UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Secção Autónoma de Ciências Sociais Aplicadas
Ciências de Educação

Aprendizagem da Geometria em Ambientes Computacionais Dinâmicos

Um estudo no 9º ano de escolaridade

Dissertação apresentada para obtenção do grau de Mestre em Ciências de Educação - Área Educação e Desenvolvimento, sob orientação conjunta da Professora Doutora Teresa Ambrósio e do Dr. José Manuel Matos

Maria Margarida Bettencourt de Beires Junqueira

Lisboa

1994

Ao Serginho,
que fez comigo esta longa "marcha de montanha" e me ajudou a compreender a dialéctica das provas e refutações.

Resumo

Um *ambiente geométrico dinâmico* (AGD) computacional permite fazer construções e manipulá-las, conservando invariantes as relações estabelecidas. Neste estudo pressupôs-se que recorrendo a um AGD se podem criar estratégias poderosas para a construção pessoal e social do conhecimento geométrico. À luz dessa hipótese, investigou-se como é que os alunos exploram — realizam, justificam e investigam — construções num AGD e como é que isso os habilita a compreender objectos e relações geométricas, a formular conjecturas e a elaborar argumentos indutivos e dedutivos.

Utilizou-se uma metodologia de experiência de ensino, operacionalizada numa intervenção didáctica levada a cabo numa turma do 9º ano. Os alunos realizaram actividades que incidiram na exploração de *construções resistentes* à manipulação. Recolheram-se dados através da observação directa e participante do trabalho dos alunos, nas aulas e em sete episódios de ensino.

A análise dos dados mostrou que quase sempre os alunos descobriram por si próprios processos de fazer as construções propostas. Normalmente privilegiavam a aparência das figuras e reproduziam sequências de objectos e relações que tinham experimentado serem resistentes à manipulação. Para justificar as construções recorriam sobretudo a dados da evidência empírica, mas, através do diálogo, alguns alunos identificavam e relacionavam propriedades das figuras. Na investigação das construções a sua atenção era mais atraída pelo que viam modificar-se, necessitando de orientação para observar invariâncias e formular conjecturas. Na exploração das construções identificaram-se três níveis que se associaram aos Níveis 1, 2 e 3 do modelo de van Hiele.

O estudo reforça a hipótese de que a exploração de construções em AGD constitui uma estratégia poderosa para a aprendizagem da Geometria.

Palavras chave: aprendizagem da Geometria, modelo de van Hiele, ambientes geométricos computacionais, figura geométrica, conjecturas e provas.

Abstract

On a computer *dynamic geometry environment* (DGE) one can make constructions and drag them, keeping invariant the relations set up. This study assumed that by using a DGE it is possible to build powerful strategies for the personal and social construction of geometric knowledge. In the light of that hypothesis, the study focuses on how students explore — make, justify and investigate — constructions on a DGE and how this allows them to understand geometric objects and relations, to make conjectures, and to make deductive and inductive reasoning.

A teaching experiment methodology was employed, implemented through a didactic intervention in a 9th grade class. The students made and explored *drag resisting constructions*. Data was gathered through direct and participant observation of students' work, in classes and in seven teaching episodes.

Data analysis showed that students themselves found processes to make the proposed constructions. They usually privileged the appearance of the figures and reproduced sequences of objects and relations they had experienced to be drag resistant. To justify the constructions they mainly used empirical evidence, but, through dialogue, some students recognised properties of the figures and related them to each other. In investigating constructions their attention was mainly attracted by what they saw changing, but needed orientation to see invariants and to formulate conjectures. In exploring the constructions three levels were found that were associated to the van Hiele levels 1, 2 and 3.

This study reinforces the hypothesis that exploring constructions on DGE can be a powerful strategy for the learning of geometry.

Key words: geometry learning, van Hiele model, geometric computer environments, geometrical figure, conjectures and proofs.

Índice de matérias

Índice de figuras

Índice de quadros

Capítulo 1 - Introdução geral ao estudo

A introdução geral ao estudo, que se faz neste capítulo, engloba duas vertentes. Na primeira expõem-se algumas motivações decorrentes da prática profissional da autora e que estão na origem deste trabalho. Na segunda apresenta-se o estudo, referindo a sua pertinência, os objectivos, a metodologia e a estrutura organizativa.

1.1 Motivações pessoais para a realização do estudo

Durante os cinco anos lectivos (1988/93) que integrei a equipa do Pólo do Projecto MINERVA da FCT/UNL, entre outras actividades, trabalhei na formação de professores e no desenvolvimento de materiais para utilização das Tecnologias de Informação em Educação Matemática.

O envolvimento dos professores em projectos de intervenção didáctica que consubstancializassem na prática a formação recebida constituiu sempre uma das principais linhas orientadoras da formação promovida pelo Pólo da FCT/UNL. Nesse sentido, colaborei em diversos projectos de professores interessados em experimentar com os seus alunos ideias debatidas em sessões de formação. De um modo geral, o apoio centrava-se na planificação das intervenções, na disponibilização de documentação e na elaboração de materiais didácticos, em particular fichas de trabalho. Mas, por razões de ordem diversa, certos professores manifestaram também interesse em que participasse nas suas aulas.

Isso permitiu-me observar o trabalho dos alunos a interagir, em pequenos grupos, com os ambientes computacionais. Pouco habituados a serem autónomos, solicitavam constantemente a atenção do seu professor. Como este tinha alguma dificuldade em responder a todos os alunos em tempo útil, com frequência, alguns pediam também a minha colaboração. Mais do que dar respostas directas, optei sempre por reformular e devolver as suas questões e, através do diálogo, levá-los a reflectir sobre elas e a procurar soluções. Utilizando uma metáfora construtivista em voga, pode dizer-se que tentava desempenhar, na construção do seu conhecimento matemático, o papel de *andaimaria* (*scaffolding*) — mecanismo auxiliar temporário utilizado na realização de construções robustas e permanentes — que lhes permitia realizar aquilo que só por si ainda não eram capazes de fazer.

A observação directa e participante nessas aulas e as conversas que mantive com diversos alunos foram muito estimulantes. Permitiram-me descobrir significados que atribuíam à realização das actividades que lhes eram propostas e aos conceitos matemáticos subjacentes, e levaram-me a repensar muitas das minhas representações pessoais (Boavida, 1993) sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática, e mais especificamente sobre o papel dos ambientes computacionais nessa aprendizagem.

Ficou-me daí a curiosidade em compreender, de uma forma sistemática e estruturada, o sentido das aprendizagens dos alunos e, para isso, aproveitar a sua disponibilidade para conversar. A participação nessas aulas levou-me a desejar fazer uma investigação *in vivo*, como diz Vinner (1994), que elucidasse sobre as reacções dos alunos às propostas de trabalho que lhes foram apresentadas, inseridos no seu contexto habitual e onde se introduziu um ambiente computacional.

A maioria das intervenções didácticas que acompanhei versaram um dos temas, Geometria ou Funções. Qualquer um deles é reconhecido como tema a privilegiar ao longo de todo o currículo da escolaridade básica e secundária (DGBES, 1991a, 1991b; NCTM, 1991). A opção por realizar um estudo sobre Geometria deve-se, sobretudo, ao gosto pessoal por esse ramo da Matemática, favorecido pelo aspecto lúdico da sua exploração nos novos ambientes geométricos computacionais.

1.2 Apresentação do estudo

Na apresentação do estudo começa-se por discutir a sua pertinência à luz de orientações recentes para o ensino e aprendizagem da Matemática. Em seguida, formulam-se as questões de onde partiu e os seus objectivos específicos, dos quais decorre a linha metodológica adoptada. Por último, expõe-se a estrutura do presente trabalho.

1.2.1 Pertinência

Nos Sistemas Educativos, um pouco por todo o Mundo, verifica-se um movimento de reforma curricular que contempla as exigências da denominada *sociedade da informação*, característica do limiar do séc. XXI, onde se espera que os actuais alunos das escolas básicas e secundárias participem como cidadãos produtivos e auto-realizados. De acordo com o *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 1991) os novos objectivos sociais da educação incluem *trabalhadores matematicamente alfabetizados*, *aprendizagem durante toda a vida*, *oportunidades para todos*, e um *eleitorado informado*. Visando estes objectivos, o NCTM recomenda a aquisição de *poder matemático* por parte de todos os indivíduos. Entende por isso, o desenvolvimento da sua capacidade para explorar, conjecturar e raciocinar logicamente, bem como da sua aptidão para utilizar com eficácia uma variedade de métodos matemáticos na resolução de problemas não rotineiros (NCTM, 1991).

Também para Putnam, Lampert e Peterson (1990) a aquisição de um conhecimento mais vasto da Matemática e a aprendizagem das suas formas mais gerais de raciocínio são essenciais para um pensamento matemático poderoso e flexível e para a capacidade de resolução de problemas exigida pela sociedade presente e futura. Nesse sentido, os mesmos autores propõem que os currículos de Matemática das escolas básicas e secundárias se ampliem para além do seu foco tradicional na aprendizagem de algoritmos e dêem mais ênfase à compreensão de conceitos, para o que consideram a Geometria um dos domínios a privilegiar.

A necessidade, reconhecida internacionalmente, de redefinir o lugar da Geometria nos currículos escolares levou a *International Comission on Mathematical Instruction* (ICMI) a propor a realização de uma conferência subordinada ao tema *Perspectives on the teaching of Geometry for the 21st century* (em Itália, em Setembro de 1995). No documento de discussão preparatório dessa conferência a ICMI (1994, p. 1) começa por salientar que:

- A Geometria, considerada como uma ferramenta para compreender, descrever e interagir com o espaço no qual vivemos, é talvez a parte da Matemática mais intuitiva, concreta e ligada ao real.
- A Geometria, como disciplina, assenta sobre um extenso processo de formalização, que tem sido levado a cabo há mais de 2000 anos em níveis crescentes de rigor, abstracção e generalização.
- Actualmente, as enormes possibilidades dos gráficos computacionais influenciam muitos aspectos das nossas vidas; para utilizar essas possibilidades é necessária uma educação visual adequada.

Estes factos levam a ICMI a indicar as seguintes finalidades para a conferência (ICMI, 1994, p. 2):

- discutir os objectivos do ensino da Geometria em diferentes níveis de escolaridade e de acordo com diferentes tradições culturais e diferentes ambientes;
- identificar desafios importantes e correntes emergentes para o futuro e analisar os seus impactos didácticos potenciais;
- explorar e implementar novos métodos de ensino.

O presente estudo pretende ser uma contribuição no âmbito desta última finalidade, uma vez que procura caracterizar processos de aprendizagem da Geometria desenvolvidos pelos alunos quando interagem com um novo tipo de ambientes computacionais — os *ambientes geométricos dinâmicos* (*AGD*) (Noss, Hoyles, Healy e Hoelzl, 1994).

O gosto pessoal da investigadora pela exploração da Geometria em ambientes geométricos dinâmicos encontrou, assim, fundamento na literatura da especialidade. Entre outros, o NCTM (1991) e a ICMI (1994) salientam a necessidade de investigações nesta área curricular, mais ainda quando se recorre aos AGD, apenas recentemente disponíveis e cuja utilização pelos alunos está pouco estudada.

1.2.2 Questões do estudo. Finalidade e objectivos específicos

Para investigar as aprendizagens dos alunos em contextos em que se introduzem ambientes computacionais, podem colocar-se diferentes questões. Se se assumir a perspectiva de que os alunos desempenham um papel activo na construção dos seus conhecimentos e competências, resulta que uma pergunta importante a colocar é «o que é que os alunos fazem com esta máquina?», como De Corte (1992, p. 95) faz notar. Por outro lado, segundo Laborde e Laborde (1992) se no contexto da resolução de problemas e actividades geométricas se introduzir um ambiente computacional que permite a realização de construções e a sua manipulação directa, produzem-se novas interacções entre os alunos e esse contexto.

Estas considerações levaram a formular neste estudo as seguintes questões:

- *Como é que os alunos exploram construções num ambiente geométrico dinâmico?*
- *Como é que essa exploração os habilita a compreender os objectos e relações geométricas, a formular conjecturas e a elaborar argumentos indutivos e dedutivos?*

No sentido de responder a estas questões, estabeleceu-se como grande finalidade do estudo caracterizar a Geometria que fazem os alunos quando interagem com um AGD e definiram-se como objectivos específicos, descrever, analisar e interpretar os processos desenvolvidos para:

- realizar construções geométricas;
- justificar os processos de construção;
- investigar as construções e descobrir propriedades das figuras.

A formulação das questões a investigar foi feita de tal modo que, por um lado, servissem de referencial à observação que se pretendia fazer, mas, por outro, fossem suficientemente amplas para não estreitarem demasiado essa observação e possibilitassem a emergência de situações não previstas que se revelassem pertinentes na compreensão dos fenómenos.

1.2.3 Linha metodológica

Do ponto de vista metodológico o presente estudo engloba-se na família das *experiências de ensino*, que, segundo Lesh, Amit e Kelly (1994, p. 164), são «*estudos longitudinais do desenvolvimento conceptual no seio de ambientes matemáticos ricos*, através dos quais é possível simultaneamente estimular, facilitar, e investigar a evolução de conhecimento particular e de capacidades» [itálico dos autores]. Optou-se por esta abordagem metodológica uma vez que se pretendia caracterizar processos desenvolvidos pelos alunos através de uma intervenção planificada, mais do que a medir os efeitos dessa intervenção ou estabelecer uma correlação causas-efeitos.

Para criar um contexto que propiciasse a emergência dos processos que se pretendiam caracterizar, concebeu-se e realizou-se uma intervenção didáctica que visou o ensino e aprendizagem da unidade Geometria do Plano no 9º ano de escolaridade, numa turma de uma escola secundária dos arredores de Lisboa, e em que se utilizou o ambiente computacional Cabri-géomètre.

O *corpus* de análise é constituído essencialmente por sete *episódios de ensino* (Cobb e Steffe, 1983) realizados com pares ou trios de alunos da turma, com a duração de um tempo lectivo cada, em sessões extra-aula. Durante esses episódios os alunos discutiram actividades que tinham realizado nas aulas e fizeram outras. Os episódios de ensino foram gravados em vídeo e posteriormente transcritos. Mas o *corpus* da análise inclui também outros dados, provenientes da observação directa das aulas, das fichas que os alunos realizaram e das gravações das suas construções geométricas em disquetes. Os dados recolhidos foram tratados segundo a técnica da análise de conteúdo (Vala, 1986) que permitiu levantar um conjunto de categorias de análise (Bardin, 1977) para cada um dos três objectivos específicos do estudo.

Ainda que não fosse esse o objectivo do estudo, decidiu-se também avaliar a intervenção didáctica. Para o efeito procedeu-se a uma análise estatística dos resultados de duas aplicações do Teste de geometria de van Hiele (Usiskin, 1982) (no início e no final da intervenção).

1.2.4 Estrutura organizativa

Este trabalho está organizado em oito capítulos. A esta *Introdução geral ao estudo* segue-se o capítulo 2, que procede a uma revisão de literatura subordinada ao grande tema *Perspectivas sobre aprendizagem da Geometria em ambientes computacionais*. Começa-se por abordar dois temas sobre aprendizagem: o modelo de van Hiele de desenvolvimento do raciocínio geométrico e a teoria de De Corte de aprendizagem com base na instrução, com destaque para a noção de ambiente de aprendizagem poderoso, proposta por este autor (De Corte, 1992; 1994).

A revisão de literatura trata ainda, com alguma profundidade, a noção de ambiente geométrico dinâmico — AGD (Noss *et. al*, 1994) e dois aspectos da aprendizagem da Geometria a que os AGD trouxeram modificações consideráveis: a distinção entre figura geométrica e as suas representações materiais; conjecturas e provas e o seu papel na construção do conhecimento geométrico, especificamente, e matemático em geral.

No capítulo 3 descreve-se o *Plano metodológico* da investigação, segundo as linhas expostas em §1.2.3. O capítulo 4, *Intervenção didáctica: Cabri 9º 5 - exploração de construções em ambientes geométricos dinâmicos*, é um capítulo de interface entre os capítulos de análise teórica precedentes e os capítulos de apresentação dos dados que se seguem. Nele descreve-se e comenta-se a intervenção didáctica que, neste estudo, operacionalizou a abordagem metodológica *experiência de ensino.*

Nos capítulos 5, 6 e 7 faz-se a apresentação da análise de dados, tendo em vista os três tipos de processos em foco no estudo. No capítulo 5, *Realização de construções geométricas*, no capítulo 6, *Justificação de construções geométricas*, e na primeira parte do capítulo 7, *Investigação de construções geométricas*, descrevem-se, analisam-se e interpretam-se os processos desenvolvidos pelos alunos na realização desses tipos de actividades. O capítulo 7 inclui também uma segunda parte, *Manipulação na exploração de construções*, em que se discutem, de forma integrada, os três tipos de actividades, do ponto de vista de como os alunos utilizaram o recurso à manipulação directa de construções geométricas no ecrã de um computador.

Encerra-se o estudo no capítulo 8, *Aprendizagem da Geometria em AGD: conclusões; implicações.* Nesse capítulo traça-se uma panorâmica das principais ideias sobre processos de aprendizagem da Geometria com recurso a AGD, que emergiram ao longo do trabalho desenvolvido. Daí ressaltam algumas implicações didácticas e curriculares sobre utilização dos AGD e também alguns caminhos de investigação futura.

Capítulo 2 - Perspectivas sobre aprendizagem da Geometria em ambientes computacionais

Este estudo pretende compreender como é que os alunos realizam e exploram construções num ambiente geométrico dinâmico, e como é que isso os habilita para compreender os objectos geométricos e as suas relações formular conjecturas e elaborar argumentos indutivos e dedutivos. Nesse sentido a revisão de literatura que aqui se apresenta discute o tema *aprendizagem da Geometria em ambientes computacionais*. Essa discussão aborda seis subtemas, que constituem as secções deste capítulo.

Para introduzir o tema, na primeira secção, analisam-se tendências curriculares da Geometria no contexto escolar actual, internacional e nacional. Na segunda e terceira secções expõem-se dois modelos teóricos que destacam o papel da instrução na aprendizagem, respectivamente, o modelo de van Hiele de desenvolvimento do raciocínio geométrico e o modelo de ambientes de aprendizagem poderosos de De Corte (1992; 1994), uma vez que o estudo se debruça sobre processos desenvolvidos por alunos sob influência de situações específicas de aprendizagem.

Na quarta, quinta e sexta secções interliga-se aprendizagem da Geometria e recurso a ambientes computacionais. Mostra-se que, de um modo global, os ambientes geométricos dinâmicos (AGD) permitem desenvolver estratégias de aprendizagem poderosas. Em seguida discutem-se, mais em profundidade, dois aspectos relevantes neste estudo: a noção de *figura geométrica* e o estatuto das construções geométricas enquanto forma de representar no ecrã do computador as figuras geométricas; o papel da *prova* e da *formulação de conjecturas* na actividade matemática e as ampliações que os AGD podem trazer a essa actividade.

O capítulo termina com uma síntese dos termos definidos nesta revisão de literatura, mais relevantes na análise de dados do estudo.

2.1 Perspectivas e finalidades do ensino e aprendizagem da Geometria

Esta secção inicia-se com um breve referência a diferentes perspectivas que a Geometria tem assumido ao longo dos tempos. No plano pedagógico identificam-se perspectivas relevantes das quais decorrem importantes finalidades para o ensino e aprendizagem desta disciplina, que se referem em seguida, destacando a posição dos currículos da Nova Reforma do Sistema

Educativo português. Termina-se com uma primeira referência às linhas orientadoras da intervenção didáctica implementada no âmbito deste estudo.

2.1.1 Principais perspectivas da Geometria através dos tempos

Nos seus primórdios, o desenvolvimento da Geometria deu-se em duas grandes perspectivas: estudo do espaço físico e desenvolvimento de uma teoria axiomática. A primeira, tradicionalmente situada no antigo Egipto, resultou da necessidade de efectuar medições dos terrenos sistematicamente inundados pelas cheias do Nilo. Procurou estudar o mundo físico, através da observação e manipulação de modelos planos e espaciais. A partir da observação de determinadas relações em modelos geométricos, desenvolveu-se a segunda perspectiva, que se preocupou em mostrar a veracidade e condições de permanência dessas relações. Esta segunda linha desenvolveu-se na antiga Grécia e teve o seu maior expoente em Euclides, «um dos matemáticos mais influentes de todos os tempos», a quem se atribui o trabalho de compilação da matemática da época, baseado «numa dedução estritamente lógica de teoremas, de um conjunto de definições, postulados e axiomas» (Struik, 1989, pp. 90-91).

A partir do século XVII a Geometria Euclidiana começou a perder muita da sua importância enquanto modelo explicativo da realidade. Nessa época desenvolveu-se extraordinariamente o cálculo, por influência de uma concepção do mundo que rompeu com a visão aristotélica da natureza, assente na qualidade e na teologia, e privilegiou a quantidade e as relações de causa e efeito. Influenciado por esse contexto, Descartes publicou em 1637 a sua obra *La Géometrie*, em que colocou a Geometria clássica no domínio dos algebristas. Esta perspectiva dominou durante o século XVIII.

No século XIX, com Monge e os seus discípulos, a Geometria recomeçou a florescer. Nos seus trabalhos aparecem nitidamente separados os métodos sintético e algébrico de tratamento da geometria. O método sintético, utilizado por Monge na Geometria Descritiva, atraiu particularmente Poncelet, que o utilizou para desenvolver a Geometria Projectiva, retomando um modo de pensar já sugerido por Desargues dois séculos antes, então sem muito impacto. Mas outras perspectivas começaram também a emergir, resultantes da discussão sobre se o postulado euclidiano das paralelas seria um axioma independente ou poderia ser deduzido de outros axiomas, questão discutida pelos matemáticos ao longo de 2000 anos. Gauss terá sido o primeiro matemático a acreditar na independência desse postulado que implicava que outras geometrias, baseadas em postulados diferentes, fossem igualmente possíveis. Mas Gauss absteve-se de tornar pública a sua posição sobre esta questão, o que foi feito por Lobachevski e Bolyai. Mas a maioria dos matemáticos dessa época, adeptos da filosofia kantiana então predominante, ignoraram as publicações desses dois autores. A importância das geometrias não euclidianas só foi verdadeiramente tida em conta a partir dos trabalhos de Riemann. A sua teoria geral das variedades legitimava não só os tipos de geometria não euclidiana já existentes, como outra que ficou conhecida com o seu nome.

A integração de todas as perspectivas geométricas na teoria dos grupos, proposta por em Klein em 1872, voltou a fazer com que a Geometria perdesse muito do seu impacto enquanto disciplina autónoma. A resolução de problemas geométricos ligados à realidade passou a ser deixada a cargo de outras disciplinas mais características da Engenharia, como o Desenho Geométrico ou os Métodos Gráficos.

O início do século XX foi marcado por um movimento de preocupação com os fundamentos da Matemática. Nesse contexto Hilbert, na sua obra *Fundamentos da Geometria* , publicada em 1900, analisou os axiomas em que a Geometria Euclidiana se baseava e fez ver como a pesquisa axiomática moderna podia melhorar as realizações dos gregos (Struik, 1989). Assim, a Geometria euclidiana, construída e refinada ao longo de 2000 anos de história da Humanidade, ainda hoje é por muitos considerada o paradigma de uma teoria axiomática.

No final deste século a Geometria rompeu de novo com as fronteiras tradicionais. A importância da imagem na actual *sociedade da informação* e a possibilidade de gerar e tratar imagens através das teconologias computacionais deram-lhe novos rumos e recolocaram-na num lugar de destaque entre as disciplinas matemáticas. O exemplo mais carismático é a Geometria Fractal. Esta nova perspectiva geométrica investiga «uma grande família de objectos geométricos, até agora considerados esotéricos e perfeitamente inúteis [... que] têm em comum uma forma extremamente irregular ou interrompida» (Mandelbrot, 1991, p. 13), os quais se revelaram modelos com grande poder explicativo para muitos fenómenos em variados domínios do conhecimento.

2.1.2 Perspectivas relevantes na Geometria escolar

Battista e Clements (1992, p. 420) consideram a *Geometria escolar* como o estudo «dos objectos espaciais, relações e transformações que foram formalizados (ou matematizados) e dos sistemas axiomáticos matemáticos que foram construídos para os representar». Estes autores salientam ainda que a expressão *Geometria escolar* se refere «quase universalmente» à Geometria Euclidiana, ainda que se distingam abordagens diferentes: sintética, analítica, transformacional, vectorial. Os diferentes currículos internacionais privilegiam uma ou outra dessas abordagens.

Como Usiskin (1987) faz notar, as diferentes perspectivas e abordagens da Geometria originam finalidades e justificações diferentes para o seu estudo que conduzem a critérios diferentes para a sua compreensão. Este autor contesta o privilégio dado a uma única forma de conceptualizar a Geometria, o que não condiz com a forma como os geómetras concebem o seu campo de estudo, e propõe que os currículos reflictam a diversidade de perspectivas e abordagens que actualmente se identificam neste domínio. Numa publicação recente do NCTM, intitulada *Geometria a Partir de Múltiplas Perspectivas* (Coxford Jr., 1993), o autor defende a mesma ideia e apresenta formas práticas de a concretizar (p. 5):

> A Geometria, hoje e amanhã, deve ser abordada de várias perspectivas para permitir ao utilizador dominar a maioria dos conteúdos e das suas utilizações amplas e ainda expandir-se para zonas até à data ignoradas das ciências da natureza. Os fractais [...] constituem a nova ferramenta geométrica do futuro próximo. Mas sobre o futuro mais distante? [...] Ninguém sabe, mas pode ter-se a certeza de que a sua compreensão exigirá uma consciência geométrica com perspectivas variadas.

Sintetizando linhas de força do debate internacional que decorre sobre ensino e aprendizagem da Geometria, a *International Comission on Mathematical Instruction* considera particularmente relevantes no plano pedagógico as seguintes perspectivas da Geometria (ICMI, 1994, p. 2):

- Geometria como a ciência do espaço.
- Geometria como um método para representar visualmente conceitos e processos de outras áreas na Matemática e noutras ciências.
- Geometria como um ponto de encontro entre Matemática como teoria e Matemática como fonte de recursos.
- Geometria como uma forma de pensamento e compreensão e, num nível mais elevado, como uma teoria formal.
- Geometria como um exemplo paradigmático para ensinar o raciocínio dedutivo.
- Geometria como uma ferramenta em aplicações, tanto tradicional como inovadora.

A ICMI (1994, p. 3) distingue diferentes formas de abordar a Geometria: manipulativa, intuitiva, dedutiva, analítica. Distingue também uma Geometria com enfoque nas propriedades 'estáticas' dos objectos geométricos e uma que considera os objectos em cenários 'dinâmicos', preocupando-se com as suas modificações sob o efeito de diferentes tipos de transformações espaciais.

2.1.3 Finalidades da aprendizagem da Geometria

Um pouco por todo o mundo nota-se um movimento de reimplantação da Geometria nos currículos escolares, como deixou perceber na *18th Conference for the Psychology of Mathematics Education*, realizada em Lisboa em Agosto de 1994, a presença no grupo de trabalho sobre Geometria de representantes de países da América do Norte e Sul, Europa, Ásia, África e Oceania. Há um forte consenso de que esta disciplina é uma fonte por excelência de problemas não rotineiros, que podem propiciar o desenvolvimento, entre outras, das capacidades de visualização espacial, de raciocínio e de argumentação, identificadas como fundamentais para os cidadãos na época actual e no futuro.

O lugar de destaque concedido actualmente à Geometria em vários domínios do conhecimento e actividade humana e as diferentes perspectivas por que é vista conduziram a novas finalidades para o seu ensino e aprendizagem. No documento já referido a ICMI (1994, p. 7) identifica as seguintes finalidades:

- Descrever, compreender e interpretar o mundo real e os seus fenómenos.
- Proporcionar um exemplo de uma teoria axiomática.
- Fornecer uma colecção rica e variada de problemas e exercícios para a actividade individual dos estudantes.
- Treinar os alunos a fazer palpites, formular conjecturas, fornecer provas, e descobrir exemplos e contra-exemplos.
- Servir como uma ferramenta para outras áreas da Matemática.
- Enriquecer a percepção pública da Matemática.

Estas finalidades, também reconhecidas pelo NCTM, levaram esta instituição a recomendar nas *Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática escolar* (NCTM, 1991) uma maior ênfase no estudo da Geometria, ao longo de todo o currículo, desde os níveis de escolaridade mais elementares, e considerando que merecem mais atenção os seguintes tópicos:

Nos níveis 5º-8º (NCTM, 1991, p. 86):

- Desenvolvimento de uma compreensão dos objectos geométricos e suas relações.
- Utilização da Geometria na resolução de problemas.

Nos níveis 9º-12º (NCTM, 1991, p. 160):

- Integração [da Geometria] em todos os temas, em todos os anos de escolaridade.
- Abordagens por coordenadas e por transformações.
- Desenvolvimento de curtas sequências de teoremas.
- Argumentos dedutivos expressos oralmente ou por frases ou parágrafos escritos.
- Exploração em computador de figuras bi e tridimensionais.
- Geometria no espaço.
- Aplicações ao mundo real e modelação.

Segundo Veloso e Pinheiro (1995, p. 21) «as recomendações do documento do NCTM constituem hoje uma referência fundamental para a construção de um currículo apropriado para a Geometria do ensino básico e secundário».

2.1.4 A Geometria nos novos currículos portugueses

Nos últimos vinte anos o ensino e aprendizagem da Geometria em Portugal, como em muitos outros países, atravessou uma séria crise, em grande parte consequência do movimento da Matemática Moderna que trouxe para o seu estudo o carácter excessivamente formal e abstracto da teoria de conjuntos. O facto de os currículos em vigor anteriormente à Nova Reforma proporcionarem que a Geometria fosse normalmente "relegada" para o final do ano lectivo mais contribuiu para agravar essa crise, uma vez que normalmente não era leccionada ou era-o bastante à pressa, sendo subestimadas, quando não completamente ignoradas, abordagens manipulativas e intuitivas dos problemas geométricos.

O reconhecimento dessa situação levou os autores dos novos programas a 'recuperar' a Geometria e integrar nessa recuperação algumas das finalidades e objectivos específicos anteriormente referidos. Como refere Lobato (1992), uma autora mais ligada ao programa do 3º Ciclo, no Ensino Básico privilegiou-se o desenvolvimento do conhecimento do espaço, baseado sempre na análise de figuras. Nesta linha, os objectivos indicados são os seguintes (DGEBS, 1991a, p. 11):

- Identificar, descrever e comparar figuras geométricas.
- Conhecer e aplicar propriedades e relações geométricas, nomeadamente a igualdade e a semelhança na análise de figuras e na resolução de problemas.
- Realizar construções geométricas usando instrumentos adequados.
- Efectuar medições em situações reais com a precisão requerida ou estimando a margem de erro.
- Aplicar conhecimentos sobre perímetros, áreas e volumes na resolução de problemas.
- Reconhecer e aplicar simetrias, translações e rotações a um estudo dinâmico do plano.

Por seu lado, o programa do Ensino Secundário propõe a integração das perspectivas hipotético-dedutiva, cartesiana e vectorial da Geometria, tratada em paralelo no plano e no espaço (DGEBS, 1991b).

Mas a parte mais inovadora desses programas são as metodologias que propõem, as quais implicam o envolvimento activo do aluno na construção do seu conhecimento geométrico. Por exemplo, lê-se no programa do 7º ano (DGEBS, 1991a, p. 15):

> Pretende-se, na Geometria do 7º ano, fornecer um conjunto de conhecimentos básicos a partir de actividades de medição e construção e simultaneamente ir propondo situações tais que, através da análise e comparação de figuras, o aluno possa efectuar raciocínios dedutivos e indutivos, justificando propriedades simples, prevendo outras, comparando e sistematizando conhecimentos adquiridos fazendo eventualmente alguma demonstração desde que esta seja posta como um problema e encarada como um desafio.
> Ao resolver problemas geométricos, individualmente ou em grupo — através de construções, fazendo experiências, seleccionando estratégias, formulando hipóteses, descrevendo processos e justificando o modo de proceder — o aluno vai desenvolvendo não só a capacidade de raciocínio como também a capacidade de comunicação.

Estas mesmas ideias são desenvolvidas nos programas do 8º ano e do 9º ano (DGEBS, 1991a, pp. 31 e 47), e também no programa do Ensino Secundário (DGEBS, 1991b).

Como salienta Lobato (1992), nos novos currículos, e em todos os níveis de escolaridade, a Geometria passou a ocupar um lugar muito importante — 43% no 2º Ciclo, 40% no 3º Ciclo, 31% no Ensino Secundário. Lugar esse que não está concentrado num tempo único, mas é distribuído ao longo do ano lectivo em momentos diferentes.

2.1.5 Uma via para aprendizagem da Geometria: exploração de construções em ambientes computacionais

Algumas das perspectivas e finalidades para aprendizagem da Geometria, salientadas anteriormente, foram tidas em conta na intervenção didáctica que se realizou no âmbito do presente estudo (descrita no capítulo 4). Nela pretendeu-se criar um contexto que proporcionasse aos alunos uma construção progressiva do seu conhecimento geométrico de um modo semelhante ao realizado pelos especialistas geómetras no sue trabalho. Recorreu-se, para isso, à exploração de figuras bidimensionais em computador, proposta através de situações problemáticas, tendo em vista o desenvolvimento da compreensão dos objectos geométricos e das suas relações, e do raciocínio indutivo e dedutivo.

O quadro teórico em que a intervenção didáctica se desenrolou tem duas vertentes principais. Uma é o modelo de van Hiele de desenvolvimento do raciocínio geométrico, que, entre outras questões, discute o raciocínio dedutivo em Geometria. Outra é teoria de De Corte de aprendizagem com base na instrução, em particular a noção de ambientes de aprendizagem poderosos que este autor usa para caracterizar alguns ambientes que recorrem a computadores (De Corte, 1992; 1994).

As principais características desses modelos são analisadas nas subsecções seguintes.

2.2 O modelo de van Hiele de desenvolvimento do raciocínio geométrico

A literatura da especialidade identifica três modelos teóricos para o desenvolvimento do raciocínio e aquisição de conhecimentos geométricos: (a) o modelo de Piaget e Inhelder; (b) o modelo de van Hiele; (c) os modelos da Ciência Cognitiva (Battista e Clements, 1992). Dos três, o modelo de desenvolvimento do raciocínio geométrico de van Hiele é o que atribui maior relevância ao currículo escolar (Battista e Clements, 1995). Este facto levou a considerar esse modelo como uma das vertentes teóricas subjacentes à intervenção didáctica que se implementou no presente estudo (ainda que o modelo em si não constitua objectivo específico desta investigação).

A análise do modelo de van Hiele, que se apresenta nesta secção, incide nos três aspectos seguintes: caracterização do modelo; alguns resultados da investigação sobre o modelo; didáctica proposta pelo modelo.

2.2.1 Caracterização do modelo de van Hiele

Para os autores, Dina van Hiele-Geldof e Pierre van Hiele, o raciocínio geométrico dos alunos progride através de níveis, começando num nível gestaltista-visual, e percorrendo níveis cada vez mais sofisticados de descrição, análise, abstracção e prova (Battista e Clements, 1992).

Diferentes autores (Battista e Clements, 1992; Fuys, Geddes e Tischler, 1988; Herskowitz, 1989; Hoffer, 1983) identificam as seguintes características definidoras deste modelo:

- *A aprendizagem é um processo descontínuo.* Há saltos na aprendizagem que revelam a presença de níveis de raciocínio discretos e qualitativamente diferentes.
- *Os níveis existem numa sequência hierárquica fixa.* Para que os alunos funcionem de modo adequado num determinado nível é necessário que tenham explorado amplamente todos os níveis anteriores. A progressão de um nível para o seguinte está mais dependente da instrução do que da idade ou da maturação biológica. Os temas ensinados aos alunos acima do seu nível são sujeitos a uma redução de nível — apenas são memorizados e repetidos de forma rotineira (a memorização não é característica de nenhum nível). A passagem de um nível para outro faz-se através de cinco fases didácticas bem definidas (descritas em §2.2.2).

- *Os conceitos compreendidos de forma implícita num nível tornam-se explícitos no nível seguinte.* No nível mais básico as figuras são, de facto, determinadas pelas suas propriedades, mas alguém que pense nesse nível não está consciente dessas propriedades.
- *Cada nível tem a sua linguagem própria.* Cada nível tem os seus próprios símbolos linguísticos e os seus próprios sistemas de relações interligando esses símbolos. Uma relação que é correcta num nível pode revelar-se incorrecta noutro. Pense-se, por exemplo, na relação entre um quadrado e um rectângulo. Duas pessoas que raciocinem em níveis diferentes podem não se entender uma à outra. Nem conseguem acompanhar o processo de raciocínio da outra.

Diversos autores caracterizam nos seus estudos os níveis de van Hiele, (Fuys *et al.*, 1988; Hoffer, 1981; Matos, 1992a), tendo por base o trabalho de Pierre van Hiele (1984). Num artigo recente Battista e Clements (1995, p. 50)[1] apresentam uma caracterização pormenorizada, descrita em baixo, onde os trabalhos anteriormente citados se reflectem.

- *Nível 1 (Visual).* Os alunos raciocinam sobre figuras geométricas com base na aparência de representações das figuras[2] e nas transformações visuais que executam sobre elas. Identificam figuras como quadrados e triângulos como *gestalts* visuais, com frequência depois de terem visionado protótipos. Por exemplo, podem dizer que uma dada figura é um rectângulo porque 'parece uma porta'.
- *Nível* 2 *(Descritivo/Analítico).* Os alunos raciocinam experimentalmente; estabelecem propriedades das figuras observando, medindo, desenhando, e fazendo modelos. Identificam as figuras não como globalidades visuais, mas através das suas propriedades. Por exemplo, um aluno pode pensar num losango como uma figura com quatro lados iguais.
- *Nível* 3 *(Abstracto/Relacional).* Os alunos raciocinam logicamente. Formam definições abstractas, distinguem condições necessárias e suficientes para definir um conceito, compreendem e, por vezes, apresentam argumentos lógicos. Classificam as figuras hierarquicamente

[1] Encontram-se na literatura dois sistemas diferentes de numeração e diferentes sistemas de nomenclatura para os níveis de van Hiele. O sistema de numeração utilizado por Battista e Clements (1992; 1995) tem a ver com a necessidade de considerar como Nível 0 um nível básico, anterior ao primeiro nível enunciado por Pierre van Hiele (Nível 1 - Visual).

[2] Neste estudo distingue-se a figura geométrica, elemento da teoria, das suas repesentações materiais: desenhos, construções no ecrã de computadores, etc., como se refere em §2.5.1.

analisando as suas propriedades e dão argumentos informais para justificar as suas classificações. Por exemplo, dizem que um quadrado é um losango porque 'é um losango com algumas propriedades extra'.

- *Nível 4 (Dedução Formal).* Os alunos raciocinam formalmente, interpretando de forma lógica afirmações geométricas, como axiomas, definições e teoremas. São capazes de construir provas originais produzindo uma sequência de afirmações que justificam logicamente uma conclusão a partir de certos dados.
- *Nível 5 (Metamatemático).* Os alunos raciocinam formalmente sobre sistemas matemáticos, em vez de o fazerem apenas no interior de um deles. Conseguem analisar consequências da manipulação de axiomas e teoremas.

O facto de em cada nível aparecer de forma extrínseca o que era intrínseco no nível precedente leva a que os produtos do raciocínio de um nível passem a ser os objectos do raciocínio no nível seguinte, como se mostra no quadro 2.1 (adaptado de Battista e Clements, 1992, pp. 427-428).

Quadro 2.1 - Objectos e produtos do raciocínio geométrico

Nível	Objectos de raciocínio	Produto do raciocínio
1 Visual	Classes de objectos reconhecidos visualmente como tendo a *mesma forma*.	Figuras baseadas no reconhecimento explícito das suas propriedades.
2 Descritivo/Analítico	Classes de figuras consideradas em termos de conjuntos de propriedades associadas.	Relações entre propriedades. Ordenação de propriedades e de classes de figuras.
3 Abstracto/Relacional	Propriedades das classes de figuras.	Relações entre propriedades de figuras e de classes de figuras.
4 Dedução Formal	Relações entre propriedades de classes de figuras, enunciadas sob a forma de teoremas.	Relações entre relações, expressas em termos de cadeias lógicas.
5 Metamatemático	Relações entre construtos formais.	Elaboração e comparação de sistemas axiomáticos de Geometria.

2.2.2 Alguns resultados da investigação sobre o modelo de van Hiele

Investigadores soviéticos foram os primeiros a utilizar o modelo de van Hiele para analisar o currículo de Geometria do seu país. A partir de 1976 alguns investigadores americanos apropriam-se do modelo. Desencadeia-se então um período de grande investigação no domínio da aprendizagem da Geometria, em particular da produção de provas, que utiliza como quadro de referência o modelo de van Hiele[3]. As conclusões dessas investigações têm perspectivado a reestruturação do modelo. Em seguida, identificam-se e analisam-se, de forma breve, as conclusões mais relevantes para o presente estudo e que se podem agrupar em sete temas.

Os níveis de van Hiele descrevem adequadamente o raciocínio geométrico dos alunos. O Projecto CDASSG — *Cognitive Development and Achievement in Secondary School Geometry* — da Universidade de Chicago (Usiskin, 1982) testou a existência dos níveis numa população de 2699 alunos. Este e vários outros estudos, que utilizaram o mesmo teste ou entrevistas clínicas, levaram Battista e Clements (1992) a concluírem que os níveis parecem existir e descrever o desenvolvimento geométrico dos alunos desde o Ensino Pré--Primário até ao Ensino Superior. Estes autores salientam, em particular, a existência de uma única estrutura linguística em cada nível. Por exemplo,"rectângulo" tem significados diferentes para alunos em níveis diferentes (Fuys *et al.*, 1988; Mayberry, 1983).

A descontinuidade entre níveis sucessivos tem sido posta em causa. Utilizando a técnica da entrevista clínica, em que alternaram fases de instrução e de avaliação, Fuys *et al.* (1988) caracterizaram o nível de entrada e a progressão através dos níveis de van Hiele, de alunos do 6º e do 9º anos de escolaridade. Se alguns alunos pareciam ter atingido um determinado nível, outros oscilavam entre níveis em várias situações. Diversos autores confirmam este resultado (Gutiérrez, Jaime, Fortuny, 1991; Matos, 1992a; Mayberry, 1983). Mais do que saltos, tem sido observada continuidade entre os níveis.

Os alunos nem sempre raciocinam no mesmo nível em todos os tópicos. Alguns estudos mostram que os alunos (em diferentes níveis de ensino) exibem níveis diferentes na realização de tarefas diferentes. Os níveis são assim caracterizados como dinâmicos mais do que estáticos, o que enfatiza a hipótese da sua continuidade, em detrimento da sua natureza discreta (Battista e

[3] Encontram-se referências mais pormenorizadas sobre este tópico em Fuys *et al.* (1988) e Matos (1984).

Clements, 1992). Fuys *et al.* (1988) concordam em que os alunos regressam, por vezes, ao Nível 1 (Visual) quando começam a estudar um novo conceito. No entanto, estes investigadores, seguindo a linha de Vygotsky (1988), afirmam que há um *nível potencial* de raciocínio (resultante da instrução) que permanece estável. Estas questões sugerem que os instrumentos de avaliação dos níveis devem versar tópicos específicos.

A hierarquia dos níveis tem sido comprovada. Detectam-se, no entanto, algumas excepções. Diferentes estudos, entre os quais o realizado pelo Projecto CDASSG (Usiskin, 1982), apontam no sentido de o Nível 5 (Metamatemático) não existir ou de ter uma natureza diferente da dos outros níveis.

Porém, a hierarquia dos níveis não é consequência da maturação biológica. Os resultados das investigações de Dina van Hiele-Geldof e Pierre van Hiele, confirmados posteriormente por outros autores (Crowley, 1987; Fuys *et al.*, 1988; Scally, 1986), salientam a importância das intervenções didácticas no desenvolvimento do raciocínio geométrico dos alunos.

Tem sido identificado um Nível 0 (Pré-reconhecimento). Alguns estudos fazem notar a existência de um nível mais básico do que o Nível 1 (Visual), uma vez que alguns alunos falham tarefas que dizem respeito à identificação de figuras. Esta questão não é interpretada do mesmo modo pelos diferentes autores que lhe fazem referência. Battista e Clements (1992, pp. 427-428) postulam a existência do Nível 0 (Pré-reconhecimento), caracterizado no quadro 2.2, mas para cuja comprovação reconhecem a necessidade de investigação mais sistematizada.

Quadro 2.2 - Nível 0 de raciocínio geométrico

Nível	Caracterização	Objectos de raciocínio	Produto do raciocínio
0 Pré-reconhecimento	As crianças percebem as formas geométricas, mas apenas atingem um sub-conjunto de características visuais das formas.	Estímulos tácteis ou visuais específicos.	Grupo de figuras reconhecido visualmente como tendo a mesma forma.

Outras características que devem ser consideradas nos níveis. A investigação tem salientado a importância das intenções, dos sistemas de crenças (*belief systems*) e da metacognição no desenvolvimento quer de conceitos quer de processos de raciocínio em cada nível.

No trabalho que realizaram, Fuys *et al.* (1988) comprovaram que os alunos em níveis baixos executavam uma tarefa tal como ela era proposta.

Acreditavam, por exemplo, que não podiam mudar a orientação de figuras desenhadas numa folha de papel. A manipulação de figuras em cartolina levou a que mais alunos ultrapassassem esta dificuldade.

O conhecimento metacognitivo sempre esteve implícito no modelo de van Hiele, através da importância que estes autores davam às intenções, ao *insight* e à compreensão. Para Hoffer (1983), os alunos mostram essa compreensão quando utilizam de forma competente e intencional um determinado método para resolver um problema não familiar.

Battista e Clements (1992, p. 430) salientam a necessidade de articular e incorporar no modelo as crenças, as intenções e o conhecimento relacionado metacognitivo, e mesmo epistemológico, característicos de cada nível.

Os três primeiros níveis de van Hiele têm sido os mais identificados nos alunos. Os estudos dos investigadores soviéticos mostraram que a maioria dos alunos avaliados permanecia no Nível 1 por longos períodos e apenas 15% dos alunos atingiam o Nível 2 no fim do 5º ano de escolaridade (Battista e Clements, 1992, p. 430). 19% dos alunos do 6º ano de escolaridade com que Fuys *et al.* (1988) trabalharam permaneceram no Nível 1; 31% progrediram em direcção ao Nível 2; 50% começaram no Nível 2 e progrediram para o Nível 3, ainda que com "regressos" pontuais a níveis anteriores. No que se refere aos alunos do 9º ano de escolaridade, 12% permaneceram no Nível 1; 44% funcionou no Nível 2, com "regressos" ao Nível 1; os restantes 44% trabalharam de forma consistente no Nível 2 e progrediram em direcção ao Nível 3. Os alunos do ensino secundário não têm resultados diferentes, ainda que tenham frequentado cursos de Geometria em que uma ênfase especial é dada à prova dedutiva. Como referem Battista e Clements (1992, p. 430) o facto de muitos alunos não desenvolverem processos de raciocínio do Nível 3 não lhes permite «beneficiar do trabalho adicional em geometria formal, uma vez que a organização do seu conhecimento é diferente da informação apresentada nos livros de texto». Em alguns ramos do Ensino Superior o panorama parece não ser muito diferente. Matos (1984, p. 87) concluiu no seu estudo que «a maioria dos alunos de qualquer um dos três anos [das Escolas do Magistério Primário de Beja e de Faro] não atingiu o Nível 3».

2.2.3 Didáctica proposta pelo modelo de van Hiele

Não se pode reduzir o modelo de van Hiele aos níveis de raciocínio geométrico. Como foi salientado em §2.2.1 «a transição de um nível para o seguinte não é um processo natural; ela acontece sob a influência de um programa de ensino-aprendizagem» (van Hiele, referido por Matos, 1992a, p. 98). O professor desempenha um papel determinante na progressão. Contudo, não se lhe pode atribuir só o papel tradicional de *debitador de conhecimentos*. Neste modelo, a progressão será antes consequência de uma escolha adequada de actividades feita pelo professor para os alunos realizarem. O programa de ensino e aprendizagem proposto pelos van Hiele inclui uma sequência didáctica precisa de cinco fases de aprendizagem. No quadro 2.3 apresentam-se os objectivos para a aprendizagem dos alunos e a didáctica proposta, referindo e exemplificando o papel do professor, numa sequência destinada a fazer progredir os alunos através do Nível 1 para o Nível 2, no tópico *losangos* (Battista e Clements, 1992, pp. 430-431; Matos, 1992a, pp. 98-99).

Quadro 2.3 - Fases didácticas do modelo de van Hiele

Fase	Objectivo	Papel do professor	Exemplo
1 Informação	Conhecer o conteúdo do domínio.	Apresentar e analisar materiais que clarifiquem o conteúdo do domínio, colocando-os à disposição dos alunos.	Apresentação de diversos losangos. Análise de outras figuras (são ou não losangos?).
2 Orientação Guiada	Descobrir redes de relações entre os objectos que estão a manipular.	Orientar a actividade dos alunos, guiando-os através de explorações que os conduzam às descobertas.	Dobragem de losangos segundo os seus eixos de simetria. Medição de lados e de ângulos.
3 Explicitação	Consciencializar relações e exprimi-las por palavras próprias.	Promover e orientar discussões entre os alunos, levando-os a utilizar linguagem técnica adequada.	Discussão sobre as descobertas que os alunos fizeram, traduzindo-as em linguagem formal.
4 Orientação Livre	Aplicar relações e resolver problemas.	Seleccionar materiais e problemas (várias vias de solução). Apoiar os alunos na sua resolução. Introduzir termos, conceitos e estratégias de resolução de problemas.	Desenhar um losango dados alguns dos seus vértices, ou alguns vértices e a direcção de um lado.
5 Integração	Sumarizar conhecimentos e integrá-los numa rede coerente de fácil aplicação.	Encorajar os alunos a reflectirem e a consolidarem o seu conhecimento geométrico.	Inventariação das propriedades dos losangos.

Como Matos (1992a, pp. 103, 110) faz notar, neste modelo a fonte do conhecimento é o professor, que assume «o papel de um enculturador dos alunos na cultura matemática aceite para a sala de aula». Uma vez que o modelo não contempla a perspectiva de que os alunos são construtores activos do seu próprio conhecimento, este autor propõe uma mudança no sentido de integrar «que o processo através do qual modelamos o nosso conhecimento matemático é construtivo».

Na linha dessa mudança levou-se a cabo no presente estudo uma intervenção didática que procurou interligar perspectivas do modelo de van Hiele e da noção de ambientes de aprendizagem poderosos (De Corte, 1992). Esta noção assenta numa perspectiva construtivista da aprendizagem, como se caracteriza na secção seguinte.

2.3 Ambientes de aprendizagem poderosos

As ferramentas computacionais só podem constituir um veículo para a aquisição de conhecimentos, capacidades e atitudes, se devidamente integradas em potentes ambientes de ensino e aprendizagem, isto é em situações que promovam no aluno os processos de aprendizagem necessários para atingir os objectivos educacionais desejados (De Corte, 1992).

Esta ideia leva o autor a formular a noção de *ambientes de aprendizagem poderosos*, baseado numa revisão dos trabalhos de diversos investigadores dos processos de ensino e aprendizagem, nomeadamente naqueles que utilizaram o computador.

Nesta secção resumem-se as linhas principais dessa noção, que utiliza como quadro de referência «as três componentes principais numa teoria da aprendizagem com base na instrução» (De Corte, 1992, p. 91):

- teoria da *competência* — explica as condições em que um aluno mostra as suas capacidades num determinado domínio;
- teoria da *aquisição* — explica os processos de aprendizagem e desenvolvimento necessários para se adquirir determinadas competências;
- teoria da *intervenção* — descreve os métodos de ensino e as estratégias de instrução adequadas para promover os processos de aprendizagem e desenvolvimento.

2.3.1 Teoria da competência

O principal objectivo da aprendizagem escolar consiste na aquisição das seguintes quatro categorias principais de competências (De Corte, 1992, pp. 91-94):

- base de *conhecimentos* bem organizada *sobre um domínio específico*, englobando conceitos, regras, princípios, fórmulas e algoritmos;
- *métodos heurísticos*, estratégias de pesquisa sistemática para análise e transformação de problemas;
- *capacidades metacognitivas*, que envolvam o conhecimento no que diz respeito ao funcionamento cognitivo de um indivíduo e de actividades que se relacionam com a sua automonitorização;
- *estratégias de aprendizagem*, ou seja, actividades em que as pessoas se envolvem durante a aprendizagem, de modo a adquirirem qualquer dos três tipos de capacidades anteriores.

Estes objectivos levam o autor a assinalar três papéis para as ferramentas computacionais educativas:

- *orientar a atenção dos alunos para as quatro categorias de competências* anteriormente descritas;
- *facilitar e apoiar os alunos no desenvolvimento de formas adequadas de organização de um domínio específico do conhecimento*: categorias, sequências, redes de conceitos e representações visuais;
- *reforçar a aquisição de competências metacognitivas e de estratégias de aprendizagem* que envolvam a explicitação e a reflexão sobre os conhecimentos dos alunos, assim como o reforço dos seus métodos de pensamento e de actividades de aprendizagem.

2.3.2 Aspectos relevantes da aquisição de competências

De Corte (1992, pp. 94-103) identifica sete características dos processos de aquisição de competências relevantes para a concepção de ambientes de aprendizagem computacionais poderosos, que a seguir se analisam.

Natureza construtivista da aprendizagem. Os alunos não são recipientes de informação passivos; pelo contrário, constroem os seus conhecimentos e competências através da interacção com o ambiente e através da reorganização das suas estruturas mentais. A concepção da aprendizagem como um processo activo não exclui que a construção pelos alunos do seu próprio conhecimento e capacidades possa ser mediada, não apenas por intervenções e apoio adequado dos professores e de colegas mas também de *software* educativo.

Diferenças individuais na aprendizagem. Os processos de aquisição de conhecimentos, assim como os resultados da aprendizagem, são fortemente condicionados pelas diferenças entre os alunos. Neste sentido, os programas educativos de computador devem: adaptar-se de forma adequada às diferenças individuais entre os alunos; contribuir para modificar os pré-conceitos incorrectos e ingénuos dos alunos sobre as suas capacidades e sobre as áreas disciplinares; fomentar e manter nos alunos abordagens profundas das situações em estudo.

Papel dos conhecimentos prévios. É com base naquilo que já sabem que os alunos processam activamente a informação que se lhes depara, construindo, dessa forma, novos conhecimentos e competências. Os ambientes de aprendizagem computacionais devem, pois, ter em conta o conhecimento e as competências anteriores dos alunos.

Zona Próxima de Desenvolvimento. De acordo com Vygotsky (1985, 1988), em vez de se ligar a instrução ao nível actual de competência, dever-se-ia orientá-la para a zona próxima de desenvolvimento do aluno. A instrução deve ajudar o aluno a dominar autonomamente os comportamentos que constituem esta zona num determinado momento e estimular o desenvolvimento cognitivo através de Zonas Próximas de Desenvolvimento. Para além de um adulto ou um colega, um computador pode executar estas tarefas.

Interacção social e aprendizagem. Algumas investigações acentuam a influência da interacção social na aquisição de conhecimento e no desenvolvimento cognitivo. Em relação aos ambientes de computador, estudos recentes sugerem que a participação activa em grupos dirigidos pelos próprios membros é benéfica para os alunos.

Necessidade de basear a aprendizagem em contextos de vida real. A aprendizagem escolar é em geral descontextualizada, enquanto as verdadeiras actividades cognitivas e aprendizagens ocorrem num determinado contexto. Para Brown, Collins e Duguid (1988) os processos de aprendizagem construtivista devem situar-se em contextos ricos em recursos e materiais de aprendizagem, que ofereçam oportunidades para a interacção social e que sejam representativos dos tipos de tarefas e de problemas aos quais, no futuro, os alunos terão de aplicar os seus conhecimentos e capacidades. A utilização de ferramentas computacionais pode contribuir significativamente para a concepção de ambientes de aprendizagem deste tipo.

Transferência de capacidades cognitivas. Alguns estudos concluem que a competência numa determinada área depende largamente da existência de uma base de conhecimentos de um domínio específico bem organizada e de acesso flexível. O ensino explícito para a transferência pode ser visto como o passo seguinte para que os alunos devem ser intencionalmente orientados, devendo também descobrir, por experiência própria, que a competência de abstracção pode ser aplicada com êxito noutros domínios que não a área em que foi inicialmente adquirida.

2.3.3 Ambientes de aprendizagem que envolvem estratégias de intervenção poderosas

Segundo De Corte (1992), Collins, Brown e Newman desenvolveram um modelo de concepção de ambientes de aprendizagem ideais, que integra quatro dimensões: conteúdos, métodos de ensino, sequências de tarefas de aprendizagem, contexto social da aprendizagem. Este modelo oferece um referencial adequado para a concepção e exploração de ambientes de aprendizagem, que possibilitam a criação e o desenvolvimento de estratégias de intervenção poderosas, isto é, desencadeadores de processos de aprendizagem que levam os alunos a adquirir os tipos de conhecimentos e de competências descritos anteriormente.

No que diz respeito aos *conteúdos*, os ambientes de aprendizagem ideais deveriam centrar-se na aquisição de todas as categorias de competências que os especialistas dominam e aplicam, já referidas: conhecimentos específicos, métodos heurísticos, estratégias de metacognição e estratégias de aprendizagem.

O professor pode aplicar os *métodos de ensino* seguintes com vista a facilitar a aquisição e a integração das diferentes categorias de conhecimentos e de competências.

Primeiro, três métodos que constituem o âmago da prática cognitiva e que se baseiam na observação, na prática guiada e no *feedback*, e que têm como objectivo a aquisição de um conjunto integrado de competências cognitivas e metacognitivas:

- *modelação* - envolve a observação de um especialista, permitindo ao aluno construir modelos de boa prática;
- *apoio* - refere-se à observação do aluno pelo professor como base para o fornecimento de sugestões e para a obtenção de *feedback* com vista a melhorar o desempenho;
- *estruturação* - consiste em apoiar directamente o aluno na realização de uma tarefa que ainda não é capaz de fazer sozinho.

Dois outros métodos têm como finalidade promover nos alunos uma consciência explícita das suas próprias actividades cognitivas e metacognitivas:

- *articulação* - ajuda os alunos a descrever e a explicitar os seus conhecimentos e atitudes na resolução de problemas;
- *reflexão* - conduz os alunos a comparar as suas estratégias cognitivas e processos de solução com os de outros, nomeadamente com um modelo mental de desempenho competente.

Por último:

- *Exploração* - tem como finalidade aumentar a autonomia do aluno na capacidade de resolução de problemas, bem como na descoberta, identificação e definição de novos problemas;
- *Generalização* - tem como finalidade mostrar explicitamente aos alunos como certas estratégias cognitivas adquiridas num determinado domínio podem ser utilizadas adequadamente noutro domínio (transferência de capacidades).

A *sequência das tarefas de aprendizagem* orienta-se por dois princípios:

- *complexidade e diversidade progressivas*, de modo que a sua execução competente requeira cada vez mais conhecimentos de um domínio específico, assim como uma maior variedade de competências cognitivas e metacognitivas;
- *competências gerais antes de competências específicas*, de modo que a orientação para a tarefa geral como um todo preceda a prática de competência de um nível inferior.

Um *contexto social* favorável à aprendizagem deve permitir:

- *aprender de forma contextualizada*, isto é, os alunos realizam tarefas e abordam problemas representativos da diversidade de situações às quais terão posteriormente de aplicar os seus conhecimentos e competências;
- ter oportunidades para *contactar e observar especialistas*;
- acentuar a motivação para *aprender de forma intrínseca*;
- *promover estratégias de aprendizagem cooperativa* através da resolução de problemas em pequenos grupos;
- *organizar diálogos* na sala de aula, destinados a identificar, analisar e discutir as estratégias e os processos de resolução de problemas dos alunos.

No quadro 2.4 (página seguinte), adaptado de De Corte (1992, pp. 107-110), apresenta-se em esquema as dimensões e princípios orientadores do modelo de ambientes de aprendizagem poderosos.

As Tecnologias de Informação, na medida em que constituem uma ferramenta multimédia, que pode integrar animação, discurso, texto e gráficos, possibilitam o desenvolvimento de novos ambientes de aprendizagem que integram as dimensões e princípios orientadores desse modelo.

Na secção seguinte discute-se o papel de novas ferramentas para o ensino e a aprendizagem da Geometria: os *Ambientes Geométricos Dinâmicos*, tendo como quadro de referência o modelo de ambientes de aprendizagem poderosos de De Corte (1992; 1994).

Quadro 2.4 - Ambientes de aprendizagem poderosos

Dimensões	Princípios orientadores
Conteúdos (visam a aquisição das categorias de competências):	• conhecimentos específicos • métodos heurísticos • estratégias de metacognição • estratégias de aprendizagem
Métodos de ensino:	• modelação • apoio • estruturação • articulação • reflexão • exploração • generalização
Sequência de tarefas de aprendizagem	• complexidade e diversidade progressivas • competências gerais antes de competências específicas
Contexto social de aprendizagem	• aprendizagem de forma contextualizada • contacto e observação de especialistas • aprendizagem de forma intrínseca • organização de diálogos

2.4 Aprendizagem da Geometria em *ambientes geométricos dinâmicos* (AGD)

Se ao longo dos tempos os instrumentos disponíveis sempre propiciaram o desenvolvimento de ambientes geométricos criativos e didácticos, também o impacto das chamadas novas tecnologias da sociedade actual se deve traduzir em mudanças de conteúdo, abordagens, métodos e processos de pensamento no ensino e aprendizagem da Geometria, que poderão ser patrocinadas pela exploração do moderno *software* geométrico (Hershkowitz, 1994).

Mostra-se, em seguida, que os ambientes computacionais para ensino e aprendizagem da Geometria podem constituir *ambientes de aprendizagem poderosos* (§2.3). Analisa-se o caso dos *Ambientes Geométricos Dinâmicos* (*AGD*), destacando o *Cabri-géomètre*, que foi o ambiente utilizado no presente estudo.

2.4.1 Ambientes poderosos para ensino e aprendizagem da Geometria

Os ambientes gráficos computacionais que permitem realizar construções geométricas no ecrã do computador utilizando explicitamente propriedades das figuras, e também a manipulação directa dessas construções mantendo invariantes as propriedades utilizadas (nas versões mais recentes) trazem mudanças fundamentais na trilogia ensinar/aprender/fazer Geometria (Sträßer, 1992) e permitem criar estratégias de intervenção para o ensino e a aprendizagem da Geometria que integram as dimensões do modelo de De Corte (1992), referidas em §2.3.

Os *conteúdos* aparecem como a primeira dimensão desse modelo e englobam, para além de conhecimentos específicos, outras categorias de competências. Os ambientes geométricos computacionais proporcionam a aquisição de uma base de conhecimentos sobre Geometria, mas, sobretudo, «apoiam os alunos nas capacidades de resolução de problemas: planeamento (controlo), conjecturação (heurísticas), e flexibilidade (controlo e heurísticas)» (Dreyfus, 1992, p. 264).

Para Noss, Hoyles, Healy e Hoelzl (1994, p. 360) os ambientes computacionais conatituem uma «andaimaria computacional (*computacional scaffolding*)» que sustenta o desenvolvimento das ideias dos alunos e lhes permite construir o seu conhecimento geométrico, a partir do que para eles é uma «abordagem 'natural'». Para resolver um determinado problema os alunos começam por ensaiar soluções aproximadas que se sentem capazes de realizar. Através dessas tentativas heurísticas adquirem intuições que lhes permitem descobrir soluções para o problema.

Também os *métodos de ensino* referidos no modelo de De Corte (1992), que visam a aquisição das categorias de competências anteriormente referidas, podem ser implementados com recursos aos ambientes computacionais geométricos. Para Schwartz (1992, p. 169) «o sentido de competência inclui o desenvolvimento da capacidade e da disposição dos alunos para fazer e explorar conjecturas». Estes ambientes são poderosos para a indução de descobertas em Geometria, que podem ser formuladas através de conjecturas (Schumann, 1991). Os alunos podem construir figuras, manipulá-las, ser levados a intuir as suas propriedades e a sentir a necessidade de descobrir todos os casos em que estas se mantêm (Saraiva, 1992). Como salienta Hershkowitz (1994, p. 167), «utilizando o microcomputador, o estudante pode 'ver' com os seus olhos, e com os olhos da mente, os invariantes de uma forma que sofre transformações dinâmicas». Estes são comportamentos típicos dos geómetras que os alunos podem modelar e adoptar na resolução de problemas de Geometria, incrementando, deste modo, a sua compreensão e o seu à-vontade nesta disciplina (Farrell, 1987).

A interacção com este tipo de ambientes computacionais fomenta igualmente a articulação e a reflexão, no sentido que De Corte dá a estes termos.

Utilizando esses ambientes como «espelhos intelectuais», os alunos podem «testar as suas ideias» e delinear novas relações entre os objectos em estudo (Schwartz, 1989, p. 58). Para Scally (1986, p. 126) a exploração destes ambientes proporciona «oportunidades para reflexões com significado sobre ideias matemáticas». O *feedback* devolvido pela manipulação das construções no ecrã do computador apoia o aluno na resolução dos problemas e leva-o a reflectir sobre os processos de resolução. Esta reflexão produz-se não apenas como consequência da informação devolvida, mas também através de uma visualização baseada num processo interactivo entre raciocínio indutivo e dedutivo (Laborde e Laborde, 1992, p. 184). Também Olive (1992) salienta que as explorações desenvolvidas em ambientes computacionais fazem com que o aluno compreenda as relações entre os conceitos geométricos de uma forma mais profunda, e levam-no a pensar de um modo mais geral e mais abstracto.

A terceira dimensão do modelo de De Corte refere a *sequência de tarefas de aprendizagem*, nomeadamente a sua complexidade e diversidade progressivas. Segundo Laborde (1993b) nos novos ambientes geométricos pode ser executado um maior leque de acções e objectos mais complexos podem ser manipulados facilmente, permitindo a realização de tarefas progressivamente complexas, e de uma complexidade maior do que as que eram executadas nos ambientes clássicos (papel e lápis). Essa complexidade pode conduzir a um progresso intelectual dos alunos, se induzida através de situações de ensino e aprendizagem adequadas. Como salientam Battista e Clements (1992, p. 454) «sequências amadurecidas de actividades com computador e a mediação pelo professor do trabalho dos alunos com essas actividades podem ser uma componente crítica de uma ambiente educativo eficaz».

Condicionalismos de ordem diversa têm levado a que as actividades com recurso a esses ambientes se realizem habitualmente em grupo, o que permite criar *contextos sociais* favoráveis à aprendizagem, quarta dimensão do modelo de De Corte. Como Battista e Clements (1992, p. 454) fazem notar, «uma das forças destes ambientes é a geração espontânea de aprendizagem cooperativa». McCoy (1992) estudou esta questão e concluiu que, pelo facto de nestes contextos os alunos terem de comunicar com os outros membros do grupo, bem como com o professor, se geram discussões facilitadoras da organização do seu próprio processo de raciocínio, levando-os a aprender de uma forma intrínseca.

Em síntese, como refere o NCTM (1991, pp. 135-136), os programas de computador que permitem aos alunos construir figuras geométricas e efectuar medições tendem a criar um ambiente propício à investigação das propriedades e relações geométricas. A resolução de problemas de Geometria segue, assim, uma via semelhante à utilizada pelos especialistas desta disciplina.

O facto de as actividades com computador se realizarem habitualmente em grupo desenvolve nos alunos um acréscimo de competência, quer no domínio específico da Geometria, quer no domínio geral de resolução de problemas, nomeadamente na colocação e validação de conjecturas.

2.4.2 O Cabri-géomètre

Os ambientes computacionais gráficos mais recentes para o ensino e aprendizagem da Geometria permitem realizar construções geométricas, no ecrã do computador, utilizando explicitamente as propriedades das figuras, e possibilitam a manipulação directa dessas construções, conservando as propriedades utilizadas. Esta característica distingue-os dos programas computacionais de desenho e pintura, em que os desenhos obtidos no ecrã do computador reproduzem a aparência de uma figura geométrica, mas não conservam as suas características quando se manipulam.

Neste estudo dá-se o nome de *Ambientes Geométricos Dinâmicos* (*AGD*) a esses ambientes, adoptando a terminologia proposta por Noss *et al.* (1994). A literatura da especialidade refere diferentes AGD, como se pode ver, por exemplo, em Laborde (1993a).

