Università degli Studi di Firenze

FACOLTÀ DI LETTERE E FILOSOFIA
Corso di Laurea Magistrale in Logica, Filosofia e Storia della Scienza

Tesi di Laurea Magistrale

Logiche sottostrutturali e calcolo di Lambek

Candidato:
Serena Delli

Relatore:
Pierluigi Minari

Correlatore:
Andrea Cantini

Anno Accademico 2013-2014

Indice

Introduzione

In questa tesi si ha l'obiettivo di dare una breve idea del problema delle logiche sottostrutturali e gli strumenti per poterne parlare.

Nella prima parte del primo capitolo introdurremo il calcolo delle sequenze per la logica classica, vedremo le sue regole e il suo formalismo, così da avere gli strumenti essenziali per poter entrare nel vivo del discorso. Nella seconda parte, invece, approccieremo da un punto di vista storico il problema delle logiche sottostrutturali, individuandone le origini e ripercorrendo, a grandi linee, la storia.

Nel secondo capitolo tratteremo in maniera sistematica le regole strutturali. Inizialmente ci interrogheremo sul loro ruolo nella definizione delle caratteristiche di una logica, e del loro rapporto con le regole operazionali. Successivamente ci concentreremo su quali benefici (o meno) apportano al calcolo.

Nel terzo capitolo faremo una carrellata di logiche sottostrutturali, e vedremo come i calcoli cambiano al variare dei postulati. Inoltre, vedremo come possiamo leggere le sequenze.

Nel quarto capitolo vedremo metodi alternativi per reintrodurre le regole strutturali nel nostro calcolo. Infatti, se da una parte abbiamo buoni motivi per eliminarle, dall'altro è innegabile che esse aumentano il potere deduttivo del calcolo. Cercheremo quindi di reintrodurle ad un livello più alto. Considereremo soltanto quattro metodologie, in letteratura ne possiamo trovare molte altre, ma sicuramente, le più utilizzate sono le ipersequenze e i display calculi.

Nel quinto e nel sesto capitolo ci occuperemo dell'algebra delle logiche sottostrutturali. In particolare, nel quinto capitolo forniremo tutti gli strumenti necessari a parlare della semantica algebrica (argomento del sesto capitolo). Partiremo dando, nella prima parte, le definizioni preliminari che serviranno a definire gli $*$-reticoli, che saranno la struttura algebrica base, a partire dalla quale costruiremo i modelli algebrici per tutte le logiche sottostrutturali.

Nell'ultimo capitolo ci concentreremo sul nostro case study: il calcolo di Lambek. Vedremo prima la variante originale e, successivamente, vedremo come estenderlo in quello che è noto come free Lambek's calculus, ideato da Ono.

Come già detto, questo lavoro rappresenta una breve e semplice introduzione ad una problematica che, negli ultimi venti anni (e forse più), è diventata uno degli argomenti più discussi della logica contemporanea. Sono infatti molti i logici che si dedicano allo studio di questa particolare classe di logiche.

Le logiche sottostrutturali, oltre ad essere interessanti da un punto di vista filosofico e proof-teoretico, hanno molte applicazioni nell'algebra e, in particolare, con i calcoli di Lambek meglio, con la loro estensione, si è andata sviluppando un particolare settore della logica: l'*algebraic proof theory*. I padri di questa disciplina di confine sono A. Ciabattoni, N. Galatos e K. Terui.

Capitolo 1

Da LK alle logiche sottostrutturali.

In questo capitolo daremo le nozioni base del calcolo delle sequenze così come lo ha presentato Gentzen. Nella parte finale vedremo come e quando nascono le logiche sottostrutturali.

1.1 LK

Il calcolo **LK** nasce, insieme a **LJ** e al calcolo della deduzione naturale, nel 1935 con la tesi di dottorato di Gentzen. Nella sua tesi, Gentzen, presenta un metodo nuovo, rivoluzionario per dimostrare.

Vediamo nel dettaglio come si sviluppa il calcolo, così che avremo tutti gli strumenti per commentarlo, e per capirne le caratteristiche.

Prima di tutto è giusto chiederci cosa sia una sequenza: dato un linguaggio $\mathcal{L}$ una sequenza è un oggetto della forma

$$\Gamma \Rightarrow \Delta$$

Dove Γ e Δ sono insiemi (anche vuoti) di formule del nostro linguaggio, e vengono chiamati rispettivamente antecedente e conseguente. $\Rightarrow$ viene chiamato freccione. Intuitivamente possiamo vedere la sequenza come una formula di questo tipo:

$$\bigwedge \Gamma \to \bigvee \Delta$$

La forma dell'antecedente e del conseguente sarà quindi una lista di formule, separate da una virgola, che in questo calcolo viene interpretata come una congiunzione nell'antecedente e una disgiunzione nel conseguente.

Osservazione 1. *Per convenzione:*

$$\bigwedge \emptyset := \boldsymbol{T} \quad \bigvee \emptyset := \bot$$

Vediamo adesso i postulati del nostro calcolo:

Definizione 1. (postulati di **LK**)

Assiomi

$$A \Rightarrow A$$

Dove A è una formula qualsiasi del nostro linguaggio

Regole strutturali

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (WL) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}\ (WR)$$

$$\frac{A, A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (CL) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}\ (CR)$$

$$\frac{\Gamma, A, B, \Delta \Rightarrow \Pi}{\Gamma, B, A, \Delta \Rightarrow \Pi}\ (EL) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, B, \Pi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, B, A, \Pi}\ (ER)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad A, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}\ (cut)$$

Regole operazionali

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\neg A, \Gamma \Rightarrow \Delta,}\ (\neg L) \qquad \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg A}\ (\neg R)$$

$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\wedge L)_1 \qquad \frac{B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\wedge L)_2$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \wedge B}\ (\wedge R)$$

$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta \qquad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \vee B, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\vee L)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \vee B}\,(\vee R)_1 \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \vee B}\,(\vee R)_2$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \qquad B, \Pi \Rightarrow \Sigma}{A \to B, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}\,(\to L) \qquad \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \to B}\,(\to R)$$

Diamo adesso un po' di notazione:

Definizione 2. (formula principale, formula/e secondaria/e e contesti)
In una qualunque regola operazionale (ma anche strutturale), per esempio:

$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta \qquad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \vee B, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,(\vee L)$$

chiamiamo *formula principale* la formula generata dall'applicazione della regola (nel nostro esempio sarà $A \vee B$). Indichiamo con *formula secondaria* (o formule, come in questo caso) la formula/e su cui agisce la regola (nel nostro esempio A e B). Infine, chiamiamo *contesti* tutte le altre formule (nell'esempio Γ, Δ).

Un caso particolare riguarda la regola di cesura, che merita di essere trattato per suo conto.

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad A, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}\,(cut)$$

Qui chiameremo A *formula recisa* (o *tagliata* o *cut-formula*). Come sopra $\Gamma, \Delta, \Pi, e\ \Sigma$ sono detti contesti.

Sul significato delle regole strutturali non ci soffermiamo oltre, perché saranno oggetto di studio del prossimo capitolo. Vediamo, piuttosto, come lavora questo calcolo.

Definizione 3. (dimostrazione in **LK**)
Una dimostrazione $\mathcal{D}$ in **LK** è un albero dove:

- le foglie sono assiomi
- ogni nodo, che non è una foglia, è ottenuto come conclusione di una regola di **LK**.

Inoltre, si dice che una certa sequenza è dimostrabile in **LK** sse esiste una deduzione in **LK**, avente come radice la sequenza desiderata.

Vediamo un esempio di dimostrazione:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$A \Rightarrow A$}
\RightLabel{\scriptsize (WR)}
\UnaryInfC{$A \Rightarrow A, B$}
\RightLabel{\scriptsize $(\to R)$}
\UnaryInfC{$\Rightarrow A, A \to B$}
\AxiomC{$A \Rightarrow A$}
\RightLabel{\scriptsize $(\to L)$}
\BinaryInfC{$(A \to B) \to A \Rightarrow A, A$}
\RightLabel{\scriptsize (CR)}
\UnaryInfC{$(A \to B) \to A \Rightarrow A$}
\RightLabel{\scriptsize $(\to R)$}
\UnaryInfC{$\Rightarrow ((A \to B) \to A) \to A$}
\end{prooftree}
$$

Come si può vedere da questo esempio di dimostrazione in **LK**, il calcolo delle sequenze è un calcolo analitico (in realtà dovremmo eliminare la regola di cesura, ma lo vedremo meglio nel prossimo capitolo), e già questa rappresenta una grande differenza rispetto al calcolo assiomatico. In più, qui si compie una distinzione tra regole strutturali e regole operazionali. Il compito che devono assolvere le regole strutturali non è chiarissimo, infatti ci sono diverse posizioni che più avanti vedremo nel dettaglio.

Sicuramente, una caratteristica da non sottovalutare (oltre alla già citata analiticità del calcolo) è l'estrema versatilità del calcolo delle sequenze. Modificando opportunamente le regole operazionali e, soprattutto, strutturali, si possono caratterizzare moltissime logiche diverse.

Vediamo adesso alcune semplici varianti di **LK**.

1.1.1 Varianti di LK

Vediamo alcune semplici varianti di **LK**.

La prima differenza che possiamo avere nel nostro calcolo riguarda i contesti, infatti essi possono essere *liste* di formule oppure *multinsiemi.* Innanzi tutto per multinsiemi di formule si intende un insieme di formule dove l'ordine non conta, ma conta la molteplicità della formula. Quindi, per esempio:

$$\{p, p, q\} \ e \ \{p, q, p\}$$

sono due multinsiemi uguali. Mentre:

$$\{p, p, q\} \ e \ \{p, q\}$$

non sono lo stesso multinsieme.

Con lista si intende un insieme di formule dove conta sia l'ordine che la molteplicità. Quindi:

$$\{p, p, q\} \ e \ \{p, q, p\}$$

sono due liste diverse, mentre:

$$\{p, p\}\ e\ \{p\}$$

sono liste e multinsiemi diversi.

Nel calcolo originale, Gentzen considera i contesti come liste. Si osservi che se invece che le liste utilizziamo i multinsiemi, la regola dello scambio diventa superflua.

Vediamo adesso in cosa differisce la formulazione *additiva* da quella *moltiplicativa*.

Queste formulazioni differiscono per come vengono presentate le regole operazionali (ad eccezione della negazione). Consideriamo le seguenti regole:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \qquad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \to B, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,(\to L)_{add} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \qquad B, \Pi \Rightarrow \Sigma}{A \to B, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}\,(\to L)_{mol}$$

Come si può notare, nelle due regole cambiano i contesti! In quella di sinistra, quella additiva, abbiamo contesti uguali nelle due premesse, nell'altra, quella moltiplicativa, i contesti sono diversi, e nella conclusioni si trovano tutti e quattro.

Avendo le regole strutturali è possibile vedere come le due regole sono equivalenti, infatti:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma, A}\,(WR;WL) \qquad \dfrac{B, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma, B}\,(WR;WL)}{A \to B, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}\,(\to L)_{add}$$

Viceversa,

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \qquad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \to B, \Gamma, \Gamma \Rightarrow \Delta, \Delta}\,(\to L)_{mol}}{A \to B, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,(CR;CL)$$

Inoltre, è possibile considerare una variante di **LK** che ammette sequenze iniziali generalizzate, ovvero sequenze del tipo:

$$A, \Gamma \Rightarrow \Delta, A$$

Cioè una sequenza dove una certa formula è ripetuta almeno una volta nell'antecedente, e una nel conseguente. É facile vedere che il caso $A \Rightarrow A$ è un caso particolare delle sequenze generalizzate.

1.2 Logiche sottostrutturali

Vediamo adesso di fare un po' di luce su cosa si intende con logiche sottostrutturali, su come e da chi sia stato coniato questo termine, quando nascono e cosa fa parte delle logiche sottostrutturali.

Una logica sottostrutturale è un sistema logico che può essere rappresentato grazie ad un appropriato calcolo delle sequenze, che non prevede, tra i suoi postulati, una o più delle regole strutturali sopra definite.

Il termine ha origini piuttosto recenti; è stato infatti coniato da Došen nella conferenza *Workshop on logics without structural rules* (Tübingen 1990). Nella prefazione di Substructural Logics di Došen e Schroeder-Heister si legge:

> The term *substructural logics*, a designator for logics with restricted structural rules, made its first public appearance at the conference dedicated to such logics.

Questa conferenza era divisa in quattro moduli, che prendevano nome dalle principali logiche sottostrutturali del tempo, e ogni modulo prevedeva l'intervento di tre logici:

- Il Calcolo di Lambek (Lambek, van Bethem, Soloviev)
- Logica Rilevante (Dunn, Došen, Meyer)
- Logica Lineare (Girard, Sambin, Scedrov)
- Logica BCK[1] (Grishin, Schroeder-Heister, Ono)

Le logiche sottostrutturali hanno il compito, e il pregio, di fornire un collegamento, che adesso è diventato di dominio pubblico nella logica contemporanea, ma che fino a una ventina di anni fa non era così scontato, tra argomenti molto diversi tra loro come:

1. grammatiche categoriali
2. logiche rilevanti
3. lambda calcolo tipato
4. et. altri.

[1]BCK è una logica priva di contrazione.

La prima formulazione sistematica delle regole strutturali è sicuramente da attribuire a Gentzen quando, nel 1935, crea il calcolo delle sequenze. Tuttavia, si possono trovare delle anticipazioni, delle versioni embrionali di queste regole già nei lavori antecedenti di Hertz, Hilbert e dello stesso Gentzen. Per esempio, una versione dell'attenuazione era già presente nei lavori di Hertz. Il termine *weakening* si deve a Curry che traduce *Verdünnung* di Gentzen. Un'altra traduzione, che ormai risulta desueta, è quella che possiamo trovare in Kleene che utilizza il termine *Thinning*.

Ancora, la regola della cesura fu proposta già da Gentzen in un testo del 1932, che riprendeva un'idea sempre di Hertz.

Nel sistema assiomatico di Hilbert per la logica positiva si può trovare una lista di assiomi che, lo stesso Gentzen sostiene, lo abbiano influenzato nella creazione delle regole strutturali:

Introduzione di un'Assunzione $A \rightarrow (B \rightarrow A)$

Omissione di un'Assunzione $(A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)$

Scambio di Assunzioni $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow C)$

Eliminazione di una Proposizione $(B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$

É abbastanza evidente che gli assiomi corrispondono rispettivamente alle regole di:

- Attenuazione
- Contrazione
- Scambio
- Cesura

Osservazione 2. *Il cut è associato anche alla regola del* modus ponens*, ma lo vedremo meglio nel prossimo capitolo.*

Anche la traduzione del termine *exchange* non è stata univoca; per esempio Kleene e Curry utilizzano il termine *interchange*, Došen *permutation*.

Siamo adesso in grado di dire come e quando nasce la prima logica sottostrutturale.

Nel 1935, nella tesi di dottorato, Gentzen oltre a presentare **NK** e **LK**, dà le rispettive formulazioni dei due calcoli per la logica intuizionista. La differenza tra **LK** e **LJ** consiste nella struttura della sequenza: in **LK** ogni sequenza è della forma

$$A_1...A_n \Rightarrow B_1...B_m$$

mentre in **LJ** le sequenze sono sempre della forma

$$A_1...A_n \Rightarrow B$$

Le sequenze intuizioniste sono sempre a conclusione singola, il conseguente deve contenere al massimo una formula.

Posta questa nuova condizione sulla struttura delle sequenze, è evidente che le regole strutturali per il conseguente devono essere o ristrette o eliminate. Per esempio, lo scambio a destra non avrà più senso, in quanto non ho formule da scambiare; la contrazione a destra dovrà essere eliminata in quanto la regola dovrebbe avere questa struttura:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A, A}{\Gamma \Rightarrow A}$$

che, evidentemente, non è accettabile intuizionisticamente, poiché nel conseguente della premessa compaiono due formule.

In quest'ottica è possibile vedere Gentzen come il primo logico sottostrutturale, e la logica intuizionista come la prima logica sottostrutturale, in accordo con la definizione che abbiamo dato di tali logiche.

Nel prossimo capitolo andremo a vedere come si comportano le regole strutturali e come modificano il calcolo, così che, nel terzo capitolo, potremo formulare i calcoli di alcune importanti logiche sottostrutturali.

Capitolo 2

Regole strutturali

Nella parte iniziale di questo capitolo considereremo i rapporti tra regole operazionali e regole strutturali. In seguito, analizzeremo le regole strutturali presenti nel calcolo delle sequenze originale di Gentzen per la logica classica, ovvero: attenuazione, contrazione, scambio e cesura. Da un lato, ci occuperemo di prendere in esame i motivi per eliminare tutte, o solo alcune, di queste regole; dall'altro vedremo quali eventuali svantaggi comporta averle nel nostro calcolo.

2.1 Rapporti tra regole strutturali e regole operazionali

Come abbiamo visto nel capitolo precedente, nel calcolo delle sequenze di Gentzen possiamo trovare, oltre agli assiomi, due diversi tipi di regole:

- le regole operazionali
- le regole strutturali

Le prime ci dicono come lavorare sui connettivi, ovvero: come possiamo introdurli a destra e a sinistra del freccione; inoltre, ci esplicitano il loro significato. A differenza del calcolo della deduzione naturale, qui ci sono solo regole di introduzione; questo perché Gentzen voleva un calcolo dove non vi è perdita di informazione. Tuttavia, è possibile notare una certa somiglianza tra queste regole e le regole di introduzione ed eliminazione della deduzione naturale.

Le regole strutturali, invece, ci permettono di lavorare sulla struttura della sequenza. Possiamo eliminare o aggiungere intere formule, cambiarne l'ordine o ridurne le copie. Così si esprime Gentzen su tali regole:

> Even now new inference figures are required that cannot be integrated into our system of introductions and eliminations; but we have the advantage of being able to reserve them special places within our system, since they no longer refer to logical symbols, but merely to the structures of sequents.

Oltre a questo, non viene chiarificato meglio il ruolo di queste regole. Tuttavia, già da queste poche righe è evidente come le regole strutturali giochino un ruolo fondamentale nel descrivere una determinata logica. Per esempio, se desideriamo una logica attenta alle risorse non possiamo volere nè l'attenuazione nè la contrazione nel nostro calcolo perché questa ci permette di riprodurre le assunzioni un numero arbitrario di volte. É quindi questo il cuore, forse problematico, del calcolo delle sequenze.

Per avere un'analisi più approfondita di cosa siano queste misteriose e fondamentali regole, dobbiamo rifarci ad articoli più recenti di teoria della dimostrazione.

Il primo punto da chiarire è se anche *le regole strutturali contribuiscono a dare un significato alle costanti logiche.*

Possiamo individuare tre diverse linee di pensiero:

- ***Holistic view***. Secondo questa corrente, il significato delle costanti è dato dall'intero apparato del sistema (assiomi, regole operazionali e strutturali). É quindi evidente che, se aderiamo alla visione olistica, non possiamo non accettare il fatto che anche le regole strutturali contribuiscono, in modo essenziale, a dare significato alle costanti. Tuttavia, questa visione male si concilia con l'idea di Gentzen che vuole dare ad ogni connettivo un significato ben definito dalle proprie regole operazionali, ben distinte tra loro. Se accettiamo la visione olistica, accettiamo che un connettivo sia definito anche dalle regole operazionali di un altro connettivo, e questo sembra davvero inaccettabile.

- ***Gentzen's inferential approach I*** Possiamo assumere che ogni connettivo abbia un contenuto operazionale, datogli dalle regole operazionali, e un contenuto globale specificato, per esempio, da quali sequenti contenenti tale connettivo sono dimostrabili nel sistema.

- ***Gentzen's Inferential approach II*** Possiamo negare il punto precedente intendendo le due parti, operazionale e globale, come dicotomiche.

Arrivati a questo punto, la domanda a cui preme rispondere è: ***che rapporto intercorre tra le regole operazionali e quelle strutturali?***

É possibile dividere, anche in dipendenza della posizione che decidiamo di assumere rispetto alla questione precedente, in quattro principali teorie:

1. ***Nihilistic view*** [Negri et al.(2008)Negri, von Plato, and Ranta]. Il significato di un connettivo è solo operazionale, quindi legato alle regole che descrivono il suo funzionamento. Le regole strutturali invece sono legate al formalismo che scegliamo.

2. ***Ancillary view*** [Wansing(2000)]. IN accordo con questa posizione, i connettivi hanno sia una parte operazionale che globale (riprendendo quello che priama abbiamo chiamato *Gentzen's inferential approach I*). Quindi, il significato di un connettivo non può essere dato solo dalle regole operazionali, queste non sono sufficienti a descriverlo completamente.

3. ***Dualistic view*** [Hacking(1979)]. Qui i ruoli delle regole operazionali e e di quelle strutturali sono nettamente distinti. Le prime hanno il compito di descrivere i significati dei connettivi. Le altre ″basic facts about deducibility and obtain even in a language with no logical constant al all″ (Hacking 1979, p.294). Le regole strutturali devono essere assunte per le formule atomiche e provate per le formule più complesse.

4. ***Relativistic view*** [Dosen(1989)]. Il punto di partenza di questo approccio è che le costanti logiche rendono espliciti in un linguaggio più basso qualche caratteristica struttura di un linguaggio di un livello più alto. Per esempio, $A \rightarrow B$ riflette ad un livello più basso la verità strutturale $A \vdash B$. In questo contesto le regole strutturali sono quelle che definiscono le varie logiche ″The actual meaning of the world ′and′ ′imply′ ′or′ is wholly in the structural group and it is not excessive to say that a logic is essentially a set of structural rules″ [Girard(1987)]

Per completezza dobbiamo citare altre due posizioni, simili tra loro.

5 ***Undeterministic view,*** *first version* [Belnap(1996)]. Le regole operazionali non sono sufficientemente selettive. Per esempio, $\wedge R$ ci dice qualcosa non solo sul significato di $\wedge$ ma anche su Δ e la virgola.

6 ***Undeterministic view**, second version* [Sambin et al.(2000)]. Il significato dei connettivi ″is determinated also by contexts in its rules, which can bring in latent information on the behaviour of th connective″.

Queste sono le principali posizioni rispetto al ruolo delle regole strutturali nel calcolo delle sequenze e del loro rapporto con le regole operazionali e i connettivi.

2.2 Pro e contro delle regole strutturali

In questo paragrafo analizzeremo cosa comporta l'eliminazione o l'assunzione di una o più regole strutturali. Cominceremo considerando l'attenuazione, poi la contrazione, lo scambio, il cut e infine cosa comporta eliminarle o conservarle tutte.

2.2.1 Attenuazione

Ricordiamo adesso la regola di attenuazione per **LK**:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (WL) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}\ (WR)$$

Questa regola ci permette di introdurre una qualsiasi formula nella nostra sequenza, attenuandola. Consideriamo adesso tre obiezioni che vengono fatte a questa regola.

Obiezione della rilevanza

Consideriamo la seguente dimostrazione in **LK**:

$$\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A}{A, B \Rightarrow A}\ (WL)}{\Rightarrow A \to (B \to A)}\ (\to R)$$

$A \to (B \to A)$ prende il nome di legge dell' *a fortiori*. Questa legge ci dice che se A vale a maggior ragione varrà sotto l'ipotesi di B.

É una legge molto studiata, che per molto tempo è stata considerata controintuitiva. Per esempio, C.I. Lewis la cita come paradosso dell'implicazione materiale, che secondo lui andrebbe sostituita con la nozione modale di implicazione stretta.

> It might be said in defence of $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ as an entailment that at least it is $'$safe$'$, in the sense that if A is true, then it is always safe to infer A from an arbitrary B, since we run no risk of uttering a falsehood in doing so [...]. In replay we of course admit that if A is true then it is $'$safe$'$ to say so [...]. But saying that A is true on the irrelevant assumption that B implies A, in any sensible sense of $'$implies$'$. Of course we can say $'$Assume that snow is puce. Seven is a prime number$'$. But if we say $'$Assume that snow is puce. It follows that (or consequently, or therefore, or it may be validly inferred that) seven is a prime number$'$ then we have simply spoken falsely. (Anderson Belnap, 1975)

Secondo Belnap e Anderson il problema sta nel fatto che quello che noi intendiamo con $'$segue da$'$ è diverso dal significato che diamo all'implicazione materiale. In questo contesto, risulta evidente, che l'attenuazione non può essere accettata. Infatti, la regola di attenuazione ci sta dicendo che se da $\Gamma \vdash A$ allora io posso dedurre a da un certo Γ' che contiene Γ (In simboli: $\Gamma' \supset \Gamma \vdash A$). Ma alcune formule in Γ' non concorrono nella dimostrazione di A, in quanto A è già deducibile da un insieme minore di assunzioni; quindi ci sono delle formule in Γ' che non sono *rilevanti*. Esistono due criteri di rilevanza:

- Semantico, Se B segue da A, allora è necessario che A e B condividano alcuni contenuti.
- Sintattico, Se B segue da A, allora è necessario che A sia usata nella dimostrazione di B.

Questo tipo di logica è nota come *Logica Rilevante.*

Obiezione della paraconsistenza

Consideriamo adesso un caso problematico di attenuazione a destra:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{A \Rightarrow A}{\neg A, A \Rightarrow}\,(\neg L)}{\neg A, A \Rightarrow B}\,(WR)}{\Rightarrow A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)}\,(\rightarrow R)$$

Questa legge $A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$ è chiamata *ex absurdo quodlibet.* I logici rilevanti si sono chiesti se l'ex absurdo è ragionevole; rispondendo si sono formati due schieramenti: Lewis e Langford, che accettano l'ex absurdo e Anderson e Belnap, che lo rifiutano Lewis e Langford non solo accettano tale principio ma costruiscono un argomento per dar prova della sua accettabilità: *l'indipendent proof.* Assumo A e $\neg A$, da A deduco $A \vee B$ e tramite il sillogismo disgiuntivo da $A \vee B$ e $\neg A$ deduco B, ovvero:

$$\dfrac{\dfrac{\text{A}}{A \vee B}\,(\vee I) \qquad \neg A}{\text{B}}\,\vee E$$

Secondo Anderson e Belnap l'errore di Lewis sta nell'accettare il sillogismo disgiuntivo che non può essere accettato come ragionamento valido. Si osservi che in quasi tutti i sistemi logici se vale il sillogismo disgiuntivo vale anche l'ex absurdo quodlibet.

Ci sono due motivi principali per cui si può decidere di rifiutare questi due principi:

- Il primo riguarda il ragionamento quotidiano; infatti, noi non deduciamo da premesse inconsistenti la conclusione che desideriamo. Citiamo un esempio di Dunn (1986, p.152) per chiarire meglio questa posizione:

  > One would not want trivially inconsistent information about the colour of your car that somehow got fed into FBI's computer [...] to lead to the conclusion that you are Plublic Enemy Number One

- Nessuna logica che ammette che da A e $\neg A$ si giunga a B può servire da base ad una teoria non banale inconsistente; ma qualche volta può essere utile studiare questo tipo di teorie (per esempio la naive set theory o la naive truth theory)

Tutto ciò ha fatto nascere un campo della logica noto come *Logiche paraconsistenti.*

Obiezione della nonmonotonia

L'ultima obiezione viene dalla *Logica nonmonotona.* L'attenuazione può essere vista come una sorta di ragionamento monotono: se $\Gamma \vdash A$ allora $\Gamma' \supset \Gamma \vdash A$ ovvero, se A già seguiva da Γ continuerà a seguire da un certo Γ' che contiene l'insieme Γ iniziale più altre informazioni, qualunque esse siano. Tuttavia questo tipo di ragionamenti nella vita quotidiana spesso non funzionano, spesso ragioniamo in modo nonmonotono.

Questa obiezione ha aperto la strada alla ricerca nonmonotona che adesso vanta numerose applicazioni nel campo della computer science e AI.

2.2.2 Contrazione

Riscriviamo le regole di contrazione a sinistra e a destra per **LK**:

$$\frac{A, A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (CL) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}\ (CR)$$

Questa regola ci dice che posso eliminare una copia di una formula.

Obiezione intuizionistica

Consideriamo la seguente dimostrazione in **LK**:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{A \Rightarrow A}{\Rightarrow A, \neg A}\ (\neg R)}{\Rightarrow A \vee \neg A, A \vee \neg A}\ (ER,\vee Rtwice)}{\Rightarrow A \vee \neg A}\ (CR)$$

Da questa dimostrazione segue che ammettendo la contrazione a destra sono in grado di dimostrare il terzo escluso, e quindi è evidente che per l'intuizionismo questa regola non è accettabile.

Obiezione polivalente

il principio del terzo escluso lo possiamo anche leggere nel metalinguaggio come principio di bivalenza.

Supponiamo di avere una frase del tipo ′Luca è giovane′ o, come il noto esempio aristotelico, ′ci sarà una battaglia navale domani′ non posso dire se queste due frasi sono vere o false. Davanti a situazioni di incertezza, sulla verità o falsità, non si può non riconoscere la difficoltà di rifiutare la visione polivalente, e quindi rifiutare la contrazione. Infatti, ammesso di leggere il terzo escluso come principio di bivalenza (per cui tutte le proposizioni sono o vere o false), e, come abbiamo fatto vedere prima, tramite la contrazione posso dedurre il principio del terzo escluso, segue immediatamente che per la logica polivalente, in quanto ammette enunciati né veri né falsi, la contrazione non è ammissibile.

Obiezione lineare

La logica lineare è una logica attenta alle risorse, in cui conta il numero delle occorrenze di una data formula, che legge le formule come informazioni ed è contractionless. Il perché risulta evidente se pensiamo a cosa comportifare una contrazione: significa perdere informazioni. Infatti se prendiamo una deduzione dove viene applicata una contrazione, possiamo notare come una formula semplicemente sparisca. La logica lineare, per questo suo essere attenta alle risorse, ha avuto molti sviluppi e applicazioni nel campo dell'IA e della computer science.

Mi preme ricordare, anche se poi ci sarà modo di vederlo nel dettaglio più avanti, che in questa logica (priva di regole strutturali) è possibile ricreare l'intero potere deduttivo della logica classica grazie all'introduzione degli esponenziali.

Obiezione Curry-Skolem

Consideriamo la seguente dimostrazione in **LK**

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{A \Rightarrow A \qquad \cfrac{A \Rightarrow A \qquad B \Rightarrow B}{A \to B, A \Rightarrow B}\,(\to L)}{A \to (A \to B), A, A \Rightarrow B}\,(\to L)}{A, A \to (A \to B) \Rightarrow B}\,(EL;CL)}{\Rightarrow (A \to (A \to B)) \to (A \to B)}\,(\to R)$$

Questo principio prende il nome di legge di assorbimento. Curry ha scoperto che questo principio gioca un ruolo fondamentale nella creazione dei paradossi nella naive set theory. Dato che per dimostrare l'assorbimento dobbiamo fare un uso essenziale della contrazione, e che da questa legge seguono dei paradossi, risulta evidente come l'accettazione di tale regola sia problematica.

