



**Francisco Maria Reynolds de Souza Parreira  
do Amaral**

Licenciatura em Ciências de Engenharia Electrotécnica e de  
Computadores

**Controlo para minimização de perdas  
em canal de irrigação**

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em  
Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Orientador: Prof. Doutor Fernando José A. Vieira do Coito  
Faculdade de Ciências e Tecnologia,  
Universidade Nova de Lisboa

Júri:

Presidente: Prof. Doutora Maria Helena Fino

Arguente: Prof. Doutor Paulo José Carrilho de Sousa Gil



---

## **COPYRIGHT**

Eu, Francisco Maria Reynolds de Souza Parreira do Amaral, autor da presente tese de mestrado denominada “Controlo para minimização de perdas em canal de irrigação”, concedo à Faculdade de Ciências e Tecnologia e à Universidade Nova de Lisboa os direitos de copyright da referida dissertação.

A Faculdade de Ciências e Tecnologia e a Universidade Nova de Lisboa têm o direito, perpétuo e sem limites geográficos, de arquivar e publicar esta dissertação através de exemplares impressos reproduzidos em papel ou de forma digital, ou por qualquer outro meio conhecido ou que venha a ser inventado, e de a divulgar através de repositórios científicos e de admitir a sua cópia e distribuição com objetivos educacionais ou de investigação, não comerciais, desde que seja dado crédito ao autor e editor.



---

Ao meu avô,  
Carlos José de Mendonça Cabral Parreira do Amaral



---

# Agradecimentos

---

Acabada esta minha última etapa para a conclusão do meu curso, não poderia deixar de expressar o meu enorme agradecimento a todos aqueles que me ajudaram, apoiaram e suportaram ao longo de todo o meu percurso universitário.

Primeiramente, gostaria de expressar o meu profundo agradecimento ao meu Orientador, Professor Fernando Coito, por todo o apoio e paciência que teve comigo desde o início da elaboração de todo este trabalho.

Aos meus colegas e amigos, João Puga Leal, Pedro Jorge Mota e Manuel Mascarenhas, por todo o apoio e partilha de conhecimento que tive a oportunidade de ter durante todo o meu percurso na Faculdade de Ciências e Tecnologia. Sem eles não teria obtido o aproveitamento que tive ao longo de todo o meu curso.

A toda a minha família, responsáveis por ser a pessoa que sou. Que sempre souberam moralizar, apoiar e suportar todas as minhas decisões. Por todo o orgulho depositado em mim e por todos os incentivos e palavras acertadas que tanto me ajudaram e ajudam a fazer face a todas as situações menos boas.

Ao meu Tio Lourenço Reynolds de Souza, por toda a disponibilidade, ajuda e aconselhamento.

A Rita Azevedo Coutinho, por toda a ajuda na revisão ortográfica e de forma de todo o texto, fundamental para a conclusão da presente dissertação.

Por fim e não menos importante a Deus e Nossa Senhora, a quem tanto rezei e pedi força ao longo desta etapa.



---

# Resumo

---

A preocupação em aumentar a eficiência da utilização da água nos dias de hoje é cada vez maior. Pode-se observar que ao longo do tempo tem-se intensificado as campanhas de sensibilização para uma maior otimização no uso da água.

Um dos grandes pontos de trabalho para uma melhor otimização do uso da água reside nos diversos canais de rega presentes em todo o mundo. Não só por serem um dos principais responsáveis do desperdício deste bem tão precioso, mas também por oferecer um desafio tremendo no estudo da sua otimização.

Este trabalho surge, em linha com outros já realizados, como um meio para atingir esta tão desejada otimização da utilização da água. Por via do estabelecimento de uma rede de comunicação entre os intervenientes ativos na gestão da água em canais, as comportas, nesta dissertação foi desenvolvido uma estrutura de controlo distribuído que permitisse a negociação entre comportas vizinhas num modelo, *em Simulink*, de um canal de rega já existente - o canal experimental de Évora.

No desenvolvimento desta nova estrutura de controlo são tidas em conta todas as variáveis físicas do canal, através da modelação do comportamento do canal pelas equações de Saint-Venant.

Os resultados atingidos por esta dissertação demonstram uma real possibilidade do uso de estruturas de controlo distribuído, com negociação e coordenação entre comportas vizinhas, em canais de rega reais.

## Termos-Chave

Canal experimental de Évora, Canais de Rega, Estrutura de Controlo distribuído, controlo de nível de um canal, Equações de Saint-Venant.



---

# Abstract

---

Presently, the concern in raising the efficiency of water utilization is continually growing. One can observe that, throughout times, there has been an increase in the amount of campaigns to raise public awareness and promote rational water usage.

One of the great key points to optimize water use lies in the irrigation canals, present in the whole world – not only because they are one of the main culprits of the waste of this valuable resource, but also because they present such an enormous challenge in terms of optimizing their performance.

This paper, together with some similar ones, aims to present a way to attain this desired optimization of the utilization of water. Through establishing a communicating network between the active interveners in the management of the amount of water in the canals (the floodgates), in this dissertation, a distribution control structure was developed – it allows the negotiation between neighbor floodgates of the experimental canal of Évora (which already exists), through a model, Simulink.

In the development of this new control structure, all the physical variables of the canal were taken into account, through modeling of the performance of the canal with the Saint-Venant equations.

The results achieved in this essay demonstrate a real possibility of the usage of distribution control structures, with negotiation and coordination between neighbor floodgates, in real irrigation canals.

## Keywords

Experimental canal of Évora, irrigation canals, Distributed control Structure, Canal level control, Saint-Venant Equations.



---

# Índice

---

<b>Agradecimentos</b> .....	<b>vii</b>
<b>Resumo</b> .....	<b>ix</b>
<b>Abstract</b> .....	<b>xi</b>
<b>Índice</b> .....	<b>xiii</b>
<b>Lista de Figuras</b> .....	<b>xv</b>
<b>Lista de Tabelas</b> .....	<b>xix</b>
<b>Lista de Abreviaturas</b> .....	<b>xxi</b>
<b>1. Introdução</b> .....	<b>1</b>
1.1. Motivação .....	1
1.2. Estado da arte .....	2
1.3. Estrutura da dissertação .....	3
<b>2. Descrição do modelo</b> .....	<b>5</b>
2.1. Canal Automático .....	6
2.2. Comportas .....	6
2.3. Tomadas de Água .....	8
<b>3. Modelo Matemático</b> .....	<b>11</b>
3.1. Modelação do escoamento da Água .....	11
3.1.1. Variáveis hidráulicas do canal .....	11
3.1.2. Equações de Saint-Venant .....	12
3.1.3. Regime estacionário do canal .....	16
3.2. Modelação das comportas .....	17
3.3. Método Numérico de Resolução das Equações de Saint-Venant .....	19
<b>4. Compreensão e Estudo do Canal</b> .....	<b>23</b>
4.1. Determinação dos Pontos de Funcionamento. ....	24
4.2. Cálculo da função transferência de um troço à escolha para os diferentes sensores. ....	25
4.3. Dimensionamento de controladores PID .....	31
4.4. Escolha da estrutura de controlo .....	35
4.5. Validação da estrutura de controlo .....	43

---

<b>5.</b>	<b>Controlo Descentralizado &amp; Distribuído.....</b>	<b>49</b>
5.1.	Controlo Ótimo Descentralizado .....	49
5.1.1.	Formulação do Problema de Seguimento Linear Quadrático .....	50
5.1.2.	Solução do Problema de Seguimento Linear Quadrático.....	51
5.1.3.	Obtenção dos modelos de estado lineares .....	52
5.1.4.	Resposta a um degrau do modelo linear SISO com controlador ótimo .....	55
5.1.5.	Resposta a um degrau do modelo linear MIMO com controlador ótimo .....	56
5.2.	Controlo Ótimo Distribuído .....	59
5.2.1.	Formulação do Problema de Seguimento Linear Quadrático .....	61
5.2.2.	Solução do Problema.....	62
5.2.3.	Obtenção de um modelo de estado Simplificado .....	65
5.2.4.	Resposta ao degrau do modelo Linear.....	69
5.2.5.	Obtenção de Modelos lineares a partir do modelo do canal .....	72
5.2.6.	Resposta ao degrau do modelo Linear.....	73
5.3.	Simulação no modelo não Linear e apresentação de resultados .....	76
5.3.1.	Implementação de um Filtro de <i>Kalman</i> .....	76
5.3.2.	Integração dos controladores ótimos no simulador do modelo não linear .....	78
5.3.3.	Simulação das diferentes estruturas de controlo sob o modelo não linear em <i>Simulink</i> .....	79
<b>6.</b>	<b>Apresentação Discussão e Comparação de Resultados .....</b>	<b>83</b>
6.1.	Realização de degraus na referência .....	83
6.2.	Realização de perturbações .....	85
6.3.	Realização de quebras na comunicação entre controladores.....	87
<b>7.</b>	<b>Conclusão.....</b>	<b>89</b>
7.1.	Trabalhos Futuros.....	90
	<b>Bibliografia.....</b>	<b>91</b>
	<b>Anexos .....</b>	<b>93</b>

---

# Lista de Figuras

---

Figura 1. 1 – Consumo de água em Portugal (Fonte [2]).....	1
Figura 2.1 – Canal experimental de Évora (Fonte [9]) .....	5
Figura 2.2 – Esquema do canal automático de Évora .....	6
Figura 2.3 – Comporta do tipo “escoamento afogado” ou “escoamento de fundo” .....	7
Figura 2.4 - Comporta do tipo descarregador frontal de altura ajustável.....	7
Figura 2.5 – Saturação da abertura e fecho das comportas introduzido no modelo em <i>Simulink</i> .....	8
Figura 2.6 – Posição das tomadas de água a longo do canal .....	9
Figura 4.1 – Obtenção dos valores iniciais das comportas experimentalmente .....	24
Figura 4.2 – Medição do nível da água nos diferentes sensores aquando do degrau na posição da comporta .....	25
Figura 4.3 – Sinais de Nível dos diferentes Sensores Tratados .....	26
Figura 4.4 – Modelo escolhido .....	27
Figura 4.5 – Comparação entre os diferentes modelos estimados com o modelo real ..	27
Figura 4.6 – Discretização Trapezoidal do método de Tustin (Fonte [18]) .....	28
Figura 4.7 – Diagrama de Bode do modelo em tempo contínuo para a representação da dinâmica no sensor J2.....	28
Figura 4.8 – Comparação da resposta em frequência do modelo inicial e do modelo desprezando os polos e zeros de alta frequência no sensor J2 .....	29
Figura 4.9 – Comparação do modelo inicial e sem polos e zeros de alta frequência para o caso do modelo correspondente ao nível medido em M3 .....	30
Figura 4.10 - Comparação do modelo inicial e sem polos e zeros de alta frequência para o caso do modelo correspondente ao nível medido em J2 .....	30
Figura 4.11 - Comparação do modelo inicial e sem polos e zeros de alta frequência para o caso do modelo correspondente ao nível medido em J3 .....	30
Figura 4.12 – Resposta ao degrau do modelo J2, sem controlador PID .....	31
Figura 4.13 – Estrutura de controlo com controlador PID (Fonte [20]) .....	32
Figura 4.14 – Esquemático utilizado para teste do controlado PID para o modelo J2 ..	33
Figura 4.15 – Resposta ao degrau do modelo J2, com controlador PID tipo J2 .....	33
Figura 4.16 – Esquemático do controlador PID com ganho anti-wind-up implementado .....	34
Figura 4.17 – Comparação da acção de controlo com (b) e sem (a) efeito de anti-wind-up .....	34
Figura 4.18 – Estruturas de controlo em estudo .....	35
Figura 4.19 – Variação do set-point do nível medido no sensor M2, com o controlador PID tipo M2 a atuar sobre a comporta C2.....	36

---

Figura 4.20 - Variação do set-point do nível medido no sensor J3, com o controlador PID tipo J3 a atuar sobre a comporta C2 .....	37
Figura 4.21 - Variação do set-point do nível medido no sensor J3, com o controlador PID tipo J3 a atuar sobre a comporta C2 .....	37
Figura 4. 22 – Atraso da atuação do controlador da estrutura 2 em pormenor .....	38
Figura 4.23 – Teste à estrutura 1 com controlo multivariável .....	39
Figura 4.24 - Teste à estrutura 1 com controlo multivariável, com $K_p=0.1$ .....	40
Figura 4.25 - Teste à estrutura 2 com controlo multivariável .....	41
Figura 4.26 - Teste à estrutura 2 com controlo multivariável, com $K_p=0.1$ .....	42
Figura 4.27 - Teste à estrutura3 com controlo multivariável .....	43
Figura 4.28 – Comporta de regulação do caudal à entrada do canal .....	43
Figura 4.29 – Degraus do nível da água medido pelos sensores J2, J3 e J4 .....	44
Figura 4.30 – Análise de perturbações com o valor de $0.005\text{m}^3$ de tiragem .....	45
Figura 4.31 - Análise de perturbações com o valor de $0.01\text{m}^3$ de tiragem .....	46
Figura 4.32 – Análise da troca de posição de um controlador .....	47
Figura 5.1 – Comparação entre o modelo real e o estimado, sem offset .....	53
Figura 5.2 - Comparação entre o modelo real e o estimado, sem offset, (a) nível em J2 e (b) nível em J3 .....	54
Figura 5.3 – Resposta ao degrau do modelo linear SISO, com um horizonte de controlo de 30s .....	55
Figura 5.4 – Pormenor da capacidade de previsão do controlador ótimo com horizonte de controlo finito .....	56
Figura 5. 5 - Resposta ao degrau do modelo linear MIMO, com um horizonte de controlo de 30s .....	58
Figura 5.6 – Estrutura de Controlo Distribuído .....	60
Figura 5.7 – Esquema das dinâmicas dos dois primeiros troços .....	65
Figura 5.8 - Esquema das dinâmicas dos dois primeiros troços .....	68
Figura 5.9 – Resposta ao degrau dos modelos lineares, com um horizonte de controlo de 10 s .....	70
Figura 5.10 – Negociação e convergência da ação de controlo de C1, ao longo dos 200 s da simulação e em pormenor .....	71
Figura 5. 11 – Negociação e convergência da ação de controlo de C2, ao longo dos 200 s da simulação e em pormenor .....	72
Figura 5.12 – Resposta ao degrau dos modelos Lineares, sem offset e com horizonte de controlo de 30s .....	73
Figura 5.13 – Filtro de Kalman como observador de estado (Fonte [28]) .....	76
Figura 5.14 – Funcionamento de um bloco S-Function (Fonte [30]) .....	79
Figura 5. 15 – Resposta ao degrau da estrutura de controlo ótimo descentralizado com controladores SISO .....	81

---

Figura 5. 16 – Resposta ao degrau da estrutura de controlo ótimo descentralizado com controladores MIMO .....	82
Figura 5.17- Resposta ao degrau da estrutura de controlo ótimo distribuído .....	82
Figura 6. 1 – Resposta a diferentes degraus da estrutura de controlo ótimo distribuído .....	84
Figura 6. 2 – Resposta do modelo a perturbações na referência de 0.005 m <sup>3</sup> .....	86
Figura 6. 3 - Resposta do modelo a perturbações na referência de 0.01 m <sup>3</sup> .....	86
Figura 6. 4 – Comparação das respostas aos degraus do modelo, com e sem comunicação entre controladores .....	88



---

# Lista de Tabelas

---

Tabela 4.1 – Tabela de calculo dos ganhos dos controlador PID.....	32
Tabela 5.1 – Valores dos vetores das ações de controlo, nas iterações de negociação quando k=400 e t=40s.....	71
Tabela 5.2 – Valores dos vetores das ações de controlo, nas iterações de negociação quando k=3810 e t=381s.....	75
Tabela 5.3 – Equações de predição temporal do Filtro de Kalman .....	78
Tabela 5.4 – Equações de Correção e Atualização pela Leitura do Filtro de Kalman...	78
Tabela 5.5- Valores dos pesos das funções de custo das diferentes estruturas de controlo .....	80



---

# Lista de Abreviaturas

---

<b>INESC</b>	Instituto de Engenharia de Sistemas e Computadores;
<b>NuHCC</b>	Núcleo de Hidráulica e Controlo de Canais da Universidade de Évora;
<b>M1</b>	Sensor mais a montante do primeiro troço do canal;
<b>CE1</b>	Sensor no centro do primeiro troço do canal;
<b>J1</b>	Sensor mais a jusante do primeiro troço do canal;
<b>M2</b>	Sensor mais a montante do segundo troço do canal;
<b>CE2</b>	Sensor no centro do segundo troço do canal;
<b>J2</b>	Sensor mais a jusante do segundo troço do canal;
<b>M3</b>	Sensor mais a montante do terceiro troço do canal;
<b>CE3</b>	Sensor no centro do terceiro troço do canal;
<b>J3</b>	Sensor mais a jusante do terceiro troço do canal;
<b>M4</b>	Sensor mais a montante do quarto troço do canal;
<b>CE4</b>	Sensor no centro do quarto troço do canal;
<b>J4</b>	Sensor mais a jusante do quarto troço do canal;
<b>D1</b>	Tomada de água do primeiro troço do canal;
<b>D2</b>	Tomada de água do segundo troço do canal;
<b>D3</b>	Tomada de água do terceiro troço do canal;
<b>D4</b>	Tomada de água do quarto troço do canal;
<b>C1</b>	Comporta entre o troço 1 e 2 do canal;
<b>C2</b>	Comporta entre o troço 2 e 3 do canal;
<b>C3</b>	Comporta entre o troço 3 e 4 do canal;
<b>C4</b>	Comporta final do canal;
<b>MIMO</b>	Controlador <i>Multi Input Multi Output</i> ;
<b>SISO</b>	Controlador <i>Single Input Single Output</i> ;



---

# 1. Introdução

---

O principal objetivo desta dissertação foi o desenvolvimento e implementação de um algoritmo de controlo distribuído adequado ao Simulador em *Simulink* do canal experimental de Évora, desenvolvido pelo INESC. Este novo algoritmo de controlo foi implementado de forma a permitir a interação, negociação e coordenação entre controladores vizinhos, por forma a otimizar todo o processo de regulação da água no canal.

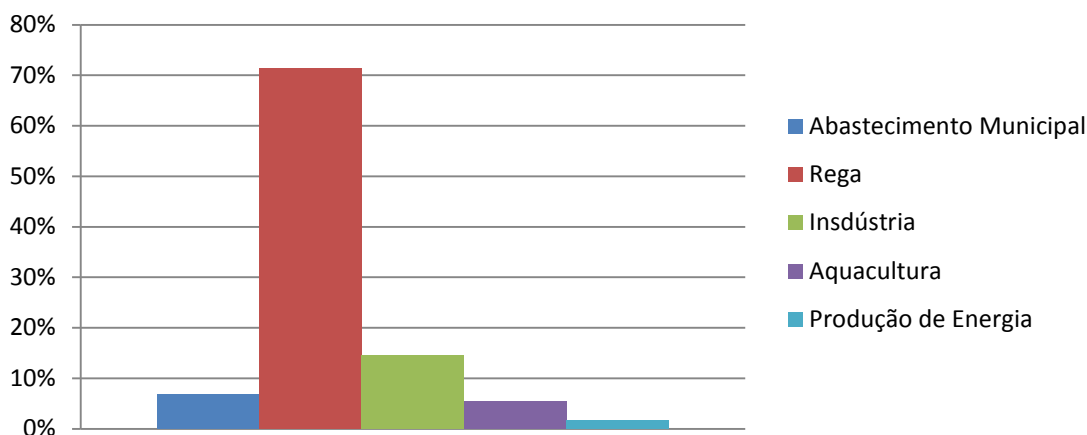
No presente capítulo descreve-se a motivação que orientou todo este trabalho um breve resumo de cada capítulo e a organização da dissertação. Além disso é apresentada uma descrição do estado atual das pesquisas sobre este tema.

## 1.1. Motivação

A água é muito provavelmente o único recurso natural que está presente em todos os aspetos da civilização humana, desde da principal razão da sua existência ate à total dependência na grande maioria das atividades diárias humanas.

Cobrindo cerca de 71% da superfície da terra, a água é também o bem liquido mais abundante na Terra [1]. No entanto se olharmos em pormenor, 97% da água existente no nosso planeta encontra-se nos oceanos, ou seja, apenas existe 3% de água doce. De uma forma ainda mais precisa, destes 3%, 2,4% encontra-se sob a forma de geleias e calotes polares e os restantes 0,6% em rios, lagos e lagoas. Por outras palavras, apenas 0,6% da água existente na Terra é acessível à civilização humana trazendo para cima da mesa um ponto de elevada importância, como usar de uma forma eficiente este bem tão precioso?

Em linha com o resto do mundo, em Portugal a atividade responsável pelo consumo de uma larga maioria da água potável é a rega, como comprova a figura 1.1. Perante isto, torna-se vital existir uma otimização na gestão, planeamento e uso da rega.



**Figura 1. 1 – Consumo de água em Portugal (Fonte [2])**

---

Em Portugal, de forma a estudar uma possível otimização do uso da água na rega, foi criado um centro de investigação na universidade de Évora especializado no estudo da desta temática, onde foi construído um modelo piloto de um canal de rega chamado NuHCC (Núcleo de Hidráulica e Controlo de Canais). Mais tarde, e para facilitar o acesso ao modelo, foi criado um modelo em *Simulink* que representa o modelo piloto do canal. Este projeto teve o nome de AQUANET e sobre este que esta dissertação assenta.

O problema de controlo abordado neste trabalho passa pelo desenvolvimento de uma estrutura que permita a existência de comunicação e cooperação entre controladores das quatro comportas do canal. Através desta comunicação e cooperação entre os controladores espera-se aumentar a eficiência da regulação da água no canal.

Este problema tem como principal desafio o controlo de um sistema que não é linear. Para juntar a este desafio, um canal conta também com uma interdependência entre as comportas e os troços, fazendo com que cada uma produza efeitos em todos os troços do canal.

A elevada complexidade do sistema, alienada à grande necessidade do uso eficiente da água nos dias de hoje, faz com que o interesse em trabalhar nesta área seja muito grande. Prova disso são a diversas pesquisas que se realizaram, estão a realizar-se e irão realizar-se sobre esta matéria.

## 1.2. Estado da arte

O Estado da Arte é uma das partes mais importantes de toda a dissertação, visto fazer referência ao que já se tem investigado e descoberto sobre o assunto pesquisado, fazendo com que não se perca tempo com investigações desnecessárias.

Além disso, ajuda na melhoria e desenvolvimento de novos pedidos, conceitos e paradigmas. Trata-se de uma atividade difícil e trabalhosa por ser crítica e reflexiva.

Sob as temáticas onde este trabalho assenta, muitas pesquisas e trabalhos foram já realizados ao longo dos tempos, devido ao seu vasto leque de possibilidades de otimização por diferentes abordagens.

Cronologicamente pode-se dizer que as primeiras abordagens a este tema passaram pelo desenvolvimento de estruturas descentralizadas com controladores PI, [3] [4]. No entanto, embora as boas performances apresentadas por estes tipos de estruturas, estas estruturas produzem efeitos não desejados nos troços a jusante das comportas controladas. Um exemplo destes efeitos é o de ampliação, que se pode tornar bastante perigoso num canal de grandes dimensões, ver ponto 4.5. Outros tipos de controladores também foram desenvolvidos, como por exemplo controladores ótimos lineares, como pode ser encontrado em [5]. No entanto, e segundo [6], na altura das pesquisas acima apresentadas, nunca foram consideradas as variáveis físicas e naturais do sistema, nem a possibilidade do sistema ser multivariável, o que torna a sua solução pouco confiável.

---

Numa fase mais atual, em [6], é apresentado o primeiro estudo com uma estrutura MPC (Model Predictive Control) aplicado ao canal de rega estudado nesta dissertação (O canal da Universidade de Évora) utilizando já um modelo matemático para modelar o comportamento do canal (ver Capítulo 3). Conclui-se que as performances de um tipo de estrutura multivariável, onde existe perda de futuras ações, são bastante mais satisfatórias quando comparados com as de uma estrutura de controladores PI monovariáveis.

Outra abordagem, e esta em linha com o trabalho desenvolvido nesta dissertação, passa pelo desenvolvimento de estruturas de controlo distribuído. Exemplos de abordagens podem ser vistas em [7] e [8]. Estas estruturas de controlo permitem aumentar a performance do canal por via da comunicação e cooperação entre controladores. Uma explicação mais pormenorizada deste conceito é dada no Capítulo 5 desta dissertação, aquando da explicação do algoritmo desenvolvido.

### 1.3. Estrutura da dissertação

Esta dissertação encontra-se organizada em 7 capítulos onde se descreve todo o trabalho realizado. Nos pontos que se seguem é apresentado um breve sumário do conteúdo de cada capítulo:

- Capítulo 1, **Introdução**, neste capítulo é feita uma introdução ao tema da dissertação, explicada a motivação e objetivos e por fim é apresentado o estado da arte;
- Capítulo 2, **Descrição do Modelo**, neste capítulo é feita uma descrição breve do modelo em estudo, o canal experimental de Évora. Primeiramente é descrito o canal como um todo e depois é dada uma explicação sobre as componentes do canal, comportas e tomadas de água;
- Capítulo 3, **Modelo Matemático**, neste capítulo é feito um estudo pormenorizado do modelo matemático que representa o comportamento do canal, considerando todos os tipos de estruturas hidráulicas envolventes, como as comportas e as tomadas de água;
- Capítulo 4, **Compreensão e Estudo do Canal**, neste capítulo é realizado um estudo do comportamento dinâmico do canal, da interação entre os diferentes troços e a forma como as respetivas comportas afetam os troços anexos. É também realizado um estudo de qual a melhor estrutura de controlo para o controlo do canal, com controladores PID.
- Capítulo 5, **Controlo Descentralizado & Distribuído**, neste capítulo é apresentado todo o desenvolvimento ao algoritmo de controlo distribuído com negociação entre controladores. É também apresentado o desenvolvimento de um algoritmo de controlo descentralizado para efeitos de comparação de resultados.

- 
- Capítulo 6, **Apresentação, Discussão e Comparação de Resultados**, neste capítulo são apresentados, discutidos e analisados os resultados obtidos num conjunto de simulações realizadas ao modelo não linear do canal, com o novo algoritmo de controlo distribuído.
  - Capítulo 7, **Conclusão**, neste último capítulo são evidenciadas as conclusões retiradas do trabalho da presente dissertação e apresentadas diversas propostas para trabalhos futuros sobre o tema desenvolvido.

---

## 2. Descrição do modelo

---

O modelo do canal em estudo é o canal experimental de Évora, também conhecido como sistema hidráulico piloto do Núcleo de Hidráulica e Controlo de Canais (NuHCC) da Universidade de Évora.

Este canal experimental é composto, resumidamente, pelos seguintes elementos:

- Posto Central
- Canal automático
- Canal tradicional
- Dois reservatórios de armazenamento

O canal automático, canal em estudo, é sempre continuado pelo canal tradicional, funcionando como canal de retorno e acabando num reservatório de armazenamento, como mostrado na figura 2.1. Desta forma, o canal tradicional garante que todo o sistema hidráulico funcione em circuito fechado.

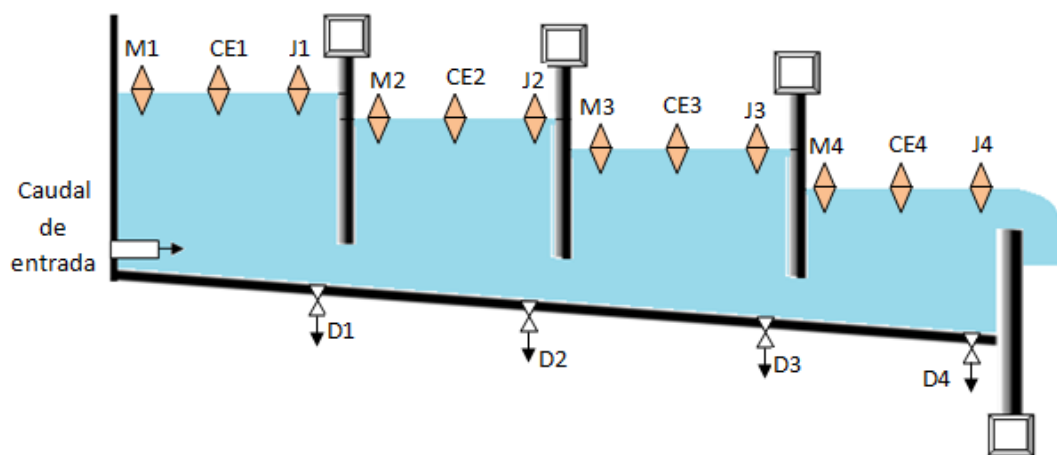


**Figura 2.1 – Canal experimental de Évora (Fonte [9])**

## 2.1. Canal Automático

O canal automático é composto por quatro troços de secção trapezoidal, tendo os três primeiros 35 metros de comprimento e o último, a jusante, 36 metros. Em cada troço de canal, a montante, a jusante e no meio, existem sensores de medida de nível, ou seja, sensores de altura. Estes sensores são compostos por uma boia e um medidor de altura da boia e estão instalados em poços de fibrocimento com 300mm de diâmetro. Os sensores permitem detetar variações de 0.7mm no nível da água.

Os diferentes troços estão separados por comportas do tipo “escoamento afogado” e o canal termina com uma comporta do tipo “descarregador frontal”.



**Figura 2.2** – Esquema do canal automático de Évora

As principais características do canal são as seguintes [10]:

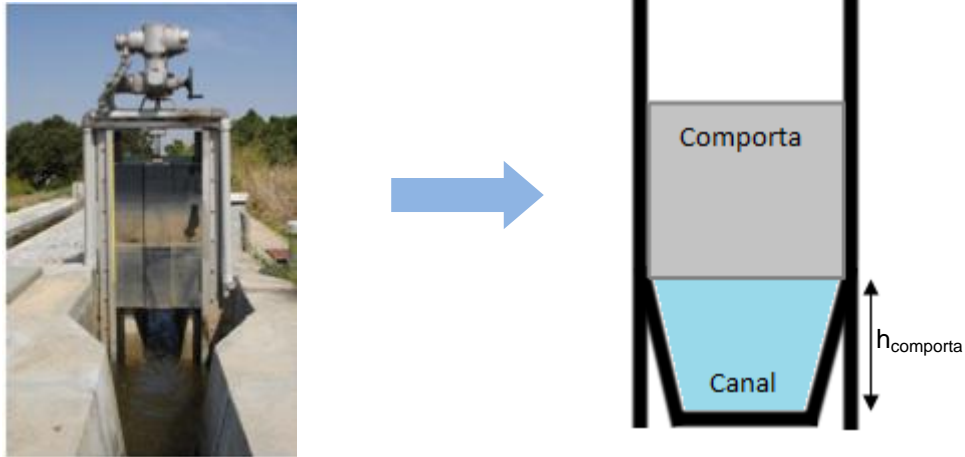
- Comprimento - 141 metros
- Secção transversal - trapézio, com 0.15 metros de base, largura de rasto B, e declive de espaldas de 1:0.15 (V:H) com uma altura de 0.90 metros.
- Declive longitudinal medio usado para cálculo -  $1.5 \times 10^{-3}$
- Caudal de projeto -  $0.09\text{m}^3\text{s}^{-1}$

## 2.2. Comportas

No final de cada um dos quatro troços do canal existe uma comporta vertical plana retangular atuada por um motor elétrico sem redutor.

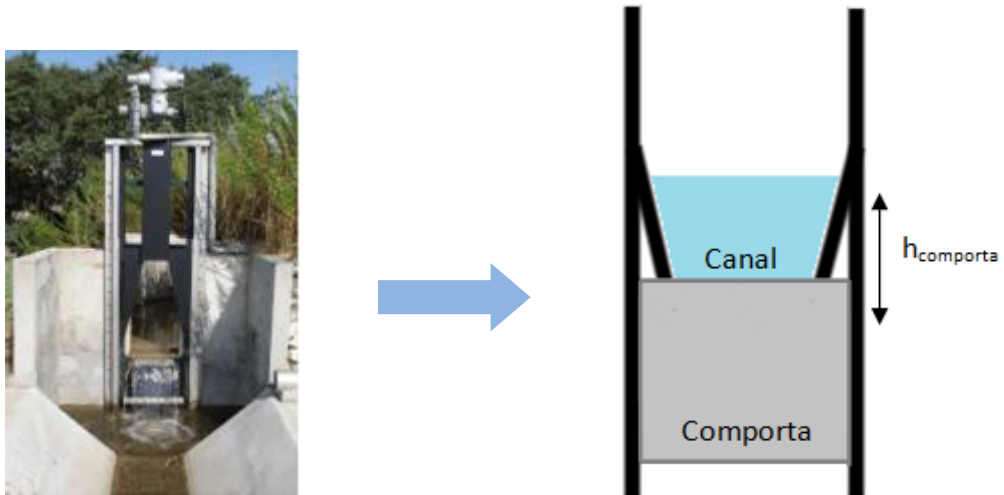
As três primeiras comportas, de escoamento afogado ou de fundo, garantem a passagem de água pelo rasto do canal (Figura 2.3). Estas são compostas por um tabuleiro

retangular com  $0.490 \times 0.900$  m de dimensão. Desta forma permitem o controlo de fluxo e altura da água nos três primeiros troços.



**Figura 2.3** – Comporta do tipo “escoamento afogado” ou “escoamento de fundo”

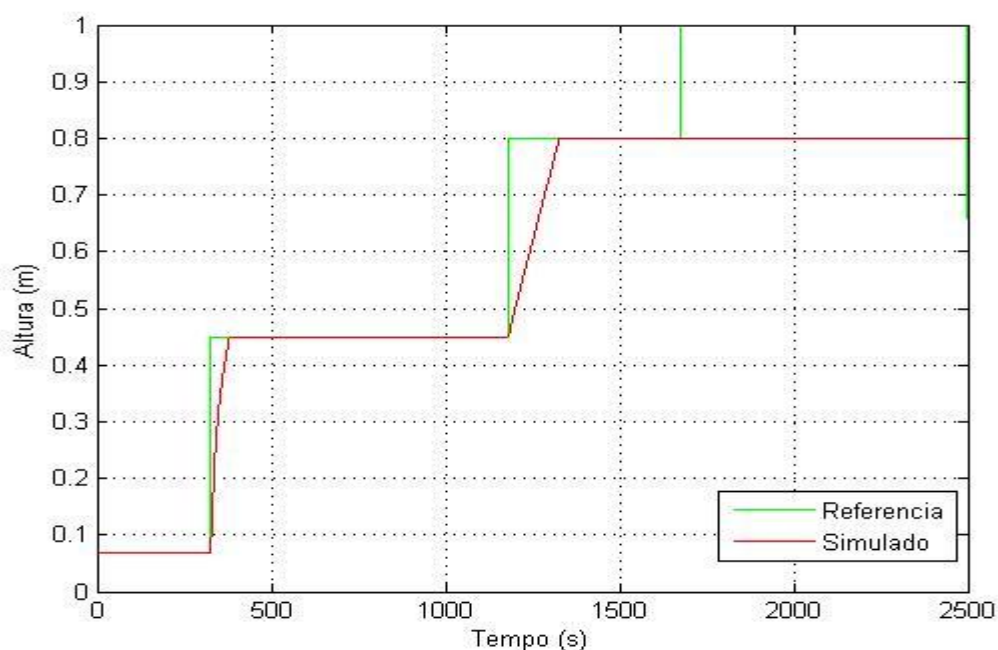
A última comporta tem o funcionamento contrário ao das outras, comportando-se como um descarregador frontal de altura ajustável (Figura 2.4). Esta permite regular o caudal em excesso para o canal de retorno, assim como controlar o nível do último troço do canal.



**Figura 2.4** - Comporta do tipo descarregador frontal de altura ajustável

Nas simulações do modelo em *Simulink*, apresentadas nos Capítulos 4 e 5 e 6, foi considerada a saturação dos atuadores no movimento das comportas, impondo-se limitações na velocidade de abertura e fecho, bem como um limite de abertura máximo da comporta de 0.8 m.

Uma vez que as engrenagens das comportas têm uma elevada relação de desmultiplicação, a saturação foi considerada como simétrica, desprezando-se todos os efeitos da influência da água e do peso da comporta. Todas as dinâmicas adicionais das comportas foram também desprezadas por serem muito mais rápidas do que o período de amostragem, assumindo-se que estas operam sempre à velocidade máxima. Para se proceder ao cálculo da velocidade das comportas, recorreu-se a uma regressão linear, chegando ao valor de  $3.8886 \times 10^{-3} \text{m.s}^{-1}$  [11].



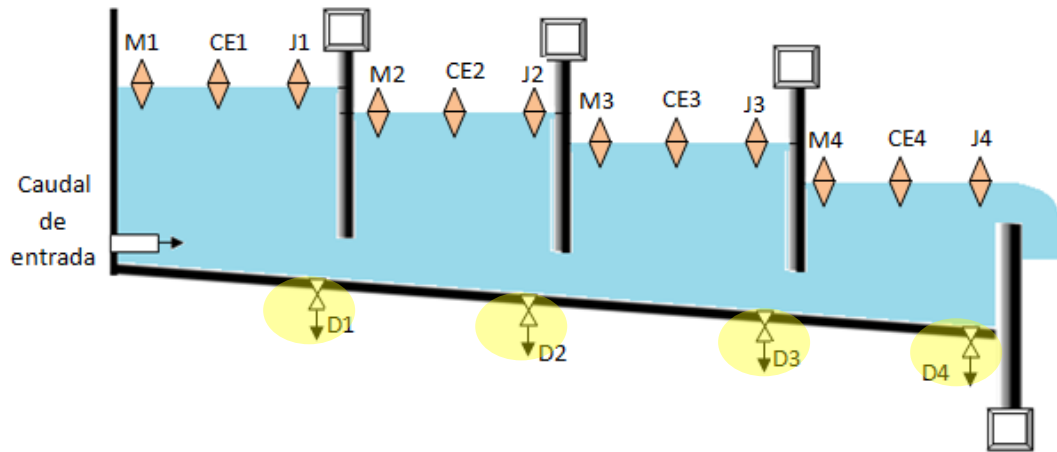
**Figura 2.5** – Saturação da abertura e fecho das comportas introduzido no modelo em *Simulink*

### 2.3. Tomadas de Água

No canal experimental existem 4 tomadas de água que estão situadas a montante de cada comporta.

Estas tomadas de água têm como principal objetivo a simulação da retirada de água para fins de rega. Desta forma a sua atuação provoca perturbações no nível da água, estabelecido pela referência no instante da sua atuação, em cada troço.

Para efeitos de simulação no modelo apresentado no Capítulo 3, as tomadas de água irão entrar como constantes a somar ou subtrair no caudal  $Q$  de cada troço do canal.



**Figura 2.6** – Posição das tomadas de água a longo do canal



---

## 3. Modelo Matemático

---

O trabalho desenvolvido é suportado por um conjunto de simulações em computador, pelo que é necessário usar um modelo matemático que represente adequadamente o comportamento do sistema em estudo. Este modelo matemático é usado para melhorar a compreensão da dinâmica do canal e sistema de comportas e, também, para avaliar as diferentes soluções de controlo analisadas.