Na intervenção didáctica realizada escolheu-se trabalhar com o Cabri-géomètre[4] — Cahier de **br**ouillon **i**nteractif (*Caderno de rascunho interactivo*) (Laborde e Sträßer, 1990, p. 171). Em muitas escolas ligadas ao Projecto MINERVA alguns professores exploraram este programa. Esse trabalho mostrou que se trata de um programa amigável, que os alunos aprendem a dominar rapidamente e que permite concretizar estratégias com as características de intervenção poderosa, no sentido que De Corte (1992) dá a estes termos.

Criação e *construção* de objectos no Cabri-géomètre

O Cabri-géomètre permite construir figuras geométricas a partir de objectos da Geometria Euclidiana: pontos, segmentos de recta, triângulos, rectas e circunferências. O seu interface é constituído por menus descendentes, nos

---

[4] O Cabri-géomètre foi desenvolvido pelo Laboratoire de Structures Discrétes et de Didactique (LSD2-IMAG) da Universidade Joseph Fourier em Grenoble. Existe em versão para Macintosh e PC compatíveis. No início a versão para PC compatível chamava-se Le Géomètre. Existem versões do Cabri-géomètre, Macintosh e PC compatível, em várias línguas estrangeiras (Capponi, 1993a).

quais o utilizador pode escolher um determinado item. Os dois menus principais são *Criação* e *Construção*[5] (figura 2.1).

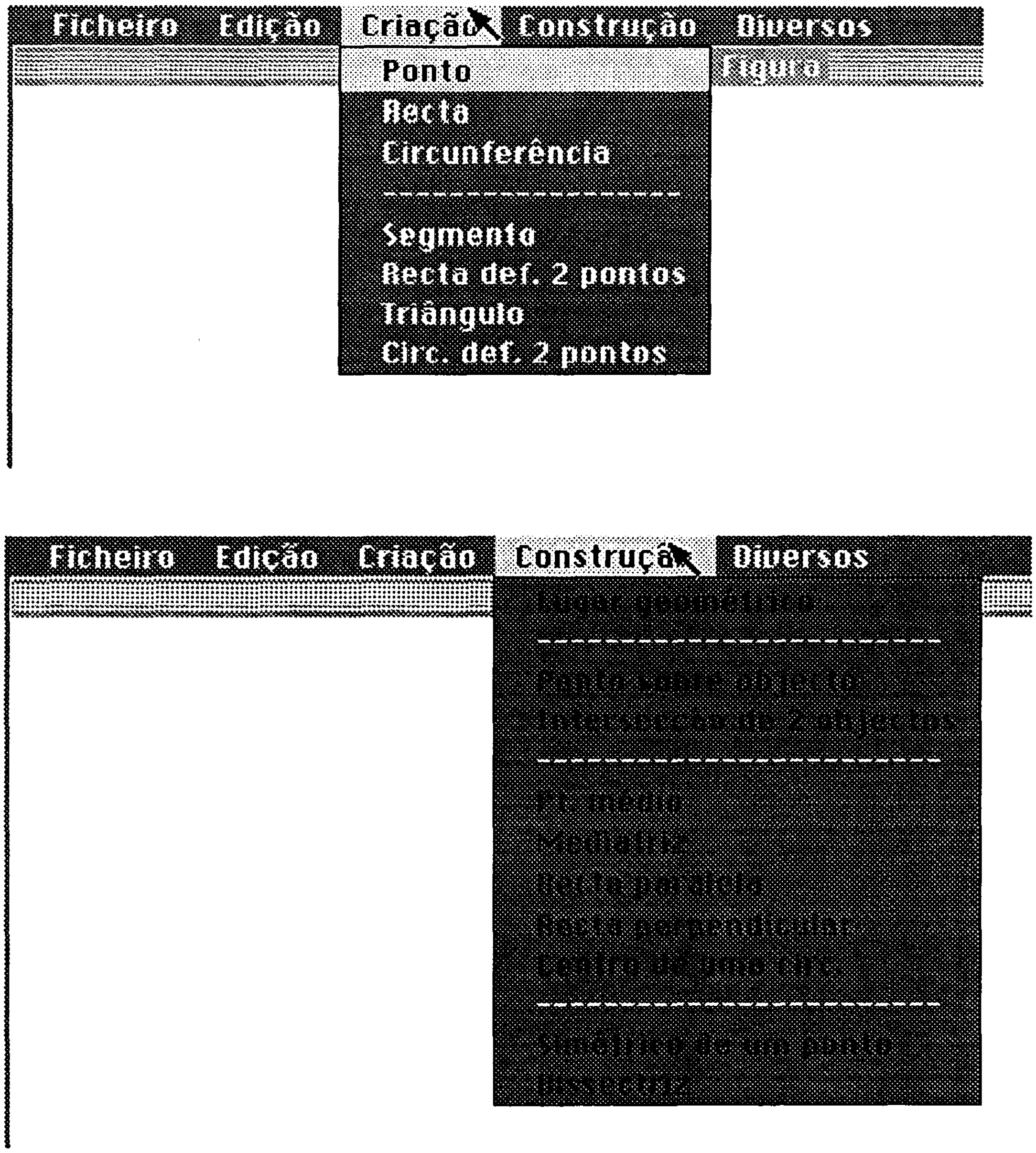


Fig. 2.1 - Menus **Criação** e **Construção** do Cabri-géomètre.

O menu *Criação* é constituído por «primitivas de puro desenho» (Laborde, 1993b, p. 43), as quais permitem *criar* os *objectos de base* das construções, acima referidos. O menu *Construção* é constituído por «primitivas baseadas em propriedades geométricas» (Laborde, 1993b, p. 43), as quais permitem

[5]Por especial atenção do Prof. J.-M. Laborde, director do projecto Cabri, a autora desta dissertação traduziu para português a versão 1.7 PC compatível do Cabri-géomètre, para utilização no seu trabalho com os alunos. Os menus reproduzidos na figura 2.1 referem-se a essa versão.

construir objectos que traduzem relações entre os objectos *criados*, como por exemplo, o(s) ponto(s) de intersecção de uma recta com uma circunferência, o ponto médio de um segmento de recta, a recta perpendicular a outra passando por um ponto, a bissectriz de um ângulo definido por três pontos, etc..

Manipulação directa no Cabri-géomètre

Os *objectos de base* das construções são aqueles que o utilizador pode arrastar provocando a variação de todos os outros objectos deles dependentes (Laborde, 1993b). Por exemplo, se se criar um segmento de recta e se se construir o seu ponto médio, ao deslocar um dos pontos extremos do segmento, o ponto médio acompanha a variação do segmento, permanecendo sempre com essa característica (figura 2.2A). Mas se o ponto tiver sido criado aparentemente no meio do segmento, e não construído através da primitiva *Ponto médio*, isso não acontece (figura 2.2B).

Fig. 2.2 - O ponto médio de um segmento de recta acompanha a variação do segmento, desde que tenha sido construído através da respectiva primitiva.

Para além dos *pontos* criados *de base*, também é possível deslocar *pontos* construídos *sobre objectos*, mas nesse caso o ponto só se desloca sobre esse objecto e acompanha a sua deslocação (figura 2.3).

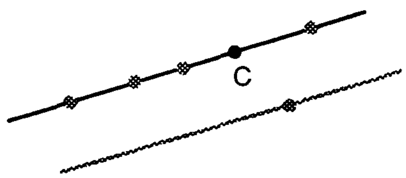


Fig. 2.3 - O ponto C desloca-se sobre a recta e acompanha o seu deslocamento.

A principal característica do Cabri-géomètre é, assim, a materialização em Geometria da ideia de *objectos variáveis*, conseguida através do deslocamento dos objectos de base (pontos, rectas ou circunferências) das construções, ou dos pontos construídos sobre objectos. Como refere Balacheff (1993, p. 142):

> Depois de construir uma figura é possível deslocar os seus pontos de base e observar as suas modificações exibidas no ecrã; cada parte do desenho evolui uniformemente e continuamente. Todos os constrangimentos geométricos que o utilizador estabeleceu explicitamente são mantidos enquanto o ponto é arrastado no ecrã. Assim, é mais do que

apenas um desenho que é representado, mas uma classe de desenhos, sendo cada um deles um exemplo da mesma figura geométrica.

Esta característica do Cabri-géomètre faz com que o utilizador considere a construção não como um desenho estático, mas como um conjunto de objectos ligados pelas suas relações geométricas, que podem ser visualizadas como permanecendo invariantes sob o arrastamento (Laborde, 1993a). Ao mesmo tempo fornece uma ferramenta específica para a descoberta indutiva de propriedades. «Uma propriedade será provavelmente verdadeira se for resistente enquanto os pontos base da construção são arrastados» (Balacheff, 1993 p. 142).

Ao contrário do que sucede com os desenhos de figuras geométricas feitos com papel e lápis, o utilizador pode visualizar um *ponto qualquer de uma circunferência*, rodando um ponto construído sobre a circunferência. Isso permite, por exemplo, induzir que um ângulo inscrito numa semi-circunferência é sempre recto (figura 2.4). A propriedade poderá ser provada depois, encarando-se a prova como um desafio para esclarecer porque é que isso acontece (Junqueira, 1994a).

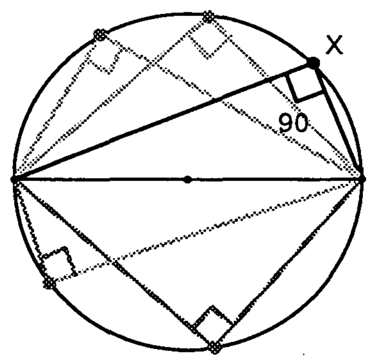


Fig. 2.4 - Um ângulo inscrito numa semicircunferência é sempre recto

Outras primitivas do Cabri-géomètre

O Cabri-géomètre tem ainda disponíveis outras primitivas que permitem tratamentos variados nas construções e análise das figuras. Salientam-se, em seguida, algumas cuja utilização foi relevante na intervenção didáctica realizada no presente estudo, ou que embora não o tendo sido permitem a construção de situações com grandes potencialidades didácticas.

Aspecto dos objectos

Esta primitiva permite apagar com uma *Borracha* objectos de uma construção. Esses objectos não deixam de existir, apenas ficam invisíveis, podendo voltar a ser visualizados com auxílio de um *Lápis*. Um *Pincel* permite destacar em traços mais grossos os objectos, ou ainda colori-los (se a carta gráfica do posto computacional o permitir). Esta primitiva pode ser utilizada para tornar invisíveis linhas auxiliares das construções, e ainda para distinguir diferentes tipos de objectos numa construção, por exemplo os objectos dados e os objectos pedidos.

Nomear

Esta primitiva permite atribuir nomes aos pontos, rectas e circunferências, utilizando até um máximo de quatro símbolos. Os nomes dos objectos acompanham o seu deslocamento através da manipulação, deste modo tornando mais evidente a conservação (ou não) de propriedades geométricas nas construções. Também as explicações dos processos de construção ficam facilitadas e mais organizadas pela referência a objectos específicos, feita através dos seus nomes.

História

O Cabri-géomètre guarda em memória os vários objectos de uma construção. A primitiva *História* permite rever um por um esses objectos, pela ordem em que foram construídos, mesmo os apagados com a *Borracha* (que aparecem a tracejado). Mas os objectos eliminados e os deslocamentos de objectos de base não são visualizados através desta primitiva. A revisão da história das construções ajuda o utilizador a reflectir e a explicitar os processos utilizados, e nesta medida constitui um factor estruturador do seu pensamento. (Nos capítulos 5, 6 e 7 indicam-se diversos exemplos de *Histórias* de construções realizadas pelos alunos participantes no presente estudo).

Marcar um ângulo e Medir

Para além de fazer construções no Cabri-géomètre também é possível medir comprimentos de segmentos de recta, bem como marcar ângulos e medir a sua amplitude. Estas primitivas tornam mais vasto o leque de problemas que se podem resolver neste ambiente, nomeadamente problemas de cálculo de áreas. Por outro lado, tornam mais intuitivas explorações sobre propriedades das figuras relacionadas com grandezas como, por exemplo, a relação entre a amplitude de um ângulo inscrito e do ângulo ao centro correspondente (figura 2.5).

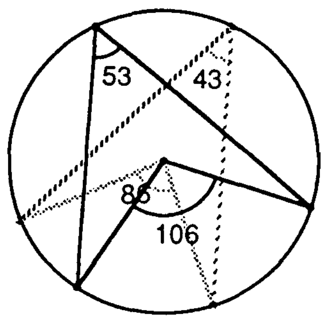


Fig. 2.5 - Relação entre a amplitude de um ângulo inscrito e a do ângulo ao centro correspondente.

Gestão dos menus

Recorrendo a esta primitiva é possível retirar qualquer uma das primitivas de qualquer um dos menus e, assim, criar novos menus reduzidos, o que segundo Capponi (1993a, p. 44) «constitui uma característica importante para a construção de situações didácticas», de dois pontos de vista diferentes. Por um lado para «simplificar o interface», eliminando primitivas de utilização mais complicada; este autor recomenda que inicialmente se retirem do menu

Criação as primitivas *Recta* e *Circunferência*, uma vez que a possibilidade de criar rectas/circunferências por dois processos diferentes pode constituir um factor dificultador da aprendizagem. É ainda de ter em conta a dificuldade que utilizadores pouco habituados a trabalhar com o rato do computador podem ter na criação desses objectos. Por outro lado, a *Gestão de menus* permite igualmente «escolher as variáveis de uma situação» — adaptando-a a propostas específicas (Capponi, 1993b, p. 30). Por exemplo pode construir-se um menu em que a primitiva *Mediatriz* não apareça e solicitar a descoberta de processos diferentes para construir essa recta.

Macro-construção

Através desta primitiva o utilizador pode acrescentar às construções pré-definidas outras de sua autoria. Por exemplo, é possível construir o circuncentro de um triângulo e gravar essa construção como uma macro, bastando para isso indicar os *objectos iniciais* e os *objectos finais*, neste caso, respectivamente, o triângulo e o ponto de intersecção das mediatrizes de dois lados. Essa nova construção é acrescentada ao menu *Construção*. Posteriormente, sempre que se quiser obter o circuncentro de um triângulo, basta seleccionar no menu essa construção e indicar o triângulo, de forma semelhante ao que se faz para os outros items. Como refere Capponi (1993a, p. 41) «assim a panóplia de utensílios disponíveis não é limitada senão pela imaginação e os conhecimentos geométricos do utilizador».

2.5 Figuras no ensino e aprendizagem da Geometria

As figuras, no sentido mais amplo que se pode atribuir a esta palavra, sempre serviram de suporte ao raciocínio e comunicação dos matemáticos, bem como de especialistas de outras áreas do conhecimento. Porém, uma breve revisão de literatura mostra algumas divergências sobre o estatuto epistemológico da figura geométrica.

Esta secção aborda aspectos do tema *figuras geométricas* relevantes do ponto de vista da didáctica da Geometria escolar, com especial incidência nas alterações que podem ser introduzidas pelo recurso aos AGD no ensino e aprendizagem. Analisam-se: a natureza dual das figuras geométricas; os obstáculos visuais na análise das figuras; o papel dos exemplos prototípicos das figuras; o novo estatuto para as construções geométricas em AGD; o papel da visualização na resolução de problemas em AGD.

2.5.1 Natureza dual das figuras geométricas

A dualidade de perspectivas em que a Geometria tem sido considerada, — modelação do espaço físico e teoria axiomática, como se refere em §2.1 —

conduziu, segundo Laborde (1993a, p. 49), a uma dualidade na natureza das figuras geométricas. Por um lado, «são entidades materiais traçadas em papel, anteriormente na areia, mais recentemente nos ecrãs dos computadores, mas também são objectos de uma teoria, resultantes de uma abstracção da realidade. A recta sem espessura matemática pertence ao mundo das 'idealizações'».

De acordo com a mesma autora, alguns factos do espaço físico real são modelados pela Geometria e expressos nessa teoria através de afirmações que utilizam um misto de linguagem natural e formal. Mas essas afirmações podem, por sua vez, ser representadas materialmente em traçados num espaço físico bidimensionaal. A noção de figura geométrica refere-se a esta última representação que resulta de um processo de teorização seguido de um processo de materialização.

Para retratar esta dupla natureza tem sido proposto distinguir entre *desenho* e *figura*. O *desenho* refere-se à entidade material, enquanto que a *figura* se refere a um objecto da teoria ou, como diz Parzysz (citado por Laborde, 1993a, p. 49), «o objecto geométrico que é descrito pelo texto que o define». Implicitamente esta distinção já era feita por Platão quando escreveu que os geómetras utilizam figuras visíveis embora não pensem nelas mas em objectos de outro tipo que apenas são visíveis através do pensamento.

Laborde (1993a, p. 50) considera os desenhos como «experiências gráficas» que desempenham em Geometria um papel semelhante aos das experiências em Física. Distingue «desenhos materiais», aqueles traçados em papel, e «desenhos idealizados», abstracções dos desenhos materiais sobre os quais os geómetras efectivamente raciocinam e que suportam as suas experiências. Esse processo de abstracção é baseado no conhecimento do geómetra, que, em particular, lhe permite ignorar os aspectos materiais irrelevantes dos desenhos, tal como os físicos ignoram o *ruído* inevitável nas suas experiências.

O significado de uma figura não pode ser retirado apenas de um desenho, mesmo idealizado, mas tem de ser dado numa forma discursiva, como está pressuposto na definição de Parzysz acima referida. Para clarificar esta ideia, Laborde (1993a, p. 50-51) apresenta o exemplo seguinte, em que o mesmo desenho pode ser interpretado por duas figuras, sendo estas descritas como conjuntos de objectos e relações entre esses objectos que lhes conferem propriedades diferentes.

> Descrição 1: uma circunferência de centro O, P um ponto fora da circunferência, A e B pontos de tangência com a circunferência de duas rectas que passam por P, C um ponto qualquer sobre a circunferência, a tangente à circunferência em C intersecta PA em Q e PB em R (figura 2.6).

> Descrição 2: uma circunferência de centro O, P um ponto fora da circunferência, A e B pontos de tangência com a circunferência de duas rectas que passam por P, C *um ponto qualquer sobre o arco menor* AB, a tangente à circunferência em C intersecta PA em Q e PB em R.
> Na figura descrita em 2, em que C varia só sobre o arco menor AB, o perímetro do triângulo [PQR] depende apenas do ponto P e é constante para um dado P. No figura descrita em 1 o perímetro do triângulo [PQR] não permanece constante quando C não pertence ao arco menor AB, e pode mesmo ser infinito quando a tangente em C é paralela a PA ou PB. [Itálicos da autora.]

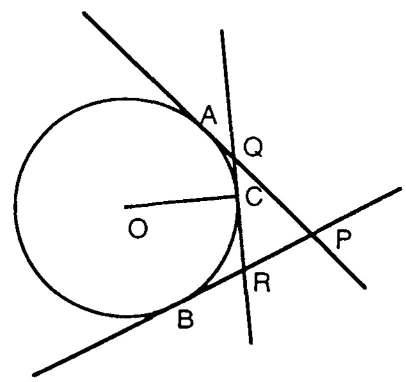


Fig. 2.6 - Associadas a este desenho podem estar duas figuras com propriedades diferentes.

Como refere Laborde (1993a) é impossível ultrapassar a ambiguidade neste desenho (figura 2.6) sem se acrescentar informação textual que clarifique a posição geral do ponto *C*, a qual não pode ser inferida do desenho.

Embora os geómetras tenham adoptado algumas convenções gráficas que os ajudam a ultrapassar as limitações das representações materiais, por exemplo evitam casos particulares sempre que se referem a figuras generalizadas, para Laborde (1993a, p. 52) continua a existir um hiato entre desenho e figura. A autora sintetiza duas razões para a existência desse hiato:

- apenas alguns aspectos dos desenhos são relevantes para o problema a resolver; a interpretação do desenho depende das hipóteses consideradas no problema que só podem ser explicitadas por meio de uma linguagem;
- um desenho em Geometria não pode expressar a variabilidade de elementos das figuras, enquanto a formulação em linguagem natural, ou por meio de uma expressão simbólica, torna possível definir um elemento variável se se indicar o conjunto a que pertence (como foi feito nas descrições 1 e 2).

Para a mesma autora, uma figura da Geometria Euclidiana é, pois, um objecto da teoria, o significado, e pode originar vários significantes, desenhos ou descrições discursivas. Cada figura pode ser caracterizada por uma «*descrição canónica*» (Laborde, 1993a, p. 52), feita em termos de objectos variáveis, que pertencem a subconjuntos do plano, e de relações entre esses objectos. Muitos problemas em Geometria consistem em mostrar que diferentes descrições caracterizam a mesma figura, ou em descrever uma figura por processos diferentes. Por exemplo, um losango pode ser descrito como um quadrilátero com os lados opostos iguais ou como um quadrilátero em que as duas diagonais são perpendiculares e se bissectam.

2.5.2 Obstáculos visuais

Segundo Dreyfus (1993, p. 123) utilizamos representações *externas* dos objectos (fórmulas, diagramas, gráficos, desenhos, etc.) para comunicar sobre matemática, mas cada indivíduo quando pensa num determinado objecto ou processo matemático relaciona-o com qualquer coisa que tem na mente, uma representação *mental* do objecto ou processo considerado. Essas representações mentais podem variar de pessoa para pessoa.

Quando comunicam sobre Geometria com os seus alunos, em geral os professores não clarificam a distinção entre *desenho* e *figura*, tratada anteriormente (§2.5.1). Resulta daí que os alunos constroem representações mentais sobre as figuras geométricas em que privilegiam a aparência material dos desenhos, o que lhes dificulta a análise teórica das figuras (Laborde, 1993a, p. 53).

Os obstáculos causados pelos aspectos perceptuais dos desenhos têm sido estudados intensivamente e foram sintetizados por Yerushalmy e Chazan (1990) nas três categorias seguintes: os desenhos são particulares; a utilização habitual leva a confundir certos desenhos prototípicos com a classe de objectos a que pertencem; um mesmo desenho pode ser visualizado e descrito de formas diferentes.

Incapacidade para 'ver' um desenho de modos diferentes

As regras da psicologia gestaltista permitem prever o modo mais usual como normalmente um desenho é visualizado. Em determinados casos essa visualização pode não apoiar um raciocínio que conduza à solução do problema, como mostra Duval (citado por Laborde, 1993a, p. 53) no exemplo seguinte (figura 2.7).

> O desenho seguinte [figura 2.7] foi dado aos alunos acompanhado da informação adicional de que [BC] e [B'C'] são paralelos, bem como [AB] e [A'B'] e [AC] e [A'C']. [Os alunos] tinham de provar que A é o ponto médio de [B'C']. Duval refere que apenas 18% dos alunos conseguiu exectuar a tarefa. Visualmente o desenho representa quatro triângulos num maior em vez de três paralelogramos [o que constitui a forma mais adequada de interpretar o desenho para resolver o problema].

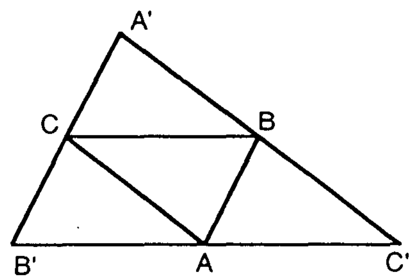


Fig. 2.7 - Neste desenho é mais fácil visualizar quatro triângulos pequenos num maior do que três paralelogramos.

Para muitos alunos, a capacidade para «atingir de forma selectiva e sequencial as partes e o todo» não se desenvolve facilmente. No quadro do modelo de van Hiele, no Nível 1 os alunos interpretam as figuras/desenhos como um todo e é só no Nível 2 que são capazes de observar diferentes partes de um desenho e analisar propriedades das figuras (Yerushalmy e Chazan, 1990, p. 201).

Particularidade de um desenho

Na maioria das aulas de Geometria os desenhos são apresentados como modelos que representam uma classe de objectos, nos quais está contida a «essência da situação» (Yerushalmy e Chazan, 1990, p. 199). Contudo, cada desenho tem características que são individuais e não representativas da classe. Por exemplo, um triângulo acutângulo escaleno que normalmente representa um triângulo qualquer, não apresenta ângulos rectos ou obtusos. Segundo Presmeg (referido por Yerushalmy e Chazan, 1990, pp. 199-200) este obstáculo «apanha os alunos na ratoeira do caso concreto de uma imagem ou desenho que pode fazer pensar em detalhes irrelevantes, ou mesmo introduzir dados falsos». Por exemplo, alguns alunos consideram paralelos determinados segmentos numa figura só porque estes o aparentam ser.

Desenhos tipo como modelos

Se os alunos aprendem uma definição observando apenas desenhos tipo, as particularidades desse desenho podem conduzir a outro obstáculo. «A imagem do desenho tipo pode induzir pensamento não flexível que impede o reconhecimento do conceito num desenho não tipificado» (Presmeg, referido por Yerushalmy e Chazan, 1990, p. 200). A investigação tem mostrado que através da instrução os alunos constroem definições de figuras geométricas que são parciais (não incluem todos os aspectos da definição) ou são incorrectos (incluem items que não lhe pertencem), fortemente influenciados pelos exemplos prototípicos (Yerushalmy, 1991).

2.5.3 Exemplos prototípicos das figuras geométricas. Acções prototípicas — guiões

Vinner (referido por Dreyfus, 1989, p. 117) propõe a distinção entre *conceito definição*, isto é, o conceito segundo a sua definição formal matemática, e *conceito imagem*, isto é, o conjunto de todas as imagens associadas na mente do indivíduo ao nome do conceito e de todas as propriedades que as caracterizam. Os conceitos imagem resultam da experiência do indivíduo com exemplos e contra-exemplos do conceito. «Assim, o conjunto de objectos matemáticos considerados pelo aluno como exemplos de um conceito não é necessariamente o mesmo que o conjuntos dos objectos matemáticos determinado pela definição» (Dreyfus, 1989, p. 117).

Segundo Hershkowitz (1989, p. 81), o conceito derivado da definição matemática tem atributos críticos (os que um caso deve possuir para poder ser considerado um exemplo do conceito) e atributos não críticos (aqueles que apenas existem em alguns exemplos do conceito). A definição verbal inclui um conjunto mínimo de atributos críticos, suficiente para definir o conceito, e pode ser considerada como um critério para classificar cada caso particular como exemplo ou contra-exemplo do conceito. Os exemplos, os contra-exemplos relevantes e os atributos dos conceitos geométricos básicos «são entidades visuais» (Hershkowitz, 1989, p. 82).

Em investigações sobre conceitos imagem de conceitos geométricos básicos, em alunos e professores, Bruckheimer, Hershkowitz e Vinner (Hershkowitz, 1989, p. 82) descobriram que cada conceito tinha um ou mais «exemplos prototípicos que eram primeiramente encontrados e que existiam no conceito imagem da maioria dos indivíduos. Os exemplos prototípicos eram habitualmente os exemplos que possuíam a maior lista de atributos do conceito — todos os atributos críticos e outros atributos específicos (não críticos) que possuíam características visuais fortes: por exemplo, a posição *a-direito-para--cima* (*upright*) num triângulo rectângulo (figura 2.8A), lados e ângulos iguais de um quadrado como modelo de um quadrilátero qualquer, altura no interior de um triângulo qualquer, diagonal no interior de um polígono qualquer.

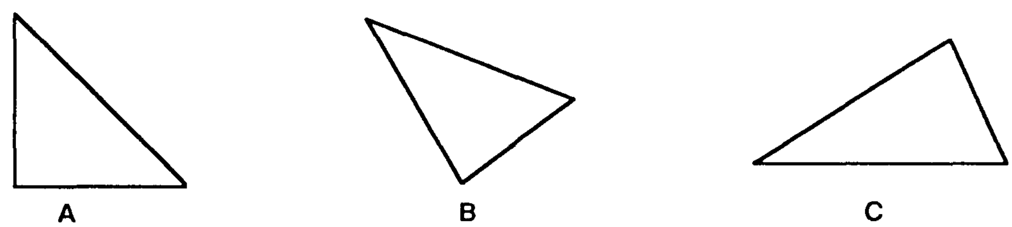


Fig. 2.8 - Numa investigação conduzida por Hershkowitz *et al* (1987, p. 227) **A** foi o triângulo rectângulo mais fácil de identificar. **B** e **C** foram, sucessivamente mais difícies.

As investigações de Bruckheimer, Hershkowitz e Vinner (Hershkowitz, 1989, p. 83) mostraram também que os exemplos prototípicos, aceites como representativos da figura, são utilizados como modelos na análise de outros casos. Segundo Matos (1992b p. 107), nos exemplos prototípicos das figuras geométricas reconhecem-se as seguintes características gerais: «posição preferida» — privilegiando as direcções horizontal e vertical, «simetria» e «estabilidade».

A ausência dessas características na figura representada ao lado (figura 2.9), em particular a sua instabilidade, leva a que muitos indivíduos, de diferentes níveis de escolaridade, não a identifiquem como um triângulo.

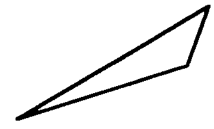


Fig. 2.9

Guiões

Para Matos (1992b, p. 109) a construção dos conceitos geométricos não é apenas influenciada pelos exemplos prototípicos. Em certos casos torna-se necessária uma «interpretação dinâmica que tenha em conta as acções que os alunos esperam realizar quando se lhes pede que desenhem determinados elementos das figuras geométricas».

Analisando as investigações em cima referidas, Matos (1992b) considera que as tarefas de construção das alturas de triângulos e das diagonais de polígonos têm uma natureza diferente das de identificação de triângulos rectângulos e de quadriláteros, na medida em que as primeiras envolvem acção. Nessas investigações verificou-se que para desenhar uma altura de um triângulo escaleno a maioria dos participantes uniu o vértice com o ponto médio do lado oposto. Para desenharem diagonais em polígonos côncavos apenas consideraram as contidas no seu interior, e em alguns casos os segmentos que desenharam nem sequer eram diagonais (figura 2. 10).

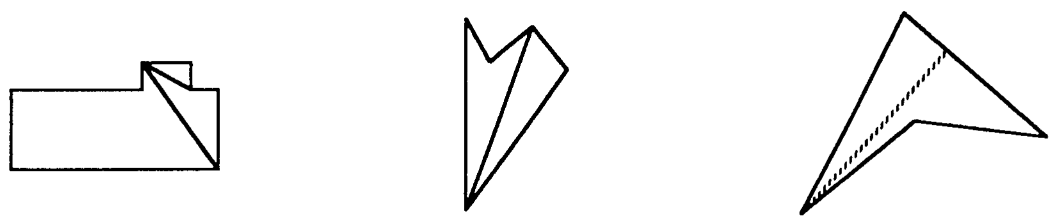


Fig. 2.10 - 'Diagonais' de polígonos côncavos. (Hershkowitz *et al*, 1987, p. 227.)

Matos (1992b, p. 99) reinterpreta estes fenómenos utilizando a noção de *guião* (*script*) desenvolvida por Schank e Abelson — «um guião é uma sequência coerente de acontecimentos esperados pelo indivíduo, que o envolvem como participante ou como observador». Nas situações descritas, os sujeitos executaram sequências de acções que lhes eram familiares no caso do triângulo isósceles e dos polígonos convexos, respectivamente. Por outras palavras, utilizaram *guiões* que em contextos semelhantes lhes tinham permitido resolver os problemas (Matos, 1992b).

Num artigo mais recente o mesmo autor (Matos, 1994) refere que os *guiões* resultam do desenvolvimento de algoritomos práticos que permitem adaptar um determinado conjunto de procedimentos à resolução de situações problemáticas. Os guiões são fundamentais no raciocínio matemático (e não só) na medida em que permitem uma economia de pensamento.

2.5.4 Estatuto das construções geométricas em AGD

Desde sempre as construções geométricas constituíram um processo de representar figuras que procurava materializar as propriedades das figuras mais do que a sua aparência. Os antigos matemáticos gregos interessaram-se particularmente por realizar construções em que utilizavam apenas régua e compasso. A construção de um segmento com o dobro do comprimento de um segmento dado e de um quadrado com o dobro da área de um quadrado dado originaram o problema da determinação do lado de um cubo cujo volume fosse o dobro do volume de um cubo dado (duplicação de um cubo). Ao longo de vários séculos os matemáticos procuraram uma solução para o problema que, no final do século XIX, se demonstrou ser impossível de realizar apenas com régua e compasso. Outros dois problemas impossíveis de realizar apenas com régua e compasso ficaram igualmente célebres: a construção de um quadrado com área igual à de um dado círculo (quadratura do círculo) e divisão de um ângulo dado em três ângulos iguais (trissecção de um ângulo) (Struik, 1989). O principal interesse da procura de soluções para os problemas de construção geométrica esteve na investigação sobre as figuras e na descoberta das suas propriedades que foram estabelecidas sob a forma de toremas mas também utilizadas em aplicações físicas.

A investigação das figuras geométricas, praticada pelos especialistas geómetras ao longos dos tempos, pode constituir uma estratégia poderosa para a aprendizagem desta disciplina. No entanto, repetir com papel e lápis várias vezes uma construção para procurar invariâncias e regularidades de uma situação pode tornar-se uma tarefa desmotivadora para os alunos. O recurso aos AGD permite implementar abordagens mais dinâmicas.

Construções que se desmancham e construções resistentes

Associada a cada construção geométrica realizada num certo *software* computacional fica um algoritmo de construção, o qual determina a manipulação da construção que é possível realizar e as diferentes aparências com que pode ser visualizada. Por exemplo, no Cabri-géomètre é possível construir um losango a partir de quatro pontos colocados no ecrã do computador, aparentemente os seus vértices, e criando quatro segmentos (lados) definidos por esses pontos. No entanto a construção assim obtida *desmancha-se* (Noss *et al.*, 1994; Hoyles e Noss, 1994), isto é, quando se desloca um desses vértices perde as características do losango, uma vez que não foi feita recorrendo a uma descrição explícita das suas propriedades e relações. Ao contrário, a construção de um losango em que se utiliza explicitamente o facto, por exemplo, de as suas diagonais serem perpendiculares e se bissectarem é *resistente* (Laborde, 1993a), isto é, quando se manipula não só conserva sempre a aparência da figura, mas sobretudo conserva as propriedades utilizadas na construção e ainda permite induzir outras propriedades e relações, consequências dessas.

A descrição explícita de uma figura geométrica em termos de propriedades e relações, concretizada num determinado algoritmo de construção, é determinante na investigação de outras propriedades e relações da figura representada. Por exemplo, uma actividade realizada por alunos participantes no presente estudo tinha como objectivo investigar propriedades do circuncentro de um triângulo. Dois grupos analisaram uma construção em que utilizaram o seguinte algoritmo 1: triângulo, mediatrizes dos três lados, ponto de intersecção das mediatrizes, circunferência com centro nesse ponto e passando por um dos vértices do triângulo. Outro grupo utilizou o algoritmo 2: circunferência, três pontos sobre a circunferência, triângulo, mediatrizes dos três lados, ponto de intersecção das mediatrizes. Os dois algoritmos permitiam obter construções com a mesma aparência estática, no entanto a sua manipulação era completamente diferente. No caso do algoritmo 1 os objectos de base da construção eram os três vértices do triângulo, os quais podiam ser deslocados por todo o ecrã. De cada vez que se deslocava um desses vértices os dois lados aí concorrentes e as mediatrizes respectivas variavam, e os alunos visualizavam *o circuncentro a deslocar-se* sobre a terceira mediatriz que permanecia imóvel. No caso do algoritmo 2, como os três vértices do triângulo apenas rodavam sobre a circunferência os alunos visualizavam o *circuncentro sempre no mesmo sítio.* (Ver §7.1.5, §7.1.6)

As descrições das figuras geométricas materializadas em diferentes algoritmos de construção num AGD patrocinam o que se pode considerar uma multiplicação das figuras geométricas. Para além das propriedades estáticas de uma figura surgem novas propriedades dinâmicas, que se desmancham ou que resistem à manipulação, segundo o algoritmo utilizado, que possibilitam investigações diversificadas.

Uma construção no ecrã de um computador representa uma figura geométrica que mantém invariante um determinado conjunto de propriedades e relações. Para Laborde (1993a; 1993b) esse facto dá a tais construções um estatuto diferente das feitas em papel com régua e compasso. Pode considerar-se que estas novas representações materiais dos conceitos geométricos estão "mais próximas" da noção teórica de figura geométrica. Esta nova dimensão das construções em computador torna-as mais ricas para a aprendizagem dos alunos, na medida em que permite deslocar a ênfase dos processos de construção para o desenvolvimento de conceitos (Battista e Clements, 1992).

2.5.5 Visualização e realização de construções em AGD

O conceito de *visualização* tem constituído objecto de pesquisa e debate em Matemática e em Psicologia, como refere Gordo (1993), que no seu estudo resume os principais contornos desse debate. Esse debate foi igualmente saliente na discussão travada no grupo *Visualization in teaching-learning situations* — 18th PME, como se detecta no documento preparatório dessa discussão (Mariotti e Pesci, 1994).

Não sendo objectivo deste estudo aprofundar esse tema, considera-se aqui *visualização* como a «capacidade para representar, transformar, gerar, comunicar, documentar e reflectir sobre informação visual» (Hershkowitz, 1989, p. 75), em sentido lato, a capacidade de tratar informação visual. Atribui-se este sentido ao termo visualização utilizado por Laborde (1993a), no contexto que em seguida se analisa, ainda que esta autora não refira especificamente qual o entendimento que faz do termo.

Segundo Laborde (1993a, pp. 61-62) a visualização é uma das ferramentas utilizadas na resolução de problemas geométricos. Mas «o poder do conhecimento geométrico» está também em permitir tratar problemas que não se resolvem apenas visualmente, e que podem ser utilizados para ampliar a aprendizagem da Geometria. A autora considera que podem ser organizadas situações problemáticas interactivas que permitam ao aluno decidir se a sua solução está ou não correcta, baseado no *feedback* que lhe é devolvido.

Os AGD podem proporcionar *feedback* visual através da manipulação de uma construção, na fase de pesquisa de solução para um problema e na fase de validação de uma solução (Laborde 1993a). Na fase de pesquisa permitem verificar visualmente uma propriedade ou apoiar um raciocínio, na fase de validação permitem verificar se a construção se desmancha ou é resistente.

Noss *et al.*, (1994) apresentam o problema de construção, no Cabri-géomètre, da imagem de uma bandeira reflectida num espelho, como mostra a figura 2.11A, sem estar disponível a construção *Simétrico* (ver §2.4.2). Um par de alunos começou por colocar o espelho e a bandeira na posição vertical. Depois criaram um segmento passando por um dos pontos da bandeira [*P*], criaram um ponto do outro lado do espelho [*Q*] e deslocaram-no até parecer estar a igual distância do espelho que o ponto *P* (figura 2.11B). Os autores (Noss *et al.*, 1994, pp. 335-336) referem que o par em causa estava consciente de que a sua construção se desmanchava (*messing up*); utilizaram-na no entanto como «uma medida temporária para poderem obter alguma intuição (*feel*) sobre o que procuravam». Através da manipulação dessa tentiva «'descoberta a olho'», os alunos encontraram uma solução genérica e resistente para o problema, em que utilizaram circunferências e rectas perpendiculares (figura 2.11C).

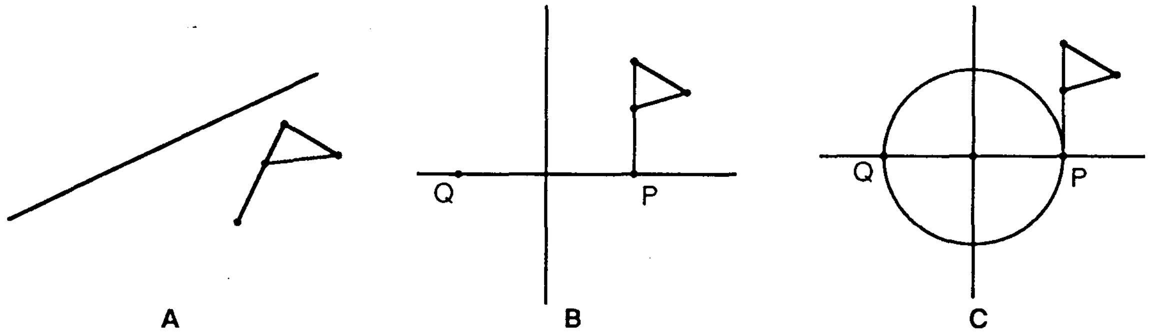


Fig. 2.11 - Exploração para construir uma bandeira reflectida num espelho sem utilizar a primitiva *Simétrico*. (Noss *et al.*, 1994, pp. 365-366.)

Algumas actividades realizadas pelos alunos participantes no presente estudo, que se descrevem nos capítulos 5, 6, 7, ilustram o duplo papel da visualização, na (in)validação das construções que se desmanchavam, e na exploração que faziam para testar ideias.

De um modo mais geral, alguns estudos têm mostrado que a visualização de uma figura com diferentes aparências, através da variação de uma construção geométrica adequada, contribui para atenuar o efeito dos exemplos prototípicos e leva os alunos a generalizar as suas representações das figuras geométricas (Battista e Clements, 1992; Herskowitz, 1989; Yerushalmy, 1991).

2.6 Conjecturas e provas no ensino e aprendizagem da Geometria

Conjecturas e provas sobre propriedades das figuras geométricas é uma actividade que há 2000 anos apaixona os matemáticos e os faz progredir no seu conhecimento. Identificam-se, no entanto, diferentes concepções sobre o que é uma *prova matemática* e qual é o seu papel no desenvolvimento desta ciência. Essa controvérsia reflecte-se nos currículos de Geometria escolar, principalmente desde que a investigação se debruçou sobre as dificuldades dos alunos em produzir ou mesmo acompanhar raciocínios dedutivos.

Por outro lado, a exploração das figuras geométricas e a formulação e validação ou refutação de conjecturas com recurso aos AGD facilita a realização deste tipo de actividades nas salas de aula, permitindo fazer aparecer as propriedades geométricas e respectivas provas através de processos heurísticos mais de acordo com a forma como os geómetras o fazem.

Esta secção discute esta problemática, abordando em particular as seguintes questões: prova matemática; desempenhos dos alunos na produção de provas; conjecturas e provas em AGD.

2.6.1 Prova na construção do conhecimento matemático

Habitualmente os matemáticos chamam *prova* ao raciocínio lógico-dedutivo que utilizam para estabelecer a verdade das suas afirmações. Porém este termo não é unívoco. A análise de correntes epistemológicas da Matemática evidencia perspectivas diferentes sobre a natureza deste ramo do conhecimento, que se reflectem nas concepções de prova, como mostra Sekiguchi (1991) na revisão de literatura que faz sobre esta temática.

Balacheff (1991a) considera a prova como uma ferramenta que os matemáticos usam quer para estabelecerem a validade de uma afirmação, quer para comunicarem com outros matemáticos. Para Davis e Hersh (1981, p. 40) uma prova «é um argumento que convence alguém que sabe do assunto». Mas estes autores vão mais ao fundo na questão. Analisam o papel da prova na actividade dos matemáticos, em particular o facto de estes procurarem, de forma sistemática, novas demonstrações para teoremas clássicos — como é o caso, por exemplo, dos teoremas de Pitágoras, de Lebesgue ou de Kolmogoroff — e concluem que:

> A prova tem vários objectivos simultâneos. Sendo exposta ao escrutínio e ao julgamento de uma nova audiência, a prova é sujeita a um processo constante de crítica e revalidação. Erros, ambiguidades e equívocos são desfeitos pela exposição permanente. [...] A prova, em última análise, aumenta a compreensão, através da revelação do âmago do assunto. A prova faz surgir nova matemática. O jovem matemático que estuda provas chega mais perto do processo de criação de nova matemática. (Davis e Hersh, 1981, p. 151.)

As ideas de Balacheff e de Davis e Hersh são marcadamente influenciadas pelas teses de Lakatos. Na sua obra *Provas e refutações*, relevante no pensamento matemático contemporâneo, Lakatos (1984, p. 5) defende a tese de que «a Matemática não formal, quase-empírica, não se desenvolveu num crescendo contínuo do número de teoremas indubitavelmente estabelecidos, mas através da melhoria incessante das conjecturas graças à especulação e à crítica, graças à lógica das provas e refutações». Nesta linha Battista e Clements (1992; 1995) consideram que na criação da Matemática colocam-se problemas, fazem-se conjecturas, analisam-se exemplos, apresentam-se contra--exemplos, refazem-se conjecturas; formula-se um teorema quando se considera que este refinamento de ideias responde a uma questão significativa.

Para outros autores a prova matemática tem ainda um sentido mais lato. Bell (referido por Battista e Clements, 1992, p. 437) distingue três funções para a prova: *verificação* que diz respeito ao estabelecimento da verdade da afirmação; *iluminação (illumination)*, que diz respeito à revelação de *insight* sobre as razões que tornam verídica a proposição; *sistematização*, que consiste na organização das proposições num sistema dedutivo.

Numa linha análoga, Barbin (1993a) propõe uma noção de prova em que identifica três aspectos fundamentais: *convencer* para saber, *esclarecer* para saber como se sabe e *interessar* para saber porque é que se sabe. Barbin, citando Clairaut (Barbin, 1993a, pp. 24-25), exemplifica o seu ponto de vista analisando o teorema sobre a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo, cuja demonstração habitual recorre a uma recta paralela a um dos lados do triângulo, mas sem esclarecer como e por que é que essa recta paralela aparece. Clairaut faz aparecer o teorema como um meio de resolver um problema: «trata-se de encontrar um processo simples e eficaz de assegurar que as medidas dos 3 ângulos de um triângulo são exactas». Este autor começa por explicar que, dado um triângulo ABC, 'se sente que a grandeza' do ângulo C deve resultar da dos ângulos A e B, pois se estas se alterarem, as rectas AC e BC também se alteram e consequentemente altera-se a grandeza do ângulo C. Para obter a grandeza do ângulo C a partir das dos ângulos A e B, Clairaut imagina que BC roda em torno do ponto B no sentido de BE (figura 2.12A), tornando-se «evidente que ao mesmo tempo que BC gira, o ângulo B se abre continuamente; e que, pelo contrário, o ângulo C se fecha cada vez mais; o que poderia fazer pensar que a diminuição do ângulo C igualaria o aumento do ângulo B e que assim a soma dos três ângulos A, B, C seria sempre a mesma seja qual for a inclinação das linhas AC e BC sobre a linha AE». Na posição limite a recta BC torna-se paralela a AC e este resultado pode ser demonstrado. Clairaut acrescenta que «esta indução pressuposta traz com ela a sua própria demonstração» e traça a recta ID paralela a AC (figura 2.12B).

Fig. 2.12 - Clairault mostra como e porquê se demonstra o teorema sobre a soma das amplitudes dos 3 ângulos de um triângulo (Barbin, 1993a, pp. 24-25).

Barbin (1993b) analisa duas experiências de aprendizagem do teorema da soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo que ilustram os diferentes sentidos da prova matemática. Primeiro Barbin (1993b) refere um trabalho realizado por Balacheff. Este autor propôs uma sequência em que começou por solicitar aos vários grupos de alunos de uma turma que medissem e somassem as amplitudes dos ângulos de vários triângulos. Perante os diferentes valores obtidos pelos grupos, a demonstração do teorema apareceu como um meio de «pôr toda a turma de acordo sobre o resultado». Mas, segundo Barbin (1993b, p. 13) não é por essa razão que «os homens construíram conceitos e saberes matemáticos. O primeiro objectivo do matemático é o de resolver os problemas», aparecendo a prova com uma das ferramentas dessa resolução. Para exemplificar esta ideia Barbin (1993b) descreve uma sequência didáctica proposta por Dina van Hiele. Os alunos começaram por explorar pavimentações do plano, trabalho esse que permitiu uma organização dos conhecimentos geométricos em *«árvore genealógica»* onde «'escadas'» e «'serras'» (figura 2.13) eram os antepassados a partir dos quais se deduziam as proposições.

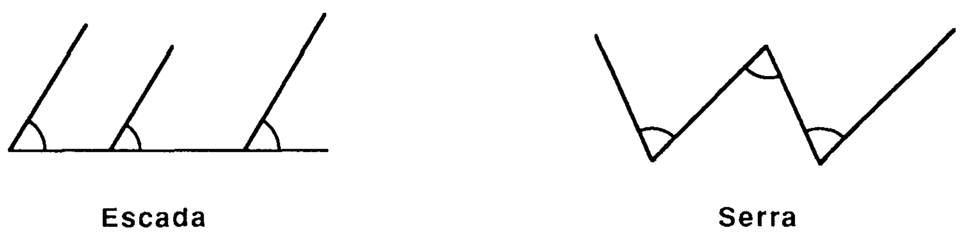


Fig. 2.13 - 'Escadas' e 'serras' são os antepassados a partir dos quais se deduzem proposições na árvore genealógica da Geometria (Barbin, 1993b, pp. 12-13).

Na sequência proposta por Dina van Hiele o valor da soma das amplitudes dos ângulos de um triângulo apareceu a propósito do problema dos nós de uma pavimentação triangular. A pertinência desse saber justificou-se pela necessidade de assegurar o «'bom pegamento'» da pavimentação o que fez ainda surgir a respectiva demonstração quando se tratou de encontrar os «'antepassados na árvore da geometria'» .

Segundo Barbin (1993b, p. 14) esta forma de ensino revela uma concepção construtivista do conhecimento matemático na medida em que, a partir de situações problemáticas, permite construir ao mesmo tempo conceitos e demonstrações. «O sentido da actividade de demonstrar não é convencer mas compreender como e porquê. A demonstração apresenta interesse em si própria num empreendimento de racionalização e de compreensão de uma problemática.» A demonstração aprende-se por etapas em que o seu sentido é progressivamente esclarecido.

2.6.2 Desempenhos dos alunos na produção de conjecturas e provas

Os processos e dificuldades dos alunos na produção de demonstrações ou mesmo de outro tipo de provas, no sentido de explicações convincentes ainda que não totalmente conformes às regras aceites pela comunidade matemática, têm interessado os investigadores em educação matemática. Alguns autores reconhecem que o modo como a demonstração — ou prova matemática (*mathematical proof*, termo utilizado em língua inglesa) (Balacheff, 1991a) —, é apresentada aos alunos dificulta a sua aprendizagem. Referindo-se em particular à prova em Geometria, Dreyfus e Hadas (1987, p. 50) fazem notar que, habitualmente, a sua necessidade é «imposta aos alunos de forma dogmática, como um princípio abstracto ou como 'regra de um jogo'», sendo-lhes proposto, para começar, que provem propriedades «fáceis de visualizar», o que os confunde ainda mais sobre o papel e a necessidade da demonstração em Matemática.

Analisando a literatura da especialidade, Chazan (1993) organizou em dois conjuntos as crenças dos alunos sobre argumentação em Matemática. O primeiro conjunto, «*evidência é prova*», engloba as conclusões obtidas a partir de acções realizadas sobre um número reduzido de casos, como por exemplo deduzir que a mediana divide um triângulo em dois triângulos com a mesma área a partir de medições efectuadas em três triângulos. O segundo conjunto, «*a prova dedutiva é simplesmente evidência*», tem a ver com o facto de os alunos considerarem que uma prova se refere a um único caso, aquele que está especificamente representado no desenho associado a essa prova. Segundo Chazan (1993) muitos alunos não têm em conta o que Balacheff considera o «aspecto genérico» dos desenhos nas provas geométricas. Esses alunos não compreendem o princípio de generalização das provas dedutivas, nem que a validade da conclusão se pode generalizar a todas as figuras que satisfazem os dados (Williams, referido por Chazan, 1993). Alguns alunos rejeitam esta ideia ao ponto de considerarem que uma prova dedutiva não é suficiente para garantir a não existência de contra-exemplos (Chazan, 1993).

Segundo Balacheff (1991a, p. 178) «a prova matemática aparece, em última análise, como uma espécie de retórica específica para a aula de Matemática, o que o leva a concluir que os alunos não se empenham na realização de provas, não porque não sejam capazes de o fazer, mas porque não vêem qualquer razão para o fazer. Inspirado nas teses de Lakatos, Balacheff (1987; 1991b) conduziu um estudo em que criou um contexto favorável à emergência de conjecturas e argumentação matemática. Foi proposto a catorze pares de alunos (13-14 anos) que encontrassem uma forma de calcular o número de diagonais de um polígono conhecido o número de vértices e que validassem as suas conjecturas. Balacheff (1987; 1991b) identificou quatro tipo de provas de conjecturas:

Empiricismo naïf - situação na qual a certeza sobre uma conjectura é obtida a partir da observação de um pequeno número de casos.

Experiência crucial - quando a conjectura é verificada num exemplo específico, mas que 'não aparece por acaso. Aqui o problema da generalização põe-se explicitamente.

Exemplo genérico - envolve a explicitação de razões para validar a conjectura através da realização de acções sobre um objecto, considerado não por si próprio, mas como um representante característico de uma classe.

Experiência mental - invoca a acção através da sua interiorização, destacando-a da realização sobre um representante particular.

Balacheff (1987, pp. 159-160, 163) classifica os três primeiros tipos como «provas pragmáticas», na medida em que se apoiam sobre saberes e práticas ligadas essencialmente à acção. Distingue-as do último, que considera como «provas intelectuais», uma vez que os conhecimentos são considerados como objectos de reflexão ou debate, já apontando para a prova matemática «através de 'razões'».

A actividade sobre o número de diagonais dos polígonos envolveu duas fases. Depois de estabelecerem a sua conjectura, os alunos foram confrontados com contra-exemplos. Balacheff (1991b) analisou a forma como os alunos trataram esses contra-exemplos e identificou as seguintes categorias: rejeição da conjectura; modificação da conjectura; contra-exemplo considerado como excepção à conjectura; introdução de uma nova condição na conjectura; revisão da definição (de polígono e de diagonal) de modo a contemplar a conjectura; rejeição do contra-exemplo.

Balacheff (1987; 1991a; 1991b) interessou-se particularmente em estudar a influência da interacção social nos processos de produção de provas. Os estudos referidos permitiram-lhe observar a impossibilidade de garantir que os alunos se empenhem em debates matemáticos que produzam uma demonstração, mesmo em situações de sala de aula especialmente concebidas para o efeito. Para este autor isso é consequência de os alunos serem pessoas práticas que atribuem sobretudo importância à necessidade de resolver a situação proposta pelo professor e convencer disso os seus pares, utilizando todos os meios ao seu dispor. Os alunos preocupam-se mais em ser eficientes do que em ser rigorosos (Balacheff, 1991a). Noutro artigo, o mesmo autor (Balacheff, 1991b) refere ainda que se a interacção social constituiu, por vezes, um obstáculo ao desenvolvimento de argumentação matemática, nomeadamente por parte de alunos fracos a trabalharem com pares superiores, mas «na maioria dos casos foi o 'motor' real que conduziu os alunos a uma consciência da necessidade de provas, forçando-os a justificarem-se ou provocando o desejo de mostrar a racionalidade da decisão tomada» (*ibid.*, p. 96).

Produção de provas e níveis de van Hiele

O sucesso ou o insucesso na produção de provas também aparece associado ao nível de van Hiele dos alunos (ver §2.2.1). No nível 1 (Visual) os julgamentos dos alunos baseiam-se apenas nos modelos das figuras que observam. No nível 2 (Descritivo/Analítico), embora continuem a observar ou visualizar representações das figuras, baseiam os seus julgamentos na rede de relações nelas representadas. Por exemplo, conseguem identificar um quadrado mesmo mal desenhado, desde que conheçam a intenção do desenhador. Neste nível são capazes de estabelecer e reflectir sobre relações entre figuras, mas ainda não são capazes de perceber o que significa dizer que uma propriedade decorre de outra (Battista e Clements, 1992). Segundo De Villiers (citado por Battista e Clements, 1992, p. 440) o raciocínio dedutivo ocorre primeiramente no Nível 3, quando se estabele a rede de relações lógicas entre propriedades dos conceitos. Nos Níveis 1 e 2 os alunos não duvidam da validade das suas observações empíricas, pelo que não atribuem significado à prova, «vêem-na como a justificação do óbvio».

Van Dormolen (referido por Battista e Clements, 1992) descreve três níveis de prova e relaciona-os com os níveis de van Hiele. No primeiro, as justificações são feitas em casos singulares, as conclusões são restritas ao exemplo específico sobre o qual é dada a justificação. No segundo, as justificações e conclusões podem ser para casos específicos, mas referem-se a colecções de objectos semelhantes, são considerados vários exemplos para ilustrar um padrão e os alunos são capazes de gerar outros exemplos. No terceiro os alunos justificam as afirmações através de argumentação conforme as normas aceites, isto é, são capazes de fazer provas formais. Van Dormolen relaciona o seu primeiro nível com o nível Visual de van Hiele, o segundo com o nível Descritivo/Analítico e o terceiro com o nível Dedução formal.

Os estudos de Senk (1989) mostram que apenas os alunos que iniciaram cursos de Geometria orientados para a produção de provas no Nível 2 (Descritivo/Analítico) de van Hiele tiveram alguma hipótese de aprender a provar, no final do curso. Para esta autora esse parece ser o *«nível crítico de de entrada»* para o sucesso dos alunos na produção de provas. Os dados obtidos por Senk (1989) parecem suportar que o Nível 4 de van Hiele (Dedução formal) é o nível em que os alunos dominam a prova, sendo o Nível 3 (Abstracto/Relacional) um nível de transição. De acordo com Battista e Clements (1992) poder-se-ia conjecturar que os alunos no Nível 3 não são capazes de fazer provas que ainda não tivessem visto, ou compreender tudo o que uma prova implica. Contudo, a investigação de Senk não apoiou estritamente a teoria hierarquica de van Hiele de que apenas alunos nos Níveis 4 e 5 fossem capazes de redigir provas de forma consistente. Segundo os autores isso pode ser consequência da dificuldade em identificar níveis de van Hiele globais, isto é, não associados a conteúdos específicos (ver §2.2.1).

2.6.3 Necessidade de aprender a fazer provas matemáticas

«Provar é uma das características centrais do comportamento matemático e provavelmente a que mais claramente distingue o comportamento matemático do comportamento científico noutras disciplinas» (Dreyfus 1989, p. 126). Esta característica central da actividade matemática tem levado a defender a necessidade de confrontar todos os alunos, mesmo os que não pretendam ser matemáticos, com a natureza específica do raciocínio matemático (Chazan, 1993). A reflexão sobre o papel da prova na construção do conhecimento matemático leva a propor abordagens deste tópico mais de acordo com o modo como é utilizada pelos especialistas matemáticos na sua actividade. A confrontação com a utilização autêntica da prova no seio da comunidade matemática pode contribuir para a consciencialização dos alunos sobre a especificidade da prova matemática e a sua eficiência na resolução dos problemas matemáticos. Segundo Chazan (1993), o aspecto explicativo de certas provas, no sentido de iluminar ou esclarecer sobre as razões por que se verificam determinadas afirmações parece ser um ponto de partida útil para discutir o valor de provas dedutivas.

Numa perspectiva construtivista da aprendizagem da Matemática, no sentido em que os alunos são construtores de significado matemático e de uma rede de conhecimentos em matemática, «o processo pelo qual estabelecem por si mesmos a verdade matemática tem uma importância vital» (Battista e Clements, 1992, p. 442). Como sugere Bell (citado por Battista e Clements, 1992) o sucesso na produção de provas pode ser promovido por meio de investigações realizadas por grupos cooperativos de alunos, em que estes façam conjecturas e resolvam conflitos recorrendo à apresentação de argumentos e evidência. Esta é uma das "promessas" dos AGD, como se analisa em seguida.

2.6.4 Conjecturas e provas em AGD

O reconhecimento de que «a estrutura dedutiva da Geometria tradicional nunca se tornou um sucesso didáctico convincente [...] porque o seu aspecto dedutivo não podia ser reinventado por quem aprende mas apenas imposto» (Freudenthal, referido por Hershkowitz, 1989), leva hoje a dar uma grande importância aos processos de descoberta indutiva como forma de aprender Geometria. Acredita-se que esses processos são necessários porque introduzem um aspecto de descoberta; porque o aluno ao considerar a generalização como uma conjectura em si própria sente a necessidade de provar a veracidade da sua conjectura; porque as experiências indutivas são a base intuitiva que pode gerar a construção de uma prova dedutiva (Hershkowitz, 1989).

De acordo com Schwartz (1989, p. 51) «uma conjectura matemática é uma proposição sobre uma relação, até então insuspeitada, que se pensa que se vislumbrou, entre dois ou mais objectos matemáticos». Uma conjectura pode resultar, por exemplo, da generalização de uma determinada regularidade verificada por meio de observações realizadas em casos particulares. A sua validade pode ser mostrada através de provas informais, no sentido que Lakatos atribuía a esta expressão, isto é, através de «explicações, justificações, elaborações que tornam a conjectura mais plausível, mais convincente, ao mesmo tempo que a tornam mais detalhada e exacta pela pressão exercida pelos contra-exemplos» (Davis e Hersh, 1981, p. 347).

Pode considerar-se nesta linha «o método de (re)descoberta guiada de teoremas» proposto por Schumann (1991, p. 82) como um «método educacional adequado». Segundo este autor a aprendizagem da maior parte dos teoremas da Geometria plana elementar pode ser desenvolvida através do seguinte sistema:

1. Descoberta indutiva de teoremas (através de construções gráficas).

1.1 Resolução de um problema (adequado) de construção. Resultado: uma configuração[6] geométrica.

1.2 Análise do resultado da construção (também através da inclusão e destaque de elementos essenciais, obtidos através de medições e de cálculos baseados em medições). Resultado: uma (primeira) suposição.

1.3 Realização de novas construções que tenham em consideração casos diferenciados e verificação da suposição nessas construções. Resultado: confirmação da suposição com a formulação de um (primeiro) teorema ou negação da suposição.

2. Descoberta e apresentação da prova.

2.1 Necessidade da prova: motivação.

2.2 Análise do problema: estabelecer as hipóteses e a tese.

2.3 Aplicação de métodos heurísticos para descobrir provas (avançar da hipótese para a tese, trabalhar em sentido contrário, raciocinar por analogia com outras provas, etc.).

[6]Para Schumann (1991, p. 104) «a rede de pontos, rectas, semi-rectas, segmentos de recta, ângulos em circunferências, arcos de circunferência, etc., e suas incidências deve ser entendida como uma configuração geométrica».

2.4 Documentação da prova tendo em vista a sua compreensão.

3. Tratamento do teorema e da prova (metabase).

3.1 Discussão e explicação da metodologia para descobrir teoremas e provas.

3.2 Aplicação de métodos heurísticos, como especialização, generalização, comparação, inversão para produzir novas afirmações.

Schumann (1991, p. 82) faz notar que o processo de descoberta indutiva de teoremas com recurso às ferramentas clássicas tem três «fraquezas»: (1) tempo gasto na construção de um número suficientemente grande de representantes da configuração relacionados com o teorema, com frequência pouco precisos; (2) tempo gasto na realização de medições e cálculos, pouco precisos, mesmo com uma calculadora; (3) construções resultantes que são estáticas, e que apenas podem ser tornadas flexíveis por meio de «imaginação mental». Estas fraquezas podem ser ultrapassadas com recurso aos ambientes geométricos dinâmicos, mais ainda se estes tiverem associados meios poderosos de medição e cálculo (como é o caso do Cabri-géomètre II, que, por exemplo, calcula áreas e permite observar a respectiva variação, quando a construção é manipulada).

Segundo Schumann (1991, pp. 83-84) a modificação contínua realizada interactivamente através da manipulação directa de uma construção num ambiente geométrico dinâmico, produz:

- muitas configurações adicionais isomorfas com transição contínua a partir de uma configuração, num amplo domínio de variação;
- transições contínuas entre casos particulares da mesma configuração;
- transição contínua entre um caso geral e casos particulares de uma configuração;
- transições contínuas para configurações mais gerais
- transições contínuas para casos limites de uma configuração.

A modificação contínua de construções geométricas facilita o que Schumann (1991, p. 83) denomina uma «orientação operacional real do processo de descoberta de teoremas: que características da configuração permanecem invariantes através de um procedimento de modificação contínua que é levado a cabo individualmente, e quais não permanecem?». Questões estas que têm a ver com os efeitos dos métodos «estáticos versus dinâmicos» de descobrir teoremas.

Recorrendo aos novos ambientes geométricos computacionais é possível estimular nos alunos processos reflexivos que os levem à formulação de conjecturas de modo semelhante ao utilizado pelos especialistas. O *Geometric Supposer* é um conjunto de programas concebidos com o objectivo, entre outros, de «auxiliar os alunos a formular conjecturas e, assim, capacitar os professores para utilizarem as conjecturas dos alunos no ensino da Geometria» (Yerushalmy e Chazan, 1990, p. 203). De acordo com estes autores o *software* facilita o processo de formulação e testagem de conjecturas, em particular através da devolução de informação empírica numérica e visual sobre as construções geométricas, solicitada pelo utilizador.

Yerushalmy, Chazan e Gordon (1990) referem que a aprendizagem dos alunos que utilizaram os programas *Geometric Supposer* ultrapassou os conteúdos de Geometria habituais, reinventaram definições, fizeram conjecturas, colocaram e resolveram problemas significativos e desenvolveram provas originais. No entanto os autores salientam que a formulação de conjecturas não aconteceu facilmente e causou mesmo muita frustação no início do ano lectivo, mas no final quase todos os alunos estavam a fazer conjecturas em projectos de larga escala e sentiam a necessidade de justificar as suas generalizações.

Battista e Clements (1992, p. 453) referem que alunos que trabalharam com o Supposer acreditavam que os teoremas por si descobertos necessitavam de ser provados antes de serem aceites como verdadeiros, ao contrário do que acontecia com os teoremas dos livros de texto. Com o adequado apoio do professor, esses alunos conseguiram entender a importância da prova formal como forma de estabelecer a verdade matemática, principalmente no sentido de elucidar porque é que essa verdade acontecia.

Também Saraiva (1992, pp. 249-250) considera que o ambiente computacional LOGO.GEOMETRIA desempenhou um «papel muito importante de suporte e de meio visual e de auxiliar de cálculo para a elaboração de provas e demonstrações. Porém a força da evidência das imagens foi, no início dos trabalhos, um obstáculo à necessidade da feitura de uma prova para validar uma proposição». Principalmente os alunos mais fracos «formularam generalizações e consideraram-nas automaticamente válidas com base nos poucos casos por eles experimentados», mas progressivamente passaram da elaboração de generalizações por testagem de um número de casos particulares para a testagem de casos genéricos (no sentido que Balacheff (1987) atribui a estes termos, anteriormente referido). O ambiente criado na aula, pelo LOGO.GEOMETRIA, pelas actividades propostas e pelos permanentes desafios do professor permitiu que bastantes alunos acabassem por sentir a necessidade e a utilidade das demonstrações.

2.7 Definição de termos

Ao longo da revisão de literatura que se faz neste capítulo introduzem-se diferentes conceitos através de termos cujo sentido é oportunamente esclarecido. Nesta última secção apresenta-se uma síntese dos termos mais relevantes na análise dos dados deste estudo. Os termos agrupam-se por temas afins. A seguir ao seu nome indica-se em itálico as secções ou subsecções em que é tratado, neste capítulo ou nos seguintes.

Ambientes de aprendizagem poderosos, *§2.3*. Ambientes de aprendizagem ideais que possibilitam o desenvolvimento de estratégias de intervenção poderosas, desencadeadoras de processos de aprendizagem que levam os alunos a adquirir os tipos de conhecimentos e de competências que os especialistas dominam e aplicam: conhecimentos específicos, métodos heurísticos, estratégias de metacognição e estratégias de aprendizagem (De Corte, 1992).

Ambientes geométricos dinâmicos (AGD), *§2.4*. Ambientes gráficos computacionais para o ensino e aprendizagem da Geometria, que permitem realizar construções geométricas no ecrã de um computador utilizando explicitamente as propriedades das figuras e possibilitam a manipulação directa dessas construções conservando as propriedades utilizadas. O nome AGD com que neste estudo se referem esses ambientes, é uma proposta de Noss, Hoyles, Healy e Hoelzl (1994).

Visualização, *§2.5.5*, *§5.3.2*, *§6.3.1*, *§7.1.3*, *§7.1.4*. «Capacidade para representar, transformar, gerar, comunicar, documentar e reflectir sobre informação visual» (Hershkowitz, 1989, p. 75). Em sentido lato, a capacidade para tratar informação visual.

Representações externas e **representações mentais**, *§2.5.2*. Segundo Dreyfus (1993, p. 123) utilizamos representações *externas* dos objectos (fórmulas, diagramas, gráficos, desenhos, etc.) para comunicar sobre matemática, mas cada indivíduo quando pensa num determinado objecto ou processo matemático relaciona-o com qualquer coisa que tem na mente, uma representação *mental* do objecto ou processo considerado.

