



**ANDRESSA DA COSTA OLIVEIRA DE MELO**  
Licenciada em Matemática

# **CÁLCULO NUMÉRICO DA PROBABILIDADE DE RUÍNA EM HORIZONTE FINITO NO MODELO DE RISCO DUAL**

MESTRADO EM MATEMÁTICA E APLICAÇÕES

Universidade NOVA de Lisboa  
Setembro, 2022



# CÁLCULO NUMÉRICO DA PROBABILIDADE DE RUÍNA EM HORIZONTE FINITO NO MODELO DE RISCO DUAL

**ANDRESSA DA COSTA OLIVEIRA DE MELO**

Licenciada em Matemática

**Orientador:** Doutor Rui Manuel Rodrigues Cardoso

*Professor Associado, Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade NOVA de Lisboa*

## Júri

**Presidente:** Doutora Maria de Lourdes Belchior Afonso

*Professora Associada, Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade NOVA de Lisboa*

**Arguente:** Doutor Alfredo Duarte Egídio dos Reis

*Professor Catedrático, Instituto Superior de Economia e Gestão da Universidade de Lisboa*

**Orientador:** Doutor Rui Manuel Rodrigues Cardoso

*Professor Associado, Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade NOVA de Lisboa*

## **Cálculo numérico da probabilidade de ruína em horizonte finito no modelo de risco dual**

Copyright © Andressa da Costa Oliveira de Melo, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade NOVA de Lisboa.

A Faculdade de Ciências e Tecnologia e a Universidade NOVA de Lisboa têm o direito, perpétuo e sem limites geográficos, de arquivar e publicar esta dissertação através de exemplares impressos reproduzidos em papel ou de forma digital, ou por qualquer outro meio conhecido ou que venha a ser inventado, e de a divulgar através de repositórios científicos e de admitir a sua cópia e distribuição com objetivos educacionais ou de investigação, não comerciais, desde que seja dado crédito ao autor e editor.



## AGRADECIMENTOS

Agradeço à Deus, porque até aqui me sustentou.

Ao meu orientador, Professor Doutor Rui Cardoso, quero expressar os meus mais sinceros agradecimentos pelo tempo dispensado, pelos conhecimentos compartilhados e pelo incentivo.

Agradeço à Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade NOVA de Lisboa, ao Departamento de Matemática e a todos os meus professores de curso por contribuírem para o meu processo de aprendizagem com dedicação e profissionalismo.

Sou grata aos meus pais, principalmente à minha mãe, pela minha educação e por todo o apoio depositados nos meus projetos ao longo da minha vida.

Agradeço ao meu marido pela paciência e motivação, sobretudo, por ter acreditado que eu seria capaz de vencer mais um obstáculo.

Deixo os meus agradecimentos a todos aqueles que não foram mencionados, mas que contribuíram, direta ou indiretamente, para a realização deste trabalho.

*«Tudo tem o seu tempo determinado, e há tempo para todo o propósito debaixo do céu:»  
(Ec. 3:1, ARC)*

## RESUMO

No modelo dual de risco a probabilidade de ruína tem uma fórmula exata para um horizonte temporal infinito. Por outro lado, para o caso finito, no artigo de Yang e Sendova (2014) é dada uma expressão exata, mas não são apresentados valores para a probabilidade de ruína, devido à complexidade dos cálculos. Desta forma, com o objetivo de desenvolver um algoritmo para o último caso, adaptamos a metodologia descrita por Cardoso e Egídio dos Reis (2002) para o modelo clássico que, recorrendo a cadeias de Markov, permite considerar várias distribuições para o montante dos ganhos individuais sem grandes alterações na aplicação do algoritmo. A fim de dispor de um segundo algoritmo, a metodologia desenvolvida por De Vylder e Goovaerts (1988) para o modelo clássico também foi adaptada.

Calculamos, assim, aproximações para a densidade e distribuição do tempo de ruína. Os gráficos da função de densidade do tempo de ruína resultantes da aproximação, para as distribuições apresentadas, sugerem funções unimodais com assimetria positiva. Também se verifica que quanto maior é o valor de  $u$ , maior é a moda e mais achatada é a curva.

**Palavras-chave:** probabilidade de ruína; modelo dual; horizonte finito; tempo discreto; tempo de ruína; algoritmo recursivo; cadeias de Markov.

## ABSTRACT

In the dual risk model the probability of ruin has an exact formula for an infinity time horizon. On the other hand, for the finite case, in the article by Yang and Sendova (2014), despite being given an exact expression, no values are presented for the probability of ruin due to complexity of calculations. Thus, in order to develop an algorithm for the latter case, we adapted the methodology described by Cardoso and Egídio dos Reis (2002) to the classical model which, using Markov chains, allows to consider various distributions for the amount of individual earnings without major changes in the algorithm application. In order to have a second algorithm, the methodology developed by De Vylder and Goovaerts (1988) for the classical model was also adapted.

We thus calculated approximations to the time to ruin density and distribution. The time to ruin density function graphs resulting from the approximation, for the distributions presented, suggest unimodal functions with positive skewness. We note that the higher the value of  $u$ , the higher the mode and the flatter the curve.

**Keywords:** probability of ruin; dual model; finite time; discrete time; time to ruin; recursive algorithm; Markov chains.

# ÍNDICE

<b>Índice de Figuras</b>	<b>x</b>
<b>Índice de Tabelas</b>	<b>xii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Os modelos primal e dual de risco</b>	<b>3</b>
2.1 Introdução . . . . .	3
2.2 O modelo primal de risco . . . . .	3
2.3 O modelo dual de risco . . . . .	5
2.4 A ruína em tempo contínuo . . . . .	6
<b>3 Algoritmos para o modelo primal</b>	<b>9</b>
3.1 Introdução . . . . .	9
3.2 O processo de reserva em tempo discreto . . . . .	9
3.3 A ruína em tempo discreto . . . . .	10
3.4 O algoritmo de De Vylder e Goovaerts . . . . .	11
3.5 O algoritmo de Cardoso e Egídio dos Reis . . . . .	12
3.5.1 Cadeias de Markov . . . . .	12
3.5.2 O algoritmo . . . . .	14
<b>4 Algoritmos para o modelo dual</b>	<b>17</b>
4.1 Introdução . . . . .	17
4.2 O processo de reserva em tempo discreto . . . . .	17
4.3 Os ganhos individuais e agregados . . . . .	20
4.4 Análise do processo de reserva em tempo discreto . . . . .	21
4.5 Adaptação do algoritmo de Cardoso e Egídio dos Reis . . . . .	25
4.6 Adaptação do algoritmo de De Vylder e Goovaerts . . . . .	28
4.7 Exemplos numéricos . . . . .	30

<b>5 Conclusão</b>	<b>48</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>50</b>

## ÍNDICE DE FIGURAS

2.1	Possível trajetória da reserva de risco no modelo primal . . . . .	4
2.2	Possível trajetória da reserva de risco no modelo dual . . . . .	6
3.1	Modelo primal de risco. Ocorrência de ruína. . . . .	10
4.1	Possíveis valores positivos que $U_D^*(n)$ pode tomar até ao momento $t$ . . . . .	23
4.2	Possíveis valores que $U_D^*(t)$ pode tomar, supondo que $U_D^*(t-1) = \omega$ . . . . .	24
4.3	Possíveis valores positivos que $U_D^*(n)$ pode tomar para que ocorra ruína até ao momento $t$ . . . . .	25
4.4	Combinações de $\omega$ e $n$ dos valores de $\psi_D^*(\omega, n)$ necessários para o cálculo de $\psi_D^*(u, t)$ , se $t - u > u$ . . . . .	29
4.5	Densidade do Tempo de Ruína. Exponencial(1), para $u = 1, 3, 5$ . . . . .	33
4.6	Densidade do Tempo de Ruína. Exponencial(1), para $u = 5, 10, 15, 20$ . . . . .	34
4.7	Densidade do Tempo de Ruína. Gama(2,2), para $u = 1, 3, 5$ . . . . .	35
4.8	Densidade do Tempo de Ruína. Gama(2,2), para $u = 5, 10, 15, 20$ . . . . .	36
4.9	Densidade do Tempo de Ruína. Pareto(2,1), para $u = 1, 3, 5$ . . . . .	37
4.10	Densidade do Tempo de Ruína. Pareto(2,1), para $u = 5, 10, 15, 20$ . . . . .	38
4.11	Probabilidade de Ruína. Exponencial(1), para $t = 10, 20, 30$ . . . . .	39
4.12	Probabilidade de Ruína. Exponencial(1), para $t = 40, 70, 100$ . . . . .	40
4.13	Probabilidade de Ruína. Gama(2,2), para $t = 10, 20, 30$ . . . . .	41
4.14	Probabilidade de Ruína. Gama(2,2), para $t = 40, 70, 100$ . . . . .	42
4.15	Probabilidade de Ruína. Pareto(2,1), para $t = 10, 20, 30$ . . . . .	43
4.16	Probabilidade de Ruína. Pareto(2,1), para $t = 40, 70, 100$ . . . . .	44
4.17	Convergência da Probabilidade de Ruína. Exponencial(1), $u = 5, \theta = 0.1$ . . . . .	45
4.18	Convergência da Probabilidade de Ruína. Exponencial(1), $u = 5, \theta = 1$ . . . . .	45
4.19	Convergência da Probabilidade de Ruína. Exponencial(1), $u = 5, \theta = 2$ . . . . .	45
4.20	Convergência da Probabilidade de Ruína. Gama(2,2), $u = 5, \theta = 0.1$ . . . . .	46
4.21	Convergência da Probabilidade de Ruína. Gama(2,2), $u = 5, \theta = 1$ . . . . .	46
4.22	Convergência da Probabilidade de Ruína. Gama(2,2), $u = 5, \theta = 2$ . . . . .	46
4.23	Convergência da Probabilidade de Ruína. Pareto(2,1), $u = 5, \theta = 0.1$ . . . . .	47

4.24	Convergência da Probabilidade de Ruína. Pareto(2,1), $u = 5, \theta = 1$ . . . . .	47
4.25	Convergência da Probabilidade de Ruína. Pareto(2,1), $u = 5, \theta = 2$ . . . . .	47

## ÍNDICE DE TABELAS

4.1	$\psi_D(u, t)$ . Exponencial(1) . . . . .	31
4.2	$\psi_D(u, t)$ . Gama(2,2) . . . . .	31
4.3	$\psi_D(u, t)$ . Pareto(2,1) . . . . .	32

# INTRODUÇÃO

A Teoria da Ruína conta com modelos matemáticos para estudar a vulnerabilidade da reserva de risco de uma seguradora ou de uma determinada carteira à ruína (ou insolvência) ao longo do tempo. Esta vulnerabilidade é medida pela probabilidade da reserva de risco atingir determinado valor. Usualmente, diz-se que a ruína ocorre quando a reserva de risco atinge valores negativos pela primeira vez.

No modelo de risco dual, a reserva de risco é caracterizada pela reserva inicial, menos os gastos constantes, mais os ganhos positivos. Este modelo pode ser aplicado por empresas que têm gastos constantes e ganhos ocasionais em momentos aleatórios, como por exemplo, farmacêuticas, companhias especializadas em exploração geológica de minerais e de petróleo, imobiliárias e corretoras. Outra possível aplicação são as rendas vitalícias ou fundos de pensões, onde os gastos constantes são interpretados como os pagamentos das rendas e os ganhos correspondem ao valor atuarial das rendas ainda por pagar no momento da morte da pessoa segura ou pensionista. Recentemente, este modelo foi aplicado no estudo da viabilidade de se participar de um *Pool* de mineração, do ponto de vista de um minerador individual de bitcoin.

Para o modelo dual em horizonte temporal finito, é conhecida uma expressão exata para o cálculo da probabilidade de ruína, apresentada em Yang e Sendova (2014), mas não são apresentados valores numéricos.

Desta forma, com o objetivo de obter valores aproximados para a probabilidade de ruína em tempo contínuo e horizonte finito e conseqüentemente aproximações para a função densidade do tempo de ruína, pretendemos adaptar para o modelo dual a metodologia descrita em Cardoso e Egídio dos Reis (2002), que se mostrou bastante adequada para a obtenção gráfica aproximada da função densidade do tempo ruína no modelo primal. Da mesma maneira, tencionamos adaptar a metodologia descrita em De Vylder e Goovaerts (1988).

Este trabalho está dividido em cinco capítulos:

No capítulo 1, temos a presente introdução.

No capítulo 2, são introduzidos os modelo primal e dual de risco em tempo contínuo, as suas respectivas reservas de risco, associadas a um processo de Poisson composto, bem

como notações e conceitos necessários. Também são definidos os tempos de ruína para cada modelo de risco, assim como as expressões para a densidade e distribuição de ruína.

No capítulo 3, o processo de reserva do modelo primal é discretizado, são apresentados os algoritmo de De Vylder e Goovaerts (1988) e Cardoso e Egídio dos Reis (2002) e uma breve apresentação de alguns resultados relacionados com cadeias de Markov, necessários para este último algoritmo.

No capítulo 4, começamos por descrever o processo de reserva do modelo dual em tempo discreto, de seguida são apresentados os algoritmos para o cálculo dos ganhos individuais e dos ganhos agregados para as distribuições propostas. Finalmente, depois de uma análise ao processo de reserva, as metodologias de De Vylder e Goovaerts (1988) e Cardoso e Egídio dos Reis (2002) são adaptados para o modelo dual, a partir das quais são calculados valores numéricos que permitem obter, graficamente, as densidades do tempo de ruína para as distribuições exponencial de parâmetro  $\lambda = 1$ , gama de parâmetros  $\alpha = 2$  e  $\beta = 2$  e pareto de parâmetros  $\alpha = 2$  e  $\beta = 1$ . Adicionalmente, é estudada a convergência das probabilidade de ruína em horizonte finito e são obtidos gráficos para a probabilidade de ruína em função da reserva inicial.

No capítulo 5, são apresentadas as conclusões.

## OS MODELOS PRIMAL E DUAL DE RISCO

### 2.1 Introdução

O modelo Cramér-Lundberg é também designado por modelo clássico de risco ou ainda modelo primal de risco devido a existência de um modelo dual. É um modelo que reduz o cálculo da reserva de risco ao acúmulo constante de montantes (prémios) e perda de montantes aleatórios, em momentos aleatórios, desprezando outros fatores que podem fazer variar a reserva como por exemplo, rendimentos com investimentos, o pagamento de dividendos e despesas administrativas ou de gestão das apólices.

O modelo dual de risco, assim como o seu primal é um modelo reducionista, mas que em oposição a este, considera a diminuição da reserva como consequência dos custos (fixos) e o seu aumento por meio de ganhos de montantes aleatórios, ocorridos em momentos aleatórios.

Este capítulo caracteriza os modelos primal e dual de risco, bem como os processos de reserva em tempo contínuo que lhes estão associados.

### 2.2 O modelo primal de risco

O modelo clássico de risco é adequado para análise de capital de seguradoras que acumulam montantes, referentes aos prémios, e em determinados momentos perdem montantes em forma de indemnizações, referentes a sinistros envolvendo os segurados relativos a uma determinada carteira de apólices.

No modelo clássico e em tempo contínuo, a reserva de risco no tempo (ou momento)  $t$  é caracterizada pela soma da reserva inicial com os prémios recebidos, menos as indemnizações pagas, ver Bowers et al. (1997, pp. 399-401), sendo definida pela expressão:

$$U_P(t) = u + ct - S(t), \quad t \geq 0, \quad (2.1)$$

onde,

- $u = U_P(0) \geq 0$  é a reserva inicial ou a reserva no momento  $t = 0$ ,
- $c$  é uma constante positiva que representa o prémio cobrado por unidade de tempo,

- $S(t)$  é o montante total das indemnizações ou o montante das indemnizações agregadas, ocorridos até ao momento  $t$ , dado por

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i, \quad (2.2)$$

sendo,

- $\{N(t)\}_{t \geq 0}$  o processo estocástico de contagem de sinistros ocorridos até ao momento  $t$ , com distribuição de Poisson de parâmetro  $\lambda$ ;
- $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$  uma sequência de variáveis aleatórias (v.a.s) não negativas, independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.s) e independentes de  $N(t)$ ;
- $X_i$  o montante da  $i$ -ésima indemnização individual com valor médio  $p_1 < \infty$ .

Desta forma, assumimos um processo que modela as possíveis indemnizações numa carteira de apólices (que apresenta homogeneidade de riscos) e analisamos a carteira como um todo, isto é, consideramos os sinistros resultantes da carteira de forma global.

O montante das indemnizações agregadas é um processo estocástico,  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ , sendo, mais propriamente, um processo de Poisson composto de parâmetro  $\lambda$ . Consequentemente, a reserva de risco também é um processo estocástico,  $\{U_P(t)\}_{t \geq 0}$ . Por definição de processo de Poisson, o processo de contagem se inicia no momento zero com valor zero,  $N(0) = 0$ , o que faz com que o montante das indemnizações agregadas seja zero enquanto o processo de contagem for igual zero.

Uma possível trajetória da reserva é mostrada na Figura 2.1. A reserva cresce linearmente a uma taxa  $c$ , exceto quando ocorrem indemnizações. Nesta altura, a reserva desce conforme o valor das indemnizações.

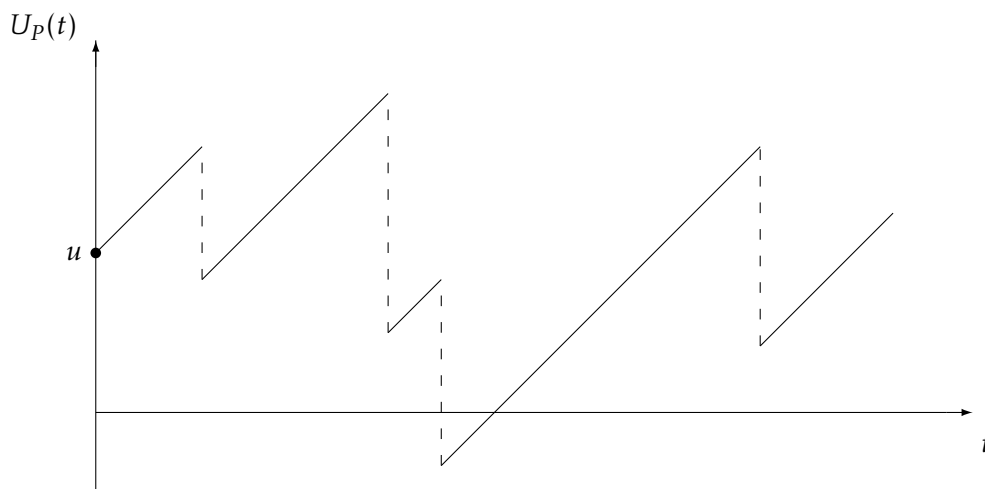


Figura 2.1: Possível trajetória da reserva de risco no modelo primal

O aumento esperado da reserva por unidade de tempo é

$$\mu = c - \mathbb{E}[S(1)] = c - \lambda p_1,$$

que assumimos ser um valor positivo.