Desta forma, neste capítulo é mostrado todo o estudo pormenorizado do modelo matemático que representa o canal acima descrito, considerando todos os tipos de estruturas hidráulicas envolventes, como as comportas e as tomadas de água. Este modelo matemático foi feito tendo por base o modelo matemático desenvolvido por J. M. Lemos, F. C. Machado, N. M. Nogueira e P. O. Shirley em [11], uma vez que o modelo em *Simulink* utilizado nesta dissertação foi desenvolvido em [11].

### 3.1. Modelação do Escoamento da Água

A modelação do escoamento da água num troço de canal pode ser feita de diversas formas uma vez que é um processo distribuído, ou seja, porque tanto o caudal como a velocidade e a altura da água são variáveis a longo do percurso do canal. O método mais utilizado, para melhor modelar sistemas deste tipo, passa pela utilização das equações de *Saint-Venant*. A sua demonstração foi elaborada, parcialmente, por Plácido e Magalhães [12] aquando do desenvolvimento de um modelo para este mesmo sistema.

Estas equações constituem um sistema de equações diferenciais às derivadas parciais de primeira ordem, não lineares e hiperbólicas que, apesar da sua elevada complexidade, garantem um elevado grau de exatidão.

#### 3.1.1. Variáveis hidráulicas do canal

Sabendo que uma secção de canal é caracterizada pela distribuição da massa de fluido, que pode ser representada pela área  $A(x,t)$  ou pelo nível do fluido  $h(x,t)$ , e pela distribuição de momentos, representados pelo caudal do fluido  $Q(x,t)$  ou pela velocidade  $V(x,t)$ , num determinado instante de tempo, figura 3.1, o primeiro passo deste estudo passou pela escolha de duas variáveis hidráulicas do canal e de seguida estabelecer uma relação entre as restantes variáveis e as variáveis escolhidas.

Assim, considerou-se como variáveis hidráulicas do canal o nível do fluido  $h(x,t)$ , para caracterizar a distribuição da massa de fluido, e o caudal  $Q(x,t)$  para caracterizar a distribuição de momentos.

---

Quanto às relações entre variáveis, a primeira foi feita entre a área de uma secção trapezoidal do troço ( $A(x, t)$ ) e o nível do fluido ( $h(x, t)$ ), obtida por:

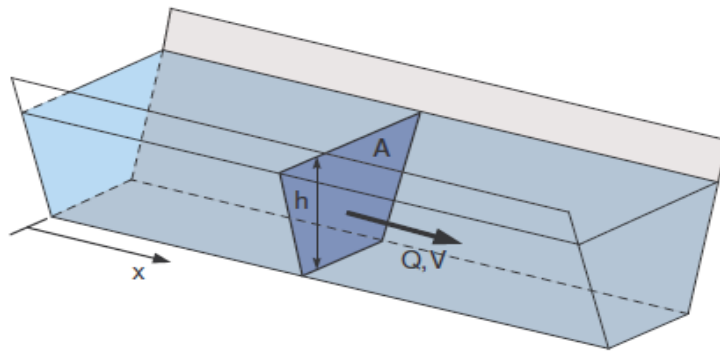
$$A(x, t) = h(x, t) \times (B + h(x, t) \times S_l) \quad (3.1)$$

Em que:

- $B$  : Comprimento da base inferior da secção trapezoidal;
- $S_l$  : Declive das espaldas da secção trapezoidal.

A segunda foi feita entre o caudal do fluido  $Q(x, t)$  e da velocidade  $V(x, t)$ . Admitindo que, numa secção, o escoamento pode ser caracterizado por uma velocidade média  $V(x, t)$ , o caudal  $Q(x, t)$  que atravessa uma dada secção transversal corresponde ao fluxo do vetor velocidade dessa superfície, podendo-se relacionar da seguinte forma:

$$Q(x, t) = V(x, t) \cdot A(x, t) \quad (3.2)$$



**Figura 3.1** – Representação das Variáveis Hidráulicas e da secção de um troço do canal (Fonte [11])

### 3.1.2. Equações de Saint-Venant

As equações de *Saint-Venant*, são obtidas através dos princípios da conservação da massa e conservação do momento aplicados a um volume de fluido, tendo em conta as seguintes restrições:

- A distribuição das pressões é hidrostática;
- O escoamento é unidimensional;
- Infinitésimos de ordem superior à primeira podem ser desprezados
- O declive longitudinal suficientemente reduzido para se poder fazer a aproximação  $\sin(A) \approx A$ ;
- A massa específica ( $\rho$ ) da água constante;

- 
- Existência de um campo de pressões hidrostático nas secções transversais.

Este método é descrito por duas equações, a equação da continuidade e da conservação da quantidade de movimento.

### Equação da continuidade

A equação da continuidade para fluidos homogêneos, como a água, pode ser demonstrada através das leis da conservação da massa num espaço infinitesimal ( $\Delta x$ ) entre duas secções do canal [13].

Considerando um caudal variável, com um caudal de entrada, na secção, a variar com a distância da forma  $\frac{\partial Q}{\partial x}$ , e a área da secção,  $A$ , da água a variar com o tempo da forma  $\frac{\partial A}{\partial t}$ , pode-se escrever a variação do caudal no espaço em relação ao tempo,  $\Delta t$ , da seguinte forma:

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) \cdot \Delta x \cdot \Delta t \quad (3.3)$$

E a variação da área da secção ( $\partial A$ ) em função do espaço igual a:

$$\left(\frac{\partial A}{\partial t}\right) \cdot \Delta x \cdot \Delta t \quad (3.4)$$

Considerando que o volume de água que entra numa dada secção do troço do canal é igual ao volume que sai, a equação da continuidade é definida pela seguinte equação:

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) \cdot \Delta x \cdot \Delta t + \left(\frac{\partial A}{\partial t}\right) \cdot \Delta x \cdot \Delta t = 0 \quad (3.5)$$

Simplificando,

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial A}{\partial t}\right) = 0 \quad (3.6)$$

### Equação da conservação da quantidade de movimento

A equação da conservação da quantidade de movimento pode ser deduzida a partir da segunda lei de Newton.

A segunda lei de Newton enuncia que quando a força resultante do conjunto das forças que atuam numa massa de fluido não for nula, produz uma aceleração com a mesma direcção e sentido da força:

$$\vec{F} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = \frac{\partial(m \times \vec{v})}{\partial t} \quad (3.7)$$

Onde:

- $\vec{F}$  : Vector da soma das forças a actuar na massa de fluido;
- $\vec{P}$  : Vector da quantidade de movimento;
- $m$  : Massa do fluido (Kg);
- $\vec{v}$  : Vector da velocidade do fluido.

Transcrevendo a segunda lei de Newton na forma do teorema de transporte de Reynolds [17] temos:

$$\sum \vec{F} = \frac{d}{dt} \iiint_{c.v.} \rho \vec{v} dV + \iint_{c.s} \rho \vec{v} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA \quad (3.8)$$

Esta equação mostra que o somatório de todas as forças aplicadas na massa de fluido contido dentro do volume em estudo é igual à variação da quantidade de movimento no interior desse volume mais a quantidade de movimento que sai desse volume.

No caso em estudo, existem três forças que actuam sobre a massa de fluido do volume em estudo:

- $F_g$  : Força gravítica ao longo do troço do canal devido ao peso da água;
- $F_r$  : Força resultante do somatório de todas as forças de resistência presentes no troço de canal em estudo;
- $F_p$  : Forças de pressão.

A força gravítica ao longo do troço do canal devido ao peso da água é determinada a partir do produto do seno do declive longitudinal  $S_0$ , ângulo que o fundo do canal faz com a linha horizontal, com peso do volúmico e com o volume do peso:

$$F_g = \rho \cdot g \cdot A \cdot \Delta x \cdot \text{sen}(S_0) \approx \rho \cdot g \cdot A \cdot \Delta x \cdot S_0 \quad (3.9)$$

De notar que como o ângulo " $S_0$ " é muito reduzido pode ser feita a aproximação  $\text{sen}(S_0) = S_0$ .

A força resultante do somatório de todas as forças de resistência presentes no troço de canal em estudo resume-se à força de atrito provocada pelas paredes e fundo do canal ao longo do troço. Esta força pode ser obtida através da seguinte fórmula:

$$F_r = \rho \cdot g \cdot A \cdot \Delta x \cdot S_f \quad (3.10)$$

---

Em que:

- $\rho \cdot g$  : Peso volúmico [N/m<sup>3</sup>];
- $A$  : Área (m<sup>2</sup>);
- $\Delta x$  : Troço do canal (m);
- $S_f$  : Perda de carga hidráulica unitária por unidade de peso deslocado por unidade de comprimento do canal ou declive de fricção.

O declive de fricção  $S_f$  é modelado através da formula de *Manning-Strickler*, como comprovado por *Ven Te Chow* em [13]:

$$S_f = \frac{Q \cdot |Q| \cdot n^2}{A^2 \cdot R^{4/3}} \quad (3.11)$$

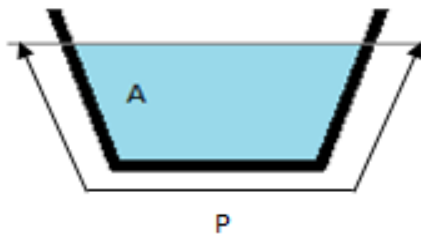
Onde:

- $R$  : Raio hidráulico [m];
- $n$  : Coeficiente de *Manning* [m<sup>-1/3</sup>s]

O coeficiente de *Manning* é uma característica do material usado na fronteira entre o fluido e canal e é calculado com recurso a tabelas.

Por sua vez o Raio hidráulico,  $R$ , é obtido a partir do comprimento da curva que separa o fluido da estrutura do canal (perímetro hidráulico),  $P$ , e a área da secção  $A$ , através da seguinte relação:

$$R = \frac{A}{P} \quad (3.12)$$



**Figura 3.2** - Perímetro hidráulico numa secção

Por ultimo a força resultante das forças de pressão,  $F_p$ , é obtida pela seguinte equação [9]:

$$F_p = \rho \cdot g \cdot A \cdot \frac{\partial h}{\partial x} \cdot \Delta x \quad (3.13)$$

O somatório das três forças que actuam sobre a massa do fluido é dado por:

$$\sum \vec{F} = F_g - F_r + F_p = \rho \cdot A \cdot \Delta x \left[ g \cdot (S_0 - S_f) + g \cdot \frac{\partial h}{\partial x} \right] \quad (3.14)$$

Voltando à equação (3.8) e considerando que não existem variações nas dimensões perpendiculares ao eixo dos x, a equação pode ser rescrita da seguinte forma:

$$\Sigma \vec{F} = \rho \cdot A \cdot \Delta x \cdot \left( v \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \rho \cdot A \cdot \Delta x \cdot \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right) = \rho \cdot A \cdot \Delta x \cdot \left( v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial t} \right) \quad (3.15)$$

Utilizado a equação (3.14) e substituindo na equação (3.15), sabendo que  $Q = A \cdot v$ , obtém-se a equação da conservação da quantidade de movimento:

$$\begin{aligned} \rho \cdot A \cdot \Delta x \left[ g \cdot (S_0 - S_f) + g \cdot \frac{\partial h}{\partial x} \right] &= \rho \cdot A \cdot \Delta x \cdot \left( v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial t} \right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q^2}{A} \right) + g \cdot A \cdot \frac{\partial h}{\partial x} + g \cdot A \cdot (S_f - S_0) &= 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

Em que:

- $\frac{\partial Q}{\partial t}$  : Descreve a variação da quantidade de movimento devida à variação da velocidade em ordem ao tempo;
- $\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q^2}{A} \right)$  : Descreve a variação da quantidade de movimento devida a uma mudança de velocidade do escoamento ao longo do canal;
- $g \cdot A \cdot \frac{\partial h}{\partial x}$  : Representa a diferença das resultantes das pressões hidrostáticas actuantes na fronteira do volume de controlo e é proporcional à variação do escoamento ao longo do canal;
- $g \cdot A \cdot (S_0 - S_f)$  : Representa a acção da gravidade, proporcional ao declive do fundo do canal, e a acção do atrito com o fundo e margens do canal.

### 3.1.3. Regime estacionário do canal

O regime estacionário do canal é definido pelas seguintes equações [11]:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial h(x)}{\partial x} = \frac{S_0 - S_f(x)}{1 - F_r^2(x)} \quad (3.18)$$

Em que,  $F_r^2$  é o número de *Froude*, obtido a partir da seguinte equação:

$$F_r^2 = \frac{Q^2}{g \cdot A^3} \cdot \frac{\partial A}{\partial h} \quad (3.19)$$

---

Por ultimo, e já considerando um caso particular do regime estacionário, quando o nível do fluido ao longo do troço do canal é uniforme, o membro esquerdo da equação (3.18) é nulo, obtendo-se a equação do regime uniforme:

$$S_f(x) = S_0 \quad (3.20)$$

## 3.2. Modelação das comportas

Como já referido no ponto 2.2, no canal experimental de Évora existem dois tipos de comportas, as comportas de escoamento afogado e descarga de superfície.

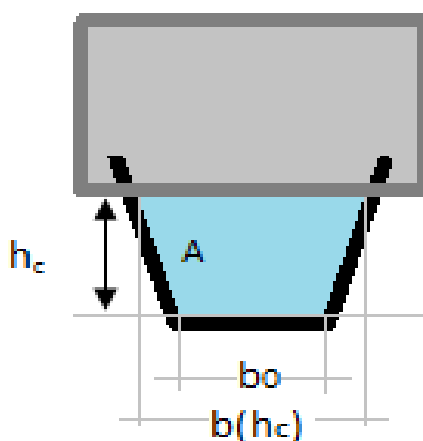
As comportas comportam-se como o agente atuador de regulação do nível do fluido em cada troço do canal. Através da variação da altura de cada uma das comportas, o nível do fluido em cada troço do canal é alterado consoante as necessidades de um certo instante.

No caso das comportas de escoamento afogado, o caudal de fluido que atravessa pela abertura da comporta é dado pela seguinte equação [14]:

$$Q = C_v \cdot A \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot (h_m - h_j)} \quad (3.21)$$

Onde:

- $C_v$  : Coeficiente de vazão da comporta;
- $A$  : Área de abertura da comporta ( $m^2$ );
- $g$  : Aceleração da gravidade ( $m/s^2$ );
- $h_m$  : Nível do fluido a montante da comporta (m);
- $h_j$  : Nível do fluido a jusante da comporta (m).



**Figura 3.3** – Representação do corte de perfil da comporta do tipo de escoamento afogado

---

Em que a área de abertura da comporta,  $A$ , é dada por:

$$A = \frac{(b_0 + b(h_c)) \cdot h_c}{2} \quad (3.22)$$

Com,

$$b(h_c) = b_0 + S_l \cdot h_c \quad (3.23)$$

Substituindo a equação (3.23) na equação (3.22) obtêm-se a equação final da área de abertura da comporta:

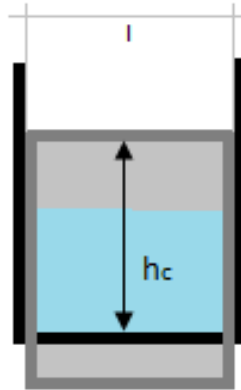
$$A = h_c \cdot (b_0 + S_l \cdot h_c) \quad (3.24)$$

Por outro lado, o caudal de fluido que atravessa a abertura da comporta do tipo de descarga de superfície é dado pela seguinte equação [14]:

$$Q = C_v \cdot l \cdot \sqrt{2 \cdot g} \cdot (h_m - h_c)^{\frac{3}{2}} \quad (3.25)$$

Onde:

- $C_v$  : Coeficiente de vazão da comporta;
- $l$  : Largura da comporta (m);
- $g$  : Aceleração da gravidade ( $m/s^2$ );
- $h_m$  : Nível do fluido a montante da comporta (m);
- $h_c$  : Nível da comporta (m).



**Figura 3.4** – Representação do corte de perfil da comporta do tipo de descarga de superfície

De referir que o valor do coeficiente de descarga,  $C_v$ , é estimado experimentalmente, mas no caso desta dissertação foi considerado o valor obtido no Relatório Técnico nº 35/2010 do INESC-ID [11], devido ao facto da base do modelo experimental usado ser a mesma.

### 3.3. Método Numérico de Resolução das Equações de Saint-Venant

Para resolver as equações de Saint-Venant utilizou-se o método da colocação ortogonal. Este método consiste na discretização espacial das variáveis em  $n$  pontos de colocação  $x_i$ , com  $i = 0, \dots, n - 1$ , aproximando as curvas de domínio espacial contínuo através de interpolação [11]. Considerando que  $N_j(x)$ , com  $j = 0, \dots, n - 1$ , um conjunto de  $n$  funções de base linearmente independentes, as aproximações para o nível da água e para o caudal podem-se escrever da seguinte forma [15]:

$$Q(x, t) = \sum_{j=0}^{n-1} Q_j(t)N_j(x) \quad (3.26)$$

$$H(x, t) = \sum_{j=0}^{n-1} H_j(t)N_j(x) \quad (3.27)$$

Para os pontos de colocação optou-se pela utilização das raízes de polinómios de Legendre (Para estar em concordância com [11]), que são definidos recursivamente, para o intervalo  $]-1,1[$ , por:

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 \\ P_1(x) &= x \\ &\vdots \\ P_n(x) &= \frac{(2n-1)xP_{n-1}(x)}{n} - \frac{(n-1)P_{n-2}(x)}{n} \end{aligned} \quad (3.28)$$

E como funções de base as funções de interpolação de Lagrange [16], dadas por:

$$N_j(x) = \prod_{i=0, i \neq j}^{n-1} \frac{x-x_i}{x_j-x_i} \quad (5.29)$$

Onde está presente a seguinte propriedade:

$$N_j(x_i) = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

que leva a que os valores das soluções aproximadas coincidam com os valores físicos das variáveis nos pontos de colocação:

$$Q(x_i, t) = Q_i(t) \quad (3.30)$$

$$H(x_i, t) = H_i(t) \quad (3.31)$$

Desta propriedade também resulta, nos pontos de colocação, as aproximações para as restantes variáveis das equações de Saint-Venant:

$$\begin{aligned}
A_i(t) &= A(x_i, t) = f_1(H_i(t)) \\
S_{fi}(t) &= S_f(x_i, t) = f_2(H_i(t), Q_i(t)) \\
l_i(t) &= l(x_i, t) = f_3(H_i(t)) \\
V_i(t) &= V(x_i, t) = f_4(H_i(t), Q_i(t))
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Onde:

- $A(x_i, t)$  : Secção submersa;
- $S_f(x_i, t)$  : Declive devido à fricção;
- $l(x_i, t)$  : Largura da superfície da água;
- $V(x_i, t)$  : Velocidade de escoamento.

De referir que estas variáveis não apresentam uma decomposição simples como as variáveis de nível da água e de caudal, (3.27) e (3.26), devido a tratarem-se de variáveis com funções não lineares em relação ao nível e ao caudal.

Voltando a pegar nas equações (3.26) e (3.27) e substituindo nas equações de Saint-Venant, (3.6) e (3.16), obteve-se dois resíduos dados por:

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial A}{\partial t}\right) = R_1(x, \bar{h}, \bar{Q}) \tag{3.33}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A}\right) + g \cdot A \cdot \frac{\partial h}{\partial x} + g \cdot A \cdot (S_f - S_0) = R_2(x, \bar{h}, \bar{Q}) \tag{3.34}$$

Em que:

- $\bar{h}$  e  $\bar{Q}$ : São os vectores de coordenadas,  $H_j(t)$  e  $Q_j(t)$ , que representam as aproximações para o nível da água  $H(x, t)$  e para o caudal  $Q(x, t)$ .

Considerando  $n$  pontos de colocação  $x_i$ , dois dos quais nas extremidades do canal, as coordenadas são determinadas como solução das seguintes equações não lineares:

$$R_1(x, \bar{h}, \bar{Q}) = 0 \tag{3.35}$$

$$R_2(x, \bar{h}, \bar{Q}) = 0 \tag{3.36}$$

que, através de manipulação algébrica, as equações acima indicadas são equivalentes às seguintes equações diferenciais ordinárias[11]:

$$\frac{dh_i}{dt} = -\frac{1}{l_i} \sum_{j=0}^{n-1} Q_j N'_j(x_i) \tag{3.37}$$

$$\frac{dQ_i}{dt} = -\frac{2Q_i}{A_i} \sum_{j=0}^{n-1} Q_j N'_j(x_i) + \frac{Q_i^2}{A_i^2} l_i \sum_{j=0}^{n-1} h_j N'_j(x_i) - g A_i \sum_{j=0}^{n-1} h_j N'_j(x_i) + g A_i (S_0 - S_f) \tag{3.38}$$

---

De referir que como esta fase do projecto é baseado na referência [11], toda a dedução destas equações está presente nesta mesma referência. Desta forma, optou-se por não a apresentar nesta dissertação.



---

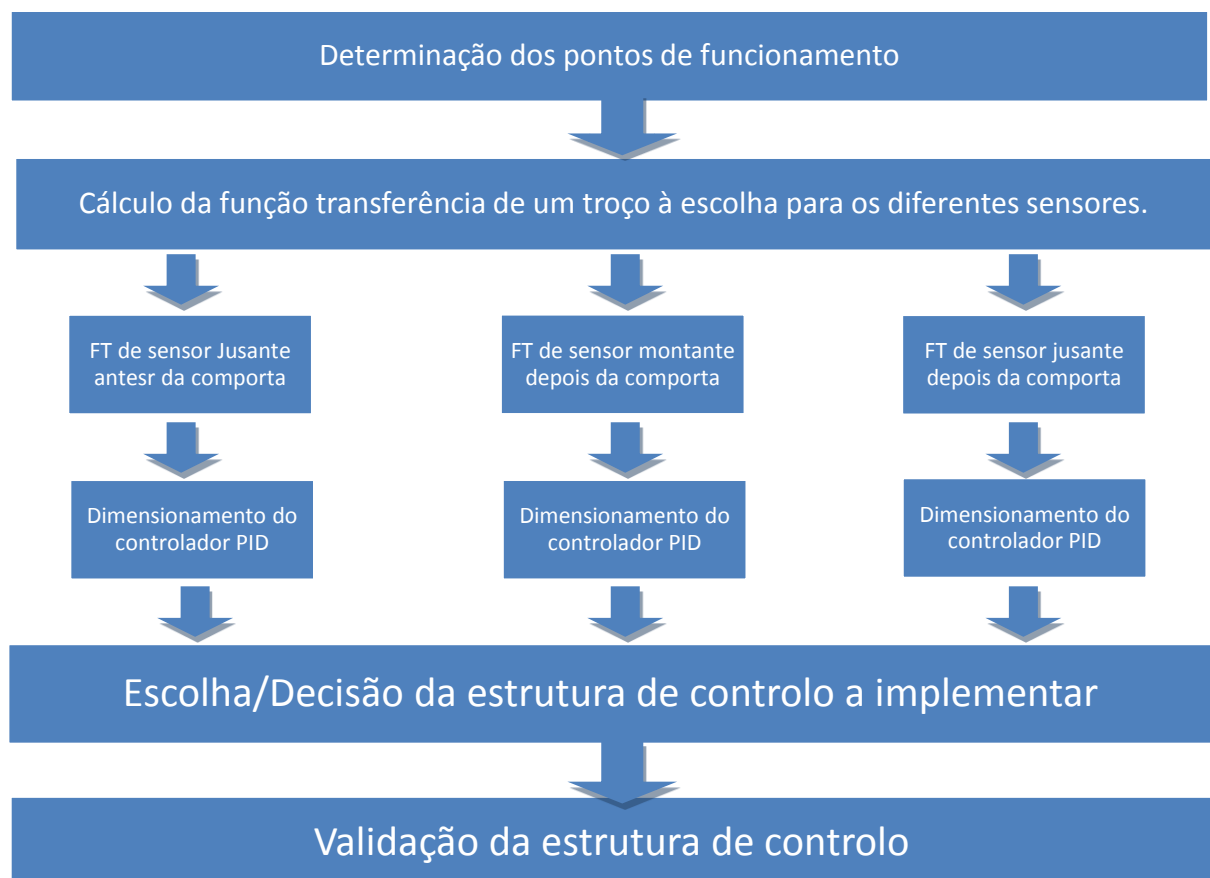
## 4. Compreensão e Estudo do Canal

---

Por forma a perceber-se o funcionamento do modelo do canal experimental de Évora, implementado em *Simulink*, foi modelado e controlado um troço de canal, entre duas comportas para depois generalizar o controlador de um troço para uma estrutura de controlo para o canal. O principal objetivo de prendeu-se com uma melhor ambientação ao modelo do canal, assim como para obter a perceção do seu comportamento dinâmico.

Para atingir tal objetivo foi necessário estabelecer cinco pontos de desenvolvimento:

- Obtenção dos valores iniciais das alturas das comportas para o estudo do comportamento dos diversos troços do canal.
- Cálculo da função transferência de um troço à escolha para os diferentes sensores.
- Dimensionamento de controladores PID.
- Escolha da estrutura de controlo.
- Validação da estrutura de controlo.

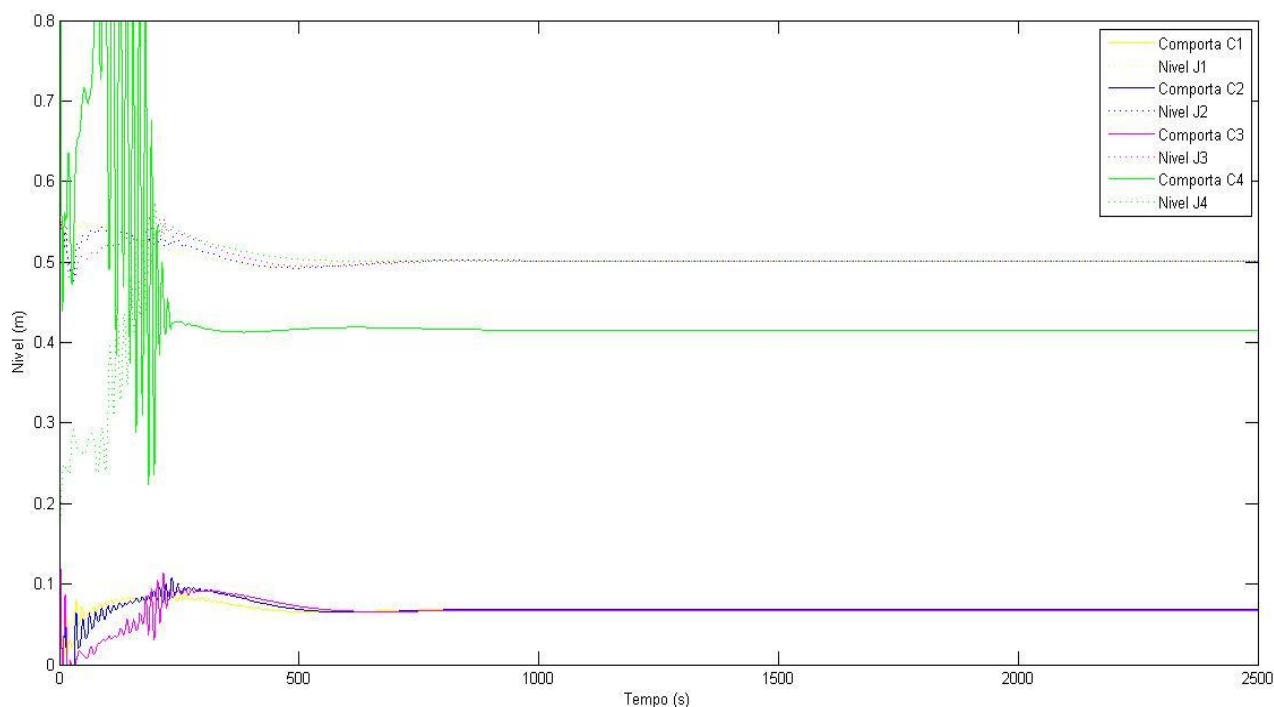


## 4.1. Determinação dos Pontos de Funcionamento.

Ao longo do trabalho, tanto para a realização de ensaios, análise do comportamento ou determinação de modelos lineares, é necessário que o processo parta de condições de funcionamento correspondentes a regime estacionário. Nesta secção procede-se à obtenção dos valores iniciais das alturas das comportas para o estudo do comportamento dos diversos troços do canal. Estes valores iniciais das alturas das comportas do modelo do canal em *Simulink* foram obtidos através de uma simulação.

Desta forma, estes valores foram obtidos através da simulação apresentada na figura 4.1, onde, para a realização da mesma, foram utilizados os controladores PID e os set-points iniciais das comportas (0.5012 m) utilizados em [11]. Os valores das alturas das comportas iniciais estão indicados abaixo.

- Comporta C1 : 0.0685 m
- Comporta C2 : 0.0685 m
- Comporta C3 : 0.0667 m
- Comporta C4 : 0.4263 m



**Figura 4.1** – Obtenção dos valores iniciais das comportas experimentalmente

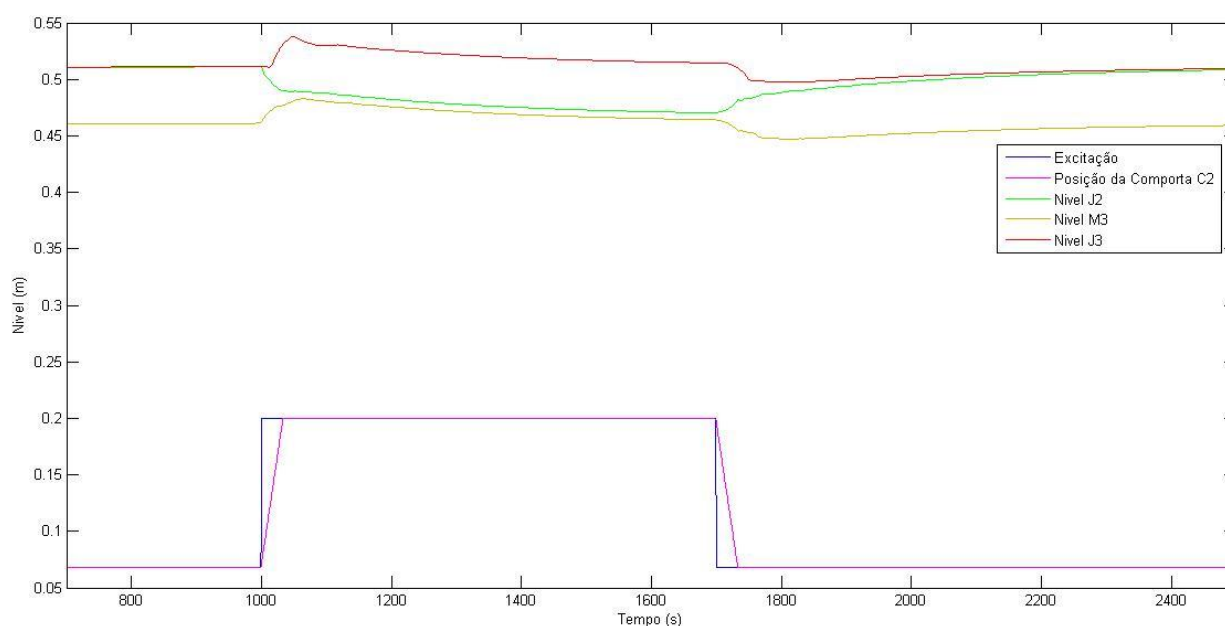
De notar que os valores de altura iniciais das comportas C1, C2 e C3 diferenciam bastante do valor de altura inicial da comporta C4. Esta diferença explica-se devido à comporta C4 ser do tipo descarga de superfície enquanto as comportas C1, C2 e C3, são do tipo escoamento afogado.

## 4.2. Cálculo da função transferência de um troço à escolha para os diferentes sensores.

A dinâmica de um troço do canal é caracterizada através de funções transferência associadas a cada um dos níveis da água que são medidos nesse troço. De forma a calcular as funções transferência decidiu-se atuar sobre a comporta C2 e utilizar os sensores de nível J2, M3 e J3, estando os sensores J2 e M3 localizados junto da comporta atuada e J3 a cerca de 30 metros.

A determinação das funções transferência, que relacionam o comando da comporta com os níveis medidos por cada sensor, foi realizada a partir de dados experimentais. Para isso é aplicado um degrau na posição da comporta registando-se a evolução do nível medido em cada sensor.

Desta forma foi aplicado um degrau na posição da comporta do segundo 1000 ate ao segundo 1700 e registou-se a evolução do nível medido nos sensores, num intervalo temporal de 2500 segundos, como é mostrado na figura 4.2.



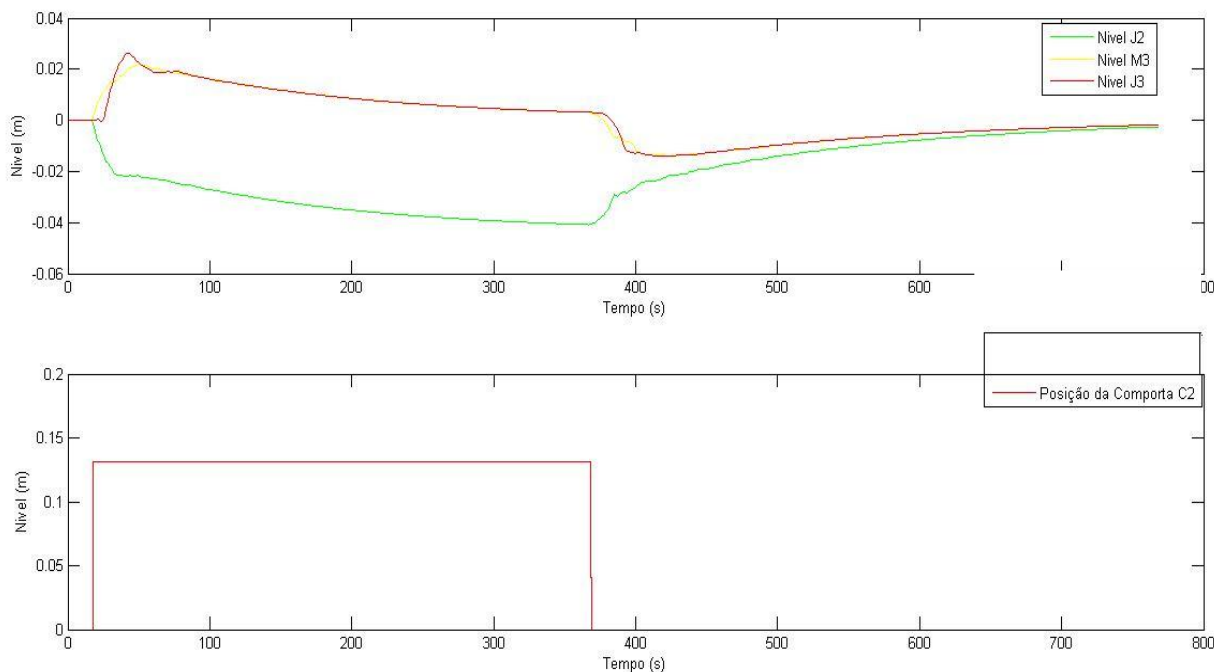
**Figura 4.2** – Medição do nível da água nos diferentes sensores aquando o degrau na posição da comporta

Ao analisar a figura 4.2 pode-se constatar que a medição do nível J2, ao segundo 1000 desce, é diferente das medições de nível em M3 e J3. Isto acontece porque o sensor J2 está localizado atrás da comporta atuada, ao contrário dos outros dois sensores.

De seguida foi realizada uma decimação dos dados para os ajustar a uma frequência de 0.5 Hz, devido à necessidade de obter uma boa representação dos sinais, bem como para

evitar casos de sobreamostragem. Por último foi removido o offset de cada um dos sinais de forma a poder-se obter modelos lineares.

A figura 4.3 apresenta os sinais de cada um dos níveis dos sensores depois do tratamento acima descrito.



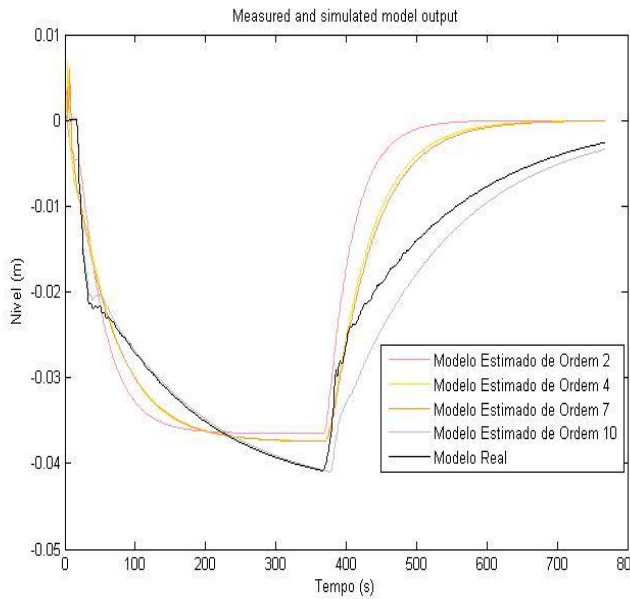
**Figura 4.3 – Sinais de Nível dos diferentes Sensores Tratados**

O procedimento para a determinação da função transferência é semelhante nos 3 casos, pelo que apenas se apresenta o calculo da função transferência do nível J2. Este processo é dividido pelos seguintes pontos:

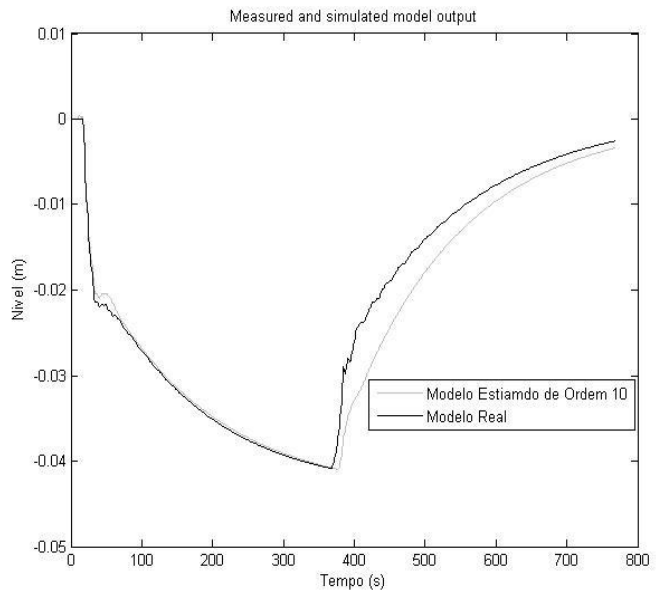
- Obtenção dos polinómios  $A(q^{-1})$  e  $B(q^{-1})$ , equação (4.1), a partir do nível medido pelo sensor, figura 4.3, utilizando a ferramenta *ident* do Matlab;
- Conversão do modelo obtido em tempo discreto para tempo contínuo;
- Comparação das respostas em frequência e obtenção das funções transferência finais.