Desenho e **figura geométrica**, *§2.5.1*. Diversos autores distinguem o *desenho*, entidade material, da *figura geométrica*, objecto da teoria, ou segundo Parzysz (citado por Laborde, 1993a, p. 49) «o objecto geométrico que é descrito pelo texto que o define». Esta definição pressupõe que o significado de uma figura não pode ser retirado apenas de um desenho, mas tem de ser dado numa forma discursiva.

Exemplos prototípicos de figuras geométricas, *§2.5.3, §5.1.2.* Exemplos privilegiados que a investigação tem mostrado constituírem modelos dos conceitos geométricos (Hershkowitz, 1989). Segundo Matos (1992b, p. 107), nos exemplos prototípicos das figuras geométricas reconhecem-se as seguintes características gerais: «posição preferida» — privilegiando as direcções horizontal e vertical — «simetria» e «estabilidade».

Acções prototípicas - guiões, *§ 2.5.2, §5.3.3.* Sequência familiar de objectos e relações geométricas de que os alunos experimentaram anteriormente o efeito visual. Segundo Schank e Abelson, (referidos por Matos, 1992b, p. 109), «um guião é uma sequência coerente de acontecimentos esperados pelo indivíduo, que o envolvem como participante ou como observador». Matos (1992b) utiliza esta noção para interpretar algumas acções que os alunos realizam quando desenham elementos de figuras geométricas.

Construção geométrica, *§2.4.2.* Conjunto de objectos (pontos, rectas ou circunferências) ligados pelas suas relações geométricas, que podem ser visualizadas no ecrã do computador como permanecendo invariantes sob o arrastamento (Laborde, 1993a). As construções geométricas num AGD constituem uma forma de representar materialmente figuras geométricas que as aproxima, mais do que as feitas com papel e lápis, da noção teórica de figura geométrica (Laborde, 1993a).

Objectos criados e **objectos construídos,** *§2.4.2.* As primitivas do menu *Criação* do Cabri-géomètre permitem criar os seguintes objectos geométricos: pontos, rectas, circunferências, segmentos de recta ou triângulos, designados genericamente por objectos criados. A partir dos objectos criados é possível construir outros objectos (através de primitivas incluídas no menu *Construção*) que traduzem propriedades e relações geométricas entre eles, e que se designam por objectos construídos. É o caso, por exemplo, do ponto médio de um segmento de recta ou de uma recta que passa por um ponto e é paralela a outra recta.

Objectos de base de uma construção, *§2.4.2.* No Cabri-géomètre, são os pontos, rectas ou circunferências de uma construção que o utilizador pode deslocar no ecrã do computador.

Manipulação directa de uma construção ou **arrastamento de uma construção,** *§2.4.2, §7.2.* Deslocação no ecrã do computador dos objectos de base de uma construção ou de pontos construídos sobre objectos. A deslocação desses objectos provoca a variação de todos os outros objectos deles dependentes, permitindo visualizar a classe de figuras compostas pelas mesmas relações e objectos descritos durante a construção (Laborde, 1993b).

Algoritmo de uma construção, *§2.5.3.* Num AGD associado a cada construção está um algoritmo, isto é, uma sequência de operações entre objectos e relações geométricas, concretizados nas primitivas do *software*, que produz a construção no ecrã do computador. O algoritmo é determinante na manipulação da construção que é possível realizar e, consequentemente, na variação da sua aparência no ecrã do computador.

Processo de construção, *§5.2.* Algoritmo de construção idealizado e/ou executado pelos alunos.

História de uma construção, *§2.4.2, §6.1.* No Cabri-géomètre, os objectos criados ou construídos num determinado algoritmo de construção podem ser revistos através da primitiva *História*. Os objectos aparecem sequencialmente, pela ordem em que foram criados ou construídos (os apagados com a *Borracha* aparecem a tracejado).

Aspecto de uma construção, *§2.4.2, §5.1.* O Cabri-géomètre permite apagar com uma *Borracha* objectos de uma construção. Esses objectos não deixam de existir, apenas ficam invisíveis, podendo voltar a ser visualizados com auxílio de um *Lápis*. Um *Pincel* permite destacar em traços mais grossos os objectos, ou ainda colori-los (se a carta gráfica do posto computacional o permitir). Estas primitivas estão agrupadas na primitiva *Aspecto dos objectos*.

Aparência de uma construção, *§2.5.3, §5.1.* Forma com que a construção aparece no ecrã do computador. A aparência de uma construção corresponde à aparência da figura que representa (no sentido do Nível 1 de van Hiele).

Construção que se desmancha *§2.5.3, §5.2* Construção que reproduz a aparência de uma determinada figura (no sentido do Nível 1 de van Hiele) mas em que as características dessa figura não resistem à manipulação dos objectos da construção, uma vez que esta não é feita recorrendo a uma descrição explícita das propriedades e relações geométricas da figura. Noss *et al.* (1994) e Hoyles e Noss (1994) utilizam o termo «*messing up*» para referir este tipo de construções.

Construção resistente, *§2.5.3, §5.2.* Construção em que a aparência da figura que se pretende representar resiste à manipulação dos seus objectos, pois é feita recorrendo a propriedades e relações da figura. Permite ainda induzir outras propriedades e relações dessa figura (Laborde, 1993a).

Regra da resistência, *§4.1.2, §5.2.* Regra estabelecida com os alunos participantes neste estudo de que as suas construções deveriam ser resistentes. Noss *et al.* (1994) estabeleceram uma regra análoga ao propor aos alunos que fizessem construções «*not messing up*».

Percurso de construção, *§5.2*. Caminho percorrido pelos alunos para obter uma determinada construção.

Demonstração ou **prova matemática** *§2.6*. Raciocínio lógico-dedutivo utilizado pelos matemáticos para estabelecer a verdade das suas afirmações. Segundo Barbin (1993a, p. 14) «o sentido da actividade de demonstrar não é convencer mas compreender como e porquê. A demonstração apresenta interesse em si própria num empreendimento de racionalização e de compreensão de uma problemática». A autora identifica três aspectos fundamentais na prova matemática: «*convencer* para saber, *esclarecer* para saber como se sabe e *interessar* para saber por que se sabe.

Justificação de uma construção, *§4.1*, *§6.2*. Explicitação de razões para mostrar porque é que uma construção funciona (*works*)» (Sekiguchi, 1991), isto é, representa uma determinada figura geométrica.

Justificação formal de uma construção, *§6.2*. Justificação da construção através da identificação e relacionamento entre propriedades da figura. De acordo com Sekiguchi (1991) este tipo de justificação é uma forma de prova.

Justificação empírica de uma construção, *§6.2*. Justificação de uma construção baseada em dados retirados da observação e da experiência sobre a figura em análise, por exemplo, da sua aparência visual.

Conjectura, *§2.6.4*. Segundo Schwartz (1989, p. 51) «Uma conjectura matemática é uma proposição sobre uma relação, até então insuspeitada, que se pensa que se vislumbrou, entre dois ou mais objectos matemáticos». Uma conjectura pode resultar, por exemplo, da generalização de uma determinada regularidade verificada por meio de observações realizadas em casos particulares. A validade pode ser mostrada através de «explicações, justificações, elaborações que tornam a conjectura mais plausível, mais convincente, ao mesmo tempo que a tornam mais detalhada e exacta pela pressão exercida pelos contra-exemplos» (Davis e Hersh, 1981, p. 347).

Investigação de uma construção, *§4.1*, *§7.1*. Pesquisa de relações invariantes e formulação indutiva de conjecturas sobre propriedades da figura representada por uma construção, através da sua manipulação (Schumann, 1991).

Conjectura restrita *§7.1.6*. Conjectura baseada na observação de um número limitado de exemplos da figura, obtidos através de manipulações restritas da construção.

Conjectura genérica *§7.1.6.* Conjectura induzida da observação de um número alargado de exemplos da figura, obtidos através de manipulações da construção, contemplando situações diversificadas. Neste caso põe-se especificamente o problema da generalização.

Capítulo 3 - Plano metodológico

O plano metodológico descrito neste capítulo inicia-se com uma referência aos objectivos do estudo, nos quais se fundamenta a opção por uma abordagem qualitativa das questões enunciadas, referida na segunda secção. O estudo reveste a forma de uma *experiência de ensino* (*teaching experiment*), que se caracteriza teoricamente na terceira secção, descrevendo-se, na quarta secção, a sua operacionalização neste trabalho. Os procedimentos de recolha de dados e respectiva análise constituem os temas tratados na quinta e sexta secções. Termina-se discutindo, na sétima secção, algumas limitações introduzidas no estudo pela planificação metodológica adoptada.

3.1 Objectivos do estudo

Este estudo visava especificamente descrever e interpretar processos desenvolvidos por alunos para realizar construções de figuras geométricas, justificar os processos de construção e investigar as construções, com recurso a um ambiente geométrico dinâmico (AGD).

Pretendia-se observar os processos desenvolvidos pelos alunos como acontecem em tempo real e no seu contexto habitual, e ainda intervir nesse desenvolvimento ensaiando diferentes vias de actuação, como normalmente o professor faz. Estes objectivos do estudo levaram a optar por uma metodologia investigativa de *experiência de ensino* (*teaching experiment*)[1] (Cobb e Steffe, 1982; Kantowski, 1978; Lesh e Kelly, 1994), com uma natureza predominantemente qualitativa, como se explica nas subsecções seguintes.

3.2 Opções metodológicas

A complexidade do fenómeno educativo e o grande número de variáveis que nele interagem tornam quase impossível o isolamento e a identificação, sem ambiguidade, das causas que produzem determinado efeito. Este facto tem revelado a importância para a investigação educacional de abordagens de tipo qualitativo. Como salienta Evans (1994, p. 326) «a abordagem qualitativa é útil quando se pretende explorar a riqueza, coerência (i.e, não separação em variáveis) e processos de desenvolvimento, num número limitado de casos. Assim podem destacar-se episódios de resolução de problemas, a fim de compreender o processo — para fins investigativos ou para aperfeiçoar o ensino e a aprendizagem». Segundo Costa (1986) o método qualitativo é

[1] Traduz-se *teaching experiment* por *experiência de ensino*, como faz Fernandes (1992).

particularmente adequado para uma descrição fina quer dos aspectos em análise quer das suas interligações, sendo, por isso, uma forma escolhida com frequência para estudar as inovações educacionais, perspectiva em que se pode englobar a utilização educativa dos AGD.

3.2.1 Breve caracterização da investigação qualitativa

De acordo com Bogdan e Biklen (1982, pp. 27-30) as investigações que se reclamam qualitativas compartilham cinco aspectos característicos que se referem a seguir.

A investigação qualitativa tem o ambiente natural como a fonte directa dos dados e o investigador como o seu principal instrumento. O facto de o investigador manter um contacto estreito com a situação permite-lhe compreender as influências do contexto nos fenómenos que está a estudar. *A investigação qualitativa é predominantemente descritiva.* Os dados são fornecidos por descrições de pessoas, de situações e de acontecimentos. *A investigação qualitativa preocupa-se com os processos mais do que com os resultados ou produtos.* O interesse está em verificar como é que o problema do estudo se manifesta nas actividades realizadas. *Na investigação qualitativa a análise dos dados tende a seguir um processo indutivo.* A preocupação do investigador não é testar hipóteses, mas é antes partir da análise dos dados num processo de baixo para cima. No início há focos de interesse amplos, que com o decorrer do estudo se tornam mais directos e específicos. *O significado é a preocupação essencial da investigação qualitativa.* Apreendendo a perspectiva dos participantes, a investigação qualitativa esclarece a dinâmica interna de situações que muitas vezes são invisíveis para o exterior.

3.3 *Experiências de ensino* como metodologia de investigação

Entre diferentes formas possíveis de operacionalizar uma abordagem metodológica que privilegiasse «uma interpretação na procura de significados mais do que uma experimentação na procura de leis» (Shulman, 1986, p. 18) optou-se por realizar uma *experiência de ensino*. Segundo vários autores a experiência de ensino é uma «poderosa metodologia de investigação construtivista» (Lesh *et al.*, 1994, p. 160) «utilizada na formulação de explicações do comportamento matemático das crianças» (Cobb e Steffe, 1983, p. 83) que tem como objectivo «'apanhar' os processos no seu desenvolvimento e determinar como é que o ensino pode influenciar de maneira optimizada esses processos» (Kantowski, 1978, p. 45).

Esta caracterização das experiências de ensino desfaz qualquer associação apressada com a noção de estudo experimental que o nome possa sugerir. Os estudos experimentais visam determinar as causas dos fenómenos que estudam, formuladas através de hipóteses sujeitas a experimentações laboratoriais. As experiências de ensino, como aqui se consideram, visam descrever e interpretar processos de desenvolvimento dos fenómenos sobre que se debruçam, induzidos por meio de intervenções planificadas. As origens e caracterização das experiências de ensino apresentada nas sub-secções seguintes clarificam estas ideias.

3.3.1 Origens das experiências de ensino

As origens da experiência de ensino remontam aos trabalhos dos psicólogos e pedagogos soviéticos do período pós-revolução. No espírito do marxismo dialéctico então dominante, contestaram a existência de capacidades inatas no indivíduo e assumiram o ensino como o principal factor no seu desenvolvimento intelectual. Acreditavam que, excepto nos casos em que se verificassem deficiências orgânicas, todos as crianças traziam à partida o mesmo potencial para o desempenho académico (Kantowski, 1978).

Esta perspectiva levou os investigadores soviéticos a desenvolver técnicas que lhes permitissem não só observar os processos complexos envolvidos na aprendizagem mas também influenciar o seu desenvolvimento. «Os novos métodos de investigação incluíam observação longitudinal e avaliação; teriam de permitir ao investigador estudar mudanças na actividade mental bem como os efeitos de ensino planeado nessa actividade» (Kantowski, 1978, pp. 43-44).

Nos anos vinte o psicólogo Vygotsky marcou profundamente a investigação didáctica soviética. A sua concepção revolucionária sobre a formação dos processos mentais e a sua convicção da primazia da instrução no desenvolvimento mental levaram-no a conceber uma metodologia de investigação que incidisse nos aspectos qualitativos do pensamento e da aprendizagem. A sua *experiência de instrução (instructional experiment)* reproduzia de forma sistemática os processos mentais tal como estes se desenvolvem sob influência de diferentes intervenções. O método proposto por Vygotsky visava a modelação dos processos e constituía uma alternativa ao seu estudo empírico baseado em comportamentos observados nos alunos em cenários clínicos.

3.3.2 Experiências de ensino na investigação actual

Os estudos soviéticos interessaram investigadores norte-americanos preocupados em estabelecer pontes entre a investigação educacional e a realidade das salas de aula. O trabalho mais marcante terá sido o de Kantowski, que, na sua tese de doutoramento, realizou uma experiência de ensino para investigar o desenvolvimento de capacidades na resolução de problemas em Geometria, embora a literatura refira experiências de ensino anteriores a essa (Cobb e Steefe, 1983). Posteriormente, no artigo citado na secção anterior (Kantowski, 1978), a autora discute a forma como as experiências de ensino se podem utilizar para estudar processos envolvidos na resolução de problemas em Matemática, tomando como base os trabalhos soviéticos. Outros autores norte-americanos reflectem teoricamente sobre esta metodologia investigativa e utilizam-na nos seus estudos, entre eles Cobb e Steffe (1983), cujo trabalho se refere adiante (§3.3.3).

Nas actas da *18th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, realizada em Lisboa em Agosto de 1994 — em que um número significativo de estudos evidencia a preocupação dos autores em os efectuar no contexto de salas de aula reais — dois estudos identificam-se especificamente como experiências de ensino. Um deles, de autores americanos e israelitas (Lesh *et al.*, 1994), faz a sua defesa no estudo do desenvolvimento do conhecimento matemático e das capacidades de alunos e professores. O outro estudo, desenvolvido em Itália (Boero e Garuti, 1994), refere uma experiência de ensino sobre a formulação de proposições geométricas por alunos do sétimo nível de escolaridade.

3.3.3 Razões para um investigador agir como professor

Baseados numa epistemologia construtivista Cobb e Steffe (1983) enaltecem a experiência de ensino como forma de estudar processos desenvolvidos pelos alunos. Estes autores colocam a ênfase na formulação e revisão de modelos explícitos da realidade matemática dos alunos num contexto em que o investigador actua como professor, seguindo a linha de investigação de enfoque na modelação dos processos, já proposta por Vygotsky.

Cobb e Steffe (1983, pp. 83-87) salientam três razões para que o estudo da construção do conhecimento matemático pela criança envolva ensino.

A análise teórica desempenha um papel importante na compreensão do comportamento matemático da criança, mas não é suficiente. O conhecimento obtido teoricamente, na melhor das hipóteses, intersecta parte do conhecimento que se obtém experienciando a dinâmica da criança a fazer Matemática. «A tensão criada por observações inexplicáveis ou aparentemente contraditórias conduz, em última análise, a um conhecimento da criança que suplanta a análise teórica inicial».

As experiências que os alunos obtêm através da interacção com os adultos influenciam grandemente a sua construção do conhecimento matemático. Numa entrevista clínica, um investigador pode especificar padrões estruturais que os alunos abstraem da sua experiência através da interacção com o meio. Contudo esse investigador não tem como intenção focalizar-se nos momentos críticos em que acontece a reestruturação cognitiva. Consequentemente, as explicações resultantes da abstracção são esvaziadas do contexto experiencial necessário a um professor quando planifica intervenções específicas.

O contexto no seio do qual a criança constrói o conhecimento matemático é importante. Actuando como professores e desenvolvendo relações pessoais próximas com os alunos, é possível ajudá-los a reconstruir os contextos nos quais aprendem Matemática, o que se torna essencial quando se tem como objectivo a exploração dos limites e subtilezas das possibilidades criativas dos alunos em Matemática.

Cobb e Steffe (1983, p. 85) salientam ainda que «a falta de observação em primeira mão dos processos construtivistas das crianças nega ao investigador a base experiencial tão crucial na formulação de uma explicação desses processos». Os investigadores que não se empenhem no ensino intensivo e extensivo de crianças arriscam-se a que os seus modelos sejam distorcidos para reflectir o conhecimento matemático dos próprios investigadores.

3.3.4 Principais características das experiências de ensino

Identificam-se na literatura três características gerais da experiência de ensino. Em primeiro lugar a sua *natureza longitudinal.* «Uma característica geral das experiências de ensino é a interacção 'longo prazo' entre os experimentadores e um grupo de crianças» (Cobb e Steffe, 1983, p. 87), que duram normalmente períodos de seis semanas a dois anos. Kantowski (1978, p. 46) refere igualmente que o «tratamento instrucional» é aplicado e os dados são recolhidos num extenso período de tempo.

Uma segunda característica é o *estudo dos processos de passagem dinâmica de um estado de conhecimento para outro.* Embora tenha importância o que os alunos fazem, o maior interesse está em como o fazem (Cobb e Steffe, 1983). Para Kantowski (1978, p. 45) 'dinâmica' caracteriza numa palavra a experiência de ensino, uma vez que é «o movimento da ignorância para o conhecimento, de um nível de operação para outro, de um problema para uma solução» que interessa os investigadores.

A terceira característica é a *natureza qualitativa dos dados.* Os dados qualitativos emanam de duas possíveis fontes. A primeira são *episódios de ensino* (*teaching episodes*), nos quais os dados tomam a forma de trocas textuais entre o professor e os alunos, bem como descrições dos contextos instrucionais e das respostas dos alunos nesses contextos. A segunda fonte são entrevistas clínicas conduzidas em momentos seleccionados da experiência de ensino (Cobb e Steffe, 1983). Estes autores salientam que nos seus estudos colocaram a ênfase em episódios de ensino, pois estes proporcionaram-lhes as melhores oportunidades para investigar as construções matemáticas dos alunos. Dada a sua natureza, os resultados das experiências de ensino são apresentados normalmente na forma de narrativas que incluem análise dos comportamentos observados e conclusões retiradas dessa análise (Kantowski, 1978).

Começando por referir que alguma investigação em resolução de problemas tem sido influenciada pelo paradigma das experiências de ensino, Fernandes (1992, pp. 65-66) salienta as mesmas características desta abordagem metodológica:

> De facto, o foco nos processos, a observação de pequenos grupos de estudantes durante períodos prolongados de tempo, o envolvimento do investigador na sala de aula, os registos vídeo e áudio dos protocolos de resolução de problemas dos estudantes, as perguntas e sugestões do investigador durante a administração de testes, a utilização de esquemas de codificação que reflictam os processos dos alunos e o foco na análise subjectiva dos dados em vez de quantitativa, são algumas das técnicas agora largamente utilizadas na investigação em resolução de problemas de Matemática.

Enfoque das experiências de ensino

Menchinskaya (referida por Cobb e Steffe, 1983, p. 87) identifica dois grandes tipos de experiências de ensino. Nos *macroesquemas* «estudam-se as mudanças na actividade e desenvolvimento escolar de um aluno, como faz a transição de um nível etário para outro, de um nível de instrução para outro». Estes estudos abrangem toda uma turma e têm sobretudo uma orientação curricular. Nos *microesquemas* observa-se num aluno «a transição da ignorância para o conhecimento, de um modo menos perfeito de trabalho escolar para outro mais perfeito». Ocupam-se de alunos individuais e têm preferencialmente uma orientação psicológica.

3.4 Operacionalização da experiência de ensino neste estudo

Este estudo é uma tentativa para compreender processos desenvolvidos por alunos quando interagem em pequenos grupos com um AGD, no seu ambiente habitual de aula. Pareceu assim adequado implementar uma experiência de ensino curricular tipo macroesquema, uma vez que o carácter individualizado das experiências de ensino com enfoque psicológico, mais laboratoriais, não permite ter em conta, na análise dos processos de aprendizagem, a componente social, (ainda que esta não seja uma questão específica deste estudo).

Para operacionalizar a experiência de ensino implementou-se uma intervenção didáctica, que teve subjacente a noção de «estratégia de intervenção poderosa» proposta por De Corte (1992) (§2.3). Em síntese, uma turma de alunos do 9º ano de escolaridade, utilizando como recurso o ambiente dinâmico Cabri-géomètre, realizou actividades de construção de figuras geométricas e de exploração dessas construções, visando a familiarização progressiva dos alunos com os conceitos e propriedades geométricas, incluídos na unidade Geometria do Plano. (No capítulo 4 descreve-se a intervenção detalhadamente.)

A investigadora realizou uma «observação participante» (Costa, 1986) dessa intervenção didáctica. Concebeu as actividades e observou o trabalho realizado pelos diferentes grupos de alunos, dialogando com eles, apoiando-os na explicitação das suas ideias e ultrapassagem de dificuldades. Essa observação permitiu-lhe começar a perceber os processos desenvolvidos pelos alunos e serviu de base para a planificação dos episódios de ensino que realizou com sete grupos de alunos e que constituíram a principal fonte dos dados analisados, como se descreve na secção §3.5.

No resto desta secção descrevem-se os participantes e o cenário da experiência de ensino, começando por fundamentar a respectiva escolha.

3.4.1 Participantes e cenário

Os participantes neste estudo foram os alunos e alunas da turma 9º 5 da Escola Secundária de S. João do Estoril (arredores de Lisboa), no ano lectivo 1992/93.

A escolha do nível de escolaridade ficou a dever-se à experiência pessoal de formação de professores e acompanhamento de projectos de intervenção curricular da investigadora. Essa experiência permitiu-lhe observar que era principalmente no 9º ano de escolaridade que os professores mais utilizavam os AGD. Por um lado, o currículo de Geometria do 9º ano de escolaridade reunia um conjunto de características que se adequava à utilização desses ambientes, com particular destaque para o estudo da circunferência. Por outro lado, o currículo de Matemática desse ano de escolaridade era, na época, o menos sobrecarregado (no que se refere ao 3º ciclo), o que proporcionava aos professores tempo para ensaiar formas de ensino e aprendizagem diferentes das tradicionais. A investigadora verificou ainda que os conteúdos de Geometria do Plano do 9º ano de escolaridade então em vigor mantinham-se no novo currículo do 3º ciclo, proposto pela Reforma do Sistema Educativo, e que a estratégia de intervenção que tencionava implementar se enquadrava nas propostas desse currículo.

À escolha da escola presidiram duas razões principais. A primeira teve a ver com o facto de estar bem apetrechada com equipamentos informáticos para apoiar o trabalho de uma turma de alunos. A segunda prendeu-se com o facto de a investigadora ter bons contactos com os professores de Matemática da escola bem como com os seus órgãos directivos.

A opção pela turma 9º 5 ficou a dever-se ao interesse manifestado pela respectiva professora de Matemática, que também era directora da turma. Depois de uma conversa com a professora ISA, para lhe dar a conhecer os aspectos relevantes do estudo e também perceber as suas expectativas para nele colaborar, a investigadora observou quatro das suas aulas (fim de Novembro e Dezembro de 1992). Estas diligências permitiram-lhe concluir que a turma reunia condições para a realização do trabalho. Na última dessas aulas a investigadora conversou com os alunos da turma e deu-lhes algumas indicações sobre os objectivos do trabalho que pretendia realizar e sobre o papel que esperava que os alunos nele desempenhassem. A pedido da professora ISA e da delegada de grupo, a investigadora participou numa reunião do grupo de matemática da escola, em que expôs as linhas gerais da sua investigação e comunicou as adaptações que para o efeito seria necessário realizar na planificação do 9º ano elaborada pelo grupo. Embora não concordando por princípio com a Geometria ser "empurrada" para o final do ano, os professores aceitaram as razões da professora ISA e da investigadora.

A partir de Janeiro de 1993 a investigadora participou uma vez por semana nas aulas do 9º 5. Inicialmente limitou-se a observar as aulas, mas progressivamente começou a conversar com os alunos e a apoiá-los nas suas dificuldades, com o objectivo de se familiarizar com eles, habituando-os à sua presença e a trocarem ideias com ela sobre a forma como resolviam as actividades propostas, o que era fundamental para a recolha de dados que a investigadora pretendia realizar.

Caracterização da turma 9º 5

A turma 9º 5 era constituída por vinte e oito alunos, dezoito rapazes e dez raparigas. Todos os alunos, excepto um, residiam num raio de 5 km da escola e a maioria deslocava-se habitualmente para a escola a pé. Os pais, ou outros familiares com quem os alunos residiam, exerciam essencialmente profissões médias na área dos serviços. Três alunos eram filhos de professores da escola.

A média de idades era 15,5 (σ=1,4), mas a média de idades das raparigas era superior à dos rapazes e com maior dispersão: m_f=16,6 (σ=1,7), m_m=14,9 (σ=0,7).

Na opinião da professora ISA, em termos de aproveitamento, a turma era relativamente desequilibrada. Entre uma maioria de alunos com aproveitamento médio/razoável tinha sido introduzido um grupo de alunos com reconhecidas dificuldades de aprendizagem, essencialmente raparigas, a quem era necessário prestar apoio pedagógico acrescido. Ainda assim, no final do ano lectivo, apenas duas alunas ficaram retidas no 9º ano.

Do ponto de vista do comportamento a turma era irrequieta. Para além da directora da turma, também a professora de Educação Física e o professor de Electrotecnia comentaram perante a investigadora que não era fácil trabalhar com aqueles alunos e fazê-los trabalhar uns com os outros. Nas aulas de Matemática havia um grupo de alunos, principalmente rapazes, que gostava bastante de se salientar, fazendo-o de forma que por vezes abafava as tentativas de participação de outros colegas. A divisão da turma em oito grupos de trabalho, formados para as aulas em que os alunos utilizaram os computadores, propiciou maiores oportunidades para todos se expressarem, e em certa medida reconverteu positivamente o seu "excesso de dinamismo".

3.4.2 Formas de minorar enviesamentos da observação participante

Como forma de minorar os enviesamentos resultantes da observação/intervenção realizada, tentou criar-se uma situação que levasse os alunos participantes a aceitar as alterações logísticas impostas pela investigação como parte integrante do seu contexto nesse ano lectivo e a não modificarem por isso o seu modo habitual de estar nas aulas. Quatro meses antes de iniciar a intervenção didáctica propriamente dita, a investigadora começou a observar e a participar nas aulas de Matemática da turma, uma vez por semana e, progressivamente, familiarizou-se com os alunos. A pretexto de os ajudar a ultrapassar as suas dificuldades, conversava com eles e observava a sua forma de raciocinar matematicamente.

Para os habituar à câmara de vídeo gravou algumas aulas em que os próprios alunos colaboraram na montagem dos aparelhos. Outras vezes deixava-os usar a câmara para filmarem cenas das aulas. Alguns alunos pediram cópias dessas gravações, bem como dos episódios de ensino em que participaram. Mesmo assim, durante as gravações dos episódios de ensino dois alunos confessaram-se intimidados com o facto de estarem a ser filmados, embora outros três tenham referido terem-se esquecido desse facto.

No entanto, neste estudo, mais do que eliminar enviesamentos decorrentes a intervenção procurou-se referi-los, através da descrição pormenorizada do contexto da experiência de ensino e dos processos utilizados na recolha e análise dos dados empíricos, que se faz nas secções anteriores e no capítulo seguinte. Por outras palavras, na apresentação da experiência de ensino teve-se a preocupação de especificar bem "os ingredientes que se fez reagir e as condições da reacção".

Mas foi na análise dos dados que se procurou ter o maior distanciamento. A experiência da investigadora de observação de outras turmas de alunos, como se refere em §1.1, permitiu-lhe especificar influências da sua intervenção, e centrar a análise no que considerou serem reacções típicas dos alunos.

Obteve-se uma certa validação externa da análise dos dados — feita como se descreve a seguir — através de um professor e um investigador, reconhecidos pela comunidade como peritos na área da utilização de ambientes computacionais com os alunos. A essas duas pessoas, que conheciam todo o trabalho desenvolvido pela investigadora, foi pedido que comentassem primeiras versões da análise dos dados empíricos. A versão final integrou os seus comentários.

3.5 Tipos de dados recolhidos; procedimentos de recolha

Os dados empíricos recolhidos, e também a sua análise, decorreram das finalidades do estudo. Assim a recolha de dados teve duas componentes, com pesos diferentes. A componente principal visou a obtenção de dados para caracterizar os processos em foco nesta investigação. Subsidiariamente, recolheram-se dados para avaliar a intervenção didáctica. Nas subsecções seguintes descrevem-se os tipos de dados recolhidos e os procedimentos adoptados.

3.5.1 Dados que visavam a caracterização dos processos

A principal fonte dos dados para caracterizar os processos desenvolvidos pelos alunos foram sete episódios de ensino realizados em complemento da intervenção didáctica. A preocupação em obter um conjunto de dados que permitisse uma fundamentação adequada dessa caracterização levou a recolher também outros tipos de dados que adiante se pormenorizam.

Episódios de ensino

À luz das considerações teóricas expostas em §3.3 considerou-se que a realização de episódios de ensino (Cobb e Steffe, 1983) que privilegiassem a técnica *pensar alto* seria uma forma adequada de obter dados empíricos. O facto de quase todos os alunos do 9º 5 terem manifestado apetência para conversar e discutir as suas resoluções das actividades criou condições práticas para a sua recolha por essa via.

Tendo em conta que se pretendia fazer um estudo num contexto real, ou pelo menos tão próximo do real quanto as condições logísticas o permitiam, houve a preocupação de realizar os episódios de ensino de modo a reflectirem as condições de trabalho habituais dos alunos. A tradução na prática dessa preocupação passou pela realização dos episódios de ensino com mais do que um aluno de cada um dos oito grupos de trabalho em que a turma se dividiu. Para o efeito convidaram-se dois alunos de cada um desses grupos, os considerados «informantes privilegiados», isto é, aqueles com quem a investigadora manteve um «relacionamento mais intenso» e que eram «permanente fonte de informação sobre aspectos do contexto em estudo e dos acontecimentos que nele se passavam» (Costa, 1986, p. 139).

A participação nos episódios de ensino baseou-se no voluntariado. Num dos grupos nenhum dos alunos se dispôs a participar, pelo que apenas se realizaram sete episódios. Em contrapartida, três episódios realizaram-se com três alunos, pois além dos dois alunos inicialmente convidados, um terceiro aluno manifestou vontade de participar. Ao todo os sete episódios — que se designam por E1, E2 ,..., E7, de acordo com a sua ordem de realização — envolveram dezassete alunos, nove rapazes (episódios E1-E4) e oito raparigas (episódios E5-E7), como mostra o quadro 3.1.

Quadro 3.1 - Episódios de ensino

Data	Episódio	Alunos[2]	Sexo	Idades
10.Maio.93	E1	DE; JC; JG	M	14; 14; 14
14.Maio.93	E2	XA; YB	M	14; 15
17.Maio.93	E3	PF; RD	M	15; 15
18.Maio.93	E4	LA; BF	M	15; 16
25.Maio.93	E5	CL; IS; PL	F	16; 15; 16
26.Maio.93	E6	MA; TA; SA	F	16; 17; 15
27.Maio.93	E7	AC; ZC	F	15; 15

Todos os episódios de ensino tiveram lugar extra-aula, mas enquadrados no horário dos alunos, de acordo com as suas disponibilidades, e duraram um tempo lectivo (50 m a 60 m), como mostra o quadro 3.2. Aconteceram durante o mês de Maio de 1993, nas datas indicadas no quadro 3.1 (o intervalo entre os episódios E4 e E5 foi consequência de ter havido testes de avaliação nessa semana). Uma vez que os alunos eram menores de idade solicitou-se ao respectivo encarregado de educação consentimento para a sua participação nessas sessões. Para o efeito a investigadora escreveu uma carta em que explicava os objectivos do seu trabalho (Anexo 2).

[2] Referem-se as iniciais dos nomes dos alunos que participaram nos episódios de ensino e que pediram para ser citados pelo seu nome neste trabalho.

Quadro 3.2 - Mancha horária do 9º 5

Horas	2º Feira	3ª Feira	4ª Feira	5ª Feira	6ª Feira
8.30-9.20					
9.25-10.15					
10.30-11.20					
11.30-12.20		Mat		Mat.	Mat.
12.30-13.20	Mat	E5			
13.30-14.20					
14.30-15.20		E4			
15.30-16.20				E7	
16.35-17.25	E1/E3		E6		E2
17.30-18.20					

Os episódios de ensino aconteceram no Centro Escolar Minerva (CEM), sala onde os alunos trabalharam sempre que utilizaram os computadores. No início de cada sessão a investigadora recordava aos alunos que o trabalho que iriam realizar serviria apenas para a sua investigação e, nesse sentido, era fundamental que falassem o mais possível. A título de exemplo transcreve-se o início do episódio E1.

Início do episódio de ensino E1

Inv: O objectivo da entrevista[3], é tentar perceber a maneira como vocês pensam quando fazem os trabalhos que vos tenho proposto. Tentar perceber o que é que vos leva a fazerem as construções da maneira que fazem e darem as respostas que dão. Falem em voz alta o mais possível. Tentem explicar as razões das vossas escolhas. Digam tudo o que estiverem a pensar, mesmo que vos pareça asneira. Já sabem que esta entrevista não tem efeitos para avaliação, é só para o meu trabalho de investigação, mais nada. Por isso eu desde já vos agradeço a colaboração que me vão dar.

Todos os episódios obedeceram à mesma planificação geral, que reflectiu, mais uma vez, a preocupação de respeitar as condições de trabalho habituais dos alunos. A investigadora propôs a cada grupo de alunos que refizessem e discutissem algumas das actividades que tinham resolvido nas aulas, nomeadamente aquelas em que tinha detectado particularidades relevantes na resolução: dificuldades, contradições ou resoluções inesperadas. Cada episódio terminava com a resolução de uma actividade nova. Durante a realização das actividades a investigadora questionou bastante os alunos para os levar a falar sobre o que estavam a fazer, mas também lhes deu sugestões, para ultrapassarem dificuldades e para os levar a reflectir de forma mais aprofundada sobre os seus processos de resolução e para os ajudar a clarificar

3 Para facilitar a comunicação com os alunos e os seus encarregados de educação os episódios de ensino foram-lhes apresentados como "entrevistas".

a verbalização das suas ideias, o que se revelou uma das grandes dificuldades dos alunos. Como refere Kantowski (1978) em estudos deste tipo é aceitável dar sugestões aos sujeitos, de modo a serem observadas as aprendizagens que ocorram durante a situação de testagem. As passagens dos episódios de ensino referidas nos capítulos 5, 6, 7 exemplificam o tipo de diálogo mantido entre os alunos e a investigadora.

Uma vez que os sete episódios de ensino aconteceram desfazados no tempo, elaborou-se um guião específico para cada um deles. Os guiões apenas referiam as actividades a abordar — seleccionadas das fichas que os alunos já tinham resolvido — e uma actividade nova. A forma como a discussão dessas actividades seria feita não estava estruturada, acontecia em função dos desempenhos dos alunos. Assim, com alguma frequência a investigadora optou por seguir e/ou aprofundar ideias dos alunos e abandonar actividades pré-seleccionadas. (Esses guiões constituem o Anexo 2.)

A investigadora gravou em vídeo os sete episódios de ensino e posteriormente transcreveu essas gravações. Dificuldades de ordem técnica na realização das gravações estiveram na origem de terem sido realizados extra-aula e com um máximo de três alunos por grupo. Mas, de certo modo, a sua realização extra aula revelou-se enriquecedora, uma vez que permitiu à investigadora concentrar a sua atenção num único grupo de alunos durante maior período de tempo e levá-los a aprofundar o seu trabalho, ao contrário do que acontecia normalmente nas aulas, em que muitos alunos tinham tendência para "despachar" as tarefas que tinham de realizar.

Outras fontes de dados

Para além dos episódios de ensino também se recolheram dados provenientes de outras fontes. A investigadora elaborou um Diário da Intervenção em que registou os seus comentários resultantes da observação directa de todas as aulas em que participou. Outra fonte de dados foram as construções geométricas realizadas pelos alunos. Cada um dos oito grupos possuía uma disquete na qual gravava as construções que realizava em cada aula, com um nome à sua escolha seguido do número da ficha de trabalho que propunha a actividade.

Em cada aula em que trabalharam com o computador os grupos resolviam uma ficha. A investigadora fotocopiava essas fichas, corrigia os originais e devolvia-os aos alunos, depois de registar nas fotocópias comentários sobre as correcções que efectuava. (As fichas propostas aos alunos constituem o Anexo 1; para mais detalhes ver §4.2.1, §4.2.2.) Essas fotocópias anotadas também foram objecto de análise, principalmente as duas fichas de Avaliação (1 e 2A/B). Durante a realização dessas fichas gravou-se em vídeo o trabalho de três grupos (um em cada ficha) e posteriormente fez-se um resumo escrito de cada um desses vídeos.

3.5.2 Dados que visavam a avaliação da intervenção didáctica

Os dados para avaliação da intervenção didáctica provieram de três fontes: resultados obtidos no *Teste de Geometria de van Hiele*; classificações obtidas em duas fichas de Avaliação; opinião dos alunos sobre a intervenção.

Teste de Geometria de van Hiele

Para determinar o nível de van Hiele dos alunos do 9º 5 escolheu-se como instrumento o *Teste de Geometria de van Hiele.* Este teste foi desenvolvido no âmbito do projecto CDASSG (*Cognitive Development and Achievement in Secondary School Geometry*) (Usiskin, 1982), projecto, que envolveu 2699 alunos inscritos em cursos de Geometria no 10º nível de escolaridade, de treze escolas secundárias dos EUA.

Usiskin (1982) refere que o teste foi construído com o objectivo, entre outros, de determinar o nível de van Hiele dos alunos participantes no estudo e foi aplicado duas vezes, no início e no final do ano lectivo. Matos (1984) traduziu e adaptou o teste para português e utilizou-o para caracterizar o nível de raciocínio geométrico dos alunos das ESEs de Beja e Faro, depois de ter pré-testado a tradução numa turma de alunos do 7º ano de escolaridade.

Limitações do teste

A identificação do nível de van Hiele de alunos tem sido uma questão prosseguida por muitas investigações, algumas das quais utilizaram o teste do projecto CDASSG. Diferentes autores criticaram o teste, nomeadamente do ponto de vista da sua fidelidade, e propusem reformulações específicas (Crowley, 1990; Wilson, 1990). Outros autores não consideraram um teste de papel e lápis suficientemente fino para identificar o nível de van Hiele e propuseram métodos alternativos, nomeadamente baseados na realização de tarefas em entrevistas clínicas (Burger e Shaughnessy, 1986; Fuys, Geddes e Tischeler, 1988; Mayberry, 1983). Mais recentemente Gutiérrez e Jaime (1994), preocupados em determinar o nível de van Hiele de um número grande de alunos, desenvolveram um instrumento em que procuraram fazer convergir as vantagens dos testes de papel e lápis e das entrevistas clínicas, nomeadamente através de itens de resposta aberta.

Neste estudo optou-se por utilizar o teste do projecto CDASSG por dois motivos. Por um lado, era o único instrumento van Hiele disponível para ser administrado a um grupo (vinte e oito alunos no presente caso) e em que as alternativas de resposta são normalizadas (Crowley, 1990) (o instrumento dos autores espanhóis não estava, na época, suficientemente validado). Por outro lado, não se tinha como objectivo investigar em profundidade alterações no nível de van Hiele dos alunos participantes, mas apenas levar em consideração esse indicador na planificação da intervenção didáctica e na análise empírica.

Descrição do teste

O *Teste de Geometria de van Hiele* é um teste de escolha múltipla construído com base em citações dos próprios van Hiele para descrever os comportamentos dos alunos nos diferentes níveis (Usiskin, 1982, pp. 18-19). Tem cinco grupos de questões, cada um com cinco questões que se referem unicamente a um dos cinco níveis de van Hiele (25 itens ao todo, cada item com 5 alternativas de resposta). (O teste, a folha de respostas, a autorização para a sua utilização no presente estudo e as frequências de respostas em cada alternativa, constituem o Anexo 3.)

Administração do teste no 9º 5

Os alunos do 9º 5 realizaram o *Teste de Geometria de van Hiele* duas vezes, antes da intervenção didáctica e após a sua conclusão. O teste foi administrado em conjunto pela professora da turma e pela investigadora.

A primeira administração (29 de Janeiro de 1993) decorreu numa aula normal escolhida numa altura de mudança de conteúdos programáticos e antes de terem sido abordados conteúdos de Geometria. Os alunos realizaram o teste de acordo com as instruções referidas na página de rosto do mesmo (Anexo 3). No final queixaram-se de que o teste era «grande e difícil» e na segunda aplicação, quatro meses depois, repetiram-no com muito pouca vontade.

Essa repetição estava prevista para a penúltima semana de aulas, após a realização da prova global de final de ano, mas como a escola antecipou uma semana o encerramento do ano lectivo, realizou-se no último dia útil de aulas (8 de Junho de 1993) numa altura em que havia bastante agitação nos pátios exteriores da escola, facto que provocou alguma dificuldades de concentração nos alunos, o que se terá reflectido nos resultados obtidos. À parte isso as condições de administração formam idênticas à anterior.

Fichas de avaliação; opinião dos alunos sobre a intervenção didáctica

Durante a intervenção didáctica os alunos realizaram as fichas Avaliação 1 e Avaliação 2, respectivamente a meio e no final. As fichas foram classificadas como a professora ISA tinha feito nos outros testes que os alunos realizaram anteriormente. A investigadora registou as classificações obtidas nessas fichas.

A opinião dos alunos sobre a intervenção recolheu-se no final de cada um dos sete episódios de ensino anteriormente referidos. A investigadora pretendeu que os alunos falassem de forma não estruturada sobre o trabalho em que estavam a participar. Os alunos expuseram as suas opiniões livremente, e por vezes a investigadora acrescentou algumas perguntas no sentido de precisar ideias. As opiniões dos alunos ficaram gravadas na sequência do episódio de ensino respectivo e foram incluídas na respectiva transcrição. Como exemplo apresenta-se uma passagem do episódio E5.

Passagem do episódio de ensino E5

Inv: Agora, só para terminar, gostava que cada uma de vocês dissesse o que é que tem achado deste trabalho que temos andado a fazer. Se gosta, o que é que acha que é bom e o que é que acha que não tem corrido tão bem. Nomeadamente, suponham que eu para o ano vou voltar a fazer isto com uma turma de alunos, o que é que vocês recomendavam que eu fizesse de diferente, ou o que é que vocês não gostaram, era isso que eu queria saber. Podemos começar pela IS.

IS: Praticamente não houve nada assim que eu não gostasse, até achei interessante. Prefiro isto do que ter aulas de Matemática [ri-se].

Inv: Isto não é uma aula de Matemática?

IS: É, mas é diferente.

Inv: Porquê? O que é que tu achas que é diferente? Ou o que é que tu gostas mais, aqui?

IS: Pronto, porque é uma matéria diferente, não estamos a dar... assim... sistemas, nem nada dessas coisas [ri-se] então eu prefiro trabalhar com isto.

Inv: Mas aqui tens que trabalhar mais, ou não concordas comigo?

IS: Mas... eu prefiro trabalhar mais desde que seja uma coisa que eu gosto, do que trabalhar menos numa coisa que eu não gosto e não percebo.

Inv: Mas aqui vocês também têm algumas dificuldades, ou não têm tido nenhumas dificuldades?

IS: Temos algumas, mas... ultrapassam-se. (E5, §540-550.)

3.6 Procedimentos de análise de dados

Toda a análise realizada teve sempre como referência um quadro teórico cujo estudo se iniciou no âmbito do projecto que deu origem a esta investigação. Durante o longo período que durou a análise empírica com frequência esta foi interrompida para retomar a pesquisa teórica, de modo a fundamentar e clarificar os resultados emergentes que, por sua vez, traziam novos contributos à análise. No final, os resultados empíricos levaram a um reajustamento do quadro teórico inicial, consubstanciado no quadro teórico que se apresenta no capítulo 2, no contexto do qual se elaboraram as conclusões do estudo apresentadas no capítulo 8. Pode considerar-se que a análise se realizou num permanente movimento de vai e vem indutivo e dedutivo entre dados empíricos e teoria.

A análise empírica iniciou-se ainda durante a intervenção didáctica, como resultado da sua observação directa. Como se referiu anteriormente a investigadora registou e comentou no Diário da Intervenção os incidentes que considerou relevantes, e recolheu e analisou todas as fichas de actividades que os alunos realizaram. Essa análise, ainda que pouco sistematizada, permitiu obter dados que influenciaram o desenrolar da intervenção didáctica em geral, e dos episódios de ensino em particular.

De uma forma estruturada a análise iniciou-se com o tratamento dos dados resultantes da aplicação do Teste de Geometria de van Hiele, pouco depois da conclusão da intervenção didáctica (Julho de 1993). Entre Outubro de 1993 e Junho de 1994 procedeu-se à análise dos sete episódios de ensino complementada com os outros dados referidos em §3.5.1. Essa análise levou a uma segunda análise dos resultados do Teste de Geometria de van Hiele (Outubro de 1994). Posteriormente (Janeiro de 1995) procedeu-se ainda a um reajustamento da análise empírica, à luz de novas perspectivas teóricas entretando aprofundadas.

3.6.1 Análise dos resultados do Teste de Geometria de van Hiele

Inicialmente, a aplicação do Teste de Geometria de van Hiele tinha como objectivos determinar globalmente o nível de van Hiele dos alunos da turma e avaliar possíveis alterações nesses níveis no final da intervenção didáctica, utilizando para o efeito um instrumento internacionalmente divulgado e experimentado (ainda que se lhe reconhecessem as limitações anteriormente referidas). Os resultados obtidos pelos alunos nas duas aplicações do teste foram sujeitos a um primeiro tratamento estatístico e revelaram-se a favor da hipótese de uma mudança nos níveis entre a primeira e a segunda aplicação do teste. Posteriormente sujeitaram-se as respostas nas duas aplicações do teste a um segundo tipo de tratamento estatístico que permitiu clarificar o sentido da mudança verificada. Os tratamentos estatísticos realizados e as conclusões derivadas descrevem-se em §4.4.1.

As análises do Teste de Geometria de van Hiele, principalmente a segunda, serviram ainda como reforço da análise qualitativa sobre o desenvolvimento de processos que se refere na secção seguinte.

3.6.2 Análise de conteúdo dos dados dos episódios de ensino

Para fazer a caracterização dos três tipos de processos que este estudo se propunha, trataram-se os dados dos sete episódios de ensino através da técnica de análise de conteúdo. A finalidade da análise de conteúdo é «efectuar inferências, com base numa lógica explicitada, sobre mensagens cujas características foram inventariadas e sistematizadas», como refere Vala (1986, p. 104). O mesmo autor identifica as seguintes condições de produção de uma análise de conteúdo: os dados de que dispõe o analista encontram-se dissociados da fonte e das condições em que foram produzidos; o analista coloca os dados num novo contexto, que constrói com base nos objectivos e no objecto da pesquisa; para proceder a inferências a partir dos dados, o analista recorre a um sistema de conceitos cuja articulação permite formular as regras da inferência.

A análise de conteúdo é uma técnica que incide sobre material não estruturado. Sempre que o investigador não se sente apto para antecipar todas as categorias ou formas de expressão que podem assumir as representações ou práticas dos sujeitos investigados pode recorrer à estratégia de, uma vez definido o quadro teórico, partir para um trabalho exploratório sobre o *corpus* da análise, o que lhe permite, através de sucessivos ensaios, estabelecer um plano de categorias que releva simultaneamente da sua problemática teórica e das características concretas do conjunto dos materiais produzidos, tendo em vista a pesquisa que o analista se propõe realizar (Vala, 1986).

A análise de conteúdo realizada neste estudo visou a formulação de categorias que permitissem caracterizar os processos desenvolvidos pelos alunos na realização, justificação e investigação de construções geométricas. Para o efeito não se dispunha à partida de um sistema de categorias pré-definido, elas emergiram e foram progressivamente refinadas ao longo das várias etapas que se descrevem a seguir.

Transcrição dos episódios de ensino

A própria investigadora transcreveu os episódios de ensino gravados em vídeo. Tentou ser o mais fiel possível e teve a preocupação de referir formas de comunicação não verbal utilizadas pelos alunos (por exemplo, os alunos referiam-se com frequência aos objectos no ecrã do computador apontando-os com o dedo ou com o rato). Incluiu também reproduções de algumas das construções geométricas trabalhadas, como se pode ver em muitas passagens dos episódios referidas nos capítulos 5, 6, 7.

A par da transcrição de cada episódio construiu-se um documento a que se deu o nome *Comentários En* ($1 \leq n \leq 7$), no qual se registaram ideias surgidas durante a transcrição, relevantes para a estruturação da análise. Reproduz-se a seguir o primeiro comentário sobre o episódio E4 (primeiro a ser transcrito).

Passagem do documento Comentários E4

Não parece haver uma consciência explícita das propriedades das figuras que são usadas para fazer as construções. LA tenta muito mais recordar-se de qual foi a última propriedade aprendida para dar uma resposta do que raciocinar sobre o que é que está por detrás da construção que fez. (E4 §§58-62.)

Depois de se obter uma transcrição integral de cada episódio de ensino fez--se a sua leitura a par de um segundo visionamento do vídeo, a fim de proceder aos reajustamentos necessários, e quando se considerou pronta a transcrição numeraram-se os seus parágrafos. (Nos comentários assinalaram-se os parágrafos que lhes tinham dado origem, como se vê no exemplo anterior.)

À medida que as transcrições avançavam os comentários começaram a traduzir principalmente ideias que se repetiam nos vários episódios, como por exemplo *a dificuldade que os alunos experimentavam em justificar os seus processos de construção*, que se revelou uma das noções chave nas conclusões deste estudo.

O Cabri-géomètre grava os passos dados na realização de uma construção geométrica — isto é, a *história* da construção (§2.7), e permite a sua leitura posterior. A investigadora transcreveu as histórias das construções trabalhadas em cada episódio, acompanhadas do desenho da respectiva gravação, e anexou--as ao respectivo episódio. (Muitas dessas histórias são citadas como exemplo nos capítulos 5, 6, 7.)

Em resumo, no fim desta obtiveram-se sete dossiers, um por cada episódio de ensino, que incluíam:

- a transcrição do episódio (numerada por parágrafos);
- a transcrição da história das construções geométricas trabalhadas e uma reprodução das figuras gravadas;
- o documento *Comentários En*, primeira lista não estruturada de comentários sobre esse episódio.

Resumos comentados (1ª etapa)

Os episódios de ensino E5, E6 e E7 realizaram-se em três dias consecutivos, algum tempo depois dos quatro primeiros episódios. Neles foram tratados alguns problemas comuns que levantaram questões pertinentes, como se deduziu na pré-análise realizada durante a transcrição. Começou-se, assim, por tratar estes três episódios.

Procedeu-se a uma «leitura flutuante» (Bardin, 1977, p. 75) do episódio E5. Este leitura foi «intuitiva, muito aberta a todas as ideias, reflexões, hipóteses, uma espécie de 'brain storming' individual». As ideias que surgiram foram anotadas ao lado dos parágrafos que as originaram. Por exemplo, na transcrição de E5 anotou-se a seguinte passagem:

Passagem do episódio de ensino E5

63. [Cl move o ponto *A*.]
64. Inv: Essa tangente fica sempre?
65. IS, PA, CL: A tocar na circunferência.
66. Inv: Sim, mas como é que vocês a construíram?
67. IS: É sempre perpendicular ao raio.

O primeiro comentário sobre a deslocação da figura construída é visual (N1?). A relação geométrica só "sai" depois de solicitada.

Depois da leitura flutuante anotada, fez-se um *resumo comentado* do episódio, por problema. Isto é, para cada um dos problemas trabalhado resumiu-se o processo de resolução e as interacções alunos/investigadora e alunos/alunos que considerou mais relevantes, incluindo citações das transcrições ou referências a elas. A seguir ao resumo de cada problema elaborou-se uma lista de comentários. Dessa lista constavam: anotações à margem na transcrição; os comentários do documento Comentários E5; dados registados no Diário da Intervenção; anotações nas fotocópias das fichas realizadas pelos alunos; outras observações resultantes desta etapa da análise dos dados.

Elaboraram-se depois os resumos comentados dos episódios de ensino E6 e E7, obedecendo à mesma planificação. Durante essa elaboração voltaram-se a visionar os vídeos com frequência, a fim de clarificar certos pormenores. Como exemplo apresenta-se o resumo e os comentários sobre uma das actividades trabalhadas no episódio E6.

Passagem do resumo comentado do episódio de ensino E6

1.2 Justificação da construção do triângulo isósceles (§33-99)

À pergunta da Inv. porque é que foram construir a mediatriz para resolver o problema anterior, TA começa por dar uma resposta pouco clara, mas que mostra que tem alguma ideia: (§37) *a mediatriz do segmento, logo vai dividir... Vamos ficar com dois segmentos iguais que é no ponto* [aponta *r* e depois *[TI]* e *[TA]* - Construção PEP9]. Mais adiante TA clarifica esta ideia. Continuando a conversar com a Inv. as alunas reconhecem que podem traçar várias perpendiculares ao segmento, mas só aquela [a mediatriz] é que lhes permite construir um triângulo isósceles (§41-46). A Inv. insiste em querer saber porquê e TA argumenta com a recordação do deslocamento que fez: *Se mexer no ponto ficam sempre os dois com a mesma... com a mesma distância* (§48).

Quando a Inv. formula a propriedade da mediatriz parece haver uma certa dificuldade em a acompanhar (§77-78). Na ficha escreveram: *é um triângulo isósceles porque a mediatriz continua a intersectar-se num ponto comum.* A Inv. tenta esclarecer o que queriam dizer com isto. MA reconhece que está mal redigido e insiste na ideia de que *a mediatriz se intersectava num ponto comum*, mas TA esclarece: *O ponto que a gente punha na mediatriz... Os segmentos do... eram sempre iguais... [aponta o ponto* T *e os segmentos* [TI] *e* [TA]]*... Era* *mais ou menos isso que a gente queria dizer*, e ri-se dando a entender que isso não se deduz bem do que escreveram, como confirma em seguida.

Comentários:

- Argumentam com a propriedade mal formulada e com a invariância através do deslocamento.
- Não fazem medições (nem do comprimento dos lados nem da amplitude dos ângulos).
- Parece haver uma intuição (reconhecimento visual, implícito??) de que os pontos equidistantes dos extremos de um segmento estão sobre a recta perpendicular que passa pelo seu ponto médio (comandos utilizados na construção) — a sua mediatriz, como acabam por reconhecer — mas há uma enorme dificuldade em verbalizar isso e ainda mais em traduzir por escrito.
- O diálogo com a Inv. parece clarificar as ideias das alunas e levá-las a fazer um esforço para explicitar as suas ideias e formulá-las mais correctamente.
- Utilizam terminologia matemática para formular as propriedades mas, por vezes, não se percebe o sentido com que o fazem.
- Com frequência, os alunos associam a mediatriz a um triângulo na posição preferida. Quer porque visualmente a propriedade anterior lhes é apresentada com esse aspecto, quer porque usam as mediatrizes dos lados do triângulo para determinar o circuncentro, construção que também fazem na disciplina de Desenho.
- TA parece dominar certos conceitos e relações aprendidas recentemente (propriedade da tangente a uma circunferência, apótema de uma corda).

Primeira identificação de *temas*

Na elaboração dos três primeiros resumos começaram a salientar-se determinados tipos de comentários, que deram origem a *temas*: «unidade[s] de significação que se liberta[m] de um texto analisado segundo certos critérios relativos à teoria que serve de guia à leitura» (Bardin, 1977, p. 104).

Procedeu-se então a uma segunda leitura dos três resumos e ao lado de cada comentário identificaram-se os temas em que se podia englobar esse comentário. No exemplo anterior, o primeiro comentário dizia respeito à *justificação com relações geométricas* e *utilização do modo de arrastamento*; o segundo à *validação das construções*; o terceiro à *justificação visual* e *dificuldades na justificação*, etc.

Resumos comentados (2ª etapa), segunda identificação de *temas*

Elaboraram-se em seguida os resumos comentados dos restantes episódios de ensino (E1-E4), em que se adoptou o mesmo procedimento descrito em cima. Na elaboração e anotação dos comentários a investigadora procurou estar atenta aos temas já definidos, mas também à emergência de novos temas.

Os sete resumos comentados constituíram o *corpus* de análise sobre o qual se trabalhou longamente. Analisaram-se verticalmente e horizontalmente, acompanhados de visionamentos parcelares dos vídeos, uma vez que nenhuma transcrição, por mais perfeita que seja, consegue captar na íntegra o dinamismo da realidade do trabalho dos alunos, em particular a sua interacção com o ambiente computacional. Aprofundou a pesquisa teórica. Reajustou os temas e a classificação dos comentários por tema. Apurou-se finalmente uma lista de temas relevantes.

Formação de categorias

Tendo em conta os objectivos específicos do estudo, agruparam-se os temas segundo caracteres semânticos comuns, e identificaram-se as categorias de análise. «As categorias são rubricas ou classes as quais reúnem um grupo de elementos (unidades de registo, no caso da análise de conteúdo) sob um título genérico, agrupamento esse efectuado em razão dos caracteres comuns destes elementos. O critério de categorização pode ser semântico (categorias temáticas) [...]» (Bardin, 1977, p. 117).

Criaram-se dossiers, cada um com o título de uma categoria, onde se incluíram os comentários relativos a essa categoria, por vezes acompanhados da passagem do episódio que os tinha originado. Com base nesses dossiers descreveram-se as características das categorias.

No quadro 3.3 apresentam-se os títulos das categorias, com indicação do objectivo específico do estudo a que se referem. Como se vê a última categoria abrange os três objectivos.

Quadro 3.3 - Categorias de análise

Construções	Aparência das construções Percursos de construção Construções resistentes
Justificações	Descrição das construções Tipos de justificação Obstáculos na justificação das construções
Investigações	Observação de relações invariantes explicitadas Orientação da investigação de construções Destaque dado às relações que variam Ultrapassagem de obstáculos visuais Apropriação de uma investigação aberta Formulação de conjecturas
Const+Just+Inv	Utilização da manipulação

Para caracterizar os processos de construção analisaram-se, numa primeira fase, as vinte e nove construções realizadas e/ou discutidas nos sete episódios de ensino, e, numa segunda fase, mais quarenta e seis construções que os alunos realizaram nas fichas Avaliação 1 e Avaliação 2A/B (última ficha). A observação das restantes construções gravadas em disquete num total de cento e noventa e três, algumas comentadas no Diário da Intervenção no final de cada aula, serviu ainda para confrontar os dados obtidos.

Apresentação da análise de dados

Considerou-se que a forma descritiva seria a mais adequada para apresentar os resultados da análise, na medida em que assim se transmitia melhor a riqueza do trabalho dos alunos. Organizaram-se três capítulos (5, 6, 7), cada um deles versando um dos objectivos específicos da investigação. Integrou-se no capítulo 7 a categoria *Utilização da manipulação.*

Para descrever cada categoria adoptou-se o seguinte esquema:

- breve introdução em que se apresentam as linhas mestras da categoria;
- descrição e interpretação das características da categoria, profusamente ilustradas com passagens dos episódios de ensino, das fichas ou das aulas;
- resumo das características da categoria.

Nas categorias referentes aos processos de realização e de justificação de construções tornou-se relevante descrever subcategorias, as quais emergiram também da análise realizada.

A pesquisa teórica a que se procedeu não revelou nenhum sistema de categorias adequado aos objectivos deste estudo, ainda que tenha influenciado amplamente a sua formação, com se salientou anteriormente.

3.6.3 Classificações nas fichas de avaliação; opinião dos alunos

As classificações obtidas pelos alunos nas duas fichas de Avaliação não foram objecto de qualquer tratamento, apenas são referidas bem como a opinião da professora ISA sobre as mesmas (§4.4.2).

A opinião dos alunos sobre a intervenção começou por ser analisada englobada no tratamento vertical dos episódios de ensino. Em cada episódio resumiram-se as principais ideias expressas pelos alunos participantes. Posteriormente esses sete resumos foram destacados dos resumos comentados dos episódios de ensino. Foram então sujeitos a uma análise horizontal, na qual se procuraram afinidades semânticas entre as ideias expressas pelos diversos alunos. Obtiveram-se assim dez grandes agrupamentos que se descrevem em §4.4.3. Deliberadamente não se utiliza o termo categoria para referir esses agrupamentos, uma vez que não resultaram de um procedimento sistemático e rigoroso. A opinião dos alunos constituiu apenas um produto subsidiário do estudo que não foi possível tratar de forma aprofundada no tempo disponível.

3.7 Limitações do estudo

No presente estudo, mais do que obter resultados generalizáveis, tinha-se interesse em compreender como se desenvolviam esses resultados em grupos contextualizados de participantes. Daí que se considerasse fundamental a presença da investigadora no terreno, não apenas como observadora exterior, mas interagindo com os participantes, desencadeando os processos que pretendia observar. Estava-se consciente de que essa presença activa traria inevitáveis enviesamentos à observação, mas acredita-se que estudos baseados na vivência dos fenómenos em primeira mão, permitindo neles interferir em tempo real, podem acrescentar contributos relevantes a outro tipo de informação decorrente de técnicas de observação "menos subjectivas".

Ainda que se continue a advogar a experiência de ensino como abordagem metodológica adequada para a investigação que se pretendia fazer, reconhece-se que algumas das opções práticas tomadas, derivadas das condições logísticas disponíveis, reflectem-se nas conclusões do estudo. Sobretudo o facto de se ter realizado um único episódio de ensino com cada grupo de alunos e fora da sala de aula, o que não respeita a natureza longitudinal das experiências de ensino. Esta foi uma primeira fase do trabalho, que levantou linhas de investigação a aprofundar, nomeadamente do ponto de vista da abordagem metodológica.

Capítulo 4 - Intervenção didáctica: *Cabri 9º 5 - exploração de construções em ambientes geométricos dinâmicos*

Neste capítulo descreve-se a intervenção didáctica que operacionalizou a experiência de ensino levada a cabo neste estudo. A intervenção didáctica fundamentou-se num modelo teórico de aprendizagem da Geometria com recurso a ambientes computacionais que se caracteriza na primeira secção. Na segunda secção descreve-se o trabalho realizado com uma turma de alunos do 9º ano de escolaridade, salientando-se em particular os conteúdos abordados e as condições de realização. Essa descrição é complementada com a análise, na terceira secção, de algumas questões gerais sobre a intervenção didáctica. A avaliação da intervenção didáctica, quarta secção, é feita numa perspectiva tripla: resultados do *Teste de Geometria de van Hiele*; resultados de duas fichas de avaliação realizadas no âmbito da intervenção didáctica; opinião dos dezassete alunos que participaram nos episódios de ensino sobre o trabalho que realizaram. Encerra-se o capítulo apresentando uma perspectiva global sobre a intervenção didáctica.

4.1 Construções em ambientes geométricos dinâmicos

A revisão de literatura feita no capítulo 2 deixa perceber a «crise do paradigma prevalente», e a existência de «pensamento que não se deixa abafar» nas formas de conceptualizar a Geometria escolar não superior. Na linha de Kuhn (1970) pode dizer-se que estão identificados «sinais da mudança» no paradigma de aprendizagem desta disciplina.

Um dos sinais de mudança tem a ver com a proposta de que os alunos podem aprender Geometria trabalhando como geómetras (Farrell, 1987). Por outras palavras, devem ser-lhes proporcionadas condições para explorar figuras geométricas e através dessa exploração descobrir as suas propriedades que serão estimulados a validar pessoal e socialmente. Yerushalmy, Chazan e Gordon (1990) apontam no sentido de os computadores, actuando como «amplificadores intelectuais e facilitadores da investigação», poderem auxiliar os alunos na colocação e na exploração de problemas, fazendo-o de modo semelhante ao utilizado pelos especialistas.

Com este pano de fundo construiu-se e implementou-se uma intervenção didáctica, a que se deu o nome *Cabri 9º 5 - Exploração de Construções em AGD*, que visou o ensino e aprendizagem da unidade Geometria no Plano no 9º ano de escolaridade e que utilizou como recurso o ambiente computacional *Cabri-géomètre*.

A intervenção didáctica desenrolou-se no quadro do modelo teórico que se apresenta a seguir.

4.1.1 Modelo orientador da intervenção didáctica

Os ambientes geométricos dinâmicos (AGD) permitem realizar construções utilizando explicitamente propriedades das figuras geométricas e possibilitam a variação dessas construções mantendo as relações e propriedades estabelecidas no algoritmo da construção (Laborde, 1993a). Às construções que mantêm invariantes através da manipulação directa propriedades e relações da figura que pretendem representar, convencionou-se chamar *construções resistentes* (§2.5.4; §2.7).

A intervenção didáctica *Cabri 9º 5* teve como ideia-chave a exploração de figuras geométricas pelos próprios alunos através da realização, justificação e investigação, no Cabri-géomètre, de construções resistentes.

Uma vez que normalmente os alunos não são peritos em colocar e resolver problemas, e podem mesmo não ter os conhecimentos geométricos necessários para elaborar argumentos dedutivos nem a capacidade de procurar respostas gerais, as actividades de construção podem ser um bom ponto de partida para iniciar os alunos na actividade característica dos geómetras, como referem Yerushalmy *et al.* (1990). Tendo isto em conta, na intervenção didáctica, começou por ser solicitado aos alunos a realização de actividades que, de forma mais ou menos indirecta, propunham a construção de figuras geométricas. Através de um processo heurístico, gerado pelo *feedback* proporcionado pelo arrastamento do rato, os alunos executavam a construção no ecrã do computador e corrigiam-na até obterem as características da figura pretendida. A regra de resistência ao arrastamento obrigava-os a imaginar um *processo de construção* (§2.7) que tivesse subjacente uma descrição da figura em termos das suas propriedades e não se baseasse apenas na sua aparência (Laborde, 1993a).

Se se limitar o trabalho num AGD à realização de construções, mesmo obedecendo à regra da resistência à manipulação, corre-se o risco de se reduzir a actividade geométrica ao desenvolvimento de algoritmos mecanizados (Battista e Clements, 1992). Para minimizar esse risco e conseguir que os alunos reconhecessem explicitamente propriedades das figuras e estabelecessem o seu relacionamento e ordenação lógica, solicitou-se que justificassem as construções, isto é, que explicitassem «razões por que a construção funciona[va]» (Sekigouchi, 1991, p. 118). Considerava-se, neste caso, a justificação como actividade matemática não só com sentido de convencer da validade da construção, mas sobretudo de esclarecer como tinha sido feita e de interessar em perceber porque é que se tinha sabido fazer, como refere Barbin (1993a). A justificação de uma construção aparecia assim como uma «prova que explica» (Chazan, 1993), tipo provas que este autor considera particularmente adequadas para introduzir os alunos na necessidade da prova matemática.

