Gisela Inge Ribeiro Matos

Licenciada

Análise multivariada para a funcionalidade dos idosos na Região do Alentejo

Dissertação para obtenção do Grau de
Mestre em Matemática e Aplicações

Orientador: Miguel dos Santos Fonseca, Investigador,
Universidade Nova de Lisboa

	Júri:
Presidente:	Professor Doutor Manuel Leote Tavares Inglês Esquível
Arguente:	Professora Doutora Isabel Natário
Vogal:	Professor Doutor Miguel Dos Santos Fonseca

FACULDADE DE
CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Setembro, 2016

Análise multivariada para a funcionalidade dos idosos na Região do Alentejo

Dedicado a Helga Matos e a Pedro Miguel Silva

Agradecimentos

Ao Professor Jorge Orestes agradeço a oportunidade de participação no projeto de implementação da Classificação Internacional de Funcionalidade em Portugal pela **Rede Nacional de Cuidados Continuados Integrados** (RNCCI) que está na base do presente trabalho; agradeço-lhe também a confiança e o apoio contínuo prestado.

Agradeço ao Professor Miguel Fonseca, meu orientador e a Drª. Carla Pereira, o caloroso acolhimento, assim como toda a confiança depositada no trabalho desenvolvido no âmbito do projeto.

Agradeço-lhes ainda, todo o interesse, acompanhamento e apoio prestados no trabalho desenvolvido.

Aos meus pais e em particular, à minha irmã, uma palavra especial de agradecimento pelo incentivo, apoio e conselhos dados em todas as fases deste trabalho e da vida, aos quais devo aquilo que sou hoje.

Por último, um grande agradecimento ao meu namorado por todo o seu apoio nos momentos difíceis e por todo o amor.

Resumo

O envelhecimento com doenças crónicas não-transmissíveis associadas ao declínio da funcionalidade dos idosos, refletir-se-á numa forte pressão sobre o sistema de saúde, contribuindo inevitavelmente para o aumento dos gastos com os sistemas de assistência social e saúde, e afetará a sustentabilidade financeira destes sistemas. A identificação de indicadores de saúde da população pode fornecer informações importantes para a formulação de políticas de saúde socialmente mais justas. O indicador de saúde analisado nesta dissertação foi a funcionalidade, no contexto nacional. É no Alentejo que se observa a maior taxa de envelhecimento no país. A população do estudo consistiu em pessoas idosas que vivem na região do Alentejo. O objetivo principal compreende a avaliação da funcionalidade dos idosos, baseada na Classificação Internacional de Funcionalidade usando para tal a Análise Fatorial e a análise de correspondência múltipla (HOMALS).

Palavras-chave: envelhecimento, funcionalidade, Análise Fatorial, análise de correspondência múltipla (HOMALS)

Abstract

Aging with noncommunicable chronic diseases associated and with the decline of the functionality that is inherent to it, will be reflected in strong pressure on the health system, contributing inevitably to increase spending on social care and health and financial sustainability of these systems. The identification of health indicators of the population may provide important information for health policy design and more socially equitable. The health indicator analyzed in this study was the functionality. In the national context, it is in Alentejo that observes the highest aging rate in the country. The study population consisted of elderly people living in the Alentejo region. The main objective is to evaluate the elderly person's functionality, based on the International Classification of Functionality by means of using Factor analysis and multiple correspondence analysis (HOMALS).

Keywords: aging, functionality, Factor analysis, multiple correspondence analysis (HOMALS).

Conteúdo

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Capítulo 1

Enquadramento

Este trabalho, destinado à obtenção do grau de Mestre em Matemática e Aplicações, surgiu da participação num projeto de implementação da Classificação Internacional de Funcionalidade em Portugal pela **Rede Nacional de Cuidados Continuados Integrados** (RNCCI), objeto de um artigo conjunto realizado no Centro de Matemática e Aplicações (CMA) da Faculdade de Ciências e Tecnologias e da Escola Nacional de Saúde Pública da Universidade Nova de Lisboa.

A funcionalidade é determinada não apenas através da avaliação das capacidades físicas e mentais, mas também pelas pelo estudo das interações que cada um de nós tem com os ambientes em que habitamos ao longo da vida.

O projeto teve como objetivo global de avaliar a evolução da funcionalidade relativamente à faixa etária dos idosos. Isto é, o projeto pretendeu estratificar a população idosa de acordo com o seu perfil de funcionalidade tendo em vista um adequado planeamento de saúde. Para tal, pretendeu-se obter os indicadores de funcionalidade que caracterizam a população com mais de 65 anos. Pretendeu-se cumprir o objetivo pelo cumprimento das seguintes etapas:

- Desenhar e validar um instrumento de escala de funcionalidade e das suas respetivas dimensões;
- Identificar as limitações de funcionalidade dos idosos;
- Definir perfis de funcionalidade dos idosos;

- Estratificar a população idosa por níveis de funcionalidade.

O âmbito específico da presente tese, consistiu na análise de uma base de dados categóricos, com variáveis relativas às funcionalidades dos idosos da região do Alentejo, tendo em vista o desenho e validação do instrumento de funcionalidade do idoso, tendo por base a Classificação Internacional de funcionalidade, utilizando-se para tal a análise fatorial e a técnica categórica de análise de correspondência múltipla, denominada de HOMALS.

Os resultados do presente trabalho foram apresentados na forma de comunicação oral no **Workshop AgIL** (*__Ag__eing and __I__ndependent __L__iving*), realizado no Monte da Caparica, no dia 16 de Fevereiro de 2016 na sala de seminários do Edifício VII da da Faculdade de Ciências e Tecnologias da Universidade Nova de Lisboa.

1.1 Avaliação da funcionalidade nos idosos

Em resultado do decréscimo na natalidade e do aumento da longevidade nos últimos anos, verificou-se em Portugal a diminuição da população jovem (0 a 14 anos de idade) e da população em idade ativa (15 a 64 anos de idade), em simultâneo com o aumento da população idosa (65 e mais anos de idade).

Segundo dados do *INE*, em 1970, a população com mais de 65 anos representava 9.70% da população nacional, aumentando para 20.3% em 2014. Estimativas do INE (Instituto Nacional de Estatistica) sugerem que em 2060, esta faixa etária deve representar perto de 30% da população portuguesa. Espera-se igualmente que a esperança média de vida aumente neste período de tempo, como aliás vem acontecendo nas décadas passadas.

É sobretudo no Alentejo, com uma população idosa de 25.3% que esta tendência de envelhecimento tem sido mais evidenciada, sendo esta a região mais envelhecida do país. É por isso esta a população alvo do estudo.

O objetivo principal do estudo é avaliar a funcionalidade dos idosos e a sua relevância, utilizando para tal a **Classificação Internacional de Funcionalidade CIF**, para permitir prestar melhores cuidados de saúde a população idosa.

É de referir que vários estudos têm mostrado que o diagnóstico de doenças e tratamento de informação referente a estas, por si só, é insuficiente para prever as necessidades dos serviços de saúde, tais como:

- Duração da hospitalização;
- Nível de cuidados necessários;
- Uma avaliação eficaz da intervenção a realizar;
- Estudo dos indicadores relevantes para a política de saúde;
- O controle de qualidade do sistema de saúde e potenciar um baixo custo do mesmo.

Neste contexto, o grau de funcionalidade pode ser um indicador de necessidades, resultados e ganhos nas políticas de saúde [26].

O projeto em questão é relevante na medida em que visa entre outras coisas:

- Aprofundar os conhecimentos epidemiológicos relativos a população idosa;
- Caracterizar o estado de saúde de uma população por meio de indicadores de saúde e não de indicadores de doença;
- Identificar as necessidades de saúde ignorados até agora pela falta de utilização de instrumentos que classifica a funcionalidade;
- Reconhecer os ganhos em saúde através de indicadores de funcionalidade.

1.2 Classificação Internacional de funcionalidade, Incapacidade e Saúde (CIF)

A Classificação Internacional da Funcionalidade (CIF) é um sistema de classificação inserido na Família de Classificações Internacionais da Organização Mundial de Saúde (OMS), constituindo o quadro de referência universal adotado pela OMS para descrever, avaliar e medir a saúde e a incapacidade quer ao nível individual quer ao nível da população.

A OMS definiu a CIF como uma classificação com múltiplas finalidades, devendo ser utilizada de forma transversal em diferentes áreas disciplinares e setores: saúde, educação, segurança social, emprego, economia, política social, desenvolvimento de políticas e de legislação em geral e alterações ambientais. Foi por isso aceite pelas Nações Unidas como uma das suas classificações sociais, sendo considerada como o quadro de referência apropriado para a definição de legislações internacionais, bem como, de legislação nacional.

A CIF introduz uma mudança de paradigma, passando-se da abordagem puramente médica para um modelo Bio-psico-social e integrado da funcionalidade e incapacidade humana. Sintetizando, assim, o modelo médico e o modelo social numa visão coerente das perspetivas biológica, individual e social da saúde [21].

1.2.1 Componentes da CIF

O sistema de classificação da CIF abrange três componentes:

- **As Funções e Estruturas do Corpo**
  - **Funções do Corpo** são as funções fisiológicas dos sistemas orgânicos (incluindo as funções psicológicas ou da mente).
  - **Estruturas do Corpo** são as partes anatómicas do corpo, tais como, órgãos, membros e seus componentes.
  - **Deficiências** são problemas nas funções ou estruturas do corpo, tais como, um desvio importante ou perda.
- **As Atividades e Participação**
  - **Atividade** é a execução de uma tarefa ou ação por um indivíduo.
  - **Participação** é o envolvimento de um indivíduo numa situação da vida real.
  - **Limitações da Atividade** são as dificuldades que um indivíduo pode ter na execução de atividades.
  - **Restrições de Participação** são os problemas que um indivíduo pode enfrentar quando está envolvido em situações da vida real.
- **Os Fatores Ambientais**
  - **Fatores Ambientais** constituem o ambiente físico, social e atitude com que as pessoas vivem e conduzem sua vida.

1.2.2 Componentes CIF em análise

Sendo o domínio da CIF abrangente, pretende-se criar um constructo com incidência nas Funções e Estruturas do Corpo e Atividades e Participação, de modo a ser posteriormente relacionado, em trabalhos futuros, com os Fatores Pessoais e Ambientais através da Regressão logística das variáveis categóricas. A Análise Fatorial a realizar no presente trabalho incidirá sobre as seguintes Funções da CIF:

- Funções e Estruturas do Corpo
  - Funções do Corpo
    - Funções mentais globais e especificas

      b114 Orientação

      b134 Sono

      b140 Capacidade Atenção

      b144 Memória

      b152 Emoçoes

      b164 Cognitivas
    - Funções Sensoriais e de dor

      b220 Visão

      b230 Auditivas

      b280 Dor
    - Funções do aparelho cardiovascular, dos sistemas hematológico e imunológico e do aparelho respiratório

      b455 Exercício
    - Funções do aparelho digestivo e dos sistemas metabólico e endócrino

      b525 Defecação
    - Funções neuro-músculo-esqueléticas e relacionadas com o movimento

      b710 Articulações M.S.

      b710 Articulações M.I.

      b730 Força M.S.

      b730 Força M.I.

      b735 Tónus M.S.

      b735 Tónus M.I.

b770 Marcha

- Estruturas do Corpo
  * Estruturas relacionadas com a voz e a fala

    s320 Estrutura da boca

  * Estruturas relacionadas com o movimento

    s730 Estrutura M.S.

    s750 Estrutura M.I.

- Atividades e Participação
  - Aprendizagem básica

    d155 Aquisição de Competências

  - Aplicação de conhecimento

    d160 Capacidade de concentração

    d166 Ler

    d170 Escrever

    d175 Resolver problemas

  - Tarefas e exigências gerais

    d230 Rotina Diária

  - Comunicação

    d310 Comunicar

    d330 Falar

    d350 Conversar

  - Mobilidade

    d410 Mudar de posição

    d445 Mão, Braço

    d450 Andar

    d460 Deslocar

    d465 Deslocar com equipamento

  - Auto-cuidados

    d510 Lavar

d520 Cuidar do Corpo

d530 Excreção

d540 Vestir

d550 Comer

d560 Beber

Capítulo 2

Análise Fatorial

2.1 Introdução Teórica

A análise fatorial (AF) foi concebida por Spearman e por Pearson, em 1901, sendo o objetivo inicial da técnica permitir abordar problemas relacionados com psicologia educacional, na tentativa de definir o conceito de inteligência [14].

Apesar de ser uma das primeiras técnicas de análise multivariada a ser criada, o seu desenvolvimento e sobretudo, a sua utilização, foram limitados durante muitos anos, devido à complexidade dos cálculos requeridos na sua concretização. A utilização da AF só se tornou generalizada com o aparecimento de computadores com boas capacidades de processamento, fundamentais na análise computacional de dados [15]. Desde então, a análise fatorial tem sido usada nas mais diversas áreas do conhecimento, como por exemplo, Agronomia [4], Biologia [6], Ciências Florestais [20] e nas Ciências Sociais nomeadamente na Psicometría [15].

Em [15] refere-se que a análise fatorial constitui um método de agregação de variáveis ou de agrupamento de unidades de observações que permite reduzir a dimensionalidade dos dados. No primeiro caso a matriz inicial dos dados tem as variáveis nas colunas e as unidades de amostra nas linhas. No segundo caso, transpõe-se a matriz de dados inicial, obtendo-se as variáveis nas linhas e as unidades nas colunas.

Se o número de variáveis em estudo for elevado, uma estratégia de análise consiste em estruturar melhor, ou tentar simplificar o conjunto de dados, a partir das inter-relações entre as variáveis. As inter-relações podem ser medidas através da covariância ou, em casos em que as variáveis não têm uma mesma escala, pelos coeficientes de correlação entre variáveis. Duas técnicas estatísticas de análise multivariada comummente utilizadas para tratar este problema são a Análise Fatorial e a Análise de Componentes Principais (ACP) [9].

