

DECOMPOSIÇÃO LAGRANGEANA DO PROBLEMA
DA P - MEDIANA

M.E. CAPTIVO* E J.D. COELHO**

Working Paper nº 15

* Assistente do Departamento de Estatística, Investigação Operacional e Computação da Faculdade de Ciências de Lisboa.

** Professor da Faculdade de Economia da Universidade Nova de Lisboa.

A apresentar no 2º Congresso da APDIO - Investigação Operacional/84 Porto, 16 a 18 de Abril de 1984.

Trabalho efectuado no âmbito do Contrato de Investigação e Desenvolvimento nº 412.82.41 com a Junta Nacional de Investigação Científica e Tecnológica (JNICT) e da linha de investigação nº 4, "Optimização" do Centro de Estatística e Aplicações da Universidade de Lisboa (INIC).

UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Faculdade de Economia
Campo Grande, 185
1700 LISBOA

Março, 84

1. Introdução

O problema da p - mediana consiste na localização de p equipamentos numa rede com n comunidades por forma a minimizar a soma das distâncias ponderadas de cada comunidade ao equipamento mais próximo.

Trata-se de um problema com variadas aplicações práticas nomeadamente na localização de equipamentos, armazéns e unidades industriais.

Sendo um problema "NP-hard" (Garey & Johnson, 1979) foram desenvolvidos diversos métodos de pesquisa em árvore para a sua resolução:

- i) uns baseados na formulação em Programação Linear Inteira do problema tais como os de Spielberg (1969), Garfinkel et al. (1974) e Schrage (1975)
- ii) Outros utilizando a estrutura especial do problema como os de Jarvinen et al. (1972), Christofides (1975) e Captivo et al. (1981)
- iii) Os que usam a relaxação Lagrangeana para o cálculo dos limites inferiores como os de Narula et al. (1977), Neebe (1978) e Christofides e Beasley (1982).

Neste trabalho apresentam-se dois métodos para o cálculo dum limite inferior, a inserir num processo de pesquisa em árvore, baseados na decomposição da relaxação Lagrangeana em subproblemas de natureza simples. As propriedades dos subproblemas ga-

rantem a obtenção dos multiplicadores de Lagrange óptimos.

A maximização da relaxação Lagrangeana é feita pelo método do subgradiente (1974) ou pelo método de Fletcher e Reeves (1964) utilizando o subgradiente de menor norma Euclídeana quando não existe gradiente.

Os valores iniciais dos multiplicadores em qualquer das relaxações são determinados por um processo heurístico para o dual.

2. Formulação do Problema

O problema da p - mediana (P) pode ser formulado em termos de Programação Linear Inteira. Seja d_{ij} a distância entre a comunidade i e a comunidade j , e consideremos as variáveis X_{ij} , ($i, j=1, \dots, n$) dadas por

$$X_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se a comunidade } i \text{ é afectada ao serviço} \\ & \text{localizado em } j \\ 0, & \text{em caso contrário} \end{cases}$$

O problema P fica então

$$\min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} X_{ij} \quad (1)$$

$$\text{Sujeito a: } \sum_{j=1}^n X_{ij} = 1, \quad i=1, \dots, n \quad (2)$$

$$X_{ij} \leq X_{jj}, \quad \begin{matrix} ij=1, \dots, n \\ i \neq j \end{matrix} \quad (3)$$

$$\sum_{j=1}^n X_{jj} = p \quad (4)$$

$$X_{ij} = 1, 0, \quad i, j=1, \dots, n \quad (5)$$

em que as restrições (2) garantem que cada comunidade é afectada a um e um só serviço, (3) asseguram que só há afectações para comunidades que sejam centro e (4) implica que existem apenas p serviços.