Nos AGD torna-se fácil pesquisar se uma propriedade descoberta num caso particular continua a verificar-se ou não noutros casos e inferir as respectivas condições de generalização (Schwartz, 1992). Na intervenção didáctica, para além da dedução de propriedades das figuras já conhecidas, propôs-se também a pesquisa de novas propriedades, induzidas a partir da observação da transformação das construções através da manipulação directa (Schumann, 1991). Solicitou-se aos alunos que investigassem algumas das construções que realizaram e que tentassem descobrir novas propriedades das figuras representadas. (Algumas investigação das construções partiram da curiosidade dos próprios alunos, o que se revelou a forma mais rica de o fazer.)

Tentou-se ainda que os alunos justificassem algumas das propriedades que descobriram, uma vez que, segundo Yerushalmy *et al.* (1990), os alunos percebem a necessidade de mostrar a veracidade dessas propriedades, ao contrário do que acontece com a maioria das propriedades e teoremas apresentados nos manuais.

No quadro didáctico que se acabou de descrever foram propostas actividades diversificadas que propiciaram «liberdade para pensar e experimentar ideias [num] movimento algo errático de vai e vem entre raciocínio indutivo e dedutivo» (Farrell, 1987, p. 245). As propriedades geométricas apareceram aos alunos como um recurso para a resolução de actividades específicas, e não como "mais outra coisa" que tinham de decorar e aplicar de forma rotineira, as novas propriedades servindo para resolver ou mesmo dar origem a novas actividades.

Com a realização dessas actividades esperava-se que, progressivamente, os alunos identificassem propriedades das figuras geométricas, as ordenassem e estabelecessem relações entre elas. Por outras palavras, considerou-se que a *exploração de construções* em AGD, considerada na perspectiva tripla: realização, justificação e investigação, poderia constituir uma estratégia de intervenção poderosa, no sentido de De Corte (1992), para o desenvolvimento do raciocínio geométrico no quadro do modelo de van Hiele.

Na figura 4.1 (página seguinte) esquematiza-se o modelo didáctico referido anteriormente.

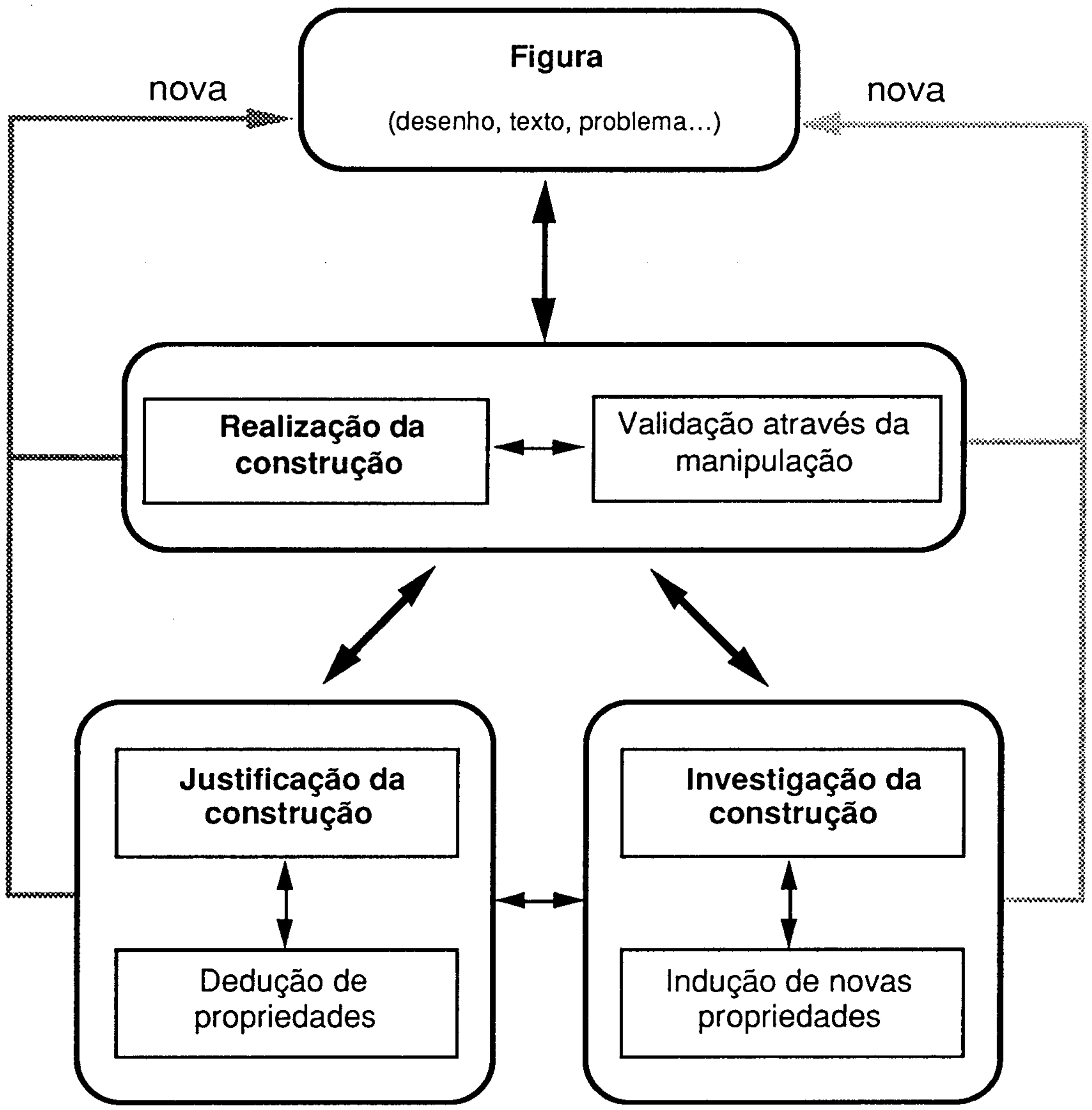


Fig. 4.1 - Esquema do modelo orientador da intervenção didáctica

4.2 Descrição da intervenção didáctica

O acordo estabelecido entre a professora da turma (ISA) e a investigadora previa a realização da intervenção didáctica no terceiro período do ano lectivo 1992/93. Assim, a professora ISA, que não possuía experiência de trabalho com computadores, tinha tempo para se familiarizar com o Cabri-géomètre. Permitia-lhe ainda leccionar os conteúdos curriculares considerados mais importantes para a transição dos alunos para o 10º ano de escolaridade, o que deixaria maior liberdade para a realização da intervenção didáctica.

Do ponto de vista da investigadora a realização da intervenção didáctica no 3º período permitia-lhe prepará-la convenientemente, em particular realizar um estágio de uma semana no LSD2-IMAG, a trabalhar com investigadores da equipa do projecto Cabri.

O facto de a escola ter antecipado o encerramento do ano lectivo em duas semanas fez com que na turma 9º 5 a Geometria do Plano fosse a última unidade leccionada. Verificou-se, no entanto, que foram leccionadas nessa turma as mesmas unidades que nas restantes turmas do 9º ano. (Para mais detalhes sobre os participantes na intervenção didáctica ver §3.4.1.)

A meio do segundo período realizou-se uma fase exploratória da intervenção didáctica que se destinou-se principalmente a testar condições de realização, e ocupou quatro aulas. A segunda fase da intervenção didáctica ocupou dezoito aulas ao longo de cinco semanas e meia, entre a última semana de Abril e a primeira semana de Junho.

Em ambas as fases da intervenção didáctica as actividades que os alunos realizaram com recurso ao computador colocaram a ênfase na exploração e domínio de conceitos geométricos já conhecidos. A descrição da fase exploratória e da segunda fase da intervenção didáctica que se faz nas duas subsecções seguintes clarifica esta ideia.

4.2.1 Fase exploratória

Objectivos

A fase exploratória resultou da conjugação dos interesses da investigadora, da professora ISA e dos alunos da turma.

Para não deixar todos os tópicos de Geometria para o final do ano lectivo e, também para responder às solicitações dos alunos — pouco convencidos a esperar mais um período lectivo para começar a trabalhar com os computadores — decidiu-se intercalar cinco aulas de revisão sobre Geometria, mais ou menos a meio do 2º período, entre as unidades Radicais e Problemas e Equações do 2º grau.

Do ponto de vista da investigação esta fase exploratória teve vários objectivos de natureza diferente. Assim, pretendeu-se:

- proporcionar aos alunos um primeiro contacto com o Cabri-géomètre;
- observar como os alunos trabalhavam em grupo;
- pré-testar algumas ideias sobre a construção de actividades para serem realizadas com o Cabri-géomètre;
- testar o funcionamento dos equipamentos informáticos.

Grupos de trabalho

Os vinte e oito alunos distribuíram-se pelos oito postos computacionais disponíveis na sala do CEM da escola, formando oito grupos de trabalho: 1--SCIP (quatro alunas), 2-Computer team (dois alunos e uma aluna), 3-TXM (três alunas), 4-JJDM (quatro alunos), 5-DAD (dois alunos e duas alunas), 6 (três alunos), 7-GENIOS (três alunos), 8-QWERTY (quatro alunos).

Versão do Cabri-géomètre utilizada

Na fase exploratória trabalhou-se com a versão 1.6 de *Le Géomètre*[1] que a escola possuía. Esta versão estava em francês e por isso a professora ISA solicitou a colaboração da professora de Francês da turma, que numa aula anterior à fase exploratória tratou os termos que iriam ser mais utilizados, principalmente os dos menus *Criação* e *Construção*. Esse trabalho foi feito a partir de uma ficha com as primitivas do programa em francês e indicação em português do que cada uma fazia. Um exemplar dessa ficha foi distribuído a cada um dos oito grupos de alunos.

Fichas de trabalho

A investigadora preparou três fichas de trabalho, para serem realizadas uma por aula, cada uma das quais propunha a construção de uma figura geométrica e colocava questões sobre essa figura (fichas 1-3, Anexo 1). A cada grupo distribuiu dois exemplares da ficha, um dos quais deveria ser entregue à investigadora, depois de preenchido, no final da aula (o outro exemplar servia como rascunho ou para os alunos registarem notas que entendessem). A investigadora, depois de fotocopiar essas oito fichas, corrigia-as e devolvia-as aos grupos. Na sub secção seguinte descrevem-se essas fichas.

Conteúdos abordados

O Teste de Geometria de van Hiele que os alunos realizaram em Janeiro de 1992, antes da fase exploratória (§4.4.1), revelou deficiências nos conhecimentos geométricos da maioria dos alunos da turma, em particular, as suas representações sobre triângulos e quadriláteros revelaram-se muito limitadas[2]. Assim, considerou-se que a construção e exploração do triângulo rectângulo e do rectângulo seriam bons temas para tratar na fase exploratória. Na aula que precedeu as aulas com o Cabri-géomètre a professora ISA reviu figuras semelhantes e os casos de semelhança de triângulos.

Apresentação do Cabri-géomètre

Para apresentar o Cabri-géomètre a investigadora projectou o ecrã do computador recorrendo a uma placa de cristais líquidos. Mostrou a toda a

---

[1] Ver §2.4.2.

[2] Durante a intervenção muitos alunos justificaram a sua falta de conhecimentos geométricos pelo facto de ser a primeira vez que «estavam a dar Geometria a sério», pelo menos desde a 4ª Classe.

turma como podiam construir, marcar um ângulo e medir a sua amplitude, e como obter um segundo ângulo de lados paralelos aos do primeiro. Deslocou os pontos da construção e mostrou as relações entre os dois ângulos, abordadas na aula anterior (figura 4.2). Mostrou ainda como gravar a construção numa disquete atribuíndo-lhe um nome. No resto dessa aula os alunos exploraram o programa à sua vontade. Alguns grupos tentaram repetir a construção feita pela investigadora.

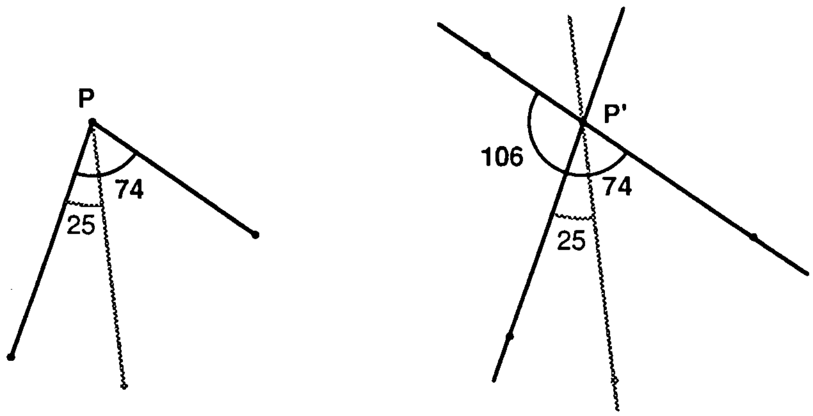
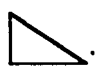


Fig. 4.2 - Construção de um ângulo P e de outro P' com os lados paralelos. Dois ângulos de lados paralelos são geometricamente iguais ou são suplementares.

Triângulo rectângulo

Popularizado pelo Teorema de Pitágoras, o triângulo rectângulo talvez seja uma das figuras geométricas mais familiares aos alunos. Constituiu pois o tema da ficha 1, que os alunos realizaram na terceira aula, uma vez que se tratava de uma construção simples que explorava conceitos básicos de Geometria e do Cabri-géomètre. Logo nessa ficha apareceu explicitamente a necessidade de verificar se a construção conservava as características pretendidas através do arrastamento. Primeiro pedia-se que criassem um triângulo, marcassem os ângulos e medissem as amplitudes. Em seguida pedia-se que deslocassem um dos seus vértices até obter um triângulo rectângulo, continuassem a deslocar os vértices e observassem que o triângulo não conservava sempre essa característica. Na segunda actividade pedia-se que definissem triângulo rectângulo e que construíssem um triângulo que permanecesse rectângulo quando se deslocavam os vértices de base. Neste caso recomendava-se que marcassem o ângulo recto e verificassem se o ângulo permanecia com essa caraterística através da manipulação. Por último pedia-se que descrevessem a construção do triângulo rectângulo.

Esta ficha tinha ainda como objectivo implícito levar os alunos a generalizar, através da manipulação, a representação preferida do triângulo rectângulo: . De facto os alunos observaram triângulos rectângulos em muitas posições. Quatro grupos gravaram a construção na posição anterior, mas outros quatro gravaram em posiçõs diferentes, como mostra a figura 4.3.

Muito provavelmente os vários triângulos rectângulos desenhados na ficha 1 influenciaram as gravações dos alunos.

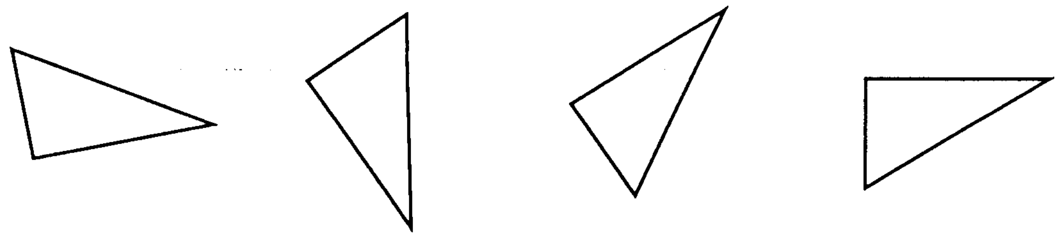


Fig. 4.3 - Triâgulos rectângulos gravados por quatro grupos - ficha 1.

Rectângulo

O tema da ficha 2 era o rectângulo. Nela pedia-se a construção de uma figura que conservasse essa característica através da manipulação, a medição do comprimento dos lados e da amplitude dos ângulos, e a descrição da sua construção. Perguntava-se ainda se conseguiam obter um quadrado a partir do rectângulo que tinham construído e como.

Os alunos começaram esta ficha na quarta aula mas só a acabaram na aula seguinte, embora alguns grupos tivessem refinado a sua construção, apagando as rectas auxiliares e colorindo os lados e os ângulos do rectângulo (dois dos cinco grupos que o podiam fazer). Neste caso apareceram gravados os rectângulos representados na figura 4.4, embora seis dos oito grupos tivessem escolhido um dos dois primeiros (A ou B).

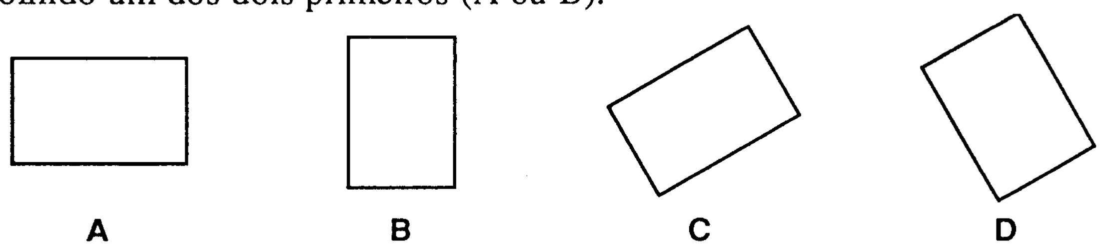


Fig. 4.4 - Rectângulos gravados pelos alunos na ficha 2: A - três grupos; B - três grupos; C - um grupo; D - um grupo.

Sobre a transformação do rectângulo num quadrado os oito grupos disseram que era possível, bastando deslocar os vértices do rectângulo de modo a ficarem todos os segmentos com a mesma medida. Esta actividade pretendia discutir o facto de um quadrado ser um rectângulo particular, uma das questões do Teste de Geometria de van Hiele que levantou polémica na turma.

Triângulos de lados paralelos

Para a última aula da fase exploratória preparou-se a ficha 3, que tinha como objectivo levar os alunos a verificar que dois triângulos de lados paralelos têm os ângulos geometricamente iguais mas não são necessariamente iguais, embora sejam semelhantes. Retomava-se assim o tema da primeira aula.

As dificuldades que os grupos experimentaram na realização das fichas 1 e 2 fizeram-nos atrasar e apenas três grupos resolveram a primeira actividade da ficha 3 — criar um triângulo e construir outro de lados paralelos ao primeiro. Um único grupo marcou os ângulos nos dois triângulos, mediu a sua amplitude e observou que eram sempre geometricamente iguais.

Menus do Cabri-géomètre utilizados

Como se explica em §2.4.2 o Cabri-géomètre permite tornar inacessível qualquer item dos seus menus, de modo que a respectiva gestão se faça de acordo com as necessidades específicas de cada sessão de trabalho. Assim, na fase exploratória da intervenção a investigadora preparou o *Menu0* em que as primitivas *Cercle* (e *Centre d'un cercle*) e *Droite* não estavam disponíveis, devido à dificuldade em criar esses objectos para quem trabalha com o rato pela primeira vez, como era o caso da maioria dos alunos da turma, e à confusão que no início poderia provocar a possibilidade de construir rectas e circunferências por dois processos diferentes.

Para ajudar os alunos a descrever os seus processos de construção a investigadora quis utilizar a primitiva *Historique*. Como isso bloqueava os sistemas com frequência nos postos computacionais 1-5, preparou o *Menu1* em que também retirou essa primitiva, para ser utilizado nesses postos.

4.2.2 Intervenção didáctica - 2ª fase

A unidade Geometria do Plano foi programada em conjunto com a professora ISA. Acordou-se que os novos conceitos seriam leccionados pela professora ISA, como fazia habitualmente. A sua aplicação seria feita por meio de um conjunto de fichas de trabalho que propunham a construção e exploração de figuras geométricas, utilizando o Cabri-géomètre. A meio e no final da intervenção didáctica os alunos realizariam duas fichas de Avaliação, cuja classifcação seria tida em conta na classificação final dos alunos.

Esta segunda fase da intervenção didáctica ocupou um total de dezoito aulas, que alternaram entre realização de actividades na sala do CEM (dez aulas) e discussão das fichas de trabalho e apresentação de novos conceitos na sala normal (oito aulas). Em média duas das quatro aulas semanais foram na sala do CEM.

As aulas na sala do CEM forma orientadas pela investigadora, bem como as discussões das fichas de trabalho. Problemas de ordem familiar impediram a professor ISA de se envolver nessas actividades como inicialmente estava previsto, e não pôde mesmo comparecer em algumas aulas. Em duas dessas aulas, na sala do CEM, a maioria dos alunos (dezoito em vinte e oito) ficou a trabalhar com a investigadora. No entanto quando esta quis discutir uma ficha na sala normal sem a presença da professora ISA os alunos manifestaram muito pouca disponibilidade para isso e a investigadora desistiu de o fazer.

Grupos de trabalho

Para trabalhar nos computadores os alunos mantiveram os mesmos grupos da fase exploratória. Mas desta vez trocaram de postos computacionais, isto é os grupos 1-SCIP, 2-Computer team, 3-TXM, 4-JJDM ocuparam os postos 8, 7, 6 e 5, respectivamente e os grupos 5-DAD, 6, 7-GENIOS, 8-QWERTY ocuparam os postos 4, 3, 2, 1 respectivamente. Esta troca, que voltou a repetir-se mais duas vezes, teve a ver com o facto de os postos computacionais 5-8 proporcionarem melhores condições de trabalho. Em particular permitiam a utilização de cores e da primitiva *História*.

Nas aulas realizadas na sua sala normal os alunos mantiveram os lugares habituais, onde trabalhavam aos pares na resolução de exercícios e problemas sempre que era caso disso.

Versões do Cabri-géomètre utilizadas

Nesta fase da intervenção didáctica trabalhou-se com a versão 1.7 do Cabri--géomètre, traduzida para português pela investigadora, como se referiu anteriormente (ver §4.2), nos postos computacionais 4-8. As características técnicas dos postos computacionais 1, 2 e 3 não permitiram instalar nenhuma das versões 1.7 do Cabri-géomètre, pelo que se continuou a trabalhar com a versão anterior (1.6) em francês. Poderia pensar-se que a alternância francês/português no nome das primitivas causaria confusão aos alunos, mas tal não aconteceu, não só pela grande semelhança dos nomes nas duas línguas, mas porque os alunos associavam as primitivas à aparência dos objectos que permitiam construir. Além disso todos os grupos preferiam trabalhar nos computadores com melhores condições e assim aceitaram o sistema de rotatividade (todos os grupos menos um que considerou «mal empregado para as raparigas» um posto com melhores condições).

Fichas de trabalho

A investigadora continuou a preparar uma ficha de trabalho para cada uma das aulas com o Cabri-géomètre, como tinha feito na fase exploratória. Entregava dois exemplares da ficha a cada grupo e recolhia um preenchido. Essas fichas, depois de fotocopiadas, eram corrigidas, devolvidas ao grupo e discutidas no início das aulas sem os computadores. Na fase final da intervenção didáctica quando os alunos começaram a estar mais autónomos e a não depender tanto da investigadora para resolver as actividades, e se começou a notar um certo atraso no cumprimento dos conteúdos curriculares, as fichas deixaram de ser discutidas com toda a turma e a investigadora analisava com cada grupo as suas dificuldades principais, na aula seguinte na sala do CEM.

Para preparar as fichas 4-13, Avaliação 1 e Avaliação 2A/B (Anexo 1) utilizaram-se os materiais de apoio seguintes:

- *Geometry problems and projects: Triangles, Quadrilaterals, Circles*, de autoria de M. Yerushalmy e R. Houde (1988). Conjunto de problemas e projectos em Geometria para serem explorados com os programas Geometric Supposer: Triangles, Quadrilaterals, Circles, incluindo fichas de trabalho para alunos e sugestões metodológicas para o professor.
- Versão de trabalho policopiada de *Cabri-classe, Apprendre la géomètrie avec un logiciel*, da responsabilidade de B. Capponi (1993b). Conjunto de problemas de Geometria para serem explorados com o Cabri-géomètre, incluindo fichas de trabalho para alunos e sugestões metodológicas para o professor.
- *Um Caderno informático para descobrir a Geometria*, edição policopiada do Pólo do Projecto MINERVA da FCT/UNL (1992). Conjunto de fichas de trabalho para alunos, realizadas por professores que frequentaram cursos de formação promovidos por esse Pólo do P. MINERVA.
- Conjunto de fichas de trabalho para alunos, cedidas pela Dr.ª Palmira Barroso e Dr.ª Ana Teresa Mateus, da Escola Secundária do Laranjeiro Nº 1, que no ano lectivo 1991/92 leccionaram numa turma do 9º ano de escolaridade a unidade Geometria do plano, com recurso ao Cabri-géomètre.
- Conjunto de fichas de trabalho para alunos do 9º ano de escolaridade, cedidas pela Dr.ª Helena Paradinha, realizadas na Escola Secundária da Falagueira no ano lectivo 1991/92.

Conteúdos abordados

Descreve-se em seguida a ordem e a forma como foram abordados nesta intervenção didáctica os conteúdos que no ano lectivo 1992/93 integravam o programa do 9º ano de escolaridade na unidade Geometria do plano (currículo anterior à Nova Reforma).

Relações entre lados e ângulos de triângulos

Relações entre lados e ângulos dos triângulos foi o primeiro conteúdo abordado, na medida que permitia continuar e aprofundar os temas "triângulos" e "quadriláteros" iniciados na fase exploratória. Na primeira aula os alunos realizaram a ficha 4, que tinha como objectivo mostrar que um quadrilátero pode ter os quatro lados geometricamente iguais sem que os ângulos sejam todos geometricamente iguais, mas que num triângulo isso não acontece. Na aula seguinte realizaram a ficha 5, que pretendia mostrar que um triângulo com dois lados geometricamente iguais também tem dois ângulos geometricamente iguais.

Na terceira aula discutiram-se as fichas 4 e 5 e fez-se uma sistematização sobre a classificação de triângulos. Os alunos resolveram ainda a ficha 6, sem computador, que permitiu rever as propriedades mais usuais dos triângulos. A construção do triângulo isósceles dado um dos lados iguais, proposta na ficha 5, e a actividade da ficha 6 apontavam já para o estudo da circunferência, ângulos e cordas, tema abordado a seguir.

Circunferência: ângulos ao centro, arcos e cordas; ângulos inscritos

Na ficha 7 (quarta aula) os alunos estabeleceram a relação: *numa circunferência, a cordas geometricamente iguais correspondem ângulos ao centro geometricamente iguais*, a partir da divisão de uma circunferência em seis partes geometricamente iguais, e com base nas relações de igualdade entre lados e ângulos de um triângulo estudadas anteriormente. Na quinta aula a professora ISA utilizou um conjunto de transparências para introduzir os conceitos de ângulo ao centro, corda e arco correspondentes e sistematizou a respectiva relação, já abordada implicitamente na ficha 7. Apresentou ainda o conceito de ângulo inscrito e deduziu a relação entre a sua amplitude e a do ângulo ao centro correspondente, no caso em que um dos lados do ângulo contém um diâmetro da circunferência, chamando a atenção dos alunos para a actividade da ficha 6, em que essa situação tinha sido tratada. Na sexta aula os alunos voltaram à sala do CEM para resolver a ficha Avaliação 1. Esta ficha propunha a descoberta por via indutiva de que um ângulo inscrito numa semi circunferência é sempre recto, a justificação dessa propriedade e a sua aplicação na justificação da construção de um quadrado inscrito numa circunferência. A ficha 8, sobre ângulos ao centro e ângulos inscritos, foi realizada em casa. Na sétima aula discutiram-se essa ficha e a ficha Avaliação 1 e sistematizaram-se as propriedades mais usuais dos ângulos inscritos.

Mediatriz de um segmento de recta, circunferência circunscrita a um triângulo

O conceito de mediatriz de um segmento de recta tinha sido abordado pela professora ISA numa aula ainda antes da fase exploratória, e também já tinha sido tratado na disciplina de Desenho. Assim na ficha 9 (oitava aula) pretendia--se levar os alunos a descobrir, também por via indutiva, a propriedade da equidistância dos pontos da mediatriz de um segmento de recta aos seus extremos. Propunha-se para isso a observação da variação da medida do comprimento dos segmentos que uniam um ponto da mediatriz com os seus extremos quando esse ponto se deslocava sobre a mediatriz. Pretendia-se ainda que aplicassem essa propriedade para justificar a construção da circunferência circunscrita a um triângulo. Esta ficha foi discutida na aula seguinte (nona). A investigadora preparou uma ficha 9A que distribuiu a cada um dos alunos recomendando que deveriam registar nela as conclusões sobre a propriedade da mediatriz de um segmento de recta, tendo em vista a sua aplicação na resolução de diversos problemas.

Um dos grupos (TXM) não resolveu a ficha 9 devido a uma avaria no seu posto computacional, mas propôs-se resolvê-la noutra ocasião. Como esse grupo assistiu à discussão da ficha 9 a investigadora preparou uma nova ficha sobre *mediatriz* para as alunas resolverem (ficha 9B).

Propriedades geométricas em circunferências

A ficha 10 (décima aula) tinha como objectivo a aplicação da propriedade da mediatriz, tratada na ficha 9, na realização de duas actividades que envolviam circunferências. Implicitamente esta ficha fazia uso da propriedade da *mediatriz de uma corda de uma circunferência passar pelo centro da circunferência*. Na aula seguinte a professora ISA sistematizou essa e outras «propriedades geométricas em circunferências» referidas no manual que os alunos utilizavam (Neves e Brito, 1991, pp. 68-72). A ficha 11 (décima segunda aula) aplicava algumas dessas propriedades. A actividade 1 propunha a construção de um trapézio isósceles inscrito numa circunferência e o cálculo das amplitudes dos arcos em que este dividia a circunferência, a partir da medição das amplitudes dos seus ângulos internos. A actividade 2 pedia a construção da tangente a uma circunferência num dos seus pontos. A actividade 3 propunha a construção de um quadrado com os lados tangentes a uma circunferência, a explicitação da relação entre o lado do quadrado e o raio da circunferência e o cálculo da área do quadrado e do círculo, a partir da medição do comprimento dos segmentos adequados.

Por essa altura os alunos começaram a manifestar-se um pouco saturados das actividades de construção e a investigadora sentiu a necessidade de diversificar as actividades das fichas. Problemas de cálculo de áreas de figuras pareceram uma boa alternativa pois permitiam rever esse tema e utilizar a medição de comprimentos do Cabri-géomètre até então pouco explorada.

Ângulos com o vértice na circunferência e ângulos excêntricos

Na décima terceira aula a professora ISA introduziu os conceitos de ângulo de um segmento e de ângulo ex-inscrito e os alunos resolveram alguns exercícios do livro de texto sobre ângulos desse tipo. Na décima quinta os alunos voltaram a resolver exercícios do livro de texto, desta vez sobre ângulos com o vértice no interior e no exterior da circunferência (entre outros).

Distância de um ponto a uma recta. Bissectriz de um ângulo. Incentro de um triângulo

A ficha 12 (décima quarta aula) tinha vários objectivos interligados pela noção de distância de um ponto a uma recta. A actividade 1 propunha uma investigação simples para mostrar porque é que a distância de um ponto a uma recta deveria ser medida sobre a perpendicular tirada do ponto para a recta. Na actividade 2 pretendia-se que os alunos aplicassem a noção de distância de um ponto a uma recta para determinar a altura de um dado triângulo e calcular a sua área. A actividade 3 tinha como objectivo a descoberta indutiva da propriedade da equidistância dos pontos da bissectriz de um ângulo aos seus lados. Propunha-se para isso a construção dos segmentos que representavam a distância de um ponto da bissectriz aos lados do ângulo e a observação do que acontecia à medida do comprimento dos segmentos quando se deslocava o ponto sobre a bissectriz.

O tema da ficha 13 (décima sexta aula) era o incentro de um triângulo. Na primeira actividade, a partir de uma circunferência e respectivo centro pedia-se que construíssem um triângulo com os lados tangentes à circunferência e as bissectrizes dos seus três ângulos internos. Rodando sobre a circunferência os pontos de tangência dos lados do triângulo os alunos induziam a propriedade de que as bissectrizes são concorrentes no centro da circunferência. Deste modo invertia-se a construção que habitualmente se faz sobre este tema. Na segunda actividade os alunos deveriam aplicar essa propriedade para resolver o problema proposto. A divisão dos temas nas aulas 13-16 ficou a dever-se à necessidade de cumprir o currículo e ao facto de a partir da ficha de Avaliação 1, a sala do CEM só ter estado disponível em dois dias fixos da semana.

Avaliação final

Na décima sétima aula os alunos resolveram exercícios do manual adoptado sobre os conteúdos de Geometria leccionados. Na décima oitava aula resolveram a ficha Avaliação 2. A investigadora e a professora ISA concordaram que para realizar esta avaliação seria preferível os alunos formarem pares, em vez dos grupos anteriores. Os alunos dividiram-se em catorze pares, como quiseram mas combinados antecipadamente, e sete pares resolveram a ficha num dia e os outros sete no dia seguinte, dado que a sala do CEM apenas dispunha de oito postos computacionais. Para essa avaliação os alunos foram aconselhados a levar como material de consulta todas as fichas que tinham feito anteriormente e também uma calculadora. A investigadora preparou duas fichas diferentes (Avaliação 2A e Avaliação 2B). Cinco pares que melhores desempenhos tinham demonstrado ao longo da intervenção didáctica realizaram a ficha A e os outros a ficha B. As duas fichas propunham a construção de figuras familiares mas que ainda não tinham sido realizadas (papagaio, octógono regular, triângulo rectângulo com determinadas restrições, circunferência inscrita no triângulo), a justificação de uma dessas construções e a descrição de outra, a marcação de ângulos e medição da sua amplitude, e o cálculo de uma área (da superfície compreendida entre o triângulo e a circunferência nele inscrita).

O quadro 4.1 resume as aulas realizadas, (SN - sala normal.)

Quadro 4.1 - Resumo das aulas realizadas

Nº	Data	Local	Sumário
1	09.03.93	SN	Figuras semelhantes. Semelhança de triângulos
2	11.03.93	CEM	Apresentação do Cabri-géomètre; exploração livre
3	12.03.93	CEM	Triângulo rectângulo (ficha 1)
4	15.03.93	CEM	Rectângulo (ficha 2)
5	16.03.93	CEM	Rectângulo (ficha 2). Triângulos de lados paralelos (ficha 3)
1	23.04.93	CEM	Triângulos e quadriláteros com todos os lados iguais (ficha 4)
2	26.04.93	CEM	Triângulos com dois lados iguais (ficha 5)
3	27.04.93	SN	Classificação e propriedades dos triângulos (ficha 6)
4	29.04.93	CEM	Hexágonos e triângulos inscritos em circunferências (ficha 7)
5	03.05.93	SN	Ângulo ao centro, corda e arco correspondente. Ângulo inscrito
6	04.05.93	CEM	Avaliação 1
7	10.05.93	SN	Propriedades do ângulo inscrito (ficha 8)
8	13.05.93	CEM	Propriedades da mediatriz. Circunferência circunscrita (ficha 9)
9	14.05.93	SN	Propriedades da mediatriz
10	17.05.93	CEM	Aplicações da mediatriz e circunferência (ficha 10)
11	18.05.93	SN	Propriedades geométricas em circunferências
12	20.05.93	CEM	Aplicações das propriedades das circunferências (ficha 11)
13	21.05.93	SN	Ângulos com o vértice na circunferência
14	24.05.93	CEM	Dist. de um ponto a uma recta. Bissect. de um ângulo (ficha 12)
15	25.05.93	SN	Ângulos excêntricos da circunferência
16	27.05.93	CEM	Incentro de um triângulo (ficha 13)
17	28.05.93	SN	Revisões
18A	31.05.93	CEM	Avaliação 2 (metade da turma)
18B	01.06.93	CEM	Avaliação 2 (metade da turma)

Menus do Cabri-géomètre utilizados

Até à ficha Avaliação 1 inclusive os alunos trabalharam com os menus preparados para a fase exploratória, em que as primitivas *Circunferência* (e *Centro de uma circ.*) e *Recta* não estavam disponíveis.

Posteriormente essas primitivas foram introduzidas para resolver problemas específicos. A segunda actividade da ficha 10 solicitava a construção do centro de uma circunferência de base. Assim, preparou-se para esta ficha um *Menu3* em que a primitiva *Circunferência* estava disponível, mas não a primitiva *Centro de uma circ.* (nem a primitiva *Recta*).

A primitiva *Recta* apareceu especificamente na ficha 12. Na actividade 1 pretendia-se que os alunos descobrissem como determinar a distância de um ponto a uma recta. Para tal sugeria-se que construíssem um ponto, uma recta de base, através da primitiva *Recta*, dois pontos sobre essa recta e o segmento que se obtinha unindo o ponto exterior e um dos pontos sobre a recta (o segundo ponto sobre a recta era necessário para marcar o ângulo formado pelo segmento e pela recta). Assim os pontos da recta só se deslocavam sobre ela, e a recta mantinha-se fixa. Pelo contrário, se a construção tivesse sido feita a partir de uma recta definida por dois pontos, como esses pontos eram livres a posição da recta iria variar quando se deslocava um deles, o que dificultaria a investigação que se pretendia fazer.

Para a ficha 9 preperou-se um *Menu2* em que a primitiva *Mediatriz* não estava disponível, uma vez que a primeira actividade pressupunha que os alunos descobrissem um processo de fazer a sua construção.

4.3 Questões que se evidenciaram na intervenção didáctica

A forma como os alunos resolveram as actividades propostas durante a intervenção didáctica está amplamente comentada nos capítulos seguintes, organizados de acordo com os três objectivos do estudo. No entanto, a reflexão sobre a intervenção didáctica na sua globalidade evidenciou algumas questões que influenciaram a forma como decorreu, que extravasam os objectivos específicos do estudo. Essas questões, que se analisam nas subsecções seguintes, têm a ver com: a inexperiência dos alunos do 9º 5 na utilização de computadores; a atitude dos alunos na resolução das actividades; a utilização do Cabri-géomètre; outras opções que se poderia ter tomado.

4.3.1 Inexperiência na utilização do computador

As dificuldades iniciais destes alunos na utilização do Cabri-géomètre ultrapassaram as expectativas da investigadora, que em anos anteriores tinha acompanhado o trabalho de outras turmas onde a iniciação fora mais fácil.

Para alguns o controlo do rato foi bastante difícil até ao fim da intervenção didáctica, pelo que preferiam deixar que outros colegas do grupo o manipulassem. Para muitos alunos também foi difícil aprender a gravar as suas construções, principalmente porque o deviam fazer numa disquete só para esse efeito, que estava numa unidade de discos diferente daquela onde estava o programa.

Essas dificuldades podem ter resultado da falta de experiência que aqueles alunos tinham no trabalho com um computador. Segundo dados de um inquérito sobre a atitude face ao computador que os alunos realizaram antes da fase exploratória da intervenção didáctica, a maioria dos alunos da turma (51,9%) não tinha computador em casa. 64,2% desses alunos também nunca tinha utilizado o computador na escola (33,3% dos alunos da turma) e os restantes 35,7% apenas o tinha feito poucas vezes (18,5% dos alunos da turma). 69,2% dos alunos que declaram ter computador em casa, afirmaram que possuíam computadores Spectrum de cassetes (9,6% dos alunos da turma). Esse inquérito revelou ainda que as principais utilizações que os alunos davam ao computador eram os jogos (85,2%) e o processamento de texto (40,7%).

4.3.2 Atitudes dos alunos durante a realização das actividades

Ao longo da intervenção didáctica os alunos evidenciaram atitudes variadas, diferentes das que mantinham nas aulas habituais. Foi nítido que as aulas realizadas na sala do CEM despertaram muito maior interesse e que uma larga maioria de alunos se empenhou na realização das actividades propostas. Facto confirmado pelas opiniões dos alunos que se transcrevem em §4.4.3 e também pela por declarações da professora ISA e de alguns encarregados de educação com quem a investigadora teve oportunidade de conversar informalmente.

As atitudes reveladas seriam merecedoras de uma análise aprofundada, mas que está fora do âmbito do presente estudo. Ainda assim considera-se pertinente fazer uma breve referência a três delas: a aquisição progressiva de autonomia dos alunos na realização das actividades; preferência pelas actividades de construção; forma como trabalharam em grupo.

Autonomia progressiva

Durante a fase exploratória e no início da segunda fase da intervenção didáctica os alunos eram muito pouco autónomos na resolução das fichas. Com frequência atrapalhavam-se num pormenor qualquer e não avançavam enquanto a investigadora ou a professora ISA não os iam ajudar, tornando-se difícil, mesmo para duas pessoas, responder a todas as solicitações. Progressivamente essa situação alterou-se. No início da aula em que realizaram a ficha Avaliação 1 a investigadora avisou que só tiraria dúvidas sobre questões técnicas e que tudo o resto teria de ser resolvido pelos próprios alunos e a professora ISA comentou que seria conveniente concluírem a ficha. Isso terá feito com que os alunos se esforçassem mais para resolver por si próprios os problemas com que se deparavam, para o que adoptaram a táctica de realizar primeiro todas as construções e só no fim responder às questões colocadas sobre essas construções, no tempo que sobrava.

Na realização das fichas seguintes a autonomia dos grupos acentuou-se, e muitos passaram a concluir as fichas no tempo previsto. Ainda assim, o hábito de chamar a investigadora ou a professora permaneceu até ao fim da intervenção como uma forma privilegiada de ultrapassar dificuldades.

Preferência dos alunos pelas actividades de construção

As actividades de construção foram as que mais agradaram aos alunos. Quando resolviam uma ficha de trabalho começavam por fazer todas as construções e só no fim respondiam às questões sobre justificações, já um pouco à pressa, e sem muito empenho, mesmo com ajuda da professora. As questões sobre investigação de construções despertaram a curiosidade de alguns alunos, mas foi necessário apoiá-los para que observassem a manipulação de uma construção no sentido que um geómetra faz, isto é, prestando atenção à permanência ou não das suas propriedades e relações.

A atitude do grupo DAD, que se relata a seguir, típica da da maioria dos grupos, ilustra de uma forma global a atitude dos alunos.

Passagem da ficha Avaliação 1

O vídeo gravado durante a realização desta ficha pelo grupo DAD mostra que na questão 1 — construir uma circunferência dado um diâmetro e um ângulo com o vértice sobre a circunferência e cujos lados passavam pelas extremidades do diâmetro — realizaram sem dificuldade a construção e observaram que o ângulo permanecia sempre recto. Mas quando se perguntava a seguir se eram capazes de justificar a invariância observada, os alunos consideraram quase imediatamente que não eram capazes e passaram à questão seguinte. Desta vez procuraram em conjunto e durante bastante tempo um processo para construir um quadrado inscrito numa circunferência (figura 4.5). Encarregaram depois um dos elementos do grupo de justificar essa construção, porque numa ficha anterior tinha dado uma justificação «muito bem» e os outros três elementos desligaram-se da tarefa. Como esse colega não conseguiu responder, pediram ajuda à professora ISA. Esta tentou mostrar-lhes que tendo em conta a construção feita (figura 4.5), cada um dos ângulos do quadrado era um ângulo inscrito numa semi circunferência, logo era um ângulo recto.

Construção HAV1.2[3]
Ponto A
Ponto B
Segmento definido por 2 pontos $[AB]$ (invisível)
Pt. médio M (invisível)
Circ. definida por 2 pontos
Recta perpendicular r
Intersecção recta-circ. C, D
4 × Segmento definido por 2 pontos $[DA]$, $[AC]$, $[CB]$, $[BD]$
4 × Ângulo definido por 3 pontos

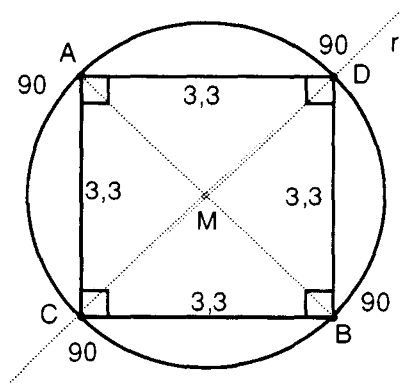


Fig. 4.5 - *História* da construção de um quadrado inscrito numa circunferência - grupo DAD

As respostas escritas na ficha mostram que o aluno repetiu os argumentos da professora aparentemente sem perceber o que estava a fazer e completou a sua resposta descrevendo a construção, de forma confusa:

2.3 Porque é que os lados ficam iguais quando deslocam os pontos de base do vosso quadrado? (Se tal não acontecer recomecem a construção!)

Porque a relação que existe entre o arco e o ângulo é que o arco tem sempre o dobro da amplitude do ângulo. [Transcrição *sic* da rsposta escrita na ficha.]

2.4 Porque é que os ângulos ficam iguais quando deslocam os pontos de base do vosso quadrado? (Se tal não acontecer recomecem a construção!)

Porque quando começamos a construção começamos por fazer um segmento com 1 ponto médio no qual serviu de centro da circunferência e traçamos uma recta perpendicular, que enteresectou com a circ. na qual marcámos 1 ponto que unimos nas extremidades do segmento o que formou 1 quadrado perfeito com os ângulos sempre proporcionais. [Transcrição *sic* da rsposta escrita na ficha.]

Trabalho em grupo

Na maioria dos grupos a divisão do trabalho era sinónimo da divisão equitativa do tempo que cada um ocupava o teclado e o rato. Enquanto esse aluno trabalhava os outros observavam sem fazer muitos comentários e normalmente acabavam por se distrair com qualquer outro assunto. Noutros grupos em que havia uma liderança nítida de um dos elementos, esse elemento indicava como as actividades se resolviam e outro elemento do grupo ia

[3] O nome da construção foi atribuído pelos alunos. Na sua construção os objectos não aparecem nomeados. As letras indicam a ordem pela qual objectos do mesmo tipo foram construídos. Os alunos fizeram a construção como está na ficha e só no fim colocaram os lados do quadrado na posição preferida horizontal/vertical.

executando o que o colega dizia, mais uma vez de modo a dividir o mais equitativamente possível a posse do rato. Alguns alunos nunca se habituaram a manipular o rato e demitiram-se desse trabalho, outros foram abafados pelo grupo por razões de ordem diversa. Uma possível explicação para a falta de debate entre os alunos sobre o modo de resolver as actividades poderá ter a ver com o facto de não estarem habituados a trabalhar em grupo, como foi referido pela professora ISA.

4.3.3 Utilização do Cabri-géomètre

Na utilização que foi feita deste ambiente geométrico identificaram-se algumas questões relevantes. A que mais se destacou foi a possibilidade de manipular directamente as construções no ecrã do computador através do rato e observar a respectiva variação. Na medida em que esta temática está directamente associada à da investigação das construções, faz-se a sua análise no capítulo 7. Nas subsecções seguintes discutem-se outros aspectos que se salientaram na realização das diversas actividades.

Marcar um ângulo e Medir

Particularmente úteis foram as primitivas que permitem marcar ângulos e medir a sua amplitude, uma vez que possibilitaram a realização de muitas actividades sobre ângulos e circunferências, um dos principais temas de Geometria no 9º ano. A medição de comprimentos de segmentos, embora realizada desde o início, não foi tão explorada. Na parte final da intervenção didáctica os alunos resolveram alguns problemas, nomeadamente de cálculo de áreas, em que utilizaram esse recurso.

História

A possibilidade de aceder à *História* de uma construção, isto é, à revisão do algoritmo de construção, desempenhou um papel importante em muitas das actividades realizadas pelos alunos, em particular na sua estruturação. Constrangimentos técnicos apenas permitiam que funcionasse em quatro dos oito postos computacionais, pelo que apenas os alunos que em cada semana tabalhavam nesses postos a podiam utilizar. (A utilização da *História* nos sistemas com memória RAM mais reduzida provocou frequentes bloqueios dos sistemas computacionais. Alguns alunos faziam-no de propósito, para atrair a atenção da investigadora e/ou para ter acesso aos menus completos.)

Gestão de menus

A exploração do recurso *Gestão dos menus* nem sempre foi muito bem sucedida por deficiências do *hardware* disponível e limitações de utilização desta primitiva nas versões PC compatível. Sempre que se executa o programa aparecem os menus completos e só depois é possível escolher outro menu, mesmo previamente gravado. Assim, sempre que foi necessário utilizar um menu diferente do inicial a investigadora teve de executar o programa em todos os postos computacionais antes de a aula começar, pelo que muitos alunos só aprendeu a fazer essa execução bastante tarde. Como os sistemas bloqueavam com frequência, alguns alunos aprenderam a reinicializá-los e a executar o programa, e nesse caso ficavam disponíveis os menus completos. Mas isso algumas vezes deu lugar a discussões interessantes. Por exemplo, na actividade da determinação do centro de uma circunferência (ficha 10) a primitiva *Centro de uma circ.*, inicialmente não estava disponível mas apareceu quando os alunos tiveram de reinicializar o sistema. No entanto os próprios alunos consideraram que não fazia muito sentido encontrar o centro da circunferência apenas através dessa primitiva e descobriram outros processos de o fazer.

Diferentes tipos de pontos do Cabri-géomètre

O facto de existirem pontos de três tipos diferentes no Cabri-géomètre, uns criados outros construídos, causou algumas dificuldades[4]. Logo na ficha 1, para construir o triângulo rectângulo, os alunos criaram dois pontos, o segmento por eles definido, e uma recta perpendicular a passar por um desses pontos. O terceiro vértice do triângulo necessitava de ser construído sobre essa recta através da primitiva *Ponto sobre objecto*, o que os alunos levaram bastante tempo a descobrir. Na ficha 2, para construir o rectângulo, começaram por criar um segmento a partir de dois pontos, muitos construíram depois uma recta perpendicular ao segmento num dos seus extremos, como tinham feito na ficha anterior. Para obter os dois vértices do rectângulo que faltavam alguns construíram um ponto sobre essa recta, uma recta perpendicular à recta anterior a passar por esse ponto, outra recta perpendicular ao segmento e por último o ponto de intersecção destas últimas rectas (figura 4.6). Este processo de construção do rectângulo, ou outros semelhantes utilizados pelos alunos, usa os três tipos de pontos do Cabri--géomètre: *Ponto*, *Ponto sobre objecto*, [ponto de] *Intersecção de dois objectos.*

---

[4] Esta questão, e as que se referem em seguida, foram detectadas por investigadores que internacionalmente têm estudado utilizações do Cabri-géomètre, e foram reformuladas na versão mais recente, Cabri-géomètre II, conforme informação prestada pelo responsável pelo projecto, Prof. J.-M. Laborde, durante a 18th PME, realizada em Lisboa em Agosto de 1994.

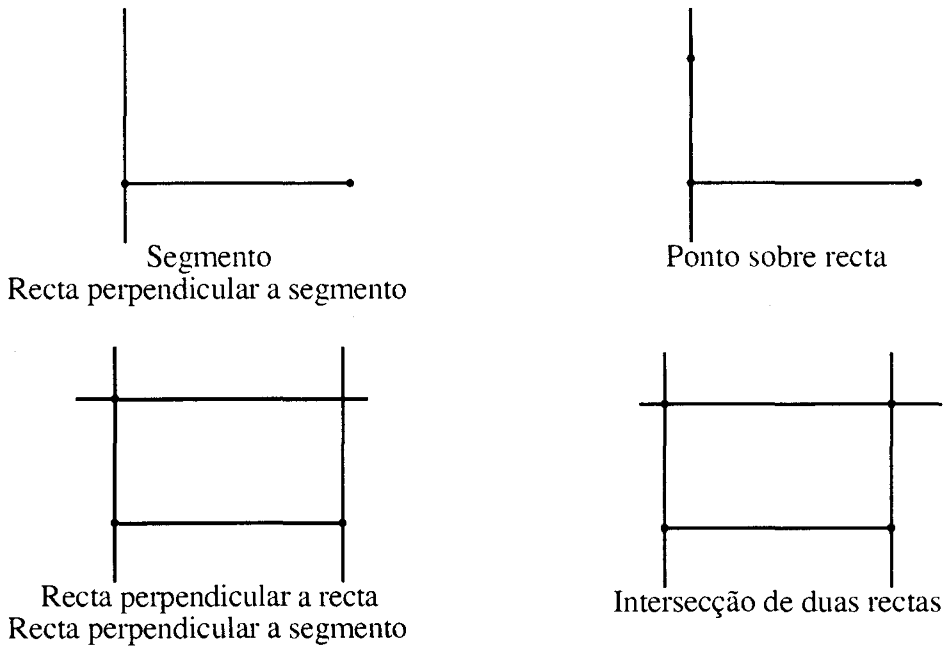


Fig. 4.6 - Na construção de um rectângulo utilizam-se os três tipos de pontos do Cabri-géomètre

Se os alunos manifestaram alguma relutância inicial em construir pontos sobre objectos, e criavam-nos aparentemente sobre o objecto, acabaram, no entanto, por aceitar a necessidade de o fazer para «agarrar o ponto» ao objecto. Mas a construção dos pontos de intersecção foi muito mais difícil de aceitar. Como do seu ponto de vista esses pontos já existiam, esqueciam-se de os construir. Outras vezes construíam-nos com a primitiva *Ponto sobre objecto*. Ao contrário desta última primitiva o nome da primitiva *Intersecção de dois objectos* pode ter dificultado ainda mais o trabalho dos alunos, uma vez que não refere a palavra "ponto". Acrescente-se a isto o facto de a construção do ponto de intersecção de dois objectos ir contra as expectativas visuais dos alunos, tema que se desenvolve a seguir.

Primitivas *anti visuais*

Tal como a construção do(s) ponto(s) de intersecção de dois objectos outras primitivas realizam construções contra as expectativas visuais dos alunos, às quais se optou por referir por *primitivas anti visuais.*

Intersecção de dois objectos

Para construir os pontos de intersecção de dois objectos, depois de seleccionar a primitiva respectiva, é necessário indicar com o cursor separadamente os dois objectos que se pretende intersectar. A tendência dos alunos era para colocar o cursor no local onde esse(s) ponto(s) iria(m) aparecer. Mas quando o Cabri-géomètre não consegue distinguir dois objectos muito próximos devolve a mensagem *Ambiguidade*. Isto confunde os alunos, pois para construir um ponto sobre um objecto bastava-lhes apontar o objecto e o ponto aparecia no local onde estava o cursor, como mostra a figura 4.7.

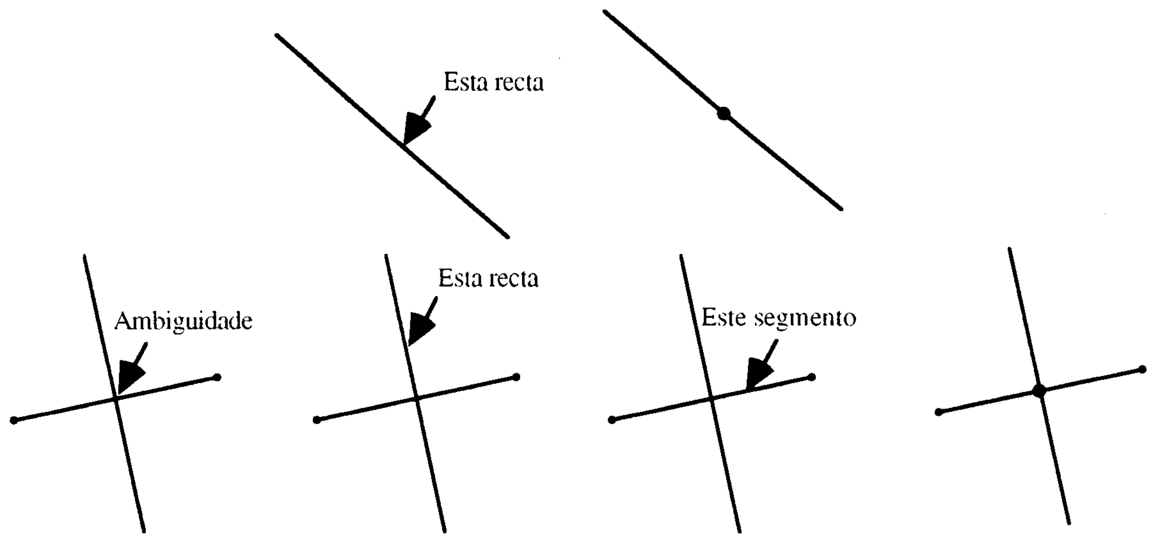


Fig. 4.7 - Na construção do ponto de intersecção de dois objectos é preciso indicar separadamente os dois objectos, e o ponto aparece longe do cursor.

Centro de uma circunferência

Para obter o centro de uma circunferência de base é preciso indicar a circunferência (figura 4.8) e não apontar o local onde o centro vai aparecer, como os alunos eram tentados a fazer.

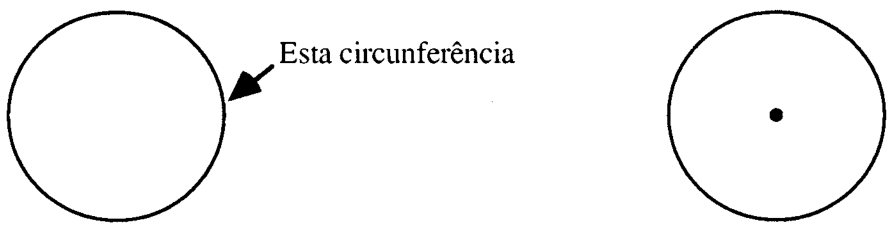


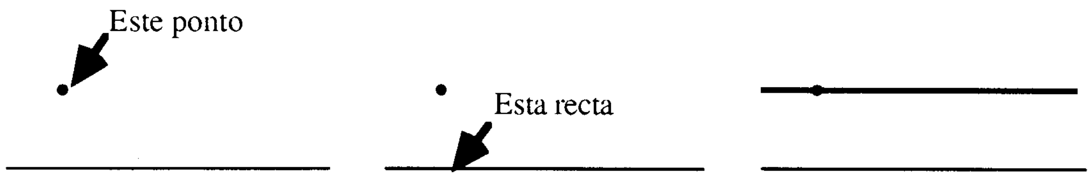
Fig. 4.8 - O centro de uma circunferência de base aparece longe do local apontado com o cursor.

A partir do momento em que a primitiva *Circunferência* ficou disponível (ficha 10) os alunos utilizaram-na com frequência, pois uma circunferência assim construída tem a vantagem de se poder deslocar sem modificar o seu raio, ao contrário do que acontece com uma circunferência definida pelo centro e outro ponto.

Recta paralela

Para construir uma recta paralela a uma recta/segmento é preciso indicar um ponto e uma recta/segmento à qual o ponto não pertence (se não obtém-se uma recta coincidente, como acontecia com frequência aos alunos). A recta que se constrói assim aparece "longe" do último objecto indicado, o que vai contra as expectativas visuais dos alunos. Ao contrário, uma recta perpendicular pode aparecer "perto" do último local indicado, como mostra a figura 4.9, e muitas vezes o ponto onde passa a recta perpendicular vai ser o ponto de intersecção das duas rectas.

Recta paralela



Recta perpendicular

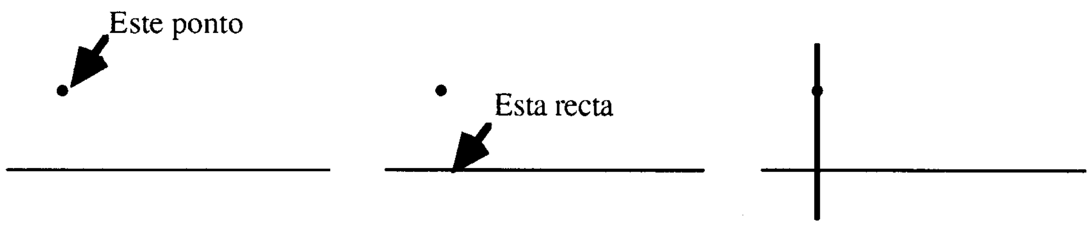


Fig. 4.9 - Construção de uma recta paralela e de uma recta perpendicular no Cabri-géomètre.

As dificuldades na construção de rectas paralelas terão levado os alunos a optar por construir rectas perpendiculares, o que foi possível em muitos casos.

4.3.4 Opções que poderiam ter sido tomadas

De um modo geral faz-se um balanço positivo sobre a intervenção didáctica realizada. Tem-se, no entanto, consciência de que muitas das opções tomadas implicaram percas que a teriam orientado de forma diferente e eventualmente a poderiam ter enriquecido. Em particular há duas opções que se lamenta não ter feito. Uma tem a ver com a forma como os alunos trabalharam, outra tem a ver com aspectos do Cabri-géomètre não explorados.

Tipo de trabalho realizado pelos alunos

O tipo de trabalho realizado, em parte resultante do acordo estabelecido entre a investigadora e a professora da turma, levou a que a interacção entre o que se passava nas aulas normais e as actividades realizadas na sala do CEM não fosse totalmente conseguida. Nas aulas normais os alunos ouviam a professora leccionar os conteúdos teóricos que depois aplicavam nas actividades que realizavam com o Cabri-géomètre. Ainda que, pelo menos até meio da intervenção didáctica, fosse feita nas aulas normais a correcção das principalmenete daquelas em que os alunos tinha tido mais dificuldade, essa correcção era normalmente feita pela investigadora e não deu lugar a debater os processo de resolução utilizados pelos diferentes grupos.

Em particular os episódios de ensino evidenciaram a necessidade de encontrar estratégias que levassem os próprios alunos a falar sobre o modo como resolviam as actividades, quer enquanto as estavam a resolver, quer depois de resolvidas, na medida em que isso induzia uma atitude reflexiva que só por si os alunos não tinham ou tinham muito superficialmente. Este é um dos temas que se aprofunda nos capítulos seguintes, ilustrando com passagens dos episódios de ensino e das aulas.

Primitivas não exploradas do Cabri-géomètre

Duas primitivas do menu *Construção* do Cabri-géomètre foram ignoradas nesta intervenção: *Lugar geométrico* e *Simétrico*.

A primitiva *Lugar geométrico* permite visualizar as várias posições ocupadas por um ponto quando se desloca outro ponto (ou outro objecto) de que o primeiro é dependente. Depois de visualizar o lugar geométrico este tem de ser apagado, pois a versão do Cabri-géométre com que se trabalhou não permite interagir sobre ele[5].

No que se refere aos lugares geométricos pode considerar-se que apenas um número relativamente reduzido de alunos estaria em condições de os construir e explorar. Como salienta Capponi (1993b) esta primitiva só deve ser introduzida bastante tarde, depois de os alunos dominarem bem o Cabri-géomètre, não só do ponto de vista operacional mas sobretudo conceptual, para o que é imprescindível possuírem uma base razoável de conhecimentos geométricos.

A primitiva *Simétrico* permite construir o simétrico de um ponto em relação a outro ponto ou em relação a uma recta, estando o ponto (centro da simetria) ou a recta (eixo da simetria) previamente construídos e visíveis.

Neste caso não se pode considerar que tivesse havido uma razão objectiva para não explorar essa primitiva, que traduz uma relação expressamente citada no programa do 9º ano. Uma possível explicação para a sua não utilização explícita estará no facto de estes alunos serem pouco aventureiros e terem manifestado tendência para utilizar predominantemente aquilo que já conheciam. A investigadora só posteriormente se apercebeu disso e não colocou nenhuma actividade que "obrigasse" a utilizar explicitamente a simetria. Curiosamente a grande maioria das construções realizadas pelos

[5] O Cabri-géomètre II, versão mais actual, já permite tratar um lugar geométrico como qulaquer outro objecto da construção.

alunos eram simétricas (tinham um ou mais eixos de simetria e/ou centro de simetria), e o conceito de simetria estava subjacente nos processos de construção utilizados, como mostra a construção do quadrado com os lados tangentes a uma circunferência (ver §5.2.2 e §5.2.4).

Dois grupos utilizaram pontualmente esta primitiva nas suas construções, mas o facto de a investigadora não ter feito uma referência especial a isso terá feito com que desistissem de a utilizar mais vezes.

A primitiva *Macro-construção* permite acrescentar à lista de construções pré-definidas outras de autoria do utilizador. Também esta primitiva não foi abordada na intervenção, apenas uma vez um aluno perguntou para que servia. Embora a sua utilização estivesse prevista, na altura pareceu à investigadora que o desempenho dos alunos, quer ao nível dos conhecimentos geométricos quer do trabalho com o *software* e *hardware*, não se adequava à exploração de *Macro-construções*. No entanto considera-se que actividades que envolvam esta primitiva será uma via a explorar em intervenções mais demoradas.

4.4 Avaliação da intervenção

A avaliação global da intervenção é feita segundo três perspectivas diferentes. Primeiro analisam-se os resultados obtidos pelos alunos no *Teste de Geometria de van Hiele*, realizado antes da fase exploratória e no final da intervenção. Em segundo lugar referem-se os resultados obtidos pelos alunos nas duas fichas de Avaliação. Por último apresenta-se a opinião dos dezassete alunos que participaram nos episódios de ensino sobre a intervenção didáctica.

4.4.1 Teste de Geometria de van Hiele

Antes de iniciar a fase exploratória considerou-se pertinente avaliar o nível de raciocínio geométrico dos alunos da turma 9º 5 no quadro do modelo de van Hiele. Considerou-se ainda que a repetição dessa avaliação no final da intervenção e a comparação com os dados inicialmente obtidos seria um indicador a ter em conta na avaliação global da intervenção.

Classificação do Teste de Geometria de van Hiele

Para determinar o nível de van Hiele dos alunos utilizou-se neste estudo o critério clássico *3-em-5* proposto pelo projecto CDASSG, aquele que permitiu atribuir um nível ao maior número de alunos (93%).

De acordo com este critério, um aluno está no Nível n se tiver acertado em pelo menos três dos cinco itens dos níveis 1 a n ($n \leq 5$) e não tiver acertado em três ou mais itens de nenhum dos níveis seguintes. Se um aluno não acertar em pelo menos três dos cinco itens em nenhum dos níveis é-lhe atribuído o Nível

0. Quando este critério não permite determinar o nível de um aluno diz-se que o aluno não é classificável (Nc).

Resultados do Teste de Geometria de van Hiele

No quadro 4.2 indicam-se os níveis de van Hiele dos alunos do 9º 5, nas duas aplicações do teste (T1 e T2). (Os dezassete primeiros alunos participaram nos sete episódios de ensino, de acordo com a sua ordem de realização — §3.5.1.)

Quadro 4.2

Resultados do Teste de Geometria de van Hiele

Episód.	Aluno	T1	T2
E1	DE	1	Nc
	JC	1	2
	JG	1	3
E2	XA	2	2
	YB	1	1
E3	PF	2	2
	RD	1	3
E4	BF	0	1
	LA	2	2
E5	CL	1	1
	IS	2	2
	PA	1	2
E6	MA	0	2
	SA	2	1
	TA	1	Nc
E7	AC	1	2
	ZC	0	2
-	A	2	2
-	B	2	3
-	C	1	3
-	D	2	2
-	E	1	2
-	F	3	2
-	G	1	0
-	H	1	1
-	I	2	2
-	J	0	1
-	K	1	0

Nota: **Nc** alunos não classificados de acordo com o critério de atribuição de níveis utilizado.

Na tabela do quadro 4.3 e no gráfico da figura 4.10 resume-se a distribuição dos alunos pelos diferente níveis de van Hiele identificados. Como se pode observar, na primeira realização do teste (T1) o Nível 1 é predominante na turma, mas na segunda realização (T2) há uma predominância do Nível 2, tendo ainda diminuído o número de alunos no Nível 0 e aumentado o número de alunos no Nível 3.

Quadro 4.3 - Distribuição dos níveis de van Hiele no 9º 5

Nível	T1	T2	T1 %	T2 %
0	4	2	14%	7%
1	14	6	50%	21%
2	9	14	32%	50%
3	1	4	4%	14%
Nc	**0**	**2**	**0%**	**7%**

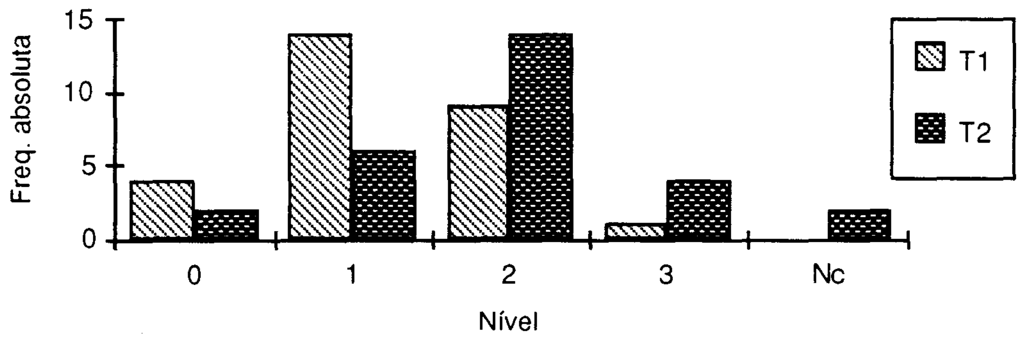


Fig. 4.10 - Gráfico de distribuição dos níveis de van Hiele no 9º 5

Mudança nos níveis de van Hiele

Como se referiu anteriormente o *Teste de Geometria de van Hiele*, classificado numa escala ordinal, foi aplicado duas vezes aos mesmos sujeitos. Nestas condições o teste de Wilcoxon (dados emparelhados) é o teste estatístico adequado para determinar a existência de diferenças significativas entre os resultados obtidos nas duas aplicações (Greene, 1982). Observando o quadro 4.4, (obtido com o programa Statview II), pode concluir-se que houve uma mudança no sentido de uma melhoria nos níveis de van Hiele estatisticamente significativa ($p<0.05$).