Curry, nel 1942, è riuscito ad ottenere una variante del paradosso di Russell utilizzando solo principi intuizionisticamente validi. Sia $C = \{x : x \in x \to A\}$, dove A è una formula qualunque. Allora:

1.	$C \in C \to (C \in C \to A)$	$Def. di C$
2.	$(C \in C \to A) \to C \in C$	$Def. di C$
3.	$(C \in C \to (C \in C \to A)) \to (C \in C \to A)$	*Legge di assorbimento*
4.	$C \in C \to A$	$MP1,3$
5.	$C \in C$	$MP2,4$
6.	A	$MP4,5$

Dal risultato di Curry segue che per avere una teoria degli insiemi ingenua basta avere MP, l'assioma di comprensione e la legge di assorbimento.

Dal punto di vista delle logiche sottostrutturali non vi è molta differenza tra il terzo escluso e l'assorbimento, in quanto per dimostrarli utilizziamo sempre la contrazione, rispettivamente a destra e sinistra.

Ci possiamo quindi chiedere cosa succederebbe, se costruissimo una teoria degli insiemi su una logica senza contrazione. Il primo che cercò di creare una teoria degli insiemi su una logica non classica, fu Skolem; il quale aggiunse un assioma di comprensione ristretto alla logica a infiniti valori di Lukasiewicz, dove non vale la contrazione incondizionata. Tuttavia, nel 1982, Grishin dimostrò che la logica a infiniti valori di Lukasiewicz èancora troppo forte per ricreare la naive set theory: se aggiungiamo l'estensionalità a una logica senza contrazione (quindi più debole di quella di Lukasiewicz) la contrazione può essere derivata; ne segue che il sistema risultante dall'aggiunta della comprensione diveta banale. Le ricerche più recenti si sono orientate verso una logica vicina a quella lineare, priva di contrazione e attenuazione, infatti pare che anche quest'ultima giochi in ruolo fondamentale nella creazione di paradossi.

2.2.3 Scambio

Riscriviamo anche le regole dello scambio per **LK**:

$$\frac{\Gamma, A, B, \Delta \Rightarrow \Pi}{\Gamma, B, A, \Delta \Rightarrow \Pi}\ (CL) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, B, \Pi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, B, A, \Pi}\ (CR)$$

Questa regola ci permette di spostare le formule in posizioni diverse. In alcune varianti di **LK**, come per esempio **G3**, le sequenze non sono formate da liste ma da *multinsiemi*, dove l'ordine non conta. In tali sistemi è quindi superflua la regola di scambio. In altri, in particolare quelli che vedono le formule come informazioni o sintagmi, sembra decisamente importante mantenere fisso un ordine. Vediamo adesso in dettaglio il perché di questa necessità.
Come per le altre regole ci soffermeremo sulle principali obiezioni allo scambio.

Obiezione lineare

Come abbiamo già detto, nella logica lineare le formule sono viste come informazioni. Questa interpretazione rende impossibile ignorare il problema dell'accessibilità. Questo perché spesso le formule hanno una collocazione spazio-temporale. In generale, sembra convincente pensare alla collocazione delle formule, intese sempre come informazioni, come ad una catena il cui ordine conta, dove la relazione d'ordine è *essere più accessibile di*. Ne segue che formule più "lontane " siano meno accessibili di quelle adiacenti.

Da questa importanza che viene data all'ordine, nascono le logiche lineari non commutative [Abrusci(1991)][Yetter(1990)](e il loro antenato: *il calcolo di Lambek* [Lambek(1958)]). Si sono poi sviluppate delle logiche *miste*, ovvero con connettivi commutativi e non [Abrusci and Ruet(1999)]

Obiezione categoriale

Un'altra obiezione viene dalla linguistica e dalla grammatica categoriale.
La grammatica categoriale nasce già con Husserl e Lesniewski, ma solo con Ajdukiewicz si ha un versione formale dettagliata. Essa consiste nell'assegnare un tipo sintattico ad ogni espressione del linguaggio naturale. Nel calcolo di Ajdukiewicz i tipi base sono dati solo dai nomi e dalle frasi. I predicati sono tipi più complessi, della forma $A \to B$ e si ottengono per giustapposizione; ovvero data un'espressione di tipo A applicandola otteniamo un'espressione di tipo B. I predicati si possono così costruire applicando i nomi alle frasi. Per esempio: *Luca corre* sarà della forma $n \to s$ dove n rappresenta il tipo del sintagma nominale *Luca*, s la frase *Luca corre* e $n \to s$ il tipo del sintagma verbale *corre*.
Nel 1958 J. Lambek introduce quello che è noto come *Lambek Calculus*: una grammatica categoriale dove è estremamente importante l'ordine. Quello che ne esce fuori è evidentemente un calcolo noncomutativo dove lo scambio non è ammesso.

Adesso daremo solo un'idea generale di questo tipo di calcolo, nel capitolo 7 ce ne occuperemo nel dettaglio.

Lambek fece notare come in molte lingue, per formare frasi dotate di senso, l'ordine sia importante. Riprendiamo il nostro esempio *Luca corre*, questa è una frase corretta mentre *corre Luca* non lo è. Come abbiamo detto corre sarà del tipo $n \to s$, ovvero applicando a destra un'espressione di tipo n otteniamo un'espressione di tipo s. Consideriamo adesso un aggettivo, ad esempio bello, questo è un tipo che da un nome passa ad un altro nome e sarà del tipo $n \leftarrow n$.

Lambek ha messo a punto un calcolo delle sequenze per produrre le trasformazioni ammissibili sui tipi. Questo calcolo risulta essere molto simile a LJ tranne che per:

- l'assenza di regole strutturali.
- come connettivi ha solo $\wedge \rightarrow \leftarrow$

Grammatiche come quelle di Ajdukiewicz e Lambek sono adatte solo a frammenti molto limitati del linguaggio naturale; sono state quindi create altre grammatiche, più potenti e raffinate che contengono altri operatori (come ad esempio $\lambda - astrazione$) o con altri tipi (per esempio i tipi intensionali). Da annoverare tra queste grammatiche potenziate è quella di Montague (1974).

2.2.4 Cut

Come per le altre regole, richiamiamo la regola del cut per LK:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad A, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma} \ (cut)$$

In pratica, la regola del cut ci consente di tagliare una formula se presente nel conseguente di una sequenza e nell'antecedente dell'altra. Il risultato che otterremo applicando questa regola sarà una nuova, unica sequenza priva della formula tagliata (nel nostro esempio A).

Ci sono due principali motivi per cui molti logici decidono di eliminarli il Cut:

1. La cesura è scorretta, o almeno deve essere duramente ristretta. Questa via ha nobili origini ma è difficile da sostenere.

2. accettabile ma si deve dimostrare la sua ridondanza, ovvero si deve dimostrare che la sua accettazione non comporta un maggior numero di teoremi dimostrabili. Questa è un'opinione largamente diffusa e quasi tutti preferiscono avere un calcolo cut-free (ovvero dove la cesura è eliminabile).

Il motivo per cui la prima opzione è difficilmente sostenibile è che la cesura interiorizza l'idea che la derivabilità sia transitiva: supponiamo che A sia derivabile dagli assiomi Γ di una certa teoria. Supponiamo adesso che il teorema B sia dimostrabile tramite A più eventuali altre proposizioni. Non si può negare che così facendo abbiamo mostrato che A è derivabile dagli assiomi.

> Any criterior according to which entailment is not transitive is ipso facto wrong. It seems in fact incredible that anyone should admit that B follows from A, and C follows from B, but feel that some further argument was required to estabilish that A entails C. What better argument for $A \to C$ could one want? (Anderson Belnap, 1975)

In realtà ci sono molti logici, a partire da Bolzano, che studiano implicazioni non transitive.

Tennant (1987) ha mostrato la validità del cut in un diverso campo. Lui nega che $\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma$ segue da $\Gamma \Rightarrow \Delta, A$ $A, \Pi \Rightarrow \Sigma$ nel caso in cui Γ, Π, quindi l'antecedente, sia inconsistente, o Δ, Σ sia logicamente valido. Il suo scopo è, da una parte, quello di costruire un concetto di rilevanza delle premesse di un argomento, che non necessiti dell'introduzione di nuovi connettivi, ma che dipenda solo dall'analisi della relazione di deducibilità; dall'altra parte vuole realizzare un calcolo che sia adeguato rispetto ad una nozione semantica naturale dell'implicazione.

Molti logici, potremmo dire la maggior parte, non mette in dubbio la validità del cut, ma ne vuole dimostrare la ridondanza. Lo stesso Gentzen dimostra L'*Hauptsatz* (un cut elimination theorem) per LK. Ma in cosa consiste un cut elimination theorem? Ci sono due caratteristiche che deve soddisfare per essere definito tale:

- Deve dimostrare che tutte le deduzioni che ottengo tramite il cut possono essere ottenute con deduzioni prive di cesure.

- Deve darmi una procedure effettiva per passare da una dimostrazione con cesure ad una cut free.

Ci sono teoremi che mostrano sono il primo punto, che quindi non ci forniscono un metodo per passare da una deduzione con cesure a una cut free, come per esempio il teorema d Rousseau (1967) per $\mathbf{LLuk}_3$.

Analizziamo adesso perché è interessante avere un *cut elimination theorem.*

1. *Benefici tecnici del cut elimination.* In alcuni casi permette di provare se un certo calcolo è decidibile o meno (ovvero, se in un numero finito di passi, data una qualunque sequenza, sono in grado di dimostrarla o meno).

   Un altro risultato importante che otteniamo tramite l'eliminazione del cut è la dimostrazione che la logica intuizionistica è prima (se posso provare $A \vee B$ allora posso provare A oppure B, ovviamente il provare nel senso intuizionistico, quindi sono in grado di esibire una prova di A oppure di B); Inoltre ci consente di provare che sia la logica intuizionistica che quella classica godono della proprietà dell'interpolazione (Se è dimostrabile $A \to B$, allora vale almeno uno dei seguenti casi: $\vdash \neg A$; $\vdash B$; oppure esiste una formula C, l'interpolante, scritta nel linguaggio comune di A e B t.c. $\vdash A \to C$ e $\vdash C \to B$)

2. *Analiticità.* Come abbiamo visto all'inizio del paragrafo, la regola del cut ci permette di eliminare, di tagliare una certa formula nella nostra deduzione. Questo comparta che da sopra a sotto io ho una perdita di informazioni, una formula scompare. Se ammettiamo la regola della cesura perdiamo una proprietà desiderabile per il nostro calcolo: *la proprietà della sottoformula*[1]; citando Gentzen (1935, p. 69)

   > Perhaps we may express the essential properties of such a normal proof by saying: it is not roundabout. No concepts enter into the proof other than those contained in its final result, and their use was therefore essential to the achievement of that result.

   La proprietà della sottoformula è utilizzata in modo essenziale nelle dimostrazioni citate nel punto precedente (interpolazione classica e intuizionistica, primalità e decidibilità di un calcolo). Inoltre, è indispensabile per avere un calcolo analitico (con calcolo analitico si intende un certo calcolo che, se preso un qualunque teorema dimostrabile con quel dato calcolo, io sono in grado, analizzando la sua struttura logica, di fare una ricerca verso l'alto, ovvero ripercorrendo la dimostrazione dalla conclusione posso arrivare agli assiomi). Banalmente, si perde

[1] Data una certa formula A, l'insieme delle sue sottoformule è definito come segue:

- A è sottoformula di se stessa.
- Se A è una costante proposizionale, allora A è l'unica sua sottoformula.
- Se A è della forma $B \circ C$ dove $\circ$ è un connettivo binario, allora le sottoformule di B e C saranno sottoformule di A. Se A è della forma $\neg B$ le sottoformule di B saranno sottoformule di A.
- Se A è della forma QxB dove Q è un quantificatore qualsiasi, tutte le sottoformule di $B_{[x/t]}$ dove t è un termine individuale qualsiasi, saranno sottoformule di A.

l'analiticità se fallisce la proprietà della sottoformula. Quindi, un calcolo è analitico se dall'alto verso il basso parte da assiomi semplici e poi aumenta la complessità dei teoremi dimostrati; inoltre, tutte le formule occorrenti nella premessa sono sottoformule di formule occorrenti nella conclusione.

3. *Conservatività.* Il principio della sottoformula (e quindi, per le ragioni precedenti, il cut-elimination) porta con sé alcune importanti proprietà.

   Consideriamo il frammento di LK che contiene solo ($\rightarrow\Rightarrow$) e ($\Rightarrow\rightarrow$) e le regole strutturali. Estendiamo adesso, ammettendo anche ($\wedge \Rightarrow$) e ($\Rightarrow \wedge$). Ci si può domandare adesso se non si dà il caso che qualche sequenza che non contiene congiunzioni che sia indimostrabile nel primo frammento sia indimostrabile anche nel secondo? Possiamo dare risposta affermativa se il nostro calcolo rispetta il principio della sottoformula[2]. Dare risposta affermativa equivale a dire che il secondo frammento è un'estensione conservativa del primo, e come abbiamo visto è essenziale che il calcolo sia cut-free.

2.2.5 Regole strutturali

In questo ultimo paragrafo affronteremo inizialmente cosa comporti nel nostro calcolo eliminare completamente le regole strutturali. Nella seconda parte invece ci soffermeremo ad anlazziare quali sono gli effetti benefici delle regole strutturali e cosa comportano nel nostro apparato deduttivo.

Cominciamo quindi con considerare calcoli privi di regole strutturali. Esempi di logiche, che già abbiamo citato, di questo tipo sono LL, la logica lineare, e FL, i free Lambek calculi. É facile notare che l'avere tutte le regole nel nostro calcolo mi riduce fortemente il suo potere espressivo. Infatti, le regole strutturali fanno si che diverse interpretazioni dei connettivi possano collassare sullo stesso. Per vedere come questo sia possibile consideriamo due esempi:

Esempio 1. *Consideriamo la seguente frase (Girard, 1995):*

(1) For 1\$ you get a pack of Camel and a pack of Malboro

[2]Equivalentemente, se il nostro calcolo possiede la proprietà della sotto formula o se è dimostrabile il cut-elimination theorem.

Supponiamo che 1\$ sia sufficiente a comprare un solo pacchetto di sigarette, quale che sia la marca. Adesso ci chiediamo se è vero che con 1\$ posso comprare un pacchetto di Camel e *uno di Malboro. La risposta dipende da come interpretiamo quella* e. *Se interpretiamo la congiunzione come compimento delle due azioni (comprare un pacchetto di Malboro e comprare un pacchetto di Camel) come concorrenti, cioè che devono avvenire simultaneamente, la risposta sarà negativa; ovvero: (1) è falsa. Se, invece, interpreto la e in modo statico, nel senso che è vero che con 1\$ posso comprare uno qualunque dei due pacchetti, ma, e qui sta la differenza, posso decidere quale, allora (1) è vera. Chi sostiene che nel linguaggio naturale il significato di e sia uniforme, crede che in (1) vi sia un operatore modale, un $\diamond$ da leggere come* ***è possibile che*** *nascosto. Con questa interpretazione (1) può essere interpretata in due diversi modi:*

(2) *É possibile che con 1\$ io possa comprare un pacchetto di Camel e uno di Malboro*

(3) *É possibile che con un 1\$ io possa comprare un pacchetto di Camel ed è possibile che con 1\$ io possa comprare un pacchetto di Malboro.*

Se io avessi l'attenuazione e la contrazione queste interpretazioni potrebbero tranquillamente collassare l'una sull'altra. Infatti, quello che qui è fondamentale è la risorsa iniziale, il dollaro. Formalmente potrei esprimere (1) come $A \Rightarrow B \wedge C$, dove A sta per ho un dollaro, B compro un pacchetto di Camel e C compro un pacchetto di Malboro.

Queste due interpretazioni corrispondono a due diverse regole di introduzione della congiunzione a destra:

$$\frac{A \Rightarrow B \qquad A \Rightarrow C}{A \Rightarrow B \wedge C}\,(\wedge R) \qquad\qquad \frac{A \Rightarrow B \qquad A \Rightarrow C}{A, A \Rightarrow B \wedge C}\,(\wedge R)'$$

É facile vedere come tramite le regole strutturali potrei farli collassare l'uno sull'altro:

$$\frac{\dfrac{A \Rightarrow B \qquad A \Rightarrow C}{A \Rightarrow B \wedge C}\,(\wedge R)}{A, A \Rightarrow B \wedge C}\,(WL) \qquad\qquad \frac{\dfrac{A \Rightarrow B \qquad A \Rightarrow C}{A, A \Rightarrow B \wedge C}\,(\wedge R)'}{A \Rightarrow B \wedge C}\,(CL)$$

Esempio 2. *Consideriamo la seguente frase:*

($*$) *Luca aprì la porta e uscì dalla stanza.*

Questo uso della congiunzione solitamente viene inteso come sequenziale*, la e la intendiamo come* e dopo*. Questo tipo di congiunzione non può essere resa con* $\wedge$ *perché quest'ultima è commutativa, mentre nel nostro esempio l'ordine conta! É quindi immediato capire come la regola dello scambio giochi un ruolo essenziale in questa interpretazione.*

Secondo Grice, dietro ogni frase non c'è soltanto un significato letterale ma anche delle informazioni che restano implicite. Così posiamo dire che $(*)$ *è vera, e che ci dice semplicemente che le due azioni (Luca apre la porta e Luca esce dalla stanza) occorrono, ma che l'ordine è racchiuso solo nel senso della frase. Così:*

$(**)$ *Luca uscì dalla stanza e aprì la porta*

è vera, ma il suo contenuto implicito è falso.

Dopo aver visto i motivi per cui ha senso, almeno per qualcuno, eliminare una o più regole strutturali, è arrivato il momento di chiederci ***cosa comporta l'averle nel nostro calcolo.***

Equivalenze

Dopo la tesi di dottorato di Gentzen, e quindi dopo l'introduzione del calcolo delle sequenze, si svilupparono moltissime varianti di LK, ad esempio $G3_c$ oppure il calcolo di Oiva Ketonen dove rimpiazza le regole di $(\wedge L)$, $(\vee R)$ e $(\rightarrow L)$ rispettivamente con:

$$\frac{A, B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,(\wedge L)' \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \vee B}\,(\vee R)'$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \rightarrow B, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,(\rightarrow L)'$$

Proviamo adesso a vedere come posso derivare $(\wedge L)'$ in LK:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A, B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \wedge B, B, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,(\wedge L)}{B, A \wedge B, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,(EL)}{A \wedge B, A \wedge B, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,(\wedge L)}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,(CL)$$

Analogamente si può fare per $(\vee R)'$ e $(\rightarrow L)'$ e, ovviamente si possono derivare le regole di LK date le varianti. Evitiamo pedanterie derivando $(\vee R)'$

e $(\wedge L)$, $(\vee R)$; ci soffermiamo,invece, un attimo sulle più interessanti regole dell'implicazione. Prima facciamo vedere come $(\to L)'$ sia derivabile in LK:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \qquad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \to B, \Gamma, \Gamma \Rightarrow \Delta, \Delta}\,{\scriptstyle(\to L)}}{A \to B, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,{\scriptstyle(CL)(CR)(EL)(ER)}$$

Adesso deriviamo $(\to L)$ data $(\to L)'$ e le restanti regole di LK:

$$\dfrac{{\scriptstyle(WL)(WR)(EL)(ER)}\,\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma, A} \qquad \dfrac{B, \Pi \Rightarrow \Sigma}{B, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}\,{\scriptstyle(WL)(WR)(EL)(ER)}}{A \to B, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}\,{\scriptstyle(\to L)'}$$

Se analizziamo $(\to L)$ e $(\to L)'$ notiamo che differiscono soltanto per i contesti. Le premesse di $(\to L)'$ devono avere lo stesso contesto, cosa che non è richiesta nella corrispettiva regola di LK. Per questo motivo regole come $(\to L)'$ sono chiamate *sharing* (o *context-dependent*) e quelle del tipo di $(\to L)$*non-sharing* (o *context-free*).

Consideriamo adesso le seguenti varianti delle regole di LK per $(\wedge R)$, $(\vee L)$ e $(\to R)$:

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \qquad \Pi \Rightarrow \Sigma, B}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma, A \wedge B}\,{\scriptstyle(\wedge R)'} \qquad \dfrac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta \qquad B, \Pi \Rightarrow \Sigma}{A \vee B, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}\,{\scriptstyle(\vee L)'}$$

$$\dfrac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta A \to B}\,{\scriptstyle(\to R)'_1} \qquad \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \to B}\,{\scriptstyle(\to R)'_2}$$

Come prima si può facilmente vedere come passare da queste varianti a quelle di LK[3].

Per dimostrare queste equivalenze si fa un uso essenziale delle regole strutturali. Ci possiamo quindi chiedere, e in parte lo abbiamo già fatto, cosa succederebbe al nostro calcolo se eliminassi una o più di queste regole. Non avendo più una o più regole strutturali, non siamo più in grado di dimostrare l'equivalenza trai diversi schemi che abbiamo considerato, quindi, in accordo con il punto di vista di Gentzen secondo cui le regole operazionali definiscono il significato dei vari connettivi, non potremmo non concludere che ci troviamo in presenza di due connettivi diversi.

Supponiamo adesso di essere in una certa variante di LK con le seguenti caratteristiche:

[3]Per $(\wedge R)'$ lo abbiamo fatto vedere nell'esempio 1 di questo stesso paragrafo. Gli altri casi sono analoghi.

- Non ci sono le due regole di attenuazione
- Le regole della congiunzione sono date da $(\wedge L)$ e $(\wedge R)'$
- Le regole della disgiunzione sono date da $(\vee L)'$ e $(\vee R)$

In linea teorica, in un sistema così definito, io non posso avere altre congiunzioni o disgiunzioni, dato che non posso dimostrare l'equivalenza (perché il calcolo è privo di attenuazione) con altri schemi. Tuttavia, in questa specifica variante di LK posso derivarmi le due regole (ristrette) di attenuazione:

$$\dfrac{(\wedge L)\,\dfrac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad \dfrac{A \Rightarrow A \qquad B \Rightarrow B}{A, B \Rightarrow A \wedge B}\,(\wedge R)'}{A, B, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,(cut)$$

$$\dfrac{(\vee R)\,\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \vee B} \qquad \dfrac{A \Rightarrow A \qquad B \Rightarrow B}{A \vee B \Rightarrow A, B}\,(\vee L)'}{\Gamma \Rightarrow \Delta, B, A}\,(cut)$$

Adesso vediamo come possiamo, tramite queste due versioni delle regole di attenuazione, dimostrare l'equivalenza dei nostri schemi per la disgiunzione e per la congiunzione[4].

Alla luce di questi risultati, la visione di Gentzen sembra un po' riduttiva: non è così semplice vedere se è un certo schema ci sta definendo o meno un nuovo connettivo.

Possiamo quindi dire che le regole a una premessa di Ketonen e le regole a due premesse di Gentzen o, equivalentemente, le regole a una premessa di Gentzen insieme alle regole a due premesse $(\wedge R)'$ e $(\vee L)'$, ci permettono di derivare all'interno del nostro calcolo *sottostrutturale*, alcune regole strutturali. Questo è un primo metodo per reintrodurre le regole strutturali in contesti sottostrutturali, ne vedremo altri nel quarto capitolo.

Si deve inoltre notare che le coppie $(\wedge L)$, $(\wedge R)$ e $(\wedge L)'$, $(\wedge R)'$ (come le coppie $(\vee L)$, $(\vee R)$ e $(\vee L)'$, $(\vee R)'$) definiscono connettivi diversi se eliminiamo la contrazione, o l'attenuazione o entrambe. Proprio per questo, spesso si indicano con due connettivi diversi: si utilizza $\wedge$ e $\vee$ per le regole di Gentzen e $\otimes$ per $(\wedge L)'$, $(\wedge R)'$ e $\oplus$ per $(\vee L)'$, $(\vee R)'$. Si è soliti utilizzare questi simboli per il legami con i reticoli, ma lo vedremo nel dettaglio più avanti.

[4]Analogamente potevamo considerare un sistema con $(\wedge L)'$, $(\wedge R)$, $(\vee L)$, $(\vee R)'$ e senza le due regole per la contrazione.

Capitolo 3

Alcuni calcoli delle sequenze di logiche sottostrutturali

In questo capitolo, dopo una breve parte introduttiva sulla lettura delle sequenze, e una parte preliminare dove introdurremo il linguaggio, andremo a vedere nel dettaglio alcuni calcoli per logiche sottostrutturali. Inizieremo con LL, la logica lineare priva di regole strutturali, per poi vedere come si modifica aggiungendo volta per volta diverse regole strutturali[1].

3.1 Come leggere le sequenze

In questo paragrafo analizzeremo le due principali letture (classica e intuizionista) e ne daremo altre due alternative.

3.1.1 Lettura classica basata sulla verità

Nell'interpretazione che Gentzen dà una sequenza della forma

$$A_1, A_2..., A_n \Rightarrow B_1, B_2..., B_m$$

ha lo stesso significato della formula classica

$$A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_n \rightarrow B_1 \vee B_2 \vee ... \vee B_m$$

ovvero, se $A_1, A_2..., A_n$ valgono, almeno una tra $B_1, B_2..., B_m$ vale.

[1]Seguiamo l'esposizione che utilizza Paoli in Substructural Logics: A Primer.

Siccome i connettivi classici sono verofunzionali, possiamo dare una lettura delle sequenze in modo classico, utilizzando soltanto i concetti di vero e falso:

(TB) $A_1, A_2..., A_n \Rightarrow B_1, B_2..., B_m$ vale SSE almeno un degli A_i è falso oppure almeno uno dei B_i è vero; dove nell'antecedente la virgola è letta come congiunzione e nel conseguente come disgiunzione.

Vediamo adesso tre casi particolari di sequenze:

1. $A \Rightarrow$
2. $\Rightarrow A$
3. $\Rightarrow$

Se il conseguente è vuoto deve essere letto come la disgiunzione di tutte le formule false, mentre se l'antecedente è vuoto va letto come la congiunzione di tutte le formule vere. Quindi, 1. vale SSE A implica il falso. Analogamente, 2. vale SSE A segue dalla congiunzione di tutte le formule vere. L'ultimo caso è quello più interessante, ci dice che $\Rightarrow$ SSE dalla congiunzione di tutte le formule vere, segue la disgiunzione di tutte le formule false o, più intuitivamente, se il vero implica il falso, ovvero se ho una contraddizione.

3.1.2 Lettura intuizionistica basata sulle prove

Ci sono due problemi nella lettura basata solamente sulle nozioni di verità e falsità che porta alla creazione di una nuova interpretazione: quella basata sulle prove, o dimostrazioni. Il primo problema riguarda le premesse; infatti qui si parla solo di valori di verità e non c'è niente che si riferisce alle prove, dimostrazioni o inferenze. Il secondo problema è che solitamente, in una dimostrazione, da un numero finito di premesse si giunge ad una sola conclusione, mentre nel nostro calcolo si ammette la possibilità di giungere a più di una conclusione (questo è dato dal fatto che nel conseguente è ammessa più di una formula). Questo secondo punto è in evidente contrasto con la struttura di LJ. Viene così data una diversa interpretazione alle sequenze, in ottica intuizionista. Quest'interpretazione è noa come *Interpretazione Brouwer-Heyting-Kolmogorov* (o più sinteticamente BHK). Questa lettura risulta molto chiara se riferita all'isomorfismo di Curry-Howard. Quello che ci interessa sapere è come sia possibile dimostrare una certa formula, risulta quindi utile etichettare le varie dimostrazioni, così che sia in grado di riconoscere le varie dimostrazioni di una stessa formula. In questo modo una certa formula può essere identificata con l'insieme delle sue dimostrazioni, e un'inferenza come un programma o lista di istruzioni per manipolare una dimostrazione. In quest'ottica le sequenze intuizionistiche possono essere lette come:

(PB) $A_1, A_2..., A_n \Rightarrow B$ vale SSE c'è una costruzione che mi trasforma le prove di $A_1, A_2..., A_n$ in una prova di B. Come per la logica classica, la virgola nell'antecedente viene intesa come una congiunzione.

Questa interpretazione ricalca, evidentemente, la semantica BHK per la logica intuizionista. Vediamo anche in questo caso che significato assumono le tre sequenze notevoli:

1. $A \Rightarrow$. Il conseguente vuoto può essere riempito con un assurdo, quindi questa sequenza è valida SSE esiste una costruzione che trasforma le prove di A in prove dell'assurdo, per il quale non ci possono essere dimostrazione.

2. $\Rightarrow A$ L'antecedente vuoto si intende come la congiunzione di tutte le formule dimostrabili, quindi vale SSE esiste una prova di A.

3. $\Rightarrow$ vale SSE da nessuna assunzione sono in grado di dimostrare l'assurdo, quindi, anche in questo caso, la sequenza vuota indica una contraddizione.

3.1.3 Letture alternative

Lettura informazionale

In un'ottica lineare ci domandiamo se sia possibile sostituire, nell'interpretazione intuizionistica, la parola *proof* con *datum* e il termine *formula* con *tipi di informazione*. La risposta è negativa, ed è dovuta alla presenza delle regole di attenuazione e contrazione. La logica lineare propone quindi un'interpretazione alternativa:

(I) $A_1, A_2..., A_n \Rightarrow B_1, B_2..., B_m$ vale sse c'è una procedura che dati in input $x_1, ..., x_n$ informazioni rispettivamente dei types $A_1, A_2..., A_n$, ci dà in output i data $y_1, ..., y_n$ dei tipi $B_1, B_2..., B_m$

Questa lettura enfatizza l'aspetto procedurale o computazionale della deduzione. Qui la virgola non è ben definita; al posto della congiunzione classica $\wedge$ si ha quella lineare $\otimes$, e, nel conseguente, al posto della disgiunzione $\vee$ si considera $\oplus$. Consideriamo adesso i tre casi particolari di sequenze:

1. $A \Rightarrow$. Il conseguente vuoto è letto come assurdo, quindi questa sequenza vale sse avendo in input data di tipo A io posso dedurre l'assurdo.

2. $\Rightarrow A$ Questa sequenza vale sse non avendo informazioni in input riesco ad avere una procedura che come output mi dia A, quindi se dalla pura logica sono in grado di dimostrare A.

