caso Física, facilita bastante. Porque é quase como se nós tivéssemos o dobro da aprendizagem, tanto em Matemática como também temos umas luzes de Física. Ou seja, acho que é mais fácil para nós associarmos coisas que estão ligadas a situações reais por que já experimentámos, já as visualizámos em contexto doutras disciplinas. E relativamente às tarefas, eu acho que a nível de detalhes acaba por aprofundar mais o conhecimento que nós temos porque há aqui pormenores que se calhar tivemos que ligar mais do que em contexto normal de exercícios e que faz sentido e que, se calhar, nós não tínhamos visto dessa maneira, porque estamos um bocado formatados. É muito à base de: “é isto que tens de fazer, é isto que vais fazer e já sabes que é assim”. E há partes e contextos que escapam às vezes e as tarefas têm essa parte dos detalhes importantes para serem vistos.

I: Tu e os teus colegas nem estavam habituados a fazer este tipo de tarefas. Imagina que o recurso a tarefas deste tipo passa a ser mais comum no contexto de aula. Traria também benefícios?

V: Sim, acho que vamos estar mais preparados para exercícios mais difíceis ou mais detalhados e que exijam mais rigor, também, na resolução.

Vénus refere a vantagem de se aprofundar duas áreas do saber em simultâneo, ao realizar-se tarefas que envolvem conexões matemáticas. A valorização da presença de “detalhes” nas tarefas também é de salientar, sobretudo considerando a associação feita pelo aluno ao afirmar que é necessário “ligar mais do que em contexto normal de exercícios” e que estão “formatados”.

### **Considerações finais**

As resoluções apresentadas por Vénus revelam consistentemente algum nível de compreensão, independentemente do tipo de problema em causa. O aluno procura ser claro nas suas exposições, tanto em linguagem matemática, como em linguagem corrente.

Nas resoluções apresentadas por Vénus, é possível destacar algumas estratégias utilizadas pelo aluno: a utilização de pontos específicos para esboçar a representação gráfica de uma função, na questão 1.1 da tarefa 1 (Figura 4.2.1); o recurso a diagramas auxiliares, na alínea 1c) da tarefa 2 (Figura 4.2.4); a utilização de ferramentas associadas a outro tema da Matemática, quando recorre à geometria na alínea 1c) da tarefa 2 (Figura 4.2.4); a designação

atribuída a variáveis mediante o conceito que estas representam, nas questões 1.2 e 2 da tarefa 3 (Figura 4.2.7 e Figura 4.2.9).

O aluno manifesta destreza em momentos como a deteção de erros da sua resolução (terceiro excerto da entrevista); a realização de generalizações, na questão 2.2 da tarefa 1 (Figura 4.2.2); e na seleção dos dados fornecidos pelo enunciado, na questão 1 da tarefa 2 (Figura 4.2.3). Em oposição a estes momentos, Vénus revela menos competência ao trabalhar conceitos matemáticos em contextos semirreais, na questão 1 da tarefa 1 (Figura 4.2.1) e na questão 2 da tarefa 3 (Figura 4.2.7); em manter presente o contexto semirreal quando se encontra na parte analítica da resolução (terceiro excerto da entrevista); na capacidade de generalização, na alínea 2.2d) da tarefa 2 (Figura 4.2.6); e na transposição dos dados fornecidos pelo enunciado para os cálculos realizados, na questão 1.2 da tarefa 3 (Figura 4.2.7). Finalmente, Vénus revela destreza na identificação de casos distintos, mas tem dificuldade na exaustão dos mesmos, na alínea 2.2b) da tarefa 2 (Figura 4.2.6).

Por fim, relativamente às contribuições das conexões matemáticas para a compreensão do aluno sobre os conceitos do tópico de funções, destacam-se a promoção da deteção de erros da sua resolução, no terceiro excerto da entrevista e na questão 1.2 da tarefa 3; e a associação das representações matemáticas aos conceitos que estas representam, no sétimo excerto da entrevista.

### 4.3 Estudo de caso: Júpiter

Júpiter é uma aluna que investe pouco tempo de estudo na disciplina de Matemática. A Matemática não é das disciplinas que lhe desperta mais o interesse e, como é possível aferir com a sua partilha na entrevista, o seu estudo é menos regular do que os trabalhos de casa dados:

I: Fala-me dos teus hábitos de estudo especificamente em relação à disciplina de Matemática.

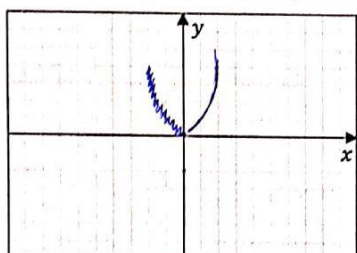
J: Não consigo estudar todas as semanas, mas ao fim de semana tento estudar um bocadinho mais. Depois, é quando faço os trabalhos de casa. Mais perto do teste, estudo ou uma semana antes, quando há poucos testes, ou três dias antes, quando há mais testes na mesma semana.

Todavia, ainda que apresente um nível de aproveitamento suficiente na disciplina, é uma aluna que revela capacidades de perseverança e de espírito de iniciativa quando confrontada com desafios.

#### Tarefa 1 – A função quadrática em contextos semirreais

No grupo um desta tarefa, a resolução de Júpiter apresenta, de forma sucinta, as expressões analíticas pedidas, bem como a origem destas. No entanto, não justifica a obtenção dos domínios (Figura 4.3.1), nem indica as bolas abertas.

1.1 A área de um quadrado cujo lado mede  $x$ .



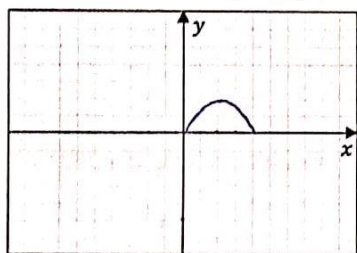
Expressão analítica:  $x^2$

Domínio:  $\mathbb{R}^+ / (0, \infty)$

$$x \cdot x = x^2$$

$$A = l \cdot l = l^2$$

1.2 A área de um retângulo cujos lados medem  $x$  e  $4 - x$ .



Expressão analítica:  $-x^2 + 4x$

Domínio:  $[0, 4]$

$$x(4-x) = -x^2 + 4x$$

Figura 4.3.1 – Representações gráficas, expressões analíticas e justificações dadas por Júpiter (Fonte própria)

É possível detetar uma incoerência no domínio fornecido para a alínea 1.2, uma vez que é apresentado o intervalo aberto no extremo inferior, mas fechado no extremo superior, algo que evidencia não ter havido uma compreensão completa do contexto. Ainda assim, é natural que seja menos evidente que o extremo superior seja aberto, uma vez que implica pensar na condição para o lado cuja medida é representada por  $4 - x$ , um raciocínio ligeiramente mais complexo do que o raciocínio análogo para o caso do lado que mede  $x$ .

Como a aluna não justificou a obtenção dos domínios, o investigador questionou-a na entrevista:

I: Gostava que me ajudasses a perceber como obtiveste os domínios.

J: Sei que usei a calculadora.

I: Certo. No entanto, a calculadora não te mostrava exatamente esta representação gráfica, ou mostrava?

J: Não. Mas como as áreas são positivas, tirei a parte negativa.

Desta forma, percebe-se que Júpiter recorreu à calculadora gráfica para visualizar a representação gráfica da expressão analítica obtida e, ao transpor para o papel, usou um conhecimento do contexto semirreal em causa.

No segundo grupo, um grupo consideravelmente mais elaborado e que implica um raciocínio mais complexo, a aluna demonstra mais destreza na interpretação das questões, algo que se verifica tanto nos cálculos como no texto redigido. Começando pela questão 2.1, Júpiter apresenta várias representações gráficas não identificadas (Figura 4.3.2).

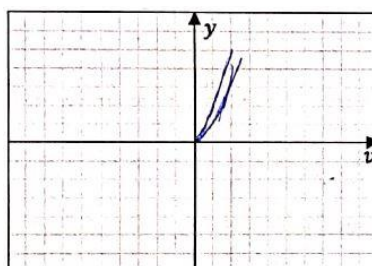


Figura 4.3.2 – Representações gráficas propostas por Júpiter  
(Fonte própria)

Em contexto de entrevista a aluna fundamenta a sua resposta:

I: Substituíste o parâmetro  $m$  por vários valores, certo? Mas não os identificaste. Como fizeste para esboçar cada um dos casos?

M: Utilizei a calculadora.

Júpiter afirmou não se recordar de que valores estavam associados a cada uma das representações gráficas. Assim, após o investigador lembrar a aluna, esta conseguiu chegar a uma conclusão na entrevista:

I: O objetivo desta alínea é compreender de que forma o valor do parâmetro  $m$  afeta a representação gráfica de  $E_c$ . Agora que sabes que valores de  $m$  estão associados a cada representação gráfica, consegues chegar a alguma conclusão?

M: Então, quando [o valor de  $m$ ] for maior mais perto do eixo vai ficar.

I: De que eixo?

M: Do eixo dos  $yy$ .

Na alínea seguinte é apresentada uma justificação que está parcialmente correta, havendo um erro na última parte (Figura 4.3.3).

**2.2** Atendendo aos valores que fazem sentido para  $m$  e para  $v$  explica que forma terá o gráfico da função  $E_c$ .

Como a massa e a velocidade não podem ser negativas ( $m > 0$  e  $v > 0$ ), a concavidade da parábola tem de ser voltada para cima, e depende do valor de  $v$  para ser definida, uma vez que ~~este~~ esse valor ~~é~~ ~~influencia~~ influencia da pelo valor da massa.

Figura 4.3.3 – Justificação apresentada por Júpiter  
(Fonte própria)

Procurando entender como Júpiter chegou à justificação dada, o investigador questionou-a na entrevista:

I: Na justificação que apresentaste dizes que a massa e a velocidade não podem ser negativas, o que é verdade. E dizes, ainda, que a concavidade é voltada para cima. No entanto, qual dos conceitos é que te leva a concluir isso?

J: É a velocidade. Não?

I: Não, pois não? O uso do  $v$  pode ser algo a que não estás habituada, mas se fosse a típica expressão  $ax^2 + bx + c$ , o que afeta a concavidade?

J: É o  $a$ .

I: Exato. Então, e neste caso?

J: É a massa.

I: Então, como complementas a resposta usando a condição que deste aos valores de  $v$ ?

J: Fica só o lado direito [da parábola].

Desta forma, entende-se que, apesar de haver alguns conflitos na justificação fornecida, basta ser dada alguma orientação para que o raciocínio da aluna seja redirecionado e completado. Este diálogo reforça uma afirmação feita no estudo de caso anterior, quando foram referidos a deteção de erros por parte da aluna e o fortalecimento das conexões matemáticas estabelecidas. Estes aspetos acrescentam valor para a aprendizagem dos alunos, uma vez que estes passam a ter a capacidade de transitar proficientemente entre as diferentes representações de uma mesma situação matemática ou de um mesmo conceito matemático, ao invés de conhecerem simplesmente cada uma dessas representações (Canavarro, 2017).

### Tarefa 2 – A função quadrática em resolução de problemas e em tarefas de modelação

No primeiro grupo desta tarefa Júpiter evidencia muitas dificuldades (Figura 4.3.4). Um aspeto que sobressai é o esquecimento da técnica do completamento do quadrado na resolução da alínea a) (já descrita no primeiro estudo de caso para este exercício em concreto). No entanto, ainda que tenha havido esse esquecimento, considera-se mais importante a interpretação realizada na alínea seguinte.

1 - função quadrática  
 $f(x) = 0,32x - 0,01x^2$

a)  $f(x) = 0,32x - 0,01x^2 \Rightarrow f(x) = -0,01x^2 + 0,32x \Rightarrow f(x) = -0,01x(x + 0,32)$   
 ~~$f(x) = 0,32x - 0,01x^2$~~   
 ~~$f(x) = 0,32x - 0,01x^2$~~   
 ~~$f(x) = 0,32x - 0,01x^2$~~   
A altura máxima será de 4 metros.

$f(x) = -0,01(x + 0,32) + 2,6$        $x = \text{metros}$        $\text{em } 0,32 = 2 \text{ metros}$   
 $V(-0,32, 2,6)$

b) Não, pois a bola sai por cima da altura da baliza ~~uma vez que~~  
~~é maior que 2,44, que é a altura da baliza~~ uma vez que  
2,6 é maior que 2,44.

Figura 4.3.4 – Cálculos e resposta final dados por Vénus  
(Fonte própria)

A interpretação feita por Júpiter evidencia que esta não teve em consideração o contexto do problema. Ao passo que na resolução da alínea a) as dificuldades sentidas estavam relacionadas com o esquecimento de uma técnica matemática, o obstáculo verificado na resolução da alínea seguinte trata-se da não contextualização dos dados fornecidos e calculados. O recurso a um esboço da situação descrita poderia ajudar a aluna a concluir que o seu raciocínio estava errado, mesmo se não conseguisse chegar ao raciocínio

correto. Esta resolução e a maneira de a colmatar apontam para a importância da exploração das representações múltiplas (Canavarro, 2017).

No grupo dois desta tarefa, Júpiter revela ter tido dificuldades na interpretação do enunciado, começando pela obtenção dos parâmetros que levam ao melhor ajuste da representação gráfica da função ao arco central da ponte (Figura 4.3.5), visto que a aluna procurou ajustar a representação gráfica ao primeiro arco.

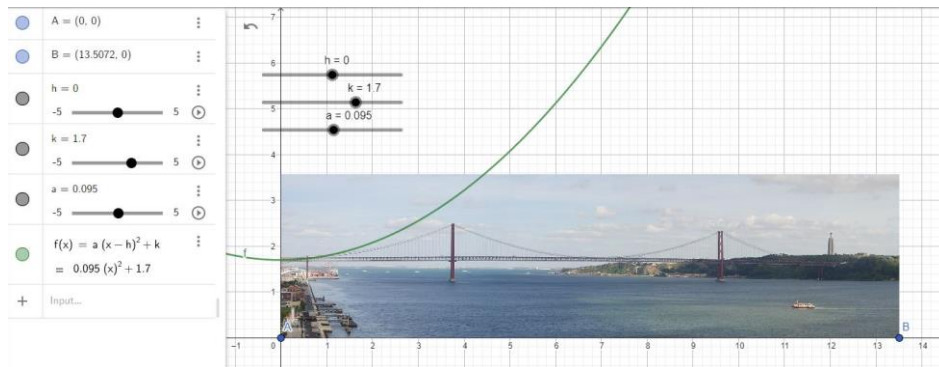


Figura 4.3.5 – Janela do GeoGebra fornecida por Júpiter (Fonte própria)

A Figura 4.3.6, por sua vez, mostra as dificuldades sentidas pela aluna na tentativa de partir do caso particular, observado na execução da pequena atividade de modelação, para a generalização a qualquer função do mesmo tipo.

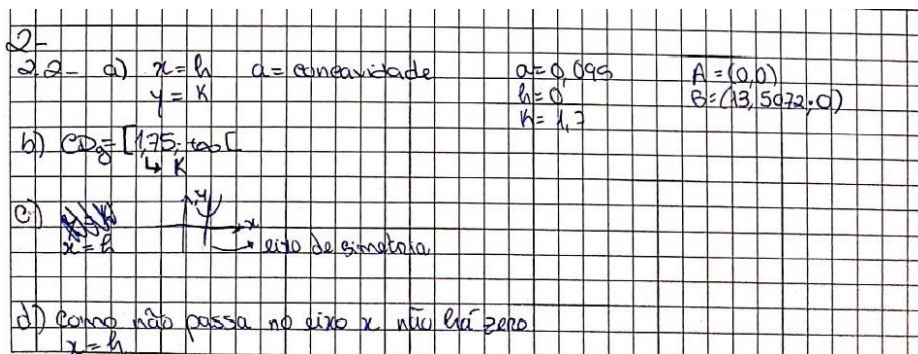


Figura 4.3.6 – Generalizações obtidas por Júpiter (Fonte própria)

Na alínea a), Júpiter generaliza o que obteve. No entanto, nas restantes alíneas, a aluna fica presa ao caso particular ao qual chegou. No caso do contradomínio solicitado na alínea b), mesmo tendo em conta o  $k$  anotado, refere apenas o contradomínio de uma função quadrática cujo parâmetro  $a$  é positivo. Por fim, na alínea c) é apresentado um esboço, que revela estabelecer uma relação com o caso particular da representação gráfica obtida e, na alínea d), a resposta fornecida também não foi ao encontro do que foi pedido, uma vez mais por ter sido contemplado o caso particular da atividade.

### Tarefa 3 – Funções definidas por ramos em contextos semirreais

Na questão 1 desta tarefa, Júpiter exclui as opções A e B usando o argumento de que o submarino parte da superfície da água e, logo, tem de começar o trajeto nos zero metros. No entanto, alarga este mesmo argumento à exclusão da hipótese D, o que demonstra que a aluna confundiu as variáveis independente, que corresponde ao tempo, e dependente, que corresponde à profundidade (Figura 4.3.5).

A opção é a (D), pois o submarino parte da superfície da água do mar, logo não pode ser a opção (A) e (B), porque tem de começar dos zeros metros por isso, também não pode ser a opção (C).

Figura 4.3.7 – Justificação apresentada por Júpiter  
(Fonte própria)

A aluna revela competência no uso da conexão com o contexto semirreal ao avaliar se as opções A e B fazem sentido. Porém, esquece-se do mesmo quando passa à exclusão da última opção, não tendo reparado que, neste caso, não era a variável associada à altura, a variável  $y$ , mas sim a variável associada ao tempo, a variável  $t$ , que tem o valor diferente de zero quando o submarino inicia o seu trajeto.

Na questão 1.2, é notório haver compreensão do contexto semirreal dado, existindo, ainda assim, dificuldades na transição dos dados fornecidos no enunciado para os cálculos efetuados e raciocínios feitos. Nomeadamente, os declives obtidos para as funções afim associadas a cada ramo (relacionados com o dado do problema que refere que o submarino percorre 2 metros por segundo na descida e na subida) estão corretamente traduzidos e o formato da representação gráfica da função também é o esperado mediante a situação descrita (Figura 4.5.6).

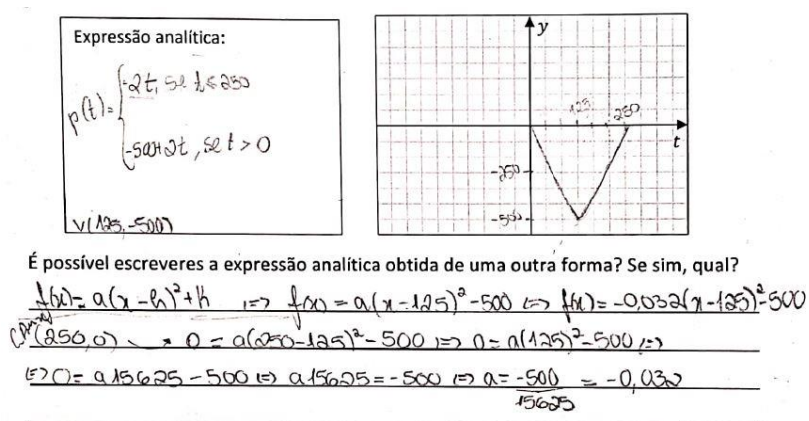


Figura 4.3.8 – Expressão analítica e representação gráfica apresentadas por Júpiter  
(Fonte própria)

Porém, a abcissa do vértice da função módulo tem um lapso e verifica-se o recurso à expressão reduzida de uma função quadrática, que não é o tipo da função em causa, sendo inclusivamente representada por uma parábola, não por duas semirretas. Apesar do erro, é posta em evidência uma conexão estabelecida, uma vez que o termo “vértice” levou a aluna a recorrer automaticamente ao tipo de expressão que está habituada quando se usa esse termo, isto é, a recorrer à expressão de uma função quadrática, algo que reforça a importância de se contemplar o conhecimento prévio do aluno (Stein & Smith, 1998).

Júpiter, em oposição aos anteriores estudos de caso, sente que o uso de letras diferentes para a variável dependente dificulta a analiticidade. No entanto, considera que esta estratégia é útil na transição do problema exposto para os cálculos necessários de fazer, como se pode notar na entrevista:

I: Relativamente ao uso das letras  $t$  e  $v$  para a variável independente das situações descritas, de que forma achas que esse uso impacta a compreensão, não só da situação descrita, como dos conceitos matemáticos?