A Análise Fatorial engloba um conjunto de métodos estatísticos que, em situações bem definidas, permite explicar de forma consistente o comportamento de um número relevante de variáveis observadas, em termos de um número relativamente pequeno de variáveis latentes ou fatores. Cada grupo de variáveis corresponde a um fator [9]. Estes fatores dizem-se não correlacionados se forem ortogonais e correlacionados caso sejam oblíquos. As variáveis são agrupadas consoante as suas correlações, sendo fortemente correlacionadas entre si aquelas que pertencem a um mesmo grupo e sendo por conseguinte, pouco correlacionadas com as variáveis dos outros grupos.

Em termos de análise multivariada, a análise fatorial e a análise de componentes principais, enquadram-se, segundo [11], numa análise de interdependência das variáveis em estudo, em que se pretende analisar as relações entre conjuntos de variáveis, sem se analisar nenhuma variável como sendo variável dependente, isto em contraponto com os métodos de análise de dependência como são os casos da análise de regressão e análise de variância multivariada.

2.2 Análise Fatorial

O propósito essencial da análise fatorial é descrever, se possível, a estrutura de covariâncias entre variáveis observáveis, em termos de um número menor de variáveis latentes (não observáveis) denominadas de fatores. Por outras palavras, a análise fatorial estuda os interrelacionamentos entre as variáveis, com o objetivo de encontrar um conjunto de fatores (em menor número que o conjunto de variáveis originais) que exprimam o que as variáveis originais partilham em comum.

Assim, suponha-se que as variáveis podem ser agrupadas tendo em conta as correlações entre elas. Isto é, todas as variáveis de um dado grupo estão fortemente correlacionadas entre si, mas têm correlações relativamente pequenas com variáveis de outro grupo. É concebível que cada grupo de variáveis represente um fator, fator esse, que é responsável pelas correlações observadas.

Seja $\underline{X}_{(px1)}$ um vetor aleatório tal que $E(\underline{X}) = \underline{\mu}$ e $cov(\underline{X}) = \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma p1 & \cdots & \sigma_{pp} \end{pmatrix}$,

com $\sigma_{ij} = Cov(X_i, X_j)$.

O Modelo de Análise Fatorial pressupõe que o vetor aleatório X é linearmente dependente de poucas variáveis não observáveis $F_1, F_2, \ldots, F_m$, denominadas de Fatores comuns, e de p fontes adicionais de variação $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_p$ designadas de erros ou Fatores específicos. Isto é:

$$\begin{array}{rcccccccc} X_1 - \mu_1 & = & \ell_{11}F_1 & + & \cdots & + & \ell_{1m}F_m & + & \varepsilon_1 \\ \vdots & = & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ X_p - \mu_p & = & \ell_{p1}F_1 & + & \cdots & + & \ell_{pm}F_m & + & \varepsilon_p \end{array} \tag{2.1}$$

ou matricialmente,

$$\underbrace{\underline{X} - \underline{\mu}}_{p \times 1} = \underbrace{L}_{p \times m} \quad \underbrace{\underline{F}}_{m \times 1} + \underbrace{\underline{\varepsilon}}_{p \times 1}$$

Sendo que:
ℓ_{ij}, são as cargas, ou *loadings* no fator F_j da variável X_i;
L é a matriz dos *loadings*;
$\underline{F}^T = \begin{pmatrix} F_1, & F_2, & \cdots, & F_m \end{pmatrix}$ é o vetor das variáveis aleatórias não observáveis designadas por fatores;
$\underline{\varepsilon}^T = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2, & \cdots, & \varepsilon_p \end{pmatrix}$ é o vetor de variáveis aleatórias não observáveis chamadas fatores específicos ou fatores únicos.
Os p desvios $X_j - \mu_j$, $j = 1, 2, \cdots, p$ são expressos em função de $p + m$ quantidades aleatórias $F_1, F_2, \cdots, F_m$, e $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_p$, que são não observáveis.

Existem muitas quantidades não observáveis no modelo (e este é a principal diferença deste modelo para um modelo de regressão), pelo que é necessário estabelecer alguns pressupostos:

- $E\left[\underline{F}\right] = \underline{0}, cov(\underline{F}) = E\left[FF^T\right] = \mathbf{I}$
- $E\left[\underline{\varepsilon}\right] = \underline{0}, cov(\underline{\varepsilon}) = E\left[\varepsilon\varepsilon^T\right] = \Psi = diag(\Psi_1, \Psi_2, \cdots, \Psi_p)$
- $\underline{F}$ e $\underline{\varepsilon}$ são independentes, e portanto $cov(\underline{\varepsilon}, \underline{F}) = 0$.

A estrutura da matriz de covariância de X, representada por Σ, pode ser deduzida a partir dos pressupostos já referidos. Partindo-se de:

$$\begin{aligned}\left(\underline{X}-\underline{\mu}\right)\left(\underline{X}-\underline{\mu}\right)^T &= \left(L\underline{F}+\underline{\varepsilon}\right)\left(L\underline{F}+\underline{\varepsilon}\right)^T\\ &= \left(L\underline{F}+\underline{\varepsilon}\right)\left[\left(L\underline{F}\right)^T+\underline{\varepsilon}^T\right]\\ &= L\underline{F}\left(L\underline{F}\right)^T+\underline{\varepsilon}\left(L\underline{F}\right)^T+L\underline{F}\underline{\varepsilon}^T+\underline{\varepsilon}\underline{\varepsilon}^T\end{aligned}$$

E sabendo que

$$\begin{aligned}\Sigma = cov\left(\underline{X}\right) &= E\left[\left(\underline{X}-\underline{\mu}\right)\left(\underline{X}-\underline{\mu}\right)^T\right]\\ &= LE\left[\underline{F}\underline{F}^T\right]L^T+E\left[\underline{\varepsilon}\underline{F}^T\right]L^T+LE\left[\underline{F}\underline{\varepsilon}^T\right]+E\left[\underline{\varepsilon}\underline{\varepsilon}^T\right]\\ &= LIL^T+0+0+\Psi\end{aligned}$$

Assim, tem-se:

$$\Sigma = cov\left(\underline{X}\right) = LL^T+\Psi$$

$$V\left(X_i\right) = h_i^2 + \Psi_i$$

- $h_i^2 = \sum_{j=1}^{m} \ell_{ij}^2$, comunalidade, corresponde ao somatório do quadrado dos *loadings* nos fatores comuns de uma dada variável , representando a porção da variância de X_i que pode ser atribuída a estes fatores.

- Ψ_i, variância específica, ou ainda *"uniqueness"*, representa a porção da variância da variavel X_i associada com as outras variáveis, e pode explicar como é que os fatores comuns falham na explicação da variância total da variável.

Note-se ainda que existe a seguinte estrutura de covariância para o modelo: $cov\left(\underline{X},\underline{F}\right)=L$, isto é, $cov\left(X_i,F_j\right)=\ell_{ij}$.

O conceito de comunalidade está intrinsecamente ligado aos conceitos de variância comum e variância única (ou específica). A variância total de uma variável em particular terá duas componentes na comparação com as demais variáveis: a variância comum, na qual a variância será distribuída pelas variáveis medidas e a variância única, que é específica para essa variável. Por outro lado, há também variância que é específica a uma variável, não-confiável, de forma imprecisa, a qual é chamada de variância aleatória ou erro. Comunalidade é a proporção de variância comum presente numa variável.

Para fazer a redução de dimensionalidade, é necessário saber-se o quanto de variância dos dados é variância comum. Todavia, a única maneira de saber-se a extensão da variância comum é através da redução de dimensionalidade das variáveis. Desse modo, na análise fatorial utiliza-se a variância total e assume-se que a comunalidade de cada variável é 1, transpondo-se os dados originais em componentes lineares. Na análise de fatores principais apenas a variância comum é usada e vários métodos de estimação das comunalidades podem ser usados, sendo o mais comum, o quadrado da correlação múltipla de cada variável relativamente a todas as outras variáveis. Quando os fatores são extraídos, novas comunalidades são calculadas, as quais representam a correlação múltipla entre cada variável e os fatores extraídos. Diz-se, portanto, que a comunalidade representa a proporção da variância explicada de cada variável pelos fatores extraídos. A baixa comunalidade entre um grupo de variáveis é um indício de que as variáveis têm baixa variabilidade, ou então, que não estão linearmente correlacionadas, pelo que estas variáveis não devem ser incluídas na análise fatorial. O valor mínimo ad-hoc aceitável usualmente considerado é de **0.50**, caso se encontre alguma comunalidade abaixo desse valor a variável deve ser excluída e a análise fatorial deve ser novamente executada.

Depois de eliminar as variáveis com baixo grau de comunalidade, e portanto consideradas problemáticas, deve-se analisar os *loadings* fatoriais de cada variável em relação aos componentes extraídos, devendo ser descartadas variáveis dentro do fator que possuam *loadings* inferiores a **0.3** pois têm baixo poder explicativo da variância no Fator [19], [5].

O modelo de Análise Fatorial admite que as $p(p+1)/2$ variâncias e covariâncias de $\underline{X}$ podem ser obtidas a partir de pm *loadings* ℓ_{ij} e das p variâncias específicas Ψ_i. Se $p = m$ então qualquer matriz de covariância pode ser replicada exatamente como $\Sigma = LL^T$ e Ψ pode ser nula. No entanto, a análise fatorial é mais eficiente e útil para casos em que m é reduzido em relação a p, uma vez que permite proporcionar uma explicação mais clara da covariação das variáveis em $\underline{X}$, tendo por base um menor número de parâmetros do que os $p(p+1)/2$ parâmetros de Σ [9].

Os pressupostos supracitados e a relação explicitada na Equação 2.1 definem o denominado modelo de fatores ortogonal.

Admitindo-se que os F fatores são correlacionados, de modo a que $cov(F)$ é não diagonal, tem-se o denominado modelo de fatores oblíquo. Este modelo não será discutido no presente trabalho.

Temos, portanto, a estrutura de covariância:

- $cov(\underline{X}) = LL^T + \Psi$ ou $var(X_i) = \ell_{il}^2 + \cdots + \ell_{im}^2 + \Psi_i$

- $cov(X_i, X_k) = \ell_{il}\ell_{kl} + \cdots + \ell_{im}\ell_{km}$

- $cov(\underline{X}, \underline{F}) = L, cov(X_i, F_j) = \ell_{ij}$

Duas variáveis serão altamente correlacionadas unicamente se tiverem valores elevados de *loadings* no mesmo fator.

O modelo fatorial pressupõe efeitos aditivos; em que os fatores e variáveis são normalmente distribuídos, os resíduos, para além de serem normalmente distribuídos, são também independentes, e as variáveis estão linearmente relacionadas [9].

Generalizando da estatística univariada para a multivariada, e pelo teorema do limite central (TLC), tem-se: $X_1, X_2, \cdots, X_p$ variáveis com as $S_1^2, S_2^2, \cdots, S_p^2$ estimativas de Σ respetivamente, e com correlações $r_{ij} = \ell_{i1}\ell_{j1} + \ell_{i2}\ell_{j2} + \cdots + \ell_{im}\ell_{jm}$, em que $i = 1, 2, \ldots, p$ e $j = 1, 2, ..., p$. As médias $\overline{X}_1, \overline{X}_2, \cdots, \overline{X}_p$, de uma amostra de tamanho n, possuem uma distribuição que, com o aumento de n, se aproxima de uma distribuição normal multivariada, com variâncias $\frac{\sigma_1^2}{n}, \frac{\sigma_2^2}{n}, \cdots, \frac{\sigma_p^2}{n}$ e correlações ρ_{ij} estabilizadas e constantes para os valores de $\underline{X}$. O Teorema do Limite Central permite garantir que muitas das técnicas e testes estatísticos provenientes da distribuição normal multivariada são consistentes e não conduzem a resultados duvidosos, mesmo quando os dados originais não derivam de uma distribuição normal multivariada [14].

Na estatística multivariada, admite-se que as variâncias e covariâncias são independentes das médias sendo iguais entre os grupos, pelo que as matrizes de dispersão são homogéneas. Caso não haja homogeneidade, é necessário transformar os dados por forma a estabilizar as variâncias, utilizando para tal, os mesmos procedimentos que se utilizam na estatística univariada. Pode ainda haver uma dependência entre as correlações e as médias, o que constitui um problema irremediável, sendo, contudo, um problema incomum [14].

Sucintamente, o modelo fatorial requer a imposição de condições que possibilitam a obtenção de estimativas únicas de L e Ψ. Seguidamente, a matriz de cargas fatoriais (L) é sujeita à rotação (multiplicação por uma matriz ortogonal), para poder-se melhorar a interpretabilidade dos fatores. Posteriormente à obtenção dos *loadings* e as variâncias específicas, os fatores são identificados e calculam-se os valores dos *scores* fatoriais que são os vetores próprios que definem as direções dos eixos da máxima variabilidade. Representam a medida assumida indivíduos de cada variável no fator.

2.3 Covariância *versus* correlação

Na literatura especializada sobre a análise fatorial, a maioria dos autores optam por definir os fatores utilizando a matriz de correlações em detrimento da matriz de covariâncias. Extrair os fatores como os vetores próprios da matriz de correlações é equivalente a calcular os fatores após cada variável ser estandardizada para uma variância unitária. Para além disto, usualmente a matriz de correlações é mais informativa, revelando alguma estrutura nos dados e relações entre as variáveis.

2.4 Métodos de estimação dos *loadings* fatoriais

Os métodos mais populares de estimação das cargas dos fatores são o método das componentes principais e o método da máxima-verosimilhança. Existem ainda os métodos do fator principal e do centroide, que não serão explicitados no presente trabalho.