3. $\Rightarrow$ Questa sequenza vale sse senza informazioni in input, e quindi dalla sola logica, io riesco ad avere in output l'assurdo, quindi a dimostrarlo. Anche in questo caso la sequenza vuota indica una contraddizione.

Lettura hobbesiana

C'è un'interpretazione che pone ancora più enfasi sull'aspetto computazionale della dimostrazione, prende nome da Hobbes che si può considerare il primo che abbia messo in evidenza lo stetto rapporto tra computazione e ragionamento:

> By ratiocination, I mean *computation*. Now to compute, is either to collect the sum of many things that are added together, or to know what remains when one things is taken out of another. *Ratiocination*[...] so that all ratiocination is comprehended in these two operations of the minds, addition and substraction[2].

(H) $A_1, A_2..., A_n \Rightarrow B_1, B_2..., B_m$ vale sse il contenuto informativo dei data $x_1, ..., x_n$, rispettivamente dei tipi $A_1, A_2..., A_n$, può essere ricostruito in modo tale da produrre informazioni $y_1, ..., y_n$ dei types $B_1, B_2..., B_m$.

Questa interpretazione è adatta alla *logica abeliana*, una logica dialetica che ammette contraddizioni esplicite, che comunque vedremo nel dettaglio più avanti.

Per quanto riguarda le regole strutturali, non sembra che, in una lettura delle sequenze di questo tipo, possano valere se non ristrette. I connettivi $\otimes$ e $\oplus$ hanno le stesse regole e quindi si possono identificare l'un l'altro; segue quindi, che la virgola ha lo stesso significato sia nell'antecedente che nel conseguente.

[2]Hobbes, *Elements of Philosophy* (I, 1,2)

1. $A \Rightarrow$ e $\Rightarrow A$ ci dicono entrambe che A non è informativa.

2. $\Rightarrow$ In questa interpretazione la sequenza vuota esprime una verità banale.

3.2 Definizioni preliminari e convenzioni notazionali.

Seguirò la notazione che utilizza Paoli in *Substructural logics: A Primer*. Trovo utile riportare anche la tabella dei principali connettivi Paoli 2002, pagina 42.

Paoli 2002	Girard 1987	Troelstra 1992	Restall 2000
$\neg$	$\perp$	$\sim$	$\sim$
$\otimes$	$\otimes$	$\star$	$\circ$
$\oplus$		$+$	$+$
$\wedge$	$\&$	$\sqcap$	$\wedge$
$\vee$	$\oplus$	$\sqcup$	$\vee$
$\rightarrow$	$\multimap$	$\multimap$	$\rightarrow$
$!$	$!$	$!$	$!$
$?$	$?$	$?$	$?$
$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$
$\mathbf{0}$	$\perp$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$
$\mathbf{T}$	$\mathbf{T}$	$\mathbf{T}$	$\mathbf{T}$
$\perp$	$\mathbf{0}$	$\perp$	$\perp$

Definizione 4. (Linguaggio)
Avremo a che fare solo con linguaggi proposizionali, con un insieme numerabile di variabili proposizionali e un certo numero di connettivi presi da questo insieme:

$$\{\neg, \otimes, \oplus, \rightarrow, \wedge, \vee, \supset, \mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{T}, \perp, !, ?\}$$

Dove $\otimes, \oplus, \rightarrow, \wedge, \vee, \supset$ sono connettivi binari, $\neg, !, ?$ sono connettivi unari, $\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{T}, \perp$ sono costanti proposizionali. $\neg, \otimes, \oplus, \rightarrow, \mathbf{1}, \mathbf{0}$ sono chiamati gruppali (*group-theoretical*), mentre $\wedge, \vee, \supset, \mathbf{T}, \perp$ sono detti reticolari (*lattice-theoretical*); infine, ! e ? sono esponenziali.

Di volta in volta specificheremo quali connettivi sono ammessi nel linguaggio della logica in esame.

In questo capitolo utilizzerò le lettere greche per indicare i contesti, che sono multinsiemi, delle sequenze. Per il resto, rimane valido quello già detto per **LK** nel primo capitolo.

3.3 Calcoli delle sequenze

Cominciamo quindi a prendere in esame **LL** per poi ampliarlo aggiungendo varie regole strutturali e (o) modificando quelle operazionali.

3.3.1 LL

Il calcolo LL ha come connettivi $\neg, \otimes, \oplus, \rightarrow, \wedge, \vee, \mathbf{1}, \mathbf{0}$. Adiamo adesso le regole di **LL**:

Definizione 5. (Regole di **LL**)

Assiomi

$$A \Rightarrow A$$

Regole strutturali

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \qquad A, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}\ (cut)$$

Regole operazionali

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\neg A, \Gamma \Rightarrow \Delta,}\ (\neg L) \qquad \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg A}\ (\neg R)$$

$$\frac{A, B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \otimes B, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\otimes L) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \qquad \Pi \Rightarrow \Sigma, B}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma, A \otimes B}\ (\otimes R)$$

$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta \qquad B\Pi \Rightarrow \Sigma}{A \oplus B, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}\ (\oplus L) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \oplus B}\ (\oplus R)$$

[3] $$\frac{A_i, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A_1 \wedge A_2, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\wedge L) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \wedge B}\ (\wedge R)$$

[3] Dove i= 1, 2

$$\frac{A,\Gamma \Rightarrow \Delta \qquad B,\Gamma \Rightarrow \Delta}{A \vee B,\Gamma \Rightarrow \Delta}\,(\vee L) \qquad\qquad {}^{4}\,\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A_i}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A_1 \vee A_2}\,(\vee R)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \qquad B,\Pi \Rightarrow \Sigma}{A \rightarrow B,\Gamma,\Pi \Rightarrow \Delta,\Sigma}\,(\rightarrow L) \qquad\qquad \frac{A,\Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \rightarrow B}\,(\rightarrow R)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\mathbf{1},\Gamma \Rightarrow \Delta}\,(\mathbf{1}L) \qquad\qquad \Rightarrow \mathbf{1}_{(\mathbf{1}R)}$$

$$\mathbf{0} \Rightarrow_{(\mathbf{0}L)} \qquad\qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \mathbf{0}}\,(\mathbf{0}R)$$

Vediamo adesso un teorema che ci permette di caratterizzare il significato delle sequenze in **LL**:

Teorema 1. **(i)** $\vdash_{\boldsymbol{LL}} A_1, A_2..., A_n \Rightarrow B_1, B_2..., B_m$ *sse*

$$\vdash_{\boldsymbol{LL}} A_1 \otimes A_2 \otimes ... \otimes A_n \rightarrow B_1 \oplus B_2 \oplus ... \oplus B_m \ (per n, m > 0)$$

(ii) $\vdash_{\boldsymbol{LL}} A_1, A_2..., A_n \Rightarrow$ *sse* $\vdash_{\boldsymbol{LL}} \neg(A_1 \otimes A_2 \otimes ... \otimes A_n)$ *(per n>0 e m=0)*

(iii) $\vdash_{\boldsymbol{LL}} \Rightarrow B_1, B_2..., B_m$*sse* $\vdash_{\boldsymbol{LL}} B_1 \oplus B_2 \oplus ... \oplus B_m$ *(per m>0 e n=0)*

Dimostrazione. **(i)** Da sinistra a destra

$$\frac{\dfrac{\dfrac{A_1, A_2..., A_n \Rightarrow B_1, B_2..., B_m}{A_1 \otimes A_2 \otimes ... \otimes A_n \Rightarrow B_1, B_2..., B_m}\,(\otimes L)}{A_1 \otimes A_2 \otimes ... \otimes A_n \Rightarrow B_1 \oplus B_2 \oplus ... \oplus B_m}\,(\oplus R)}{\Rightarrow A_1 \otimes A_2 \otimes ... \otimes A_n \rightarrow B_1 \oplus B_2 \oplus ... \oplus B_m}\,(\rightarrow R)$$

Da destra a sinistra.

Sia $F = A_1 \otimes A_2 \otimes ... \otimes A_n$ e $G = B_1 \oplus B_2 \oplus ... \oplus B_m$ e sia D la seguente dimostrazione:

$$\frac{\dfrac{\dfrac{A_1 \Rightarrow A_1 \qquad A_2 \Rightarrow A_2}{A_1 A_2 \Rightarrow A_1 \otimes A_2}}{A_1, A_2..., A_n \Rightarrow F} \qquad \dfrac{\dfrac{F \Rightarrow F \qquad G \Rightarrow G}{F \rightarrow G, F \Rightarrow G} \qquad \Rightarrow F \rightarrow G}{F \Rightarrow G}}{A_1, A_2..., A_n \Rightarrow G}$$

Uniamo D al seguente albero:

[4]Dove i= 1, 2

$$\dfrac{A_1, A_2..., A_n \Rightarrow G \qquad \dfrac{\dfrac{B_1 \Rightarrow B_1 \qquad B_2 \Rightarrow B_2}{B_1 \oplus B_2 \Rightarrow B_1, B_2}}{G \Rightarrow B_1, B_2..., B_m}}{A_1, A_2..., A_n \Rightarrow B_1, B_2..., B_m}$$

(ii) Da sinistra a destra.

$$\dfrac{\dfrac{A_1, A_2..., A_n \Rightarrow}{A_1 \otimes A_2 \otimes ... \otimes A_n \Rightarrow}}{\Rightarrow \neg(A_1 \otimes A_2 \otimes ... \otimes A_n)}$$

Da destra a sinistra

$$\dfrac{\Rightarrow \neg(A_1 \otimes A_2 \otimes ... \otimes A_n) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{A_1 \Rightarrow A_1 \qquad A_2 \Rightarrow A_2}{A_1 A_2 \Rightarrow A_1 \otimes A_2}}{A_1, A_2..., A_n \Rightarrow A_1 \otimes A_2 \otimes ... \otimes A_n}}{\neg(A_1 \otimes A_2 \otimes ... \otimes A_n), A_1, A_2..., A_n \Rightarrow}}{A_1, A_2..., A_n \Rightarrow}$$

(iii) Da sinistra a destra.

$$\dfrac{\Rightarrow B_1, B_2..., B_m}{\Rightarrow B_1 \oplus B_2 \oplus ... \oplus B_m}$$

Da destra a sinistra.

$$\dfrac{\Rightarrow B_1 \oplus B_2 \oplus ... \oplus B_m \qquad \dfrac{\dfrac{B_1 \Rightarrow B_1 \qquad B_2 \Rightarrow B_2}{B_1 \oplus B_2 \Rightarrow B_1, B_2}}{B_1 \oplus B_2 \oplus ... \oplus B_m \Rightarrow B_1, B_2..., B_m}}{\Rightarrow B_1, B_2..., B_m}$$

$\square$

Dal teorema segue la seguente definizione:

Definizione 6. (traduzione in formula di una sequenza) Data una sequenza della forma $A_1, A_2..., A_n \Rightarrow B_1, B_2..., B_m$, la sua traduzione in formula $t(A_1, A_2..., A_n \Rightarrow B_1, B_2..., B_m)$ è definita:

- $A_1 \otimes A_2 \otimes ... \otimes A_n \rightarrow B_1 \oplus B_2 \oplus ... \oplus B_m$ $(per n, m > 0)$

- $\neg(A_1 \otimes A_2 \otimes ... \otimes A_n)$ (per n>0 e m=0)
- $B_1 \oplus B_2 \oplus ... \oplus B_m$ (per m>0 e n=0)
- $\mathbf{0}$ (per n,m=0)

Diamo adesso alcune definizioni che ci sarà utili più avanti:

Definizione 7. (*p-count*, van Benthem 1991) Il p-count c(p; A) di una formula A del linguaggio ristretto $\{\neg, \otimes, \oplus, \rightarrow, \mathbf{1}, \mathbf{0}\}$ rispetto alla variabile proposizionale p è:

c(p; p)= 1	c(p; q)= 0 se $p \neq q$
c(p;$\mathbf{1}$)= 0	c(p; $\mathbf{0}$)= 0
$c(p; \neg A) = -c(p; A)$	$c(p; A \rightarrow B) = c(p; B) - c(p; A)$
$c(p; A \otimes B) = c(p; A) + c(p; B)$	$c(p; A \oplus B) = c(p; A) + c(p; B)$

Il p-count di $c(p; \Gamma)$ di un multinsieme Γ è ottenuto definendo $c(p; A_1, A_2..., A_n)$ come $\sum c(p; A_i)$, se Γ è vuoto il p-count è uguale a zero.

Definizione 8. Chiamiamo $\mathbf{LL}_g$ il calcolo ottenuto da **LL** utilizzando il linguaggio ristretto $\{\neg, \otimes, \oplus, \rightarrow, \mathbf{1}, \mathbf{0}\}$

Definizione 9. (Calcolo bilanciato)

Un dato calcolo **S** è detto bilanciato sse, per ogni sequenza $\Gamma \Rightarrow \Delta$ dimostrabile in **S**, vale che $c(p; \Gamma) = c(p; \Delta)$ per ogni variabile p.

Teorema 2. *$\mathbf{LL}_g$ è bilanciato.*

Osservazione 3. *Dal teorema precedente segue che le sequenze dimostrabili in $\mathbf{LL}_g$ sono solo quelle avente il p-count dell'antecedente uguale a quello del conseguente.*

Abbiamo quindi un metodo immediato per vedere se una certa sequenza è dimostrabile o meno in $\mathbf{LL}_g$

Costruiamo un modello di **LL** e definiamo:

Definizione 10. (Valutazione)

Sia v^* una funzione t.c.:

v^*: $var(\mathcal{L}) \rightarrow \mathbb{Z}$.

Definamo una valutazione v in questo modo:

$v(p) = v^*(p)$	$v(\neg A) = 1$
$v(A \rightarrow B) = 1 - v(A) + v(B)$	$v(A \otimes B) = v(A) + v$(B)-1
$v(\mathbf{1}) = 1$	$vA(\oplus B) = v(A) + v(B)$
$v(A \wedge B) = min(v(A); v(B))$	$v(\mathbf{0}) = 0$
$v(A \vee B) = max(v(A); v(B))$	

Osservazione 4. *É facile dimostrare che se* $\vdash_{\boldsymbol{LL}} \Gamma \Rightarrow \Delta$*, allora* $v(\Gamma \Rightarrow \Delta) > 0$*. Abbiamo quindi un metodo immediato per vedere se una sequenza non è dimostrabile in* ***LL****.*

3.3.2 $\mathbf{LL}^{\Lambda}$

Come abbiamo detto all'inizio di questo capitolo, partendo da **LL** possiamo modificare il calcolo aggiungendo varie regole, ottenendo così calcoli diversi, ma sempre appartenenti alla classe delle logiche sottostrutturali. Cominciamo aggiungendo la sequenza vuota, ottenendo quella che abbiamo chiamato interpretazione hobbesiana (dove la sequenza vuota *non* è una contraddizione, ma è banalmente vera).

Diamo subito i postulati di $\mathbf{LL}^{\Lambda}$

Definizione 11. (Postulati di $\mathbf{LL}^{\Lambda}$)

Il linguaggio di $\mathbf{LL}^{\Lambda}$ è lo stesso di **LL**.

Il calcolo $\mathbf{LL}^{\Lambda}$ ha tutti i postulati di **LL** più

$$\Rightarrow_{(\Lambda)}$$

3.3.3 $\mathbf{LL}^{B}$

Partendo da **LL** vediamo cosa succede se aggiungiamo **T** e $\bot$.

Il calcolo che si ottiene è equivalente alla *Logica Lineare Sottoesponenziale* (Troeltstra, 1992).Diamo i postulati di $\mathbf{LL}^{B}$:

Definizione 12. (Postulati di $\mathbf{LL}^{B}$)

Il linguaggio di $\mathbf{LL}^{B}$ è $\mathcal{L} = \{\neg, \otimes, \oplus, \rightarrow, \wedge, \vee, \mathbf{1}, \mathbf{0}, \ \mathbf{T}, \bot\}$ I postulati sono quelli di **LL** ai quali aggiungiamo:

$$\bot, \Gamma \Rightarrow \Delta \qquad\qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, \mathbf{T}$$

3.3.4 $\mathbf{LR}^{ND}$

Il calcolcolo che otteniamo da **LL** aggiungendo le regole di contrazione, prende il nome di *logica rilevante* (o della rilevanza). Il calcolo che prendiamo in esame nello specifico, è stato presentato da Meyer (1966), è una variante del calcolo originario proposto da Anderson e Belnap (1975) che vedremo nel prossimo capitolo, ed è noto come *distributionless relevance logic*. Diamo quindi i postulati:

Definizione 13. (Postulati di $\mathbf{LR}^{ND}$)

Come abbiamo detto è un'estensione di **LL**, il linguaggio è lo stesso di **LL** ($\mathcal{L} = \{\neg, \otimes, \oplus, \rightarrow, \wedge, \vee, \mathbf{1}, \mathbf{0}\}$), così come i postulati ai quali si aggiungono però le due seguenti regole:

$$\frac{A, A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (CL) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}\ (CR)$$

Osservazione 5. *Il termine distributionless sta per il fatto che in $\boldsymbol{LR}^{ND}$ non si dimostrano le sequenze corrispondenti alle leggi di stributività ($A\wedge(B\vee C) \rightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ e $(A \vee B) \wedge (A \vee C) \rightarrow A \wedge (B \vee C)$), perchè ho bisgono anche dell'attenuazione, che invece in **LR** valgono.*

Cerchiamo adesso di trovare un teorema simile a quello per $\mathbf{LL}_g$, il teorema 2, perchè anche $\mathbf{LR}^{ND}$ ha un carattere moderatamente bilanciato. Come per $\mathbf{LL}_g$ diamo alcune definizioni che ci saranno utili:

Definizione 14. (antecedente/conseguente)

Sia A una formula nel linguaggio di $\mathbf{LR}^{ND}$, il concetto di parte antecedente e conseguente di A è definito nel seguente modo:

(i) A è parte conseguente di se stessa

(ii) Se $\neg B$ è una parte conseguente (antecedente) di A, allora B è una parte antecedente (conseguente) di A

(iii) Se $B \rightarrow C$ è una parte conseguente (antecedente) di A, allora B è una parte antecedente (conseguente) e C è una parte conseguente (antecedente) di A.

(iv) Se $B \oplus C$ $(B \otimes C)$ è una parte conseguente (antecedente) di A, allora B e C sono parti conseguenti (antecedenti) di A.

(v) Se $B \wedge C$ $(B \vee C)$ è una parte conseguente (antecedente) di A, allora B e C sono parti conseguenti (antecedenti) di A.

Definizione 15. Con $\mathbf{LR}_g^{ND}$ intendiamo il calcolo $\mathbf{LR}^{ND}$ con il linguaggio ristretto a $\{\neg, \otimes, \oplus, \rightarrow, \mathbf{1}, \mathbf{0}\}$

Teorema 3. *(lemma di rilevanza, Anderson e Belnap 1975)*

Se $\Gamma \Rightarrow \Delta$ è dimostrabile in $\boldsymbol{LR}^{ND}$ allora ogni variabile in $\Gamma \cup \Delta$ occorre in $t(\Gamma \Rightarrow \Delta)$ almeno una volta come parte antecedente e una come parte conseguente.

Il teorema precedente non vale per $\mathbf{LR}^{ND}$; consideriamo quindi la seguente generalizzazione:

Teorema 4. *(lemma di rilevanza indebolito, Maksimova 1967)*
Se la sequenza $\Gamma \Rightarrow \Delta$ è dimostrabile in $\boldsymbol{LR}_g^{ND}$ e $t(\Gamma \Rightarrow \Delta)$ non contiene parti antecedenti della forma $A \wedge B$ né parti conseguenti della forma $A \vee B$, allora ogni variabile in $\Gamma \cup \Delta$ occorre in $t(\Gamma \Rightarrow \Delta)$ almeno una volta come parte antecedente e almeno una come parte conseguente.

3.3.5 LA e varianti

Vediamo adesso cosa succede se aggiungiamo l'attenuazione. Abbiamo due possibili strade da intraprendere:

- Possiamo considerare $\mathbf{LR}^{ND}$ e aggiungerci le due regole di attenuazione. Questo comporterebbe la dimostrabilità della traduzione in sequenze delle formule di distributività. Ancora più interessante, si avrebbe il collasso dei connettivi $\wedge$ e $\otimes$ l'uno nell'altro così come, analogamente, diventerebbero un solo connettivo $\vee$ e $\oplus$. Quello che ne uscirebbe fuori è calcolo per la logica classica, un calcolo equivalente a **LK**.

- In alternativa possiamo considerare il nostro calcolo di partenza, **LL**, e aggiungere l'attenuazione. Il calcolo che ne risulta viene chiamato *contraction-free logic*, **LA** o logica affine.

Questo tipo di logiche senza contrazione sono state studiate inizialmente da Wang (1963), per poi essere approfondita da Grishin (1974; 1982). Dal punto di vista semantico è da ricordare il lavoro di Ono (1985).

Definizione 16. (postulati di **LA**) Il linguaggio e i postulati sono quelli di **LL** ai quali si aggiungono le regole di attenuazione:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (WL) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}\ (WR)$$

Di **LA** ci sono almeno due importanti varianti da considerare: $\mathbf{LA}^{B}$ e $\mathbf{LA}^{\Lambda}$. La prima variante prende il nome di *bounded comparative logic*, studiata da Casari (1989, 1997); la seconda come frammento subesponenziale della logica lineare affine da Kopylov (1995).

Definizione 17. (postulati di $\mathbf{LA}^B$)

$\mathcal{L} = \{\neg, \otimes, \oplus, \rightarrow, \wedge, \vee, \mathbf{1}, \mathbf{0}, \ \mathbf{T}, \bot\}$

I postulati sono quelli di **LA** ai quali si aggiunge:

$$\bot, \Gamma \Rightarrow \Delta \qquad\qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, \mathbf{T}$$

Definizione 18. (postulati di $\mathbf{LA}^\Lambda$)

Il calcolo $\mathbf{LA}^\Lambda$ ha lo stesso linguaggio di **LA**. I postulati sono quelli di **LA** ai quali si aggiunge:

$$\Rightarrow_{(\Lambda)}$$

Teorema 5. (i) $\boldsymbol{LA}^B = \boldsymbol{LA}$

(ii) $\boldsymbol{LA}^\Lambda$ *è banale*

Dimostrazione. Per dimostrare (i) basta far vedere che i due nuovi connettivi collassano in altri già presenti nel linguaggio di **LA**. In particolare vogliamo far vedere che **0** collassa su $\bot$ e che **1** collassa su **T**.

$$\frac{\Rightarrow \mathbf{1}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \mathbf{1}}\,(WL;WR) \qquad\qquad \frac{\mathbf{0} \Rightarrow}{\mathbf{0}, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,(WL;WR)$$

$$\begin{array}{c} \Rightarrow \ \mathbf{T} \\ \vdots \\ \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\mathbf{T}, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,(WL;WR) \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} \bot \Rightarrow \\ \vdots \\ \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \bot}\,(WL;WR) \end{array}$$

Per (ii) basta far vedere che posso dimostrare tutto, ma questo è banale perché posso sempre attenuare la sequenza vuota, quindi avrò:

$$\frac{\Rightarrow}{\Gamma \Rightarrow \Delta}\,(WL;WR)$$

□

3.3.6 LC e LG

Abbiamo visto cosa succede al nostro calcolo se aggiungiamo una o tutte le regole strutturali. Adesso vedremo come reintrodurle in maniera indiretta o parziale, utilizzando *le regole strutturali ristrette*. Per fare ciò, abbiamo due alternative possibili:

1. Possiamo espandere le regole operazionali così da ricostruire parte del potere deduttivo all'interno del calcolo (per esempio le varianti di **LK** e **LJ** di Dragalin, 1998)

2. Possiamo aggiungere regole strutturali adeguatamente ristrette

Nel capitolo successivo vedremo un terzo metodo per reintrodurre le regole strutturali, ovvero manipolando le sequenze.

Nel capitolo precedente avevamo visto già alcune combinazioni di regole operazionali a una o due premesse che ci permettevano di derivare nel nostro calcolo con solo il cut, altre regole strutturali. In questo paragrafo continueremo questa indagine. Consideriamo, quindi, alcuni connettivi adeguatamente modificati per contenere alcune regole strutturali al loro interno.

Sia:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \qquad \Pi \Rightarrow \Sigma}{A \to B, \Gamma^*, \Pi^* \Rightarrow \Delta, \Sigma}\ (\to L^*)$$

Dove:

(i) $B \in \Gamma \cup \Pi$

(ii) Se $B \notin \Pi$, allora $\Gamma^* = \Gamma \setminus \{B\}$ e $\Pi = \Pi^*$

(iii) Se $B \in \Pi$, allora $\Pi^* = \Pi \setminus \{B\}$ e $\Gamma = \Gamma^*$

É facile vedere come $(\to L)$ sia un caso particolare di questa nuova definizione della regola d'implicazione a sinistra.

Questa versione generalizza dell'implicazione a sinistra incorpora certe forme di attenuazione. Si possono anche ottenere generalizzazioni di altri connettivi come $\oplus$ e $\otimes$:

$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta \qquad \Pi \Rightarrow \Sigma}{A \oplus B, \Gamma^*, \Pi^* \Rightarrow \Delta, \Sigma}\ (\oplus L^*) \qquad\qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \qquad \Pi \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta^*, \Sigma^*, A \otimes B}\ (\otimes R^*)$$

Con queste nuove regole operazionali possiamo definire il calcolo **LC**, la logica comparativa studiata da Casari (1989).

Definizione 19. (postulati di **LC**)

Il calcolo **LC** ha lo stesso linguaggio e gli stessi postulati di **LL** fatta eccezione per le regole di $(\to L), (\oplus L)$ e $(\otimes R)$ che sono rimpiazzate con le loro versioni * che abbiamo definito sopra.

Inoltre si aggiungono le regolo di contrazione e attenuazione bilanciate:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta, A}\,(BW) \qquad \frac{A, A, \Gamma \Rightarrow \Delta, A, A}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta, A}\,(BC)$$

La differenza delle regole bilanciate di attenuazione e contrazione rispetto a quelle classiche sta nel fatto che tutto quello che si fa nell'antecedente va fatto anche nel conseguente. É come se le due regole di attenuazione (contrazione) venissero riunite in una sola: la versione bilanciata.

Da **LC** possiamo passare facilmente a **LG**, la logica abeliana di Meyer e Slaney.

Definizione 20. (postulati di **LG**)

Il calcolo **LG** ha lo stesso linguaggio di **LC** (e quindi quello di **LL**) e lo otteniamo da **LC** aggiungendovi l'assioma Λ[5]

$$\Rightarrow_{(\Lambda)}$$

Teorema 6. *Le regole:*

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta \qquad \Pi \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}\,(BW^\star) \qquad \frac{\Gamma, \Pi, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma, \Sigma \qquad \Pi \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}\,(BC^\star)$$

*Sono derivabili in **LC** e **LG**.*

Teorema 7. *In **LG**:*

(i) *(BC) è superflua*

(ii) Λ *e* $(\to L^*)$ *sono rimpiazzabili da:*

$$\frac{B, \Gamma \Rightarrow \Delta, A}{A \to B, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,(\to L^{**})$$

(iii) $\boldsymbol{LG} \cup \{(\bot L); (\boldsymbol{T}R)\}$ *è banale.*

Dimostrazione. (i)

$$\frac{A, A, \Gamma \Rightarrow \Delta, A, A}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta, A}$$

diventa:

[5] Equivalentemente potevamo dire che **LG** si ottiene da $\mathbf{LL}^\Lambda$ aggiungendo le versioni $*$ dei connettivi sopra definiti.

$$\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A}{\Rightarrow A \to A} \qquad \dfrac{A, A, \Gamma \Rightarrow \Delta, A, A \qquad \Rightarrow}{A \to A, A, \Gamma \Rightarrow \Delta, A}}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta, A}$$

(ii) $(\to L^{**})$ è derivabile in **LG**:

$$\dfrac{B, \Gamma \Rightarrow \Delta, A \qquad \Rightarrow}{A \to B, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

Data $(\to L^{**})$, $(\to L^{*})$ e Λ sono dimostrabili:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ \Gamma \Rightarrow \Delta, A\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\vdots \\ \Pi \Rightarrow \Sigma\end{matrix}}{B, \Gamma^{*}, \Pi^{*} \Rightarrow \Delta, \Sigma, A}}{A \to B, \Gamma^{*}, \Pi^{*} \Rightarrow \Delta, \Sigma}\,(\to^{**}) \qquad \dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A}{\Rightarrow A \to A} \qquad \dfrac{A \Rightarrow A}{A \to A \Rightarrow}\,(\to L^{**})}{\Rightarrow}$$

(iii)

$$\dfrac{\dfrac{\bot, \Gamma \Rightarrow \Delta, \bot}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \bot \to \bot} \qquad \dfrac{\bot \Rightarrow \bot \qquad \Rightarrow}{\bot \to \bot \Rightarrow}}{\Gamma \Rightarrow \Delta}$$

$\square$

Vediamo adesso altre versioni alternative alle regole di attenuazione, delle versioni ristrette. Richiamiamo le regole di attenuazione che abbiamo definito in precedenza e analizziamole.

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,(WL) \qquad \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}\,(WR)$$

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta, A}\,(BW) \qquad \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta \qquad \Pi \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}\,(BW^{\star})$$

Le differenze tra tra (WL), (WR) rispetto a (BW) le abbiamo già viste. Consideriamo $BW^{\star}$, questa regola ci dice che possiamo attenuare una certa sequenza $(\Gamma \Rightarrow \Delta)$ con una sequenza già presente $(\Pi \Rightarrow \Sigma)$. Vi sono quindi considerevoli differenze rispetto alle altre tre regole: in primo luogo si attenua con un'intera sequenza, e non con una sola formula. Inoltre, $BW^{\star}$ ci vincola ad utilizzare sequenze già dimostrate, mentre le altre ci permettono di attenuare con una formula qualsiasi che non deve necessariamente comparire nelle premesse. Possiamo quindi considerare una regola di attenuazione ristretta, che ci vincoli ad attenuare con una formula già presente nel nostro albero.

$$\dfrac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A, A\Gamma \Rightarrow \Delta}\,(ML) \qquad \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, A}\,(MR)$$

Queste regole sono note anche come *anticontraction rules* (Avon, 1991) o *duplication rules* (Došen, 1988). Con queste nuove regole è facile provare la sequenza corrispondente al *mingle axiom*: $A \to (A \to A)$. Questa formula caratterizza la logica semirilevante (**RM**) di Meyer e McCall. Tuttavia, come nel caso della logica rilevante di Anderson e Belnap, non è semplice trovare un calcolo delle sequenze corrispondente a **RM**. Saremo in grado di farlo solo nel capitolo successivo. Possiamo però descrivere due sistemi più semplici: $\mathbf{LRM}^{ND}$ e **LCM**.