J: Eu acho que há casos que ajudam e há outros que baralha um bocadinho.

I: E em que momentos achas que ajuda ou, pelo contrário, que baralha?

J: Eu acho que ajuda quando passamos da situação para as contas, mas baralha um bocadinho quando estamos a fazer contas.

Na questão 1.3, a aluna faz a alteração necessária e justifica a mesma com um raciocínio completo e sucinto, independentemente das incorreções da resolução da questão anterior perdurarem (Figura 4.3.7).

The image shows handwritten mathematical expressions and a justification. On the left, there are two piecewise functions:  $-2t$ , se  $t \leq 250$  and  $-500 + 4t$ , se  $t > 250$ . On the right, there is a justification in Portuguese: "Pois passa a subir 4 metros por segundo em vez de subir 2 metros por segundo, como no caso anterior, logo soma-se mais 4 metros por segundo aos metros de profundidade para se poder calcular os metros que ~~ela~~ sobem".

Figura 4.3.9 – Expressão analítica e justificação dadas por Júpiter (Fonte própria)

Quando questionada sobre a aplicação de tarefas com características semelhantes às aplicadas na investigação, Júpiter dá o seguinte parecer:

I: Tendo em conta o tipo de tarefas que realizámos, que benefícios achas que o uso das mesmas pode trazer, não só para a aprendizagem, mas também para o aprofundamento da compreensão das situações matemáticas apresentadas?

J: Eu acho que ajuda a compreender as coisas.

I: Queres desenvolver um bocado mais?

J: Pronto, eu acho que ajuda. Mas, se calhar, fazendo mais vezes este tipo de fichas ajudava a compreender melhor. Às vezes, neste tipo de exercício troco-me um bocado. Então, se fizermos mais vezes podia habituar-me e ajudar mais.

Júpiter salienta a importância da apropriação da realização deste tipo de tarefa para que os alunos tirem realmente partido das mesmas, nomeadamente para a sua aprendizagem e para a compreensão dos conceitos matemáticos.

### **Considerações finais**

Júpiter revelou uma evolução positiva nas resoluções que apresentou ao longo das tarefas aplicadas. Como referido acima, trata-se de uma aluna caracterizada pela sua perseverança e pelo seu espírito de iniciativa quando confrontada com desafios. Esta atitude refletiu-se na progressiva apropriação deste tipo de tarefas, ao verificar-se que as respostas de Júpiter vão sendo cada vez mais fundamentadas e completas.

Nas resoluções apresentadas pela aluna, é possível destacar algumas estratégias utilizadas: a utilização da calculadora gráfica para confirmação das respostas, no grupo 1 da tarefa 1 (segundo excerto da entrevista) e na questão 2.1 da tarefa 2 (terceiro excerto da entrevista); e o recurso a esboços auxiliares ao raciocínio exposto, na alínea 2.2c) da tarefa 2 (Figura 4.3.6).

A aluna manifesta destreza em momentos como a interpretação de partes do enunciado, na questão 2.1 da tarefa 1 (Figura 4.3.2); e a capacidade de generalização, na questão 2.2 da tarefa 1 (Figura 4.3.3). Em oposição a estes momentos, Júpiter revela menos proficiência na associação das variáveis ao conceito real que representam, na questão 1 da tarefa 3 (Figura 4.3.7) e no quinto excerto da entrevista; na manipulação algébrica, na alínea 1a) da tarefa 2 (Figura 4.3.4); na interpretação de partes do enunciado, no grupo dois da tarefa 2 (Figura 4.3.5); na capacidade de generalização, na questão 2.2 da tarefa 2 (Figura 4.3.6); na aplicação dos conhecimentos matemáticos previamente adquiridos à situação exposta, na questão 1.2 da tarefa 3 (Figura 4.3.8).

Por fim, relativamente às contribuições das conexões matemáticas para a compreensão da aluna sobre os conceitos do tópico de funções, destacam-se a associação dos conceitos reais em estudo com os conceitos matemáticos pelos quais estes são representados, na questão 1.1 da tarefa 1 (Figura 4.3.1); a fomentação da realização de generalizações, na questão 2.2 da tarefa 1 (Figura 4.3.3 e quinto excerto da entrevista) e na questão 2.2 da tarefa 2 (Figura 4.3.6); e a facilitação da transição dos dados fornecidos pelo enunciado para os raciocínios e cálculos apresentados (sexto excerto da entrevista).

#### 4.4 Estudo de caso: Saturno

Saturno é um aluno dedicado que demonstra consistentemente formas de pensamento que divergem do comum, fornecendo, muitas vezes, resoluções “fora da caixa” e não expectáveis. Este aluno procura ir sempre mais longe na busca pela razão de ser das coisas e não se contenta com um só método de resolução de determinado problema. Além disso, o seu nível de aproveitamento na disciplina de Matemática é muito bom.

Saturno fala sobre os seus hábitos de estudo na entrevista:

I: Fala-me dos teus hábitos de estudo especificamente em relação à disciplina de Matemática.

S: Matemática, não estudo lá muito. Só estudo quando tenho dúvidas e só estudo as fórmulas e, depois, faço exercícios. Eu só estudo, neste ano, a parte da Geometria e um bocadinho das Funções, só para saber os nomes e decorar os nomes, só isso. Depois, faço às vezes os trabalhos de casa.

#### Tarefa 1 – A função quadrática em contextos semirreais

No grupo um desta tarefa, o aluno tem respostas tão corretas quanto possível, apesar de não apresentar qualquer justificação textual (Figura 4.4.1). Desde as expressões analíticas, aos domínios e representações gráficas, as respostas são completas e corretas, incluindo o preciosismo das bolas abertas nas representações gráficas, que só falhou na alínea 1.1.

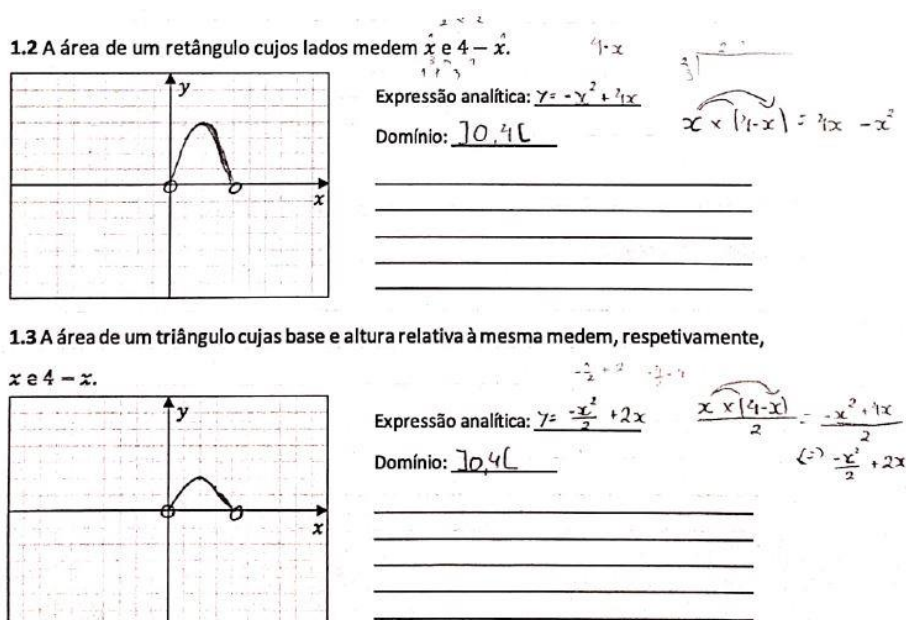


Figura 4.4.1 – Representações gráficas, expressões analíticas e justificações dadas por Saturno (Fonte própria)

Quando entrevistado, Saturno justifica as suas respostas:

I: Quero que me expliques a obtenção dos domínios e a razão pela qual esboçaste as representações gráficas da forma que esboçaste.

S: Aqui [alínea 1.2], como um lado mede  $x$  e o outro mede  $4 - x$ ,  $x$  tem de ser menor do que 4. Então,  $x$  tem de ser de 0 aberto a 4 aberto. Para a representação gráfica pensei nos zeros e no máximo. Depois, na última [alínea 1.3], é igual, mas o máximo é metade, porque na área do triângulo divide-se por 2.

Na questão 1 do grupo seguinte verifica-se o mesmo, sendo que a conclusão redigida não é tanto sobre a maneira como o valor do parâmetro  $m$  afeta a representação gráfica da função, como era pedido, mas sim sobre o modo como este afeta o sistema no geral (Figura 4.4.2).

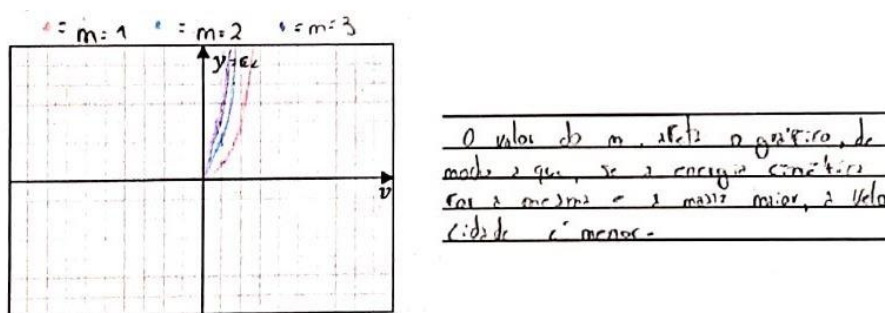


Figura 4.4.2 – Representações gráficas e justificação propostas por Saturno (Fonte própria)

Esta resposta revela dificuldades em corresponder ao que o enunciado pede, que é uma interpretação gráfica partindo dos conceitos físicos, e não uma interpretação física partindo da análise gráfica.

Relativamente à questão 2.2, Saturno completa a resposta dada (Figura 4.4.3) em contexto de entrevista:

**2.2** Atendendo aos valores que fazem sentido para  $m$  e para  $v$  explica que forma terá o gráfico da função  $E_c$ .

A forma do gráfico será metade de uma parábola, a do 1º quadrante

Figura 4.4.3 – Justificação proposta por Saturno (Fonte própria)

I: Fundamenta a tua resposta da alínea 2.2. Ou seja, os argumentos que te levaram a esta conclusão.

S: Então, o  $m$  é o que costuma ser o  $a$ . Como não há massas negativas, a concavidade é voltada para cima. Depois, como a velocidade é positiva, fica só no primeiro quadrante.

Verifica-se, assim, uma transição proficiente entre os conceitos matemáticos e o contexto semirreal em causa. Esta realidade confirma a importância que Ferri (2010) dá às conexões extramatemáticas, quando afirma que estas conduzem a uma visão da Matemática como catalisador da compreensão do mundo que nos rodeia.

No terceiro grupo, as respostas estão corretas quase na totalidade. Dá-se um pormenor interessante da exclusão do valor 0 para os instantes da alínea e), abordado na entrevista:

I: Vamos olhar para a tua resolução e resposta final da alínea e). Alterarias alguma coisa?

S: Poria o 0 e o 2,18 fechados. Porque é quando a bola ou está no chão ou está a ser lançada, que está abaixo de 4 metros.

Mais uma vez, tal como já foi possível observar nos anteriores estudos de caso, percebe-se a riqueza que os momentos de deteção de erros por parte do aluno trazem para a aprendizagem e o aprofundamento da compreensão de conceitos ou situações matemáticas.

### **Tarefa 2 – A função quadrática em resolução de problemas e em tarefas de modelação**

A resolução que Saturno apresenta para a questão 1 está completa e ilustra uma boa articulação das ferramentas matemáticas conhecidas com o que é pedido, como é possível aferir na Figura 4.4.4. É usada a técnica do completamento do quadrado de modo a obter-se a ordenada do vértice da parábola associada à função quadrática dada, que corresponde, finalmente, ao máximo da função e, logo, à altura máxima atingida pela bola.

1,  
2)

$$y = 0,32x - 0,01x^2 \quad \Leftrightarrow y = -0,01(x-16)^2 + 2,56$$

$$\Leftrightarrow y = -0,01x^2 + 0,32x$$

$$\Leftrightarrow y = -(0,01x^2 - 0,32x)$$

$$\Leftrightarrow y = -0,01(x^2 - 32x)$$

$$\Leftrightarrow y = -0,01((x-16)^2 - 256)$$

$$\Leftrightarrow y = -0,01[(x-16)^2 - 256]$$

A altura máxima atingida pela bola é de 2,56 m.

Figura 4.4.4 – Cálculos e resposta final dados por Saturno (Fonte própria)

Quanto à alínea b), um aspeto curioso na resolução proposta (Figura 4.4.5) é o facto de o aluno optar por traduzir o primeiro cálculo realizado em linguagem corrente, ao passo que no segundo cálculo realizado opta por traduzi-lo por meio de uma condição.

6.)  $y = 0,32x - 0,01x^2$   
 $\Leftrightarrow y = 0,32(9,15) - 0,01(9,15)^2$   
 $\Leftrightarrow y = 2,09$   
 A bola passa por cima da barreira.  
 $y = 0,32x - 0,01x^2$   
 $\Leftrightarrow y = 0,32(25) - 0,01(25)^2$   
 $\Leftrightarrow y = 1,75$   
 $1,75 < 2,44$   
 Sim.

Figura 4.4.5 – Cálculos e resposta final dados por Saturno  
 (Fonte própria)

Estas traduções, na realidade, complementam-se uma à outra. Com efeito, o raciocínio encontra-se quase completo. Por um lado, o primeiro cálculo avalia se a bola passa por cima da barreira e, de seguida, o segundo avalia se a bola passa por baixo da barra da baliza. Era, no entanto, expetável que o aluno apresentasse a desigualdade “ $2,09 > 1,95$ ”, que traduz o facto da altura da bola ser superior ao jogador mais alto da barreira, para concluir, por fim, que esta passa por cima da barreira. Em relação à segunda parte do raciocínio, era expetável que, depois de apresentada a desigualdade “ $1,75 < 2,44$ ”, que traduz que a altura da bola é inferior à altura da barreira quando esta passa a linha da baliza, fosse tirada precisamente esta conclusão. Em entrevista, procurou-se entender se o aluno passou por esse processo mentalmente, ainda que não tenha comunicado na sua resolução:

I: Na alínea b), tu fazes esta conta [ $y = 0,32(9,15) - 0,01(9,15)^2$ ] chegando ao valor de 2,09. Concluis, assim, que a bola passa por cima da barreira. Porquê?

S: Porque, quando se marca um livre, há uma barreira e os jogadores tinham uma altura que, não me lembro qual era, mas era mais baixa do que 2,09m. Então, a bola passa por cima da barreira e poderá chegar até à baliza.

I: O jogador mais alto tinha 1,95m, portanto, como disseste, esta altura é mais baixa do que 2,09m, que é a altura a que a bola passa na barreira. Que condição te levou a concluir que passa por cima da baliza?

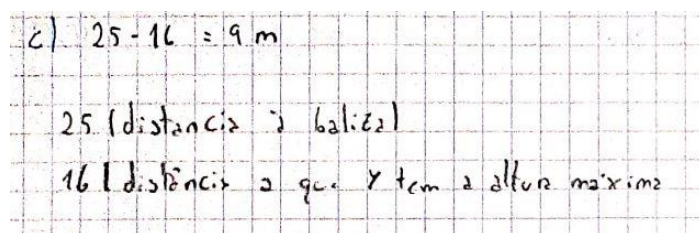
S:  $1,95m < 2,09m$ .

I: Correto. Olhando para o segundo cálculo que fizeste, identificaste a desigualdade, mas não concluíste por linguagem corrente como fizeste no primeiro cálculo. O que podes concluir?

S: Que a bola depois desceu e passou por baixo da [barra da] baliza.

Conclui-se que Saturno realizou todos os passos do raciocínio necessário, embora estes estejam ausentes na sua resolução. Desta forma, verifica-se que a sua compreensão do problema foi completa e que o aluno fez um tratamento correto dos dados, falhando apenas na comunicação matemática escrita.

Na resolução apresentada para a alínea c) foi feita uma interpretação inadequada do enunciado (Figura 4.4.6). Foi referido anteriormente que alguns alunos tinham resolvido esta alínea calculando a distância da projeção da bola no solo à linha da baliza, ao invés da distância da bola à linha da baliza. Saturno foi um desses alunos, como se pode observar.



c)  $25 - 16 = 9 \text{ m}$

25 (distância à baliza)

16 (distância a que  $x$  tem a altura máxima)

Figura 4.4.6 – Cálculos realizados por Saturno  
(Fonte própria)

O facto de um aluno que apresenta uma capacidade elevada de articular os dados das situações descritas com o seu conhecimento matemático, bem como a sua posterior utilização nos raciocínios efetuados, põe a claro uma particularidade importante. Na resolução apresentada, em contraste com a maioria das outras, não há nenhum esquema ilustrativo da situação, que poria de imediato em evidência a conceção errada de Saturno. Isto vem fundamentar a importância das representações múltiplas de uma mesma situação matemática para o aprofundamento da compreensão da mesma (Canavarro, 2017).

Quanto ao segundo grupo desta tarefa, o aluno revela ter tido dificuldades na interpretação do enunciado, ainda que não revele o mesmo erro na obtenção dos parâmetros que levam ao melhor ajuste da representação gráfica da função ao arco central da ponte (Figura 4.4.7).



Figura 4.4.7 – Janela do GeoGebra fornecida por Saturno  
(Fonte própria)

No entanto, quando o enunciado solicita generalizações, Saturno incorre no erro de responder apenas à situação específica visualizada no ecrã, no caso das alíneas b) e d). Relativamente às alíneas a) e c) o aluno obtém as generalizações esperadas (Figura 4.4.8).

2- A (0,0) B (50,0)  
 2.1-  
 $a = 0,0201$   
 $h = 25,5$   
 $k = 6,49$   
 2.2.  
 a)  $h = x_c$   $V = (h, k)$   
 $k = y$   
 b)  $CO_f \gg K$   $CO_f = [K, +\infty[$   
 c)  $x_c = h$   
 d) não existem

Figura 4.4.8 – Generalizações obtidas por Saturno  
(Fonte própria)

Como é possível observar, as respostas fornecidas para as alíneas b) e d) são atinentes ao caso particular obtido, não havendo a contemplação do caso em que o parâmetro  $a$  é negativo, na alínea b), nem, para alínea d), uma separação em casos distintos.

### Tarefa 3 – Funções definidas por ramos em contextos semirreais

Saturno, no contexto da questão 1 desta tarefa, fez um comentário pertinente. Nas opções de representações gráficas apresentadas pelo enunciado, encontramos funções módulo que têm início num segmento de reta ou semirreta descendente transitando, depois,

para um outro ascendente. Este aluno, não objetando a possibilidade de descrever a situação semirreal desta forma, pôs em hipótese se não seria possível descrevê-la com uma função módulo cujo primeiro ramo fosse ascendente e o segundo ramo descendente, uma vez que é possível pensar-se nos metros de profundidade como quantidades positivas. Esta atitude crítica e exploradora, no sentido de ir em busca de mais maneiras de explicar um mesmo fenómeno, é precisamente uma das grandes vantagens que as conexões matemáticas trazem para o aprofundamento da compreensão de conceitos matemáticos (Silva et al., 2023).

A proposta de resolução do aluno para a questão 1.2 demonstra um conforto claro na transição entre representações diferentes de uma mesma situação (Figura 4.4.9).