Por se tratar de um problema de minimização e em virtude da presença das restrições de tipo (2) é possível substituir as restrições de integridade (5) por

$$\begin{aligned} x_{jj} &= 1, 0 & , & \quad j=1, \dots, n \\ x_{ij} &\geq 0 & , & \quad i, j=1, \dots, n \\ & & & \quad i \neq j \end{aligned} \tag{5a}$$

Utilizamos o modelo (1)—(5) em vez de substituírmos as restrições (3) por

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} \leq N_j x_{jj}, \quad j=1, \dots, n \tag{3a}$$

pois embora estas sejam em menor número, são as restrições (4) que definem o envolvente convexo da região admissível.

3. Relaxação 1, Decomposição e Propriedades dos Subproblemas

Introduzindo os multiplicadores de Lagrange λ_i ($i=1, \dots, n$) associados às restrições (2) e $\mu_{ij} \leq 0$ ($i, j=1, \dots, n; i \neq j$) associados às restrições (3) obtemos a relaxação Lagrangeana

$$L(\underline{\lambda}, \underline{\mu}) = \min_{\underline{X}} \sum_i \sum_{j \neq i} d_{ij} X_{ij} + \sum_i \lambda_i (1 - \sum_{j \neq i} X_{ij}) + \sum_{i \neq j} \mu_{ij} (X_{jj} - X_{ij}) \quad (6)$$

$$= \sum_i \lambda_i + \min_{\{X_{ij}\}_{i \neq j}} \sum_i (d_{ij} - \lambda_i - \mu_{ij}) X_{ij} + \min_{\{X_{jj}\}_j} (d_{jj} - \lambda_j + \sum_{i \neq j} \mu_{ij}) X_{jj} \quad (7)$$

$$\text{s.a:} \quad \sum_{j=1}^n X_{jj} = P \quad (4)$$

$$X_{ij} = 0, 1 \quad i, j = 1, \dots, n \quad (5)$$

Esta é separável em dois subproblemas, um nas variáveis X_{ij} com $i \neq j$ (P1) e outro nas variáveis X_{jj} (P2)

$$\text{O subproblema P1 é} \quad \min_{\{X_{ij}\}_{i \neq j}} \sum_i (d_{ij} - \lambda_i - \mu_{ij}) X_{ij} \quad (8)$$

$$\text{s.a:} \quad X_{ij} = 0, 1 \quad i, j = 1, \dots, n \\ i \neq j$$

que se resolve por simples inspecção fazendo:

$$X_{ij} = 1 \quad \text{se} \quad d_{ij} - \lambda_i - \mu_{ij} < 0$$

$$X_{ij} = 0 \quad \text{se} \quad d_{ij} - \lambda_i - \mu_{ij} > 0$$

$$X_{ij} \text{ indiferente se } d_{ij} - \lambda_i - \mu_{ij} = 0$$

O subproblema P2 é

$$\min_{\{X_{jj}\}} \sum_{j=1}^n (d_{jj} - \lambda_j + \sum_{i \neq j} \mu_{ij}) X_{jj} \quad (9)$$

s.a:

$$\sum_{j=1}^n X_{jj} = P \quad (4)$$

$$X_{jj} = 0, 1, \quad j=1, \dots, n$$

é um "Knapsack" com coeficientes inteiros que se resolve facilmente fazendo X_{jj} igual a um para os P menores

$$d_{jj} - \lambda_j + \sum_{i \neq j} \mu_{ij}$$

e nulo para os restantes.

Designando por $V(\cdot)$ o valor óptimo do problema $(\cdot)$ temos

$$L(\underline{\lambda}, \underline{\mu}) = \sum_i \lambda_i + V(P1) + V(P2)$$

É fácil verificar que a solução óptima de qualquer um dos subproblemas pode não ser única. Em P1 sempre que $d_{ij} - \lambda_i - \mu_{ij} = 0$ obtem-se o mesmo valor para a função objectivo fazendo $X_{ij} = 1$ ou $X_{ij} = 0$. Em P2 ao colocarmos por ordem não-decrescente os coeficientes $d_{jj} - \lambda_j - \sum_{i \neq j} \mu_{ij}$ se o coeficiente que ocupar a posição p for igual a pelo menos um dos seguintes, a solução óptima não é única.