Seja  $\theta > 0$  a carga de segurança, tal que o prêmio cobrado por unidade de tempo pode ser escrito da seguinte forma:

$$c = (1 + \theta)\lambda p_1. \quad (2.3)$$

Sem perda de generalidade, toma-se

$$c = p_1 = 1,$$

como em Dickson et al. (1995), o que resulta em  $\lambda = 1/(1 + \theta)$ .

## 2.3 O modelo dual de risco

O modelo dual de risco parece ser mais adequado para empresas que têm gastos constantes e ganhos ocasionais de montantes aleatórios. No caso de farmacêuticas e companhias especializadas em exploração geológica de minerais e de petróleo, podemos entender estes ganhos como sendo a receita de uma futura invenção ou descoberta. Avanzi et al. (2007) também propõem este modelo para negócios baseados em comissões, como corretoras e escritórios de agentes imobiliários, ou ainda rendas vitalícias e fundos de pensões, onde os gastos constantes são interpretados como os pagamentos das rendas e os ganhos correspondem ao valor atuarial das rendas por pagar no momento da morte da pessoa segura ou pensionista.

Recentemente, em Albrecher et al. (2022, Secção 6), este modelo foi aplicado no estudo da viabilidade de se participar de um *Pool* de mineração, na perspectiva de um minerador individual de bitcoin.

Assim, no modelo dual em tempo contínuo, a reserva de risco  $U_D(t)$ , no momento  $t$ , tem como valor a soma da reserva inicial, menos os gastos constantes efetuados, mais o montante dos ganhos (positivos), ou seja,

$$U_D(t) = u - ct + S(t), t \geq 0, \quad (2.4)$$

onde,

- a reserva inicial é estritamente positiva,  $u = U_D(0) > 0$ ,
- $c$  é uma constante positiva que representa a taxa de despesas por unidade de tempo,
- $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  é o processo dos ganhos agregados.

A Figura 2.2 mostra uma trajetória possível para a reserva no modelo dual. A reserva diminui a uma taxa  $c$ , constante, exceto quando ocorrem ganhos positivos, que fazem a reserva aumentar pontualmente.

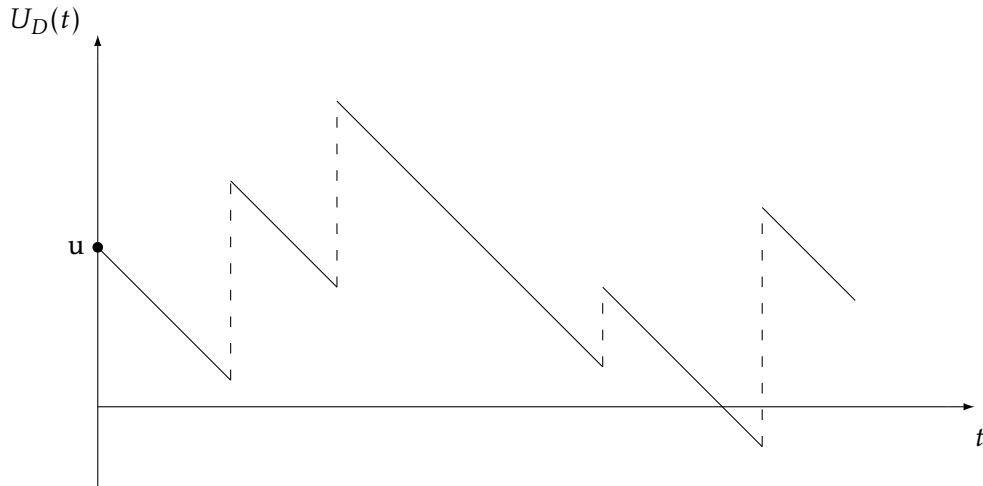


Figura 2.2: Possível trajetória da reserva de risco no modelo dual

O valor esperado do processo de reserva por unidade de tempo é

$$\mu = \mathbb{E}[S(1)] - c = \lambda p_1 - c, \quad (2.5)$$

que admitimos ser um valor positivo, portanto  $c < \lambda p_1$ , como em Afonso et al. (2013). Em outras palavras, no modelo dual a taxa de ganhos esperados é superior à taxa de despesas por unidade de tempo, o que mostra que este é um modelo viável em termos financeiros. Seja  $\theta$  uma constante positiva, tal que

$$c(1 + \theta) = \lambda p_1.$$

Sem perda de generalidade, vamos assumir, tal como no fizemos no modelo primal, que

$$c = p_1 = 1.$$

Assume-se, também, que  $S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$ , onde

- $\{N(t)\}_{t \geq 0}$  corresponde ao processo de contagem de ocorrência de ganhos até ao momento  $t$ , com distribuição Poisson de intensidade  $\lambda = 1 + \theta$ ;
- $X_i$  representa o montante do  $i$ -ésimo ganho individual com valor médio  $p_1$ , supondo que são v.a.s i.i.d.s e ainda independentes de  $N(t)$ .

## 2.4 A ruína em tempo contínuo

Usualmente, diz-se que a ruína ocorre quando a reserva de risco atinge valores negativos pela primeira vez. No modelo clássico, o tempo de ruína, que será representado por  $T_P$ , é regularmente definido por

$$T_P = \begin{cases} \inf\{t : U_P(t) < 0, t \geq 0\} \\ \infty, \text{ se } U_P(t) \geq 0, \forall t \geq 0 \end{cases}. \quad (2.6)$$

No modelo dual, a ruína resulta da diminuição constante da reserva à taxa  $c$ , assim, a ruína dá-se quase certamente imediatamente após a reserva atingir o valor zero. Nestas condições, vamos definir o tempo de ruína, designado por  $T_D$ , da seguinte maneira:

$$T_D = \begin{cases} \inf\{t : U_D(t) = 0, t \geq 0\} \\ \infty, \text{ se } U_D(t) > 0, \forall t \geq 0 \end{cases} . \quad (2.7)$$

A probabilidade da ruína ocorrer em horizonte infinito é dada por

$$\psi(u) = \Pr[T < \infty \mid U(0) = u], \quad (2.8)$$

e a probabilidade de sobrevivência é representada por

$$\delta(u) = 1 - \psi(u), \quad (2.9)$$

onde  $T$  representa a v.a. contínua tempo de ruína e  $U(0)$  a reserva inicial.

A probabilidade da ruína ocorrer, em horizonte finito, até ao momento  $t$  é dada pela expressão

$$\psi(u, t) = \Pr[T \leq t \mid U(0) = u], \quad (2.10)$$

e a probabilidade de sobrevivência até ao momento  $t$  é representada por

$$\delta(u, t) = 1 - \psi(u, t) \quad (2.11)$$

Denotemos por  $\phi(u, t)$  a função densidade de probabilidade imprópria do tempo de ruína  $T$ , tal que

$$\psi(u, t) = \Pr[T \leq t \mid U(0) = u] = \int_0^t \phi(u, v) dv, \quad (2.12)$$

e a função de densidade própria, designada por  $\tilde{\phi}(u, t)$ , é dada por

$$\tilde{\phi}(u, t) = \phi(u, t) / \psi(u). \quad (2.13)$$

As definições 2.8-2.13 são válidas tanto para o modelo primal como para o modelo dual em tempo contínuo, basta consideramos os tempos de ruína  $T_P$  ou  $T_D$ , e os processos de reserva  $U_P$  ou  $U_D$ , consoante o modelo em questão. Nesta altura serão utilizadas as notações  $\psi_P, \delta_P, \phi_P$  e  $\tilde{\phi}_P$  para o modelo primal e  $\psi_D, \delta_D, \phi_D$  e  $\tilde{\phi}_D$  para o modelo dual, ao invés de  $\psi, \delta, \phi$  e  $\tilde{\phi}$ , respetivamente.

Em tempo contínuo e no modelo de risco dual, a expressão da probabilidade de ruína em horizonte infinito é dada por

$$\psi_D(u) = e^{-Ru}, \quad (2.14)$$

sendo  $R$  a única raiz positiva da equação

$$\lambda \left( \int_0^\infty e^{-Rx} g(x) dx - 1 \right) + cR = 0, \quad (2.15)$$

e  $g(x)$  a função densidade dos ganhos individuais. Esse resultado é demonstrado por Gerber (1979) e utilizado, por exemplo, em Afonso et al. (2013).

Também, para o mesmo modelo, conhecemos a expressão exata da função de distribuição (imprópria) do tempo de ruína, demonstrada em Yang e Sendova (2014) e que é dada por

$$\psi_D(u, t) = \begin{cases} e^{-\frac{\lambda}{c}u} + u \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \int_{\frac{u}{c}}^t \frac{\lambda^n}{n!} x^{n-1} e^{-\lambda x} g^{[n]}(cx - u) dx \right], & t \geq \frac{u}{c}, \\ 0, & t < \frac{u}{c} \end{cases}, \quad (2.16)$$

onde  $g^{[n]}$  é a  $n$ -ésima convolução da densidade  $g$  consigo mesma, sendo por escolha  $c = 1$ . No entanto, os autores não apresentaram resultados numéricos, devido à complexidade dos cálculos.

## ALGORITMOS PARA O MODELO PRIMAL

### 3.1 Introdução

O propósito deste capítulo é apresentar os algoritmos recursivos desenvolvidos por De Vylder e Goovaerts (1988) e Cardoso e Egídio dos Reis (2002) para o modelo primal em tempo discreto. Assim, são definidos o processo de reserva em tempo discreto, bem como o tempo de ruína e as probabilidades de ruína e sobrevivência. Também são apresentadas algumas noções que envolvem as cadeias de Markov, necessárias para a compreensão do algoritmo de Cardoso e Egídio dos Reis (2002).

### 3.2 O processo de reserva em tempo discreto

Vamos considerar a abordagem feita por Dickson e Waters (1991), que baseia-se em discretizar as indemnizações individuais e modificar a unidade monetária e a unidade temporal de modo a aproximar a probabilidade de sobrevivência em tempo contínuo, considerando um processo de risco em tempo discreto. Assim, dada uma reserva inicial  $u = 0, 1, 2, \dots$ , a reserva no tempo  $t$ , é dada por

$$U_p^*(t) = u + t - S^*(t), t = 0, 1, 2, \dots \quad (3.1)$$

Assumindo que,

- as indemnizações individuais são v.a.s i.i.d.s não negativas e inteiras com valor médio inteiro  $\beta > 1$ ,
- o prémio cobrado por unidade de tempo é 1,
- o número esperado de indemnizações por unidade de tempo é  $\lambda = 1/((1 + \theta)\beta)$ .

E, ainda, que

$$S^*(t) = \sum_{n=1}^t Y_n^*, \quad (3.2)$$

com função distribuição e função probabilidade representadas por  $F^*(x, t)$  e  $f^*(x, t)$ , respetivamente, que por conveniência, vamos escrever  $F_j = F^*(j, 1)$  e  $f_j = f^*(j, 1)$ , para  $j = 0, 1, 2, \dots$ . Nesta situação,  $Y_n^*$  representa o montante das indemnizações agregadas, ocorridas durante o período  $n$  e  $f_j$  é a probabilidade de  $Y_n^*$  tomar o valor  $j$ . Utilizando a fórmula recursiva de Panjer (1981) podemos obter  $\{f_j\}_{j=0}^{\infty}$ , a função de probabilidade de  $Y_n^*$  (ver Secção 4.3).

Por sua vez, o período  $n$  é o intervalo de tempo que se inicia no momento imediatamente a seguir ao momento  $n - 1$  e termina no momento  $n$ .

### 3.3 A ruína em tempo discreto

Em tempo discreto, a ruína dá-se quando a reserva atinge valores negativos. Consequentemente o tempo de ruína é definido como se segue

$$T'_P = \begin{cases} \min\{t : U_P^*(t) < 0, t = 1, 2, \dots\} \\ \infty, \text{ se } U_P^*(t) \geq 0, \text{ para } t = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (3.3)$$

Todavia, com esta definição de tempo de ruína, se no fim de um dado período, a reserva em tempo discreto toma valor zero, então em tempo contínuo ou a reserva atingiu valores negativos nesse período, ou a reserva passou a tomar exatamente o valor zero durante este período. No entanto, este último caso tem probabilidade zero.

O primeiro caso está ilustrado na Figura 3.1, onde podemos observar que em tempo contínuo ocorreu ruína, pois a reserva desceu para valores abaixo de zero durante o período  $n + 1$ . Mas, se observarmos o mesmo caso, agora tempo discreto, apenas veríamos que a reserva passou de positiva, no fim do período  $n$ , para zero no fim do período  $n + 1$ , ou seja, não houve ruína.

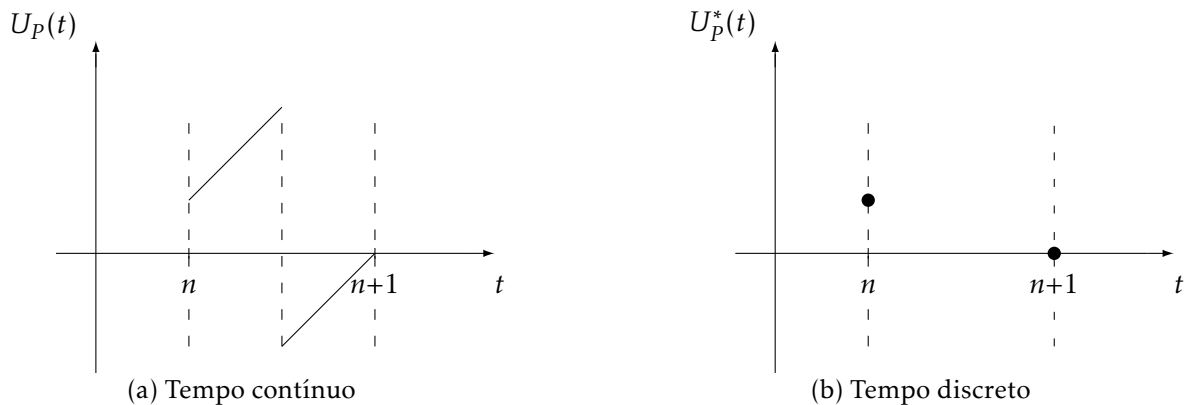


Figura 3.1: Modelo primal de risco. Ocorrência de ruína.

Assim, apesar de ocorrer ruína no caso contínuo, esta pode não ser detetada no caso discreto. Por este motivo, Dickson e Waters (1991) apresentaram uma nova definição para o tempo de ruína:

$$T_P^* = \begin{cases} \min\{t : U_P^*(t) \leq 0, t = 1, 2, \dots\} \\ \infty, \text{ se } U_P^*(t) > 0, \text{ para } t = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (3.4)$$

Portanto, enquanto a reserva de risco for estritamente positiva dizemos que não ocorre ruína. Importa referir que no modelo primal ter uma reserva inicial igual a zero não implica ruína no momento zero.

Quanto às probabilidades de ruína e sobrevivência em horizonte infinito, são definidas, respetivamente, como se segue:

$$\psi^*(u) = \Pr[T^* < \infty \mid U^*(0) = u] \quad (3.5)$$

$$\delta^*(u) = 1 - \psi^*(u), \quad (3.6)$$

onde  $T^*$  representa a v.a. discreta tempo de ruína e  $U^*(0)$  a reserva inicial.

Em horizonte finito, as probabilidades de ruína e de sobrevivência são dadas por

$$\psi^*(u, t) = \Pr[T^* \leq t \mid U^*(0) = u] \quad (3.7)$$

$$\delta^*(u, t) = 1 - \psi^*(u, t). \quad (3.8)$$

Denotemos por  $\phi^*(u, t)$  a função de probabilidade (imprópria) do tempo de ruína  $T^*$ , definida por

$$\psi^*(u, t) = \Pr[T^* \leq t \mid U^*(0) = u] = \sum_{i=1}^t \phi^*(u, i), \quad (3.9)$$

onde

$$\phi^*(u, t) = \Pr[T^* = t \mid U^*(0) = u]. \quad (3.10)$$

Designemos por  $\tilde{\phi}^*(u, t)$  a função de densidade (própria) de  $T^*$ , tal que

$$\tilde{\phi}^*(u, t) = \frac{\phi^*(u, t)}{\psi^*(u)}. \quad (3.11)$$

As definições (3.5)-(3.11) são válidas em tempo discreto tanto para o modelo primal, como para o modelo dual, apresentado mais adiante na Secção 4.2. Substituímos o processo de reserva  $T^*$  por  $T_P^*$  ou  $T_D^*$  e o tempo de ruína  $U^*$  por  $U_P^*$  ou  $U_D^*$ , conforme o modelo. As notações  $\psi^*$ ,  $\delta^*$ ,  $\phi^*$  e  $\tilde{\phi}^*$ , serão substituídas pelas notações  $\psi_P^*$ ,  $\delta_P^*$ ,  $\phi_P^*$  e  $\tilde{\phi}_P^*$  no modelo primal e  $\psi_D^*$ ,  $\delta_D^*$ ,  $\phi_D^*$  e  $\tilde{\phi}_D^*$  no modelo dual.