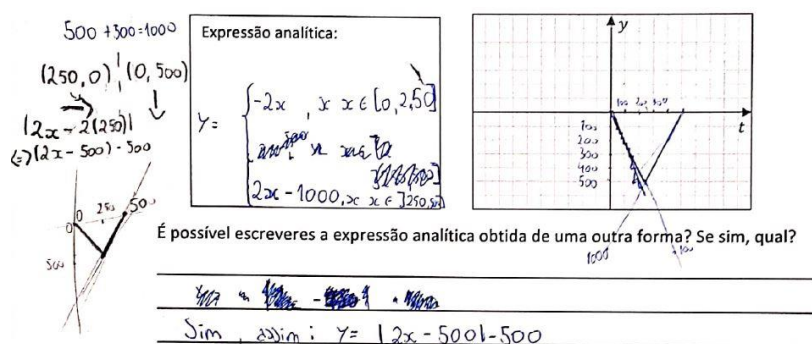


Figura 4.4.9 – Expressão analítica, representação gráfica e resposta dadas por Saturno (Fonte própria)

Saturno começou por obter a representação gráfica recorrendo aos dados fornecidos pelo enunciado. Relativamente à (primeira) expressão analítica apresentada, recorreu à representação gráfica para a obtenção da mesma, bem como das restrições impostas à variável independente, esboçando prolongamentos de cada ramo que o auxiliaram, nomeadamente, na obtenção do valor do termo independente da expressão do segundo ramo. Verificam-se, desta forma, dois usos distintos de conexões matemáticas. Primeiro, a passagem dos dados semirreais descritos para a representação gráfica e, posteriormente, a tradução da representação gráfica obtida para a expressão analítica que lhe está associada. Esta resolução é demonstrativa de uma compreensão aprofundada das ideias e conceitos matemáticos (Mendes, 2022).

Quanto à obtenção da expressão analítica alternativa, o aluno justifica-a com o uso de transformações de funções na entrevista (o raciocínio encontra-se parcialmente descrito na margem esquerda da folha (Figura 4.4.9):

I: Explica-me como chegaste à expressão analítica alternativa que deste.

S: Aqui este 500 [apontando para o  $-500$  fora do módulo] é porque o vértice encontra-se 500 abaixo, no  $-500$ . Depois, o  $2x - 500$  no módulo, é porque o submarino desce e depois sobe, então, num ponto tem que volta a subir.

I: Isso justifica o módulo certo. Mas e os valores que escolheste para os parâmetros?

S: O 2 é porque ele anda  $2m/s$ , então a cada segundo ele baixa  $2m$  e depois sobe.

I: E em relação ao  $-500$ ?

S: Como antes é aos 250s que ele sobe, tem de ser  $-500$ , porque o 2 faz o módulo encolher para o eixo dos  $yy$ .

O aluno partilha ainda ter visto um ponto específico para confirmar a sua resposta, uma técnica importante para a confirmação dos resultados.

Questiona-se, posteriormente, o aluno sobre a designação de uma variável com recurso a uma letra representativa do seu significado:

I: O uso de  $v$  ou de  $t$  para a variável independente de cada uma das situações descritas cria, na tua ótica, confusão ou faz sentido? Como afeta o estudo da situação descrita?

S: Eu estou tão habituado a usar o  $x$  e o  $y$ , que às vezes acabo por substituir os valores [as letras] diferentes de  $x$  por  $x$ , mas é natural. Se for um  $t$  não me causa diferença nenhuma, é completamente igual. (...) Eu acho que não influencia muito a compreensão dos contextos.

Saturno, por um lado, acha que o uso de outras letras para as variáveis não dificulta a resolução e compreensão dos problemas, mas, por outro lado, também não sente que facilite as mesmas.

Na questão 2 desta tarefa, o aluno apresenta uma resolução que abarca todas as soluções possíveis (Figura 4.4.10). A resolução mais exatável consiste em definir uma velocidade inicial específica para a resolução do problema. Porém, Saturno opta por apresentar uma resolução que inclui todos os possíveis cenários, atentando aos “casos limite”, isto é, aos casos da menor e maior velocidades iniciais possíveis. É notável o nível de generalização atingido pelo aluno.

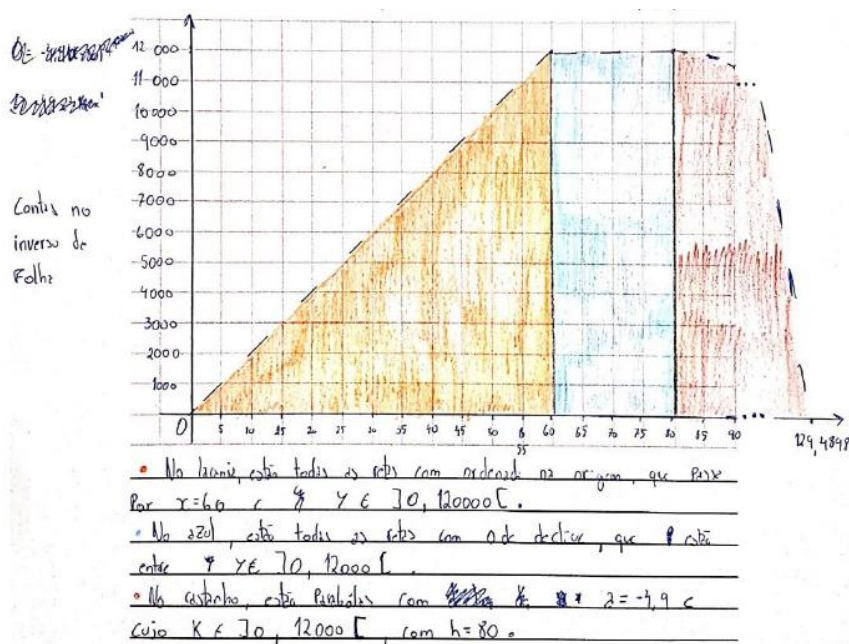


Figura 4.4.10 – Resolução proposta por Saturno  
(Fonte própria)

O investigador só interveio duas vezes na resolução de Saturno, a pedido do mesmo: a primeira, quando este afirmou não ter espaço para esboçar a representação gráfica completa, tendo o investigador sugerido que este usasse reticências numa parte da representação gráfica para demonstrar esse facto, como observável na Figura 4.4.10; a segunda, quando o aluno afirmou não conseguir explicar através de linguagem matemática todas as possibilidades para os ramos. Nesta segunda intervenção, o investigador começou por sugerir que o aluno justificasse com linguagem corrente, tendo este mais tarde afirmado ser-lhe mais difícil. Assim, o investigador deu a última sugestão, que consistiu em recomendar que o aluno usasse intervalos para indicar os diferentes valores possíveis para os coeficientes específicos de cada ramo. Ainda que tenha havido estas duas intervenções, considera-se que esta proposta de resolução mostra o potencial do recurso a este tipo de tarefas e ao estabelecimento de conexões matemáticas. O ponto de partida do problema, sendo mais sofisticado que os restantes, mantém-se relativamente simples. O facto de ser, ainda assim, possível atingir este tipo de resoluções, só reforça a importância da aplicação deste tipo de tarefas.

Saturno partilha a sua perspetiva relativamente à aplicação de tarefas como as que se realizaram no âmbito da investigação:

I: Olhando para o tipo de tarefas que realizámos, que benefícios achas que o uso das mesmas pode trazer, não só para a aprendizagem, mas também para o aprofundamento da compreensão das situações matemáticas apresentadas?

S: Sim, alguns exercícios, estes de justificação [apontando para o primeiro grupo da Tarefa 1], se calhar eram interessantes, embora eu não tenha justificado. Mas é bom saber que eles [os professores] entendem que nós percebemos. Porque muitas das pessoas sabem disto, mas não percebem o porquê. Sabem que  $y = x^2$  e depois não conseguem raciocinar que pode ser a área de um quadrado com a aresta. (...) O problema do futebol também foi engraçado, porque remete a uma situação real. Portanto, também gostei e é mais fácil de fazer nas aulas [do que a questão 2].

I: E além de gostares, afeta de alguma forma a compreensão dos conceitos matemáticos?

S: Para mim não, porque eu associo muito as coisas, mas para as pessoas que não associam tanto as coisas, se calhar, este tipo de problema [o da marcação do livre] abre-lhes mais a mente, porque pensam que, se calhar, pode não ser só um problema de matemática, também se pode aplicar a outras coisas e isso pode fazer as pessoas pensar.

O aluno reforça a importância de “associar as coisas”, que é uma expressão que aponta para o estabelecimento de conexões matemáticas. Apesar de afirmar que, para ele, não lhe faz diferença, uma vez que esse estabelecimento lhe ocorre naturalmente, revela ter noção do quão importante é fazê-lo, ao aferir que, para as pessoas que não “associam tanto as coisas” autonomamente, este tipo de tarefas tem o potencial de ajudar na compreensão dos conceitos matemáticos (Mendes, 2022).

### **Considerações finais**

Saturno revelou uma apropriação precoce do tipo de tarefa que foi aplicado. Nota-se, ainda assim, uma evolução nas resoluções apresentadas pelo aluno, que foram sendo mais completas e justificadas, seja através de linguagem corrente ou por meio de cálculos.

Nas resoluções apresentadas por Saturno, é possível destacar algumas estratégias utilizadas pelo aluno: a utilização de pontos específicos para esboçar a representação gráfica de uma função, na questão 1.2 da tarefa 3 (Figura 4.4.9); e o recurso a esboços auxiliares, na questão 1.2 da tarefa 3 (Figura 4.4.9).

O aluno manifesta destreza em momentos como a associação dos conceitos reais com as características dos conceitos matemáticos que os representam, nas questões 1.2 e 1.3 da tarefa 1 (Figura 4.4.1 e segundo excerto da entrevista) e na questão 2.2 da tarefa 1 (Figura 4.4.3 e terceiro excerto da entrevista); a capacidade de encarar a mesma situação de vários pontos de vista distintos, no comentário referido no primeiro parágrafo da análise da tarefa 3; na transição entre representações diferentes de uma mesma situação, na questão 1.2 da tarefa 3 (Figura 4.4.9); e na capacidade de generalização, na questão 2 da tarefa 3 (Figura 4.4.10). Em oposição a estes momentos, Saturno revela menos proficiência na interpretação

do que é pedido no enunciado, na questão 2.1 da tarefa 1 (Figura 4.4.2); e na comunicação matemática do seu raciocínio, na alínea 1b) da tarefa 2 (Figura 4.4.5) e no grupo dois da tarefa 2 (Figura 4.4.8).

Por fim, relativamente às contribuições das conexões matemáticas para a compreensão do aluno sobre os conceitos do tópico de funções, destaca-se o desenvolvimento da competência de comunicação matemática, na questão 2 da tarefa 3 (Figura 4.4.10).

## 4.5 Estudo de caso: Neptuno

Neptuno é uma aluna com um nível de aproveitamento bom na disciplina de Matemática. Revela destreza nos mecanicismos da disciplina e esforça-se por desenvolver a capacidade de interpretar situações específicas, nas quais faz um uso proficiente dos conhecimentos previamente adquiridos.

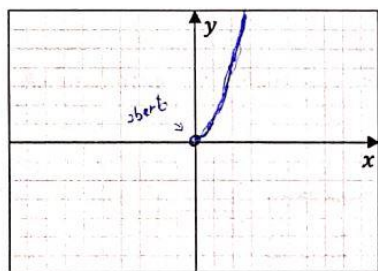
I: Fala-me dos teus hábitos de estudo especificamente em relação à disciplina de Matemática.

N: TPC, costumo fazer regularmente, que conta como estudo. Para os testes ou fichas, começo a olhar [para a matéria] uma semana antes, mas um bocadinho mais perto é que começo a estudar a sério. Mas pronto, costumo estudar a fazer os exercícios.

### Tarefa 1 – A função quadrática em contextos semirreais

As respostas dadas no grupo um desta tarefa estão completamente corretas e contemplam todas as nuances do problema, como se pode aferir pela resolução contemplada na Figura 4.5.1. Tanto as expressões analíticas e os respetivos domínios como as representações gráficas têm em consideração todos os pormenores, que são inclusivamente justificados com o texto apresentado.

#### 1.1 A área de um quadrado cujo lado mede $x$ .

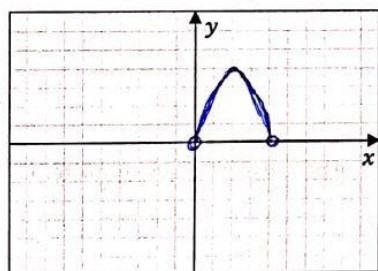


Expressão analítica:  $f(x) = x^2$

Domínio:  $\mathbb{R}^+$

Escolhi o domínio  $\mathbb{R}^+$  pois não existem áreas negativas e não existe comprimento negativo ou nulo. Escolhi esta expressão pois a área de um quadrado é dada por  $l^2$  ou nulo.

#### 1.2 A área de um retângulo cujos lados medem $x$ e $4 - x$ .



Expressão analítica:  $f(x) = -x^2 + 4x$

Domínio:  $]0, 4[$

Escolhi este domínio pois a área entre  $]0, 4[$  é sempre positiva. Escolhi esta expressão pois  $x(4-x) = 4x - x^2$ .

Figura 4.5.1 – Representações gráficas, expressões analíticas e justificações dadas por Neptuno (Fonte própria)

É enriquecedor o facto de a justificação fornecida para a alínea 1.2 não ser a mesma que a da alínea 1.1. Enquanto que a primeira é referente à variável independente e ao significado da mesma (comprimentos não podem ser negativos ou nulos) no contexto semirreal dado, a segunda aborda a variável dependente e o seu significado semirreal (áreas são positivas). A aluna podia cingir-se à primeira justificação, aferindo de forma análoga que, como os comprimentos são positivos, as expressões designatórias inerentes a cada lado têm de ser maiores que 0.

Na resposta fornecida à questão final do primeiro grupo, observa-se a conclusão esperada (Figura 4.5.2). Esta conclusão revela uma conexão forte entre as expressões analíticas obtidas, e as respetivas representações gráficas, e o significado geométrico associado às mesmas.

É possível estabelecer algum tipo de relação entre as funções que descrevem as situações em 1.2 e 1.3? Justifica.

é possível estabelecer que as áreas do função em 1.3 e metade do função em 1.2 uma vez que é desenhado um triângulo com os mesmos lados que o retângulo

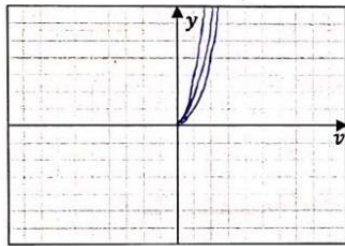
Figura 4.5.2 – Relação estabelecida por Neptuno  
(Fonte própria)

O uso do termo “lados” quando a aluna se refere simultaneamente ao triângulo e ao retângulo é interessante e leva a pensar que esta imaginou um triângulo retângulo, algo que faz sentido, tendo em conta a relação que se procura estabelecer, ainda que seja posteriormente generalizável a todos os triângulos cujas altura e base têm as medidas referidas. Quando questionada em âmbito de entrevista, a aluna justifica o seu raciocínio:

I: Quando dizes “com os mesmos lados” falando tanto do retângulo como do triângulo. O que te levou a fazê-lo?

N: Certo. Devia ser base e altura. Eu pensei em triângulos retângulos, mas funciona com os outros com a mesma base e altura.

Quanto à questão 2.1, Neptuno chegou a uma conclusão que explica realmente como o valor do parâmetro  $m$  afeta formato da representação gráfica da função em causa (Figura 4.5.3).



quanto maior a massa mais  
estreito será o período da  
oscilação análoga

Figura 4.5.3 – Representações gráficas e conclusão propostas por Neptuno  
(Fonte própria)

A aluna não respondeu à questão 2.2, mas o investigador optou por abordar a questão na entrevista:

I: Não respondeste à questão 2.2, queria-te ouvir falar sobre essa questão.

N: Os valores que fazem sentido para  $m$  e  $v$  são todos valores positivos. Então, o gráfico tem sempre de ser para aqui [aponta para o primeiro quadrante]. Eu não consigo explicar isso em texto.

Por fim, no terceiro grupo, os cálculos apresentados e os resultados finais estão completos e coerentes entre si, sendo revelada por parte da aluna agilidade em estabelecer a ponte entre a situação em causa e os mecanismos algébricos. Há uma incorreção na resposta dada na alínea e), onde houve um esquecimento do contexto semirreal do problema, ao ter apontado o extremo superior do intervalo como mais infinito, quando este deveria corresponder ao zero positivo da função (Figura 5.5.4 e Figura 5.5.5):

e)  $-5x^2 + 70x + 2 < 4$   
 $(\Rightarrow) -5x^2 + 70x - 2 < 0$

C.A

$$\rightarrow x^2 + 70x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-70 \pm \sqrt{70^2 - 4 \cdot (-2)}}{2 \cdot (-5)}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-70 \pm \sqrt{4900 + 8}}{-10}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-70 \pm \sqrt{4908}}{-10}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-70 + \sqrt{4908}}{-10} \quad \vee \quad x = \frac{-70 - \sqrt{4908}}{-10}$$

$$\Leftrightarrow x = 1 - \frac{1}{5} \sqrt{4908} \quad \vee \quad x = 7 + \frac{1}{5} \sqrt{4908}$$

$$\Leftrightarrow x \approx 0,23 \quad \vee \quad x = 7,77$$

C.S  $\in ]0,23[ \cup ]7,77; +\infty[$   
 no entanto não existe tempo infinito  
 logo o intervalo  $\in ]0,23[ \cup ]7,77; +\infty[$

Figura 4.5.4 – Cálculos efetuados por Neptuno  
(Fonte própria)

e) Os instantes em que a altura da bola é inferior a 4 metros (sob a forma de uma união de intervalos reais)

$$[0; 0,23[ \cup ] 1,72; 1,00[$$

Figura 4.5.5 – Resposta final dada por Neptuno  
(Fonte própria)

Há uma perda evidente do sentido do contexto do problema. Foi contemplado o facto do tempo não poder ser negativo, mas deixou-se de parte o facto da bola atingir o solo. Esta “perda” do contexto do problema dá-se na transição para a componente analítica da resolução. Este facto dá relevo à visão defendida por Ferri (2010) de que a Matemática deve potenciar a compreensão do mundo que nos rodeia, ao invés de ser vista como um conjunto de procedimentos fechados.

### Tarefa 2 – A função quadrática em resolução de problemas e em tarefas de modelação

À semelhança de casos anteriores, Neptuno recorreu à técnica de completamento do quadrado para a resolução da alínea da questão 1 desta tarefa. Quanto à alínea b), na qual a aluna apresenta uma resolução com o raciocínio correto (Figura 4.5.6), verifica-se o que se deu em casos analisados anteriormente. Isto é, não foi escrita qualquer justificação que explicasse o motivo de ter efetuado os cálculos.

b)

$$x = 25 \text{ metros}$$

$$y = -0,07 (25 - 16)^2 + 2,56$$
~~$$y = -0,07 \times 81 + 2,56$$~~
~~$$y = -0,567 + 2,56$$~~

$$y = -0,07 \times 81 + 2,56$$

$$y = -0,81 + 2,56$$

$$y = 1,75$$
  

$$x = 9 \text{ metros}$$

$$y = -0,07 (9 - 16)^2 + 2,56$$

$$y = -0,07 \times 49 + 2,56$$

$$y = -0,343 + 2,56$$

$$y = 2,217$$

R. Já pois está mais para 2,56 metros e não 2,217

Figura 4.5.6 – Cálculos e resposta final dados por Neptuno  
(Fonte própria)

Em contexto de entrevista, Neptuno explicitou o motivo dos cálculos realizados:

I: Explica-me os cálculos que fizeste nesta alínea [alínea b].

N: Eu acredito que os fiz na ordem errada. Fiz primeiro o verificar se entrava na altura da baliza. Teoricamente faria mais sentido eu verificar se passava por cima da coisa [barreira] e depois verificar se entrava na baliza. Este primeiro cálculo era para verificar se passava na baliza e o segundo se passava por cima da barreira.

É notório o uso imediato da competência de espírito crítico por parte do aluno. Esta competência, como referem Silva et al. (2023), está intrinsecamente ligada ao estabelecimento de conexões matemáticas.

Relativamente ao grupo dois desta tarefa, Neptuno obtém os valores adequados por forma a que a representação gráfica da função se ajuste ao arco central da ponte, como é pedido no enunciado (Figura 4.5.7).