Definizione 21. (postulati di $\mathbf{LRM}^{ND}$)
Il linguaggio di $\mathbf{LRM}^{ND}$ è lo stesso di **LL**, e si ottiene aggiungendo (ML) e (MR) a $\mathbf{LR}^{ND}$.

Definizione 22. (postulati di **LMC**)
Il linguaggio **LMC** è lo stesso di **LC** (e quindi di **LL**) e si ottiene aggiungendo a **LC** (ML) e (MR).

Teorema 8. ***LMC*=*LA***

Dimostrazione. (i) $\mathbf{LMC} \subseteq \mathbf{LA}$
Devo far vedere che $(\to L), (\oplus L)$ e $(\otimes R)$sono equivalenti alle versioni $*$ in **LA** e che le regole (ML) e (MR) sono istanze di (WL) e (WR). $(\to L)$ è istanza di $(\to L^*)$ lo abbiamo già visto.
Adesso dobbiamo far vedere che $(\to L^*)$ è derivabile in **LA**.
Dividiamo la dimostrazione in due casi.
Caso $B \notin \Pi$.
Allora il Π^* è equivalente a Π per definizione. In questo caso la regola la posso ottenere nel seguente modo:

$$\cfrac{\cfrac{\vdots}{\Pi \Rightarrow \Sigma}}{A \to B, \Gamma^*, \Pi^* \Rightarrow \Delta, \Sigma} \; (WL;WR)$$

Caso $B \in \Pi$.
Allora Π è della forma Π', B. Quindi avrò:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \qquad B, \Pi' \Rightarrow \Sigma}{A \to B, \Gamma^*, \Pi' \Rightarrow \Delta, \Sigma} \; (\to L)$$

Dove $\Pi' = \Pi^*$. Adesso dobbiamo far vedere che anche le altre due regole * sono derivabili.

Anche negli altri due casi le versioni $(\oplus L)$ e $(\otimes R)$ sono casi particolari delle loro versioni $*$. Non ci resta quindi che verificare che $(\oplus L^*)$ e $(\otimes R^*)$ siano derivabili in **LA** a partire da $(\oplus L)$ e $(\otimes R)$. Per $(\oplus L^*)$ si fa in maniera del tutto analoga al caso precedente. Vediamo quindi solo il caso di $(\otimes R^*)$ che è leggermente diverso.

Come prima distinguiamo due casi:

Se $B \notin \Sigma$.

Allora $\Sigma^* = \Sigma$

$$\dfrac{\Pi \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta^*, \Sigma^*, A \otimes B}\ {\scriptstyle (WL;WR)}$$

Se $B \in \Sigma$.

Allora Σ è della forma Σ', B, dove $\Sigma' = \Sigma^*$. Quindi:

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \qquad \Pi \Rightarrow \Sigma', B}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta^*, \Sigma^*, A \otimes B}\ {\scriptstyle (\otimes R)}$$

(ii) **LA** $\subseteq$ **LMC** Basta far vedere che le regole di attenuazione sono derivabili:

$$\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A}{\Rightarrow A \to A} \qquad \dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A}{A, A \Rightarrow A} \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \to A, \Gamma \Rightarrow \Delta}}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

Analogamente per la regola di attenuazione a destra. □

Consideriamo adesso la *bounded contraction*, una variante della contrazione classica che ci permette di contrarre un certo numero di occorrenze di una formula. Sia (n)A il multinsieme $A_1, ..., A_n$, le regole di n-contrazione sono:

$$\dfrac{(n+1)A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{(n)A, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ {\scriptstyle (CL^n)} \qquad \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, (n+1)A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, (n)A}\ {\scriptstyle (CR^n)}$$

Questo tipo di contrazione è stata studiata da Prjatelij (1996), la quale ha introdotto il calcolo $\mathbf{PL}_n$.

Definizione 23. (postulati di $\mathbf{PL}_n$)

Il calcolo $\mathbf{PL}_n$ ha lo stesso linguaggio di **LL** ed è ottenuto aggiungendo le regole(CL^n) e (CR^n), per ogni $n \geqslant 1$, a **LA**.

3.3.7 $\mathbf{LL}^E$

In questo ultimo paragrafo andremo a considerare $\mathbf{LL}^E$, la logica lineare con Gli esponenziali.

Gli esponenziali sono due nuovi connettivi ! e ?, letti rispettivamente come *of course* e *why not*. Girard (1987) decide di introdurli per ricreare il potere deduttivo dell'attenuazione e della contrazione. Infatti, nel suo articolo dove introduce per la prima volta la logica lineare, Girard dice che non è interessato ad un calcolo meno potente di **LK**, ma vuole un calcolo che sia in grado di controllare meglio la geometria delle dimostrazioni, che permetta una migliore analisi delle deduzioni.

Definizione 24. (sequenze esponenziali)
Se $\Gamma = A_1..., A_n$ (con $n > 0$), allora $!\Gamma =!A_1, ..., !A_n$ e $?\Gamma =?A_1, ..., ?A_n$
Se $\Gamma = \emptyset$ allora $!\Gamma =?\Gamma = \emptyset$

Definizione 25. (postulati di $\mathbf{LL}^E$)
Il linguaggio di $\mathbf{LL}^E$ è: $\mathcal{L} = \{\neg, \otimes, \oplus, \rightarrow, \wedge, \vee, \mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{T}, \perp, !, ?\}$. I suoi postulati sono gli stessi di $\mathbf{LL}^B$ (**LL** più quelli per **T** e $\perp$) ai quali si aggiungono i seguenti:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{!A, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (!W) \qquad \frac{!A, !A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{!A, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (!C)$$

$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{!A, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (!L) \qquad \frac{!\Gamma \Rightarrow ?\Delta, A}{!\Gamma \Rightarrow ?\Delta, !A}\ (!R)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, ?A}\ (?W) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, ?A, ?A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, ?A}\ (?C)$$

$$\frac{A, !\Gamma \Rightarrow ?\Delta}{?A, !\Gamma \Rightarrow ?\Delta}\ (?L) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, ?A}\ (?R)$$

Come si può vedere dalla definizione precedente, in questo calcolo si reintroducono un certo tipo di contrazione e attenuazione. In particolare, una formula preceduta da un punto esclamativo può essere la formula principale di un'attenuazione o contrazione a sinistra senza restrizioni (analogamente per l'attenuazione e la contrazione a destra, per una formula principale avente un punto di domanda a precederla). Quindi, le formule precedute da esponenziali possono essere viste come risorse illimitate, che possiamo sempre contrarre o duplicare.

Si possono anche leggere gli esponenziali come operatori modali in **S4**, dove corrisponde $\Box$ a ! e $\Diamond$ a ?; infatti le regole di introduzione per queste due coppie di connettivi sono simili

$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Box A, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\Box L) \qquad \frac{\Box \Gamma \Rightarrow \Diamond \Delta, A}{\Box \Gamma \Rightarrow \Diamond \Delta, \Diamond A}\ (\Box R)$$

$$\frac{A, \Box \Gamma \Rightarrow \Diamond \Delta}{\Diamond A, \Box \Gamma \Rightarrow \Diamond \Delta}\ (\Diamond L) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \Diamond A}\ (\Diamond R)$$

Per rendere più intuitiva questa duplice funzione degli esponenziali (di modalità e di regole strutturali), possiamo leggere le formule con gli esponenziali come:

$$!A = A^0 \wedge A^1 \wedge A^2...$$

$$?A = 0.A \vee 1.A \vee 2.A...$$

Grazie all'introduzione degli esponenziali si possono ottenere delle traduzioni di **LK** e **LJ** in $\mathbf{LL}^E$. In realtà per il frammento proposizionale della logica classica, non sono necessari. Infatti, Ono (1990) ha creato una traduzione, sviluppando un'idea di Grishin (1974), della logica proposizionale classica nella logica lineare con gli esponenziali, senza far uso di ! e ?. Per **LJ** sono necessari sia per il frammento proposizionale che predicativo.

Definizione 26. (traduzione t^+ e t^-)

La traduzione t^+ e t^- da formule di $\mathcal{L} = \{\neg, \rightarrow, \wedge, \vee\}$ a formule di $\mathcal{L} = \{\neg, \otimes, \oplus, \rightarrow, \wedge, \vee, \mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{T}, \bot, !, ?\}$ sono definite per induzione simultanea in questo modo:

$t^+(\mathrm{p}) = t^-(\mathrm{p}) = \mathrm{p}$

$t^+(\neg A) = \neg t^-(\mathrm{A})$	$t^-(\neg A) = \neg t^+(\mathrm{A})$
$t^+(A \wedge B) = ?t^+(\mathrm{A}) \wedge ?t^+(\mathrm{B})$	$t^-(A \wedge B) = t^-(\mathrm{A}) \wedge t^-(\mathrm{B})$
$t^+(A \vee B) = t^+(\mathrm{A}) \vee t^+(\mathrm{B})$	$t^-(A \vee B) = !t^-(\mathrm{A}) \vee !t^-(\mathrm{B})$
$t^+(A \rightarrow B)) = \neg t^-(\mathrm{A}) \vee t^+(\mathrm{B})$	$t^-(A \rightarrow B)) = !\neg t^+(\mathrm{A}) \vee !t^-(\mathrm{B})$

Definizione 27. (traduzione dei multinsiemi)

t^- $(A_1...A_n)$ (con $n > 0$) è definito come t^- (A_1) ...$t^-(\mathrm{A}_n)$. Analogamente, t^+ $(A_1...A_n)$ (con $n > 0$) è definito come $t^+(\mathrm{A}_1)...t^+(\mathrm{A}_n)$.

Inoltre, se $t^-(\emptyset) = t^+(\emptyset) = \emptyset$.

Teorema 9. *(Immersione di **LK** in $\mathbf{LL}^E$)*

$\vdash_{\boldsymbol{LK}} \Gamma \Rightarrow \Delta$ *sse* $\vdash_{\boldsymbol{LL}^E} !\mathrm{t}^-(\Gamma) \Rightarrow ?\mathrm{t}^+\Delta$

Omettiamo la dimostrazione di questo teorema, tuttavia è importante osservare che per dimostrare il verso da destra a sinistra si fa un uso essenziale dell'eliminabilità delle cesure $\mathbf{LL}^E$.

Gli esponenziali possono essere aggiunti anche ad altre logiche sottostrutturali, generandone di nuove, ma considerare anche queste varianti ci porterebbe troppo lontano, e non sarebbe molto utile al nostro discorso.

Capitolo 4

Metodi per reintrodurre le regole strutturali

In questo capitolo prenderemo in esame alcuni metodi per reintrodurre le regole sottostrutturali ad un livello più alto. Infatti, considereremo delle regole strutturali che, invece di modificare la forma della sequenza manipolando formule, lavoreranno su intere sequenze. Per fare questo dobbiamo introdurre nuovi formalismi per i calcoli delle sequenze, che sono raffinamenti di quello elaborato da Gentzen. Queste varianti nascono per rispondere ad alcuni problemi di espressività che si hanno nel formalismo classico: per esempio ci si chiede se sia possibile sostituire la virgola che separa le formule nei contesti, con altri simboli che abbiano diverse interpretazioni. O, ancora, se sia possibile interpretare il freccione non come una relazione binaria tra antecedente e conseguente.

Prenderemo in considerazione soltanto le sequenze a n-lati, le ipersequenze, il Dunn-Mints calculi e il suo raffinamento: display calculi, ma oltre a questi ne esistono altri come, per esempio, i proof net introdotti da Girard nel 1987 e tipici della logica lineare.

4.1 Sequenze a n-lati

Le logiche a più valori sono sempre state difficili da analizzare da un punto di vista proof-teoretico. Nel 1967 Rosseau ha elaborato una nuova idea di calcolo basata su questo semplice slogan:

> If two-sided sequents are good for two-valued logic, multiple-valued logics need multiple-sided sequents.[1]

Supponiamo di avere una logica a n valori di verità. Quello di cui avremo bisogno saranno n multinsimi di formule $\Gamma_0 ... \Gamma_{n-1}$ che valgono sse $\exists j < n$t.c. almeno una delle assunzioni di Γ_j assume valore j.

Nel caso classico, a due valori di verità, l'idea intuitiva è che $\Gamma \Rightarrow \Delta$ vale sse almeno una delle assunzioni di Γ è falsa e almeno una di quelle di Δ è vera. In questa luce, l'idea di Rosseau sembra proprio una generalizzazione del caso classico.

Per semplicità prenderemo in esame una logica a tre valori.

Definizione 28. Una sequenza a tre lati è un'espressione della forma: $\Gamma_0|\Gamma_1|\Gamma_2$, dove ogni Γ_i è un multinsieme finito, anche vuoto, di formule di $\mathcal{L} = \{\neg, \otimes, \oplus, \rightarrow, \wedge, \vee, \mathbf{1}, \mathbf{0}\}$.

Intuitivamente, ci dicono che almeno una delle formule di Γ_0 è falsa, almeno una di Γ_1 è intermedia e almeno una di Γ_2 è vera.

Vediamo come possiamo definire $\mathbf{LLuk}_3$, la logica a tre valori di Lukasiewicz, con questo nuovo formalismo:

Definizione 29. (postulati di $\mathbf{LLuk}_3$)

Assiomi

$$A|A|A$$

Regole strutturali

$$\frac{\Gamma_0|\Gamma_1|\Gamma_2}{A, \Gamma_0|\Gamma_1|\Gamma_2}\ (W_0) \qquad \frac{\Gamma_0|\Gamma_1|\Gamma_2}{\Gamma_0|A, \Gamma_1|\Gamma_2}\ (W_1) \qquad \frac{\Gamma_0|\Gamma_1|\Gamma_2}{\Gamma_0|\Gamma_1|\Gamma_2, A}\ (W_2)$$

$$\frac{A, A, \Gamma_0|\Gamma_1|\Gamma_2}{A, \Gamma_0|\Gamma_1|\Gamma_2}\ (C_0) \qquad \frac{\Gamma_0|A, A, \Gamma_1|\Gamma_2}{\Gamma_0|A, \Gamma_1|\Gamma_2}\ (C_1) \qquad \frac{\Gamma_0|\Gamma_1|\Gamma_2, A, A}{\Gamma_0|\Gamma_1|\Gamma_2, A}\ (C_2)$$

$$\frac{A, \Gamma_0|\Gamma_1|\Gamma_2 \qquad \Gamma_0|A, \Gamma_1|\Gamma_2}{\Gamma_0|\Gamma_1|\Gamma_2}\ (Cut0{,}1)$$

$$\frac{A, \Gamma_0|\Gamma_1|\Gamma_2 \qquad \Gamma_0|\Gamma_1|\Gamma_2, A}{\Gamma_0|\Gamma_1|\Gamma_2}\ (Cut0{,}2)$$

[1](Paoli, 2002 pp. 116-117)

$$\frac{\Gamma_0|A,\Gamma_1|\Gamma_2 \qquad \Gamma_0|\Gamma_1|\Gamma_2, A}{\Gamma_0|\Gamma_1|\Gamma_2}\ (Cut1{,}2)$$

Regole operazionali

$$\frac{\Gamma_0|\Gamma_1|\Gamma_2, A}{\neg A, \Gamma_0|\Gamma_1|\Gamma_2}\ (\neg_0) \qquad \frac{\Gamma_0|A,\Gamma_1|\Gamma_2}{\Gamma_0|\neg A,\Gamma_1|\Gamma_2}\ (\neg_1) \qquad \frac{A,\Gamma_0|\Gamma_1|\Gamma_2}{\Gamma_0|\Gamma_1|\Gamma_2,\neg A}\ (\neg_2)$$

$$\frac{\Gamma_0|\Gamma_1|\Gamma_2, A \qquad B,\Gamma_0|\Gamma_1|\Gamma_2}{A \to B, \Gamma_0|\Gamma_1|\Gamma_2}\ (\to_0)$$

$$\frac{\Gamma_0|A,B,\Gamma_1|\Gamma_2 \qquad B,\Gamma_0|\Gamma_1|\Gamma_2, A}{\Gamma_0|A \to B,\Gamma_1|\Gamma_2}\ (\to_1)$$

$$\frac{A,\Gamma_0|\Gamma_1|\Gamma_2, B \qquad A,\Gamma_0|\Gamma_1|\Gamma_2, B}{\Gamma_0|\Gamma_1|\Gamma_2, A \to B}\ (\to_2)$$

Osservazione 6. *L e regole per* $\wedge, \vee, \oplus, \otimes, \boldsymbol{1}, \boldsymbol{0}$ *possono essere derivate ricorrendo alle definizioni di interdifinibilità e ricordando che in ogni logica di Lukasiewics valgono:*

$$A \vee B \equiv (A \to B) \to B$$

$$\boldsymbol{1} \equiv A \to A$$

Osservazione 7. *Le regole di* ***LLuk***$_3$ *non sono divise in destra e sinistra (conseguente e antecedente) ma rispetto al multinsieme in cui agiscono, quindi, nel nostro caso, in 0, 1 e 2. In generale avremo tante regole quanti sono i nostri multinsiemi. Questo non vale per il cut, infatti, per questa regola abbiamo tante istanze quante sono le diverse coppie di multinsiemi che possiamo avere nel nostro calcolo.*

LLuk$_3$ *contiene sia l'attenuazione che la contrazione, quindi non sarebbe da annoverare tra le logiche sottostrutturali. Tuttavia, possiamo dare una formulazione di questo calcolo con un altro formalismo, le ipersequenze, in cui non abbiamo la contrazione interna.*

Definizione 30. (traduzione di una formula in una sequenza a 3-lati)

Siano $\Gamma_0 = A_{01}, ..., A_{0n}$, $\Gamma_1 = A_{11}, ..., A_{1m}$ e $\Gamma_2 = A_{21}, ..., A_{2p}$.

Sia, inoltre, $\phi(A_{i;j})$ la formula $(A_{ij} \to \neg A_{ij}) \wedge (\neg A_{ij} \to A_{ij})$.

La formula di traduzione $t(\Gamma_0|\Gamma_1|\Gamma_2)$ di $\Gamma_0|\Gamma_1|\Gamma_2$ è definita come segue:

Se n o m o $p \neq 0$

$$\neg A_{01} \vee ... \vee \neg A_{0n} \vee \phi(A_{11}) \vee ... \vee \phi(A_{1m}) \vee ... \vee A_{21} \vee ... \vee A_{2p}$$

Se $\boldsymbol{n = m = p = 0}$ allora $t(\Gamma_0|\Gamma_1|\Gamma_2)$ è $\mathbf{0}$

Utilizzando metodi semantici si può dimostrare che **LLuk**$_3$ e la sua versione senza cut provano esattamente le stesse formule.

Teorema 10. *(ridondanza del cut in **LLuk**$_3$, Rousseau 1967)*
Se $\Gamma_0|\Gamma_1|\Gamma_2$ *è dimostrabile in **LLuk**$_3$, allora esiste una dimostrazione di* $\Gamma_0|\Gamma_1|\Gamma_2$ *in* ***LLuk***$_3 \backslash \{(cut01); (cut02); (cut12)\}$

Osservazione 8. *La proposizione precedente non è definibile un teorema di cut-elimination perché non ci dà una procedura effettiva per passare da una dimostrazione con cut ad una cut-free.*

4.2 Ipersequenze

Le ipersequenze sono statd introdotte da Pottinger(1983) e Avron (1987). Questa nuova formalizzazione si è mostrata fin da subito uno strumento molto efficace nello studio delle logiche non classiche.

In questo paragrafo vedremo un altro modo per formalizzare **LLuk**$_3$, un metodo che, come detto prima, metterà in luce il carattere sottostrutturale di questa logica.

Cominciamo con il definire cos'è un'ipersequenza:

Definizione 31. Un'ipersequenza è un multinsieme finito $\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, ..., \Gamma_n \Rightarrow \Delta_n$ di sequenze classiche. Normalmente si scrivono in questo modo:

$$\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1 | ... | \Gamma_n \Rightarrow \Delta_n$$

Ogni $\Gamma_i \Rightarrow \Delta_i$ è chiamata componente dell'ipersequenza.

L'interpretazione intuitiva della sbarra verticale, che separa le varie componenti, è di tipo disgiuntivo, cioè Δ_1 segue da Γ_1 oppure Δ_2 segue da Γ_2 oppure Δ_3 segue da Γ_3...

É inoltre facile vedere come il calcolo delle sequenze sia un caso speciale di quello delle ipersequenze, che rappresentano appunto il raffinamento più immediato, e più fedele all'originale, del calcolo di Gentzen.

Vediamo quindi **LLuk**$_3$ nel modo in cui è stata presentata da Avron:

Definizione 32. (postulati di $\mathbf{LLuk}_3$)

Il calcolo delle ipersequenze per $\mathbf{LLuk}_3$ è basato su $\mathcal{L} = \{\neg, \otimes, \oplus, \rightarrow, \wedge, \vee, \mathbf{1}, \mathbf{0}\}$.

Assiomi

$$A \Rightarrow A$$

Regole strutturali **interne**

$$\frac{G|\Gamma \Rightarrow \Delta}{G|A, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (WL) \qquad \frac{G|\Gamma \Rightarrow \Delta}{G|\Gamma \Rightarrow \Delta, A}\ (WR)$$

$$\frac{G|\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad H|A, \Pi \Rightarrow \Sigma}{G|H|\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}\ (cut)$$

Regole strutturali esterne

$$\frac{G}{G|\Gamma \Rightarrow \Delta}\ (EW) \qquad \frac{G|\Gamma \Rightarrow \Delta|\Gamma \Rightarrow \Delta}{G|\Gamma \Rightarrow \Delta}\ (EC)$$

Mixing

$$\frac{G|\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \Rightarrow \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3 \qquad H|\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3 \Rightarrow \Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3}{G|H|\Gamma_1, \Pi_1 \Rightarrow \Delta_1, \Sigma_1|\Gamma_2, \Pi_2 \Rightarrow \Delta_2, \Sigma_2|\Gamma_3, \Pi_3 \Rightarrow \Delta_3, \Sigma_3}\ (Mix)$$

Regole operazionali

$$\frac{G|\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{G|\neg A, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\neg L) \qquad \frac{G|A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{G|\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg A}\ (\neg R)$$

$$\frac{G|\Gamma \Rightarrow \Delta, A \qquad H|B, \Pi \Rightarrow \Sigma}{G|H|A \rightarrow B, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}\ (\rightarrow L) \qquad \frac{G|A, \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{G|\Gamma \Rightarrow \Delta A \rightarrow B}\ (\rightarrow R)$$

$$\frac{G|A, B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{G|A \otimes B, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\otimes L) \qquad \frac{G|\Gamma \Rightarrow \Delta, A \qquad H|\Pi \Rightarrow \Sigma, B}{G|H|\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma, A \otimes B}\ (\otimes R)$$

$$\frac{G|A, \Gamma \Rightarrow \Delta \qquad H|B, \Pi \Rightarrow \Sigma}{G|H|A \oplus B, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}\ (\oplus L) \qquad \frac{G|\Gamma \Rightarrow \Delta, A, B}{G|\Gamma \Rightarrow \Delta A \oplus B}\ (\oplus R)$$

$$\frac{G|A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{G|A \wedge B, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\wedge L) \qquad \frac{G|B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{G|A \wedge B, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\wedge L)$$

$$\frac{G|\Gamma \Rightarrow \Delta, A \qquad H|\Gamma \Rightarrow \Delta, B}{G|H|\Gamma \Rightarrow \Delta, A \wedge B} \; (\wedge R)$$

$$\frac{G|A, \Gamma \Rightarrow \Delta \qquad H|B, \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{G|H|A \vee B, \Gamma \Rightarrow \Delta} \; (\vee L)$$

$$\frac{G|\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{G|\Gamma \Rightarrow \Delta, A \vee B} \; (\vee R) \qquad \frac{G|\Gamma \Rightarrow \Delta, B}{G|\Gamma \Rightarrow \Delta A \vee B} \; (\vee R)$$

$$\frac{G|\Gamma \Rightarrow \Delta}{G|\mathbf{1}, \Gamma \Rightarrow \Delta} \; (\mathbf{1}L) \qquad \Rightarrow \mathbf{1}_{(\mathbf{1}R)}$$

$$\mathbf{0} \Rightarrow_{(\mathbf{0}L)} \qquad \frac{G|\Gamma \Rightarrow \Delta}{G|\Gamma \Rightarrow \Delta, \mathbf{0}} \; (\mathbf{0}R)$$

Osservazione 9. *Le regole strutturali in questo calcolo sono diverse tra regole interne ed esterne; quelle interne lavorano sulle formule, quelle esterne lavorano sulle componenti dell'ipersequenza.*

Osservazione 10. *Possiamo dare una formulazione alternativa di $\boldsymbol{LLuk}_3$: quella data da Ciabattoni, Gabbay e Olivetti [Ciabattoni et al, (1999)], dove si sostituisce la regola (mix) con:*

$$\frac{G|\Gamma, \Delta \Rightarrow \Pi, \Sigma \qquad H|\Lambda, \Delta \Rightarrow \Theta, \Sigma}{G|H|\Gamma, \Lambda \Rightarrow \Pi, \Theta|\Delta \Rightarrow \Sigma} \; (mix')$$

Definizione 33. (traduzione in formula di un'ipersequenza)

Sia $G = \Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1|...|\Gamma_n \Rightarrow \Delta_n$ un'ipersequenza e per $i \leqslant n$ sia $t(\Gamma_i \Rightarrow \Delta_i)$ la traduzione in formula di $\Gamma_i \Rightarrow \Delta_i$ è definita come segue: Data una sequenza della forma $A_1, A_2..., A_n \Rightarrow B_1, B_2..., B_m$, la sua traduzione in formula $t(A_1, A_2..., A_n \Rightarrow B_1, B_2..., B_m)$ è definita:

- $A_1 \otimes A_2 \otimes ... \otimes A_n \rightarrow B_1 \oplus B_2 \oplus ... \oplus B_m$ $(per n, m > 0)$
- $\neg(A_1 \otimes A_2 \otimes ... \otimes A_n)$ (per n>0 e m=0)
- $B_1 \oplus B_2 \oplus ... \oplus B_m$ (per m>0 e n=0)
- $\mathbf{0}$ (per n,m=0)

Inoltre, la traduzione t(G) dell'ipersequenza G è la formula $t(\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1) \vee ... \vee t(\Gamma_n \Rightarrow \Delta_n)$

Teorema 11. $\vdash_{\boldsymbol{LLuk}_3} G$ *sse* $\vdash_{\boldsymbol{LLuk}_3} \Rightarrow t(G)$

Teorema 12. *(cut-elimination per* $\boldsymbol{LLuk}_3$*, Avron 1991)*
$\boldsymbol{LLuk}_3$ *è un calcolo cut-free.*

Oltre a $\mathbf{LLuk}_3$ è possibile rappresentare con le ipersequenze altri calcoli, per esempio**LRMI**, ma non ci soffermiamo oltre.

Quello che è importante notare è che grazie a questa nuova formalizzazione si possono ricostruire le regole strutturali ad un livello più alto. Infatti, come abbiamo notato in precedenza, nelle regole strutturali esterne noi non lavoriamo su formule, ma sulle componenti dell'ipersequenza. In $\mathbf{LLuk}_3$ abbiamo sia la contrazione che l'attenuazione esterna, ma solo l'attenuazione interna. In questo senso $\mathbf{LLuk}_3$ è un calcolo sottostrutturale.

Procediamo il nostro discorso analizzando gli ultimi due formalismi alternativi. Questi ultimi due risulteranno molto diversi dal calcolo originale di Gentzen e anche un po' meno intuitivi.

4.3 Dunn-Mints calculi

Il Dunn-Mints calculi e il display calculi nascono nell'ambito delle logiche rilevanti. Infatti, come abbiamo accennato nel capitolo precedente, non è facile formalizzare queste logiche nel calcolo delle sequenze.

Dunn (1973) (e indipendentemente Mints nel 1972) crea un nuovo calcolo per le logiche rilevanti. L'assiomi che definiscono la distributività, per essere dimostrati, hanno bisogno sia della contrazione che dell'attenuazione, ma, come abbiamo ripetuto più volte, l'attenuazione non è ammissibile in un contesto rilevante. Dunn e Mints risolvono questo problema, creando un calcolo in cui si introduce un nuovo metodo per separare le formule nei contesti. In questo calcolo si hanno così due modi diversi per separare le formule:

- virgola
- punto e virgola

Questi due diversi simboli hanno diverse regole strutturali, in particolare, per la virgola si ha una regola di attenuazione, il che rende dimostrabile la distributività in questo calcolo.

Diamo adesso alcune definizioni che ci saranno utili per presentare un calcolo ($\mathbf{LR}_+$) con il metodo di Dunn.

Definizione 34. ($\mathcal{L} - struttura$)
Una $\mathcal{L} - struttura$ del linguaggio $\mathcal{L} = \{\otimes, \rightarrow, \wedge, \vee, \mathbf{1}\}$ è definita come segue:

- Ogni formula del linguaggio è una struttura
- $\emptyset$ è una struttura
- Se X e Y sono strutture, allora X,Y è una struttura
- Se X e Y sono strutture, allora X;Y è una struttura

Definizione 35. (sottostruttura)
La nozione di sottostruttura è definita come segue:

- X è una sottostruttura di X
- Ogni struttura X e Y è sottostruttura di X,Y e di X;Y

Definizione 36. (sostituzione in strutture)
Con X[Y/Z] indichiamo la struttura che otteniamo sostituendo in X ogni occorrenza della sua sottostruttura Y con un'occorrenza di Z.

Diamo adesso i postulati di $\mathbf{LR}_+$. Si noti che, in quanto segue, $*$ sta a significare sia , che ;. Quindi, le regole in cui compare questo simbolo sono in un certo senso ambigue, in quanto contengono due regole identiche, che differiscono soltanto per il simbolo utilizzato per separare le formule nei contesti delle sequenze.

Definizione 37. (postulati di $\mathbf{LR}_+$)

Assiomi

$$A \Rightarrow A$$

Regole strutturali

$$\frac{X[Y * Z] \Rightarrow A}{X[Z * Y] \Rightarrow A}\,(E*) \qquad \frac{X[(Y * Z) * W] \Rightarrow A}{X[Y * (Y * W)] \Rightarrow A}\,(A*)$$

$$\frac{X[Y * Y] \Rightarrow A}{X[Y] \Rightarrow A}\,(C*) \qquad \frac{X[Y] \Rightarrow A}{X[Y, Z] \Rightarrow A}\,(W,)$$

$$\frac{X \Rightarrow A \qquad Y[A] \Rightarrow B}{Y[X] \Rightarrow B}\ (cut)$$

Nella regola (W ,) Y non deve essere vuoto.