Quadro 4.4 - Teste de Wilcoxon (dados emparelhados)

Wilcoxon signed-rank X1: Column 1 Y1: Column 2

	Number:	Σ Rank:	Mean Rank:
+ Ranks	12	112	9.333
- Ranks	4	24	6

note 10 cases eliminated for difference = 0.

Z	-2.275	p = .0229
Z corrected for ties	-2.372	p = .0177
# tied groups	2	

Note: 2 cases deleted with missing values.

Sentido da mudança nos níveis de van Hiele

Os quadros 4.2 e 4.3 permitem deduzir que a mudança verificada nos níveis de van Hiele foi principalmente no sentido de um maior número de alunos estar no Nível 2, e no Nível 3.

Para fundamentar esta ideia, observou-se a variação de respostas certas nos diferentes itens, procurando aqueles em que o número de acertos tinha aumentado significativamente. Em relação a T1 observa-se em T2 um aumento estatisticamente significativo ($p \leq 0.05$) no número de respostas certas, nos itens 7, 8, 9 do Nível 2 e nos itens 12 e 13 do Nível 3, nível de significância obtido por aplicação do teste de diferenças entre proporções correlacionadas (Guilford e Fruchter, 1981, pp. 161-162).

Pode dizer-se que a maioria dos alunos da turma generalizou a sua representação de triângulo, de rectângulo, de losango e de quadrado, e foi capaz de analisar estas figuras em termos das suas propriedades, no entanto enfrentou dificuldades na ordenação e relacionamento dessas propriedades. Por exemplo, para 39% dos alunos o losango não é um paralelogramo (item 5) e para 68% dos alunos um quadrado não é um rectângulo (item 13), embora em qualquer dos casos tenha aumentado o número de respostas certas nestes itens. Estas figuras foram exploradas ao longo da intervenção didáctica. No caso dos triângulos formalizou-se mesmo a sua classificação hierárquica, mas o mesmo não aconteceu com os quadriláteros.

O modo como em T2 os alunos responderam aos itens do Nível 3 permite concluir que cerca de 35% dos alunos foi capaz de ordenar e relacionar propriedades de figuras em situações que não exigissem um grande grau de generalização (como é o caso dos itens 14 e 15).

4.4.2 Resultados das fichas de avaliação

A ficha Avaliação 1 foi classificada em três níveis: Reduzido (R), Médio (M) ou Elevado (E), como a professora ISA habitualmente fazia. O quadro 4.5 mostra as classificações obtidas pelos oito grupos.

Quadro 4.5 - Classificações na ficha Avaliação 1

Grupo	Nível
3 - TMX	M
5 - DAD	M
6	M
7 - GENIOS	M
1 - SCIP	M+
2 - Cteam	M+
8 - QWERTY	M+
4 - JJDM	E-

A ficha Avaliação 2 foi classificada nos mesmos níveis, atribuídos, desta vez, com base nas percentagens obtidas pelos alunos, de acordo com um critério estabelecido em conjunto pela investigadora e pela professora ISA. O quadro 4.6 mostra os resultados obtidos pelos catorze pares que os alunos formaram para o efeito. Consideraram-se estes resultados muito razoáveis, e superiores aos resultados que os alunos tinham obtido em avaliações referentes a outras unidades do currículo.

Quadro 4.6 - Classificações na ficha Avaliação 2

Par	%	Nível
A	32	R
B	38	R
C - MA/SA[6]	38	R
D - BF/	50	M-
E - CL/PA	54	M
F - PF/RD	70	M+
G	70	M+
H - JC/DE	77	E
I - JG/MX	79	E
J	80	E
K - AC/TA	82	E
L - IS/	82	E
M - LA/PA	93	E
N - XA/YB	95	E
Mediana	73,5	
Média	67,1	
DP	21,0	

4.4.3 Opinião dos alunos

Resumem-se, em seguida, as afirmações mais pertinentes dos dezassete alunos e alunas participantes nos episódios de ensino, sobre o trabalho nas aulas de Geometria. Para os levar a desenvolver as suas ideias e não se limitarem a dizer se tinham ou não gostado, a investigadora pediu-lhes que referissem em particular as diferenças que notavam em relação às aulas habituais.

- Todos os alunos declararam, de forma mais ou menos explícita, que estavam a gostar do trabalho. Alguns alunos classificaram-no como: «bastante bom», «porreiro», «giro», «muito mais louco», «mais divertido».
- Alguns alunos consideraram que as aulas com os computadores eram diferentes principalmente no «método de trabalho». Eram mais estimulantes do que as habituais em que se limitavam a ouvir a

[6] Neste par e nos restantes referem-se os alunos que participaram nos episódios de ensino.

professora e a escrever o que ela dizia. Nessas aulas tinham de descobrir por si próprios como resolver os problemas e por isso tinham «mais entusiasmo», «o tempo passava mais depressa», «distraíam-se para o bom sentido [...] porque nas outras distraíam-se para o mau sentido».

- Para alguns alunos as aulas com o computador foram aulas «práticas», que lhes permitiram «desenvolver mais a Geometria» porque puderam «fazer muitas experiências», «testar as coisas mais facilmente e rapidamente», «não precisavam de repetir tudo desde o início se se enganavam num passo qualquer». Na opinião de uma aluna «a Geometria sem o computador é chata».
- Para três alunas a principal diferença dessas aulas foi o trabalho de grupo, porque assim podiam «discutir as suas opiniões e daí ver o que é que sai». Uma das alunas revelou no episódio de ensino maiores dificuldades do que habitualmente e atribuiu isso à falta do grupo para poder discutir as ideias. Essa aluna considerou, no entanto, que o seu grupo era grande demais [quatro elementos], com três elementos teria sido melhor.
- Para a maioria dos alunos os problemas propostos foram fáceis, para outros não foram «assim tão fáceis, mas com ajuda chegavam lá». Em geral, todos sentiram que foram capazes de ultrapassar as dificuldades, ao contrário do que acontecia nas aulas habituais, que muitas vezes não percebiam e não gostavam do que estavam a fazer, principalmente «sistemas e coisas assim».
- Alguns alunos afirmaram que os problemas de construção eram mais fáceis porque podiam experimentar várias ideias, «tentavam, não conseguiam, depois surgia uma ideia voltavam a tentar e dava». Mas as justificações não podiam ser deduzidas por tentativas e por isso eram mais difíceis, «para tirar conclusões já era pior [...] se a gente não souber não dá mesmo para tirar».
- A necessidade de redigir respostas em alguns problemas tornava-os mais complicados e menos do agrado de quase todos os alunos, que sentiam muita dificuldade em exprimir-se, «passar as ideias para o papel», e não gostavam de escrever, «é muito chato... isso escrever... acho que ninguém gosta».
- Todos estes alunos defenderam o sistema aulas alternadamente nos computadores e na aula habitual. Nas aulas «práticas» tentavam resolver os problemas e nas aulas «teóricas» a professora «revia e explicava o que tinham estado a fazer e a que tinham chegado sozinhos», «esclarecia as

dúvidas e ficavam a saber como se podia fazer o que não tinham sido capazes», para «no próximo exercício já saberem fazer no computador».

- Um dos alunos declarou não «gostar assim muito» do Cabri-géomètre porque «não dava para fazer muita coisa [e havia] outras que podiam ser melhoradas». O que menos lhe agradou foi o facto de haver «dois tipos de pontos [...] os que se movem e os que não se movem, [porque] é chato ter de pôr pontos nos vértices das figuras [...] devia ser automático». Para dois outros alunos o programa era «muito repetitivo, [...] tinham que fazer sempre as mesmas coisas [...] sempre marcar segmentos...». Um dos alunos propôs que se variasse «as figuras a construir».
- Em cinco episódios de ensino os alunos salientaram o facto de este trabalho lhes ter permitido aprender a trabalhar com um computador. «O trabalho é muito interessante porque põe à prova os nossos conhecimentos quer matemáticos quer computacionais».

4.5 Uma perspectiva global sobre a intervenção didáctica

A intervenção didáctica *Cabri 9º 5: Exploração de Construções em AGD*, orientou-se no quadro da hipótese teórica de que a exploração de figuras num AGD, na perspectiva tripla: realização de construções geométricas, justificação e investigação das construções, pode constituir uma estratégia de intervenção poderosa (De Corte, 1992) para o desenvolvimento do raciocínio geométrico do aluno, no quadro do modelo de van Hiele.

A intervenção didáctica, que visou o ensino e aprendizagem da unidade Geometria do Plano, realizou-se numa turma do 9º ano de escolaridade, de uma escola secundária dos arredores de Lisboa, no ano lectivo 1992/93. Ocupou um total de vinte e quatro aulas, cinco no 2º período do ano lectivo (fase exploratória), e dezanove no 3º período (segunda fase).

Em relação ao tipo de ensino habitual, para os alunos participantes, introduziram-se quatro novidades:

- Reordenação do currículo de Geometria do 9º ano numa sequência que partiu dos conhecimentos prévios dos alunos.
- Exploração dos conceitos geométricos através de actividades de realização de construções geométricas resistentes, da justificação e da investigação das construções. As construções foram feitas no ambiente dinâmico Cabri-géométre. As actividades foram propostas por meio de fichas elaboradas para o efeito.
- Trabalho em grupo. Os vinte e oito alunos da turma dividiram-se em oito grupos de 3/4 alunos, para a resolução das fichas.

- Avaliação feita também com recurso ao Cabri-géomètre, em grupo — Avaliação 1, e em pares — Avaliação 2.

No final da intervenção didáctica, os alunos, alguns encarregados de educação, a professora da turma e a investigadora ficaram satisfeitos com o modo como esta tinha decorrido. Reconheceram que os alunos aprenderam de uma forma diferente que os envolveu, mais do que acontecia habitualmente, no seu próprio processo de aprendizagem.

A reflexão posterior sobre o trabalho realizado permitiu identificar os aspectos que, em síntese, se referem a seguir.

1. Inicialmente os alunos demoravam muito tempo para resolver as fichas propostas e apelavam sistematicamente para a investigadora ou para a sua professora para os ajudar a ultrapassar dificuldades. A partir do meio da segunda fase da intervenção, por ocasião da realização da ficha Avaliação 1, começou a notar-se uma autonomia progressiva no trabalho da maioria dos grupos.

2. Na resolução das fichas, a maioria dos alunos fazia primeiro todas as actividades de construção, pelas quais se sentiam mais atraídos, e só no fim respondia a outras questões sobre as construções, que muitas vezes "despachavam" um pouco à pressa. A justificação das construções constituiu sempre a maior dificuldade dos alunos e aquilo que eles próprios declararam menos terem gostado de fazer. A investigação de construções despertou a curiosidade de alguns alunos, mas foi necessário apoiá-los para que observassem a variação de uma construção através da manipulação, prestando atenção à permanência ou não das suas propriedades e relações geométricas.

3. A maioria dos alunos manifestou alguma dificuldade no trabalho em grupo, provavelmente por estarem pouco habituados a trabalhar desse modo. Alguns grupos dividiam democraticamente a resolução das actividades, mas de cada vez que um elemento estava a trabalhar os outros desligavam-se da tarefa. Noutros grupo havia uma liderança de um dos elementos, que, em particular, "ditava" a resolução das actividades a outros colegas que as executavam no computador ou preenchiam as fichas.

4. Em geral os alunos familiarizaram-se bem com o Cabri-géomètre e exploraram-no sem dificuldade. No entanto, alguns aspectos, menos intuitivos do *software*, ou que iam contra as suas expectativas visuais, constituíram obstáculos que nem todos os alunos conseguiram ultrapassar. Também o trabalho com o sistema computacional, em particular o arrastamento através do rato e a gravação de ficheiros, constituiu inicialmente uma dificuldade para muitos alunos, a maioria dos quais não possuía experiência de trabalho com computadores. Ainda assim, quase todos os alunos conseguiram ultrapassar essas dificuldades de ordem técnica.

5. A intervenção didáctica provocou uma mudança estatisticamente significativa nos Níveis de van Hiele dos alunos da turma, determinados através do Teste de Geometria de van Hiele ($p<0.05$) (ver §4.4.1). Essa mudança foi principalmente no sentido de um maior número de alunos ser capaz de reconhecer figuras geométricas (triângulos e quadriláteros) em termos da suas propriedades (Nível 2) e não apenas da sua aparência. Alguns alunos, ainda que um número reduzido, conseguiram estabelecer relações entre essas propriedades e produzir ou mesmo acompanhar raciocínios dedutivos (Nível 3).

6. Os resultados obtidos pelos alunos nas duas avaliações que realizaram foram considerados muito razoáveis. Na ficha Avaliação 2, apenas três pares (em catorze) obtiveram uma classificação inferior a 50%, e sete pares (metade dos pares) obtiveram classificações superiores a 75%.

7. Os dezassete alunos participantes nos episódios de ensino fizeram um balanço positivo do trabalho que estavam a realizar. Para além da possibilidade de aprender a trabalhar com um computador, o que para muitos aconteceu pela primeira vez, gostaram de poder experimentar e descobrir por si próprios como resolver os problemas, o que os levou a ter um maior entusiasmo e a empenharem-se mais naquelas aulas de Geometria. Um desses alunos afirmou à professora da turma, na última aula, que «tiveram muita sorte em ter sido escolhidos para a realização daquele trabalho».

A caracterização dos processos de realização de construções, justificação e investigação, que se apresenta nos capítulos seguintes, complementa as ideias anteriores. A observação dos alunos enquanto realizaram as actividades propostas, principalmente durante os episódios de ensino, permitiu perceber de forma mais aprofundada os processos por eles desenvolvidos que constituíam os objectivos específicos deste estudo.

Capítulo 5 - Realização de construções geométricas

Neste capítulo descrevem-se, analisam-se e interpretam-se processos de realização de construções geométricas num ambiente computacional dinâmico, primeiro dos três objectivos específicos deste estudo. A caracterização que se apresenta incidiu sobre as construções geométricas feitas por dezassete alunos participantes em sete episódios de ensino (§3.5), mas foi complementada com dados de outras construções feitas por esses e pelos restantes alunos da turma participante na intervenção didáctica que se descreve no capítulo 4.

No que se refere aos processos que os alunos utilizaram para fazer as construções geométricas, a análise vertical e horizontal dos dados (§3.6) fez emergir as grandes categorias seguintes, que constituem as secções estruturantes deste capítulo:

- Aparência das construções
- Percursos de construção
- Construções resistentes

5.1 Aparência das construções

A observação e análise dos trabalhos dos alunos evidenciou a importância que a maioria dava à forma com que as suas construções apareciam no ecrã do computador, isto é, à sua aparência, considerada no sentido do Nível 1 de van Hiele. Para além da importância dada à aparência salientou-se também a importância que muito alunos davam ao aspecto das construções[1] (passível de ser modificado através de recursos do *software* como por exemplo a utilização de cores).

A preocupação dos alunos em obter construções que visualmente lhes pareciam correctas revelou-se na influência exercida pelos desenhos que acompanhavam as actividades, na preferência por construir exemplos prototípicos das figuras geométricas e no cuidado que puseram na apresentação dos seus trabalhos. Nas subsecções seguintes desenvolvem-se estes temas.

5.1.1 Influência dos desenhos das fichas

Os desenhos dados nas fichas influenciaram grandemente o trabalho dos alunos, que em geral sentiam necessidade de dar às suas construções uma aparência que reproduzisse esses desenhos. No entanto, verificou-se que

[1] Na secção *Definição de conceitos* (§2.7) pode ver-se a distinção que neste estudo se faz entre *Aparência da construção* e *Aspecto da construção.*

algumas vezes conseguiam libertar-se dos desenhos que eram fornecidos, o que, por sua vez, levou a que se preocupassem menos com a aparência das suas construções e das figuras por elas representadas.

Necessidade de reproduzir os desenhos das fichas

Os comentários de alguns alunos, referidos nos dois episódios seguintes, mostram que estes pensavam ser necessário obter uma construção com a mesma aparência do desenho dado na ficha de trabalho.

Passagem do episódio de ensino E1

DE exprimiu a necessidade de as construções reproduzirem os desenhos das fichas ao comentar que o quadrado que JG estava a propor construir iria ficar numa posição diferente da do desenho da ficha (2-ficha Avaliação 1):

DE: Mas não é como está aqui... Pode estar virado para qualquer lado?

Inv: Pode. A posição não é importante. Para ti um quadrado deixa de ser um quadrado quando está numa posição ou noutra?

DE: Não, não. Como está aqui assim... pode ser para fazer assim... da mesma maneira. (E1, §201-203.)

Passagem do episódio de ensino E5

Para construir um ângulo *BAC* e a sua bissectriz (actividade 3 - ficha 12, figura 5.1), CL começou por criar uma recta na posição horizontal. IS olhou para a recta que a colega criou e para o desenho feito na ficha e comentou: «ela devia ter ficado mais torta».

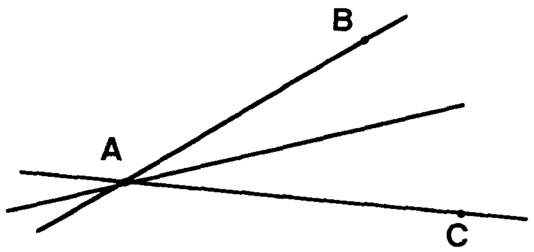


Fig. 5.1 - Bissectriz de um ângulo, desenho dado na ficha 12

Efeito da procura de processos para obter desenhos das fichas

Em certos casos a vontade de reproduzir os desenhos das fichas foi um factor de aprendizagem. Por exemplo, levou alguns alunos a procurar alternativas mais sofisticadas para os seus processos iniciais de construção. Essa procura levou ainda à generalização da sua representação das figuras que estavam a explorar, como mostra o exemplo seguinte.

Passagem da ficha 10

Para obter duas circunferências a passar pelos extremos de um segmento (1-ficha 10) três grupos construíram uma primeira circunferência com centro no ponto médio desse segmento, mas tiveram de generalizar o processo para construir a segunda circunferência.

O grupo DAD obteve a primeira circunferência [*c1* - figura 5.2] pelo mesmo processo. Depois determinou os seus pontos de intersecção com a mediatriz do segmento *[PE]* e construiu novas circunferências com centros nesses pontos [*c2*, *c3* - figura 5.2]. Os alunos observaram, porém, que «assim não conseguiam obter uma bolinha mais pequenina [como estava no desenho da ficha]» e com o apoio da investigadora descobriram como podiam resolver a questão, como mostra a história da sua construção (§2.7) (figura 5.3).

Construção **BANTHIS1**[2]
Ponto: **P**
Ponto: **E**
Segmento definido por 2 pontos: **[PE]**
Mediatriz
Intersecção segmento-recta *A*
Circunferência def. 2 pontos *c1*
Intersecção recta-circ. *B, C*
Circunferência def. 2 pontos *c2*
Circunferência def. 2 pontos *c3*
Ponto sobre recta *D*
Circunferência def. 2 pontos *c4*

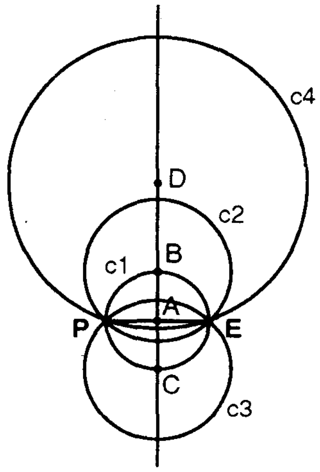


Fig. 5.2 - História da construção de circunferências a passar pelos extremos de um segmento [*PE*] - grupo DAD.

A construção do grupo DAD ficou invertida em relação ao desenho da ficha, mas isso não incomodou os alunos porque eles próprios já tinham descoberto, ainda que apoiados pela investigadora, que «o centro das circunferências é a mediatriz», como responderam na ficha.

Actividades não acompanhadas de desenho

Se as actividades eram apresentadas apenas numa forma discursiva, sem serem acompanhados de um desenho, alguns alunos representavam mentalmente a figura que queriam obter, como se vê nos exemplos seguintes.

Passagem dos episódios de ensino E5, E6, E7

No problema 3-ficha 11, sem ser dado qualquer desenho, pedia-se a criação de uma circunferência e a construção de um quadrado com os lados tangentes a essa circunferência. Nos três casos começaram por referir que o quadrado iria estar fora da circunferência e simularam-no gestualmente:

Inv: Mas, tu sabes, IS, qual é o problema que têm que fazer?

---

[2] Apenas os pontos **P** e **E** foram nomeados pelos alunos. As restantes letras indicam a ordem pela qual objectos do mesmo tipo foram construídos. O nome da construção foi atribuído pelos alunos.

IS: Sim, o quadrado vai estar fora da circunferência [representa com a mão um quadrado à volta da circunferência].
Inv: Pronto, é um quadrado fora da circunferência. Fora, mas não é assim à balda. Fora?
IS: Pois... é fora a tocar cada... Cada uma das rectas do quadrado tem que tocar num dos pontos da circunferência. (E5, §75-78.)

MA [lê a ficha]: Eu acho que vai ter que ficar assim, não é? [Simula com os dedos um quadrado com os lados tangentes à circunferência.] (E6, §350.)

ZC [lê a ficha 3-11]: «Criem uma circunferência».
AC [lê também]: Então o quadrado vai ficar do lado de fora?
Inv: O quadrado vai ficar do lado de fora, exactamente. (E7, §170-173.)

5.1.2 Preferência por exemplos prototípicos das figuras

Muitas das construções realizadas evidenciaram características de exemplos prototípicos das figuras geométricas (§2.7), isto é, apareciam no ecrã do computador na posição preferida horizontal/vertical, eram simétricas e estáveis. Apesar da tendência para reproduzir os desenhos das fichas, quando estes não eram prototípicos, quase sempre as construções dos alunos revelavam algumas das características anteriores, sobretudo a posição preferida. Neste capítulo, e nos seguintes, apresentam-se vários exemplos de construções que ilustram essa preferência. Para já destaca-se uma construção da última ficha.

Passagem da ficha Avaliação 2B

A actividade 1 da última ficha (Avaliação 2B) propunha a construção de um papagaio e era acompanhada pelo desenho da figura 5.3A. Sete pares (em nove) construíram um papagaio com as diagonais na horizontal/vertical, como fez o par TA/AC (figura 5.3B)

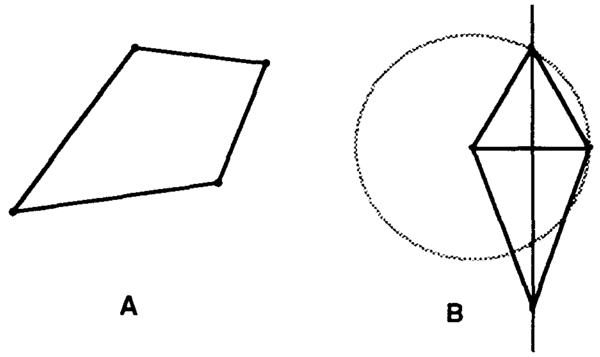


Fig. 5.3 - Desenho da ficha Avaliação 2B; construção feita por TA/AC

Atenuação da influência dos protótipos através da manipulação das construções

Quase todos os alunos gostavam de manipular com o rato as construções no ecrã dos computadores, e faziam-no muito rapidamente. A observação das construções com aparências variadas, proporcionadas pela manipulação levou muitos alunos a dar menos importância aos exemplos prototípicos, como mostram os seguintes exemplos.

Passagem do episódio de ensino E7

Neste último episódio, que teve lugar perto do final da intervenção didáctica, o par AC/ZC construiu um quadrado com os lados tangentes à circunferência (3-ficha 11) e deslocou bastantes vezes alguns dos pontos de tangência sobre a circunferência, sem nunca se preocupar em colocar os lados do quadrado na horizontal/vertical.

Passagens do episódio de ensino E5

As alunas participantes neste episódio também construíram o quadrado com os lados tangentes à circunferência (3-ficha 11) sem o colocar na posição preferida.

Ao iniciarem a construção seguinte (bissectriz de um ângulo, 2-ficha 12), quiseram reproduzir o desenho da ficha mas mostraram saber que podiam manipular a construção e colocá-la em qualquer posição:

Inv: Pronto, está óptimo... Está outra vez em posição ao contrário aí [em relação à figura da ficha] mas isso faz-vos confusão? Faz-vos confusão que a figura que vocês têm fique diferente?

PA, CL: Não.

IS: Não. Nós quando fizemos esta figura [na aula] andámos... Quando fizemos isto [aponta a figura da ficha], andámos com o rato para um lado e para o outro e a figura passava para o outro lado [faz com a mão um gesto de inversão/simetria da figura]. (E5, §343-345.)

5.1.3 Cuidado manifestado com o aspecto das construções

A preocupação com o aspecto estético revelou-se no facto de na maioria as construções aparecerem colocadas na posição preferida horizontal/vertical, porque, na opinião de muitos alunos, a representação no ecrã do computador, de rectas ou segmentos de recta que não estejam nessas posições tem "mau aspecto", como se vê nos exemplos seguintes.

Passagem do episódio de ensino E6

As alunas participantes neste episódio mostraram a sua preocupação em colocar as construções na horizontal/vertical, principalmente por uma questão de gosto pessoal. Mas para SA o aspecto visual "mais agradável" pareceu estar também associado à correcção do ponto de vista geométrico:

Inv: Não gostas de segmentos aos [a Inv. representa com um dedo um segmento constituído por tracinhos]?

SA: Não, não!

MA: Tem que ficar direito!

Inv: Tem que ficar direito, é?

SA: É.

Inv: Mas teoricamente não fazia mal que ele estivesse torto, ou fazia?

MA: Eu acho que não.

Inv: É só uma questão estética?

TA: Fica mais giro.

Inv: É?... Ou achas que ficava errado... É isso que eu quero saber, se estivesse torto, como vocês lhe chamam, se ficava errado?

TA: Eu acho que não.

Inv: Então?

TA: Eu acho que não.

Inv: Mas eu quero saber o que é que a SA pensa.

SA [ri-se]: Acho que não [voz sumida].

Inv: Pões direito só por uma questão estética, porque a ti te desagrada ver de outra maneira, ou porque achas que tem que ser mesmo assim?

SA: As duas coisas. Acho que é... Pronto gosto mais assim direitinho, e acho que também é melhor... Pronto geometricamente... acho que é melhor assim [ri-se]. (E6, §314-330.)

Passagem do episódio de ensino E1

Para JG os desenhos "direitos" são «mais bonitos»:

[JG cria o segmento e coloca-o na posição horizontal...]

DE: Não é preciso estar direito.

Inv: Não é preciso estar direito porquê?

JC, JG: (...) para a gente construir um segmento.

Inv: Então porque é que puseste direito?

JG: Para ser mais bonito. (E1, §8-13.)

No mesmo episódio de ensino, mais adiante, JC disse que ia «melhorar o aspecto», e deslocou um dos extremos de outro segmento até este ficar na posição horizontal.

Influência da primitiva *Aspecto dos objectos* do Cabri-géomètre

Quase todos os alunos habituaram-se a apagar, com a *Borracha* da primitiva *Aspecto dos objectos*, linhas e pontos auxiliares das construções, deixando à vista apenas os objectos que consideravam mais relevantes. Para o final da intervenção didáctica faziam-no mesmo quando isso não era expressamente solicitado. Muitos alunos gostavam também de colorir as construções, quando trabalhavam em postos computacionais com essa possibilidade, ou de distinguir os seus diferentes objectos com traços grossos e finos, (o que era possível em todos os postos computacionais). Isto foi qualquer coisa que os alunos decidiram fazer por si próprios. Um dos grupos, mais experiente na utilização de computadores, descobriu esse recurso do Cabri-géomètre "embelezou" uma construção, mostrou a outros e quase todos passaram a fazê-lo. Os exemplos seguintes ilustram estes factos.

Passagem do episódio de ensino E1

Influenciados, muito provavelmente, pelo nome da primitiva do Cabri-géomètre, os alunos participantes neste episódio referiram várias vezes que apagavam objectos auxiliares da construção, para «melhorar o aspecto»:

> JG: Agora vamos fazer um segmento daqui aqui, daqui aqui, daqui aqui e daqui aqui [aponta os vértices do quadrado]. Depois apagar as circunferências.
>
> [JC constrói os lados do quadrado...]
>
> JC: Agora vamos melhorar o aspecto [apaga duas circunferências auxiliares da construção]. (E1, §230-246.)

Passagens das fichas

Os grupos Computer Team, JJDM e QWERTY foram os que apresentaram mais construções coloridas, com cores diferentes e utilizando traços grossos e finos para distinguir objectos dados, auxiliares da construção e pedidos.

Na ficha Avaliação 2A em que nas duas primeiras actividades não eram dados desenhos, as duas primeiras construções do par XA/YB eram prototípicas e coloridas com cores diferentes para os diferentes objectos. Na terceira construção, o mesmo par representou o triângulo rectângulo numa posição um pouco diferente da habitual, simétrica em relação ao desenho da ficha, e também coloriram a construção.

Em resumo: o facto de a maioria dos alunos privilegiar a aparência das figuras geométricas, no sentido do Nível 1 de van Hiele, manifestou-se na sua tendência para reproduzir os desenhos que acompanhavam as actividades propostas nas fichas o que alguns consideravam mesmo uma obrigatoriedade. Mas, por vezes, a tentativa de reproduzir os desenhos dados tornou mais sofisticados alguns processos de construção.

Muitas das construções apresentadas eram exemplos prototípicos das figuras geométricas. Esta preferência pelos exemplos prototípicos fê-los adaptar os desenhos dados nas fichas para obter construções com essas características, principalmente na posição preferida horizontal/vertical. Quase todos os alunos consideravam essas construções visualmente mais agradáveis, o que para alguns significava também estarem mais correctas.

Muitos alunos utilizaram os recursos da primitiva *Aspecto dos objectos* para aperfeiçoar as suas construções, colorindo-as, apagando objectos auxiliares e/ou utilizando traços grossos e finos para distinguir diferentes tipos de objectos.

A atenção que muitos alunos se habituaram a dar espontaneamente ao modo como apresentavam as suas construções pode ser interpretada como um desenvolvimento progressivo da capacidade de distinguir o essencial do acessório, e consequentemente da sua compreensão das figuras geométricas.

5.2 Percursos de construção

Desde início estabeleceu-se com os alunos participantes a regra de que as suas construções geométricas deveriam conservar, através da manipulação, as características da figura que representavam (§4.1). Como se define em §2.7, convencionou-se chamar: *regra da resistência* a essa regra; *construções resistentes* às construções que verificam a regra da resistência e *construções que se desmancham* àquelas em que isso não acontece.

A "imposição" da regra da resistência resultou da noção de que por essa via os alunos seriam levados a descobrir que para fazerem construções resistentes teriam de utilizar processos de construção que recorressem a propriedades e relações geométricas da figura e não apenas à sua aparência visual.

Para obter as suas construções no ecrã do computador os alunos percorreram caminhos diferentes. Os diferentes *percursos de construção* (§2.7) podem-se agrupar em dois grandes tipos que têm a ver com o facto de os alunos começarem, ou não, por fazerem construções que se demancham. Cada um desses tipos subdivide-se noutros dois formados, em cada caso, com base em critérios específicos. Obtiveram-se, assim, quatro tipos de percursos de construção que se descrevem nas subsecções seguintes.

5.2.1 Percursos tipo P0: construções que se desmancham

Nos percursos tipo *P0: construções que se desmancham*, os alunos davam à construção no ecrã a aparência da figura que pretendiam construir, mas essa aparência desmanchava-se quando se deslocavam os pontos de base, ou outros objectos, da construção. Os alunos limitavam-se a fazer uma construção que se desmanchava e mesmo se comprovavam isso deixavam ficar assim. Este foi o processo mais elementar de fazer construções, utilizado por muitos alunos sobretudo quando não encontravam outro processo para fazer a actividade proposta. Como exemplo referem-se duas construções da última ficha.

Passagem da ficha Avaliação 2A/B

Na última ficha, cinco pares, em catorze, apresentaram construções que se desmanchavam totalmente ou parcialmente. Para construir o papagaio (1-ficha Avaliação 2B), um dos pares obteve um quadrilátero unindo quatro pontos criados ao acaso no ecrã e através da manipulação deu-lhe um aspecto muito semelhante ao do desenho dado (figura 5.3A). Outros pares construíram correctamente um triângulo rectângulo nas condições solicitadas (3-ficha Avaliação 2A/B), mas a circunferência que inscreveram no triângulo perdia essa propriedade através da manipulação.

5.2.2 Percursos tipo P1: construções que se desmancham, depois resistentes

Os percursos tipo *P1: construções que se desmancham, depois resistentes*, ocorriam quando os alunos, após terem feito uma construção, deslocavam os seus objectos de base, em geral pontos, e através do *feedback* devolvido pela manipulação comprovavam que não estava correcta porque não conservava a aparência da figura desejada, mas não deixavam a construção assim. Analisavam essa construção e a figura a construir e, sozinhos ou apoiados, descobriam processos que lhes permitiam fazer uma construção resistente.

Como exemplo deste tipo de percursos descreve-se a construção do quadrado com os lados tangentes a uma circunferência feita no episódio de ensino E7.

Passagem do episódio de ensino E7

Para obter um quadrado com os lados tangentes a uma circunferência (3-ficha 11), AC começou por construir a circunferência, um ponto sobre ela e a respectiva tangente [*A*, *r* - figura 5.4A]. Em seguida construiu mais outros dois pontos sobre a circunferência [*C*, *D*]. A investigadora perguntou se por esse processo iriam obter uma construção que permanecesse um quadrado quando fosse manipulada. AC explicou que ia construir raios perpendiculares, que representou gestualmente, e continuou a construção [tangente *s*]. A investigadora sugeriu que deslocasse um ponto [*C*] e voltou a perguntar se ia obter o quadrado, AC respondeu que não, mas que «depois intersectava as duas rectas [*r*, *s*] e punha um ponto».

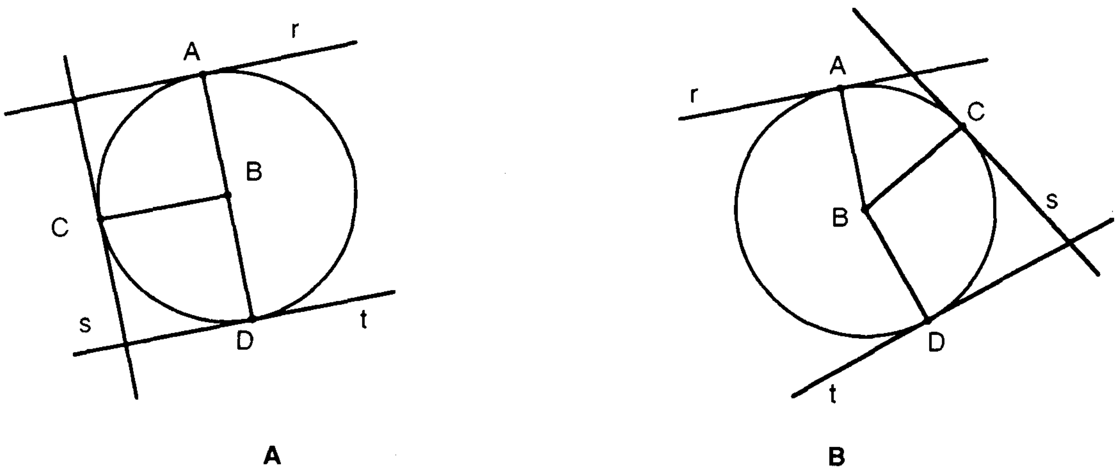


Fig. 5.4 - Duas fases da procura da solução para construir um quadrado com os lados tangentes a uma circunferência - E7.

ZC, que estava em melhor posição para manipular o rato, continuou e construiu o raio *[BD]* e a tangente *t*. A investigadora sugeriu, de novo, que deslocasse os pontos [figura 5.4B] e voltou a perguntar se iam obter um quadrado. AC insistiu na ideia de fixar os pontos através da intersecção das tangentes: «eu intersectava as duas tangentes e os pontos ficavam lá, à medida que eu mexesse os outros também mexiam». A investigadora perguntou, outra vez, se assim ia ficar sempre um quadrado e AC respondeu muito convictamente «não sei». A investigadora quis então saber onde é que ia pôr o quarto ponto de tangência e AC respondeu apontando que «primeiro endireitava a recta [*s*] e depois punha o ponto do outro lado». A investigadora fez notar que «depois podia voltar a "entortar" a recta», e AC respondeu que podia construir «uma recta paralela». A investigadora insistiu mais uma vez se os «pontos marcados ao acaso sobre a circunferência permitiam construir o quadrado» e AC respondeu «se calhar não». A investigadora pediu a opinião de ZC mas esta não disse nada. Nessa altura a investigadora sugeriu que recomeçassem a construção de modo a obedecer às condições requeridas.

A investigadora pediu às alunas que identificassem propriedades do quadrado e estas começaram por responder que tinha «os quatro lados iguais». A investigadora fez notar que havia outras figuras com os lados todos iguais e as alunas lembram-se do losango. A investigadora perguntou o que é que o quadrado tinha «mais», e AC recordou-se que os seus lados eram «perpendiculares». A investigadora sugeriu que usassem isso para fazer a construção.

ZC voltou a construir uma circunferência e uma primeira tangente [*r*, figura 5.5 - fases da construção E7[3]], a investigadora fez notar que estavam «outra vez na situação de partida» e perguntou como continuar. AC respondeu «agora, só se for marcar uma recta que seja perpendicular àquela [*r*] e que passe por outro ponto da circunferência». AC pareceu não saber como determinar esse ponto, a investigadora pediu-lhe que apontasse com o dedo por onde é que deviam passar as rectas necessárias para desenhar o quadrado e AC apontou os locais respectivos [*t*, *w*, *u* - figura 5.5]. A investigadora voltou a referir que os pontos onde essas rectas iam passar não podiam ser marcados «a olho», AC pensou um pouco, riu-se, pareceu ter tido uma ideia, e disse: «só se eu fizer uma recta que seja paralela a esta e que passe aqui pelo meio» [apontou *r* e o local de *s*]. A investigadora disse-lhe para avançar. AC abandonou a

[3] Os objectos geométricos seguintes referem-se a esta construção (figura 5.5). Os objectos não foram nomeados pelas alunas. As letras indicam a ordem pela qual objectos do mesmo tipo foram construídos.

atitude um pouco retraída que até aí tinha mantido, entusiasmou-se, voltou a pegar no rato e, sempre calada, construiu essa recta e os respectivos pontos de intersecção com a circunferência [*s*, *C*, *D*], as duas tangentes nesses pontos [*t*, *u*], a recta perpendicular *v* e o ponto de tangência que lhe faltava [*E*] e por último a tangente nesse ponto [*w*].

A investigadora acrescentou: «se eu vos disser, agora vão apagar as rectas porque eu quero que fique só o quadrado...» e AC respondeu, muito segura, «então, para isso tínhamos que marcar os pontos de intersecção». AC construiu a intersecção das tangentes duas a duas, criou os segmentos (lados) do quadrado e por último apagou com a *Borracha* as rectas tangentes.

Fases da história da construção E7

Circunferência
Centro de uma circ. *A*
Ponto sobre circ. *B*
Segmento definido por 2 pontos *[AB]*
Recta perpendicular *r*

Recta perpendicular *s*
Intersecção recta-circ. *C*, *D*
Recta perpendicular *t*
Recta perpendicular *u*

Recta perpendicular *v*
Intersecção recta-circ. *B*, *E*
Recta perpendicular *w*

4 × Intersecção de 2 rectas *F*, *G*, *H*, *I*

4 × Segmento definido por 2 pontos *[FG]*, *[FH]*, *[HI]*, *[IG]*
(As rectas auxiliares da construção são apagadas).

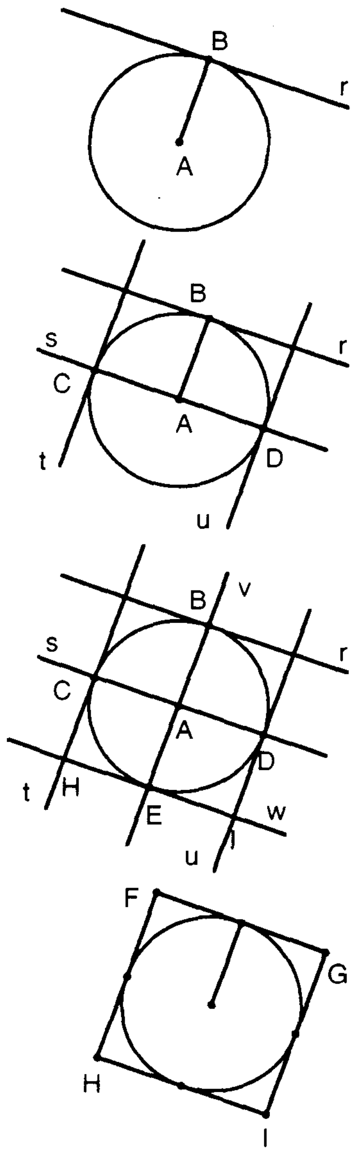


Fig. 5.5 - Fases da construção de um quadrado com os lados tangentes a uma circunferência - E7.

Predominância dos percursos tipo P1 nas aulas

Muitas das construções que os alunos fizeram nas aulas, talvez mesmo a grande maioria, seguiram a via *construções que se desmancham para resistentes*. Sempre que a investigadora detectou construções que se desmanchavam tentou levar os alunos a repensar o seu processo de construção. Noutros casos, os próprios alunos tomaram a iniciativa de abandonar construções que se desmanchavam e procuraram sozinhos soluções resistentes. A exploração das construções que se desmanchavam constituiu, com frequência, um auxiliar na descoberta de processos para obter construções resistentes. As seguintes passagens de episódios de ensino exemplificam estas questões.

Passagem do episódio de ensino E5

Para construir os segmentos que representavam as distâncias de um ponto ***p*** (figura 5.6[4]) da bissectriz aos lados do ângulo (2-ficha 12), o grupo SCIP aproveitou os pontos ***b*** e ***c***, que já existiam sobre os lados do ângulo, e construiu perpendiculares aos lados do ângulo passando por esses pontos. Em seguida deslocaram as perpendiculares até passarem pelo ponto ***p***. Partindo daí a investigadora discutiu o problema com as alunas, com a sua ajuda estas construíram o segmento que representava uma das distâncias e depois concluíram sozinhas a construção. No episódio de ensino, alguns dias depois, IS referiu correctamente a propriedade da equidistância dos pontos da bissectriz aos lados do ângulo e não hesitou em repetir correctamente a construção, que não tinha sido gravada.

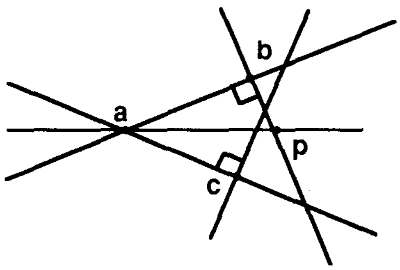


Fig. 5.6 - Procura da solução para o problema 2-ficha 12, grupo SCIP.

Passagem do episódio de ensino E4

Os comentários feitos por LA e BF enquanto reviam, através da primitiva *História*, a construção do centro de uma circunferência (2-ficha 10) que tinham feito na aula, mostram que efectuaram um percurso tipo P1. Os alunos começaram por construir uma corda da circunferência que aparentemente era um diâmetro e a respectiva mediatriz. Observaram que o ponto de intersecção

---

[4] Pontos nomeados pelas alunas com letras minúsculas.

da corda com a sua mediatriz não permanecia no centro na circunferência quando deslocavam os extremos da corda e por si próprios decidiram abandonar essa construção:

LA: Um ponto.

Inv: Ponto sobre a circunferência...

LA: Outro.

Inv: Outro, e um segmento definido pelos dois pontos, continua lá, e a mediatriz desse segmento.

LA: Mas acho que depois apagámos isto... mas não faz mal.

Inv: Está apagado. Espera, não continues, porque é que apagaram? É isso que eu quero saber. De facto vocês pararam e desistiram dessa ideia; porquê?

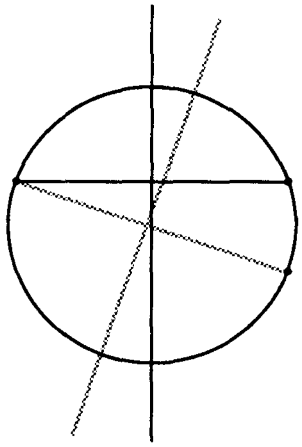


Fig. 5.7 - Tentativa para construir o centro de uma circunferência - grupo GENIOS

[Os dois alunos pensam durante algum tempo.]

LA: Ah, porque nós...

BF: Porque não conseguíamos determinar se estes coisos estavam certos. [Aponta o segmento e a mediatriz.]

LA: Pois, porque nós queríamos...

Inv: Explica lá o que é que tu queres dizer com essa ideia, BF.

BF: Nós não conseguíamos determinar se eles estavam na posição certa ou não, mas... se estavam aqui mais para cima ou mais para baixo [aponta].

Inv: O que é que tu entendes por posição certa?

BF: Quando está centrado tem o centro... tem o...

LA: Não tínhamos a certeza se passava pelo centro.

BF: Tem as medidas iguais em cima em baixo [aponta].

Inv: Ah! Diz lá, diz lá LA?

LA: Não tínhamos a certeza se passava... então, se era o diâmetro ou se era uma corda, se passava pelo centro. (E4, §107-124.)

5.2.3 Percursos tipo P2: construções resistentes com ensaios

Nos percursos tipo P2 e tipo P3 os alunos tentavam, desde início, obter construções resistentes, utilizando propriedades e relações geométricas. Os percursos tipo *P2: construções resistentes com ensaios*, caracterizam-se por os alunos ensaiarem diferentes processos de construção que invalidavam à medida que avançavam na construção, com ou sem sugestões da investigadora. Pode ver-se um exemplo deste tipo de percursos na construção que se descreve a seguir.

Passagem do episódio de ensino E1

Para construir um quadrado inscrito numa circunferência (2-ficha Avaliação 1) os alunos participantes neste episódio começaram por construir um segmento e duas circunferência [*[AB]*, *c1*, *c2* - figura 5.8A[5]]. Discutiram as suas ideias, DE queria construir a circunferência *c3*, JC disse que para isso «era preciso um segmento», mas pouco depois considerou que a construção estava «mal [...] porque assim [dividiam] em mais partes... iguais». Apontou no ecrã, contou e disse «penso que é seis partes iguais. Para dividir esta circunferência [*c1*] temos que achar um ponto aqui, aqui e aqui... para fazer um quadrado» e apontou os pontos sombreados na figura 5.8A. JC quis apagar tudo mas levou algum tempo, e JG, que continuou a observar a construção no ecrã, disse que «não se devia apagar», e propôs construir um ponto «assim, na mesma direcção do que este» [indicou o ponto à esquerda do ponto *A* - figura 5.8A], «que é para depois fazermos a mesma coisa que fizemos para este lado e ir construir pontos aqui assim» [apontou os pontos de intersecção de *c1* e *c3*].

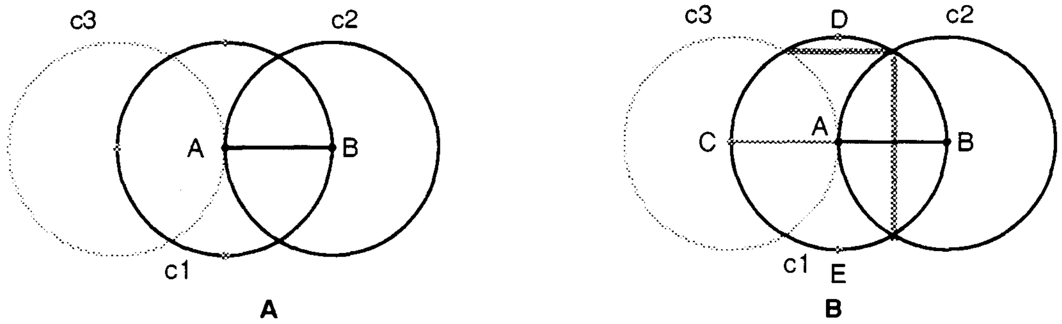


Fig. 5.8 - Duas fases da procura da solução para a construção de um quadrado inscrito numa circunferência [*c1*] - E1.

A investigadora sugeriu que os dois alunos se pusessem de acordo sobre o processo de fazer a construção e estes pediram a opinião do colega. DE pareceu não ter percebido muito bem e perguntou a JG se queria unir os pontos e indicou *C* e *D* - figura 5.8B. JC esclareceu que JG «queria achar o ponto [*C*] e colocar ali outra circunferência [*c3*]». JG acrescentou que não tinha «a certeza se os segmentos [sombreados na figura 5.8B] eram iguais». DE disse imediatamente «não dá» e JG concordou mas a investigadora sugeriu que o deixassem experimentar. JG construiu uma recta a passar por *A* e *B*, o ponto de intersecção dessa recta com a circunferência *c1* [*C*], a circunferência *c3* e comentou: «agora que a gente o vê melhor... Não. Parece-me que não vai dar. Parece que vai ficar antes um rectângulo» [simulou-o com o dedo no ecrã].

[5] Os objectos não foram nomeados pelos alunos. As letras indicam a ordem pela qual objectos do mesmo tipo foram construídos.

JG quis apagar tudo, mas DE propôs construir uma recta a passar por *A* e perpendicular a *r* (figura 5.9A) pois assim dava «para unir e ficam iguais». JG construiu essa recta, determinou os seus pontos de intersecção com a circunferência *c1*, criou os quatro lados do quadrado e apagou as duas circunferências auxiliares *c2* e *c3* (figura 5.9B).

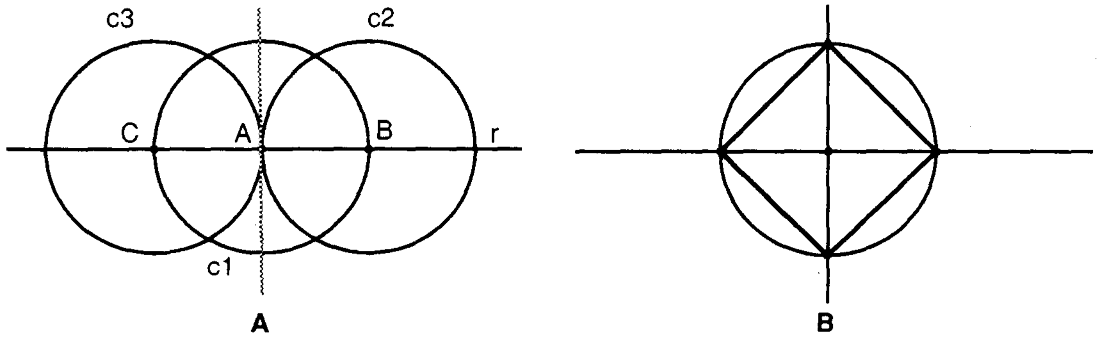


Fig. 5.9 - Duas fases da construção de um quadrado inscrito numa circunferência [*c1*] - E1.

Também nas aulas muitos alunos ensaiaram tentativas para fazer construções resistentes, reformulando as suas ideias a partir do que observavam no ecrã do computador, como mostra o exemplo seguinte

Passagem da ficha Avaliação 2B

Para construir o papagaio (1-ficha Avaliação 2B) IS fez várias tentativas. Entre elas construiu as duas mediatrizes que se vêem na figura 5.10. Depois de criar os dois lados menores a sua colega sugeriu que unisse «também o ponto de baixo» [pontos em que mediatriz *m* intersecta a circunferência] mas IS observou o papagaio da ficha e respondeu «tem que ficar mais em baixo». Observou de novo a sua construção e pouco tempo depois lembrou-se de construir um ponto sobre a mediatriz e a partir dele os outros dois lados do papagaio.

Construção IS
Segmento (diâmetro)
Ponto médio
Circ. definida por 2 pontos
Mediatriz *m*
Mediatriz *n*
Intersecção mediatriz *m*-circ.
2 × Segmento (2 lados menores)
Ponto sobre recta
2 × Segmento (2 lados maiores)

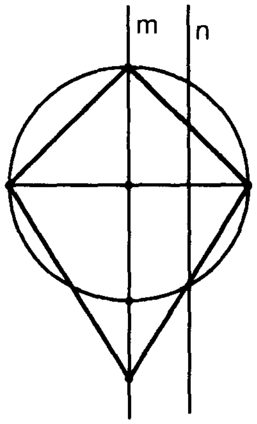


Fig. 5.10 - História da construção do papagaio - IS.

5.2.4 Percursos tipo P3: construções resistentes sem ensaios

Nos percursos tipo P3 os alunos executavam, de uma só vez e sem hesitações, todos os passos necessários da construção baseados em propriedades e relações geométricas. Identificou-se este tipo de percurso na realização de construções simples, como a construção de uma circunferência a partir de um segmento que era o seu diâmetro, e também em construções mais complicadas. A construção de um quadrado com os lados tangentes a uma circunferência realizada no episódio de ensino E5 é um exemplo deste tipo de percurso, como mostra o exemplo seguinte.

Passagem do episódio de ensino E5

IS descobriu, desde início, a relação entre os quatro pontos onde os lados do quadrado seriam tangentes à circunferência e indicou um processo de construção em que obteve sucessivamente: os quatro pontos de tangência, as quatro tangentes, os quatro vértices do quadrado e por fim os seus quatro lados (fases da construção E5.2 - figura 5.11). Este processo difere do utilizado no episódio E7, em que as alunas partiram de um ponto construído sobre a circunferência, ao acaso, construíram a respectiva tangente e só posteriormente descobriram como podiam obter os restantes três pontos e as respectivas tangentes, como se descreve em §5.2.2.

Fases da construção E5.2
Circunferência
Centro de uma circ. *A*[6]
Ponto *B*
Recta definida por 2 pontos *r*
Recta perpendicular *s*
Intersecção recta-circ. *C*, *D*
Intersecção recta-circ. *E*, *F*
4 × Recta perpendicular *t*, *u*, *v*, *w*
4 × Intersecção de 2 rectas *G*, *H*, *I*, *J*
4 × Segmento definido por 2 pontos *[GJ]*, *[GH]*, *[HI]*, *[IJ]*
(As rectas auxiliares da construção são apagadas.)

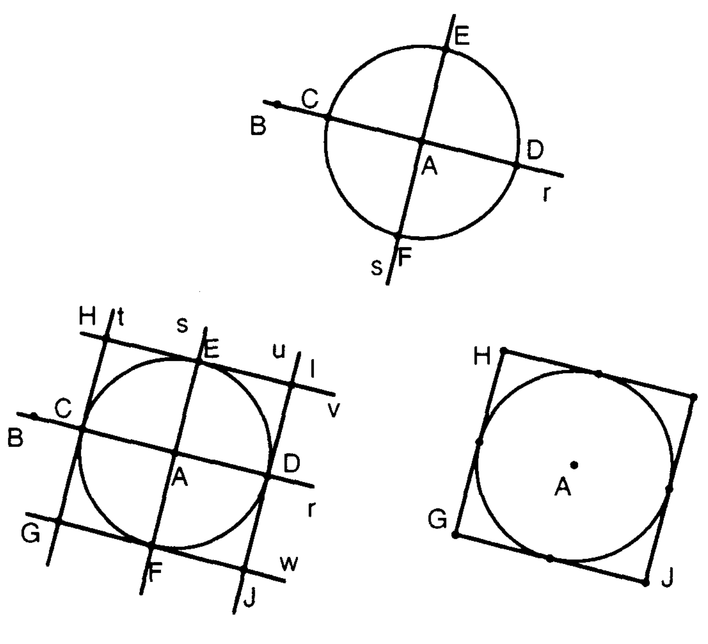


Fig. 5.11 - Fases da construção de um quadrado com os lados tangentes à circunferência - E5.

---

6 As alunas não nomearam os objectos. As letras indicam a ordem pela qual objectos do mesmo tipo foram construídos.

Passagem do episódio de ensino E3

A realização de construções resistentes sem ensaios prévios não aconteceu apenas nos episódios de ensino. PF e RD afirmaram que descobriram rapidamente e sem fazer tentativas como fazer a primeira actividade da ficha 10: construir duas circunferências a passar pelos extremos de um segmento dado.

Inv: Agora digam-me só mais uma coisa, quando começaram a fazer este primeiro exercício já tinham a ideia que isso ia ser feito assim, ou fizeram alguns ensaios primeiro?

PF, RD: Este aqui? [1-ficha 10.]

RD: Não, fizemos logo assim.

[Os alunos explicam que tiveram de repetir a construção porque a apagaram sem querer.]

RD: A única dúvida que a gente teve foi na mediatriz, se podíamos utilizar logo...

PF: O coiso, ali a propriedade daquilo ou então...

RD: A mediatriz ou tínhamos que fazer com a perpendicular. Foi a única dificuldade. [Referem-se à aula anterior em que não tinham disponível a primitiva *Mediatriz*.]

Inv: Levou-vos muito tempo a descobrir a solução?

RD: Não.

PF: 2 minutos e... e zero segundos [ri-se]. Foi num abrir e fechar de olhos. (E3, §23-42.)

Em resumo: os tipos de percurso seguidos pelos alunos para realizar as suas construções agrupam-se em duas grandes categorias: percursos em que os alunos fazem construções que se desmancham; percursos em que os alunos apenas fazem construções resistentes. Cada uma destas duas categorias subdivide-se noutras duas, formando quatro tipos de percursos. Nos percursos tipo *P0: construções que se desmancham*, os alunos obtinham no ecrã uma construção aparentemente com as características solicitadas mas que não resistia à manipulação, e ficavam-se por aí. Nos percursos tipo *P1: construções que se desmancham, depois resistentes,* os alunos começavam por fazer uma construção que se desmanchava, manipulavam-na e observavam que não conservava as características pretendidas. A partir daí, apoiados pela investigadora, ou sozinhos, descobriam processos para obter uma construção resistente, utilizando propriedades e relações da figura. Nos percursos tipo *P2: construções resistentes com ensaios*, os alunos ensaiavam diferentes processos para obter uma construção resistente. Nos percursos *P3: construções resistentes sem ensaios*, os alunos, sem fazerem quaisquer ensaios, obtinham uma construção resistente.

A maioria das construções realizadas seguiu percursos tipo P1. Nesses casos, a realização e exploração inicial de construções que se desmanchavam constituiu um etapa fundamental na descoberta das soluções resistentes.

5.3 Construções resistentes

A classificação dos tipos de percursos de construção, feita na secção anterior, não deve ser entendida linearmente. Verificou-se, nos episódios de ensino e ao longo da intervenção didáctica, que os mesmos alunos, ou grupo de alunos, utilizava um ou outro tipo de percurso em actividades diferentes e por vezes misturavam-nos. Nesta secção discutem-se algumas razões que levaram os alunos a seguir um ou outro desses tipos percursos, começando por analisar a permanência de construções que se desmanchavam, até às últimas actividades. Discute-se ainda a influência da *visualização* e de processos de construção familiares (*guiões*) na realização de construções resistentes e a *certeza* dos alunos no resultado desses guiões.

5.3.1 Permanência de construções que se desmancham

Durante toda a intervenção didáctica a regra da resistência à manipulação manteve-se sempre presente, de forma mais ou menos explícita. Mesmo assim, até ao fim, um número significativo de alunos continuou a realizar construções que se desmanchavam. Entre outros, destacam-se os seguintes motivos, que se desenvolvem nas subsecções seguintes: dificuldade de alguns alunos em compreenderem o sentido da regra da resistência; falta de disponibilidade que pontualmente alguns alunos manifestaram para procurarem soluções resistentes; privilégio que alguns alunos deram a casos particulares de uma construção.

Compreensão da regra da resistência à manipulação

A análise de algumas situações permite formular a hipótese de que a produção de construções resistentes, baseadas na análise das propriedades da figura e não só na sua aparência, terá sido, para alguns alunos, uma "regra de jogo" que tentavam cumprir porque em caso contrário as suas construções não seriam bem aceites, sem perceberem muito bem a sua razão de ser, como mostram os exemplos seguintes.

Passagem da ficha Avaliação 1 - grupo DAD

Na construção de um quadrado inscrito numa circunferência (2-ficha Avaliação 1) os alunos do grupo DAD começaram por querer dar à construção a aparência pretendida através da manipulação, mas depois lembraram-se de que a investigadora não aceitava essas construções, como se vê na conversa seguinte:

ZA: Porque é que isso não tem um quadrado?... Depois mexe-se nos pontos. Não é aqui, é aqui.

AC: Tem que ter os lados todos iguais.

ZA: Não interessa isso.

AC: Não interessa o quê!

ZA: Depois quando fores medir os ângulos metes tudo a 90°. Já percebeste?

AC: Não. Porque é que vais marcar o ponto aí?

ZC: Para que é que ele está a fazer isto?

ZA: Estás a ver, agora com a mãozinha podes mexer aqui.

AC: Então vá. Só que esses pontos têm que ficar fixos na circunferência. Não podem andar aí de um lado para o outro.

ZA: Onde é que é ... Olha, sabes o que é que eu vou fazer? Apagar tudo.

AC: Vais apagar tudo outra vez?

ZA: É. ... Apaga-se tudo e depois faço outra vez. (DAD, §81-93)

[...]

AC: Agora ponto sobre objecto. Ou será que é intersecção de dois objectos? É intersecção de dois objectos que é para o ponto ficar fixo. Lembras-te do que a *Setora* disse? Nós fizemos mal porque o ponto movia-se. Não fizemos a intersecção de dois objectos. ... E agora é a *Intersecção de dois objectos*. (DAD, §237)

Passagem do episódio de ensino E7

Durante a construção de um quadrado com os lados tangentes a uma circunferência, resumida em §5.2.2, AC não pareceu estar muito convencida da necessidade de obter um quadrado resistente. A forma afirmativa como respondeu «não sei» quando a investigadora insistiu em perguntar se a sua construção ia «ficar sempre um quadrado», pode querer significar que para ela isso não era muito importante, pois logo a seguir insistiu em continuar a construção "endireitando" uma recta, isto é, baseada apenas na sua aparência, e só perante a insistência da investigadora em que essa aparência podia ser sempre modificada é que pareceu começar a pensar nas relações geométricas implícitas no quadrado, mas sem grande certeza, como a resposta «se calhar não», deixa perceber:

Inv: Está bem, mas achas que vai ficar sempre quadrado?

AC: Não sei [muito afirmativa].

Inv: Não sabes. Então vamos lá, falta marcar o quarto ponto sobre a circunferência, marca lá... aí e clica, Ponto sobre objecto... Aonde é que vais pôr o quarto ponto agora?... AC?

AC: Então, ela [ZC] primeiro tinha que endireitar esta recta [*s*] e depois metia o outro ponto aqui [aponta o lado esquerdo da circunferência - figura 5.5].

Inv: Primeiro tinha que endireitar a recta... então, mas eu depois posso voltar a entortá-la ou não posso?

AC: Então assim só se fizer uma recta paralela a esta [aponta o lado esquerdo da circunferência e a recta *s*].

Inv: Então era isso que eu estava a perguntar desde o princípio. Por este processo, marcando assim os pontos ao acaso sobre a circunferência, tu consegues garantir que no fim obténs um quadrado?

AC: Se calhar não. (E7, §233-244.)

As afirmações de AC sobre a sua visualização global do quadrado, depois de concluir a construção, corroboram o facto de esta aluna privilegiar a correcção visual das construções:

Inv: [...] Mas ao princípio não estavas a ver que tinhas que ir por este processo. Porquê?

AC: Pensei nisso, mas depois... só consegui ver o quadrado.

Inv: Depois achaste que bastava marcar os pontos sobre a circunferência de qualquer maneira, porquê?...

[AC acena não.]

Inv: Não sabes. Mas tu já sabes que se marcasses os pontos sobre a circunferência de qualquer maneira eles não ficavam lá fixos, ou não sabes isso?

AC: Ao princípio não pensei nisso, só depois.

Inv: Ao princípio não pensaste nisso. Podias obter uma figura com quatro lados mas que umas vezes era um quadrado outras vezes não era. Portanto para fazer esta construção tiveste que recorrer, no fundo, às propriedades que definem o quadrado. Mas não pensaste nisso?

AC: Ao princípio não. (E7, §373-380.)

Dificuldade em descobrir processos de construção resistentes

Nem sempre as construções que se desmanchavam apresentadas pelos alunos resultaram de estes não sentirem necessidade de as fazer resistentes. A análise de certas construções realizadas, em particular, por alunos que habitualmente faziam construções correctas, permite levantar a hipótese de que por vezes optavam por construções que se desmanchavam quando sozinhos não encontravam uma solução resistente, uma vezes por falta de disponibilidade, outras por falta de tempo, como mostram os dois exemplos seguintes.

Passagem da ficha 11 - grupo QWERTY

Na construção de um trapézio inscrito numa circunferência (1-ficha 11) a investigadora não testou a resolução deste grupo e os alunos deixaram ficar uma construção que se desmanchava. Habitualmente este grupo descobria rapidamente como fazer as construções, mas quando isso não acontecia manifestava pouca disponibilidade para uma procura mais demorada e desistia ou apresentava soluções que se desmanchavam.

Passagem da ficha Avaliação 2A

Um dos pares que melhores desempenhos demonstrou ao longo da intervenção didáctica fez correctamente as construções propostas na ficha

Avaliação 2A, excepto a última, em que inscreveu no triângulo uma circunferência que não era resistente. Embora soubessem que «não estava muito bem assim», preferiram dar essa resposta «porque não tinham mais tempo», como posteriormente relataram à investigadora.

Privilégio dado a casos particulares de uma construção

Identificou-se ainda outro tipo de soluções que se desmanchavam, resultante de ter sido privilegiado um caso particular, prototípico, de uma construção, como mostra o exemplo seguinte.

Passagem do episódio de ensino E6

Para determinar a localização de um fogão à mesma distância de três tendas de campismo (2-ficha 9B), o grupo TMX construiu um triângulo e as mediatrizes dos três lados (figura 5.12), mas responderam na ficha que colocavam o fogão no ponto médio do segmento [T1T2].

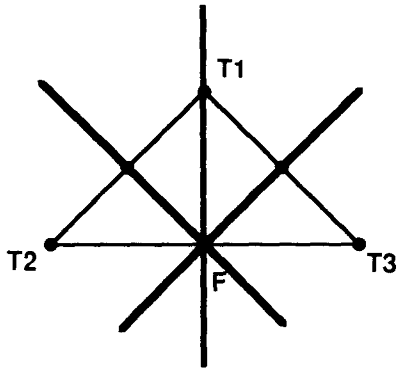


Fig. 5.12 - Localização de um fogão *F* à mesma distância de três tendas de campismo, *T1*, *T2*, *T3* - grupo TMX.

Estas alunas explicaram depois, no episódio de ensino, que como na sua construção o ponto de intersecção das mediatrizes coincidia com o ponto médio de um dos lados do triângulo, não construíram esse ponto de intersecção. No entanto, reconheceram que não descobriram que a coincidência nem sempre era válida porque não manipularam a construção.

Inv: O que me fez confusão é que vocês fazem a construção utilizando as três mediatrizes, mas depois vão dizer que a solução do problema é o ponto médio, então para isso não era preciso ter feito...

TA: Pois não.

Inv: Porque é que vocês dão essa resposta? Percebem a minha dúvida?

TA: Então, porque a intersecção das mediatrizes dava no ponto *F*, por isso é que... [Ri-se.]

Inv: Ah! Foi por isso é que vocês deram essa resposta?

TA: Pois.

Inv: Porque, por coincidência, para a figura que vocês tinham...

[TA acena sim.]

Inv: Foi?

TA: Foi. E não mexemos por isso é que não descobrimos. (E6, §143-152.)

5.3.2 Visualização na procura de soluções resistentes

Na procura de soluções resistentes para as construções, a visualização — considerada em sentido lato como a capacidade de tratar informação visual (§2.7), desempenhou essencialmente dois papéis. Um papel controlador, que permitia aos alunos perceber a incorrecção de construções que se desmanchavam. Um papel explorador, que lhes permitia experimentar ideias para descobrir processos de obter construções resistentes. Estes dois papéis complementavam-se, no sentido em que, muitas vezes, era a partir de explorações sobre as construções que se desmanchavam que os alunos descobriam processos para obter construções resistentes.

Papel controlador da visualização

Através do *feedback* devolvido pela manipulação, muitos alunos percebiam a incorrecção das suas construções sempre que observavam que estas perdiam a aparência desejada. Esta revelou-se uma etapa crucial nos percursos de construção tipo P1 (§5.5.2), a partir da qual os alunos começavam a procurar processos de construção resistentes. A passagem seguinte é disso exemplo.

