



David Bernardino Palma

Licenciado em Ciências da Engenharia Mecânica

Análise e otimização de microestruturas com critérios de tensão usando cálculo paralelo

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em
Engenharia Mecânica

Orientador: Pedro Samuel Gonçalves Coelho, Professor
Auxiliar, Faculdade de Ciências e Tecnologia
da Universidade Nova de Lisboa

Júri

Presidente: João Mário Burguete Botelho Cardoso
Arguente: José Arnaldo Pereira Leite Miranda Guedes
Vogal: Pedro Samuel Gonçalves Coelho



FACULDADE DE
CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Junho, 2018

Análise e otimização de microestruturas com critérios de tensão usando cálculo paralelo

Copyright © David Bernardino Palma, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade NOVA de Lisboa.

A Faculdade de Ciências e Tecnologia e a Universidade NOVA de Lisboa têm o direito, perpétuo e sem limites geográficos, de arquivar e publicar esta dissertação através de exemplares impressos reproduzidos em papel ou de forma digital, ou por qualquer outro meio conhecido ou que venha a ser inventado, e de a divulgar através de repositórios científicos e de admitir a sua cópia e distribuição com objetivos educacionais ou de investigação, não comerciais, desde que seja dado crédito ao autor e editor.

AGRADECIMENTOS

Quero começar por agradecer ao meu orientador, Professor Doutor Pedro Coelho, por todo o apoio, conhecimento transmitido e motivação dada.

Quero agradecer ao Departamento de Engenharia Mecânica e Industrial da Faculdade de Ciências e Tecnologia pela formação que me foi dada e por disponibilizar as instalações e equipamentos necessários para o desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço à minha família, por me darem a possibilidade de estudar e pelo apoio incondicional que me foi dado.

Por fim, quero agradecer aos meus amigos pela amizade que demonstraram.

RESUMO

Esta dissertação tem como principal foco a análise e otimização de materiais celulares aplicando constrangimentos de tensão.

O modelo material considerado neste trabalho é um compósito de microestrutura periódica com duas fases (sólido e vazio) representado por uma célula de base unitária. Recorre-se à teoria da homogeneização de modo a traduzir as propriedades elásticas do meio heterogêneo dos materiais compósitos em propriedades equivalentes para o meio homogêneo.

Recorre-se ao cálculo paralelo tanto para o cálculo das derivadas dos constrangimentos por diferenças finitas como para resolver os casos de carga da teoria da homogeneização. É realizado um estudo acerca da eficiência da paralelização da homogeneização, comparando os tempos de execução da mesma com diferentes malhas e recorrendo a um diferente número de processadores.

A aplicação de constrangimentos de tensão em problemas de otimização de topologia é estudada nesta dissertação, recorrendo aos métodos de relaxamento de tensão ϵ -relaxation, *qp-approach* e *damage-approach*.

Os resultados mostram que a paralelização da homogeneização reduz eficazmente o tempo de cálculo. Os resultados das otimizações das células unitárias mostram que se obtêm resultados idênticos recorrendo ao *qp-approach* e ao ϵ -relaxation e que as soluções obtidas quando se recorre ao *damage approach* são comparáveis aos anteriores e que é possível ter uma tensão máxima bastante próxima da tensão admissível quando se recorre a este método de relaxamento.

Palavras-chave: Otimização, Topologia, Microestrutura, Tensão, Compósitos, Homogeneização, Computação paralela

ABSTRACT

This dissertation focuses mainly on the analysis and optimization of cellular materials.

The material model considered in this work is a composite with periodic microstructure with two phases (solid and void), represented by an unit-cell. The theory of homogenization is used to translate the elastic properties of the heterogeneous medium of the composite materials into equivalent properties for the homogeneous medium.

Parallel computing is used both for the computation of the derivatives of the constraints by finite differences and for computing the characteristic deformations of the homogenization theory. The efficiency of the paralleled code that runs the homogenization is studied, and the execution times with several meshes and with different numbers of processors are compared.

A study about the application of stress criteria in topology optimization of microstructures is done, using methods of stress relaxation, such as the ϵ -relaxation, the qp -approach and the damage approach.

The results show that using parallel computing effectively reduces the execution time of the analysis. It is shown that similar results tend to be obtained whether one is using the qp -approach or the ϵ -relation techniques for topology optimization of unit-cells. It is also shown that final solutions obtained when using the damage approach are comparable to the ones obtained when using the other methods and that it is possible to choose a set of parameters so that the stress violation that is inherent to the damage approach can be negligible.

Keywords: Optimization, Microstructure, Stress, Composites, Homogenization, Parallel computing

ÍNDICE

Lista de Figuras	xiii
Lista de Tabelas	xv
1 Introdução	1
1.1 Motivação	2
1.2 Objetivos	2
1.3 Estrutura da Dissertação	3
2 Otimização topológica com Constrangimentos de tensão	5
2.1 Constrangimentos de tensão	6
2.1.1 ϵ -relaxation	8
2.1.2 qp -approach	9
2.1.3 <i>Damage approach</i>	10
2.2 Computação paralela	12
2.2.1 <i>Message Passing Interface</i>	13
3 Modelo Material	17
3.1 Microestrutura periódica	17
3.2 Homogeneização	19
3.2.1 Problema de elasticidade	20
3.3 Paralelização da Homogeneização	22
4 Problema de Otimização	25
4.1 Formulação do Problema	25
4.2 Implementação em paralelo	27
4.2.1 qp -approach e ϵ -relaxation	27
4.2.2 <i>Damage approach</i>	27
5 Resultados	33
5.1 Otimização de uma treliça	33
5.1.1 Otimização com variável de área	34
5.1.2 Otimização com variável de densidade	36
5.2 Parâmetros do design inicial de uma célula com 5 furos	41

ÍNDICE

5.3	Paralelização da homogeneização	43
5.4	Estudo da qualidade das diferenças finitas	44
5.5	Otimização de topologia da célula unitária	46
6	Conclusão e Trabalho futuro	53
	Bibliografia	55
A	Análise estática de uma treliça	57
A.1	Otimização das áreas	59
A.1.1	<i>Compliance</i>	59
A.2	Otimização de densidades	59
A.2.1	<i>Compliance</i>	60

LISTA DE FIGURAS

1.1	Otimização topológica de um braço de uma suspensão. Extraído de [1].	2
2.1	Comparação entre cada categoria de otimização. Adaptado de [4].	6
2.2	Problemas (esquerda) e soluções (direita) em otimização com critérios de tensão.	7
2.3	Exemplo do domínio de um problema com constrangimentos de tensão.	8
2.4	Modelo original e modelo danificado. Extraído de [11].	10
2.5	Efeito dos parâmetros do <i>Damage-approach</i> na curva do constrangimento.	12
2.6	Operações de <i>Broadcasting</i> e <i>Gather/Scatter</i> . Extraído de [13].	15
3.1	Modelo hierárquico. Extraído de [12].	18
3.2	Microestrutura periódica.	18
3.3	Fluxograma do código paralelizado da homogeneização.	22
3.4	Representação de um quarto da célula unitária com malha não quadrangular para diferentes níveis de discretização.	24
4.1	Representação da célula e do referencial.	26
4.2	Execução do programa de otimização topológica de um material celular recorrendo ao <i>qp-approach</i>	28
4.3	Execução do programa de otimização topológica de um material celular recorrendo ao <i>ϵ-relaxation</i>	28
4.4	Efeito do parâmetro α na curva do dano	29
4.5	Curvas de dano para diferentes valores da densidade (ρ).	30
4.6	Execução do programa de otimização topológica de um material celular com o constrangimento de tensão aplicado pelo <i>Damage Approach</i>	31
5.1	Problema de 3 barras introduzido por Kirsh em [17].	34
5.2	Representação gráfica do problema de otimização.	35
5.3	Representação gráfica do problema de otimização com variável de área com o método de relaxamento ϵ	36
5.4	Representação gráfica do problema de otimização com variável de área com o método de relaxamento <i>damage approach</i>	37
5.5	Representação gráfica do problema de otimização com variável de densidade com o método de relaxamento ϵ	38

5.6	Representação gráfica do problema de otimização com variável de densidade com o método de relaxamento <i>qp-approach</i>	39
5.7	Representação gráfica do problema de otimização com variável de densidade com o método de relaxamento <i>damage approach</i>	40
5.8	Esquema de uma célula.	41
5.9	Esquema de uma célula com um furo central e um furo em cada canto. . . .	41
5.10	Parâmetros admissíveis de R e ρ_1 para uma célula com um furo central e um furo em cada canto.	42
5.11	<i>Speedup</i> obtido para a paralelização da homogeneização.	43
5.12	Eficiência da paralelização da homogeneização.	44
5.13	Diferenças finitas para $p = 5 \times 10^{-3}, 1 \times 10^{-3}, 1 \times 10^{-4}, 5 \times 10^{-5}, 5 \times 10^{-5}$	45
5.14	Diferenças finitas para $p = 1 \times 10^{-4}, 5 \times 10^{-5}, 2 \times 10^{-5}, 1 \times 10^{-5}, 8 \times 10^{-6}$	45
5.15	Solução do problema 4.1 recorrendo ao <i>qp-approach</i>	46
5.16	Solução do problema 4.1 recorrendo ao ϵ -relaxation.	46
5.17	Solução do problema 4.1 recorrendo ao <i>damage approach</i>	47
5.18	Gráficos de convergência para o problema de otimização 4.1.	47
5.19	Solução do problema 4.2 recorrendo ao <i>qp-approach</i>	48
5.20	Solução do problema 4.2 recorrendo ao ϵ -approach.	48
5.21	Solução do problema 4.2 recorrendo ao <i>damage-approach</i>	48
5.22	Gráficos de convergência para o problema de otimização 4.2.	49
5.23	Solução do problema 4.3 recorrendo ao <i>qp-approach</i>	49
5.24	Solução do problema 4.3 recorrendo ao ϵ -approach.	50
5.25	Solução do problema 4.3 recorrendo ao <i>damage approach</i>	50
5.26	Gráficos de convergência para o problema de otimização 4.3.	51
A.1	Estrutura sem a barra 1.	57
A.2	Estrutura com a força N.	58

LISTA DE TABELAS

4.1	Problema de otimização de uma célula sujeita ao corte com redução de 20% da tensão.	26
4.2	Problema de otimização de uma célula sujeita a uma extensão biaxial ($\epsilon_{33}/\epsilon_{22} = 1.5$) imposta com redução de 20% da tensão.	26
4.3	Problema de otimização de uma célula sujeita a uma extensão biaxial ($\epsilon_{33}/\epsilon_{22} = 2.0$) imposta com redução de 20% da tensão.	26
5.1	Parâmetros do problema de otimização com variável de área	34
5.2	Parâmetros do problema de otimização com variável de densidade	37
5.3	Parâmetros de relaxamento	46

INTRODUÇÃO

A evolução da informática nas últimas décadas tem levado a um crescente recurso à computação em engenharia para a realização de tarefas como o projeto ou a simulação. A computação permite economizar recursos materiais e prevenir erros no projeto, que se iriam refletir nos produtos ou estruturas, através da simulação das condições a que esses produtos ou estruturas iriam estar sujeitos.

Uma área que tem vindo a ganhar importância com os avanços na área da computação é a análise e otimização de estruturas, que necessita de muito poder computacional para a geração de malhas que aproximam a geometria das estruturas e para a análise das mesmas.

A otimização é o processo de seleção da melhor solução de um certo problema dentro de uma gama de hipóteses. A otimização estrutural em particular é a seleção do projeto (*design*) que melhor desempenha a função pretendida, minimizando ou maximizando uma função objetivo (e.g. peso ou rigidez), tem vindo a ganhar interesse nos últimos anos tanto no meio académico como no meio industrial. A otimização de microestruturas, em particular, permite a obtenção de materiais compósitos otimizados para diferentes casos de carga. Esta dissertação tem especial enfoque na análise e otimização de materiais com microestrutura periódica.

Nesta dissertação realiza-se um estudo sobre a análise e otimização topológica de microestruturas, recorrendo à paralelização para reduzir o tempo de execução das análises e otimizações. Aplicam-se estrangulamentos de tensão e recorre-se a métodos de relaxamento que serão introduzidos mais adiante na presente dissertação, e é feita a comparação dos métodos de relaxamento.

1.1 Motivação

A otimização topológica tem uma vasta gama de aplicação em engenharia mecânica, civil, aeroespacial e biomédica. Na figura 1.1 pode-se ver um exemplo de uma otimização topológica com o objetivo de minimizar a *compliance* (flexibilidade) de um braço de uma suspensão multibraço.

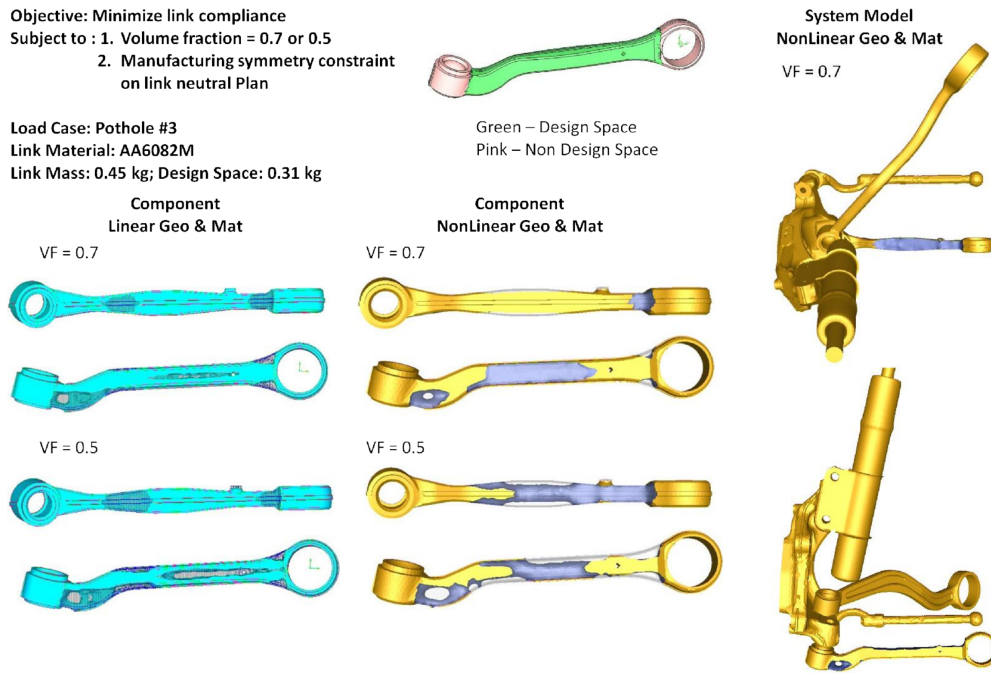


Figura 1.1: Otimização topológica de um braço de uma suspensão. Extraído de [1].

Embora a otimização de topologia tenha tido uma crescente adoção pela indústria, esta é largamente usada exclusivamente no estágio conceptual do projeto, por razões como a difícil manufatura da topologia obtida ou a violação da tensão admissível para o projeto em questão, por não serem aplicados constrangimentos de tensão devido ao custo computacional que representa. Por isso o *design* obtido através da otimização topológica sofre várias modificações até ao *design* final.

A modelação de microestruturas, em particular, tem várias aplicações possíveis em áreas como a biomecânica para modelar estruturas como a do osso humano, emulando o processo natural de remodelação óssea. A análise e otimização de microestruturas constitui a principal motivação por detrás desta dissertação.

1.2 Objetivos

O principal objetivo da presente dissertação é contribuir para o conhecimento científico, particularmente na área da análise e otimização de microestruturas, com especial ênfase na aplicação de constrangimentos de tensão e de métodos de relaxamento dos

mesmos. Começou-se por fazer a otimização gráfica de uma treliça como caso de estudo aplicando-se vários relaxamentos dos constrangimentos de tensão. Em seguida, realizou-se a otimização topológica em um elemento de volume representativo (célula unitária) de um compósito celular. Nesta dissertação, recorre-se à paralelização para reduzir o tempo de execução das análises e otimizações. É realizado um breve estudo acerca da eficiência da paralelização da homogeneização num programa em FORTRAN.

1.3 Estrutura da Dissertação

No primeiro capítulo, o tema é introduzido, com uma breve descrição dos temas da tese e a importância do tema é realçado.

No segundo capítulo, é feita uma revisão literária acerca da otimização topológica com constrangimentos de tensão e sobre a computação paralela, nomeadamente a implementação utilizando o MPI.

No terceiro capítulo, é introduzido o modelo material considerado nesta dissertação e é apresentado resumidamente o método da homogeneização.

No quarto capítulo, é formulado o problema de otimização resolvido mais adiante na dissertação.

No quinto capítulo, são apresentados os resultados dos vários problemas resolvidos na presente dissertação.

No sexto capítulo, tiram-se conclusões acerca dos resultados obtidos e são apresentados os desenvolvimentos futuros. Realiza-se uma retrospectiva do trabalho desenvolvido e uma discussão dos resultados obtidos.

OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA COM CONSTRANGIMENTOS DE TENSÃO

A otimização topológica é uma categoria da otimização estrutural, uma área que engloba um conjunto de teorias e métodos com o intuito de obter estruturas que desempenham melhor a sua respetiva função. Existem três categorias de otimização estrutural: dimensional, de forma, e de topologia que se referem a diferentes aspetos do problema (ver fig. 2.1).

A otimização dimensional consiste na otimização de cada elemento da estrutura utilizando dimensões geométricas como variáveis de projeto. A otimização de forma baseia-se na otimização de estrutura através da variação da fronteira do domínio ocupado pela mesma. Ao contrário destas, a otimização topológica não necessita de um design base, estando apenas dependente de um domínio de projeto sujeito a condições de fronteira e consiste na determinação de características como o número e localização de furos e a conectividade do domínio.

Um problema de otimização em geral pode ser expresso na forma:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & f(\mathbf{x}) \\ \text{s.t.} \quad & h_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 1, \dots, k, \\ & g_j(\mathbf{x}) \leq 0 \quad j = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Aqui, f denota a função objetivo, e h e g denotam os constrangimentos de igualdade e desigualdade, respetivamente. No caso da otimização estrutural as variáveis de projeto podem ser áreas, comprimentos ou densidades, a função objetivo pode ser o peso da estrutura ou a *compliance* e os constrangimentos podem ser de tensão ou de volume, por exemplo.

A otimização topológica de estruturas pode ser separada quanto a classes de problemas a resolver: meios discretos e contínuos. A otimização topológica a partir de meios

discretos foi inicialmente sugerida por Dorn *et al* [2], com o método conhecido como *Ground Structure Approach*. A otimização topológica a partir de meios contínuos foi introduzido por Bendsøe e Kikuchi [3], com o método da homogeneização.

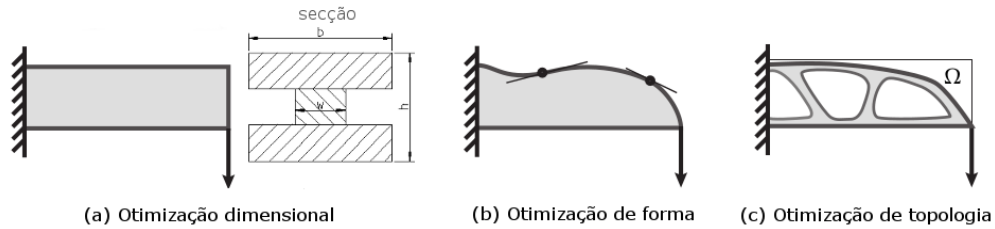


Figura 2.1: Comparação entre cada categoria de otimização. Adaptado de [4].

O SIMP (*Solid Isotropic Material with Penalization*) é esquema de interpolação entre densidade e rigidez em meio contínuo, introduzido por Rozvany *et al.*[5]. Neste método as propriedades do material estão relacionadas com uma variável de densidade que varia entre 0 e 1, de modo a que densidades intermédias sejam penalizadas de acordo com a seguinte lei de potência:

$$E(x) = \rho(x)^p E_0, \quad \text{com } p > 1 \text{ e } 0 \leq \rho(x) \leq 1, \quad (2.2)$$

onde $\rho(x)$ é a densidade, E_0 o módulo de Young do material e p o expoente de penalização. O expoente p penaliza zonas com densidade intermédia da estrutura de modo a que a sua contribuição para o desempenho da estrutura seja baixa, conseqüentemente o algoritmo terá tendência a convergir cada elemento para uma densidade unitária (presença de material) ou nula (ausência de material).