2.4.1 Método das componentes principais

Seja a matriz de covariância $\Sigma = Var(\underline{X})$ fatorizada pelo processo decomposição espectral. Sejam $(\lambda_j, \underline{e}_j)$, os pares de valores próprios e vetores próprios de Σ com $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_p \geq 0$ [9]. Então:

$$\Sigma = \lambda_1 \underset{\sim}{e}_1 \underset{\sim}{e}_1^T + \lambda_2 \underset{\sim}{e}_2 \underset{\sim}{e}_2^T + \cdots + \lambda_p \underset{\sim}{e}_p \underset{\sim}{e}_p^T = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1}\underset{\sim}{e}_1 & \sqrt{\lambda_2}\underset{\sim}{e}_2 & \cdots & \sqrt{\lambda_p}\underset{\sim}{e}_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1}\underset{\sim}{e}_1^T \\ \sqrt{\lambda_2}\underset{\sim}{e}_2^T \\ \vdots \\ \sqrt{\lambda_p}\underset{\sim}{e}_p^T \end{bmatrix}$$

Sendo $\tilde{l_{ij}}^2 = \lambda_j \underset{\sim}{e}_{ij}^2$ a contribuição do j-ésimo fator comum para a $Var(X_i)$, em que $\tilde{h_i}^2 = \tilde{l_{i1}}^2 + \tilde{l_{i2}}^2 + \cdots + \tilde{l_{ip}}^2$.

2.4.2 Método da máxima verosimilhança

O método de estimação de Máxima Verosimilhança foi introduzido por *Lawley*, em 1940, sendo sua principal vantagem a possibilidade de se desenvolverem testes de hipóteses, com o objetivo de testar a adequabilidade do modelo, o que não é possível através dos outros métodos de estimação.
A função de verosimilhança $L\left(\underline{\mu}, \Sigma\right)$ será:

$$\begin{aligned} L\left(\underline{\mu}, \Sigma\right) &= (2\pi)^{-\frac{np}{2}} |\Sigma|^{-\frac{n}{2}} \exp\left\{-\tfrac{1}{2} tr\left(\Sigma^{-1} \sum_{i=1}^{n} \left(\underline{X}_i - \overline{X}\right)\left(\underline{X}_i - \overline{X}\right)^T + n\left(\overline{X} - \underline{\mu}\right)\left(\overline{X} - \underline{\mu}\right)^T\right)\right\} \\ &= (2\pi)^{-\frac{(n-1)p}{2}} |\Sigma|^{-\frac{(n-1)}{2}} \exp\left\{-\tfrac{1}{2} tr\left(\Sigma^{-1} \sum_{i=1}^{n} \left(\underline{X}_i - \overline{X}\right)\left(\underline{X}_i - \overline{X}\right)^T\right)\right\} \\ &\quad \times (2\pi)^{-\frac{p}{2}} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\tfrac{n}{2}\left(\overline{X} - \underline{\mu}\right)\Sigma^{-1}\left(\overline{X} - \underline{\mu}\right)^T\right\} \end{aligned}$$

A expressão do *log* da máxima verosimilhança depende do vetor das médias μ, dos *loadings* fatoriais L e das variâncias específicas Ψ sendo:

$$l(\mu, L, \Psi) = -\frac{np}{2}\log 2\pi - \frac{n}{2}\log|LL^T + \Psi| - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^T(LL^T + \Psi)(X_i - \mu)$$

devendo ser encontrados os parâmetros μ, L e Ψ que maximizam o *log* da verosimilhança e que maximizam igualmente a compatibilidade com os dados.

Neste método pressupõe-se que a população tem uma distribuição normal. A função de verosimilhança depende de L e Ψ através de $\Sigma = LL^T + \Psi$

Impõe-se igualmente a condição de unicidade $L^T\Psi^{-1}L = \Delta$ (matriz diagonal), evitando-se assim a indeterminabilidade de L devido a eventuais rotações e ao fato de existirem múltiplas soluções possíveis.

2.5 Método de rotação dos Fatores

A rotação ou transformação dos fatores é um procedimento habitual que visa melhorar a interpretação dos fatores obtidos pela análise fatorial. Ao multiplicar-se a matriz das cargas fatoriais $L_{(p\times m)}$, por uma matriz ortogonal $M_{(m\times m)}$, há múltiplas decomposições da matriz de covariância Σ , isto porque, se M é ortogonal, ou seja, $M^T = M^{(-1)}$, então:

$$(LM)(LM)^T + \varepsilon = LMM^TL^T + \varepsilon = LIL^T + \varepsilon = LL^T + \varepsilon = \Sigma$$

Pelo que, mesmo que os elementos de LM sejam diferentes das cargas originais, a sua capacidade de produzir as covariâncias observadas é imutável.

Ao substituir-se $\underline{F}$ por $M^T\underline{F}$, e ainda L por LM na expressão $\underline{X} - \underline{\mu} = L\underline{F} + \underline{\varepsilon}$, observa-se que a expressão não sofre alterações, uma vez que M é ortogonal. Produz-se então, na terminologia da análise fatorial, a denominada rotação dos fatores.

Dentro desse tipo de rotações, vários métodos são apresentados na literatura, sendo os mais comuns os métodos ortogonais tais como: *Quartimax*, *Equimax*, e *Varimax*. Os métodos *Quartimax* e *Equimax* não foram bem sucedidos, sendo raramente utilizados na literatura em Psicologia [8]. O método *Quartimax* tende a criar um grande fator principal, no qual a maioria das variáveis (quando não todas) apresenta *loadings* elevados, ocultando possíveis fatores subsequentes [8]. O método *Equimax*, por outro lado, é pouco utilizado por não apresentar boa estabilidade [24].

Nos métodos ortogonais, o método *Varimax* é o mais pertinente e o mais frequentemente utilizado nas pesquisas aplicadas em Psicometría [24] e será descrito seguidamente de maneira sucinta.

2.5.1 Rotação *Varimax*

O método *Varimax*, proposto em 1958 por Kaiser, consiste na rotação ortogonal dos Fatores. Este método parte do pressuposto que os Fatores não se correlacionam entre si e permite atribuir cargas (ou pesos) com valores elevados para um conjunto reduzido de variáveis, e um conjunto de cargas com valores próximos de zero para as restantes variáveis. A rotação *Varimax* visa simplificar a interpretação dos fatores uma vez que após a rotação, cada variável original é associada com uma (ou um numero reduzido) de componentes, e cada componente representa um número reduzido de variáveis. Além disso, os componentes podem muitas vezes ser interpretados a partir da contraposição entre algumas variáveis com cargas positivas com um número reduzido de variáveis com cargas negativas.

Inicialmente, Kaiser definiu a simplicidade s_k^2 de um fator k como sendo a variância ao quadrado das cargas (*loadings*):

$$s_k^2 = \frac{1}{p}\sum_{j=1}^{p}\left(\ell_{jk}^2\right)^2 - \frac{1}{p^2}\left(\sum_{j=1}^{p}\ell_{jk}^2\right)^2$$

onde ℓ_{jk} é a nova carga para a variável j no fator $k, j = 1, 2, \cdots, p$ e $k = 1, 2, ..., m$.

Um fator atinge a sua maior simplicidade quando a variância assume o valor máximo, na medida em que as cargas deste fator tendem para 1 ou para 0 facilitando assim a sua interpretação. O critério de máxima simplicidade de uma matriz fatorial completa é definido como a maximização da soma das s_k^2 simplicidades.

Um inconveniente do critério da máxima simplicidade deriva do facto de se atribuir uma ponderação igual às variáveis com comunalidades grandes e pequenas. Para contrariar este problema, Kaiser propôs que as cargas fossem divididas pela raiz quadrada da comunalidade correspondente, antes de iniciar o processo de maximização, para assim normalizar os vetores ℓ_j^T. Com a obtenção da matriz ortogonal M, procede-se a multiplicação das cargas finais pela raiz quadrada da comunalidade, para assim obter-se o critério *Varimax* modificado que é o mais utilizado.

Neste método as cargas dos fatores finais maximizam a função:

$$V = \sum_{k=1}^{m} s_k^2 = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{p}\left(\frac{\ell_{jk}^2}{h_j^2}\right)^2 - \frac{1}{p^2}\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{p}\frac{\ell_{jk}^2}{h_j^2}\right)^2$$

onde h_j^2 é a comunalidade da variável j.

Por simplificação, multiplica-se a expressão anterior por p^2, já que a multiplicação por uma constante não afeta o processo de maximização, obtendo-se desta forma o critério *Varimax* normal como indicado pela seguinte Equação:

$$V = p \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{p} \left(\frac{\ell_{jk}}{h_j} \right)^4 - \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{p} \frac{\ell_{jk}^2}{h_j^2} \right)^2 \tag{2.2}$$

A solução *Varimax* é obtida através da rotação dos fatores dois a dois, de acordo com o esquema abaixo:

$$B = LM_{12}M_{13} \cdots M_{kq} \cdots M_{((m-1),m)}$$

onde $k = 1, 2, \cdots, (m-1)$, e o correspondente $q = p+1, p+2, \cdots, m$ e B é a matriz dos fatores finais.

Segundo a expressão supracitada, a matriz dos fatores finais, B é o produto das transformações de todas as combinações de pares de fatores [23].

Um ciclo é um conjunto completo de $m(m-1)/2$ duplas de p e q (o que corresponde à combinação de m fatores aos pares). O ciclo deve ser repetido até que o valor de V, obtido pela Equação 2.2, se mantenha relativamente constante.

O resultado da rotação *Varimax* de cargas fatoriais difere consoante o método de estimação da análise fatorial que se utiliza (componentes principais, máxima verosimilhança, etc.). Igualmente, o padrão de cargas rodado muda consideravelmente quando são incluídos no modelo fatores comuns adicionais. Geralmente, quando existe um único fator dominante na análise fatorial, em que todas as variáveis do fator apresentam cargas altas, e este é sujeito à uma rotação ortogonal, acaba por ser ofuscado. Pelo que, nestes casos convém, que o fator dominante seja mantido fixo e os demais fatores sejam rodados [15].

A rotação dos fatores comuns pelo método *Varimax* é particularmente recomendada quando é utilizado o método de máxima verosimilhança de estimação das cargas, uma vez que as cargas iniciais devem satisfazer a condição de unicidade $L^T \psi^{-1} L = \Delta$ (deve ser uma matriz diagonal) e esta condição facilita a maximização da função de verosimilhança. A rotação dos fatores comuns pode, no entanto, dificultar a interpretação dos fatores gerados [9].

De forma a tornar as expressões mais compactas definem-se para um par determinado de fatores k e q, as cargas dos fatores normalizados de cada variável padronizada como sendo:

$$x = \frac{\ell_{jk}}{h_j}, \qquad y_j = \frac{\ell_{jq}}{h_j}$$

2.5.2 Rotações Obliquas

As rotações fatoriais podem ser também oblíquas. As rotações ortogonais assumem que os fatores extraídos são independentes entre si, não apresentando correlações uns com os outros. Os métodos de rotação obliqua por outro lado, permitem que os fatores sejam correlacionados entre si, não delimitando a interação entre os fatores à priori e, em geral, os fatores não têm qualquer tipo de ordenação. Pelo que, se os fatores não forem correlacionados os resultados obtidos por meio de rotações oblíquas serão bastante semelhantes aos que seriam obtidos por meio das rotações ortogonais.

Nas rotações obliquas, a interpretação da solução é feita considerando-se simultaneamente a matriz de correlações entre as variáveis de partida e os fatores. Entre as variantes das rotações obliquas podem mencionar-se as rotações *Oblimin* e a rotação *Promax*. Saliente-se que nos vários métodos existentes de rotação oblíqua simples parece não existir um método mais adequado que o outro. Em geral, todos os métodos de rotação obliqua tendem a apresentar resultados semelhantes [3].

2.6 Número de Fatores

Existem múltiplos critérios na determinação do número de fatores comuns. Regra geral, considera-se que um fator com valor próprio inferior à unidade, representa o mesmo que uma variável isolada, o que o torna dispensável [15].

Jolliffe [10] menciona como forma de escolha do número de fatores, o *"critério de Kaiser"*, o qual utiliza a matriz de correlação ou eventualmente a matiz de covariância dos dados, a partir das quais são obtidos os valores próprios dos fatores, devendo ser considerados apenas fatores cujo valor próprio $\underline{\lambda}$ seja superior à unidade, sendo $\underline{\lambda} = \frac{1}{p}\sum_{j=1}^{p} \lambda_j$. Para Jolliffe o critério de Kaiser é recomendado quando o número de variáveis é menor que 30 e as comunalidades são superiores a 0.7, ou quando o tamanho da amostra é maior a 250 e a comunalidade média é maior que 0.6.

Ainda segundo [10], o critério denominado de *Critério de Pearson* pode ser aplicado à escolha do limite de fatores comuns. O critério explicita que quando é utilizada a matriz de covariância é adequada a escolha de fatores que expliquem 70 a 80% da variação total. Pelo que deve-se reter os primeiros r fatores de modo a que $\sum_{j=1}^{r} \frac{\lambda_j}{\sum_{j=1}^{p} \lambda_j} = \frac{\sum_{j=1}^{r} \lambda_j}{\sum_{j=1}^{p} \lambda_j} \geq 0.7$.

Existe ainda o critério do *Scree plot* que corresponde a utilizar um gráfico onde se representa nas abcissas os p fatores e nas ordenadas os valores próprios correspondentes ao respetivo fator. De acordo com este critério, obtêm-se os fatores comuns através da consideração das m componentes que mais contribuem para a explicação da variância destacando-se de forma acentuada das restantes através duma inflexão no gráfico, como pode ser observado na Figura 2.1.