Passagem do episódio de ensino E4

LA e BF começaram por construir um rectângulo inscrito numa circunferência em que apenas dois lados estavam contidos em rectas paralelas. A perpendicularidade dos outros dois lados foi obtida deslocando pontos sobre a circunferência até que a construção tivesse a aparência de um rectângulo.

No fim a investigadora sugeriu-lhes que continuassem a deslocar os pontos de base da construção e que medissem os ângulos. LA e BF observaram que o seu "rectângulo" se transformava noutras figuras sem essas características (figura 5.13).

Inv: Agora pega lá nos pontos de que partiste e vê lá se essa figura é, de facto, sempre um rectângulo.

LA [manipula a construção - figura 5.13A]: Não.

[...]

Inv: Bem, mede lá, vá. Para ser um rectângulo esse ângulo tinha que ter que amplitude?

LA, BF: 90.

Inv: Então vá, mede.

[LA marca e mede um ângulo - figura 5.13B.]

BF: Tem 92.

Inv: [...] Mexe lá outro ponto da circunferência.

LA: Pode ser este?

Inv: Experimenta.

LA: Ohps! Só pode ser este.

Inv: Alto, alto.

BF: 62 [figura 5.13C].

Inv: Já estás a ver que essa figura?

BF: Dá o quadrado, dá o triângulo...

LA: Um triângulo não dá...

BF: Ah, não, está aqui cortado [aponta o lado menor]. (E4, §197-256.)

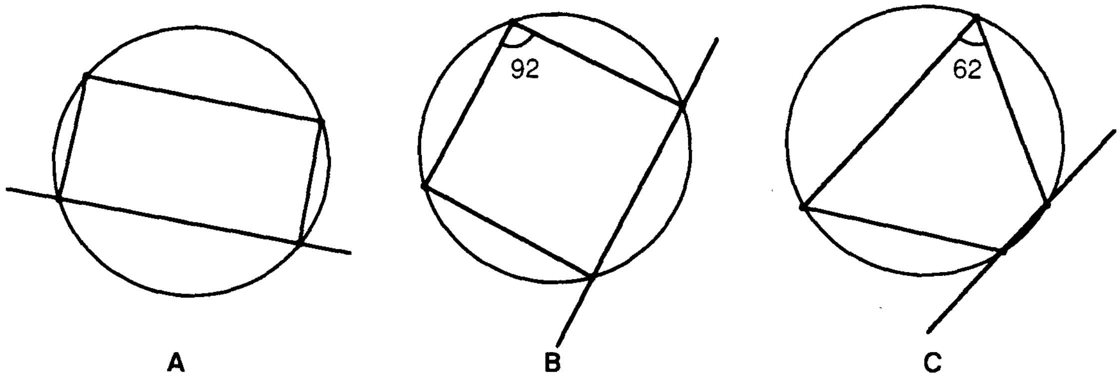


Fig. 5.13 - O "rectângulo" transforma-se noutras figuras através da manipulação - E4.

LA quis desistir mas a investigadora insistiu que era possível inscrever um rectângulo na circunferência e através do diálogo levou LA a explicitar a relação de perpendicularidade entre os seus lados e a usar isso para fazer a construção:

Inv: Mas vocês conseguem fazer aí um rectângulo. Vamos lá tentar fazer um rectângulo.

[LA apagou a construção anterior e voltou a construir uma circunferência e uma corda.]

Inv: [...] O que é que hás-de fazer agora para construir um rectângulo?

BF: Agora outra paralela àquela.

LA: Voltamos à mesma.

Inv: Mas vocês já sabem que essa não dá, vamos pensar de outra maneira.... LA, o que é que tu disseste há bocadinho? Os ângulos do rectângulo são como?

LA: São de 90°. São ângulos rectos.

Inv: São de 90°.

LA: São.

Inv: Então como é que hás-de fazer para que a figura fique com ângulos de 90°?

LA: Traço perpendiculares.

Inv: Ora, estás muito inteligente!

BF: Grande LA! (E4, §261-300.)

LA apagou tudo o que já tinha feito, recomeçou a construção e desta vez executou-a sem dificuldade.

Papel explorador da visualização

Como mostra o exemplo anterior, através da manipulação muitos alunos percebiam a incorrecção das construções que se desmanchavam, mas para avaçarem na sua exploração necessitavam do apoio da investigadora que através das questões que lhes colocava os levava a reflectir sobre a construção e a extraírem informação pertinente. Com o avançar da intervenção didáctica, alguns alunos passaram a fazer explorações e a retirar delas informação, de forma mais autónoma.

Essencialmente nos percursos tipo P2, em que desde o início os alunos baseavam as suas construções em propriedades das figuras, a visualização das suas ideias concretizadas no ecrã do computador permitiu-lhes explorar processos de resolver os problemas e perceber a sua (in)adequação, como mostra o exemplo seguinte.

Passagem do episódio de ensino E3

Para encontrar um ponto de encontro numa estrada à mesma distância de duas casas, PF começou por propor a construção de dois segmentos, que representou com os dedos sobre a construção no ecrã e percebeu, assim, que um deles seria maior do que o outro:

Inv: Tu estás na tua casa que é representada pelo ponto *P*, aqui nesta situação...

PF: Sim.

Inv: O RD está na casa dele, representada por *R*, e vão encontrar-se naquela estrada...

PF: Sim.

Inv: Mas de tal maneira que os dois vão andar exactamente a mesma distância.

PF: Oh, ele mete-se a andar assim e eu assim [aponta com o dedos os segmentos a ponteado na figura 5.13].

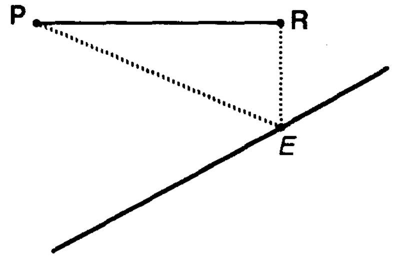


Fig. 5.14 - A distância da casa **P** ao ponto *E* da estrada é maior do que a distância da casa **R** ao mesmo ponto - E3.

Inv: Está bem, eu quero que construas rigorosamente o ponto onde vocês se devem encontrar.

PF: Mas tem que ser aqui, assim, na estrada ou pode ser aqui, para este lado? [Aponta uma zona entre o segmento e a recta.]

Inv: Tem que ser sobre a estrada, um ponto da estrada.

PF: Ele anda assim e eu ando assim [volta a simular gestualmente os mesmos segmentos - figura 5.14]... Não, assim não porque assim vou andar mais. (E3, §402-413.)

Passagem do episódio de ensino E1

Os ensaios que os alunos fizeram para construir um quadrado inscrito numa circunferência, descritos em §5.2.3, também mostram como a observação das suas ideias concretizadas no ecrã lhes permitia descobrir formas de realizar as actividades.

JC observou a construção feita pelos colegas e contestou o processo que estava a ser utilizado porque ia dividir a circunferência em seis partes e não nas quatro necessárias. JG contrapropôs outra forma de unir os pontos, mas ficou na dúvida se iria obter um quadrado. Mais adiante a concretização da sua ideia no ecrã do computador deu-lhe a certeza de que por aí não resolvia o problema.

JC: Porque assim, se nós vamos fazer aqui esta circunferência, depois fizermos aqui outra, dividimos em mais partes... iguais. Dividimos em [aponta no ecrã e conta] dois, três, quatro, cinco, seis. Penso que é seis partes iguais. Para dividir esta circunferência temos que achar um ponto aqui, aqui e aqui... para fazer um quadrado [aponta os pontos assinalados em *c1* - figura 5.8]. Então vamos fazer... [Agarra no rato] podemos apagar isto?

[...]

JG: Sim, só que não tenho ainda a certeza se — sem estar a ver não tenho a certeza — se isto aqui, esta recta, vai dar a mesma medida do que esta... [simula com os dedos os segmentos na figura 5.8].

[JG continua a construção...]

JG: Agora que a gente o vê melhor... Não. Parece-me que não vai dar. Parece que vai ficar antes um rectângulo [aponta]. (E1, §127, 153, 193.)

Quando JG comprovou o desajuste da sua ideia quis apagar tudo, mas DE continuou a observar a construção no ecrã e propôs uma nova ideia que aproveitava parte do que estava feito. Enquanto JG concluiu a construção de acordo com essa sugestão, DE considerou, muito satisfeito, que a tinha «reciclado»:

DE: Então, mas se nós fizermos assim, aqui assim uma recta, dá para unir... ficam iguais [simula uma recta perpendicular à recta *r* a passar por *A* - figura 5.8].

Inv: Então vá. Fazes tu [JG]. Aproveita lá a ideia do DE.

[JG executa a proposta de DE...]

DE: Eu aproveito tudo, eu "recico".

[...]

Inv: O que é que tu disseste, desculpa?

DE: "Recico".

Ent [para DE]: Tu o quê? Reciclas, é isso que queres dizer?

DE: Pois, como eles queriam apagar isto tudo...

Inv: Tu reciclaste a ideia deles.

DE: Pois. (E1, §§210-211; 245-252.)

5.3.3 Guiões na realização de construções resistentes

À medida que avançaram na realização das actividades propostas na intervenção didáctica, para fazerem novas construções muitos alunos começaram a repetir processos já seus conhecidos — *guiões* (§2.7). Este é um procedimento habitual na maioria das actividades que os alunos fazem nas aulas de Matemática. Porém, aqui, foram os próprios alunos que inicialmente inventaram a maioria das sequências de procedimentos, que depois decidiram utilizar noutras actividades, baseados em efeitos que tinham verificado que produziam.

Nos sete episódios de ensino e nas aulas foi possível identificar o recurso quase sistemático a guiões, umas vezes aplicados tal e qual como anteriormente, outras vezes sofrendo algumas alterações para os adaptar à nova situação, como mostram os exemplos seguintes.

Passagem do episódio de ensino E6

Para construir um quadrado com os lados tangentes a uma circunferência (3-ficha 11), as alunas participantes neste episódio começaram por executar o processo que usaram na actividade anterior para construir uma tangente a uma circunferência (2-ficha 11), e depois pretenderam repeti-lo para construir outras tangentes:

MA [lê 3-ficha 11]: «Criem uma circunferência»... É outra vez o mesmo.

SA [cria uma circunferência]: Mais?

MA [lê]: «Construam um quadrado cujos lados sejam tangentes a essa circunferência».

TA: Agora é a mesma coisa.

SA: Marcar um raio.

TA: Marca-se o raio..., o ponto..., o centro da circunferência...

Inv: Vamos embora, vá, vamos por aí fora...

[... SA constrói a primeira tangente.]

Inv: E agora?

SA: Temos que fazer outro segmento, não é, para fazer outra perpendicular.

Inv: ...fazer outro segmento para fazer outra recta perpendicular... Aquilo que se quer é um?

SA: É um quadrado.

Inv: Quadrado, cujos lados sejam?

TA: Tangentes.

Inv: Tangentes, vá...

TA: Então tens que fazer outra...

[SA constrói outro ponto sobre a circunferência.] (E6, §282-342.)

O facto de as alunas terem pretendido continuar a construção marcando os outros pontos de tangência sobre a circunferência aparentemente na posição que lhes interessava, pode parecer contraditório com o facto de não terem sido tentadas a construir "tangentes aparentes". Mas esse foi o guião que aprenderam imediatamente antes e que, por isso, esperavam ver aplicado na actividade seguinte, como acontece com frequência no ambiente habitual dos alunos.

Passagem da ficha 10

A adaptação de guiões revelou-se sobretudo na construção do centro de uma circunferência (2-ficha 10). Para obter esta construção, alguns grupos começaram por fazer tentativas que se desmanchavam, com características prototípicas, que depois abandonaram porque não as conseguiram transformar em resistentes. Por exemplo, o grupo GENIOS pensou inicialmente em inscrever um quadrado na circunferência e intersectar as mediatrizes dos seus lados (construção simétrica e equilibrada), mas desistiu dessa ideia porque não conseguiu que o quadrado ficasse «centrado», como LA relatou no episódio no episódio de ensino E4.

O mesmo aluno acrescentou que um elemento do grupo se lembrou então de usar «o triângulo da aula anterior». Nessa aula anterior os grupos tinham criado um triângulo, construído as mediatrizes dos três lados e observado que se intersectavam no mesmo ponto. Tinham construído a circunferência com centro nesse ponto e a passar por um dos vértices do triângulo e observado que também passava nos outros dois vértices (2, 3-ficha 9). Para resolver o problema da ficha 10 todos os grupos acabaram por criar um triângulo a partir de três pontos sobre a circunferência e construíram as mediatrizes dos seus três lados. Mas apenas três grupos o descobriram por si próprios. Para desbloquear os outros grupos foi-lhes sugerido que marcassem três pontos sobre a circunferência.

Os alunos inverteram a situação da ficha 9 para resolver o problema da ficha 10, mas baseados essencialmente no efeito visual familiar daquela sequência de procedimentos, uma vez que nenhum grupo se lembrou que bastavam duas cordas e duas mediatrizes para determinar o centro, apesar de efectivamente só terem intersectado duas das três mediatrizes que construíram.

A influência do guião utilizado para construir a circunferência circunscrita a um triângulo levou o grupo DAD a ignorar outro processo correcto que começou por usar para determinar o centro de uma circunferência. Estes alunos construíram o triângulo e a mediatriz de um dos lados, intersectaram essa mediatriz com a circunferência e determinaram o ponto médio do segmento definido por esses pontos de intersecção. Depois continuaram, construíram as mediatrizes dos outros dois lados e o ponto de intersecção de duas delas, como mostra a figura 5.15.

Construção VISION10[7]
Circunferência
3 × Ponto sobre circ. *A, B, C*
3 × Segmento definido por 2 pontos *[AB], [AC], [BC]*
Pt. médio *D*
Recta perpendicular *r*
Intersecção recta-circ. *E, F*
Pt. médio *G*
Pt. médio *H*
Mediatriz *s*
Mediatriz *t*
Intersecção de 2 rectas *I*

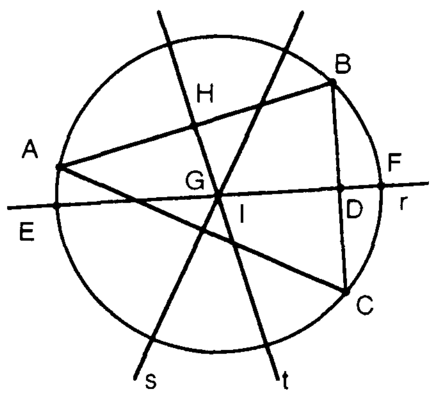


Fig. 5.15 - História da construção do centro de uma circunferência - grupo DAD.

Passagem do episódio de ensino E7

Na construção anterior, a segunda parte poderia eventualmente ter servido para confirmar a primeira. Mas quando repetiram essa construção, no episódio de ensino E7, as alunas AC e ZC, do grupo DAD, insistiram em usar as três mediatrizes, não se recordaram do primeiro processo e afirmaram que deveriam ter sido os outros dois colegas do grupo a fazê-lo.

A investigadora perguntou-lhes ainda se eram necessárias três mediatrizes para fazer a construção. AC começou por fazer referência à construção que não reconheceu como sua e respondeu que bastava uma. Não reconheceu que duas cordas e duas mediatrizes eram suficientes, nem mesmo quando a pergunta lhe foi feita directamente:

Inv: Portanto, a vossa ideia para construir o centro de uma circunferência, era fazer a intersecção das mediatrizes de três cordas. Mas eram precisas três cordas?

AC: Naquela era só precisa uma.

Inv: Está bem, agora esqueçam aquela [construção] que não foram, pelos vistos, vocês que fizeram, ou vocês não se lembram disso. Mas vocês lembravam-se, estavam a dizer, que para construir o centro de uma circunferência faziam as mediatrizes de três cordas...

---

[7] Os objectos não foram nomeados pelos alunos. As letras indicam a ordem pela qual foram construídos objectos do mesmo tipo. O nome da construção foi atribuído pelos alunos.

ZC: Pois. [AC acena sim.]

Inv: O que eu pergunto é se eram precisas três cordas?

AC [pensa durante um bocado]: Eu acho que sim.

Inv: Era?

[Como as alunas não disseram nada a investigadora abandonou a questão.] (E7, §111-117).

Guiões e utilização implícita de propriedades geométricas

O exemplo anterior deixa perceber que o guião foi utilizado tendo em conta a experiência que os alunos possuíam sobre a sua aplicação. Ainda que, para realizar construções resistentes, muitas vezes os alunos executassem guiões baseados em propriedades e relações geométricas, nem sempre tinham muito explícitas as propriedades e relações que estavam a usar. Os exemplos seguintes clarificam esta ideia.

Passagem do episódio de ensino E5

Para localizar um candeeiro à mesma distância de três ruas (2-ficha 13 - figura 5.16) IS propôs construir, primeiro «três perpendiculares», e depois «três bissectrizes», mas não foi capaz de explicar porque é que fazia a construção assim. É plausível supor que, já que não podia utilizar as perpendiculares, porque não conheciam o ponto por onde deveriam passar e como a bissectriz era o "tema do dia" (fichas 12, 13) deveria ser esse o guião que permitiria realizar a construção.

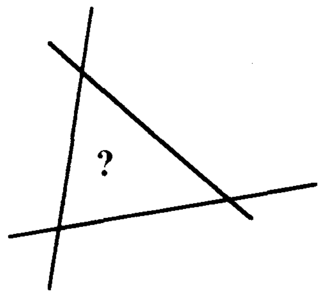


Fig. 5.16 - Onde colocar um candeeiro à mesma distância de três ruas? (2-ficha 13).

Passagem do episódio de ensino E1

Depois de JG e DE terem feito a construção de um quadrado inscrito numa circunferência, resumida em §5.2.3, JC propôs-se repeti-la, mas por outro processo que tinha aprendido na disciplina de Desenho. No entanto, JC pareceu não perceber que ia construir a mediatriz do diâmetro da circunferência, como DE fez notar:

Inv: E a tua ideia no fundo era esta, JC, ou não?

JC: Criava uma circunferência de centro aqui que passasse por este ponto [indica o ponto médio e um dos extremos do segmento, na figura 5.9B].

Inv: De centro aí que passasse por esse ponto..., sim... Criavas uma circunferência.

JC: Depois criávamos outra de centro aqui e outra aqui [os dois extremos do segmento]. Depois íamos fazer assim uma coisinha [simula com um dedo dois arcos que se intersectam]... É como com o compasso.

DE: Punha-se aqui o bico, depois ia fazer-se... Era a mediatriz. Era a mediatriz. Querias fazer a mediatriz?

JC: Não. Queria fazer também esta recta [representa como o dedo a recta perpendicular que passa pelo meio do segmento na figura 5.9B]. (E1, §258-268.)

JC fez a construção E1JC (figura 5.17), partindo de um segmento *[AB]* na posição horizontal como estava no desenho da ficha, e no fim voltou a insistir que era assim que faziam «esta construção com o compasso».

Construção E1JC[8]
Ponto *A*
Ponto *B*
Segmento definido por 2 pontos *[AB]*
Pt. médio *M*
Circ. definida por 2 pontos *c1*
Circ. definida por 2 pontos *c2*
Circ. definida por 2 pontos *c3*
Intersecção de 2 circ.s *C, D*
Segmento definido por 2 pontos *[CD]*
Intersecção segmento circ. *E, F*
4 × Segmento definido por 2 pontos *[EA], [EB], [BF], [FA]*

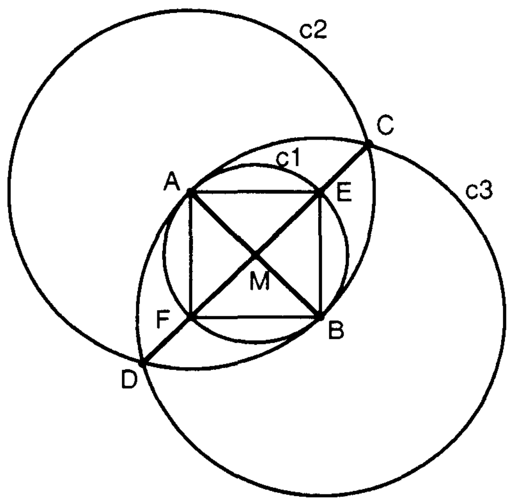


Fig. 5.17 - História da construção de um quadrado inscrito numa circunferência, JC - E1.

Guiões como processo de iniciar actividades

O recurso a guiões constituiu, em muitos casos, o processo privilegiado de os alunos iniciarem a resolução de uma actividade, quer esta fosse relativamente familiar quer completamente nova. As alunas participantes no episódio de ensino E6 reconheceram esse facto abertamente, como se descreve a seguir.

Passagem do episódio E6

Ao longo deste episódio de ensino, chamou a atenção da investigadora o facto de as alunas participantes, mal liam uma nova actividade, começarem logo a fazer qualquer coisa no computador. A propósito disso, a investigadora

[8] Os objectos não foram nomeados pelos alunos. As letras indicam a ordem pela qual foram construídos objectos do mesmo tipo.

perguntou-lhes como é que começavam a fazer as suas construções. As respostas de SA indicam que tentava aplicar, nas novas actividades, guiões aprendidos anteriormente, que abandonava se verificava que não resultavam.

Inv: [...] Quando vocês têm uma construção para fazer, vocês começam logo a fazer as coisas, ou pensam primeiro no que é que têm que usar dos vossos conhecimentos para a fazer?

SA: Vou-lhe dizer um bocado de tudo. Nós podemos fazer... Pronto, primeiro como a gente pensa que é [... voz sumida].

Inv: Diz? Desculpa, não ouvi.

SA: A gente põe-se a fazer como a gente pensa como é, depois é que a gente vamos...

MA: Depois se não der bem...

SA: Sei lá, como é que hei-de explicar... vamos... pronto, fazer o que a gente fez noutras fichas, aplicar nestas o que a gente faz agora, e que... pronto, mais ou menos a mesma coisa mas pondo..., pronto, as mesmas coisas que a gente aprendeu, não é, que está nas fichas... (E6, §519-524.)

Actividades em que não era possível aplicar guiões

Os guiões desempenharam um papel importante em muitas actividades realizadas pelos alunos participantes neste estudo. Mas o recurso sistemático a guiões também levou a um certo adormecimento da capacidade de reflexão e à consequente dificuldade em lidar com situações que exigiam a aplicação de novos processos.

A situação que se descreve a seguir foi típica. A construção em causa levantou grandes dificuldades aos alunos, pelo facto de não se enquadrar no tipo que estavam mais habituados a fazer.

Passagem da ficha 11

Quando foi proposta, a construção de um trapézio inscrito numa circunferência (1-ficha 11) apareceu como uma situação nova, bastante diferente das anteriores. Por um lado, o trapézio era uma figura pouco familiar para aqueles alunos, como a investigadora pôde perceber nas conversas que teve com diferentes grupos. Por outro lado, a grande maioria das construções que tinham realizado até essa altura recorriam, mais ou menos explicitamente, à relação de perpendicularidade, a qual não era muito útil na construção do trapézio.

Assim, a maioria dos grupos limitou-se a construir trapézios copiando a aparência do desenho dado na ficha, mas em que o paralelismo das bases não resistia à manipulação. Um dos grupos que melhores desempenhos tinha demonstrado até então comentou, posteriomente, que desistiram da actividade porque «quiseram fazer com rectas perpendiculares e não foram capazes».

Com alguns grupos a investigadora conversou sobre o trapézio, e após várias explorações esses alunos lembraram-se de utilizar o item do Cabri-géomètre *Recta paralela*, para obter um trapézio resistente. No entanto a utilização deste item revelou-se também difícil, pois com frequência a recta paralela aparecia coincidente, como se refere em §4.3.2.

5.3.4 Confiança nas construções

Em quase todas as fichas de trabalho sugeria-se a verificação final das construções através da manipulação, primeiro de forma explícita e depois mais indirectamente. A investigadora sistematicamente manipulou e discutiu construções com os diversos grupos, quer durante a aula em que estavam a ser resolvidas, quer em aulas posteriores, depois de ter analisado as respectivas gravações em disquetes. No entanto, nos episódios de ensino, os alunos quase só tomaram a iniciativa de verificar construções para detectar pontos mal construídos. A partir do momento em que descobriam como fazer uma construção mostravam-se seguros do que iam obter e não sentiam necessidade de verificar o produto final, como se vê nos exemplos seguintes.

Passagem do episódio de ensino E1

Nas duas vezes que construíram um quadrado inscrito numa circunferência, os alunos participantes neste episódio de ensino afirmaram a sua certeza na construção, e foi a investigadora quem sugeriu a verificação final através do arrastamento:

Inv: Está formado o quadrado, pronto... Tinhas a certeza que isto ia dar um quadrado, DE? ... que foi quem sugeriu este processo de resolução.

DE: Eu tinha.

[...]

Inv: ...Vocês não têm dúvida nenhuma que essa figura é de facto um quadrado.

JC: Sim, sim.

Inv: Mexe lá um dos pontos de base, um dos pontos que vocês construíram inicialmente. Esse.

JC: Vamos mexer assim.

Inv: O quadrado fica um "bocado torto" para desagrado do DE, não é, mas continua?

DE: Mas continua um quadrado.

Inv: De certeza? Não tens dúvida nenhuma que aquela figura continua um quadrado?

DE: Não.

[...]

Inv: Muito bem. Portanto vocês tinham a certeza que essa figura ia dar um quadrado, sobretudo ... porque é assim que no Desenho fazem a construção de um quadrado. (E1, §255-256, 293-300, 338)

A actividade que estes alunos fizeram a seguir propunha a construção de um rectângulo dado um segmento que seria a sua diagonal. Fizeram a construção sem hesitar usando a relação de perpendicularidade entre os lados do rectângulo. Quando terminaram JG propôs medir a amplitude dos ângulos, talvez porque quisesse mostrar à investigadora que estava seguro do seu processo de construção, como mais adiante os três alunos confirmaram:

JG: Agora vamos medir a amplitude dos lados para ter a certeza...

DE: Dos ângulos!

JG: Dos ângulos, para ter a certeza que...

[...]

DE: O que estás a fazer? Ah, para demonstrar que é um rectângulo...

[...]

JC: Agora temos a certeza que é um rectângulo.

[...]

Inv: E vocês, por aquilo que eu percebi da maneira como estavam a dizer, tinham a certeza que esta figura ia ficar um rectângulo?

DE: Sim.

JG: Eu pelo menos tinha.

DE, JC: Eu também. (E1, §535-537, 544, 571, 591-594.)

Passagem de episódio de ensino E5

As alunas participantes neste episódio mostraram não duvidar de que através da sua construção iriam obter um quadrado com os lados tangentes à circunferência e quando terminaram a construção não fizeram a verificação:

Inv: Tu tens a certeza que esta construção te vai dar o quadrado que tu queres, não tens dúvida nenhuma?

IS: Não.

Inv: Pela maneira como estás a falar...

IS: Não, vai-me dar o quadrado.

Inv: E vocês, PA e CL?

[...]

Inv: Estão a perceber o que ela está a fazer?

PA, CL: Sim.

Inv: E não têm dúvida que vão obter um quadrado no fim?

PA, CL: Sim. (E5, §123-132.)

Confiança na aparência das construções e nos guiões

A aparência das construções e os guiões que eram escolhidos contribuíram, com pesos variáveis, consoante a actividade em causa, para a confiança que os alunos mostravam ter nas suas construções.

Por um lado, a aparência adequada continuou a ser preponderante na análise das construções, mesmo quando estas eram feitas recorrendo a propriedades das figuras. Mas a experiência adquirida através de várias utilizações de um determinado guião também garantiu aos alunos a certeza nos resultados da sua aplicação. As duas passagens seguintes exemplificam estas situações.

Passagem do episódio de ensino E4

Como disse LA «é óbvio» que uma circunferência com centro num ponto da mediatriz de um segmento e que passa por um dos seus extremos também tem de passar pelo outro (figura 5.18).

LA [para BF]: [...] Mas se puseste aqui o meio, não é, se passa por este ponto como é que tinhas a certeza que passa também por este? [Aponta a primeira figura da ficha 10 onde entretanto tinha sido desenhada a mediatriz do segmento - figura 5.18.]

Inv: Exactamente era isso que eu queria saber. Ou não tinhas a certeza e foi só depois de fazeres a construção que viste isso, ou nem sequer pensaste nesse assunto?

LA: Eu não [ri-se]. Marquei o centro e depois pus o ponto para passar por este ponto e como passou por este foi passar naquele [aponta na figura da ficha].

Inv: Mas não te admiraste que ela passasse nos dois?

BF, LA: Não.

Inv: Porquê?

LA: Acho que é óbvio. (E4, §26-32.)

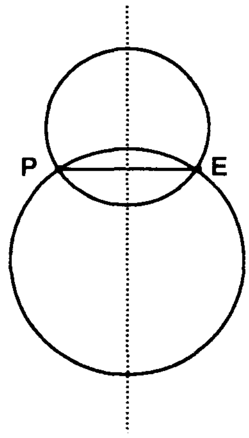


Fig. 5.18 - Desenho da ficha 10-1 (com a mediatriz).

Passagem da ficha Avaliação 2B

IS utilizou a mesma situação de partida para resolver os três problemas desta ficha: papagaio, octógono inscrito numa circunferência e triângulo rectângulo isósceles, (figura 5.19) e não verificou nenhuma dessas construções.

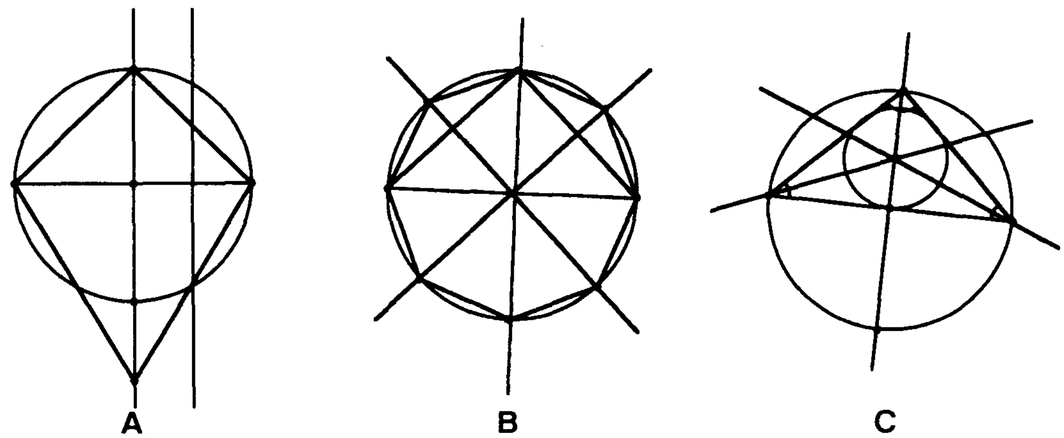


Fig. 5.19 - **A** - Papagaio; **B** - octógono inscrito numa circunferência; **C** - triângulo rectângulo isósceles e circunferência inscrita - IS, ficha Avaliação 2B.

No último caso, IS obteve um triângulo rectângulo numa posição não muito habitual, mas nunca duvidou da sua construção, pois quando a investigadora, que olhou de longe, lhe disse que o seu triângulo não parecia rectângulo ela respondeu, com muita segurança, que era (figura 5.19C).

Em resumo: ainda que a necessidade de fazer construções resistentes tivesse sido sempre defendida pela investigadora e aceite pelos alunos, até ao fim da intervenção didáctica apareceram construções que se desmanchavam. Nalguns casos, essas construções resultaram de alguns alunos não terem percebido a necessidade de as fazer resistentes. Noutros casos, aconteceram quando os alunos não descobriram outro processo de as fazer. Algumas construções que se desmanchavam resultaram também de os alunos privilegiarem coincidências que apenas aconteciam em casos particulares prototípicos da construção.

A visualização desempenhou dois papéis principais complementares na procura de processos para obter construções resistentes. Um papel de controlo, que levava os alunos a perceber a incorrecção das construções sempre que estas não conservavam as características solicitadas. Um papel de exploração, que lhes permitia ensaiar ideias, e, através da sua concretização no ecrã do computador, perceber a sua adequação para resolver o problema em causa.

Para fazerem novas construções, os alunos começaram a usar processos que tinham descoberto em actividades anteriores — *guiões*. Umas vezes usavam exactamente o mesmo guião, outras vezes adaptavam-no à nova situação. Mas a maioria dos guiões eram aplicados tendo em conta o efeito visual que os alunos sabiam que conseguiam obter, e não tanto uma reflexão sobre as propriedades e relações geométricas implícitas. Para muitos alunos, o recurso a guiões constituiu o processo de iniciarem a resolução das actividades, quer estas fossem familiares ou não. O recurso sistemático a guiões levou a um certo adormecimento da capacidade de reflexão e à consequente dificuldade de muitos alunos em lidar com situações que exigiam novos processos.

Quase sempre, a partir do momento em que encontravam um processo de construir uma figura, os alunos mostravam-se seguros do produto que iam obter e não sentiam necessidade de verificar a construção final. Essa certeza decorria sobretudo da aparência visual adequada da construção e do guião utilizado.

Capítulo 6 - Justificação de construções geométricas

No capítulo anterior (5) caracterizam-se os processos utilizados pelos alunos na realização de construções geométricas que lhes foram propostas ao longo da intervenção didáctica realizada no âmbito desta investigação. No presente capítulo descrevem-se, analisam-se e interpretam-se os processos utilizados na justificação dessas construções, segundo objectivo específico deste estudo.

Para caracterizar os processos de justificação usaram-se dados das fichas de trabalho e de Avaliação realizadas pelos alunos, e dos registos efectuados no Diário da Intervenção no final de cada aula. Mas para fazer essa caracterização foram fundamentais as justificações de construções discutidas nos sete episódios de ensino (§3.5), uma vez que nesses espaços, mais do que nas aulas, foi possível conversar demoradamente com os alunos participantes e levá-los a uma reflexão mais aprofundada sobre o seu trabalho.

A partir da análise dos dados sobre processos de justificação de construções emergiram as grandes categorias seguintes em torno das quais se estrutura este capítulo:

- Descrição de construções
- Tipos de justificação de construções
- Obstáculos na justificação de construções
- Justificação de construções e níveis de van Hiele

6.1 Descrição de construções

Na intervenção didáctica que se realizou neste estudo pretendeu-se que os alunos, para além de saberem fazer construções geométricas obedecendo à regra da resistência, também soubessem mostrar porque é que as suas construções funcionavam. Por outras palavras, tinha-se o objectivo de que, progressivamente, os alunos fossem capazes de justificar as suas construções (§2.7) explicitando e relacionando propriedades e relações geométricas das figuras representadas.

A forma escolhida para os introduzir nessa actividade consistiu em solicitar que descrevessem algumas das construções propostas em cada ficha de trabalho. Ao contrário da realização das construções, a descrição não foi uma tarefa fácil para os alunos. Na ficha 1 apenas um dos oito grupos descreveu a construção do triângulo rectângulo. Na ficha 2 os grupos descreveram a construção do rectângulo mas fizeram-no com bastante apoio da investigadora ou da sua professora e levaram bastante tempo.

No início da segunda fase da intervenção didáctica começou a pedir-se que os alunos "explicassem as construções a outro colega". Na ficha 4 nenhum grupo fez essa questão, por falta de tempo. Na ficha 5 as explicações continuaram a ser apenas descrições dos passos executados, sem justificação. Nessas descrições os alunos destacavam o funcionamento das primitivas do Cabri-géomètre, o que os levava a considerar a marcação de ângulos, a medição da sua amplitude e do comprimento dos segmentos, como passos da construção e não como meio de verificação ou validação. O exemplo seguinte é típico.

Passagem da ficha 5

Nesta ficha solicitava-se a construção de um triângulo com dois lados iguais, dado um desses lados, e a seguir pedia-se que averiguassem o que acontecia com a amplitude dos ângulos desse triângulo. Por último, a questão 3 pedia: «Escrevam uma mensagem a um colega explicando como poderia construir um triângulo isósceles com o Cabri. Suponham que ele conhece o Cabri, mas é necessário explicar-lhe porque é que se faz cada passo». O grupo GENIOS escreveu:

Fiz um segmento defenido entre 2 pontos depois fiz um circulo defenido entre os dois pontos. Marquei um ponto sobre a circunferencia e depois tracei um segmento entre este ponto e o centro da circunferencia depois liguei os dois pontos que ligavam à circunferencia e formei um triangulo. Apaguei o circulo e medi e marquei os segmentos e os angulos.

[Transcrição *sic* da resposta escrita na ficha.]

O grupo limitou-se a descrever, de forma um pouco confusa, o processo de construção que executou, como se pode perceber comparando a resposta anterior com a história dessa construção transcrita na figura 6.1. Observa-se ainda que o grupo, como muitos outros, não usou letras na descrição da construção, embora tivesse nomeado os pontos como se indicava na ficha.

Construção PAULO5
Ponto: **R**
Ponto: **I**
Segmento definido por 2 pontos: **[IR]**
Circ. definida por 2 pontos (invisível)
Ponto sobre circunferência: **A**
Triângulo definido por 3 pontos: **[RAI]**
Ângulo definido por 3 pontos: **RIA**
Ângulo definido por 3 pontos: **AIR**
Ângulo definido por 3 pontos: **ARI**
[Marcação dos ângulos, medições]

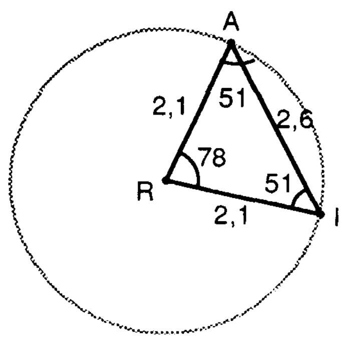


Fig. 6.1 - História da construção de um triângulo isósceles - grupo GENIOS

Nas descrições orais de construções que os alunos fizeram nos episódios de ensino quase sempre referiram indistintamente as primitivas do Cabri-géomètre, salientando em particular a sua forma de utilização, e as relações geométricas subjacentes na construção. Poucas vezes referiam os pontos, ou outros objectos da construção, pelos seus nomes, preferindo apontá-los com os dedos ou com o rato do computador. A passagem seguinte exemplifica estas questões.

Passagem do episódio de ensino E3

PF e RD descreveram sem hesitações o processo de construção de duas circunferências a passar pelos extremos de um segmento de recta (1-ficha 10), mas enfatizaram a forma como obtiveram a circunferência com o Cabri--géomètre:

Inv: [...] Lembram-se como é que fizeram essa construção?

PF: A 1.2?

RD: Marcámos um ponto qualquer na mediatriz como centro da circunferência e um ponto na extremidade do segmento.

PF: Era um ponto destes [aponta na primeira figura da ficha 10].

[A Inv. pede aos alunos que falem um de cada vez...]

RD: Marcámos o centro da circunferência num ponto qualquer na mediatriz e depois um dos pontos da circunferência em cima de um dos extremos do segmento. (E3, §5-11.)

Até ao final da intervenção didáctica as explicações dadas pelos alunos sobre as suas construções foram essencialmente descrições dos processos de construção respectivos. Na questão 3 da ficha Avaliação 2B, última ficha, pedia-se a construção de um triângulo rectângulo isósceles, e a descrição da construção. Os nove pares que fizeram esta ficha construíram sem dificuldade o triângulo. Oito pares descreveram a construção, sem justificar os passos dados, e acentuando as primitivas do Cabri-géomètre que tinham utilizado, como mostra o exemplo seguinte.

Passagem da ficha Avaliação 2B

Os alunos fizeram a construção como está representada na figura 6.2A e descreveram-na, um pouco confusamente, da forma seguinte (com bastantes erros gramaticais, como acontecia em quase todas as respostas escritas pelos alunos):

Criamos uma circunfrencia, descobrimos o seu centro, depois criamos 1 ponto sobre a circunfrencia, criamos 1 segmento entre estes dois ponto e criamos uma perpendicular, criando depois uma intrecepção de dois pontos (circunferencia, perpendicular) do ponto da perpendicular (intercepção de dois objectos) criamos um segmento com o centro depois ligamos os dois pontos que estão sobre a circunferencia. [Transcrição *sic* da resposta escrita pelos alunos.]

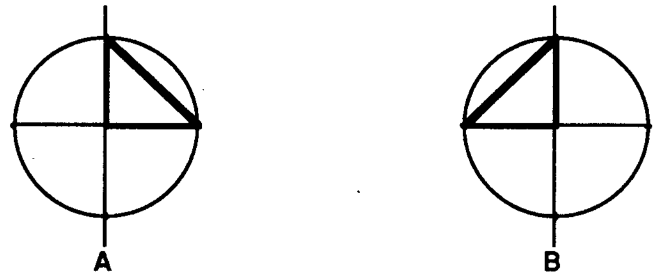


Fig. 6.2 - Construções de um triângulo rectângulo isósceles

Apenas um dos pares que resolveu a ficha Avaliação 2B, que fez a construção como se mostra na figura 6.2B, justificou que «a nossa figura é um triângulo rectângulo isósceles porque os seus dois lados iguais são raios de uma circunferência». Neste caso, os alunos não fizeram referência explícita ao processo de construção que utilizaram.

A ficha Avaliação 2A foi resolvida pelos cinco pares de alunos que mostraram os melhores desempenhos ao longo da intervenção didáctica. A actividade 3 desta ficha propunha a construção e descrição da construção de um triângulo rectângulo em que um dos catetos devia ter o dobro do comprimento do outro. Neste caso nenhum par se preocupou em justificar a construção. Mas as descrições que apresentaram foram mais sistematizadas e rigorosas do que as referidas anteriormente, como mostra o exemplo seguinte.

Passagem da ficha Avaliação 2A

A descrição apresentada por JG e outro colega (figura 6.3) revela uma certa organização, traduzida na preocupação de numerar os passos da construção. Estes alunos referiram os pontos pelas letras correspondentes e encontraram um método próprio para distinguir as diferentes rectas perpendiculares e tangentes que construíram (*perpendicular1*, etc.).

1º criamos o segmento $\overline{EC}$ (figura 6.3)
2º criamos uma circunferencia em que $\overline{EC}$ era o seu raio
3º fizemos a perpendicular1 ao segmento $\overline{EC}$ a passar por E
4º fizemos a intercessão da perpendicular1 com a circunferencia (ponto B)
5º fizemos a perpendicular2 a perpendicular1 a passar pelo ponto E
6º Marcamos o ponto D (intercessão da recta com a circunferencia [...]

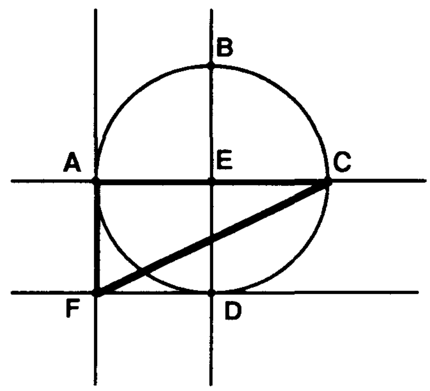


Fig. 6.3 - Construção de um triângulo rectângulo em que um dos catetos tem o dobro do comprimento do outro

7º Fizemos a intercessão da perpendicular2 com a circunferencia

8º Marcamos o ponto A e C (intercessão da perp.2 com a circ.)

9º Fizemos a tangente1 à circ. a passar pelo ponto D

10º Fizemos a tangente2 a passar pelo ponto A

11º Marcamos a intercessão da tangente2 com a tangente1 (Ponto F)

12º Traçamos o segmento $\overline{FC}$

[Transcrição *sic* da resposta escrita pelos alunos.]

Influência das primitivas do Cabri-géomètre

A descrição da construção extraída da ficha Avaliação 2B é influenciada pelas primitivas do Cabri-géomètre, sobretudo pela forma como devem ser utilizadas. Por exemplo, os alunos escreveram que depois de «descobrirem o centro da circunferência criaram um ponto sobre ela e um segmento entre esses dois pontos».

Na descrição extraída da ficha Avaliação 2A os alunos distinguiram as primitivas do Cabri-géomètre dos objectos geométricos que através delas obtiveram. Por exemplo, escreveram que construíram uma circunferência a partir do raio, quando a primitiva que permite fazer essa construção, *Circ. def. 2 pontos*, não refere explicitamente o raio, e quando determinaram pontos de intersecção indicaram os objectos que intersectaram e os pontos obtidos.

Também em alguns episódios de ensino os alunos descreveram construções salientando as primitivas do Cabri-géomètre e aspectos técnicos da sua utilização, como mostram os exemplos seguintes.

Passagem do episódio de ensino E3

PF e RD descreveram sem hesitar o processo de construção de duas circunferências a passar pelos extremos de um segmento de recta (1-ficha 10), referindo a forma como obtiveram a circunferência com o Cabri-géomètre:

Inv: [...] Lembram-se como é que fizeram essa construção?

PF: A 1.2?

RD: Marcámos um ponto qualquer na mediatriz como centro da circunferência e um ponto na extremidade do segmento.

PF: Era um ponto destes [aponta na primeira figura da ficha 10].

[A Inv. pede aos alunos que falem um da cada vez...]

RD: Marcámos o centro da circunferência num ponto qualquer na mediatriz e depois um dos pontos da circunferência em cima de um dos extremos do segmento. (E3, §5-11.)

Passagem do episódio de ensino E4

LA começou a descrever a questão 2-ficha 10 referindo o problema geométrico, construção do centro de uma circunferência, e o problema técnico da criação de uma circunferência de base no Cabri-géomètre:

Inv: [...] Agora o segundo problema. O que é que se pedia, lembras-te?

BF: Para determinar o centro.

LA: Para fazer uma circunferência e depois ir abrindo e depois tínhamos que calcular o centro. (E4, §83-84.)

Primitiva *História*

Os grupos habituaram-se a usar a primitiva *História* para rever a sequência de objectos geométricos que tinham utilizado em cada construção (ainda que nem sempre pudessem fazer isso, por deficiências técnicas de certos postos computacionais). Isso levou alguns alunos a organizar melhor as descrições das suas construções, em particular a indicar separadamente cada um dos seus passos e também a referir os pontos pelas letras respectivas, como aconteceu na descrição anteriormente exempificada (ficha Avaliação 2A), feita por JG, um dos alunos que com maior frequência recorria a essa primitiva.

Em resumo: desde o início da intervenção didáctica insistiu-se na descrição e explicação das construções geométricas, como forma de levar os alunos a explicitar e relacionar propriedades das figuras.

Até ao fim, as explicações das construções foram quase sempre descrições. Essas descrições eram feitas principalmente em termos das acções que os alunos tinham executado, e, com frequência, não distinguiam os objectos e relações geométricas das primitivas do Cabri-géomètre que as permitiam obter. Poucas vezes os alunos nomearam espontaneamente os objectos das suas construções e, mesmo quando o faziam nas descrições orais, preferiam apontá-los com o cursor do computador ou com os dedos.

Alguns alunos, que melhores desempenhos revelaram, dedicaram-se a este tipo de actividade e começaram a apresentar descrições das suas construções mais bem estruturadas. A primitiva *História* contribuiu para essa estruturação e, em particular, induziu uma utilização adequada da terminologia geométrica.

6.2 Tipos de justificação de construções

Ao longo da intervenção didáctica tentou-se que os alunos percebessem a necessidade de justificar as suas construções a partir da explicitação e relacionamento de propriedades das figuras — *justificações formais* (§2.7). Essa formalização foi conseguida progressivamente, a partir da exploração de tipos de justificação próprios, diversificados, que os alunos utilizaram. As *justificações* preferidas pelos alunos eram sobretudo *empíricas* (§2.7), isto é, induziam-nas a partir da observação e experiência das construções e das figuras em que trabalhavam.

Os principais tipos de justificações produzidas pelos alunos participantes neste estudo podem agrupar-se nas categorias seguintes: justificação *ad hoc;* justificação circular; justificação baseada na aparência visual; justificação baseada na descrição do processo de construção; justificação baseada na observação de relações invariantes através da manipulação; justificação baseada em raciocínios aritméticos/algébricos; justificação baseada em propriedades deduzidas em um ou dois passos; justificação mista. Nas subsecções seguintes caracterizam-se esses tipos de justificação.

6.2.1 Justificação *ad hoc*

Muitos alunos manifestaram tendência para, quando interrogados, responder qualquer coisa, muitas vezes imediatamente, sem reflectir sobre o que diziam. Um dos alunos reconheceu isso, quando comentou, no episódio de ensino (E4), que estava «só a mandar bocas». Umas vezes diziam qualquer coisa um pouco ao acaso, outras vezes repetiam propriedades decoradas que lhes parecia que se podiam aplicar no contexto em causa.

Em certa medida, a tendência para "dizer imediatamente qualquer coisa" e repetir o que tinham ouvido, tinha a ver com a maneira de ser de muitos daqueles alunos, que gostavam de se evidenciar e mostrar que "sabiam". Nos episódios de ensino, em que os alunos participaram voluntariamente, revelaram o mesmo tipo de atitude.

Afirmação ao acaso

Às vezes os alunos "atiravam" respostas ao acaso que não tinham muito a ver com a situação em análise, e só as reformulavam quando percebiam a incoerência das suas afirmações, como ilustram os exemplos seguintes.

Passagem do episódio de ensino E1

Inv: Então que tipo de ângulos é esse? Quando duas rectas ou dois segmentos são perpendiculares formam ângulos quê?

DE: 60°

Inv: 60?

DE: 120. Então não é?

JC: Eia! 360 a dividir por quatro.

DE: Ah! É 90. (E1, §372-377.)

Passagem do episódio de ensino E3

Inv: Esse [ângulo] aí é maior... Maior do que?

PF: Do que outro.

RD: Maior do que a hipotenusa.

Inv: Maior do que a hipotenusa não. Maior do que?

RD: Maior do que 90 graus.

Inv: Ah! Maior do que 90 graus, exactamente. (E3, §350-355.)

Propriedades decoradas

Em algumas justificações os alunos usavam "partes de propriedades" que tinham fixado, outras vezes propriedades abordadas nas aulas mais recentes, que não se adequavam à situação em causa, embora se enquadrassem no contexto da construção que estava a ser discutida. Os exemplos seguintes ilustram estas situações.

Passagem do episódio de ensino E1

Quando se pediu que justificassem porque é que os ângulos do quadrado inscrito na circunferência eram rectos (2-ficha Avaliação 1) a investigadora recordou que tinham discutido isso na aula. JC recordava-se que tinha a ver com «uma metade» mas sem se lembrar de quê, nem porquê:

Inv: Só falta justificar — e aqui é que vocês estiveram muito tempo até que eu fui dar um palpite — porque é que os quatro ângulos também ficam...

JC: Iguais.

Inv: De 90°, aqueles quatro ângulos do quadrado.

DE: Uhmm! Sim mas...

Inv: Arranjar uma justificação matemática para isso.

JC: Era... tinha a ver com uma metade...

Inv: Tinha a ver com uma metade... De quê?

JC: Era a metade do... Penso que era da circunferência. (E1, §415-422.)

Passagem do episódio de ensino E4

Para justificar a construção das duas circunferências a passar pelos extremos de um segmento dado, LA referiu uma propriedade tratada na última aula, que embora se relacionasse com a construção em causa, não a justificava:

Inv: No fundo é isso que eu quero saber. Qual foi a propriedade da mediatriz que tu usaste aí? Ou não pensaste nisso? Traçaste a circunferência com centro num ponto da mediatriz e passando pelo ponto *P*, faz de conta, ou pelo *E*, e viste que ela também passava pelo outro...

LA: Pois.

Inv: E isso é consequência de uma determinada propriedade da mediatriz que nós já vimos, qual é?

BF: Quando?

LA: É aquela que... qualquer...

Inv: Vá...

LA: A mediatriz do... Não sei explicar, mas é porque divide a corda em duas partes, não é? (E4, §51-571.)

6.2.2 Justificação circular

Nas suas justificações, muitos alunos referiam propriedades e relações geométricas em círculo, revelando uma certa dificuldade em estabelecer um encadeamento lógico entre elas, mesmo em sequências curtas. Com frequência argumentavam com o que devia ser justificado, normalmente propriedades da definição mais usual da figura, usadas para obter a construção. Este foi um comportamento generalizado no início intervenção, que progressivamente foi ultrapassado por alguns alunos.

Os exemplos seguintes ilustram este tipo de justificações.

Passagem da ficha-Avaliação 2B

Na questão 1 desta ficha, dizia-se que «um papagaio é um quadrilátero com os lados consecutivos iguais dois a dois», pedia-se que construíssem um papagaio e perguntava-se como podiam garantir que a figura obtida era um papagaio. Entre os nove pares que fizeram esta ficha dois responderam «tem os lados iguais 2 a 2» e três pares responderam «tem os lados consecutivos iguais 2 a 2». Isto é, cinco pares justificaram utilizando a definição que era dada, como aconteceu com muita frequência em fichas anteriores.

Passagem do episódio de ensino E3

Para explicarem a construção do centro de uma circunferência através da intersecção das mediatrizes dos lados de um triângulo inscrito nessa circunferência (figura 6.4), PF e RD disseram que as distâncias do ponto de intersecção das mediatrizes aos vértices do triângulo eram iguais porque eram raios. Mas o que estava em causa era mostrar porque é que essas distâncias eram raios, mais precisamente porque é que o ponto de intersecção [*G* - figura 6.4] era o centro.

Inv: Porque é que vocês acham que esse ponto de intersecção das mediatrizes [é o centro da circunferência]?

RD: Então, porque estes pontos das mediatrizes estão à mesma distância dos vértices do triângulo.

[PF acrescenta qualquer coisa e a Inv. pede que fale um aluno de cada vez.]

RD: As mediatrizes do... o ponto que coincide das mediatrizes do triângulo está à mesma distância dos vértices. Portanto os vértices estão na circunferência, ele está ao centro... é por isso que está ao centro, transforma isto como se fosse...

PF: Isto como raios.

RD: Diâmetro.

Inv: Em que é que ficam?

PF: Raios pá [aponta [*BG*] - figura 6.4].

RD: Isto é ou não é um diâmetro, assim [aponta o diâmetro que contém [*BG*]].

PF: Ah, pois está bem.

RD: É a mesma coisa.
PF: Eu diria mais que...
RD: Aí é mais o raio.
Inv: Deixa lá falar o PF.
PF: Eu diria mais, que o ponto do centro forma um raio com estes três pontos [aponta *A, B, C*], por isso...
Inv: Quais três?
PF: Com este, com este, com este [volta a apontar *A, B, C*]
RD: Os vértices.
PF: Pois, com os vértices do triângulo, por isso têm que ser obrigatoriamente iguais.
(E3, §141-161)

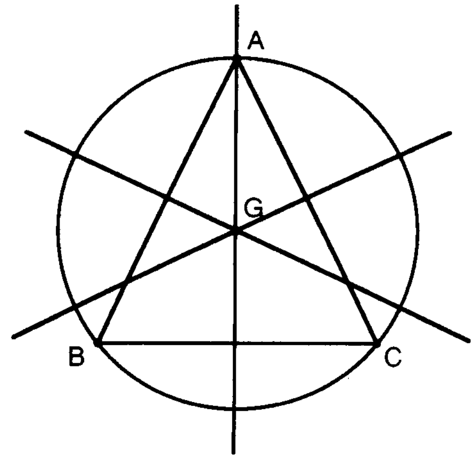


Fig. 6.4 - Centro de uma circunferência - grupo 6.

6.2.3 Justificação baseada na aparência visual

Muitos dos argumentos que os alunos utilizavam nas suas justificações baseavam-se na observação da aparência das construções e na observação empírica de características que consideravam visualmente relevantes. Por exemplo, é evidente, no sentido literal desta palavra, que uma diagonal divide um rectângulo «em duas metades», ou que os quatro lados de um rectângulo não podem «tocar» numa mesma circunferência, como foi argumentado nos episódios seguintes.

Passagem do episódio de ensino E4

Para obter o centro de uma circunferência (2-ficha 10) o par BF/LA inscreveu um rectângulo na circunferência, e, em seguida, BF propôs construir as duas diagonais do rectângulo e o seu ponto de intersecção. A investigadora perguntou porque é que as diagonais do rectângulo passavam no centro da circunferência e BF respondeu observando a simetria visual da construção (figura 6.5):

BF: Então é porque isto é metade metade. Traçado assim, não é? [Aponta na construção - figura 6.5.]
Inv: É metade de quê?
BF: Metade do rectângulo para um lado e metade para o outro. E aqui tem de ser o centro, se é metade [aponta]...

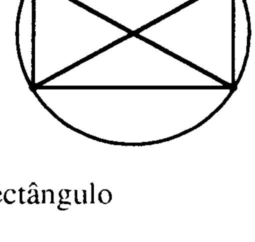


Fig. 6.5 - Tentativa de BF para justificar que as diagonais do rectângulo inscrito se intersectam no centro da circunferência.

Passagem do episódio de ensino E6

No fim da construção de um quadrado com os lados tangentes a uma circunferência, a investigadora perguntou a TA como é que tinha sabido que ia obter um quadrado. TA argumentou: «porque depois com as perpendiculares ia dar um ângulo de 90°... e então... o quadrado como os ângulos é todos de 90°... pois... ». A investigadora fez-lhe ver que esse argumento também servia para justificar que a figura era um rectângulo e TA acrescentou que era «por causa das tangentes». A investigadora pediu-lhe que explicasse «o que é que as tangentes tinham a ver com o assunto» mas TA pareceu ficar sem saber o que responder.

A investigadora insistiu em saber como é que tinham a certeza que iam construir uma figura com os lados iguais e MA voltou a referir que fizeram quatro rectas perpendiculares. A investigadora desenhou quatro rectas perpendiculares (figura 6.6) e mostrou que nem sempre formavam um quadrado, mas as alunas salientaram a impossibilidade de os quatro lados de um rectângulo «tocarem numa circunferência»:

Inv: Mas quatro rectas perpendiculares umas às outras, se eu fizer quatro rectas assim [figura 6.6], perpendiculares umas às outras... Pronto, isso não me dava um quadrado necessariamente, não era?

SA: Então, mas não dava para fazer uma circunferência, com as tangentes... tinham que ser... pronto...

Inv: Portanto, tem que ver com as tangentes, é verdade.

MA: Têm que tocar num ponto da circunferência.

SA: Têm que tocar na circunferência e sendo um rectângulo não tocam. (E6, §486-490.)

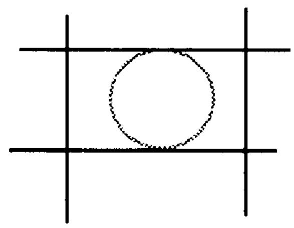


Fig. 6.6 - Os quatro lados de um rectângulo não «tocam» numa circunferência - E6.

6.2.4 Justificação baseada na descrição do processo de construção

Muitas justificações eram descrições do processo utilizado na constução, com maior ou menor rigor, e, por vezes, referiam a forma como utilizavam as primitivas do Cabri-géomètre. Nuns casos a descrição era a primeira tentativa de justificação, noutros era mais uma forma de a completar. O recurso à descrição das construções pode ter sido consequência da insistência que nisso se fez nas fichas de trabalho.

Passagens do episódio de ensino E1

Para obter uma circunferência dado um diâmetro, JG começou por construir o ponto médio do segmento dado. A investigadora quis saber porquê e JG respondeu: «para ir construir a circunferência, que é para depois dizer qual é o raio», DE corrigiu: «o centro da circunferência» e JG completou: «o centro, que é para depois pôr o raio, para então saber qual é a circunferência que eu vou criar». A investigadora insistiu em querer saber como é que se lembraram que o centro tinha de ser o ponto médio e DE respondeu: «porque o ponto médio do segmento faz os raios e o diâmetro da circunferência».

Na sua primeira justificação JG preocupou-se apenas em mostrar como indicava ao Cabri-géomètre a construção da circunferência e só perante a insistência da investigadora os alunos referiram a relação geométrica implícita na sua construção.

Mais adiante os alunos resolveram sem hesitações o problema, novo naquele contexto, da construção de um rectângulo dada a sua diagonal. Utilizaram adequadamente o conceito de diagonal e a perpendicularidade e paralelismo entre os lados do rectângulo, como se vê nas fases da construção E1.2 (figura 6.7):

Fases da construção E1.2
Ponto: **c**[1]
Ponto: **b**
Segmento definido por 2 pontos: **[cb]**
Ponto *x*
Recta definida por 2 pontos *r*

Recta perpendicular *s*
Recta paralela *t*
Recta perpendicular *u*

Intersecção de 2 rectas: **a**
Intersecção de 2 rectas: **d**
4 × Ângulo definido por 3 pontos: **bac, acd, abd, bdc**

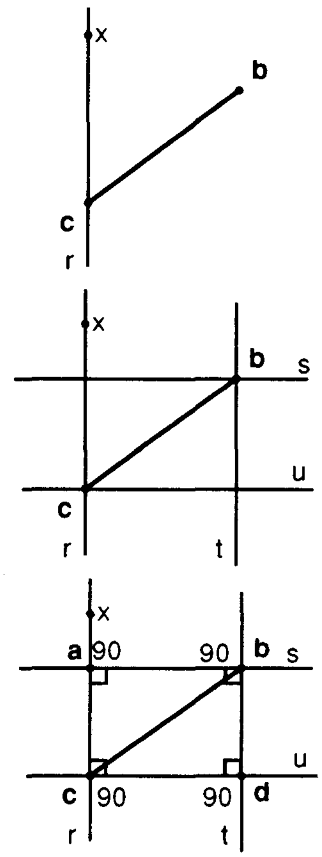


Fig. 6.7 - Fases da construção de um rectângulo dada a diagonal - E1.

No fim, JG recapitulou facilmente a construção. Descreveu ordenadamente os passos que executou utilizando uma linguagem em que misturou objectos e

[1] Os alunos nomearam os pontos em **negro** com letras minúsculas mas só depois de terem feito a construção. Os nomes das rectas indicam a ordem pela qual foram construídas.

propriedades geométricas e primitivas do Cabri-géomètre, e apontando no ecrã os objectos sem os referir pelos nomes, como quase sempre os alunos faziam. Para justificar a construção, JC referiu a perpendicularidade das rectas, mas JG não ficou satisfeito e voltou a descrever a construção. Desta vez confundiu o que fez com o que via e não foi capaz de seleccionar a informação relevante para a justificação em causa, como aconteceu em problemas anteriores.

Inv: Mas são capazes de arranjar uma justificação matemática para que essa figura fique um rectângulo?

[Riem-se, tomam uma atitude pensativa.]

Inv: Então diz-me uma coisa, se tu não encontras uma justificação para que a figura seja um rectângulo, o que é que te dava a certeza que essa figura ia ficar um rectângulo?

JC: Porque rectas perpendiculares ficam sempre com 90°.

JG: Pois os ângulos. Então eu fui criar uma paralela a esta... são paralelas, e depois fui fazer logo as duas perpendiculares e esta aqui só podia ser a diagonal do rectângulo [aponta com o cursor]. (E1, §582-602)

Passagem do episódio de ensino E2

Ao longo de todo este episódio de ensino as justificações de YB assumiram quase sempre a forma "é assim porque se fez assim". YB fixou-se no processo que utilizou para construir a mediatriz de um segmento no primeiro problema — ponto médio, recta perpendicular, e até ao fim usou sistematicamente como justificação o facto de as mediatrizes serem «feitas a partir de metade do segmento». A justificação da localização de um fogão à mesma distância de três tendas de campismo no ponto de intersecção das mediatrizes dos lados de um triângulo é um exemplo:

Inv: E agora a questão que se pergunta é: porque é que tu pões o fogão nesse sítio? [...]

YB: Então, para achar isto, não é? Para achar o ponto no meio...

Inv: O ponto?

YB: Meio, este [aponta com o cursor].

Inv: Esse centro.

YB: Este centro, é preciso as mediatrizes... É preciso as mediatrizes que equivalem as metade deste segmento [aponta um dos lados do triângulo].

Inv: Os lados do triângulo.

YB: Feitas a partir da metade dos segmentos do triângulo.

XA: E daí?

Inv: E daí? Exactamente, o XA pergunta e muito bem. O que é que isso tem a ver com o assunto?

[Riem-se.]

Inv: Repara, o problema que eu tinha posto é assim: tu estás numa tenda, eu estou noutra e o XA está noutra, e [...] vamos pôr o fogão de tal maneira que de cada vez que cada um de nós sai da tenda, a distância que anda até ao fogão tem que ser a mesma.

YB: Sim [...] Achámos este ponto, achámos este ponto através das mediatrizes... (E2, §492-511.)

Um pouco mais adiante YB esqueceu-se que estava a tentar justificar a igualdade das distâncias do ponto de intersecção das mediatrizes (fogão) aos vértices do triângulo (tendas de campismo) e voltou a insistir no processo que utilizou para construir o ponto, mesmo depois de ter apagado as mediatrizes e criado dois segmentos representativos da distância (figura 6.8):

YB: Não, não era isso, era saber o meio disto, não era? Como é que se achava este meio? [Aponta *B* - figura 6.8.]

Inv: Não. Eu queria que tu me dissesses porque é que esses dois segmentos que vocês acabaram de desenhar são iguais.

YB: Então, são iguais porque são feitos a partir do meio desta, deste segmento [aponta um dos lados do triângulo]. (E2, §544-546.)

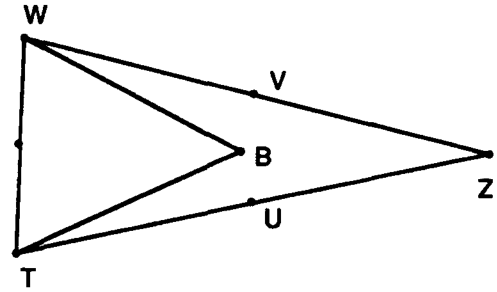


Fig. 6.8 - O fogão *B* está a igual distância das tendas de campismo *W* e *T* - E2.

6.2.5 Justificação baseada na observação de relações invariantes

Alguns alunos basearam a justificação das suas construções em relações que tinham observado que permaneciam através da manipulação, nomeadamente relações de igualdade. Este foi um tipo de justificação que se detectou muito pontualmente, o que foi um pouco surpreendente uma vez que as fichas solicitavam com frequência verificações desse tipo.

Passagem do episódio de ensino E6

Para obter um triângulo isósceles dada a base (1-ficha 9B), o grupo TMX construiu o ponto médio do segmento, a recta perpendicular ao segmento que passava pelo ponto médio, um ponto sobre o segmento e os dois segmentos definidos por esse ponto e os extremos da base (figura 6.9). No episódio de ensino TA justificou que o triângulo assim construído era isósceles porque os dois segmentos permaneciam iguais através da manipulação: «Se mexer no ponto ficam sempre os dois com a mesma... com a mesma distância».

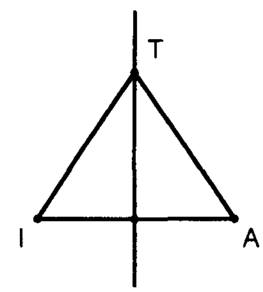


Fig. 6.9 - Triângulo isósceles dada a base - grupo TMX.

6.2.6 Justificação baseada em raciocínios aritméticos/algébricos

A predominância da aritmética e da álgebra na aprendizagem matemática dos alunos participantes neste estudo influenciou o trabalho que fizeram. Por exemplo, a passagem seguinte mostra que, às vezes, eram tentados a utilizar linguagem aritmética/algébrica para exprimir ideias geométricas:

Passagem do episódio de ensino E2

Na conclusão da investigação sobre a localização do circuncentro de um triângulo, YB exprimiu algebricamente a variação dos ângulos: «Portanto 90° fica no meio. Quando se muda para negativos... portanto quando diminui-se de 90 para baixo, o ângulo entra para dentro».

Também em certas justificações se reconheceu a influência explícita ou implícita de raciocínios que os alunos habitualmente faziam no domínio da aritmética ou da álgebra, como ilustram os exemplos que se seguem.

Passagem do episódio de ensino E3

PF e RD justificaram que o maior ângulo do triângulo (figura 6.10) tinha uma amplitude superior a 90°, fazendo uma estimativa baseada na aparente igualdade dos outros dois ângulos e no facto de os três somarem 180°, (embora a primeira estimativa de RD, pareça "atirada sem pensar", como era típico deste aluno:

Inv: Tens dúvida que esse ângulo aí em baixo tem uma amplitude maior do que 90°?

PF: Não porque este aqui é igual aquele [aponta os outros dois ângulos].

Inv: Não sei, parece.

PF: Deve ser. E os dois somados tem que dar 180, por isso aquele deve ter alguns cento e...

RD: 180.

PF: Nã, 150.

Inv: Já agora mede lá, a ver se a tua estimativa está certa.

RD: Eu digo que é 180.

PF: Eu digo que é 140.

Inv: Tu dizes que é quanto?