2.1 Constrangimentos de tensão

A aplicação de constrangimentos de tensão em otimização de topologia é um tópico de grande importância. Diversos desafios surgem com a aplicação de constrangimentos de tensão como ótimos singulares, a não-linearidade e o custo computacional. Para cada um destes problemas foram sugeridas algumas soluções que estão representadas na figura 2.2. Para as singularidades foram propostas várias técnicas de relaxação que permitem algoritmos de otimização não-linear chegar ao ótimo singular, o problema associado à natureza local pode ser solucionado através de vários métodos de agregação que permitem reduzir o número de constrangimentos comprometendo o controlo do estado de tensão local, para a não linearidade foram sugeridos o refinamento- p e o refinamento- h que se baseiam no aumento dos nós por elemento e na utilização de uma malha mais refinada, respetivamente. O elevado custo computacional deve-se principalmente à não-linearidade e à natureza local e pode ser reduzido através de técnicas como a computação paralela.

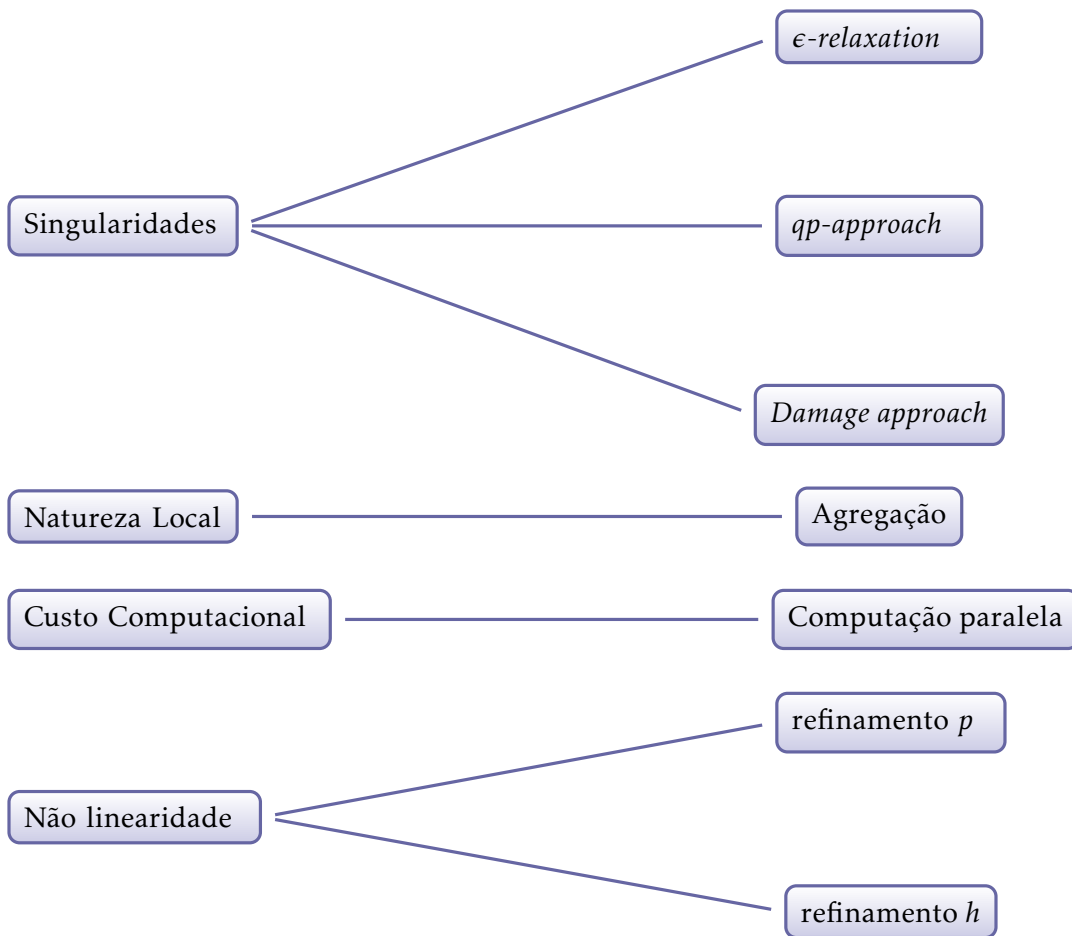


Figura 2.2: Problemas (esquerda) e soluções (direita) em otimização com critérios de tensão.

No modelo SIMP, isto é, quando se utiliza um material de densidade intermédia, não é claro à priori como a tensão se relaciona com a densidade. Para isso, geralmente o constrangimento de tensão aplicado para o modelo SIMP é expresso como:

$$\sigma_{eqv} \leq \rho^p \sigma_{adm} \quad \text{se } \rho > 0. \quad (2.3)$$

Este constrangimento reflete a atenuação de um meio poroso que ocorre quando a tensão média é distribuída na micro-estrutura, fazendo com que as tensões locais permaneçam finitas e não nulas a densidade zero. [6, pag. 79]

Os ótimos singulares em subdomínios degenerados é um dos grandes problemas da aplicação de constrangimentos de tensão que impede que algoritmos baseados no gradiente alcancem o ótimo global como se pode ver na figura 2.3 em que região a azul representa a região admissível, a região a branco a não admissível e a seta aponta para o ótimo global que como se pode ver está numa zona de muito difícil acesso para um algoritmo baseado no gradiente. Durante esta secção iremos tratar dos métodos para a resolução deste problema.

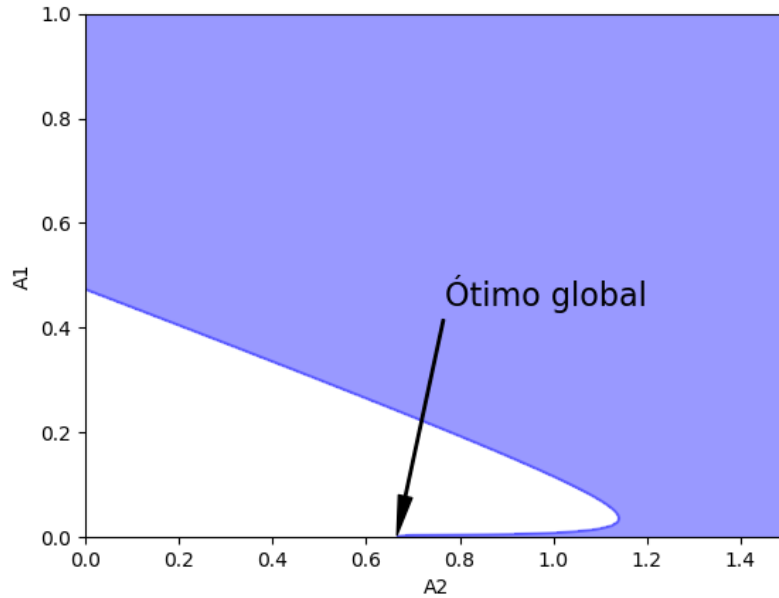


Figura 2.3: Exemplo do domínio de um problema com constrangimentos de tensão.

2.1.1 ϵ -relaxation

O método de relaxamento ϵ -relaxation foi introduzido por Cheng & Guo (1997) [7] como solução para o problema da singularidade. Ao permitir que os constrangimentos assumam valores pequenos ϵ a solução original passa a ser acessível através de algoritmos baseados no gradiente.

Um problema de otimização de uma treliça pode ser formulado como se pode ver na equação (2.4), em que os índices U e L denotam o limite superior e inferior, respectivamente. W é o peso da estrutura, ρ é a densidade do material, A_i e L_i são a área e o comprimento da barra i , respectivamente. \mathbf{K} é a matriz de rigidez, \mathbf{U} são os vetores de deslocamento e \mathbf{P} são os vetores de carga.

$$\begin{aligned}
 \min_A \quad & W = \sum_{i=1}^N \rho_i L_i A_i, \\
 \text{s.t.} \quad & \mathbf{K}\mathbf{U}_j = \mathbf{P}_j, \quad j = 1, \dots, M, \\
 & (\sigma_i^L - \sigma_i) A_i \leq 0, \\
 & (\sigma_i - \sigma_i^U) A_i \leq 0, \quad A_i \in \mathbb{R}_0^+.
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Aplicando a técnica de relaxação ficará da forma:

$$\begin{aligned}
 \min_A \quad & W = \sum_{i=1}^N \rho_i L_i A_i, \\
 \text{s.t.} \quad & \mathbf{K}U_j = P_j, \quad j = 1, \dots, M, \\
 & (\sigma_i^L - \sigma_i)A_i \leq \epsilon, \\
 & (\sigma_i - \sigma_i^U)A_i \leq \epsilon, \quad A_i \in \mathbb{R}_0^+.
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

onde N é o número de barras e M o número de casos de carga.

No caso da otimização topológica com base nas densidades relativas, os constrangimentos de tensão serão da forma:

$$\rho \left(\frac{\sigma_{VM}}{\rho^p \sigma_{adm}} - 1 \right) \leq \epsilon(1 - \rho). \tag{2.6}$$

Com esta correção, o espaço de soluções deixa de ser degenerado e o fator $(1 - \rho)$ em ϵ obriga a que o constrangimento de tensão original seja cumprido para $\rho = 1$. [6] [8]

2.1.2 *qp-approach*

O *qp-approach* foi originalmente proposto por Bruggi & Venini(2007) [9] como alternativa ao *ϵ -relaxation*. O método baseia-se num modelo de tensão microscópica que reproduz o comportamento de um material compósito laminado poroso, proposto por Dyuksin & Bendsøe (1998)[10], veja-se também [8].

Para um material compósito laminado poroso, a definição do comportamento para tensões microscópicas tem de obedecer a duas condições: (i) ser inversamente proporcional à densidade (ii) convergir para uma tensão finita quando a densidade tende para zero. A definição de tensão microscópica que satisfaz a primeira condição é [10]:

$$\sigma_e = \frac{\langle \sigma_e \rangle}{\rho_e^q} = \rho_e^{p-q} C_e(E_0) \langle \epsilon_e \rangle \tag{2.7}$$

em que $\langle \sigma_e \rangle$ é a tensão macroscópica, ρ_e é a densidade, C_e é a matriz de elasticidade baseada no módulo de Young efetivo. $\langle \epsilon_e \rangle$ é o vetor de extensão macroscópica. $\langle \cdot \rangle$ é usado para quantidades homogeneizadas. A segunda condição é satisfeita quando $q = p$, que equivale ao problema não relaxado.

Quando $q < p$:

$$\lim_{\rho_e \rightarrow 0} \rho_e^{p-q} C_e(E_0) \langle \epsilon_e \rangle = 0, \quad q < p \tag{2.8}$$

Logo, o conjunto de constrangimentos original pode ser substituído por:

$$g_j = \frac{\rho_j^{\epsilon_{qp}} |\sigma_j|}{\sigma_{adm}} - 1 \leq 0, \quad \text{onde } \epsilon_{qp} = p - q > 0, \forall j \in \Omega^d \tag{2.9}$$

com $|\sigma_j| = \mathbf{C}_e(E_0) \langle \epsilon_e \rangle$.

2.1.3 *Damage approach*

O *damage approach* é um método de aplicação de constrangimentos, introduzido por Verbart [11], que contempla dois modelos, o original e um danificado. No modelo danificado as propriedades são deterioradas nas zonas onde a tensão ultrapassa a tensão admissível, e a igualdade da *compliance* entre os dois modelos é imposta como constrangimento.

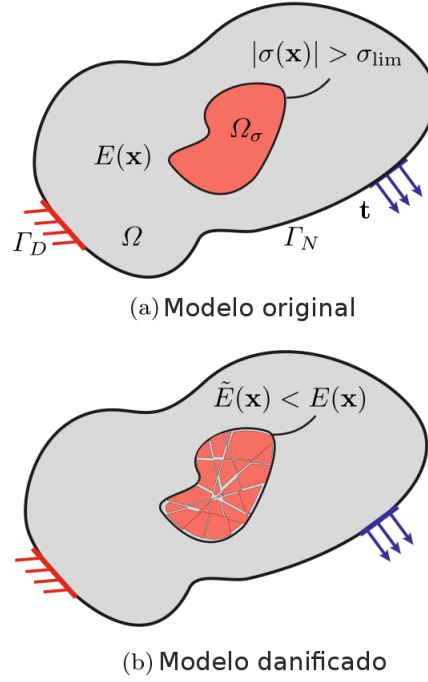


Figura 2.4: Modelo original e modelo danificado. Extraído de [11].

Considere-se um corpo sólido elástico e isotrópico que ocupa um domínio $\Omega \in \mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$) com uma fronteira $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$. Define-se uma força de tração t em Γ_N , e um deslocamento em Γ_D . Assume-se que não existem forças volúmicas [11]. Ocorre falha quando $|\sigma_{VM}| > \sigma_{adm}$.

Começa-se por calcular o campo de deslocamentos, seguido da aplicação de um critério de tensão. A região vermelha que se pode ver na figura 2.4 assinala o subdomínio onde a tensão excede a tensão admissível: $\Omega_\sigma \subseteq \Omega$. O módulo de elasticidade do material nessa zona é degradado no modelo danificado de acordo com:

$$\begin{cases} \tilde{E}(x) < E(x), & \forall x \in \Omega_\sigma := \{|\sigma(x)| > \sigma_{adm}\}, \\ \tilde{E}(x) = E(x), & \forall x \in \Omega \setminus \Omega_\sigma. \end{cases} \quad (2.10)$$

Para o modelo danificado calcula-se o campo de deslocamentos \tilde{u} . Supondo que o desempenho da estrutura pode ser medida por uma função escalar monótona das propriedades locais do material, o modelo danificado nunca irá ter um melhor desempenho que o original. Uma função que obedece a esta condição é a *compliance*.

Para o problema da *compliance*:

$$\tilde{C} = \int_{\Gamma_N} t \cdot \tilde{u} \, d\Gamma \geq C = \int_{\Gamma} t \cdot u \, d\Gamma \quad (2.11)$$

Para o problema da minimização da massa da estrutura, visto que os locais onde os constrangimentos de tensão levam a um modelo danificado com uma maior *compliance*, é possível impor os constrangimentos de tensão através de um único constrangimento, que impõe a igualdade de *compliance* entre os dois modelos.

$$\begin{aligned} \min_{s \in S} \quad & m(s) \\ \text{s.t.} \quad & h(s) = \frac{\tilde{C}(\tilde{u}(s), s)}{C(u(s), s)} - 1 = 0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

em que s é a variável do problema de otimização e m é uma função objetivo arbitrária.

O módulo de Young no primeiro modelo pode ser implementado da forma:

$$\tilde{E} = E_{min} + \beta(E - E_{min}), \quad \text{onde } \beta(\sigma; \sigma_{adm}) \in [0, 1]. \quad (2.13)$$

Em que E_{min} denota um numero positivo pequeno para evitar singularidade. β é a função dano introduzida para degradar material como função do rácio $\frac{|\sigma|}{\sigma_{adm}}$. Para a aplicação do SIMP, $\tilde{E}^0 = \tilde{E}$.

A função dano β deve obedecer à condições: (i) ser no mínimo diferenciável de primeira ordem, (ii) ser minorada por 0, e (iii) monótona crescente quando a tensão excede a tensão admissível. A seguinte função obedece a estas condições:

$$\beta(\sigma; \alpha) = \begin{cases} 1, & \text{se } |\sigma| < \sigma_{adm} \\ e^{-\alpha(|\sigma|/\sigma_{adm}-1)^2}, & \text{se } |\sigma| \geq \sigma_{adm} \end{cases} \quad (2.14)$$

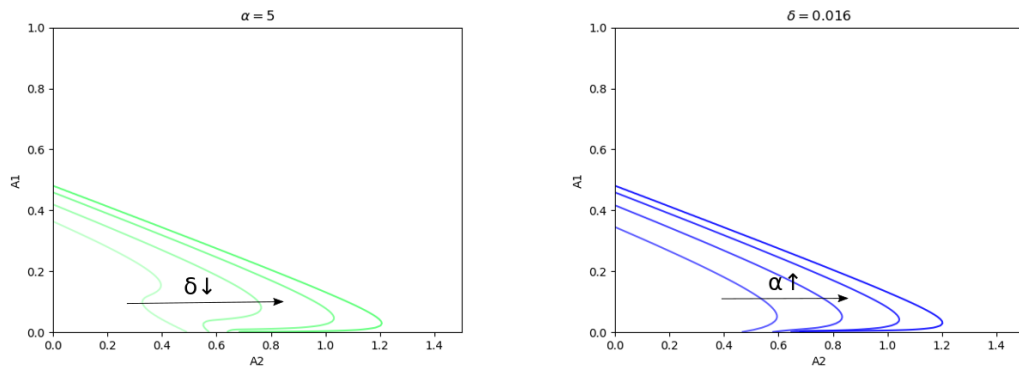
$\alpha > 0$ é o fator de degradação que controla o declive da função de dano.

Para resolver o problema numericamente, é necessário modificar o constrangimento de forma a que passe a ser um constrangimento de desigualdade, isto deve-se ao facto de os algoritmos de otimização sequenciais convexos como o MMA não suportarem constrangimentos não-lineares de igualdade diretamente. Sendo assim, o constrangimento em (2.12) é substituído por:

$$g(s) = \frac{\tilde{C}(\tilde{u}(s), s)}{C(u(s), s)} - 1 \leq \delta, \quad (2.15)$$

em que δ é um parâmetro positivo de relaxação.

O *damage approach* tem, portanto, 2 parâmetros de relaxamento (α e o δ), os gráficos na figura 2.5 mostram o efeito que cada um desses parâmetros tem na curva do constrangimento para um problema de otimização da área de três barras de uma treliça resolvida no âmbito desta tese (ver secção 5.1).



(a) Efeito do parâmetro δ na curva do constrangimento *Damage*.

(b) Efeito do parâmetro α na curva do constrangimento *Damage*.

Figura 2.5: Efeito dos parâmetros do *Damage-approach* na curva do constrangimento.

2.2 Computação paralela

Computação paralela é um tipo de computação em que vários cálculos ou tarefas são executados ao mesmo tempo. O paralelismo tem especial interesse para HPC (*High Performance Computing*, em português, computação de elevado desempenho). O paralelismo permite utilizar vários recursos computacionais para resolver um único problema computacional. Esses recursos podem estar organizados do seguinte modo:

- um computador com múltiplos processadores
- uma rede de computadores
- uma rede de vários multi-processadores

O problema computacional tem de poder ser dividido em tarefas ou dados independentes para que se possam aplicar técnicas de paralelização. Existem vários paradigmas de programação:

- Memória partilhada (e.g. OpenMP) (mais apropriado para sistemas de memória partilhada)
- troca de mensagens (e.g. MPI) (mais apropriado para sistemas com memória distribuída)
- híbrido

Nesta tese, recorreu-se ao paradigma de troca de mensagens. Como o domínio de projeto em otimização topológica é discretizado por uma malha de elementos finitos e o objetivo é a definição da densidade de cada um desses elementos, obtém-se um elevado número de variáveis de projeto, com vários sistemas de equações de grande dimensão a resolver, o que implica um elevado custo computacional. A computação paralela surge como uma

solução para reduzir o tempo de computação e tornar possível a resolução de problemas que de outro modo teriam tempos de computação proibitivos.

A técnica de decomposição de domínio combinada com a computação paralela tem sido utilizada, por exemplo, para resolver sistemas lineares de equações $\mathbf{Ku} = \mathbf{f}$. A técnica consiste na decomposição do domínio de projeto (Ω) em D' subdomínios (Ω_i com $i = 1, \dots, D'$) e ordenar a cada unidade de processamento que faça os cálculos e armazenamento relativos ao subdomínio respetivo [12]. Aplicando esta técnica, o sistema $\mathbf{Ku} = \mathbf{f}$ pode ser escrito da forma:

$$\left(\sum_{j=1}^{D'} \mathbf{K}_j \right) \mathbf{u} = \sum_{j=1}^{D'} \mathbf{f}_j \quad (2.16)$$

onde \mathbf{K}_j e \mathbf{f}_j são as contribuições do subdomínio j para a matriz de rigidez e vetor de cargas globais, respetivamente.

Nesta dissertação recorre-se à computação paralela essencialmente para calcular as sensibilidades dos constrangimentos de tensão relativamente à variáveis de densidade e para executar a homogeneização.

2.2.1 Message Passing Interface

O MPI é um padrão de comunicação de dados entre processos aplicável a uma vasta gama de arquiteturas de computadores paralelos. O MPI suporta tanto comunicação ponto a ponto como comunicação coletiva, e extensões ao modelo clássico de troca de mensagens como operações coletivas, criação dinâmica de processos, entre outros. O MPI é uma especificação, havendo várias implementações, muitas das quais de código aberto. O padrão especifica *bindings* para C e Fortran, que podem ser acedidas por outras linguagens que podem interagir com estas bibliotecas como o Java ou o Python [13].