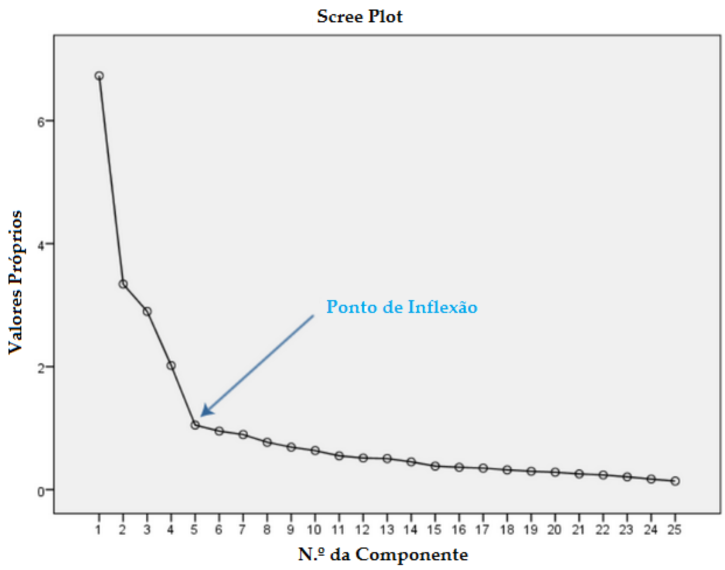


Figura 2.1: Critério de *scree plot* de escolha de n.º de fatores

Segundo Johnson e Wichern [9], citados por Lopes de Souza [23], o número de fatores comuns (m) pode ainda ser definido a priori, a partir de considerações teóricas e/ou, com base em resultados experimentais prévios.
Apresentam-se seguidamente alguns critérios para verificação do ajuste e determinação do número ideal de fatores comuns:

- A matriz resultante da diferença entre as matrizes de covariâncias ou correlações amostrais (S ou R) e as suas respetivas estimativas, a partir dos diferentes métodos de estimação, fornece uma maneira de verificação do ajuste de modelo fatorial com m fatores comuns, esta matriz denomina-se de matriz residual e pode ser calculada da seguinte forma:

1. $R - \tilde{L}\tilde{L}^T - \tilde{\Psi}$ (Método do Componente Principal)
2. $R - \hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{L}}^T - \hat{\mathbf{\Psi}}$ (Método da Máxima Verosimilhança)

Os elementos da diagonal principal da matriz residual são iguais a zero. Se os demais elementos forem próximos de zero, pode-se de maneira subjetiva inferir que o modelo fatorial, com os m fatores comuns definidos, é apropriado.

- Analiticamente, a adequação do modelo fatorial com m fatores pode ser verificada a partir das contribuições dos fatores para as variâncias amostrais consideradas, sendo obtida a soma de quadrados de $\left[R - \tilde{L}\tilde{L}^T - \tilde{\Psi}\right] \leq$ $\hat{\ }^2_{m+1} + \cdots + \hat{\ }^2_p$ pelo método escolhido. Consequentemente, um baixo valor para a soma de quadrados dos valores próprios negligenciados implica um baixo valor para a soma de quadrados dos erros de aproximação, o que indica que a porção da variância dos m fatores comuns é próxima da variância total.

Johnson & Wichern [9] consideram que o melhor procedimento deve reter o menor número de fatores possível, mas de forma a proporcionar uma explicação satisfatória dos dados e um ajuste adequado de S ou de R.

2.7 Análise de Componentes Principais

A ACP é uma técnica de análise multivariada [1] cujo objetivo consiste em transformar um conjunto de p variáveis correlacionadas, num novo conjunto de variáveis denominadas de componentes principais que são combinações lineares das variáveis originais mas que não são correlacionadas entre si e explicam toda a variância das variáveis originais. Esta técnica é diferente da análise fatorial, apesar de serem similares em muitos aspetos, a análise Fatorial baseia-se em pressupostos diferentes sobre a estrutura subjacente dos dados e encontra os vetores próprios de uma matriz de covariância levemente diferente.

Seja $X = \left[X_1 \cdots X_p\right]^T$ um vetor aleatório de média μ e de covariância Σ

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{p1} & \cdots & \sigma_{pp} \end{bmatrix}$$

onde $\sigma_{ij} = Cov\left(X_i, X_j\right)$

Seja $X_{(n \times p)}$ uma matriz de dados de dimensão n, então as observações do vetor aleatório X.

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{np} \end{bmatrix}$$

A ACP corresponde a uma rotação do sistema de eixos ortogonais associados às variáveis $X_{(n \times p)}$, obtendo-se um novo sistema de dados $Y_{(n \times p)}$.

As colunas da matriz Y correspondem as componentes principais não correlacionadas e que apresentam a máxima variância [22].

2.7.1 Obtenção das Componentes Principais

As componentes principais constituem combinações lineares das p variáveis de X, sendo a componente Y_j representada por :

$$Y_j = \ell_{1j} X_1 + \ell_{2j} X_2 + \cdots + \ell_{pj} X_p$$

Com $j = 1, \cdots, p$ e $\ell_{ij} (i = 1, \cdots, p; j = 1, \cdots, p)$ constantes.

Os coeficientes das combinações lineares devem satisfazer as condições:

1. $Var\left(Y_1\right) \geq Var\left(Y_2\right) \cdots \geq Var\left(Y_p\right)$ A variância explicada pela primeira componente é superior às outras e assim sucessivamente;

2. $Corr\left(Y_i, Y_j\right) = 0 \qquad \forall_{ij}$, i.e. as componentes não se correlacionam entre si;

3. A componente $Y_i = \ell_{ij}^2 + \cdots + \ell_{pj}^2 = 1.$ ou seja, a soma dos quadrados dos coeficientes ou *loadings* de cada componente principal é igual a 1.

Uma vez que as componentes são determinadas de modo a não se correlacionarem, a covariância entre cada duas componentes principais Y_i e Y_j é nula, ou seja, $Cov\left(Y_i, Y_j\right) = l_j \Sigma \ell_i = \ell_j \lambda_j \ell_i = \lambda_j \ell_j \ell_i = 0$, equivalentemente $\ell_j^T \ell_i = 0$, pelo que ℓ_i

e ℓ_j são vetores ortogonais.

A ACP é sensível à escala relativa das variáveis originais. Em muitas ocasiões, as variáveis em análise não possuem a mesma unidade de medida, escala ou natureza, pelo que é necessário uniformiza-las através da divisão de cada valor pelo desvio padrão da variável centrada, obtendo-se assim variáveis de média nula e variância unitária. Dado que as variáveis passam a possuir a mesma variância, há uma inflação da influência das variáveis de pequena variância e uma redução no caso das variáveis de variância elevada.

O conjunto das novas variáveis possui uma covariância igual a do conjunto de variáveis originais, visto que:

$$Cov\left(\frac{X_i}{\sigma_i}, \frac{X_j}{\sigma_j}\right) = \frac{cov\left(X_i, X_j\right)}{\left(\sigma_i \sigma_j\right)} = Corr\left(X_i, X_j\right)$$

Pelo que, a ACP neste caso deve ser efetuada utilizando a matriz de correlação. Uma vez que os vetores próprios desta matriz são diferentes aos de Σ, as componentes principais também diferem. A matriz de correlação é definida da seguinte forma:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & \rho_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{p1} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

em que $\rho_{ij} = corr\left(X_i, X_j\right)$.

2.7.2 Redução de dimensionalidade

A ACP é utilizada com diversos objetivos sendo o principal a redução da dimensionalidade de grandes matrizes de dados.

A redução de dimensionalidade pode ser alcançada unicamente se as variáveis originais são correlacionadas entre si, caso isto não aconteça, a ACP produz unicamente uma ordenação de acordo com a variância das variáveis, não reduzindo a dimensionalidade dos dados.

A redução de dimensionalidade atinge-se considerando apenas algumas componentes principais, i.e., as de maior variância. Dado que, as componentes principais se podem ordenar por ordem decrescente de variância e que quanto maior esta for mais representativa dos dados originais será a correspondente componente principal, deve-se considerar as primeiras componentes principais.

A soma das variâncias das componentes principais é dada por:

$$\sum_{j=1}^{p} Var(Y_j) = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j$$

Além disso, a soma dos valores próprios da matriz simétrica de covariância (Σ) é igual ao traço da matriz, pelo que:

$$tr\,(\Sigma) = \sum_{j=1}^{p} Var\left(X_j\right) \Rightarrow \sum_{j=1}^{p} \lambda_j = \sum_{j=1}^{p} Var\left(X_j\right) = \sum_{j=1}^{p} Var\left(Y_j\right)$$

O que implica que a soma das variâncias das variáveis originais é igual à soma das variâncias das componentes principais, isto é, ao considerarem-se todas as componentes acaba-se por explicar toda a variabilidade. Assim, a proporção da variância total que é explicada pela $j-$ésima componente principal (Y_j) que indica a importância da mesma, isto é, sua variância intrínseca, é dada por:

$$\text{Grau de importância}(\%) = \frac{\lambda_j}{\sum\limits_{j=1}^{p} \lambda_j} = \frac{\lambda_j}{tr\,(\Sigma)}, \qquad \text{com } k = 1, 2, \cdots, p$$

Os *scores* definem-se como as coordenadas das amostras no novo sistema de referência, enquanto que os *loadings* correspondem aos coeficientes da combinação linear que descreve cada componente principal, ou seja correspondem aos pesos das variáveis originais em cada componente.

Aplicando-se a mesma combinação linear que é aplicada às variáveis em estudo que é aplicada aos vetores das observações $x_1, x_2, \cdots, x_p$ (colunas da matriz X) das variáveis$X_1, X_2, \cdots, X_p$ respetivamente, obtém-se uma nova matriz de dados, $Y_{(n\times r)}$ em que o $ij-$ésimo elemento é igual ao *score* do $i-$ésimo objeto para a $j-$ésima componente principal.

$$y_{ij} = \ell_{1j}x_{i1} + \ell_{2j}x_{i2} + \cdots + \ell_{pj}x_{ip}$$

A matriz dos *scores* dos objetos é portanto:

$$Y = \begin{bmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & \cdots & y_{nr} \end{bmatrix}$$

2.8 Limitações do ACP e da AF

Apesar da sua ampla aplicabilidade, os métodos de ACP e de AF possuem algumas limitações, sendo mencionadas seguidamente alguns destes constrangimentos:

- As direções com maior variância assumem-se como as de maior interesse
- São unicamente consideradas transformações, i.e. rotações, das variáveis originais.
- A ACP e a AF baseiam-se unicamente no vetor das médias e na matriz de covariância dos dados, sendo que algumas distribuições não são caracterizadas por estes parâmetros;
- A redução de dimensionalidade é alcançada unicamente se as variáveis originais são correlacionadas entre si, caso contrario, a ACP produz unicamente uma ordenação de acordo com a variância das variáveis, não reduzindo a dimensão dos dados;
- O ACP não é invariante à escala. A ACP corresponde a uma transformação dos dados, não afetando a escala dos mesmos. Uma vez que na ACP os dados não são normalizados, sempre que se altera as unidades das variáveis obtêm-se resultados diferentes na aplicação da deste método, sendo considerado um método arbitrário de análise de dados. Por exemplo, resultados diferentes seriam obtidos se a unidade Fahrenheit fosse utilizada no lugar de graus *Celsius*. Uma maneira de tornar o ACP menos arbitrária consiste em utilizar as variáveis renormalizadas para uma variância unitária.
- A ACP baseia-se em pressupostos lineares. A ACP pretende encontrar projeções ortogonais dos dados, que contêm a máxima variância possível, de modo a encontrar correlações lineares ocultas entre as variáveis dos dados. No obstante, caso os dados forem correlacionados não linearmente, e.g. em

espiral $x = t \times cos(t)$ e $y = t \times sin(t)$, a ACP não é suficiente.

- A ACP assenta em transformações ortogonais. Por vezes, considerar que algumas componentes principais são ortogonais a outras é uma restrição forte na deteção de projeções com a variância máxima.

2.8.1 Diferenças entre a AF e a ACP

Análise de componentes principais envolve a extração das componentes lineares de variáveis observadas enquanto a análise fatorial baseia-se no modelo formal de previsão das variáveis observadas a partir de fatores latentes teóricos.

Na ACP calculam-se as componentes para a variância total observada enquanto a AF utiliza unicamente a variância partilhada dos itens, a variância residual e a variância única são excluídas.

No entanto, por exemplo, em psicologia as duas técnicas são aplicadas na construção de testes multi-escala para determinar que itens carregar em qual escala. Normalmente a ACP e a AF produzem conclusões substantivas semelhantes [2] , pelo que por vezes ambos os métodos são confundidos.

Sintetizando pode-se dizer que:

- A análise fatorial é vantajosa quando se pretende testar o modelo teórico de fatores latentes que poderão gerar as variáveis observadas;
- A análise de componentes principais é adequada se o que se pretende é reduzir as variáveis observadas correlacionadas à um numero mais reduzido composto de variáveis independentes relevantes.

2.9 Testes Diagnóstico

No estudo da análise fatorial é necessário efetuar diversos testes que permitem verificar os pressupostos sobre a população estudada, garantir que a aplicação da análise fatorial é adequada e permitir verificar se o constructo obtido pelo método fatorial é estatisticamente fiável e valido.

2.9.1 Verificação de pressupostos estatísticos

Ao iniciar-se qualquer processo estatístico devem ser realizados os seguintes testes de verificação de pressupostos:

- Testes de normalidade de *Kolmogorov-Smirnov*(KS) ou de *Shapiro-Wilk* (SW);
- Teste de homogeneidade de *Levene*.

Testar a normalidade implica saber se a distribuição da variável em estudo numa determinada amostra provém de uma população com distribuição normal [13].

A homogeneidade da população também deve ser estudada através da aplicação do teste de *Levene*, sendo um dos testes mais potentes para este fim [13].

As hipóteses base estudadas são respetivamente:

- Verificação da normalidade:

  H_0: Os dados são provenientes de uma população normal;

  H_1: Os dados não proveem de uma população com distribuição normal.

- Verificação da homogeneidade:

  H_0: Os dados proveem de uma população homogénea;

  H_1: Os dados não são provenientes de uma população homogénea.

2.9.2 Fatorabilidade

A análise fatorial é mais apropriada quando as variáveis em estudo estão inter-relacionadas, pois só assim é possível reduzir o número de variáveis a um número menor de dimensões sem perda significativa de informação. Existem testes estatísticos para determinar se as variáveis estão significativamente correlacionadas entre si, sendo dois destes testes aplicados sistematicamente na fatorabilidade dos dados. Estes testes são:

- KMO (*Kaiser-Meyer-Olkin Measure of Sampling Adequacy*);
- teste de esfericidade de *Bartlett*.

O teste de esfericidade de *Bartlett* pode ser utilizado em dados padronizados, testando a hipótese da matriz de correlações ser a matriz identidade, ou seja, se as variáveis não estão correlacionadas. A estatística de teste de Bartlett tem uma distribuição χ^2. Um valor elevado da estatística de teste favorece a rejeição de H_0 (teste unilateral à direita). Se H_0 não puder ser rejeitada, deve-se então reconsiderar a utilização do método fatorial.