Também se pode ver que a solução óptima de qualquer um dos subproblemas não se altera se substituirmos as restrições de integridade por

$$0 \leq x_{ij} \leq 1, \quad i, j=1, \dots, n$$

Isto é, os valores óptimos de P1 e P2 coincidem com os valores óptimos das suas relaxações lineares $\overline{P1}$ e $\overline{P2}$ e, portanto

$$L(\underline{\lambda}, \underline{\mu}) = \sum_i \lambda_i + V(\overline{P1}) + V(\overline{P2})$$

Substituindo $\overline{P1}$ e $\overline{P2}$ pelos seus duais, obtem-se

$$L(\underline{\lambda}, \underline{\mu}) = \sum_i \lambda_i + V(D\overline{P1}) + V(D\overline{P2})$$

ou seja:

$$L(\underline{\lambda}, \underline{\mu}) = \sum_i \lambda_i + \text{Max}_{\underline{v}, \underline{\alpha}, \gamma} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} v_{ij} + \sum_j \alpha_j + \gamma P \quad (10)$$

s.a:

$$v_{ij} \leq d_{ij} - \lambda_i - \mu_{ij}, \quad i, j=1, \dots, n, \quad i \neq j \quad (11)$$

$$\alpha_j + \gamma \leq d_{jj} - \lambda_j + \sum_{i \neq j} \mu_{ij}, \quad j=1, \dots, n \quad (12)$$

$$v_{ij} \leq 0 \quad (13)$$

$$\alpha_j \leq 0 \quad (14)$$

Como pretendemos determinar o melhor limite inferior vamos $\max_{\underline{\lambda}, \underline{\mu}} L(\underline{\lambda}, \underline{\mu})$, isto é,

$$\text{Max}_{\underline{\lambda}, \underline{\mu}, \underline{v}, \underline{\alpha}, \gamma} \sum_i \lambda_i + \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} v_{ij} + \sum_j \alpha_j + \gamma P \quad (15)$$

$$\text{s.a: } v_{ij} + \lambda_i + \mu_{ij} \leq d_{ij}, \quad i, j=1, \dots, n (i \neq j) \quad (11)$$

$$\alpha_j + \gamma + \lambda_j - \sum_{i \neq j} \mu_{ij} \leq d_{jj}, \quad j=1, \dots, n \quad (12)$$

$$v_{ij} \leq 0 \quad (13)$$

$$\alpha_j \leq 0 \quad (14)$$

$$\mu_{ij} \leq 0 \quad (16)$$

que coincide com o dual da relaxação linear de P.

Verifica-se assim que os multiplicadores de Lagrange ótimos coincidem com os valores ótimos das variáveis duais associados às restrições (2) e (3) na relaxação linear de P. Isto é, dizer que $L(\underline{\lambda}, \underline{\mu})$ verifica a propriedade da integralidade (Geoffrion, 1974) e como tal

$$V(\bar{P}) = L(\bar{\underline{\lambda}}, \bar{\underline{\mu}}) = \max_{\mu \leq 0} L(\underline{\lambda}, \underline{\mu}) \quad (17)$$

Dado que $\bar{P}$ é um problema de Programação Linear de grande dimensão, mesmo para valores de n pouco elevados, a referida relaxação Lagrangeana oferece um método alternativo para a determinação de (17) que apresenta vantagens sobre a relaxação linear. Enquanto $\bar{P}$ é um problema em n^2 variáveis não negativas e n^2+1 restrições, a optimização da relaxação Lagrangeana envolve n^2 variáveis em que apenas algumas têm restrições de sinal. Para cada concretização das variáveis $(\underline{\lambda}, \underline{\mu})$ o cálculo de $L(\underline{\lambda}, \underline{\mu})$ requer a resolução dos subproblemas P1 e P2 que apresentam uma estrutura simples.