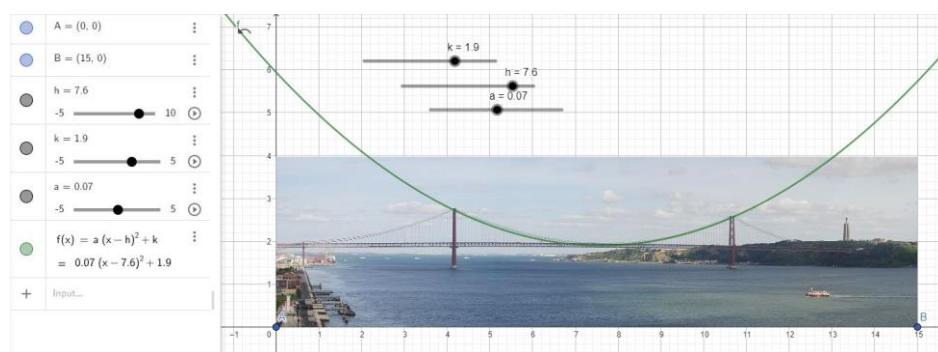


Figura 4.5.7 – Janela do GeoGebra fornecida por Neptuno  
(Fonte própria)

Quanto às generalizações solicitadas no enunciado, Neptuno dá respostas completas para as alíneas a), b) e c), deixando a alínea d) por responder (Figura 4.5.8). A destreza manifestada pelo aluno nesta proposta de resolução, no que toca à generalização feita partindo de um caso particular, revela um dos benefícios de desenvolver a capacidade de transitar entre diferentes representações de um mesmo conceito matemático (Canavarro, 2017).

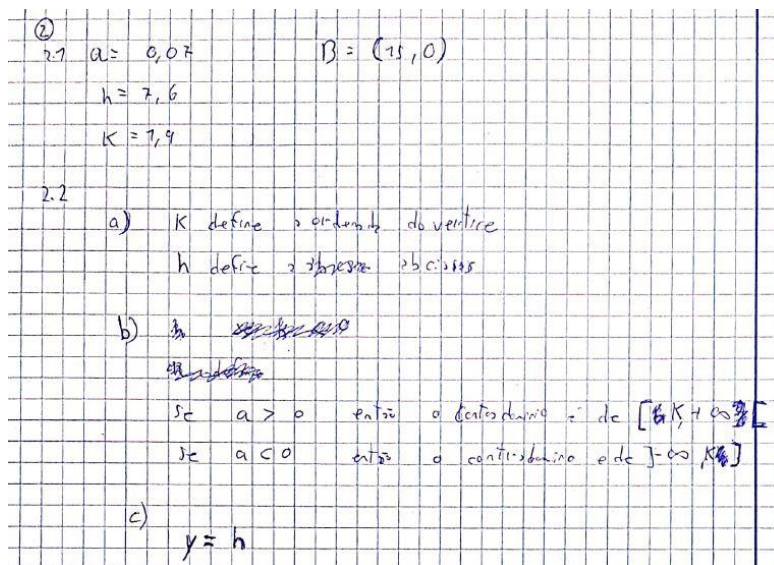


Figura 4.5.8 – Generalizações obtidas por Neptuno  
(Fonte própria)

O investigador sugeriu que Neptuno procurasse dar resposta à alínea d), recorrendo à mesma estratégia que utilizou nas restantes alíneas:

I: Olhando para as respostas que deste nas outras alíneas, tu pegaste nos parâmetros e deduziste quais afetavam cada uma das características da função e de que maneira. Pensa, então, na existência de zeros. Podes começar pelo caso que achas mais simples.

N: Não existe zero quando  $k$  é maior do que zero, certo?

I: Mas quando  $k$  é maior do que zero, mediante o tipo de concavidade que tens, poderás ou não ter zeros, certo?

N: Ah, sim. Quando a concavidade é para baixo e o  $k$  é maior do que zero temos dois zeros.

I: Exato, e que outros casos temos?

N: Se  $a$  for maior do que zero e o  $k$  for maior do que zero, então a função não tem zeros. Se  $a$  for maior do que zero e o  $k$  for zero, tem um [zero]. E depois são os casos inversos.

Assim, a aluna consegue esgotar os casos possíveis na relação dos parâmetros  $a$ ,  $h$  e  $k$  com a existência de zeros. Há dois aspetos a notar: o primeiro, que Neptuno chegou ao pretendido com algumas linhas orientadoras dadas pelo investigador; o segundo, que a aluna, apesar de ter esgotado os casos possíveis, não tem uma forma sistemática de o fazer. Nomeadamente, mantendo um dos parâmetros com a condição fixa e fazendo variar o outro, obtendo os casos diferentes de forma mais sistematizada.

### Tarefa 3 – Funções definidas por ramos em contextos semirreais

Neptuno, no âmbito da realização desta tarefa, fez um comentário relativamente à possibilidade de a representação gráfica iniciar-se com o ramo crescente e transitar para o decrescente, representando os valores positivos da profundidade ao invés dos valores negativos da altura. Esta atitude crítica e exploradora, caracterizada pela procura de várias maneiras de explicar o mesmo fenómeno, é uma das grandes vantagens que as conexões matemáticas trazem para o aprofundamento da compreensão de conceitos matemáticos (Silva et al., 2023).

Na pergunta 1.2, a aluna apresenta uma resolução que revela rigor matemático e algum formalismo, como ilustra a Figura 4.5.7. Neptuno começa por obter a função módulo e, depois, a expressão analítica como função definida por ramos caracterizando a função (isto é, apresentando o domínio e o contradomínio).

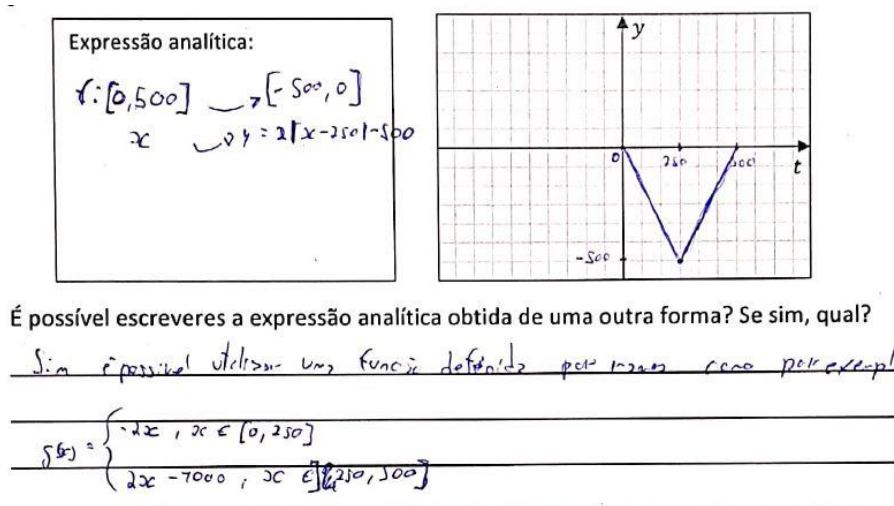


Figura 4.5.9 – Expressão analítica e representação gráfica apresentadas por Neptuno (Fonte própria)

Na entrevista, a aluna clarifica como chegou à expressão analítica apresentada:

I: Como obtiveste as expressões analíticas que escreveste?

N: Então, a primeira foi usar a função módulo e pensar nas coordenadas do “vértice”.

I: Certo. E como pensaste para chegar lá?

N: O  $-250$  e o  $-500$  são a coordenada do “vértice”. E depois tem de se pôr o  $2$  fora do módulo porque o submarino anda  $2m/s$ .

Quando questionada sobre a designação de uma variável com recurso a uma letra representativa do seu significado, Neptuno dá o seu parecer:

I: O uso de  $v$  ou de  $t$  para a variável independente de cada uma das situações descritas cria, na tua ótica, confusão ou faz sentido? Como afeta o estudo da situação descrita?

N: Eu acho que não me confunde. Por outro lado, ajuda ter letras que descrevam a situação porque é mais fácil olhar para aqui e ver, por exemplo, o tempo às vezes dá para confundir com a distância. Acho que entre ter um  $x$  ou ter um  $t$  ali, sendo que o  $t$  faz mais sentido, eu prefiro o  $t$ .

I: E a nível analítico, sentes alguma diferença?

N: Para mim, a nível analítico é indiferente. Fazer contas com letras diferentes vai dar ao mesmo.

A aluna partilha, noutro momento da entrevista, a sua visão sobre a aplicação de tarefas como as realizadas no âmbito da investigação:

I: Olhando para o tipo de tarefas que realizámos, que benefícios achas que o uso das mesmas pode trazer, não só para a aprendizagem, mas também para o aprofundamento da compreensão das situações matemáticas apresentadas?

N: Eu acho que meter assim problemas reais em vez de só coisas com números e perguntas diretas, não só é um bocadinho mais divertido do que só perguntas diretas, como acho que também ajuda a perceber em que é que estas matérias se podem aplicar.

Neptuno evidencia, assim, sentir a importância de contextualizar e articular a Matemática com as outras áreas do saber, atribuindo-lhe mais significado.

### **Considerações finais**

Neptuno apresentou resoluções consistentemente completas e fundamentada ao longo da realização das três tarefas aplicadas. As competências que a aluna revela no que toca à transposição dos dados fornecidos pelo enunciado para linguagem matemática e ao uso do conhecimento previamente adquirido e das ferramentas matemáticas já conhecidas, refletem-se numa menor recorrência a técnicas associadas ao estabelecimento de conexões matemáticas.

Nas resoluções apresentadas por Neptuno, as estratégias utilizadas pela aluna cingiram-se ao uso de ferramentas de manipulação algébrica.

O aluno manifesta destreza em momentos como a justificação das suas resoluções, nas questões 1.1 e 1.2 da tarefa 1 (Figura 4.5.1); a divisão da resolução de um problema em problemas mais pequenos, na alínea 1b) da tarefa 2 (Figura 4.5.6); e a generalização, partindo de um caso particular, na questão 2.2 da tarefa 2 (Figura 4.5.8). Em contrapartida, Neptuno revela menos proficiência na competência de comunicação matemática, na questão 2.2 da

tarefa 1 (terceiro excerto da entrevista); e na contemplação do contexto semirreal do problema na parte analítica da resolução do mesmo, na alínea 3.2e) da tarefa 1 (Figura 4.5.4 e Figura 4.5.5).

Por fim, relativamente às contribuições das conexões matemáticas para a compreensão da aluna sobre os conceitos do tópico de funções, destaca-se o facto de o uso de conexões conduzir de forma natural a interpretações corretas de um contexto semirreal, referido no sétimo excerto da entrevista.

## 5. Conclusões

Neste último capítulo, são expostas as conclusões resultantes da investigação realizada. Para tal, tem-se em consideração o conjunto de estudos de caso apresentados no capítulo anterior (Mercúrio, Vénus, Júpiter, Saturno e Neptuno).

Recorda-se que o estudo contemplado nesta dissertação tem como objetivo compreender que papel desempenham as conexões matemáticas na compreensão dos alunos sobre os conceitos do tópico de funções.

Recorda-se, ainda, as questões de investigação que constituíram a pedra angular do estudo realizado:

1. Que estratégias usam os alunos na realização de tarefas que envolvem conexões matemáticas entre diferentes conceitos, processos e representações matemáticas?
2. Quais os momentos da realização de tarefas com conexões matemáticas nos quais os alunos manifestam mais dificuldades ou, em contrapartida, mais destreza?
3. De que forma contribuem as conexões matemáticas para a compreensão dos alunos sobre os conceitos do tópico de funções e para a manipulação dos mesmos?

### 5.1 Recontextualização da fundamentação teórica e do referencial metodológico

#### Recontextualização da fundamentação teórica

Silva (2010) refere que um dos registos mais antigos que faz menção do uso de conexões matemáticas toma forma num trabalho do matemático Felix Klein, datado de 1908. Ponte (2010) acrescenta que o NCTM contribuiu para o destaque das conexões matemáticas. Canavarro (2017) menciona a importância da adoção de um termo específico para o conceito de conexões matemáticas por parte do NCTM no ano de 2000, defendendo que esta decisão atribuiu às conexões matemáticas “um estatuto igual ao da resolução de problemas ou raciocínio matemático” (p. 38). A categorização das conexões matemáticas surge gradualmente: primeiro, com a tripartição constituída por conexões dentro da própria matemática, conexões da matemática com a realidade, conexões da matemática com outras áreas científicas (Boavida et al., 2008), mais tarde com a subsequente bipartição do primeiro tipo, as conexões entre ideias matemáticas de um mesmo tema e entre ideias matemáticas de temas distintos (Ponte, 2010). Autores como Ferreira (2012) sistematizam a categorização em dois tipos e quatro subtipos de conexões, dois subtipos para cada tipo: 1. conexões matemáticas dentro da matemática (entre ideias de um mesmo tema e entre ideias de temas

distintos) e 2. conexões matemáticas fora da matemática (com a realidade e com outras áreas científicas). Investigadores com Ferri (2010) realçam a importância das conexões com a realidade, afirmando que a Matemática deve ser um propulsor para a compreensão e interação com o mundo que nos rodeia. Mendes (2022) reforça o papel de relevo que as conexões matemáticas desempenham, afirmando que as conexões intramatemáticas promovem uma compreensão profunda das ideias matemáticas, ao passo que as extramatemáticas contextualizam e dão significado à disciplina no âmbito das outras áreas do saber e do mundo real. São salientadas competências desenvolvidas ao recorrer-se ao uso de conexões matemáticas, nomeadamente o espírito crítico e a proficiência na aplicação da matemática (NCTM, 2007). O papel desempenhado pelo professor confere um aspeto incontornável para a boa implementação das conexões no processo ensino-aprendizagem (Cebola, 2011; Ponte, 2014), além do mais, os recursos promotores de conexões são um objeto ao qual é necessário dar relevância e cuja construção e implementação devem ser realizadas de forma premeditada e intencional (Cavaco, 2015; Jacinto & Pires, 2019). Para tal, há características que uma tarefa deve albergar de modo a que seja, com efeito, uma tarefa eficaz no estabelecimento de conexões matemáticas. Entre estas, dá-se especial destaque à presença de um elevado nível de exigência cognitiva (Stein & Smith, 1998); à exploração de representações múltiplas e das suas inter-relações (Canavarro, 2017; NCTM, 2017); ao recurso a tecnologias, nomeadamente à calculadora gráfica, a *software* de geometria dinâmica ou a sensores (Duarte, 2010; Santos-Trigo, 2004; Silva, 2010; Yao & Manouchehri, 2019); e à presença de múltiplas soluções (Leikin & Levav-Waynberg, 2007).

### **Recontextualização do referencial metodológico**

A metodologia utilizada neste projeto de investigação foi de natureza qualitativa e de carácter interpretativo (Bogdan & Biklen, 1994). No que concerne à estratégia utilizada, optou-se por efetuar estudos de caso (Yin, 2003). Os instrumentos de recolha de dados escolhidos foram a observação-participante, a entrevista, o diário de bordo e a recolha documental (Bogdan & Biklen, 1994).

A recolha de dados teve como objeto central três tarefas individuais. A primeira, aplicada em sala de aula a todos os alunos da turma, por uma questão de abrangência, e as segunda e terceira aplicadas a um grupo reduzido de alunos, numa sala à parte, de modo a focalizar os dados. No decorrer tanto da aula como dos segundo e terceiro momentos de aplicação de tarefas, o investigador recorreu à observação direta (participante) e ao diário de bordo como instrumentos de recolha de dados. No fim desses momentos, procedeu à recolha das resoluções realizadas pelos alunos para posterior análise (recolha documental). Por fim, realizaram-se entrevistas individuais (semiestruturadas) com a finalidade de compreender o raciocínio do aluno entrevistado.

## 5.2 Considerações finais

Encarando os estudos de caso de forma global, verificou-se uma evolução na apropriação progressiva, não só de estratégias de resolução que envolvem conexões matemáticas, como da realização do tipo de tarefas que foi aplicado no contexto da investigação realizada. Nos casos de Mercúrio e de Neptuno evidencia-se uma apropriação precoce do tipo de tarefas, ao apresentarem resoluções completas desde a primeira aplicação, ainda que Neptuno recorra menos a técnicas que envolvam o estabelecimento de conexões matemáticas. Nos restantes casos, verifica-se um aumento progressivo na fundamentação das respostas fornecidas.

### 5.2.1 Estratégias utilizadas pelos alunos

Verificou-se um uso generalizado de raciocínios suportados em conexões matemáticas estabelecidas, ainda que com claros matizes no nível de competência. Houve um uso constante de representações múltiplas de uma mesma situação matemática (Canavarro, 2017), tanto no recurso a esboços ou diagramas auxiliares, como na designação atribuída a variáveis, mediante o conceito real que estas representam. O recurso a esta estratégia, apesar de ter sido facilitado pelas características das tarefas, também surgiu por iniciativa dos participantes, sem que esta fosse necessária para as resoluções. Júpiter, em particular, recorreu à calculadora gráfica para facilitar a visualização de representações gráficas de algumas funções. Esta estratégia revelou-se frutífera, na medida em que, quando é feita uma transposição coerente para o papel, as justificações e conclusões obtidas são ricas e não comprometem o aprofundamento da compreensão do aluno. Além disso, como refere o NCTM (2007), a calculadora gráfica ajuda a quebrar fronteiras artificiais entre os diferentes tópicos da matemática e potencia a manipulação de representações distintas e a capacidade de transitar entre as mesmas. A utilização de pontos específicos para esboçar a representação gráfica de uma função também foi recorrente, constituindo uma técnica do uso de casos particulares por forma, ou a compreender uma dada situação de forma mais geral, ou a sustentar a resposta final. No caso de Vénus, verificou-se o uso de ferramentas associadas a outro tema da Matemática, mais especificamente, a ferramentas do tema de Geometria. O facto destas estratégias estarem presentes nas resoluções apresentadas em vários estudos de caso, independentemente do nível de aproveitamento e proficiência do aluno na disciplina de Matemática, leva a concluir que estas estão acessíveis a todos e são benéficas à aprendizagem de uma amplitude vasta de alunos.

### 5.2.2 Momentos da realização das tarefas onde os alunos manifestaram mais dificuldades ou mais destreza

As dificuldades apresentadas ao longo das resoluções analisadas são igualmente gerais. Considerando as fragilidades apresentadas, as mais generalizadas foram em momentos como: a capacidade de efetuar generalizações; a contemplação do contexto semirreal da situação descrita quando se encontram na componente analítica da resolução; e a exaustão de casos distintos de uma situação. Outras dificuldades verificadas, ainda que para um número menos alargado de casos, foram: a transição dos dados do problema para a linguagem matemática representativa dos mesmos, mais concretamente, na associação das variáveis com o conceito real que estas representam; a manipulação algébrica; a interpretação do enunciado, mais especificamente, a transposição dos dados fornecidos pelo enunciado para os cálculos realizados; a aplicação de conhecimentos e ferramentas matemáticas previamente adquiridos; e, por fim, a comunicação matemática.

Entre os momentos em que os alunos revelaram possuir mais destreza, o mais generalizado foi a transição entre diferentes representações de uma mesma situação matemática e a interpretação de uma à luz das outras. Outros momentos em que alunos em particular revelaram competência, ainda que possam constituir uma exceção às dificuldades acima expostas, foram: a obtenção de uma função, partindo de um conjunto de dados fornecidos no enunciado; a deteção de erros nas próprias resoluções; a realização de generalizações; a seleção dos dados fornecidos pelo enunciado; a identificação de casos distintos de uma determinada situação; a capacidade de encarar a mesma situação de vários pontos de vista distintos; e a capacidade de dividir a resolução de um problema em resoluções de problemas mais pequenos.

### 5.2.3 Contribuições das conexões matemáticas para a compreensão sobre os conceitos do tópico de funções

Relativamente aos benefícios que o uso de conexões matemáticas acarreta para a compreensão sobre conceitos do tópico de funções, estes foram não só expostos pelos alunos participantes no contexto de entrevista, como evidenciados nas resoluções dos mesmos. Destacam-se, entre estes: a facilitação da deteção do erro proveniente do contexto semirreal dado e a promoção da associação dos conceitos reais em estudo com os conceitos matemáticos pelos quais estes são representados. Ainda foram observadas outras contribuições manifestadas pelos alunos nas suas resoluções ou partilhadas em âmbito de entrevista, ainda que menos generalizadas: a compreensão da forma como os coeficientes dos termos de uma função quadrática afetam a sua representação gráfica; o desenvolvimento da capacidade de encarar a mesma situação matemática de vários pontos de vista (nomeadamente, recorrendo a representações múltiplas); a promoção de uma transição

proficiente entre os conceitos matemáticos e conceitos doutras áreas científicas; a facilitação da visualização e compreensão dos conceitos matemáticos; a fomentação da realização de generalizações; a facilitação da transição dos dados fornecidos pelo enunciado para os raciocínios e cálculos apresentados; o desenvolvimento da competência de comunicação matemática; e a facilitação de uma interpretação correta de um contexto semirreal.