É de referir que este teste é sensível a dimensão da amostra, uma vez que para grandes amostras até pequenas correlações podem ser estatisticamente significantes, pelo que também é recomendável utilizar o teste de KMO.

O teste *KMO* é uma estatística variável entre 0 e 1, é um bom indicador da adequação do tamanho da amostra. Calcula-se através do quadrado das correlações totais, dividido pelo quadrado das correlações parciais observadas entre as variáveis analisadas. Segundo *Kaiser* a recomendação para a aplicação da análise fatorial pode ser definida pela Tabela 2.1

Tabela 2.1: Valores de recomendabilidade da Análise fatorial

Valor de do teste KMO	Recomendação de A.F.
$0.90 - 1.00$	Muito Boa
$0.80 - 0.90$	Boa
$0.70 - 0.80$	Média
$0.60 - 0.70$	Razoável
$0.50 - 0.60$	Má
< 0.50	Inaceitável

2.9.3 Fiabilidade do Constructo

A fiabilidade não é uma característica inerente das medições, sendo afetada pelo contexto e propósito desta. A fiabilidade avalia até que ponto um procedimento de medição produz a mesma resposta independentemente da forma e da altura em que é aplicado, sendo por isso considerada como uma medida da consistência dos resultados do instrumento de avaliação e engloba três vertentes:

Consistência Interna (explicada seguidamente);

Repetibilidade - é a correlação entre testes realizados em dois momentos, é analisado usando o coeficiente de correlação de *Pearson*;

Confiabilidade entre avaliadores - usando-se para tal o denominado teste *Kappa*.

A consistência interna é o método mais usual de avaliação da fiabilidade de constructos e permite estudar a inter-relação de uma amostra de itens de teste, indicando as correlações entre os itens/variáveis e mostra se ao retirar uma determinada variável, as correlações aumentam.

O α *de Cronbach* é o procedimento mais comummente utilizado no estudo da fiabilidade por meio do estudo da consistência interna do constructo, sendo altamente preciso e tendo a vantagem de requerer uma única aplicação da escala, requerendo apenas o cálculo da correlação entre cada um dos pares de itens na escala.

Este teste permite determinar eficazmente se um conjunto de variáveis é verdadeiramente homogénea ou unidimensional, isto é, se um conjunto de variáveis predefinidas medem um único traço latente ou constructo [25], sendo os seus valores de referência referidos na Tabela 2.2.

Deve referir-se que uma baixa fiabilidade não põe em causa os resultados obtidos usando um constructo, não provocando a obtenção de uma significância falsa. Influência, porém, as hipóteses de encontrar resultados significativos. Pode-se dizer que utilizar uma escala com baixa fiabilidade é equivalente a realizar um ensaio com uma baixa amostragem.

Tabela 2.2: Valores de referência para o α de *Cronbach*[18]

Valor	Fiabilidade
Maior que 0.90	Muito boa
Entre 0.80 e 0.90	Boa
Entre 0.70 e 0.80	Razoável
Entre 0.60 e 0.70	Fraca
Menor que 0.60	Inadmissível

Capítulo 3

Aplicação da Análise Fatorial

O presente estudo classifica-se como transversal e descritivo. Transversal porque tenta retratar a realidade num determinado momento e descritivo porque é um exercício exploratório que pretende descrever uma situação.

A população em análise foi constituída pelos idosos residentes na região do Alentejo (excluindo Lezíria). Colaboraram na presente investigação 876 pessoas com mais de 65 anos a 31 de Janeiro (inclusive) de 2011, registados nas bases de dados da Administração Regional de Saúde do Alentejo (excluindo Lezíria).

Os Resultados dos questionários efetuados pela população em estudo foram categorizados numa Escala denominada *Escala CIF*, com 5 categorias que podem ser visualizadas na Figura3.1.

Escala CIF

0-4%	5-24%	25-49%	50-95%	96-100%
Sem problema	Pequeno problema	Problema moderado	Problema considerável	Problema completo

Figura 3.1: Categorização dos resultados em Escala CIF

3.1 Caracterização da amostra

Na recolha da amostra foram tidos em consideração dois requisitos básicos: os sujeitos deveriam ter no mínimo 65 anos e residir na Unidade Territorial do Alentejo (UTA). Estes critérios foram previamente definidos, em virtude desta região ter a taxa de envelhecimento mais elevada do país (25.3%) (INE, 2011) e pela escassez de cuidados de saúde oral nesta população.

A dimensão da amostra estratificada foi determinada em função da dimensão populacional do Alentejo existente nos três grupos etários. Verificou-se que a amostra recolhida tinha dimensão mais reduzida do que o inicialmente previsto, efetuaram-se cálculos para analisar estatisticamente se a discrepância existente entre a dimensão da amostra inicial e a dimensão da amostra recolhida era significativa, tendo-se verificado que não Tabela 3.1.

Tabela 3.1: Distribuição da amostra projetada e da amostra real por grupos etários e género

Género (H-M)	**Grupo etário (anos)**	**Dimensão da amostra inicial**	**Dimensão da amostra recolhida**
H	65 – 74	320 (21.08%)	161 (18.05%)
H	75 – 84	258 (17.00%)	178 (19.96%)
H	≥ 85	68 (4.48%)	44 (4.93%)
M	65 – 74	404 (26.61%)	200 (22.42%)
M	75 – 84	353 (23.25%)	233 (26.12%)
M	≥ 85	115 (7.58%)	76 (8.52%)
	Total	1518 (100.00%)	876 (100.00%)

3.2 Verificação de Pressupostos

Ao iniciar-se qualquer processo estatístico deve ser realizada a verificação dos pressupostos de normalidade e homogeneidade da população estudada, de modo a saber-se que tipo de testes implementar.

No presente trabalho a normalidade foi verificada através dos testes de *Kolmogorov-Smirnov* e *Shapiro-Wilk* sendo estas tipologias de teste indicadas para a dimensão da amostra de $(N = 876)$. Neste processo foram analisadas as variáveis de tipo qualitativo nominal com uma escala CIF de 1 a 5.

Figura 3.2: Distribuição dos participantes em função do concelho de residência

Analisando a Tabela 3.2, verifica-se que a Hipótese Nula que se testou pode ser rejeitada. Isto significa que a população em análise não apresenta uma distribuição normal.

Relativamente a homogeneidade, foi realizado o teste de *Levene*, por validação cruzada, tendo sido obtidos os resultados constantes da Tabela 3.3. Verifica-se que na maioria dos casos (86%) o $p > 0.05$, o que indica que a população é homogénea.

Pode concluir-se a partir da verificação dos pressupostos na base original que a população não tem distribuição normal, pelo que os testes a utilizar serão não-paramétricos, de forma a garantir a fiabilidade dos resultados.

3.3 Análise Fatorial

Uma vez que a população estudada não segue uma distribuição normal, o método de estimação das cargas pelo método de máxima verosimilhança não pode ser aplicada. Optou-se, portanto, pela aplicação do método de extração de componentes principais. Igualmente pelo mesmo motivo, só poderão ser aplicados testes não paramétricos.

Antes da realização da análise fatorial é necessário calcular o *KMO (Kaiser-Meyer-Olkin Measure of Sampling Adequacy)*. Este valor estabelece a recomendação face à Análise Fatorial. Para ser possível a realização da análise fatorial, o KMO

Tabela 3.2: Testes de Normalidade da amostra

Funcionalidade	KS Estatística	SW Estatística	Graus de Liberdade	p value
Articulações M.S. (*b*710)	0.514	0.321	876	0.000
Articulações M.I. (*b*710)	0.445	0.545	876	0.000
Força M.S. (*b*730)	0.478	0.462	876	0.000
Força M.I. (*b*730)	0.525	0.332	876	0.000
Tónus M.S. (*b*735)	0.453	0.546	876	0.000
Tónus M.I. (*b*735)	0.420	0.624	876	0.000
Aquisição de Competências (*d*155)	0.312	0.733	876	0.000
Capacidade de Concentração (*d*160)	0.350	0.688	876	0.000
Capacidade de Leitura (*d*166)	0.261	0.762	876	0.000
Capacidade de Escrita (*d*170)	0.249	0.768	876	0.000
Capacidade de Resolver Problemas (*d*175)	0.282	0.747	876	0.000
Capacidade de Comunicar (*d*310)	0.431	0.566	876	0.000
Produzir Mensagens Verbais (*d*330)	0.498	0.354	876	0.000
Conversar (*d*350)	0.462	0.501	876	0.000
Lavar-se (*d*510)	0.482	0.450	876	0.000
Cuidar Partes do Corpo (*d*520)	0.446	0.538	876	0.000
Processos de Excreção (*d*530)	0.526	0.287	876	0.000
Vestir-se (*d*540)	0.513	0.343	876	0.000
Comer (*d*550)	0.528	0.263	876	0.000
Beber (*d*560)	0.529	0.236	876	0.000
Estrutura M.S. (*s*730)	0.536	0.279	876	0.000
Estrutura M.I. (*s*750)	0.530	0.329	876	0.000

Nota: KS = *Kolmogorov-Smirnov*; SW = *Shapiro-Wilk*

tem de ser superior a 0.5. Tem ainda de ser realizado o teste de esfericidade de *Bartlett*, caso este apresente um *p-value* inferior a 0.05, significa que as variáveis em estudo estão correlacionadas significativamente, sendo este o outro pressuposto para a realização da análise fatorial.

Pela Tabela3.4, pode observar-se que os pressupostos para a realização da análise fatorial são verificados, uma vez que o *KMO* é muito superior a 0.5 e o teste de esfericidade tem um p-value inferior a 0.001, o que significa que as variáveis estão correlacionadas significativamente.

Tabela 3.3: Testes de Homogeneidade da amostra

Funcionalidade	*Teste de Levene* Estatística	Graus de Liberdade	p-value
Articulações M.S. (*b*710)	1.333	1	0.248
Articulações M.I. (*b*710)	2.681	1	0.102
Força M.S. (*b*730)	0.269	1	0.604
Força M.I. (*b*730)	5.069	1	0.0246*
Tónus M.S. (*b*735)	1.869	1	0.172
Tónus M.I. (*b*735)	1.365	1	0.243
Aquisição de Competências (*d*155)	0.234	1	0.629
Capacidade de Concentração (*d*160)	0.413	1	0.521
Capacidade de Leitura (*d*166)	0.685	1	0.408
Capacidade de Escrita (*d*170)	4.329	1	0.038*
Capacidade de Resolver Problemas (*d*175)	1.696	1	0.193
Capacidade de Comunicar (*d*310)	0.903	1	0.342
Produzir Mensagens Verbais (*d*330)	0.381	1	0.537
Conversar (*d*350)	1.533	1	0.216
Lavar-se (*d*510)	0.248	1	0.618
Cuidar Partes do Corpo (*d*520)	0.676	1	0.411
Processos de Excreção (*d*530)	2.156	1	0.142
Vestir-se (*d*540)	0.049	1	0.824
Comer (*d*550)	0.679	1	0.410
Beber (*d*560)	1.981	1	0.159
Estrutura M.S. (*s*730)	4.640	1	0.031*
Estrutura M.I. (*s*750)	0.428	1	0.513

Tabela 3.4: KMO e Teste de esfericidade de Bartlett

KMO	Teste de Esfericidade de Bartlett Apróx. χ^2	Graus de liberdade	Significância
0.907	16854.68	231	<0.001

Nota: KMO = Teste de Kaiser-Meyer-Olkin Measure of Sampling Adequacy

3.3.1 Estudo das Comunalidades

A análise das comunalidades é imprescindível para se perceber quais as variáveis mais e menos importantes, em termos de variância explicada para a análise fatorial, considerou-se, atendendo à literatura, que as variáveis com comunalidade inferior 0.5 têm um baixo poder explicativo da variância nos fatores, sendo por isso definido como limite inferior para inclusão das variáveis na análise fatorial.

Inicialmente, através de uma abordagem empírica pretendia-se criar um constructo da funcionalidade dos idosos, que abrangesse uma dimensão relativa à mobilidade.

Porém, através do estudo das comunalidades, acabou por verificar-se que todas as variáveis relativas à mobilidade tinham baixa variância, pelo que sua inclusão na Análise Fatorial, não foi de todo recomendada. Após uma análise do questionário, percebeu-se que os idosos alvo do questionário, responderam ao inquérito nos respetivos centros de saúde, pelo que possuíam alguma mobilidade, mesmo que condicionada, como se pode verificar pelos gráficos das variáveis da Figura 3.3.

A Tabela 3.5 contém os valores de comunalidade das variáveis válidas para inclusão na Análise Fatorial, tendo todas um valor superior a 0.5. O método de extração foi o de componentes principais, uma vez que a população, como se verificou pelos testes de *Shapiro* e *Kolmogorov*, não apresenta uma distribuição normal.