Introduzindo os valores do nível da água do sensor J2 e a variação de posição da comporta C2, como os valores de saída e entrada, respetivamente, do modelo que se quer obter, na ferramenta *ident*, disponível na toolbox de identificação do *Matlab*, obteve-se vários modelos lineares caracterizados com polinómios  $A(q^{-1})$  e  $B(q^{-1})$ , de diferentes ordens, tendo-se procedido à escolha do mais adequado quando comparado com o real. Esta comparação e

escolha estão apresentadas nas figuras 4.4 e 4.5 e foi feita tendo em conta a obtenção da melhor relação complexidade dos polinómios e aproximação do modelo real.



**Figura 4.5** – Comparação entre os diferentes modelos estimados com o modelo real



**Figura 4.4** – Modelo escolhido

O modelo escolhido, apresentado na figura 4.4, é um modelo de ordem 10 representado pelos seguintes polinómios:

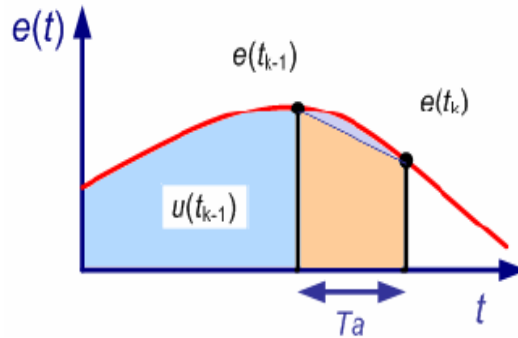
$$A(q^{-1}) = 1 - 1.904q^{-1} + 1.224q^{-2} - 0.4468q^{-3} + 0.03898q^{-4} - 0.005q^{-5} + 0.058q^{-6} + 0.1255q^{-7} - 0.07435q^{-8} + 0.2317q^{-9} - 0.1945q^{-10}$$

$$B(q^{-1}) = q^{-10}(-0.00184 + 0.0007q^{-1} + 0.0004q^{-2} - 0.00051q^{-3} - 0.0006q^{-4} - 0.00013q^{-5} + 0.00045q^{-6} + 0.0032q^{-7} - 0.000771q^{-8} - 0.0012q^{-9})$$

Assim, a função transferência em tempo discreto pode ser escrita da seguinte forma:

$$y(k) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u(k) + \frac{1}{A(q^{-1})}e(k) \quad (4.1)$$

De seguida optou-se por converter a função transferência dada por (4.1) em tempo contínuo, usando o método de Tustin, para verificar a estabilidade. Este método corresponde à discretização trapezoidal do sinal da função transferência, definido pelo tempo de amostragem ( $T_a$ ), [18], como apresentado na figura 4.6 e segundo a equação (4.2).



**Figura 4.6 – Discretização Trapezoidal do método de Tustin (Fonte [18])**

$$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{1}{s} \Leftrightarrow C(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{T_a z + 1}{2 z - 1} \quad (4.2)$$

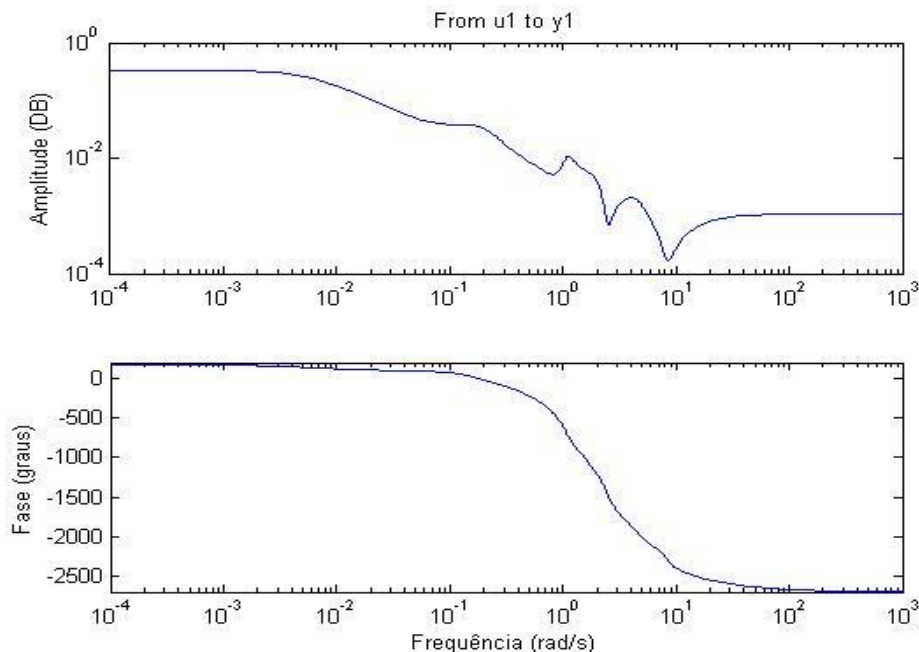
Onde:

- $C(s)$  é uma função transferência em tempo contínuo;
- $C(z)$  é a conversão de  $C(s)$  para tempo discreto;

Neste ponto e dada a elevada complexidade das funções transferências, recorreu-se ao programa Matlab para realizar as conversões de tempo discreto para tempo contínuo.

Respeitando a opção enunciada a cima obteve-se função transferência em tempo contínuo apresentada abaixo com a sua resposta em frequência representada na figura 4.7, com um ganho negativo associado, para uma mais fácil compreensão da dinâmica e para uma melhor comparação com os restantes modelos.

$$F(s) = \frac{0.0011s^{10} + 0.0012s^9 + 0.015s^8 + 0.045s^7 - 0.046s^6 + 0.094s^5 - 0.11s^4 + 0.0197s^3 - 0.017s^2 - 0.003s + 0.0001}{s^{10} + 9.8s^9 + 24.3s^8 + 62.9s^7 + 54.75s^6 + 66.28s^5 + 21.84s^4 + 13.88s^3 + 1.24s^2 + 0.106s + 0.0003}$$



**Figura 4.7 – Diagrama de Bode do modelo em tempo contínuo para a representação da dinâmica no sensor J2**

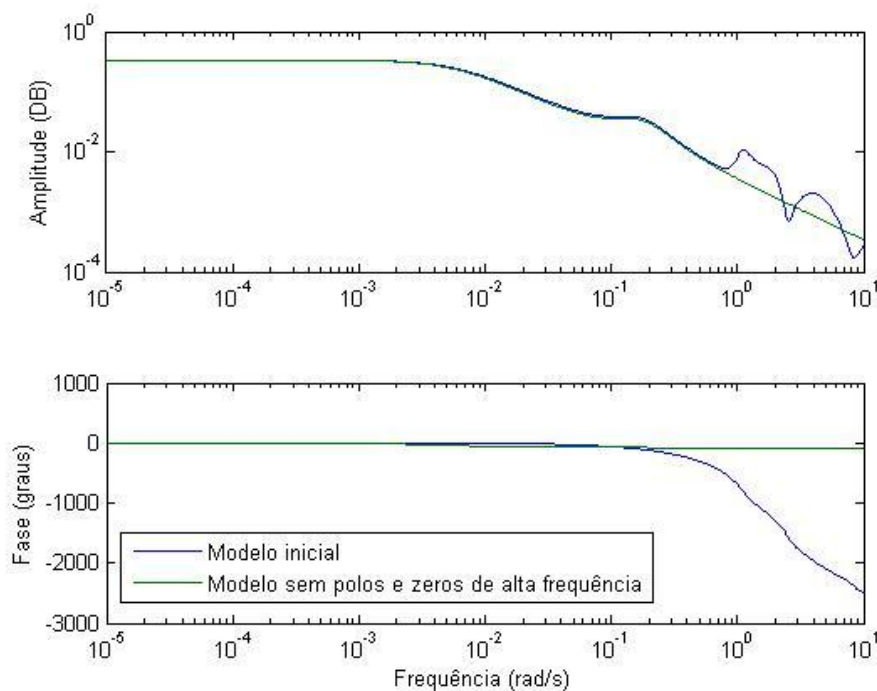
Ao analisar a Figura 4.7 conclui-se que o comportamento apresentado no diagrama de fase do modelo, na gama entre 0.1 e 4 rad/s com o valor a crescer (negativamente) à medida que a frequência cresce, tem grande semelhança com o que se passa quando estamos perante um atraso puro.

Outra conclusão retirada da análise da figura 4.7 passa pela existência de fase não mínima devido à queda abrupta da fase na alta frequência. A existência de fase não mínima é explicada pela existência de zeros de alta frequência presente no semiplano complexo direito (SPCD) [19], detetados aquando do estudo da estabilidade do modelo.

De forma a eliminar a fase não mínima do sistema optou-se por desprezar os polos e zeros de alta frequência do sistema, ficando este caracterizado pela função transferência presente em (4.3).

$$F_2(s) = \frac{0.0035s^2 + 0.00104s + 6.7 \times 10^{-5}}{s^3 + 0.185s^2 + 0.0356s + 0.0002} \quad (4.3)$$

O passo seguinte passou pela comparação do modelo inicial, em tempo contínuo, com o novo, sem os polos e zeros de alta frequência, existindo a necessidade de fazer o acerto do atraso, como demonstra a figura 4.8

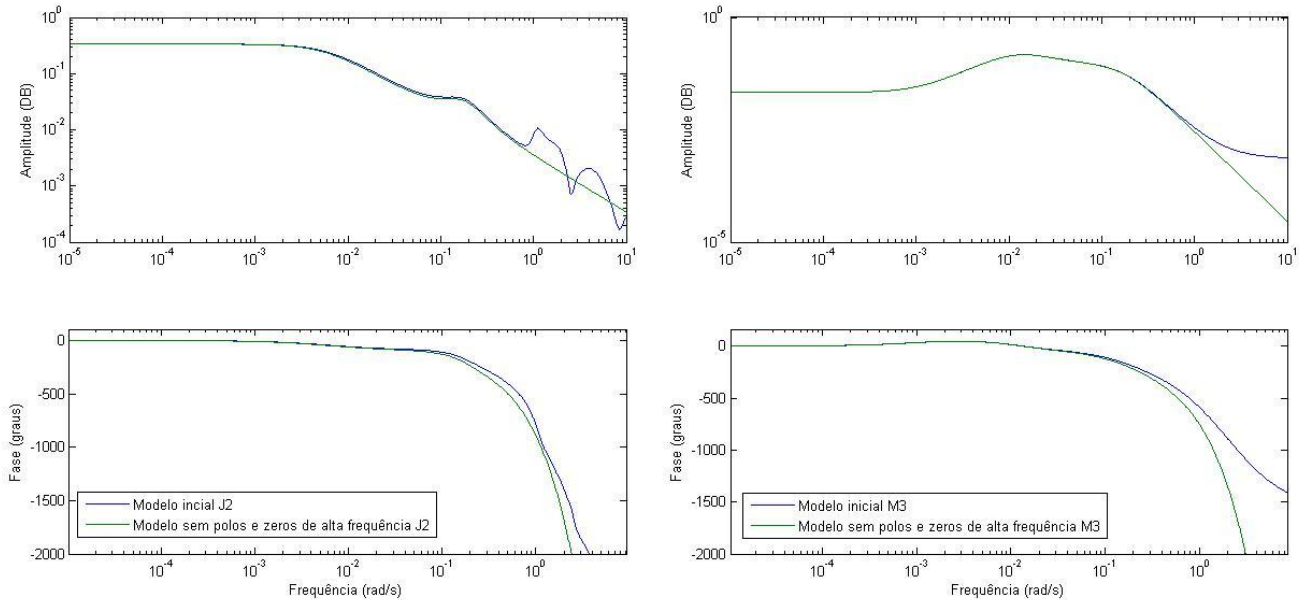


**Figura 4.8** – Comparação da resposta em frequência do modelo inicial e do modelo desprezando os polos e zeros de alta frequência no sensor J2

Este acerto do atraso é cálculo através da seguinte equação [20].

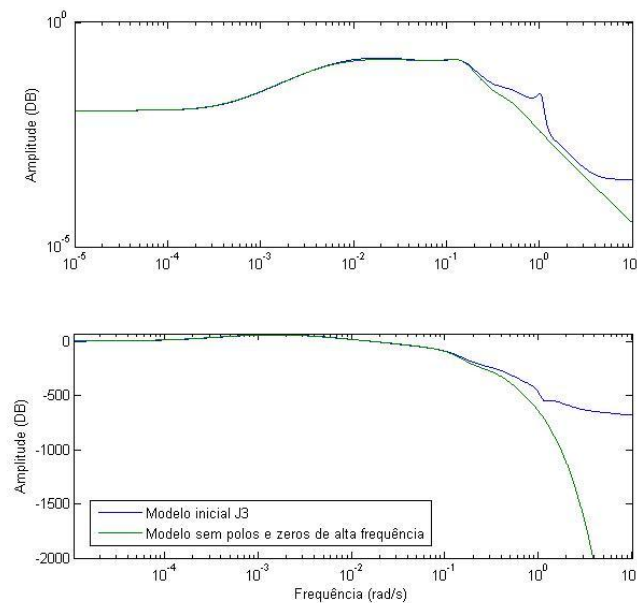
$$t_0 = \frac{fase}{w} \quad (4.4)$$

Assim, e através do digrama de bode, é retirado o valor da fase do modelo inicial quando  $w=1$  rad/s e calculado a valor do atraso e introduzido na função transferência [20]. Nas figuras 4.9, 4.10 e 4.11 pode-se comprovar o acerto do atraso calculado para os três modelos correspondentes ao nível em J2, nível em M3 e nível em J3.



**Figura 4.10** - Comparação do modelo inicial e sem polos e zeros de alta frequência para o caso do modelo correspondente ao nível medido em J2

**Figura 4.9** – Comparação do modelo inicial e sem polos e zeros de alta frequência para o caso do modelo correspondente ao nível medido em M3



**Figura 4.11** - Comparação do modelo inicial e sem polos e zeros de alta frequência para o caso do modelo correspondente ao nível medido em J3

Sendo as seguintes funções transferência as funções transferência correspondentes a cada dinâmica de cada um dos níveis medidos nos sensores J2, M3 e J3, desprezando os polos e zeros de alta frequência e com o ajuste do atraso presente nas figuras acima apresentadas:

$$F_{J2}(s) = \frac{0.003452s^2 + 0.001039s + 6.696 \times 10^{-5}}{s^3 + 0.185s^2 + 0.0356s + 0.0002} \cdot e^{-13.8404s} \quad (4.5)$$

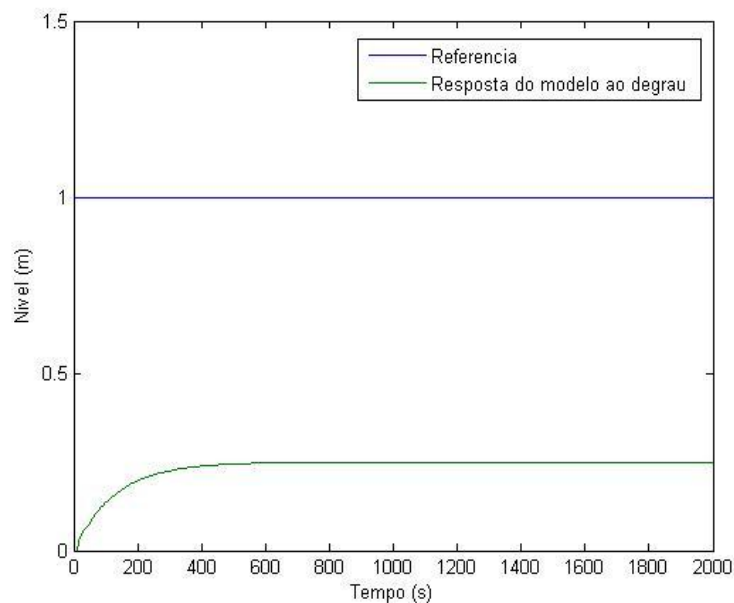
$$F_{M3}(s) = \frac{0.002924s^2 + 9.969 \times 10^{-5}s + 1.082 \times 10^{-7}}{s^4 + 0.3295s^3 + 0.0375s^2 + 0.0007576s + 5.062 \times 10^{-6}} \cdot e^{-10.3184s} \quad (4.6)$$

$$F_{J3}(s) = \frac{0.0347s^4 + 0.001873s^3 + 0.0006274s^2 + 4.199 \times 10^{-5}s + 1.674 \times 10^{-6}}{s^6 + 0.6129s^5 + 0.3427s^4 + 0.054s^3 + 0.0074s^2 + 0.0003s + 1.543 \times 10^{-6}} \cdot e^{-8.1786s} \quad (4.7)$$

### 4.3. Dimensionamento de controladores PID

Neste ponto da presente dissertação está presente o cálculo dos controladores PID para os três modelos calculados no 4.1.2.

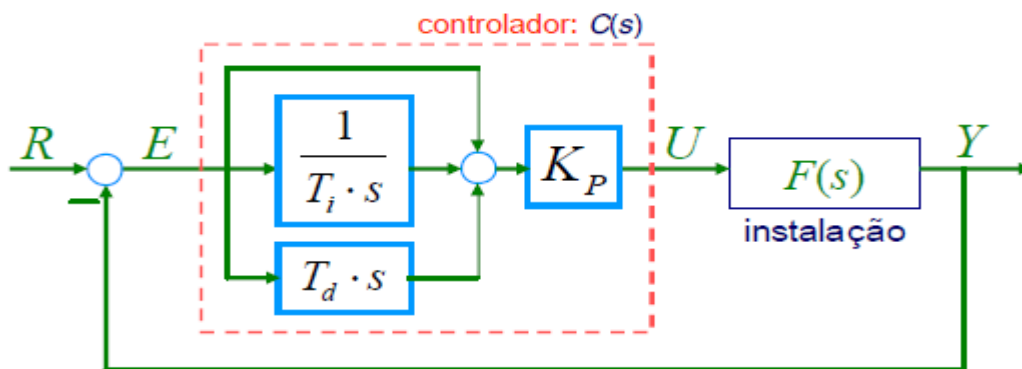
À semelhança do ponto 4.1.2, apenas será apresentado o procedimento do cálculo do controlador PID para um dos casos, modelo correspondente ao nível medido no sensor J2, devido ao procedimento de cálculo ser igual nos três casos em estudo.



**Figura 4.12** – Resposta ao degrau do modelo J2, sem controlador PID

A estrutura de controlo proposta nesta fase está presente na figura 4.13, onde:

- R : Referência;
- E : Erro;
- U: Sinal de atuação, que representa o comando da comporta;
- Y : O sinal de saída, que representa o nível do canal no ponto J2.



**Figura 4.13** – Estrutura de controlo com controlador PID (Fonte [20])

Nesta estrutura de controlo pode-se dizer que o efeito integral do controlador está intrinsecamente ligado com a eliminação do erro, estabilizando quando o erro for igual a zero, e o efeito derivativo relacionado com a melhoria da estabilidade do modelo derivado de se introduzir fase maior que zero.

Existem várias formas de dimensionar um controlador PID, dois exemplos são o dimensionamento pelo método da curva de reacção ou pelo da sensibilidade ultima, ambos presentes nas regras *Ziegler-Nichols* escritas em 1940. No caso deste estudo foi adotado o método da sensibilidade última.

Este método explora o ponto do limiar de estabilidade do sistema em anel fechado com retroação proporcional. Obtém-se o ganho proporcional  $K_u$  que leva o sistema em anel fechado ao limiar da estabilidade e regista-se o período da oscilação  $T_u$  na saída da instalação. A partir destes valores calculam-se os ganhos do controlador tendo em conta a seguinte tabela.

C(s)	$K_p$	$T_i$	$T_d$
P	$0.50K_u$	-	-
PI	$0.45K_u$	$T_u/1.2$	-
PID	$0.6K_u$	$T_u/2$	$T_u/8$

**Tabela 4.1** – Tabela de calculo dos ganhos dos controlador PID

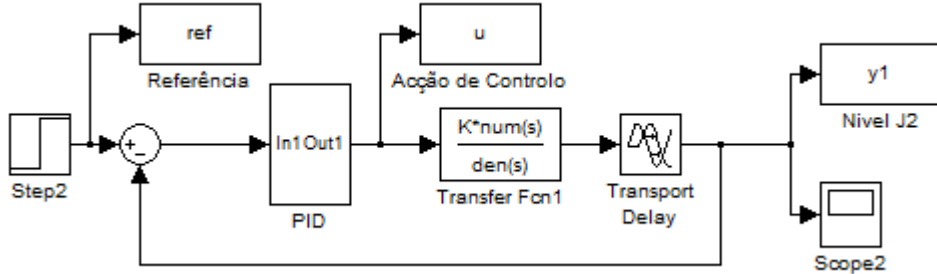
No caso em estudo, para se calcular  $K_u$  e  $T_u$  recorreu-se ao diagrama de Bode. Assim para o calculo de  $T_u$  verificou-se qual o valor da frequência critica ( $w_n$ ) do sistema, ou seja, a frequência quando a fase está em  $180^\circ$  e através da equação (4.8) conclui-se o seu calculo.

$$T_u = \frac{2 \times \pi}{w_n} \quad (4.8)$$

Para  $K_u$  o seu valor foi calculado partir do valor do ganho na frequência critica ( $w_n$ ).

$$K_u = \frac{1}{\text{Ganho}(\text{amplitude})} \quad (4.9)$$

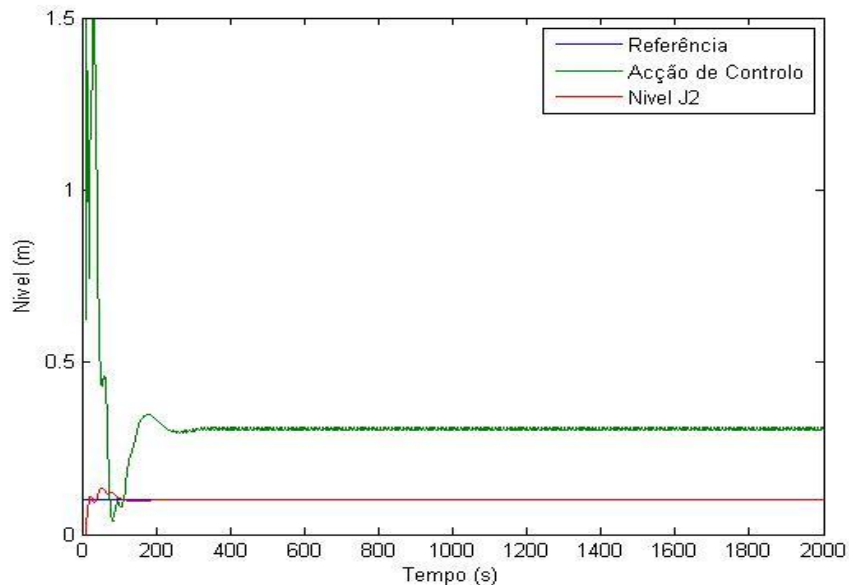
Uma vez obtidos os valores de  $K_u$  e  $T_u$  o cálculo dos restantes parâmetros do controlador foi feito através da tabela 4.1.



**Figura 4.14** – Esquemático utilizado para teste do controlado PID para o modelo J2

Na figura 4.15 é apresentado o efeito da incorporação do controlador PID no nível medido em J2, utilizando o esquemático presente na figura 4.14, e aplicando um degrau de 0.1 m na referência. Os parâmetros calculados de cada tipo de controlador estão apresentados abaixo.

$K_{P_{J2}} = 17.0213$	$K_{P_{M3}} = 9.8039$	$K_{P_{J3}} = 5.1591$
$T_{i_{J2}} = 20.7503$	$T_{i_{M3}} = 19.9087$	$T_{i_{J3}} = 18.8345$
$T_{d_{J2}} = 5.1876$	$T_{d_{M3}} = 4.9772$	$T_{d_{J3}} = 4.7086$



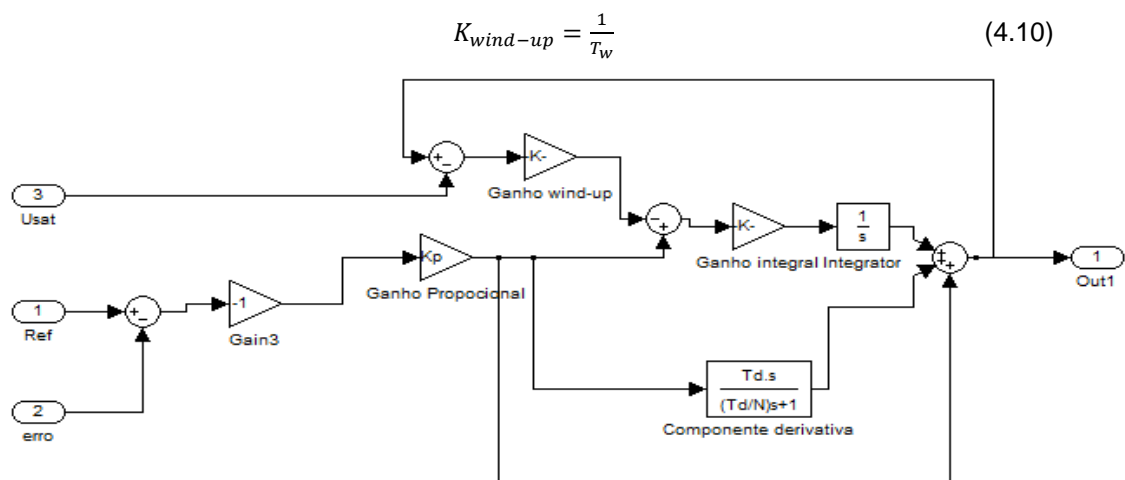
**Figura 4.15** – Resposta ao degrau do modelo J2, com controlador PID tipo J2

O próximo passo passou pela incorporação do controlador no modelo do canal. Esta incorporação levou ao aparecimento de novas variáveis que afetam diretamente o seu comportamento.

Como já descrito no Capítulo 2, as comportas são limitadas em termos de movimento e abertura. Assim o controlador tem de ter em conta estes tipos de saturação.

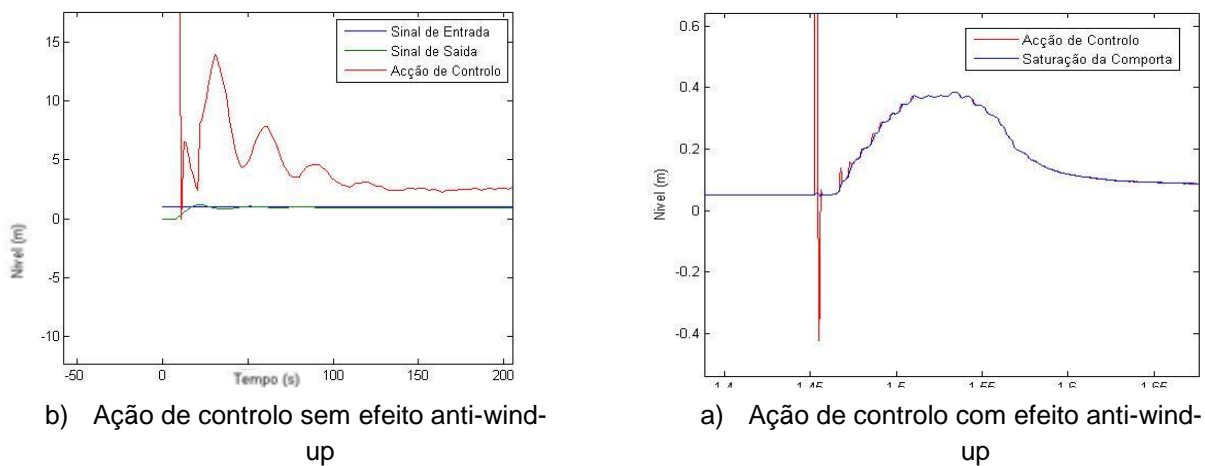
Desta forma, com o objetivo melhorar o comportamento do controlador, foi implementado um controlado PID com uma componente de anti-wind-up.

Este controlador é semelhante ao controlador PID convencional tendo apenas uma diferença, retroação adicional que afeta a componente integral. Este ganho é usado para manter nula a entrada da componente integral durante a saturação do atuador, fazendo com que, ao sair da saturação, não exista erros acumulados por essa componente. Por outras palavras este ganho wind-up satura a ação de controlo para valores aceites pelas restrições impostas pelas comportas. Quanto maior for o ganho, maior o grau de saturação no controlador.



**Figura 4.16** – Esquemático do controlador PID com ganho anti-wind-up implementado

Na seguinte figura é mostrado a comparação entre a ação de controlo sem e com componente anti-wind-up, considerando  $T_w=0.01$ .



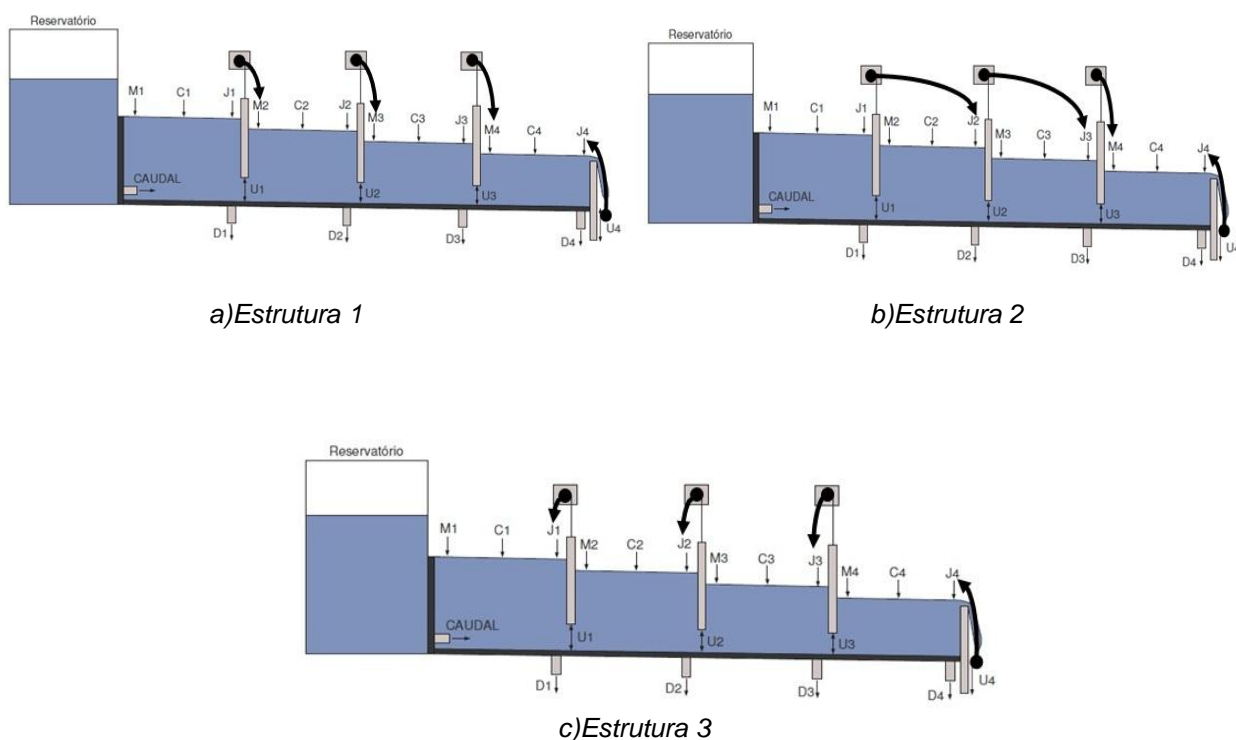
**Figura 4.17** – Comparação da ação de controlo com (b) e sem (a) efeito de anti-wind-up

Pode-se constatar que com a inclusão da componente anti-wind-up, figura 4.17 b), o controlador já acompanha quase na totalidade a saturação das comportas, ao contrário do que acontece sem efeito anti-wind-up, em que a acção de controlo atinge valores fora do alcance máximo e mínimo de altura das comportas, bem como tem uma variação de valores inoportáveis pela saturação das comportas.

#### 4.4. Escolha da estrutura de controlo

Ao finalizar todo o dimensionamento dos controladores PID, para as três situações em estudo, o ponto seguinte prendeu-se com a escolha da melhor estrutura de controlo possível.

Para este efeito foram concebidas três estruturas de controlo, duas de controlo local e uma de controlo à distância.



**Figura 4.18 – Estruturas de controlo em estudo**

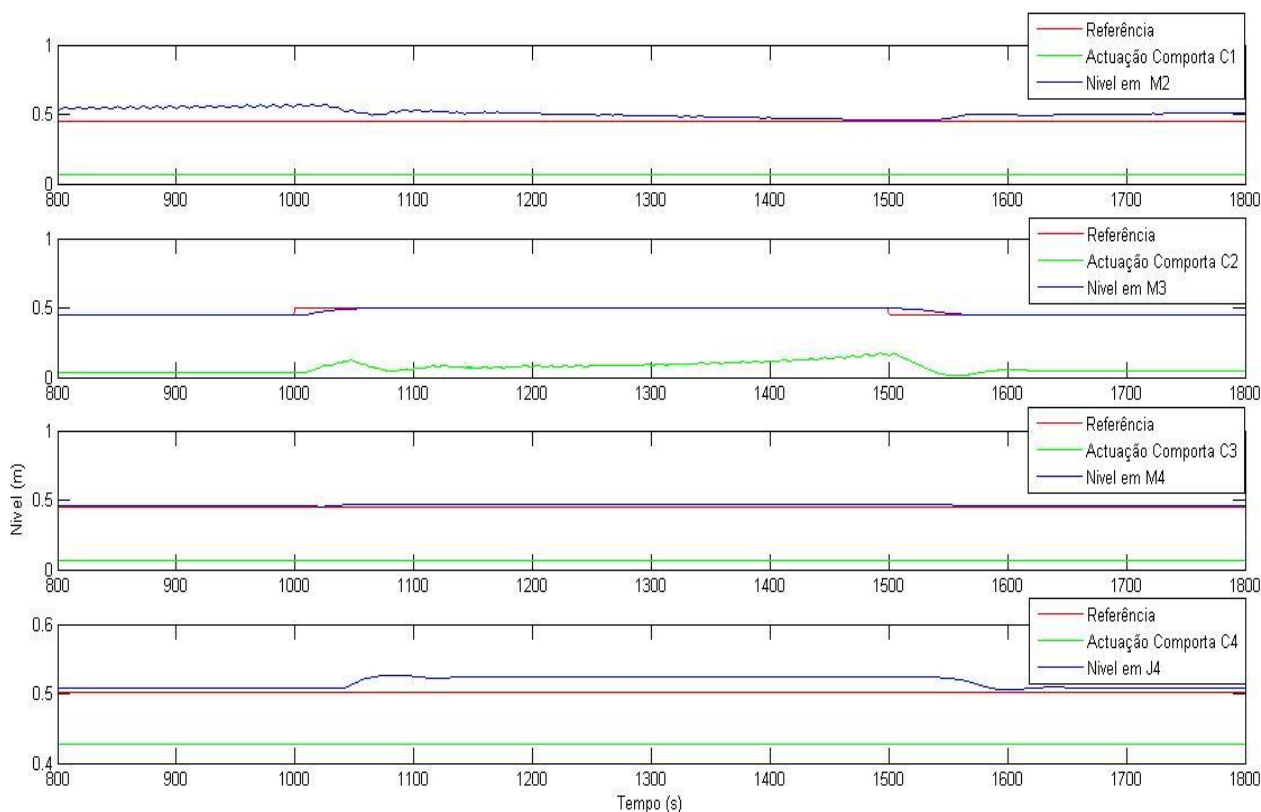
As estruturas um e três ilustradas na figura 4.18, têm controladores locais enquanto a estrutura dois possui dois controladores locais e dois à distância.

Os controladores utilizados nestas estruturas foram os enunciados e dimensionados no ponto 4.1.3 do presente relatório.

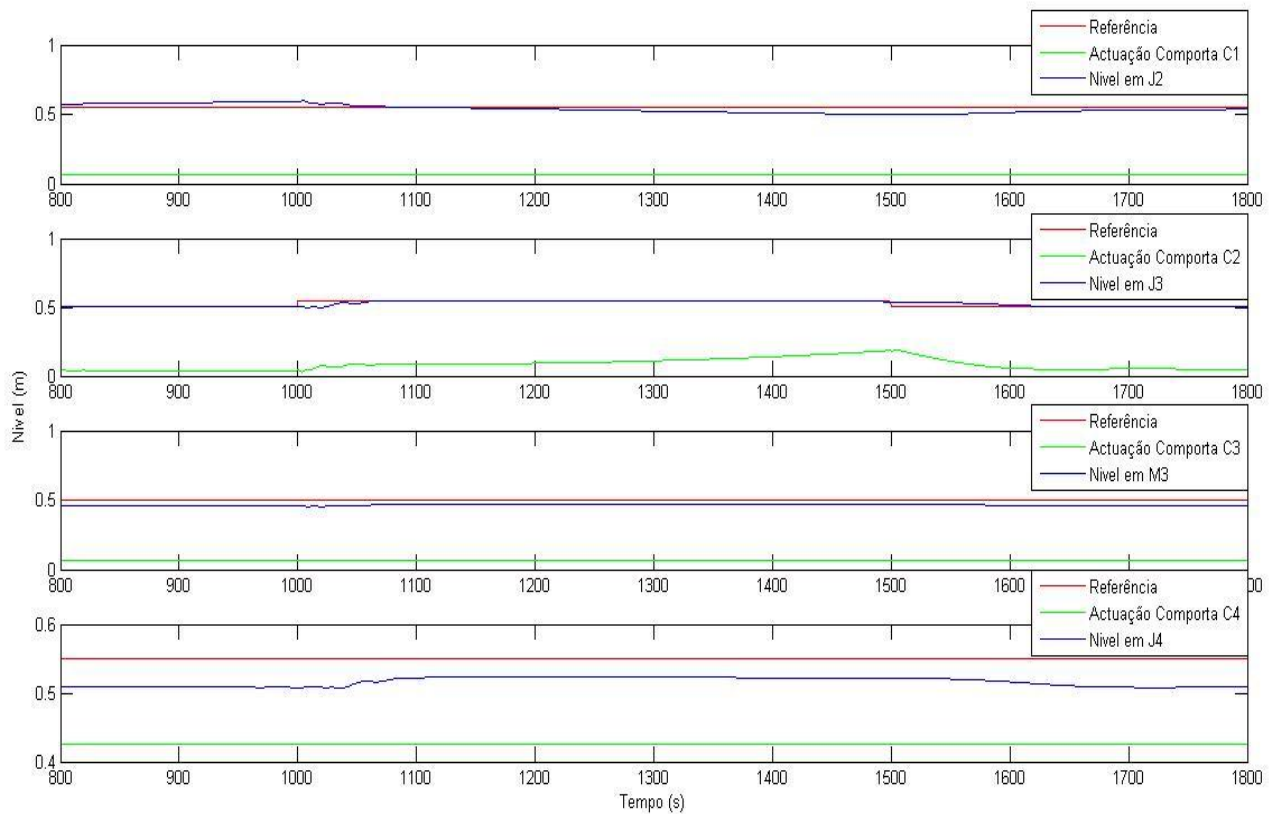
De forma a testar da melhor forma possível cada uma das estruturas, com o objetivo de perceber qual a melhor estrutura que se adapta ao comportamento do canal, foi necessário, em primeiro lugar, testar e calibrar o controlador para apenas um dos troços, ou seja numa comporta apenas, (controlo univariável) e depois para todos os troços (controlo multivariável).