### **5.3 Propostas de futuras investigações**

O estudo efetuado é relevante e acresce à investigação em Educação da Matemática, na medida em que há uma crescente importância a ser dada às competências desenvolvidas pelo uso de conexões matemáticas no ensino e na aprendizagem da disciplina. A interdisciplinaridade e a interação com o mundo real são, também, aspetos que dão relevo a este estudo, algo confirmado pelo rumo que as Aprendizagens Essenciais recentemente homologadas tomaram.

Para futuras investigações, sugerem-se algumas questões orientadoras que poderão levar a uma melhor compreensão do impacto que o uso de conexões matemáticas tem para a aprendizagem da Matemática e ainda a melhor forma de o implementar no ensino:

1. Que tipos de tarefas conduzem os alunos ao estabelecimento de conexões matemáticas de forma autónoma?
2. Qual é a atitude que o professor deve adotar na aplicação de tarefas que envolvam conexões matemáticas, por forma a catalisar o aproveitamento dos alunos?

Após o estudo realizado, o investigador sugere a aplicação de tarefas com conexões matemáticas, nomeadamente envolvendo contextos semirreais, desde o 3.º ciclo do Ensino Básico. Uma das características observadas, tanto nas resoluções dos alunos, como nos seus comentários feitos em âmbito de entrevista, foi a falta de apropriação da realização de tarefas deste carácter por parte dos alunos. A aplicação regular e progressiva deste tipo de tarefas poderá beneficiar as aprendizagens dos alunos e o ensino da disciplina de Matemática.



## 5. Referências

- Alves, D. F. L. (2018). *As aplicações da Função Quadrática no dia a dia, uma experiência com alunos de 10º ano numa turma de Ciências e Tecnologias*. [Relatório de estágio de mestrado, Instituto de Educação da Universidade do Minho]. RepositóriUM. <http://repositorium.sdum.uminho.pt/bitstream/1822/58347/1/Relat%C3%B3rio%20de%20Est%C3%A1gio%20D%20Filipa%20Lopes%20Alves.pdf>
- Araújo, P. V. (1998). *Curso de Geometria*. Gradiva.
- Blum, W., Galbraith, P. L., Henn, H.W., & Niss, M. (2007). *Modelling and applications in mathematics education*. Springer. <https://link.springer.com/book/10.1007/978-0-387-29822-1>
- Boavida, A. M., Paiva, A. L., Cebola, G., Vale, I., & Pimentel, T. (2008). *A Experiência Matemática no Ensino Básico*. DGIDC, ME.
- Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Porto Editora.
- Bregman, R. (2021). *Humanidade: Uma História de Esperança*. Bertrand Editora.
- Businskas, A. (2008). *Conversations about connections: How secondary mathematics teachers conceptualise and contend with mathematical connections*. [Unpublished doctoral dissertation Simon Fraser University]. Summit Research Repository. <https://core.ac.uk/download/pdf/56373465.pdf>
- Canavarro, A. P. (2017). O que a investigação nos diz acerca da aprendizagem da Matemática com conexões – ideias da teoria ilustradas com exemplos. *Educação e Matemática*, 144-145, 38–42.
- Canavarro, A. P., Mestre, C., Gomes, D., Santos, E., Santos, L., Brunheira, L., Vicente, M., Gouveia, M. J., Correia, P., Marques, P. M., & Espadeiro, R. G. (2021). *Aprendizagens Essenciais de Matemática no Ensino Básico. Articulação com o Perfil dos Alunos*. ME-DGE. <https://www.dge.mec.pt/noticias/aprendizagens-essenciais-de-matematica>
- Cavaco, L. (2015). *Relatório de atividade profissional para obtenção do grau de mestre* [Tese de Mestrado, Universidade do Algarve]. Repositório da Universidade do Algarve. <http://hdl.handle.net/10400.1/7994>
- Cebola, G. (2011). Conexões matemáticas – Números e representações geométricas. *Educação e Matemática*, 114, 44-46.
- Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2017). *Research methods in education*. Routledge.

Duarte, J. (2010). Conexões matemáticas e tecnologias. *Educação e Matemática*, 110, 64-67.

Eden, D. (2016). *Self-Fulfilling Prophecy and the Pygmalion Effect in Management*. Oxford Bibliographies.

Ellison, K. (2015, Outubro 29). *Being Honest About the Pygmalion Effect*. Discover Magazine. <https://www.discovermagazine.com/mind/being-honest-about-the-pygmalion-effect>

Estrada, M. F., Correia de Sá, C., Queiró, J. F., Silva, M. C., & Costa, M. J. (2000). *História da Matemática*. Universidade Aberta.

Ferreira, C. D. (2012). *Conexões matemáticas em álgebra: um estudo com alunos do 7º ano de escolaridade*. [Relatório de estágio de mestrado, Instituto de Educação da Universidade de Lisboa]. Repositório da Universidade de Lisboa. <http://hdl.handle.net/10451/7694>

Ferri, R. B. (2010). Estabelecendo conexões com a vida real na prática da aula de Matemática. *Educação e Matemática*, 110, 19-25.

Jacinto, H., & Pires, M. V. (2019). Tarefas e recursos para a promoção de conexões matemáticas. In N. Amado, A.P. Canavarro, S. Carreira, R.T. Ferreira & I. Vale (Eds.) *Livro de Atas do EIEM 2019, Encontro de Investigação em Educação Matemática* (pp. 189-195). Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática. [https://spiem.pt/DOCS/ATAS\\_ENCONTROS/atas\\_EIEM\\_2019.pdf](https://spiem.pt/DOCS/ATAS_ENCONTROS/atas_EIEM_2019.pdf)

Jussim, L., & Harber, K. D. (2005). Teacher Expectations and Self-Fulfilling Prophecies – Knowns and Unknowns, Resolved and Unresolved Controversies. *Personality and Social Psychology Review*, 9(2), 131-155. [https://doi.org/10.1207/s15327957pspr0902\\_3](https://doi.org/10.1207/s15327957pspr0902_3)

Leikin, R., & Levav-Waynberg, A. (2007). Exploring mathematics teacher knowledge to explain the gap between theory-based recommendations and school practice in the use of connecting tasks. *Educational Studies in Mathematics*, 66(3), 349–371. <https://www.researchgate.net/publication/225612738>

Mendes, F. (2022). Conexões matemáticas em debate: matemática no património cultural material de Setúbal. *Educação e Matemática*, 164, 6-10.

Negra, C., Martinho, E., & Martins, H. (2015a). *Dimensões Matemática 10.º ano – Manual do Aluno (Volume 2)*. Santillana.

Negra, C., Martinho, E., & Martins, H. (2015b). *Dimensões Matemática 10.º ano – Manual do Aluno (Volume 3)*. Santillana.

Negra, C., Martinho, E., & Martins, H. (2015c). *Dimensões Matemática 10.º ano – Caderno de Atividades*. Santillana.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar*. APM.

NCTM (2017). *Princípios para a Ação – Assegurar a todos o sucesso em Matemática*. APM.

Noss, R., Healy, L., & Hoyles, C. (1997). The construction of mathematical meanings: Connecting the visual with the symbolic. *Educational Studies in Mathematics*, 33(2), 203–233. <https://www.jstor.org/stable/3482643>

Paiva, J. (2019). As conexões entre alunos e computador num ambiente de geometria dinâmica. In N. Amado, A.P. Canavarro, S. Carreira, R.T. Ferreira & I. Vale (Eds.) *Livro de Atas do EIEM 2019, Encontro de Investigação em Educação Matemática* (pp. 235-249). Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática. [https://spiem.pt/DOCS/ATAS\\_ENCONTROS/atas\\_EIEM\\_2019.pdf](https://spiem.pt/DOCS/ATAS_ENCONTROS/atas_EIEM_2019.pdf)

Ponte, J. P. (2010). Conexões no Programa de Matemática do Ensino Básico. *Educação e Matemática*, 110, 3-6.

Ponte, J. P. (2014). Tarefas no ensino e na aprendizagem da Matemática. In *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática* (pp. 13-27). Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. <https://www.researchgate.net/publication/275409996>

Poupart, J. (2008). A entrevista de tipo qualitativo: considerações epistemológicas, teóricas e metodológicas. In J. Poupart, J. Deslauriers, L. Groulx, A. Laperrière, R. Mayer & A. Pires. *A pesquisa qualitativa, Enfoques epistemológicos e metodológicos* (pp. 215-253). Editora Vozes.

Richardson, R. J. (1999). *Pesquisa social: Métodos e técnicas*. Altas S.A.

Santos-Trigo, M. (2004). The role of technology in students' conceptual constructions in a sample case of problem solving. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 26(2), 1–17. <https://www.researchgate.net/publication/226283729>

Skovsmose, O. (2000). Cenários para investigação. *Bolema*, 14, 66-91.

Silva, J. C. (2010). Conexões Matemáticas no Ensino Secundário. *Educação e Matemática*, 110, 3-6.

Silva, J. C., Rodrigues, A., Domingos, A., Albuquerque, C., Cruchinho, C., Martins, H., Almiro, J., Gabriel, L., Martins, M. E. G., Santos, M. T., Filipe, N., Correia, P., Espadeiro, R. G., & Carreira, S. (2023). *Aprendizagens Essenciais de Matemática A. Articulação com o Perfil dos Alunos. 10.º ano. Ensino Secundário.* ME-DGE.

[https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens\\_Essenciais/mat\\_a\\_10\\_vf.pdf](https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/mat_a_10_vf.pdf)

Silverman, F. H. (1988). The “Monster” Study. *Journal of Fluency Disorders*, 13(3), 225-231. <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/0094730X88900496?via%3Dihub>

Stein, M. K., & Smith, M. S. (1998). Mathematical Tasks as a Framework for Reflection: From Research to Practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 3(4), 268–275. NCTM. <https://pubs.nctm.org/view/journals/mtms/3/4/article-p268.xml>

Yao, X., & Manouchehri, A. (2019). Middle school students’ generalizations about properties of geometric transformations in a dynamic geometry environment. *The Journal of Mathematical Behavior*, 55, 1-19. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2019.04.002>

Yin, R. (2003). *Case study research: design and methods*. Sage Publications.

Weinstein, R. S. (2018). Pygmalion at 50 – harnessing its power and application in schooling. *Educational Research and Evaluation*, 24(3-5), 346-365. <https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/13803611.2018.1550842?journalCode=nere>

20

# Anexo 1 (Plano de tema)

## Plano de tema – Funções reais de variável real (14 aulas previstas)

### Aula 1

**Conteúdos:** Generalidades acerca de funções reais de variável real. Funções reais de variável real; Funções definidas por expressões analíticas; Zeros de uma função.

#### Momentos da aula:

- Definição de funções reais de variável real, diferenciando estas das do capítulo passado;
- Definição de zeros de uma função, através de um exemplo genérico com funções definidas analiticamente e graficamente (iniciar recurso à calculadora);
- Exemplos para determinar o domínio de uma função;
- Exercícios 6 (p. 32) e 8 (p. 33);
- **TPC:** 2, 4, 9 e 10 (pp. 30-33).

### Aula 2

**Conteúdos:** Paridade de uma função; Simetria dos gráficos das funções pares e das funções ímpares.

#### Momentos da aula:

- Correção do TPC;
- Definição de função par;
  - Exemplo com expressões analíticas;
  - Exemplo com funções definidas graficamente (uso da calculadora gráfica);
  - Exercício 11 (p. 34) (com calculadora e algebricamente);
  - Exercício 14 (p. 35);
- Definição de função ímpar;
  - Exemplo com expressões analíticas;
  - Exemplo com funções definidas graficamente (uso da calculadora gráfica);
  - Exercício 15 (p. 35) (com calculadora e algebricamente);
  - Exercício 18 (p. 36) e exemplos adicionais semelhantes;
- Exercícios 12, 16 e 17 (pp. 34-36);
- **TPC:** 13 (p. 34) e 19 (p. 36).

### Aula 3

**Conteúdos:** Relação geométrica entre o gráfico de uma função e o da respetiva inversa; Translações de gráficos de funções; Contrações/dilatações de gráficos de funções; Relação entre o gráfico de uma função e os gráficos das funções  $af(x)$ ,  $f(bx)$ , com  $a$  e  $b$  reais positivos.

#### Momentos da aula:

- Correção do TPC;
- Relação geométrica entre o gráfico de uma função e o da respetiva inversa;
  - Dar dois exemplos de funções definidas analiticamente e pedir a expressão das respetivas inversas;
  - Representar graficamente os dois pares e averiguar a relação;
  - Usar dois pontos  $A$  e  $B$  pertencentes às funções e verificar que a reta de equação  $y = x$  é a mediatriz de  $[AB]$ .
- Exemplo de um gráfico com pontos notáveis para estudar:
  - Translações verticais e horizontais de gráficos de funções;
  - Contrações/Dilatações verticais e horizontais de gráficos de funções;
- Exercícios 28 (p. 42) e 30 (p. 44);
- **TPC:** 20-22, 24, 25 e 27 (pp. 37-41) e 29 (p. 34).

### Aula 4

**Conteúdos:** Reflexões e gráficos de funções; Relação entre o gráfico de uma função e os gráficos das funções  $-f(x)$ ,  $f(-x)$ .

#### Momentos da aula:

- Correção do TPC;
- Relação entre o gráfico de uma função e os gráficos das funções  $-f(x)$ ,  $f(-x)$ .
  - Averiguar relação com recurso à calculadora gráfica;
  - Generalização;
- Exercícios 33, 34, 37 (alíneas a e b) e 39 (pp. 45-48);
- **TPC:** 35, 36 e 38 (pp. 45-47).

### Aula 5

**Conteúdos:** Aula prática

#### Momentos da aula:

- Correção do TPC;
- Ficha de avaliação de conhecimentos (pp. 50-53).

## Aula 6

**Conteúdos:** Intervalos de monotonia de uma função real de variável real. Extremos absolutos de uma f.r.v.r.

### Momentos da aula:

- Exemplo de gráfico de uma função com intervalos em que seja crescente e decrescente (estritamente ou em sentido lato) e constante e posterior generalização);
- Exemplo genérico com a função quadrática ( $y = ax^2$ ), de maneira a estudar a relação entre a monotonia da função com o parâmetro  $a$ .
- Usar o primeiro gráfico para estudar:
  - Extremos absolutos;
  - Quadro de variação;
  - Majorante e minorante;
  - Noção de função limitada;
- Exercícios 2, 3, 7, 8 e 10 (pp. 55-62);
- **TPC:** 1, 4-6 e 9 (pp. 54-62).

## Aula 7

**Conteúdos:** Vizinhança de um ponto da reta numérica; extremos relativos de uma f.r.v.r.

### Momentos da aula:

- Correção do TPC;
- Exemplo de um gráfico para estudar os extremos relativos e a vizinhança de um ponto;
- Exercícios 12, 13 e 14 (pp. 64-65);
- **TPC:** 11 (p. 63); páginas 70-73 (exceto 7, 8 e 18).

## Aula 8

**Conteúdos:** Sentido da concavidade do gráfico da função quadrática definida por  $f(x) = ax^2, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

### Momentos da aula:

- Exemplo com um gráfico para estudar a relação entre o sentido da concavidade com o parâmetro  $a$ ;
- Exercícios 7, 8 e 18 (pp. 71-73), 15 e 16 (pp. 67-68);
- **TPC:** 17 (p. 69) e 1 (p. 49, Caderno de Atividades).

## Aula 9

**Conteúdos:** Aula prática

**Momentos da aula:**

- Correção do TPC;
- (Caderno de Atividades) 1-8 (pp. 40-41);
- **TPC:** (Caderno de Atividades) 1-8 (pp. 38-39).

## Aula 10

**Conteúdos:** Aula prática

**Momentos da aula:**

- Correção do TPC;
- Teste 7 (pp. 74-75);
- **TPC:** (Caderno de Atividades) 1-8 (p. 48) e 4 (p. 49).

## Aula 11

**Conteúdos:** Estudo elementar das funções quadráticas; Zeros, sinal e concavidade.

**Momentos da aula:**

- Noção de função quadrática ( $y = ax^2 + bx + c$ );
  - Dar exemplos;
- Determinar o vértice  $V(x_V, y_V)$  de uma parábola, onde  $v_x = -\frac{b}{2a}$  e  $v_y = f(v_x)$ ;
- Problema em contexto real que envolva o vértice, contradomínio, zeros e sinal de uma função quadrática;
- Fazer generalização dos conceitos anteriores;
- Exercícios 3 (alíneas a e c), 5, 7 e 14 (alíneas a e b) (pp. 78-83);
- **TPC:** 1-3, 6, 8-16 (pp. 78-84).

## Aula 12

**Conteúdos:** Aula prática

**Momentos da aula:**

- Correção do TPC;
- Exercícios 1-4 e 15 (pp. 118-121).

### **Aula 13**

**Conteúdos:** Inequações do 2.º grau.

**Momentos da aula:**

- Exemplos de uma inequação de 2º grau (um com a concavidade voltada para cima e outro com a concavidade voltada para baixo);
- Problemas em contexto real envolvendo uma inequação de 2º grau;
- Exercícios 17 e 18 (p. 85);
- **TPC:** 18 (p. 121).

### **Aula 14**

**Conteúdos:** Aula prática

**Momentos da aula:**

- Correção do TPC;
- Esclarecimento de dúvidas para o teste.

**9 de Janeiro de 2023**  
**Estagiários,**  
**David Lima e Guilherme Ferreira**

**Referências:**

Negra et al. (2015b).

Negra et al. (2015c).

## Anexo 2 (Resolução e distribuição de cotação de teste)

### Versão A

1. (20)

$$\begin{aligned} & [(-0,1)^2]^2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{-4} \div \left(-\frac{10}{3}\right)^{-2} - (-1)^2 = \\ & = \left(\frac{1}{10}\right)^4 \times 3^4 \times \left(-\frac{10}{3}\right)^2 - 1 = (3+3+3) \\ & = \left(\frac{3}{10}\right)^4 \times \left(\frac{3}{10}\right)^{-2} - 1 = (3+2) \\ & = \left(\frac{3}{10}\right)^2 - 1 = (3) \\ & = \frac{9}{100} - 1 = -\frac{91}{100} (2+1) \end{aligned}$$

2. (B) (10)

$$\begin{aligned} \sqrt{2}x + x = 1 & \Leftrightarrow (\sqrt{2} + 1)x = 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2} + 1} & = \frac{\sqrt{2} - 1}{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2} - 1}{2 - 1} & = \sqrt{2} - 1 \end{aligned}$$

3. (20)

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt[3]{250} - \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{4}} & = \frac{5\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{4}} = \frac{4\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{4}} = \\ & = \frac{2\sqrt[3]{2 \times 2^3}}{\sqrt[3]{4}} = 2\sqrt[3]{\frac{4 \times 4}{4}} = 2\sqrt[3]{4} \end{aligned}$$

4.

4.1 (B) (10)

$$\begin{aligned} A \in 2.^{\circ}Q & \Leftrightarrow k < 0 \wedge k + 2 > 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow k < 0 \wedge k > -2 & \Leftrightarrow k \in ] -2, 0[ \end{aligned}$$

4.2 (20)

$$\begin{aligned} \overline{AB} & = \sqrt{(k-1)^2 + (k+6)^2} = \\ & = \sqrt{k^2 - 2k + 1 + k^2 + 12k + 36} = \\ & = \sqrt{2k^2 + 10k + 37} (4) \end{aligned}$$

### Versão B

1. (20)

$$\begin{aligned} & [(-0,2)^2]^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{-4} \div \left(-\frac{10}{3}\right)^{-3} - (-1)^2 = \\ & = \left(\frac{2}{10}\right)^4 \times \left(\frac{3}{2}\right)^4 \times \left(-\frac{10}{3}\right)^2 - 1 = (3+3+3) \\ & = \left(\frac{3}{10}\right)^4 \times \left(\frac{10}{3}\right)^2 - 1 = (2+2) \\ & = \left(\frac{3}{10}\right)^4 \times \left(\frac{3}{10}\right)^{-2} - 1 = \left(\frac{3}{10}\right)^2 - 1 = (1+3) \\ & = \frac{9}{100} - 1 = -\frac{91}{100} (2+1) \end{aligned}$$

2. (A) (10)

Idem.