### 3.4 O algoritmo de De Vylder e Goovaerts

De Vylder e Goovaerts (1988), desenvolveram um algoritmo recursivo para o cálculo da probabilidade de sobrevivência que quando aplicado à definição do tempo de ruína  $T_P^*$ , resulta ser:

$$\delta_P^*(u, 1) = \sum_{j=0}^u f_j = F_u, \quad (3.12)$$

$$\delta_P^*(u, t) = \sum_{j=0}^u f_j \delta_P^*(u+1-j, t-1), \quad t \geq 2. \quad (3.13)$$

Para  $t \geq 2$ , a sobrevivência vem de condicionar a reserva ao fim de um período. Com probabilidade  $f_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, u$ , a reserva toma o valor  $u + 1 - j$  e durante os próximos  $t - 1$  períodos a probabilidade de sobrevivência é  $\delta_p^*(u + 1 - j, t - 1)$ . Para  $\delta_p^*(u, 1)$ , o raciocínio é imediato, isto é, só há sobrevivência se a reserva se mantiver estritamente positiva, o que ocorre com probabilidade  $F_u$ .

Das Fórmulas (3.12) e (3.13) resultam as seguintes expressões para a probabilidade de ruína:

$$\psi_p^*(u, 1) = 1 - F_u, \quad (3.14)$$

$$\psi_p^*(u, t) = 1 - F_u + \sum_{j=0}^u f_j \psi_p^*(u + 1 - j, t - 1), \quad t \geq 2. \quad (3.15)$$

Dickson e Waters (1991) desenvolveram, a partir deste último, um novo algoritmo recursivo mais rápido, atendendo ao objetivo destes autores, no entanto numericamente instável. Pelas razões apontadas por Cardoso e Egídio dos Reis (2002), este algoritmo não parece ser o mais adequado na determinação da distribuição do tempo de ruína.

A fim de computar  $\psi_D^*(u, t)$ , pelas Fórmulas (3.14) e (3.15), precisamos antes calcular os seguinte valores

$$\begin{aligned} \psi_p^*(\omega, 1), \quad \omega = 1, \dots, u + t - 1 \\ \psi_p^*(\omega, 2), \quad \omega = 1, \dots, u + t - 2 \\ \vdots \\ \psi_p^*(\omega, t - 1), \quad \omega = 1, \dots, u + 1. \end{aligned}$$

Assim, são necessárias  $(t - 1)(2u + t)/2$  iterações para obter cada probabilidade  $\psi_p^*(u, t)$ .

Por último, tal como em Dickson et al. (1995), a aproximação proposta para este algoritmo é  $\psi_p(u, t) \approx \psi_p^*(u\beta, t\beta)$ .

### 3.5 O algoritmo de Cardoso e Egídio dos Reis

O algoritmo recursivo de Cardoso e Egídio dos Reis foi apresentado pela primeira vez em Cardoso (1997) e mais tarde em Cardoso e Egídio dos Reis (2002). Este algoritmo assenta nos mesmos pressupostos que os algoritmos citados anteriormente, mas diferencia-se por apresentar o processo de reserva em tempo discreto como uma cadeia de Markov. De acordo com os autores, o tempo de processamento é inferior aos algoritmos desenvolvidos por De Vylder e Goovaerts (1988) e por Dickson e Waters (1991), para além de ser numericamente estável.

#### 3.5.1 Cadeias de Markov

Parzen (2015, pp. 22-24) define um processo estocástico, do ponto de vista matemático, como um conjunto de variáveis aleatórias  $\{X(t), t \in S\}$  indexadas a um parâmetro temporal  $t$ , pertencente a um dado subconjunto real  $S$ .

Se para uma conjunto de  $n$  pontos temporais  $t_1, t_2, \dots, t_n$  pertencentes ao subconjunto  $S$ , tais que  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ , e para um conjunto de valores  $v_1, v_2, \dots, v_n$ , a probabilidade condicional de  $X(t_n)$ , dados  $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_{n-1})$ , depende apenas do valor de  $X(t_{n-1})$ , tal que

$$\begin{aligned} \Pr[X(t_n) = v_n \mid X(t_1) = v_1, X(t_2) = v_2, \dots, X(t_{n-1}) = v_{n-1}] = \\ = \Pr[X(t_n) = v_n \mid X(t_{n-1}) = v_{n-1}], \end{aligned} \quad (3.16)$$

então,  $\{X(t), t \in S\}$  é uma cadeia de Markov, ver Cox e Miller (1965, pp. 76-91). Diz-se que o processo de Markov não tem memória, pois o seu estado futuro é apenas condicionado pelo estado presente.

Um estado, pertencente a um espaço de estados, é um possível valor que o processo pode tomar e o espaço de estados é o conjunto de todos os possíveis estados.

Seja  $p_{i,j}^{m,l}$  a probabilidade do processo estar no estado  $j$  no instante  $t_l$ , dado que estava no estado  $i$  no instante  $t_m$ . Então,

$$p_{i,j}^{m,l} = \Pr[X(t_l) = j \mid X(t_m) = i], \quad m < l. \quad (3.17)$$

Diz-se que uma cadeia de Markov é homogênea ou possui um mecanismo de transição estacionário quando a probabilidade apresentada anteriormente depende do intervalo de tempo  $n$ , que resulta da distância  $t_l - t_m$ , mas não dos tempos  $t_l$  e  $t_m$ . Definimos para tal cadeia de Markov, a probabilidade de transição em  $n$ -passos,  $p_{i,j}^{(n)}$ , tal que

$$p_{i,j}^{(n)} = \Pr[X(t_{m+n}) = j \mid X(t_m) = i], \quad (3.18)$$

para qualquer inteiro  $m, n \geq 0$ .

As probabilidades de transição podem ser representadas em forma de matriz, com um número de estados finito ou infinito, caracterizada por  $P^{(n)} = [p_{i,j}^{(n)}]$ , sendo  $P^{(n)}$  a matriz de probabilidades de transição em  $n$ -passos. A probabilidade de transição em um passo é representada simplesmente por  $p_{i,j} = p_{i,j}^{(1)}$ . Por sua vez, a matriz de probabilidades de transição em um passo será representada por  $P = P^{(1)} = [p_{i,j}]$ . A matriz  $P$  de probabilidades de transição é conhecida como matriz estocástica ou matriz de Markov sendo, por definição, todos os seus elementos não negativos e a soma dos elementos de cada linha igual a 1.

Se para um dado estado  $i$ , temos  $p_{i,j} = 0$  para  $i \neq j$  (ou  $p_{i,i} = 1$ ), então  $i$  diz-se ser um estado absorvente. Isto significa que depois de atingir o estado  $i$  o processo vai manter-se no mesmo estado.

Para as cadeias de Markov homogêneas são satisfeitas as equações de Chapman-Kolmogorov,

$$p_{i,j}^{(m+n)} = \sum_k p_{i,k}^{(m)} p_{k,j}^{(n)}, \quad (3.19)$$

que também podem ser apresentadas na forma matricial,

$$P^{(m+n)} = P^{(m)} P^{(n)}. \quad (3.20)$$

### 3.5.2 O algoritmo

O processo de reserva  $U_p^*(t)$  é Markoviano, por isso, a reserva de risco no momento  $t + 1$  pode ser escrita da seguinte maneira:

$$U_p^*(t + 1) = U_p^*(t) + 1 - Y_{t+1}, \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad (3.21)$$

De onde resulta que

$$U_p^*(t + 1) = \begin{cases} U_p^*(t) + 1, & \text{se } Y_{t+1} = 0 \\ U_p^*(t), & \text{se } Y_{t+1} = 1 \\ U_p^*(t) - 1, & \text{se } Y_{t+1} = 2 \\ \dots & \dots \end{cases} \quad (3.22)$$

O processo é, também, homogêneo. Desta forma, a probabilidade de transição em um passo dada por:

$$\begin{aligned} p_{r,s} &= \Pr[U_p^*(n) = s \mid U_p^*(n-1) = r] \\ &= \Pr[U_p^*(n-1) + 1 - Y_n = s \mid U_p^*(n-1) = r] \\ &= \Pr[Y_n = r + 1 - s] \\ &= f_{r+1-s}, \end{aligned} \quad (3.23)$$

para  $1 \leq r \leq u + n - 1$ ,  $1 \leq s \leq u + n$ . Ademais,  $s \leq r + 1$ , pois a reserva sobe no máximo uma posição no fim de cada período.

Fazendo  $r = u$ ,  $s = j$  e  $n = 1$ , temos,

$$p_{u,j} = \Pr[U_p^*(1) = j \mid U_p^*(0) = u] = f_{u+1-j}, \quad (3.24)$$

para  $1 \leq j \leq u + 1$ .

Finalmente, a matriz de probabilidades de transição em um passo,  $P$ , dada por:

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & u-1 & u & u+1 & \dots & u+t-1 & \dots \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ u-1 \\ u \\ \vdots \\ u+t-1 \\ \vdots \end{matrix} & \left[ \begin{array}{cccccccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 1-F_1 & f_1 & f_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 1-F_2 & f_2 & f_1 & f_0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots \\ 1-F_{u-1} & f_{u-1} & f_{u-2} & f_{u-3} & \dots & f_1 & f_0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 1-F_u & f_u & f_{u-1} & f_{u-2} & \dots & f_2 & f_1 & f_0 & \dots & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots \\ 1-F_{u+t-1} & f_{u+t-1} & f_{u+t-2} & f_{u+t-3} & \dots & f_{t+1} & f_t & f_{t-1} & \dots & f_1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots \end{array} \right] \end{matrix}.$$

Pelo método de Cardoso e Egídio dos Reis (2002), se considerarmos uma reserva inicial  $u = 0, 1, 2, \dots$ , a ruína ocorre no fim do período  $n$ , para  $2 \leq n \leq t$ , quando se verificam as condições seguintes:

1. O processo de reserva se manteve sempre positivo, desde o período 1 até ao fim do período  $n-1$ , quando passa a tomar o valor  $j$ , para  $1 \leq j \leq u+n-1$ , cuja probabilidade é

$$\Pr[U_P^*(n-1) = j \mid U_P^*(0) = u] = p_{u,j}^{(n-1)}.$$

2. O montante das indemnizações agregadas no fim do período  $n$  é maior ou igual a  $j+1$ , com probabilidades

$$\Pr[S^*(n) \geq j+1] = 1 - \Pr[S^*(n) < j+1] = 1 - \Pr[S^*(n) \leq j] = 1 - F_j.$$

Assim, a função de probabilidade do tempo de ruína para o modelo clássico, que vamos denotar por  $\phi_P^*(u, t)$ , é dada por

$$\phi_P^*(u, 1) = 1 - F_u \quad (3.25)$$

$$\phi_P^*(u, t) = \sum_{j=1}^{u+t-1} p_{u,j}^{(t-1)} (1 - F_j), t = 2, 3, \dots, \quad (3.26)$$

com função de distribuição,  $\psi_P^*(u, t)$ , tal que,

$$\psi_P^*(u, 1) = 1 - F_u \quad (3.27)$$

$$\psi_P^*(u, t) = 1 - F_u + \sum_{n=2}^t \sum_{j=1}^{u+n-1} p_{u,j}^{(n-1)} (1 - F_j), t = 2, 3, \dots \quad (3.28)$$

Para calcular a densidade do tempo de ruína não é necessário utilizar toda a matriz de probabilidades de transição, pois o número máximo de estados que a reserva pode tomar até ao momento  $t-1$  é  $u+t-1$ . De forma a obter a probabilidade  $p_{u,j}^{(t-1)}$  vamos considerar, apenas, o  $u$ -ésimo vetor linha de cada matriz  $P^{(n)}$ , denotado por  $P_u^{(n)} = [p_{u,j}^{(n)}]$ . O vetor  $P_u^{(1)}$  é retirado diretamente da matriz  $P$ ,

$$P_u^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & u-1 & u & u+1 & \dots & u+t-1 & \dots \\ 1 - F_u & f_u & f_{u-1} & f_{u-2} & \dots & f_2 & f_1 & f_0 & \dots & 0 & \dots \end{bmatrix}, \quad (3.29)$$

onde podemos observar que os primeiros elementos, até à posição  $u+1$ , são diferentes de zero. Pelas equações de Chapman-Kolmogorov, obtemos os restantes vetores fazendo

$$P_u^{(n)} = P_u^{(n-1)} P, \quad n = 1, \dots, t-1. \quad (3.30)$$

Para computar  $p_{u,j}^{(n)}$ ,  $n = 1, \dots, t-1$  vamos ter em conta que

- i) o vetor  $P_u^{(n-1)}$  tem os elementos diferentes de zero até à posição  $u+n-1$ ;
- ii) as colunas  $j, j \geq 2$  da matriz  $P$  têm elementos não nulos a partir da posição  $j-1$ , enquanto que as colunas  $j=1$  tem apenas o elemento zero nulo e a coluna  $j=0$  não tem elementos nulos. Isto é, a coluna  $j$  tem elementos não nulos a partir da posição  $\max(\min(j, 1), j-1)$ , que resulta de que para aceder ao estado  $j$ , o processo tem de estar, no mínimo, no estado  $j-1$ .

Assim, a probabilidade de transição  $p_{u,j}^{(n)}$ , para  $j \leq u + n$ , é dada pela expressão

$$p_{u,j}^{(n)} = \sum_{k=\max(\min(j,1),j-1)}^{u+n-1} p_{u,k}^{(n-1)} p_{k,j}, \quad (3.31)$$

apresentada por Cardoso e Waters (2003, fórmula (2)). Por i) multiplicamos  $P_u^{(n-1)}$ , no máximo, até ao elemento  $u + n - 1$  de cada coluna de  $P$  e por ii) limitamos inferiormente o somatório do produto a partir de  $\max(\min(j,1), j - 1)$ . Quando  $j > u + n$ , então  $p_{u,j}^{(n)} = 0$ .

Para  $j = 0$ ,  $p_{u,j}^{(n)}$  é probabilidade do processo de reserva, inicialmente no estado  $u$ , estar no estado 0 ao fim de  $n$ -passos. É de se atentar que a esta probabilidade inclui a possibilidade do processo atingir o estado 0 antes do fim do período  $n$  e uma vez atingido o estado de ruína, que é absorvente, o processo vai manter-se neste mesmo estado. Portanto, podemos reescrever a expressão (3.28), de maneira que,

$$\psi_P^*(u, t) = p_{u,0}^{(t)} = \sum_{k=0}^{u+t-1} p_{u,k}^{(t-1)} p_{k,0}. \quad (3.32)$$

A aproximação considerada para este algoritmo é  $\psi_P(u, t) \approx \psi_P^*(u\beta, t\beta)$ . Quanto à obtenção da probabilidade de ruína  $\psi_P^*(u, t)$ , precisamos calcular as seguintes probabilidades de transição:

$$\begin{aligned} p_{u,j}^{(1)}, j &= 1, \dots, u + 1, \\ p_{u,j}^{(2)}, j &= 1, \dots, u + 2, \\ &\vdots \\ p_{u,j}^{(t-1)}, j &= 1, \dots, u + t - 1, \end{aligned}$$

o que resulta num total de  $(t - 1)(2u + t)/2$  iterações.

## ALGORITMOS PARA O MODELO DUAL

### 4.1 Introdução

Neste capítulo é apresentada uma versão discreta do processo de risco no modelo dual em tempo contínuo, elabora-se uma breve explicação sobre o cálculo dos ganhos agregados e individuais e procede-se a uma análise do processo de reserva. Com o objetivo de obter valores aproximados para a probabilidade de ruína em tempo discreto, os algoritmos de De Vylder e Goovaerts (1988) e de Cardoso e Egídio dos Reis (2002) são adaptados para o modelo dual. Por fim, são apresentados exemplos numéricos.

### 4.2 O processo de reserva em tempo discreto

De modo a aproximar a probabilidade de sobrevivência em tempo contínuo e horizonte finito, considerando o processo de risco em tempo discreto, adaptamos, para o modelo dual, a metodologia proposta por Dickson e Waters (1991). Assim, dada uma reserva inicial  $u = 1, 2, \dots$ , considera-se o processo de reserva em tempo discreto, descrito em Cheung e Drekcic (2008, Secção 5), cuja reserva de risco é dada por

$$U_D^*(t) = u - t + S^*(t), t = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.1)$$

onde,

- os ganhos individuais,  $X_i^*$ , são v.a.s i.i.d.s, não negativas discretas e inteiras com valor esperado inteiro  $\beta > 1$ ;
- a despesa por unidade de tempo é 1.

O montante dos ganhos agregados ocorridos até ao momento  $t$  é um processo de Poisson composto que pode ser escrito como se segue:

$$S^*(t) = \sum_{i=1}^{N^*(t)} X_i^* = \sum_{n=1}^t Y_n^*, \quad (4.2)$$

onde  $N^*(t)$  representa o número de ganhos obtidos até ao momento  $t$ , com valor esperado  $(1 + \theta)/\beta$ , por unidade de tempo, e  $Y_n^*$  representa os ganhos agregados ocorridos durante o período  $n$ , tendo, portanto, uma distribuição composta. Assim como no modelo anterior, continuaremos a designar as funções de distribuição cumulativa e densidade de probabilidade de  $S^*(1)$  por  $F_j$  e  $f_j$ , respetivamente.

Em tempo discreto, o momento em que ocorre a ruína é dado por

$$T_D^* = \begin{cases} \min\{t : U_D^*(t) = 0, t = 1, 2, \dots\} \\ \infty, \text{ se } U_D^*(t) > 0, \text{ para } t = 1, 2, \dots \end{cases}, \quad (4.3)$$

sendo as definições (3.5)-(3.11) válidas, com as devidas diferenças, para o modelo apresentado neste capítulo.

Dada uma reserva inicial  $u > 0$ , a probabilidade de ruína em tempo contínuo, definida na Fórmula (2.10) pode ser reescrita para o modelo dual, atendendo à expressão de  $U_D(t)$ , tal que

$$\psi_D(u, t) = \Pr[T_D \leq t \mid U_D(0) = u] = \Pr\left[u - n + \sum_{i=1}^{N(n)} X_i = 0, 0 \leq n \leq t\right]. \quad (4.4)$$

Em tempo discreto, a probabilidade de ruína definida na Fórmula (3.7) pode ser reescrita, para o modelo dual, atendendo à expressão  $U_D^*(t)$ ,

$$\psi_D^*(u, t) = \Pr[T_D^* \leq t \mid U_D^*(0) = u] = \Pr\left[u - n + \sum_{i=1}^{N^*(n)} X_i^* = 0, n = 1, 2, \dots\right], \quad (4.5)$$

com  $X_i^*$  tomando valores nos inteiros  $0, 1, 2, \dots$

Com escolhas apropriadas para o parâmetro do processo de contagem de ocorrência de ganhos e para os valores de discretização dos ganhos individuais, e adaptando o métodos descrito em Dickson e Waters (1991) e em Dickson (2016, Secção 7.9.2) podemos aproximar a probabilidade de ruína em tempo contínuo pela sua correspondente em tempo discreto. O processo de reserva em tempo contínuo caracterizado na Secção 2.3 será chamado de processo inicial e o processo em tempo discreto está descrito no início desta secção.