2.2.1.1 Comunicação ponto-a-ponto

O envio e receção de mensagens por processos é o mecanismo básico de comunicação. As operações básicas são *send* e *receive*. A instrução em fortran para enviar informação para outro processo é a seguinte:

```

1 MPI_Send(buf, count, datatype, dest, tag, comm, ierror) BIND(C)
2   TYPE(*), DIMENSION(..), INTENT(IN) :: buf
3   INTEGER, INTENT(IN) :: count, dest, tag
4   TYPE(MPI_Datatype), INTENT(IN) :: datatype
5   TYPE(MPI_Comm), INTENT(IN) :: comm
6   INTEGER, OPTIONAL, INTENT(OUT) :: ierror

```

Os dados da mensagem consistem em *count* elementos do tipo *datatype* começando a contar da posição na memória *buf*. O cabeçalho da função é composto pela fonte (*source*), que é um argumento da subrotina MPI_Recv, o destinatário (*dest*), a etiqueta (*tag*) e o comunicador (*comm*). A cada instrução *Send* tem de responder uma instrução *Recv*.

O instrução para receber informação de outro processo é:

```

1  MPI_Recv(buf, count, datatype, source, tag, comm, status, ierror) BIND(C)
2  TYPE(*), DIMENSION(..) :: buf
3  INTEGER, INTENT(IN) :: count, source, tag
4  TYPE(MPI_Datatype), INTENT(IN) :: datatype
5  TYPE(MPI_Comm), INTENT(IN) :: comm
6  TYPE(MPI_Status) :: status
7  INTEGER, OPTIONAL, INTENT(OUT) :: ierror

```

2.2.1.2 Comunicação coletiva

Comunicação coletiva é definida como comunicação que envolve um ou mais grupos de processos, cada grupo é definido pelo comunicador (*comm*). Dentre as operações mais comuns de comunicação coletiva estão o *broadcasting*, a sincronização (*Barrier*) e a recolha/distribuição de dados (*Gather/Scatter*). Na figura 2.6 estão esquematizadas as operações de *broadcasting* e *Gather/Scatter*.

A operação de *broadcasting* distribui *count* elementos do tipo *datatype* a contar a partir da posição na memória *buffer* do processo *root* para todos os processos do grupo identificado pelo comunicador *comm* (*root* inclusivé) tem a seguinte interface:

```

1  MPI_Bcast(buffer, count, datatype, root, comm, ierror)
2  TYPE(*), DIMENSION(..) :: buffer
3  INTEGER, INTENT(IN) :: count, root
4  TYPE(MPI_Datatype), INTENT(IN) :: datatype
5  TYPE(MPI_Comm), INTENT(IN) :: comm
6  INTEGER, OPTIONAL, INTENT(OUT) :: ierror

```

A operação *Scatter* envia *sendcount* elementos do tipo *sendtype* para cada processo do grupo correspondente ao comunicador *comm* (enviando no total $sendcount \times n_{procs}$ elementos) contando a partir da posição na memória *sendbuf* do processo *root* para o *buffer recvbuf* de cada processo.

```

1  MPI_Scatter(sendbuf, sendcount, sendtype, recvbuf, recvcount, recvtype,
2  root, comm, ierror)
3  TYPE(*), DIMENSION(..), INTENT(IN) :: sendbuf
4  TYPE(*), DIMENSION(..) :: recvbuf
5  INTEGER, INTENT(IN) :: sendcount, recvcount, root
6  TYPE(MPI_Datatype), INTENT(IN) :: sendtype, recvtype
7  TYPE(MPI_Comm), INTENT(IN) :: comm
8  INTEGER, OPTIONAL, INTENT(OUT) :: ierror

```

A operação **Gather** faz o inverso.

```

1  MPI_Gather(sendbuf, sendcount, sendtype, recvbuf, recvcount, recvtype,
2      root, comm, ierror)
3  TYPE(*), DIMENSION(..), INTENT(IN) :: sendbuf
4  TYPE(*), DIMENSION(..) :: recvbuf
5  INTEGER, INTENT(IN) :: sendcount, recvcount, root
6  TYPE(MPI_Datatype), INTENT(IN) :: sendtype, recvtype
7  TYPE(MPI_Comm), INTENT(IN) :: comm
8  INTEGER, OPTIONAL, INTENT(OUT) :: ierror

```

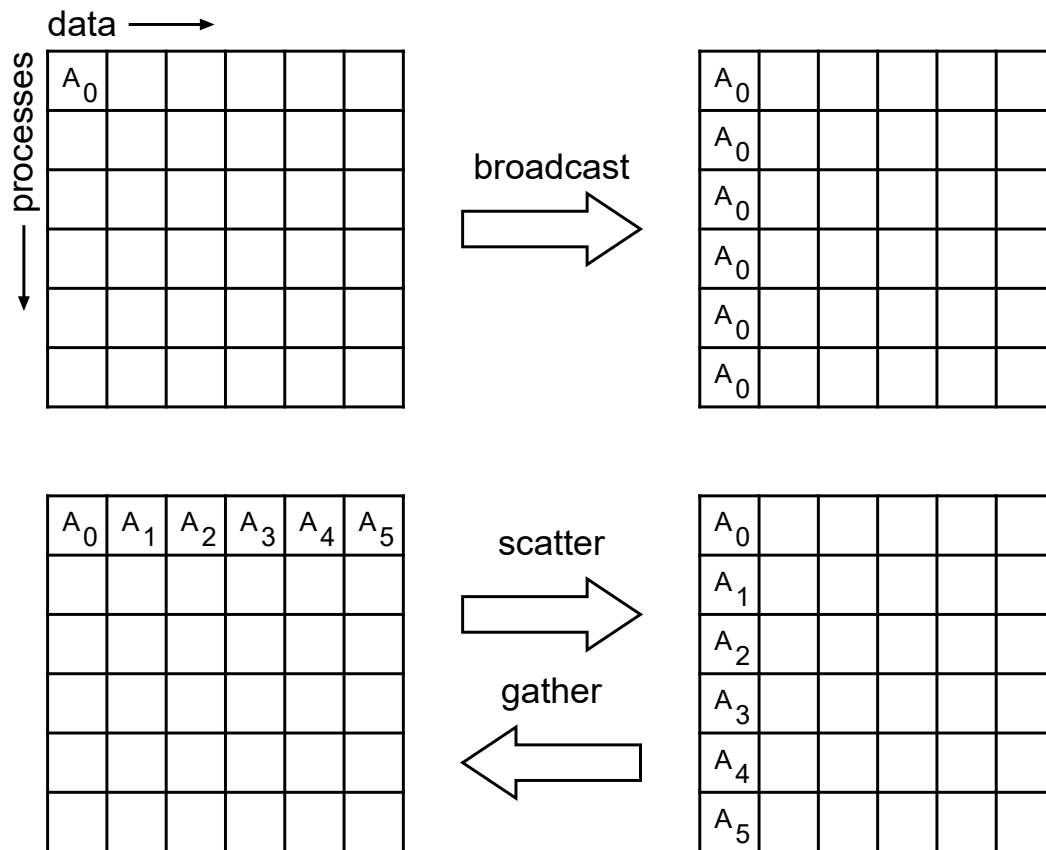


Figura 2.6: Operações de **Broadcasting** e **Gather/Scatter**. Extraído de [13].

MODELO MATERIAL

Neste capítulo pretende-se descrever o modelo material considerado na dissertação e descrever o método da homogeneização, que traduz o comportamento da microestrutura através de propriedades homogeneizadas. O material considerado é um compósito celular com microestrutura periódica. Na presente dissertação, apenas se trata da otimização da microestrutura do material, não se abordando a otimização macroscópica.

3.1 Microestrutura periódica

O modelo de material aqui considerado é um material celular, com duas fases (sólido e vazio) e de microestrutura periódica, sendo o meio heterogéneo obtido através da repetição de uma célula de base unitária. Um modelo de material assim poderá ser utilizado no contexto de uma análise multi-escala onde se faz a separação entre duas escalas de comprimento, micro e macroscópica, representadas pelo domínio do material e da estrutura, respetivamente[12]. Nesse contexto, uma estrutura pode estar sujeita a forças volúmicas \mathbf{b} , e na fronteira $\partial\Omega$ podem estar aplicadas forças de superfície \mathbf{t} em Γ_t e deslocamentos impostos \mathbf{u} em Γ_u (ver figura 3.1). No entanto, nesta tese, o objetivo não é a análise ou otimização multi-escala mas apenas a análise e otimização da microestrutura do material.

O campo escalar $\rho(\mathbf{x})$ caracteriza a escala macroscópica, sendo ρ a densidade macroscópica em que $\rho \in [0, 1]$ e \mathbf{x} o vetor posição no domínio da estrutura Ω . A escala microscópica é caracterizada pelo campo escalar $\mu(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, em que μ é a densidade microscópica e \mathbf{y} é o vetor posição no domínio do material Y . O domínio Y representa o espaço ocupado por uma célula de base (ver figura 3.2). Assume-se periodicidade local da microestrutura que é condição necessária para a aplicação do método da homogeneização. Sendo ψ uma propriedade do material, por periodicidade entende-se:

$$\mathbf{x}, (\mathbf{x} + \mathbf{w}) \in \Omega \Rightarrow \psi(\mathbf{x} + \mathbf{w}) = \psi(\mathbf{x}) \quad (3.1)$$

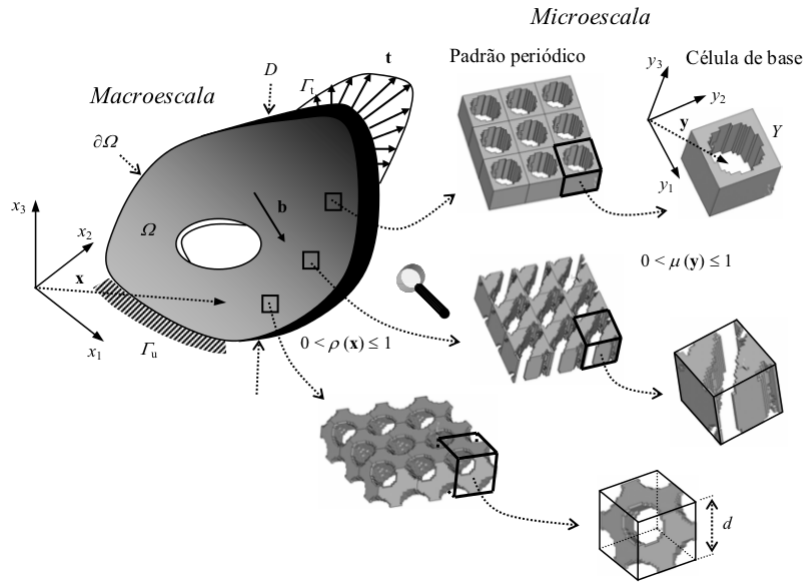


Figura 3.1: Modelo hierárquico. Extraído de [12].

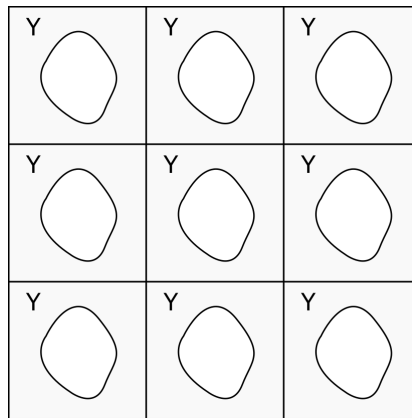


Figura 3.2: Microestrutura periódica.

Ambos os campos escalares, $\rho(\mathbf{x})$ e $\mu(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, têm valores entre 0 e 1, o que significa ausência ou presença de material respetivamente. Um valor intermédio de densidade ρ corresponde a uma fração volúmica de material que se assume distribuído numa vizinhança do ponto \mathbf{x} . No caso da densidade μ , os valores intermédios não têm qualquer significado físico e são penalizados através do SIMP (Solid Isotropic Material with Penalization) para que o otimizador dê prioridade aos valores 0 e 1.

A relação entre propriedades elásticas e densidade é obtida através do método da homogeneização para a escala macroscópica e através do SIMP para a escala microscópica. Nesta dissertação apenas será abordada a otimização da microestrutura dado um estado de tensão ou deformação.

3.2 Homogeneização

Considere-se um material compósito gerado a partir de uma célula base como se pode ver na figura 3.2, e uma estrutura desse material. A dimensão característica da célula de base é de ordem ϵ em relação à estrutura, ϵ é um número positivo muito menor que 1. Pretende-se estudar o comportamento mecânico desta estrutura quando solicitada a determinadas condições de fronteira \mathbf{t} e \mathbf{u} ou forças volúmicas, como representado na figura 3.1, um problema de valor de fronteira. Quando o número de heterogeneidades é reduzido, a solução pode ser alcançada através de métodos analíticos ou numéricos, se assim não for, estes métodos tornam-se impraticáveis (por exemplo, para o caso do MEF, pode significar uma malha muito refinada que se traduz num elevado custo computacional).

O método da homogeneização consiste na substituição de um meio heterogéneo por um meio homogéneo equivalente que incorpora os efeitos da microescala e está sujeito a condições de fronteira de periodicidade. A homogeneização para meios periódicos assume periodicidade na distribuição da heterogeneidade pelo domínio macroscópico e separação de escalas, i.e., existe um volume elementar representativo da homogeneidade com dimensão característica d muito inferior à dimensão característica D do domínio macroscópico. O quociente entre estas duas dimensões é denominado coeficiente homotético:

$$\epsilon = \frac{d}{D} \quad (3.2)$$

Quando o corpo é sujeito a uma solicitação exterior, a resposta varia com a variável \mathbf{x} , mas também oscila devido às heterogeneidades, sendo essa oscilação tanto mais rápida quanto menor for ϵ . Assume-se $\mathbf{u}^\epsilon(\mathbf{x}) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\epsilon})$, onde $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ é Y -periódica em Y para cada $\mathbf{x} \in \Omega$. Assume-se que a resposta da estrutura é aproximada por uma expansão assintótica em potências de ϵ relativamente à coordenada global \mathbf{x} :

$$u^\epsilon(\mathbf{x}) = u^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \epsilon u^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \epsilon^i u^i(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \mathbf{y} = \frac{\mathbf{x}}{\epsilon} \quad (3.3)$$

calculando as propriedades equivalentes do material celular na situação limite em que o quociente entre a dimensão da célula de base e a dimensão da estrutura é zero.

Considerando-se, por exemplo, o problema clássico de valor de fronteira, o estudo do comportamento mecânico de um domínio $\Omega^\epsilon \subset \mathbb{R}^3$, sujeito a determinadas condições de fronteira \mathbf{t} e/ou forças volúmicas \mathbf{b} . Se o número de heterogeneidades for muito elevado torna-se impraticável a utilização de métodos analíticos ou numéricos. No compósito ilustrado na figura 3.2, que resulta na repetição da célula, o número elevado de furos impossibilita o recurso a métodos numéricos, já que a malha teria de ser tão fina onde se situam os furos que o custo computacional tornaria o uso destes demasiado moroso.

A homogeneização permite resolver este problema, substituindo o meio heterogéneo por um homogéneo equivalente que traduz o comportamento em média do meio original incorporando os efeitos de microescala e estando sujeito às mesmas condições fronteira.

A homogeneização para meios periódicos assume periodicidade na distribuição da heterogeneidade pelo domínio macroscópico. Uma propriedade física ou geométrica é periódica se cumpre a seguinte condição (3.1). Transições suaves de topologia na microestrutura são permitidas desde que se mantenha uma condição de periodicidade local.

A uniformidade dos campos macroscópicos é outra hipótese da teoria da homogeneização atribuída a cada célula representativa da microestrutura do domínio macroscópico, o que implica que o método não é aplicável a regiões de elevados gradientes (e.g. zonas de fratura).

A teoria da homogeneização tem como premissa a separação de escalas o volume elementar da heterogeneidade tem dimensão característica d muito muito menor que a dimensão característica D do domínio macroscópico:

$$\epsilon = \frac{d}{D} \ll 1 \quad (3.4)$$

A homogeneização é considerada perfeita na situação limite em que $\epsilon \rightarrow 0$.

3.2.1 Problema de elasticidade

O problema de elasticidade é formulado como um problema de valor fronteira que consiste na determinação do campo de deslocamento que satisfaz a seguinte equação:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^\epsilon}{\partial x_i} + b_j = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega^\epsilon, \quad (3.5)$$

em que b_j são as forças volúmicas (fig. 3.1) e σ representa o tensor das tensões.

Esta equação diferencial elíptica traduz a condição de equilíbrio de tensões e está sujeita às condições de fronteira de tração em Γ_t (condição de Neumann) e deslocamento imposto em Γ_u (condição de Dirichlet).

$$\sigma_{ij}^\epsilon n_i = t_j, \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_t \quad (3.6)$$

$$u^\epsilon = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_u \quad (3.7)$$

A lei constitutiva utilizada é a lei de Hooke para elasticidade linear:

$$\sigma_{ij}^\epsilon = E_{ijkl}^\epsilon e_{km}^\epsilon \quad (3.8)$$

com o tensor de deformações linearizado:

$$e_{km}^\epsilon(\mathbf{u}^\epsilon) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k^\epsilon}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m^\epsilon}{\partial x_k} \right) \quad (3.9)$$

O comprimento da periodicidade é representado pelo parâmetro ϵ que é pequeno e as constantes elásticas E_{ijkl}^ϵ são dadas na forma:

$$E_{ijkl}^\epsilon(\mathbf{x}) = E_{ijkl}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \mathbf{y} = \frac{\mathbf{x}}{\epsilon} \quad (3.10)$$

em que \mathbf{x} é a variável espacial macroscópica, enquanto \mathbf{y} é a variável espacial microscópica.

As constantes elásticas obedecem às seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} E_{ijkl} &= E_{jikl} = E_{ijlk} = E_{klij}, \\ \exists \alpha > 0 : E_{ijkl}^\epsilon e_{ij} e_{kl} &= \alpha e_{ij} e_{ij}, \quad \forall e_{ij} = e_{ji}. \end{aligned}$$

O campo de deslocamentos resultante é dado pela expansão assintótica 3.3, onde $u_0(\mathbf{x})$ é o campo de deformação macroscópico que é independente de \mathbf{y} .

A equação de deslocamentos virtuais pode ser construída do seguinte modo:

$$\int_{\Omega^\epsilon} E_{ijkl} \frac{\partial u_k^\epsilon}{\partial x_l} \frac{\partial v_i^\epsilon}{\partial x_j} d\Omega = \int_{\Omega^\epsilon} b_i^\epsilon v_i d\Omega + \int_{\Gamma_t} t_i v_i d\Gamma, \quad \forall \mathbf{v} \in V^\epsilon, \quad (3.11)$$

onde

$$V = \left\{ \mathbf{v} \in (H^1(\Omega^\epsilon))^3 \wedge \mathbf{v}|_{\Gamma_u} = 0 \right\}, \quad (3.12)$$

H^1 é o espaço de Sobolev.

As constantes elásticas homogeneizadas são calculadas através de [14]:

$$E_{ijkl}^H(x) = \frac{1}{|Y|} \int_Y \left[E_{ijkl}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - E_{ijpq}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial \chi_p^{kl}}{\partial y_q} \right] dY, \quad (3.13)$$

aqui χ^{kl} é o campo de deslocamentos microscópico que é dado como a solução do problema:

$$\int_Y \left[E_{ijpq}(x, y) \frac{\partial \chi_p^{kl}}{\partial y_q} \right] \frac{\partial v_i}{\partial y_j} dY = \int_Y E_{ijkl}(x, y) \frac{\partial v_i}{\partial y_j} dY, \quad \forall v \in V_Y. \quad (3.14)$$

As tensões microscópicas σ_{ij} são definidas como:

$$\sigma_{ij} = E_{ijkm}(\rho) \left(\delta_{kr} \delta_{ms} - \frac{\partial \chi_k^{rs}}{\partial y_m} \right) \langle \epsilon_{rs} \rangle, \quad (3.15)$$

em que δ é o delta de Kronecker e $\langle \epsilon_{rs} \rangle$ é o tensor de extensão macroscópico, que é calculado a partir do tensor de tensão macroscópico $\langle \sigma_{pq} \rangle$ através de

$$\langle \epsilon_{rs} \rangle = C_{rspq}^H \langle \sigma_{pq} \rangle, \quad (3.16)$$

em que \mathbf{C}^H é o tensor da *Compliance* homogeneizado que pode ser calculado como o inverso do tensor da rigidez homogeneizado \mathbf{E}^H .

No âmbito desta dissertação, como apenas se aborda a análise e otimização de microestruturas, só é necessário calcular as constantes elásticas homogeneizadas e as tensões microscópicas. Procede-se da seguinte forma:

1. Calcula-se χ^{kl} através de (3.14), que, para o problema tridimensional, equivale a resolver 6 equações.
2. Calcula-se E_{ijkl}^H através de (3.13).
3. Calcula-se as tensões microscópicas através de (3.15).