Uma vez que para o dimensionamento dos controladores foi atuada a comporta C2 optou-se por fazer os testes iniciais para os diferentes controladores, num controlo univariável, atuando também nessa mesma comporta.

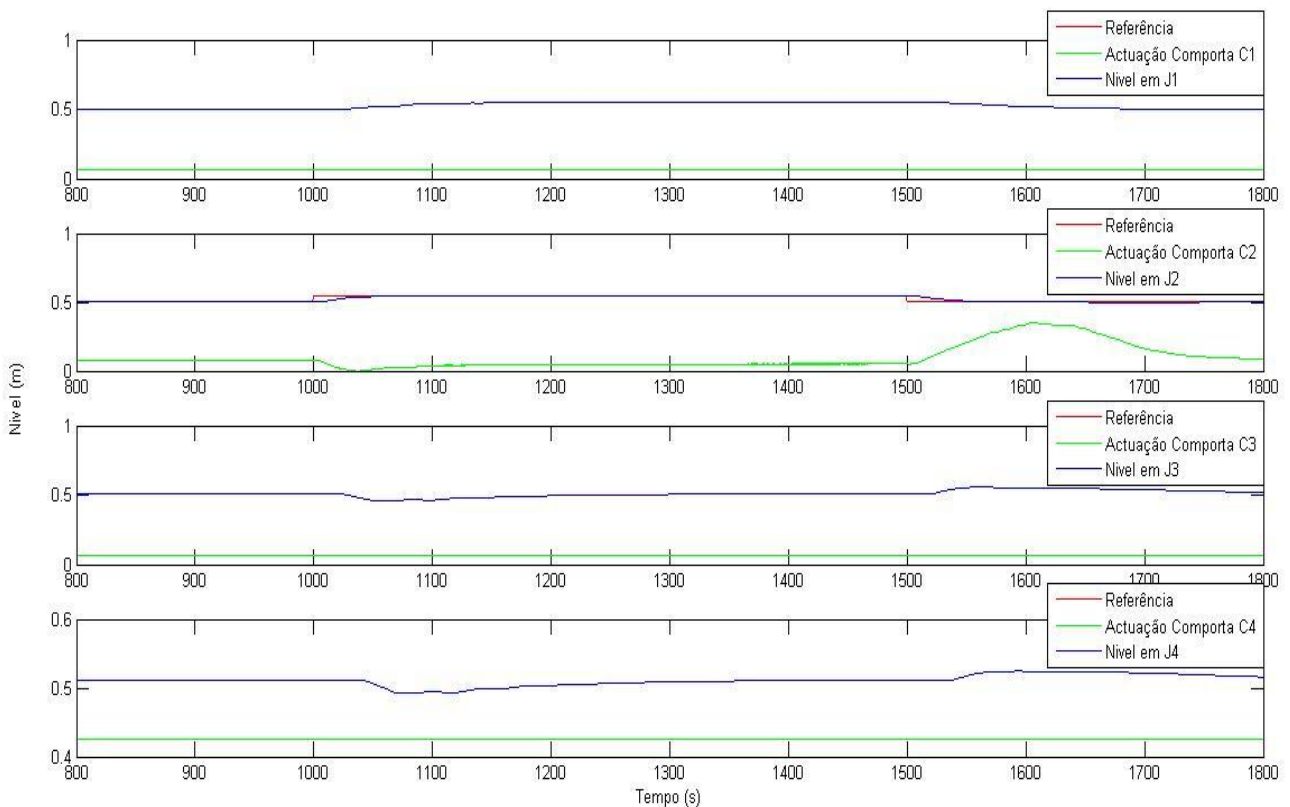
Neste primeiro teste, apresentado nas figuras 4.19, 4.20 e 4.21, foi aplicado um degrau com 0.05m de amplitude nos set-points iniciais do nível medido nos diferentes sensores, num intervalo temporal compreendido entre os 1000 segundos e os 1500 segundos, mantendo o valor de altura das restantes comportas fixo e igual aos valores iniciais de altura (Ponto 4.1.1).



**Figura 4.19** – Variação do set-point do nível medido no sensor M2, com o controlador PID tipo M2 a atuar sobre a comporta C2



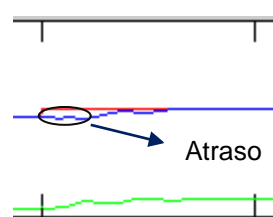
**Figura 4.20** - Variação do set-point do nível medido no sensor J3, com o controlador PID tipo J3 a atuar sobre a comporta C2



**Figura 4.21** - Variação do set-point do nível medido no sensor J3, com o controlador PID tipo J3 a atuar sobre a comporta C2

Ao avaliar as figura apresentadas na pagina anterior, pode-se concluir que, tanto a estrutura 1 (Figura 4.19) como a estrutura 3 (Figura 4.21), aquando a realização do degrau, têm um comportamento semelhante em termos de tempo de subida do nível da água e melhor do que o apresentado pela estrutura 2 (Figura 4.20). Esta diferença nos tempos de subida é explicada pelo facto do sensor J3 estar a cerca de 30m do atuador.

Como a estrutura 2 é controlada à distância, o atraso da atuação do controlador é maior, o que leva a um tempo de resposta muito maior quando comparado com as duas restantes estruturas. Isto explica-se devido ao tempo que é necessário, depois da abertura da comporta, para a água atravessar o troço de 30 metros ate ao sensor de medida.



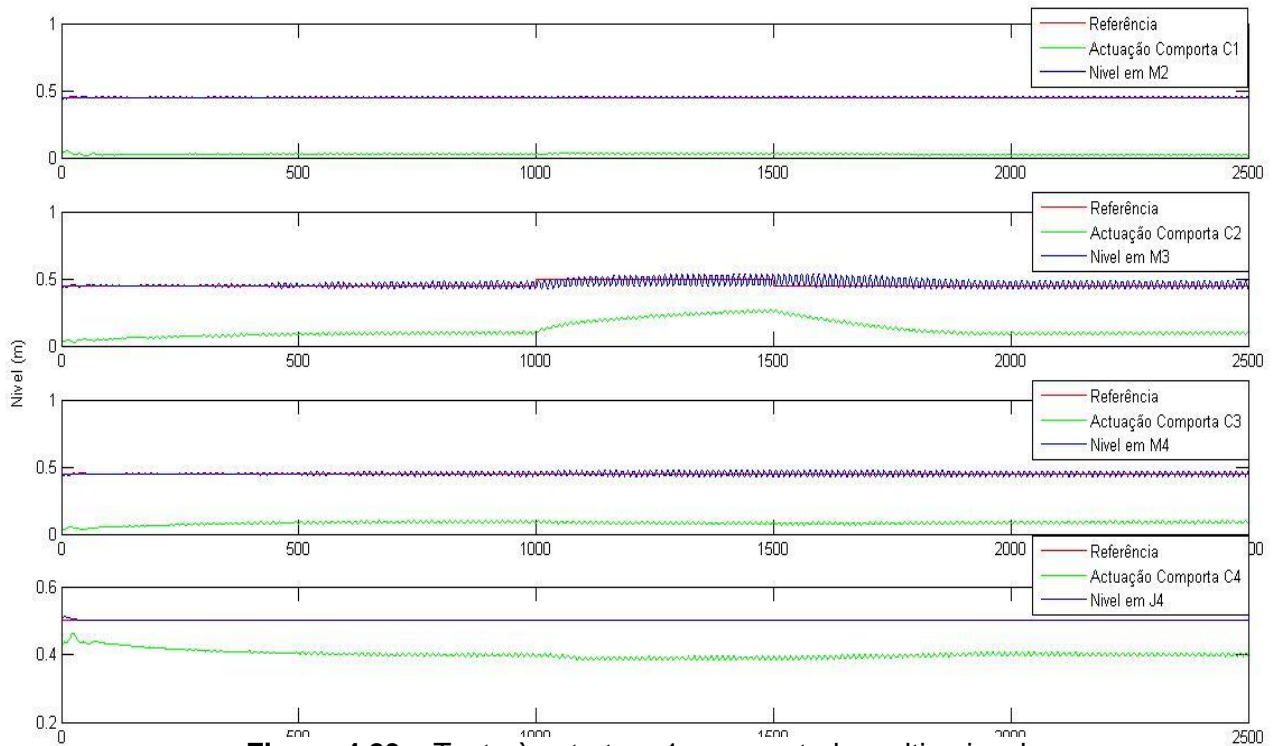
**Figura 4. 22 – Atraso da atuação do controlador da estrutura 2 em pormenor**

Outro detalhe relevante é a diferença entre controlar o nível a montante ou a jusante da comporta. Quando dá-se o degrau, no caso das estruturas 1 e 2, ambas a controlar um nível medido num sensor a jusante da comporta, o nível da água a montante diminui e aumenta a jusante. No caso da estrutura 3, a controlar um nível medido num sensor a montante da comporta, o comportamento do nível da água é inverso. Sendo a fonte de água do canal localizada na entrada mais a montante do canal, a água flui por acção da gravidade de montante para jusante, logo quando existe a necessidade de aumentar o nível da água a jusante da comporta, esta tem de abrir para deixar fluir uma quantidade maior de água até ser atingido o nível pretendido. Esta abertura provoca um decréscimo do nível da água a montante da comporta e um aumento a jusante, verificado nos sensores a montante e jusante da comporta (Figura 2.19 e 2.20). No caso contrario, a comporta fecha para “acumular” mais água a jusante da mesma (Figura 2.21).

Uma vez que as diferenças entre as estruturas num controlo univariável são quase inexistentes, a não ser o atraso já esperado da estrutura 2, procedeu-se aos testes com as estruturas completas, passando-se para um controlo multivariável com controladores nas quatro comportas do canal, consoante as estruturas da figura 4.18.

Inicialmente e á semelhança dos testes anteriores, o degrau nos set-points dos niveis foi feito da mesma forma, só alterando o *set point* do nível da água no sensor M3, para o teste da estrutura 1, J3 para o teste da estrutura 2 e J2 para o teste da estrutura 3. Os valores iniciais da altura da água nas restantes localizações do canal foram mantidos fixos durante toda a experiencia, sendo estes apresentados abaixo:

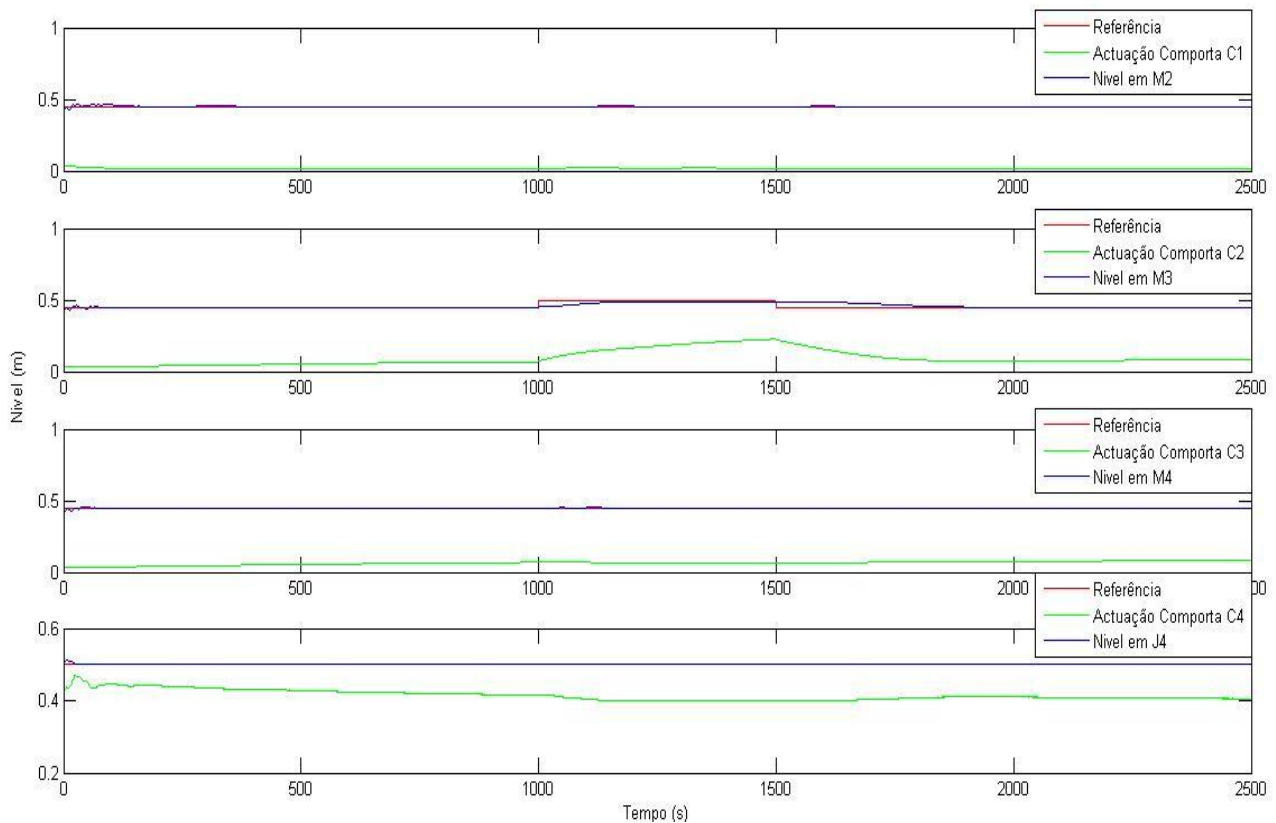
0.5012m —————> J1,J2,J3,J4  
 0.4487m —————> M1,M2,M3,M4



**Figura 4.23 – Teste à estrutura 1 com controlo multivariável**

Ao observar a figura 4.23, concluiu-se que, com o controlador original sem uma calibração apropriada, os níveis nos diferentes torços estão próximos da referência e acompanham-na mas mantêm-se oscilatórios durante todo o teste. Este estado oscilatório do sinal de nível medido nos sensores é justificado por movimentos demasiado rápidos por parte das comportas. Quando o nível passa a referência a comporta reage de uma maneira brusca de mais provocando um decréscimo maior do que o desejado no nível da água, levando o nível para valores abaixo da referência, ao verificar que o valor está abaixo do desejado o controlador abre rapidamente a comporta elevando o nível da água para valores acima da referência. Ao fazer este processo sucessivamente provoca a oscilação ilustrada na Figura 4.23.

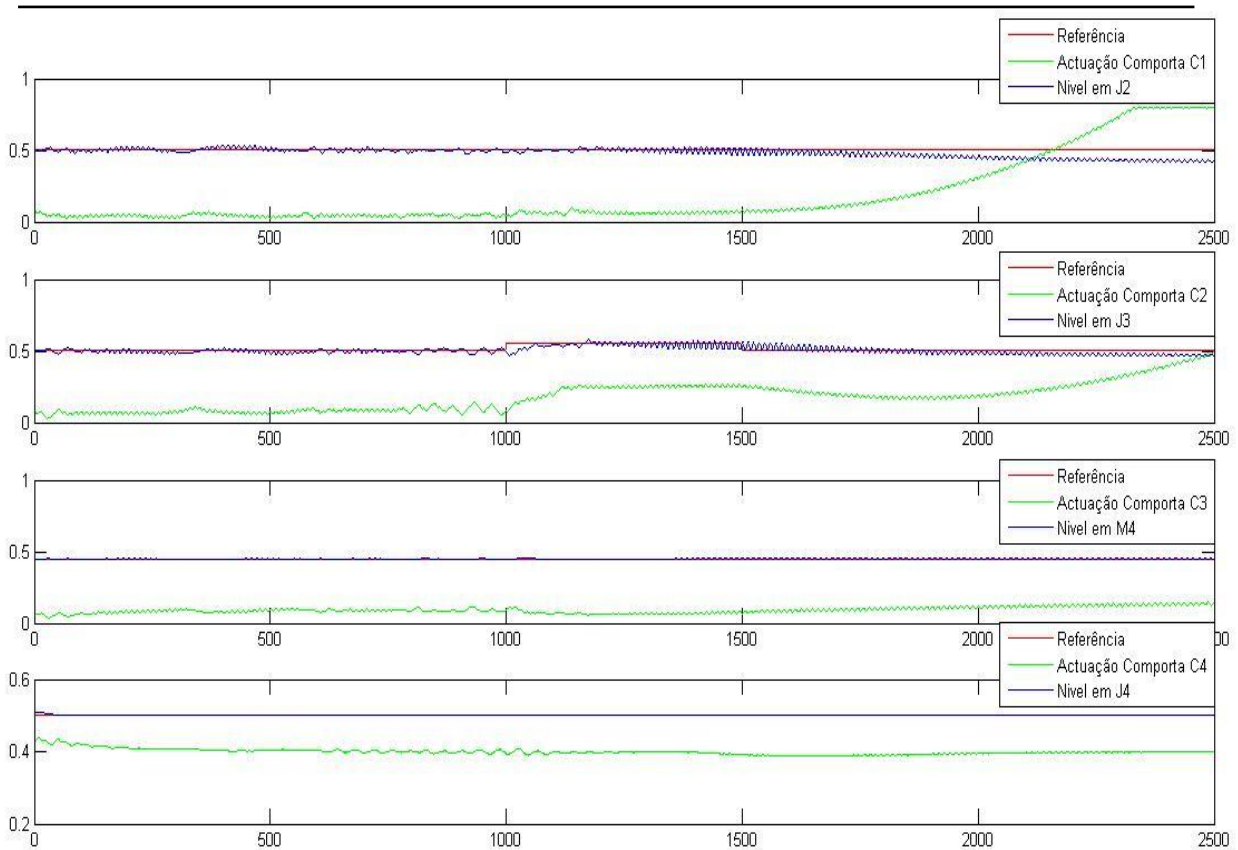
Por forma a retificar este efeito foi necessário baixar o valor do Ganho proporcional dos controladores para valores abaixo de 1. Desta forma, os controladores ficaram mais lentos, mas capazes de controlar os níveis do canal, como demonstra a figura 4.24. De notar que o controlador da comporta quatro, que controla o set point medido no sensor J4, não foi alterado por ter um comportamento diferente em relação aos outros.



**Figura 4.24 - Teste à estrutura 1 com controlo multivariável, com  $K_p=0.1$**

Assim, e devido a alteração do valor do ganho proporcional dos controladores a resposta à variação do nível no sensor M3 ficou bastante lenta, quando comparada à sua resposta no controlo univariável, demorando cerca de 200 a 300 segundos a atingir o valor pedido. No entanto e apesar do sistema ficar bastante lento, mantêm-se sempre a seguir a referência, sendo desta forma controlado com sucesso.

A segunda estrutura a ser testada foi a estrutura 2. Esta estrutura, como já referido no neste relatório, contém presente tanto controlo à distância como local. A mistura destes dois tipos de controlo acabou por não funcionar da forma desejada, levando a um estado oscilatório do nível da água medido nos sensores de medida. Este teste da segunda estrutura está presente na figura 4.25.

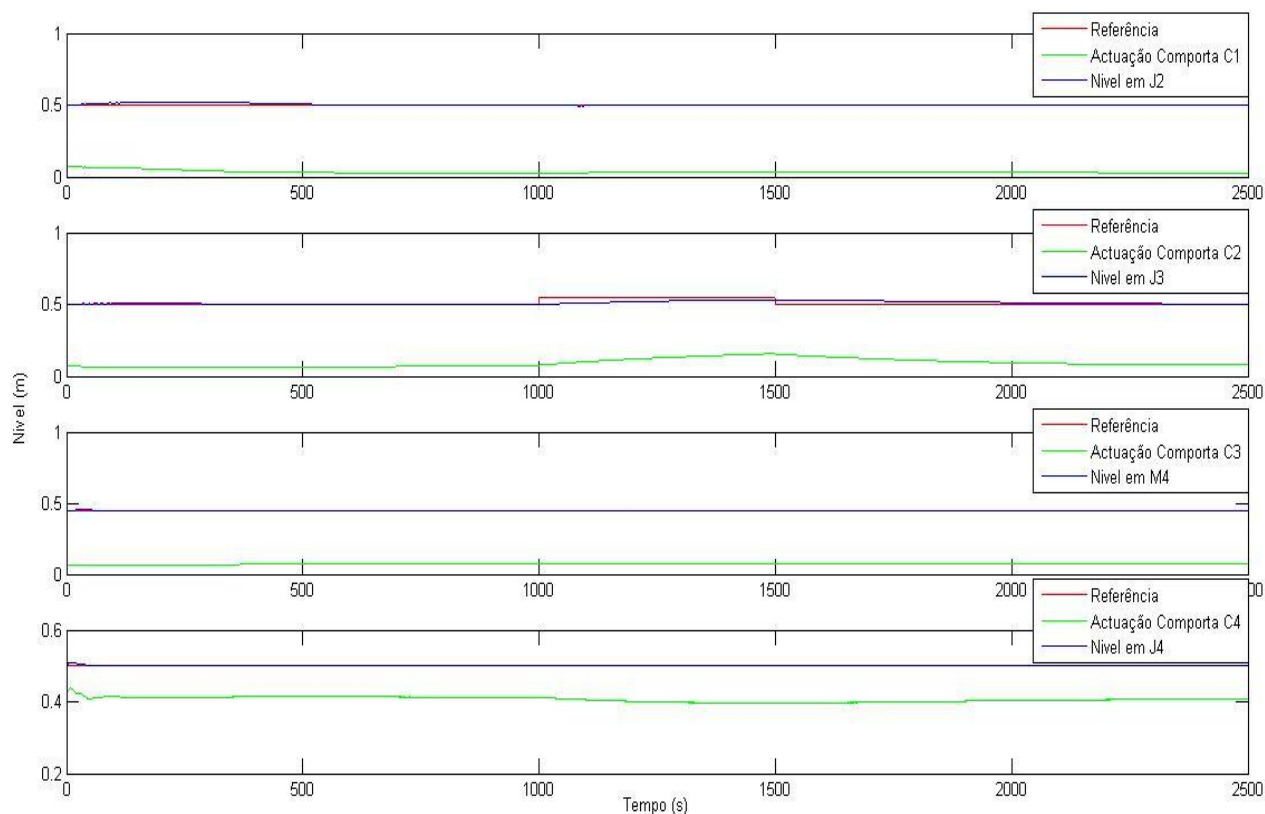


**Figura 4.25 - Teste à estrutura 2 com controlo multivariável**

Este estado oscilatório é explicado pelo facto, no caso do controlo à distância, da comporta imediatamente a seguir à posição do sensor J2 e J3 ter mais influência sobre o nível, devido à sua maior proximidade, do que a comporta que os controla. Havendo esta total dependência da comporta imediatamente a seguir, quando esta se mexe a comporta que controla o nível tenta retificá-lo, prejudicando o nível anterior e levando a uma situação oscilatória. Esta dependência está evidenciada no caso da comporta C1, quando o valor do nível J2 decresce, entre o segundo 1100 e 1200, devido à abertura da comporta C2. O controlador da comporta C1 abre a comporta C1 mas como a comporta C2 continua a abrir, o controlador da comporta C1 tenta abrir a comporta C1 até à saturação, com aberturas e fechos bruscos devido ao seu ganho estático elevado.

Para poder diminuir este efeito existiu a necessidade de ajustar os controladores de modo a torna-los menos agressivos, limitando a velocidade de movimento das comportas. Assim o ganho estático dos controladores de controlo à distância foram alterados para 0.1 e o controlador da comporta 3 para os valores da estrutura 1. De notar que o controlador da comporta quatro, que controla o *set point* do nível medido no sensor J4, não foi alterado por ter um comportamento diferente em relação aos outros.

O teste à estrutura dois, com a devida alteração dos valores dos controladores está presente da seguinte figura.



**Figura 4.26** - Teste à estrutura 2 com controlo multivariável, com  $K_p=0.1$

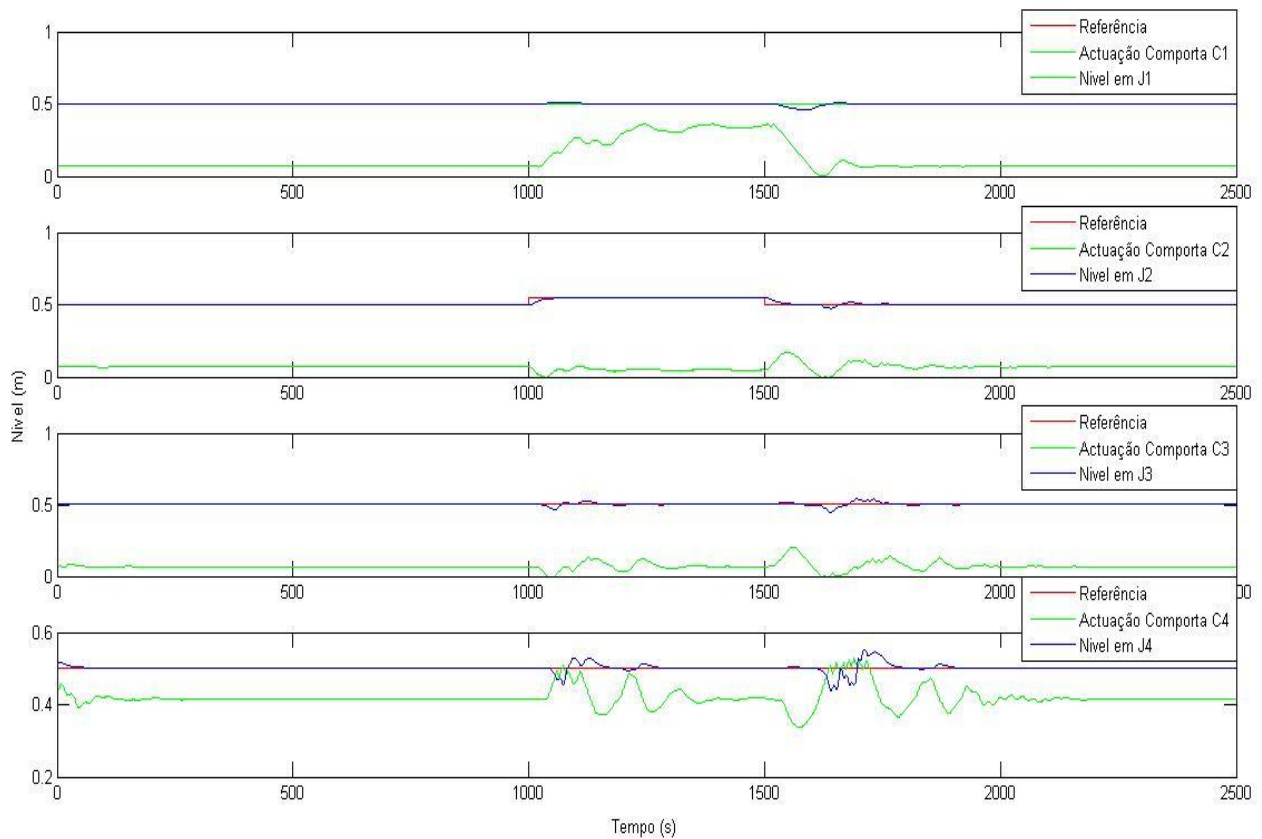
Esta alteração leva a que o tempo de resposta, bem como o tempo de subida da resposta do modelo sejam demasiado grandes, tornando a estrutura inviável para a sua adoção.

Por último foi testada a terceira e ultima estrutura, figura 4.27, em que o nível controlado é o nível imediatamente a montante da comporta atuada.

Pôde-se comprovar que a estrutura 3 é a estrutura mais adequada para a resposta a mudanças de set-points dos níveis do canal.

Esta estrutura, embora seja um bocado mais exigente no que toca ao movimento da comporta, devido ao seu elevado ganho estático, ponto 4.1.3, é a mais rápida a reagir à mudança de set point bem como estabiliza o nível nos diferentes set-points dos sensores de medida em menos tempo do que as outras estruturas.

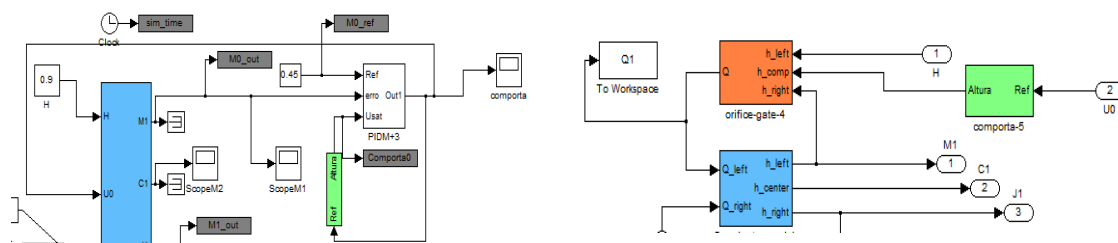
Desta forma a estrutura de controlo escolhida para a continuação do estudo do controlo do canal experimental de Évora foi estrutura 3, a estrutura de controlo que controla os set-points de nível dos sensores imediatamente antes da comporta atuada, ou seja, para a comporta C1, nível em J1, para a comporta C2, nível J2 e assim sucessivamente, Figura 4.18 c).



**Figura 4.27 - Teste à estrutura3 com controlo multivariável**

## 4.5. Validação da estrutura de controlo

Por forma a existir uma regulação automática da entrada de caudal de água foi acrescentado uma comporta do tipo escoamento de fundo na entrada do canal. Esta comporta tem o mesmo comportamento das comportas seguintes, mas controlando o *set point* do sensor M1 (Figura 4.28).



**Figura 4.28 – Comporta de regulação do caudal à entrada do canal**

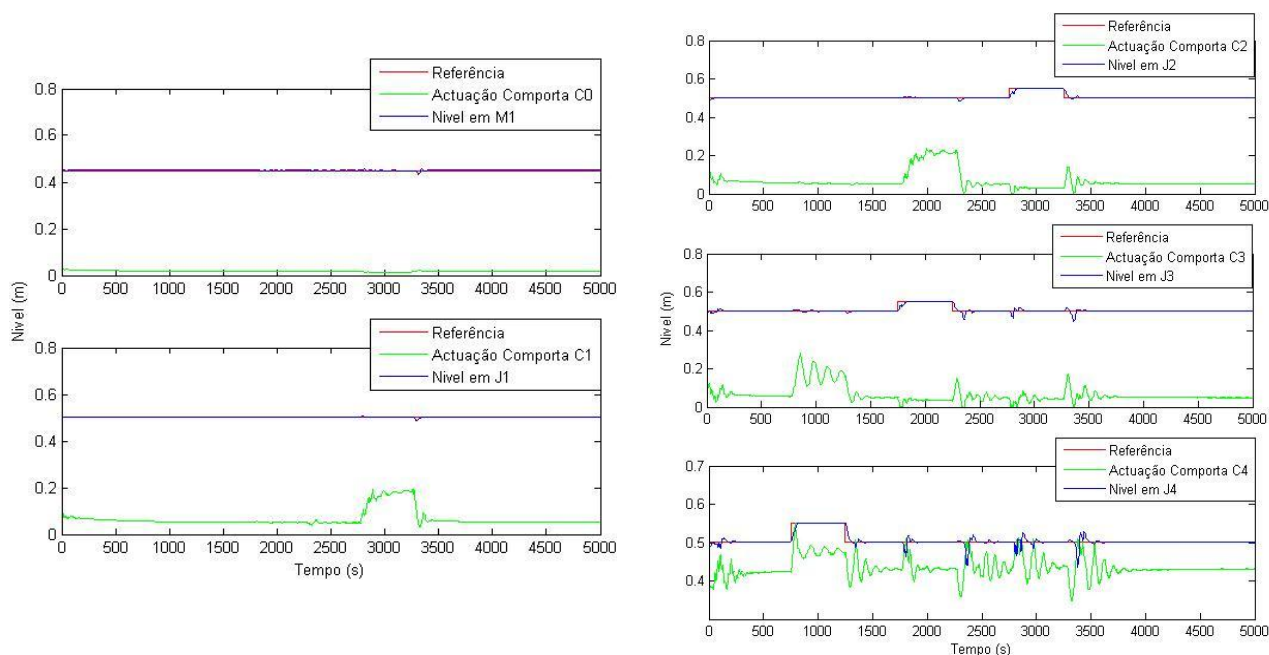
A validação da estrutura de controlo foi feita através da realização de vários testes à estrutura escolhida no ponto anterior.

Os testes foram divididos em três partes, teste à variação do *set point* nos diferentes sensores, teste com ativação das tomadas de água em todos os troços e por fim um teste de mudança da posição de um controlador.

No primeiro teste para a validação desta estrutura efetuou-se três degraus, com amplitude de 0.05 m num intervalo temporal de 5000s, da seguinte forma:

- No nível da água medido no sensor J4, entre o segundo 750 e 1250;
- No nível da água medido no sensor J3, entre o segundo 1750 e 2250;
- No nível da água medido no sensor J2, entre o segundo 2750 e 3250.

Este teste teve como objetivo verificar o efeito de sucessivas alterações de set-points em diversos pontos diferentes do canal e está presente na figura 4.29.



**Figura 4.29** – Degraus do nível da água medido pelos sensores J2, J3 e J4

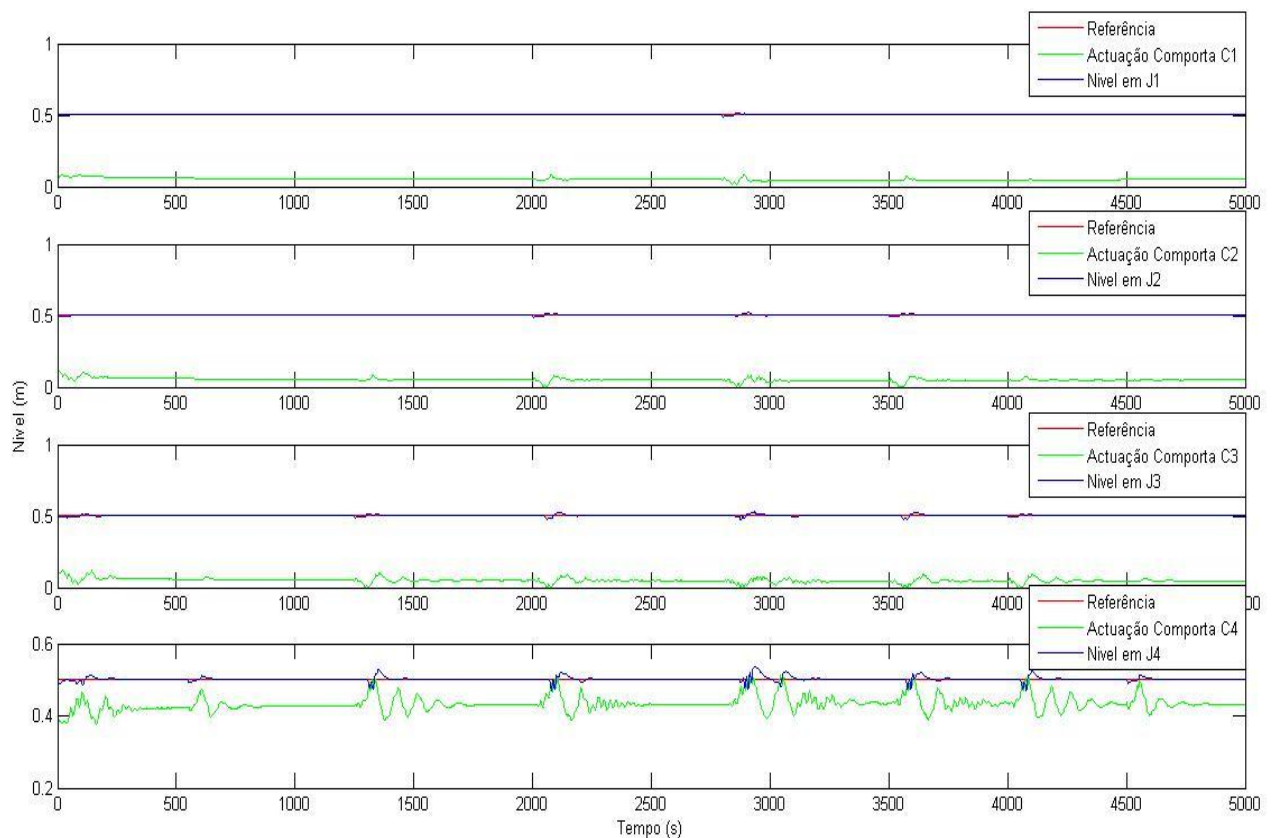
Observando a figura 4.29 verificou-se que estrutura de controlo reage bem às diferenças de *set-point* em todos os níveis controlados. Um efeito que se destacou foi o de ampliação do sinal de controlo, quanto maior for a distancia à variação maior a amplitude da distorção do nível da água, de montante para jusante, provocando uma amplitude de abertura ou fecho das comportas a montante da variação do set-point. Desta forma o controlador que tem mais exigência em termos de variação e amplitude do sinal de controlo é o da comporta C4.

No segundo teste, figuras 4.30 e 4.31, verificou-se o efeito da ativação das tomadas de água, perturbações, na estrutura de controlo. Em termos práticos, a ativação destas tomadas de água é uma simulação da retirada de água do por parte de agricultores ao longo do canal.