#### 1. Discretização de $X_i$

Seja  $\{{}_1X_i^*\}_{i=1}^{\infty}$  uma sequência de v.a.s i.i.d.s, tomando os valores  $0, 1/\beta, 2/\beta, \dots$ , que substituirá  $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ , de forma a que a distribuição de  ${}_1X_i^*$  seja uma boa aproximação da distribuição de  $X_i$  (ver Dickson, 2016, secção 4.7.1). Assim,

$${}_1\psi_D(u, t) = \Pr\left[u - n + \sum_{i=1}^{N(n)} {}_1X_i^* = 0, 0 < n \leq t\right]$$

é a probabilidade de ruína em tempo contínuo, para o processo inicial, mas com as v.a.s contínuas  $X_i$  substituídas pelas v.a.s discretas  ${}_1X_i^*$ .

Se a distribuição de  ${}_1X_i^*$  é uma boa aproximação da distribuição de  $X_i$ , então

$$\psi_D(u, t) \approx_1 \psi_D(u, t).$$

Ao discretizar os ganhos individuais, estamos a forçar a reserva de risco a tomar valores discretos.

## 2. Alterar a unidade monetária

De seguida, altera-se a unidade monetária, utilizando uma sequência da v.a.s i.i.d.s  $\{{}_2X_i^*\}_{i=1}^{\infty}$ , tomando os valores  $0, 1, 2, \dots$ , tal que  ${}_2X_i^* = \beta_1 X_i^*$ .

Seja

$${}_2\psi_D(w, t) = \Pr \left[ w - \beta n + \sum_{i=1}^{N(n)} {}_2X_i^* = 0, 0 < n \leq t \right].$$

Assim,

$${}_1\psi_D(u, t) = {}_2\psi_D(\beta u, t),$$

e portanto,

$$\psi_D(u, t) \approx_2 \psi_D(\beta u, t).$$

Este passo faz com que os ganhos individuais passem a tomar valores inteiros, possibilitando a aplicação da fórmula de Panjer (1981).

## 3. Alterar a unidade temporal

Por último altera-se a escala do tempo. Para isso, o processo de contagem  $N(t)$  de parâmetro  $\lambda$  é substituído por um processo de Poisson de parâmetro  $\lambda/\beta = (1 + \theta)/\beta$ , que vamos denotar por  $N^*(t)$ .

Seja

$${}_3\psi_D(w, t) = \Pr \left[ w - n + \sum_{i=1}^{N^*(n)} {}_2X_i^* = 0, 0 < n \leq t \right]. \quad (4.6)$$

Então,

$${}_2\psi_D(w, t) = {}_3\psi_D(w, \beta t).$$

Consequentemente,

$$\psi_D(u, t) \approx_3 \psi_D(\beta u, \beta t).$$

A probabilidade  ${}_3\psi_D(u, t)$  é a probabilidade de ruína em tempo contínuo, mas com ganhos individuais discretos. Assim, fica claro que  $\psi_D^*(u, t)$  é a probabilidade de ruína em tempo discreto correspondente a  ${}_3\psi_D(u, t)$  e que, por sua vez, o processo de risco resultante da aplicação dos três passos descritos anteriormente é o processo de risco em tempo discreto caracterizado no início desta secção. Desta forma, a aproximação obtida é

$$\psi_D(u, t) \approx \psi_D^*(\beta u, \beta t). \quad (4.7)$$

Quanto à qualidade da aproximação, esta é determinada pelo parâmetro de discretização  $\beta$ , uma vez que, intuitivamente, quanto maior é o seu valor, menor o intervalo entre os pontos temporais nos quais a reserva de risco é "verificada", portanto, melhor é a aproximação.

Note-se que podemos escolher qualquer unidade monetária e temporal, ver De Vylder e Goovaerts (1988, Secção 7).

### 4.3 Os ganhos individuais e agregados

A fórmula de Panjer permite-nos obter a função de probabilidade do montante total dos ganhos agregados ocorridos durante um determinado período, cujos valores designamos por  $\{f_j\}_{j=0}^{\infty}$  e pode ser aplicada quando a função de probabilidade da ocorrência de ganhos satisfaz a fórmula recursiva

$$p_n = \left(a + \frac{b}{n}\right) p_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (4.8)$$

onde  $p_n = \Pr[N^*(1) = n]$ ,  $a$  e  $b$  são constantes. Sundt e Jewell (1981) mostraram que uma das distribuições que satisfaz a fórmula anterior é a distribuição de Poisson com parâmetro  $\lambda$ , sendo  $a = 0$  e  $b = \lambda$ . E, se os ganhos individuais são distribuídos nos inteiros não negativos, então

$$f_0 = e^{-\lambda(1-g_0)} \quad (4.9)$$

$$f_j = \frac{\lambda}{j} \sum_{i=1}^j i f_i g_{j-i}, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (4.10)$$

onde  $g_j$  é a função de probabilidade dos ganhos individuais e  $G$  a respetiva função de distribuição.

Para aplicar a fórmula de Panjer, Cardoso (1997) pontua que precisamos que a distribuição dos ganhos individuais seja discreta, mas não aritmética, ou sendo aritmética com um período pouco conveniente. Não sendo esse o caso, reparametrizamos a unidade monetária e procedemos à discretização da correspondente distribuição.

Primeiro escolhemos uma nova unidade monetária para os ganhos individuais, designando por  $Z = X/h$  a nova v.a. reparametrizada dos ganhos individuais e  $G_Z(z) = G(zh)$  a sua função de distribuição. A discretização aplicada é a proposta em De Vylder e Goovaerts (1988), de onde resultam as funções de probabilidade e de distribuição em tempo discreto  $\bar{g}_j$  e  $\bar{G}$ , respetivamente, tal que

$$\bar{G}(j) = \bar{g}_0 + \bar{g}_1 + \dots + \bar{g}_j = \int_j^{j+1} G_Z(z) dz, \quad (4.11)$$

escolhendo convenientemente  $h = 1/\beta$ . Este processo de discretização tem a vantagem de não alterar o valor esperado da distribuição após a discretização.

Nos exemplo numéricos, as distribuições dos ganhos individuais e respetivas funções de distribuição reparametrizadas são as seguintes:

- distribuição Exponencial( $\lambda = 1$ ),

$$G_Z(z) = 1 - e^{-\frac{z}{\beta}}, z > 0; \quad (4.12)$$

- distribuição Gama( $\alpha = 2, \beta = 2$ ),

$$G_Z(z) = 1 - e^{-\frac{2z}{\beta}} \left( 1 + \frac{2z}{\beta} \right), z > 0; \quad (4.13)$$

- distribuição Pareto( $\alpha = 2, \beta = 1$ ),

$$G_Z(z) = 1 - \left( \frac{1}{1 + \frac{z}{\beta}} \right)^2, z > 0. \quad (4.14)$$

Se os ganhos individuais têm distribuição Exponencial(1), por exemplo, então

$$\bar{g}_0 = 1 - \beta \left( 1 - e^{-\frac{1}{\beta}} \right) \quad (4.15)$$

$$\bar{g}_{jh} = \beta e^{-\frac{j+1}{\beta}} \left( e^{\frac{1}{\beta}} - 1 \right)^2, j = 1, 2, \dots \quad (4.16)$$

#### 4.4 Análise do processo de reserva em tempo discreto

Pela definição (4.1) de processo de reserva, no momento  $t + 1$  a reserva de risco é dada por

$$U_D^*(t + 1) = u - (t + 1) + S^*(t + 1), t = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.17)$$

e o montante total dos ganhos agregados ocorridos,  $S^*(t + 1)$ , pode ser escrito em função de  $S^*(t)$ , ou seja,

$$S^*(t + 1) = S^*(t) + Y_{t+1}^*. \quad (4.18)$$

Logo, podemos escrever a reserva no momento  $t + 1$  em função da reserva no momento  $t$ ,

$$U_D^*(t + 1) = U_D^*(t) + Y_{t+1}^* - 1, \quad (4.19)$$

de onde resulta que

$$U_D^*(t + 1) = \begin{cases} U_D^*(t) - 1, & \text{se } Y_{t+1}^* = 0 \\ U_D^*(t), & \text{se } Y_{t+1}^* = 1 \\ U_D^*(t) + 1, & \text{se } Y_{t+1}^* = 2 \\ \dots & \end{cases}. \quad (4.20)$$

Portanto, podemos dizer que este processo de reserva é Markoviano. Assim dizendo, a reserva disponível no momento  $t + 1$ ,  $U_D^*(t + 1)$ , depende exclusivamente da reserva no momento anterior,  $U_D^*(t)$ . Ou seja, dados quaisquer valores inteiros  $u_0, u_1, \dots, u_{t+1}$ , temos que

$$\begin{aligned} & \Pr[U_D^*(t + 1) = u_{t+1} \mid U_D^*(0) = u_0, U_D^*(1) = u_1, \dots, U_D^*(t) = u_t] = \\ & = \Pr[U_D^*(t) + Y_{t+1}^* - 1 = u_{t+1} \mid U_D^*(t) = u_t]. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Se formos além, o montante total dos ganhos agregados nos momentos  $t + 2$  e  $t + 3$  são, respetivamente

$$S^*(t + 2) = S^*(t + 1) + Y_{t+2}^* = \underbrace{S^*(t) + Y_{t+1}^*}_{=S^*(t+1)} + Y_{t+2}^*. \quad (4.22)$$

$$S^*(t + 3) = S^*(t + 2) + Y_{t+3}^* = \underbrace{S^*(t) + Y_{t+1}^* + Y_{t+2}^*}_{=S^*(t+2)} + Y_{t+3}^*. \quad (4.23)$$

Assim, fica claro que o montante total dos ganhos agregadas no tempo  $t + n$  é

$$S^*(t + n) = S^*(t) + \sum_{j=1}^n Y_{t+j}^*, \quad (4.24)$$

e que a reserva de risco no tempo  $t + n$  pode ser escrita em função de  $U_D^*(t)$ ,

$$\begin{aligned} U_D^*(t + n) &= u - (t + n) + S^*(t + n), \quad t = 0, 1, 2, \dots \\ &= U_D^*(t) + \sum_{j=1}^n Y_{t+j}^* - n, \quad t = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4.25)$$

Desta forma, podemos escrever que

$$\begin{aligned} &\Pr[U_D^*(t + n) = u_{t+n} \mid U_D^*(0) = u_0, U_D^*(1) = u_1, \dots, U_D^*(t + n - 1) = u_{t+n-1}] = \\ &= \Pr\left[U_D^*(t) + \sum_{j=1}^n Y_{t+j}^* - n = u_{t+n} \mid U_D^*(t) = u_t\right]. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Ou seja, este processo de reserva é, também, homogéneo.

Uma vez que a ruína não ocorre enquanto a reserva for estritamente positiva, segundo a definição de tempo de ruína  $T_D^*$ , vamos considerar apenas os valores positivos para o processo de reserva. Dada uma reserva inicial  $u > 0$ , os possíveis valores (ou estados) que a reserva pode tomar entre o momento 1 e o momento  $t$  estão representados na Figura 4.1.

Pela observação da Figura 4.1 fica claro que no fim de cada período, a reserva só pode ter descido, no máximo, uma posição em relação ao período anterior e que o momento em que ocorre a ruína tem de ser maior ou igual a reserva inicial, isto é,  $t \geq u$ . Caso contrário, se  $t < u$ , a probabilidade de ruína é zero.

As probabilidades de transição em um passo, para o processo de reserva são dadas por

$$\begin{aligned} p_{r,s} &= \Pr[U_D^*(n) = s \mid U_D^*(n - 1) = r] \\ &= \Pr[U_D^*(n - 1) + Y_n - 1 = s \mid U_D^*(n - 1) = r] \\ &= \Pr[Y_n = s + 1 - r] \\ &= f_{s+1-r} \end{aligned} \quad (4.27)$$

com  $r \geq 1$  e  $s + 1 \geq r$ .

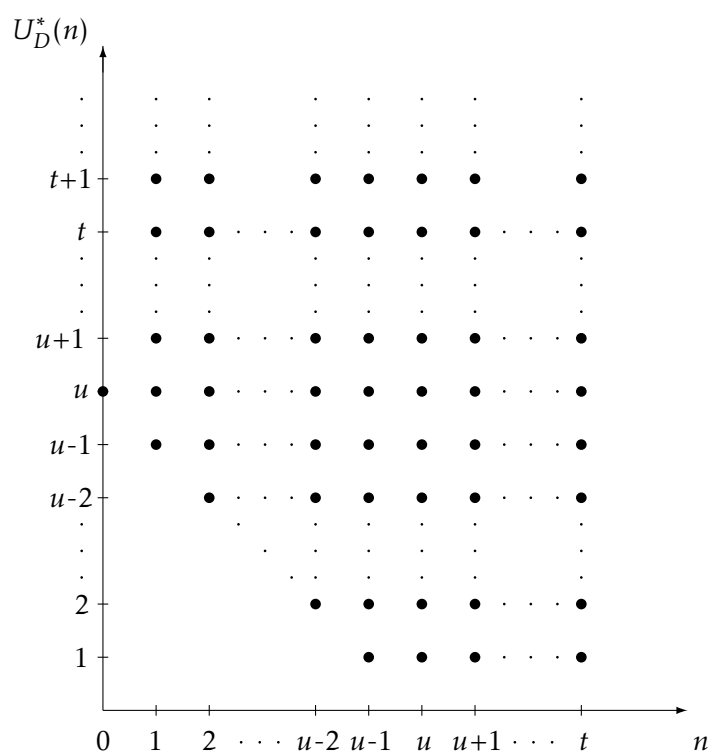


Figura 4.1: Possíveis valores positivos que  $U_D^*(n)$  pode tomar até ao momento  $t$ .

Como ilustrado na Figura 4.2, se no fim do período  $t - 1$ , a reserva toma o valor  $\omega$ , no período seguinte a reserva pode tomar o valor  $\omega - 1$ , se não houver ganhos, com probabilidade  $f_0$ ;  $\omega$ , se o total dos ganhos ocorridos for igual 1 u.m., com probabilidade  $f_1$ ;  $\omega + 1$ , se o total dos ganhos ocorridos for igual 2 u.m., com probabilidade  $f_2$  e assim sucessivamente.

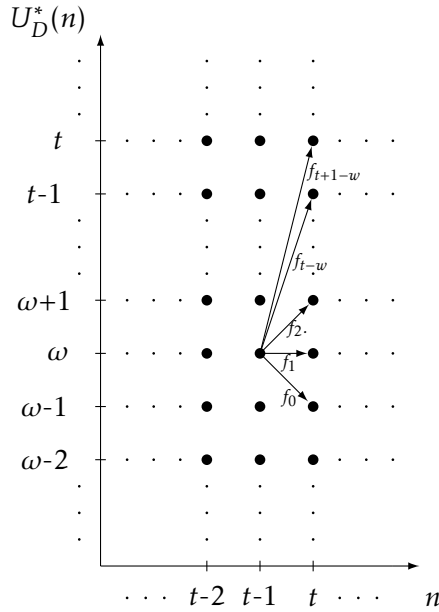


Figura 4.2: Possíveis valores que  $U_D^*(t)$  pode tomar, supondo que  $U_D^*(t - 1) = \omega$ .

Com base nas análises efetuadas para o modelo em estudo, a matriz estocástica de probabilidades de transição em um passo,  $P$ , é apresentada da seguinte maneira:

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & u-2 & u-1 & u & u+1 & \dots & t-2 & t-1 & \dots \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ u-1 \\ u \\ u+1 \\ \vdots \\ t-2 \\ t-1 \\ \vdots \end{matrix} & \left[ \begin{array}{cccccccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ f_0 & f_1 & f_2 & f_3 & \dots & f_{u-2} & f_{u-1} & f_u & f_{u+1} & \dots & f_{t-2} & f_{t-1} & \dots \\ 0 & f_0 & f_1 & f_2 & \dots & f_{u-3} & f_{u-2} & f_{u-1} & f_u & \dots & f_{t-3} & f_{t-2} & \dots \\ 0 & 0 & f_0 & f_1 & \dots & f_{u-4} & f_{u-3} & f_{u-2} & f_{u-1} & \dots & f_{t-4} & f_{t-3} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & f_0 & f_1 & f_2 & f_3 & \dots & f_{t-u} & f_{t-u+1} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & f_0 & f_1 & f_2 & \dots & f_{t-u-1} & f_{t-u} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & f_0 & f_1 & \dots & f_{t-u-2} & f_{t-u-1} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & f_1 & f_2 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & f_0 & f_1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots \end{array} \right] \end{matrix}$$

Pelos motivos apresentados aquando da definição de  $T_D^*$ , o estado 0, que representa a ruína, é um estado absorvente que só pode ser acedido a partir do estado 1.

Por fim, não precisamos olhar para todos os valores positivos que a reserva pode tomar. No caso de termos uma reserva inicial  $0 < u \leq t$ , para que ocorra ruína até o fim do período  $t$ , a reserva toma, no máximo, os valores  $t - n$  no momento  $n, n = 1, \dots, t - 1$ , como está ilustrado na Figura 4.3. Por outras palavras, se no momento  $n$  a reserva toma um valor superior a  $t - n$  já não ocorre ruína até ao momento  $t$ , fazendo com que a probabilidade de ruína seja zero.