3.3 Paralelização da Homogeneização

A homogeneização é um processo que exige um elevado custo computacional pois opera sobre matrizes de elevada dimensão e resolve o problema linear $Ax = b$ para 6 casos de carga diferentes dados pela equação (3.14), para um referencial tridimensional. Como a resolução dos casos de carga são independentes entre si, é possível dividir o problema em, no máximo, seis processos diferentes, sendo cada um a resolução de um caso de carga. Como esta fase da homogeneização representa grande parte do seu custo computacional é possível reduzir bastante o tempo de execução através da paralelização.

Na figura 3.3 está representado o fluxograma do código paralelizado da homogeneização. Cada processador executa uma parte igual do código até onde resolve o(s) caso(s) de carga que lhe compete. Posteriormente, os processadores escravos enviam a informação obtida para o processador mestre que correrá o resto da sub-rotina da homogeneização e o que resta do programa.

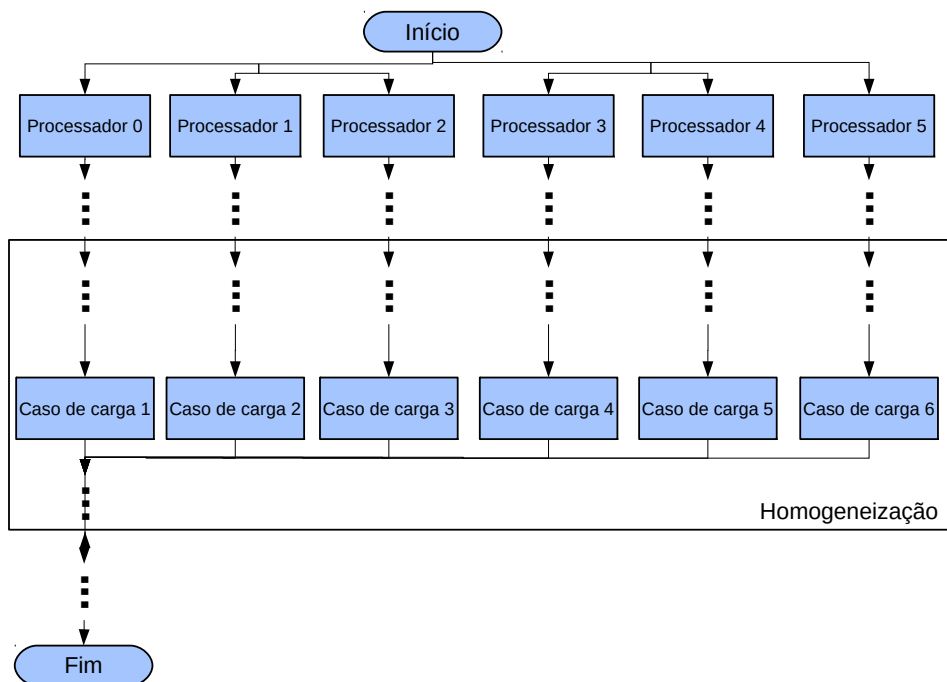


Figura 3.3: Fluxograma do código paralelizado da homogeneização.

Comparou-se os tempos de execução de análises de uma célula unitária com um furo com uma malha não quadrangular com o código em série. Como *benchmark* do desempenho do código paralelizado correu executou-se a análise de 3 malhas da célula unitária, sujeita a uma extensão hidrostática no plano:

$$\epsilon = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & -0.01 & 0 \\ 0 & 0 & -0.01 \end{bmatrix}$$

e foi avaliada a eficiência e o speedup da paralelização.

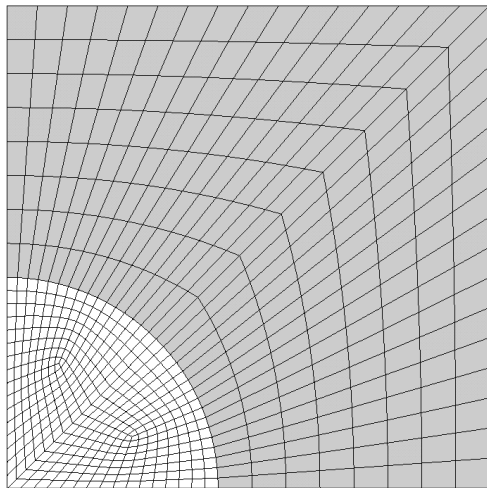
A eficiência é dada a partir dos tempos de execução por:

$$E_n = \frac{T_s}{p T_p}, \quad (3.17)$$

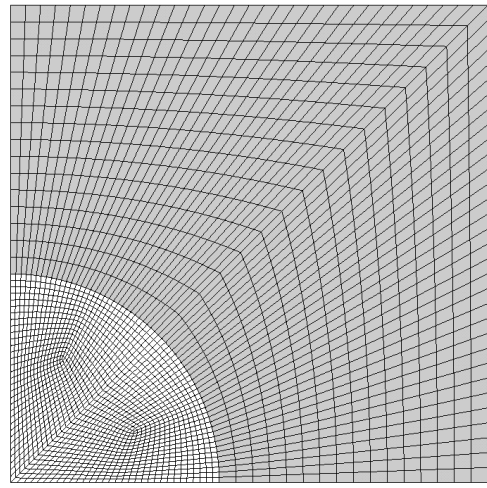
onde p é o número de processadores, T_s é o tempo em série e T_p é o tempo de execução em paralelo com p processadores. O speedup é dado por :

$$S_n = \frac{T_s}{T_p}. \quad (3.18)$$

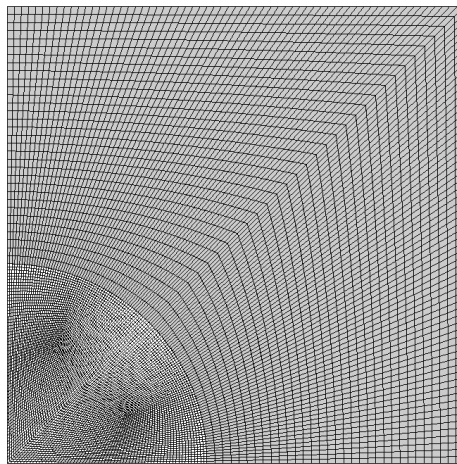
As três malhas em que foram feitos os testes estão representadas na figura 3.4, as zonas a cinzento representam presença de material e as zonas a branco ausência. Durante esta dissertação, refere-se a cada malha com o número de elementos contados junto a cada eixo. Os elementos são hexaedros de 8 nós isoparamétricos. A placa tem comprimento e largura unitárias e um décimo de espessura. Todas as malhas têm 1 elemento na direção da espessura.



(a) Malha 32x32



(b) Malha 64x64



(c) Malha 128x128

Figura 3.4: Representação de um quarto da célula unitária com malha não quadrangular para diferentes níveis de discretização.

PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO

4.1 Formulação do Problema

O problema de otimização com constrangimentos de tensão pode ser definido como a minimização do volume em função da densidade com constrangimento de tensão e elasticidade (ou rigidez). Na equação (4.1) está descrito o problema da minimização do volume, em que V é o volume, ρ é a densidade, σ é a tensão e C e S são a elasticidade (*compliance*) e a rigidez, respetivamente.

$$\begin{aligned} \min_{\rho} \quad & V, \\ \text{s.t.} \quad & C \leq C_{max} \quad \text{ou} \quad S \geq S_{min}, \\ & \frac{\sigma_{eqv}}{\sigma_{adm} \rho_i^p} \leq 1, \quad \rho \in [0, 1]. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Nesta dissertação foram resolvidos 3 problemas de otimização com constrangimento de tensão com cada um dos métodos de relaxamento: dois problemas com diferentes rácios de extensão aplicada no plano e um de distorção (corte) aplicada. A tensão admissível considerada é obtida através de uma redução da tensão máxima obtida através da resolução do problema de otimização (4.2), indicada nas figuras mais adiante.

$$\begin{aligned} \min_{\rho} \quad & C, \quad \text{ou} \\ \max_{\rho} \quad & S, \\ \text{s.t.} \quad & V \geq V_{min}, \quad \rho \in [0, 1]. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Os problemas têm os parâmetros indicados nas tabelas 4.1, 4.2 e 4.3, como penalização foi usado $p = 4$ para o método *SIMP*, para todas as otimizações.

A célula está disposta em relação ao referencial como representado na figura 4.1.

Tabela 4.1: Problema de otimização de uma célula sujeita ao corte com redução de 20% da tensão.

Extensão	$\epsilon = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01 \\ 0 & 0.01 & 0 \end{bmatrix}$
Rigidez mínima	$S_{min} = 3348.5J/m^3$
Tensão equivalente admissível	$\sigma_{adm} = 12.89MPa$
Malha	64x64

Tabela 4.2: Problema de otimização de uma célula sujeita a uma extensão biaxial ($\epsilon_{33}/\epsilon_{22} = 1.5$) imposta com redução de 20% da tensão.

Extensão	$\epsilon = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & -6.67E-3 & 0 \\ 0 & 0 & -0.01 \end{bmatrix}$
Rigidez mínima	$S_{min} = 7687J/m^3$
Tensão equivalente admissível	$\sigma_{adm} = 16.5MPa$
Malha	100x100

Tabela 4.3: Problema de otimização de uma célula sujeita a uma extensão biaxial ($\epsilon_{33}/\epsilon_{22} = 2.0$) imposta com redução de 20% da tensão.

Extensão	$\epsilon = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & -5E-3 & 0 \\ 0 & 0 & -0.01 \end{bmatrix}$
Rigidez mínima	$S_{min} = 6989J/m^3$
Tensão equivalente admissível	$\sigma_{adm} = 15.4MPa$
Malha	100x100

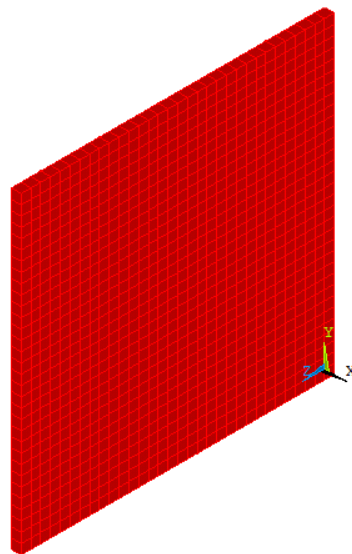


Figura 4.1: Representação da célula e do referencial.

4.2 Implementação em paralelo

O código foi implementado segundo o paradigma do paralelismo de dados, em que cada processador computou as diferenças finitas de um diferente conjunto de elementos. O código corre todas as operações exclusivamente no processador mestre excetuando o cálculo das sensibilidades em que cada processador calcula as sensibilidades dos constrangimentos de tensão em relação à densidade de cada elemento, que depois serão enviadas para o processador mestre que correrá o otimizador.

4.2.1 *qp-approach* e ϵ -relaxation

As implementações em paralelo dos dois métodos de relaxamento *qp-approach* e ϵ -relaxation apenas diferem no cálculo das sensibilidades e no cálculo dos valores dos constrangimentos.

Para o *qp-approach* a derivada do constrangimento de tensão (2.9) em relação à densidade filtrada $\tilde{\rho}$ é da seguinte forma:

$$\frac{\partial g_e}{\partial \tilde{\rho}_k} = \frac{\partial \tilde{\rho}_e}{\partial \tilde{\rho}_k} \frac{-q}{\tilde{\rho}_e^{q+1} \sigma_{adm}} + \frac{\partial \sigma_{eqv}}{\partial \tilde{\rho}_k} \frac{1}{\tilde{\rho}_e^q \sigma_{adm}} \quad (4.3)$$

O filtro das densidades utilizado é definido em [15]. Depois do cálculo da sensibilidade em relação a $\tilde{\rho}$ torna-se necessário o cálculo em relação a ρ através da regra da cadeia para a diferenciação conforme mostrado no fluxograma da figura 4.2 (ver também [16]). O fluxograma mostrado aqui representa o funcionamento do programa quando se usa o *qp-approach*.

Para o ϵ -relaxation, rearranjou-se a equação (2.6) de modo a ficar da forma $g \leq 1$ (requirido pelo otimizador):

$$\frac{\sigma_{eqv}}{\tilde{\rho}^p \sigma_{adm}} - \frac{\epsilon}{\tilde{\rho}} + \epsilon \leq 1 \quad (4.4)$$

As derivadas dos constrangimentos (4.4) são da seguinte forma:

$$\frac{\partial g_e}{\partial \tilde{\rho}_k} = \frac{\partial \sigma_{eqv}}{\partial \tilde{\rho}_k} \times \frac{1}{\tilde{\rho}_e^p \sigma_{adm}} + \frac{\partial \tilde{\rho}_e}{\partial \tilde{\rho}_k} \left(\frac{\epsilon}{\tilde{\rho}_e^2} - \frac{p \sigma_{eqv}}{\tilde{\rho}_e^{p+1} \sigma_{adm}} \right) \quad (4.5)$$

Na figura 4.3 pode-se ver o fluxograma do funcionamento do programa de otimização quando recorre ao ϵ -relaxation.

4.2.2 *Damage approach*

O principal desafio na implementação deste método de relaxamento e agregação é o cálculo das sensibilidades.

O modelo do material é obtido a partir do SIMP (eq. (4.6)).

$$E_{pqrs}(\rho) = \rho^p E_{pqrs}^{(1)} + (1 - \rho^p) E_{pqrs}^{(2)}, \quad p \in \mathbb{N} \quad (4.6)$$

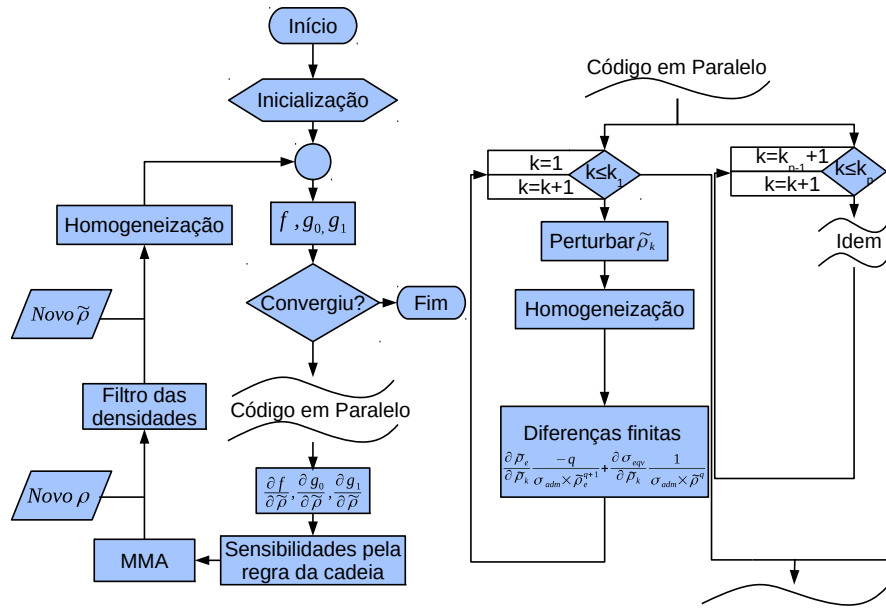


Figura 4.2: Execução do programa de otimização topológica de um material celular recorrendo ao qp -*approach*.

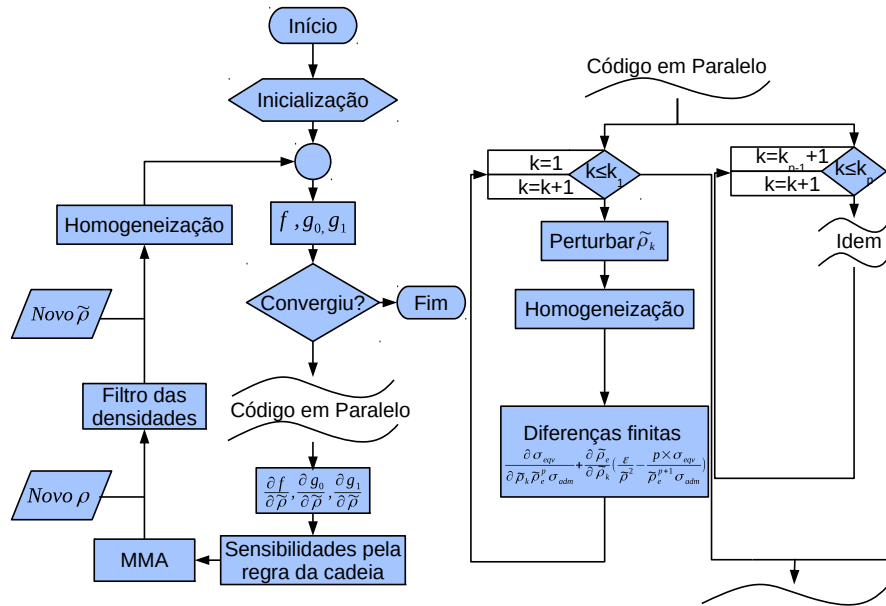


Figura 4.3: Execução do programa de otimização topológica de um material celular recorrendo ao ϵ -*relaxation*.

A matriz de rigidez do material danificado é dada por (4.7).

$$\tilde{E}_{pqrs} = E_{pqrs}(\rho)\beta + (1 - \beta)E_{pqrs}^{(2)} \quad (4.7)$$

em que β é dado por (4.8).

$$\beta(\sigma; \alpha) = \begin{cases} 1, & \text{se } \sigma_{eqv} < \sigma_{adm} \\ e^{-\alpha(\sigma_{eqv}/\sigma_{adm}-1)^2}, & \text{se } \sigma_{eqv} \geq \sigma_{adm} \end{cases} \quad (4.8)$$

Na figura 4.4 estão representadas várias curvas da função de dano β para diferentes valores de α .

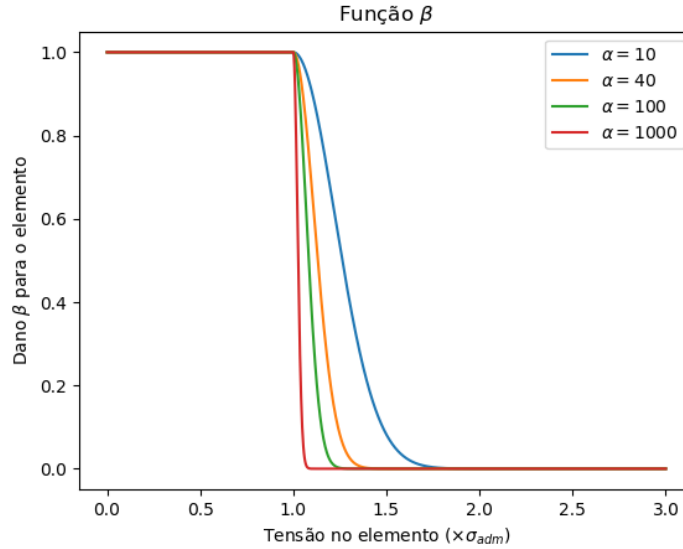


Figura 4.4: Efeito do parâmetro α na curva do dano

Ao contrário do ϵ -relaxation e do qp -approach cujo relaxamento afeta o constringimento de tensão consoante a densidade da célula, não relaxando a tensão nos elementos com densidade $\rho = 1$, o $damage$ -approach relaxa a tensão independentemente da densidade através da função β dada na equação (4.8). Esse facto pode trazer duas dificuldades. Uma dificuldade é a convergência em alguns elementos para densidade nula por causa da tensão nas densidades intermédias ser violada. Outra dificuldade é o cumprimento da tensão admissível nas densidades mais elevadas, caso se opte por aumentar o parâmetro de relaxamento δ , na equação (2.15).

Para resolver estas dificuldades, adicionou-se um parâmetro q à função β , como se pode ver na equação (4.9).

$$\beta(\sigma; \alpha) = \begin{cases} 1, & \text{se } \sigma_{eqv} < \sigma_{adm} \\ e^{-\alpha((\sigma_{eqv} \times \tilde{\rho}^q)/(\sigma_{adm} \times \tilde{\rho}^q) - 1)^2}, & \text{se } \sigma_{eqv} \geq \sigma_{adm} \end{cases} \quad (4.9)$$

O parâmetro q permite que o dano tenha um efeito semelhante aos constringimentos de tensão no qp -approach, penalizando mais severamente violações de tensão em elementos com valores mais altos de densidade. Na resolução dos problemas de otimização de materiais com microestrutura formulados nesta dissertação, recorre-se exclusivamente ao β em (4.9). Na figura 4.5 estão representadas curvas da função de dano para diferentes

valores de ρ com $\alpha = 100$ e $q = 3.0$, o fator de penalização SIMP usado foi $p = 4$. Pode-se observar que a modificação introduzida provoca a translação das curvas para a direita tanto mais quanto maior for $q - p$ aliviando a penalização para densidades mais baixas.