4. Relaxação 2, Decomposição e Propriedades dos Subproblemas

Se mantivermos os multiplicadores de Lagrange λ_i ($i=1, \dots, n$) associados às restrições (2), mas introduzirmos um multiplicador γ associado à restrição (4) vamos obter a relaxação Lagrangeana

$$L(\underline{\lambda}, \gamma) = \min_{\underline{X}} \sum_i \sum_j d_{ij} X_{ij} + \sum_i \lambda_i (1 - \sum_j X_{ij}) + \gamma (P - \sum_j X_{jj})$$

$$= \sum_i \lambda_i + \gamma P + \min_{\underline{X}} \sum_{j=1}^n \left\{ \sum_{i=1}^n (d_{ij} - \lambda_i) X_{ij} - \gamma X_{jj} \right\} \quad (18)$$

$$\text{s.a: } X_{ij} \leq X_{jj} \quad , i, j=1, \dots, n \quad (3)$$

$$i \neq j$$

$$X_{jj} = 0, 1 \quad , j=1, \dots, n \quad (5a)$$

$$X_{ij} \geq 0 \quad , i, j=1, \dots, n$$

$$i \neq j$$

que é separável em n subproblemas, cada um dos quais contém apenas uma variável X_{jj} inteira, isto é :

$$L(\underline{\lambda}, \gamma) = \sum_{j=1}^n L^j(\underline{\lambda}, \gamma) + \sum_{i=1}^n \lambda_i + \gamma P$$

sendo

$$L^j(\underline{\lambda}, \gamma) = \min_{X_{ij}} \sum_{i=1}^n (d_{ij} - \lambda_i) X_{ij} - \gamma X_{jj}$$

$$\text{s.a: } X_{ij} \leq X_{jj} \quad , i=1, \dots, n (i \neq j)$$

$$X_{jj} = 0, 1$$

$$X_{ij} \geq 0 \quad , i=1, \dots, n (i \neq j)$$

$L^j(\underline{\lambda}, \gamma)$ resolve-se facilmente por inspecção desde que se conheça o valor de x_{jj} .

Se $x_{jj} = 0$ vem $x_{ij} = 0, i=1, \dots, n \quad (i \neq j)$

$$\text{Se } x_{jj}=1 \Rightarrow \begin{cases} x_{ij} = 1 & , \quad \text{para } d_{ij} - \lambda_i < 0 \\ x_{ij} = 0 & , \quad \text{para } d_{ij} - \lambda_i > 0 \\ x_{ij} \text{ indiferente} & , \quad \text{para } d_{ij} - \lambda_i = 0 \end{cases}$$

ou seja

$$L^j(\underline{\lambda}, \gamma) = \min \left\{ \sum_{i \neq j} \min(0, d_{ij} - \lambda_i) - \lambda_j - \gamma, 0 \right\}$$

pois $d_{jj} = 0$.

$$\text{Se } \sum_{i \neq j} \min(0, d_{ij} - \lambda_i) - \lambda_j - \gamma < 0 \quad \text{vem } x_{jj} = 1$$

e se

$$\sum_{i \neq j} \min(0, d_{ij} - \lambda_i) - \lambda_j - \gamma > 0 \quad \text{vem } x_{jj} = 0$$

Quando $\sum_{i \neq j} \min(0, d_{ij} - \lambda_i) - \lambda_j - \gamma = 0$ é indiferente tomar

$x_{jj} = 0$ ou 1 .

Verifica-se assim que também nesta relaxação, a solução ótima do problema interno da Lagrangeana não é única.

É fácil demonstrar que a matriz das restrições de $L(\underline{\lambda}, \gamma)$

é totalmente unimodular e como tal a solução é naturalmente inteira, o que significa que

$$\max_{\underline{\lambda}, \gamma} L(\underline{\lambda}, \gamma) = V(\bar{P})$$

tal como na relaxação anterior.