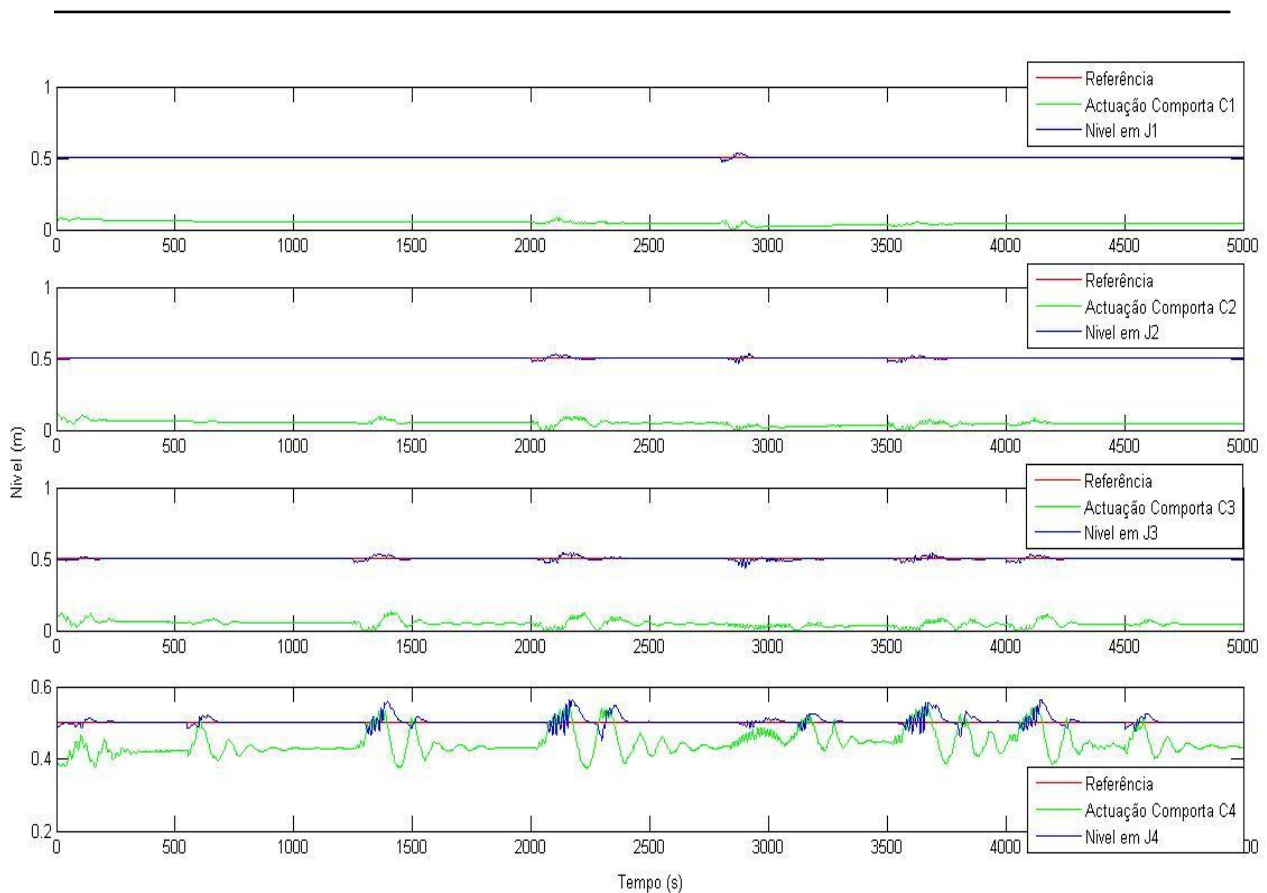
Neste teste foram ativadas as tomadas de água usando dois valores de descarga diferentes. Num primeiro teste optou-se por retirar  $0.005 \text{ m}^3/\text{s}$  de água e num segundo  $0.01 \text{ m}^3/\text{s}$ .

Em ambos os testes as diferentes tomadas de água foram ativadas da seguinte forma:

- Tomada de água F4 foi ativada entre os segundos 550 e 600 e entre 4500 e 4550 segundos;
- Tomada de água F3 foi ativada entre os segundos 1250 e 1300 e entre 4000 e 4050 segundos;
- Tomada de água F2 foi ativada entre os segundos 2000 e 2050 e entre 3500 e 3550 segundos;
- Tomada de água F2 foi ativada entre os segundos 2800 e 2850.



**Figura 4.30** – Análise de perturbações com o valor de  $0.005\text{m}^3/\text{s}$  de tiragem



**Figura 4.31 - Análise de perturbações com o valor de  $0.01\text{m}^3/\text{s}$  de tiragem**

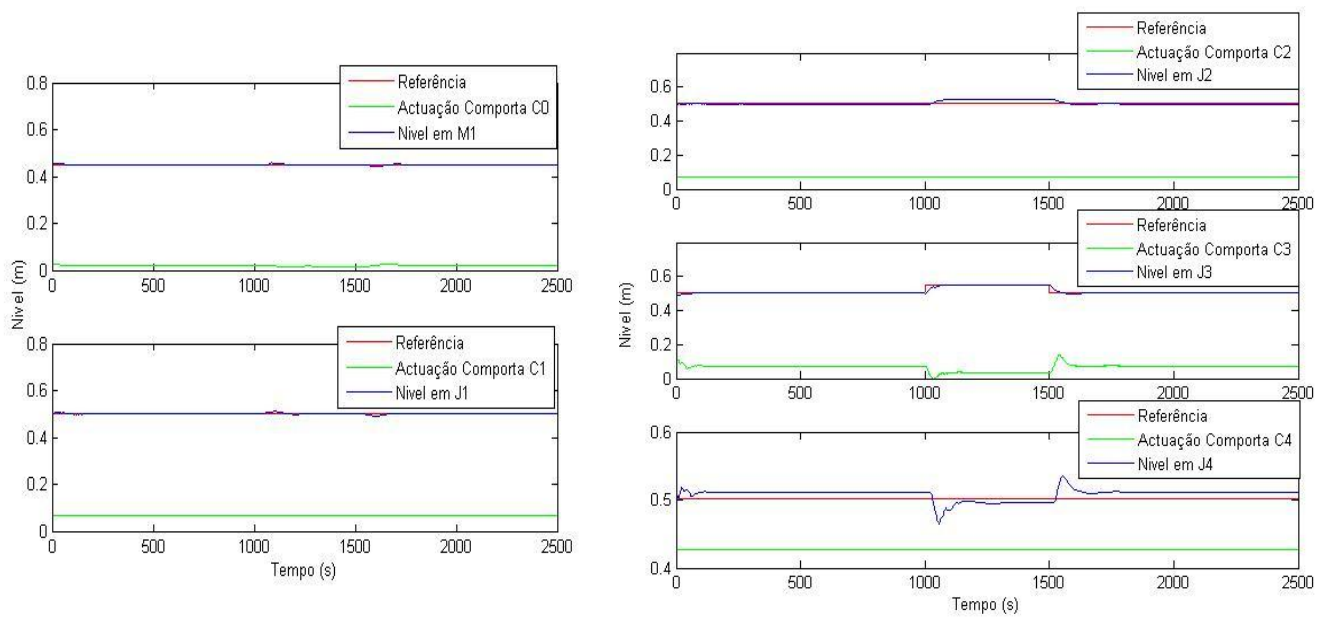
Mais uma vez pode-se constatar o efeito de ampliação do sinal de controlo. À medida que a perturbação é feita num troço mais próximo do início do canal a amplitude de abertura e fecho das comportas a jusante da perturbação aumenta.

Este efeito de ampliação é explicado pelo fator de dependência de troço para troço ou de comporta para comporta que este modelo tem. Sempre que existe movimento numa comporta vai destabilizar o comportamento dos níveis, tanto a jusante como a montante, da mesma, afetando assim as comportas imediatamente antes e a seguir provocando a ampliação do sinal de controlo.

Por fim o terceiro e último teste, apresentado na figura 4.32, foi feito para confirmar se existiriam alterações no comportamento do canal desligando todos os controladores das comportas e apenas ativando um mas num troço diferente do segundo. Optou-se para fazer este teste uma vez que todos os controladores foram dimensionados tendo por base a dinâmica do segundo troço do canal (ponto 4.1.2 e 4.1.3).

Desta forma o teste foi feito com o controlador PID tipo J2 a controlar o nível de água medido no sensor J3 atuando na comporta C3.

Comparando as figuras 4.32 e 4.21 conclui-se que a dinâmica dos troços é em todo similar, podendo-se utilizar o controlador dimensionado no ponto 4.1.3 e validando desta forma a estrutura de controlo em estudo.



**Figura 4.32** – Análise da troca de posição de um controlador



---

## 5. Controlo Descentralizado & Distribuído

---

Depois de se ter compreendido o comportamento do canal perante as mais diversas variações do seu nível e caudal, bem como ter-se procedido à escolha da estrutura de controlo ideal para o controlo do modelo (Capítulo 4), passa-se ao estudo detalhado do comportamento do modelo começando com controladores ótimos descentralizados e evoluindo para controladores ótimos distribuídos.

Neste capítulo está apresentado todo o estudo, acima referido, partido em três subcapítulos:

- Estudo do comportamento de dois troços do canal com uma estrutura de controlo ótimo descentralizado com controladores SISO, com horizonte de previsão finito;
- Estudo do comportamento de dois troços do canal com uma estrutura de controlo ótimo descentralizado com controladores MIMO, com horizonte de previsão finito;
- Estudo do comportamento de dois troços do canal com uma estrutura de controlo ótimo distribuído, com horizonte de previsão finito.

O principal objetivo desta dissertação foi a compreensão dos efeitos da negociação entre os controladores no comportamento do canal. Para isso a implementação de estruturas com controladores ótimos descentralizados é justificada pela necessidade de comparação de resultados entre uma estrutura de controlo descentralizado e distribuído.

Em todo o capítulo, o intervalo de amostragem considerado para os novos modelos é de 2s.

### 5.1. Controlo Ótimo Descentralizado

O controlo ótimo tem como sua definição base a necessidade de, ao passar de um determinado estado inicial para um estado final, minimizar-se ou maximizar-se um dado critério, de forma a chegar-se à solução final pretendida da forma mais eficiente possível [21].

Um exemplo de um problema de controlo ótimo pode surgir quando um condutor deseja fazer a viagem Cascais-Lisboa para ir trabalhar, escolhendo como critério minimizar o tempo de viagem. Assim ter-se-ia como critério a minimalização do tempo de viagem e como sistema a controlar o comportamento do condutor, na viagem entre Cascais e Lisboa, onde a solução do problema estaria inteiramente ligada à forma de guiar deste condutor.

Esta forma de pensar nasceu aquando da origem do cálculo de variações, no século dezassete, pelo matemático Johanan Bernoulli quando chegou à solução do problema da braquistócrana usando uma função que pudesse ser minimizada ou maximizada [22].

---

Já mais tarde, a seguir à segunda guerra mundial, este conceito toma forma como a teoria do controlo ótimo com a demonstração e a formulação do *Princípio do Máximo de Pontryagin* por L.S. Pontryagin e pelo seu grupo de colaboradores [21].

O controlo ótimo permite controlar tanto sistemas lineares como sistemas não lineares e o dimensionamento das suas variáveis de controlo pode ser obtido através de diferentes algoritmos e critérios matemáticos dependendo da metodologia usada.

No caso desta dissertação optou-se por utilizar o critério linear quadrático, adotando-se uma metodologia baseada na minimização do critério que força a saída do sistema (o nível da água medida nos sensores) a seguir uma dada trajetória (a variação dos set-points do nível da água).

Numa estrutura de controlo ótimo descentralizado, os controladores ótimos são desenvolvidos sem tomar em conta os efeitos que a sua atuação tem sobre toda a performance do sistema completo nem uma potencial cooperação e negociação entre os controladores vizinhos. Esta forma de atuar dos controladores pode apresentar vantagens quando se olha para as variáveis que eles estão a controlar mas pode penalizar bastante outras variáveis do sistema que não são controladas pelo controlador.

Estes controladores determinam a sua ação de controlo através de três etapas. Na primeira o controlador obtém o estado atual do modelo que controla. De seguida formula e resolve um problema de otimização (neste caso um problema de seguimento linear quadrático) e determina a ação de controlo para um horizonte de controlo finito, que garante a melhor performance para a predição considerada. Por último o controlador aplica a ação de controlo determinada e repete todo o processo no próximo ciclo de controlo.

Seguindo esta filosofia de controlo, foram dimensionadas e testadas duas estruturas de controlo descentralizado diferentes. Uma que controla apenas o nível medido no sensor imediatamente antes da comporta que está a ser atuada. Outra que controla o nível medido em dois sensores, um antes da comporta e outro depois da comporta (ex. Controlador que atua sobre a comporta C2, controla os níveis da água medidos pelos sensores J2 e J3).

### 5.1.1. Formulação do Problema de Seguimento Linear Quadrático

Considerando que, no primeiro caso, a dinâmica de cada troço (i) do canal é definida pelo sistema linear resultante das seguintes equações:

$$x_i(k + 1) = A_i x_i(k) + B_i u_i(k) \quad (5.1a)$$

$$y_i(k) = C_i x_i(k) \quad (5.2a)$$

Em que:

- $x \in \mathfrak{R}^n$  : Representa os estados do sistema;
- $u \in \mathfrak{R}^m$  : Representa as entradas do sistema/ação de controlo;

- $y \in \mathfrak{R}^p$  : Representa as saídas do sistema/os valores do nível de água medidos num determinado sensor.

E que no segundo caso, a dinâmica de cada troço (i) e do troço posterior (j), onde  $j=i+1$ , tendo outra letra apenas para distinguir o troço, do canal é também definida pelo sistema linear resultante das seguintes equações:

$$x_{ij}(k+1) = A_{ij}x_{ij}(k) + B_{ij}u_i(k) \quad (5.1b)$$

$$y_{ij}(k) = C_{ij}x_{ij}(k) \quad (5.2b)$$

Em que:

- $x \in \mathfrak{R}^n$  : Representa os estados do sistema;
- $u \in \mathfrak{R}^m$  : Representa as entradas do sistema/ação de controlo;
- $y \in \mathfrak{R}^{p \times 2}$  : Representa as saídas do sistema/os valores do nível de água medidos num determinado sensor de cada um dos troços i e j.

O objetivo de controlo, nos dois casos, é a minimização da seguinte função quadrática de custo, equação (5.3) [23], através da sucessiva determinação de  $u_i(k)$  sob a restrição da equação de saída do sistema (5.2a e 5.2b).

$$J_i = \frac{1}{2}(y_i(N) - r_i(N))^T S (y_i(N) - r_i(N)) + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{N-1} [(y_i(k+j) - r_i(k+j))^T Q (y_i(k+j) - r_i(k+j)) + u_i^T(k+j) R u_i(k+j)] \quad (5.3)$$

Onde:

- $Q \in \mathfrak{R}^{p \times p}$  : Matriz simétrica semidefinida positiva que representa a penalização sobre o desvio em relação à referência;
- $S \in \mathfrak{R}^{p \times p}$  : Matriz simétrica semidefinida positiva que representa a penalização sobre o desvio final em relação à referência;
- $R \in \mathfrak{R}^{m \times m}$  : Matriz simétrica semidefinida positiva que representa a penalização sobre a ação de controlo;
- $N$  : Horizonte de controlo.

### 5.1.2. Solução do Problema de Seguimento Linear Quadrático

A solução do problema de Seguimento Linear Quadrático é igual nos dois casos. A única diferença, entre ambos os casos, está nas dimensões da matriz de saída dos sistemas,  $y_i$  e  $y_{ij}$ , uma vez que no primeiro caso o controlador controla o nível medido apenas num sensor e no segundo caso o nível medido em dois.

---

A solução do problema de Seguimento Linear é apresentada no Anexo I desta dissertação recorrendo às referências [23], [24], [25] e [26].

### 5.1.3. Obtenção dos modelos de estado lineares

Esta obtenção de novos modelos foi justificada pela necessidade da utilização de modelos MIMO e controladores por retroação de estados no algoritmo de controlo ótimo, bem como a opção de evitar erros analíticos aquando da passagem dos modelos em função transferência para espaço de estados.

De notar que o processo de obtenção dos novos modelos foi em todo idêntico ao descrito no Capítulo 4. Apenas diferiu com a estimação e seleção de modelos de estado em vez de modelos caracterizados por polinómios  $A(q^{-1})$  e  $B(q^{-1})$ .

As equações que representam um modelo de estado podem ser agrupadas sob a forma de vetores e matrizes. Estas matrizes e vetores são designadas por:

- Matriz A : Matriz da dinâmica do modelo, que relaciona as variáveis de estado com as derivadas;
- Matriz B : Matriz (ou vetor) de entrada, que relaciona as variáveis de estado com os sinais de entrada;
- Matriz C : Matriz (ou vetor) de saída, que relaciona as variáveis de estado com os sinais de saída;
- Matriz D : Matriz (ou vetor) que é responsável pela influência, instantânea, do sinal de entrada em relação ao valor do sinal de saída, quando o valor da matriz é diferente de zero.

### Modelo de estado para o sistema SISO

O modelo de estado, obtido através da ferramenta *ident* do Matlab, que tem como sinal de entrada o movimento da comporta C2 e como sinal de saída o nível medido no sensor J2, é o seguinte:

$$A = \begin{bmatrix} 1.0441 & 0.2988 & -1.2396 & -0.7030 & 0.5965 \\ -0.0851 & 0.6711 & 1.5073 & 0.6436 & -0.6931 \\ 0.1828 & 0.0952 & -0.5162 & 0.6001 & 0.4915 \\ 0.1642 & 0.0102 & -0.3172 & -0.7252 & -0.4269 \\ 0.0455 & -0.0566 & -0.0660 & 0.3788 & -0.3097 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -261.43 \\ 316.18 \\ -308.12 \\ 717.87 \\ 1004.4 \end{bmatrix}$$

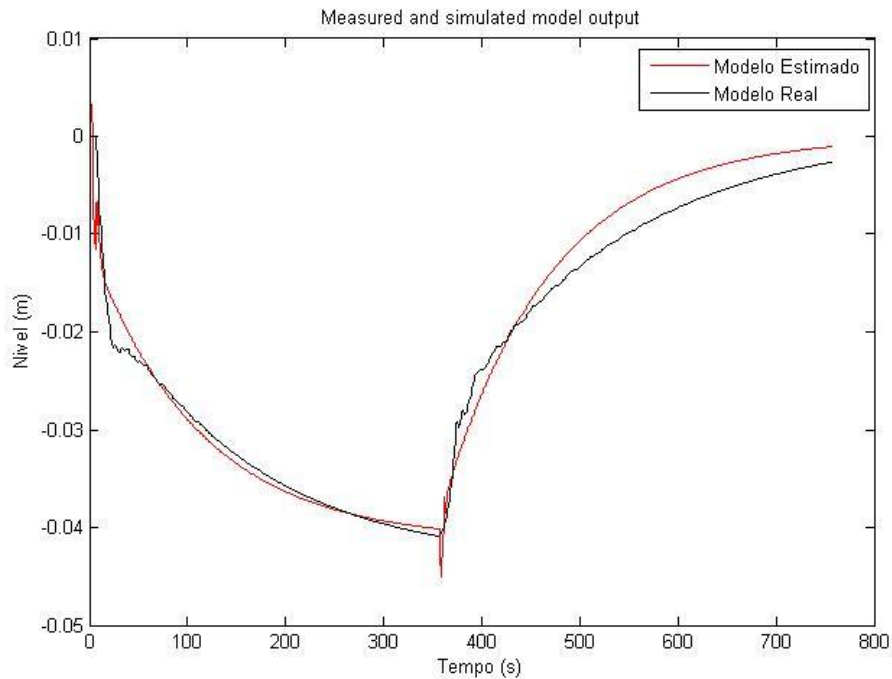
$$C = [0.22351 \quad 0.21758 \quad 0.032889 \quad 0.00085 \quad -0.00077]$$

$$D = [0]$$

$$X_0 = \begin{bmatrix} 13.3081 \\ -75.5888 \\ -145.7558 \\ 67.2941 \\ -158.0590 \end{bmatrix}$$

Em que,

- $X_0$  : É o estado inicial,  $x(0)$ .



**Figura 5.1** – Comparação entre o modelo real e o estimado, sem offset

Como se pode observar na figura 5.1, a dinâmica do modelo estimado embora não seja totalmente idêntica à do modelo real apresenta um comportamento bastante semelhante, aquando das variações de nível. De notar que, como o tempo de subida e o tempo de descida são diferentes no modelo real estamos perante um modelo não linear, sendo impossível a estimação de um modelo linear igual. Desta forma, considerou-se o modelo linear como válido para representar a dinâmica do modelo real.

## Modelo de estado para o sistema MIMO

Neste caso o sinal de entrada do modelo obtido é o mesmo que o modelo anterior mas os sinais de saída são dois, o nível medido em J2 (troço (i)) e o nível medido em J3 (troço posterior (j)). Por ter dois sinais de saída o matriz C vai ser  $2 \times n$ , com a primeira linha associada ao valor medido no sensor J2 e a segunda ao valor em J3:

$$y_{j2}(k) = C_{1 \times n} x_{ij}(k) \quad (5.4)$$

$$y_{j3}(k) = C_{2 \times n} x_{ij}(k) \quad (5.4)$$

Assim as matrizes de estado do modelo linear obtidas foram as seguintes:

$$A = \begin{bmatrix} 0.9645 & -0.0032 & 0.0072 & 0.0272 & 0.0020 \\ 0.0439 & 1.0227 & -0.0556 & -0.2104 & -0.1349 \\ -2.1357 & 0.2786 & -0.3214 & -2.7393 & -0.4865 \\ -0.1932 & -0.0282 & 0.0133 & 0.9449 & 0.0923 \\ 0.0965 & 0.0413 & -0.0633 & -0.3459 & 0.7414 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -1.3279 \\ 11.166 \\ 229.8 \\ -4.351 \\ 13.693 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0.1309 & 0.2027 & -0.0033 & 0.0247 & -0.0922 \\ -0.0271 & 0.1434 & -0.0024 & 0.0204 & -0.0736 \end{bmatrix}$$

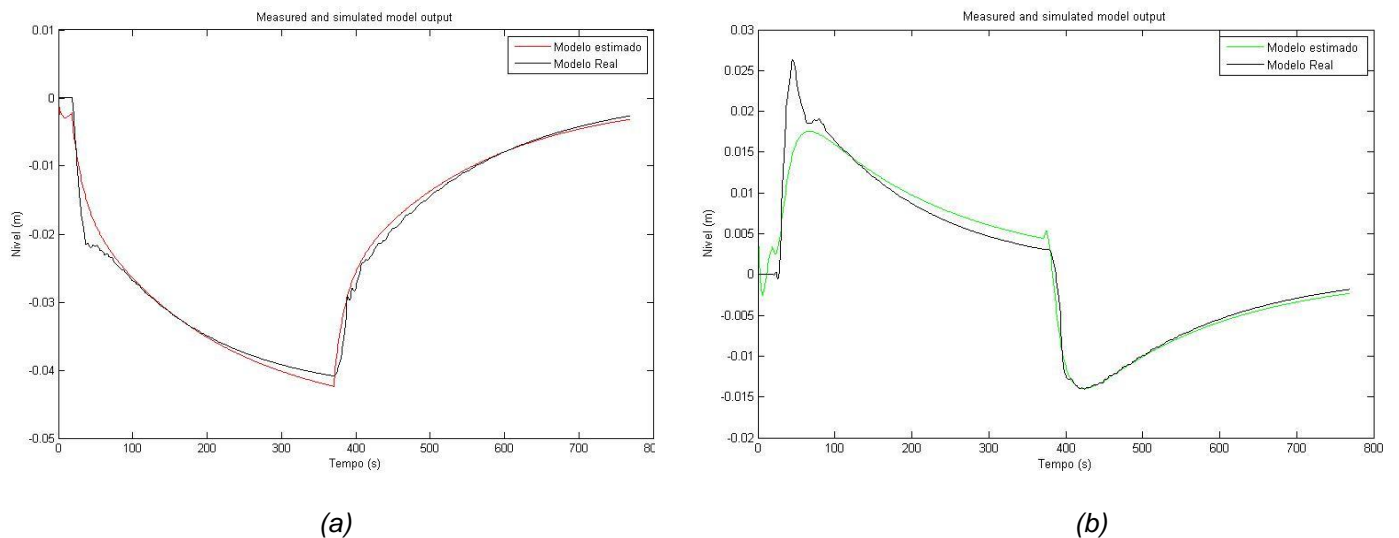
$$D = [0]$$

$$X0 = \begin{bmatrix} 0.0130 \\ -0.1995 \\ -4.4968 \\ -0.0363 \\ -0.2653 \end{bmatrix}$$

Em que,

- $X0$  : É o estado inicial,  $x(0)$ .

Como comprova a figura 5.2, optou-se por dar uma maior importância à dinâmica do modelo visto do sensor de medida imediatamente antes da comporta atuada. Esta opção é justificada pela distância dos sensores de medida em relação à comporta atuada, ou seja, no caso do nível medido no sensor posterior à comporta atuada (sensor J3), existe uma maior influencia no nível da água ao movimento da comporta C3 em relação ao movimento da comporta C2. Este efeito é mostrado no ponto 5.1.5 e 5.3.3 desta dissertação.



**Figura 5.2 - Comparação entre o modelo real e o estimado, sem offset, (a) nível em J2 e (b) nível em J3**

#### 5.1.4. Resposta a um degrau do modelo linear SISO com controlador ótimo

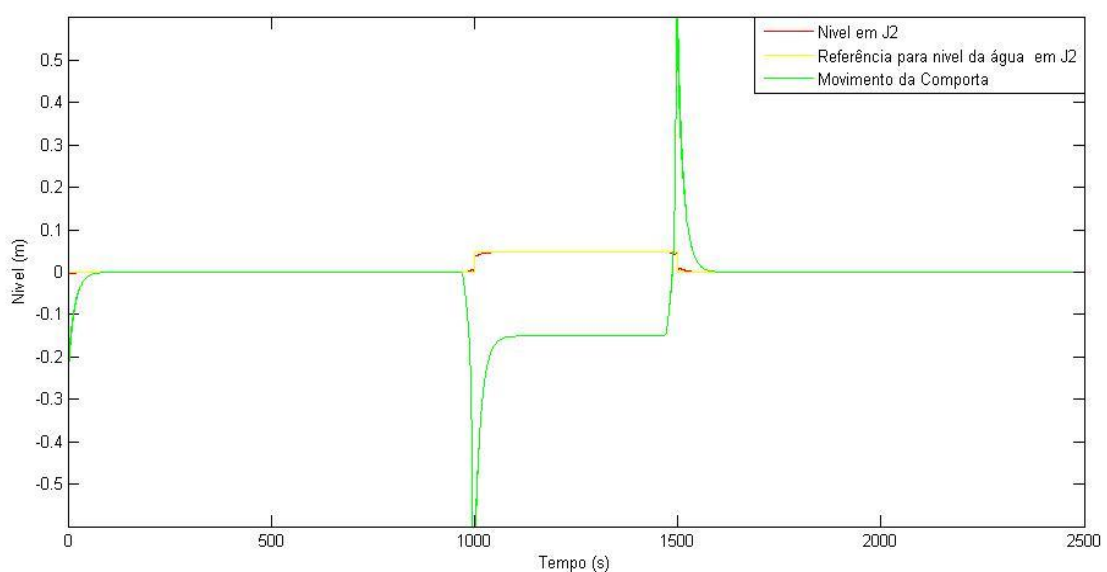
Para verificar se a resposta a um degrau do modelo linear cumpre as metas necessárias para poder ser usado no simulador em *Simulink*, procedeu-se ao seguinte teste, Figura 5.3:

- Tempo de simulação: 2500 s;
- Degrau de 0.05 m de amplitude na referência, entre o segundo 1000 e 1500;
- Horizonte de controlo,  $N$ , de 30 s.

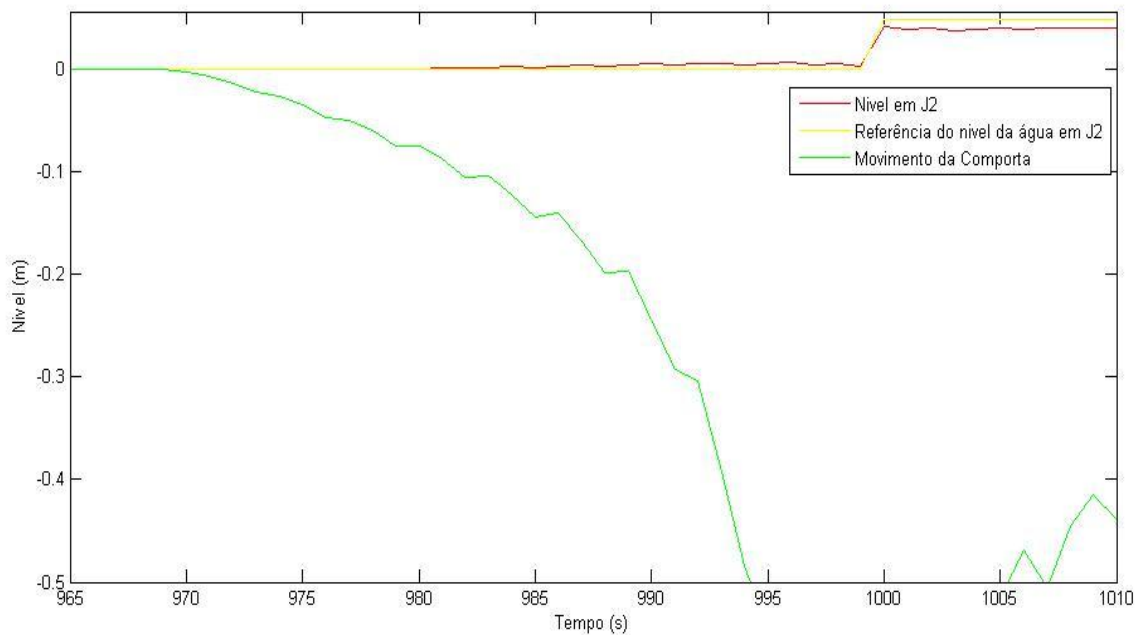
A calibração dos pesos  $Q$ ,  $R$  e  $S$  da função de custo foi executada previamente por via experimental obtendo-se os seguintes valores:

- $Q = 10$
- $R = 0.1$
- $S = 10$

Analisando os resultados apresentados na Figura 5.3, constata-se que a saída do modelo linear acompanha a referência praticamente em todo o espaço temporal do teste. Sabendo que no modelo não linear existe saturação na atuação das comportas, prevê-se que os tempos de subida e a sobrelevação do nível da água medido sejam maiores, aquando da simulação do controlador ótimo SISO. Observa-se também a capacidade de previsão da existência do degrau na referência ao segundo 1000, por parte do controlador. Devido ao horizonte de controlo,  $N$ , o controlador consegue ver uma previsão dos valores que a referência terá nos 30 segundos posteriores ao instante de controlo  $k$ . Desta forma o controlador começa a atuar sensivelmente 30 segundos antes da ocorrência do degrau na referência, como é mostrado na figura 5.4.



**Figura 5.3** – Resposta ao degrau do modelo linear SISO, com um horizonte de controlo de 30s



**Figura 5.4 – Pormenor da capacidade de previsão do controlador ótimo com horizonte de controlo finito**

Na altura da simulação em *Simulink*, que se apresenta no ponto 5.3.3 desta dissertação, optou-se por diminuir o valor do peso sobre a ação de controlo,  $R$ , aumentando a penalização. Esta opção prendeu-se com o facto de evitar os picos na ação de controlo, apresentados na figura 5.3, que poderão levar ao aparecimento de não linearidades no sistema devido à saturação das comportas.

### 5.1.5. Resposta a um degrau do modelo linear MIMO com controlador ótimo

Com o objetivo de se proceder a comparações credíveis entre os modelos lineares, SISO e MIMO com uma estrutura de controlo descentralizado, bem como verificar a validade deste modelo linear para a simulação *Simulink*, realizou-se o mesmo teste do ponto anterior deste relatório, variando a referência do nível em J2 e J3:

- Tempo de simulação: 2500 s;
- Degrau de 0.05 m de amplitude na referência do nível J2, entre o segundo 1000 e 1500;
- Degrau de 0.05 m de amplitude na referência do nível J2, entre o segundo 2000 e 2500;
- Horizonte de controlo,  $N$ , de 30 s.

À semelhança do ponto anterior, a calibração dos pesos  $Q$ ,  $R$  e  $S$  da função de custo também foi realizada experimentalmente. A grande diferença prende-se com a dimensão das

---

matrizes de peso  $Q$  e  $S$ . Como este modelo tem duas saídas, as matrizes  $Q$  e  $S$  têm dimensão 2x2, uma vez que representam a penalização sobre o desvio em relação às referências e sobre os desvios finais, respetivamente. Os valores obtidos são os seguintes:

$$\text{➤ } Q = \begin{bmatrix} q1 & 0 \\ 0 & q2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{➤ } R = 0.01$$

$$\text{➤ } S = \begin{bmatrix} s1 & 0 \\ 0 & s2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

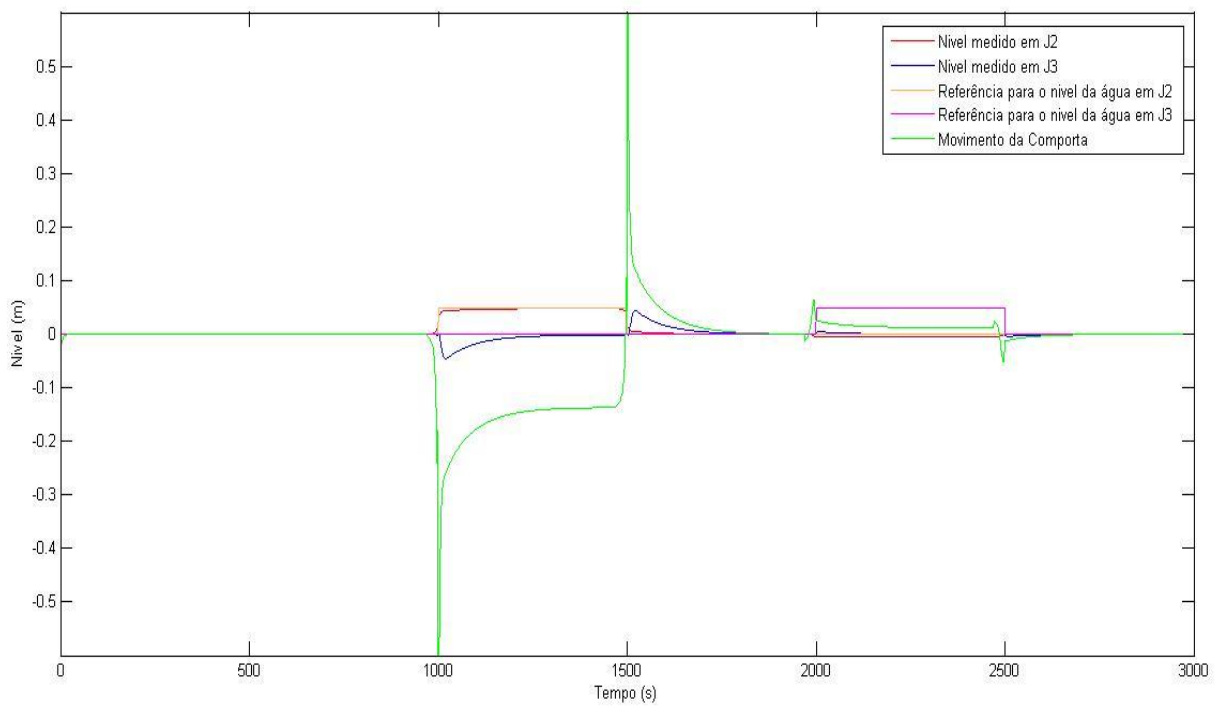
Onde:

- $q1$  : Penalização sobre o desvio em relação à referência para o nível medido em J2
- $q2$  : Penalização sobre o desvio em relação à referência para o nível medido em J3
- $s1$  : Penalização sobre o desvio final para o nível medido em J2
- $s2$  : Penalização sobre o desvio final para o nível medido em J3

A opção, aquando da obtenção dos valores dos pesos, de ter um valor maior para  $q1$  em relação  $q2$  prende-se com o critério utilizado no ponto 5.1.3. Esta diferença de valores entre os pesos faz com que o controlador tente reduzir mais o desvio do nível medido em J2 do que o medido em J3. No caso da penalização sobre os desvio final,  $S$ , optou-se por ter os valores iguais pelo facto de se considerar como obrigatoriedade, em condições de estacionariedade, os valores do nível água serem iguais para os dois casos.

Uma vez obtidos os valores dos pesos, realizou-se a resposta ao degrau do modelo linear MIMO apresentada na figura 5.5. Pode-se observar o efeito dos pesos no comportamento do controlador. Quando é realizado o degrau na referência do nível em J2, do segundo 1000 ao 1500, o controlador fecha de uma forma brusca a comporta para que o nível em J2 siga a referência, penalizando o nível medido em J3 devido a esse mesmo fecho. Quando é dado o degrau na referência do nível em J3, do segundo 2000 ao 2500, o mesmo já não acontece. Isto deve-se devido à diferença de valores da matriz  $Q$ , o que leva a que a amplitude do movimento da comporta seja dez vezes menor, quando se compara o comportamento do controlador para os dois degraus, e de sinal contrario pelo sensor estar situado à frente e não atrás da comporta.

Concluindo, esta estrutura de controlo é capaz de controlar, não simultaneamente, os níveis da água nos dois sensores, mas à medida que se vai equilibrando os valores de  $q_1$  e  $q_2$ , o erro num dos valores medidos vai aumentando e no outro diminuindo até atingirem os mesmo valores de erro.



**Figura 5. 5** - Resposta ao degrau do modelo linear MIMO, com um horizonte de controle de 30s

---

## 5.2. Controlo Ótimo Distribuído

Um canal de regadio real pode ter centenas de quilómetros e milhares de comportas com apenas uma entrada de água. Visto que a água percorre o canal através da força gravítica, provocada pela pequena inclinação do canal, uma porção de água pode demorar horas ou mesmo dias a percorrer a distância entre a entrada e um ponto do canal onde é necessária essa porção de água.

Com estruturas de controlo local, ou estruturas de controlo onde os controladores que atuam sobre as comportas apenas têm em conta os efeitos sobre as variáveis que estão a controlar, o tempo necessário para uma porção de água se deslocar de um ponto para o outro do canal pode ser ainda maior. Um exemplo deste possível aumento de tempo pode ocorrer quando um controlador, de uma comporta anterior ao ponto do canal onde é necessária essa porção de água, bloqueia o escoamento de água para satisfazer as suas próprias metas em vez de permitir o escoamento da porção de água necessária mais à frente. Estes atrasos na entrega da água necessária em certos pontos do canal podem motivar severos danos na agricultura que depende dessa água.

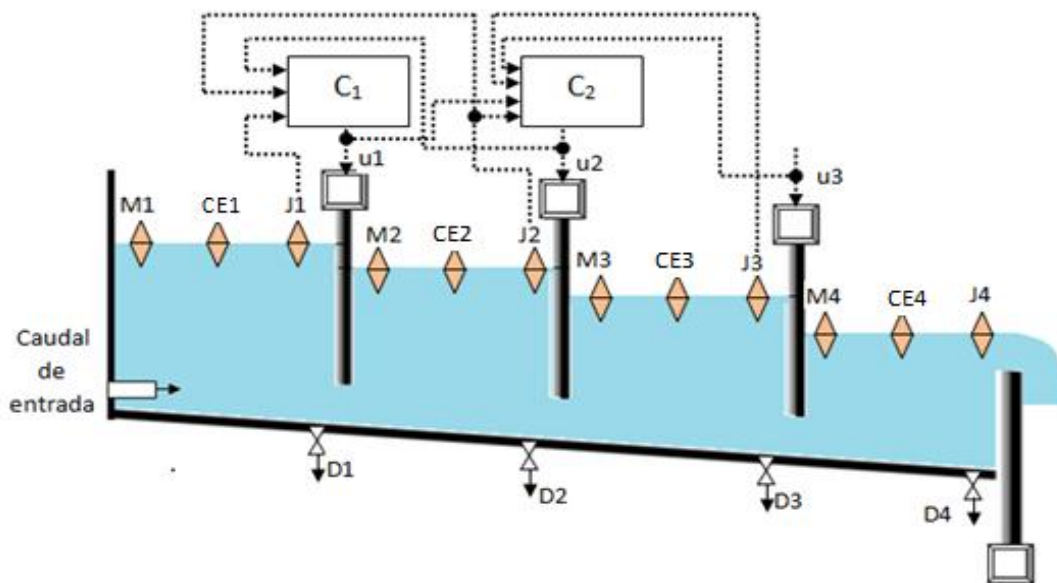
Com o objetivo de diminuir estes atrasos foi desenvolvida uma estrutura de controlo distribuído para o modelo do canal experimental de Évora.