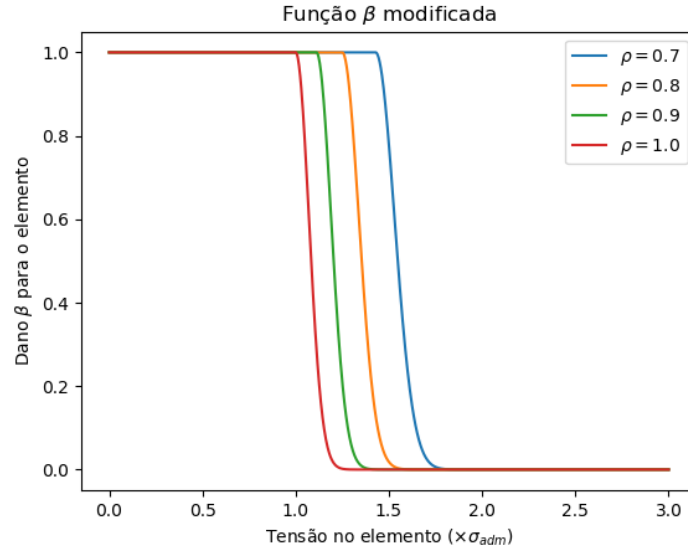


Figura 4.5: Curvas de dano para diferentes valores da densidade (ρ).

Introduzindo (4.6) em (4.7) obtém-se:

$$\tilde{E} = \beta \rho^p E_{pqrs}^{(1)} + (1 - \beta \rho^p) E_{pqrs}^{(2)} \quad (4.10)$$

A derivada do constrangimento (2.15) em função da densidade de um elemento é dada por:

$$\frac{\partial g}{\partial \tilde{\rho}_i} = \frac{1}{C} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \tilde{\rho}_i} - \frac{\tilde{C}}{C^2} \frac{\partial C}{\partial \tilde{\rho}_i} \quad (4.11)$$

Na equação (4.11), optou-se por calcular a derivada da *compliance* do modelo da- nificado por diferenças finitas. Na figura 4.6 está esquematizado o funcionamento do programa de otimização.

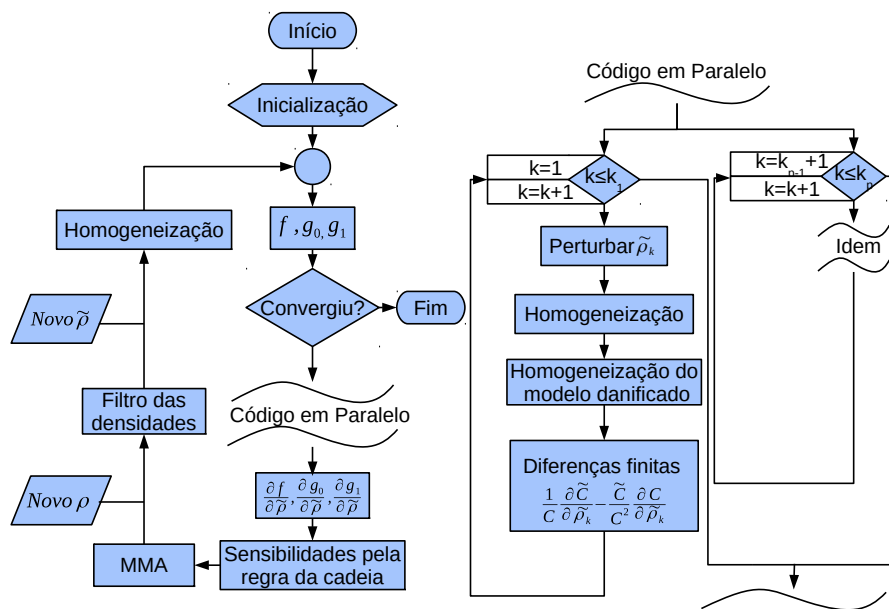


Figura 4.6: Execução do programa de otimização topológica de um material celular com o constrangimento de tensão aplicado pelo *Damage Approach*.

CAPÍTULO



5

RESULTADOS

Neste capítulo são apresentados os resultados dos vários problemas resolvidos na dissertação.

Na primeira secção são apresentados os resultados do estudo de uma treliça (Kirsh) e resolvido graficamente o problema da otimização do peso da estrutura com base na variável de área ou de densidade aplicando constrangimentos de tensão e usando métodos de relaxamento. Esta secção serve como exemplo para os problemas de otimização mais adiante.

Na segunda secção, faz-se um pequeno estudo acerca dos parâmetros que uma célula deve ter para que obedeça ao constrangimento de volume e seja apropriada para uma boa convergência da solução.

Na terceira secção, realiza-se um estudo acerca da eficiência da paralelização do software da homogeneização.

Na quarta secção, apresenta-se o resultado da qualidade das diferenças finitas do constrangimento do modelo danificado do *damage approach*.

Na última secção são apresentados os resultados obtidos a partir da resolução dos vários problemas de otimização formulados no capítulo 4.1.

5.1 Otimização de uma treliça

Neste capítulo são aplicados os vários métodos de relaxamento dos constrangimentos de tensão a um problema simples, uma treliça com 3 barras (figura 5.1). O objetivo deste capítulo é mostrar o efeito dos diferentes relaxamentos no espaço de soluções admissíveis através da resolução gráfica. A dedução das expressões pode ser verificada no apêndice A.

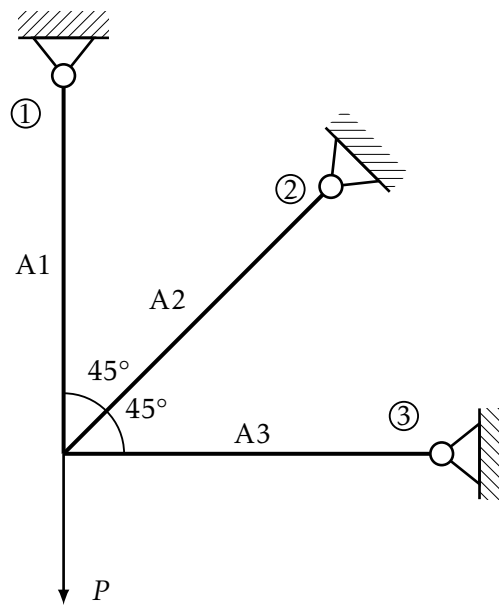


Figura 5.1: Problema de 3 barras introduzido por Kirsh em [17].

5.1.1 Otimização com variável de área

Nesta secção irá proceder-se à otimização do peso da estrutura a partir das áreas das barras. Os parâmetros do problema são:

Tabela 5.1: Parâmetros do problema de otimização com variável de área

	Parâmetros
Comprimentos	$L_i = L = 1$ para $i = 1, 2, 3$
Módulos de Young	$E_i = E = 1$ para $i = 1, 2, 3$
Variáveis de projeto	$A_1, A_2 = A_3$
Densidade	$\rho_1 = 4, \rho_2 = \rho_3 = 0.5$
Tensão admissível	$\sigma_{lim} = 20$
massa	$m = 4A_1 + A_2$

A solução ótima do problema localiza-se na região degenerada do problema o que impede os algoritmos de otimização de conseguir alcançar o ótimo global como se pode observar na figura 5.2.

5.1.1.1 Formulação do Problema de otimização

O problema de otimizações pode ser formulado da seguinte forma:

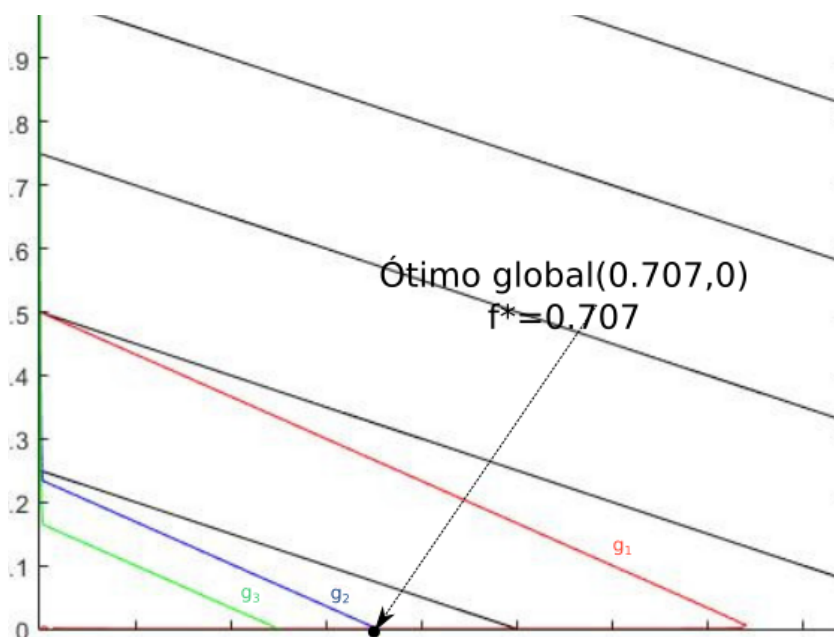


Figura 5.2: Representação gráfica do problema de otimização.

$$\begin{aligned}
 \min_{A_1, A_2} \quad & \rho_1 A_1 L_1 + 2\rho_2 A_2 L_2 = 4A_1 + A_2 \\
 \text{s.t.} \quad & -20A_1 \leq \frac{30A_1}{3A_1 + A_2} \leq 20A_1 \\
 & -20A_2 \leq \frac{10\sqrt{2}A_2}{3A_1 + A_2} \leq 20A_2 \\
 & -20A_2 \leq -\frac{10A_2}{3A_1 + A_2} \leq 20A_2
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

5.1.1.2 ϵ -relaxation

Aplicando o método ϵ -relaxation o problema terá a seguinte forma.

$$\begin{aligned}
 \min_{A_1, A_2} \quad & \rho_1 A_1 L_1 + 2\rho_2 A_2 L_2 = 4A_1 + A_2 \\
 \text{s.t.} \quad & A_1 \left(\left| \frac{\frac{30}{3A_1 + A_2}}{20} \right| - 1 \right) - \epsilon \leq 0 \\
 & A_2 \left(\left| \frac{\frac{10\sqrt{2}}{3A_1 + A_2}}{20} \right| - 1 \right) - \epsilon \leq 0 \\
 & A_2 \left(\left| \frac{-\frac{10}{3A_1 + A_2}}{20} \right| - 1 \right) - \epsilon \leq 0
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Nos gráficos da figura 5.3 estão representados os domínios admissíveis para um parâmetro de relaxamento $\epsilon = 0.01$ e $\epsilon = 0.001$.

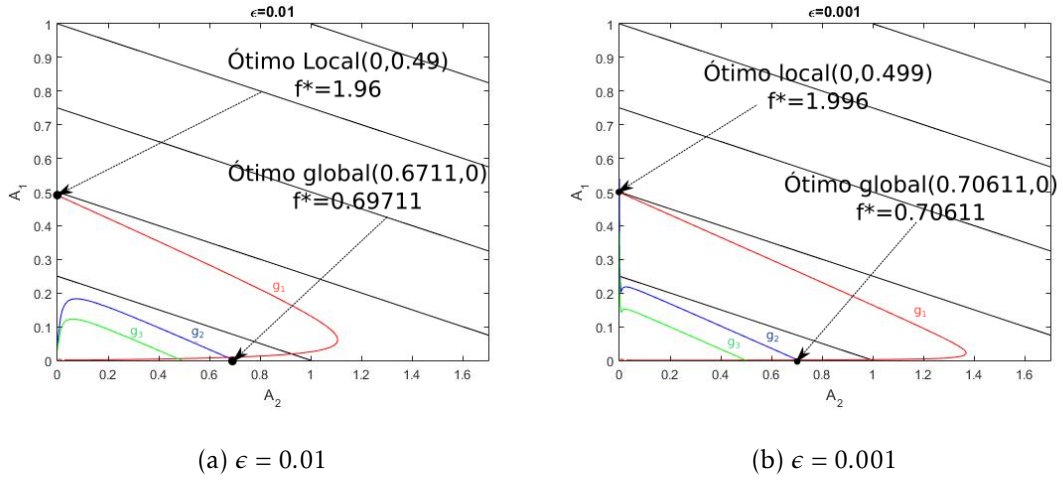


Figura 5.3: Representação gráfica do problema de otimização com variável de área com o método de relaxamento ϵ

5.1.1.3 Damage approach

Usando o *damage approach*, o problema é reformulado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \min_{A_1, A_2} \quad & \rho_1 A_1 L_1 + 2\rho_2 A_2 L_2 = 4A_1 + A_2 \\ \text{s.t.} \quad & \tilde{g} = \frac{\tilde{C}}{C} - 1 \leq \delta \end{aligned} \quad (5.3)$$

em que

$$\tilde{C} = \frac{100(2\tilde{E}_3 + \tilde{E}_2)}{(2\tilde{E}_1\tilde{E}_3 + \tilde{E}_1\tilde{E}_2)A_1 + \tilde{E}_2\tilde{E}_3A_2} \quad (5.4)$$

Em que os módulos de Young do modelo danificado (\tilde{E}_i) são obtidos para cada barra através da equação (2.13), e C:

$$C = \frac{300}{3A_1 + A_2} \quad (5.5)$$

Na figura 5.4 está representado o domínio para três combinações dos parâmetros α e δ .

5.1.2 Otimização com variável de densidade

Nesta secção procede-se à otimização do peso da estrutura a partir das densidades das barras. Os parâmetros do problema são:

5.1. OTIMIZAÇÃO DE UMA TRELIÇA

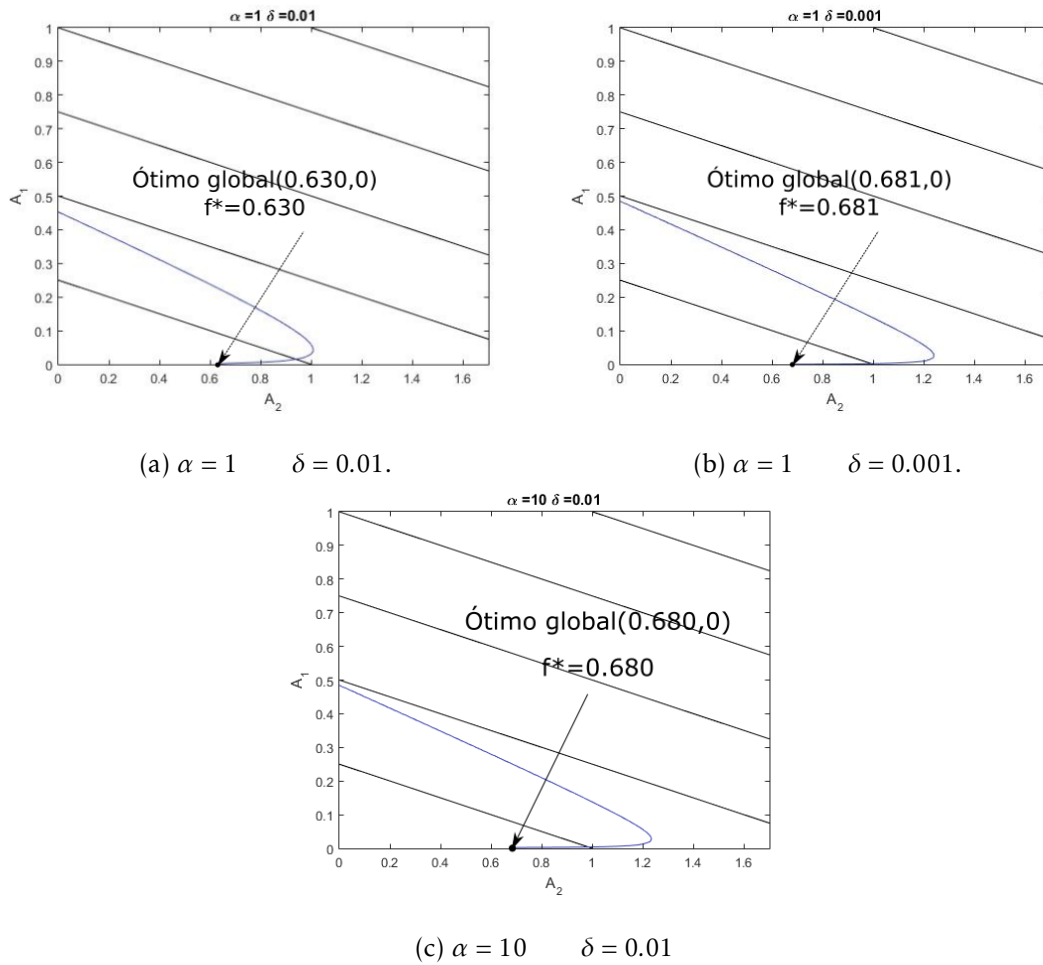


Figura 5.4: Representação gráfica do problema de otimização com variável de área com o método de relaxamento *damage approach*.

Tabela 5.2: Parâmetros do problema de otimização com variável de densidade

	Parâmetros
Comprimentos	$L_i = L = 1$ para $i = 1, 2, 3$
Módulos de Young	$E_i = E = 1$ para $i = 1, 2, 3$
Variáveis de projeto	$\rho_1, \rho_2 = \rho_3$
Áreas	$A_1 = 7.8, A_2 = A_3 = 1.6$
Tensão admissível	$\sigma_{lim} = 20$
Massa	$m = \rho_1 A_1 + 2\rho_2 A_2$
SIMP	$p = 3$

5.1.2.1 Formulação do Problema de otimização

O problema de otimização pode ser formulado da seguinte forma:

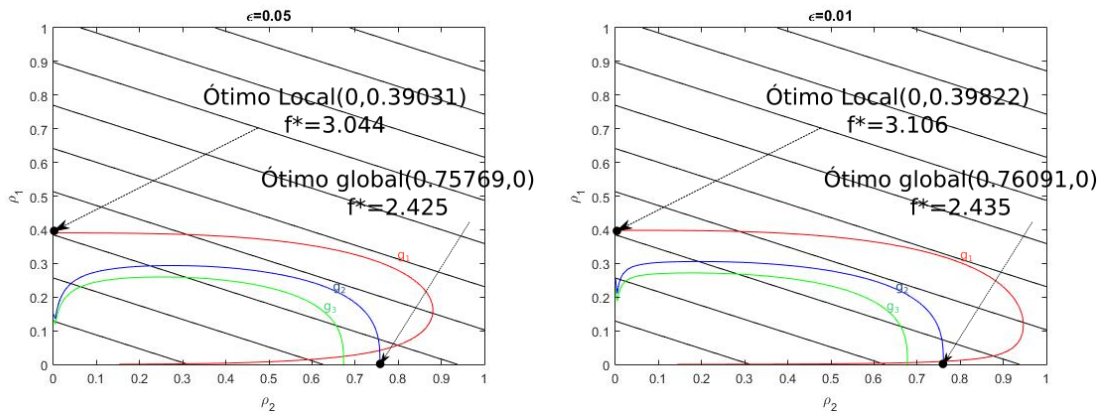
$$\begin{aligned}
 \min_{\rho_1, \rho_2} \quad & \rho_1 A_1 L_1 + 2\rho_2 A_2 L_2 = 7.8\rho_1 + 3.2\rho_2 \\
 \text{s.t.} \quad & -20A_1 \leq \frac{30A_1\rho_1^p}{3A_1\rho_1^p + A_2\rho_2^p} \leq 20A_1 \\
 & -20A_2 \leq \frac{10\sqrt{2}A_2\rho_2^p}{3A_1\rho_1^p + A_2\rho_2^p} \leq 20A_2 \\
 & -20A_2 \leq -\frac{10A_2\rho_2^p}{3A_1\rho_1^p + A_2\rho_2^p} \leq 20A_2
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

5.1.2.2 ϵ -relaxation

Aplicando o método ϵ -relaxation o problema fica da forma:

$$\begin{aligned}
 \min_{\rho_1, \rho_2} \quad & \rho_1 A_1 L_1 + 2\rho_2 A_2 L_2 = \rho_1 A_1 + 2A_2 \rho_2 \\
 \text{s.t.} \quad & \tilde{g}_1^\epsilon = \rho_1 \left(\left| \frac{\frac{30}{3A_1\rho_1^p + A_2\rho_2^p}}{20} \right| - 1 \right) - \epsilon(1 - \rho_1) \leq 0 \\
 & \tilde{g}_2^\epsilon = \rho_2 \left(\left| \frac{\frac{10\sqrt{2}}{3A_1\rho_1^p + A_2\rho_2^p}}{20} \right| - 1 \right) - \epsilon(1 - \rho_2) \leq 0 \\
 & \tilde{g}_3^\epsilon = \rho_2 \left(\left| \frac{-\frac{10}{3A_1\rho_1^p + A_2\rho_2^p}}{20} \right| - 1 \right) - \epsilon(1 - \rho_2) \leq 0
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

Na figura 5.5 estão representados o domínio de projeto para $\epsilon = 0.05$ e $\epsilon = 0.01$.



(a) $\epsilon = 0.05$.

(b) $\epsilon = 0.01$.