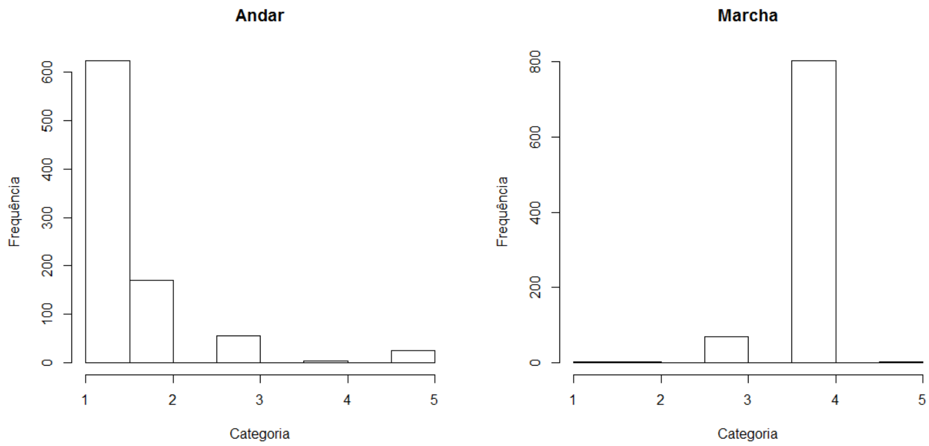


Figura 3.3: Gráficos de barras das variáveis de mobilidade dos idosos

3.3.2 Escolha do número de fatores

Como critério de extração dos fatores consideraram-se dois procedimentos: o método de *Kaiser-Guttmann*, em que se escolhem os valores próprios superiores a 1 da matriz das correlações, e a análise de *scree test*. Pelo critério de *Kaiser* cada fator extraído apresenta um valor próprio que se refere ao total da variância explicada pelo mesmo, sendo a soma total dos valores próprios sempre igual ao número de itens utilizados na análise, atendendo à interpretação de Joliffe [10] o critério de *Kaiser* é aplicável uma vez que o tamanho da amostra em estudo é superior a 250

Tabela 3.5: Variáveis com Comunalidade superior a 0.50

Função	**Comunalidade**
Articulações M.S. (*b*710)	0.614
Articulações M.I. (*b*710)	0.684
Força M.S. (*b*730)	0.655
Força M.I. (*b*730)	0.534
Tónus M.S. (*b*735)	0.656
Tónus M.I. (*b*735)	0.650
Aquisição de Competências (*d*155)	0.775
Capacidade de Concentração (*d*160)	0.781
Capacidade de Leitura (*d*166)	0.865
Capacidade de Escrita (*d*170)	0.866
Capacidade de Resolver Problemas (*d*175)	0.554
Capacidade de Comunicar (*d*310)	0.792
Produzir Mensagens Verbais (*d*330)	0.744
Conversar (*d*350)	0.794
Lavar-se (*d*510)	0.829
Cuidar Partes do Corpo (*d*520)	0.707
Processos de Excreção (*d*530)	0.839
Vestir-se (*d*540)	0.886
Comer (*d*550)	0.838
Beber (*d*560)	0.823
Estrutura M.S. (*s*730)	0.830
Estrutura M.I. (*s*750)	0.825

indivíduos e a comunalidade média, é de 0.75, superior a 0.6. A percentagem de variância explicada pelas 5 primeiras componentes da Análise Fatorial pode ser observada na Tabela 3.6 e corresponde a 75.17%, sendo este valor adequado, pois de acordo com *Pasquali* [16] considera-se como valor satisfatório uma variância explicada $> 60\%$.

Tabela 3.6: Total da Variância Explicada

	Fator 1	Fator 2	Fator 3	Fator 4	Fator 5
Proporção de Variância Explicada	24.59%	19.25%	12.28%	10.81%	8.24%
Variância Explicada Comulativa	24.59%	43.84%	56.12%	66.93%	75.17%

O critério do *scree test* consiste em tomar por referência o ponto a partir do qual a curva do *scree plot* tende a ficar paralela ao eixo das abcissas. Este ponto corresponde ao número máximo de componentes a reter, deixando os fatores de ser representativos a partir desse ponto. Observando o Gráfico 3.4 pode verificar-se que 5 fatores constituem uma boa escolha de número de fatores, como já se tinha verificado igualmente pela variância explicada e número de valores próprios superiores à unidade.

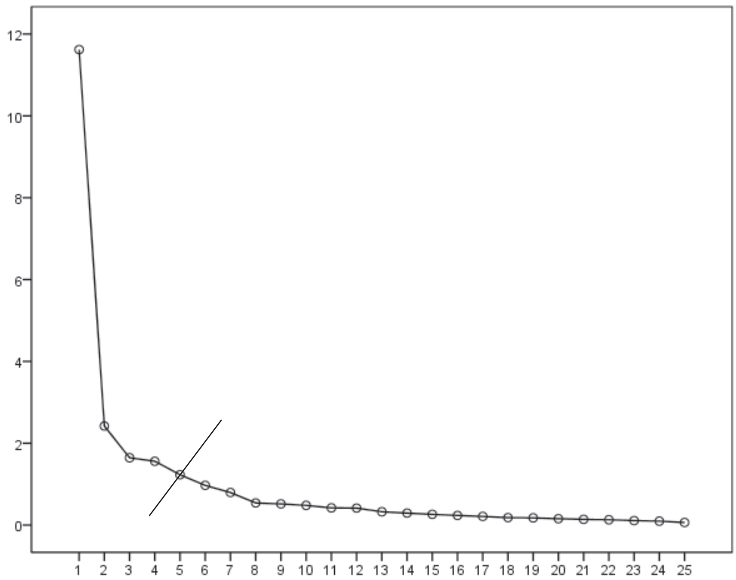


Figura 3.4: Escolha do n.º de fatores pelo gráfico dos valores próprios

3.3.3 Interpretação dos Fatores

Da análise da Tabela 3.7 que contem a matriz dos fatores da escala, resultante da rotação *varimax* efetuada no software **R** utilizando o pacote *psych*, pode afirmar-se que existem 5 dimensões. Observa-se que a primeira componente explica 24.59% da variância dos resultados, sendo este fator composto por itens referentes às Atividades da vida diária. A segunda dimensão apresenta uma variância explicada de 19.25% e corresponde às Funções de Cognição e comunicação. O terceiro Fator agrega variáveis que dizem respeito às funções músculo-esqueléticas e apresenta uma variância explicada de 12.28%, o quarto fator refere-se à dimensão de Ler e escrever e resolver problemas e explica 10.81% da variância total e por último, e com o peso inferior, tem-se a dimensão das Estrutura dos membros, que apresenta uma variância explicada de 8.24%. Optou-se ainda por escolher um *Cutoff* nas componentes de 0.5 sendo eliminados itens com baixa saturação, pelo que cada variável pertence a um único fator excetuando a variável Articulações M.I. ($b710$).

Tabela 3.7: análise Fatorial com *loadings* com *Cutoff* de 0.5 e rotação varimax

	Fator 1	**Fator** 2	**Fator** 3	**Fator** 4	**Fator** 5
Processos de Excreção (*d*530)	0.854				
Vestir-se (*d*540)	0.851				
Comer (*d*550)	0.839				
Beber (*d*560)	0.824				
Lavar-se (*d*510)	0.805				
Cuidar de Partes do Corpo (*d*520)	0.728				
Força M.I. (*b*730)	0.564				
Articulações M.I. (*b*710)	0.530		0.517		
Capacidade de Comunicar (*d*310)		0.824			
Conversar (*d*350)		0.802			
Capacidade de Concentração (*d*160)		0.791			
Falar (*d*330)		0.786			
Aquisição de Competências (*d*155)		0.736			
Tónus M.S. (*b*735)			0.782		
Tónus M.I. (*b*735)			0.749		
Força M.S. (*b*730)			0.636		
Articulações M.S. (*b*710)			0.578		
Capacidade de Escrita (*d*170)				0.895	
Capacidade de Leitura (*d*166)				0.891	
Capacidade de Resolver Problemas (*d*175)				0.512	
Estrutura M.S. (*s*730)					0.903
Estrutura M.I. (*s*750)					0.884

3.4 Estudo da Fiabilidade

A amostra utilizada para estudar a fiabilidade do constructo é composta por 876 indivíduos, 56.6% do sexo feminino e 43.4% do sexo masculino. Nesta amostra 61.6% viviam acompanhados. O estudo de fiabilidade consiste na análise da consistência interna e da estabilidade temporal.

O estudo da consistência interna baseia-se na correlação entre os itens em avaliação. A correlação entre as variáveis deve ser forte > 0.7 entre cada item e o total. Esta correlação é calculada a partir do *Alpha de Cronbach*. Os valores obtidos oscilam entre 0.8 e 0.94, o que sugere uma elevada consistência interna [18].

Tabela 3.8: Estudo da consistência interna

	Dimensão	α **de** ***Cronbach***
Fator 1	Atividades da vida diária	0.93
Fator 2	Cognição e comunicação	0.93
Fator 3	Funções músculo-esqueléticas	0.80
Fator 4	Ler e escrever	0.94
Fator 5	Estruturas relacionadas com o movimento	0.81

3.5 Validade do constructo

Os diversos tipos de validade do constructo, nomeadamente a validade critério, medem o grau com que um método de medição se correlaciona com outros métodos já estabelecidos para o mesmo fenómeno, isto é, comparam-se dois questionários no qual um é visto como sendo um *gold-standard*. Para tal, fornecem-se os dois questionários em momentos diferentes à mesma população pretendendo-se aferir as correlações existentes entre os valores totais das variáveis dos questionários.

Uma vez que só se possui um questionário, mesmo sendo obrigatória a realização de uma validação em dois momentos, não foi possível realizar a validação critério do constructo, tendo sido está uma das principais falhas na conceção do estudo e que se pretende corrigir futuramente.

3.6 Opção Final

Uma vez que as dimensões teóricas da CIF possuem maior número de variáveis, optou-se por analisar a fiabilidade em termos de consistência interna de cada uma das dimensões teóricas, por forma a aferir se é preferível escolher este construto relativamente ao obtido por análise Fatorial Exploratória, tendo sido obtidos os valores de consistência constantes da Tabela 3.9.

Dado que as Dimensões teóricas sugeridas na literatura para caracterizar a

Tabela 3.9: Consistência interna das Dimensões da **CIF**

Dimensões da CIF	α de *Cronbach*
Funções mentais	0.54
Funções sensoriais e da dor	0.24
Mobilidade	030
FNME e relacionadas com o movimento	0.82
Aprendizagem e aplicação de conhecimentos	0.83
Comunicação	0.92
Auto-cuidados	0.94
Estruturas relacionadas com o movimento	0.81

funcionalidade possuem uma elevada consistência interna,excetuando as funções mentais, funções sensoriais e da dor e mobilidade, que possuem um $\alpha < 0.6$ optou-se por considerar como opção final os domínios da CIF referidos seguidamente:

1. **Funções neuro-músculo-esqueléticas e relacionadas com o movimento**
    - Tonús M.S. ($b735$)
    - Tonús M.I. ($b735$)
    - Força M.S. ($b730$)
    - Força M.I. ($b730$)
    - Articulações M.S. ($b710$)
    - Articulações M.I. ($b710$)
2. **Aprendizagem e aplicação de conhecimentos**
    - Ler ($d166$)
    - Escrever ($d170$)
    - Resolver Problemas ($d175$)
    - Concentrar a atenção ($d160$)
    - Adquirir Competências ($d155$)
3. **Comunicação**
    - Capacidade de comunicar ($d310$)
    - Produzir mensagens verbais ($d330$)
    - Conversar ($d350$)
4. **Autocuidados**
    - Vestir-se ($d540$)
    - Processos de excreção ($d530$)
    - Comer ($d550$)
    - Lavar-se ($d510$)
    - Beber (560)
    - Cuidar de partes do corpo ($d520$)
5. **Estruturas relacionadas com o movimento**
    - Estruturas MS ($s730$)
    - Estruturas MI ($s750$)

CAPÍTULO 4

Homogeneity Analysis by means of Alternaiting Least Squares (HOMALS)

Historicamente a homogeneidade está relacionada com a ideia de que variáveis diferentes podem medir a mesma propriedade. Pode no entanto, ser entendida num sentido mais lato como a classe de critérios para analisar dados multivariados, através da otimização da homogeneidade das variáveis através de diversos métodos de manipulação e simplificação.

K variáveis são homogéneas se forem semelhantes, ou seja, se medirem a mesma propriedades ou propriedades, pretendendo-se quantificar a perda de informação (variância) intrínseca à substituição de um conjunto de variáveis por um índice. As variáveis iniciais são consideradas homogéneas se a perda de informação for mínima, podendo-se neste caso substituir as variáveis pelo índice *(object score)*[12].

Nos métodos não lineares de ACP, existem abordagens diversas no que respeita a maximização das semelhanças entre variáveis, isto é, quanto a minimização da função de perda, podendo recorrer-se a:

- transformações das variáveis iniciais antes da quantificação de perda de informação, sendo estas transformações do tipo polinomiais de ordem reduzida ou então de *splines*.

- diferentes técnicas de medição de semelhança entre variáveis através da codificação de informação.

A ACP sobre dados exclusivamente provenientes de variáveis qualitativas nominais (categóricas), é designada por ***HOM****ogeneity analysis by means of* ***A****lternating* ***L****east* ***S****quares* ***(HOMALS)***.

Considera-se uma matriz de dados $H_{n\times m}$ constituída por variáveis categóricas , onde a variável h_j tem k_j categorias e $j = 1, \cdots, m$.

As variáveis categóricas sofrem um processo de quantificação a priori, denominado de codificação, quando são introduzidas na matriz de dados. A quantificação ótima é realizada via maximização da homogeneidade, ou via minimização da função perda, pretendendo-se pesos para cada uma das $\sum k_j$ categorias, sendo para tal necessário definir as seguintes matrizes auxiliares:

Matriz indicatriz G_j associada à variável h_j , $j = 1, \cdots, m$, do tipo $n \times k_j$, com entradas $G_j(i,t) = 1, i = 1, \cdots, n, t = 1, \ldots, k_j$ se o individuo i pertence à categoria t e $G_j(i,t) = 0$, caso pertença a outra categoria. Relativamente à matriz indicatriz, observa-se que contém a mesma informação que as variáveis categóricas associadas.

Por definição, cada linha de G_j é constituída por um elemento de valor "1"e $(k_j - 1)$ elementos "0".

Uma das k_j colunas de G_j é redundante uma vez que fica totalmente determinada pelas outras $(k_j - 1)$ colunas $D_j = G_j^T G_j$ é uma matriz diagonal cujos elementos principais correspondem à frequência marginal de cada categoria, isto porque as colunas de G_j são ortogonais entre si.

A justaposição das matrizes indicatriz G_j é denominada de matriz super-indicatriz associada à matriz de dados H, e denota-se por G, sendo do tipo $n \times \Sigma k_j$, ou seja:

$$G = \begin{bmatrix} G_1 & G_2 & \cdot & G_m \end{bmatrix}$$

Relativamente à matriz super-indicatriz pode observar-se que:

Esta matriz contém a mesma informação que a matriz H;

O somatório dos elementos de cada linha de G é igual a m;

A frequência marginal de cada uma das Σk_j categorias é obtida pelo somatório dos elementos de cada coluna de G.