5. Optimização das Relaxações Lagrangeanas

Qualquer um dos métodos que utilizamos para otimizar a Lagrangeana parte duns valores iniciais para os multiplicadores e vai procedendo à sua actualização até obter o valor óptimo.

Para cada concretização dos multiplicadores é necessário determinar uma direcção ao longo da qual o valor da Lagrangeana aumente. Já vimos que em qualquer das relaxações a solução do problema interno da Lagrangeana pode não ser única. Quando isto sucede não existe gradiente mas apenas subgradiantes. A direcção que utilizamos é a do subgradiente de menor norma Euclideana, por ser a direcção de maior declive ascendente. Quando existem restrições ao sinal dos multiplicadores, projectamos a direcção escolhida por forma a não violar essa condição.

Na figura 1 apresenta-se o esquema geral dos métodos utilizados para maximizar a relaxação Lagrangeana do problema da p - mediana.

No método do subgradiente a actualização dos multiplicadores segue o processo especificado por Held, Wolfe e Crowder (1974).

O outro método utilizado é do tipo do de Fletcher e Reeves (1964) substituindo a direcção do gradiente quando não existe, pela do subgradiente de menor norma Euclideana e efectuando a pesquisa univariada na direcção obtida pelo algoritmo de Davies, Swann e Campey.