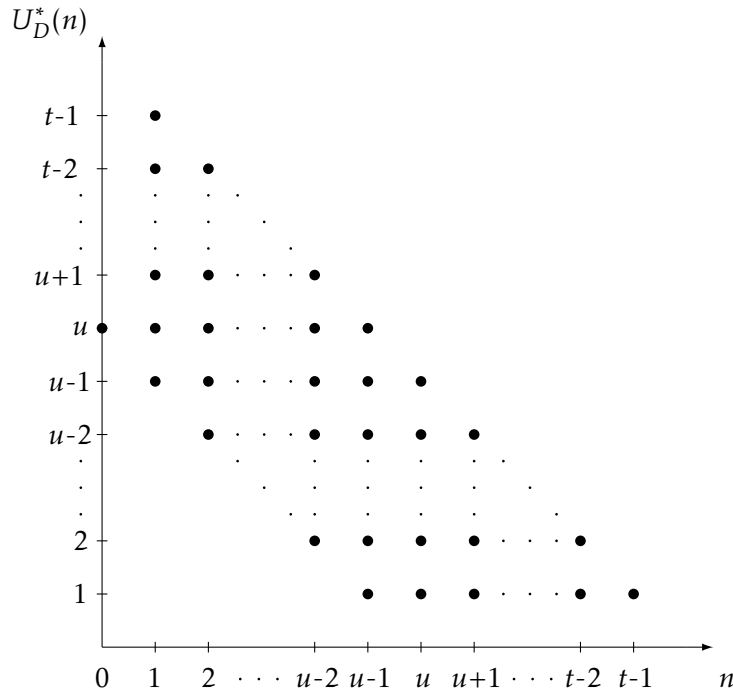


Figura 4.3: Possíveis valores positivos que  $U_D^*(n)$  pode tomar para que ocorra ruína até ao momento  $t$ .

## 4.5 Adaptação do algoritmo de Cardoso e Egídio dos Reis

Neste ponto vamos abordar o desenvolvimento do novo algoritmo recursivo com cadeias de Markov para o modelo dual. Assim, dada uma reserva inicial  $u > 0$ , a ruína ocorre no fim do período  $n$ , com  $2 \leq n \leq t$ , se se verificarem as seguintes condições:

1. o processo de reserva, que se manteve sempre positivo desde o período 1 até o fim do período  $n - 1$ , passa a tomar o valor 1 no período  $n - 1$ , com probabilidade

$$\Pr[U_D^*(n - 1) = 1 \mid U_D^*(0) = u] = p_{u,1}^{(n-1)},$$

2. o montante dos ganhos agregados no período  $n$  é zero, portanto

$$\Pr[Y_n^* = 0] = f_0.$$

No momento  $n = 1$  só existe ruína, com probabilidade  $f_0$ , se a reserva inicial for igual a 1. Consequentemente a função probabilidade (imprópria) do tempo de ruína, quando  $t \geq u$ , pode ser escrita como se segue

$$\phi_D^*(1, 1) = f_0 \quad (4.28)$$

$$\phi_D^*(1, t) = f_0 + p_{u,1}^{(t-1)} f_0, \quad t \geq 2, \quad (4.29)$$

$$\phi_D^*(u, t) = \Pr[T_D^* = t \mid U(0) = u] = p_{u,1}^{(t-1)} f_0, \quad u \neq 1, t \geq 2. \quad (4.30)$$

E, a função de distribuição do tempo de ruína, para  $t \geq u$ , é dada por

$$\psi_D^*(1, 1) = f_0 \quad (4.31)$$

$$\psi_D^*(1, t) = f_0 + \sum_{n=2}^t p_{u,1}^{(n-1)} f_0, \quad t \geq 2, \quad (4.32)$$

$$\psi_D^*(u, t) = \Pr[T_D^* \leq t \mid U(0) = u] = \sum_{n=2}^t p_{u,1}^{(n-1)} f_0, \quad u \neq 1, t \geq 2. \quad (4.33)$$

Antes do momento  $u$ , isto é, se  $t < u$ , não existe ruína, temos  $\phi_D^*(u, t) = 0$  e  $\psi_D^*(u, t) = 0$ . Desta forma, a expressão (4.33) pode ser escrita da seguinte maneira

$$\psi_D^*(u, t) = \sum_{n=u+1}^t p_{u,1}^{(n-1)} f_0, \quad u \neq 1, t \geq 2. \quad (4.34)$$

Tal como no modelo anterior, para obter a probabilidade  $p_{u,1}^{(n)}$ ,  $n = 1, 2, \dots, t-1$ , vamos considerar apenas o vetor linha  $P_u^{(n)}$  de cada matriz  $P^{(n)}$ . Obtemos  $P_u^{(1)}$  diretamente da matriz  $P$ , apresentada na secção anterior, tal que,

$$P_u^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & u-2 & u-1 & u & u+1 & \dots & t-2 & t-1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & f_0 & f_1 & f_2 & \dots & f_{t-u-1} & f_{t-u} & \dots \end{bmatrix},$$

com os primeiros elemento iguais a zero, até a posição  $u - 2$ . Para os restantes vetores fazemos a multiplicação de matrizes

$$P_u^{(n)} = P_u^{(n-1)} P, \quad n = 2, \dots, t-1.$$

De modo a simplificar os cálculos vamos considerar a matriz  $P$  truncada, com as primeiras  $t$  linhas e colunas e, também, que:

- i) A partir da posição  $u - (n-1)$ , os vetores  $P_u^{(n-1)}$ , para  $1 \leq n-1 \leq u-1$ , têm os elementos não nulos. Por outro lado, os restantes vetores  $P_u^{(n-1)}$ , com  $n-1 \geq u$ , já não têm elementos nulos, pois a partir daí já pode haver ruína.
- ii) Na primeira linha da matriz  $P$ , com exceção do primeiro, todos os restante elementos são nulos.

iii) Cada coluna  $j$ ,  $j = 0, 1, \dots, t-3$  da matriz  $P$  tem os elementos não nulos, até a posição  $j+1$ . Já as colunas  $j = t-2$  e  $j = t-1$ , têm todos os seus elementos não nulos. Estes valores resultam da cadeia poder estar, no máximo, no estado  $j+1$  para se aceder a  $j$ .

Consequentemente, a probabilidade de transição  $p_{u,j}^{(n)}$ , para  $j \geq \max(0, u-n)$  pode ser calculada da seguinte maneira:

$$p_{u,j}^{(n)} = \sum_{k=\max(\min(j,1), u-(n-1))}^{\min(j+1, t-1)} p_{u,k}^{(n-1)} p_{k,j}. \quad (4.35)$$

Assim, de modo a obter  $P_u^{(n)}$ , multiplicamos  $P_u^{(n-1)}$  pela matriz  $P$ . Por i) e ii), o somatório fica limitado inferiormente em  $\max(\min(j, 1), u-(n-1))$  e por iii), o limite superior é igual a  $j+1$ . Para  $j < \max(0, u-n)$ , tem-se  $p_{u,j}^{(n)} = 0$ .

Podemos, ainda, escrever a função de distribuição de ruína (4.34), utilizando diretamente a probabilidade de transição (4.35), fazendo  $j = 0$  e  $n = t$ ,

$$\psi_D^*(u, t) = p_{u,0}^{(t)} = \sum_{k=\max(0, u-(t-1))}^1 p_{u,k}^{(t-1)} p_{k,0}, \quad t \geq 2 \quad (4.36)$$

onde  $k = 1$  apenas se  $u = t$ , nos restantes casos temos  $k = 0$ .

Supondo que queremos calcular a probabilidade de ruína  $\psi_D^*(u, t)$ , precisamos obter antes as probabilidades de transição  $p_{u,j}^{(n)}$ ,  $j = u-n, \dots, t-n$ , para  $1 \leq n \leq u-2$  e  $p_{u,j}^{(n)}$ ,  $j = 1, \dots, t-n$  para  $u-1 \leq n \leq t-1$ , isto é,

$$\begin{aligned} & p_{u,j}^{(1)}, \quad j = u-1, \dots, t-1, \\ & p_{u,j}^{(2)}, \quad j = u-2, \dots, t-2, \\ & \vdots \\ & p_{u,j}^{(u-2)}, \quad j = 2, \dots, t-(u-2), \\ & p_{u,j}^{(u-1)}, \quad j = 1, \dots, t-(u-1), \\ & \vdots \\ & p_{u,j}^{(t-2)}, \quad j = 1, 2, \\ & p_{u,j}^{(t-1)}, \quad j = 1. \end{aligned}$$

O que resulta num total de  $(t-u+1)(t+u-2)/2$  iterações.

Para a obtenção de valores numéricos, consideramos a aproximação

$$\psi_D(u, t) \approx \psi_D^*(u\beta, t\beta).$$

## 4.6 Adaptação do algoritmo de De Vylder e Goovaerts

Podemos adaptar, para o modelo dual, o algoritmo que De Vylder e Goovaerts (1988) desenvolveram para o modelo clássico, aplicando uma linha de pensamento semelhante. Dada uma reserva inicial  $u > 0$ , se queremos calcular a probabilidade da ruína ocorrer até ao momento  $t$ , então:

1. condicionamos o valor da reserva no fim do 1º período, com probabilidade  $f_j$ ,  $j = 0, \dots, t - u$ , a reserva passa a tomar o valor  $u - 1 + j$ ;
2. durante os  $t - 1$  períodos restantes, a probabilidade de ruína será  $\psi_D^*(u - 1 + j, t - 1)$ .

Assim, resulta que a expressão da probabilidade de ruína, para  $t \geq u$ , é dada por:

$$\psi_D^*(1, 1) = f_0 \quad (4.37)$$

$$\psi_D^*(u, t) = \sum_{j=0}^{t-u} f_j \psi_D^*(u - 1 + j, t - 1), \quad t \geq 2 \quad (4.38)$$

Da definição  $T_D^*$ , sabemos que se partirmos de uma reserva inicial  $u = 0$  a ruína é imediata,

$$\psi_D^*(0, t) = 1, \quad t \geq 0. \quad (4.39)$$

Desta forma, para  $u = 1$  e  $t = 1$ , a ruína tem probabilidade  $f_0$ ,

$$\psi_D^*(1, 1) = f_0 \psi_D^*(0, 0) = f_0. \quad (4.40)$$

Podemos ainda generalizar os casos em que a reserva inicial e o tempo de ruína são iguais. Se  $u = t$ , então a probabilidade de ruína é igual a

$$\psi_D^*(u, u) = (f_0)^u, \quad (4.41)$$

porque a reserva só pode descer uma unidade a cada período. Isto também acontece no algoritmo anterior.

Para obter a probabilidade de ruína  $\psi_D^*(u, t)$ , é necessário calcular as seguintes probabilidades  $\psi_D^*(\omega, n)$ :

$$\begin{aligned} &\psi_D^*(\omega, 1), \quad \omega = 0, 1, \\ &\psi_D^*(\omega, 2), \quad \omega = 0, 1, 2, \\ &\quad \vdots \\ &\psi_D^*(\omega, t - u), \quad \omega = 0, 1, 2, \dots, t - u, \\ &\psi_D^*(\omega, t - u + 1), \quad \omega = 1, 2, \dots, t - u + 1, \\ &\psi_D^*(\omega, t - u + 2), \quad \omega = 2, \dots, t - u + 2, \\ &\quad \vdots \\ &\psi_D^*(\omega, t - 1), \quad \omega = u - 1, \dots, t - 1 \end{aligned}$$

e finalmente calculamos  $\psi_D^*(u, t)$ . O que resulta num total de  $(t-u+1)(t+u-2)/2$  iterações, onde não consideramos o cálculo de  $\psi_D^*(0, n), n = 1, 2, \dots, t-u$ , pois já sabemos que estas probabilidades são iguais a 1. A Figura 4.4 ajuda a perceber melhor os valores de  $\psi_D^*(\omega, n)$  necessários para o cálculo de  $\psi_D^*(u, t)$ , para  $t-u \leq u$ . Para o caso,  $t-u > u$  o resultado é análogo.

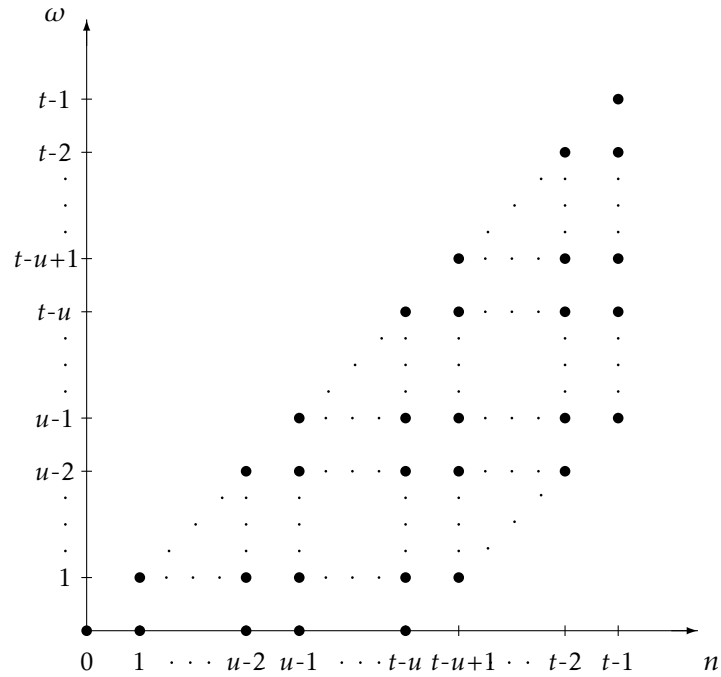


Figura 4.4: Combinações de  $\omega$  e  $n$  dos valores de  $\psi_D^*(\omega, n)$  necessários para o cálculo de  $\psi_D^*(u, t)$ , se  $t-u > u$

Note-se que o diagrama da Figura 4.3 parece ser o espelho do diagrama da Figura 4.4, assim como acontece no modelo primal. O que parecer sugerir, já a princípio, que os dois algoritmos obtidos neste capítulo têm o mesmo número de iterações.

## 4.7 Exemplos numéricos

Nesta secção são apresentadas tabelas e figuras resultantes da aproximação  $\psi_D^*(u\beta, t\beta)$ , para a probabilidade de ruína  $\psi_D(u, t)$ , e as distribuições exponencial de parâmetro  $\lambda = 1$ , gama de parâmetros  $\alpha = 2$  e  $\beta = 2$  e Pareto de parâmetros  $\alpha = 2$  e  $\beta = 1$ . Nos cálculos efetuados tomou-se, tal como em Cheung e Drekić (2008),  $\beta = 100$ . Assumiu-se  $\theta = 0.1$ , exceto no estudo da convergência da probabilidade de ruína, onde  $\theta$ , também, tomou os valores 1 e 2.

As Tabelas 4.1, 4.2 e 4.3 apresentam aproximações de  $\psi_D(u, t)$ , arredondados com 4 casas decimais, calculados utilizando as Fórmulas (4.31) e (4.34) do algoritmo de Cardoso e Egídio dos Reis para o dual e (4.37) e (4.38) do algoritmo de De Vylder e Goovaerts para o dual. Os valores nulos marcados com (\*) são diferentes de zero se arredondados com mais casas decimais. Como esperado os dois algoritmos produzem os mesmos resultados.

As Figuras 4.5-4.10 apresentam os gráficos da função de densidade própria do tempo de ruína, para as distribuições referidas anteriormente. Os valores destas funções foram estimados como em Dickson e Waters (2002, secção 5.1), para  $u$  e  $t$  variados, nos pontos  $j/\beta, j = 1, \dots, t\beta$ , a partir da expressão

$$\tilde{\phi}_D(u, j/\beta) \approx \beta \left[ \frac{\psi_D^*(u\beta, j) - \psi_D^*(u\beta, j-1)}{\psi_D(u)} \right] \quad (4.42)$$

Quanto à forma das densidades obtidas, estas são unimodais com assimetria positiva e, assim como em Cardoso e Egídio dos Reis (2002), verifica-se que quanto maior o valor de  $u$ , mais tarde ocorre a moda e mais achatada é a curva. Note-se que a densidade é igual a zero até ao momento  $t < u$ .

Nas Figuras 4.11-4.16 podemos observar facilmente o comportamento da probabilidade de ruína para valores de  $t$  fixo e  $u$  a variar. A probabilidade de ruína decresce com o aumento da reserva inicial e tende para zero, à medida que a reserva se aproxima do tempo de ruína. Estes valores foram obtidos com a adaptação do algoritmo de De Vylder e Goovaerts para o dual, Fórmulas (4.37) e (4.38).

Podemos ver pelas densidades obtidas nas Figuras 4.17-4.25 que os valores aproximados, obtidos para a probabilidade de ruína em horizonte finito tendem a convergir para a probabilidade de ruína em horizonte infinito. Verifica-se, também, que quanto maior o valor de  $\theta$ , maior é o número de saltos e mais rapidamente a reserva atinge valores "elevados", a partir dos quais e para o horizonte temporal definido em estudo, a ruína já não pode ocorrer e, como tal, há uma convergência mais rápida para a probabilidade de ruína em horizonte infinito.