Figura 5.5: Representação gráfica do problema de otimização com variável de densidade com o método de relaxamento ϵ .

5.1.2.3 *qp-approach*

Aplicando o *qp-approach*, o problema fica da forma:

$$\begin{aligned}
 \min_{\rho_1, \rho_2} \quad & \rho_1 A_1 L_1 + 2\rho_2 A_2 L_2 = \rho_1 A_1 + 2A_2 \rho_2 \\
 \text{s.t.} \quad & \tilde{g}_1 = \rho_1^{-q} \left| \frac{30\rho_1^p}{3A_1\rho_1^p + A_2\rho_2^p} \right| - 1 \leq 0 \\
 & \tilde{g}_2 = \rho_2^{-q} \left| \frac{10\sqrt{2}\rho_2^p}{3A_1\rho_1^p + A_2\rho_2^p} \right| - 1 \leq 0 \\
 & \tilde{g}_3 = \rho_2^{-q} \left| \frac{10\rho_2^p}{3A_1\rho_1^p + A_2\rho_2^p} \right| - 1 \leq 0
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

Nas figuras 5.6 estão representados os domínios do problema para

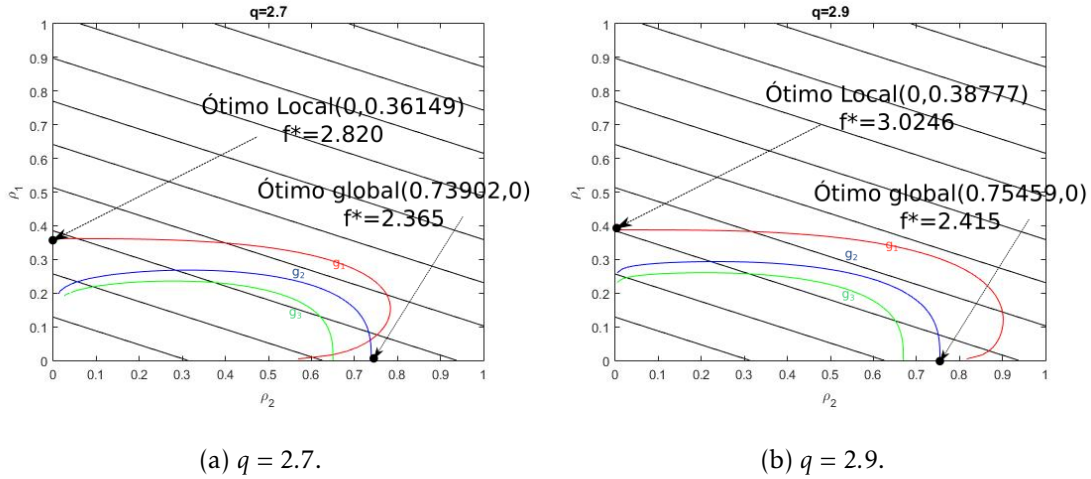


Figura 5.6: Representação gráfica do problema de otimização com variável de densidade com o método de relaxamento *qp-approach*.

 5.1.2.4 *Damage approach*

Aplicando o *damage approach* obtém-se a seguinte formulação:

$$\begin{aligned}
 \min_{\rho_1, \rho_2} \quad & \rho_1 A_1 L_1 + 2\rho_2 A_2 L_2 = \rho A_1 + 2\rho A_2 \\
 \text{s.t.} \quad & \tilde{g} = \frac{\tilde{C}}{C} - 1 \leq \delta
 \end{aligned} \tag{5.9}$$

em que \tilde{C} e C são dados por:

$$\tilde{C} = P \times \tilde{\delta} = \frac{100(2\tilde{E}_3 + \tilde{E}_2)}{(2\tilde{E}_1\tilde{E}_3 + \tilde{E}_1\tilde{E}_2)A_1\rho_1^p + \tilde{E}_2\tilde{E}_3A_2\rho_2^p} \tag{5.10}$$

$$C = P \times \delta = \frac{300}{3A_1\rho_1^p + A_2\rho_2^p} \tag{5.11}$$

Para a otimização de densidades as tensões $|\sigma|$ usadas para calcular o parâmetro beta em (2.14) são as tensões microscópicas. Logo as tensões são dadas por:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{30}{3A_1\rho_1^p + A_2\rho_2^p} \\ \sigma_2 &= \frac{10\sqrt{2}}{3A_1\rho_1^p + A_2\rho_2^p} \\ \sigma_3 &= -\frac{10}{3A_1\rho_1^p + A_2\rho_2^p}\end{aligned}$$

Na figura 5.7 estão representados os domínios do problema para vários parâmetros. Pode-se observar como a multiplicação de α por um escalar k tem um efeito semelhante ao de dividir δ por esse mesmo escalar.

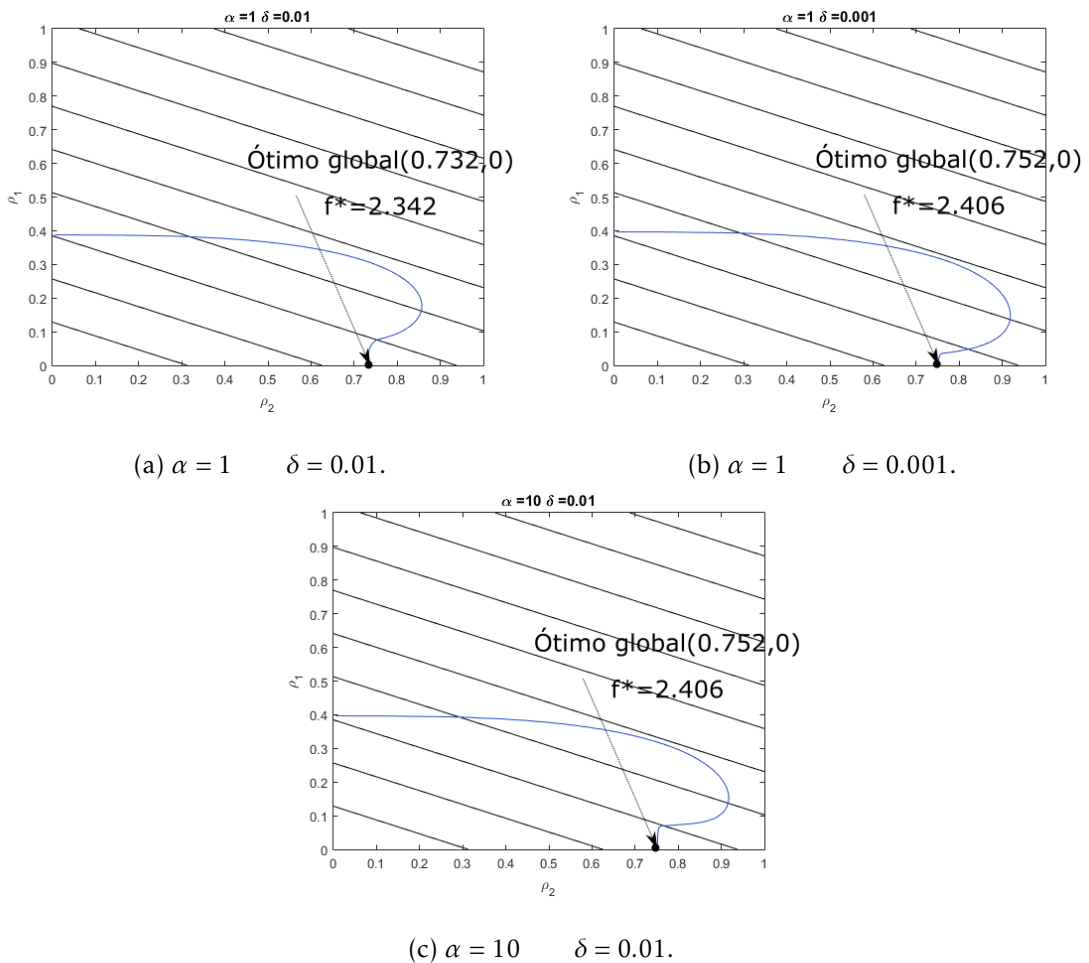


Figura 5.7: Representação gráfica do problema de otimização com variável de densidade com o método de relaxamento *damage approach*.

5.2 Parâmetros do design inicial de uma célula com 5 furos

A solução final de uma otimização com variáveis de projeto num domínio não convexo é influenciada pela escolha do design inicial devido à possibilidade do otimizador convergir para um ótimo local. A solução ótima para um estado de tensão de corte é uma célula de geometria aproximada à esquematizada na figura 5.8.

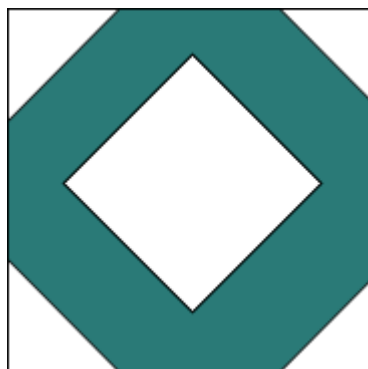


Figura 5.8: Esquema de uma célula.

Um design inicial que se aproxima a esse ótimo global é a célula com um furo circular no centro e quatro furos nos cantos como se pode ver em 5.9. R é o raio das áreas circulares, ρ_1 é a densidade das mesmas e ρ_2 é a densidade da restante célula.

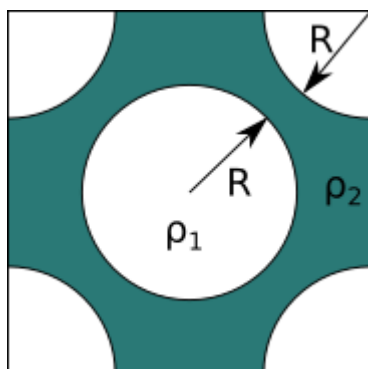


Figura 5.9: Esquema de uma célula com um furo central e um furo em cada canto.

Para um certo constrangimento de fração volúmica é prudente escolher um *design* inicial que obedeça a esse constrangimento, para manter a solução dentro do domínio de soluções admissíveis. Também deverá haver uma certa diferença entre as densidades ρ_1 e ρ_2 para que o algoritmo não convirja para uma solução de densidade uniforme. Para isso escreveu-se um código em MATLAB que produz o gráfico dos pontos (ρ_1, raio) para os quais existe um $\rho_2 \in [0, 1] \wedge |\rho_2 - \rho_1| < \delta$ para os quais a célula obedece ao constrangimento de volume.

Para um $\delta = 0.7$ numa célula com uma malha de 32x32 elementos obtiveram-se os gráficos na figura 5.10. As variáveis R e $\rho = \rho_1$ nos gráficos correspondem às variáveis

na figura 5.9. Como se pretende que as áreas a branco representem furos, interessa-nos apenas ver nos gráficos os valores em que $\rho_1 < \rho_2$, que correspondem aos pontos à esquerda nos gráficos.

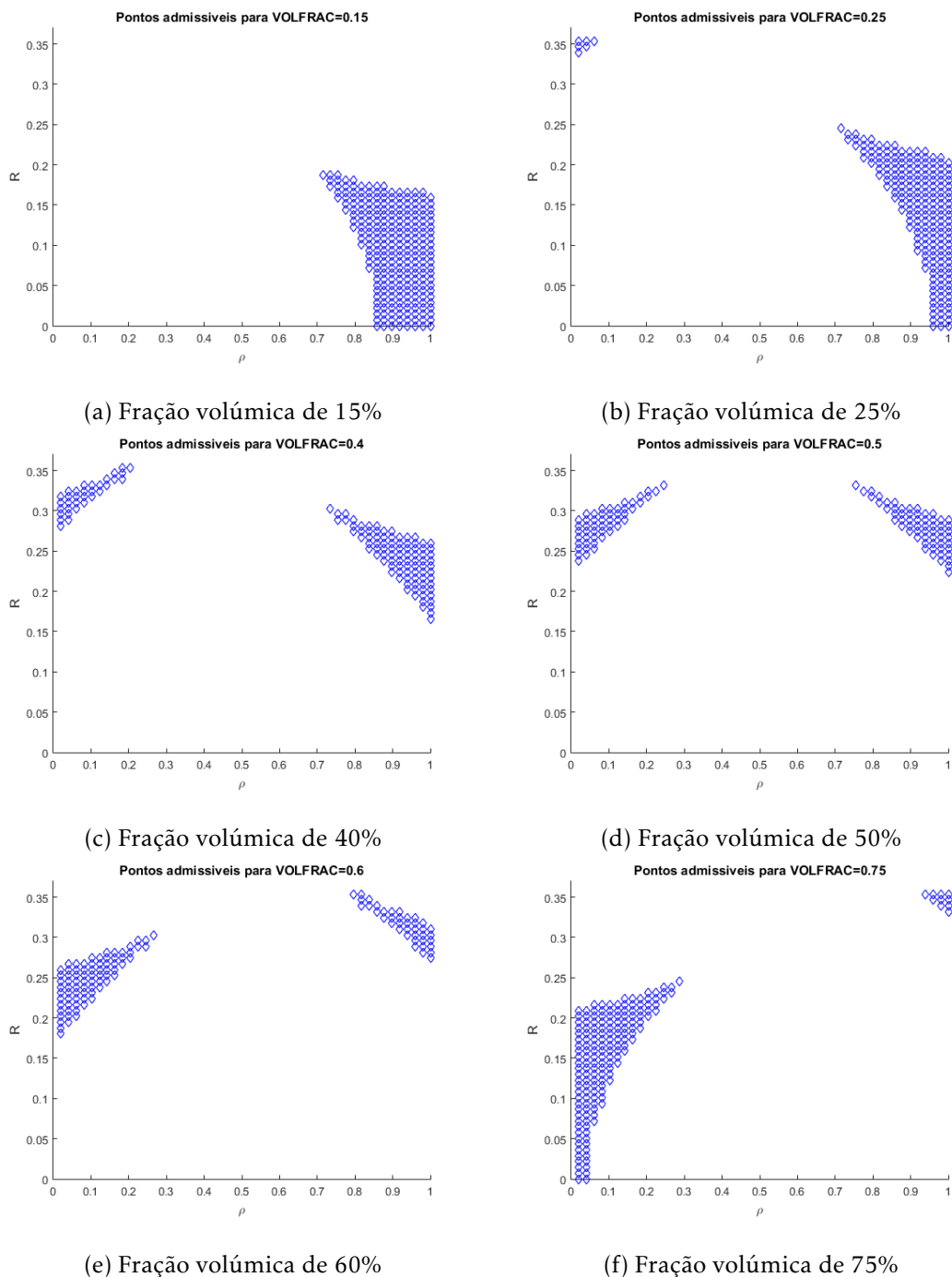


Figura 5.10: Parâmetros admissíveis de R e ρ_1 para uma célula com um furo central e um furo em cada canto.

5.3 Paralelização da homogeneização

As análises na secção 3.3 foram executadas numa máquina com um processador Intel Core i7-5820 3.30GHz com 6 cores e 32 GB de memória RAM, usando 1,2,3 e 6 processadores. Nas figuras 5.11 e 5.12 estão representados os gráficos de *speedup* e de eficiência, respetivamente, para as três malhas. Os valores de *speedup* e eficiência apenas têm significado para os números de processadores usados (1,2,3 e 6) pois para 4 e 5, não é possível ter uma distribuição equitativa do cálculo, o que provoca *bottlenecking*. Por outras palavras, como haverá processadores com mais casos de carga para resolver que os outros, os processadores com um caso de carga quando terminarem o cálculo que lhes compete terão de esperar que os processadores com mais casos de carga terminem.

Pode-se observar que a eficiência é próxima de 80% usando 6 processadores para todas as malhas e as curvas de *speedup* próximas da curva ideal, com um *speedup* na ordem dos 450% usando 6 processadores. A curva de *speedup* melhora para malhas mais refinadas, sendo mais evidente a melhoria quando se passa da malha 64x64 para a malha 128x128.

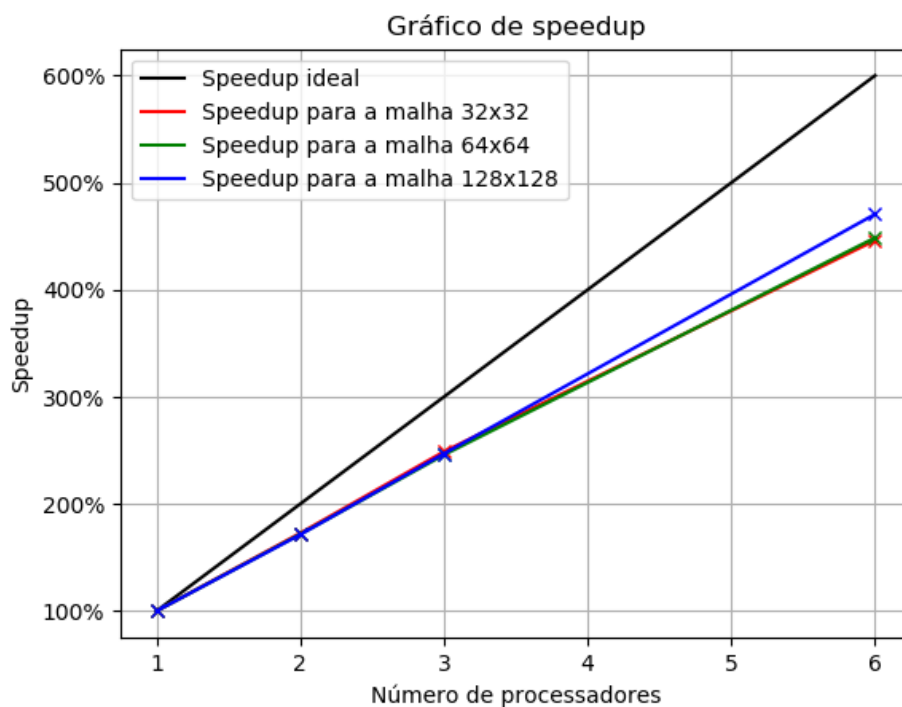


Figura 5.11: *Speedup* obtido para a paralelização da homogeneização.

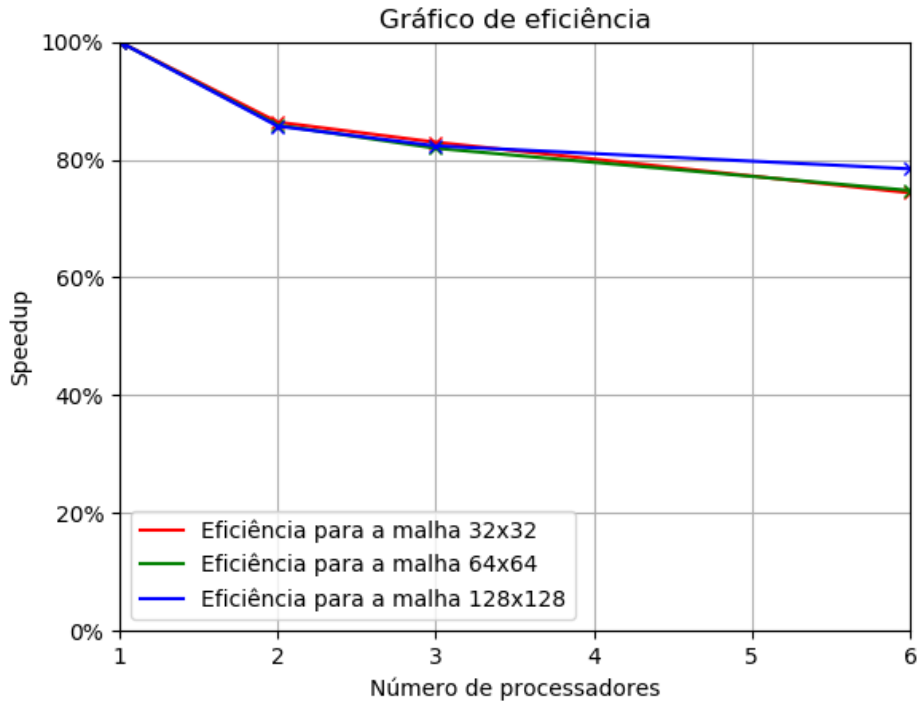


Figura 5.12: Eficiência da paralelização da homogeneização.

5.4 Estudo da qualidade das diferenças finitas

Para estudar a qualidade das diferenças finitas para o cálculo da derivada do rácio das *compliances* do *damage approach* (2.15) foram calculados vários valores da derivada do constrangimento para diferentes perturbações, em todos utilizou-se $\alpha = 40$.