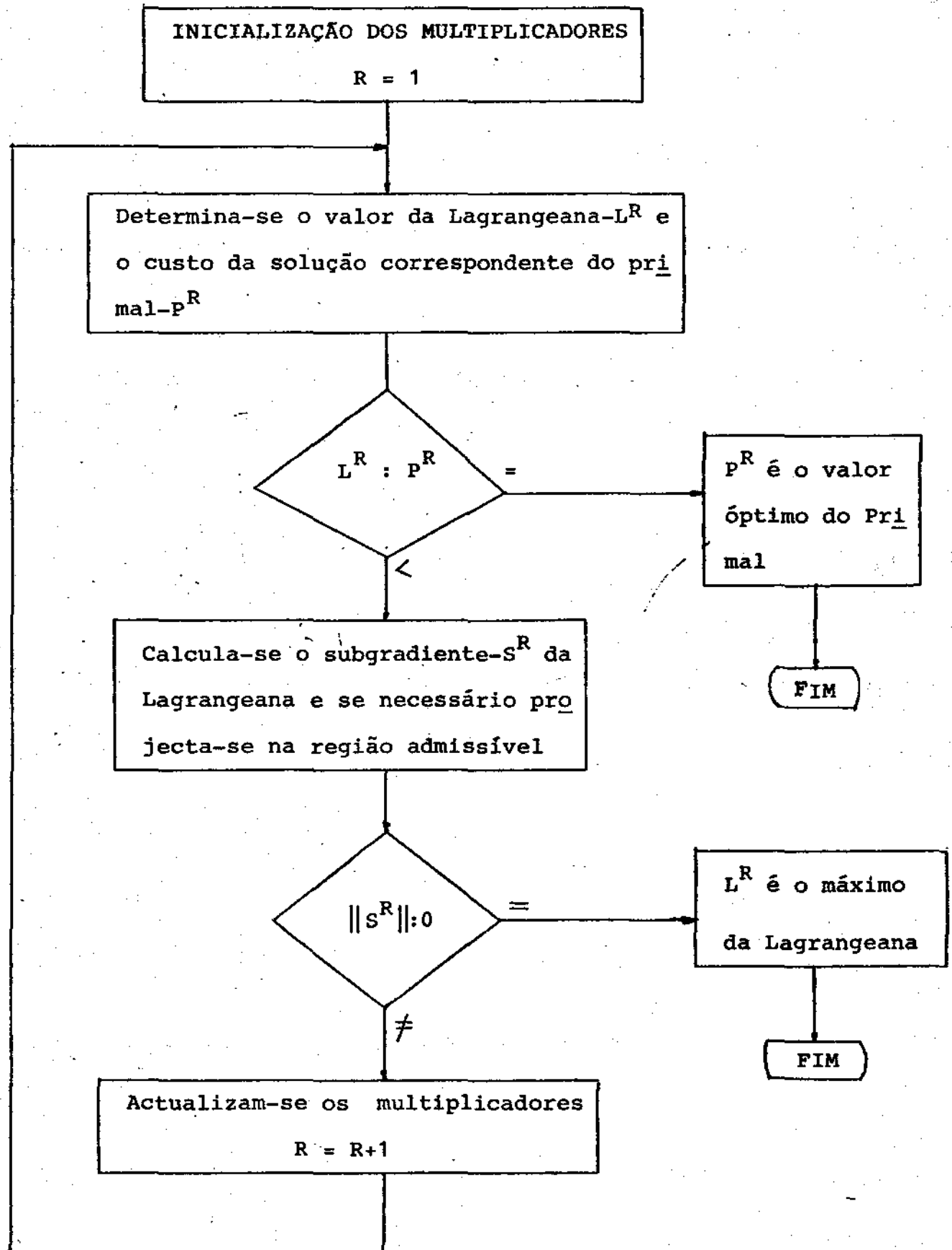


Figura 1.

6. Determinação da Solução Inicial

Na relaxação linear de P podemos substituir as restrições

$$0 \leq x_{ij} \leq 1 \quad , i, j=1, \dots, n$$

por simples restrições de não-negatividade, pois as restrições (2) garantem que as variáveis não são superiores a um.

Obtemos assim a relaxação Linear de P dada por:

$$\begin{aligned} \bar{P} \quad & \min \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} x_{ij} & (1) \\ \text{s.a:} \quad & \sum_j x_{ij} = 1 \quad , i=1, \dots, n & (2) \\ & x_{jj} - x_{ij} \geq 0 \quad , i, j=1, \dots, n & (3b) \\ & \quad \quad \quad i \neq j \\ & \sum_j x_{jj} = P & (4) \\ & x_{ij} \geq 0 \quad , i, j=1, \dots, n & (19) \end{aligned}$$

em que (3b) resulta de multiplicar (3) por -1 e o dual de $\bar{P}$ é:

$$\begin{aligned} D\bar{P} \quad & \text{Max} \quad \sum_i \lambda_i + \gamma P & (20) \\ \text{s.a:} \quad & \lambda_i - \mu_{ij} \leq d_{ij} \quad , i \neq j & (21) \\ & \quad \quad \quad i, j=1, \dots, n \\ & \lambda_j + \sum_{i \neq j} \mu_{ij} + \gamma \leq d_{jj} \quad , j=1, \dots, n & (22) \\ & \mu_{ij} \geq 0 & (23) \end{aligned}$$

É fácil ver que $\lambda_i \geq 0$ ($i=1, \dots, n$) e $\gamma \leq 0$ pois as restrições de tipo (2) são equivalentes a

$$\sum_j X_{ij} \geq 1, \quad i=1, \dots, n$$

e a restrição (4) é equivalente a $\sum_j X_{jj} \leq P$, por $\bar{P}$ ser um problema de minimização e $d_{ij} \geq 0$.

Se (21) e (23) resulta $\mu_{ij} \geq \max(0, \lambda_i - d_{ij})$, $i \neq j$ para cada conjunto de λ_i admissíveis. Fazendo μ_{ij} igual ao limite inferior vem:

$$\mu_{ij} = \max(0, \lambda_i - d_{ij}), \quad i, j=1, \dots, n, \quad i \neq j \quad (24)$$

e obtem-se o dual condensado

$$\text{Max} \quad \sum_i \lambda_i + \gamma P \quad (20)$$

$$\text{s.a:} \quad \lambda_j + \sum_{i \neq j} \max(0, \lambda_i - d_{ij}) \leq d_{jj} - \gamma, \quad j=1, \dots, n \quad (25)$$

Supondo γ conhecido este problema coincide com o dual condensado de Erlenkotter (1978), e pode ser aproximado utilizando apenas a parte heurística do algoritmo de Erlenkotter.