Tabela 4.1:  $\psi_D(u, t)$ . Exponencial(1)

$t$	$u$							
	1	2	3	4	5	10	20	30
1	0.3347	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.5388	0.1120	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	0.6208	0.2770	0.0375	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
4	0.6674	0.3668	0.1374	0.0126	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
5	0.6983	0.4259	0.2083	0.0663	0.0042	0.0000	0.0000	0.0000
10	0.7726	0.5672	0.3905	0.2477	0.1414	0.0000*	0.0000	0.0000
20	0.8230	0.6630	0.5213	0.3987	0.2955	0.0348	0.0000*	0.0000
30	0.8446	0.7041	0.5785	0.4678	0.3718	0.0855	0.0003	0.0000*
40	0.8571	0.7278	0.6119	0.5088	0.4182	0.1273	0.0026	0.0000*
50	0.8654	0.7437	0.6342	0.5365	0.4498	0.1602	0.0072	0.0000*
100	0.8848	0.7805	0.6864	0.6016	0.5255	0.2521	0.0404	0.0034

Tabela 4.2:  $\psi_D(u, t)$ . Gama(2,2)

$t$	$u$							
	1	2	3	4	5	10	20	30
1	0.3329	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.4816	0.1108	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	0.5689	0.2203	0.0369	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
4	0.6192	0.3041	0.0972	0.0123	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
5	0.6530	0.3619	0.1552	0.0417	0.0041	0.0000	0.0000	0.0000
10	0.7347	0.5067	0.3229	0.1865	0.0950	0.0000*	0.0000	0.0000
20	0.7904	0.6083	0.4541	0.3275	0.2272	0.0167	0.0000*	0.0000
30	0.8142	0.6521	0.5129	0.3955	0.2983	0.0488	0.0001	0.0000*
40	0.8279	0.6775	0.5475	0.4364	0.3428	0.0788	0.0006	0.0000*
50	0.8369	0.6943	0.5705	0.4641	0.3733	0.1039	0.0022	0.0000*
100	0.8575	0.7328	0.6238	0.5289	0.4465	0.1780	0.0179	0.0008

Tabela 4.3:  $\psi_D(u, t)$ . Pareto(2,1)

$t$	$u$							
	1	2	3	4	5	10	20	30
1	0.3365	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.6351	0.1132	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	0.7224	0.3815	0.0381	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
4	0.7675	0.4982	0.2194	0.0128	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
5	0.7960	0.5675	0.3303	0.1218	0.0043	0.0000	0.0000	0.0000
10	0.8599	0.7132	0.5638	0.4175	0.2821	0.0000*	0.0000	0.0000
20	0.9002	0.7994	0.6987	0.5994	0.5031	0.1274	0.0000*	0.0000
30	0.9169	0.8340	0.7518	0.6711	0.5923	0.2545	0.0050	0.0000*
40	0.9265	0.8536	0.7817	0.7112	0.6424	0.3379	0.0307	0.0001
50	0.9328	0.8666	0.8014	0.7375	0.6753	0.3957	0.0673	0.0019
100	0.9480	0.8971	0.8474	0.7989	0.7517	0.5359	0.2202	0.0608

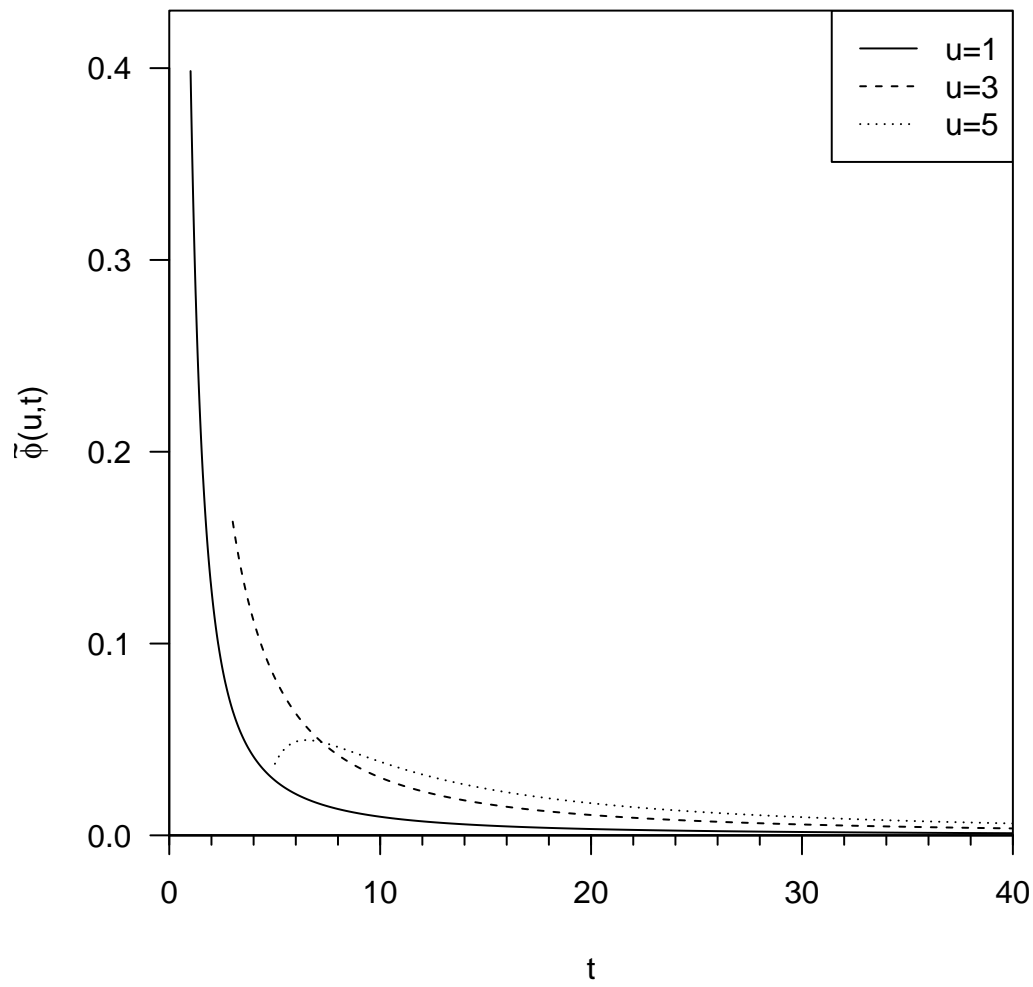


Figura 4.5: Densidade do Tempo de Ruína. Exponencial(1), para  $u = 1, 3, 5$

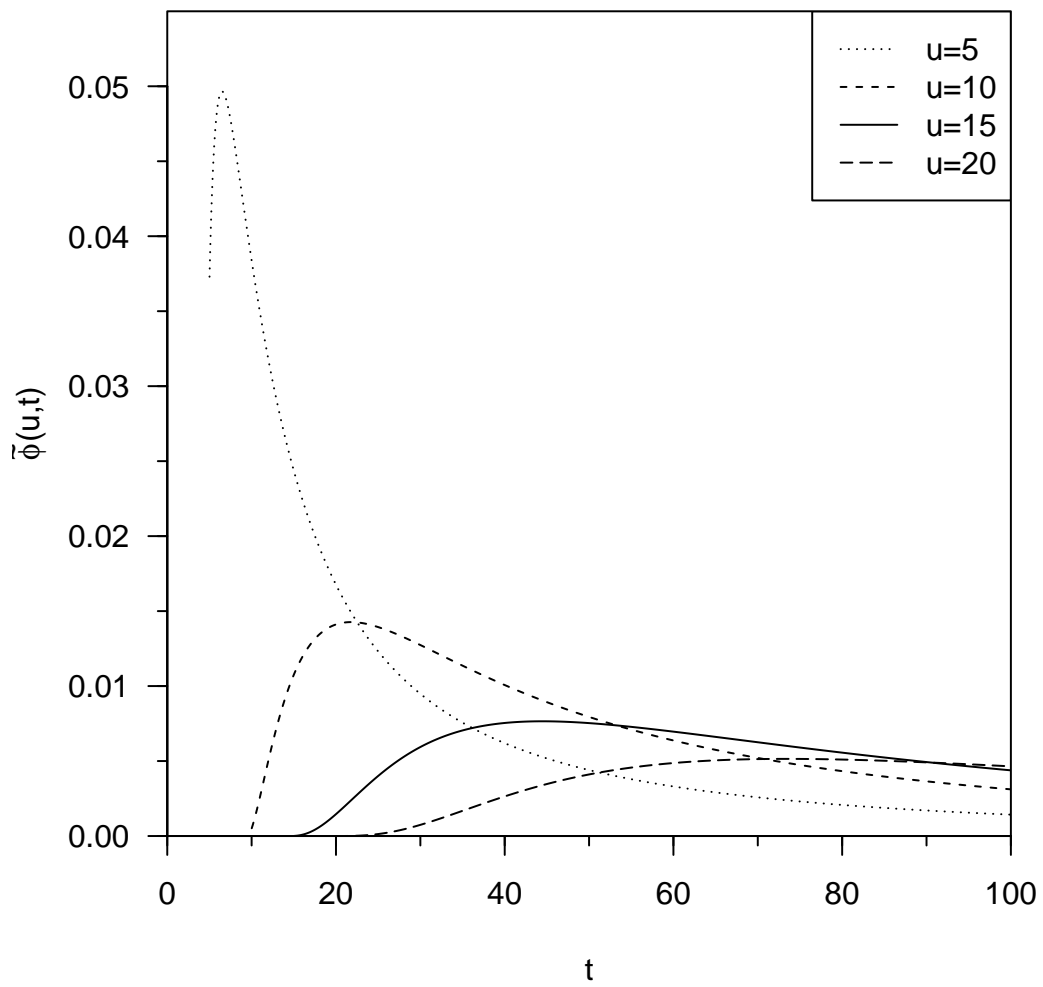
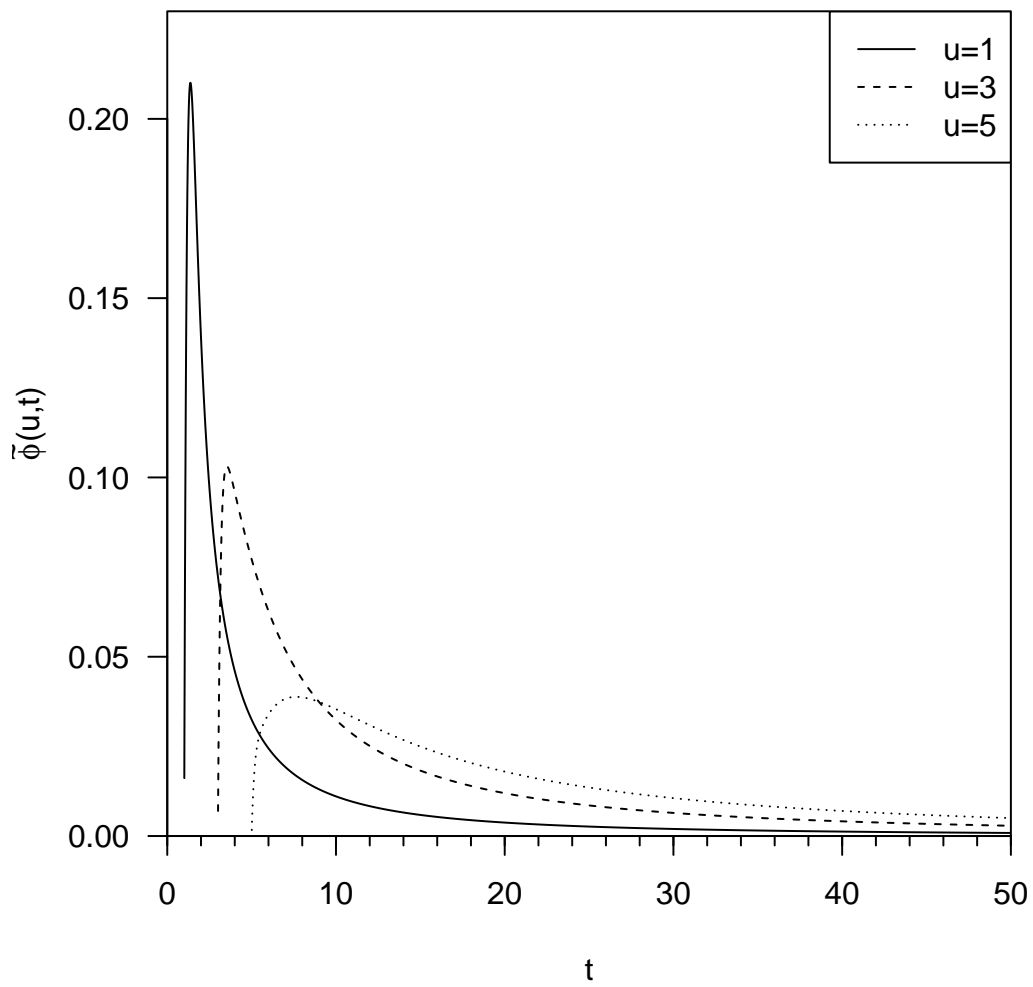


Figura 4.6: Densidade do Tempo de Ruína. Exponencial(1), para  $u = 5, 10, 15, 20$

Figura 4.7: Densidade do Tempo de Ruína. Gama(2,2), para  $u = 1, 3, 5$

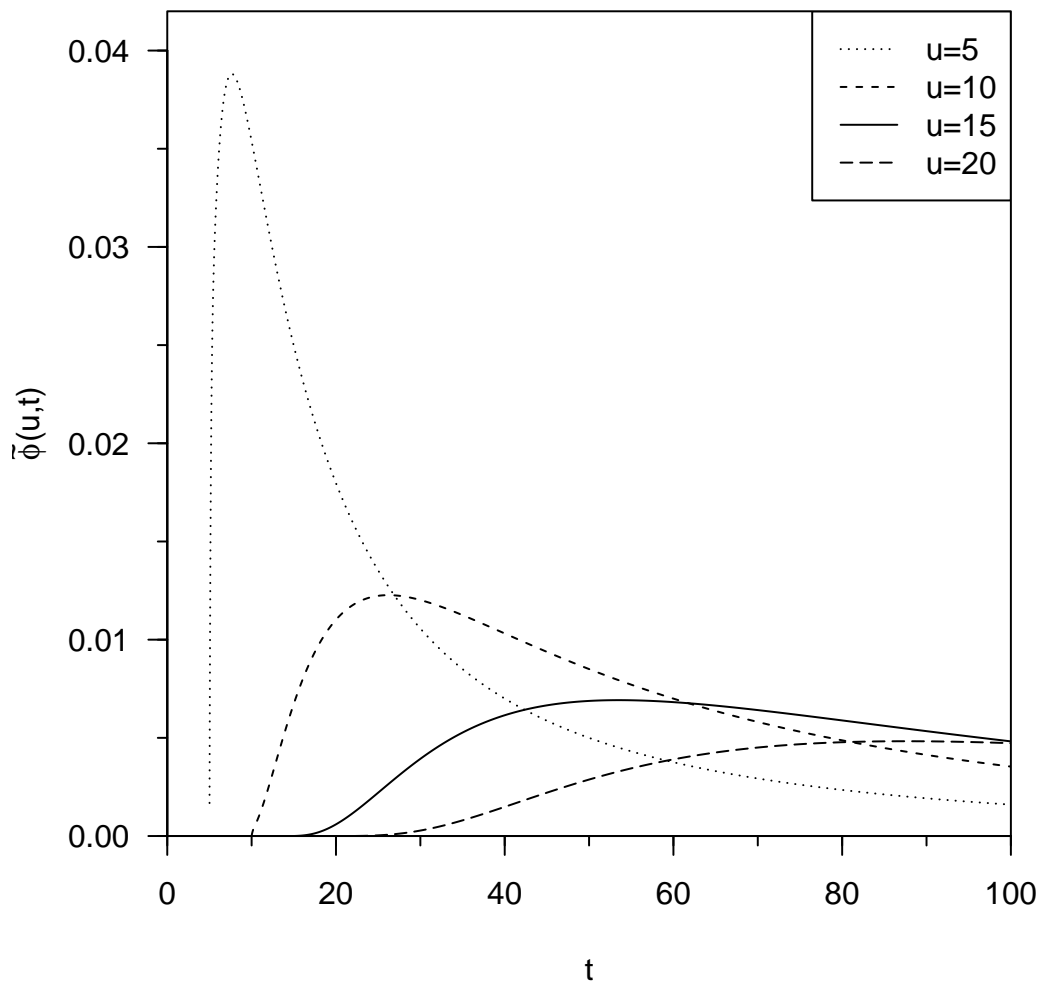
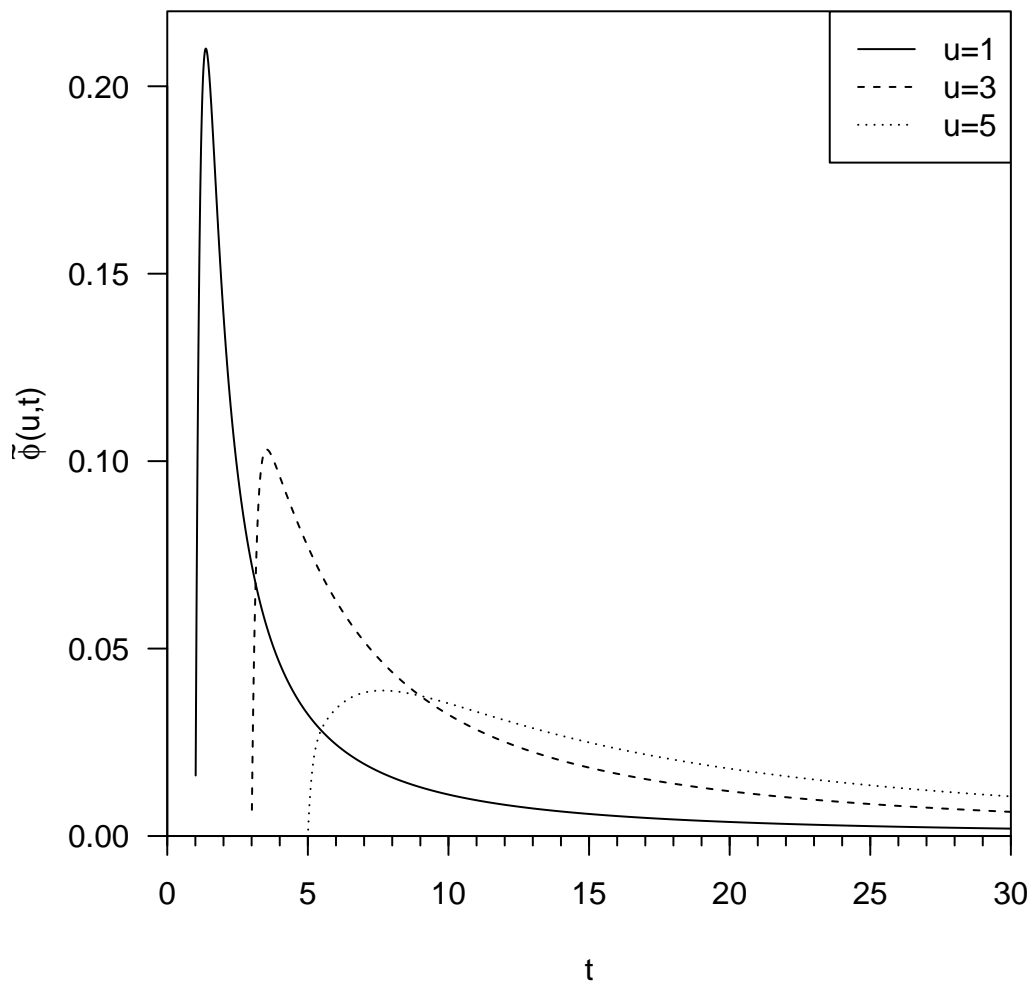