A diferença finita foi considerada aqui regressiva e é calculada através da seguinte expressão:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(\dots, x_a, \dots) - f(\dots, x_a(1-p), \dots)}{x_a \times p} \quad (5.12)$$

onde x_a é o valor de x no ponto onde se pretende calcular a derivada e p é a perturbação. Caso $x_a(1-p)$ estivesse fora do limite inferior de x , a derivada seria progressiva:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(\dots, x_a(1+p), \dots) - f(\dots, x_a, \dots)}{x_a \times p} \quad (5.13)$$

Na figura 5.13 está representado o gráfico do valor de (4.11) calculado por diferenças finitas para 5 valores diferentes de p , pode-se observar como em alguns elementos os valores diferem consideravelmente, isto deve-se ao facto da função de penalização (2.14) ser pouco suave, o que irá afetar a função do constrangimento e tornar o cálculo da derivada por diferenças finitas mais sensível a variações do fator de perturbação p .

Na figura 5.14 estão representados os diversos valores de (4.11) calculados por diferenças finitas para 5 valores diferentes de p próximos de 1×10^{-5} . Pode-se verificar que

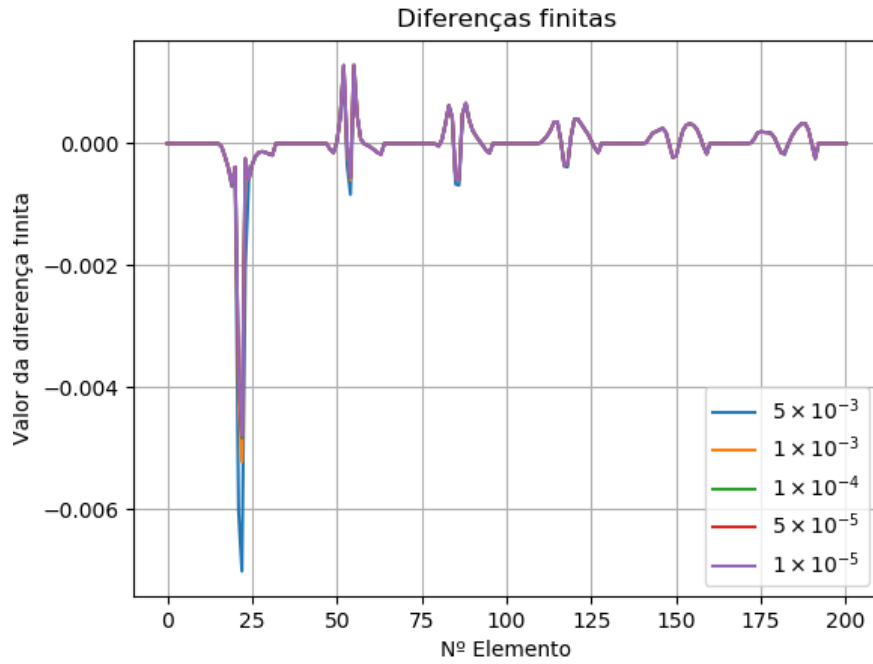


Figura 5.13: Diferenças finitas para $p = 5 \times 10^{-3}, 1 \times 10^{-3}, 1 \times 10^{-4}, 5 \times 10^{-5}, 1 \times 10^{-5}$.

não existe grande variação com p . Daqui conclui-se que uma perturbação de 10^{-5} , que será usada mais à frente, é a mais adequada.

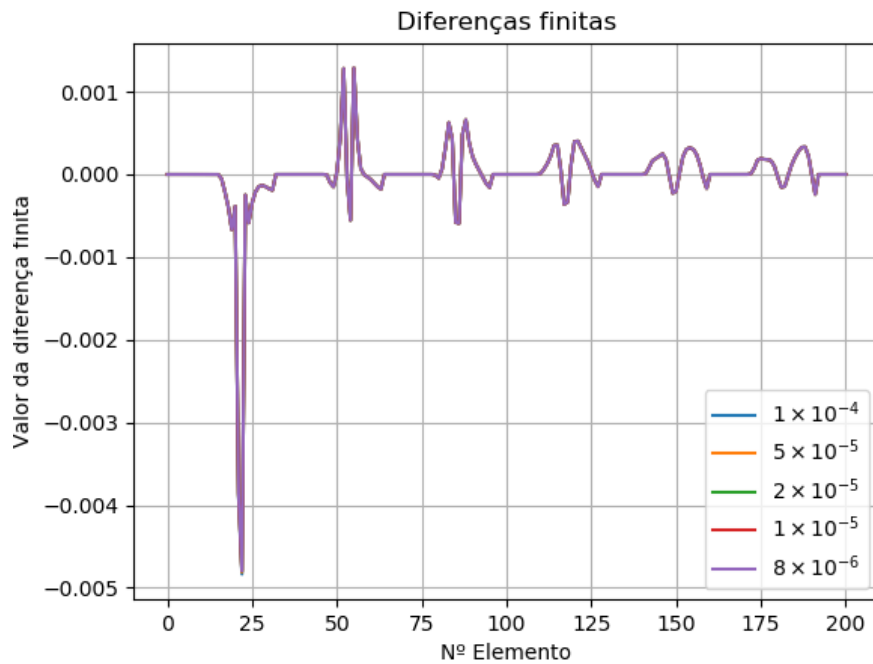


Figura 5.14: Diferenças finitas para $p = 1 \times 10^{-4}, 5 \times 10^{-5}, 2 \times 10^{-5}, 1 \times 10^{-5}, 8 \times 10^{-6}$.

5.5 Otimização de topologia da célula unitária

Os problemas de otimização formulados em 4.1 foram resolvidos recorrendo-se a cada um dos três métodos de relaxamento. Nesta secção, é feita a comparação dos resultados obtidos tanto quanto à convergência como quanto às geometrias obtidas.

Para as otimizações usando cada método, foram usados os parâmetros de relaxamento apresentados na tabela 5.3.

Tabela 5.3: Parâmetros de relaxamento

	<i>qp-approach</i>	<i>ε-relaxation</i>	<i>damage approach</i>
Problema 4.1	$q = 3.0$	$\epsilon = 0.25$	$\alpha = 40 \delta = 0.0001 q = 3.5$
Problema 4.2	$q = 3.0$	$\epsilon = 1.0$	$\alpha = 40 \delta = 0.0001 q = 3.0$
Problema 4.3	$q = 3.0$	$\epsilon = 1.0$	$\alpha = 40 \delta = 0.0001 q = 3.0$

Na figuras 5.15, 5.16 e 5.17 estão representadas as soluções do problema 4.1 usando os métodos de relaxamento *qp-approach*, *ε-relaxation* e *damage approach*, respetivamente. Pode-se observar que as soluções 5.15 e 5.16 são semelhantes e que a solução 5.17 apresenta uma célula maior e uns rasgos maiores quando comparada aos outros, e também uma maior tensão máxima e uma menor tensão mínima.

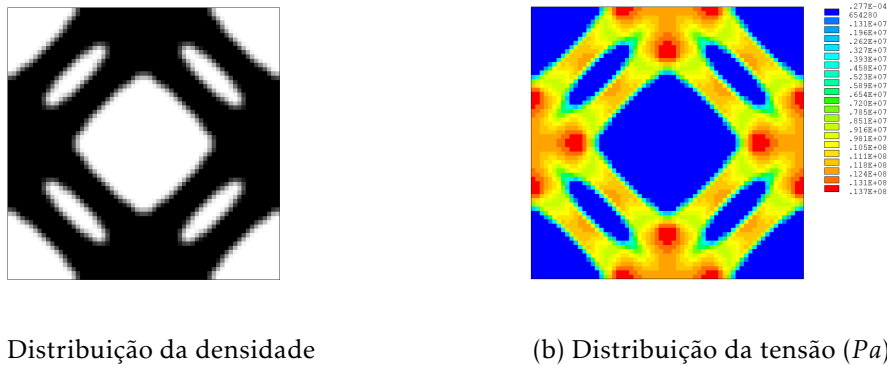


Figura 5.15: Solução do problema 4.1 recorrendo ao *qp-approach*.

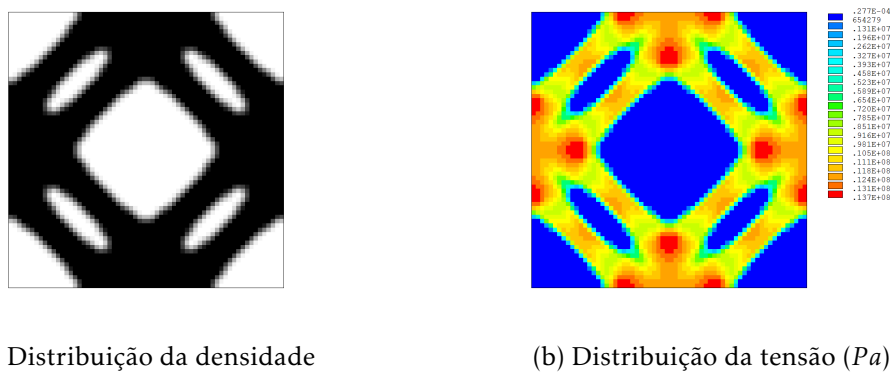
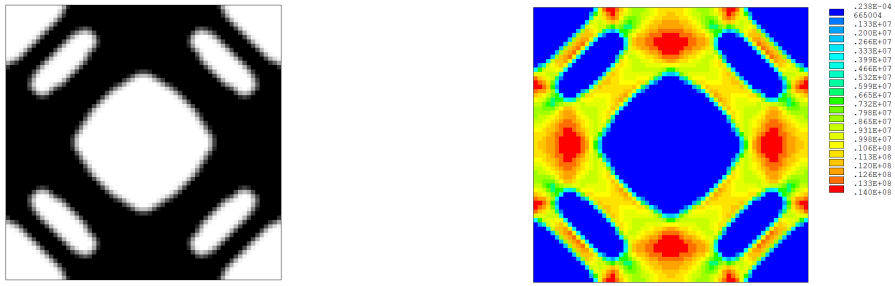


Figura 5.16: Solução do problema 4.1 recorrendo ao *ε-relaxation*.

5.5. OTIMIZAÇÃO DE TOPOLOGIA DA CÉLULA UNITÁRIA

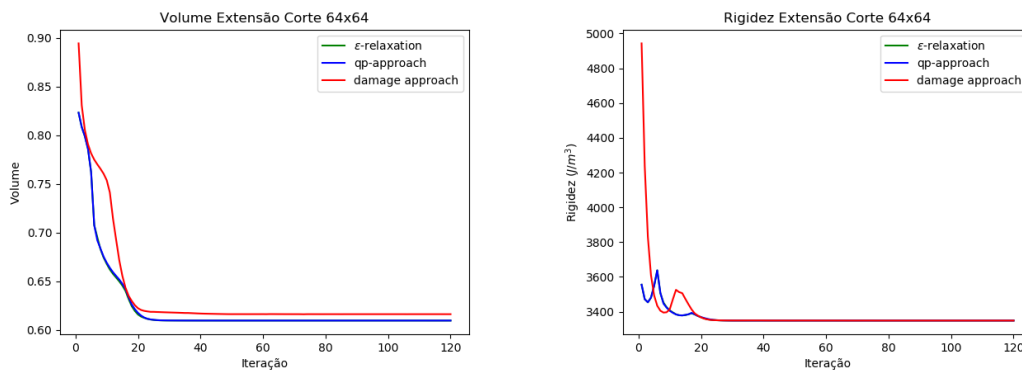


(a) Distribuição da densidade

(b) Distribuição da tensão (Pa)

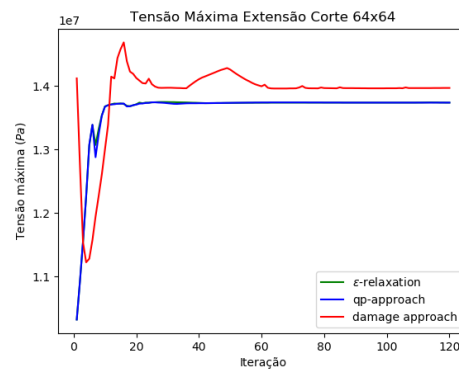
Figura 5.17: Solução do problema 4.1 recorrendo ao *damage approach*.

Na figura 5.18.(a), está representado o gráfico dos valores do volume ao longo das várias iterações, pode-se verificar que a diferença entre a curva do ϵ relaxation é quase indistinta da curva do *qp-approach*. O volume final é maior para o caso do *damage approach*. Nas figuras 5.18.(b) e 5.18.(c) estão representados os gráficos de convergência da rigidez e da tensão máxima, aqui verifica-se os níveis mais elevados de tensão máxima para o *damage approach*.



(a) Volume

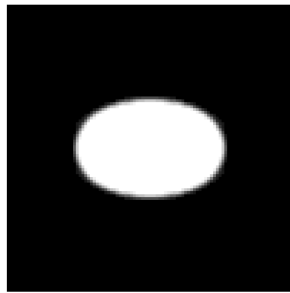
(b) Rigidez



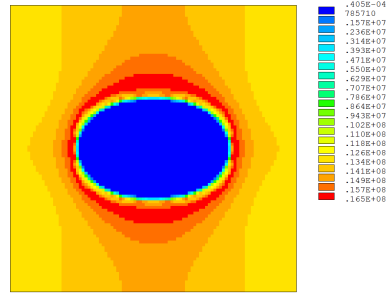
(c) Tensão máxima

Figura 5.18: Gráficos de convergência para o problema de otimização 4.1.

Nas figuras 5.19, 5.20 e 5.21 estão representadas as soluções da otimização 4.2, para o *qp-approach*, *ε-relaxation* e *damage approach*, respetivamente. As soluções 5.19 e 5.20 são idênticas, 5.21 tem um rasgo ligeiramente mais estreito na horizontal e com a tensão máxima a violar ligeiramente (menos de 1%) a tensão admissível considerada.

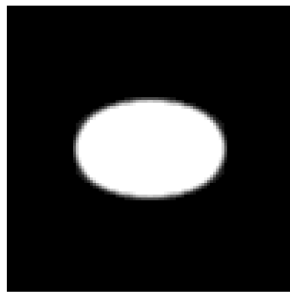


(a) Distribuição da densidade

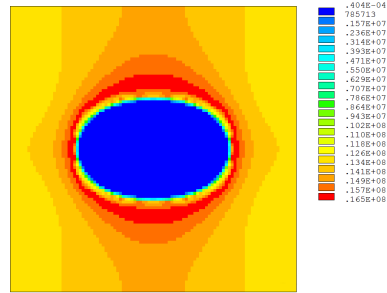


(b) Distribuição da tensão (Pa)

Figura 5.19: Solução do problema 4.2 recorrendo ao *qp-approach*.

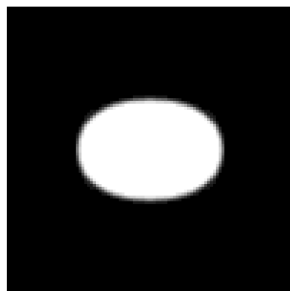


(a) Distribuição da densidade

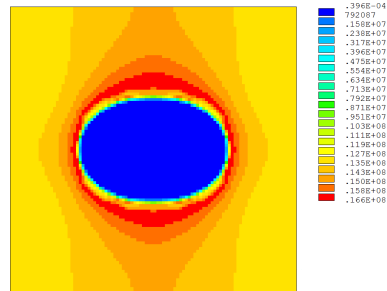


(b) Distribuição da tensão (Pa)

Figura 5.20: Solução do problema 4.2 recorrendo ao *ε-approach*.



(a) Distribuição da densidade



(b) Distribuição da tensão (Pa)

Figura 5.21: Solução do problema 4.2 recorrendo ao *damage-approach*.

Na figura 5.22 estão representados os gráficos do volume, da rigidez e da tensão máxima. As curvas para o *ε-relaxation* e para o *qp-approach* são bastante idênticas. O volume final obtido com o *damage approach* foi inferior ao obtido para os outros métodos

5.5. OTIMIZAÇÃO DE TOPOLOGIA DA CÉLULA UNITÁRIA

e o constrangimento de rigidez não foi ativado, o que indica que o constrangimento *damage* tenha impedido que isso acontecesse.

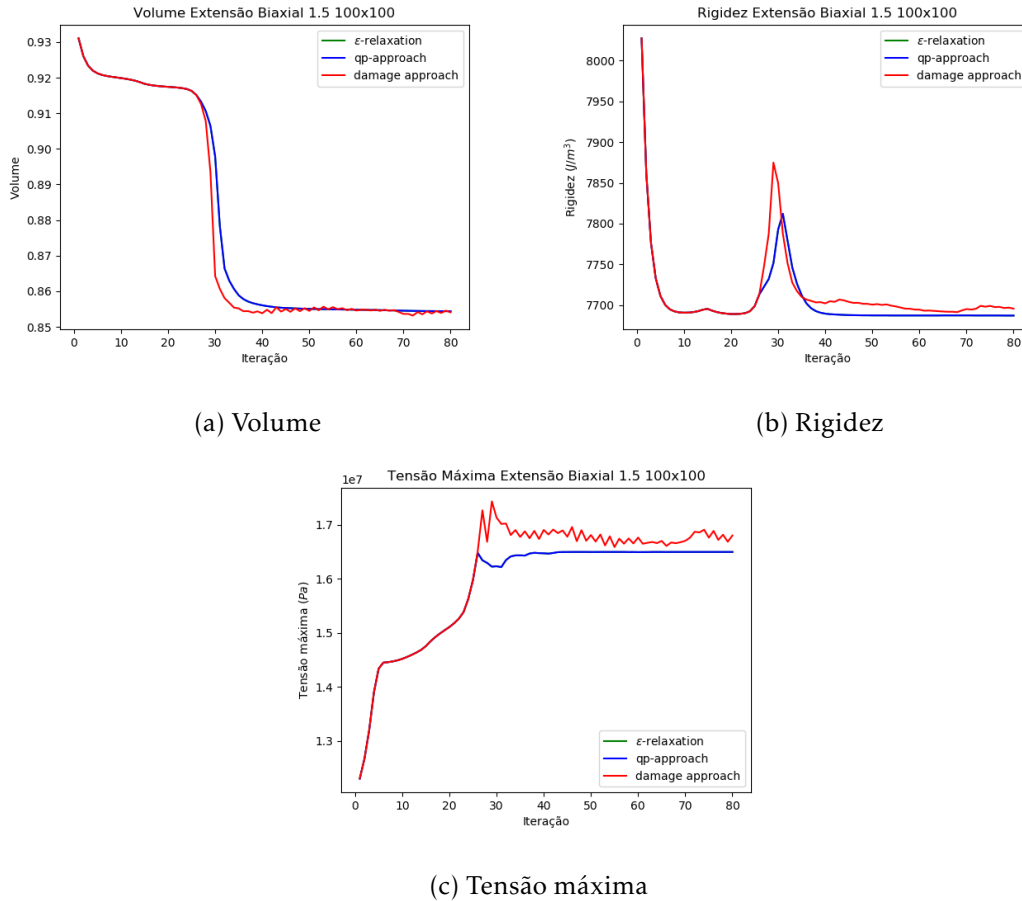


Figura 5.22: Gráficos de convergência para o problema de otimização 4.2.

Nas figuras 5.23, 5.24 e 5.25 estão representadas as soluções da otimização 4.3, para o *qp-approach*, *ε-relaxation* e *damage approach*, respetivamente. As soluções são semelhantes para os três métodos, com uma pequena diferença em 5.25 que se pode notar na distribuição da tensão.

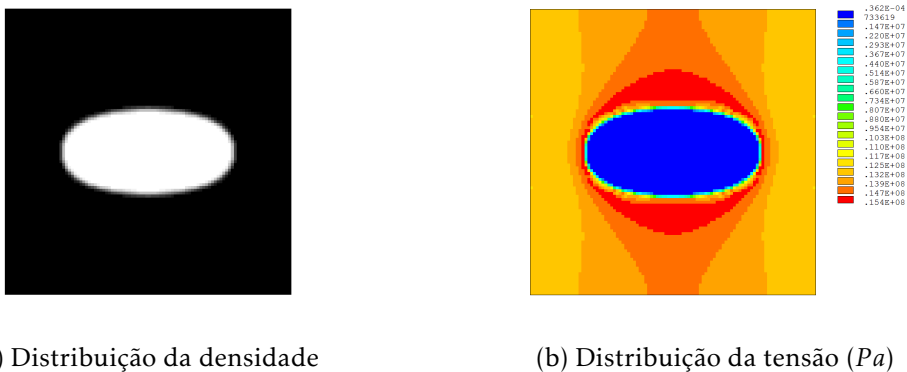
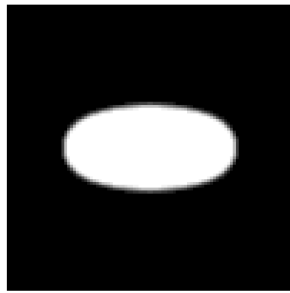
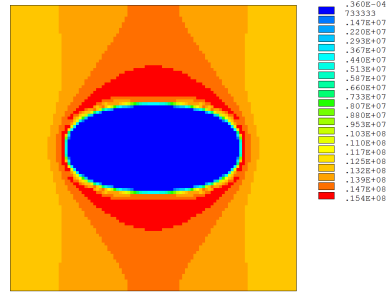


Figura 5.23: Solução do problema 4.3 recorrendo ao *qp-approach*.