Uma estrutura de controlo ótimo distribuído não é mais do que uma estrutura composta por controladores ótimos onde existe comunicação, cooperação e negociação entre os controladores [7]. Havendo esta interação entre os controladores, os controladores não só podem passar a contar com as contribuições que os outros controladores possam dar, bem como proceder a uma mútua negociação, através das possíveis ações de controlo que teriam pelo horizonte de controlo,  $N$ , de forma a aumentar a performance global do sistema que todos os controladores estão a controlar, e por consequência reduzir os atrasos na entrega de água em todos os pontos do canal.

No caso desta dissertação optou-se por apenas estabelecer comunicação entre controladores vizinhos, uma vez que cada comporta afeta a dinâmica de dois troços, o anterior e o seguinte. Assim, e considerando apenas os dois primeiros controladores, a nova estrutura de controlo utilizada é a apresentada na figura 5.6, onde:

- O controlador  $C_1$  tem como entradas, o valor do nível da água medido em J1 e J2 e o movimento da comporta  $C_2$ ;
- O controlador  $C_2$  tem como entradas, o valor do nível da água medido em J2 e J3 e o movimento das comportas  $C_1$  e  $C_3$ ;

Esta estrutura de controlo foi idealizada desta forma pensando nos níveis da água que são afetados pelo movimento de cada comporta. Como referido acima, o movimento de uma comporta afeta a dinâmica de dois troços. Por esta razão cada controlador olha para os valores de nível da água do troço anterior e posterior a fim de poder controlá-los.



**Figura 5.6 – Estrutura de Controle Distribuído**

Outro ponto desta estrutura prendeu-se com a comunicação entre controladores. Como cada trecho do canal tem uma comporta a montante e outra a jusante e os níveis de água de cada um são afetados pelo movimento das duas comportas. Desta forma, cada controlador recebe a informação da posição das comportas vizinhas (valores da ação de controle dos controladores vizinhos), afim de saber qual a contribuição que cada uma das comportas vai dar a cada um dos níveis da água que ele está a controlar, por cada instante de controle,  $k$ .

Uma vez estabelecida comunicação entre controladores vizinhos, foi desenvolvido uma etapa de negociação entre os controladores com a intenção de otimizar as contribuições de cada um no controle dos níveis de água, bem como garantir a coordenação e cooperação em cada ciclo de controle. Esta negociação assenta sob a obtenção das melhores posição das comportas/ações de controle através de várias iterações, tendo em conta um horizonte de controle finito e um algoritmo de controle bastante semelhante ao problema de seguimento linear quadrático, apresentado no ponto 5.2.1 e 5.2.2.

A negociação é composta por  $n$  iterações, até existir convergência nos valores das ações de controle para um horizonte de predição  $N$ . Quando os valores das ações de controle convergem para um valor fixo significa que as negociações entre os controladores chegaram ao fim e com sucesso.

O algoritmo de negociação entre controladores desenvolvido é o seguinte:

**Iteração 1:**

1. O controlador  $C_1$  calcula a sequência de controle,  $u_1$ , para o horizonte de controle,  $N$ , assumindo  $u_2$  constante e igual ao valor do instante anterior;
2. O controlador  $C_2$  calcula a sequência de controle,  $u_2$ , para o horizonte de controle,  $N$ , usando a sequência  $u_1$  calculada em 1, e assumindo  $u_3$  constante e igual ao valor do instante anterior;

---

**Iteração 2, 3, ..., n:**

3. O controlador  $C_1$  calcula a sequência de controlo  $u_1$ , usando a sequência  $u_2$  calculada na iteração anterior;
4. O controlador  $C_2$  calcula a sequência de controlo  $u_2$ , usando a sequência  $u_1$  calculada em 4, e usando a sequência  $u_3$  calculada na iteração anterior;
5. Os passos 3 e 4 são repetidos  $n$  vezes ate existir os valores das duas sequencias de controlo convergirem para valores fixos;

**Quando é atingida a convergência de valores:**

6. Aplica-se o primeiro valor de cada uma das sequências de controlo;
7. Passa-se ao instante seguinte, regressando ao ponto 1.

### 5.2.1. Formulação do Problema de Seguimento Linear Quadrático

Considerando que a dinâmica de cada troço (i) de canal é definida pelo sistema linear resultante das seguintes equações:

$$x_i(k+1) = A_i x_i(k) + B_i u_i(k) + \Gamma_i \delta_i(k) \quad (5.5)$$

$$y_i(k) = C_i x_i(k) \quad (5.6)$$

Em que:

- $y = [h_i(k) \quad h_{i+1}(k)]^T$  : Representa as saídas do sistema/os valores do nível de água medidos nos sensores;
- $\delta_i(k) = [u_{i-1}(k) \quad u_{i+1}(k)]^T$  : Representa o valor das posições da comporta anterior e posterior;
- $\Gamma_i$  : Matriz de ganhos, associada ao movimento da comporta anterior e posterior.

O objetivo de controlo, é a minimização da seguinte função quadrática de custo, equação (5.7) [23], através da sucessiva determinação de  $u_i(k)$  sob a restrição da equação de saída do sistema (5.6).

$$J_i = \frac{1}{2} (y_i(N) - r_i(N))^T S (y_i(N) - r_i(N)) + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{N-1} [(y_i(k+j) - r_i(k+j))^T Q (y_i(k+j) - r_i(k+j)) + u_i^T(k+j) R u_i(k+j)] \quad (5.7)$$

Onde:

- $Q \in \mathbb{R}^{p \times p}$  : Matriz simétrica semidefinida positiva que representa a penalização sobre o desvio em relação à referência;

- $S \in \mathfrak{R}^{p \times p}$  : Matriz simétrica semidefinida positiva que representa a penalização sobre o desvio final em relação à referência;
- $R \in \mathfrak{R}^{m \times m}$  : Matriz simétrica semidefinida positiva que representa a penalização sobre a ação de controlo;
- $N$  : Horizonte de controlo.

## 5.2.2. Solução do Problema

O princípio do máximo, ou mínimo, de Pontryaguin, que está na base do controlo ótimo, diz-nos que o melhor valor da ação de controlo,  $u(k)$ , é aquele que mais minimiza o valor da função Hamiltoniana, no instante  $k$  [24]. A função Hamiltoniana é uma forma de medida física de energia de um sistema dinâmico e que no caso da minimalização da função de custo (5.5) pode ser escrita da seguinte forma:

$$H(k) = \frac{1}{2} \left[ (y_i(k) - r_i(k))^T Q (y_i(N) - r_i(N)) + u_i^T(k) R u_i(k) \right] + \lambda^T(k+1) (A_i x_i(k) + B_i u_i(k) + \Gamma_i \delta_i(k)) \quad (5.8)$$

o que origina uma equação para o co-estado (sistema adjunto) ,  $\lambda$  [23]:

$$\lambda(k) = A_i^T \lambda(k+1) + C_i^T Q C_i x_i(k) - C_i^T Q r_i(k) \quad (5.9)$$

e a condição de estacionaridade definida por [23]:

$$\frac{\partial H}{\partial u_i} = 0 \Rightarrow B_i^T \lambda(k+1) + R u_i(k) = 0 \quad (5.10)$$

Resolvendo a equação (5.10) em ordem a  $u_i(k)$  fica-se com:

$$u_i(k) = -R^{-1} B_i^T \lambda(k+1) \quad (5.11)$$

Substituindo a equação (5.11) nas equações de estado (5.5) e (5.6), permite escrever a dinâmica do sistema Hamiltoniano na forma:

$$\begin{bmatrix} x_i(k+1) \\ \lambda(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_i & -B_i R^{-1} B_i^T \\ C_i^T Q C_i & A_i^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i(k) \\ \lambda(k+1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \Gamma_i \\ -C_i^T Q & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_i(k) \\ \delta_i(k) \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

Desta forma as condições de fronteira associadas a esta dinâmica são as seguintes:

$$\begin{aligned} \lambda(N) &= C_i^T S (C_i x_i(N) - r_i(N)) \\ x_i(0) &\quad (\text{condição inicial conhecida}) \end{aligned} \quad (5.13)$$

A partir da equação (5.13) podemos assumir que, para todos os  $k \leq N$ , o co-estado admite uma solução da forma [23]:

$$\lambda(k) = P_k x(k) - m(k) \quad (5.14)$$

Em que:

- $P_k$  e  $m(k)$  são duas sequências a determinar.

De notar que o pressuposto (5.14) só é validado se a matriz  $P_k$  e o vetor  $m(k)$  foram determinados com equações consistentes em relação à solução do problema.

Para determinar estas equações, substitui-se a equação (5.14) na primeira linha da matriz da dinâmica do Hamiltoniano (5.12), chegando-se à seguinte relação:

$$x_i(k+1) = A_i x_i(k) - B_i R^{-1} B_i^T P_{k+1} x_i(k+1) + B_i R^{-1} B_i^T m(k+1) + \Gamma_i \delta_i(k) \quad (5.15)$$

que pode ser resolvida em ordem a  $x_i(k+1)$ , conduzindo a:

$$x_i(k+1) = (I - B_i R^{-1} B_i^T P_{k+1})^{-1} (A_i x_i(k) + B_i R^{-1} B_i^T m(k+1) + \Gamma_i \delta_i(k)) \quad (5.16)$$

Em que  $I$  é a matriz identidade.

Combinando a equação do co-estado, em (5.12), com as expressões (5.14) e (5.16) obtém-se:

$$P_k x_i(k) - m(k) = C_i^T Q C_i x_i(k) + A_i^T P_{k+1} (I - B_i R^{-1} B_i^T P_{k+1})^{-1} (A_i x_i(k) + B_i R^{-1} B_i^T m(k+1) + \Gamma_i \delta_i(k)) - A_i^T m(k) - C_i^T Q r_i(k) \quad (5.17)$$

Que reorganizando a equação fica-se com:

$$[-P_k + A_i^T P_{k+1} (I + B_i R^{-1} B_i^T P_{k+1})^{-1} A_i + C_i^T Q C_i] x_i(k) + [m(k) + A_i^T P_{k+1} (I - B_i R^{-1} B_i^T P_{k+1})^{-1} (B_i R^{-1} B_i^T m(k+1) + \Gamma_i \delta_i(k)) - A_i^T m(k) - C_i^T Q r_i(k)] = 0 \quad (5.18)$$

Uma vez que esta expressão se deve verificar para quaisquer sequências  $x_i(k)$ , associadas a qualquer valor possível de  $x_i(0)$ , a única forma de tal ser assegurado é se cada uma das parcelas da expressão anterior for, isoladamente, igual a zero. Desta forma, e usando o lema da inversão das matrizes [26], pode-se chegar às equações que permitem calcular  $P_k$ , (5.19), e  $m(k)$  (5.20).

$$P_k = A_i^T [P_{k+1} - P_{k+1} B_i (B_i^T P_{k+1} B_i + R)^{-1} B_i^T P_{k+1}] A_i + C_i^T Q C_i \quad (5.19)$$

$$\begin{aligned}
m(k) = & \\
& [A_i^T - A_i^T P_{k+1} B_i (B_i^T P_{k+1} B_i + R)^{-1} B_i^T] m(k+1) + C_i^T Q r_i(k) - \\
& A_i^T P_{k+1} (I + B_i R^{-1} B_i^T P_{k+1})^{-1} \Gamma_i \delta_i(k)
\end{aligned} \tag{5.20}$$

Comparando as expressões (5.13) e (5.14), as condições de fronteira são dadas por:

$$\begin{cases} P_N = C_i^T S C_i \\ m(N) = C_i^T R r_i(N) \end{cases} \tag{5.21}$$

Dado que ambas as sequências podem ser calculadas, de uma forma recursiva, o pressuposto (5.14) é válido. Desta forma pode-se calcular a ação de controlo através da seguinte equação:

$$u_i(k) = -R^{-1} B_i^T \lambda(k+1) = -R^{-1} B_i^T (P_{k+1} x_i(k+1) - m(k+1)) \tag{5.22}$$

Como na expressão (5.18) o sinal da ação de controlo, no instante  $k$ , depende do estado do sistema no instante  $k+1$ , que não é conhecido no instante  $k$ , esta lei de controlo não é causal. Para resolver o efeito da não causalidade, substitui-se a equação da dinâmica do troço do canal, (5.5), na expressão anterior, obtendo-se:

$$u_i(k) = -R^{-1} B_i^T P_{k+1} (A_i x_i(k) + B_i u_i(k) + \Gamma_i \delta_i(k)) + R^{-1} B_i^T m(k+1) \tag{5.23}$$

Multiplicando ambos os lados da igualdade por  $R$  e resolvendo em ordem a  $u_i(k)$ , chega-se à expressão final para o cálculo da ação de controlo que melhor minimiza a função de custo (5.7).

$$u_i(k) = (B_i^T P_{k+1} B_i + R)^{-1} B_i^T [-P_{k+1} (A_i x_i(k) + \Gamma_i \delta_i(k)) + m(k+1)] \tag{5.24}$$

Uma vez obtida a expressão para o cálculo da ação de controlo, pode-se agora definir os ganhos de avanço e de retroação,  $K_k^v$  e  $K_k$  respetivamente, como:

$$K_k^v = (B_i^T P_{k+1} B_i + R)^{-1} B_i^T \tag{5.25}$$

$$K_k = K_k^v P_{k+1} A_i \tag{5.26}$$

Assim a expressão para o cálculo da ação de controlo, ou lei de controlo, pode ser escrita da seguinte forma:

$$u_i(k) = -K_k x_i(k) + K_k^v m(k+1) - P_{k+1} \Gamma_i \delta_i(k) \tag{5.27}$$

Ao analisar a lei de controlo pode-se constatar a existência de três componentes. Uma obtida por realimentação das variáveis de estado,  $-K_k x_i(k)$ , outra associada à referencia

$r_i(k+1)$ ,  $K_k^v m(k+1)$ , pelo termo  $m(k+1)$ , e por fim outra associada à interacção entre os subsistemas adjacentes.

### 5.2.3. Obtenção de um modelo de estado Simplificado

Inicialmente e com o pensamento de validar todo o algoritmo de controlo de uma forma mais simplificada, considerou-se a dinâmica de cada troço de canal representada por funções transferência de primeiro grau, estáveis e observáveis, seguindo a estrutura apresentada no ponto 5.2.1, e um maior atraso quanto maior for a distância entre comporta e o sensor de medida. De referir que as funções transferência, apresentadas a baixo, não representam as dinâmicas dos troços do canal. Apenas foram concebidas para a validação teórica do novo algoritmo de controlo. No entanto usou-se as mesmas designações de forma a facilitar a leitura.

Logo, considerando que a dinâmica do primeiro troço de canal em J1, por atuação da comporta C1, é:

$$G_{C1-J1} = \frac{1}{z-0.8} \quad (5.28)$$

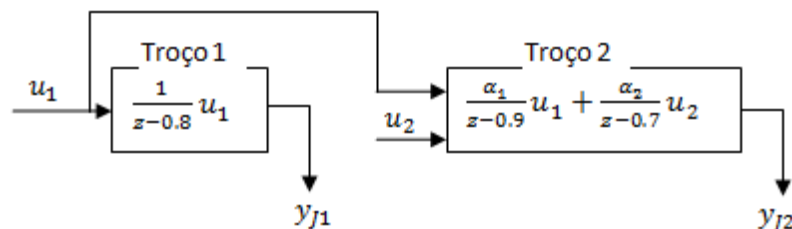
E que a dinâmica do segundo troço de canal em J2, por atuação da comporta C1, é:

$$G_{C1-J2} = \frac{\alpha_1}{z-0.9} \quad (5.29)$$

Considerando que, por atuação da comporta C2, a dinâmica do segundo troço de canal em J2 é:

$$G_{C2-J2} = \frac{\alpha_2}{z-0.7} \quad (5.30)$$

Utilizando a estrutura de controlo em 5.2.1, as dinâmicas dos dois primeiros troços são as apresentadas na figura 5.7, que são as dinâmicas vistas pelo controlador da comporta C1.



**Figura 5.7** – Esquema das dinâmicas dos dois primeiros troços

Onde:

- $u_1$  e  $u_2$  : Movimento das comportas C1 e C2, respectivamente;
- $y_{j1}$  e  $y_{j2}$  : Nível medido nos sensores J1 e J2, respectivamente.

Assim, e a partir da figura 5.7, as dinâmicas do primeiro troço e do segundo troço do canal são:

$$y_{J1} = \frac{1}{z-0.8} u_1 \quad (5.31)$$

$$y_{J2} = \frac{\alpha_1}{z-0.9} u_1 + \frac{\alpha_2}{z-0.7} u_2 = \frac{\alpha_1(z-0.7)u_1 + \alpha_2(z-0.9)u_2}{z^2 - 1.6z + 0.63} \quad (5.32)$$

Uma vez que todo o algoritmo de controlo considera que a dinâmica de cada troço é representada pelas equações 5.5 e 5.6, o próximo passo passa pela passagem das funções transferência para modelos em espaço de estados.

Com o objetivo de garantir a observabilidade dos modelos em espaço de estado, esta passagem é feita recorrendo à forma canónica da observabilidade.

A forma canónica da observabilidade diz-nos que sempre que um sistema cuja matriz da dinâmica,  $A$ , se encontra na forma diagonal ou na forma canónica de Jordan [32] (diagonal por blocos), é completamente observável se todos os elementos das colunas da matriz  $C$ , que correspondem à primeira linha de cada bloco de Jordan, forem diferentes de zero [31].

Assim, considerando um sistema representado por uma função transferência:

$$Y(s) = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0} U(s) \quad (5.33)$$

Multiplicando ambos os termos da fração por  $s^{-n}$  temos:

$$Y(s) = \frac{b_{n-1}s^{-1} + b_{n-2}s^{-2} + \dots + b_1s^{-(n-1)} + b_0s^{-n}}{1 + a_{n-1}s^{-1} + \dots + a_1s^{-(n-1)} + a_0s^{-n}} U(s) \Leftrightarrow$$

$$Y(s)[1 + a_{n-1}s^{-1} + \dots + a_1s^{-(n-1)} + a_0s^{-n}] = U(s)[b_{n-1}s^{-1} + b_{n-2}s^{-2} + \dots + b_1s^{-(n-1)} + b_0s^{-n}] \quad (5.34)$$

Invertendo a transformada de Laplace pode-se escrever [31]:

$$y(t) = \int_0^t [b_{n-1}u(\tau_1) - a_{n-1}y(\tau_1) + \int_0^{\tau_1} [b_{n-2}u(\tau_2) - a_{n-2}y(\tau_2) + \dots + \int_0^{\tau_{n-2}} [b_1u(\tau_{n-1}) - a_1y(\tau_{n-1}) + \int_0^{\tau_{n-1}} [b_0u(\tau_n) - a_0y(\tau_n)] d\tau_n] d\tau_{n-1}] \dots d\tau_2] d\tau_1 \quad (5.35)$$

A partir de (5.35), pode-se definir os estados e a saída do modelo como:

$$x_1(t) = \int_0^t [b_0u(\tau) - a_0y(\tau)] d\tau$$

$$x_2(t) = \int_0^t [b_1u(\tau) - a_1y(\tau) + x_1(\tau)] d\tau$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$x_{n-1}(t) = \int_0^t [b_{n-2}u(\tau) - a_{n-2}y(\tau) + x_{n-2}(\tau)] d\tau$$

$$x_n(t) = \int_0^t [b_{n-1}u(\tau) - a_{n-1}y(\tau) + x_{n-1}(\tau)]d\tau$$

$$y(t) = x_n(t)$$

Por fim, o conjunto de expressões integrais pode ser representado pelo modelo de estado:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-2} \\ b_{n-1} \end{bmatrix} u(t) \quad (5.36)$$

$$y(t) = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad (5.37)$$

Onde:

- $\dot{x}(t)$  : Estado futuro;
- $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$  : Matriz A;
- $\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-2} \\ b_{n-1} \end{bmatrix}$  : Matriz B;
- $[0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1]$  : Matriz C.

Aplicando a forma canônica da observabilidade às funções transferência (5.31) e (5.32), fica-se com:

$$\begin{bmatrix} x_{1J1}(k+1) \\ x_{1J2}(k+1) \\ x_{2J2}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.63 \\ 0 & 1 & 1.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1J1}(k) \\ x_{1J2}(k) \\ x_{2J2}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -0.7\alpha_1 & -0.9\alpha_2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix} \quad (5.38)$$

$$\begin{bmatrix} y_{J1}(k) \\ y_{J2}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1J1}(k) \\ x_{1J2}(k) \\ x_{2J2}(k) \end{bmatrix} \quad (5.39)$$

Tendo em conta que a dinâmica de um troço de canal é definida por (5.5) e (5.6), pode-se escrever (5.38) e (5.39) da seguinte forma:

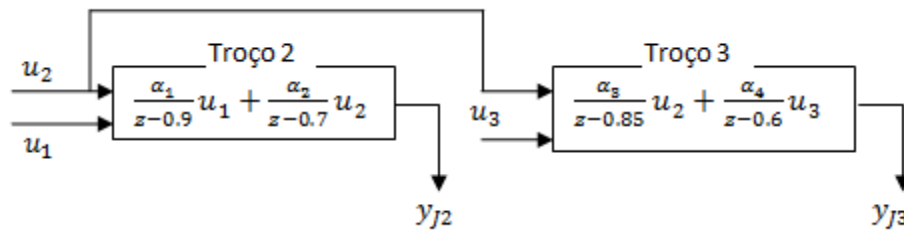
$$\begin{bmatrix} x_{1J1}(k+1) \\ x_{1J2}(k+1) \\ x_{2J2}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.63 \\ 0 & 1 & 1.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1J1}(k) \\ x_{1J2}(k) \\ x_{2J2}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -0.7\alpha_1 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} u_1(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ -0.9\alpha_2 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} u_2(k) \quad (5.40)$$

$$\begin{bmatrix} y_{J1}(k) \\ y_{J2}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1J1}(k) \\ x_{1J2}(k) \\ x_{2J2}(k) \end{bmatrix} \quad (5.41)$$

Em que,

- $\begin{bmatrix} 1 \\ -0.7\alpha_1 \\ \alpha_1 \end{bmatrix}$  : Matriz B;
- $\begin{bmatrix} 0 \\ -0.9\alpha_2 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}$  : de ganhos, associada ao movimento da comporta posterior,  $\Gamma$ ;
- $u_2(k)$  : Representa o valor das posições da comporta posterior,  $\delta_i(k)$ ;

Seguindo a mesma linha de pensamento, as dinâmicas do segundo e terceiro troços consideradas são as apresentadas no esquema da figura 5.8. Onde a dinâmica considerada para o terceiro troço é bastante idêntica à do segundo, para trazer algum tipo de veracidade de dinâmicas em relação ao modelo não linear do canal.



**Figura 5.8** - Esquema das dinâmicas dos dois primeiros troços

Passando para um modelo em espaço de estados, considerando as equações (5.5) e (5.6), tem-se:

$$\begin{bmatrix} x_{1J2}(k+1) \\ x_{2J2}(k+1) \\ x_{1J3}(k+1) \\ x_{2J3}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0.63 & 0 & 0 \\ 1 & 1.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.51 \\ 0 & 0 & 1 & 1.45 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1J2}(k) \\ x_{2J2}(k) \\ x_{1J3}(k) \\ x_{2J3}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.9\alpha_2 \\ \alpha_2 \\ -0.6\alpha_3 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} u_2(k) + \begin{bmatrix} -0.7\alpha_1 & 0 \\ \alpha_1 & 0 \\ 0 & -0.85\alpha_4 \\ 0 & \alpha_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_3(k) \end{bmatrix} \quad (5.42)$$

$$\begin{bmatrix} y_{J2}(k) \\ y_{J3}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1J2}(k) \\ x_{2J2}(k) \\ x_{1J3}(k) \\ x_{2J3}(k) \end{bmatrix} \quad (5.43)$$

Onde:

- $\begin{bmatrix} -0.9\alpha_2 \\ \alpha_2 \\ -0.6\alpha_3 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}$  : Matriz B;

- 
- $\begin{bmatrix} -0.7\alpha_1 & 0 \\ \alpha_1 & 0 \\ 0 & -0.85\alpha_4 \\ 0 & \alpha_4 \end{bmatrix}$ : Matriz de ganhos, associada ao movimento da comporta anterior e posterior,  $\Gamma$ ;
  - $\begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_3(k) \end{bmatrix}$ : Representa o valor das posições da comporta anterior e posterior,  $\delta_i(k)$ ;

#### 5.2.4. Resposta ao degrau do modelo Linear

Neste ponto da dissertação verifica-se a resposta do sistema a um degrau na referência. O objetivo deste teste é validar todo o novo algoritmo de controlo apresentado e calculado nos pontos 5.2.1 e 5.2.2 da dissertação.

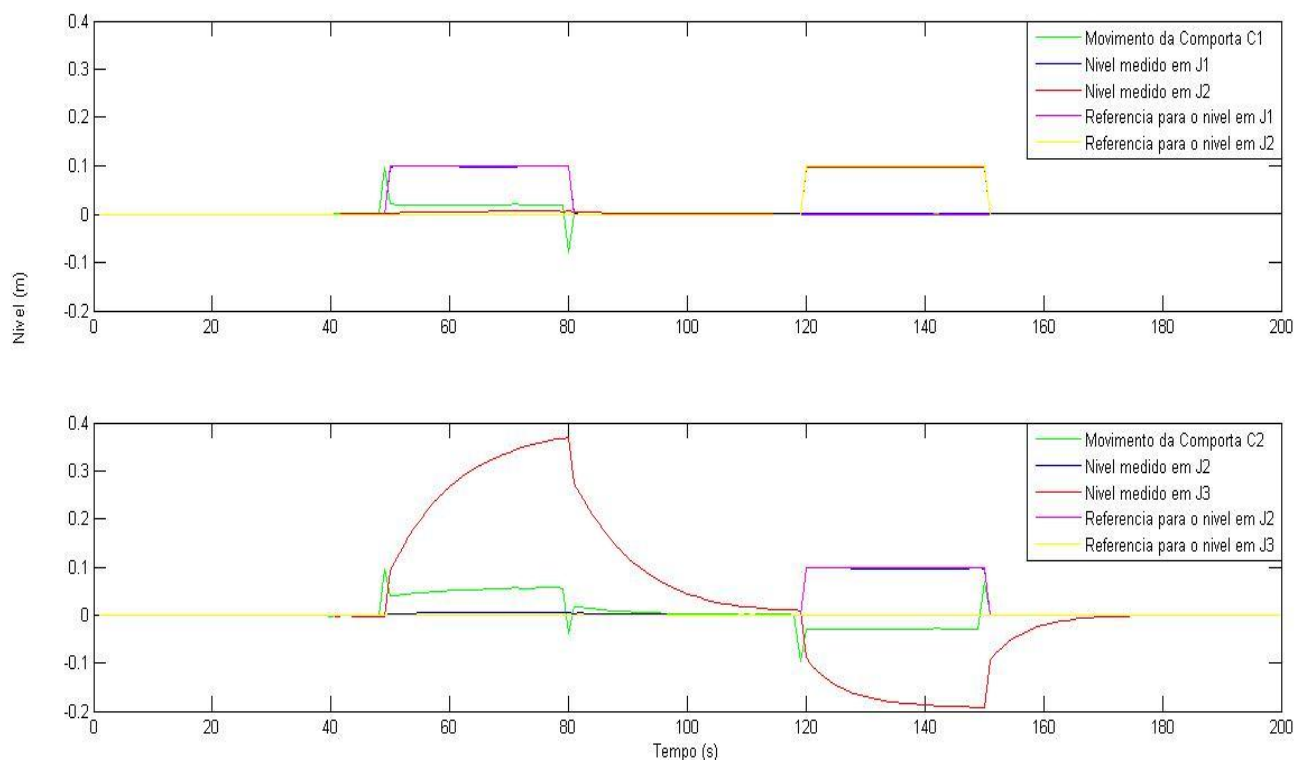
Para isso aplicou-se um degrau em cada uma das referências e observou-se o comportamento das duas ações de controlo e do seguimento das referências por parte das saídas dos modelos. Numa segunda fase verificou-se a existência de ajustamentos e convergência e dos valores de ação de controlo, através dos dados retirados da negociação entre controladores ao longo das iterações de negociação.

A resposta aos degraus nas referências dos modelos lineares, apresentada na figura 5.9, foi simulada da seguinte forma:

- Tempo de simulação: 200 s;
- Degrau de 0.1 m de amplitude na referência do nível J1, entre o segundo 50 e 80;
- Degrau de 0.1 m de amplitude na referência do nível J2, entre o segundo 120 e 150;
- Horizonte de controlo,  $N$ , de 10 s.
- Iterações de negociação entre controladores,  $n$ .
- Nível da comporta C3 fixo e igual a 0.

Verifica-se que, ao longo de toda a simulação, as saídas dos modelos seguem as suas referências, com a exceção do nível em J3 devido ao valor da comporta C3 estar fixo. Pode-se também observar que no momento do primeiro degrau a reação dos controladores é bastante semelhante em forma, o que sugere a existência de negociação entre ambos. A existência desta negociação entre os controladores faz com que o controlador C2 antecipe a subida de nível em J2 provocada pela abertura da comporta C1, começando a abrir a comporta C2 ao mesmo tempo. Este efeito comprova a existência de comunicação entre os controladores e uma possível melhoria dos erros nos níveis da água, provocados pelo movimento das comportas a montante dos sensores de medida. Observou-se também um atraso de cerca de uma unidade na reação dos modelos face à ação de controlo, provocado pelo grau dos

modelos utilizados. No entanto, e por nesta fase da dissertação os modelos testados com novo algoritmo de controlo não corresponderem a modelos lineares obtidos através das dinâmicas do canal não linear, é precipitado tirar conclusões sobre as reais melhorias obtidas pela utilização deste algoritmo.



**Figura 5.9 – Resposta ao degrau dos modelos lineares, com um horizonte de controlo de 10 s**

Por último, através da informação que se representa graficamente nas figuras 5.10 e 5.11, verificou-se que ao longo das iterações de negociação os valores das ações de controlo sofrem ajustes, em relação à primeira iteração, e convergem sempre para um valor fixo ao longo das dez iterações, tal como estava previsto teoricamente no ponto 5.2.1. Esta convergência de valores acontece entre a segunda e a terceira iteração, uma vez que nas iterações seguintes os ajustes dos valores das ações de controlo são da ordem dos  $10^{-4}$  m, podendo-se despreza-los (Ver tabela 5.1). Nas figuras 5.10 e 5.11 esta convergência está bem visível de dez em dez pontos. Os picos presentes nas figuras são referentes aos primeiros valores antes do início da negociação entre os controladores (1ª iteração), a partir daí dá-se início à negociação e por consequência à convergência até a um valor fixo, altura em que os controladores chegam a um acordo.

Confirmada a condição de ajuste e convergência dos valores da ação de controlo dos controladores fica também demonstrado que existem as iterações necessárias para os controladores chegarem a um acordo quanto à melhor posição das comportas, no instante de controlo  $k$ . Combinando a confirmação da convergência à boa resposta ao degrau dos modelos lineares ficou comprovado o bom funcionamento do algoritmo de controlo distribuído com

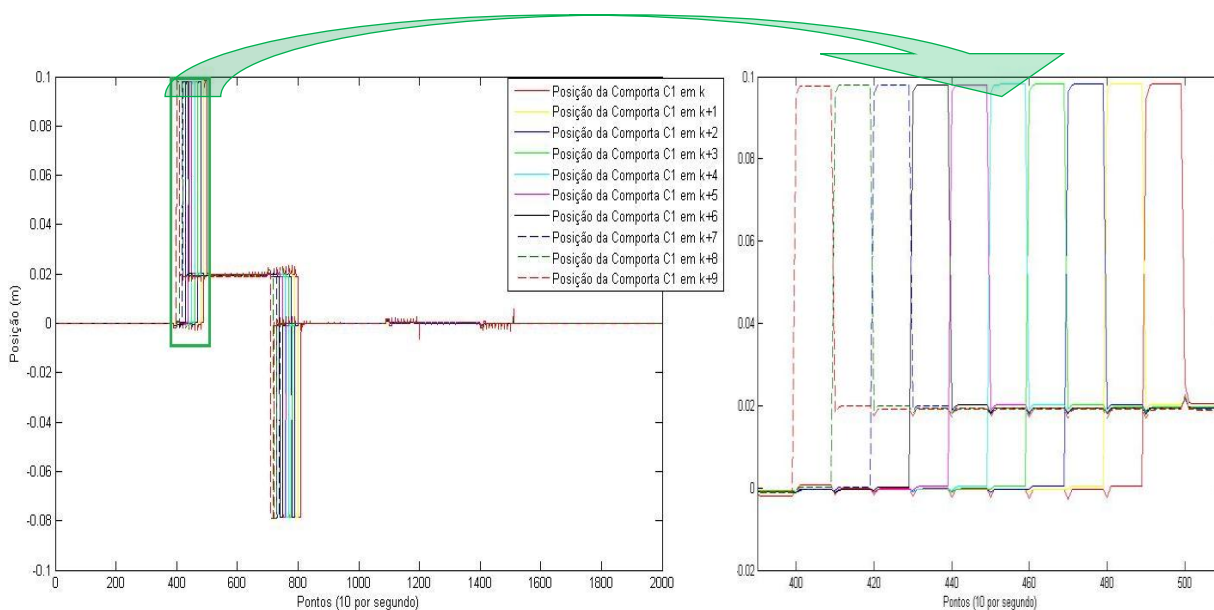
comunicação e negociação entre controladores, podendo-se passar para a implementação em modelos lineares retirados a partir do modelo do canal.

Iteração	$u_{j2}(k)$	$u_{j2}(k+1)$	$u_{j2}(k+2)$	$u_{j2}(k+3)$	$u_{j2}(k+4)$	$u_{j2}(k+5)$	$u_{j2}(k+6)$	$u_{j2}(k+7)$	$u_{j2}(k+8)$	$u_{j2}(k+9)$
1ª	-0.0022	0.0965	0.0191	0.0184	0.0183	0.0182	0.0180	0.0179	0.0177	0.0170
2ª	0.0004	0.0981	0.0202	0.0195	0.0195	0.0194	0.0193	0.0193	0.0192	0.0189
3ª	0.0005	0.0982	0.0202	0.0196	0.0195	0.0195	0.0194	0.0194	0.0193	0.0190
4ª	0.0005	0.0982	0.0202	0.0196	0.0195	0.0195	0.0194	0.0194	0.0193	0.0190
5ª	0.0005	0.0982	0.0202	0.0196	0.0195	0.0195	0.0194	0.0194	0.0193	0.0190
6ª	0.0005	0.0982	0.0202	0.0196	0.0195	0.0195	0.0194	0.0194	0.0193	0.0190
7ª	0.0005	0.0982	0.0202	0.0196	0.0195	0.0195	0.0194	0.0194	0.0193	0.0190
8ª	0.0005	0.0982	0.0202	0.0196	0.0195	0.0195	0.0194	0.0194	0.0193	0.0190
9ª	0.0005	0.0982	0.0202	0.0196	0.0195	0.0195	0.0194	0.0194	0.0193	0.0190
10ª	0.0005	0.0982	0.0202	0.0196	0.0195	0.0195	0.0194	0.0194	0.0193	0.0190

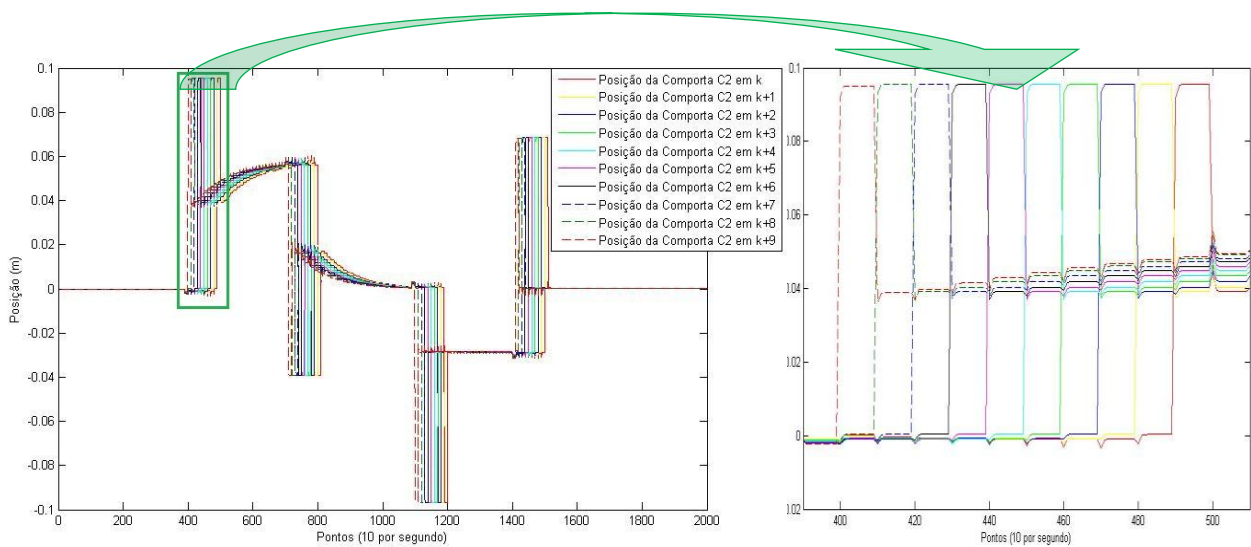
  

	$u_{j3}(k)$	$u_{j3}(k+1)$	$u_{j3}(k+2)$	$u_{j3}(k+3)$	$u_{j3}(k+4)$	$u_{j3}(k+5)$	$u_{j3}(k+6)$	$u_{j3}(k+7)$	$u_{j3}(k+8)$	$u_{j3}(k+9)$
1ª	-0.0023	0.0933	0.0373	0.0381	0.0396	0.0410	0.0421	0.0432	0.0441	0.0440
2ª	0.0001	0.0954	0.0390	0.0401	0.0418	0.0433	0.0447	0.0459	0.0470	0.0475
3ª	0.0003	0.0955	0.0392	0.0402	0.0419	0.0434	0.0448	0.0461	0.0472	0.0477
4ª	0.0003	0.0955	0.0392	0.0402	0.0419	0.0434	0.0448	0.0461	0.0472	0.0477
5ª	0.0003	0.0955	0.0392	0.0402	0.0419	0.0434	0.0448	0.0461	0.0472	0.0477
6ª	0.0003	0.0955	0.0392	0.0402	0.0419	0.0434	0.0448	0.0461	0.0472	0.0477
7ª	0.0003	0.0955	0.0392	0.0402	0.0419	0.0434	0.0448	0.0461	0.0472	0.0477
8ª	0.0003	0.0955	0.0392	0.0402	0.0419	0.0434	0.0448	0.0461	0.0472	0.0477
9ª	0.0003	0.0955	0.0392	0.0402	0.0419	0.0434	0.0448	0.0461	0.0472	0.0477
10ª	0.0003	0.0955	0.0392	0.0402	0.0419	0.0434	0.0448	0.0461	0.0472	0.0477

**Tabela 5.1** – Valores dos vetores das ações de controlo, nas iterações de negociação quando  $k=400$  e  $t=40s$



**Figura 5.10** – Negociação e convergência da ação de controlo de C1, ao longo dos 200 s da simulação e em pormenor



**Figura 5. 11** – Negociação e convergência da ação de controlo de C2, ao longo dos 200 s da simulação e em pormenor

### 5.2.5. Obtenção de Modelos lineares a partir do modelo do canal

A obtenção sistemática de novos modelos lineares a partir do modelo do canal em *Simulink*, no decorrer desta dissertação, é justificada pela constante utilização de diferentes estruturas e algoritmos de controlo nos diversos capítulos e subcapítulos.