Figura 4.8: Densidade do Tempo de Ruína. Gama(2,2), para  $u = 5, 10, 15, 20$

Figura 4.9: Densidade do Tempo de Ruína. Pareto(2,1), para  $u = 1, 3, 5$

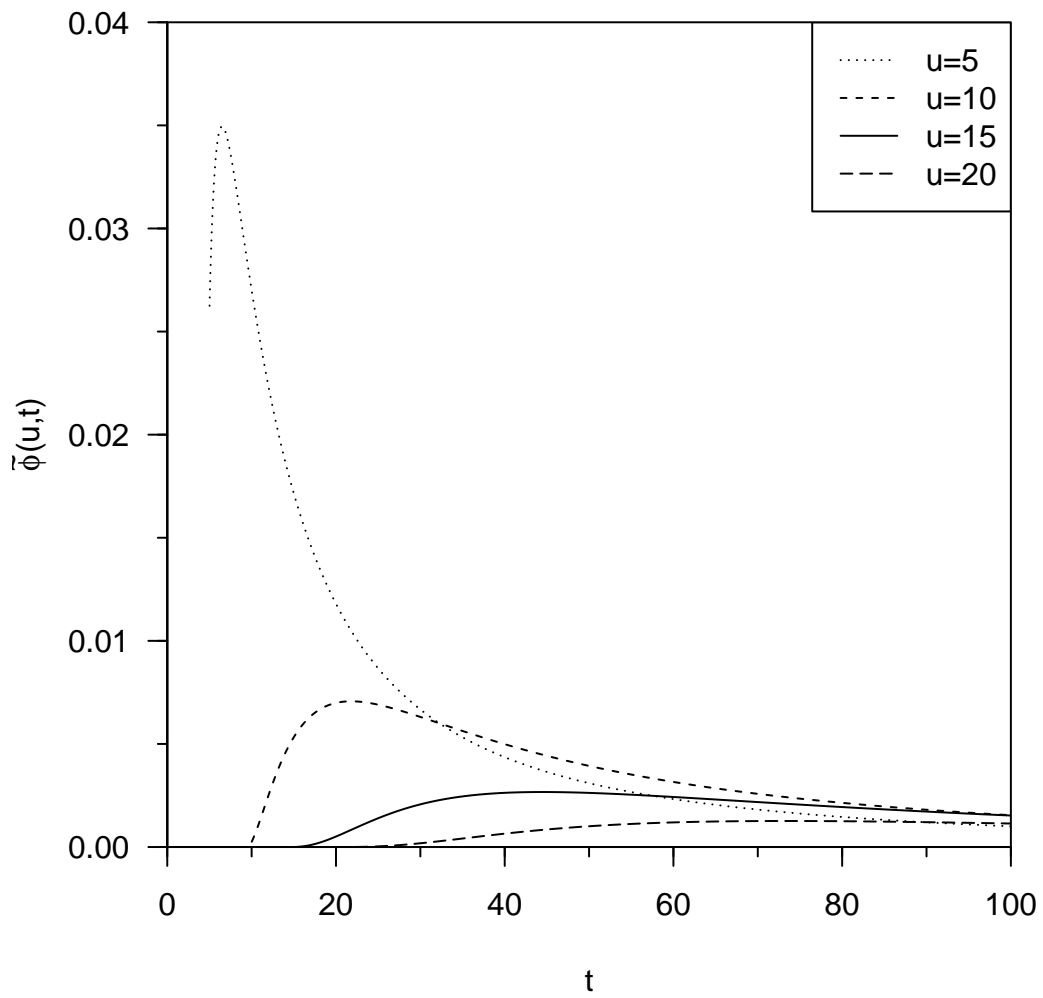


Figura 4.10: Densidade do Tempo de Ruína. Pareto(2,1), para  $u = 5, 10, 15, 20$

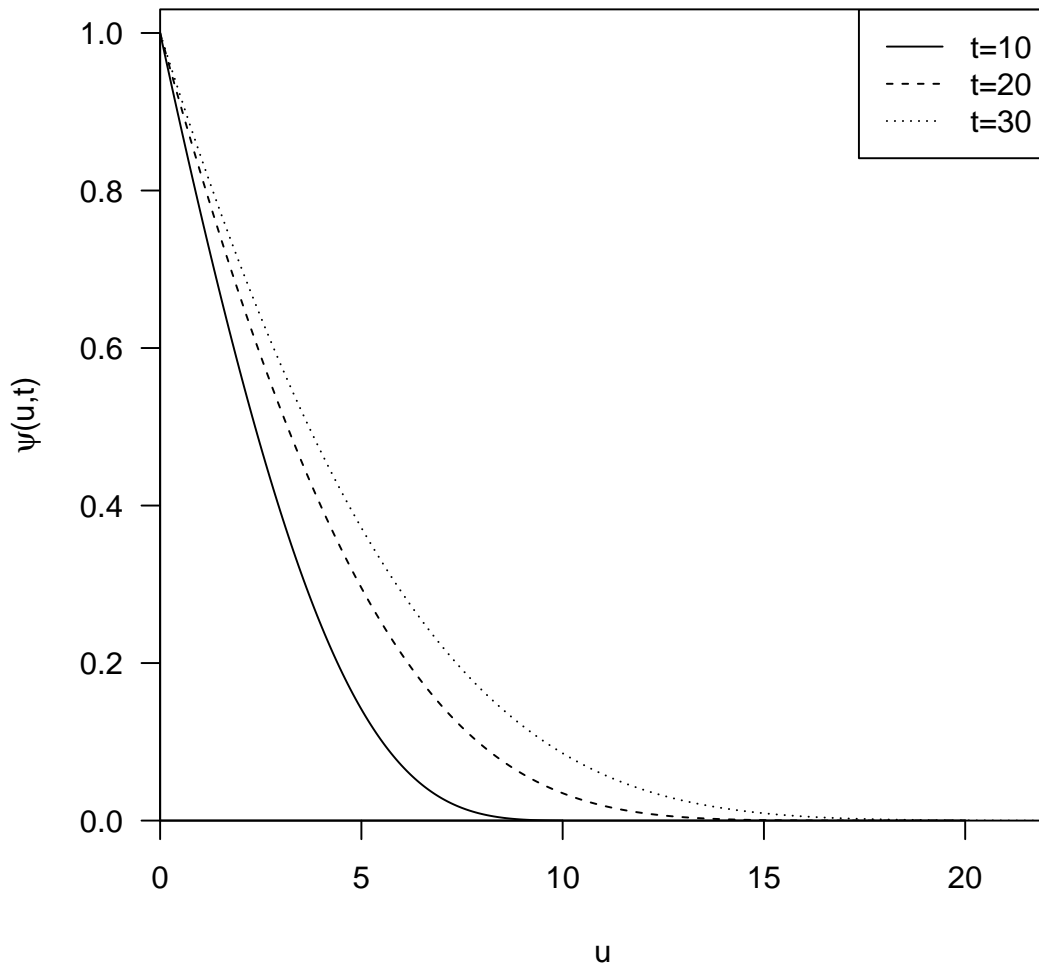


Figura 4.11: Probabilidad de Ruína. Exponencial(1), para  $t = 10, 20, 30$

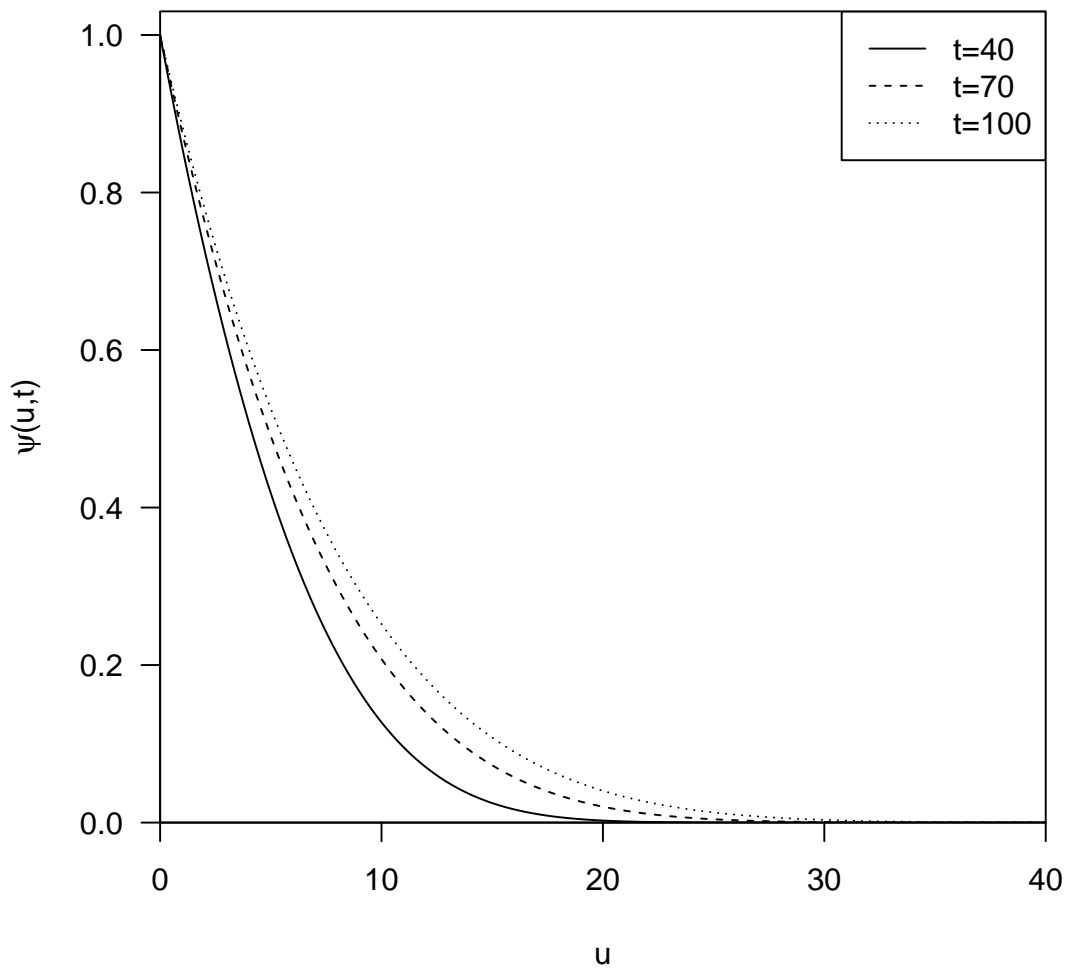


Figura 4.12: Probabilidade de Ruína. Exponencial(1), para  $t = 40, 70, 100$

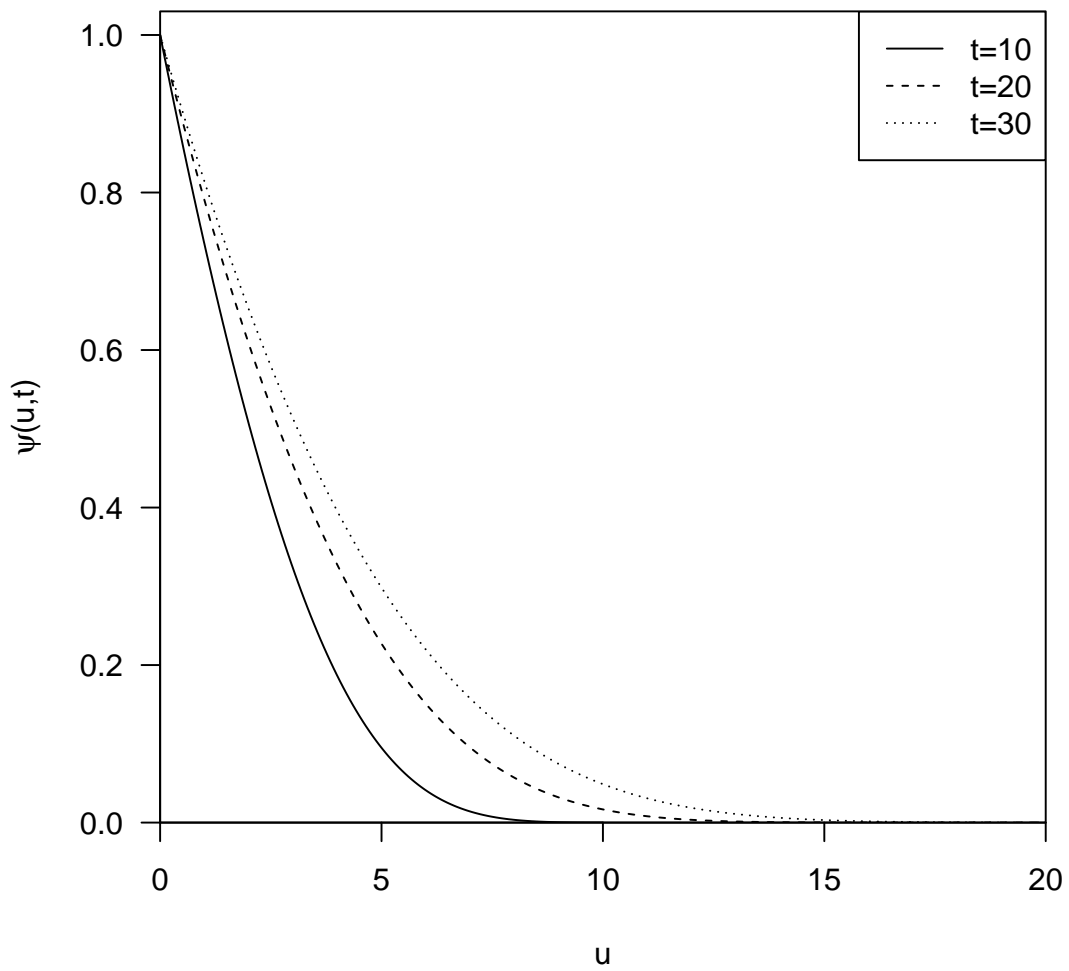


Figura 4.13: Probabilidad de Ruína. Gama(2,2), para  $t = 10, 20, 30$

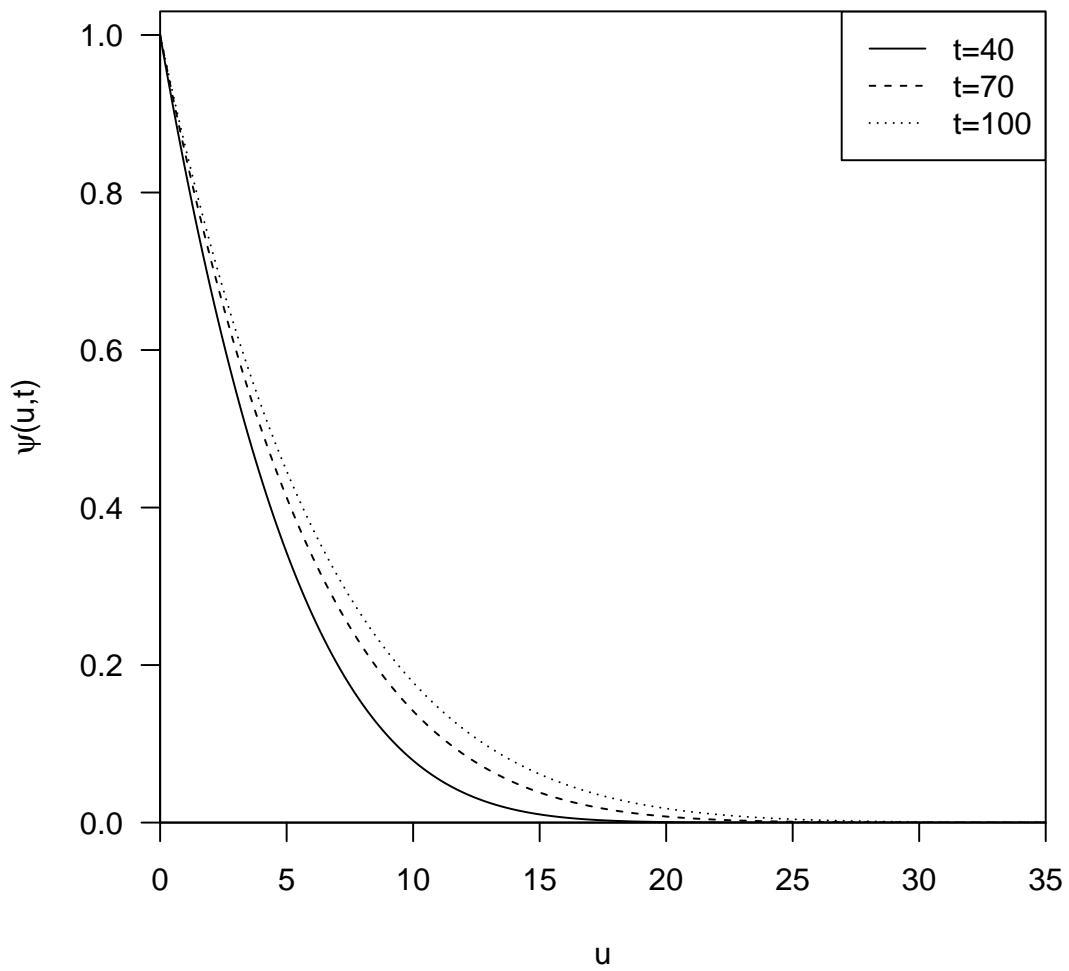


Figura 4.14: Probabilidade de Ruína. Gama(2,2), para  $t = 40, 70, 100$

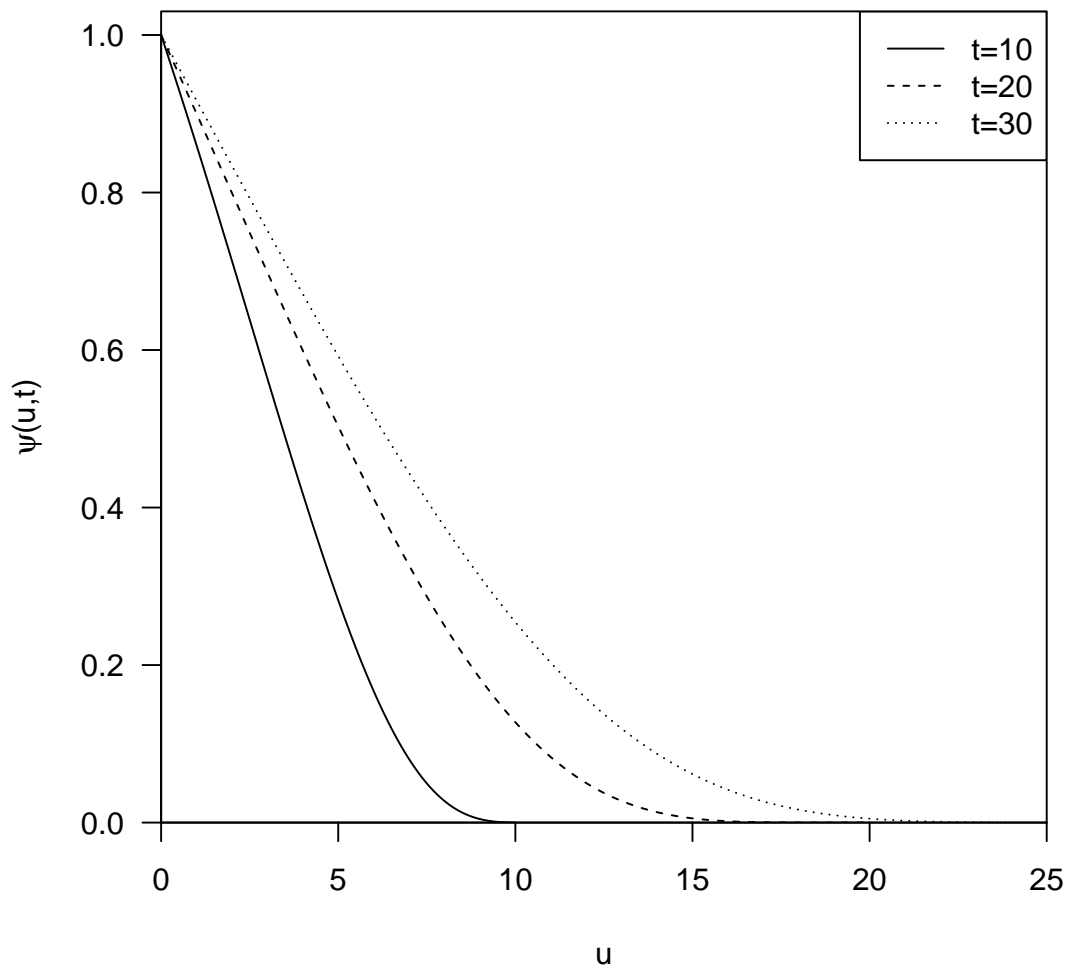


Figura 4.15: Probabilidad de Ruína. Pareto(2,1), para  $t = 10, 20, 30$

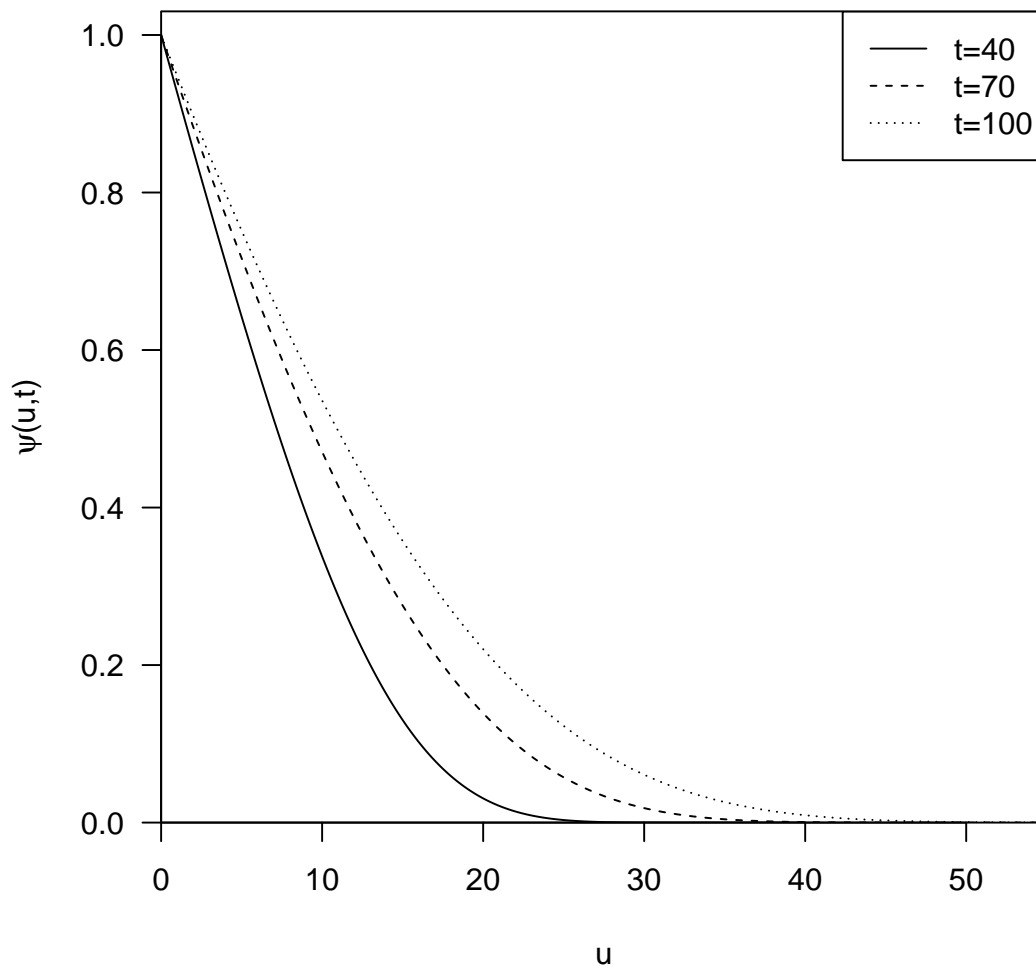


Figura 4.16: Probabilidade de Ruína. Pareto(2,1), para  $t = 40, 70, 100$

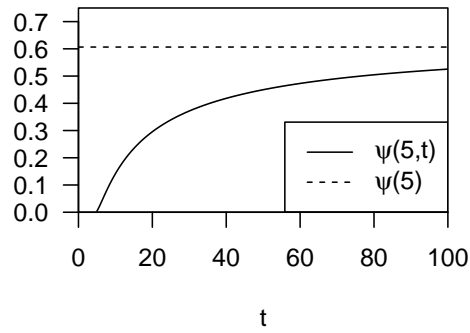


Figura 4.17: Convergência da Probabilidade de Ruína. Exponencial(1),  $u = 5$ ,  $\theta = 0.1$ .

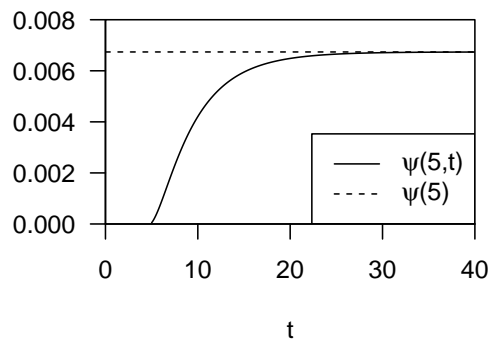


Figura 4.18: Convergência da Probabilidade de Ruína. Exponencial(1),  $u = 5$ ,  $\theta = 1$

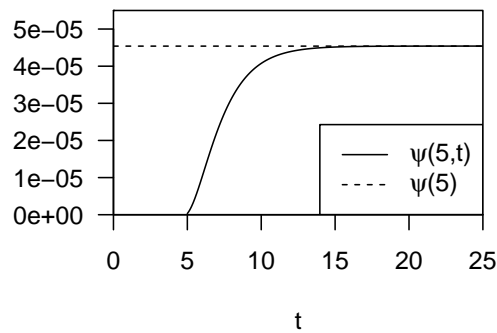


Figura 4.19: Convergência da Probabilidade de Ruína. Exponencial(1),  $u = 5$ ,  $\theta = 2$

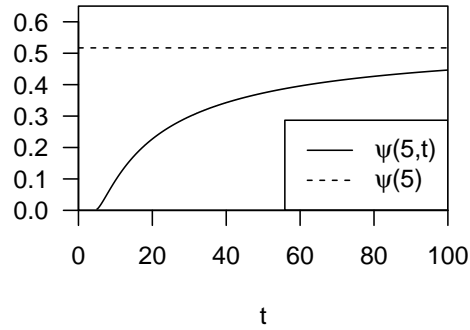


Figura 4.20: Convergência da Probabilidade de Ruína. Gama(2,2),  $u = 5$ ,  $\theta = 0.1$

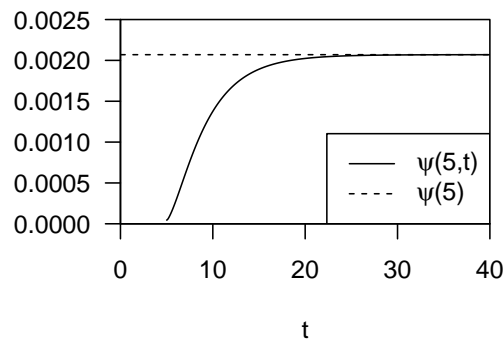


Figura 4.21: Convergência da Probabilidade de Ruína. Gama(2,2),  $u = 5$ ,  $\theta = 1$

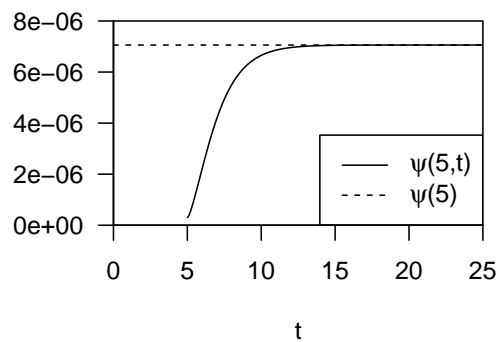


Figura 4.22: Convergência da Probabilidade de Ruína. Gama(2,2),  $u = 5$ ,  $\theta = 2$

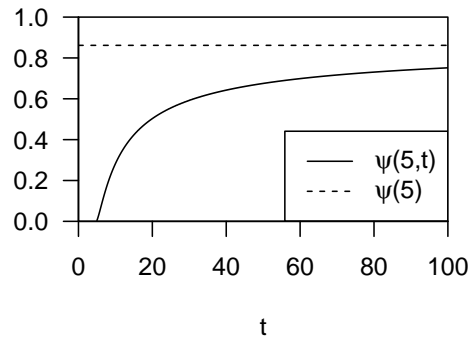


Figura 4.23: Convergência da Probabilidade de Ruína. Pareto(2,1),  $u = 5$ ,  $\theta = 0.1$

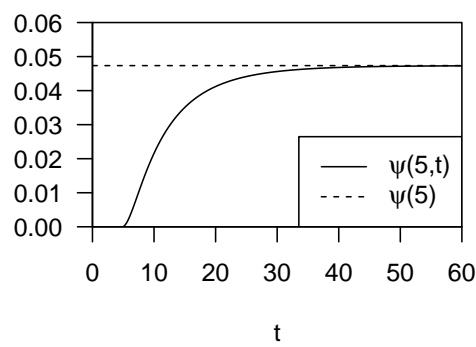


Figura 4.24: Convergência da Probabilidade de Ruína. Pareto(2,1),  $u = 5$ ,  $\theta = 1$

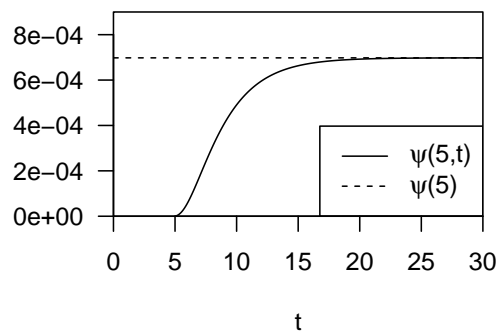


Figura 4.25: Convergência da Probabilidade de Ruína. Pareto(2,1),  $u = 5$ ,  $\theta = 2$

## CONCLUSÃO

O objetivo deste trabalho foi o desenvolvimento de um algoritmo para o cálculo numérico da probabilidade de ruína em horizonte finito para o modelo dual de risco. Para isso, recorreremos às metodologias descritas em Cardoso e Egídio dos Reis (2002) e em De Vylder e Goovaerts (1988) e as adaptámos para o modelo dual. Desta forma, obtivemos dois algoritmos que produzem resultados iguais e que convergem aproximadamente para o valor exato de probabilidade de ruína em horizonte infinito.

O número de cálculos necessários para obter  $\psi_D^*(u, t)$  é igual para ambos os algoritmos,  $(t - u + 1)(t + u - 2)/2$ , assim como acontece no modelo primal. A diferença é que num algoritmo estamos a lidar com cadeias de Markov, e conseqüentemente probabilidades de transição a cada iteração, e no outro com probabilidades de ruína.

No entanto, o primeiro algoritmo adaptado neste trabalho mostrou-se ser o mais adequado para a obtenção da distribuição do tempo de ruína, pois calcula  $\psi_D^*(u, n)$ ,  $n < t$  a cada iteração até finalmente computar  $\psi_D^*(u, t)$ . Relativamente ao segundo algoritmo, este mostrou-se mais adequado para o cálculo da probabilidade de ruína em função da reserva inicial, para um  $t$  fixo.

Para os mesmo valores de  $u$  e  $t$ , o tempo de processamento foi aproximadamente o mesmo para ambos os algoritmos. Tendo o algoritmo de De Vylder e Goovaerts para o dual se revelado, em pequena escala, mais eficiente do que o algoritmo de Cardoso e Egídio dos Reis para o mesmo modelo. É claro que o tempo de execução depende, não só, da capacidade computacional disponível, como também da maneira que o algoritmo é programado. Este último pode ter gerado a referida variação nos tempos de execução dos algoritmos.