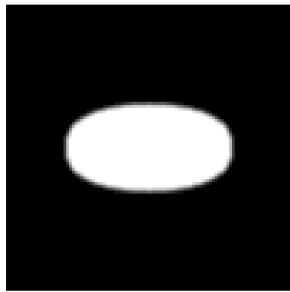


(a) Distribuição da densidade

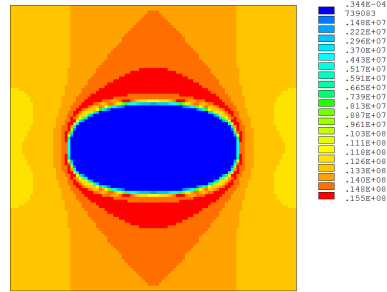


(b) Distribuição da tensão (Pa)

Figura 5.24: Solução do problema 4.3 recorrendo ao ϵ -*approach*.



(a) Distribuição da densidade



(b) Distribuição da tensão (Pa)

Figura 5.25: Solução do problema 4.3 recorrendo ao *damage approach*.

Na figura 5.26 estão representados os gráficos do volume, da rigidez e da tensão máxima. Todas as otimizações convergiram para níveis muito próximos de volume e rigidez, com uma maior tensão máxima no caso do *damage approach*.

Os resultados obtidos para o ϵ -*relaxation* e para o *qp-approach* são idênticos em todas as otimizações, o que era esperado principalmente para as otimizações 4.2 e 4.3, os constrangimentos são iguais já que o efeito do relaxamento ϵ -relaxation para $\epsilon = 1$ é igual ao do relaxamento *qp-approach* para $p - q = 1$ (ver [8]).

Observa-se também que houve alguma oscilação dos valores de rigidez, volume e tensão máxima nas últimas iterações nas otimizações em que se recorreu ao *damage approach*, isto deverá ter sido causado pela relativa imprecisão do cálculo da sensibilidade do constrangimento *damage*, visto se ter considerado um valor de alfa relativamente elevado ($\alpha = 40$, ver [11]).

Em todas as otimizações se observa um nível de tensão máxima superior para o *damage approach* o que é inerente ao método já que para ativar o constrangimento, a tensão admissível tem de ser violada em alguns pontos. No entanto para o caso 4.2 e 4.3 obteve-se níveis de tensão máxima muito próximos da tensão admissível.

5.5. OTIMIZAÇÃO DE TOPOLOGIA DA CÉLULA UNITÁRIA

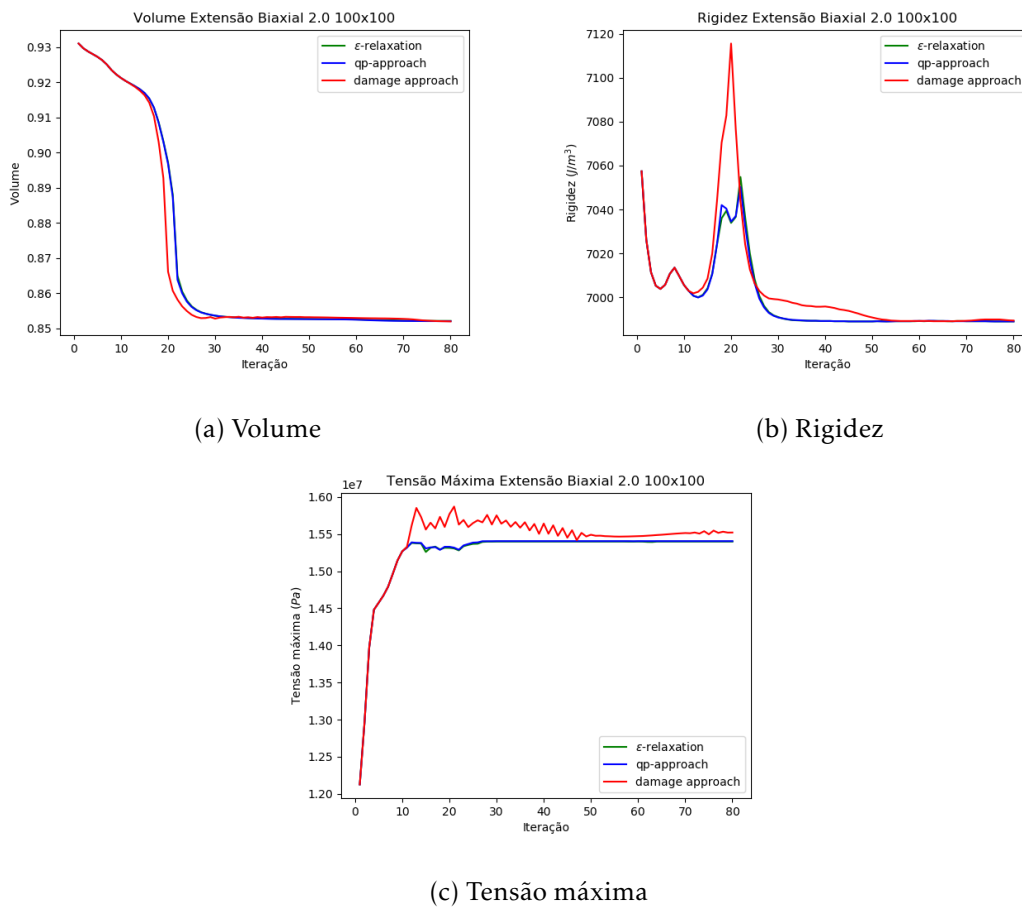


Figura 5.26: Gráficos de convergência para o problema de otimização 4.3.

CONCLUSÃO E TRABALHO FUTURO

A presente dissertação contribui para o conhecimento científico ao nível da otimização de materiais com microestrutura periódica e da aplicação de métodos de relaxamento de tensão.

Este trabalho inicia-se com uma revisão bibliográfica acerca da otimização topológica e da aplicação de critérios de tensão. São explorados os desafios associados á aplicação de constrangimentos de tensão, entre os quais, o problema da singularidade, da não linearidade e da natureza local das funções de tensão. Foram introduzidos métodos de relaxamento de tensão (*ϵ -relaxation*, *qp-approach* e *damage approach*) para resolver esses desafios. Seguidamente, aplicou-se os diferentes métodos de relaxamento num problema de uma treliça, resolvendo o problema de otimização graficamente de modo a observar o efeito que os diferentes parâmetros de relaxamento têm nas curvas dos constrangimentos.

Recorre-se à teoria da homogeneização para estimar as propriedades equivalentes (homogeneizadas) de um meio heterogéneo, neste caso um volume representativo de um material celular de duas fases. Este processo é muito exigente em termos de recursos computacionais, o que é bastante significativo para a análise de malhas muito refinadas ou para a otimização, em que, no decorrer do processo, várias homogeneizações são efetuadas. Com o objetivo de reduzir o tempo de cálculo, implementaram-se técnicas de paralelização num código que executa a homogeneização, distribuindo o cálculo dos casos de carga por vários processadores. Analisando os resultados obtidos, conclui-se que a paralelização é eficiente na redução do tempo de execução, com uma maior eficiência para malhas mais refinadas, onde as resoluções dos casos de carga têm tempos de execução mais próximos uns dos outros, reduzindo assim o efeito de *bottleneck*.

Nesta dissertação, realizou-se um estudo dos vários métodos de relaxamento dos constrangimentos de tensão em otimização de topologia, comparando-se as soluções finais obtidas e os gráficos de convergência. Foram realizadas otimizações do volume de células

unitárias sujeitas a extensões de corte e biaxiais. Conclui-se a partir dos resultados que as soluções finais recorrendo ao *qp-approach* e ao *ϵ -relaxation* tendem a ser muito próximas, pois os métodos de relaxamento são muito similares. O *damage approach* distingue-se de ambos por substituir todos os constrangimentos de tensão por apenas um de relação entre o modelo original e do modelo danificado, uma redução drástica do número de constrangimentos, no entanto, foi possível alcançar resultados comparáveis aos dos restantes métodos de relaxamento. A modificação introduzida na função de dano (β , compara equações (4.8) e (4.9)) permitiu que a solução final consistisse em zonas a vazio (branco) e a cheio (preto) com uma tensão máxima muito próxima da tensão admissível. Isto não seria possível recorrendo apenas aos parâmetros de controlo da função originalmente proposta (α e δ).

Para o desenvolvimento futuro, é necessário desenvolver métodos analíticos para o cálculo das derivadas dos constrangimentos de tensão em otimização de microestruturas recorrendo à homogeneização, principalmente para o caso do *damage approach* que peca por necessitar de duas homogeneizações por cálculo de sensibilidades e pela não linearidade da função do constrangimento que afeta a qualidade das diferenças finitas.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Twu, S.-L. e Geisler, R. L. “Structural Topology Optimization of Multilink Suspension System Using ATOM”. Em: (2012), p. 10.
- [2] Dorn, W., Gomory, R. e Greenberg, H. “Automatic design of optimal structures”. Em: *Journal de Mécanique* 3 (1964), pp. 25–52.
- [3] Bendsøe, M. P. e Kikuchi, N. “Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method”. Em: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 71 (nov. de 1988), pp. 197–224.
- [4] Verbart, A. “Topology Optimization with stress constraints”. Tese de doutoramento. 1974.
- [5] Rozvany, G. I. N., Zhou, M. e Birker, T. “Generalized shape optimization without homogenization”. Em: *Structural Optimization* 4 (1 de set. de 1992), pp. 250–252.
- [6] Bendsøe, M. P. e Sigmund, O. *Topology Optimization: Theory, Methods and Applications*. 2nd. 2004.
- [7] Cheng, G. D. e Guo, X. “ ϵ -relaxed approach in structural topology optimization”. Em: *Structural optimization* 13 (1997), pp. 258–266.
- [8] Gonçalves, G. “Análise dos problemas de não-linearidade e singularidade em otimização topológica de estruturas e materiais com critérios de tensão”. Tese de mestrado. Universidade Nova de Lisboa, mar. de 2017.
- [9] Bruggi, M. e Venini, P. “A mixed FEM approach to stress-constrained topology optimization”. Em: *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 73 (19 de mar. de 2008), pp. 1693–1714.
- [10] Duysinx, P. e Bendsøe, M. P. “Topology optimization of continuum structures with local stress constraints”. Em: *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 43 (30 de dez. de 1998), pp. 1453–1478.
- [11] Verbart, A., Langelaar, M. e Keulen, F. v. “Damage approach: A new method for topology optimization with local stress constraints”. Em: *Struct Multidisc Optim* 53 (1 de mai. de 2016), pp. 1081–1098.
- [12] Coelho, P. S. G. “Modelos hierárquicos para a análise e síntese de estruturas e materiais com aplicações à remodelação óssea”. Tese de doutoramento. 2009.

- [13] *MPI 3.1 Report*. 4 de jun. de 2015. URL: <http://mpi-forum.org/docs/mpi-3.1/mpi31-report.pdf> (acedido em 10/02/2018).
- [14] Guedes, J. e Kikuchi, N. "Preprocessing and postprocessing for materials based on the homogenization method with adaptive finite element methods". Em: *Computer methods in applied mechanics and engineering* 83.2 (1990), pp. 143–198.
- [15] Le, C., Norato, J., Bruns, T., Ha, C. e Tortorelli, D. "Stress-based topology optimization for continua". Em: *Structural and Multidisciplinary Optimization* 41.4 (abr. de 2010), pp. 605–620.
- [16] Sigmund, O. "Morphology-based black and white filters for topology optimization". Em: *Structural and Multidisciplinary Optimization* 33 (1 de abr. de 2007), pp. 401–424.
- [17] Kirsch, U. "On singular topologies in optimum structural design". Em: *Structural Optimization* 2 (1 de set. de 1990), pp. 133–142.



ANÁLISE ESTÁTICA DE UMA TRELIÇA

Para calcular as forças e os deslocamentos nas barras recorreu-se ao método da força redundante.

Começa-se por retirar a barra que se considera redundante para que a estrutura fique estaticamente determinada, neste caso a barra 1, calculando-se as forças e deslocamentos dessa nova estrutura.

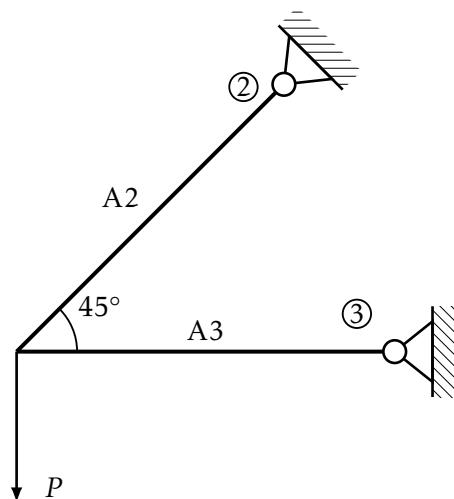


Figura A.1: Estrutura sem a barra 1.

$$\sum F_y = 0 \Leftrightarrow F_{2P} \frac{\sqrt{2}}{2} - P = 0 \Leftrightarrow F_{2P} = P\sqrt{2} \quad (\text{A.1})$$

$$\sum F_x = 0 \Leftrightarrow F_{2P} \frac{\sqrt{2}}{2} + F_{3P} = 0 \Leftrightarrow F_{3P} = -P \quad (\text{A.2})$$

considerando-se positivas as forças F_{2P} e F_{3P} quando as barras estão à tração.

Depois de calcular as forças nas barras, pode-se calcular o deslocamento segundo a força P .

$$\delta_P = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{\partial F_{2P} \delta_{2P}}{\partial P} + \frac{\partial F_{3P} \delta_{3P}}{\partial P} = \frac{2PL_2}{A_2 E_2 \rho_2^p} + \frac{PL_3}{A_3 E_3 \rho_3^p} \quad (\text{A.3})$$

De seguida, procede-se ao cálculo das forças segundo o efeito de uma força N como se vê na figura A.2.

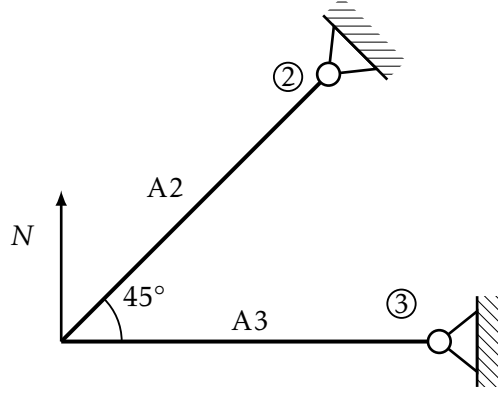


Figura A.2: Estrutura com a força N .

$$\sum F_y = 0 \Leftrightarrow F_{2N} \frac{\sqrt{2}}{2} + N = 0 \Leftrightarrow F_{2N} = -N\sqrt{2} \quad (\text{A.4})$$

$$\sum F_x = 0 \Leftrightarrow F_{2N} \frac{\sqrt{2}}{2} + F_{3N} = 0 \Leftrightarrow F_{3N} = N \quad (\text{A.5})$$

Prossegue-se com o cálculo do deslocamento segundo a direção e sentido de N .

$$\delta_N = \frac{\partial U}{\partial N} = \frac{\partial F_{2N} \delta_{2N}}{\partial N} + \frac{\partial F_{3N} \delta_{3N}}{\partial N} = \frac{2NL_2}{A_2 E_2 \rho_2^p} + \frac{NL_3}{A_3 E_3 \rho_3^p} \quad (\text{A.6})$$

Com os dois problemas resolvidos, pode-se fazer a conjugação dos dois resultados sobrepondo-os:

$$F = F_L + F_N \quad (\text{A.7})$$

$$\delta = \delta_P - \delta_N \quad (\text{A.8})$$

$$\delta = \frac{NL_1}{A_1 \rho_1^p E_1} \quad (\text{A.9})$$

Usando (A.8) e (A.9) consegue-se obter o valor de N .

$$N = \frac{P(2L_2 A_1 A_3 E_1 \rho_1^p E_3 \rho_3^p + L_3 A_1 A_2 E_1 \rho_1^p E_2 \rho_2^p)}{L_1 A_2 A_3 E_2 \rho_2^p E_3 \rho_3^p + 2L_2 A_1 A_3 E_1 \rho_1^p E_3 \rho_3^p + L_3 A_1 A_2 E_1 \rho_1^p E_2 \rho_2^p} \quad (\text{A.10})$$

A.1 Otimização das áreas

Para o cálculo de forças ou deslocamentos, considera-se $\rho_i = 1$, como $E_i = 1$ e $A_2 = A_3$, $L_1 = L_2 = L_3 = 1$ e $P = 10$ pode-se simplificar a expressão (A.10).

$$N = \frac{30A_1}{A_2 + 3A_1} \quad (\text{A.11})$$

A partir daí pode-se calcular as tensões nos elementos.

$$\sigma_1 = \frac{30}{3A_1 + A_2} \quad (\text{A.12})$$

$$\sigma_2 = \frac{10\sqrt{2}}{3A_1 + A_2} \quad (\text{A.13})$$

$$\sigma_3 = -\frac{10}{3A_1 + A_2} \quad (\text{A.14})$$

$$\delta = \frac{NL_1}{A_1E_1} = \frac{30}{3A_1 + A_2} \quad (\text{A.15})$$

A.1.1 Compliance

Para calcular a compliance do modelo original basta multiplicar a força P pelo deslocamento do ponto.

$$C = P \times \delta = \frac{300}{3A_1 + A_2} \quad (\text{A.16})$$

Para calcular a compliance do modelo danificado é necessário ter em conta que, ao contrário do modelo original, o módulo de Young de cada barra pode não ser 1. Começa-se por calcular o deslocamento δ .

$$\tilde{\delta} = \frac{\tilde{N}L_1}{A_1\rho_1^p\tilde{E}_1} = \frac{10(2\tilde{E}_3 + \tilde{E}_2)}{(2\tilde{E}_1\tilde{E}_3 + \tilde{E}_1\tilde{E}_2)A_1 + \tilde{E}_2\tilde{E}_3A_2} \quad (\text{A.17})$$

aqui o \tilde{N} é igual ao de (A.10) com os módulos de Young do modelo danificado. Com este resultado já se pode calcular a compliance.

$$\tilde{C} = P \times \tilde{\delta} = \frac{100(2\tilde{E}_3 + \tilde{E}_2)}{(2\tilde{E}_1\tilde{E}_3 + \tilde{E}_1\tilde{E}_2)A_1 + \tilde{E}_2\tilde{E}_3A_2} \quad (\text{A.18})$$

A.2 Otimização de densidades

Tal como na otimização das áreas, como $E_i = 1$, $\rho_2 = \rho_3$, $A_2 = A_3$, $L_1 = L_2 = L_3 = 1$ e $P = 10$ pode-se simplificar a expressão (A.10).

$$N = \frac{30A_1\rho_1^p}{A_2\rho_2^p + 3A_1\rho_1^p} \quad (\text{A.19})$$

As tensões nos elementos são dadas por:

$$\sigma_1 = \frac{30 \rho_1^p}{3 A_1 \rho_1^p + A_2 \rho_2^p} \quad (\text{A.20})$$

$$\sigma_2 = \frac{10 \sqrt{2} \rho_2^p}{3 A_1 \rho_1^p + A_2 \rho_2^p} \quad (\text{A.21})$$

$$\sigma_3 = -\frac{10 \rho_2^p}{3 A_1 \rho_1^p + A_2 \rho_2^p} \quad (\text{A.22})$$

O deslocamento no ponto de intersecção das barras:

$$\delta = \frac{NL_1}{A_1 E_1 \rho_1^p} = \frac{30}{3 A_1 \rho_1^p + A_2 \rho_2^p} \quad (\text{A.23})$$

A.2.1 Compliance

A *compliance* do modelo original é dada por:

$$C = P \times \delta = \frac{300}{3 A_1 \rho_1^p + A_2 \rho_2^p} \quad (\text{A.24})$$

$$\tilde{\delta} = \frac{\tilde{N}L_1}{A_1 \rho_1^p \tilde{E}_1} = \frac{10(2\tilde{E}_3 + \tilde{E}_2)}{(2\tilde{E}_1\tilde{E}_3 + \tilde{E}_1\tilde{E}_2)A_1 \rho_1^p + \tilde{E}_2\tilde{E}_3 A_2 \rho_2^p} \quad (\text{A.25})$$

A *compliance* do modelo danificado é dada por:

$$\tilde{C} = P \times \tilde{\delta} = \frac{100(2\tilde{E}_3 + \tilde{E}_2)}{(2\tilde{E}_1\tilde{E}_3 + \tilde{E}_1\tilde{E}_2)A_1 \rho_1^p + \tilde{E}_2\tilde{E}_3 A_2 \rho_2^p} \quad (\text{A.26})$$