3. (20)

Idem.

4.

4.1 (C) (10)

Idem.

4.2 (20)

$$\begin{aligned} \overline{AB} & = \sqrt{(k-2)^2 + (k+5)^2} = \\ & = \sqrt{k^2 - 4k + 4 + k^2 + 10k + 25} = \\ & = \sqrt{2k^2 + 6k + 29} (4) \end{aligned}$$

$$\overline{AB} = 5 \Leftrightarrow \sqrt{2k^2 + 10k + 37} = 5 \Leftrightarrow (4)$$

$$\Leftrightarrow 2k^2 + 10k + 37 = 25 \Leftrightarrow (2)$$

$$\Leftrightarrow 2k^2 + 10k + 12 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k^2 + 5k + 6 = 0 \Leftrightarrow (2)$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \times 6}}{2} \Leftrightarrow (4)$$

$$\Leftrightarrow k = -3 \vee k = -2 \quad (4)$$

5.

5.1 (D) (10)

5.2 (20)

$$\overline{AO} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} \quad (5)$$

$$\overline{BO} = \sqrt{(-2)^2 + 4^2} = \sqrt{20} \quad (5)$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(4 - (-2))^2 + (2 - 4)^2} = \sqrt{40} \quad (5)$$

Logo,  $[ABO]$  é isósceles, pois  $\overline{AO} = \overline{BO} \neq \overline{AB}$ . (3 + 2)

6. (C) (10)

7.

7.1 (20) Como o centro da circunferência é  $C(3,1)$  a equação reduzida é da forma:

$$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = r^2 \quad (8)$$

Como  $A(5,3)$  pertence à circunferência, então,

$$r = d(A, C) = \sqrt{(5 - 3)^2 + (1 - 3)^2} = \sqrt{8} \quad (6)$$

Logo, a equação reduzida da circunferência é

$$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 8 \quad (6)$$

7.2 (20)  $B$  é um dos pontos de interseção da reta com a circunferência:

$$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 8 \wedge y = x \Leftrightarrow (2)$$

$$\Leftrightarrow (x - 3)^2 + (x - 1)^2 = 8 \Leftrightarrow (2)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + x^2 - 2x + 1 = 8 \Leftrightarrow (4)$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 8x + 2 = 0 \Leftrightarrow (2)$$

$$\overline{AB} = 5 \Leftrightarrow \sqrt{2k^2 + 6k + 29} = 5 \Leftrightarrow (4)$$

$$\Leftrightarrow 2k^2 + 6k + 29 = 25 \Leftrightarrow (2)$$

$$\Leftrightarrow 2k^2 + 6k + 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k^2 + 3k + 2 = 0 \Leftrightarrow (2)$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \times 2}}{2} \Leftrightarrow (4)$$

$$\Leftrightarrow k = -2 \vee k = -1 \quad (4)$$

5.

5.1 (C) (10)

5.2 (20)

$$\overline{AO} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10} \quad (5)$$

$$\overline{BO} = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10} \quad (5)$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(3 - (-1))^2 + (1 - 3)^2} = \sqrt{20} \quad (5)$$

Logo,  $[ABO]$  é isósceles, pois  $\overline{AO} = \overline{BO} \neq \overline{AB}$ . (3 + 2)

6. (D) (10)

7.

7.1 Idem. (20)

7.2 Idem. (20)

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4}}{2} \Leftrightarrow (4)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 2 + \sqrt{3} \vee x = 2 - \sqrt{3} (2)$$

Como se quer o ponto de interseção com menor abscissa:  $x_B = 2 - \sqrt{3}$ . (2)

Logo,  $B(2 - \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3})$ , visto que  $B$  pertence à reta de equação  $y = x$ . (2)

### 7.3

Mediatriz de  $[AB]$ :

$$(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = (x - 3)^2 + (y - 1)^2 \Leftrightarrow (10)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 10x + 25 + y^2 - 6y + 9 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 \Leftrightarrow (4)$$

$$\Leftrightarrow -4y = 4x - 24 \Leftrightarrow (4)$$

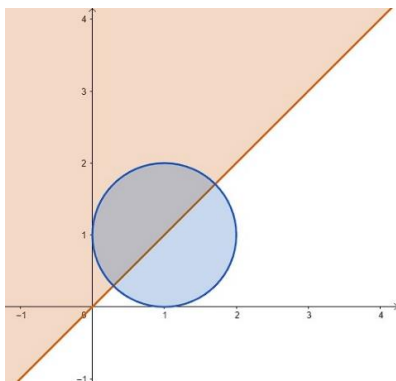
$$\Leftrightarrow y = -x + 6 (2)$$

### 8. (20)

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + 1 \leq 1 + 1 \Leftrightarrow (2)$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leq 1 (2)$$



Representar o círculo (4).

Representar o semiplano (4).

Representar a conjunção (4).

Como o centro da circunferência é o ponto  $(1,1)$ , que pertence à reta  $y = x$ , então, esta divide o círculo em dois semicírculos. Assim,

$$A_{região} = \frac{1}{2} \pi r^2 = \frac{\pi}{2} \text{ u. a. } (4)$$

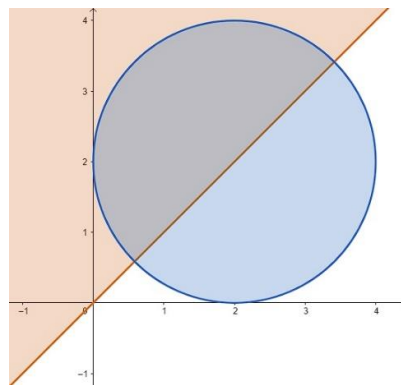
### 7.3 Idem.

### 8. (20)

$$x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - 2)^2 + 4 \leq 4 + 4 \Leftrightarrow (2)$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - 2)^2 \leq 4 (2)$$



Representar o círculo (4).

Representar o semiplano (4).

Representar a conjunção (4).

Como o centro da circunferência é o ponto  $(2,2)$ , que pertence à reta  $y = x$ , então, esta divide o círculo em dois semicírculos. Assim,

$$A_{região} = \frac{1}{2} \pi r^2 = 2\pi \text{ u. a. } (4)$$

# Anexo 3 (Exemplo de planificação de aula)

Plano de aula de **Matemática**

10.D – 2022/11/07

*Estagiário Guilherme Ferreira*

Capítulo:	
<b>Sumário:</b> Equação vetorial de uma reta. Resolução de exercícios.	<b>Recursos Disponíveis:</b> Manual.
OBJETIVOS	AÇÕES A DESENVOLVER COM OS ALUNOS
Relação entre as coordenadas de um vetor diretor e o declive da reta; Paralelismo de retas e igualdade do declive. Reconhecer o significado e aplicar na resolução de problemas a equação vetorial de uma reta no plano.	Participação ativa dos alunos quando solicitada e por iniciativa própria. Resolução de exercícios autónoma e/ou com o colega de carteira.

### Desenvolvimento da aula/Estratégias:

- Esclarecimento de dúvidas do TPC (duração máxima: 15 minutos);
- Exposição sobre o conceito de vetor diretor:
  - Usar a ilustração da Tarefa 9 (p. 55): determinar os vetores que são vetores diretores da reta,  $\vec{c}$ ,  $\vec{d}$  e  $\vec{g}$ , e concluir que um vetor diretor partilha a direção da reta, podendo ter qualquer um dos sentidos e qualquer norma.

- Declive da reta e vetor diretor:

Estabelecer a relação entre o declive da reta e os vetores diretores – calcular um a partir do outro:

#### Exemplo

Determine um vetor diretor e o declive da reta  $AB$ , sendo  $A$  e  $B$ , respetivamente, os pontos de coordenadas  $(1, 3)$  e  $(3, 6)$ .

Pela fórmula do declive  $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$  tem-se:

$$m = \frac{6 - 3}{3 - 1} = \frac{3}{2}$$

Agora consideremos o vetor  $\overrightarrow{AB}$ :

$$\overrightarrow{AB} = B - A \rightarrow (3 - 1, 6 - 3) = (2, 3)$$

Ou seja, dada uma reta de equação  $y = mx + b$  e um dos seus vetores diretores  $\vec{v}(v_x, v_y)$ :

$$m = \frac{v_y}{v_x}$$

**Nota:** Todas as retas paralelas têm a mesma direção, logo partilham os seus vetores diretores.

- Resolver Exercício 31 (p. 57) no quadro (extra – em cada alínea, determinar um vetor diretor da reta):

---

**Exercício 31** (p. 57)

- a) Considerando os pontos  $A$  e  $B$  de coordenadas  $(-2, 0)$  e  $(0, 1)$ , respectivamente, e a reta  $r$ , do tipo  $y = mx + b$ , tem-se:

$$m_r = \frac{1 - 0}{0 - (-2)} = \frac{1}{2}$$

Como a reta  $r$  intersecta o eixo das ordenadas no ponto  $(0, 1)$ , tem-se  $b = 1$ .

Logo,  $r: y = \frac{1}{2}x + 1$ .

Dois possíveis vetores diretores da reta  $r$  são  $\vec{u}(2, 1)$  e  $\vec{v}(4, 2)$

- b) Considerando que a reta  $s$  é do tipo  $y = b$  e que passa pelo ponto  $(0, -\frac{1}{2})$ , então:  $m_s = 0$  e a reta  $s$  é dada pela equação  $y = -\frac{1}{2}$ .

Dois possíveis vetores diretores da reta  $r$  são  $\vec{u}(1, 0)$  e  $\vec{v}(61, 0)$ .

- c) Considerando os pontos  $A$  e  $B$  de coordenadas  $(2, 0)$  e  $(0, 3)$ , respectivamente, e a reta  $t$  do tipo  $y = mx + b$ , tem-se:

$$m_t = \frac{3 - 0}{0 - 2} = -\frac{3}{2}$$

Como a reta  $t$  intersecta o eixo das ordenadas no ponto  $(0, 3)$ , tem-se  $b = 3$ .

Logo,  $r: y = -\frac{3}{2}x + 3$ .

Dois possíveis vetores diretores da reta  $r$  são  $\vec{u}(-2, 3)$  e  $\vec{v}(2, -3)$ .

- Paralelismo de retas:

**Nota:** Sabe-se que duas retas são paralelas se, e somente se, têm o mesmo declive.

**Exemplo**

Consideremos a reta  $r$  de equação  $y = 2x + 2$  e a reta  $s$  com a direção de  $\vec{u}(2, 4)$ . Averiguemos se  $r // s$ .

Como vimos anteriormente,  $m_s = \frac{4}{2} = 2$ . Como  $m_s = m_r$ , então as retas  $r$  e  $s$  têm o mesmo declive. Logo, são paralelas.

- Equação vetorial de uma reta:

Consideremos a reta  $r$ , o ponto  $A(0, 0)$  pertencente à reta e um vetor diretor da reta,  $\vec{u}(1, 2)$ . O ponto resultante da soma do ponto  $A$  com o vetor  $\vec{u}$  é o ponto  $P(1, 2)$ , ou seja:

$$P = A + \vec{u}$$

Agora, se se quiser um ponto  $P_1$ , na reta  $r$ , que se encontre a uma distância de  $A$  três vezes maior que aquela a que se encontra  $P$ , uma das possibilidades seria somar três vezes o vetor  $\vec{u}$  ao ponto  $A$ , ou seja:

$$P_1 = A + 3\vec{u}$$

Por fim, se se subtrair ao ponto  $A$  o vetor  $\vec{u}$ , obtém-se o ponto  $P_2$ , ou seja:

$$P_2 = A - \vec{u}$$

---

Em conclusão, dado um ponto  $A(x_A, y_A)$  e um vetor diretor  $\vec{u}(u_x, u_y)$  de uma reta  $r$ , todos os pontos  $P(x, y)$  da reta podem ser representados pela igualdade:

$$P = A + k\vec{u}, k \in \mathbb{R}$$

ou

$$(x, y) = (x_A, y_A) + k(u_x, u_y), k \in \mathbb{R}$$

Esta última designa-se por **equação vetorial da reta no plano**.

- Usar o Exemplo 11 (p. 61) do manual:

**Exemplo 11** (p. 61)

Uma equação vetorial da reta que passa pelo ponto  $A(-1, 4)$  e tem a direção do vetor  $\vec{u}(2, 1)$  é:

$$(x, y) = (-1, 4) + k(2, 1), k \in \mathbb{R}$$

E uma equação vetorial da reta paralela a esta que passa pelo ponto  $B(4, 0)$ , como tem a direção de  $\vec{u}$ , é:

$$(x, y) = (4, 0) + k(2, 1), k \in \mathbb{R}$$

- Resolver o Exercício 39 (p. 61) do manual no quadro – objetivo: aprofundar a compreensão do conceito de vetor diretor e do significado do múltiplo  $k$ :

**Exercício 39** (p. 61)

**39.1**

- a) Como  $A(2, -1)$  pertence à reta e  $\vec{AB} = B - A \rightarrow (-2, 2)$  tem a mesma direção que esta, então:

$$(x, y) = (2, -1) + k(-2, 2), k \in \mathbb{R}$$

é uma possível equação vetorial da reta  $AB$ .

- b) Como pretendemos apenas os pontos que pertencem à semirreta  $\overrightarrow{AB}$ , consideramos apenas os vetores diretores da reta  $AB$  que têm o mesmo sentido de  $\vec{AB}$ . Dito doutra forma, os vetores que são múltiplos não negativos deste último. Portanto,

$$(x, y) = (2, -1) + k(-2, 2), k \in \mathbb{R}_0^+$$

é uma possível equação vetorial da semirreta  $\overrightarrow{AB}$ .

- c) Desta vez queremos apenas os vetores diretores que estão entre  $A$  e  $B$ .

Notemos que tanto o ponto  $A = A + (0, 0)$ , como o ponto  $B = A + \vec{AB}$  pertencem ambos a  $[AB]$ . Para ter em conta todos os pontos entre estes dois, basta considerarmos todos os múltiplos de  $\vec{AB}$  entre 0 e 1. Assim,

$$(x, y) = (2, -1) + k(-2, 2), k \in [0, 1]$$

é uma possível equação vetorial do segmento de reta  $[AB]$ .

**39.2**

Obtemos a equação reduzida da reta  $AB$ :  $m = \frac{2}{-2} = -1$  e  $b = 1$ , pois  $B(0, 1)$  pertence à reta. Assim, a equação reduzida da reta  $AB$  é  $y = -x + 1$ .

Substituindo  $C(1, 2)$  na equação obtemos:  $2 = -1 + 1 \Leftrightarrow 2 = 0$ , que é uma proposição falsa. Logo,  $C \notin AB$ .

- Introdução ao conceito de equações paramétricas – usar a alínea 39.1 a):

### 39.2 (Outra abordagem)

Desdobrando a equação vetorial da reta  $AB$  em um sistema de duas equações, obtemos:

$$\begin{cases} x = 2 - 2k \\ y = -1 + 2k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$$

Substituindo  $C(1,2)$  no sistema, podemos concluir se o ponto pertence, ou não, à reta  $AB$ :

$$\begin{cases} 1 = 2 - 2k \\ 2 = -1 + 2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2k = 1 \\ 2k = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{1}{2} \\ k = \frac{3}{2} \end{cases}$$

o que é impossível. Logo,  $C \notin AB$ .

- Generalizar para uma reta qualquer:

Ao sistema das duas equações iniciais damos o nome de **sistema de equações paramétricas** da reta  $AB$ .

Para o caso geral de uma reta  $r$  que tem como vetor diretor  $\vec{v}(v_x, v_y)$  e que incide num ponto  $A(x_A, y_A)$  o sistema de equações paramétricas é dado por:

$$\begin{cases} x = x_A + kv_x \\ y = y_A + kv_y \end{cases}, k \in \mathbb{R}$$

- Resolução autónoma ou a pares dos exercícios 37, 40 e 38 (pp. 60-62).

#### Exercício 37 (p. 60)

$$(x, y) = (-3, 7) + k(-1, -1), k \in \mathbb{R}$$

#### Exercício 40 (p. 62)

Como  $A(-1,3)$  pertence à reta e  $\overline{AB} = B - A \rightarrow (5, -5)$  é um vetor diretor da reta, então:

$$\begin{cases} x = 1 + 5k \\ y = 3 - 5k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$$

é um possível sistema de equações paramétricas de  $AB$ .

#### Exercício 38 (p. 60)

##### 38.1

Um possível vetor diretor da reta é  $\vec{v}(-1,5)$ .

##### 38.2

Por exemplo:  $P_1 = (3, 1)$ ,  $P_2 = (3, 1) + \vec{v} = (2, 6)$  e  $P_3 = (3, 1) - \vec{v} = (4, -4)$ .

##### 38.3

Começamos por obter o declive da reta:  $m = \frac{5}{-1} = -5$ . Portanto, a equação reduzida da reta é da forma:

$$y = -5x + b.$$

Substituindo um ponto da reta na equação, obtemos  $b$ , que é precisamente o valor pedido.

---

Substituindo, por exemplo,  $P_1$ , vem:  $1 = -5(3) + b \Leftrightarrow b = 1 + 15 = 16$ .

Logo tem-se que  $y = -5x + 16$ .

---

#### **Observações/Aprendizagem complementar**

- Fazer a resolução conjunta de alguns exercícios poderá gerar confusão e pode acontecer que apenas os alunos mais fortes ou mais desinibidos participem.
  - A quantidade de exercícios propostos poderá não ser adequada ao tempo de aula: no caso de serem em excesso, deixa-se a quantidade necessária de exercícios como TPC; caso contrário, far-se-ão alguns dos exercícios que estão previstos ficar para TPC.
  - A nível de conceitos, o múltiplo  $k$  do vetor diretor poderá revelar-se um conceito que crie alguma confusão aos alunos, pelo que deve ser reforçada a ideia de cada múltiplo dar um dos pontos da reta e deve usar-se o Exercício 39 (p. 61) para fortalecer a compreensão deste conceito.
- 

#### **Trabalho autónomo (TPC)**

Exercícios **32-36, 41 e 42**. (pp. 58-62).

---

#### **Referências:**

Negra et al. (2015a).

# Anexo 4 (Ficha sobre funções com a utilização da calculadora gráfica)

10.º ANO – MATEMÁTICA A

## Ficha de funções com a utilização da calculadora gráfica

### Objetivos da ficha:

- Aprofundar o domínio sobre as funcionalidades da calculadora gráfica
- Desenvolver a capacidade de transpor os dados visualizados na calculadora para o papel e de interpretar os dados

**Fonte:** Espólio pessoal do professor cooperante.

1. Sejam  $f$  e  $g$ , funções reais de variável real, definidas por:

$$f(x) = 5|x - 2| - 4 \quad \text{e} \quad g(x) = x + 1$$

Representa as funções  $f$  e  $g$  na tua calculadora gráfica e:

- 1.1. Transpõe as representações gráficas visualizadas para o teu caderno, indicando o contradomínio de cada função.
- 1.2. Determina as coordenadas dos pontos de interseção de  $f$  e de  $g$ , assinalando os pontos relevantes no teu caderno. Utiliza valores arredondados às centésimas para as coordenadas dos pontos assinalados.
- 1.3. Tendo por base 1.2., indica o conjunto-solução da condição:

$$f(x) \leq g(x)$$

Apresenta o conjunto-solução sob a forma de intervalo, com valores arredondados às décimas.

2. Seja  $h$  uma função real de variável real, de domínio  $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ , definida por:

$$h(x) = \frac{1}{x-2} + 1.$$

Representa a função  $h$  na tua calculadora gráfica e:

- 2.1. Transpõe a representação gráfica visualizada para o teu caderno, indicando o seu contradomínio.
- 2.2. Determina os valores exatos das coordenadas dos pontos de interseção da representação gráfica de  $h$  com os eixos coordenados.
- 2.3. Determina o conjunto-solução da condição:

$$h(x) < x$$

sob a forma de união de intervalos, com valores arredondados às centésimas.