Nella regola (cut), Y[X] denota il risultato ottenuto rimpiazzando ogni occorrenza di A con un'occorrenza di X, se X non è vuoto, altrimenti con **1**.

Regole operazionali

$$\frac{X \Rightarrow A \qquad Y[B] \Rightarrow C}{Y[X; A \to B] \Rightarrow C}\ (\to L) \qquad \frac{X; A \Rightarrow B}{X \Rightarrow A \to B}\ (\to R)$$

$$\frac{X[A; B] \Rightarrow C}{X[A \otimes B] \Rightarrow C}\ (\otimes L) \qquad \frac{X \Rightarrow A \qquad Y \Rightarrow B}{X; Y \Rightarrow A \otimes B}\ (\otimes R)$$

$$\frac{X[A, B] \Rightarrow C}{X[A \wedge B] \Rightarrow C}\ (\wedge L) \qquad \frac{X \Rightarrow A \qquad Y \Rightarrow B}{X, Y \Rightarrow A \wedge B}\ (\wedge R)$$

$$\frac{X[A] \Rightarrow C \qquad X[B] \Rightarrow C}{X[A \vee B] \Rightarrow C}\ (\vee L)$$

$$\frac{X \Rightarrow A}{X \Rightarrow A \vee B}\ (\vee R) \qquad \frac{X \Rightarrow B}{X \Rightarrow A \vee B}\ (\vee R)$$

$$\frac{X[B] \Rightarrow A}{X[B; \mathbf{1}] \Rightarrow A}\ (\mathbf{1}L) \qquad \Rightarrow \mathbf{1}_{(\mathbf{1}R)}$$

Osservazione 11. *In questo calcolo si ha l'associatività per , e per ;. Vi è anche un modo per formalizzare questo calcolo senza l'associatività, ma ovviamente questo ha un prezzo: o la sostituiamo con regole strutturali equivalenti, oppure dobbiamo dare una diversa definizione di struttura.*

Osservazione 12. *Consideriamo la seguenti dimostrazioni:*

$$\frac{\dfrac{B \Rightarrow B}{\Rightarrow B \to B} \qquad \dfrac{B \to B \Rightarrow B \to B}{A, B \to B \Rightarrow B \to B}}{A \Rightarrow B \to B}\ (cut)?$$

$$\frac{\dfrac{B \Rightarrow B}{\Rightarrow B \to B}}{A \Rightarrow B \to B}\ (W,)?$$

Senza restrizioni sulla regola della cesura e (W,) potremmo dimostrare sequenze inaccettabili in un calcolo rilevante.

Si può inoltre dimostrare che $\mathbf{LR}_+$ è cut-free.

4.4 Display calculi

Il display calculi prende le mosse dal calcolo precedentemente illustrato, migliorandone alcuni aspsetti problematici. Anche questo calcolo è tipico delle logiche rilevanti ed è stato sviluppato da Belnap (1982). Vediamo quali sono i principali difetti che presenta il Dunn-Mints calculi, ai quali questo nuovo formalismo vuole rispondere:

- Non è chiaro come utilizzare la negazione.
- É spesso necessario ricorrere alla sostituzione all'interno delle strutture.
- Alcune restrizioni sembrano un po' artificiali, create ad hoc per risolvere alcuni problemi (ad esempio quello che abbiamo visto nell'osservazione ??).
- Dunn provò l'ammissibilità di una versione ristretta della regola di cesura in $\mathbf{LR}_{+}$. La versione non ristretta permette di provare dei paradossi, come abbiamo visto poco sopra.

Prendiamo adesso in analisi il sopracitato calcolo di Belnap (1982), e vediamo quali sono i punti salienti di questo formalismo:

- Qui ci sono altri modi oltre alla virgola e al punto e virgola per separare le formule nei contesti.
- Le formule principali e quelle ausiliari delle inferenze devono essere visibili. Questo punto è strettamente correlato alla visione indeterministica di cui parlavamo nel secondo capitolo.
- Se abbiamo una sequenza contenente una certa formula, è sempre possibile trasformare quella sequenza in una equivalente dove la formula data è l'intero antecedente o l'intero conseguente. Da ciò segue che l'unica forma di cesura ammissibile è una regola del tipo:

  $$\frac{X \Rightarrow A \qquad A \Rightarrow Y}{X \Rightarrow Y}$$

  Altre versioni del cut sono riducibili a questa.

Come abbiamo detto questo formalismo viene introdotto per indagare l'intero spettro delle logiche rilevanti. Nello stesso articolo Belnap dimostra un teorema davvero importante: *il teorema di cut-elimination generalizzato*. Si tratta di un risultato molto generale, infatti vale per ogni display calculi le cui regole obbediscono ad un certo numero di condizioni formali, facilmente verificabili.

In quanto segue illustreremo la versione di **R** di Restall (1998). Quella di Belnap consiste nel introdurre la negazione classica che, tuttavia, sembra inaccettabile.

Come prima diamo alcune definizioni preliminari, per poi vedere i postulati del sistema.

Definizione 38. ($\mathcal{L} - \textit{struttura}$)

Le $\mathcal{L} - \textit{strutture}$ del linguaggio $\mathcal{L} = \{\otimes, \rightarrow, \wedge, \vee, \mathbf{1}, \mathbf{0}\}$ sono strutture antecedenti o conseguenti definite come segue:

- Ogni formula del linguaggio è una struttura sia conseguente che antecedente.
- $\emptyset$ è una struttura sia antecedente che conseguente.
- Se X e Y sono strutture antecedenti (conseguenti), allora anche X;Y è una struttura antecedente (conseguente).
- Se X e Y sono strutture antecedenti, allora lo è anche X,Y
- Se X è una struttura antecedente e Y una struttura conseguente, allora X\ Yè una struttura conseguente.
- Se X è una struttura antecedente (conseguente), allora $*$X è una struttura conseguente (antecedente)

Definizione 39. (sottostruttura)

La nozione di sottostruttura è definita come segue:

- X è una sottostruttura di X
- Ogni struttura X è sottostruttura di $*$X
- Ogni struttura X e Y è sottostruttura di X,Y, di X;Y e di X\Y

Definizione 40. (sequenza in **LR**)

Una sequenza in **LR** è un'espressione della forma $X \Rightarrow Y$, dove X è una struttura antecedente e Y una struttura conseguente.

Definizione 41. (parte antecedente e conseguente di una sequenza)

La parte antecedente e conseguente di una sequenza è definita nel modo seguente:

- Se $X \Rightarrow Y$ è una sequenza, allora X è una parte antecedente e Y è una parte conseguente
- Se X;Y è una parte antecedente (conseguente) lo sono anche X e Y
- Se X,Y ($X \setminus Y$) è una parte antecedente (conseguente), allora X è una parte antecedente e Y è una parte antecedente (conseguente)
- Se $*$X è una parte antecedente, allora X è una parte conseguente

Definizione 42. (display equivalenze)

Le sequenze nella stessa riga sono dette immediatamente equivalenti nel display calcolo:

$$X;Y \Rightarrow Z \qquad X \Rightarrow *Y;Z$$
$$X \Rightarrow Y;Z \qquad X;*Z \Rightarrow Y \qquad X;*Y \Rightarrow Z$$
$$X \Rightarrow Y \qquad *Y \Rightarrow *Z \qquad **X \Rightarrow Y$$
$$X,Z \Rightarrow Y \qquad X \Rightarrow Y \setminus Z \qquad Y \Rightarrow X \setminus Z$$

Due sequenze sono chiamate display equivalenti sse esiste una sequenza $S_0 ... S_n$ tc $S_0 = S$ e $S_n = S'$ e per ogni i tc $0 \leqslant i \leqslant n$ S_i è immediatamente equivalente con S_{i+1}.

Diamo adesso i postulati di **LR**

Definizione 43. (postulati di **LR**)

Assiomi

$$A \Rightarrow A$$

Regole display

Le display equivalenze della definizione precedente devono essere lette come regole a due versi, per esempio:

$$\frac{X;Y \Rightarrow Z}{X \Rightarrow *Y;Z} \qquad \frac{X \Rightarrow *Y;Z}{X;Y \Rightarrow Z}$$

Regole strutturali

$$\frac{X;(Y;Z) \Rightarrow W}{(X;Y);Z \Rightarrow W}\,(A;) \qquad \frac{X;(Y;Z) \Rightarrow W}{(Y;X);Z \Rightarrow W}\,(A';)$$

$$\frac{(X;Y);Z \Rightarrow W}{(X;Z);Y \Rightarrow W}\,(E;) \qquad \frac{(X;Y);Y \Rightarrow W}{X;Y \Rightarrow W}\,(C;)$$

$$\frac{X,(Y,Z) \Rightarrow W}{(X,Y),Z \Rightarrow W}\,(A,) \qquad \frac{X \Rightarrow Y}{X,Z \Rightarrow Y}\,(W,)$$

$$\frac{X,Y \Rightarrow W}{Y,X \Rightarrow W}\,(E,) \qquad \frac{X,X \Rightarrow Z}{X \Rightarrow Z}\,(C,)$$

$$\frac{X \Rightarrow Y}{\emptyset X \Rightarrow Y}\,(\emptyset I) \qquad \frac{\emptyset;X \Rightarrow Y}{X \Rightarrow Y}\,(\emptyset E)$$

$$\frac{X \Rightarrow A \qquad A \Rightarrow Y}{X \Rightarrow Y}\,(simcut)$$

Regole operazionali

$$\frac{X \Rightarrow A \qquad B \Rightarrow Y}{A \to B \Rightarrow *X;Y}\,(\to L) \qquad \frac{X;A \Rightarrow B}{X \Rightarrow A \to B}\,(\to R)$$

$$\frac{A;B \Rightarrow X}{A \otimes B \Rightarrow X}\,(\otimes L) \qquad \frac{X \Rightarrow A \qquad Y \Rightarrow B}{X;Y \Rightarrow A \otimes B}\,(\otimes R)$$

$$\frac{X \Rightarrow A \qquad B \Rightarrow Y}{A \oplus B \Rightarrow X;Y}\,(\oplus L) \qquad \frac{X \Rightarrow A;B}{Y \Rightarrow A \oplus B}\,(\oplus R)$$

$$\frac{A,B \Rightarrow X}{A \wedge B \Rightarrow C}\,(\wedge L) \qquad \frac{X \Rightarrow A \qquad Y \Rightarrow B}{X,Y \Rightarrow A \wedge B}\,(\wedge R)$$

$$\frac{X \Rightarrow A \qquad B \Rightarrow X}{A \vee B \Rightarrow X}\,(\vee L)$$

$$\frac{X \Rightarrow A}{X \Rightarrow A \vee B}\,(\vee R) \qquad \frac{X \Rightarrow B}{X \Rightarrow A \vee B}\,(\vee R)$$

$$\frac{\emptyset \Rightarrow X}{\mathbf{1} \Rightarrow X}\,(\mathbf{1}L) \qquad \emptyset \Rightarrow \mathbf{1}_{(\mathbf{1}R)}$$

$$\mathbf{0} \Rightarrow \emptyset_{(\mathbf{0}L)} \qquad \frac{X \Rightarrow \emptyset}{X \Rightarrow \mathbf{0}}\,(\mathbf{0}R)$$

$$\frac{*A \Rightarrow X}{\neg A \Rightarrow X}\,(\neg L) \qquad \frac{X \Rightarrow *A}{X \Rightarrow \neg A}\,(\neg R)$$

Osservazione 13. *Supponiamo di volere esibire (to display) la formula A in* $S_1 = A, B \Rightarrow C$*. Abbiamo due opzioni:*

1. *Introdurre una negazione booleana (-) con la proprietà* $A \wedge B \rightarrow C$ *sse* $A \rightarrow -B \vee C$ *(Belnap, 1982)*

2. *Considerare un connettivo strutturale* $X \setminus Y$ *che non corrisponde a nessun oggetto del nostro linguaggio.* $X \setminus Y$ *può essere letto come X implica intuizionisticamente Y. Tramite le equivalenze di prima, posso vederlo come una versione del teorema di deduzione intuizionistico, ovvero: C è deducibile da* $A \wedge B$ *sse* $B \rightarrow C$ *è deducibile da A, sse* $A \rightarrow C$ *è deducibile da B. (Restall 1998)*

Definizione 44. (traduzione in formula di una struttura e di una sequenza)

Se X è una struttura antecedente (conseguente), la sua traduzione t^-(X)(t^-(X)) è una formula di $\mathcal{L} = \{\neg, \otimes, \oplus, \rightarrow, \wedge, \vee, \supset, \mathbf{1}, \mathbf{0}\}$ definita induttivamente come segue:

$t^-(\mathrm{A}) = t^*(\mathrm{A}) = \mathrm{A}$ $\quad$ $t^-(\emptyset) = \mathbf{1}$, $t^+(\emptyset) = \mathbf{0}$
$t^-(\mathrm{X,Y}) = t^-(\mathrm{X}) \wedge t^-(\mathrm{Y})$ $\quad$ $t^+(X \setminus Y) = t^-(\mathrm{X}) \supset t^+(\mathrm{Y})$
$t^-(\mathrm{X;Y}) = t^-(\mathrm{X}) \otimes t^-(\mathrm{Y})$ $\quad$ $t^+(\mathrm{X;Y}) = t^+(\mathrm{X}) \oplus t^+(\mathrm{Y})$
$t^-(*X) = \neg t^+(\mathrm{X})$ $\quad$ $t^+(*X) = \neg\, t^-(\mathrm{X})$

Teorema 13. *(Belnap 1982)*

Ogni parte antecedente (conseguente) X di una sequenza S può essere esibita (displayed) come l'intero antecedente (conseguente) di una sequenza display equivalente $X \Rightarrow Y$ $(Y \Rightarrow X)$*, dove Y è determinata soltanto dalla posizione di X, non dalla struttura.*

Osservazione 14. *Grazie a questo teorema, possiamo estendere il teorema di cut elimination generalizzato di Belnap. Infatti, questo risultato ci permette di dire che è eliminabile non solo il cut ristretto, ma un qualsiasi tipo di cut, in ogni logica che rispetta quelle determinate proprietà.*

4.5 Panoramica sui quattro formalismi

Avron (1996) schematizza quali proprietà un formalismo che vuole estendere, e generalizzare, il calcolo delle sequenze classico dovrebbe avere:

1. It should be able to handle a great diversity of logics of different types [...] On the other hand, the construction of the framework might suggest new logics that should be important.

2. The framework should be independent of any particular semantics [...] .

3. The structures used in the framework should be built from the formulae of the logic and should be not too complicated [...] . Most important - the subformula property they allow should be a real one.

4. The applicability of a rule should depend only on the structure of the premisses and not on the way they have been obtained.

5. The rules (for the connectives) should be as standard as possible. The difference between logics should be due to some other rules, which are independent of any particular connective. Such rules are usually called structural rules.

6. The proof systems constructed within the framework should give us a better understanding of the corresponding logics and the difference between them.

Se prendiamo come base di una buona generalizzazione del calcolo delle sequenze, pare evidente che solo il formalismo dell'ipersequenze si dimostra valido. Infatti, le sequenze a n-lati non sembrano adatte a manipolare molte logiche, e quindi falliscono nel punto 1, ma anche nel punto 2 come suggerisce Avron.

Per quanto riguarda i calcoli Dunn-Mints e il display non si può certo dire che il formalismo non sia complicato; inoltre, non sempre vale il principio della sottoformula.

Sembra quindi che il formalismo migliore sia proprio quello delle ipersequenze. Tuttavia, dobbiamo considerare anche quello che sostiene Wasing (2000), ovvero: che il display calculi, grazie alle sue regole strutturali molto più complicate, riesce ad avere una maggiore espressività, rispetto alle ipersequenze, e anche una maggior generalità.

Capitolo 5

Strumenti algebrici

Questo capitolo rappresenta una breve introduzione agli strumenti algebrici indispensabili per parlare della semantica algebrica. Nella prima parte daremo una rapida visione alle definizioni essenziali per parlare di reticoli e in particolare degli $^* - reticoli$; nella seconda vedremo più nel dettaglio gli *-reticoli, che rappresentano la nozione base su cui lavoreremo.

5.1 Definizioni preliminari

In quanto segue intenderemo per algebra una struttura $\mathcal{A} =< A, O_1, ...O_n >$ dove:

- A è un insieme non vuoto detto supporto dell'algebra;
- e $O_1, ..., O_n$ è un insieme finito di operazioni.

La segnatura (o tipo) dell'algebra $\mathcal{A} =< A, O_1, ...O_n >$ è un'ennupla $< r_1, ..., r_n >$ che indica l'arietà delle operazioni di $\mathcal{A}$. Inoltre, due algebre si dicono simili quando hanno la stessa segnatura.

Cominciamo adesso a dare delle definizioni di alcune nozioni fondamentali di cui ci serviremo nella seconda parte del capitolo e in quello successivo; cominciamo con il vedere cosa si intende per congruenza e quoziente.

Definizione 45. (congruenza)

Data una certa algebra $\mathcal{A} =< A, O_1, ...O_n >$, si dice che R è una relazione (binaria) di congruenza quando:

(i) R è una relazione di equivalenza sul supporto

(ii) R è sostitutiva rispetto alle operazioni della nostra algebra, ovvero per ogni $\imath(\leqslant \imath \leqslant n)$

$$x_1 R y_1 \wedge ... \wedge x_{r_\imath} R y_{r_\imath} \rightarrow O_\imath(x_1 ... x_{r_\imath}) R O_\imath(y_1 ... y_{r_\imath})$$

Data un certa R di equivalenza su A definiamo:

- $[x]_R = \{y \in A | xRy\}$, per $x \in A$
- $A/R = \{[x]_R | x \in A\}$

L'insieme $[x]_R$ è detto *classe di equivalenza di x modulo R*. L'insieme A/R (l'insieme di tutte di tutte le classi di equivalenza per $x \in A$) è detto quoziente di A modulo R.

Continuiamo dando le definizioni di alcune strutture algebriche.

Definizione 46. (gruppoide)
Un gruppoide è un'algebra $\mathcal{A} =< A, \bullet >$ di tipo <2>

Consideriamo adesso alcune proprietà con cui caratterizzare i gruppoidi:

Definizione 47. (semigruppo)
Un gruppoide si dice semigruppo se soddisfa:

$\mathbb{A}$. $x \bullet (y \bullet z) = (x \bullet y) \bullet z$

Definizione 48. (gruppoide abeliano)
Un gruppoide si dice abeliano se soddifa:

$\mathbb{K}$. $x \bullet y = y \bullet x$

Osservazione 15. *Banalmente un gruppoide che soddisfa sia $\mathbb{A}$ che $\mathbb{K}$ è detto semigruppo abeliano.*

Definizione 49. (monoide)
Un gruppoide si dice monoide se soddisfa:

$\mathbb{A}$. $x \bullet (y \bullet z) = (x \bullet y) \bullet z$

$\mathbb{U}$. $\exists x \forall y (x \bullet y = y \bullet x = y)$

Definizione 50. (monoide abeliano)
Un monoide si dice abeliano se soddisfa

$\mathbb{K}$. $x \bullet y = y \bullet x$

Osservazione 16. *Un monoide è un semigruppo che gode di* $\mathbb{U}$.

Si noti inoltre che $\mathbb{U}$ *ci garantisce l'esistenza di un elemento neutro che indicheremo con* e.

Definizione 51. (gruppo)

Un'algebra $\mathcal{A} =< A, \bullet, -, e >$ di tipo $<$2,1,0$>$ è un gruppo sse è un monoide e vale:

$\mathbb{Q}$ $x \bullet -x = -x \bullet x = e$

Definizione 52. (gruppoide preinvolutivo)

Un'algebra $< V, \sqcap, - >$ di segnatura $<$2,1$>$ è un gruppoide preinvolutivo sse soddisfa:

$$(inv) - -x = x$$

Definizione 53. (bigruppoide)

Un'algebra $< V, \sqcap, \sqcup >$ di segnatura $<$2,2$>$ è un bigruppoide sse $< V, \sqcap >$ e $< V \sqcup >$ sono gruppoidi

Definizione 54. (bigruppoide coniugato)

Un'algebra $< V, \sqcap, \sqcup, - >$ di segnatura $<$2,2,1$>$ è un bigruppoide coniugato sse soddisfa:

$< V, \sqcap >$ è un gruppoide preinvolutivo

$\mathbb{DM}$ $\quad -(x \sqcap y) = -x \sqcup -y$

Definizione 55. (reticolo)

Un bigruppoide $L =< V, \sqcap, \sqcup >$ è un reticolo sse soddisfa:

$\mathbb{L}$**1.1** $x \sqcap (y \sqcap z) = (x \sqcap) y \sqcap z$

$\mathbb{L}$**1.2** $x \sqcup (y \sqcup z) = (x \sqcup) y \sqcup z$

$\mathbb{L}$**2.1** $x \sqcap y = y \sqcap x$

$\mathbb{L}$**2.2** $x \sqcup y = y \sqcup x$

$\mathbb{L}$**3.1** $x \sqcap (x \sqcup y) = x$

$\mathbb{L}$**3.2** $x \sqcup (x \sqcap y) = x$

$\mathbb{L}$**4.1** $x \sqcap x = x$

$\mathbb{L}$**4.2** $x \sqcup x = x$

Osservazione 17. *Un reticolo può essere visto anche come un insieme parzialmente ordinato* $\mathcal{A} =< A, \leqslant >$ *dove ogni coppia* $\{x, y\}(x, y \in A)$ *hanno sia il sup che l'*inf. *Infatti, se* $\mathcal{A}$ *è un reticolo, allora le relazioni:*

$$x \leqslant_\ell y \quad sse \quad x = x \sqcap y$$

$$x \leqslant_u y \quad sse \quad y = x \sqcup y$$

sono ordini parziali, dove $\leqslant$ *è uno qualunque di* $\leqslant_\ell, \leqslant_u$, *per ogni* $x, y \in A$ $x \sqcap y = inf_{\leqslant}\{x, y\}$ *e* $x \sqcup y = sup_{\leqslant}\{x, y\}$. *Inoltre, se* $\mathcal{A}$ *è un reticolo presentato come insieme parzialmente ordinato, spesso* $inf(x, y)$ *si scrive* $x \sqcap y$, *e viene detta* meet *di* x *e* y*; analogamente* $sup(x, y)$ *si scrive* $x \sqcup y$ *e viene chiamata* join *di* x *e* y. *In generale, se* $X \subseteq A, inf(X)$ *viene scritto* $\bigwedge X$ *e chiamata* meet *di* X*; mentre* $sup(X)$ *è spesso scritto come* $\bigvee X$ *e chiamato* join.

Se il reticolo $\mathcal{A}$ *è visto come un'algebra,* $\leqslant_\ell$ *è chiamato ordine indotto di* $\mathcal{A}$.

Osservazione 18. *I due semigruppi abeliani di un reticolo sono in realtà dei semireticoli; dove con semireticoli si intende: un gruppoide che soddisfa*

$\mathbb{A}$. $x \bullet (y \bullet z) = (x \bullet y) \bullet z$

$\mathbb{K}$. $x \bullet y = y \bullet x$

$\mathbb{J}$. $x \bullet x = x$

Definizione 56. (reticolo involutivo)

Un bigruppoide coniugato $< V\sqcap, \sqcup, - >$ è un reticolo involutivo sse $< V\sqcap, \sqcup >$ è un reticolo.

Definizione 57. (reticolo involutivo)*

Un'algebra $< V\sqcap, \sqcup, - >$ di segnatura <2,2,1> è un reticolo involutivo sse soddisfa:

$\mathbb{L}$**1.1** $x \sqcap (y \sqcap z) = (x\sqcap)y \sqcap z$

$\mathbb{L}$**1.2** $x \sqcup (y \sqcup z) = (x\sqcup)y \sqcup z$

$\mathbb{L}$**2.1** $x \sqcap y = y \sqcap x$

$\mathbb{L}$**2.2** $x \sqcup y = y \sqcup x$

$\mathbb{L}$**3.1** $x \sqcap (x \sqcup y) = x$

$\mathbb{L}$**3.2** $x \sqcup (x \sqcap y) = x$

$\mathbb{DM}1$ $-(x \sqcap y) = -x \sqcup -y$

$\mathbb{DM}2$ $-(x \sqcup y) = -x \sqcap -y$

inv $- - x = x$

Definizione 58. (reticolo distributivo)
Un reticolo $\mathcal{A}$ si dice distributivo se soddisfa una delle seguenti proprietà:

$\mathcal{L}$**5.1** $x \sqcap (y \sqcup z) = (x \sqcap y) \sqcup (x \sqcap z)$

$\mathcal{L}$**5.2** $x \sqcup (y \sqcap z) = (x \sqcup y) \sqcap (x \sqcup z)$

Definizione 59. (reticolo di congruenze)
Il reticolo di congruenze di $\mathcal{A}$ è l'algebra che ha come sostegno l'insieme di tutte le congruenze su $\mathcal{A}$ ed è dotata delle operazioni di unione e intersezione indotte dal reticolo delle relazioni d'equivalenza.

Definizione 60. (ℓ-gruppoide)
Un'algebra $\mathcal{A} =< A, \bullet, \sqcap, \sqcup >$ di tipo <2,2,2> è detta ℓ-gruppo se:

- $< A, \bullet >$ è un gruppoide.
- $< A, \sqcap, \sqcup >$ è un reticolo il cui ordine indotto è $\leqslant$
- per ogni x, y, z in A $x \leqslant y$ implica che $x \bullet z \leqslant y \bullet z$ e $z \bullet x \leqslant z \bullet y$
- per ogni x, y, z in A $x \bullet (y \sqcup z) = (x \bullet y) \sqcup (x \bullet z)$ e $(y \sqcup z) \bullet x = (y \bullet x) \sqcup (z \bullet x)$

Definizione 61. (ℓ-gruppo)
Un ℓ-gruppo è un'algebra $\mathcal{A} =< A, \bullet, -, e, \sqcap, \sqcup >$ di tipo <2,1,0,2,2> t.c. $< A, \bullet, \sqcap, \sqcup >$ è un l-gruppoide e $< A, \bullet, -, e >$ è un gruppo.

Definizione 62. (ℓ-gruppo abeliano)
Un ℓ-gruppo si dice abeliano se soddisfa:

$\mathbb{K}$**.** $x \bullet y = y \bullet x$

Definizione 63. (ideali)
Sia $\mathcal{A} =< A, \sqcap, \sqcup >$ un reticolo, e sia $X \subseteq A$ t.c. $X \neq \emptyset$. X è un ideale di $\mathcal{A}$ sse:

(I1) Se $x, y \in X$, allora $x \sqcup y \in X$

(I2) Se $x \in X$ e $y \leqslant x$, allora $y \in X$

Definizione 64. (filtri)
Sia $\mathcal{A} =< A, \sqcap, \sqcup >$ un reticolo, e sia $X \subseteq A$ t.c. $X \neq \emptyset$. X è un filtro di $\mathcal{A}$ sse:

(F1) Se $x, y \in X$ allora, $x \sqcap y \in X$

(F2) Se $x \in X$ e $x \leqslant y$, allora $y \in X$

Definizione 65. (algebra booleana)
Un reticolo distributivo $\mathcal{A}$ con $\mathbf{T}, \perp$ è un'algebra booleana sse per ogni $x \in A$ esiste y t.c. $x \sqcap y = \perp$ e $x \sqcup y = \mathbf{T}$, ovvero y è il complemento di x.

Ancora, un'algebra di Boole può essere definita come un'algebra $< A, \sqcap, \sqcup, -, \mathbf{T}, \perp >$ di segnatura <2,2,1,0, 0> sse soddisfa:

$\mathbb{L}$**1.1** $x \sqcap (y \sqcap z) = (x \sqcap) y \sqcap z$

$\mathbb{L}$**1.2** $x \sqcup (y \sqcup z) = (x \sqcup) y \sqcup z$

$\mathbb{L}$**2.1** $x \sqcap y = y \sqcap x$

$\mathbb{L}$**2.2** $x \sqcup y = y \sqcup x$

$\mathbb{L}$**3.1** $x \sqcap (x \sqcup y) = x$

$\mathbb{L}$**3.2** $x \sqcup (x \sqcap y) = x$

$\mathbb{L}$**5.1** $x \sqcap (y \sqcup z) = (x \sqcap y) \sqcup (x \sqcap z)$

$\mathbb{L}$**5.2** $x \sqcup (y \sqcap z) = (x \sqcup y) \sqcap (x \sqcup z)$

$\mathbb{L}$**6.1** $x \sqcap \perp = \perp$

$\mathbb{L}$**6.2** $x \sqcup \mathbf{T} = \mathbf{T}$

$\mathbb{L}$**7.1** $x \sqcap -x = \perp$

$\mathbb{L}$**7.2** $x \sqcup -x = \mathbf{T}$

$\mathbb{DM}1$ $-(x \sqcap y) = -x \sqcup -y$

$\mathbb{DM}2$ $-(x \sqcup y) = -x \sqcap -y$

inv $- - x = x$

5.2 Reticoli

In questa parte del capitolo vedremo nel dettaglio gli *-reticoli, grazie ai quali definiremo anche altre importanti strutture algebriche.

Definizione 66. ($^* - reticoli$)
Uno $^* - reticolo$ è una struttura algebrica $\mathcal{A} =< A, +, -, 0, \sqcap, \sqcup >$ del tipo <2,1, 0, 2, 2>, tale che :

(C1) <A, +, 0> è un monoide albeliano

(C2) $< A, -, \sqcap, \sqcup >$ è un reticolo involutivo

(C3) $-0 \leqslant -x + y$ sse $x \leqslant y$

Osservazione 19. *in (C3)* $\leqslant$ *sta per ordine reticolare indotto di* $< A, \sqcap, \sqcup >$.
Inoltre, denotiamo -0 con 1 e -(-x+y) con $x \cdot y$.