Entrando em concordância com o ponto anterior e realizando os mesmos passos descritos no Capítulo 4, obteve-se as funções transferência que representam:

- A dinâmica do canal no sensor de medida J1, a partir da atuação da comporta C1;
- A dinâmica do canal no sensor de medida J2, a partir da atuação da comporta C1;
- A dinâmica do canal no sensor de medida J2, a partir da atuação da comporta C2;
- A dinâmica do canal no sensor de medida J3, a partir da atuação da comporta C2;
- A dinâmica do canal no sensor de medida J1, a partir da atuação da comporta C1.

De seguida, usando as estruturas das figuras 5.7 e 5.8 e a forma canónica da observabilidade explicada no ponto anterior, obteve-se os novos modelos de lineares do canal.

Os novos modelos de estado do canal estão apresentados no Anexo II da presente dissertação.

## 5.2.6. Resposta ao degrau do modelo Linear

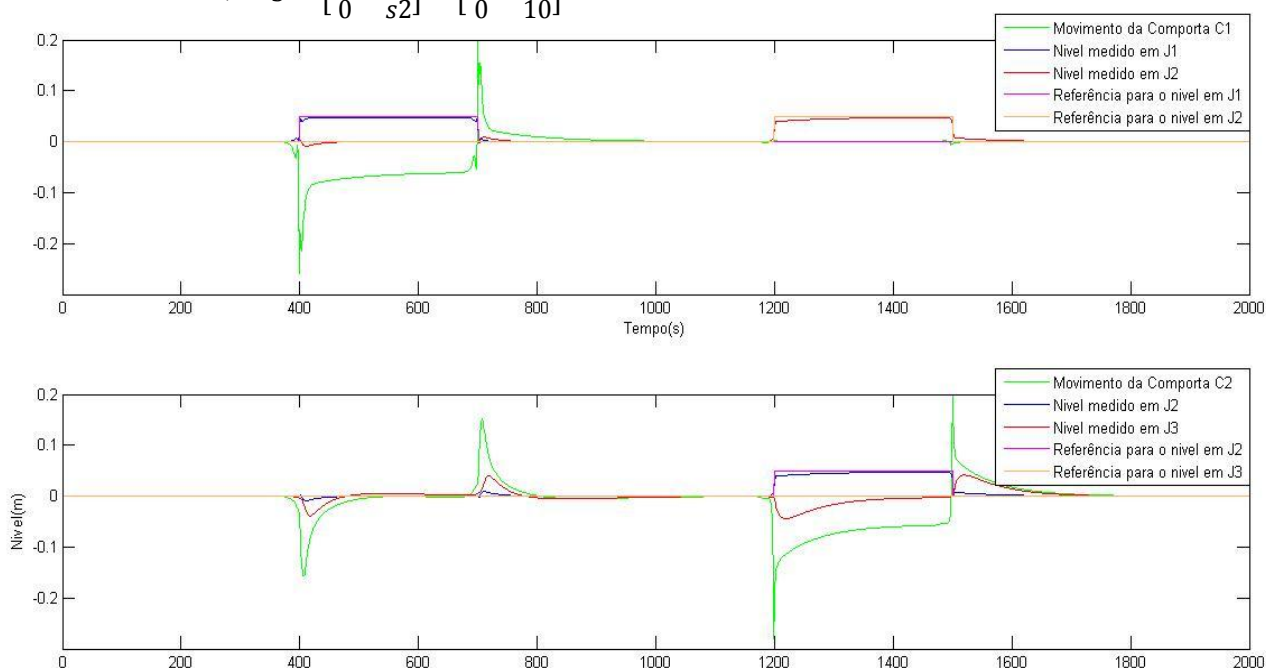
A resposta aos degraus nas referências dos modelos lineares, apresentada na figura 5.11, foi simulada da seguinte forma:

- Tempo de simulação: 200 s;
- Degrau de 0.05 m de amplitude na referência do nível J1, entre o segundo 400 e 700;
- Degrau de 0.05 m de amplitude na referência do nível J2, entre o segundo 1200 e 1500;
- Horizonte de controlo,  $N$ , de 30 s.
- Iterações de negociação entre controladores,  $n$ .
- Nível da comporta C3 fixo e igual a 0.

De notar que todos os valores acima apresentados, são valores sem offset, uma vez que para o cálculo dos modelos lineares o offset foi retirado.

Os valores dos pesos  $Q, R$  e  $S$  da função de custo foram próximos dos usados no teste dos modelos anteriores. Esta decisão de manter os valores próximos dos pesos prendeu-se com a vontade de comparar os resultados obtidos com e sem comunicação sobre condições próximas.

- $Q = \begin{bmatrix} q1 & 0 \\ 0 & q2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
- $R = 0.1$
- $S = \begin{bmatrix} s1 & 0 \\ 0 & s2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$



**Figura 5.12** – Resposta ao degrau dos modelos Lineares, sem offset e com horizonte de controlo de 30s

---

Através deste teste confirmou-se o funcionamento do novo algoritmo sobre um modelo linear mais complexo, bem como a convergência dos valores das ações de controlo ao longo das iterações de negociação (ver tabela 5.2). A coordenação entre os controladores está bem presente aquando da realização dos degraus. Prova disso acontece quando se realiza o degrau na referência do nível em J1, e o nível J2 se mantém praticamente inalterado devido à abertura e fecho coordenado das duas comportas. Como explicado no ponto anterior, uma reação tão rápida do controlador C2, só é possível porque este tem conhecimento, através das iterações de negociação, quais os movimentos que a comporta C1 teria num horizonte de controlo de 30 segundos. Verifica-se também que a amplitude de abertura das duas comportas é bastante idêntica, aquando da realização dos degraus na referência dos níveis que os controladores controlam. Esta semelhança advém das parecenças nas dinâmicas de cada um dos troços, que se nota pelos valores bastante semelhantes de ambas as matrizes de dinâmica,  $A$ .

Os resultados acima apresentados quando comparados com os das figuras 5.3 e 5.5 denotam que existe uma clara redução dos picos nas ações de controlo dos controladores. Esta diminuição dos picos é explicada por duas razões. Uma é pela coordenação entre os controladores. Se no Subcapítulo 5.1 os controladores apenas olham para eles próprios e reagem a pensar que a variação dos níveis apenas depende deles, neste caso, por haver comunicação, os controladores não tem necessidade de reagir tão agressivamente pois contam com as contribuições vindas dos outros controladores. A segunda é devido ao valor da penalização da ação de controlo ser dez vezes maior em relação ao teste da figura 5.5. No entanto os testes apresentados no subcapítulo 5.1, foram feitos tendo apenas em consideração uma comporta, o que faz com que uma comparação pormenorizada não se torne credível, uma vez que os efeitos provocados na dinâmica do canal, pela atuação de uma só comporta, são diferentes quando comparado com efeitos da atuação de duas comportas em simultâneo.

Contudo, o principal objetivo da realização das respostas ao degrau dos modelos lineares, não foi a comparação entre ambos mas sim a validação dos algoritmos de controlo para depois passar à implementação e análise no modelo não linear do canal em *Simulink*.

Interação	$u_{j2}(k)$	$u_{j2}(k+1)$	$u_{j2}(k+2)$	$u_{j2}(k+3)$	...	$u_{j2}(k+25)$	$u_{j2}(k+26)$	$u_{j2}(k+27)$	$u_{j2}(k+28)$	$u_{j2}(k+29)$
1ª	-0.0064	-0.0055	-0.0060	-0.0069	...	-0.1482	-0.1363	-0.1332	-0.1163	-0.0797
2ª	-0.0036	-0.0039	-0.0045	-0.0052	...	-0.1493	-0.1345	-0.1277	-0.1119	-0.0764
3ª	-0.0033	-0.0037	-0.0043	-0.0049	...	-0.1493	-0.1344	-0.1273	-0.1117	-0.0762
4ª	-0.0033	-0.0037	-0.0043	-0.0049	...	-0.1493	-0.1344	-0.1273	-0.1117	-0.0762
5ª	-0.0033	-0.0037	-0.0043	-0.0049	...	-0.1493	-0.1344	-0.1273	-0.1117	-0.0762
6ª	-0.0033	-0.0037	-0.0043	-0.0049	...	-0.1493	-0.1344	-0.1273	-0.1117	-0.0762
7ª	-0.0033	-0.0037	-0.0043	-0.0049	...	-0.1493	-0.1344	-0.1273	-0.1117	-0.0762
8ª	-0.0033	-0.0037	-0.0043	-0.0049	...	-0.1493	-0.1344	-0.1273	-0.1117	-0.0762
9ª	-0.0033	-0.0037	-0.0043	-0.0049	...	-0.1493	-0.1344	-0.1273	-0.1117	-0.0762
10ª	-0.0033	-0.0037	-0.0043	-0.0049	...	-0.1493	-0.1344	-0.1273	-0.1117	-0.0762
	$u_{j3}(k)$	$u_{j3}(k+1)$	$u_{j3}(k+2)$	$u_{j3}(k+3)$	...	$u_{j3}(k+25)$	$u_{j3}(k+26)$	$u_{j3}(k+27)$	$u_{j3}(k+28)$	$u_{j3}(k+29)$
1ª	-0.0034	-0.0035	-0.0039	-0.0047	...	-0.1353	-0.1394	-0.1354	-0.1111	-0.0700
2ª	-0.0034	-0.0034	-0.0035	-0.0038	...	-0.1423	-0.1459	-0.1410	-0.1152	-0.0721
3ª	-0.0034	-0.0033	-0.0035	-0.0037	...	-0.1428	-0.1462	-0.1414	-0.1154	-0.0722
4ª	-0.0034	-0.0033	-0.0034	-0.0037	...	-0.1428	-0.1463	-0.1414	-0.1154	-0.0722
5ª	-0.0034	-0.0033	-0.0034	-0.0037	...	-0.1428	-0.1463	-0.1414	-0.1154	-0.0722
6ª	-0.0034	-0.0033	-0.0034	-0.0037	...	-0.1428	-0.1463	-0.1414	-0.1154	-0.0722
7ª	-0.0034	-0.0033	-0.0034	-0.0037	...	-0.1428	-0.1463	-0.1414	-0.1154	-0.0722
8ª	-0.0034	-0.0033	-0.0034	-0.0037	...	-0.1428	-0.1463	-0.1414	-0.1154	-0.0722
9ª	-0.0034	-0.0033	-0.0034	-0.0037	...	-0.1428	-0.1463	-0.1414	-0.1154	-0.0722
10ª	-0.0034	-0.0033	-0.0034	-0.0037	...	-0.1428	-0.1463	-0.1414	-0.1154	-0.0722

**Tabela 5.2** – Valores dos vetores das ações de controlo, nas iterações de negociação quando  $k=3810$  e  $t=381s$

---

## 5.3. Simulação no modelo não Linear e apresentação de resultados

Neste ponto da dissertação é mostrado a simulação dos novos controladores no modelo não linear do canal em *Simulink*, bem como é feita uma análise comparativa das diferentes simulações e retirada de conclusões sobre qual o melhor algoritmo/estrutura de controlo ótimo para o controlo dos níveis do canal.

Assim, este ponto foi estruturado da seguinte forma:

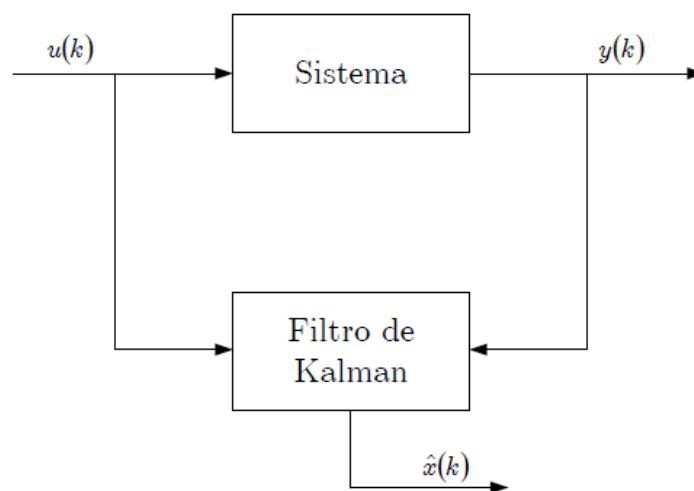
- Numa primeira parte foi descrito todo o processo de integração dos controladores no simulador em *Simulink*.
- Numa segunda parte foram efetuadas diversas simulações e apresentada uma análise comparativa sobre qual a melhor estrutura de controlo

### 5.3.1. Implementação de um Filtro de *Kalman*

O primeiro passo na integração foi a construção de uma estrutura de controlo em anel fechado. Para isso foi criado um filtro de *Kalman* para garantir o anel fechado, bem como para garantir o acesso ao estado dos modelos usados para o controlo.

O filtro de *Kalman* tem a sua origem na década de sessenta, aquando da publicação de um artigo descrevendo um processo recursivo para solucionar problemas lineares relacionados à filtragem de dados discretos, por parte de Rudolph Emil *Kalman* [27].

O filtro de *Kalman* pode, neste caso, comportar-se como um observador de estado garantindo o anel fechado bem como o tratamento do erro entre a referência e a saída do sistema.



**Figura 5.13** – Filtro de *Kalman* como observador de estado  
(Fonte [28])

O papel do filtro de *Kalman* é a obtenção de estimativas ótimas do vetor de estados,  $\hat{x}(k)$ , assumindo uma estimativa inicial,  $\hat{x}(0)$ , e uma matriz de covariância  $P_0 \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ , num dado instante  $k$ , para uma sucessão de mediadas  $\{y(0), \dots, y(k)\}$  [28].

Considerando  $\hat{x}(k|k-1)$  uma estimativa do vetor de estado no instante  $k$ , obtida a partir da informação disponível no instante  $k-1$  (por predição temporal) e  $\hat{x}(k|k)$  a atualização desse mesmo estado no instante  $k$ , os erros de estimação podem ser obtidos por:

$$e(k|k-1) = x(k) - \hat{x}(k|k-1) \quad (5.44)$$

$$e(k|k) = x(k) - \hat{x}(k|k) \quad (5.45)$$

A partir dos erros de estimação, as matrizes de covariância do erro podem ser escritas da seguinte forma [28]:

$$P(k|k-1) = E[e(k|k-1)e^T(k|k-1)] \quad (5.46)$$

$$P(k|k) = E[e(k|k)e^T(k|k)] \quad (5.47)$$

A equação que relaciona a estimativa do estado, no instante  $k$ ,  $\hat{x}_i(k|k)$ , como uma combinação linear do estado anterior,  $\hat{x}_i(k|k-1)$ , e com a diferença ponderada entre a saída observada  $y_i(k)$  e a saída prevista  $C_i\hat{x}_i(k|k-1)$ , ou seja, o mecanismo de correção das estimativas obtidas por predição temporal no filtro de *Kalman*, é a seguinte [29]:

$$\hat{x}_i(k|k) = \hat{x}_i(k|k-1) + K(k)[y_i(k) - C_i\hat{x}_i(k|k-1)] \quad (5.48)$$

Onde:

- $[y_i(k) - C_i\hat{x}_i(k|k-1)]$  : Resíduo;
- $K(k)$  : Matriz de ganhos de *Kalman*.

A matriz de ganhos de *Kalman*, obtida pela minimização da matriz de covariância  $P(k|k)$ , é calculada a partir da seguinte expressão [28]:

$$K(k) = P(k|k-1)C_i^T[C_i P(k|k-1)C_i^T + V(k)]^{-1} \quad (5.49)$$

Olhando para (5.49) pode-se concluir que:

- Quando a variância do ruído sobre a saída,  $V(k)$ , se aproxima de zero, o ganho de *Kalman*,  $K(k)$ , vai pesando cada vez mais sobre o resíduo [29].

$$\lim_{V \rightarrow 0} K(k) = C_i^{-1}$$

- Quando a matriz de covariância do erro,  $P(k|k-1)$ , diminui o ganho de *Kalman*,  $K(k)$ , vai pesando cada vez menos sobre o resíduo, aumentando a certeza sobre a estimativa mas diminuindo a confiança sobre a leitura [28].

$$\lim_{P(k|k-1) \rightarrow 0} K(k) = 0$$

Resumindo, o algoritmo utilizado para implementar o filtro de *Kalman* foi dividido em duas partes distintas:

- Predição temporal – onde se obtém as estimativas do vetor de estado e da matriz de covariância, a partir da informação disponível no instante  $k-1$ . [29]

$$\hat{x}_i(k|k-1) = A_i \hat{x}_i(k-1|k-1) + B_i u(k)$$

$$P(k|k-1) = A_i P(k-1|k-1) A_i^T + W$$

**Tabela 5.3** – Equações de predição temporal do Filtro de *Kalman*

- Correção e Atualização pela Leitura – onde se corrige as estimativas com base na leitura mais recente da saída real do sistema, no instante  $k$  [29].

$$K(k) = P(k|k-1) C_i^T [C_i P(k|k-1) C_i^T + V(k)]^{-1}$$

$$\hat{x}_i(k|k) = \hat{x}_i(k|k-1) + K(k) [y_i(k) - C_i \hat{x}_i(k|k-1)]$$

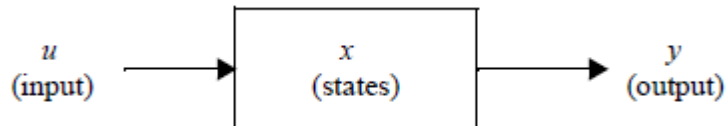
$$P(k|k) = (I - K(k) C_i) P(k|k-1)$$

**Tabela 5.4** – Equações de Correção e Atualização pela Leitura do Filtro de *Kalman*

### 5.3.2. Integração dos controladores ótimos no simulador do modelo não linear

Para a integração dos controladores ótimos e o filtro de *Kalman* no simulador em *Simulink* recorreu-se ao bloco “S-Function” da biblioteca de blocos do *Simulink*.

Este bloco permite o acesso a código presente num ficheiro “.m”, tendo como entrada um vetor de entradas  $u$ , como saída um vetor de saídas  $y$  e um vetor de estados  $x$  no seu interior, que permite a implementação do algoritmo de controlo.



**Figura 5.14** – Funcionamento de um bloco *S-Function* (Fonte [30])

O funcionamento deste bloco, aplicado a um modelo de espaço de estados discreto, assenta sobre três funções:

- Uma função de inicialização da matriz de estados inicial, do modelo linear,  $x_0$ , definição do tempo de amostragem e dos parâmetros do bloco (numero de estados de trabalho, numero de entradas  $u$  e saídas  $y$ )
- Uma função de atualização de estados, onde foi implementado o filtro de *Kalman*.
- Uma função de cálculo da saída  $y$ , onde foi implementado todo o algoritmo de controlo ótimo e calculada a ação de controlo.

### 5.3.3. Simulação das diferentes estruturas de controlo sob o modelo não linear em *Simulink*

De forma a comparar os efeitos das diferentes estruturas de controlo ótimo no modelo não linear, do canal experimental de Évora em *Simulink* e escolher a melhor estrutura de controlo, testou-se cada uma das novas estruturas, seguindo os parâmetros apresentados abaixo:

- Tempo de simulação: 1500 s;
- Degrau de 0.05 m de amplitude na referência do nível J2, entre o segundo 500 e 1000;
- Referência do nível de J1, J3 e J4 fixa e igual a 0.5012m ao longo de toda a simulação;
- Horizonte de controlo,  $N$ , de 10 s;
- Nível da comporta C3 fixo e igual a 0,0658 m;
- Nível da comporta C4 fixo e igual a 0,4263 m.

Quanto aos valores dos pesos  $Q$ ,  $R$  e  $S$  da função de custo dos diferentes algoritmos de controlo, com o objetivo de obter as melhores respostas ao degraú para cada uma das estruturas, foram novamente ajustados experimentalmente, tendo por bases os valores do ponto 5.2. Os novos valores dos pesos utilizados aquando dos testes estão indicados na tabela 5.5.

Pesos	Estrutura de controlo distribuido					
	Sem comunicação				Com comunicação	
	Controladores SISO		Controladores MIMO		Controladores SISO	
	Controlador C1	Controlador C2	Controlador C1	Controlador C2	Controlador C1	Controlador C2
Q	10	10	q1=10 q2=1	q1=10 q2=1	q1=10 q2=1	q1=10 q2=1
R	0,1	0,1	0,1	1	0,1	1
S	10	10	s1=10 s2=10	s1=10 s2=10	s1=10 s2=10	s1=10 s2=10

**Tabela 5.5-** Valores dos pesos das funções de custo das diferentes estruturas de controlo

Na figura 5.15 é apresentada a simulação com a estrutura de controlo descentralizado com controladores SISO. Constatou-se que esta estrutura de controlo tem a capacidade de controlar o modelo do canal. No entanto observou-se que quando é dado o degrau na referência do nível da água em J2 o nível em J1 também é afetado, nunca conseguindo voltar aos valores da sua referência, bem como a existência de sobrelevação no nível J2. Este erro no valor do nível em J1 e sobrelevação em J2 acontecem porque os controladores C1 e C2 são totalmente independentes. Esta independência faz com que reajam apenas aos erros apresentados nos níveis que estão a medir. Ou seja, neste caso o controlador C2 fecha a comporta totalmente para subir o nível em J2, por consequência quando a comporta C2 começa a abrir, a subida de nível da água do canal, devido ao fecho da comporta C2 nos instantes anteriores, é sentida no sensor J1. Isto faz com que o controlador C1 abra a comporta C1 para responder à subida de nível. Esta abertura da comporta C1 faz com que entre mais água no segundo troço e por consequência aumente o nível da água em J2, explicando a sobrelevação.

Outro efeito negativo que esta estrutura apresenta está relacionado com o fecho total da comporta (ativação da saturação). Sempre que uma comporta fecha ou abre completamente, ativando a saturação, significa que as ações de controlo aplicadas pelo controlador estão acima, ou abaixo, dos valores máximos, ou mínimos, da posição da comporta. Desta forma o sistema comporta-se como um sistema não linear, condição que invalida a estrutura de controlo. Para remediar esta situação aumentou-se o valor da penalização sobre a ação de controlo,  $R$ , mas o sistema ficou lento demais para poder ser considerado (Ver anexo 3).

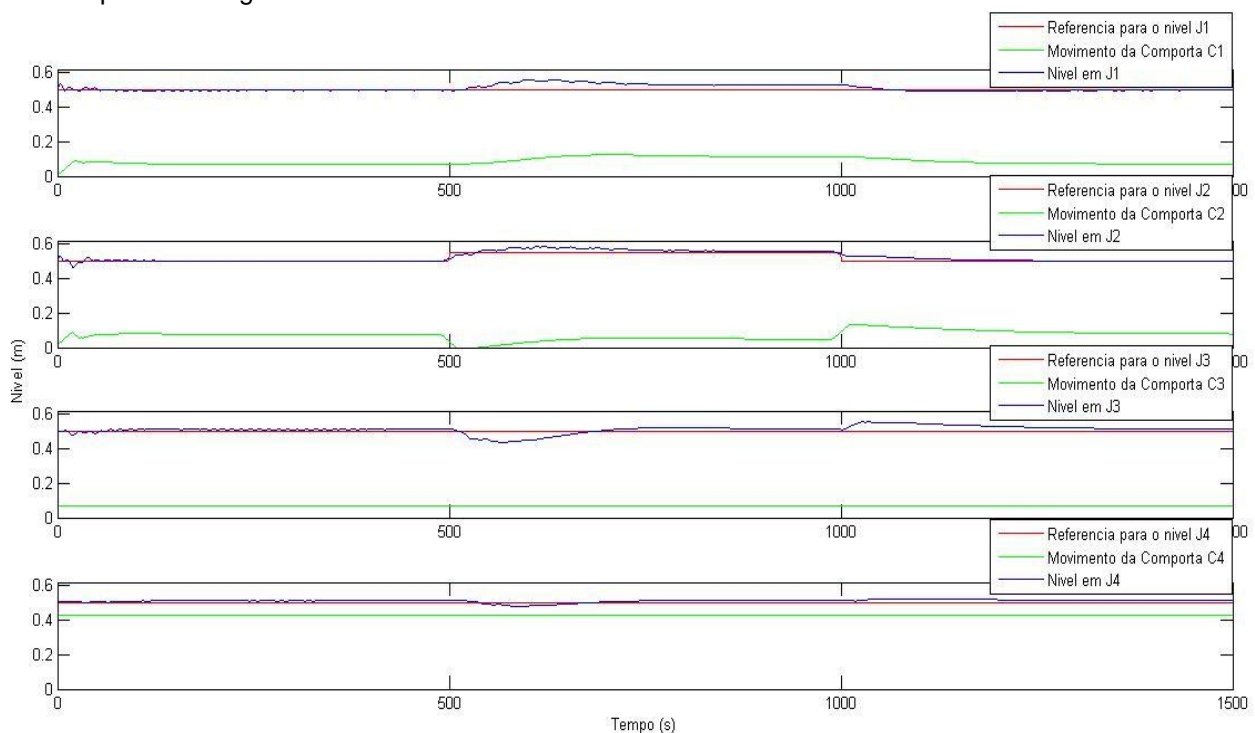
Passando a analisar a resposta ao degrau da estrutura de controlo descentralizado com controladores MIMO, figura 5.16, e comparando com a do modelo anterior, figura 5.15, verificou-se claras melhorias, tanto ao nível da sobrelevação em J2 como na variação do nível em J1. Estas melhorias são justificadas pelo fato das comportas estarem a controlar o nível do troço anterior e posterior mesmo tempo. Embora o peso que o erro, entre a referência do nível e o nível medido,  $Q$ , no troço posterior seja dez vezes menor que o do troço anterior às

comportas, a atuação do controlador C1 contribui para a correção do erro em J2. Isto faz com que o controlador C2 não tenha necessidade de ser tão agressivo para obter os mesmos tempos de subida do nível da água em relação à estrutura anterior. Este efeito leva a que se possa ter uma penalização sobre a ação de controlo do controlador C2 dez vezes maior do que a do controlador C1, evitando a ativação das saturações das comportas. No entanto, o incremento da penalização levou a que o tempo de descida do nível fosse grande, cerca de 200 segundos.

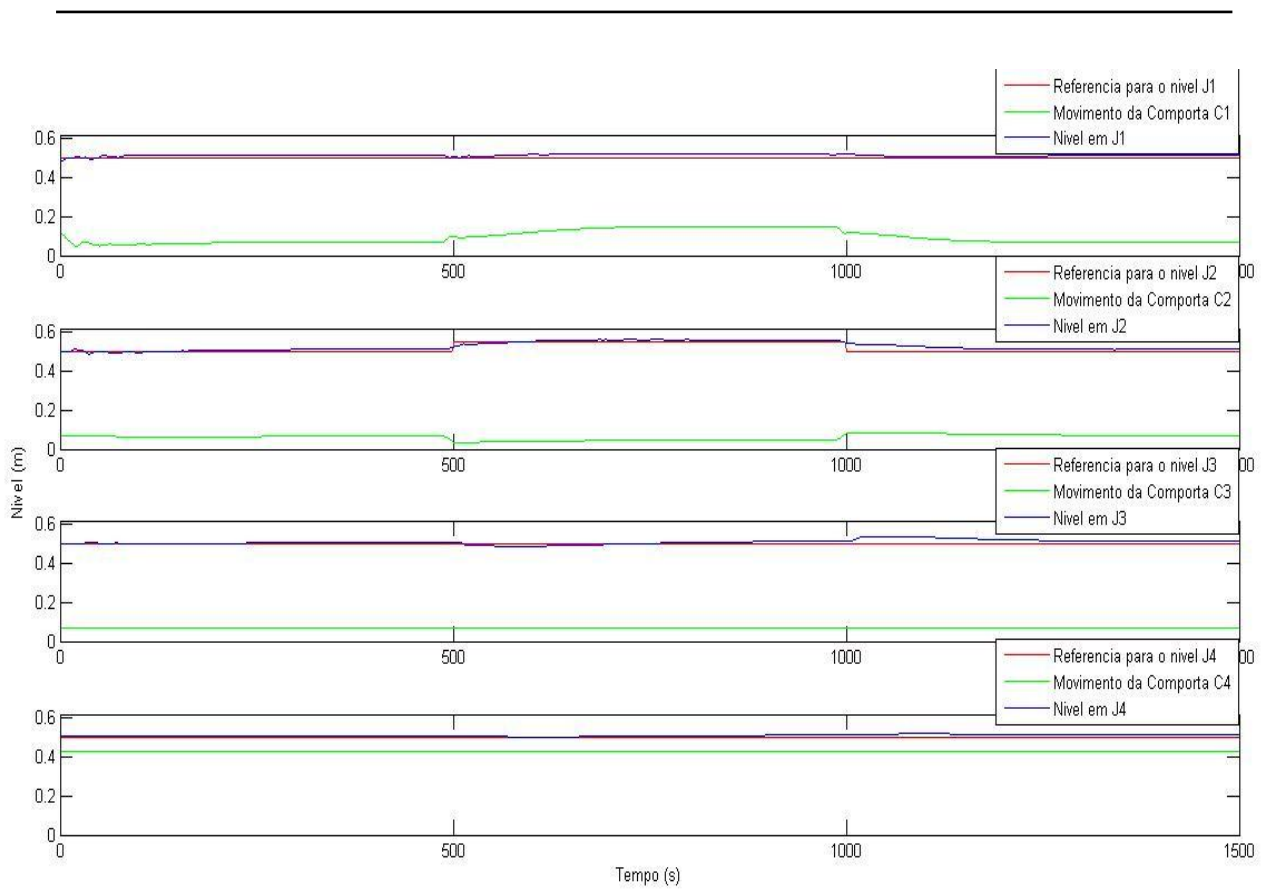
Por último, observando a figura 5.17, confirma-se que os controladores, da nova estrutura de controlo, conseguem controlar o sistema. Está bem presente a negociação entre os controladores nos valores dos níveis das duas comportas, ao longo de todo o tempo de simulação. Como os valores da referência para o nível da água em J1 nunca se alteram ao longo da simulação, o nível da comporta C1 tem uma variação de amplitude pequena, durante o degrau em J2. Isto permite que o nível da água em J1 se mantenha praticamente constante durante toda a simulação. Isto acontece porque o controlador C1 já sabe que as variações do nível da comporta C2 provocariam o aumento do nível em J2, quando ocorre o degrau. Ou seja, através da comunicação entre os controladores é possível prever o efeito que as comportas vizinhas têm sobre o nível que cada comporta está a controlar e através da negociação é possível minimizar esse mesmo efeito.

Esta negociação entre os controladores leva a que tanto os tempos de subida como os tempos de descida do nível da água medida sejam menores quando comparados com os das estruturas anteriores, aquando da aplicação do degrau.

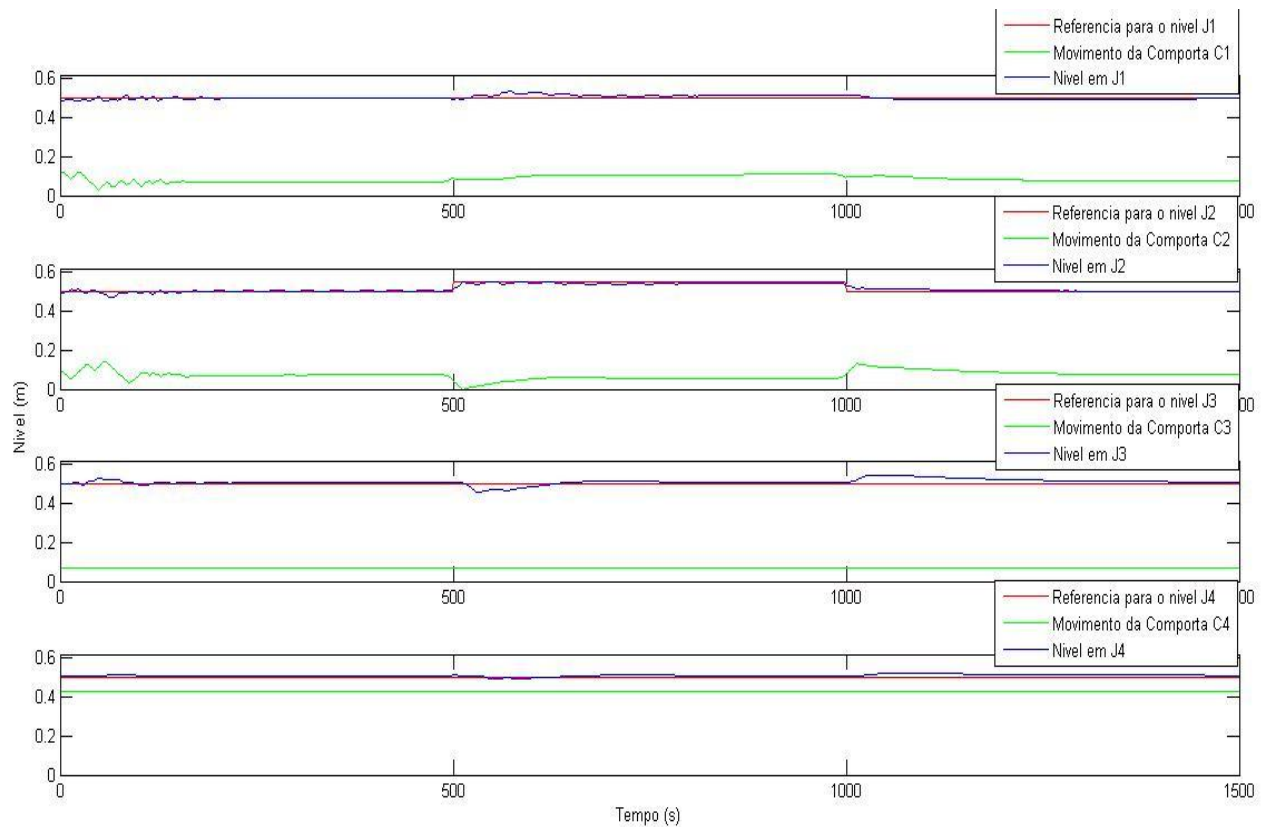
Pelo exposto conclui-se que a melhor estrutura de controlo será a estrutura de controlo distribuído com comunicação entre controladores, por apresentar melhores resultados na resposta ao degrau.



**Figura 5. 15 – Resposta ao degrau da estrutura de controlo ótimo descentralizado com controladores SISO**



**Figura 5. 16 – Resposta ao degrau da estrutura de controlo ótimo descentralizado com controladores MIMO**



**Figura 5.17- Resposta ao degrau da estrutura de controlo ótimo distribuído**

---

## 6. Apresentação Discussão e Comparação de Resultados

---

Após a aprovação do novo algoritmo de controlo no Capítulo 5, são apresentadas, discutidas e analisadas, neste capítulo, diversas simulações efetuadas sobre o modelo não linear do canal em *Simulink*. com o novo algoritmo de controlo. Estas simulações têm como objectivo uma melhor compreensão dos efeitos da negociação entre os controladores sob situações reais.

De forma a tornar coerentes os resultados obtidos com o resto do trabalho apresentado nos capítulos anteriores, são escolhidas duas primeiras situações:

- Realização de diversos degraus na referência, simulando o aumento e diminuição do nível da água nos dois troços a controlar;
- Realização de perturbações na referência através da ativação das tomadas de água, simulando a retirada de água do canal por partes dos utilizadores do canal.

Por último, uma terceira situação onde é estudada a quebra de comunicação entre controladores.

### 6.1. Realização de degraus na referência

O objetivo da realização deste primeiro teste passa pela total compreensão do comportamento da nova estrutura de controlo, aquando a realização de degraus na referência. Para o efeito, este teste, apresentado na figura 6.1, é realizado seguindo os parâmetros abaixo apresentados:

- Tempo de simulação: 5000 s;
- Degrau de 0.05 m de amplitude na referência do nível J1, entre o segundo 500 e 1000;
- Degrau de 0.05 m de amplitude na referência do nível J2, entre o segundo 1500 e 1200;
- Referência do nível de J3 e J4 fixa e igual a 0.5012m ao longo de toda a simulação;
- Horizonte de controlo, de 10 s;
- Nível da comporta C3 fixo e igual a 0,0658 m;
- Nível da comporta C4 fixo e igual a 0,4263 m.