4.1 Função de Perda da análise HOMALS

A função de perda, de dimensão 1, para as variáveis categóricas pode ser definida pela formula:

$$\sigma_1 (x, y) = m^{-1} \sum_j SSQ \left(x - G_j y_j\right)$$

Onde y é um vetor com Σk_j componentes formado pela justaposição dos y_j e $x \in \mathbb{R}^n$ em que $G_j y_j = \phi_j \left(h_j\right)$ com $j = 1, \cdots, m$ é a transformação da variável h_j associada a matriz indicatriz G_j, $n \times k_j$ e em que y_j é um vetor com k_j *"pesos"* ou componentes para as k_j categorias da variável h_j.

A função de perda para variáveis categóricas pode ser reformulada:

$$\sigma_1 (x, y) = x^T x + m^{-1} y^T D y - 2m^{-1} x^T G_y$$

Onde G é a matriz super-indicatriz associada à matriz de dados H, D é a diagonal de $G^T G$, y é o vetor das componentes de G e m é um escalar.

A função de perda no caso de variáveis categóricas é minimizada quando x é o vetor próprio associado ao maior valor próprio da matriz $GD^{-1}G^T$ e $y = D^{-1}G^T x$.

A função de perda da HOMALS, para variáveis categóricas no seu formato de dimensão p é dada pela expressão:

$$\sigma (X, Y) = \sigma (X; Y_1, \cdots, Y_m) = m^{-1} \sum_{j=1}^{m} SSQ \left(X - G_j Y_j\right)$$

Onde X é uma matriz $n \times p$, Y_j do tipo $k_j \times p$ e G_j é uma matriz $n \times k_j$ com $j = 1, \cdots, m$.

Esta é a definição principal do *Gifi system* (HOMALS) e do programa *CATPCA* implementados nos softwares **R** e *SPSS* respetivamente, e consiste numa das múltiplas versões diferentes do problema de minimização da perda de variância. Nestes métodos surgem vários tipos de análise divergente na imposição de restrições às quantificações das Y_j categorias.

A função de perda da HOMALS sujeita a $X^T X = I$ é minimizada quando $Y = D^{-1/2} W_P \Psi_P$ e $X = V_p$ onde o índice p denota a seleção das primeiras p colunas das matrizes G e $D^{-1/2}$.

É de salientar que as colunas de X são os vetores próprios de $GD^{-1}G^T$, ortonormalizados e ordenados de ordem decrescente em relação ao valor próprio que lhes está associado. As colunas de Y são determinadas através de $y = D^{-1}G^T x$ na mesma ordem das colunas de X.

A perda associada à solução de dimensão p da minimização da função de perda é obtida pela expressão:

$$\sigma(X, Y) = P - \frac{1}{m} \sum_{S=1}^{p} \Psi_S^2$$

Sendo as soluções ordenadas, pelo que a perda associada à solução de dimensão p_1 é maior que a solução de dimensão p_2, com $p_1 < p_2$.

4.2 Princípio das médias reciprocas e *Alternating Least Squares*

A função perda para variáveis categóricas sujeita a $x^T x = 1$ satisfaz as seguintes relações de proporcionalidade:

1. $x \propto \frac{Gy}{m}$;
2. $y \propto D^{-1}G^T x$;

A condição $x^T x = 1$ implica que $y = D^{-1}G^T$. Esta última relação significa que a quantificação de uma categoria corresponde à média dos *object scores* que nela se inserem. Ou seja, geometricamente a quantificação de uma categoria é o centro de gravidade dos *object scores* que nela se inserem.

Particularmente, no caso da dimensão p, a quantificação de uma categoria corresponde ao centróide dos *object scores* que nela se inserem.

A relação $x \propto {}^{Gy}/_{m}$ implica a proporcionalidade dos *object scores* relativamente à média das quantificações das categorias a que cada objeto pertence.

Relativamente ao HOMALS o ALS materializa-se no princípio das médias recíprocas na determinação de x e y, procedendo-se da seguinte forma:

1. Inicialização:
   a) x é construído aleatoriamente;
   b) x é normalizado e centrado, com notação $\tilde{x}$
   c) y é determinado pela média dos *object scores* de cada categoria, com notação $\tilde{y}$
2. Atualização dos *object scores*:
   a) $\tilde{x}$ é atualizado através da média das componentes das categorias a que cada *object score* pertence, e denota-se por x^{+}
3. Normalização:
   a) x^{+} passa a ter norma unitária
4. Atualização das quantificações das categorias:
   a) $\tilde{y}$ é atualizado repetindo a inicialização $c)$ com x^{+}, sendo denotado por y^{+}
5. Teste de convergência:
   a) seja ε infinitesimal fixado à partida então Se $\sigma_1\left(\tilde{x}, \tilde{y}\right) - \sigma_1(x^{+}, y^{+}) \leq \varepsilon$ então (x^{+}, y^{+}) é solução, caso contrario repetem-se os passos 2.,3. e 4. partindo-se de (x^{+}, y^{+}).

4.2.1 Medidas discriminantes das contribuições das variáveis

O HOMALS permite o cálculo das denominadas "medidas discriminantes", uma para cada variável em cada uma das dimensões em estudo, definidas como $\eta_{js}^{2} \equiv {}^{y_{(j)s}^{T} D_j y_{(j)s}}/_{n}$ (onde $y_{(j)s}$ é a quantificação de h_j na $s-$éssima dimensão da solução). As medidas de discriminação são adicionadas entre variáveis à ${}^{y_s^T D y_s}/_{n} = \psi_s^2$, de modo a que o valor próprio ψ_s^2/m relatado seja a média das medidas discriminantes na s-éssima dimensão. Quando uma variável não contribui para a s-éssima dimensão da solução, a medida discriminante respetiva é nula uma vez que sua quantificação de categoria coincide com a origem. Pode ser demonstrado que as medidas discriminantes correspondem às correlações ao quadrado entre x_s e as variáveis otimamente dimensionadas $q_{(j)s} = G_j y_{(j)s}$, a prova pode ser consultada em [7].

4.2.2 Transformações não-lineares

As transformações não lineares da função perda são efetuadas através *splines* seccionalmente polinomiais com certas regularidades.

Chama-se polinómio de grau $k-1$, ou de ordem k, à função $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$p(x) = \sum_{i=1}^{k} a_i x^{i-1}$$

Em que os a_i são denominados coeficientes do polinómio. Os polinómios são amplamente utilizados devido a linearidade nos parâmetros e a facilidade de manipulação algébrica e computacional, nomeadamente quanto à derivação e integração, tendo no entanto o problema de inflexibilidade, devido à oscilação forte em determinados sub-intervalos de interpolação, sendo uma situação comum com o aumento da ordem do polinómio.

CAPÍTULO 5

ANÁLISE HOMALS

No presente capítulo irá ser analisado o procedimento HOMALS utilizado em tabelas de contingência, isto é, em quadros de distribuição de frequências resultantes do cruzamento de múltiplas (mais que duas) variáveis qualitativas ou nominais. Sendo este método uma técnica exploratória com vista a descobrir-se possíveis relações entre variáveis num espaço multidimensional.

Na análise HOMALS procede-se a uma partição dos objetos ou casos em grupos homogéneos, quantificando-se as variáveis através da atribuição de *object scores* ótimos que permitem uma maior separação entre categorias.

5.1 Dimensões

Na análise de correspondências múltiplas os valores próprios das correlações constituem uma medida da informação fornecida por cada dimensão. O valor máximo corresponde a 1 e ocorre quando as categorias que caracterizam a dimensão são explicadas na totalidade pela mesma.

Observando a Tabela 5.1, verifica-se que duas dimensões explicam respetivamente 48.6% e 26.96% da variação dos dados. Estes valores constituem na totalidade 75.55% de variância explicada, um valor elevado, permitindo por isso, a agregação nítida das diferentes categorias, discriminando bem cada variável. Pode concluir-se que os grupos de categorias de variáveis formados são bem diferenciados.

Observando o valor do *Alpha de Cronbach* no cálculo da consistência interna do constructo, verifica-se que ambos os valores são superiores a 0.7, pelo que considera-se o instrumento possui elevada consistência interna.

Tabela 5.1: Valores próprios das correlações e variância explicada pelo método HOMALS

Dimensão	Alpha de Cronbach	Valor próprio Total	Inercia	Variância Explicada (%)
1	0.950	10.69	0.486	48.59
2	0.871	5.93	0.27	26.96
Total		16.62	0.756	75.55

5.2 Medidas de Discriminação

As medidas de discriminação indicam quais as variáveis mais importantes em cada dimensão, permitindo desta forma atribuir um significado às dimensões. Estas medidas assumem o valor máximo de 1 quando a discriminação é ideal e os *object scores* pertencem a grupos mutuamente exclusivos [17]. Quando existem "*não respostas*"o valor máximo é superior a 1.

A Tabela 5.2 indica os valores da medida discriminante obtida pelo método HOMALS, aplicado no caso em concreto.

Pela observação da Tabela 5.2 verifica-se que a dimensão 1, representada no eixo horizontal da Figura 5.1, discrimina as funções das Estruturas relacionadas com o movimento (M.S. e M.I), Funções de Tónus (M.I. e M.S.) e as funções de Aplicação do Conhecimento (Capacidade de Escrita($d170$), Leitura($d166$) e Resolução de Problemas ($d175$)), separando-as das funções relativas aos Auto-cuidados, isto é, o Lavar-se ($d510$), Vestir-se ($d540$), Comer ($d550$), Cuidar de partes do corpo ($d520$), Processos de Excreção ($d530$), Beber ($d560$).

Verifica-se igualmente que as funções de aprendizagem estão separadas das funções de Aplicação de Conhecimentos, ao contrario do que acontece no domínio teórico da CIF escolhida na opção final da análise fatorial exploratória.

Relativamente à segunda Dimensão é de referir, observando a Figura 5.2, que há uma separação nítida entre entre as funções de comunicação e aprendizagem

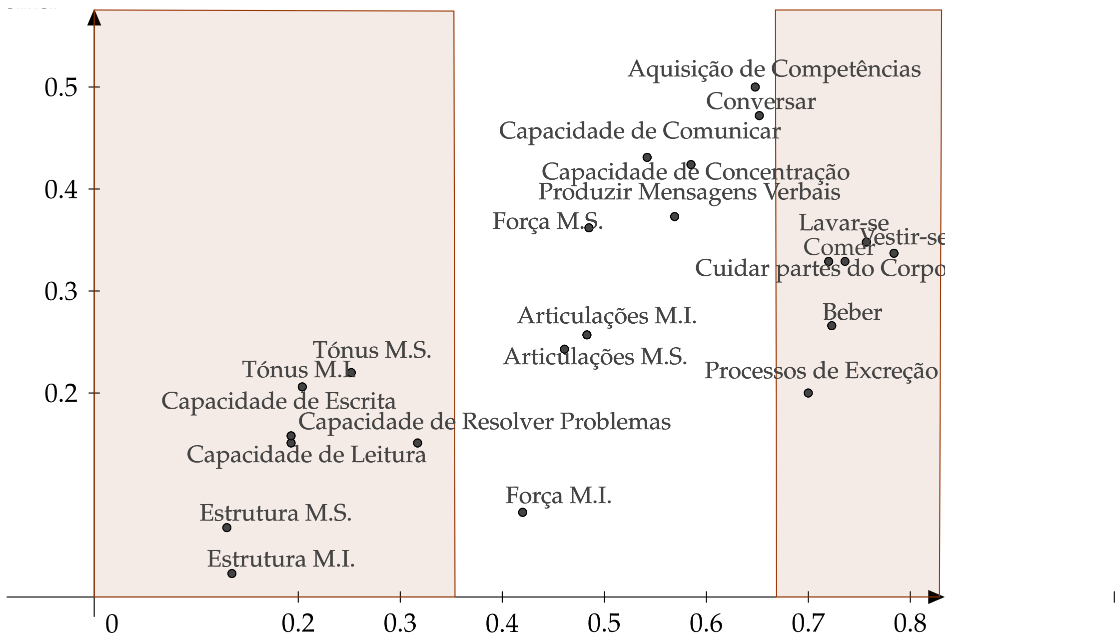
Tabela 5.2: Medida Discriminante

Funcionalidade	Dimensão 1	Dimensão 2	Média
Articulações M.S. (*b*710)	0.461	0.243	0.352
Articulações M.I. (*b*710)	0.483	0.257	0.370
Força M.S. (*b*730)	0.485	0.362	0.423
Força M.I. (*b*730)	0.420	0.083	0.252
Tónus M.S. (*b*735)	0.252	0.220	0.236
Tónus M.I. (*b*735)	0.204	0.206	0.205
Aquisição de Competências (*d*155)	0.648	0.500	0.574
Capacidade de Concentração (*d*160)	0.585	0.424	0.505
Capacidade de Leitura (*d*166)	0.193	0.151	0.172
Capacidade de Escrita (*d*170)	0.193	0.158	0.175
Capacidade de Resolver Problemas (*d*175)	0.317	0.151	0.234
Capacidade de Comunicar (*d*310)	0.542	0.431	0.487
Produzir Mensagens Verbais (*d*330)	0.569	0.373	0.471
Conversar (*d*350)	0.652	0.472	0.562
Lavar-se (*d*510)	0.757	0.348	0.552
Cuidar de Partes do Corpo (*d*520)	0.720	0.329	0.524
Processos de Excreção (*d*530)	0.700	0.200	0.450
Vestir-se (*d*540)	0.784	0.337	0.561
Comer (*d*550)	0.736	0.329	0.532
Beber (*d*560)	0.723	0.266	0.495
Estrutura M.S. (*s*730)	0.130	0.068	0.099
Estrutura M.I (*s*750)	0.135	0.023	0.079

(Aquisição de Competências, Conversar, Capacidade de Comunicar e de Concentração e Produção de Mensagens Verbais) em relação as funções de aplicação de conhecimentos (Ler, Escrever e Resolver Problemas) e às Estruturas relacionadas com o movimento (Estruturas M.S. e M.I.). Verifica-se igualmente que há uma ligação entre as Funções neuro-músculo-esqueléticas e relacionadas com o movimento, com o fator dos Auto-cuidados possuindo estes medida discriminante semelhante.