Osservazione 20. *Questa definizione gioca un ruolo essenziale nell'economia del capitolo e di quello successivo, trovo quindi utile esplicitare tutte le proprietà che la definizione precedente ci dice rimandandoci a definizioni precedenti:*

(C1) *<A, +, 0> è un monoide albeliano, ovvero gode delle seguenti proprietà:*

1. *Associatività*
2. *Elemento neutro*
3. *Commutatività*

(C2) $< A, -, \sqcap, \sqcup >$ *è un reticolo involutivo, ovvero gode delle seguenti proprietà:*

1. *Associatività*

2. *Commutatività*
3. *Assorbimento*
4. *Involuzione*
5. *Delle leggi di De Morgan*

(C3) $-0 \leqslant -x + y$ *sse* $x \leqslant y$

Esempio 3. *(Girard, 1987)*
Sia $\mathcal{M} =< M, \bullet, e >$ *un monoide abeliano e sia* $\emptyset \neq D \subseteq M$.
Definiamo le seguenti operazioni sui sottoinsiemi di M:

- $X^{\perp} = \{X/$ *per ogni y,y* $\in X$ *solo se* $x \bullet y \in D\}$
- $XY = \{x \bullet y | x \in X\, e\; y \in Y\}$
- $X \oplus Y = \{(X^{\perp}Y^{\perp})^{\perp}\}$
- $0 = D = \{e\}^{\perp}$

Sia inoltre $\mathcal{C}(M)$=$\{X \subseteq M | X = X^{\perp\perp}\}$ *e* Π *sia un sottoinsieme di* $\mathcal{C}(M)$ *che contiene 0 ed è chiuso sotto le operazioni* $^{\perp}, \oplus$ *e l'intersezione insiemistica. Allora* $\mathcal{A} =< \Pi, \oplus, ^{\perp}, 0, \sqcap, \sqcup >$ *è uno* $^{*}-$ *reticolo dove* $X \sqcap Y = X \cap Y$ *e* $X \sqcup Y = (X \cup Y)^{\perp\perp}$.

Esempio 4. *Ogni* $\ell-$*gruppo abeliano* $\mathcal{A} =< A, +, -0 \sqcap, \sqcup >$ *è uno* $^{*}-$*reticolo dove* $x \cdot y = x + y$. *Ogni algebra booleana può essere rappresentata come uno* $^{*}-$ *reticolo*$\mathcal{A} =< A, +, -0 \sqcap, \sqcup >$ *dove* $x + y = x \sqcup y$ *e* $x \cdot y = x \sqcap y$.

Teorema 14. *(Minari 1993)*
La classe degli $^{*}-$ *reticoli può essere rappresentata come una varietà definita nella segnatura* $< +, -, 0, \sqcap >$ *definita dalle equazioni:*

(E1) x+$(y$+$z)0$ $(x$+$y)$+z	*(E2)* x+y=y+z
(E3) x+0=x	*(E4)* - -x=x
(E5) $-0 \sqcap (-x + x) = -0$	*(E6)* $x \sqcap (y \sqcap z) = (x \sqcap y) \sqcap z$
(E7) $x \sqcap y = y \sqcap x$	*(E8)* $x + (y \sqcap z) = (x + y) \sqcap (x + z)$
(E9) $x = x \sqcap$-$(-x \sqcap y)$	*(E10)* $x = x \sqcap (-(-x + y) + y)$

Definizione 67. (varietà aritmetica)
Una varietà $\mathcal{V}$ è chiamata aritmetica quando, in ogni suo membro, il reticolo delle congruenze è distributivo e il prodotto relazionale di due congruenze $R \circ S$ (definite come $xR \circ Sy$ sse esiste z t.c. xRz e zSy) è commutativo.

Osservazione 21. *(Pixley, 1963)*

Per dimostrare che una certa varietà $\mathcal{V}$ è aritmetica, basta esibire due polinomi $m(x, y, z)$ e $p(x, y, z)$ t.c. le seguenti equazioni siano soddisfatte per ogni elemento di $\mathcal{V}$:

- $p(x, y, y) = x$
- $p(x, x, y) = y$
- $m(x, x, y) = m(x, y, x) = m(y, x, x,) = x$

Teorema 15. *La varietà degli $^* - reticoli$ è aritmetica.*

5.2.1 Alcuni esempi di *-reticoli

Abbiamo già ricordato le algebre booleane e gli ℓ-gruppi abeliani, vediamo adesso altri esempi di $^* - reticoli$.

Definizione 68. (l-pregruppo)

Un ℓ-pregruppo è uno *-reticolo $\mathcal{A} =< A, +, -, 0, \sqcap, \sqcup >$ t.c:

(C4) $x + -x = 1$

(C5) $1 + 1 = 1$

Osservazione 22. *Se inoltre soddisfa **(C6)**$x + (y \sqcup z) = (x + y) \sqcup (x + z)$ è detto m-pregruppo. Inoltre, si noti che gli ℓ-gruppi abeliani sono ℓ-pregruppi dove vale **(C7)** 0=1*

Esempio 5. *(Casari, 1989)Sia $\mathcal{G} =< G, +_g, -_g, 0_g, \sqcap_g, \sqcup_g >$ un ℓ-gruppo abeliano, e $\mathcal{H}$ un qualsiasi suo sottogruppo, e sia $\mathcal{B} =< B, +_b, -_b, 0_b, \sqcap_b, \sqcup_b >$ un'algebra booleana. La $\mathcal{B}$-partizione di $\mathcal{G}$ rispetto ad $\mathcal{H}$ è una struttura $\mathcal{A} =< A, +, -, 0, \sqcap, \sqcup >$ dove:*

1. $A = (G \times \{1_b\}) \cup (H \times B)$
2. $< x, a > + < y, b > = < x +_g y, a +_b b >$
3. $- < x, a > = \begin{cases} <-_g x, -_b a> & se\ x \in H, \\ <-_g x, 1_b> & altrimenti. \end{cases}$
4. $0 =< 0_g, 0_b >$

5. $< x, a > \leqslant < y, b >$ *sse* $(x <_g y$ *oppure* $(x = y e\ a \leqslant_b b))$

$\mathcal{A}$ *è un* ℓ*-pregruppo abeliano.*

Definizione 69. (quantale commutativo di Girard)
Un quantale commutativo di Girard è uno *-reticolo $\mathcal{A} =< A, +, -, 0, \sqcap, \sqcup >$ t.c. $< A, \sqcap, \sqcup >$ è un reticolo completo.

Esempio 6.

Definizione 70. (monoide demorganiano)
Un monoide demorganiano è uno *-reticolo $\mathcal{A} =< A, +, -, 0, \sqcap, \sqcup >$ t.c.:

(C8) $\mathcal{A} =< A, \sqcap, \sqcup >$ è un reticolo distributivo

(C9) $x + x \leqslant x$

Se inoltre soddisfa **(C10)** $x \leqslant x + x$ è detto monoide demorganiano idempotente.

Come esempio di questra struttura algebrica consideriamo la matrice di $S_{\mathcal{Z}}$ *di Sugihara a infiniti valori* $< Z, \oplus, -, 0, max, min >$*, dove:*

- Z *è l'insieme degli interi*
- $-, 0, max, e$ *min hanno il loro significato aritmetico*
- $x \oplus y$ *è* x *se* $|x| > |y|$*, è* y *se* $|x| < |y|$*, è* $x \sqcup y$*, se* $|x| = |y|$

Si può definire una versione di $S_{\mathcal{Z}}$ a valori finiti $S_{2n+1} =< A, \oplus, -, 0, max, min >$, dove $A = \{-n, ..., -1, 0, 1..., n\}$.

Esempio 7. *(Chang, 1958)*

Definizione 71. ($\mathcal{MV}$-algebra)
Una $\mathcal{MV}$-algebra può essere definita come un ℓ-pregruppo $\mathcal{A} =< A, +, -, 0, \sqcap, \sqcup >$ t.c.:

(C11) $-(-x + y) + y = -(-y + x) + x$

Un esempio importante di $\mathcal{MV}$*-algebra è la struttura* $\mathcal{MV}_{[0,1]} =< [0, 1], \oplus, \neg, 0, max, min >$*, dove max e min hanno i loro significati usuali e vale:*

(i) *[0,1] è l'intervallo chiuso dei reali.*

(ii) $\neg x = 1 - x$

(iii) $x \oplus y = min(1, x + y)$

$\mathcal{MV}_{[0,1]}$ è molto importante in quanto si può dimostrare che un'equazione vale in tutte le $\mathcal{MV}$-algebre sse vale in $\mathcal{MV}_{[0,1]}$.

Definizione 72. (reticolo residuato classico)
Un c.r. reticolo è uno *-reticolo $\mathcal{A} =< A, +, -, 0, \sqcap, \sqcup >$ t.c.:

(C12) $x + 1 = 1$

5.2.2 Omomorfismi, ℓ-filtri, ℓ-ideali e congruenze

Vediamo adesso alcuni concetti importanti che è necessario definire.

Definizione 73. (omomorfismo di $^* - reticoli$)
Un omomorfismo di $^* - reticoli$ da $\mathcal{A} =< A, +, -, 0, \sqcap, \sqcup >$ a $\mathcal{B} =< B, +', -', 0', \sqcap', \sqcup' >$ è semplicemente un omomorfismo delle algebre e $f : A \to B$ che soddisfa per ogni $x, y \in A$:

- $f(-x) = -'f(x)$
- $f(x + y) = f(x) +' f(y)$
- $f(x \sqcap y) = f(x) \sqcap' f(y)$
- $f(0) = 0'$
- $f(x \sqcup y) = f(x) \sqcup' f(y)$

Osservazione 23. *Se f è un omomorfismo di *-reticoli da $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$, allora il $Ker(f) = \{x \in A | f(x) = 0'\}$*

Cerchiamo adesso di dare una definizione di ideale e di filtro. Per essere una buona definizione di ideale (e di filtro) deve soddisfare:

(R1) Per ogni reticolo ci dovrebbe essere una corrispondenza 1 a 1 tra gli ideali di $\mathcal{A}$ e e le congruenze su $\mathcal{A}$.

(R2) Gli ideali di $\mathcal{A}$ dovrebbero coincidere con i Ker degli omomorfismi con dominio $\mathcal{A}$.

Le definizioni di ideale e di filtro che daremo sono quelle che suggerisce Paoli (2000). Per far questo dobbiamo introdurre due nuove operazioni:

Definizione 74. Sia $\mathcal{A}$ uno *-reticolo, definiamo due nuove operazioni:

$$\sim x = -x + 1(\textit{complemento intuizionistico})$$

$$\neg x = -(x+1)(\textit{anticomplemento intuizionistico})$$

Grazie a queste due nuove operazioni possiamo definire il valore assoluto e il suo duale:

Definizione 75. Sia $\mathcal{A}$ uno *-reticolo, definiamo:

$$|x| = x \sqcup \neg \sqcup 0$$

$$\underline{\overline{x}} = x \sqcap \sim x \sqcap 1$$

Siamo adesso pronti per dare una definizione di ℓ-ideale (e di ℓ-filtro):

Definizione 76. (ℓ-ideale)
Sia $\mathcal{A}$ uno *-reticolo e sia $B \subseteq A$ t.c $B \neq \emptyset$. B è detto ℓ-ideale di $\mathcal{A}$ sse valgono:

(I1) Se $x, y \in B$, allora $x + y \in B$

(I2) Se $x \in B$, allora $\neg x \in B$

(I3) Se $x \in B$ e $|y| \leqslant |x|$, allora $y \in B$

Definizione 77. (ℓ-filtro)
Sia $\mathcal{A}$ uno *-reticolo e sia $B \subseteq A$ t.c $B \neq \emptyset$. B è detto ℓ-filtro di $\mathcal{A}$ sse valgono:

(F1) Se $x, y \in B$, allora $x \cdot y \in B$

(F2) Se $x \in B$, allora $\sim x \in B$

(F3) Se $x \in B$ e $\underline{\overline{x}} \leqslant \underline{\overline{y}}$, allora $y \in B$

Osservazione 24. *Negli ℓ-gruppi abeliani $\sim x = \neg x = -x$, così $|x| = x \sqcup -x$ e $\underline{\overline{x}} = x \sqcap -x = -(x \sqcup -x)$*

Nei reticoli residuati classici $\sim x = 1$ e $\neg x = 0$, così $|x| = \underline{\overline{x}} = x$

Introduciamo adesso un'importante nozione:

Definizione 78. (sigma termini)
Se $\mathcal{A}$ è uno *-reticolo e $x, y \in A$, con $\sigma(x, y)$ intendiamo l'elemento $-(-x + y) \sqcup 0$.

Teorema 16. *(proprietà degli omomorfismi)*
Sia f un omomorfismo da $\mathcal{A} =< A, +, -, 0, \sqcap, \sqcup >$ a $\mathcal{B} =< B, +', -', 0', \sqcap', \sqcup' >$. Allora:

(i) $f(x) \leqslant' f(y)$ *sse* $\sigma(x, y) \in Ker(f)$

(ii) $Ker(f) = \{0\}$ *sse* f *è iniettiva*

(iii) $Ker(f)$ *è un* ℓ*-ideale di* $\mathcal{A}$

Questo teorema ci permette di dimostrare una parte di (R2), cioè che il Ker di ogni omomorfismo con dominio $\mathcal{A}$ (dove$\mathcal{A}$ è uno *-reticolo) è un ℓ-ideale di $\mathcal{A}$.

Teorema 17. *(proprietà degli ℓ-ideali)*

Vediamo adesso cosa sono le congruenze e come associare ad ogni ℓ-ideale di $\mathcal{A}$ una congruenza su $\mathcal{A}$.

Definizione 79. (congruenze associate a ℓ-ideali)
Sia $J \in \mathcal{I}(\mathcal{A})$. A J associamo una relazione binaria $\approx_J$ su A t.c.:

$$x \approx y \quad sse \quad \sigma(x, y) \in J \quad e \quad \sigma(y, x) \in J$$

Teorema 18. *($\approx_J$ è una congruenza)*
Se $J \in \mathcal{I}(\mathcal{A})$, allora $\approx_J$ è una congruenza su $\mathcal{A}$.

Definizione 80. (omomorfismo canonico)
Sia $J \in \mathcal{I}(\mathcal{A})$, l'omomorfismo canonico di J è dato dalla funzione
$\phi_J : A \to A/ \approx_J$ definita da:

$$\phi_J(x) = [x]_J$$

É immediato che ϕ_J è un omomorfismo da $\mathcal{A}$ in $\mathcal{A}/J$.

Teorema 19. *Sia $\mathcal{A}$ uno *-reticolo, e $J \in \mathcal{I}(\mathcal{A})$. Allora $Ker(\phi_J) = J$.*

Questo teorema ci dice che ℓ-ideale J è il Ker di ϕ_J. Quindi, dal momento che i Kernel degli omomorfismi con dominio $\mathcal{A}$ sono gli ℓ-ideali di $\mathcal{A}$ in ogni *-reticolo, possiamo concludere che la nostra definizione di ideale rispetta i desiderata. Vediamo adesso un altro importante risultato:

Teorema 20. *Se $f : A \to B$ è un omomorfismo suriettivo, allora $A/Kerf(f) =< A/\approx_{Kerf(f)}, +', -', 0', \sqcap', \sqcup' >$ è isomorfo a $\mathcal{B} =< B, +, -, 0, \sqcap, \sqcup >$*

Diamo adesso un'ultima definizione:

Definizione 81. (*-reticoli rappresentabili)
Uno *-reticolo $\mathcal{A}$ è detto rappresentabile sse soddifa:

(C13) $((-x + y) \sqcap 1) \sqcup ((-y + x) \sqcap 1) = 1$

(C13) è detta *legge algebrica di De Morgan forte* Si noti che i quozienti conservano la struttura.

Teorema 21. *(i) Se $\mathcal{A}$ è uno *-reticolo e $J \in \mathcal{I}(\mathcal{A})$, allora $\mathcal{A}/J$ è uno *-reticolo*

(ii) Se $\mathcal{A}$ è uno *-reticolo rappresentabile e $J \in \mathcal{I}(\mathcal{A})$, allora $\mathcal{A}/J$ è rappresentabile.

Vediamo adesso tre classi di ℓ-ideali importanti.

Definizione 82. (ℓ-ideale principale)
Sia $\mathcal{A}$ uno *-reticolo, e $\emptyset \neq H \subseteq A$. L'$\ell$-ideale principale generato in $\mathcal{A}$ da H (in simboli (H]) è il più piccolo ℓ-ideale di $\mathcal{A}$ che contiene H.

Teorema 22. *(Proprietà degli ℓ-ideali)*
Sia $\mathcal{A}$ uno *-reticolo.

(i) Se $\emptyset \neq H \subseteq A$, Allora $(H] = \{x | esistono\ x_1 ... x_n \in H t.c. |x| \leqslant |x_1| + ... + |x_n|\}$

(ii) Se $0 \leqslant x, y$, allora $(x] \cap (y] = (x \sqcap y]$[1]

Si può dimostrare che:

[1]con (x] si intende ℓ-ideale principale quando H consiste del singoletto di x.

Teorema 23. *(reticoli di ℓ-ideali)*

In uno *-reticolo, l'insieme parzialmente ordinato $<\mathcal{I}(\mathcal{A}), \subseteq>$ è un reticolo completo sotto le operazioni $\bigwedge \mathbf{X} = \bigcap \mathbf{X}$ e $\bigvee \mathbf{X} = (\bigcup \mathbf{X})$

Definizione 83. (ℓ-ideali debolmente primi)

Sia $\mathcal{A}$ uno *-reticolo e $J \in \mathcal{I}(\mathcal{A})$. J è detto ℓ-ideale primo debole sse per ogni $x, y \in A$, se $0 \leqslant x, y$ e $x \sqcap y \in J$, allora $x \in J$ o $y \in J$.

Definizione 84. (ℓ-ideali primi)

Sia $\mathcal{A}$ uno *-reticolo e $J \in \mathcal{I}(\mathcal{A})$. J è detto ℓ-ideale primo sse per ogni $x, y \in A$, $\sigma(x, y) \in J$ oppure $\sigma(y, x) \in J$

Osservazione 25. *É facile vedere che ogni ℓ-ideale primo è anche un ℓ-ideale debolmente primo.*

Definizione 85. (relazioni di ortogonalità)

Sia $\mathcal{A}$ uno *-reticolo e $x, y \in A$, sia inoltre $J \in \mathcal{I}(\mathcal{A})$. Allora definiamo le seguenti operazioni:

- (*J-meet-ortogonalità*) $x \asymp_J y$ sse $|x| \sqcap |y| \in J$
- (*meet-ortogonalità*) $x \asymp y$ sse $x \asymp_{\{0\}} y$
- (*J-ortogonalità*) $x \perp_J y$ sse per ogni z, se $\sigma(z, x), \sigma(z, y) \in J$, allora $z \sqcup 0 \in J$
- (*ortogonalità*) $x \perp y$ sse $x_{\{0\}} y$

Inoltre $\mathcal{A}$ è detto *ortogonalmente indecomponibile* sse per ogni $x, y \in A$, se $x \asymp y$ allora x=0 oppure y=0

Definizione 86. (totalmente ordinato)

Sia $\mathcal{A}$ uno *-reticolo, $\mathcal{A}$ è detto totalmente ordinato sse per ogni $x, y \in A$ vale: $x \leqslant y$ oppure $y \leqslant x$

Teorema 24. *(proprietà degli ℓ-ideali debolmente primi e primi)*

Sia $\mathcal{A}$ uno *-reticolo e $J \in \mathcal{I}(\mathcal{A})$. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(i) J è debolmente primo

(ii) $\mathcal{A}/J$ è ortogonalmente indecomponibile

(iii) J è un elemento finitamente meet-irriducibile del reticolo $<\mathcal{I}(\mathcal{A}), \subseteq>$

Anche le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(∗) J è primo

(∗∗) $\mathcal{A}/J$ *è totalmente ordinato*

Sia $\mathcal{A}$ *uno* **-reticolo rappresentabile, allora tutte le affermazioni precedenti e la seguente:*

(#) $\{I|J \subseteq I\}$ *è totalmente ordinato dall'inclusione insiemistica*

sono tutte equivalenti.

Come corollario abbiamo il seguente teorema:

Teorema 25. *Uno* **-reticolo* $\mathcal{A}$ *è debolmente lineare sse è ortogonalmente indecomponibile.*

Uno **-reticolo* $\mathcal{A}$ *è lineare sse è totalmente ordinato.*

Definizione 87. (valore)

Sia $\mathcal{A}$ uno *-reticolo e $J \in \mathcal{I}(\mathcal{A})$ J è detto un valore di x sse $0 \neq x, x \notin J$ e per ogni ℓ-ideale $K \supset J, x \in K$

Definizione 88. (ℓ-ideale regolare)

Sia $\mathcal{A}$ uno *-reticolo e $J \in \mathcal{I}(\mathcal{A})$ J è detto ℓ-ideale regolare sse è un valore di qualche $x \in A(x \neq 0)$

Teorema 26. *(proprietà degli* ℓ*-ideali regolari)*

In ogni **-reticolo* $\mathcal{A}$*:*

(i) Gli ℓ*-ideali regolari sono elementi meet-irriducibili di* $<\mathcal{I}(\mathcal{A}), \subseteq>$

(ii) Ogni ℓ*-ideale è debolmente primo*

Gli ultimi risultati che è utile vedere sono i teoremi di rappresentazione per *-reticoli e *-reticoli rappresentabili.

Teorema 27. *(esistenza di un valore)*

Se $\mathcal{A}$ *è uno* **-reticolo e* $x \neq 0$ *con* $x \in A$*, allora* x *ha almeno un valore.*

Teorema 28. *(i) Ogni* **-reticolo è prodotto sottodiretto di* **-reticoli debolmente lineari* *(ii) Ogni *-reticolo rappresentabile è un prodotto sottodiretto di *-reticoli lineari.*

Come corollario di questo teorema possiamo ricavarci altri teoremi di rappresentazione per classi notevoli di *-reticoli.

Nel prossimo capitolo vedremo una semantica per le logiche sottostrutturali.

Capitolo 6

Semantica algebrica

In questo capitolo vedremo come definire le nozioni di verità, validità e conseguenza nella semantica algebrica, prima per calcoli senza esponenziali, poi le estenderemo a calcoli con esponenziali. Giungeremo, inoltre, ad enunciare i teoremi di validità e completezza algebrica.

6.1 Calcoli assiomatici

Prima di entrare nel merito della questione è utile vedere brevemente i calcoli assiomatici dei calcoli che precedentemente abbiamo introdotto. Iniziamo dando i postulati di **HL**, a partire dal quale definiremo gli altri calcoli.

Definizione 89. (assiomi di **HL**)

Il calcolo **HL** è basato su linguaggio $\mathcal{L} = \{\neg, \otimes, \oplus, \rightarrow, \wedge, \vee, \mathbf{1}, \mathbf{0}\}$ e ha i seguenti postulati:

(F1) $A \rightarrow A$

(F2) $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$

(F3) $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow C))$

(F4) $\neg\neg A \rightarrow A$

(F5) $(A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow \neg A)$

(F6) $A \wedge B \rightarrow A$

(F6)$'$ $A \wedge B \to B$

(F7) $(A \to B) \wedge (A \to C) \to (A \to B \wedge C)$

(F8) $\mathbf{1}$

(F9) $\mathbf{1} \to (A \to A)$

(F10) $\mathbf{0} \to \neg\mathbf{1}$

(F10)$'$ $\neg\mathbf{1} \to \mathbf{0}$

(F11) $A \vee B \to \neg(\neg A \wedge \neg B)$

(F11)$'$ $\neg(\neg A \wedge \neg B) \to A \vee B$

(F12) $A \oplus B \to (\neg A \to B)$

(F12)$'$ $(\neg A \to B) \to A \oplus B$

(F13) $A \otimes B \to \neg(\neg A \oplus \neg B)$

(F13)$'$ $\neg(\neg A \oplus \neg B) \to A \otimes B$

(MP) Da A, $A \to B$ deduco B

(A) Da A, B deduco $A \wedge B$

Definiamo gli altri calcoli come espanzioni di **HL**, negli appositi linguaggi:

Definizione 90. (altri calcoli)

$\mathbf{HL}^{\Lambda}$=**HL** + $\mathbf{1} \to \mathbf{0}$

$\mathbf{HL}^{B}$=**HL** + (i) $A \to \mathbf{T}$
(ii) $\bot \to \neg\mathbf{T}$
(iii) $\neg\mathbf{T} \to \bot$

$\mathbf{HR}^{ND}$=**HL** + $(A \to (A \to B)) \to (A \to B)$

HRW=**HL** + $(i) A \wedge (B \vee C) \to (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
$(ii) (A \vee B) \wedge (A \vee C) \to A \vee (B \wedge C)$

HR=$\mathbf{HR}^{ND}$ + $(i) A \wedge (B \vee C) \to (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
$(ii) (A \vee B) \wedge (A \vee C) \to A \vee (B \wedge C)$

HRM=**HR** + $A \to (A \to A)$

HRMND=**HR**ND + $A \to (A \to A)$

HRMI=**HL**\(**A**) + $(i)(A \to (A \to B)) \to (A \to B)$
$(ii) A \to (A \to A)$
(R3) Da $(A \to A) \oplus (B \to B)$, A, B si può inferire $A \wedge B$
(R4) Da $(A \to A) \oplus (B \to B)$ si può inferire
$C \wedge (A \vee B) \to (C \wedge A) \vee (C \wedge B)$

HA=**HL** + $A \to (B \to A)$

HC=**HL** + (i) $(A \to A) \to (B \to B)$
(ii) $\neg(A \to A) \to (B \to B)$
(iii) $(\neg(A \to A) \to (B \to B)) \to (C \to C)$
(iv) Da $(A \to A) \to \mathbf{1}$

HG=**HC** + $\neg(A \to A)$

HPL$_n$=**HA** + $n + 1.A \to n.A$

HLuk=**HA** + $((A \to B) \to B) \to ((B \to A) \to A)$

HLuk$_3$=**HLuk** + $((A \to \neg A) \to A) \to A$

HK=**HA** + $(A \to (A \to B)) \to (A \to B)$

HL^E=**HL**^{B} + (i) $B \to (!A \to B)$
(ii) $(!A \to (!A \to !B)) \to (!A \to !B)$
(iii) $!(A \to B) \to (!A \to !B)$
(iv) $!A \to A$
(v) $!A \to !!A$
(vi) $?A \to \neg!\neg A$
(vii) $\neg!\neg A \to ?A$
(R5) Da $\vdash A$ si può inferire $\vdash !A$

Teorema 29. *(equivalenza)*

Sia ***LS*** *uno qualunque dei calcoli delle sequenze introdotti in precedenza e* ***HS*** *il calcolo assiomatico corrispondente. Allora* $\vdash_{\boldsymbol{LS}} \Gamma \implies \Delta$ *sse* $\vdash_{\boldsymbol{HS}} t(\Gamma \Rightarrow \Delta)$.

6.2 Semantica algebrica per le logiche sottostrutturali

Calcoli senza esponenziali

Per formalizzare una semantica algebrica dobbiamo riuscire a dare una definizione di valutazione, cominciamo quindi il lavoro che ci porterà a enunciare i teoremi completezza.

Definizione 91. (algebra libera delle formule di un linguaggio)
L'algebra libera delle formule di un linguaggio $\mathcal{L}$ ($Abs(\mathcal{L})$) è una struttura il cui supporto sono $FOR(\mathcal{L})$ e le cui operazioni sono i connettivi di $\mathcal{L}$

Definizione 92. (valutazione algebrica)
Sia $\mathcal{A} =< A, +, \cdot, -, \rightarrow, 0, 1, \sqcap, \sqcup >$ uno *-reticolo, dove le operazioni definite $\cdot, \rightarrow, 1$ sono incluse nella segnatura. Una valutazione algebrica del linguaggio $\mathcal{L}$ con valori in $\mathcal{A}$ è un omomorfismo $v : Abs(\mathcal{L}) \rightarrow \mathcal{A}$ che estende la funzione arbitraria v^*: $VAR(\mathcal{L}) \rightarrow \mathcal{A}$ t.c.:

$v(p) = v^*$

$v(A \oplus B) = v(A) + v(B)$	$v(A \otimes B) = v(A) \cdot v(B)$
$v(\neg A) = -v(A)$	$v(A \rightarrow B) = v(A) \rightarrow v(B)$
$v(A \wedge B) = v(A) \sqcap v(B)$	$v(A \vee B) = v(A) \sqcup v(B)$
$v(\mathbf{1}) = 1$	$v(\mathbf{0}) = 0$
$v(\mathbf{T}) = \top$	$v(\bot) = \bot$

Definizione 93. (modello algebrico)
Un modello algebrico per $\mathcal{L}$ è una coppia ordinata $\mathcal{M} =< \mathcal{A}, v >$, dove $\mathcal{A}$ è uno *-reticolo e v è una valutazione algebrica di $\mathcal{L}$ in $\mathcal{A}$

Vediamo adesso i rapporti tra le strutture algebriche che abbiamo introdotto nel capitolo precedente e i calcoli che abbiamo visto nel capitolo 3.

Consideriamo la seguente tabella[1]:

[1]Paoli, Substructural Logics: A Primer

HL	$\mathcal{C} =^{*} -reticoli$
HL$^{\Lambda}$	$\mathcal{C} =^{*} -reticoli$ dove $1 \leqslant 0$
HL^{B}	$\mathcal{C} =^{*} -reticoli$ con top e bottom
HRW	$\mathcal{C} =^{*} -reticoli$ dove $\mathcal{A} =< A, \sqcap, \sqcup >$ è distributivo
HRND	$\mathcal{C} =^{*} -reticoli$ dove $x + x \leqslant x$
HR	$\mathcal{C}=$ Monoide demorganiano
HRMND	$\mathcal{C} =^{*} -reticoli$ dove $x + x = x$
HRM	$\mathcal{C}=$ monoidi demorganiani idempotenti
HA	$\mathcal{C}=$ reticoli residuati classici
HC	$\mathcal{C} = \ell - pregruppi$
HG	$\mathcal{C} = \ell$-gruppi abeliani
HLuk	$\mathcal{C}=$ MV-algebre
HLuk$_3$	$\mathcal{C} =$ MV-algebre dove $(2)x = (3)x$
HK	$\mathcal{C} =$ algebre booleane

Diciamo che uno *-reticolo $\mathcal{A}$ è abbinato ad un certo calcolo **S** sse $\mathcal{A} \in \mathcal{C}$ (classe di *-reticoli) che è messa in relazione con quel dato calcolo **S** secondo la tabella precedente.

Intuitivamente possiamo considerare **LL** la nostra logica base alla quale associamo la struttura algebrica base: gli $*$-reticoli. Come abbiamo fatto con **LL** aggiungendo regole abbiamo trovato nuove logiche, così aggiungendo proprietà agli $*$-reticoli, troviamo nuove strutture algebriche che facciamo corrispondere all'estensioni di **LL**.

Adesso possiamo dare le definizioni di verità, validità e conseguenza appropriate alla nostra semantica.