3. Seja  $f$ , a função real de variável real, definida por:

$$f(x) = 12x^3 - 20x^2 + x + 3$$

Representa a função  $f$  na tua calculadora gráfica e transpõe a representação gráfica visualizada para o teu caderno, indicando os zeros da função  $f$  e estudando o seu sinal.

4. Sabendo que  $f$  e  $g$  são funções polinomiais de grau 4 e 3, respetivamente, e que  $f(1) = g(1) = -2$ , obtém uma expressão analítica para cada uma das funções que respeite o quadro de sinais apresentado em cada uma das alíneas seguintes e, recorrendo à tua calculadora gráfica, indica os extremos relativos de  $f$  e de  $g$ , se existirem, apresentando, nos valores não exatos, arredondamentos às centésimas.

4.1.

$x$	$-\infty$	$-2$		$0$		$2$		$3$	$+\infty$
$f(x)$	$-$	$0$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$	$0$	$-$

4.2.

$x$	$-\infty$	$-1$		$3$	$+\infty$
$g(x)$	$+$	$0$	$-$	$0$	$-$

5. A Dona Adelaide foi ao Aquashow e, como tinha algum receio de parques aquáticos, foi experimentar o escorrega das crianças.

Considera que a Dona Adelaide saiu “disparada” do escorrega no instante  $t = 2,5s$  e que, para um determinado valor real  $k$ , que corresponde ao instante em que atinge o solo, a função  $h$ , que descreve a distância, em metros, a que se encontrou a Dona Adelaide do chão em função do tempo, em segundos, é definida por::

$$h(t) = \begin{cases} t^2 - 4t + 4 & \text{se } 0 \leq t < 2,5 \\ -5t^2 + 30t - \frac{87}{2} & \text{se } 2,5 \leq t \leq k \end{cases}$$

Representando a função  $h$  na calculadora gráfica e transpondo a representação gráfica visualizada para o teu caderno, indica:

- 5.1. A altura do escorrega.  
 5.2. O valor do instante  $k$ .  
 5.3. A distância máxima ao chão atingida pela Dona Adelaide após sair do escorrega.  
 5.4. Em que instantes a distância da Dona Adelaide ao chão foi superior a 1 metro.

Nos valores não exatos, apresenta arredondamentos às centésimas.

## Soluções

---

- 1.1.**  $CD_f = [-4, +\infty[$  e  $CD_g = \mathbb{R}$       **1.2.**  $I_1(0,83; 1,83)$  e  $I_2(3,75; 4,75)$       **1.3.**  $C.S. = [0,8; 3,8]$
- 2.1.**  $CD_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$       **2.2.**  $I_1(0; 0,5)$  e  $I_2(1; 0)$       **2.3.**  $C.S. = ]0,38; 2[ \cup ]2,62; +\infty[$
- 3.** Os zeros são  $-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}$  e  $\frac{3}{2}$ , sendo que  $f$  é positiva em  $]-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}[ \cup ]\frac{3}{2}, +\infty[$  e é negativa em  $]-\infty, -\frac{3}{2}[ \cup ]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$
- 4.1.**  $f(x) = -\frac{1}{3}(x+2)(x)(x-2)(x-3)$ . Mínimo relativo:  $-2,01$ . Máximos relativos:  $4,32$  (máx. abs.) e  $0,96$ .
- 4.2.**  $g(x) = -\frac{1}{4}(x+1)(x-3)^2$ , sendo que o mínimo relativo é  $-2,37$  e o máximo relativo é  $0$ .
- 5.1.**  $4$  m      **5.2.**  $3,55$  s      **5.3.**  $1,5$  m      **5.4.**  $t \in [0; 1[ \cup ]2,68; 3,32[$

## Anexo 5 (Atividade com recurso à calculadora gráfica)

- **Atividade com recurso à calculadora gráfica – Consolidação de transformações de funções** [~35 minutos]

Na figura está representado num referencial o.n.  $xOy$  o gráfico da função  $f$ .

Sabe-se que:

- A expressão analítica da função é  $f(x) = x^2 - 4$
- A parábola intersesta o eixo  $Oy$  no ponto de coordenadas  $(0, -4)$
- Os zeros da função  $f$  são  $-2$  e  $2$

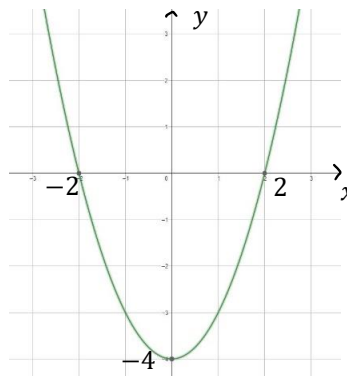
Representa graficamente as funções definidas por:

- a)**  $g(x) = f(x) + 1$       **d)**  $g(x) = f(2x)$   
**b)**  $g(x) = f(x - 2)$       **e)**  $g(x) = -f(x)$   
**c)**  $g(x) = 2f(x)$       **f)**  $g(x) = f(-x)$

Confirma as tuas repostas na calculadora gráfica.

*Extra* – Indica:

- Os zeros da função das alíneas **b)**, **e)** e **f)**.
- O conjunto de solução de  $g(x) \leq 0$  para a alínea **d)** (sob a forma de intervalo de números reais).



(Fonte própria)

## Anexo 6 (Atividade prática exploratória sobre a proporcionalidade inversa)

**Tarefa – enunciados parciais:**

*Enunciado introdutório:* Considera um retângulo de lados  $x$  e  $y$  com área igual a  $18 m^2$ .

*Enunciado 1:* Numa folha quadriculada, desenhem retângulos que possuam a área indicada, considerando que o lado de cada quadrícula mede  $1 m$ .

*Enunciado 2:* Após desenharem os retângulos, pintem-nos com cores diferentes e recortem-nos.

*Enunciado 3:* Numa nova folha quadriculada, desenhem um referencial de eixos e coloquem os retângulos no local devido, colando-os.

*Enunciado final:* Obtenham uma expressão que descreva a área dos retângulos.

(Fonte própria)

# Anexo 7 (Tarefa de Geometria Sintética no Plano com o *GeoGebra*)

---

## Tarefa de Geometria Sintética no Plano – 10.º Ano 7 de junho de 2023 – Duração: 60 minutos

---

### Objetivos da Tarefa:

- Desenvolver a capacidade de visualizar lugares geométricos;
- Aprofundar a manipulação das ferramentas do *GeoGebra*;
- Familiarizar os docentes com os novos conteúdos de geometria sintética.

### Objetivos programáticos:

- Identificar circunferência, círculo, bissetriz de um ângulo e mediatriz de segmento como lugares geométricos.

### Recursos

- Calculadora gráfica, computador, telemóvel ...

No *GeoGebra*, resolva os seguintes problemas recorrendo à ferramenta *Mostrar traço*.

1. Considere o segmento de reta  $[AP]$ , em que o ponto  $A$  é fixo e o ponto  $P$  se encontra a uma distância fixa de  $4 \text{ u.m.}$  Fazendo variar o ponto  $P$ , esboce e descreva o lugar geométrico que obtém.

*Sugestão:* Utilize a ferramenta “Segmento de reta (Ponto, Comprimento)”.

(Fonte própria)

2. Um segmento de reta de comprimento 2 desliza da posição vertical até à posição horizontal, mantendo-se a extremidade  $A$  sobre o segmento de reta  $[PO]$  e extremidade  $B$  sobre o segmento de reta  $[OQ]$  (Figura 1).

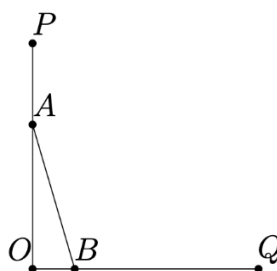


Figura 1

Esboce e descreva o lugar geométrico percorrido pelo ponto médio do segmento de reta  $[AB]$ .

*Sugestão:* Utilize a ferramenta “Mostrar Traço” no ponto médio do segmento de reta  $[AB]$ .

Adaptado de Araújo (1998)

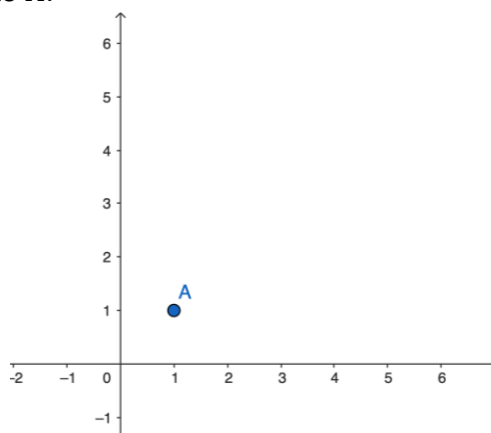
3. Ilustre que num triângulo qualquer os seis triângulos obtidos unindo o baricentro aos vértices e aos pontos médios dos lados têm todos a mesma área.  
*Sugestão:* Marque os seis triângulos com a ferramenta “Polígono” e meça as suas áreas com a ferramenta “Área”.

Adaptado de Araújo (1998)

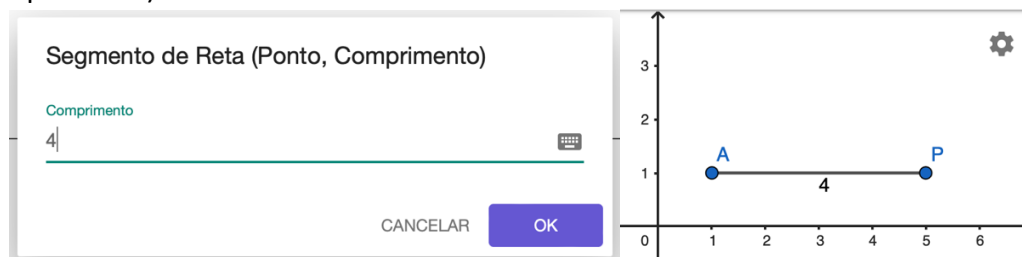
### Proposta de resolução:

1. Considere o segmento de reta  $[AP]$ , em que o ponto  $A$  é fixo e o ponto  $P$  se encontra a uma distância fixa de 4 *u. m.* Fazendo variar o ponto  $P$ , esboce e descreva o lugar geométrico que obtém.  
*Sugestão:* Utilize a ferramenta “Segmento de reta (Ponto, Comprimento)”.

*Passo 1:* Marcar o ponto  $A$ .



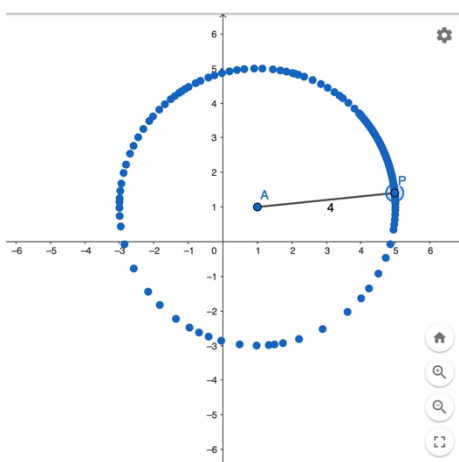
*Passo 2:* Obter o ponto  $P$  recorrendo à ferramenta “Segmento de reta (Ponto, Comprimento)”.



Passo 3: Utilizar a ferramenta “Mostrar Traço” no ponto  $P$  e fazê-lo variar.

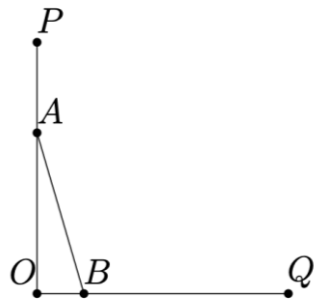


Solução final:



**Resposta:** O lugar geométrico obtido é uma circunferência de centro em  $A$  e raio 4.

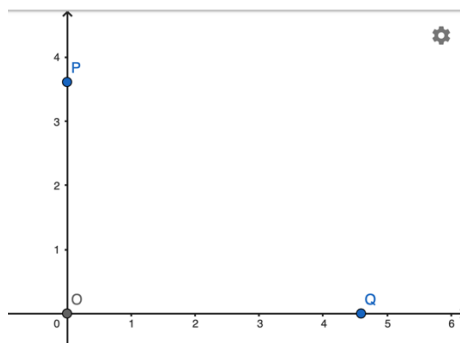
- Um segmento de reta de comprimento 2 desliza da posição vertical até à posição horizontal, mantendo-se a extremidade  $A$  sobre o segmento de reta  $[PO]$  e extremidade  $B$  sobre o segmento de reta  $[QO]$  (Figura 1).



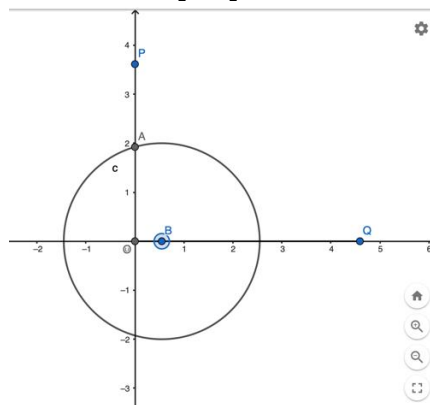
Esboce e descreva o lugar geométrico percorrido pelo ponto médio do segmento de reta  $[AB]$ .

*Sugestão:* Utilize a ferramenta “Mostrar Traço” no ponto médio do segmento de reta  $[AB]$ .

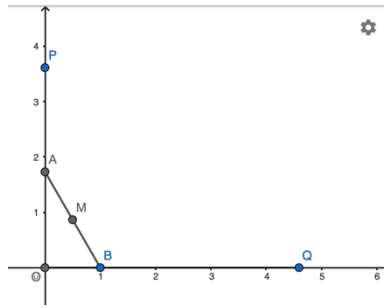
*Passo 1:* Traçar os segmentos de reta  $[OP]$  e  $[OQ]$  (com comprimento superior a 2).



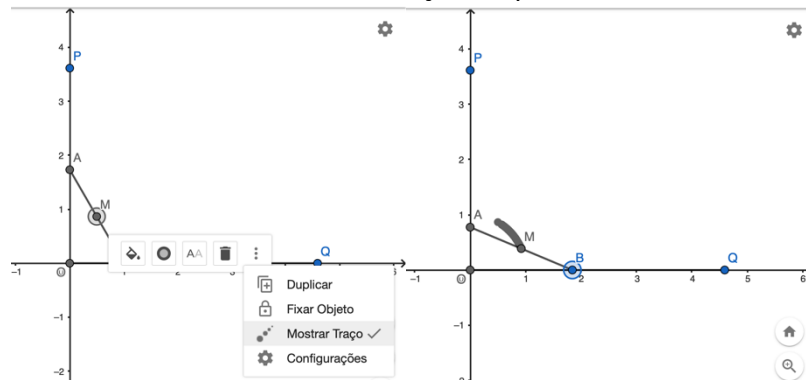
*Passo 2:* Traçar uma circunferência de raio 2 e centro no segmento de reta  $[OQ]$  (ponto  $B$ ) e que interseste o segmento de reta  $[OP]$  (ponto  $A$ ).



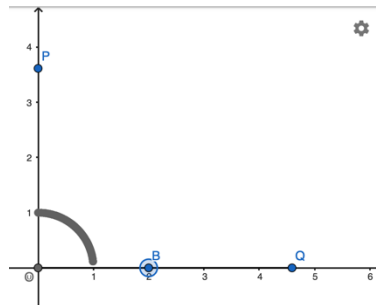
*Passo 3:* Traçar o segmento de reta  $[AB]$  e marcar o seu ponto médio  $M$ .



**Passo 4:** Utilizar a ferramenta “Mostrar Traço” no ponto  $M$  e fazer variar o ponto  $B$ .



**Solução final:**



**Resposta:** O lugar geométrico obtido é um quarto de uma circunferência de raio 1 e centro em  $O$ .

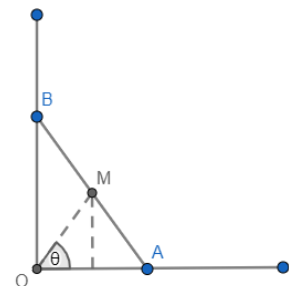
**Extra (Justificação):**

Seja  $M$  o ponto médio de  $[AB]$ .

Tem-se que as coordenadas de  $M(x_M, y_M)$  são dadas por:

$$\cos \theta = \frac{x_M}{1} \Leftrightarrow x_M = \cos \theta$$

$$\text{sen } \theta = \frac{y_M}{1} \Leftrightarrow y_M = \text{sen } \theta$$



Assim, vem:

$$\begin{aligned} \overline{OM}^2 &= \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \overline{OM}^2 &= 1 \Leftrightarrow \overline{OM} = \pm 1 \end{aligned}$$

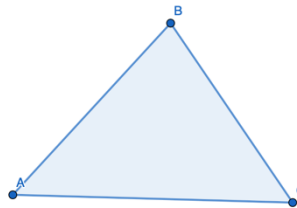
Como  $\overline{OM} > 0$ , então  $\overline{OM} = 1$ .

Logo,  $M$  descreve uma circunferência de centro em  $O$  e raio 1.

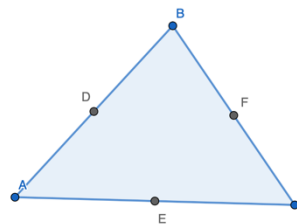
No entanto, uma vez que  $M \in 1^{\circ}Q$ , considera-se apenas o quarto de circunferência contido no primeiro quadrante.

3. Ilustre que num triângulo qualquer os seis triângulos obtidos unindo o baricentro aos vértices e aos pontos médios dos lados têm todos a mesma área.  
*Sugestão:* Marque os seis triângulos com a ferramenta “Polígono” e meça as suas áreas com a ferramenta “Área”.

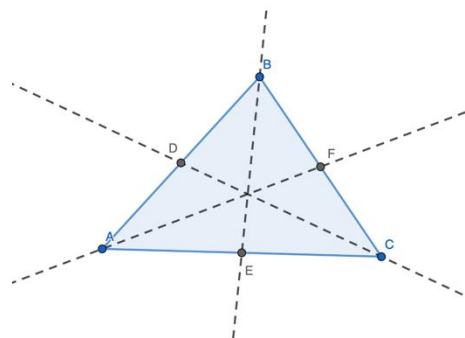
*Passo 1:* Construir um triângulo qualquer.



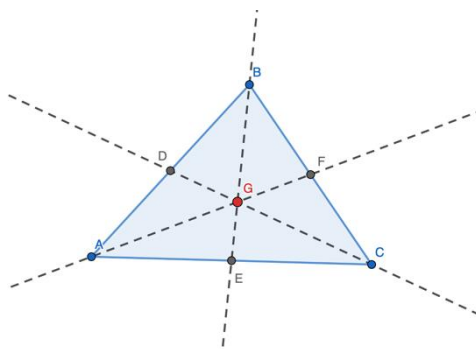
*Passo 2:* Marcar os pontos médios dos lados, usando a ferramenta “Ponto Médio”.



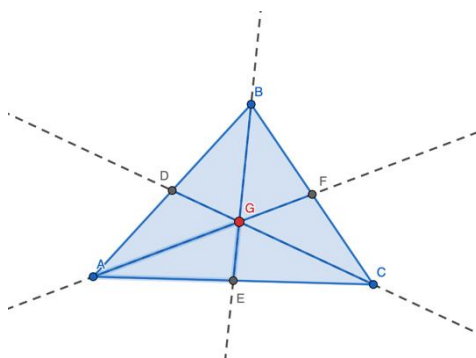
*Passo 3:* Traçar as retas que unem os pontos médios ao vértice oposto.



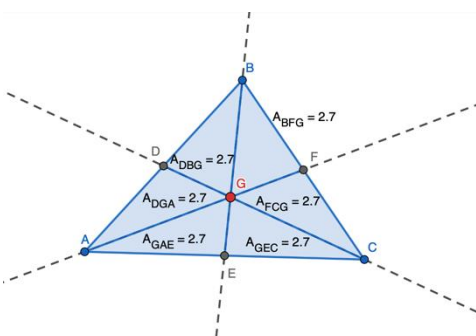
*Passo 4:* Marcar o baricentro ( $G$ ), resultante da interseção das três retas.