PF: 180 não pode ser.

RD: Não, 180 não pode ser. Eu digo que é 130.

PF [marca e mede o ângulo]: Ieh! Acertei mesmo em cheio!

[Perante o valor obtido RD ri-se.]

PF: Não disse 122? É pá, eu sou bom em estimativas!

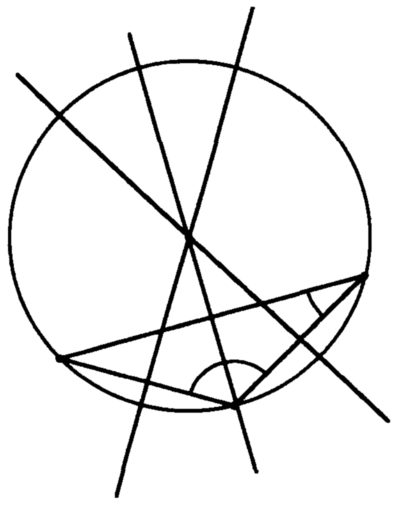


Fig. 6.10 - Um dos ângulos do triângulo tem uma amplitude superior a 90° - estimativa de PF e RD.

Passagem do episódio de ensino E4

Para determinar o ponto de uma linha de comboio equidistante de duas casas BF começou por comentar ironicamente «ai que difícil!» e acrescentou «então é medir a distância entre uma casa e a outra e depois dividir por dois» e mais adiante insistiu na mesma ideia.

LA que já sabia como é que os colegas PF e RD tinham resolvido este problema no episódio de ensino anterior (E3) decidiu procurar uma solução alternativa:

LA: Eu vim a pensar pelo caminho, pensei... E há outra maneira de, acho eu... Acho que há outra maneira de fazer isto. Traçava aqui perpendiculares a este que passem por estes pontos, duas não é, que ficam paralelas uma à outra [aponta perpendiculares à recta *r* a passar pelos pontos *B* e *L* - figura 6.11A]

Inv: Ficam.

LA: Depois media a distância que vai daqui aqui e daqui aqui [aponta [*LD*] e [*BE*][2]] e depois a diferença... Não, media, não é, e depois achava um ponto médio aqui [*F*], deste segmento da linha, não é... Está a perceber?

Inv: Estou.

LA: E depois a diferença que tivesse daqui da altura, somava aqui ... Está a ver? [$\overline{DF} + \overline{BG} = \overline{DC}$, *C* seria a solução (figura 6.11A).]

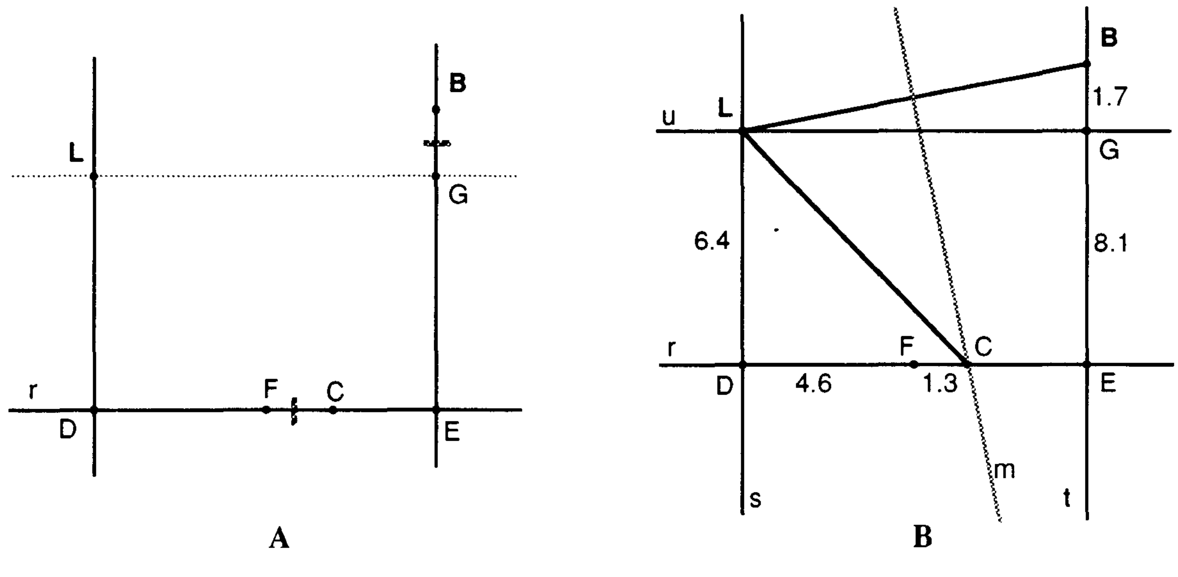


Fig. 6.11 - Localização de uma estação sobre uma linha de comboio [*r*], à mesma distância de duas casas [*B*, *L*] - LA (E4).

A medição dos segmentos assinalados na figura 6.11B levou a considerar inicialmente que o ponto proposto por LA e o ponto de intersecção da

[2] Só os pontos **L** e **B** foram nomeados pelos alunos. As restantes letras indicam a ordem pela qual os restantes pontos foram construídos.

mediatriz de *[LB]* com a recta *r* seriam coincidentes, mas a manipulação da construção mostrou que essa coincidência era aparente, embora a proposta de LA fornecesse uma aproximação muito razoável.

Depois de observar a coincidência das duas soluções a investigadora comentou que não sabia porque é que isso acontecia e LA acrescentou «Eu também não. Eu segui uma lógica». A "lógica implícita" seguida por LA baseava-se em operações com comprimentos: se os pontos *L* e *B* estivessem à mesma distância da recta *r*, o ponto médio *F* seria a solução, como não estavam era preciso somar a *F* a diferença entre essas distâncias. Em certa medida LA reconheceu isso quando, depois de manipular a construção, comentou desiludido «então os meus cálculos estão mal».

6.2.7 Justificação deduzida em um ou dois passos

A insistência na necessidade de justificar as construções produziu os seus efeitos. Alguns alunos empenharam-se nesse tipo de actividade e começaram a perceber a sua lógica. Em algumas situações, umas vezes apoiados outras sozinhos, conseguiram seleccionar e ordenar uma a duas propriedades deduzidas do processo de realização da construção e fazer justificações adequadas, ainda que por vezes formuladas com alguma imprecisão. Os três exemplos seguintes, da última ficha de avaliação e de dois episódios de ensino, são elucidativos.

Passagem da ficha Avaliação 2A

A primeira questão desta ficha propunha a construção de um losango dada uma diagonal e perguntava como podiam garantir que a figura obtida era um losango. XA e YB fizeram a construção a partir de duas circunferências e justificaram-na baseados no facto de os lados do losango serem raios dessas circunferências (figura 6.12):

> **1.2** Como podem garantir que a vossa figura é um losango?
> *podemos explicar isto porque os lados do losango são iguais o raio das circunferencias que o envolvem.* [*sic*]
> [Os alunos pintaram com cores diferentes a diagonal, as circunferências e o losango.]

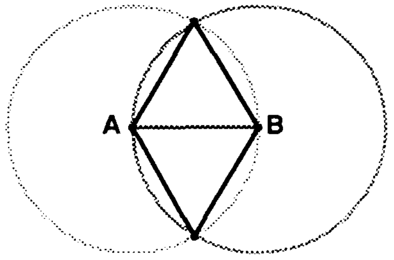


Fig. 6.12 - Losango dada a diagonal *[AB]* - XA, YB.

Passagem do episódio de ensino E1

Também os alunos participantes neste episódio de ensino foram capazes de fazer pequenas justificações associadas directamente ao processo de realização da construção. Por exemplo, deduziram correctamente a igualdade dos lados do quadrado que inscreveram na circunferência (figura 6.13):

DE [aponta os ângulos ao centro na figura 6.13]: Porque aqui os ângulos são todos iguais e...

JC: Então como os ângulos são iguais as cordas são iguais.

Inv: Como é que sabes que os ângulos são iguais?

DE [aponta os diâmetros]: Porque é perpendicular. (E1, §368-371.)

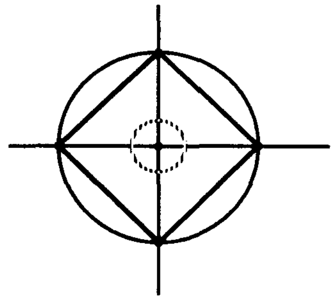


Fig. 6.13 - Os lados do quadrado são iguais porque correspondem a ângulos ao centro iguais (E1).

Passagem do episódio de ensino E3

RD mostrou que sabia fazer a construção das circunferências que passavam pelos extremos de um segmento, e justificou-a sem hesitações, aplicando correctamente a propriedade da mediatriz:

Inv: [...] O que eu pergunto é assim: como é que vocês tinham a certeza que a circunferência ia passar pelo outro extremo do segmento?

RD: Porque ele está à mesma distância dos dois lados.

Inv: Ele, quem é o "ele" neste caso concreto?

RD: O ponto que a gente escolhemos como centro está à mesma distância das duas extremidades do segmento.

Inv: Porquê?

RD: Porque é uma propriedade da mediatriz. (E3, §12-17.)

No último problema realizado neste episódio de ensino, localização de um ponto numa estrada equidistante de duas casas, depois de algumas tentativas RD construiu a mediatriz do segmento que unia os pontos que representavam as duas casas e explicou que «o ponto onde a estrada cruzava a mediatriz estava à mesma distância das duas casas porque todos os pontos da mediatriz estão à mesma distância dos extremos do segmento».

Passagem do episódio de ensino E6

Antes de fazer a actividade 2-ficha 11 — construir rigorosamente a tangente a uma circunferência num dos seus pontos — a investigadora recordou que na aula tinham falado em propriedades da circunferência e, imediatamente, TA referiu a propriedade como está no manual: «Eu acho que era perpendicular ao... a uma recta que passasse no centro da circunferência».

SA construiu uma circunferência e um ponto sobre ela e procurou nos menus do Cabri-géomètre um primitiva *Tangente* mas MA disse-lhe que não havia. Pouco depois TA lembrou-se de que podia fazer «o ponto centro da circunferência, traçar... um segmento» que representou com o dedo, e MA concluiu a ideia «e depois uma recta perpendicular» (figura 6.14).

Para justificar a construção TA respondeu que utilizou a propriedade anterior e voltou a formulá-la, mas adaptando-a correctamente à utilização que fez: «uma recta tangente é perpendicular a um raio da circunferência».

Construção E6.1 (2 Ficha11)
Circunferência
Ponto sobre circ.
Centro de uma circ.
Segmento definido por 2 pontos
Recta perpendicular

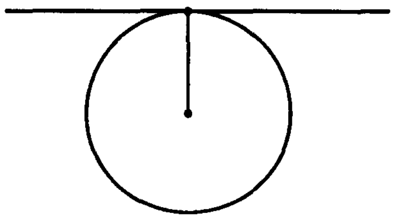


Figura 6.14 - História da construção de uma tangente a uma circunferência num os seus pontos - E6.

6.2.8 Justificação mista

Para justificar uma construção, nem sempre os alunos utilizavam um único dos tipos identificados anteriormente. Em muitos casos misturavam aparência visual, processo de construção, utilização implícita e explícita de propriedades, num vaivém entre evidência empírica, indução e dedução de propriedades, como mostra o exemplo seguinte.

Passagem do episódio de ensino E5

IS, na sua argumentação para justificar a igualdade dos lados do quadrado tangentes à circunferência, admitiu implicitamente a impossibilidade de os quatro lados de um rectângulo serem tangentes a uma circunferência:

Inv: Mas isso [a perpendicularidade] não te garantia que os lados iam ficar iguais.

IS: Sim porque... Garantia porque, por exemplo, o rectângulo nunca poderia ser por causa da circunferência. (E5, §224-225.)

Para justificar essa igualdade IS pareceu visualizar que duas rectas perpendiculares a uma terceira mantêm entre si a mesma distância (são paralelas, embora IS nunca usasse este termo), e como naquele caso a distância entre os dois pares de rectas paralelas era igual ao dobro do raio da circunferência, os lados do quadrado eram iguais: «as tangentes são perpendiculares aos raios e [...] um raio vai desde qualquer ponto da circunferência ao centro, o centro é como se fosse o ponto médio [...] logo tem sempre a mesma medida para qualquer um dos lados. O raio vai medir metade do lado do quadrado [...] Se nós fizéssemos os quatro raios iríamos ter quatro quadradinhos pequeninos.»

Em resumo: os tipos de justificação utilizados pelos alunos agrupam-se em oito categorias principais. Em certos casos as justificações não passaram de respostas *ad hoc*, dadas devido à necessidade que os alunos sentiam de dizer qualquer coisa, umas vezes sem muita lógica, outras repetindo propriedades decoradas sem reflectir sobre a sua adequação à situação.

De início, a maioria dos alunos enredava-se em justificações *circulares* em que argumentavam com o que devia ser justificado. A necessidade de referir as propriedades segundo uma certa ordem não parecia fazer sentido. Para alguns deles foi mesmo aparente a convicção de que a justificação formal não fazia muito sentido porque a evidência lhes mostrava o que era pedido.

Os tipos de justificação privilegiados pelos alunos foram essencialmente empíricos, isto é, baseavam-se na sua experiência das construções e das figuras exploradas. Com frequência as justificações referiam características da *aparência* visual *das construções*, sem que os alunos fossem capazes de explicitar as propriedades subjacentes da figura. A *descrição do processo* utilizado para fazer a *construção* constituiu outra forma empírica de os alunos justificarem as construções. Umas vezes repetiam-no parcialmente ou integralmente, em alguns casos referindo explicitamente propriedades da figura, outras vezes referiam-no para reforçar argumentação já produzida. A *identificação de relações invariantes através da manipulação*, nomeadamente relações de igualdade, constituiu um tipo de justificação indutiva, mas que apenas aconteceu muito pontualmente.

Algumas justificações basearam-se em operações com comprimentos ou amplitudes, tipicamente *aritméticas/algébricas*. Sobretudo na fase final da intervenção, apareceram justificações mais formais, baseadas na selecção e ordenação de *uma ou duas propriedades deduzidas* do processo de construção, ainda que formuladas com imprecisões. Muitas justificações não se enquadravam num único dos tipos anteriores, mas, na maioria das vezes, misturavam alguns deles, nomeadamente *aparência visual*, *processo de construção* e *dedução de uma ou duas propriedades*.

6.3 Obstáculos na justificação de construções

Os tipos de justificação das construções identificados anteriormente deixam perceber que uma larga maioria de alunos se confrontou com a questão de fazer justificações baseadas na dedução de propriedades e relações das figuras representadas pelas construções. O principal tipo de obstáculos decorreu da aparência com que habitualmente os alunos visualizavam as construções e as figuras, mas a dificuldade em verbalizar as suas ideias, oralmente, e mais ainda por escrito, também lhes causou alguns entraves. A seguir desenvolvem-se estes temas.

6.3.1 Obstáculos visuais

Se a visualização foi um alicerce na análise das construções, também se reconhece que daí resultaram alguns obstáculos, na medida em que os alunos fixavam a sua análise na construção no ecrã do computador e dificilmente a consideravam como representante da figura. A visualização das figuras através de exemplos prototípicos e a incapacidade de ver uma construção de diferentes modos, duas categorias de «obstáculos visuais» identificadas por Yerushalmy e Chazan (1990) (§2.5.2), constituíram neste estudo os principais obstáculos dessa natureza.

Visualização de propriedades associadas a exemplos prototípicos

A preferência pelos exemplos prototípicos das figuras levou muitos alunos a associar determinadas propriedades geométricas a esses exemplos. A propriedade da equidistância dos pontos da mediatriz de um segmento de recta aos seus extremos é um exemplo típico desta situação. Em geral os alunos visualizavam esta propriedade associada à representação do triângulo isósceles na posição preferida, como mostram os exemplos seguintes.

Passagem da ficha 9

Na actividade 2-ficha 9, que não era acompanhada de qualquer desenho, a construção feita pelo grupo JJDM e as respostas que o grupo deu confirmam a visualização referida (figura 6.15):

2.1 Criem um segmento [BE] e contruam a sua mediatriz. Construam um ponto U sobre a mediatriz. Criem e meçam os segmentos [UB] e [UE]. O que observam?

Observamos que se cria um triangulo esosceles [*sic*]

Desloquem o ponto U (verifiquem se ele permanece sobre a mediatriz). O que observam?

Observamos que fica sempre um triangulo esosceles menos quando ficam todos os lados iguais [*sic*]

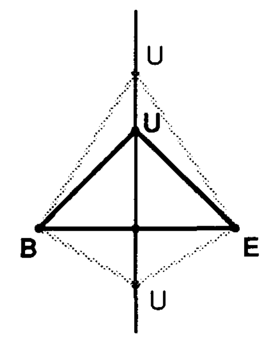


Fig. 6.15 - A propriedade da equidistância dos pontos da mediatriz de um segmento de recta aos seus extremos, é associada a um triângulo isósceles na posição preferida - JJDM.

Passagem do episódio de ensino E2

XA e YB formularam a mesma propriedade dos pontos da mediatriz de forma pouco clara, mas referiram a simetria dos dois segmentos e esclareceram a sua ideia com uma simulação gestual que reforça o que foi dito sobre a visualização desta propriedade:

YB: Então a propriedade é manterem os dois segmentos à mesma... a mesma medida [simula com as duas mãos os dois segmentos].

XA: A propriedade que eu acho disto é que... um segmento, a qualquer ponto da mediatriz, que ligue os extremos do segmento a qualquer ponto da mediatriz... pronto, são simétricos um do lado... são simétricos um ao outro [simula com os dois dedos indicadores a simetria ].

Inv: São simétricos, exactamente, e portanto têm?

XA: A mesma medida. (E2, §18-21)

Os alunos XA e YB tiveram bastante dificuldade em justificar porque é que a circunferência que tinha construído com centro no ponto de intersecção das mediatrizes dos lados de um triângulo e a passar num dos vértices também passava pelos outros dois (3-ficha 9). A aplicação da propriedade dos pontos da mediatriz exigiu que imaginassem os triângulos isósceles em diferentes posições. Perto do fim do episódio de ensino, XA acabou por fazer isso, depois de manipular bastante a construção, onde acrescentou os segmentos *[BW]*, *[BT]* e *[BZ]* (figura 6.16), e de discutir o assunto com o colega e com a investigadora.

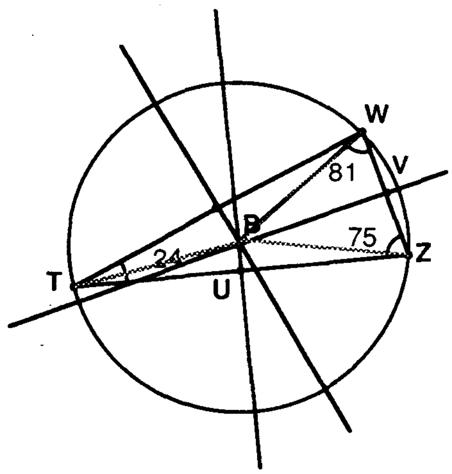


Fig. 6.16 - Circunferência com centro no ponto de intersecção das mediatrizes e a passar por um dos vértices do triângulo - E2.

A representação prototípica da propriedade dos pontos da mediatriz influenciou as justificações do par XA/YB, pois de início ficaram fixos nela. No entanto, observando as construções através da manipulação, estes alunos, e também outros, conseguiram não se fixar tanto nos exemplos prototípicos e generalizar as suas conclusões.

Fixação em particularidades de uma construção

A dificuldade em analisar diferentes aspectos de uma construção constituiu também um obstáculo à selecção e ordenação de propriedades de uma construção com vista à sua justificação. Os alunos fixavam-se em propriedades para eles mais evidentes, por norma directamente associadas ao processo de construção, e dificilmente visualizavam as construções de uma forma diferente.

Passagem do episódio de ensino E1

Os alunos participantes neste episódio tiveram dificuldade em justificar a igualdade dos ângulos do quadrado que inscreveram numa circunferência (2-ficha Avaliação 1). JG fixou-se nas quatro partes em que os dois diâmetros dividiam a circunferência (figura 6.17) mas não soube como usar isso, nem mesmo aproveitando as ideias dos seus colegas:

Inv: Só falta justificar [...] porque é que os quatro ângulos também ficam...

JC: Iguais.

Inv: De 90°, aqueles quatro ângulos do quadrado.

DE: Uhmm! Sim mas...

Inv: Arranja uma justificação matemática para isso.

JC: Era... tinha a ver com uma metade...

Inv: Tinha a ver com uma metade... De quê?

JC: Era a metade do... Penso que era da circunferência.

Inv: Pensas que era a metade de uma circunferência.

JG: Uma circunferência tem 360°, se a gente for a dividir por quatro dá 90.

DE: Pois! [Ri-se e JC também.]

JC: Também não é assim.

Inv: O que é que é 90, diz lá JG?

JG: É uma quarta parte da circunferência (E1, §418-428.)

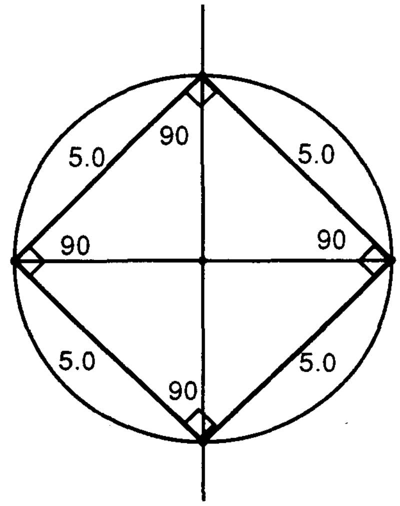


Fig. 6.17 - Quadrado inscrito numa circunferência - grupo JJDM

JC e DE acabaram por dizer que os ângulos eram metade de 180 mas não explicaram porquê e JG voltou a insistir na ideia das quatro partes da circunferência: «esta recta aqui está perpendicular ao segmento» (figura 6.17), sem ser capaz de visualizar as diferentes semicircunferências a partir das quais obtinha a amplitude 180° proposta pelos colegas.

Na primeira actividade deste episódio de ensino, os alunos inscreveram um ângulo numa semicircunferência (figura 6.18A), observaram que esse ângulo permanecia sempre recto e fizeram a respectiva justificação. No entanto, como em cima se refere, não usaram isso para justificar que os ângulos do quadrado que inscreveram na circunferência eram rectos.

Na última actividade construíram um rectângulo e a respectiva circunferência circunscrita (figura 6.18B). Dessa vez os alunos relacionaram os ângulos do rectângulo inscrito com o ângulo recto do primeiro problema. Eventualmente a aparência visual da última construção (figura 6.18B) fez-lhes recordar a da construção do ângulo inscrito numa semicircunferência (figura 6.18A), mais do que o fez a aparência do quadrado inscrito (figura 6.17).

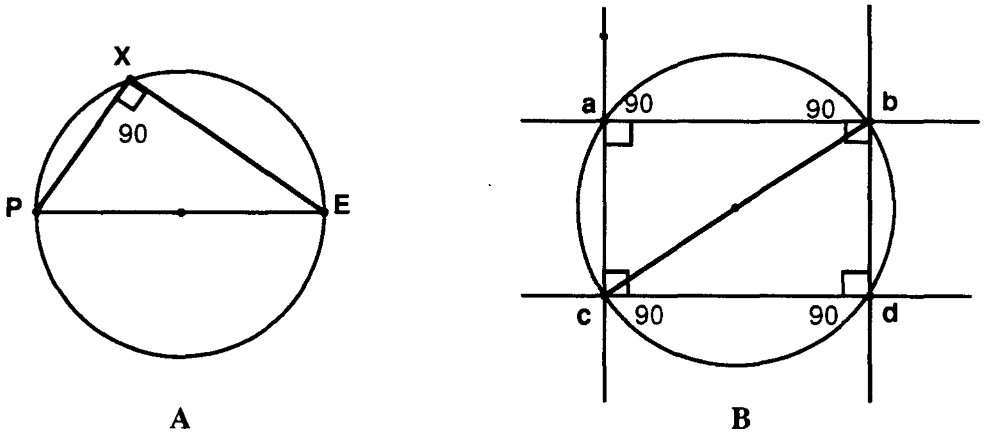


Fig. 6.18 - Ângulo inscrito numa semicircunferência, circunferência circunscrita a um rectângulo, primeira e última construções realizadas em E1.

6.3.2 Obstáculos verbais

De um modo geral os alunos participantes neste estudo revelaram muita dificuldade em exprimir-se, quer por escrito quer oralmente, o que constituiu um entrave à sua capacidade de justificar as construções que faziam. Por outro lado, foi possível perceber que muitos alunos tinham alguma dificuldade em entender o discurso da investigadora quando esta lhes solicitava uma justificação mais formalizada, pois consideravam suficientes as suas respostas empíricas.

Dificuldades de expressão

Mesmo uma análise superficial das respostas que escreveram nas diversas fichas mostra que os textos dos alunos eram normalmente pouco claros e com bastantes erros. O exemplo seguinte mostra isso.

Passagem da ficha Avaliação 2B

IS mostrou um desempenho muito razoável ao longo da intervenção didáctica. A construção de um triângulo rectângulo isósceles, que fez na última ficha, representa-o numa posição pouco habitual. A descrição dessa construção, mostra as dificuldades de redacção em cima referidas:

Fizemos o segmento [m] e [k] e achamos a sua mediatriz, fazendo a intersecesão de dois objectos achamos o ponto [l] depois fizemos uma circunferencia que cuje as estremidades passavam nos pontos [m] e [k] depois fizemos o ponto [j] e unimos atravez de segmentos o ponto [j] ou [k] e ao [m]. [sic]

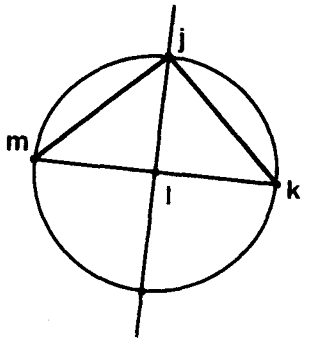


Fig. 6.19 - Triângulo rectângulo isósceles - IS.

As dificuldades de expressão oral foram mais patenteadas nos episódios de ensino. Quase todos os alunos participantes reconheceram que lhes era difícil justificar as construções que faziam, e atribuíram isso à dificuldade que sentiam em exprimir as suas ideias. Como eles próprios disseram, «tinham as ideias na cabeça, mas era-lhes difícil explicá-las». Para alguns alunos isso era consequência da pouca experiência que tinham em Geometria. Os comentários seguintes são elucidativos.

Passagem do episódio de ensino E2

Inv: Pronto... Vocês foram construir as três mediatrizes, outra vez pelo mesmo processo. Eu não tenho dúvida nenhuma que vocês afinal sabem o que é a mediatriz.

[YB acena sim.]

Inv: Tem que ser perpendicular e passa pelo ponto médio. Mas depois têm uma certa dificuldade em escrever as coisas, não é?

YB: É. É um bocado difícil.

Inv: Porquê?

YB: Para se exprimir bem, é um bocado difícil.

XA: A gente conhece poucos termos, quer dizer conhecemos muitos termos matemáticos, mas como também é o segundo, não, é o primeiro ano que estamos a dar Geometria a sério...

YB: Geometria a sério... eu nunca dei Geometria [ri-se].

XA: Eu dei, na quarta classe.

YB: Ah, isso eu também. (E2, §131-140.)

Passagem do episódio de ensino E1

JC: Porque o ponto *X* está na circunferência... Então todos os pontos que estão à volta da circunferência estão à mesma medida do centro... em redor. Então como o ponto *P* e o ponto *E* não se deslocam e... Isto é um bocadinho difícil...

[...]

JC: Eu penso que nós aqui não fazemos esta circunferência inteira, cortamos e depois...

DE: Diz!

JC: Tenho na cabeça só que não consigo explicá-la. (E1, §§72, 454-456)

Passagem do episódio de ensino E3

Inv: Têm achado fácil, têm achado difícil, os problemas que têm sido postos?

RD: Tem sido fácil. É difícil é a gente exprimir-se.

PF: Quer dizer nós sabemos...

Inv: O que é que acham que é assim mais difícil nisto tudo?

RD: A gente passar as nossas ideias para o papel.

PF: As nossas ideias para o papel, isso mesmo.

Inv: Pois, eu também acho que é essa a vossa grande dificuldade, normalmente... Acho que vocês sabem mais do que têm capacidade de pôr... Mas também acho que não têm muita paciência às vezes, não é?

PF: É muito chato... isso escrever... acho que ninguém gosta. Eu pelo menos não gosto de escrever.

RD: Eu também não. (E3, §453-461.)

Passagem do episódio de ensino E4

LA: Acho que... A pergunta, eu percebo a pergunta, não consigo é explicar, dizer...

BF: Não consegue é pô-la ali no coiso [aponta o ecrã]. A ideia tenho, só que não consigo é pô-la em prática. (E4, §550-551).

Passagem do episódio de ensino E5

IS: Porquê? A bissectriz divide ao meio o... digamos o... como é que eu hei-de explicar...

Inv: ... A parte dos porquês é sempre mais difícil, é?

IS: É. (E5, §536-537)

Níveis de discurso

Em alguns episódios de ensino notou-se que os alunos revelavam dificuldade em justificar certas construções mas posteriormente, a propósito da resolução de outros problemas, conseguiam ultrapassá-las. Algumas dessas dificuldades resultaram de um desfasamento nos níveis de discurso da investigadora e dos alunos. Estes davam justificações que em seu entender respondiam à questão colocada, a investigadora insistia em obter justificações mais formais mas os alunos não percebiam o que se pretendia e, com frequência, as suas respostas começavam a ser circulares. No entanto, em muitos casos o diálogo travado ao longo dos episódios de ensino permitiu aproximar os níveis de discurso dos alunos e da investigadora e levá-los a formalizar as suas respostas.

Passagem do episódio de ensino E4

No início deste episódio discutiu-se a resolução da actividade 1 da ficha 10 — construir duas circunferências a passar pelos extremos de um mesmo segmento dado. LA disse que tinham construído a mediatriz do segmento e um ponto sobre essa mediatriz que era o centro da primeira circunferência, e depois repetiu o processo. A sua justificação da escolha do centro foi um pouco confusa. Para ele era «óbvio» que esse centro iria estar à mesma distância dos extremos do segmento.

Na última actividade, para determinar o local de uma estação sobre uma linha de comboio equidistante de duas casas, LA construiu a mediatriz do segmento que "unia as duas casas", disse que a solução era o ponto de intersecção da mediatriz com a recta que representava a linha do comboio e justificou: «como é um ponto que está sobre a mediatriz está à mesma distância dos dois..., dos dois lados do segmento». Imediatamente a seguir acrescentou: «é isto que estivemos a ver agora aqui, isto aqui» e apontou na ficha 10 o primeiro problema. Desta vez LA justificou a construção formulando uma propriedade adequada, ainda que com alguma imprecisão, e sozinho reconheceu a analogia com o primeiro problema.

O facto de muitas vezes os alunos parecerem não perceber o que é que se pretendia com a justificação de uma construção, e de entrarem em círculos nessas justificações, pode ter a ver com o seu nível de van Hiele de desenvolvimento de raciocínio geométrico. Como se refere em §2.2.1 cada nível tem uma linguagem própria e um aluno que raciocine num determinado nível pode não entender um discurso feito num nível superior.

Em resumo: para a grande maioria dos alunos participantes neste estudo a justificação das construções foi um tipo de actividade em que se lhes depararam alguns obstáculos. Os principais foram de natureza visual. Por vezes, os alunos associavam as propriedades geométricas a exemplos prototípicos das figuras, fixavam-se neles e não reconheciam a propriedade noutras situações. Certas propriedades pareceram ter uma "força visual" tão dominante, nomeadamente se eram usadas explicitamente no processo de construção, que os alunos não conseguiam libertar-se delas e descobrir outras mais adequadas às justificações pretendidas.

Detectaram-se também obstáculos de carácter verbal. Por um lado, resultaram da dificuldade que os alunos sentiam em exprimir as suas ideias, oralmente e por escrito. Por outro lado, resultaram de os alunos nem sempre entenderem o discurso da investigadora quando esta lhes solicitava outras justificações para além das que já tinham dado, eventualmente porque o seu nível de van Hiele não o permitia.

A manipulação das construções e a observação de aparências variadas que assim conseguiam dar-lhes, bem como os longos diálogos mantidos com a investigadora e os colegas, levaram alguns alunos a ultrapassar os obstáculos referidos. A explicação de qualquer coisa, dada por um aluno a um colega que não estava a perceber, revelou-se um factor determinante na clarificação das exposições orais dos alunos, e na sua compreenção do sentido da justificação formal das construções.

6.4 Justificação de construções e níveis de van Hiele

A análise feita nas anteriores secções deste capítulo, sugere a inserção de certos tipos de justificação das construções, usados pelos alunos participantes neste estudo, num dos três primeiros níveis de van Hiele de desenvolvimento do raciocínio geométrico (§2.2.1).

Quatro dos tipos de justificação caracterizados em §6.2 parecem indicar, com algumas ressalvas, um raciocínio num dos seguintes níveis de van Hiele:

- No Nível 1 (Visual) os alunos identificam e operam com as figuras geométricas de acordo com a aparência das suas representações materiais. As justificações em que os alunos se limitaram a usar argumentação baseada na aparência da construção, sem nunca considerarem essa construção como um exemplo da figura, revelam um raciocínio deste nível.
- No Nível 2 (Descritivo/Analítico) os alunos identificam as figuras através de conjuntos de propriedades. Indicam para um raciocínio neste nível as justificações em que os alunos descreviam o processo utilizado para fazer uma construção, referindo explicitamente propriedades da figura, bem como as justificações baseadas na identificação de relações invariantes através da manipulação da construção.
- No Nível 3 (Abstracto/Relacional) os alunos compreendem e por vezes dão argumentos lógicos. As justificações deduzidas em um ou dois passos que os alunos fizeram por si próprios, apontam para um raciocínio neste nível.

A grande maioria dos alunos da turma demorou um certo tempo até entender o sentido da justificação formal de uma construção, facto que, em particular, se revelou na forma circular como referiam as propriedades para fazer muitas justificações, e que em alguns casos perdurou até ao final da intervenção didáctica. Os tipos de justificação baseados na aparência da construção e na descrição do processo de construção foram os mais utilizados, quer nas aulas, quer nos episódios de ensino. Alguns alunos, umas vezes com apoio da investigadora outras sozinhos, conseguiram dar pequenas justificações baseadas na selecção e ordenação de uma ou duas propriedades da figura.

Estas comprovações corroboram a análise dos resultados do Teste de Geometria de van Hiele, segundo a qual, no final da intervenção didáctica, a maioria dos alunos da turma atingiu o Nível 2, e alguns o Nível 3 (como se discute em §4.4.1).

Verificou-se ainda que alguns alunos justificavam diferentes construções de diferentes maneiras, consoante o seu grau de familiarização com a figura que estavam a analisar. Outras vezes misturavam vários tipos na justificação de uma mesma construção. Oscilavam entre a aparência visual e a descrição do processo de construção, referiam propriedades em círculo, mas, por vezes, encadeavam uma ou outra propriedade, fazendo justificações que se podem considerar a "meio caminho" entre a evidência empírica e a dedução. Estas situações podem apontar para uma transição entre o Nível 1 e o Nível 2, nuns casos, ou entre o Nível 2 e o Nível 3, noutros casos.

Esta comprovação também está de acordo com a análise dos resultados obtidos pelos alunos no Teste de Geometria de van Hiele, que mostrou a possibilidade de transição entre Níveis de van Hiele, como se refere em §4.4.1.

O tipo de justificação a que se deu o nome *ad hoc* não parece ser passível de inserção no modelo de van Hiele, uma vez que a formulação actual do modelo não contempla comportamentos como esses (§2.2.2). Essas justificações resultaram da crença dos alunos de que era preciso responder qualquer coisa para mostrar que "sabiam do assunto". Muitos dos alunos daquela turma preocupavam-se em "fazer boa figura", como a sua professora comentou várias vezes, e como a investigadora pôde observar nas aulas em que participou, e mesmo nos episódios de ensino.

As justificações de tipo aritmético/algébrico também não são tratadas pelo modelo, ainda que raciocínios desse tipo sejam imprescindíveis em muitos raciocínios geométricos.

Em resumo: alguns dos tipos de justificação das construções, caracterizados em §6.2, apontam para um desenvolvimento de raciocínio geométrico dos alunos participantes, inserido num dos três primeiros níveis do modelo de van Hiele. Os tipos de justificação mais usuais mostram que muitos alunos reconheciam propriedades das figuras geométricas mas não eram capazes de fazer raciocínios dedutivos simples, isto é, pareciam ter um desenvolvimento de Nível 2 (Descritivo/Analítico). Outras justificações, que oscilaram entre observação da construção, identificação de propriedades e, por vezes, dedução de propriedades, parecem indicar raciocínios em transição entre os Níveis 1 e 2 ou entre os Níveis 2 e 3. Estes resultados corroboram a análise dos resultados do Teste de Geometria de van Hiele que se apresenta em §4.4.1.

Não se inseriram no modelo de van Hiele as justificações tipo *ad hoc*, decorrentes do sistema de crenças (*belief systems*) dos alunos, e também as justificações tipo *aritméticas/algébricas*, uma vez que a actual formulação do modelo não parece contemplá-las (ver §2.2.2).

Capítulo 7 - Exploração de construções geométricas

Neste estudo, a exploração de construções geométricas pelos alunos foi feita em três vertentes: realização, justificação e investigação das construções. Depois de nos dois capítulos anteriores (5, 6) se discutirem os processos evidenciados na realização de construções e na sua justificação, na primeira secção deste capítulo descrevem-se, analisam-se e interpretam-se os processos de investigação das construções — terceiro objectivo específico do estudo.

Mas uma análise da exploração de construções feita isoladamente em cada uma das três vertentes consideradas ficaria incompleta, uma vez que em muitas actividades realizadas pelos alunos nem sempre é muito clara a fronteira entre cada uma dessas vertentes. Assim, na segunda secção deste capítulo integra-se, numa perspectiva global, a realização, justificação e investigação de construções. Essa intergração é feita sob o tema genérico *manipulação na exploração de construções*, na medida em que a manipulação directa constituiu um denominador comum dos três tipos de actividades, particularmente em foco neste estudo.

No final do capítulo apresenta-se uma perspectiva global sobre *investigação de construções e utilização da manipulação.*

7.1 Investigação de construções geométricas

A investigação de uma construção, isto é, a sua manipulação com vista à pesquisa de relações invariantes e à formulação de conjecturas sobre a figura, induzidas a partir da observação (§2.7) foi uma actividade que não se coadunou muito bem com o tipo e sobretudo com o ritmo de aulas habitual da turma participante neste estudo. As investigações propostas nas fichas sugeriam a observação de relações invariantes quase sempre de forma bastante explícita. Os episódios de ensino permitiram uma maior liberdade de acção à investigadora que aí pôde propor investigações mais abertas. Mas a decisão de seguir as ideias dos alunos, mais de que o guião pré-estabelecido, fez com que apenas em três episódios se tivesse abordado esse tipo de actividade.

A análise dos processos de investigação é, por isso, menos fundamentada do que a elaborada sobre realização e justificação de construções Mesmo com esta salvaguarda, os dados evidenciaram algumas questões cujo tratamento se considera pertinente. Essas questões agrupam-se nas categorias seguintes:

- Observação de relações invariantes explicitadas
- Orientação da investigação de construções
- Destaque dado às relações que variam

- Ultrapassagem de obstáculos visuais através da investigação
- Apropriação de uma investigação aberta
- Formulação de conjecturas

7.1.1 Observação de relações invariantes explicitadas

Desde as primeiras fichas de trabalho que se tentou despertar a atenção dos alunos para o facto de as construções conservarem, através da manipulação, relações e propriedades que decorriam do processo utilizado na construção. As respostas que os alunos deram nas fichas de trabalho deixam perceber que, em geral, reconheceram as relações invariantes para as quais se lhes chamou explicitamente a atenção, como aconteceu nas actividades das fichas 5 e 13, exemplificadas a seguir.

Passagem da ficha 5

Na ficha 5 (segunda ficha da segunda fase da intervenção) propunha-se a construção de um triângulo com dois lados iguais e em seguida pedia-se que marcassem e medissem os seus ângulos e que observassem o que acontecia quando deslocavam os seus vértices. Todos os grupos responderam que dois dos ângulos do triângulo permaneciam sempre iguais. (Alguns grupos observaram ainda que, por vezes, os três ângulos ficavam iguais.)

Passagem da ficha 13

Na ficha 13 (última ficha de trabalho), depois de construírem uma circunferência, um triângulo com os lados tangentes a essa circunferência e as três bissectrizes dos seus ângulos internos, os oito grupos observaram que as bissectrizes se intersectavam sempre no centro da circunferência (figura 7.1).

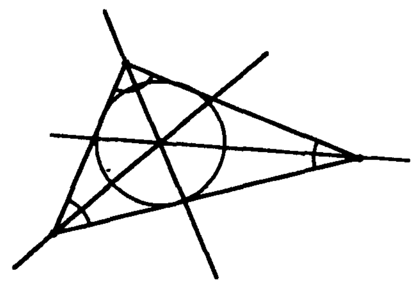


Fig. 7.1 - As 3 bissectrizes dos ângulos internos de um triângulo intersectam-se no centro da circunferência inscrita.

Justificação das relações invariantes

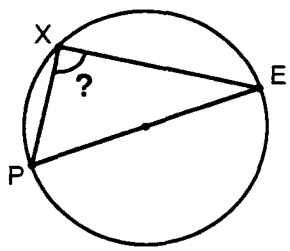
Em algumas fichas solicitou-se a justificação das relações invariantes observadas. Mas, tal como aconteceu em muitas justificações de construções, isso só foi conseguido com bastante apoio por parte da professora, que tentou que os alunos deduzissem essas relações a partir de propriedades que já conheciam. Mesmo nos casos em que os alunos pareceram consegi-lo, as respostas que depois escreveram nas fichas nem sempre foram muito claras, como mostra o exemplo a seguir.

Passagem da ficha Avaliação 1

A primeira actividade desta ficha propunha a construção de uma circunferência de diâmetro [*PE*] e de um ângulo *PXE* em que *X* era um ponto sobre a circunferência (figura 7.2). Perguntava-se, em seguida, o que é que acontecia à amplitude desse ângulo quando se deslocava *X* sobre a circunferência. Os oito grupos fizeram sem dificuldade a construção e observaram que a amplitude do ângulo era sempre 90°. Para o grupo SCIP o facto de a amplitude não variar significou acontecer «nada», como escreveram na ficha (figura 7.2).

Para justificar esse facto, a maioria dos grupos, depois de terem discutido a questão com a professora, relacionou o ângulo com o arco correspondente ou com o diâmetro da circunferência, de uma forma nem sempre muito explícita, como fez o grupo SCIP. (Para estas alunas o centro da circunferência era o *ponto médio*, como foi saliente no episódio de ensino.)

1.2 Desloquem o ponto *X* sobre a circunferência. O que é que acontece à amplitude do $\angle PXE$? (figura 7.2)
Nada, a amplitude é sempre a mesma, 90°. [*sic*]



1.3 São capazes de justificar esse facto?
Porque tem o seu vértice sobre a circunferência, passando pelo ponto médio. [*sic*]

Fig. 7.2 - Respostas do grupo SCIP às questões 1.2 e 1.3 - ficha Avaliação 1.

Utilização das relações invariantes

Por vezes, pretendeu-se também que os alunos usassem certas relações que tinham observado para justificar outras construções. Mas a maioria dos alunos não estabeleceu a ligação necessária, ou fê-lo com grande apoio. As respostas na segunda actividade da ficha Avaliação 1 ilustram estas afirmações.

Passagem da ficha Avaliação1

Na segunda actividade desta ficha, construir um quadrado inscrito numa circunferência, todos os grupos tiveram muita dificuldade em justificar porque é que a construção que fizeram (figura 7.3) lhes permitia obter ângulos rectos. Com todos eles a professora analisou como e porquê podiam aplicar a conclusão da actividade 1, mas as suas respostas foram confusas. Vários grupos ressaltaram o facto de terem dividido a circunferência em quatro partes iguais, mas a relação entre isso e o facto de terem obtido ângulos inscritos em semicircunferências não ficou muito clara, como mostra, por exemplo, a resposta do grupo SCIP (figura 7.3).

2.1 Construam uma circunferência. Construam um quadrado inscrito na circunferência.

[...]

2.4 Porque é que os ângulos ficam iguais quando deslocam os pontos de base do vosso quadrado?

Porque qualquer ãngulo inscrito e semicircunferência é recto medindo 90^0*, formando quatro arcos iguais.* [*sic*]

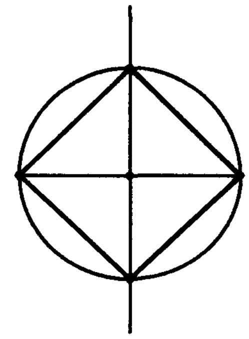


Fig. 7.3 - Resposta do grupo SCIP às questões 2.1 e 2.4 - ficha Avaliação 1.

7.1.2 Orientação da investigação de construções

Para os alunos participantes neste estudo, a observação de uma construção através da manipulação com vista à pesquisa de relações e propriedades da figura, não aconteceu expontaneamente. Foi preciso orientá-los para reflectirem sobre as alterações e sobre as invariâncias que viam a manipulação provocar na construção, e daí extraírem informações que lhes permitissem resolver os problemas, ou que lhes despertassem a curiosidade de descobrir as sitiuações em que aconteciam e as respectivas causas.

Uma passagem do episódio de ensino E6 documenta a forma como a maioria dos alunos manipulava as construções e "observavam" o que acontecia no ecrã.

Passagem do episódio de ensino E6

A actividade 1 da ficha 12 tinha como objectivo explorar a noção de distância de um ponto a uma recta. Depois de os alunos fazerem a construção representada na figura 7.4, pedia-se-lhes que deslocassem o ponto *X* sobre a recta até obterem o menor comprimento para o segmento [*ZX*] e perguntava-se qual era, nesse caso, a amplitude do ângulo *ZXY*.

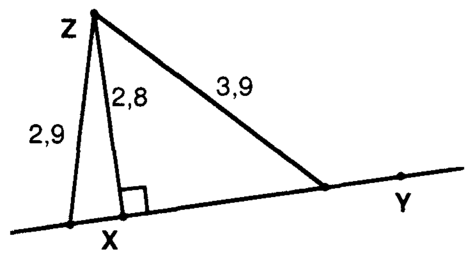


Fig. 7.4 - Distância de um ponto a uma recta, 1.2 - ficha 12.

Para esclarecer a resposta que as alunas deram a esta questão: «57», a investigadora pediu que voltassem a ver a gravação feita na aula, na qual o ângulo *ZXY* aparecia com amplitude 57°, e perguntou se a esse ângulo correspondia o segmento [*ZX*] com menor comprimento, como era solicitado na ficha. MA respondeu imediatamente que não, apontou na recta o que parecia ser o ponto correspondente ao ângulo recto e sugeriu a SA que deslocasse o ponto *X* até «esse sítio». SA fê-lo, depois voltou a obter um ângulo com 57°. A investigadora perguntou quanto era a medida do comprimento do segmento no caso do ângulo recto. *SA respondeu que não tinha reparado e as colegas não disseram nada.* SA continuou a deslocar o ponto sobre a recta mas desta vez, em diálogo com a investigadora. As alunas observaram a variação de medida do comprimento do segmento e a sua relação com a amplitude do ângulo e concluíram que o menor comprimento do segmento correspondia a um ângulo de 90°, como mostra a transcrição seguinte:

> Inv: Então, quando o ângulo era de 90° quanto era a medida do comprimento, repararam?
>
> SA: Ah, não.
>
> [...]
>
> TA: A medida do segmento é sempre igual [aponta *[XZ]*].
>
> MA: Não.
>
> Inv: Nesse caso, para um ângulo de 57°, quanto é a medida do segmento?
>
> MA, SA, TA: 5,7.
>
> Inv: 5,7. Agora anda lá com o ponto *X*, um bocadinho.
>
> MA: É 90.
>
> TA: Ah, vai diminuindo.
>
> SA: Diminui.
>
> Inv: Devagarinho...Mais para trás... Põe lá para aí 80°. Qualquer coisa à roda disso, 82... Aí, por exemplo. Quanto é agora a medida do comprimento do segmento?
>
> MA, SA, TA: 4,9.
>
> Inv: Então, aumentou, diminuiu?
>
> MA, SA, TA: Diminuiu.
>
> Inv: E o ângulo, o que é que lhe aconteceu?
>
> MA, SA, TA: Aumentou.
>
> Inv: Agora continua lá a andar com o ponto *X*.
>
> SA: Para lá?
>
> Inv: Pronto. E agora fica sempre?... Qual é a mais pequena de todas [as medidas]?
>
> TA: 4,8.
>
> Inv: 4,8, para a capacidade de medição que o programa tem. Em que posição é que o segmento tem o menor comprimento?
>
> TA: Então, quando está [traça com o dedo a perpendicular à recta]... Quando tem um ângulo de 90°. (E6, §561-580.)

Tal como aconteceu no episódio de ensino E6, na maior parte das vezes a investigadora teve necessidade de induzir e de apoiar a observação e a reflexão sobre o que se passava no ecrã, para levar os alunos a repararem nas modificações e nas invariâncias que aconteciam quando manipulavam as construções, levando os alunos a desenvolver uma atitude investigativa semelhante à de um geómetra na prática da sua actividade.

7.1.3 Destaque dado às relações que variam

Ao manipular uma construção e observar as transformações provocadas os alunos destacavam aquilo que viam modificar-se. A sua atenção fixava-se em variações evidentes, principalmente de segmentos de recta e/ou objectos deles dependentes, em alguns casos também de ângulos, o que lhes dificultava, e por vezes impedia, a análise de diferentes perspectivas da construção e da figura.

A passagem seguinte exemplifica esta questão.

Passagem do episódio de ensino E2

Neste episódio de ensino os alunos XA e YB resolveram a ficha 9 subordinada ao tema *aplicações da mediatriz*. Na questão 3.2 pedia-se que criassem um triângulo e que construíssem as mediatrizes dos seus três lados. Em seguida, pedia-se que deslocassem os vértices do triângulo e perguntava-se o que é que observavam.

XA começou a deslocar um dos vértices do triângulo, a investigadora perguntou o que é que conseguiam descobrir e YB respondeu «que as mediatrizes acompanham os...» hesitou e a investigadora completou «o movimento», referindo que tinha sido essa a resposta que tinham dado na ficha: «o que nós observamos foi que as mediatrizes acompanham o movimento do triângulo» [*sic*].

A investigadora insistiu para que tentassem descobrir mais qualquer coisa. Os dois alunos observaram então que «as mediatrizes mantêm o seu ângulo» e logo em seguida que as mediatrizes se «cruzam [...] intersectam», como XA corrigiu, «no mesmo ponto... de intersecção». Mas XA continuou a manipular a construção e voltou a salientar que as mediatrizes acompanhavam a variação dos respectivos segmentos (figura 7.5). A variação das mediatrizes acompanhando os segmentos respectivos foi para XA mais relevante do que o facto de se intersectarem num mesmo ponto. De facto, se depois de construir um triângulo qualquer e as mediatrizes dos seus lados, se deslocar um dos vértices é "muito visível" a transformação que sofrem os dois lados concorrentes nesse vértice e a variação das duas mediatrizes respectivas. O ponto de intersecção das mediatrizes "vê-se" deslocar sobre a mediatriz do lado que fica fixo, conforme se tenta ilustrar na figura 7.5.

Nas aulas e noutros episódios de ensino muitos alunos também se mostraram particularmente atraídos pelo que viam «mexer» (termo que a maioria dos alunos utilizava e que a investigadora acabou por adoptar nas conversas que com eles manteve). Isso não será de estranhar se se considerar que a possibilidade de "animar as construções" através da deslocação dos pontos (ou outros objectos) de base e provocar alterações nos objectos deles dependentes foi a grande novidade que o Cabri-géomètre trouxe às aulas de Geometria destes alunos, nomeadamente por oposição às construções que realizavam na disciplina de Desenho.

XA: Cada vez que eu desloco um vértice de um segmento a mediatriz desse segmento desloca-se também, como eu mudo também a medida dos outros segmentos as mediatrizes dos outros também se deslocam. (E2, §160.)

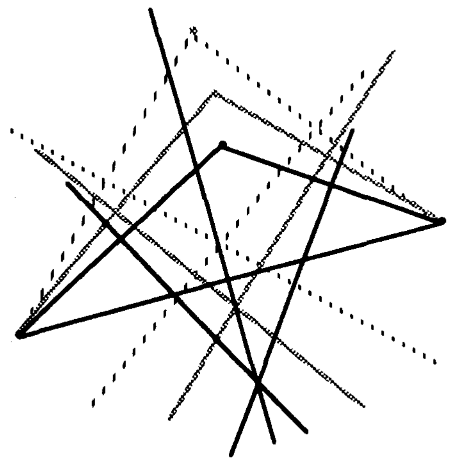


Fig. 7.5 - XA (E2) observou a variação das mediatrizes acompanhando os segmentos respectivos, quando deslocou um dos vértices do triângulo.

7.1.4 Ultrapassagem de obstáculos visuais através da investigação

A investigação de construções através da manipulação e a reflexão sobre o *feedback* devolvido pelo *software* permitiu que alguns alunos ultrapassassem obstáculos visuais que lhes dificultavam a análise das construções e a dedução da sua justificação. Em particular, generalizaram conceitos e propriedades que habitualmente reconheciam em exemplos prototípicos das figuras.

Passagem do episódio de ensino E2

Em §6.3.1 mostrou-se que muitos alunos visualizavam a propriedade da equidistância dos pontos da mediatriz aos extremos de um segmento de recta através de um triângulo isósceles na posição preferida e a dificuldade que essa representação da propriedade provocou quando XA e YB pretenderam justificar a construção da circunferência circunscrita a um triângulo.

Depois de lerem a actividade que em seguida lhes foi proposta — colocar um fogão a igual distância de três tendas de campismo (figura 7.6), para a realizarem XA e YB indicaram a mesma sequência de passos, o mesmo guião, que tinham usado na construção anterior, como mostra a transcrição em baixo.

2 Em que local deve um grupo de campistas colocar um fogão de modo a ficar à mesma distância das suas três tendas? Criem três pontos T1, T2 e T3 que representam as tendas. Façam uma construção que permita localizar o ponto F.

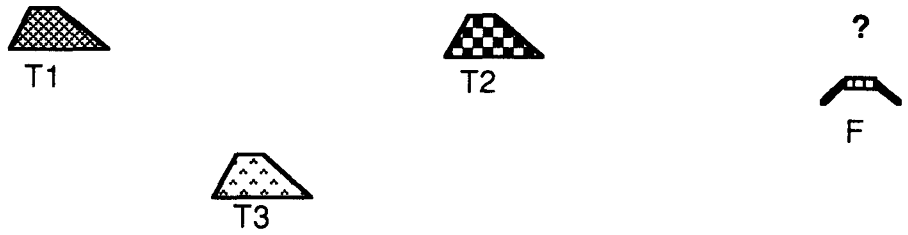


Fig. 7.6 - Localização de um fogão à mesma distância de três tendas de campismo (2 - ficha 9B)

XA [lê a actividade 2-ficha 9B - figura 7.6]: O *F* é o fogão? [ri-se].

Inv: Está muito bonito o meu fogão, faz favor não dizerem mal.

[Pensam 10 segundos.]

XA: Então isto é fazer o triângulo, o que a gente fez.

YB: Faz-se um triângulo, não é, e depois faz-se as mediatrizes.

XA, YB: Onde for a intersecção das mediatrizes é lá onde se põe o fogão.

[...]

Inv: Não têm dúvida nenhuma que isso era assim?

XA, YB: Não. (E2, §442-451.)

Na altura pareceu à investigadora haver uma certa contradição entre a incapacidade de os alunos reconhecerem as distâncias iguais na construção da circunferência circunscrita ao triângulo, que tinham acabado de realizar e explorar, e a utilização dessa construção como modelo para resolver a nova actividade. Assim, tentou perceber se seriam capazes de justificar a nova construção.

XA começou por referir que as distâncias do ponto médio de cada segmento ao ponto de intersecção das mediatrizes eram iguais, mas a investigadora fez-lhe notar que as tendas é que deveriam ficar à mesma distância do fogão. XA considerou que os vértices do triângulo no ecrã eram as tendas, recomeçou a deslocar um deles e comentou que a sua resposta anterior não tinha lógica porque um dos pontos médios «ia estar mais perto» e imediatamente a seguir os dois alunos identificaram finalmente os segmentos iguais e apontaram-nos na construção (figura 7.7).

Inv: O fogão tem que ficar à mesma distância de quê?

XA: Da tenda 1, da tenda 2 e da tenda 3.

Inv: Se tem que ficar à mesma distância da tenda 1, da tenda 2 e da tenda 3, qual é a lógica daquilo que tu me estás a dizer?

XA: Então, é porque, por exemplo, se isto fossem tendas [aponta os vértices do triângulo no ecrã, pega num dos vértices e arrasta a construção...].Se isto fossem tendas isto não tem lógica, porque este ia estar mais perto...

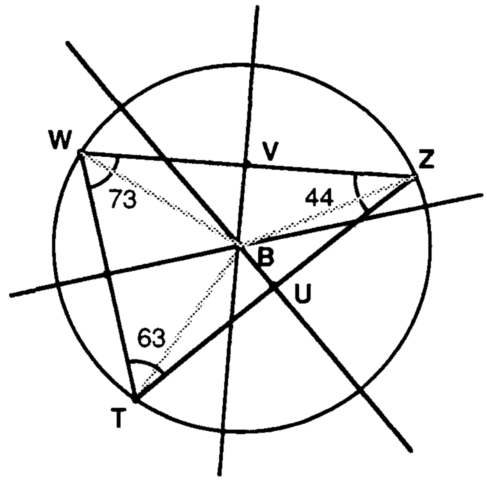


Fig. 7.7 - XA e YB (E2) apontaram as distâncias iguais na construção

YB: Não.

XA: Não. A distância daqui aqui, daqui aqui e daqui aqui é igual [*[BT]*, *[BZ]*, *[BW]*, figura 7.7].

YB [quase em simultâneo com XA]: Não. Se fizeres um... se fizeres um traço daqui aqui, daqui aqui e daqui aqui é igual [*[BT]*, *[BZ]*, *[BW]*, figura 7.7]. (E2, §460-467)

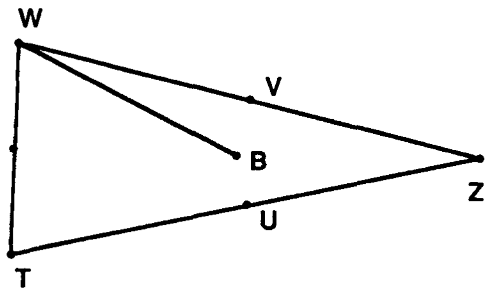
A investigadora voltou a perguntar porque é que os segmentos eram iguais; para facilitar a análise da construção, sugeriu que apagassem alguns objectos e deixassem só o triângulo e o ponto de intersecção. Enquanto YB fazia isso, XA começou a insistir «acho que já sei o que é» e mais adiante explicou:

XA: Porque este é o ponto de intersecção da... das mediatrizes [aponta *B* - figura 7.7], e cada mediatriz... A distância dos extremos do segmento da mediatriz que a gente está a fazer de cada... num triângulo, pronto, no sítio onde ela... É isso... As palavras... Eu sei que é isso, eu sei o que quero dizer mas... (E2, §493)

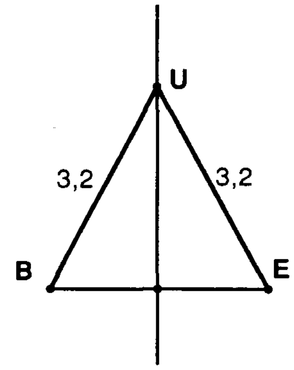
Como YB manifestasse ainda algumas dúvidas, a investigadora pediu a XA que explicasse melhor a sua ideia, e para o ajudar propôs que construíssem o segmento que representava a distância do fogão a uma das tendas. Depois de YB criar o segmento *[WB]* (figura 7.8A) XA clarificou o que tinha dito anteriormente, começando por salientar a analogia entre essa construção e a construção feita no início do episódio de ensino (figura 7.8B), e concluiu referindo a propriedade da mediatriz com algum rigor:

XA: Eu sei o que é. Aquela figura que a gente fez à bocado é a mesma coisa, só que em vez de estar assim, está assim [assinala com a mão que um dos vértices estava mais para a direita], foi o que a gente fez há bocado, e a distância de um ponto qualquer da mediatriz até aos extremos do segmento dessa mediatriz é igual. (E2, §534.)

Qualquer coisa no aspecto da construção representada na figura 7.8A terá levado XA a visualizar noutra posição a primeira construção (figura 7.8B) e a generalizar a sua representação da propriedade da equidistância dos pontos da mediatriz aos extremos de um segmento de recta. YB insistiu durante muito tempo na ideia de que os segmentos eram iguais porque eram «feitos a partir do meio de um segmento», mas no fim concordou que não eram «feitos a partir do meio do segmento, mas da mediatriz» e XA clarificou: «de um ponto da mediatriz desse segmento!», o que mostra que este aluno ficou bem esclarecido sobre esta questão.



A



B

Fig. 7.8 - A marcação da distância do fogão *B* à tenda de campismo *W* fez recordar a XA a propriedade dos pontos da mediatriz, tratada no início do episódio - E2.

Neste episódio de ensino, o longo tempo dispendido na investigação da construção, o diálogo com o colega e com a investigadora, e também a contextualização da construção recorrendo a uma realidade mais próxima dos alunos (tendas e fogão de campismo), proporcionaram a ultrapassagem de obstáculos visuais que inicialmente impediram uma análise adequada da construção, e permitiram a identificação de relações invariantes, a descoberta da respectiva justificação, e a generalização de um conceito geométrico com tantas aplicações práticas e teóricas como é a mediatriz de um segmento de recta.

7.1.5 Apropriação de uma investigação aberta

Nos episódios de ensino E2, E3 e E6, realizou-se uma actividade com características de investigação aberta, sugerida por um dos alunos da turma. À saída da aula em que se realizou a ficha 9, sobre aplicações da mediatriz e circuncentro de um triângulo, um aluno perguntou à investigadora se por vezes o ponto de intersecção das mediatrizes dos lados do triângulo não estava sobre um dos seus lados, e acrescentou se seria o caso do triângulo equilátero. A investigadora respondeu-lhe que isso tinha a ver com os ângulos e não com os lados do triângulo e propôs-lhe que na aula seguinte voltasse a fazer a construção e investigasse.

Esse aluno não quis participar num episódio de ensino, mas a investigadora aproveitou a sua ideia e, nos episódios de ensino E2, E3 e E6, em que o tema foi abordado, propôs que tentassem descobrir o que é que acontecia ao ponto de intersecção das mediatrizes dos lados de um triângulo quando deslocavam os seus vértices. Porém, aí, a iniciativa da investigação não partiu dos alunos e, ao contrário do aluno que levantou a questão, os alunos participantes nesses episódios não tinham qualquer ideia prévia sobre o que procuravam, mas, por outro lado, "desconfiaram que a investigadora o sabia". Isto fez com que no início da actividade não se sentissem muito à-vontade, e que apenas se tivessem apropriado e envolvido na actividade quando começaram a intuir as conclusões a que poderiam chegar.

Passagens do episódio de ensino E3

PF preocupou-se durante todo o tempo em descobrir a "intenção escondida" da investigadora, mais do que em analisar a construção, como mostram os comentários transcritos a seguir:

Inv: O que é que vai acontecendo a esse circuncentro? Notas alguma coisa? Mas olha para lá [PF], não olhes para mim.

[...]

Inv: [O ponto] chama-se sempre circuncentro, só que nesse caso está? Olha para lá!

[...]

PF: Ah, isto aqui é o dobro de... É isso? (E3, §201, 239, 282.)

A construção que PF e RD utilizaram para fazer a investigação tinha tido como objectivo inicial determinar o centro de uma circunferência de base. Os alunos criaram um triângulo a partir de três pontos sobre a circunferência e em seguida determinaram as mediatrizes dos seus três lados (figura 7.9A). Este algoritmo de construção só lhes permitia deslocar os vértices do triângulo sobre a circunferência. Quando o faziam viam as mediatrizes rodar e o seu ponto de intersecção — o centro da circunferência, permanecia «no mesmo sítio», como se lê na transcrição seguinte:

RD: Elas estão a rodar só que o ponto de intersecção está no mesmo sítio.

PF: As mediatrizes permanecem... continuam a intersectar-se.

RD: No mesmo sítio.

PF: No mesmo sítio, que é o centro da circunferência. (E3, §208-211.)

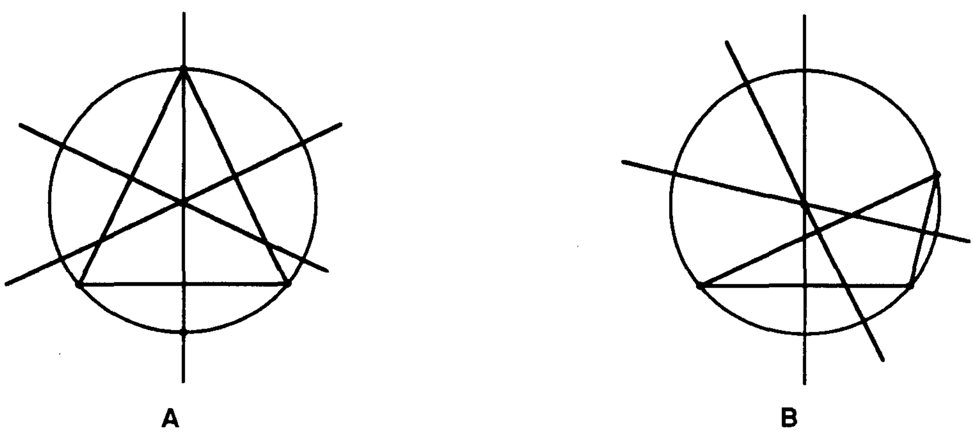


Fig. 7.9 - Duas fases da rotação dos vértices do triângulo sobre a circunferência, na investigação sobre a posição do circuncentro - E3.

A investigadora sugeriu então que procurassem uma relação entre o triângulo e o ponto de intersecção das mediatrizes, «o circuncentro», como PF acrescentou. Os alunos continuaram a rodar os vértices do triângulo e pararam quando a construção tinha o aspecto da figura 7.9B. A investigadora perguntou se notavam alguma diferença entre a nova figura e a inicial (figura 7.9A/B). RD respondeu: «Diferente? Só o comprimento dos lados do triângulo», mas PF notou que «o ponto onde se unem [...] já não se encontra dentro do triângulo». PF continuou a rodar os vértices colocando o circuncentro umas vezes «inscrito» no triângulo outras vezes «excluído».

A comprovação de que o circuncentro umas vezes estava «fora» outras vezes estava «dentro» do triângulo não pareceu esclarecer muito os alunos sobre a investigação que estavam a fazer e um pouco mais adiante PF queixou-se: «não estou a perceber aqui bem», mostrando que continuava sem descortinar um objectivo para a actividade. A investigadora sugeriu então que marcassem e medissem um dos ângulos do triângulo e tentassem descobrir uma relação entre o ângulo e a posição do circuncentro. Os alunos continuaram a deslocar os vértices mas não pareceram chegar a conclusão nenhuma, como mostra a "queixa" que PF voltou a fazer:

Inv: E agora mexe lá os vértices do triângulo e vê se consegues descobrir alguma relação entre esse ângulo [marcado] e o circuncentro... Vai lá mexendo, pega lá no vértice.

[PF manipula a figura e os dois observam.]

PF: Isto mexido, está bem mexido!

Inv: Não consegues?... Já há bocado disseste uma coisa, disseste que ele umas vezes está...

PF: Passa pelo centro da...

RD: Ah! Quando está fora... O ângulo é maior quando o centro da circunferência está fora do triângulo [figura 7.10A]. (E3, §258-263).

A transcrição anterior mostra também que a dada altura RD relacionou a posição do circuncentro com a amplitude do ângulo marcado. A partir daí pareceu ter-se apropriado da investigação, e a observação de um triângulo rectângulo, feita um pouco mais adiante, reforçou a sua conjectura de que a posição do circuncentro variava com o tipo de ângulo (figura 7.10B).

Inv: Então quando o ângulo é de 90°, quando o ângulo é recto, o que é que acontece ao circuncentro?

RD: Coincide na hipotenusa.

Inv: Coincide na hipotenusa, exactamente, é isso mesmo. Já aprenderam qualquer coisa esta tarde. Então agora põe o ângulo maior do que 90°.