Definizione 94. (verità in un modello)

Una certa formula A di $\mathcal{L}$ è vera nel modello algebrico $\mathcal{M} =< \mathcal{A}, v >$ sse $1 \leqslant v(A)$. In simboli:

$$\mathcal{M} \models^{\mathbf{A}} A \ \ sse \ \ 1 \leqslant v(A)$$

Definizione 95. (verità in un reticolo)

Una certa formula A di $\mathcal{L}$ è vera in uno *-reticolo $\mathcal{A}$ sse è vera in ogni modello algebrico $\mathcal{M}$ la cui prima proiezione è $\mathcal{A}$

Definizione 96. (verità di un insieme di formule)

L'insieme M di formule di $\mathcal{L}$ è detto vero nel modello $\mathcal{M}$ sse ogni formula $A \in M$ è vera in $\mathcal{M}$.

Definizione 97. (validità)

Una certa formula A di $\mathcal{L}$ è detta algebricamente valida rispetto a **S** ($\models^{\mathbf{A}}_{\mathbf{S}}$A) sse è vera in ogni *-reticolo abbinato a **S**

Definizione 98. (conseguenza)

Una certa formula A di $\mathcal{L}$ è detta conseguenza di un insieme M di formule di $\mathcal{L}$ rispetto a **S** ($M \models^{\mathbf{A}}_{\mathbf{S}} A$) sse A è vera in ogni modello algebrico $\mathcal{M}$ abbinato ad **S** dove M è vero.

Diamo un'ultima definizione che ci permetterà di enunciare un teorema di validità:

Definizione 99. (**S**-derivazione e derivabilità in **S**)

Sia **S** un calcolo assiomatico. Una **S**-derivazione è un albero etichettato le cui foglie sono etichettate da espressioni della forma $A \vdash A$, dove A è una formula del linguaggio di **S**, o della forma $\vdash B$, dove B è un assioma di **S**. Gli altri nodi della derivazione sono ottenuti applicando le seguenti regole:

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Delta \vdash A \to B}{\Gamma, \Delta \vdash B}\,(MP) \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}$$

Una formula A è detta derivabile in **S** da $A_1 ... A_n$ sse esiste una **S**-derivazione $\mathcal{D}$ la cui radice è etichettata da $A_1 ... A_n \vdash A$

Definizione 100. (**S**-derivazione debole e derivabilità debole in **S**)

Una **S**-derivazione debole differisce da una **S**-derivazione nel fatto che i suoi nodi possono essere etichettati da regole ottenute anche dalle seguenti regole:

$$\frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma, A \vdash B}\,(W) \qquad\qquad \frac{\Gamma, A, A \vdash B}{\Gamma, A \vdash B}\,(C)$$

Una formula A è detta debolmente derivabile in **S** da $A_1 ... A_n$ sse esiste una **S**-derivazione debole $\mathcal{D}$ che ha come radice $A_1 ... A_n \vdash A$

Teorema 30. *(teorema di validità algebrica)*

*Se A è una formula di $\mathcal{L}$ e M è un insieme di formule di $\mathcal{L}$, allora $M \vdash^{\boldsymbol{W}}_{\boldsymbol{S}} A$ (A è debolmente derivabile in **S** da M) implica $M \models^{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{S}} A$*

Tralasciamo la dimostrazione perché richiederebbe troppo tempo, mentre qui vogliamo solo dare un'idea generale di quelli che sono i risultati che possiamo ottenere con questi strumenti.

Questo teorema ci sta dicendo che i nostri calcoli sono validi rispetto alla semantica algebrica che abbiamo definito. Adesso dobbiamo far vedere che sono anche completi.

Definizione 101. (equivalenza tra formule)

Siano A, B due formule di $\mathcal{L}$, diciamo allora che A e B sono equivalenti in **S** ($A \approx_{\mathbf{S}} B$) sse $\vdash_{\mathbf{S}} A \leftrightarrow B$ (ovvero, $\vdash_{\mathbf{S}} A \rightarrow B$ e $\vdash_{\mathbf{S}} B \rightarrow A$)

Teorema 31. *Se* $\boldsymbol{S}$ *è un calcolo basato su* $\mathcal{L}^2$*, allora la relazione binaria* $\approx_{\boldsymbol{S}}$ *è una congruenza su* $Abs(\mathcal{L})$*.*

Definizione 102. (algebra di Lindenbaum di un sistema)

L'algebra di Lindembaum di un certo calcolo **S** con il linguaggio $\mathcal{L}$, è la struttura $\mathcal{LA}(\mathbf{S}) =< FOR(\mathcal{L})/\approx_{\mathbf{S}}, +_{\mathbf{S}}, -_{\mathbf{S}}, 0_{\mathbf{S}}, \sqcap_{\mathbf{S}}, \sqcup_{\mathbf{S}} >$, dove :

$$[A]_{\mathbf{S}} +_{\mathbf{S}} [B]_{\mathbf{S}} = [A \oplus B]_{\mathbf{S}} \qquad -_{\mathbf{S}} [A]_{\mathbf{S}} = [\neg A]_{\mathbf{S}}$$

$$[A]_{\mathbf{S}} \sqcap_{\mathbf{S}} [B]_{\mathbf{S}} = [A \wedge B]_{\mathbf{S}} \qquad [A]_{\mathbf{S}} \sqcup_{\mathbf{S}} [B]_{\mathbf{S}} = [A \vee B]_{\mathbf{S}}$$

$$0_{\mathbf{S}} = [0]_S$$

Teorema 32. $\mathcal{LA}(\boldsymbol{S})$ *è uno* **-reticolo abbinato a* $\boldsymbol{S}$*.*

Teorema 33. *Se* $\mathcal{T}$ *è una* $\boldsymbol{S}$*-teoria regolare e detached*[3] $\mathcal{LA}(\boldsymbol{S})$ *è uno* **-reticolo abbinato a* $\mathcal{T}$

Definizione 103. (modello canonico)

Ad ogni **S**-teoria $\mathcal{T}$ regolare e detached associamo un modello algebrico canonico $\mathcal{M}_{\mathcal{T}} =< \mathcal{LA}(\mathcal{T}), v_{\mathcal{T}} >$, dove per ogni formula A, $v_{\mathcal{T}}(A) = [A]_{\mathcal{T}}$

Teorema 34. *(completezza algebrica)*

Se A *è una formula di* $\mathcal{L}$ *e* M *è un insieme di formule di* $\mathcal{L}$*, allora* $M \models^{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{S}} A$ *implica* $M \vdash^{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{S}} A$

Come prima per la validità tralasciamo la dimostrazione del teorema di completezza algebrica.

---

[2] Dove con $\mathcal{L}$ si intende un qualsiasi linguaggio introdotto nei capitoli precedenti.

[3] Una **S**-teoria è detta:

- regolare sse contiene tutti gli assiomi di **S**
- detached sse $A, A \rightarrow B \in \mathcal{T}$ solo se $B \in \mathcal{T}$

Calcoli con esponenziali

Vediamo adesso come estendere i risultati precedenti a calcoli con esponenziali, quindi considereremo il calcolo $\mathbf{HL}^E$. Prima di tutto dobbiamo dare alcune importanti definizioni.

Definizione 104. (*-reticolo chiuso)

Uno *-reticolo chiuso è un'algebra $\mathcal{A} =< A, +, -, 0, \sqcap, \sqcup, c >$ di tipo <2, 1, 0, 2, 2, 1>, dove $\mathcal{A} =< A, +, -, 0, \sqcap, \sqcup >$ è uno *-reticolo e c è un'operazione (chiusura) che soddisfa:

(C13) $c(0) = 0$

(C14) $x \leqslant c(x)$

(C15) $c(c(x)) = c(x)$

(C16) $c(x) + c(y) = c(x \sqcup y)$

Per ogni $x \in A$, l'elemento $-c(-x)$ lo chiameremo interno di x, in simboli: $i(c)$.

Consideriamo adesso $\mathcal{C}(\mathcal{A})$, l'insieme di tutti gli elementi chiusi di uno *-reticolo chiuso:

Teorema 35. *(proprietà di $\mathcal{C}(\mathcal{A})$)*

(i) *$\mathcal{C}(\mathcal{A})$ è chiuso sotto addizione*

(ii) *Se $< A, \sqcap, \sqcup >$ è completo, allora $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ è chiuso sotto un'arbitraria meets*

(iii) *Se $x \in \mathcal{C}(\mathcal{A})$, allora $x = x + x$*

(iv) *Se $x \in \mathcal{C}(\mathcal{A})$, allora $0 \leqslant x$*

(v) *Per ogni $x \in A$, $c(x) = \bigwedge \{y | y \in \mathcal{C}(\mathcal{A}) \text{ e } x \leqslant y\}$*

Teorema 36. *Sia $\mathcal{A} =< A, +, -, 0, \sqcap, \sqcup >$ un quantale commutativo di Girard, e sia $B \subseteq A$, un insieme con le seguenti proprietà:*

(i) *è chiuso sotto addizione e un'arbitraria meet*

(ii) se $x \in B$, allora $x = x + x$ e $0 \leqslant x$.

Sia inoltre $c(x) = \bigvee \{y | y \in B \text{ e } x \leqslant y\}$. Allora $\mathcal{A} =< A, +, -, 0, \sqcap, \sqcup, c >$ è uno *-reticolo chiuso.

Questo teorema ci dice come poter mettere in relazione i quantales di Girard commutativi con gli *-reticoli chiusi che abbiamo definito sopra. Possiamo adesso affermare:

Teorema 37. *Ogni quantale di Giarard commutativo può essere trasformato in uno *-reticolo chiuso.*

Per avere una semantica adeguata a $\mathbf{HL}^E$ dobbiamo modificare in modo opportuno la definizione di valutazione e quella di modello che abbiamo dato all'inizio del capitolo:

Definizione 105. (valutazione algebrica)
Sia $\mathcal{A} =< A, +, \cdot, -, \rightarrow, 0, 1, \sqcap, \sqcup, c, i >$ uno *-reticolo chiuso, dove le operazioni $\cdot, \rightarrow, 1, i$ sono incluse nella segnatura. Una valutazione algebrica del linguaggio $\mathcal{L} = \{\neg, \otimes, \oplus, \rightarrow, \wedge, \vee, \mathbf{1}, \mathbf{0}, \ \mathbf{T}, \bot, !, ?\}$ con valori in $\mathcal{A}$, è un omomorfismo $v : abs(\mathcal{L}) \rightarrow \mathcal{A}$ che estende un'arbitraria $v* : VAR(\mathcal{L}) \rightarrow A$ con l'effetto che:

$v(A)$ è definita come nella definizione precedente di valutazione se $A \in FOR(\mathcal{L}_1)$ dove con $\mathcal{L}_1$ intendiamo: $\mathcal{L}_1 = \{\neg, \otimes, \oplus, \rightarrow, \wedge, \vee, \mathbf{1}, \mathbf{0}, \ \mathbf{T}, \bot, \}$

$$v(!A) = i(v(A)) \quad v(?A) = c(v(A))$$

Definizione 106. Il modello algebrico per $\mathcal{L}$ associato a $\mathbf{HL}^E$ è una coppia ordinata $\mathcal{M} =< \mathcal{A}, v >$, dove $\mathcal{A}$ è uno *-reticolo chiuso completo, e v è una valutazione algebrica per $\mathcal{L}$ con valori in $\mathcal{A}$.

Adesso possiamo formulare il teorema di correttezza:

Teorema 38. *(teorema di correttezza algebrica)*
Se A è una formula del linguaggio $\mathcal{L}$ e $M \subseteq FOR(\mathcal{L})$, allora $M \vdash^{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{HL}^E} A$

Definiamo inoltre:

Definizione 107. (algebra di Lindembaum)
L'algebra di Lindembaum per $\mathbf{HL}^E$ è la struttura $\mathcal{LA}(\mathbf{HL}^E) =< FOR(\mathcal{L}) / \approx_{\mathbf{HL}^E}, +_{\mathbf{HL}^E}, -_{\mathbf{HL}^E}, 0_{\mathbf{HL}^E}, \sqcap_{\mathbf{HL}^E}, \sqcup_{\mathbf{HL}^E}, c_{\mathbf{HL}^E} >$ Dove le operazioni già presenti sono

definite come nella precedente definizione di algebra di Lindembaum, mentre $c_{\mathbf{HL}^E}$ è definita come segue:

$$c_{\mathbf{HL}^E}([A]_{\mathbf{HL}^E}) = [?A]_{\mathbf{HL}^E}$$

Come conseguenza abbiamo che $\mathcal{LA}(\mathbf{HL}^E)$ è uno *-reticolo chiuso. Abbiamo adesso tutti gli strumenti per enunciare, e volendo dimostrare, il seguente teorema:

Teorema 39. *(teorema di completezza algebrica per $\boldsymbol{HL}^E$)*
Se $A \in FOR(\mathcal{L})$ e $M \subseteq FOR()\mathcal{L}$, allora $M \models^{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{HL}^E} A$ implica $M \vdash^{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{HL}^E} A$

Applicazioni della semantica algebrica

I motivi per studiare la semantica algebrica sono molteplici; in varie occasioni questo studio si è dimostrato utile per ottenere alcuni risultati importanti.

Uno dei maggiori utilizzi dell'algebra nella teoria della dimostrazione è per dimostrare risultati di estensione conservativa, ad esempio in Avron 1998. Un altro utilizzo riguarda l'ammissibilità delle regole nei calcoli; per esempio, Meyer e Dunn dimostrano l'ammissibilità del sillogismo disgiuntivo in **HR** grazie all'uso di strumenti algebrici.

Capitolo 7

Calcolo di Lambek e Full Lambek's Calculus

In questo ultimo capitolo andremo a vedere un calcolo in particolare: *il calcolo di Lambek*. All'inizio ci concentreremo sulla versione iniziale, quella data da J. Lambek, appunto. Successivamente vedremo un'estensione, il così detto *full Lambek calculus*. Quest'ultimo calcolo rappresenta una delle logiche più utilizzate, e con più applicazioni e interazioni con l'algebra.

7.1 Calcolo di Lambek

Vediamo adesso come nasce e come funziona il calcolo di Lambek.

7.1.1 Introduzione

Nel 1958 Joachim Lambek scrive un articolo con l'obiettivo di ottenere una regola o un algoritmo per distinguere le frasi ben formate da quelle prive di senso. La vera novità sta nel fatto che questo calcolo deve funzionare non solo per i linguaggi formali, ma anche per il linguaggio naturale.

L'idea di Lambek prende le mosse dai lavori di Ajdukiewicz, successivamente elaborati da Bar-Hillel. Questo metodo consiste in un'aritmetizzazione delle parti del discorso, che Lambek chiama *syntactic types*[1].

[1] Storicamente questi tipi sintattici possono essere ricondotti ai tipi semantici attribuiti da Tarski a E. Husserl e S. Lesniewski.

Adesso andremo a definire cosa sono i tipi sintattici, per poi presentare il calcolo.

7.1.2 Tipi sintattici

Come punto di partenza dobbiamo capire cosa si intende per *parola*. La definizione classica di parola è: *una stringa finita di lettere, di un certo alfabeto di una certa lingua, dotata di senso per un parlante di quella lingua*; ma quello che qui ci interessa è capire i tipi di una parola. Quindi, data la stringa finita *work*, le sue varianti: works, worked, working, sono tutte parole diverse, ma data la frase *we work best when we like our work*, dobbiamo essere in grado di capire che la parola work occorre due volte, ma *con tipi diversi*. Intuitivamente, i tipi sintattici corrispondono alle parti del discorso, così *work*, nella frase precedente, occorre prima come verbo, e dopo come nome.

Introduciamo i tipi primitivi:

- s, che è il tipo di una frase. Con frase, in questo contesto, si intende una proposizione dichiarativa completa.

- n, che è il tipo di un nome. In prima istanza indichiamo con tipo n tutti i nomi propri come Luca, John o Cesare. Possiamo quindi estendere il dominio di n includendo tutte le espressioni che possono occorrere in ogni contesto in cui ogni nome proprio può occorrere. Questo tipo di nomi vengono chiamati *nomi-classe*, perché indicano una classe di oggetti, sono quelli che normalmente chiamiamo nomi comuni, come: latte, carta, riso.

Partendo da questi due tipi primitivi possiamo costruirci tipi composti, definiti ricorsivamente:

> Se x e y sono tipi, allora anche x/y (x su y) e $y \setminus x$ (y sotto x) lo sono.

Vediamo alcuni esempi. In *poor John*, l'aggettivo *poor* modifica il nome proprio da sinistra, quindi gli assegneremo tipo n/n. In *John works*, il verbo works modifica da destra il nome trasformandolo in una frase, quindi il tipo corrispondente sarà: $n \setminus s$. In generale, un espressione di tipo x/y quando è seguita da un'espressione di tipo y produce un'espressione di tipo x, e un'espressione di tipo $y \setminus x$ quando è preceduta da un'espressione di tipo y produce un'espressione di tipo x

$$[*](x/y)y \to x \quad [**]y(y \setminus x) \to x$$

Continuiamo a vedere come ottenere tipi diversi componendo i due tipi primitivi. Consideriamo:

$$(poor\ John)\ works$$

$$n/n \quad n \quad n \setminus s$$

In questa frase abbiamo, per (poor John) un tipo n/n seguito da un tipo n che mi produce, per $[*]$ un tipo n. Continuando, abbiamo un tipo n che precede un tipo $n \setminus s$ che per $[**]$ produce un tipo s, ovvero una frase.

$$(John\ works)\ here$$

$$n \quad n \setminus s \quad s \setminus s$$

Qui abbiamo un tipo primitivo n che viene modificato da destra producendo una frase, quindi works ha tipo $n \setminus s$ e quello che ottengo è un tipo s, per $[**]$. Adesso dobbiamo trovare il tipo di *here*. L'avverbio modifica da destra John works che ha tipo s, producendo una nuova frase, segue che il tipo di *here* è $s \setminus s$ che per $[**]$ ha tipo s.

$$(John\ works)\ (for\ Jane)$$

$$n \quad n \setminus s \quad (s \setminus s)/n \quad n.$$

Per *John works* lavoriamo come sopra. Il termine *for* ha tipo $(s \setminus s)/n$ perché mi modifica da destra la frase e da sinistra *Jane*.

$$(John\ works)\ (and\ (Jane\ rests))$$

$$n \quad n \setminus s \quad (s \setminus s)/s \quad n \quad n \setminus s$$

Limitiamoci a discutere di *and*, il resto è come sopra. Il tipo della congiunzione è costruito a partire dall'idea che io ho due s, e che prima *and* modifica da destra la prima frase costruendo il tipo $(s \setminus s)$ e poi tutto questo modifica la seconda frase, ottenendo così il tipo complesso $(s \setminus s)/s$.

parola	**tipo**	**parte del discorso**
works	$n \setminus s$	verbo intransitivo
poor	n/n	aggettivo
here	$s \setminus s$	avverbio
never	$n \setminus s/(n \setminus s)$	avverbio
for	$s \setminus s/n$	preposizione
and	$s \setminus s/s$	congiunzione
likes	$n \setminus s/n$	verbo transitivo

Consideriamo:

$$\text{John (likes (fresh milk))}$$

$$n \quad n \setminus s/n \;\; n/n \quad n$$

La computazione dell'esempio sarà:

$$n((n \setminus s/n)((n/n)n)) \rightarrow n((n \setminus s/n)n) \rightarrow n(n \setminus s) \rightarrow s$$

Abbiamo quindi un metodo per dire se una data stringa di simboli è o meno una formula ben formata. Nei linguaggi formali, ogni parola corrisponde ad una formula. Inoltre, possiamo dire che se A e B sono formule, (A B) è ancora una formula. Le parentesi sono omesse quando non necessarie. Per esempio scriveremo:

$$p \quad \rightarrow \quad q$$

$$s \;\; s \setminus s/s \;\; s$$

al posto di

$$p \;\; (\rightarrow \quad q)$$

$$s \;\; (s \setminus s)/s \;\; s$$

La struttura di un linguaggio formalizzato risulta essere completamente determinata dai suoi tipi. Per esempio:

- Il calcolo proposizionale possiede un'infinità di variabili di tipo s, e due simboli per la negazione e l'implicazione, rispettivamente di tipo s/s e $s \setminus s/s$. Se si utilizza la notazione polacca, tutte le parentesi potrebbero essere rimosse.

- L'algebra booleana contiene un'infinità di variabili individuali, 1 e 0 tipo n, un simbolo di complementazione di tipo $n \setminus n$, $\sqcap$ e $\sqcup$ di tipo $n \setminus n/n$, l'uguaglianza e l'inclusione di tipo $n \setminus s/n$.

- Il calcolo di Lambek (1958) contiene un numero di simboli per i tipi primitivi, tre connettivi $\cdot, \backslash, /$ di tipo $n \backslash n/n$, e $\rightarrow$ di tipo $n \backslash s/n$

Osservazione 26. *Solitamente nei linguaggi formali si assume che espressioni di tipo s denotano valori di verità, espressioni di tipo n denotano elementi di un dato dominio di individui, e espressioni di tipo x/y o $y \backslash x$ denotano funzioni dalla classe degli elementi di tipo y a quelli di tipo x.*

7.1.3 Calcolo sintattico

Abbiamo già detto che in questo calcolo abbiamo tre connettivi : $\backslash, /$ e $\cdot$. Intuitivamente questi connettivi lavorano rispettivamente come $\rightarrow, \leftarrow$ e $\wedge$. É importante notare la differenza tra l'uso dei connettivi nella logica e nelle grammatiche categoriali. In quest'ultime è importante l'ordine, la molteplicità delle formule, e una volta utilizzate queste si modificano, e non potranno più essere utilizzate: siamo quindi in una logica attenta alle risorse.

Vediamo adesso come funziona il calcolo delle sequenze per questa logica.

Definizione 108. Una sequenza nel calcolo di Lambek è un'espressione della forma:

$$A_1, ..., A_n \Rightarrow A \quad (n \geqslant 1)$$

L'antecedente è formato da una lista finita, non vuota di formule ; il conseguente è una formula A.

Definizione 109. (postulati)

Assiomi

$$A \Rightarrow A$$

Regole strutturali

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A \qquad \Delta, A, \Pi \Rightarrow B}{\Delta, \Gamma, \Pi \Rightarrow B} \ (cut)$$

Regole operazionali

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A \qquad \Delta, B, \Pi \Rightarrow C}{\Delta, \Gamma, A \backslash B, \Pi \Rightarrow C} \ (\backslash L) \qquad \frac{A, \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \backslash B} \ (\backslash R)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A \qquad \Delta, B, \Pi \Rightarrow C}{\Delta, B/A, \Gamma, \Pi \Rightarrow C}\ (/L) \qquad \frac{\Gamma, A \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow B/A}\ (/R)$$

$$\frac{\Gamma, A, B, \Delta \Rightarrow C}{\Gamma, A \cdot B, \Delta \Rightarrow C}\ (\cdot L) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A \qquad \Delta \Rightarrow B}{\Gamma, \Delta \Rightarrow A \cdot B}\ (\cdot R)$$

$$\text{con } \Gamma \neq \emptyset \ in\ (\backslash R)\ (/R).$$

Vediamo un esempio di derivazione:

$$\frac{\dfrac{P \Rightarrow P \qquad Q \Rightarrow Q}{P, P \setminus Q \Rightarrow Q}\ (\backslash L) \qquad \dfrac{Q \Rightarrow Q \qquad R \Rightarrow R}{Q, Q \setminus R \Rightarrow R}\ (\backslash L)}{\dfrac{P, P \setminus Q, Q \setminus R \Rightarrow R}{P \setminus Q, Q \setminus R \Rightarrow P \setminus R}\ (\backslash R)}\ (\backslash L)$$

Alcune leggi del calcolo di Lambek:

$$A \cdot (B \cdot C) \Leftrightarrow (A \cdot B) \cdot C \quad (associativit)$$

$$(A \setminus B)/C \Leftrightarrow A \setminus (B/C) \quad (commutazione)$$

$$A/(B \cdot C) \Leftrightarrow (A/C)/B \quad (currying\ e\ uncurrying)$$

$$(A \cdot B) \setminus C \Leftrightarrow B \setminus (A \setminus C) \quad (currying\ e\ uncurrying)$$

Possiamo adesso considerare alcuni esempi di frasi formalizzate e computate tramite questo calcolo.

Esempio 8. *Prendiamo la frase:*

John loves Mary

La sequenza corrispondente sarà:

$$n, (n \setminus s)/n, n \Rightarrow s$$

La cui derivazione è:

$$\frac{n \Rightarrow n \qquad \dfrac{n \Rightarrow n \qquad s \Rightarrow s}{n, n \setminus s \Rightarrow s}\ (\backslash L)}{n, (n \setminus s)/n, n \Rightarrow s}\ (/L)$$

Esempio 9. *Consideriamo la frase:*

Today it rained amazingly

Assegnamo tipo s a it rained*, e tipo s/s e $s \setminus s$ rispettivamente a* today *e* amazingly*. La sequenza corrispondente sarà quindi:*

$$s/s, s, s \setminus s \Rightarrow s$$

e la derivazione:

$$\dfrac{s \Rightarrow s \qquad \dfrac{s \Rightarrow s \qquad s \Rightarrow s}{s, s \setminus s \Rightarrow s}\,(\setminus L)}{s/s, s, s \setminus s \Rightarrow s}\,(/L)$$

In realtà, questa frase è ambigua, infatti può essere letta come:

(i) É piovuto oggi ed è fantastico che sia stato così.

(ii) É piovuto oggi in modo magnifico. La derivazione che abbiamo fatto sopra corrisponde a (i), vediamo quella di (ii):

$$\dfrac{s \Rightarrow s \qquad \dfrac{s \Rightarrow s \qquad s \Rightarrow s}{s/s, s \Rightarrow s}\,(/L)}{s/s, s, s \setminus s \Rightarrow s}\,(\setminus L)$$

7.1.4 Cut-elimination

Come abbiamo detto nel secondo capitolo, il teorema di eliminazione delle cesure, o cut-elimination, è un teorema molto importante, che permette di avere la proprietà della sottoformula e che ci consente di dimostrare molte proprietà interessanti. Conviene, quindi, vedere se il calcolo che stiamo studiando è o meno cut-free.

É da notare che: in ogni regola operazionale del calcolo di Lambek, ogni tipo nelle premesse è un sottotipo nella conclusione. Ne segue che, fatta eccezione per la regola del cut, vale sempre il principio della sottoformula.

Lambek (1958) prova un teorema di cut-elimination. Prima di enunciare il teorema definiamo la nozione di grado:

Definizione 110. (grado)

Definiamo:

- Grado di una formula come il numero delle occorrenze dei connettivi nella formula.

- Grado di una sequenza la somma dei gradi delle formule che occorono in quella sequenza.

- Grado di un cut la somma del grado delle premesse.

Adesso per dimostrare il cut-elimination dobbiamo dimostrare un lemma dal quale seguirà il teorema:

Lemma 1. *Sia $\mathcal{D}$ una derivazione della forma:*

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ \Gamma \Rightarrow A\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\vdots \\ \Delta, A, \Pi \Rightarrow B\end{matrix}}{\Delta, \Gamma, \Pi \Rightarrow B}\ (cut)$$

e tale che le premesse sono prive di cut. Allora è possibile trasformare $\mathcal{D}$ in una $\mathcal{D}^*$ cut-free avente la stessa sequenza finale di $\mathcal{D}$.

Teorema 40. *(cut-elimination)*
Data una qualunque derivzione $\mathcal{D}$ è possibile trasformarla in una $\mathcal{D}^*$ cut-free avente la stessa sequenza finale.

Dimostrazione. (Lemma)
Si dimostra per induzione sul grado della cesura che conclude $\mathcal{D}$.

Osservazione 27. *In ogni regola di **L**, il grado della premessa (premesse) è minore del grado della conclusione.*

Distinguiamo per casi:

(1) La premessa di sinistra $\Gamma \Rightarrow A$ è un assioma. Dal momento che gli assiomi di **L** sono della forma $A \Rightarrow A$ ne segue che $\Gamma = A$. Allora $\mathcal{D}$ sarà della forma:

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ A \overset{n}{\Rightarrow} A\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\vdots \\ \Delta, A, \Pi \overset{m}{\Rightarrow} B\end{matrix}}{\Delta, A, \Pi \overset{n+m}{\Rightarrow} B}\ (cut)$$

Dove n, m sono i gradi delle sequenze.

Quindi la conclusione è uguale alla premessa di destra, e sarà dunque questa la $\mathcal{D}^*$ desiderata.

(2) La premessa di destra è un assioma. Quindi $\Delta, \Pi = \emptyset$ e A=B. Allora $\mathcal{D}$ sarà della forma:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma \overset{n}{\Rightarrow} A\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\\ A \overset{m}{\Rightarrow} A\end{array}}{\Gamma \overset{n+m}{\Longrightarrow} A}\ (cut)$$

Dove n, m sono i gradi delle sequenze.

La conclusione risulta essere uguale alla premessa di sinistra, e sarà dunque questa la $\mathcal{D}^*$ desiderata.