Para o caso em estudo e pelas Figuras 4.17-4.25, vemos que a aproximação da probabilidade de ruína em tempo contínuo, considerando valores elevados de  $t$ , é superior à probabilidade de ruína em tempo contínuo e horizonte infinito. Como tal, intuitivamente parece acertado dizer que as aproximações obtidas são superiores às probabilidades de ruína correspondentes em tempo contínuo e horizonte finito. No entanto, os valores para a probabilidade de ruína em tempo contínuo e horizonte finito são sempre maiores que os seus correspondentes em tempo discreto.

---

Uma possível explicação para termos aproximações por excesso passa pela definição do tempo de ruína. Definimos que a ruína ocorre quando a reserva atinge o valor zero, mas, na realidade em tempo contínuo, a ruína dá-se imediatamente após a reserva atingir o valor zero. Isto significa que podemos estar a considerar que a ruína ocorre com mais frequência em tempo discreto. Para além disso, atendendo a Dickson e Waters (1991, Secção 8), a aproximação por excesso pode acontecer, até certo ponto, devido à discretização da distribuição dos ganhos individuais.

Assim sendo, deixamos como sugestão para trabalhos futuros um estudo mais aprofundado sobre possíveis motivos que levam as aproximações obtidas pelos algoritmos desenvolvidos no Capítulo 4 serem superiores aos valores exatos da probabilidade de ruína em tempo contínuo.

## BIBLIOGRAFIA

- Afonso, L. B., Cardoso, R. M., & Egídio dos Reis, A. D. (2013). Dividend problems in the dual risk model. *Insurance: Mathematics and Economics*, 53(3), 906–918.
- Albrecher, H., Finger, D., & Goffard, P.-O. (2022). Blockchain mining in pools: Analyzing the trade-off between profitability and ruin. *Insurance: Mathematics and Economics*, 105, 313–335.
- Avanzi, B., U. Gerber, H., & S.W. Shiu, E. (2007). Optimal dividends in the dual model. *Insurance: Mathematics and Economics*, 41(1), 111–123.
- Bowers, N. L., Gerber, H. U., Hickman, J. C., Jones, D. A., & Nesbitt, C. J. (1997). *Actuarial Mathematics* (2<sup>a</sup> ed.). Society of Actuaries.
- Cardoso, R. M. (1997). *Um algoritmo recursivo para o cálculo do tempo de ruína* [tese de mestrado, ISEG].
- Cardoso, R. M., & Egídio dos Reis, A. D. (2002). Recursive calculation of time to ruin distributions. *Insurance: Mathematics and Economics*, 30(2), 219–230.
- Cardoso, R. M., & Waters, H. R. (2003). Recursive calculation of finite time ruin probabilities under interest force. *Insurance: Mathematics and Economics*, 33(3), 659–676.
- Cheung, E., & Drekcic, S. (2008). Dividend moments in the dual model: Exact and approximate approaches. *Astin Bulletin*, 38(2), 399–422.
- Cox, D., & Miller, H. (1965). *The Theory of Stochastic Processes* (Chapman & Hall/CRC, Eds.; 1<sup>a</sup> ed.).
- De Vylder, F., & Goovaerts, M. J. (1988). Recursive calculation of finite-time ruin probabilities. *Insurance: Mathematics and Economics*, 7(1), 1–7.
- Dickson, D. C. M. (2016). *Insurance Risk and Ruin* (2<sup>a</sup> ed.). Cambridge University Press.
- Dickson, D. C. M., Egídio dos Reis, A. D., & Waters, H. R. (1995). Some stable algorithms in ruin theory and their applications. *ASTIN Bulletin*, 25(2), 153–175.
- Dickson, D. C. M., & Waters, H. R. (1991). Recursive Calculation of Survival Probabilities. *ASTIN Bulletin*, 21(2), 199–221.
- Dickson, D. C., & Waters, H. R. (2002). The distribution of the time to ruin in the classical risk model. *ASTIN Bulletin*, 32(2), 299–313.

- Gerber, H. U. (1979). *An Introduction to Mathematical Risk Theory*. S.S. Huebner Foundation for Insurance Education.
- Lourenço, J. M. (2021). *The NOVAthesis L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X Template User's Manual*. NOVA University Lisbon. <https://github.com/joaomlourenco/novathesis/raw/master/template.pdf>
- Panjer, H. H. (1981). Recursive evaluation of a family of compound distributions. *ASTIN Bulletin*, 12(1), 22–26.
- Parzen, E. (2015). *Stochastic Processes*. Dover Publications.
- Sundt, B., & Jewell, W. S. (1981). Further results on recursive evaluation of compound distributions. *ASTIN Bulletin*, 12(1), 27–39.
- Yang, C., & Sendova, K. P. (2014). The discounted moments of the surplus after the last innovation before ruin under the dual risk model. *Stochastic Models*, 30(1), 99–124.