Começamos por estimar γ , resolvendo por uma regra heurística o problema P para p e $p+1$ e atribuindo a γ a variação (negativa) obtida no valor da função objectivo. Utiliza-se a heurística de Erlenkotter para obter os valores de λ_i e calcula-se μ_{ij} pela expressão (24).

Com estes valores é possível obter uma nova estimativa para

γ utilizando o dual do subproblema 2 da 1ª relaxação apresentada. Entra-se assim num processo iterativo que termina quando γ não sofrer alteração.

7. Conclusões

Os algoritmos propostos foram programados em Fortran e executados num UNIVAC 1100, para 27 problemas de teste, dos quais 21 foram gerados aleatoriamente, com dimensões desde $n=6$ até $n=100$ e vários valores de P .

Dos resultados obtidos podemos concluir que para a 1ª relaxação é mais rápido otimizar a Lagrangeana por um método de tipo do de Fletcher e Reeves do que pelo método do subgradiente. Na 2ª relaxação passa-se exactamente o contrário.

Verifica-se ainda que a 2ª relaxação é mais eficiente que a 1ª, pois permite obter o óptimo mais rapidamente. Os resultados já obtidos são comparáveis aos apresentados por Christofides e Beasley (1982), embora ainda se esteja a aperfeiçoar o método proposto.

Quanto aos outros algoritmos existentes baseados em relaxações Lagrangeanas do problema, não é possível efectuar comparações uma vez que só são testados em problemas com $n \leq 30$.

BIBLIOGRAFIA

- CAPTIVO, M.E., BRANCO, I.M. e COELHO, J.D. (1981), "Um Algoritmo Exacto para o Problema do P-Mediana" nota nº26 Centro de Estatística e Aplicações da Universidade de Lisboa.
- CHRISTOFIDES, N. (1975), "Graph Theory - An Algorithmic Approach", Academic Press, London.
- CHRISTOFIDES, N. e BEASLEY, J.E. (1982) "A Tree Search Algorithm for the P-Median Problem", European Journal of Operational Research, 10, 196-204.
- ERLENKOTTER, D., (1978), "A Dual - Based Procedure for Uncapacitated Facility Location", Operations Research, vol. 26, nº6, 992-1009.
- FLETCHER, R.C. REEVES, C. (1964) "Function Minimization by Conjugate Gradients", Computer Journal, 7, 149-154.
- GAREY, M. e JOHNSON, D.S., (1979) "Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-completeness", Freeman Press, San Francisco.
- GARFINKEL, R.S., NEEBE, A.W. e RAO, M.R. (1974) "An Algorithm for the M-Median Plant Location Problem", Transportation Science, 8, 217-236.
- GEOFFRION, A.M. (1974) "Lagrangian Relaxation for Integer Programming" Mathematical Programming Study, 2, 82-114.
- HELD, M. WOLFE, P. e CROWDER, H.P. (1974) "Validation of Subgradient Optimization" Mathematical Programming, vol. 6, 62-88.

JÄRVINEN, P.; RAJALA, J. e SINERVO, H. (1972) "A Branch-and-Bound Algorithm for Seeking the P-Median", Operations Research, 20, 173-178.

NARULA, S.C., OGBU, U.I. e SAMUELSON, H.M., (1977) "An Algorithm for the P-Median Problem" Operations Research, 25, 709-713.

NEEBE, A.W. (1978) "A Branch-and-Bound Algorithm for the P-Median Transportation Problem" Journal of the Operational Research Society, 29(10), 989-995.

SCHRAGE, L. (1975), "Implicit Representation of Variable Upper Bounds in Linear Programming" Mathematical Programming Study 4, 118-132.

SPIELBERG, K. (1969), "Algorithms for the Simple Plant-Location Problem with Some Side Conditions", Operations Research, 17, 85-111.