(3) Consideriamo il caso in cui A è principale nell'ultima regola. $\mathcal{D}$ sarà della forma:

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma \overset{n}{\Rightarrow} A}\ R \qquad \dfrac{\vdots}{\Delta, A, \Pi \overset{m}{\Rightarrow} B}\ R}{\Delta, \Gamma, \Pi \overset{n+m}{\Longrightarrow} D}\ (cut)$$

Dobbiamo fare una distinzione di casi:

3.1 A è della forma $B \setminus C$. Allora $\mathcal{D}$ è della forma:

$$\dfrac{\dfrac{B, \Gamma \overset{n-1}{\Rightarrow} C}{\Gamma \overset{n}{\Rightarrow} B \setminus C}\ R \qquad \dfrac{\Delta' \overset{m_1}{\Longrightarrow} B \qquad \Delta'', C, \Pi \overset{m_2}{\Longrightarrow} D}{\Delta, B \setminus C, \Pi \overset{m}{\Longrightarrow} D}\ R}{\Delta, \Gamma, \Pi \overset{n+m}{\Longrightarrow} D}\ (cut)$$

Dove $\Delta = \Delta'' + \Delta'$ e $m = m_1 + m_2 + 1$ Chiamiamo $\mathcal{D}_1$:

$$\begin{array}{c}\vdots\\ B, \Gamma \overset{n-1}{\Rightarrow} C\end{array}$$

$\mathcal{D}_2'$:

$$\begin{array}{c}\vdots\\ \Delta' \overset{m_1}{\Longrightarrow} B\end{array}$$

e $\mathcal{D}_2''$:

$$\begin{array}{c}\vdots\\ \Delta'', C, \Pi \overset{m_2}{\Longrightarrow} D\end{array}$$

L'idea è di spostare il cut più in alto, e quindi di utilizzare le sottoderivazioni precedenti per poter applicare l'ipotesi induttiva in questo modo:

$$\dfrac{\Delta' \overset{m_1}{\Rightarrow} B \qquad B, \Gamma \overset{n-1}{\Rightarrow} C}{\Delta'\Gamma, \overset{(n-1)+m_1}{\Longrightarrow} C}\ cut$$

Adesso possiamo fare un secondo cut con:

$$\dfrac{\dfrac{\Delta'\Gamma, \overset{(n-1)+m_1}{\Longrightarrow} C \qquad \Delta'', C, \Pi \overset{m_2}{\Longrightarrow} D}{\Delta'', \Delta'\Gamma, \Pi \overset{(n-1)+m_2+m_1}{\Longrightarrow} D}\ cut}{\Delta, \Gamma, \Pi \overset{(n-1)+m_2+m_1}{\Longrightarrow} D}$$

3.2 Il caso A=B/C è simmetrico. Si deve stare però attenti all'ordine, quindi a come si dividono i contesti nell'ipotesi di destra. In questo caso si avrà:

$$\dfrac{\dfrac{B, \Gamma \overset{n-1}{\Rightarrow} C}{\Gamma \overset{n}{\Rightarrow} B/C}\ R \qquad \dfrac{\Pi' \overset{m_1}{\Longrightarrow} B \qquad \Delta, C, \Pi'' \overset{m_2}{\Longrightarrow} D}{\Delta, B/C, \Pi \overset{m}{\Longrightarrow} D}\ R}{\Delta, \Gamma, \Pi \overset{n+m}{\Longrightarrow} D}\ (cut)$$

dove $\Pi = \Pi'' + \Pi'$.

3.3 A è della forma $B \cdot C$. Allora $\mathcal{D}$ è della forma:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma' \overset{n_1}{\Rightarrow} B \qquad \Gamma'' \overset{n_2}{\Rightarrow} C}{\Gamma \overset{n}{\Rightarrow} B \cdot C}\ R \qquad \dfrac{\Delta, B, C, \Pi \overset{m-1}{\Longrightarrow} D}{\Delta, B \cdot C, \Pi \overset{m}{\Longrightarrow} D}\ R}{\Delta, \Gamma, \Pi \overset{n+m}{\Longrightarrow} D}\ (cut)$$

dove $n = n_1 + n_2 + 1$. Come prima fare dei cut su dimostrazioni di grado inferiore. e otterremo $\mathcal{D}^*$

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma'' \overset{n_2}{\Rightarrow} C \qquad \dfrac{\Gamma' \overset{n_1}{\Rightarrow} B \qquad \Delta, B, C, \Pi \overset{m-1}{\Longrightarrow} D}{\Delta, C, \Gamma', \Pi \overset{n_1+(m-1)}{\Longrightarrow} D}\ (cut)}{\Delta, \Gamma', \Gamma'', \Pi \overset{n_1+n_2+(m-1)}{\Longrightarrow} D}\ (cut)}{\Delta, \Gamma, \Pi \overset{n_1+n_2+(m-1)}{\Longrightarrow} D}$$

Adesso ci rimangono solo altri due casi:

(4) Quando A non è principale nella premessa di destra. Allora $\mathcal{D}$ è della forma:

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma \overset{n}{\Rightarrow} A}\,R \qquad \begin{array}{c}\vdots\\ \Delta, A, \Pi \overset{m}{\Rightarrow} B\end{array}}{\Delta, \Gamma, \Pi \overset{n+m}{\Longrightarrow} D}\,(cut)$$

Dobbiamo distinguere in due casi:

4.1 R è a una premessa Allora $\mathcal{D}$ è della forma:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma' \overset{n-1}{\Rightarrow} A}{\Gamma \overset{n}{\Rightarrow} A}\,R \qquad \begin{array}{c}\vdots\\ \Delta, A, \Pi \overset{m}{\Rightarrow} B\end{array}}{\Delta, \Gamma, \Pi \overset{n+m}{\Longrightarrow} D}\,(cut)$$

La $\mathcal{D}^*$ che otteniamo è della forma:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma' \overset{n-1}{\Rightarrow} A \qquad \Delta, A, \Pi \overset{m}{\Rightarrow} B}{\Delta, \Gamma', \Pi \overset{(n-1)+m}{\Longrightarrow} D}\,(cut)}{\Delta, \Gamma, \Pi \overset{n+m}{\Longrightarrow} D}\,R$$

4.2 R è a due premesse. Allora $\mathcal{D}$ è della forma:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma' \overset{n_1}{\Rightarrow} B \qquad \Gamma'', C, \Gamma''' \overset{n_2}{\Rightarrow} A}{\Gamma \overset{n}{\Rightarrow} A}\,R \qquad \begin{array}{c}\vdots\\ \Delta, A, \Pi \overset{m}{\Rightarrow} B\end{array}}{\Delta, \Gamma, \Pi \overset{n+m}{\Longrightarrow} D}\,(cut)$$

La $\mathcal{D}^*$ che otteniamo è della forma:

$$\dfrac{\Gamma' \overset{n_1}{\Rightarrow} B \qquad \dfrac{\Gamma'', C, \Gamma''' \overset{n_2}{\Rightarrow} A \qquad \Delta, A, \Pi \overset{m}{\Rightarrow} B}{\Delta, \Gamma'', C, \Gamma''', \Pi \overset{n_2+m}{\Longrightarrow} D}\,(cut)}{\Delta, \Gamma, \Pi \overset{n+m}{\Longrightarrow} D}\,R$$

(5) A non è principale nella premessa di destra.

Questo caso è simmetrico al precedente.

$\square$

Dimostrazione. (Teorema)

Si dimostra per induzione sul numero di cut in una derivazione $\mathcal{D}$.

Se è 0, $\mathcal{D}$ è cut-free.

Se è $k+1$, consideriamo il primo cut, quello che sopra non ne ha altri. Le premesse del cut saranno quindi sottoderivazioni di $\mathcal{D}$ cut-free. La sottoderivazione $\mathcal{E}$, che ha come ultima regola il primo cut di $\mathcal{D}$, sarà della forma:

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ A \overset{n}{\Rightarrow} A\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\vdots \\ \Delta, A, \Pi \overset{m}{\Rightarrow} B\end{matrix}}{\Delta, A, \Pi \overset{n+m}{\Rightarrow} B}\ (cut)$$
$$\vdots$$

Applicando il lemma precedente otteniamo una nuova sottoderivazione $\mathcal{E}'$ priva di cut. Innestandola in $\mathcal{D}$ al posto di $\mathcal{E}$ otteniamo una $\mathcal{D}'$ con k cut. La conclusione segue per ipotesi induttiva.

$\square$

7.1.5 Semantica

Definizione 111. (gruppoide residuato)

Un gruppoide residuato è una struttura $\mathcal{G} =< G, \cdot, \hookleftarrow, \hookrightarrow, \leqslant>$ di tipo $<$ <2,2,2>,<2> $>$ dove:

- $< G, \cdot >$ è un gruppoide.
- $< G, \leqslant>$ è un insieme parzialmente ordinato.
- $x \cdot y \leqslant z$ sse $y \leqslant x \hookrightarrow z$ sse $x \leqslant z \hookleftarrow y$.

Osservazione 28. *Un gruppoide residuato è un semigruppo residuato solo se $< G, \cdot >$ è un semigruppo.*

Una struttura $\mathcal{G} =< G, \cdot, 1, \hookleftarrow, \hookrightarrow, \leqslant>$ di tipo $<$ <2,0,2,2>,<2> $>$ è un monoide residuato sse $\mathcal{G} =< G, \cdot, \hookleftarrow, \hookrightarrow, \leqslant>$ è un gruppoide residuato e

$$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x.$$

Infine, tutte le strutture sopra definite sono abeliane sse $< G, \cdot >$ è abeliano.

Dando le definizioni adeguate di modello, validità e verità, come abbiamo fatto nel capitolo precedente, possiamo dire che $\Gamma \Rightarrow A$ è dimostrabile in **L** solo se è valida in ogni gruppoide residuato.

Došen (1992) crea una semantica relazionale per il calcolo di Lambek dove un modello per **L** è una coppia ordinata $\mathcal{M} =< \mathcal{F}, v >$, dove $\mathcal{F}$ è una cornice composta da un insieme W di situazioni, e una relazione ternaria di accessibilità R. v invece è una valutazione le cui clausole sono:

$$v(A \otimes B, x) = T \ sse \ \exists y, z(Ryzx \& \ v(A, y) = T \ \& \ v(B, z) = T)$$

$$v(A \setminus B, x) = T \ sse \ \forall y, z(Ryxz \ \& \ v(A, y) = T \Rightarrow v(B, z) = T)$$

$$v(A/B, x) = T \ sse \ \forall y, z(Ryxz \ \& \ v(A, y) = T \Rightarrow v(B, z) = T)$$

7.1.6 Varianti ed estensioni

Consideriamo adesso delle varianti ed estensioni del calcolo di Lambek del 1958:

(i) **LN**, il calcolo non associativo di Lambek (1961). Questa variante è fornita dallo stesso Lambek; qui Γ, Δ, Π... non sono sequenze ma database strutturati. Sono insiemi di informazioni, dati dove la virgola è un'operatore non associativo su tipi.

(ii) Il calcolo di Lambek commutativo, che si deve a Van Benthem (1986). In questo calcolo Γ, Δ, Π... sono multinsiemi di tipi. Ne segue che i due connettivi $\setminus$ *e* $/$ collassano l'uno nell'altro. Infatti, utilizzando i multinsiemi si introduce implicitamente una regola di scambio, la quale ci permette di ridurre i due connettivi ad uno solo.

(iii) Le versioni dei calcoli sopra citati senza restrizioni sulle regole $(\setminus R)$ e $(/R)$.

(iv) Estensioni linguistiche:

- Aggiunta della negazione per dar conto delle informazioni negative (Buszkowski 1995).
- Aggiunta delle modalità (Moortgat 1996).
- Introduzione della disgiunzione e congiunzione reticolari (Kanazawa 1994).

7.2 Full Lambek's Calculus

Vediamo adesso un'estensione del calcolo di Lambek che abbiamo appena discusso: **FL**, full Lambek calculus.

Definizione 112. (postulati di **FL**)

Il linguaggio di $\mathbf{LL}^E$ è: $\mathcal{L} = \{\neg, \otimes, \oplus, \rightarrow, \wedge, \vee, \mathbf{1}, \mathbf{0}, \ \mathbf{T}, \bot, !, ?\}$. Inoltre Θ è una lista di formule dello stesso linguaggio contenente al più una formula.

Assiomi

$$A \Rightarrow A$$

$$\Rightarrow 1 \qquad 0 \Rightarrow$$

$$\Gamma \Rightarrow \mathbf{T} \qquad \Gamma, \bot, \Delta \Rightarrow \Theta$$

Regole strutturali

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A \qquad \Delta, A, \Pi \Rightarrow \Theta}{\Delta, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Theta}\ (cut)$$

Regole operazionali

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A \qquad \Delta, B, \Pi \Rightarrow \Theta}{\Delta, \Gamma, A \setminus B, \Pi \Rightarrow \Theta}\ (\setminus L) \qquad \frac{A, \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \setminus B}\ (\setminus R)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A \qquad \Delta, B, \Pi \Rightarrow \Theta}{\Delta, B/A, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Theta}\ (/L) \qquad \frac{\Gamma, A \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow B/A}\ (/R)$$

$$\frac{\Gamma, A, B, \Delta \Rightarrow \Theta}{\Gamma, A \cdot B, \Delta \Rightarrow \Theta}\ (\cdot L) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A \qquad \Delta \Rightarrow B}{\Gamma, \Delta \Rightarrow A \cdot B}\ (\cdot R)$$

$$\frac{\Gamma, A, \Delta \Rightarrow \Theta}{\Gamma, A \wedge B, \Delta \Rightarrow \Theta}\ (\wedge L) \qquad \frac{\Gamma, B, \Delta \Rightarrow \Theta}{\Gamma, A \wedge B, \Delta \Rightarrow \Theta}\ (\wedge L)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A \qquad \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \wedge B}\ (\wedge R)$$

$$\frac{\Gamma, A, \Delta \Rightarrow \Theta \qquad \Gamma, B, \Delta \Rightarrow \Theta}{\Gamma, A \vee B, \Delta \Rightarrow \Theta}\ (\vee L)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A}{\Gamma \Rightarrow B \vee A}\ (\vee R) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \vee B}\ (\vee R)$$

$$\frac{\Gamma, \Delta \Rightarrow \Theta}{\Gamma, 1, \Delta \Rightarrow \Theta}\ (1L) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow}{\Gamma \Rightarrow 0}\ (0R)$$

Consideriamo adesso le seguenti regole:

$$\frac{\Gamma, \Delta \Rightarrow \Theta}{\Gamma, A, \Delta \Rightarrow \Theta}\ (w1) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow}{\Gamma \Rightarrow \Theta}\ (w2)$$

$$\frac{\Gamma, A, B, \Delta \Rightarrow \Theta}{\Gamma, B, A, \Delta \Rightarrow \Theta}\ (e)$$

$$\frac{\Gamma, A, A, \Delta \Rightarrow \Theta}{\Gamma, A, \Delta \Rightarrow \Theta}\ (c)$$

Se a **FL** aggiungiamo tutte le regole strutturali sopra definite otteniamo la logica intuizionistica; se invece aggiungiamo solo (e) abbiamo la logica lineare intuizionistica senza esponenziali.

Se consideriamo $\mathbf{FL}_e$, $\mathbf{FL}_w$, $\mathbf{FL}_{ew}$ oppure $\mathbf{FL}_{ec}$ possiamo dimostrare un teorema di cut-elimination, che non vale per $\mathbf{FL}_c$. Ne segue che:

- Queste varianti di **FL** sono *prime*. La primalità segue dal cut-elimination e dal fatto che il conseguente può contenere al massimo una formula.

- queste varianti di **FL** sono *decidibili*. É facile dimostrare la decidibilità per logiche prive di contrazione. Per quanto riguarda $\mathbf{FL}_{ec}$ si può dimostrare che il calcolo proposizionale è decidibile, mentre quello predicativo no.

- Interpolazione: se è dimostrabile $A \to B$, allora vale almeno uno dei seguenti casi:

  1. $\vdash \neg A$;
  2. $\vdash B$;
  3. oppure esiste una formula C, l'interpolante, scritta nel linguaggio comune di A e B t.c. $\vdash A \to C$ e $\vdash C \to B$

  Il teorema di interpolazione è dovuto a Craig (1957). Utilizzando il metodo di Maehara è possibile dimostrare lo stesso risultato per le logiche sopra definite.

Osservazione 29. *Tutte queste proprietà valgono anche per* ***FL****.*

Vediamo adesso una semantica per questa famiglia di logiche.

Definizione 113. (monoide ordinato semireticolare)

Un monoide ordinato semireticolare è una struttura $\mathcal{D} =< D, \cdot, 1, T, \leqslant>$ di tipo $<$ <2,0,0> <2> $>$, dove:

- $< D, \leqslant>$ è un semireticolo inferiore con T elemento superiore.
- $< D, \cdot, 1 >$ è un monoide.
- $x \cdot T = T$ per ogni $x \in D$.
- $z \cdot (x \sqcap y) \cdot w = (z \cdot x \cdot w) \sqcap (z \cdot y \cdot w)$ per ogni $x, y, z, w \in D$.

Definizione 114. (modello)

Un modello è una coppia ordinata $\mathcal{M} =< \mathcal{D}; v >$ dove $\mathcal{D}$ è un monoide ordinato semireticolare e una valutazione v t.c.:

$$Se\ v(p, x) = v(p, y) = T\ e\ z \in D,\ allora\ x \sqcap y \leqslant z\ implica\ v(p, z) \in T$$

$$Se\ v(\mathbf{0}, x) = v(\mathbf{0}, y) = T\ e\ z \in D,\ allora\ x \sqcap y \leqslant z\ implica\ v(\mathbf{0}, z) \in T$$

$$v(\mathbf{T}, x) = T\ per\ ogni\ x$$

$$v(A \otimes B, x) = T\ sse\ \exists y, z(y \cdot z \leqslant\ \ \&\ v(A, y) = T\ \&\ v(B, z) = T)$$

$$v(A \setminus B, x) = T\ sse\ \forall y, z(y \cdot x \leqslant z\ \ \&\ v(A, y) = T \Rightarrow v(B, z) = T)$$

$$v(A/B, x) = T\ sse\ \forall y, z(y \cdot x \leqslant z\ \&\ v(A, y) = T \Rightarrow v(B, z) = T)$$

$$v(A \vee B, x) = T\ sse\ \exists y, z(y \sqcap z \leqslant x\ \&\ (v(A, y) = T\ \mathbf{V}\ v(B, y) = T)$$

$$\&\ v(A, z) = T\ \mathbf{V}\ v(B, z) = T)$$

$$v(A \wedge B, x) = T\ sse\ v(A, x) = T\ \&\ v(B, x) = T$$

$$v(\perp, x) = T\ sse\ x = T$$

$$v(\mathbf{1}, x) = T\ sse\ 1 \leqslant x$$

La formula A è vera in $\mathcal{M} =< \mathcal{D}; v >$ sse $v(A, x) = T$ per ogni $x \geqslant 1$ ed è vera in un monoide ordinato semireticolare $\mathcal{D}'$ solo se è vera in ogni modello della forma $< \mathcal{D}'; v >$.

Conclusioni

Quanto detto fino a ora vuole essere solo una breve, e non esaustiva, introduzione al problema delle logiche sottostrutturali. Queste logiche ormai rappresentano un campo di studio molto attivo e fruttuoso. Sono molti gli studiosi che si dedicano a questo argomento, grazie anche alla loro utilità nella computer science.

In queste pagine abbiamo affrontato il problema delle logiche sottostrutturali partendo dalla loro origine nella conferenza di Tübingen, dove Došen ha coniato il termine con cui ormai sono note. Successivamente ci siamo soffermati sul significato delle regole strutturali per poi vedere, nel terzo capitolo, come esse modificano i calcoli. Abbiamo inoltre visto come reintrodurre tali regole in modi alternativi. Infine, abbiamo brevemente visto come funziona la semantica algebrica per queste logiche.

Nell'ultimo capitolo ci siamo occupati del nostro case study: Il calcolo di Lambek. Basandoci principalmente sugli articoli del 1958 e 1961 abbiamo delineato gli obiettivi che Lambek aveva quando ha creato questo calcolo. Abbiamo visto cosa sono i tipi sintattici e dato i postulati del calcolo. Abbiamo dimostrato il cut-elimination e considerato alcune possibili varianti ed estensioni come **FL**.

Le linee di ricerca in questo settore sono in continua crescita, e in sempre più conferenze viene dedicato un apposito spazio per discutere delle logiche sottostrutturali. Particolarmente fiorenti sono le logiche lineari, quelle rilevanti e quelle derivate dal calcolo di Lambek. É inoltre ormai nota la loro importanza nell'ambito algebrico, e infatti, oltre che nella semantica algebrica (ma non solo algebrica), si stanno vedendo molti sviluppi nell'algebra delle logiche sottostrutturali, tanto che è nato un nuovo settore di ricerca, noto come algebraic proof theory.

Bibliografia

[Abrusci(1991)] V Michele Abrusci. Phase semantics and sequent calculus for pure noncommutative classical linear propositional logic. *The Journal of Symbolic Logic*, 56(04):1403–1451, 1991.

[Abrusci and Ruet(1999)] V Michele Abrusci and Paul Ruet. Non-commutative logic i: the multiplicative fragment. *Annals of pure and applied logic*, 101(1):29–64, 1999.

[Aguzzoli et al.(2000)Aguzzoli, Ciabattoni, and Di Nola] Stefano Aguzzoli, Agata Ciabattoni, and Antonio Di Nola. Sequent calculi for finite-valued lukasiewicz logics via boolean decompositions. *Journal of Logic and Computation*, 10(2):213–222, 2000.

[Anderson et al.(1975)Anderson, Belnap, et al.] Alan R Anderson, Nuel D Belnap, et al. Entailment, vol. 1. *Princeton UP Princeton*, 1975.

[Avron(1987)] Arnon Avron. A constructive analysis of rm. *The Journal of symbolic logic*, 52(04):939–951, 1987.

[Avron(1996)] Arnon Avron. *The method of hypersequents in the proof theory of propositional non-classical logics*. na, 1996.

[Avron et al.(1990)] Arnon Avron et al. Relevance and paraconsistency—a new approach. iii. cut-free gentzen-type systems. *Notre Dame journal of formal logic*, 32(1):147–160, 1990.

[Belnap(1996)] Nuel Belnap. The display problem. In *Proof Theory of Modal Logic*, pages 79–92. Springer, 1996.

[Belnap(1982)] Nuel D Belnap. Display logic. *Journal of philosophical logic*, 11(4):375–417, 1982.

[Buszkowski(2001)] Wojciech Buszkowski. Lambek grammars based on pregroups. In *Logical aspects of computational linguistics*, pages 95–109. Springer, 2001.

[Casadio and Lambek(2002)] Claudia Casadio and Joachim Lambek. A tale of four grammars. *Studia Logica*, 71(3):315–329, 2002.

[Casari(2002)] E Casari. La matematica della verita. *Privately distributed*, 2002.

[Casari(1989)] Ettore Casari. Comparative logics and abelian l-groups. *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, 127:161–190, 1989.

[Casari(1997)] Ettore Casari. Conjoining and disjoining on different levels. In *Logic and scientific methods*, pages 261–288. Springer, 1997.

[Chang(1958)] Chen Chung Chang. Algebraic analysis of many valued logics. *Transactions of the American Mathematical society*, pages 467–490, 1958.

[Ciabattoni and Ramanayake(2013)] Agata Ciabattoni and Revantha Ramanayake. Structural extensions of display calculi: A general recipe. In *Logic, Language, Information, and Computation*, pages 81–95. Springer, 2013.

[Ciabattoni and Terui(2006)] Agata Ciabattoni and Kazushige Terui. Towards a semantic characterization of cut-elimination. *Studia Logica*, 82 (1):95–119, 2006.

[Ciabattoni et al.(1999)Ciabattoni, Gabbay, and Olivetti] Agata Ciabattoni, Dov M Gabbay, and Nicola Olivetti. Cut-free proof systems for logics of weak excluded middle. *Soft Computing*, 2(4):147–156, 1999.

[Ciabattoni et al.(2008)Ciabattoni, Galatos, and Terui] Agata Ciabattoni, Nikolaos Galatos, and Kazushige Terui. From axioms to analytic rules in nonclassical logics. In *LICS*, volume 8, pages 229–240, 2008.

[Ciabattoni et al.(2012)Ciabattoni, Galatos, and Terui] Agata Ciabattoni, Nikolaos Galatos, and Kazushige Terui. Algebraic proof theory for substructural logics: cut-elimination and completions. *Annals of Pure and Applied Logic*, 163(3):266–290, 2012.

[Curry(1942)] Haskell B Curry. The inconsistency of certain formal logics. *The Journal of Symbolic Logic*, 7(03):115–117, 1942.

[Došen(1988)] Kosta Došen. Sequent-systems and groupoid models. i. *Studia Logica*, 47(4):353–385, 1988.

[Dosen(1989)] Kosta Dosen. Logical constants as punctuation marks. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 30(3):362–381, 1989.

[Došen(1992)] Kosta Došen. A brief survey of frames for the lambek calculus. *Mathematical Logic Quarterly*, 38(1):179–187, 1992.

[Dragalin(1988)] Al'bert Grigor'evič Dragalin. *Mathematical intuitionism: Introduction to proof theory*, volume 67. American Mathematical Soc., 1988.

[Dunn(1973)] J Michael Dunn. Gentzen system for positive relevant implication. In *Journal of Symbolic Logic*, volume 38, pages 356–357. ASSN SYMBOLIC LOGIC INC 1325 SOUTH OAK ST, CHAMPAIGN, IL 61820, 1973.

[Gentzen(1935)] Gerhard Gentzen. Untersuchungen über das logische schließen. i. *Mathematische zeitschrift*, 39(1):176–210, 1935.

[Girard(1987)] Jean-Yves Girard. Linear logic. *Theoretical computer science*, 50(1):1–101, 1987.

[Girard(1995)] Jean-Yves Girard. Linear logic: Its syntax and semantics. *London Mathematical Society Lecture Note Series*, pages 1–42, 1995.

[Grishin(1974)] Vyacheslav Nikolaevich Grishin. A nonstandard logic and its application to set theory. *Studies in Formalized Languages and Nonclassical Logics*, 6:135–171, 1974.

[Grishin(1982)] Vyacheslav Nikolaevich Grishin. Predicate and set-theoretic calculi based on logic without contractions. *Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk. Seriya Matematicheskaya*, 45(1):47–68, 1982.

[Hacking(1979)] Ian Hacking. What is logic? *The journal of philosophy*, pages 285–319, 1979.

[Kopylov(1995)] E. Kopylov. Propositional linear logic with weakening is decidable. *Proceedings of the 10th Annual IEEE Symposium on Logic in Computer Science*, 1995.

[Lambek(1958)] Joachim Lambek. The mathematics of sentence structure. *American mathematical monthly*, pages 154–170, 1958.

[Lambek(1961)] Joachim Lambek. On the calculus of syntactic types. *Structure of language and its mathematical aspects*, 166:C178, 1961.

[Lambek(1988)] Joachim Lambek. Categorial and categorical grammars. In *Categorial grammars and natural language structures*, pages 297–317. Springer, 1988.

[Lambek(1999)] Joachim Lambek. Type grammar revisited. In *Logical aspects of computational linguistics*, pages 1–27. Springer, 1999.

[Maksimova(1967)] D. Maksimova. On nodels of calculus e. *Algébra i Logika*, 6:5–20, 1967.

[Minari(1993)] Pierluigi Minari. On the theory of pregroups. *note ms*, 1993.

[Mints(1976)] Grigori E Mints. Cut-elimination theorem for relevant logics. *Journal of Mathematical Sciences*, 6(4):422–428, 1976.

[Montague and Thomason(1974)] Richard Montague and Richmond H Thomason. *Formal philosophy: Selected papers*. Yale University Press New Haven, 1974.

[Moortgat(1988)] Michael Moortgat. *Categorial investigations: Logical and linguistic aspects of the Lambek calculus*. Number 9. Walter de Gruyter, 1988.

[Morrill(2010)] Glyn Morrill. *Categorial grammar: Logical syntax, semantics, and processing*. Oxford University Press, 2010.

[Negri et al.(2008)Negri, von Plato, and Ranta] S. Negri, J. von Plato, and A. Ranta. *Structural Proof Theory*. Cambridge University Press, 2008. ISBN 9780521068420. URL `http://books.google.it/books?id=Z-hngEACAAJ`.

[Ono(1990)] Hiroakira Ono. Structural rules and a logical hierarchy. In *Mathematical logic*, pages 95–104. Springer, 1990.

[Ono(2003)] Hiroakira Ono. *Substructural logics and residuated lattices—an introduction*. Springer, 2003.

[Ono and Komori(1985)] Hiroakira Ono and Yuichi Komori. Logics without the contraction rule. *The Journal of Symbolic Logic*, 50(01):169–201, 1985.

[Paoli(2002)] F. Paoli. *Substructural Logics: A Primer*. Trends in Logic. Springer, 2002. ISBN 9781402006050. URL `http://books.google.it/books?id=gdAYFfTyDA0C`.

[Pixley(1963)] Alden F Pixley. Distributivity and permutability of congruence relations in equational classes of algebras. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 14(1):105–109, 1963.

[Poggiolesi(2010)] Francesca Poggiolesi. Display calculi and other modal calculi: a comparison. *Synthese*, 173(3):259–279, 2010.

[Pottinger(1983)] Garrel Pottinger. Uniform, cut-free formulations of t, s4 and s5. *Journal of Symbolic Logic*, 48(3):900, 1983.

[Prijatelj(1996)] Andreja Prijatelj. Bounded contraction and gentzen-style formulation of łukasiewicz logics. *Studia logica*, 57(2-3):437–456, 1996.

[Restall(1998)] Greg Restall. Displaying and deciding substructural logics 1: Logics with contraposition. *Journal of Philosophical Logic*, 27(2): 179–216, 1998.

[Restall(2000)] Greg Restall. An introduction to substructural logics, 2000.

[R.K(1966)] Meyer R.K. Topics in modal and many-valued logics. *PhD Thesis*, 1966.

[Roussea(1967)] G. Roussea. sequent in many valued logic cita. *Fumdamenta Mathematicae*, 60:23–131, 1967.

[Sambin et al.(2000)Sambin, Battilotti, and Faggian] Giovanni Sambin, Giulia Battilotti, and Claudia Faggian. Basic logic: reflection, symmetry, visibility. *The Journal of Symbolic Logic*, 65(03):979–1013, 2000.

[Schroeder-Heister and Došen(1993)] Peter Joseph Schroeder-Heister and Kosta Došen. *Substructural logics.* Oxford University Press, 1993.

[Tennant(1987)] Neil Tennant. Anti-realism and logic: Truth as eternal. clarendon library of logic and philosophy, 1987.

[Troelstra(1992)] Anne Sjerp Troelstra. *Lectures on linear logic*, volume 29. Center for the Study of Language and Information Stanford, 1992.

[Troelstra and Schwichtenberg(2000)] Anne Sjerp Troelstra and Helmut Schwichtenberg. *Basic proof theory.* Number 43. Cambridge University Press, 2000.

[Van Benthem(1988)] Johan Van Benthem. The lambek calculus. In *Categorial Grammars and Natural Language Structures*, pages 35–68. Springer, 1988.

[Van Benthem(1991)] Johan Van Benthem. Language in action. *Journal of philosophical logic*, 20(3):225–263, 1991.

[Wang(1963)] H. Wang. *A survey of Mathematical Logic.* Noth Holland, 1963.

[Wansing(1998)] Heinrich Wansing. Translation of hypersequents into display sequents. *Logic Journal of IGPL*, 6(5):719–734, 1998.

[Wansing(2000)] Heinrich Wansing. The idea of a proof-theoretic semantics and the meaning of the logical operations. *Studia Logica*, 64(1):3–20, 2000.

[Yetter(1990)] David N Yetter. Quantales and (noncommutative) linear logic. *The Journal of Symbolic Logic*, 55(01):41–64, 1990.