A calibração dos pesos da função de custo é executada previamente por via experimental, tendo por base os valores utilizados no capítulo anterior, bem como a especial

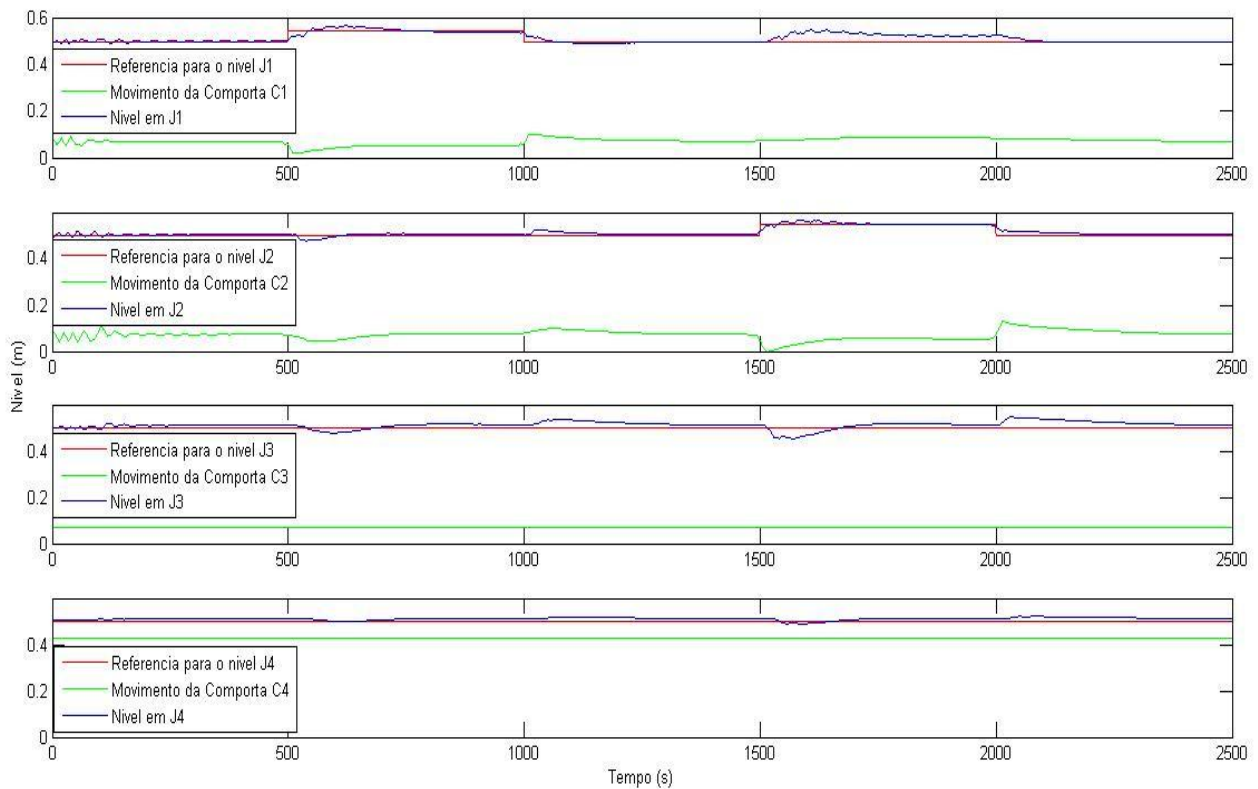
atenção para evitar a saturação dos valores da ação de controle. Assim sendo, obtêm-se os seguintes valores para os pesos:

$$\triangleright Q = \begin{bmatrix} q^1 & 0 \\ 0 & q^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\triangleright R_1 = 2$$

$$\triangleright R_2 = 1$$

$$\triangleright S = \begin{bmatrix} s^1 & 0 \\ 0 & s^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$



**Figura 6. 1 – Resposta a diferentes degraus da estrutura de controlo ótimo distribuído**

Analisando a figura 6.1, constata-se, mais uma vez, que os controladores conseguem controlar o sistema nos dois primeiros troços, aquando da realização de degraus na referência. Observa-se, também, a capacidade de “*interajuda*” dos controladores. Como explicado no capítulo anterior, esta estrutura foi desenhada para que os controladores estejam a controlar os valores dos níveis da água no troço anterior e posterior à sua posição, contando com as contribuições que as comportas vizinhas dão para esse mesmo controlo, através de um processo de negociação. Na altura da realização do segundo degrau na referência, entre o segundo 1500 e 2000, podemos observar este mesmo efeito, quando se verifica que os valores do nível da água em J1 estão acima da referência e o controlador C1 praticamente não faz mexer a sua comporta. Isto acontece porque o Controlador C1 age com o objetivo de não

---

perturbar o desempenho do controlador C2. No primeiro degrau, entre o segundo 500 e 1000, este efeito já não acontece, pois o controlador C2 apenas considera os níveis medidos no segundo e terceiro troço e não no primeiro, onde foi realizado o degrau.

## 6.2. Realização de perturbações

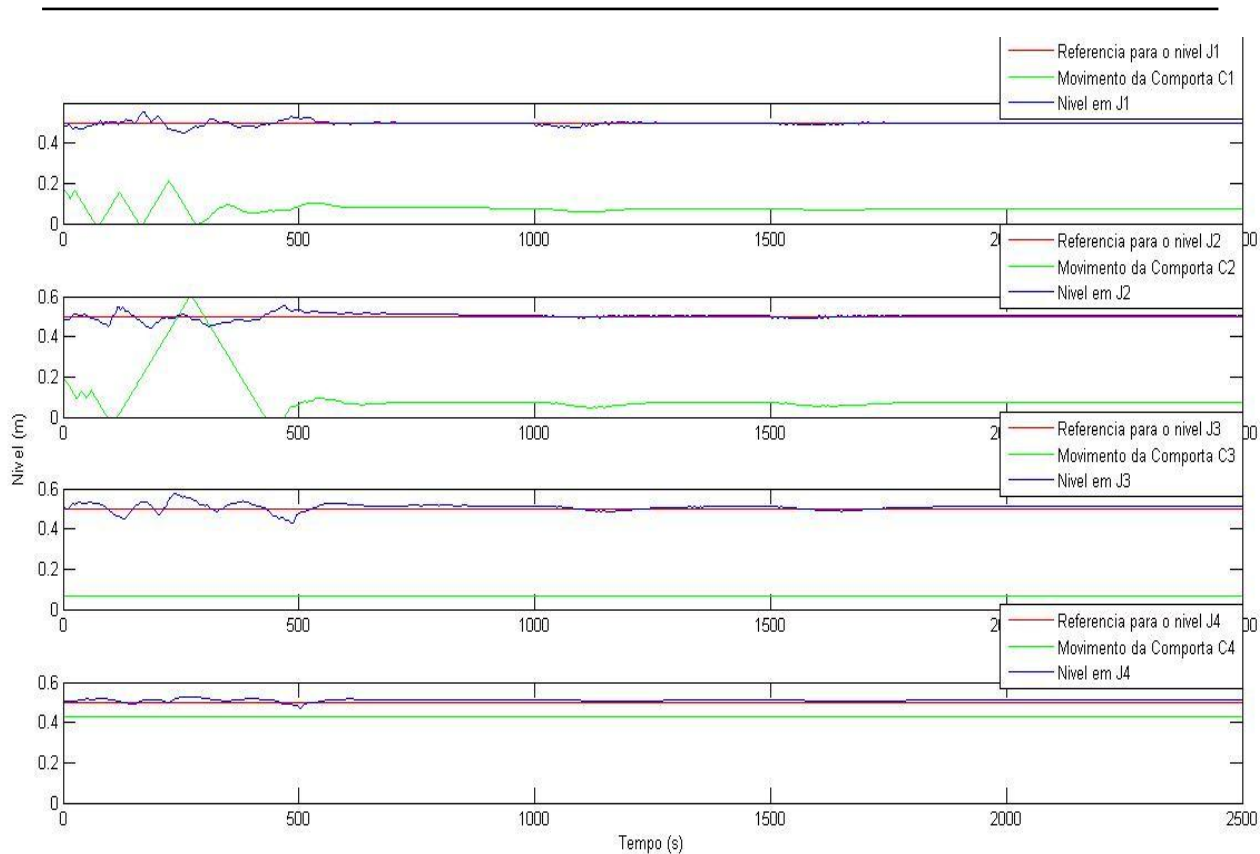
Neste segundo teste, o objectivo passa pela análise da resposta do modelo quando são realizadas perturbações no sistema, em diferentes tempos da simulação. Para isso, este segundo teste é dividido em dois, um onde se opta por retirar  $0.005 \text{ m}^3/\text{s}$  de água por segundo e outro  $0.01 \text{ m}^3/\text{s}$ . Em ambos os testes, apresentados nas figuras 6.2 e 6.3, as tomadas de água são ativadas da seguinte forma:

- Tomada de água F1 foi ativada entre os segundos 1000 e 1100;
- Tomada de água F2 foi ativada entre os segundos 1500 e 1600 ;
- Tempo de simulação: 2500 s;
- Horizonte de controlo, de 10 s;

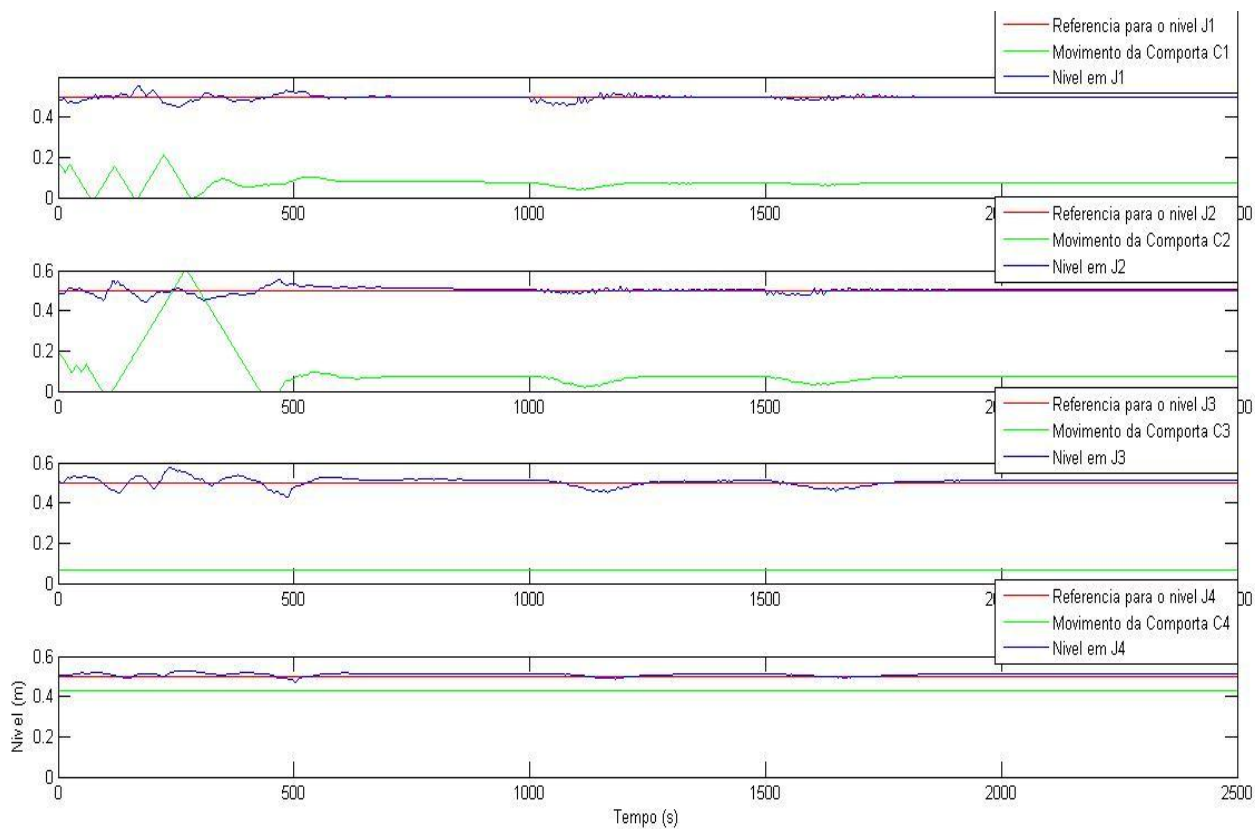
Quanto à calibração dos pesos da função de custo é, novamente, executada previamente por via experimental, tendo especial atenção em reduzir a penalização sobre a ação de controlo para aumentar a sensibilidade dos controladores.

- $Q = \begin{bmatrix} q1 & 0 \\ 0 & q2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
- $R_1 = 0.01$
- $R_2 = 0.01$
- $S = \begin{bmatrix} s1 & 0 \\ 0 & s2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$

Ao analisar as figuras 6.2 e 6.3, pode-se concluir que, à semelhança do que foi observado no capítulo 4, aquando da realização deste mesmo teste a uma estrutura de controladores PID, está presente o efeito de ampliação do sinal da ação de controlo de montante para jusante do canal. Conclui-se também que a estrutura de controlo garante uma resposta rápida às perturbações, conseguindo elevar rapidamente os valores do nível da água para os valores referência em ambos os testes.



**Figura 6. 2** – Reposta do modelo a perturbações na referência de  $0.005 \text{ m}^3$



**Figura 6. 3** - Reposta do modelo a perturbações na referência de  $0.01 \text{ m}^3$

---

### 6.3. Realização de quebras na comunicação entre controladores

Este último teste é feito com o objectivo de se compreender os efeitos da perda de comunicação entre os controladores. Para isso, é dividido em duas partes. Uma em que existe a comunicação entre os controladores e outra em que existe a quebra de comunicação.

Esta perda de comunicação faz com que o sistema comece a agir como um sistema descentralizado, fazendo com que o controlador “pense” que apenas ele tem efeito sobre as alterações na dinâmica do sistema. Pelo exposto, este teste ganha outra dimensão, uma vez que também permite entender como é que um algoritmo de controlo construído para um sistema distribuído se comporta perante uma súbita mudança para um sistema descentralizado.

Aquando da perda da comunicação, considera-se que os controladores passaram a agir considerando os valores iniciais de altura nas comportas vizinhas, ou seja 0.5012 m.

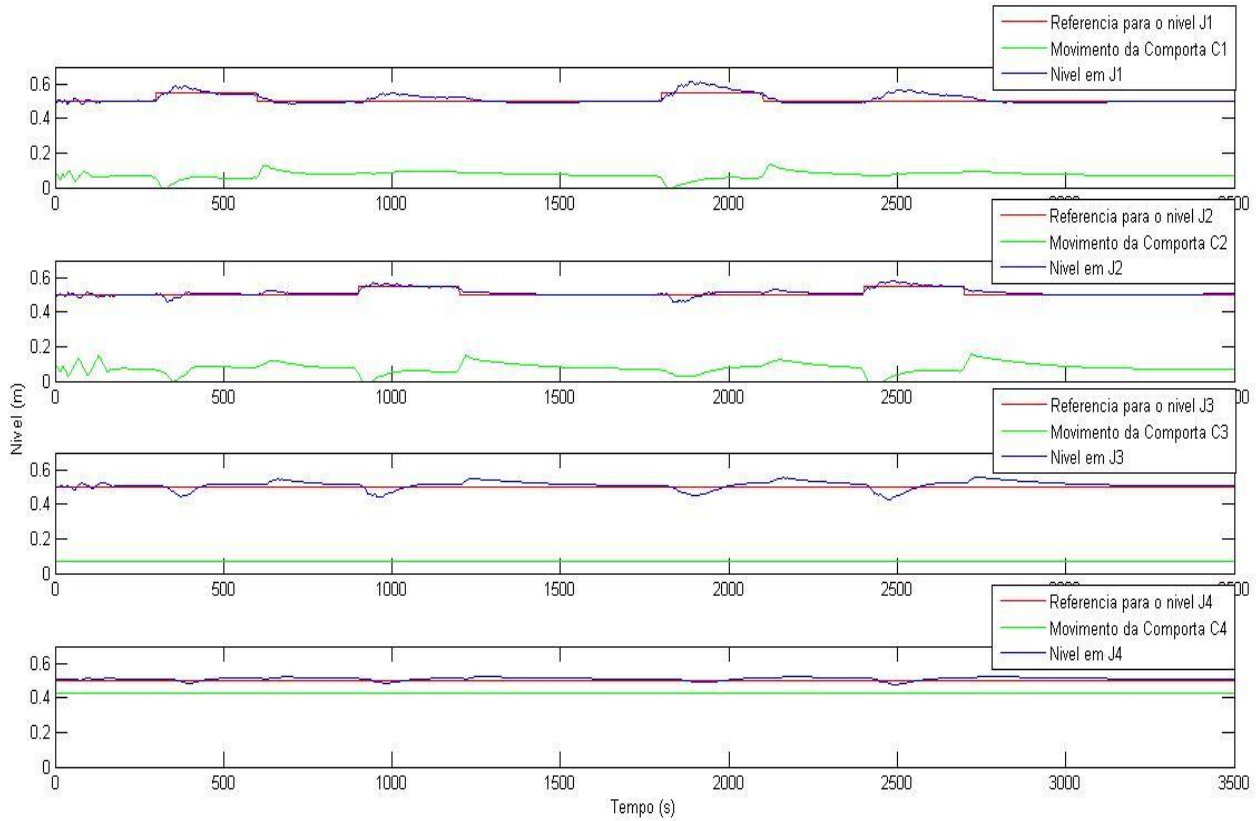
Este teste, apresentado na figura 6.4, é realizado seguindo os seguintes parâmetros:

- Tempo de simulação: 5000 s;
- Degrau de 0.05 m de amplitude na referência do nível J1, entre o segundo 300 e 600;
- Degrau de 0.05 m de amplitude na referência do nível J2, entre o segundo 900 e 1200;
- Referência do nível de J3 e J4 fixa e igual a 0.5012m ao longo de toda a simulação;
- Horizonte de controlo, de 10 s;
- Nível da comporta C3 fixo e igual a 0,0658 m;
- Nível da comporta C4 fixo e igual a 0,4263 m.

Observando a figura 6.4, está bem perceptível a quebra de comunicação entre os controladores. Esta quebra de comunicação faz com que as respostas dos controladores, aos degraus na referência, tenham uma maior amplitude, provocando uma maior sobrelevação no nível da água na altura do degrau. Este efeito é explicado pela ausência de informação que cada controlador tem sobre as contribuições que os controladores/comportas vizinhos possam dar. Por não tomar em conta estas contribuições, o controlador age prevendo os efeitos que apenas ele dará no controlo do nível. No instante seguinte constata que a resposta do nível que ele tinha previsto não é a mesma, devido às contribuições dos controladores/comportas vizinhas, e aumenta a amplitude do movimento da comporta para começar a corrigir o erro. Por consequência, devido a um “*maior fecho da comporta*”, aquando do degrau, a água que deveria passar pela comporta é menor, fazendo com que o nível da água aumente mais do que o desejado, justificando assim o aumento da sobrelevação ilustrado na segunda metade da figura 6.4. Uma solução que pode resolver este problema pode passar por uma recalibração automática dos valores dos pesos da função de custo do algoritmo de controlo, aquando da

quebra de comunicação. No entanto, esta sugestão de solução não é abordada nesta dissertação, sendo apenas uma sugestão para um futuro trabalho.

Nota: Este teste, não foi executado com o objetivo de otimizar a resposta ao degrau. Foi executado por forma a maximizar as diferenças entre as respostas do modelo com e sem comunicação.



**Figura 6. 4** – Comparação das respostas aos degraus do modelo, com e sem comunicação entre controladores

---

## 7. Conclusão

---

O objetivo desta tese foi o desenvolvimento e implementação de um algoritmo de controlo distribuído adaptado ao Simulador em *Simulink* do canal experimental de Évora, desenvolvido pelo INESC em [1]. Este novo algoritmo de controlo foi desenvolvido com o objetivo de permitir a interação, negociação e coordenação entre controladores vizinhos, por forma a otimizar todo o processo de regulação do canal.

Para isso, esta dissertação foi dividida em três partes distintas. A primeira, onde foi feita uma nota introdutória à dissertação, com uma explicação das motivações que levaram à execução da mesma, uma breve descrição do canal e estudo do modelo matemático que representa o comportamento do canal. O modelo matemático escolhido passou pela discretização e linearização das equações hidráulicas de *Saint-Venant*. Esta decisão foi tomada por forma a tornar todo o trabalho coerente com o trabalho desenvolvido pelo INESC na altura do desenvolvimento do Simulador em *Simulink*, utilizado nesta dissertação.

Numa segunda fase, foi realizado o estudo do comportamento dinâmico do canal, a compreensão da interação entre os diferentes troços e a forma como as respetivas comportas afetam os troços anexos. Para a realização deste estudo foram definidos 5 pontos de desenvolvimento. No primeiro ponto foram definidas as condições iniciais, ou seja, os valores iniciais das alturas das comportas em regime estacionário. De seguida foram calculadas funções transferência para representar o comportamento de um troço do canal em cada um dos sensores de medida. Através destas funções transferência foram desenvolvidos controladores PID para o garantir o controlo do sistema. O passo seguinte passou pela escolha da estrutura de controlo que melhor se adequava ao controlo do canal. Para isso foram concebidas três estruturas de controlo: duas com controlo local e uma com controlo à distância. Concluiu-se que a melhor estrutura de controlo seria a estrutura que controla os set-points do nível da água dos sensores imediatamente antes da comporta atuada. O último ponto passou pela validação da estrutura de controlo escolhida. Através da realização de diversas simulações ficou-se a compreender todos os efeitos produzidos pelas comportas nos troços anexos, bem como ficou comprovada que os controladores conseguem controlar o sistema com a estrutura desenvolvida.

Numa última parte, foi desenvolvido todo o algoritmo de controlo distribuído com negociação entre controladores, bem como comprovadas as grandes vantagens da interação e negociação entre controladores vizinhos. Numa primeira fase optou-se também por desenvolver uma estrutura de controlo descentralizado. Esta opção foi tomada, não só pela necessidade de comparação de resultados entre estruturas de controlo descentralizado e distribuído, mas também pelas várias semelhanças que apresentam os algoritmos de ambas as estruturas.

Através da realização de diversas simulações, conclui-se que as vantagens em utilizar um algoritmo de controlo distribuído com negociação entre os controladores vizinhos são grandes. A comunicação permite que exista uma capacidade dos controladores preverem as

---

contribuições que as comportas vizinhas vão dar para o controlo dos set-points que controlam. Depois, através da negociação, os controladores conseguem chegar a um “acordo” sobre as contribuições mútuas necessárias para o instante de tempo em que estão. Isto faz com que as respostas dos controladores sejam mais suaves durante as simulações, mas, ao mesmo tempo, faz com que os tempos de subida, descida e restabelecimento dos set-points sejam menores.

Numa última fase foi também simulado a perda de comunicação entre controladores. Verificou-se que a quebra de comunicação levou a que as respostas dos controladores tivessem uma maior amplitude. Isto fez com que exista uma maior sobrelevação na resposta a um degrau na referência. No entanto, ficou também comprovado que os controladores conseguem controlar o sistema quando existe uma quebra de comunicação, embora se obtenha um maior erro.

Em suma, pode-se concluir que os objetivos propostos na realização desta dissertação foram cumpridos. A elaboração desta dissertação permitiu aumentar o conhecimento sobre o controlo de canais de regadio. Através do estabelecimento de uma rede de comunicação entre as comportas dos canais de regadio, esta dissertação pode servir como plataforma de lançamento para uma melhor otimização na utilização da água.

## 7.1. Trabalhos Futuros

Este trabalho surge no seguimento de outros trabalhos já desenvolvidos sobre o canal experimental de Évora. Mostrando uma nova perspetiva de desenvolvimento na comunicação entre controladores, o primeiro passo para um futuro trabalho poderá passar pela implementação do algoritmo nas restantes comportas do modelo.

Seria também interessante testar e validar os controladores aqui desenvolvidos no canal experimental de Évora. Desta forma, poder-se-ia confirmar os seus reais desempenhos face a ensaios reais e verificar as suas verdadeiras vantagens e desvantagens face a outros controladores anteriormente desenvolvidos.

---

# Bibliografia

---

- [1] ↑ [CIA- The world fact book](#). [Central Intelligence Agency](#). Página visitada em 2008-12-20.
- [2] C. Madeira, M. Torrado, “Controlo de Caudal e Nível numa Rede de Canais e Reservatórios – II”, Lisboa, 2005;
- [3] J.-P. Baume, P.-O. Malaterre, and J. Sau, “Tuning of PI controllers for an irrigation canal using optimization tools,” in Proceedings of the USCID Workshop, A. C. . S. Anderson, Ed., Phoenix, USA, 1999, pp. 483–500.
- [4] X. Litrico, V. Fromion, J. Baume, and M. Rijo, “Modelling and PI controller design for an irrigation canal,” in European Control Conference, Cambridge, UK, 2003.
- [5] P. O. Malaterre, “Pilote: Linear quadratic optimal controller for irrigation canals,” ASCE Journal of Irrigation and Drainage, vol. 124, no. 4, pp. 187–194, 1998.
- [6] P. Silva, M. A. Botto, J. Figueiredo, M. Rijo, “Model Predictive Controlo f na Experimental Water Canal”, Proceedings of the European Control Conference, Kos, Greece, 2007.
- [7] R.R. Negenborn, P.-J. van Overloop, T. Keviczky, and B. De Schutter, “Distributed model predictive control of irrigation canals”, Networks and Heterogeneous Media, vol. 4, no 2, pp. 359-380, 2009.
- [8] J. M. Igreja, F. M. Cadete e J. M. Lemos, “ Application of Distributed Model Predictive Control to a Water Delivery Canal”, Lisboa, 2011.
- [9] M. N. Almeida, “Estratégias de Controlo e Automação de um Canal de Abastecimento de Água”, Évora, 2003.
- [10] Núcleo de Hidráulica e Controlo de Canais [online] – [www.canais.nuhcc.uevora.pt](http://www.canais.nuhcc.uevora.pt)
- [11] J. M. Lemos, F. C. Machado, N. M. Nogueira, P. O. Shirley, “ Modelo SIMULINK de um canal piloto, Manual do utilizador”, INESC-ID, 2010.
- [12] Plácido, B., And Magalhães,” Controlo de Caudal e Nível numa rede de Canais e Reservatórios”, Universidade Técnica de Lisboa, Instituto Superior Técnico, 2003.
- [13] V.T. Chow, “Open-channels hydraulics”, McGraw Hill Book Company, 1988.
- [14] A. C. Quintela, “Hidráulica”, Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 1981.
- [15] L. Torres, G. Nesancon, D. Georges, “A collocation model for water-hammer dynamics with application to leak detection “, IEEE, 2008.
- [16] C. Balsa, “Capítulo 5 – Interpolação Polinomial”, Escola Superior de Tecnologia e Gestão de Bragança;
- [17] C. R. Fragoso Jr., “Fenômenos de Transporte I – Teorema de Transporte de Reynolds”, Brasil;
- [18] Rui Neves da Silva, “Controlo por Computador Acetatos teóricos”, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa, 2010
- [19] J. M. G. Dias Alves Lourenço, “Resposta em frequência”, Instituto Politécnico de Setubal;

- 
- [20] Rui Neves da Silva, “Teoria de Controlo Acetatos teóricos”, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa, 2009.
- [21] Cristiana J. Silva, Delfim F. M. Torres, Emmanuel Trélat, “ O Controlo Ótimo e as suas Múltiplas Aplicações”, Porto, 2009
- [22] M. Frasquilho, “A Teoria do Controlo Ótimo, Aplicação à Gestão de Recursos Naturais”, Universidade Nova de Lisboa, Faculdade de Economia, 1994;
- [23] Frank L. Lewis, “Optimal Control”, Wiley, 1986;
- [24] A. Leitão, “Cálculo Variacional e Controle Ótimo”, IMPA, 2001;
- [25] P. Gil, “Controlo Ótimo em Tempo Discreto”, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa, 2002;
- [26] M. E. Khan, “Matrix Inversion Lemma and Information Filter”, Honeywell Technology Solutions Lab, Bangalore, India;
- [27] PUC-Rio, “4-Filtro de Kalman”, Rio de Janeiro, Brasil;
- [28] P. Gil, “Filtro de Kalman em Tempo Discreto”, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa, 2002;
- [29] G. Welch, G. Bishop, “An Introduction to the Kalman Filter”, University of North Carolina at Chapel Hill, 2001;
- [30] The MathWorks, “Writing S-Functions”, 1998;
- [31] F. Coito, “ Espaços de Estados” Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa;
- [32] S. Boyd, “Lecture 12 – Jordan canonical form”, Stanford University, 2007;

---

# Anexos

---

## ANEXO I – SOLUÇÃO DO PROBLEMA DO LINEAR QUADRÁTICO

O princípio do máximo, ou mínimo, de Pontryaguin, que está na base do controlo ótimo, diz-nos que o melhor valor da ação de controlo,  $u(t)$ , é aquele que mais minimiza o valor da função Hamiltoniana, no instante  $t$  [24]. A função Hamiltoniana é uma forma de medida física de energia de um sistema dinâmico e que no caso da minimalização da função de custo (5.3) pode ser escrita da seguinte forma [23]:

$$H(k) = \frac{1}{2} \left[ (y_i(k) - r_i(k))^T Q (y_i(N) - r_i(N)) + u_i^T(k) R u_i(k) \right] + \lambda^T(k+1) (A_i x_i(k) + B_i u_i(k)) \quad (5.4)$$

o que origina uma equação para o co-estado (sistema adjunto),  $\lambda$ :

$$\lambda(k) = A_i^T \lambda(k+1) + C_i^T Q C_i x_i(k) - C_i^T Q r_i(k) \quad (5.5)$$

e a condição de estacionaridade definida por:

$$\frac{\partial H}{\partial u_i} = 0 \Rightarrow B_i^T \lambda(k+1) + R u_i(k) = 0 \quad (5.6)$$

Resolvendo a equação (5.6) em ordem a  $u_i(k)$  fica-se com:

$$u_i(k) = -R^{-1} B_i^T \lambda(k+1) \quad (5.7)$$

Substituindo a equação (5.7) nas equações de estado (5.1) e (5.2), permite escrever a dinâmica do sistema Hamiltoniano na forma:

$$\begin{bmatrix} x_i(k+1) \\ \lambda(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_i & -B_i R^{-1} B_i^T \\ C_i^T Q C_i & A_i^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i(k) \\ \lambda(k+1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -C_i^T Q r_i(k) \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

Desta forma as condições de fronteira associadas a esta dinâmica são as seguintes:

$$\lambda(N) = C_i^T S (C_i x_i(N) - r_i(N)) \quad (5.9)$$

$$x_i(0) \quad (\text{condição inicial conhecida})$$

A partir da equação (5.9) podemos assumir que, para todos os  $k \leq N$ , o co-estado admite uma solução da forma [23]:

$$\lambda(k) = P_k x(k) - m(k) \quad (5.10)$$

Em que:

- $P_k$  e  $m(k)$  são duas sequencias a determinar.

De notar que o pressuposto (5.10) só é validada se a matriz  $P_k$  e o vetor  $m(k)$  foram determinados com equações consistentes em relação à solução do problema.

Para determinar estas equações, substitui-se a equação (5.10) na primeira linha da matriz da dinâmica do Hamiltoniano (5.8), chegando-se à seguinte relação:

$$x_i(k+1) = A_i x_i(k) - B_i R^{-1} B_i^T P_{k+1} x_i(k+1) + B_i R^{-1} B_i^T m(k+1) \quad (5.11)$$

que pode ser resolvida em ordem a  $x_i(k+1)$ , conduzindo a:

$$x_i(k+1) = (I - B_i R^{-1} B_i^T P_{k+1})^{-1} (A_i x_i(k) + B_i R^{-1} B_i^T m(k+1)) \quad (5.12)$$

Em que I é a matriz identidade.

Combinado a equação do co-estado, em (5.10), com as expressões (5.10) e (5.12) obtém-se:

$$P_k x_i(k) - m(k) = C_i^T Q C_i x_i(k) + (I - B_i R^{-1} B_i^T P_{k+1})^{-1} (A_i x_i(k) + B_i R^{-1} B_i^T m(k+1)) - A_i^T m(k) - C_i^T Q r_i(k) \quad (5.13)$$

Que reorganizando a equação fica-se com:

$$[-P_k + A_i^T P_{k+1} (I + B_i R^{-1} B_i^T P_{k+1})^{-1} A_i + C_i^T Q C_i] x_i(k) + [m(k) + A_i^T P_{k+1} (I - B_i R^{-1} B_i^T P_{k+1})^{-1} B_i R^{-1} B_i^T m(k+1) - A_i^T m(k) - C_i^T Q r_i(k)] = 0 \quad (5.14)$$

Uma vez que esta expressão se deve verificar para quaisquer sequências  $x_i(k)$ , associadas a qualquer valor possível de  $x_i(0)$ , a única forma de tal ser assegurado é se cada uma das parcelas da expressão anterior for, isoladamente, igual a zero. Desta forma, e usando o lema da inversão das matrizes [26], pode-se chegar às equações que permitem calcular  $P_k$ , (5.15), e  $m(k)$  (5.16).

$$P_k = A_i^T [P_{k+1} - P_{k+1} B_i (B_i^T P_{k+1} B_i + R)^{-1} B_i^T P_{k+1}] A_i + C_i^T Q C_i \quad (5.15)$$

$$m(k) = [A_i^T - A_i^T P_{k+1} B_i (B_i^T P_{k+1} B_i + R)^{-1} B_i^T] m(k+1) + C_i^T Q r_i(k) \quad (5.16)$$

Comparando as expressões (5.15) e (5.16), as condições de fronteira são dadas por:

$$\begin{cases} P_N = C_i^T S C_i \\ m(N) = C_i^T R r_i(N) \end{cases} \quad (5.17)$$

Dado que ambas as sequências podem ser calculadas, de uma forma recursiva, o pressuposto (5.10) é válido. Desta forma pode-se calcular a ação de controlo através da seguinte equação:

$$u_i(k) = -R^{-1} B_i^T \lambda(k+1) = -R^{-1} B_i^T (P_{k+1} x_i(k+1) - m(k+1)) \quad (5.18)$$

Como na expressão (5.18) o sinal da ação de controlo, no instante  $k$ , depende do estado do sistema no instante  $k+1$ , que não é conhecido no instante  $k$ , esta lei de controlo não é causal. Para resolver o efeito da não causalidade, substitui-se a equação da dinâmica do troço do canal, (5.1), na expressão anterior, obtendo-se:

$$u_i(k) = -R^{-1} B_i^T P_{k+1} (A_i x_i(k) + B_i u_i(k)) + R^{-1} B_i^T m(k+1) \quad (5.19)$$

Multiplicando ambos os lados da igualdade por R e resolvendo em ordem a  $u_i(k)$ , chega-se à expressão final para o calculo da ação de controlo que melhor minimiza a função de custo (5.3).

$$u_i(k) = (B_i^T P_{k+1} B_i + R)^{-1} B_i^T (-P_{k+1} A_i x_i(k) + m(k+1)) \quad (5.20)$$

Uma vez obtida a expressão para o cálculo da ação de controlo, pode-se agora definir os ganhos de avanço e de retroação,  $K_k^v$  e  $K_k$  respetivamente, como:

$$K_k^v = (B_i^T P_{k+1} B_i + R)^{-1} B_i^T \quad (5.21)$$

$$K_k = K_k^v P_{k+1} A_i \quad (5.22)$$

Assim a expressão para o cálculo da ação de controlo, ou lei de controlo, pode ser escrita da seguinte forma:

$$u_i(k) = -K_k x_i(k) + K_k^v m(k+1) \quad (5.23)$$

Ao analisar a lei de controlo pode-se constatar a existência de duas componentes. Uma obtida por realimentação das variáveis de estado,  $-K_k x_i(k)$ , e outra associada à referência  $r_i(k+1)$ ,  $K_k^v m(k+1)$ , pelo termo  $m(k+1)$ .

## ANEXO II – Modelos de estado lineares dos troços do Canal

Modelo linear que representa a dinâmica do primeiro troço (5.44) e (5.45):

$$\begin{bmatrix} x_{1J1}(k+1) \\ x_{2J1}(k+1) \\ x_{3J1}(k+1) \\ x_{4J1}(k+1) \\ x_{1J2}(k+1) \\ x_{2J2}(k+1) \\ x_{3J2}(k+1) \\ x_{4J2}(k+1) \\ x_{5J2}(k+1) \\ x_{6J2}(k+1) \\ x_{7J2}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -0.674 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2.562 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4.075 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3.187 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -0.891 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1.890 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.798 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1.796 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1J1}(k) \\ x_{2J1}(k) \\ x_{3J1}(k) \\ x_{4J1}(k) \\ x_{1J2}(k) \\ x_{2J2}(k) \\ x_{3J2}(k) \\ x_{4J2}(k) \\ x_{5J2}(k) \\ x_{6J2}(k) \\ x_{7J2}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.049 \\ -0.183 \\ 0.229 \\ -0.096 \\ -0.041 \\ 0.041 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_{C1}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.052 \\ -0.053 \end{bmatrix} u_{C2}(k) \quad (5.44)$$

$$\begin{bmatrix} y_{j1}(k) \\ y_{j2}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1j1}(k) \\ x_{2j1}(k) \\ x_{3j1}(k) \\ x_{4j1}(k) \\ x_{1j2}(k) \\ x_{2j2}(k) \\ x_{3j2}(k) \\ x_{4j2}(k) \\ x_{5j2}(k) \\ x_{6j2}(k) \\ x_{7j2}(k) \end{bmatrix} \quad (5.45)$$

Onde:

- $\begin{bmatrix} 0.049 \\ -0.183 \\ 0.229 \\ -0.096 \\ -0.041 \\ 0.041 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  : Matriz B;
- $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.052 \\ -0.053 \end{bmatrix}$  : Matriz de ganhos, associada ao movimento da comporta posterior (C2),  $\Gamma$ ;
- $u_{c2}(k)$  : Representa o valor das posições da comporta posterior (C2), no instante k,  $\delta_i(k)$ ;

Modelo linear que representa a dinâmica do segundo troço, (5.46) e (5.47):

$$\begin{bmatrix} x_{1J2}(k+1) \\ x_{2J2}(k+1) \\ x_{3J2}(k+1) \\ x_{4J2}(k+1) \\ x_{5J2}(k+1) \\ x_{6J2}(k+1) \\ x_{7J2}(k+1) \\ x_{1J3}(k+1) \\ x_{2J3}(k+1) \\ x_{3J3}(k+1) \\ x_{4J3}(k+1) \\ x_{5J3}(k+1) \\ x_{6J3}(k+1) \\ x_{7J3}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -0.891 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1.8900 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.798 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1.796 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -0.908 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1.908 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.904 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1.904 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1J2}(k) \\ x_{2J2}(k) \\ x_{3J2}(k) \\ x_{4J2}(k) \\ x_{5J2}(k) \\ x_{6J2}(k) \\ x_{7J2}(k) \\ x_{1J3}(k) \\ x_{2J3}(k) \\ x_{3J3}(k) \\ x_{4J3}(k) \\ x_{5J3}(k) \\ x_{6J3}(k) \\ x_{7J3}(k) \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.052 \\ -0.053 \\ -0.037 \\ 0.037 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_{c1}(k) + \begin{bmatrix} -0.041 & 0 \\ 0.041 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0.035 \\ 0 & -0.036 \end{bmatrix} u_{c2}(k)$$

(5.46)

$$\begin{bmatrix} y_{J1}(k) \\ y_{J2}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1J2}(k) \\ x_{2J2}(k) \\ x_{3J2}(k) \\ x_{4J2}(k) \\ x_{5J2}(k) \\ x_{6J2}(k) \\ x_{7J2}(k) \\ x_{1J3}(k) \\ x_{2J3}(k) \\ x_{3J3}(k) \\ x_{4J3}(k) \\ x_{5J3}(k) \\ x_{6J3}(k) \\ x_{7J3}(k) \end{bmatrix}$$

(5.47)

Em que:

---

- $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.052 \\ -0.053 \\ -0.037 \\ 0.037 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  : Matriz B;

- $\begin{bmatrix} -0.041 & 0 \\ 0.041 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0.035 \\ 0 & -0.036 \end{bmatrix}$  : Matriz de ganhos, associada ao movimento da comporta anterior (C1) e posterior (C3),  $\Gamma$ ;

- $\begin{bmatrix} u_{c1}(k) \\ u_{c3}(k) \end{bmatrix}$  : Representa o valor das posições da comporta anterior (C1) e posterior (C2),  $\delta_i(k)$ ;

## ANEXO III – Simulações complementares