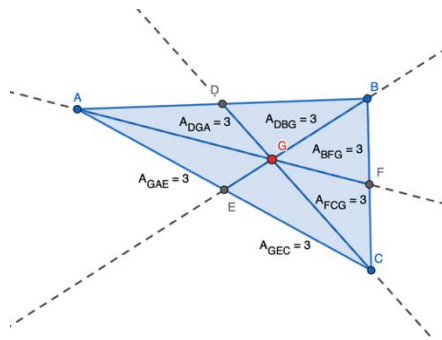
*Passo 5:* Marcar os seis triângulos usando a ferramenta “Polígono”.



*Passo 6:* Medir a área dos seis triângulos usando a ferramenta “Área”.

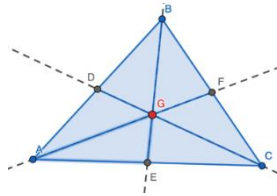


*Passo 7 (verificação):* Fazer variar os vértices do triângulo, para concluir que as áreas dos seis triângulos permanecem iguais entre si.



*Extra (Justificação):*

Considere-se o triângulo  $[ABC]$  e os seis triângulos obtidos unindo o baricentro aos vértices e aos pontos médios dos lados têm todos a mesma área.



Como  $\overline{AE} = \overline{CE} = \frac{1}{2}\overline{AC}$  e a altura de  $G$  relativa aos lados  $[AE]$  e  $[CE]$  é a mesma, tem-se que:

$$\frac{\overline{AE} \times h}{2} = \frac{\overline{CE} \times h}{2}$$

Portanto,

$$A_{[AGE]} = A_{[CGE]}$$

Seja  $A_{[AGE]} = A_{[CGE]} = a$ .

Analogamente, considere-se que:

$$A_{[BGF]} = A_{[CGF]} = b$$

$$A_{[AGD]} = A_{[BGD]} = c$$

$$A_{[ABE]} = A_{[CBE]}$$

Assim,

$$A_{[ABE]} = A_{[CBE]} \Leftrightarrow a + 2c = a + 2b \Leftrightarrow c = b$$

Pelo mesmo argumento, vem

$$A_{[BCD]} = A_{[ACD]} \Leftrightarrow 2b + c = 2a + c \Leftrightarrow b = a$$

Logo,  $a = b = c$ . Isto é, a área dos 6 triângulos obtidos unindo o baricentro aos vértices e aos pontos médios de cada lado é a mesma.

*Grupo de estágio de Matemática da ESA/D*

# Anexo 8 (Tarefa 1 – A função quadrática em contextos

semirreais)

Nome: \_\_\_\_\_

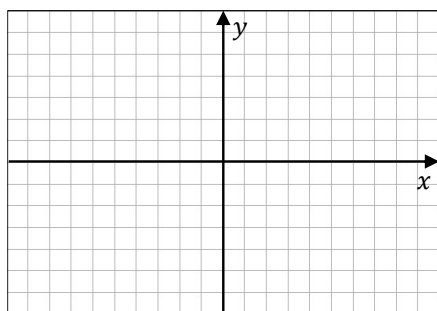
Data: \_\_\_\_\_

## Objetivos da tarefa:

- Fomentar o raciocínio matemático no estudo de situações em contexto real.
- Aprofundar a capacidade de relacionar a função quadrática com situações reais.

1. Considera cada uma das situações abaixo descritas. Esboça o gráfico de uma função quadrática que as descreva; indica a sua expressão analítica e o seu domínio. Justifica as escolhas que feitas ao realizares cada esboço.

1.1 A área de um quadrado cujo lado mede  $x$ .



Expressão analítica: \_\_\_\_\_

Domínio: \_\_\_\_\_

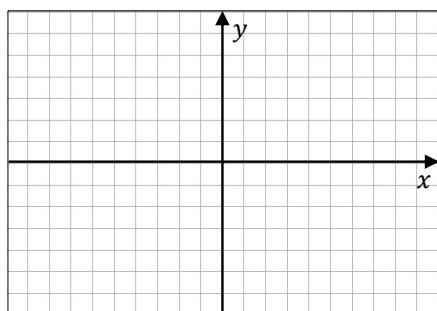
---

---

---

---

1.2 A área de um retângulo cujos lados medem  $x$  e  $4 - x$ .



Expressão analítica: \_\_\_\_\_

Domínio: \_\_\_\_\_

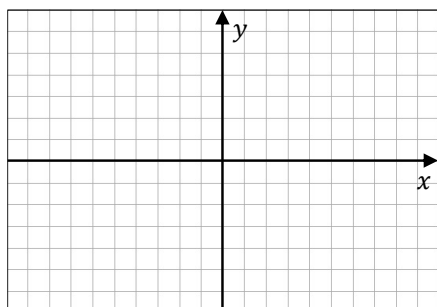
---

---

---

---

1.3 A área de um triângulo cujas base e altura relativa à mesma medem, respetivamente,  $x$  e  $4 - x$ .



Expressão analítica: \_\_\_\_\_

Domínio: \_\_\_\_\_

---

---

---

---

É possível estabelecer algum tipo de relação entre as funções que descrevem as situações em **1.2** e **1.3**? Justifica.

---

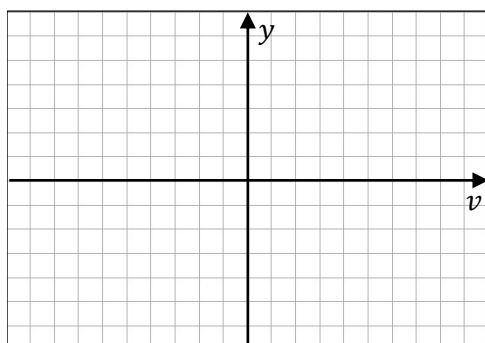
---

---

---

**2.** Considera a função quadrática que determina a energia cinética ( $E_C$ ), em joules, de um sistema mecânico em função da velocidade ( $v$ ), em  $m/s$ :  $E_C(v) = \frac{1}{2}mv^2$ , onde a massa ( $m$ ) é constante.

**2.1** Esboça a representação gráfica da função  $E_C$  para diferentes valores da massa,  $m$ , do sistema em estudo. Aponta as tuas conclusões.



---

---

---

---

**2.2** Atendendo aos valores que fazem sentido para  $m$  e para  $v$  explica que forma terá o gráfico da função  $E_C$ .

---

---

---

---

---

---

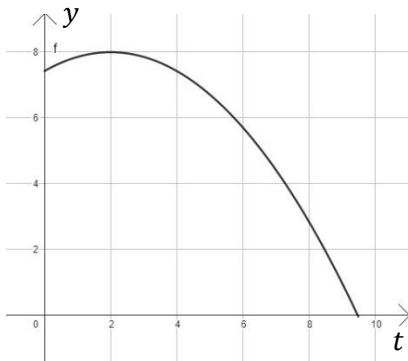
---

---

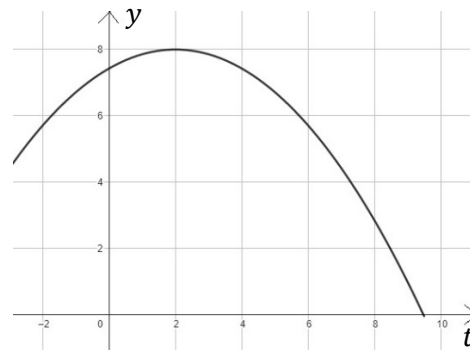
### 3. Arremesso de um objeto

3.1 Um objeto é arremessado de um sítio elevado. Na tua opinião, qual das seguintes representações gráficas melhor descreve a altura desse objeto em função do tempo passado após o seu arremesso? Justifica a tua resposta abaixo, nomeadamente, explicando o que te levou a excluir as restantes representações gráficas.

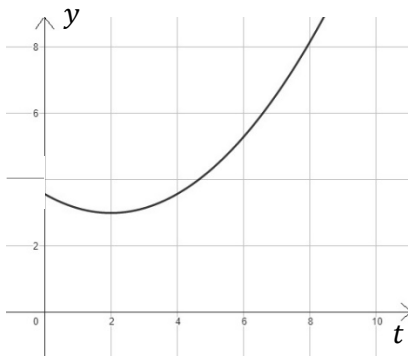
(A)



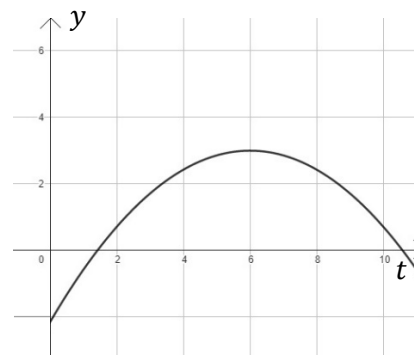
(B)



(C)



(D)



---

---

---

---

---

**3.2** Considera a função  $h(t) = -5t^2 + 10t + 2$ , que descreve a altura (em metros) de uma bola em função do tempo (em segundos) decorrido após o seu arremesso.

Calcula os seguintes dados, explicitando os raciocínios feitos e os cálculos efetuados:

**a)** A altura inicial da bola.

---

---

---

**b)** A altura máxima da bola.

---

---

---

**c)** O instante em que a bola se encontra a 7 metros do chão.

---

---

---

**d)** A duração de tempo que a bola esteve no ar.

---

---

---

**e)** Os instantes em que a altura da bola é inferior a 4 metros (sob a forma de uma união de intervalos reais).

---

---

---

# Anexo 9 (Tarefa 2 – A função quadrática em resolução de problemas e em tarefas de modelação)

Nome: \_\_\_\_\_

Data: \_\_\_\_\_

## Objetivos da tarefa:

- Desenvolver o pensamento matemático no âmbito da resolução de problemas.
- Fomentar a realização de conjeturas e de generalizações.

Responde numa folha à parte.

### 1. Problema do livre direto

Num jogo de futebol vai ser cobrado um livre a 25 metros da baliza, tal como esquematiza a Figura 1 ao lado. A barreira encontra-se à distância regulamentar de **9,15 metros** da bola. O plano que contém a trajetória da bola, indicado a tracejado, é perpendicular à linha da baliza.

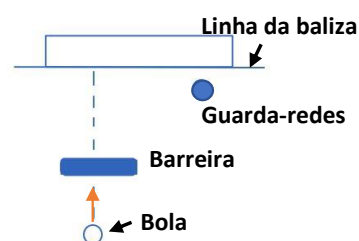


Figura 1 – Esquema do livre  
(Retirado de Alves (2018))

A bola pode não atravessar a barreira ou passar por cima desta.

Se passar por cima da barreira, a bola segue na direção da baliza, fora do alcance do guarda-redes.

Admite que só pode acontecer uma das quatro situações seguintes:

- A bola não passa a barreira.
- A bola bate na barra da baliza.
- A bola sai por cima da barra da baliza.
- A bola entra na baliza.

O jogador mais alto da barreira tem **1,95 metros** de altura e a barra da baliza está a **2,44 metros** do chão.

Admite que, depois de rematada, a bola descreve um arco, de tal modo que a sua altura relativamente ao chão (em metros) é dada por:  $f(x) = 0,32x - 0,01x^2$ , onde  $x$  é a distância (em metros) da projeção da bola no chão ao local donde esta é rematada (Figura 2).

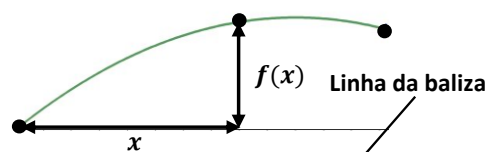


Figura 2 – Esquema do livre bidimensional  
(Fonte própria)

Responde às seguintes perguntas indicando os cálculos efetuados e as justificações que consideres necessárias:

- Qual é a **altura máxima** atingida pela bola?
- Nas condições descritas, o livre resulta em golo?
- A que **distância da linha da baliza** se encontra a bola quando esta atinge a **altura máxima**? Apresenta o resultado em metros, arredondado às décimas.

(Adaptado de Alves (2018))

## 2. Equação reduzida da quadrática

2.1 Recorda a equação reduzida da quadrática:

$$y = a(x - h)^2 + k$$

onde  $h, k \in \mathbb{R}$  e  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Considera a seguinte fotografia de perfil da Ponte 25 de abril, em Lisboa.

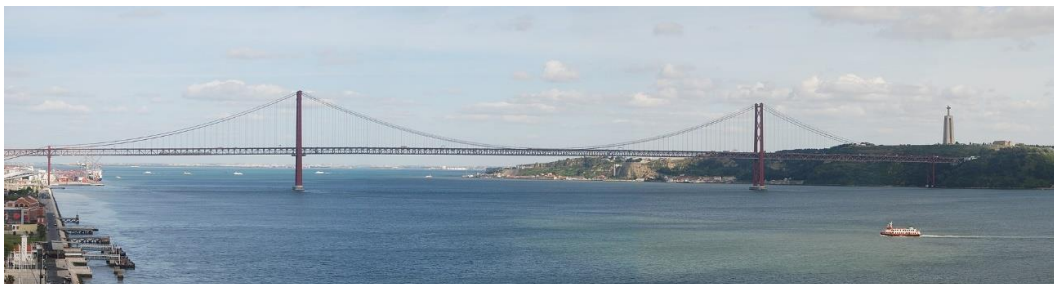


Figura 3 – A Ponte vista do Padrão dos Descobrimentos  
(Retirado de [https://pt.wikipedia.org/wiki/Ponte\\_25\\_de\\_Abril#/media/Ficheiro:Bridge\\_Tagus\\_April\\_2009-1a.jpg](https://pt.wikipedia.org/wiki/Ponte_25_de_Abril#/media/Ficheiro:Bridge_Tagus_April_2009-1a.jpg))

Utilizando a equação reduzida da quadrática e recorrendo às funcionalidades gráficas da *GeoGebra*, procura encontrar valores para os parâmetros  $a$ ,  $h$  e  $k$  (recorrendo a seletores) para os quais a sua representação gráfica melhor se **ajusta ao arco que une os dois pilares** centrais da ponte.

**Atenção:** Coloca a imagem no **primeiro quadrante**, com o lado inferior a coincidir com o eixo das abcissas e o lado esquerdo com o eixo das ordenadas.

### 2.2

Tendo em conta o estudo que acabaste de fazer, investiga relações entre os parâmetros  $a$ ,  $h$  e  $k$  e as seguintes características da função:

- a) as coordenadas do vértice da parábola;
- b) o contradomínio;
- c) a equação do eixo de simetria da parábola;
- d) a existência de zeros.

Adaptado de Geometria Intuitiva Interativa. (2023). *Pontes e parábolas. Formas e fórmulas*.  
<https://www.gi2.pt/galerias/pontes-e-parabolas/>

*Nota:* A curva descrita pelo arco acima é, na verdade, uma **catenária**. Se tiveres interesse em saber mais sobre este tipo de curva, podes ver o episódio de “Isto é Matemática” sobre a catenária (Episódio 5, Temporada 4. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=yBH5ezzY -0>)

# Anexo 10 (Tarefa 3 – Funções definidas por ramos em contextos semirreais)

Nome: \_\_\_\_\_

Data: \_\_\_\_\_

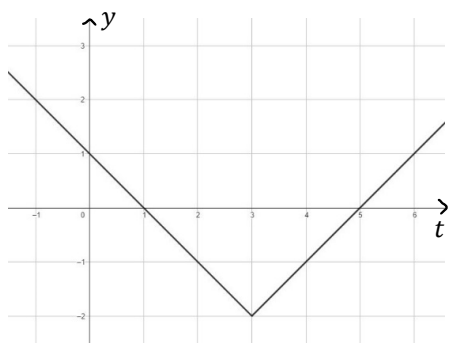
**Objetivos da tarefa:**

- Fomentar o raciocínio matemático no estudo de situações em contexto real.
- Aprofundar a capacidade de relacionar funções definidas por ramos com situações reais.

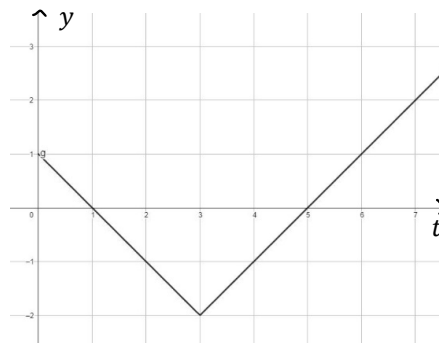
## 1. Trajeto vertical de um submarino

1.1 Considera o trajeto feito por um submarino. Na tua opinião, qual das seguintes representações gráficas melhor descreve a profundidade do submarino em função do tempo? Justifica a tua resposta abaixo, nomeadamente, explicando o que te levou a excluir as restantes representações gráficas.

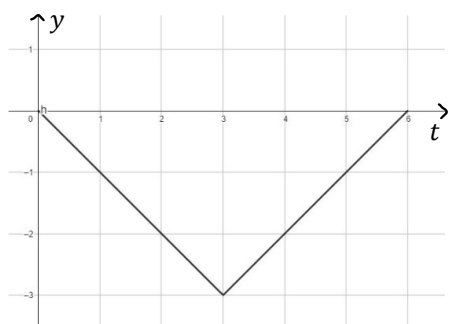
(A)



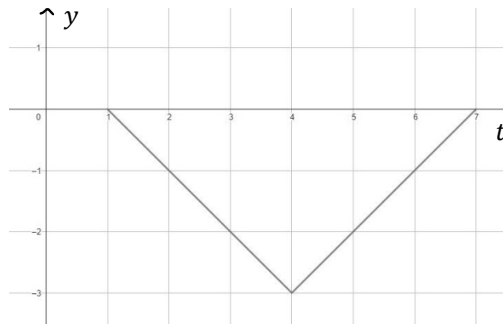
(B)



(C)



(D)



---

---

---

---

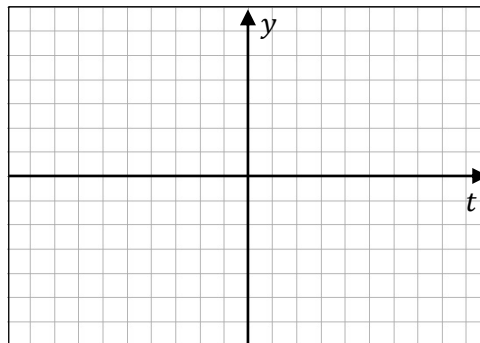
---

**1.2** Considera uma viagem de submarino na qual este:

- parte da superfície da água no instante  $t = 0$  (em segundos)
- percorre **2 metros** de profundidade **por segundo** tanto na descida como na subida
- atinge uma profundidade **máxima de 500 metros**

Obtém a expressão analítica de uma função que descreva esta viagem e esboça a sua representação gráfica.

Expressão analítica:



É possível escreveres a expressão analítica obtida de uma outra forma? Se sim, qual?

---

---

---

---

**1.3** Considera o caso em que o submarino sobe a uma velocidade diferente da velocidade da sua descida, por exemplo, a **4 metros por segundo**. Encontra uma expressão analítica que descreva esta nova situação, explicitando eventuais obstáculos na busca pela mesma.

---

---

---

---

---

---

## 2. Trajeto de um paraquedista

Considera agora a situação na qual um paraquedista vai fazer um salto de queda livre. O paraquedista é levado de helicóptero até à altura na qual saltará, mantém-se nessa mesma altura até realizar o salto e, por fim, salta.

Obtém a **expressão analítica** de uma função,  $h$ , **definida por ramos** que descreva esta situação e **esboça** a sua **representação gráfica**, sabendo que:

- o paraquedista sobe de helicóptero durante **60 segundos** a uma **velocidade vertical constante** (menor do que  $20 \text{ m/s}$ );
- o paraquedista mantém-se na **altura máxima** atingida durante **20 segundos**;
- a expressão analítica do **troço** da representação gráfica relativa à **queda do paraquedista** é da forma:  $h(t) = -4,9(t - h)^2 + k$ .

Justifica as opções feitas e os raciocínios realizados.

---

---

---

---

---

---

---

---