Por último, infere-se que a Dimensão 1 é definida predominantemente pela funcionalidade relativa aos Auto-cuidados, enquanto que a segunda dimensão é caracterizada primordialmente pelas funções de Aprendizagem e Comunicação. Note-se que pela análise fatorial exploratória foram estas as dimensões que apresentaram, igualmente, maior variância comum explicada, pelo que em termos de resultados a técnica de análise de correspondência múltipla (HOMALS) e a análise

Figura 5.1: Medida discriminante Dimensão 1



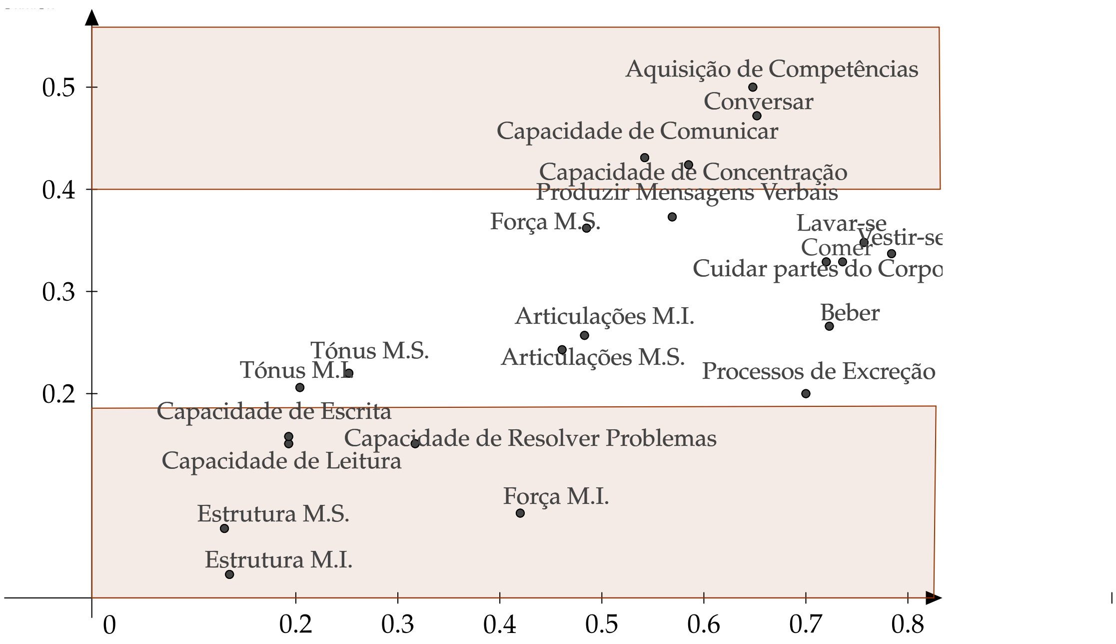
fatorial exploratória são concordantes.

5.3 Quantificações das Categorias

As quantificações das categorias representam as médias dos *object scores* das categorias, sendo as coordenadas de cada ponto na Figura 5.3 correspondente as quantificações das categorias. As categorias de diferentes variáveis estão próximas umas das outras com *object scores* semelhantes.

Uma vez que os valores próprios são elevados, em princípio deve haver uma

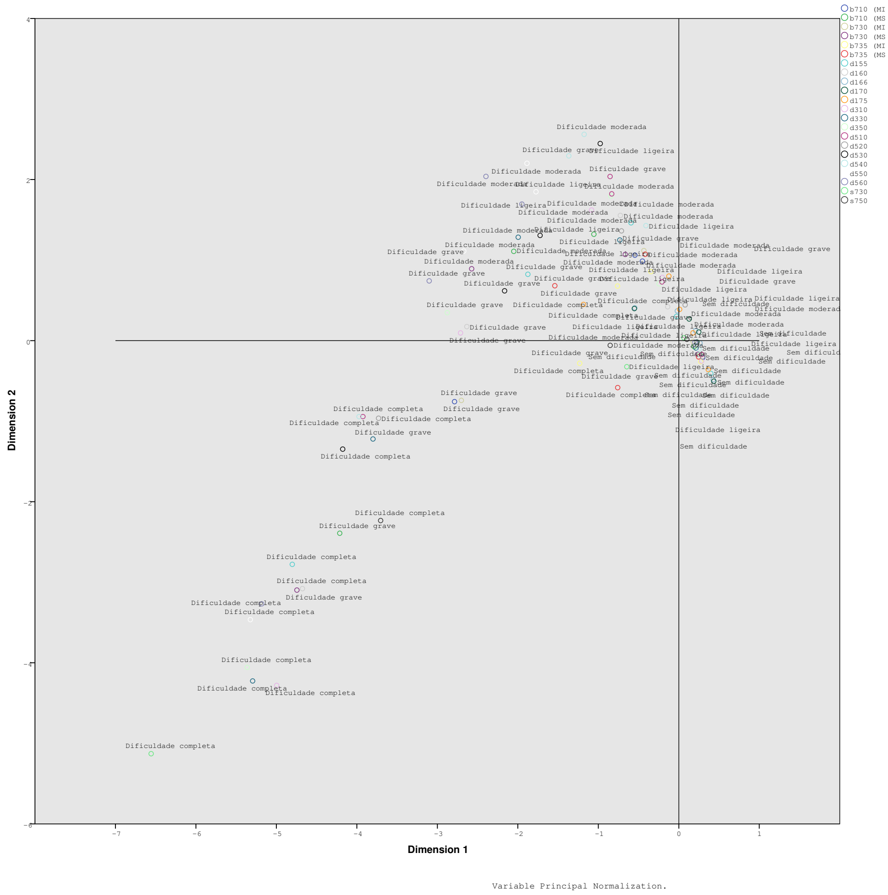
Figura 5.2: Medida discriminante Dimensão 2



boa discriminação entre variáveis, pelo que na Figura 5.3 a maioria das observações devem distanciar-se do ponto $(0, 0)$ e formar grupos bem definidos entre si [17].

Observando a Figura 5.3 verifica-se que há alguma proximidade ao ponto(0,0) de algumas observações (indivíduos). Verifica-se que as variáveis caracterizadas por indivíduos com "*dificuldade completa*"numa dada funcionalidade, acontecem em numero reduzido e bem diferenciado, estando contidos entre os valores de -3 e 0 na Dimensão 1 e entre 0 e -5 na Dimensão 2. Por outro lado, os indivíduos "*sem dificuldade*"de funcionalidade para as diversas variáveis acontecem igualmente em numero reduzido e estão agrupados na 1^a dimensão para valores entre 0 e 2 e na 2^a dimensão para valores entre -2 e 0. Por outro lado, não há um agrupamento

Figura 5.3: Gráficos das quantificações das categorias



de indivíduos caracterizados por terem graves problemas de funcionalidade nas diversas variáveis de funcionalidade, é de notar que caracterizam um maior número de indivíduos do que a categoria "*sem dificuldades*"de funcionalidades ou "*com dificuldade completa*"nas variáveis de funcionalidade.

Capítulo 6

Conclusões e Trabalhos Futuros

- Relativamente a Análise Fatorial, percebeu-se que houve um erro conceptual na definição dos questionários, sendo que não foi possível verificar a validade critério do constructo uma vez que não foi realizado outro questionário num segundo momento, constatando-se também que as variáveis da dimensão relativa a mobilidade foram todas excluídas, já que os indivíduos acamados não foram incluídos nos questionários, o que provocou uma baixa variabilidade neste conjunto de variáveis, que levou, por sua vez, a que tivessem uma baixa comunalidade, não possuindo uma variância com bom poder explicativo, apesar de teoricamente ser interessante ter-se um constructo que incluísse este conjunto de variáveis.

- Confirmou-se na análise fatorial, que os agrupamentos das variáveis em fatores foi coerente com as dimensões CIF teóricas da literatura.

- Relativamente à análise HOMALS notou-se que não é adequado considerar numa única dimensão as funcionalidades de Aprendizagem com as de Aplicação de conhecimentos, sendo que as outras dimensões são compatíveis com a opção final da CIF teórica que foi escolhida e com o constructo obtido pela AF, para além disto, os resultados fazem sentido psicometricamente, sobretudo no que diz respeito a AF convencional, tendo sido agrupadas variáveis de funcionalidades que têm relação conceptual entre si, pelo que no caso concreto se justifica a sua utilização.

- Comparativamente, as análises HOMALS e AF evidenciaram de forma semelhante, as dimensões de funcionalidade com maior variância explicada, sendo estas os Auto-cuidados e a comunicação.

- Ainda relativamente ao método HOMALS, constatou-se que não há tanta literatura sobre este método, sendo a sua interpretação mais subjetiva e Gráfica do que a AF pelo que é percetível que este método seja menos aplicado apesar de teoricamente ser o mais indicado para dados categóricos.

No que respeita aos trabalhos futuros, saliente-se que:

Na prossecução da validação da escala, será necessário a realização da análise Fatorial Confirmatória numa nova amostra, recorrendo-se para tal à Modelação com Equações Estruturais.

Em termos dos fatores ambientais e pessoais que mais afetam a funcionalidade do idoso será necessária a realização dos testes não paramétricos de diferenças de médias de *U de Mann Whitney* para verificação de diferenças estatisticamente significativas entre as dimensões do constructo e os fatores pessoais e ainda, será necessária a verificação da associação entre as diversas variáveis utilizando-se para tal o teste de correlações *ρ de Spearman* e posteriormente, a realização de uma regressão logística binária das variáveis dicotómicas "(*0= Com dificuldade*; *1=Sem dificuldade*)".

Bibliografia

[1] R. Brereton. *Chemometrics: data analysis for the laboratory and chemical plant*. Bristol, U.K., 2003.

[2] A. L. Comrey. “Factor-analytic methods of scale development in personality and clinical psycology”. Em: *Journal of Consulting and Clinical Psychology, Vol 56(5)* (Oct 1988). URL: http://dx.doi.org/10.1037/0022-006X.56.5.754.

[3] A. B. Costello e J. W. Osborne. “Best practices in exploratory factor analysis: Four recommendations for getting the most from your analysis”. Em: *Practical Assessment, Research and Evaluation, 10(7)* (2005), pp. 1–9.

[4] J. Fachel. “Análise fatorial”. Em: *USP* (1976), p. 81.

[5] A. I. Ferreira, R. I. rodrigues e P. C. Ferreira. “Career interests of students in psychology specialities degrees: psychometric evidence and correlations with the RIASEC dimensions”. Em: *International Journal for Educational and Vocational Guidance* (March 2015), p. 11.

[6] H. Fowler. “A novel application of factor analysis to examine interactions of the fossorial predators *Sirthenia striata* (Hemiptera: Reduviidae) and *Megacephala fulgida*(Coleoptera: Cicindelidae)”. Em: *Rev. Mat. Estat. 11* (1993), pp. 93–103.

[7] A. Gifi. *Nonlinear Multivariate Analisys*. USA, 1990.

[8] J. Hair, T. R. Anderson R. E. e W. C. Black. *Multivariate Data Analysis*. USA, 2005.

[9] R. A. Johnson e D. W. Wichern. “Applied multivariate statistical analysis”. Em: *Prentice-Hall, Inc.* (1988), p. 607.

[10] I. Jolliffe. *Principal Component Analysis, Second Edition*. New York, U.S.A, 2002.

[11] M. G. Kendall. *A Course in Multivariate Analysis*. London, U.K., 1957.

[12] N. F. Lavado. *Análise em Componentes Principais Não-Linear*. Lisboa, Portugal, 2004.

[13] J. Marôco. *Análise Estatística com PASW Statistics (ex-SPSS)*. Pêro Pinheiro, Sintra, Portugal, 2010.

[14] F. Marriot. "The interpretation of multiple observations". Em: *Academic Press* (1974), p. 117.

[15] A. Menezes, S. Faissol e M. Ferreira. "Análise da matriz geográfica: estruturas e inter-relações". Em: *IBGE.Tendências atuais na geografia urbano-regional: teorização e quantificação* (1978), pp. 67–109.

[16] L. Pasquali. *Instrumentos psicológicos: Manual prático de elaboração*. Brasília, Brasil, 1999.

[17] M. H. Pestana e J. N. Gageiro. *Análise de Dados para Ciências Sociais- A complementaridade do SPSS*. Portugal, 2014.

[18] M. Pestana e J. Gageiro. *Análise de dados para ciências sociais: a complementaridade do SPSS*. Lisboa, Portugal, 2008.

[19] M. A. Pett, N. R. Lackey e J. J. Sullivan. *Making Sense of Factor Analysis*. California, U.S.A., 2003.

[20] W. Queiroz. "Análise de fatores pelo método da máxima verossimilhança: aplicação no estudo da estrutura de florestas tropicais". Em: *ESALQ* (1984), p. 112.

[21] D.-G. da Saúde. *Classificação Internacional de Funcionalidade, Incapacidade e Saúde*. Lisboa, Portugal, 2004.

[22] P. Sneath e R. Sokal. *Numerical taxonomy: the principles and practice of numerical classification*. S.F., U.S.A., 1973.

[23] A. Lopes de Souza. *Análise Factorial, Uma Introdução*. Minas Gerais, Brasil, 2002.

[24] B. G. Tabachnick e L. Fidell. *Using Multivariate Statistics*. Boston, USA, 2007.

[25] M. Tavakol e R. Dennick. "Making sense of Cronbach's alpha". Em: *International Journal of Medical Education* (2011), 2:53–55.

[26] T. B. Ustün, J. Bickenbach, S. Chatterji, N. Kostanjsek e M. Schenider. "The International Classification of Functioning, Disability and Health: a new tool for understanding disability and health". Em: *Disability and rehabilitation* (2003), pp. 565–71.

2016 Gisela Matos Análise multivariada para a funcionalidade dos idosos na Região do Alentejo