RD [para PF]: Mais para baixo.

Inv: O que é que acontece ao circuncentro?

RD [sorrindo]: Não coincide com a hipotenusa nem está lá dentro...

Inv: Exactamente. E agora põe o ângulo mais pequeno que 90°.
RD: Está lá dentro.
PF: Ah, acontece a mesma coisa.
RD: Não.
PF: Ah, pois, intersectam-se lá dentro só que não é...
Inv: Intersectam-se lá dentro, exactamente... Portanto temos três situações diferentes, não é?
PF: Verdade.
Inv: Verdade, só porque eu estou a dizer que sim?
PF: Não, porque a gente acha. (E3, §319-335.)

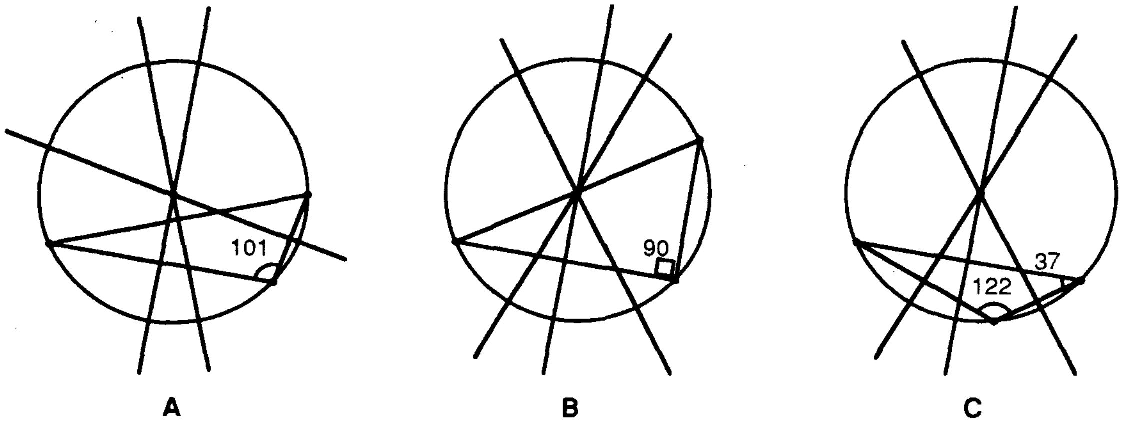


Fig. 7.10 - Sempre que um dos ângulos de um triângulo tem uma amplitude superior a 90° o circuncentro fica «fora» do triângulo - E3.

A sugestão de marcar apenas um dos ângulos não terá sido muito feliz pois, ao contrário dos alunos XA e YB no episódio de ensino anterior (E2), RD fixou-se nesse ângulo e quando a sua amplitude começou a diminuir, voltou a ficar sem perceber o que se estava a passar. A investigadora fez notar que outro ângulo tinha aumentado de amplitude, os dois alunos estimaram a amplitude desse segundo ângulo, marcaram-no e mediram-no (figura 7.10C) e concluíram que sempre que um dos ângulos tinha uma amplitude maior do que 90^0, o circuncentro estava fora do triângulo.

Ao contrário das actividades de realização de construções em que desde o início os alunos tinham uma noção clara do produto que deveriam obter, a investigação aqui referida foi proposta aos alunos de forma aberta, o que lhes provocou uma sensação de insegurança. A condução da investigação foi sugerida pela investigadora e os alunos só se apropriaram da actividade quando começaram a perceber a que conclusão deveriam chegar, para o que contribuiu decisivamente a análise do triângulo rectângulo, caso particular que lhes era mais familiar. Nos outros dois episódios de ensino em que se realizou esta actividade, os alunos tiveram comportamentos semelhantes. Nos três episódios a variedade de situações observadas e a reflexão sobre elas, a par do diálogo tarvado, desempenhou um papel relevante nas conclusões dos alunos.

7.1.6 Formulação de conjecturas

Na actividade de investigação sobre a localização do circuncentro de um triângulo pretendia-se que os alunos observassem uma grande variedade de exemplos da figura, obtidos pela manipulação das construções, e formulassem conjecturas. Nos três episódios de ensino os alunos começaram por fazer *conjecturas restritas* (§2.7), baseadas na observação de um número limitado de aparências da construção e naquilo que mais lhes despertava a atenção, normalmente a variação de segmentos e dos objectos deles dependentes. Perante contra- -exemplos, sugeridos mais ou menos explicitamente pela investigadora, rejeitavam ou modificavam as conjecturas e com maior ou menor apoio conseguiram formular *conjecturas genéricas* (§2.7), isto é, induzidas a partir da observação de um leque amplo de variações da construção, que permitia fazer uma certa generalização.

Num estudo realizado com alunos de 13-14 anos, Balacheff (1991b) encontrou quatro categorias de conjecturas (§2.6.2), mas salienta que a maioria eram de tipo *empiricismo naïf* ou de tipo *exemplo genérico* (Balacheff, 1991b). No primeiro caso, a certeza das conjecturas era obtida a partir da observação de um número restrito de exemplos; no segundo, os alunos explicitavam razões para validar a conjectura através da realização de acções sobre um objecto considerado como representante característico da classe.

Nos dois tipos, *conjecturas restritas* e *conjecturas genéricas*, identificados no presente estudo, reconhecem-se características das duas categorias propostas por Balacheff (1991b), anteriormente citadas. Os exemplos seguintes ilustram como os alunos começaram por formular *conjecturas restritas* que, depois, transformaram em *conjecturas genéricas.*

Passagem do episódio de ensino E6

SA começou por relacionar a localização do ponto de intersecção das mediatrizes com a variação do «tamanho dos segmentos» [lados do triângulo]. MA rejeitou essa conjectura observando que, num triângulo rectângulo, conseguia «encolher um lado» mas o ponto de intersecção permanecia sobre outro lado (figura 7.11).

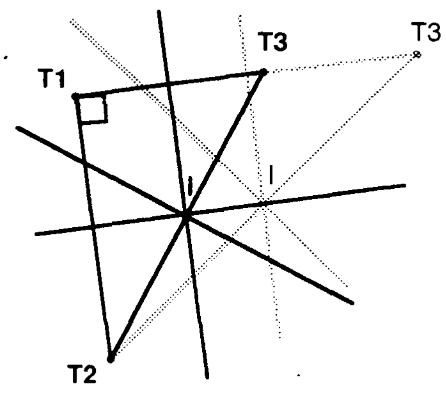


Fig. 7.11 - A posição do circuncentro não varia com o comprimento dos lados

A análise deste exemplo levou as três alunas a concluírem que a posição do circuncentro variava com a amplitude dos ângulos, e não com o comprimento dos lados, ainda que para isso fossem bastante orientadas pela investigadora.

Passagem do episódio de ensino E2

XA e YB iniciaram a investigação da localização do circuncentro de um triângulo partindo de um triângulo rectângulo, porque, na ocasião, a construção no ecrã tinha essa a aparência. YB observou que o ponto de intersecção das mediatrizes estava «no meio do segmento» e XA que estava «na mediatriz da hipotenusa». Como a investigadora não ouviu a resposta de XA, este repetiu-a, insistindo no facto de o triângulo ser rectângulo (figura 7.12):

XA: Eu tinha-lhe chamado a hipotenusa, isto é um ângulo recto [inclina-se para observar a construção de baixo para cima].

Inv: Chamaste-lhe hipotenusa e chamaste-lhe muito bem, porque aquele ângulo é um ângulo recto. Vamos lá a ver se isso é ou não é verdade, marca lá o ângulo.

YB [marca o ângulo e observa o símbolo do ângulo recto]: Já está, forma um ângulo de 90°. (E2, §185-190.)

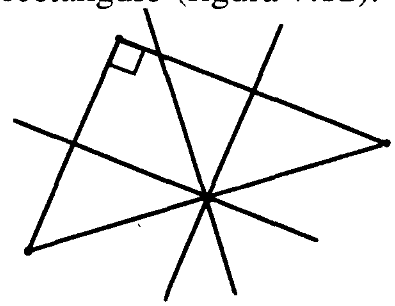


Fig. 7.12 - Num triângulo rectângulo as mediatrizes dos lados intersectam-se sobre a hipotenusa - XA (E2).

XA continuou a insistir que as mediatrizes se intersectavam «na mediatriz da hipotenusa», e a investigadora comentou que era «na hipotenusa». XA deslocou o cursor [+] ao longo da mediatriz da hipotenusa (figura 7.13) e concordou com a investigadora. Para clarificar a sua ideia, transformou, por sua iniciativa, outro ângulo num ângulo recto e apontou com o cursor o ponto de intersecção coincidente com o ponto médio da hipotenusa:

XA: Sim, elas podiam-se *intersar*, intersectar aqui, porque também é na mediatriz [desloca o cursor sobre a mediatriz da hipotenusa].

[...]

XA [manipula a construção e transforma outro ângulo num ângulo recto]: Se é este que é recto elas continuam-se a intersectar aqui [aponta o ponto médio]. Sempre que há um ângulo recto elas intersectam-se na mediatriz da hipotenusa do triângulo.

Inv: [...] Mas estás a pensar muito bem XA. É isso mesmo. Cada vez que um dos ângulos é recto elas intersectam-se sempre no ponto médio...

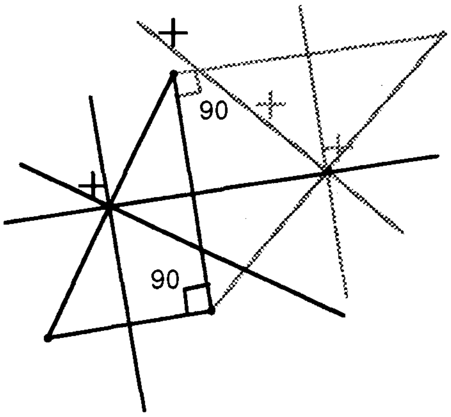


Fig. 7.13 - Variação da posição do circuncentro - XA (E2).

XA: Da hipotenusa. (E2, §200, §239-243.)

Provavelmente, desde o início, XA estaria a pensar que as mediatrizes se intersectavam no ponto médio da hipotenusa mas não conseguiu exprimir isso correctamente, como aconteceu em diversas ocasiões neste episódio de ensino. No entanto, a necesidade de explicar a sua ideia à investigadora levou-o a analisar diversos triângulos rectângulos e essa análise permitiu-lhe esclarecer a sua conjectura.

XA e YB concluíram esta investigação analisando triângulos com os três ângulos agudos ou com um ângulo obtuso e concluíram como variava a localização do circuncentro. Embora a sugestão de testar os diferentes tipos de triângulos tivesse sido explicitada pela investigadora, estes alunos manifestaram tendência para validar as suas conjecturas através da observação de diferentes casos para cada tipo de triângulos, mais do que os alunos e as alunas em E3 e em E6.

Em resumo: quase todos os alunos participantes neste estudo gostavam de manipular as construções e faziam-no com grande à-vontade, mas, só por si, eram atraídos sobretudo pelas modificações mais visíveis no ecrã, em particular a variação de segmentos e de objectos deles dependentes. No entanto, observavam a conservação de relações e propriedades nas construções para as quais se lhes chamava a atenção, mas dificilmente as justificavam ou usavam fazer outras justificações. Com a orientação da investigadora, alguns alunos desenvolveram uma visualização crítica e reflexiva sobre o que variava e sobre o que se conservava invariante, através da manipulação das construções. O longo tempo dispendido na investigação de uma construção, a par do diálogo com os colegas e com a investigadora, propiciaram a ultrapassagem de obstáculos visuais que inicialmente impediram a identificação de relações invariantes e a generalização dos conceitos geométricos envolvidos.

Nos três episódios de ensino em que foi proposta a investigação de uma construção de forma aberta, como a actividade não tinha um objectivo muito explícito para os alunos, de início, limitaram-se a tentar adivinhar "as intenções escondidas" da investigadora, e só se apropriaram da actividade quando intuíram o tipo de conclusões a que poderiam chegar; para isso foi fundamental a análise de um caso particular da figura, mais familiar. Em dois desses episódios de ensino os alunos manifestaram tendência para formular e validar *conjecturas restritas*, baseadas na observação de número limitado de exemplos. O confronto com contra-exemplos, quase sempre sugeridos pela investigadora, levou-os a rejeitarem essas conjecturas e a formularem *conjecturas genéricas*. No outro desses três episódios de ensino os alunos observaram, por sua iniciativa, exemplos variados das figuras e através dessa observação reformularam as suas conjecturas e estabeleceram *conjecturas genéricas.*

7.2 Manipulação na exploração de construções

Neste estudo, distinguiram-se as actividades desenvolvidas pelos alunos em *realização*, *justificação* e *investigação* de construções tendo em vista categorizar e analisar os aspectos relevantes do seu trabalho. Mas essa distinção transmite uma leitura um pouco artificial do trabalho realizado, na medida em que as fronteiras entre os três tipos de actividades nem sempre eram muito nítidas. Por isso, neste capítulo e nos dois anteriores, frequentemente a mesma actividade, em fases diferentes, ilustra mais do que um tipo de situação.

Para ultrapassar essa distinção, nesta última secção discutem-se globalmente os diferentes tipos de utilização da manipulação (ou arrastamento, §2.7) das construções. A discussão aborda dois aspectos. Primeiro sistematizam-se os principais tipos manipulação das construções evidenciados, em segundo lugar estabelece-se uma hierarquia em níveis de estruturação progressiva nas diferentes formas de utilização da manipulação das construções e de interpretação do *feedback* devolvido pelo *software*.

7.2.1 Tipos de utilização da manipulação das construções

Uma leitura dos dados focalizada no modo como os alunos manipulavam as construções e interpretavam o *feedback* devolvido pelo *software* permitiu identificar os quatro tipos de manipulação que se descrevem a seguir.

Manipulação tipo M1: Obter uma construção com uma aparência específica

Desde cedo os alunos descobriram que podiam dar às suas construções a aparência que pretendiam através do deslocamento dos seus pontos, rectas ou circunferências de base. A modificação da aparência das construções foi feita para obter exemplos prototípicos de figuras ou para adaptar uma construção a uma determinada actividade.

Obter exemplos prototípicos de figuras

Mesmo quando manipulavam bastante as construções, no fim os alunos preferiam apresentá-las através de exemplos prototípicos, principalmente na posição preferida horizontal/vertical.

Por vezes, a transformação da construção num exemplo prototípico teve como objectivo facilitar a sua análise, como mostra a passagem seguinte.

Passagem do episódio de ensino E1

JC começou por construir o quadrado inscrito na circunferência na posição do desenho da ficha (2-ficha Avaliação 1, figura 7.14A), mas depois arrastou a construção, colocou dois lados horizontais (figura 7.14B) e comentou «assim nota-se que é um quadrado». Mais adiante, perante a dificuldade de DE em justificar a igualdade dos lados do quadrado, JC propôs voltar a colocar a construção na posição inicial para facilitar a sua análise:

JC: Queres que eu endireite isto? [Figura 7.14B.]

DE: Ãh?

JC: Estou a perguntar se ele quer que eu endireite para perceber melhor. (E1, §359-361.)

A B

Fig. 7.14 - JC deslocou os vértices do quadrado e colocou-o na posição preferida.

Adaptar uma construção a uma actividade

Se os alunos sentiam demasiada dificuldade na realização de uma actividade, ou parte dela, em alguns casos transformavam a construção através da manipulação de modo a adaptá-la, aparentemente, a essa actividade. Uma forma de adaptação correspondeu à obtenção no ecrã de construções que se desmanchavam. A passagem seguinte é um exemplo.

Passagem do episódio de ensino E4

Para determinar o centro de uma circunferência, LA relatou que inicialmente tinha pensado em inscrever nela um quadrado e construir as mediatrizes dos seus lados (construção com características de exemplo prototípico). Mas LA abandonou essa ideia porque não conseguia garantir que o quadrado ficava «centrado na circunferência». No entanto, BF insistiu várias vezes que «era só traçar quatro segmentos» e dar-lhes o aspecto do quadrado.

Para mostrar a dificuldade, LA construiu uma corda e deslocou os seus extremos sobre a circunferência. A investigadora sugeriu então que talvez conseguissem construir outro quadrilátero. BF propôs um rectângulo, mas LA construiu um rectângulo que se desmanchava, com dois lados efectivamente paralelos e os outros dois "visualmente perpendiculares" aos primeiros.

Manipulou a construção e deu-lhe vários aspectos, entre eles o de um quadrado, o que levou BF a comentar que sempre era possível obter o quadrado que pretendiam.

Embora pontualmente, a adaptação da construção também constituiu uma "saída fácil" para certas justificações, como se mostra na passagem seguinte.

Passagem do episódio de ensino E2

Para justificar uma determinada construção YB insistiu na igualdade dos lados de um dado triângulo. XA fez-lhe ver que não eram iguais e YB propôs transformar o triângulo num triângulo com os três lados iguais para obviar a essa dificuldade, como mostra a transcrição seguinte:

Xa: Mas não foi isso que a *Setora* perguntou. A *Setora* perguntou quais é que são iguais. Têm que ser iguais. E esses são diferentes [os lados do triângulo].

Yb: Têm que ser iguais? Faz-se iguais [manipula a construção para que o triângulo fique com os lados iguais]. (E2, §436-437.)

Manipulação tipo M2: Invalidar construções

Esta foi a forma mais utilizada de manipulação. Com muita frequência os alunos faziam construções a que davam a aparência pretendida, deslocavam os seus pontos de base, verificavam que se desmanchavam totalmente ou parcialmente e, consequentemente, que não estavam correctas.

A invalidação das construções através da manipulação acontecia principalmente enquanto os alunos não estavam muito seguros sobre o processo de obter o produto final que queriam.

Por vezes, manipulavam as construções para verificar se os pontos que tinham indicado para construir determinados objectos estavam correctos, isto é, se eram pontos sobre objectos ou pontos de intersecção e não pontos criados próximos desses, pois dificuldades de ordem técnica induziam-nos frequentemente em erro.

Passagem do episódio de ensino E5

A manipulação dos vértices da construção permitiu a IS perceber que o trapézio que tinha inscrito na circunferência (1-ficha 11) não estava bem construído. A aluna atribuiu isso a um dos pontos não ter sido construído sobre a circunferência, como mostra a transcrição seguinte, (em que IS chama rectângulo ao trapézio):

Inv: Vamos começar pela ficha 11 [...]. Em relação a este primeiro problema que era construir um trapézio inscrito na circunferência, vocês tiveram muita dificuldade em fazer isto, na altura... Lembram-se? Porquê?

IS: Acho que foi por causa que nós metemos mal o ponto. Não metemos o ponto inscrito na circunferência. Então depois ao movermos a circunferência o *rectângulo* ia dar mal.

Inv: Ao moverem a circunferência o trapézio dava mal porque não marcaram o ponto sobre a circunferência?

IS: Pois, e depois ao movermos a circunferência não ficava direito. (E5, §2-5.)

No Diário da Intervenção, está registado que IS e as colegas do seu grupo começaram por construir um trapézio em que o paralelismo dos lados não se conservava, e foi também por isso que não ficava «direito» quando o manipulavam, como disse IS, e não só por terem usado um ponto criado aparentemente sobre a circunferência.

Manipulação tipo M3: Reconhecer relações e propriedades das figuras

Para reconhecer relações e propriedades, não utilizadas explicitamente na construção, mas resultantes do respectivo processo de construção, os alunos tiveram de abandonar a sua tendência para manipular aleatoriamente as construções e passar a fazê-lo de uma forma organizada. Na manipulação com vista ao reconhecimento de relações e propriedades identificam-se três subtipos, progresivamente estruturados.

Observar relações e propriedades sugeridas explicitamente

Na utilização mais elementar, os alunos manipulavam objectos de uma construção que lhes eram explicitamente indicados, normalmente pontos, e comprovavam relações invariantes directamente dependentes desses objectos, que, de algum modo, já esperavam ver acontecer.

Passagem da ficha 12

Depois de construir os segmentos que representavam as distâncias de um ponto da bissectriz aos lados do ângulo pedia-se que medissem esses segmentos e que deslocassem o ponto sobre a bissectriz. Os grupos reconheceram sem dificuldade que as distâncias eram sempre iguais.

Generalizar propriedades e relações reconhecidas em exemplos prototípicos

Uma utilização mais elaborada da manipulação permitiu o reconhecimento de determinadas propriedades ou relações identificadas em exemplos prototípicos das figuras, noutros exemplos gerados pela manipulação da construção. Umas vezes o reconhecimento foi expontâneo por parte dos alunos, outras foi sugerido pela investigadora mas não de forma explícita.

Passagem do episódio de ensino E2

A manipulação de um triângulo e a consequente observação da variação da localização do ponto de intersecção das mediatrizes dos seus lados, aprofundada através do diálogo com a investigadora, permitiu a XA interiorizar o facto de as três mediatrizes serem concorrentes, pois, embora já tivesse feito a construção na disciplina de Desenho, não tinha reflectido muito sobre o assunto, com se deduz da transcrição seguinte:

Inv: Alguma vez tinham pensado nisso, que as três mediatrizes se intersectavam num ponto?

XA: Isso não, que eu nunca tinha pensado nas mediatrizes de um triângulo. Por acaso já tinha feito esta figura num trabalho de Desenho. Tive que fazer as mediatrizes também do triângulo todo mas não reparei nisso.

Inv: Não reparaste que se intersectavam no mesmo ponto?

XA: Mas tenho lá que se intersectam (E2, §271-277.)

Mais adiante a observação da construção com diferentes aparências pareceu ser decisiva na geralização da propriedade da equidistância dos pontos da mediatriz aos extremos de um segmento que XA conseguiu fazer.

Descobrir novas relações e propriedades

A forma mais sofisticada de manipulação teve a ver com a investigação de construções com vista à descoberta de relações e propriedades que, à partida, os alunos não sabiam que se verificavam. A interpretação do *feedback* devolvido pelo *software* levava-os a formularem conjecturas que eram rejeitadas, modificadas ou aceites com base na observação de uma grande diversidade de exemplos das figuras, gerados através de manipulações específicas das construções.

Passagens dos episódios de ensino E2 e E3

As descrições feitas respectivamente em §7.1.6 e §7.1.5, sobre a forma como XA (E2) investigou a construção e descobriu por si próprio que sempre que um triângulo era rectângulo o ponto de intersecção das três mediatrizes coincidia com o ponto médio da hipotenusa, e como RD e PF (E3) concluíram, neste caso através de manipulações específicas sugeridas pela investigadora, que, sempre que um triângulo tinha um ângulo com uma amplitude superior a 90°, o ponto de intersecção das mediatrizes se localizava fora do triângulo, ilustram este tipo de utilização da manipulação.

Manipulação tipo M4: Testar ideias

A concretização das suas ideias no ecrã do computador permitia aos alunos testar essas ideias, principalmente através da manipulação, e perceber a sua adequação para realizar, justificar, ou investigar construções. A análise que faziam, por si próprios, ou apoiados pela investigadora, levava-os a aceitar, rejeitar ou modificar essas ideias, e mesmo a descobrir novas ideias para resolver os problemas.

Passagem do episódio de ensino E2

Para construir a circunferência com centro no ponto de intersecção das mediatrizes dos lados do triângulo e que passava por um dos seus vértices, XA começou por indicar para centro «o ponto médio da hipotenusa», uma vez que aparentemente o triângulo representado no ecrã era rectângulo. YB percebeu que aquele caso particular estava a induzir em erro XA e sugeriu-lhe que manipulasse a construção de modo a modificar o ângulo recto:

XA [lê 3.3 - ficha 9]: Então, eles pedem construam a circunferência cujo centro é o ponto de intersecção das mediatrizes e que passa por um dos vértices do triângulo. Aqui é o ponto de intersecção das mediatrizes...

YB: Não tens ponto, tens que marcar antes um ponto.

XA [manipula a construção]: Só que ele [o programa] disse *este centro*.

Inv: Então eu não digo nada, vou deixar vocês fazerem o que querem.

YB [para XA, apontando o ângulo do triângulo]: Tira isso de 90°. Tira isso de 90°. (E2, §293-299.)

Muitos outros exemplos, referidos nos dois capítulos anteriores e neste, mostram como a concretização das ideias dos alunos no ecrã do computador e as experiências que podiam efectuar através da manipulação, permitiram ampliar a exploração de construções geométricas, de um modo que se aproximou do tipo de trabalho normalmente desenvolvido pelos geómetras.

7.2.2 Níveis de utilização da manipulação

De acordo com Laborde (1993a; 1993b), a interacção entre a visualização e o conhecimento geométrico dos alunos leva-os a interpretar o *feedback* obtido através manipulação das construções em diferentes níveis conceptuais. A mesma autora refere estudos realizados com alunos do 8º e 9º anos de escolaridade que permitiram identificar três níveis de utilização da manipulação e interpretação do *feedback*, enquanto critério de validação de construções de figuras familiares como losangos ou rectângulos. Num primeiro nível os alunos arrastam a construção para uma posição prototípica para reconhecerem visualmente a figura e verificam que todas as suas partes estão ligadas e se movem em conjunto. Num segundo nível a construção é arrastada para diferentes posições para verificar se a figura familiar se conserva em todas as posições. Num terceiro nível os alunos arrastam a construção e verificam a conservação de propriedades geométricas da figura (Laborde, 1993a; 1993b).

No presente estudo, os tipos de manipulação identificados anteriormente (§7.2.1) destacam a sua utilização como meio de exploração para descobrir processos de realizar as construções, que incluem fases de validação, e também para descobrir propriedades e relações das figuras. Um cruzamento desses tipos com os níveis referidos por Laborde (1993a; 1993b), permite caracterizar, neste estudo, os três níveis de utilização da manipulação na exploração de construções: *Elementar*, *Intermédio* e *Elaborado*, que se descrevem a seguir.

Nível Elementar

Neste nível os alunos manipulavam as construções para:

- obter construções com uma determinada aparência, normalmente exemplos prototípicos da figura, mas que se desmanchavam;
- identificar relações e propriedades explicitamente sugeridas, em construções prototípicas.

Neste nível o *feedback* devolvido era interpretado com base na aparência das construções. A necessidade de realizar construções resistentes era uma regra de jogo de que os alunos não entendiam bem a necessidade.

Nível Intermédio

Neste nível os alunos manipulavam as construções para:

- comprovar se as construções se desmanchavam;
- testar ideias e descobrir processos de obter construções resistentes;
- dar às construções aparências prototípicas, para facilitar a sua análise;
- reconhecer nas construções propriedades e relações sugeridas explicitamente e implicitamente.

Neste nível o *feedback* era interpretado com base no reconhecimento de propriedades da figura, por vezes oscilando entre isso e a aparência. Os alunos aceitavam a necessidade do teste da manipulação como critério de validação. Usavam também a manipulação para explorar as construções, ainda que muitas vezes essa exploração fosse induzida e/ou apoiada pela professora.

Nível Elaborado

Neste nível os alunos manipulavam as construções para:

- dar à construção diferentes aparências a fim de analisarem diferentes perspectivas de uma figura;
- comprovar e generalizar relações e propriedades indentificadas em exemplos prototípicos da figura;

- investigar construções e descobrir novas propriedades e relações das figuras.

Neste nível o *feedback* era interpretado com base no reconhecimento e no relacionamento de propriedades, ainda que a aparência das construções também influenciasse o raciocínio dos alunos. A manipulação era utilizada para explorar as construções e analisar as figuras, e não tanto como critério de validação.

Nos três níveis anteriores nota-se que, progressivamente, a aparência visual cede lugar ao conhecimento geométrico na verificação da validade das construções e na sua exploração. Mas essa aparência nunca deixou de influenciar os raciocínios dos alunos. Era notório que gostavam mais de visualizar as construções na posição preferida horizontal/vertical e que tinham mais dificuldade em analisá-las quando isso não acontecia.

Salienta-se também o facto de a progressão nestes níveis não ter sido linear. Com frequência alguns alunos voltavam a níveis mais baixos, sempre que uma actividade lhes levantava obstáculos que não conseguiam ultrapassar facilmente. No entanto pode considerar-se que havia um nível dominante, no qual os alunos executavam as actividades mais familiares.

7.2.3 Níveis de utilização da manipulação e Níveis de van Hiele

Nos três níveis de utilização da manipulação, identificados em cima, reconhecem-se características dos três primeiros níveis de van Hiele de desenvolvimento do raicocínio geométrico (descritos em §2.2.1). O nível *Elementar* pode inserir-se no Nível 1 (Visual) de van Hiele, em que os alunos privilegiam a aparência das representações materiais das figuras; o nível *Intermédio* pode inserir-se no Nível 2 (Descritivo/Analítico), em que os alunos identificam propriedades das figuras; e o nível *Elaborado* pode inserir-se no Nível 3 (Abstracto/Relacional) em que os alunos relacionam propriedades de figuras.

Mas a análise dos comportamentos descritos em cada nível, sobretudo nos níveis *Intermédio* e *Elaborado*, aponta também para uma transição entre níveis de van Hiele. Muitos alunos utilizavam a manipulação oscilando entre a identificação de figuras baseada na sua aparência e o reconhecimento empírico das suas propriedades, o que pode indiciar uma transição entre os Níveis 1 e 2 de van Hiele. Outros alunos revelaram desempenhos que se podem considerar de transição para o Nível 3, na medida em que a reflexão sobre o *feedback* devolvido através da manipulação das construções lhes permitiu, pontualmente, relacionar propriedades e fazer pequenas deduções.

Estas conclusões estão na mesma linha das referidas em §4.4.1 e em §6.4 sobre o nível de van Hiele dos alunos da turma participante neste estudo, considerada em termos globais, isto é, o Nível 2 pareceu ser dominante e pareceu haver alunos em transição entre os Níveis 1 e 2 e entre os Níveis 2 e 3.

Em resumo: entre as diferentes utilizações da manipulação que os alunos fizeram na realização, justificação e investigação de construções, identificaram-se quatro tipos principais, dois dos quais divididos em sub-tipos. No tipo *M1: obter uma aparência específica*, os alunos manipulavam as construções com dois fins: adaptar a construção a uma determinada actividade que não conseguiam realizar por outro processo ou obter exemplos prototípicos de figuras. No tipo *M2: invalidar construções*, os alunos manipulavam-nas para verificar se se desmanchavam ou não. No tipo *M3: reconhecer relações e propriedades das figuras*, observaram-se três sub-tipos: identificar relações e propriedades sugeridas explicitamente; generalizar relações e propriedades reconhecidas em exemplos prototípicos; descobrir novas relações e propriedades. No tipo *M4: testar ideias*, a manipulação constituiu uma experimentação sobre a construção com o objectivo de perceber a adequação de certas ideias para realizar as actividades.

Os diferentes tipos de utilização da manipulação das construções e interpretação do *feedback* devolvido pelo *software* podem ser agrupados em três níveis: *Elementar*, baseado na aparência das construções; *Intermédio*, baseado na identificação de propriedades da figura; *Elaborado*, baseado na identificação e no relacionamento de propriedades das figuras. Os níveis *Elementar*, *Intermédio* e *Elaborado*, parecem indicar um desenvolvimento do raciocínio geométrico respectivamente nos Níveis 1, 2 e 3 do modelo de van Hiele, embora apontem também para uma transição entre esses níveis. O nível *Intermédio* de utilização da manipulação e o Nível 2 de van Hiele pareceram ser maioritários na turma participante.

A referência ao número de alunos em cada um dos três níveis de van Hiele é apenas qualitativa. Uma caracterização mais fina, que permitisse identificar com maior precisão o nível de van Hiele de cada um dos alunos participantes, exigiria a aplicação de critérios que estavam para além do âmbito deste estudo, à partida com um carácter essencialmente descritivo e interpretativo.

Mesmo assim, considerou-se pertinente estabelecer uma comparação entre alguns resultados obtidos nesta investigação e os níveis de van Hiele da turma, por dois motivos. Por um lado, por que as conclusões destacadas em cima estão de acordo com os resultados de diversos estudos que têm mostrado ser o Nível

2 o mais identificado em alunos deste grau de escolaridade (9º ano) (Battista e Clements, 1992) e também a existência de alunos em transição entre os Níveis 1/2 ou 2/3 (Fuys *et al.*, 1988; Gutiérrez *et al.*, 1991). Por outro lado, por que, segundo Senk (1989), apenas os alunos que tiverem percorrido o Nível 2 têm hipótese de acompanhar com sucesso uma abordagem da Geometria com uma orientação axiomático-dedutiva, como está previsto no currículo do Ensino Secundário da Nova Reforma.

Capítulo 8 - Aprendizagem da Geometria em AGD: conclusões; implicações

Este capítulo final divide-se em três secções. Na primeira recordam-se as questões e objectivos do estudo bem como a metodologia utilizada no seu tratamento. Na segunda, procurando responder às questões enunciadas, destacam-se as conclusões sobre aprendizagem da Geometria com recurso a AGD que emergiram ao longo do trabalho desenvolvido. Dessas conclusões ressaltam algumas implicações didácticas e curriculares e também alguns caminhos de investigação futura, que se comentam na terceira secção.

8.1 Questões do estudo e metodologia utilizada

Neste estudo pretende-se compreender os processos de aprendizagem de Geometria desenvolvidos pelos alunos quando interagem com ambientes geométricos dinâmicos (AGD), isto é, ambientes que permitem a realização de construções geométricas e a sua manipulação directa nos ecrãs dos computadores. Nesse sentido, formularam-se as duas questões seguintes:

- *Como é que os alunos exploram construções num ambiente geométrico dinâmico?*
- *Como é que essa exploração os habilita a compreender os objectos e relações geométricas, a formular conjecturas e a elaborar argumentos indutivos e dedutivos?*

O modo como as questões estão enunciadas aponta para um tipo de respostas com carácter essencialmente descritivo e interpretativo. Assim o estudo propôs-se especificamente descrever, analisar e interpretar os processos desenvolvidos pelos alunos para:

- realizar construções geométricas;
- justificar os processos de construção;
- investigar as construções e descobrir propriedades das figuras.

Para estudar estas questões utilizou-se uma metodologia de experiência de ensino (§3.3), concretizada numa intervenção didáctica levada a cabo numa turma do 9º ano de escolaridade de uma escola secundária dos arredores de Lisboa, no ano lectivo 1992/93. A intervenção visou o ensino e aprendizagem da unidade Geometria do Plano (§4.1, §4.2), com recurso ao ambiente computacional Cabri-géomètre (§2.4.2).

Durante a intervenção didáctica realizaram-se sete episódios de ensino (§3.5.1), com pares ou trios de alunos dos grupos em que a turma se dividiu para trabalhar nos computadores. As transcrições desses episódios de ensino, gravados em vídeo (cujos guiões formam o anexo 2), constituíram a principal fonte de dados, mas foram completados com dados da observação directa das aulas, das fichas de trabalho e de avaliação realizadas pelos alunos e das gravações em disquetes das suas construções geométricas. O acervo dos dados foi submetido à técnica de análise de conteúdo (§3.5, §3.6).

8.2 Conclusões do estudo

Nesta secção sintetizam-se as principais conclusões sobre os processos desenvolvidos pelos alunos na realização de construções geométricas, na justificação dos processos de construção e na investigação das construções com vista à descoberta de propriedades das figuras, apresentadas nos capítulos 5, 6 e 7. Esta síntese procura ser responder às questões enunciadas neste estudo.

8.2.1 Realização de construções geométricas

A intervenção didáctica tinha como objectivo proporcionar aos alunos situações problemáticas que os levassem a analisar as figuras geométricas em termos das suas propriedades e relações entre propriedades. Nesse sentido, foram-lhes propostas diversas actividades de construção de figuras, verificando a *regra da resistência*. Uma construção geométrica deveria basear-se em propriedades e relações da figura de modo a conservar as suas características através da manipulação, e não "copiar" apenas a sua aparência, desmanchando-se em seguida.

A realização de construções geométricas com recurso ao computador suscitou a adesão da grande maioria daqueles alunos, sobretudo dos dezassete que participaram nos episódios de ensino. Sentiram que foram capazes de realizar as actividades propostas, ainda que em alguns casos necessitassem de apoio, ao contrário do que acontecia com muitas actividades das aulas habituais, como afirmaram expressamente alguns alunos (§4.4.3).

No que se refere aos processos de construção desenvolvidos salientam-se os pontos seguintes.

1. A aparência das figuras geométricas, considerada no sentido do Nível 1 de van Hiele, foi preponderante nas construções realizadas. Indicadora desta tendência foi a necessidade, manifestada por quase todos os alunos, de reproduzir os desenhos propostos nas fichas de trabalho; bem como a preferência manifesta pela realização de construções com a aparência de exemplos prototípicos das figuras geométricas (Hershkowitz, 1989), principalmente colocando-as na posição preferida, horizontal/vertical (Matos, 1992b).

O «conhecimento cultural» (Laborde, 1993a, p. 66) que os alunos constroem sobre as figuras geométricas leva-os a reconhecerem-nas e a analisarem-nas mais facilmente quando são representadas em posições familiares. Por outro lado, a maioria dos alunos gostava de apresentar «construções bonitas», como eles próprios diziam, e condicionalismos culturais faziam-nos considerar visualmente "mais bonitas" as construções na posição preferida (tendo em conta as imagens gráficas no ecrã do computador).

A observação das construções com muitas e variadas aparências no ecrã do computador levou muitos alunos a generalizar as suas representações das figuras geométricas exploradas durante a intervenção didáctica, principalmente triângulos, quadriláteros e circunferência, e, progressivamente, a atribuírem menos importância à aparência das figuras geométricas.

2. Para realizar as suas construções os alunos utilizaram processos de construção diversificados. Descobriram esses processos seguindo determinados percursos, que se agruparam em quatro grandes tipos, caracterizados no quadro 8.1. Os dois primeiros tipos de percursos têm em comum o facto de os alunos terem feito tentativas que se desmanchavam, o que não acontece nos dois últimos, em que os processos de construção recorreram a propriedades e relações geométricas.

Quadro 8.1 - Tipos de percursos de construção

Percurso	Caracterização
Construções que se desmancham	Os alunos obtinham uma construção que se desmanchava, aparentemente com as características solicitadas, mas que não resistia à manipulação, e ficavam-se por aí.
Construções que se desmancham, depois resistentes	Os alunos começavam por fazer uma construção que se desmanchava, manipulavam-na e observavam a não conservação das características. A partir daí descobriam processos de obter uma construção resistente, utilizando propriedades e relações geométricas.
Construções resistentes com ensaios	Os alunos ensaiavam vários processos para obter uma construção resistente, em que utilizavam propriedades e relações geométricas.
Construções resistentes sem ensaios	Os alunos, sem fazerem quaisquer ensaios, obtinham uma construção resistente, em que utilizavam propriedades e relações geométricas da figura.

A classificação dos percursos feita no quadro 8.1 não deve ser entendida hierarquicamente. Os mesmos alunos utilizaram um ou outro desses percursos em diferentes situações, consoante a figura a construir lhes era mais ou menos familiar.

3. Até ao final da intervenção didáctica apareceram construções que se desmanchavam. Para alguns alunos o teste da resistência à manipulação terá sido uma regra de jogo de que não compreenderam a necessidade. Mas, noutros casos, o regresso pontual a construções que se desmanchavam pode considerar-se uma «alteração de tarefa» (Laborde, 1993a, p. 55) resultante da necessidade de apresentar uma resposta qualquer, em situações em que os alunos não eram capazes de descobrir outra solução.

A maioria das construções realizadas começaram por se desmanchar, mas depois transformaram-se em resistentes. A realização de construções temporárias que se desmanchavam e sua manipulação pode ser considerada um mecanismo auxiliar que apoiava os alunos na realização de construções resistentes, mais definitivas, o que é afinal a ideia da colocação de andaimes (*scaffolding*) como referem Noss *et al.* (1994).

A visualização das suas ideias espelhadas no ecrã do computador (Schwartz, 1989) permitiu aos alunos, por um lado, perceber a incorrecção das construções quando estas se desmanchavam, e, por outro, a partir da exploração dessas e de outras construções, testar a adequação das suas ideias para resolver os problemas em causa.

Para realizar certas construções resistentes os alunos inventaram processos que depois passaram a repetir em novas construções — guiões, segundo Matos (1992b). Esses guiões tiveram um papel significativo no trabalho dos alunos, na medida em que lhes facultaram uma forma de iniciar as actividades propostas, e também uma certa «economia de pensamento» (Matos, 1994, p. 47). No entanto, com frequência, esses guiões eram usados de forma automática, sem que os alunos tivessem muito explícitas as propriedades e relações geométricas que lhes estavam subjacentes.

Os guiões e a aparência visual pareciam dar confiança aos alunos sobre a validade das suas construções. A dificuldade em as justificar permite formular a hipótese de que nem sempre conseguiam explicitar as propriedades geométricas envolvidas nos processos de construção que utilizavam.

A obrigação de realizar construções resistentes, ainda que de início pudesse parecer uma regra arbitrária aos alunos, foi um pretexto para a realização de actividades geométricas complexas. Ao procurarem processos de construção que conservassem determinadas relações e propriedades das figuras envolveram-se em explorações que lhes permitiram aprofundar o seu conhecimento geométrico.

8.2.2 Justificação de construções geométricas

Durante a intervenção didáctica esteve sempre presente a noção de que, só por si, a realização de construções geométricas resistentes à manipulação poderia colocar a ênfase apenas nos processos de construção. Assim, tentou-se induzir nos alunos a necessidade de mostrar porque é que as suas construções funcionavam (Sekiguchi, 1991), através da explicitação e ordenação de propriedades das figuras usadas para fazer a construção e outras deduzidas dessas. Pretendia-se levar os alunos a evoluir do reconhecimento empírico das propriedades geométricas para a sua utilização conceptual ou, como refere Laborde (1993b, p. 51), «de uma problemática da prática [para uma] problemática da Geometria», seguindo uma via de formalização gradual.

Verificou-se que a maioria dos alunos participantes neste estudo demoraram bastante tempo para perceber o sentido da justificação formal de uma construção e, na medida em que esse tipo de actividade lhes trouxe mais dificuldades do que a realização das construções, não aderiram tão facilmente como a esta última.

Os principais processos desenvolvidos pelos alunos na justificação de construções podem ser sintetizados nos pontos a seguir.

1. As descrições dos processos de construção apresentadas pelos alunos eram pouco claras. Referiam sobretudo as acções executadas, sem parecerem distinguir os objectos geométricos e suas relações, das primitivas do Cabri-géomètre que permitiam obtê-los. Apoiando-se na primitiva *História* muitos alunos começaram a estruturar melhor as descrições e a utilizar de forma mais adequada a terminologia geométrica. Em particular, passaram a nomear os objectos que construíam, e a referir-se-lhes por esses nomes, o que inicialmente não faziam, mesmo quando isso era expressamente solicitado.

2. Para justificar as suas construções os alunos utilizaram processos variados que se agruparam nos oito tipos resumidos no quadro 8.2 (página seguinte).

Os tipos de justificação baseados na evidência empírica foram os preferidos pelos alunos, principalmente a observação da aparência da construção e a descrição, integral ou parcial, do processo de construção. Schoenfeld (referido por Battista e Clements, 1992) e Sekiguchi (1991) observaram igualmente uma preferência por justificações recorrendo a dados empíricos.

Para justificar uma construção, nem sempre os alunos usavam apenas um dos tipos referidos no quadro 8.2 mas antes os misturavam, como aponta o tipo *justificação mista*. Muitas vezes recorriam a justificações empíricas para reforçar outra argumentação. Também Chazan (1993) detectou o uso de evidência empírica como reforço de argumentação lógica.

Quadro 8.2 - Tipos de justificação das construções

Justificação	Caracterização
Ad hoc	Os alunos davam uma resposta qualquer, umas vezes sem muito sentido, outras repetindo propriedades (semi)decoradas nem sempre adequadas à situação em análise.
Circular	Os alunos usavam na justificação o que era necessário justificar, normalmente a definição da figura representada pela construção.
Aparência visual	Os alunos justificavam baseados na observação da aparência da construção, sem serem capazes de explicitar as propriedades subjacentes da figura.
Descrição do processo de construção	Os alunos repetiam parcialmente ou integralmente o processo utilizado para fazer a construção, algumas vezes identificando explicitamente propriedades da figura.
Observação de relações invariantes	Os alunos referiam relações (principalmente de igualdade de segmentos) que tinham observado permanecerem invariantes através da manipulação.
Aritméticas/algébricas	Os alunos operavam com comprimentos ou amplitudes.
Deduzidas em um ou dois passos	Os alunos seleccionavam e ordenavam logicamente uma ou duas propriedades da figura, deduzidas do processo de construção.
Mistas	Os alunos misturavam tipos de justificação, nomeadamente *aparência visual*, *processo de construção* e *dedução de uma ou duas propriedades*.

A descrição do processo de construção serviu muitas vezes para reforçar outras justificações. A utilização constante que os alunos fizeram da descrição do processo de construção pode ter sido consequência da ênfase dada a esse tipo de actividade na intervenção didáctica. Isso mesmo facilitado pelo recurso à primitiva *História* do Cabri-géomètre.

3. Identificaram-se dois grandes tipos de obstáculos na justificação das construções, respectivamente de natureza visual e verbal.

Os obstáculos visuais foram causados pelos aspectos perceptuais das representações materiais das figuras, resumidos por Yerushalmy e Chazan (1990) nas categorias descritas em §2.5.2. A preferência dos alunos pelos exemplos prototípicos das figuras levou-os a visualizar determinadas propriedades associadas a esses exemplos. Essa visualização influenciava as suas justificações na medida em que ficavam fixos nela e dificilmente a generalizavam. A dificuldade em analisar diferentes aspectos de uma construção para atender de forma selectiva e sequencial às partes e ao todo (Yeushalmy e Chazan, 1990) constituiu outro obstáculo de natureza visual às justificações. Os alunos fixavam-se em propriedades para eles mais evidentes, num sentido gestaltista, e/ou directamente associadas ao processo de construção, e não reorganizavam o campo de uma forma que lhes permitisse fazer a respectiva justificação. Segundo Laborde (1993a) os obstáculos de natureza perceptual são consequência de os alunos analisarem efectivamente a construção no ecrã do computador e não a figura representada por essa construção.

Na opinião de muitos alunos, a maior dificuldade em justificar as construções decorria da sua falta de capacidade para exprimir oralmente, e sobretudo por escrito, as ideias «que tinham na cabeça» (§4.4.3), dificuldade esta que se tornou muito patente nos episódios de ensino.

A diferença entre o discurso da investigadora e o dos alunos causou também alguns obstáculos. Os alunos consideravam que as suas respostas empíricas serviam como justificação, a investigadora insistia em obter justificações mais formalizadas e muitas vezes os alunos não percebiam o que deveriam responder. Segundo Van Hiele este problema resulta de uma diferença entre níveis de raciocínio, como se refere em §2.2.1.

O debate mantido ao longo dos episódios de ensino aproximou esses níveis de discurso e, em alguns casos, permitiu que os alunos deduzissem progressivamente as justificações.

4. Alguns dos tipos de justificação caracterizados no quadro 8.2 destacaram respectivamente a aparência visual da figura, a identificação de propriedades ou o relacionamento de propriedades. De acordo com o destaque dado inseriram-se esses tipos de justificação num dos três primeiros níveis de van Hiele (descritos em §2.2.1), como se mostra no quadro 8.3.

Quadro 8.3 - Tipos de justificação e Níveis de van Hiele

Justificação	Nível de van Hiele
Aparência visual	Nível 1 (Visual)
Descrição do processo de construção Observação de relações invariantes	Nível 2 (Descritivo/Analítico)
Deduzida em um ou dois passos	Nível 3 (Abstracto/Relacional)

Muitas justificações apresentadas pelos alunos não podem ser inseridas no modelo de van Hiele (§2.2.2). Certas justificações *circulares* e certas justificações *mistas* podem considerar-se "a meio caminho" entre aparência visual e utilização implícita de propriedades e/ou entre utilização implícita e explícita de propriedades, revelando uma transição entre níveis (questão que se retoma em §8.2.3). As justificações *ad hoc*, decorrentes de sistemas de crenças dos alunos, e as justificações *aritméticas/algébricas* não estão previstas no modelo (ver §6.4).

Em parte a dificuldade que muitos alunos experimentaram em fazer, e mesmo em entender, o sentido da justificação de uma construção teve a ver com o seu nível de van Hiele de desenvolvimento de raciocínio geométrico. Segundo De Villiers (referido por Battista e Clements, 1992) apenas no Nível 3 um aluno é capaz de acompanhar e dar uma justificação lógica de uma construção. Ora, como se mostra adiante (§8.2.3), apenas um número reduzido de alunos da turma participante terá atingido esse nível no final da intervenção didáctica.

5. Ainda que a justificação das construções se tivesse revelado um tipo de actividade difícil para os alunos, a insistência nesse tipo de actividade, nas aulas e nos episódios de ensino, levou alguns a empenharem-se nisso e, tendo umas vezes o apoio da professora, outras vezes recorrendo a apontamentos pessoais, começaram a apresentar pequenas justificações formais. A interpretação destes resultados no quadro da teoria de aprendizagem de Vygotsky leva a considerar que «a influência de outros indivíduos foi mais transformadora» (Oliveira, 1993, p. 61) nos alunos em que a justificação das construções por via dedutiva estaria na sua *zona próxima de desenvolvimento*.

8.2.3 Investigação de construções geométricas

Na intervenção didáctica implementada neste estudo, para além da realização de construções resistentes e da respectiva justificação, previa-se a investigação das construções através da sua manipulação, procurando que os alunos descobrissem novas relações invariantes, formulassem conjecturas sobre propriedades das figuras e eventualmente justificassem-nas também. Como propõe Schumann (1991), pretendia-se levar os alunos à descoberta indutiva de teoremas, através da análise da transformação de construções geométricas.

Embora as conclusões sobre processos de investigação de construções sejam menos fundamentadas do que as apresentadas anteriormente (como se refere em §7.1), alguns factos merecem ser destacados.

1. De início, a investigação das construções pelos alunos entregues a si próprios revelou-se uma actividade quase sempre aleatória. Ficavam fascinados pela possibilidade de manipular as construções no ecrã dos computadores, gostavam de o fazer depressa e de as aumentar e reduzir até aos limites possíveis. Eram particularmente atraídos por aquilo que observavam variar (Laborde, 1993a). No entanto, reconheciam relações invariantes e propriedades para as quais se lhes chamava a atenção e que de algum modo esperavam ver acontecer.

2. Os alunos precisaram de considerável orientação e apoio para se habituarem a manipular as construções de forma sistematizada e ordenada e a reflectirem sobre o *feedback* devolvido pelo *software*, como Laborde e Laborde (1992) fazem notar. Discutiu-se, em particular, a necessidade de prestar atenção não só ao que variava, mas também ao que permanecia invariante, como fazem os geómetras no seu trabalho. Adaptando uma metáfora proposta por Mason (1993), tentou-se que os alunos não olhassem apenas para as construções no ecrã, mas que através delas olhassem para as figuras geométricas e as analisassem.

3. O longo tempo dispendido na investigação de algumas construções proporcionou a ultrapassagem de obstáculos visuais que de início impediram uma análise adequada das figuras, e permitiu, em alguns casos, a identificação de relações invariantes, a descoberta da respectiva justificação, e a generalização de certos conceitos geométricos explorados. O diálogo que os alunos mantiveram entre si e com a investigadora teve aí um papel relevante.

4. A proposta de investigação de uma construção de uma forma muito aberta, sem um objectivo muito explícito para os alunos, pareceu provocar-lhes alguma insegurança, e apenas se apropriaram dessa actividade quando começaram a descortinar que conclusões poderiam obter.

Nessa investigação os alunos começaram por formular *conjecturas restritas*, isto é, baseadas na observação de um número limitado de aparências da construção. Contra-exemplos, por vezes sugeridos pela investigadora, levaram-nos a rejeitar algumas conjecturas. A análise de um exemplo bastante familiar da figura em discussão, constituiu uma etapa fundamental na (re)formulação e validação de conjecturas, a partir da qual os alunos observaram aparências diversificadas da construção que lhes permitiram estabelecer *conjecturas genéricas*. As *conjecturas restritas* e as *conjecturas genéricas* podem considerar-se no âmbito das conjecturas tipo *empiricismo naïf* e tipo *exemplo genérico*, definidas por Balacheff (1991b). Segundo o mesmo autor, esse tipo de conjecturas foi o que se mais se evidenciou nos seus estudos, com alunos de um nível etário idêntico ao dos participantes no presente estudo.

8.2.4 Exploração de construções geométricas através da manipulação

A separação das actividades em realização, justificação e investigação de construções, como se faz neste estudo, é um pouco artificial na medida em que muitas actividades propostas aos alunos englobavam duas ou as três vertentes. Analisam-se em seguida as actividades realizadas pelos alunos numa perspectiva global, referindo a finalidade com que manipularam as suas construções e a forma como o fizeram, tendo em conta que a manipulação das construções e a interpretação do *feedback* devolvido pelo *software* foi um denominador comum dos três tipos de actividades.

1. Os alunos manipulavam as suas construções para as *explorarem*, no sentido de descobrirem processos de as obter, de as justificar e/ou de investigar propriedades das figuras. Na maioria das vezes a exploração incluía fases de *validação* em que a construção era arrastada para verificar se conservava as características pretendidas. Segundo Laborde (1993a) *exploração* e *validação* são as duas grandes finalidades com que os alunos manipulam as construções.

Entre essas finalidades, identificaram-se quatro tipos principais de utilização da manipulação das construções, que se caracterizam no quadro 8.4.

Quadro 8.4 - Tipos de utilização da manipulação

Manipulação	Caracterização
Obter uma construção com uma aparência específica	Os alunos manipulavam as construções para lhes dar uma determinada aparência, a fim de: • adaptar a construção a uma tarefa que não conseguiam realizar por outro processo; • obter exemplos prototípicos das figuras.
Invalidar construções	Os alunos manipulavam as construções para verificar se se desmanchavam.
Reconhecer relações e propriedades	Os alunos manipulavam as construções para identificar relações e propriedades das figuras: • sugeridas explicitamente; • generalizadas a partir de exemplos prototípicos; • outras propriedades.
Testar ideias	Os alunos manipulavam as construções para testar ideias e perceber a sua adequação (ou não) para realizar as actividades em causa.

2. Identificaram-se três níveis na forma como os alunos utilizaram a manipulação das construções e interpretaram o *feedback* devolvido. Esses níveis evoluem do reconhecimento das figuras através da aparência das construções, para o reconhecimento empírico de propriedades das figuras e para o relacionamento de propriedades. No quadro 8.5 caracterizam-se esses níveis: *Elementar*, *Intermédio* e *Elaborado*.

Quadro 8.5 - Níveis de utilização da manipulação

Nível	Caracterização
Elementar	A manipulação era utilizada para: • obter construções com uma determinada aparência (normalmente exemplos prototípicos da figura), mas que se desmanchavam; • identificar relações e propriedades explicitamente sugeridas em construções prototípicas. O *feedback* devolvido era interpretado segundo a aparência das construções.
Intermédio	A manipulação era utilizada para: • comprovar se as construções se desmanchavam; • testar ideias e descobrir processos de obter construções resistentes; • dar às construções aparências prototípicas, para facilitar a sua análise; • reconhecer nas cosntruções propriedades e relações sugeridas explicitamente e implicitamente. O *feedback* devolvido era interpretado baseado na identificação de propriedades e relações.
Elaborado	A manipulação era utilizada para: • dar à construção diferentes aparências para analisar diferentes perspectivas de uma figura; • comprovar e generalizar relações e propriedades identificadas em exemplos prototípicos da figura; • investigar construções e descobrir novas propriedades e relações das figuras. O *feedback* devolvido era interpretado com base na identificação e no relacionamento de propriedades e relações.

Nos níveis descritos em cima reconhecem-se características dos três primeiros níveis do modelo de van Hiele. A associação que se estabelece entre os diferentes níveis no quadro 8.6 (página seguinte) fundamenta-se no facto de os alunos utilizarem a manipulação e interpretarem o *feedback*, dando relevo à aparência da figura, à identificação de propriedades, ou ao relacionamento de propriedades, tal como aconteceu na justificação das construções (quadro 8.3).

Quadro 8.6

Níveis de utilização da manipulação e níveis de van Hiele

Nível de utilização da manipulação	Nível de van Hiele
Elementar	Nível 1 (Visual)
Intermédio	Nível 2 (Descritivo/Analítico)
Elaborado	Nível 3 (Abstracto/Relacional)

Laborde (1993a; 1993b) também refere três níveis na utilização da manipulação e interpretação do *feedback* devolvido pelo *software*, nos quais a autora reconhece os três primeiros níveis de van Hiele.

3. A observação do trabalho dos alunos, nas aulas e nos episódios de ensino, permitiu comprovar que o nível *Intermédio* de utilização da manipulação foi o dominante, seguindo-se o nível *Elementar* e depois o nível *Elaborado*. Estes resultados, a par dos resultados no Teste de Geometria de van Hiele (§4.4.1) e das relações estabelecidas entre tipos de justificação e níveis de van Hiele (§6.4, §8.1.2), apontam para o facto de o Nível 2 de van Hiele parecer ser o nível maioritário na turma, no final da intervenção didáctica. Pode ainda concluir-se que um número razoável de alunos não atingiu esse Nível (2), e que alguns alunos, em número reduzido, atingiram o Nível 3.

Esta situação está de acordo com os resultados de diversos estudos internacionais, que mostram serem os Níveis 1, 2 e 3 os identificados em alunos deste grau de escolaridade (9º ano), predominando o Nível 2 (Battista e Clements, 1992).

Os desempenhos de alguns alunos mostraram que estes nem sempre permaneciam num mesmo nível de utilização da manipulação, antes oscilavam entre eles, por vezes regressando a um nível mais baixo quando se lhes deparava alguma situação nova cuja solução não descobriam rapidamente.

Esta observação, no quadro da comparação estabelecida com os níveis de van Hiele, leva a admitir a hipótese de que alguns alunos da turma estariam em trânsito entre níveis de van Hiele, a exemplo do que referem Gutiérrez, Jaime e Fortuny (1991). Aponta ainda no sentido de um aluno num determinado nível de van Hiele poder voltar pontualmente a níveis mais baixos quando se lhe deparam tarefas que não domina, como referem Fuys, Geddes e Tischler (1988). Estas observações estão na linha das críticas feitas ao modelo de van Hiele sobre a descontinuidade nos níveis e a sua independência de conteúdos específicos, salientadas por Battista e Clements (1992) e discutidas em §2.2.2.

8.3 Implicações do estudo

As conclusões anteriores (§8.2) permitem estabelecer algumas implicações, que se discutem nesta secção, começando pelas implicações sobre a utilização curricular dos AGD, decorrentes da intervenção didáctica realizada. Em seguida destacam-se alguns temas de investigação que, na sequência deste estudo, poderiam ser aprofundados e que se relacionam, por um lado, com a abordagem metodológica utilizada e, por outro lado, com questões empíricas sobre a aprendizagem da Geometria com recurso aos AGD.

8.3.1 Implicações didácticas e curriculares

Uma orientação recente para aprendizagem da Matemática, subjacente neste estudo, tem a ver com a proposta de que, para além de competências técnicas, os alunos devem desenvolver a capacidade de explorar, conjecturar, raciocinar logicamente, formular e resolver problemas e comunicar matematicamente (NCTM, 1991). A Geometria constitui um domínio privilegiado para o desenvolvimento dessas capacidades, mais ainda se a sua aprendizagem se fizer com recurso aos AGD. Este tipo de *software* fornece apoio visual na formulação de conjecturas e na testagem dos teoremas geométricos, capacitando os alunos para tomarem parte activa na construção do seu próprio conhecimento (Tall, 1994).

O modelo didáctico ensaiado levou os alunos a descobrirem, com maior ou menor apoio da professora, processos de realizar as actividades propostas. As conclusões referidas anteriormente (§8.2) destacam o papel da interacção entre AGD, alunos e professora, no desenvolvimento do raciocínio geométrico, a exemplo do que tem sido salientado por diversas investigações (Hart, 1993). Essa interacção foi determinante na compreensão da necessidade e da validade dos raciocínios dedutivos e no desenvolvimento da capacidade de os elaborar.

A procura de argumentos para esclarecer e convencer a investigadora, mas principalmente os colegas, sobre as conclusões a que tinham chegado, levou muitos alunos a clarificar e aprofundar as suas ideias, e a apresentá-las de uma forma progressivamente organizada. A dialéctica da justificação e refutação (Lakatos, 1984) mostrou ser um meio para o crescimento do conhecimento geométrico dos alunos. Mas esta é uma prática que tem estado afastada de muitas salas de aula, em que a cultura dominante assenta mais em "ouvir o que diz o professor e reproduzir isso em testes, tão fielmente quanto possível" (como os próprios alunos comentaram em alguns episódios de ensino — §4.4.3).

As actividades de investigação de construções com vista à formulação e validação de conjecturas, cujo leque foi muito ampliado pelo recurso aos AGD, revelaram-se bastante ricas do ponto de vista do desenvolvimento do raciocínio geométrico, mais ainda quando partiram da curiosidade dos próprios alunos. Porém, necessitaram de longo tempo para serem desenvolvidas de modo a concretizar os seus objectivos. Este *longo tempo* tem uma dupla interpretação. Por um lado os alunos precisam de tempo para realizar e dabater cada uma dessas actividades (nos quarenta minutos úteis de um tempo lectivo poderão ser realizadas uma, eventualmente duas actividades de investigação). Por outro lado as actividades devem ser progressivamente estruturadas e realizadas em sessões intercaladas, ao longo de um e mais anos lectivos.

Neste estudo cumpriu-se uma primeira etapa da intervenção didáctica proposta, em que se exploraram figuras relativamente conhecidas dos alunos. No quadro dos modelos teóricos subjacentes, esta etapa não poderia ter sido queimada, e revelou-se fundamental no desenvolvimento do raciocínio geométrico daqueles alunos (sobretudo da grande maioria, que iniciou a intervenção num nível bastante baixo — §4.4.1). Após esta etapa de familiarização com as figuras geométricas básicas e suas propriedades, dever-se-ia passar à exploração de novas figuras, mais sofisticadas, que exigissem construções, justificações e investigações menos familiares e que propiciassem o desenvolvimento de raciocínios geométricos mais complexos (como Laborde (1993b) propõe alguns exemplos).

A intervenção didáctica incidiu no desenvolvimento do raciocínio indutivo e dedutivo em Geometria. Mas isso não significa que se considere ser essa a única via para a aprendizagem da Geometria, e nem sequer a via a privilegiar, embora se defenda que *deve ser uma via a não ignorar*. O desenvolvimento do raciocínio indutivo e dedutivo pode, e deve, ser feito a par da aprendizagem de outras perspectivas geométricas, e em inter-relação com outros ramos da Matemática, como se discute em §2.1 e como também se fez ao longo da intervenção, ainda que pontualmente.

Estas são perspectivas de algum modo contempladas pelos currículos da Nova Reforma, os quais, paradoxalmente, não fazem referência à utilização de qualquer tipo de ambiente computacional, situação que se espera seja tida em conta numa próxima revisão curricular.

Presentemente o *software* Cabri-géomètre parece ser uma escolha adequada para utilização nas escolas básicas e secundárias. Principalmente tendo em conta que a nova versão — Cabri-géomètre II — tem ainda maiores potencialidades, as quais vão ao encontro das perspectivas dos novos currículos, como é o caso dos temas Lugares Geométricos, Cálculo de Áreas, Secções Cónicas, e que essa versão corrigiu muitas deficiências das versões anteriores, como as referidas em §4.3.2. Impõe-se assim a tradução do programa para português e a sua distribuição em Portugal, a exemplo do que já acontece por quase todos países europeus, bem como muitos outros. Para além disso torna-se necessário o desenvolvimento e investigação de materiais de apoio à utilização do Cabri-géomètre visando especificamente o currículo português (tema este que se retoma mais adiante - §8.3.2).

Em suma, este estudo reforça a hipótese defendida teoricamente (§2.3, §2.4, §4.1), de que a realização, justificação e investigação de construções em AGD pode constituir uma estratégia de intervenção poderosa para a aprendizagem da Geometria. Para dar frutos autênticos, necessita de ser desenvolvida a longo prazo, percorrendo as etapas necessárias ao desenvolvimento do raciocínio geométrico sem as ultrapassar, fazendo uso de actividades progressivamente complexas, que devem ser realizadas pessoalmente mas, sobretudo, partilhadas, numa dialéctica de justificações e refutações, com colegas e professores.

Torna-se assim necessário que as autoridades responsáveis integrem explicitamente nos planos curriculares o recurso ao Cabri-géomètre, ou a outro AGD, acompanhado das orientações referidas, e que promovam a sua divulgação, nomeadamente através da formação de professores e de incentivos à produção de materiais de apoio.

8.3.2 Linhas de investigação a aprofundar

Como temas relevantes para futuras investigações evidenciaram-se, entre outros, os seguintes: abordagem metodológica experiência de ensino; representações externas de figuras geométricas; provas e conjecturas; modelo de van Hiele; obstáculos verbais; tradição da sala de aula, interacções, atitudes dos alunos; materiais de apoio à utilização dos AGD.

Abordagem metodológica *experiência de ensino*

Nas investigações realizadas no nosso país sobre processos de aprendizagem de alunos em contextos de sala de aula reais, por norma o investigador distancia-se do objecto de observação. Segundo certas linhas metodológicas o distanciamento é imprescindível à validade dos resultados obtidos numa investigação. De facto, reconhece-se que a presença do investigador no terreno e a sua intervenção directa, características da experiência de ensino, trazem enviesamentos à observação. Mas a riqueza das experiências de ensino está na possibilidade de interferir no desenvolvimento dos fenómenos em análise, ensaiando, em tempo real, diferentes vias de actuação. Mais do que minorar enviesamentos resultantes dessa interferência, importa descrever e analisar com detalhe o contexto em que os fenómenos acontecem, de modo a tornar bem patentes os condicionalismos que proporcinaram a sua emergência.

Em nosso entender a principal crítica a fazer à experiência de ensino implementada neste estudo resulta de não terem sido totalmente cumpridas algumas regras desta abordagem metodológica. Por um lado, este não foi um autêntico estudo longitudinal (§3.3.4). Ainda que a investigadora tenha acompanhado a turma participante ao longo de quase todo um ano lectivo, a diversidade de tarefas que teve de desempenhar não lhe permitiu focar a sua atenção na evolução pormenorizada dos alunos. Por outro lado, grande parte dos dados teve de ser recolhida paralelamente às aulas habituais dos alunos (§3.3.4, §3.4).

Este tipo de problemas poderiam ter sido ultrapassado se a experiência de ensino tivesse sido apoiada por uma equipa de investigação, dispondo de meios tecnológicos adequados. Assim seria possível efectuar um autêntico estudo longitudinal, em particular prolongando-o por mais de um ano lectivo, acompanhando, por exemplo, o desenvolvimento de alunos ao longo de um ciclo de escolaridade, sempre no contexto real. Na sequência deste estudo teria sido interessante perceber que capacidades manifestaram alguns dos alunos participantes na aprendizagem da Geometria nos níveis de escolaridade seguintes, eventualmente comparando os seus desempenhos com os de outros alunos.

Alguma literatura da especialidade recente recomenda a realização de experiências de ensino no estudo dos fenómenos que ocorrem nas salas de aula reais (Lesh e Kelly, 1994). No entanto, não se defende que constituam a única forma de estudar o tipo de fenómenos em análise nesta investigação. Mas numa época em que o reconhecimento da complexidade do fenómeno educativo aponta para o seu estudo através de abordagens metodológicas integradoras, a experiência de ensino merece um lugar destacado, que poderá complementar e/ou ser complementada através de investigações com linhas metodológicas variadas.

Linhas temáticas

Qualquer investigação que se debruce sobre a utilização educativa de ambientes computacionais depara-se com um vasto campo de análise influenciado por muitas e diferentes variáveis. Como Teodoro (1993) faz notar, o poder educativo dos ambientes computacionais não está no *software* mas antes no ambiente de aprendizagem que patrocinam, entendido este como o conjunto de inter-relações que se estabelecem entre alunos, professores, aparelhagem tecnológica, materiais de apoio, etc.

Embora este estudo tenha tido a preocupação de interligar diferentes componentes do campo em análise, as "lâmpadas" utilizadas na observação iluminaram preferencialmente certos fenómenos e deixaram outros na sombra ou mesmo na obscuridade, como seria inevitável. Dessas "zonas de sombra", sugeridas pela pesquisa teórico/empírica a que se procedeu, emergiram as questões referidas em seguida, merecedoras de atenção em investigações futuras.

Representações externas de figuras geométricas

Na linha de algumas investigações recentes, uma parte deste estudo foi dedicada à discussão da ambiguidade do termo *figura geométrica*, que por um lado se refere ao elemento da teoria, por outro às suas representações externas. Destacaram-se os obstáculos que a ambiguidade do termo pode trazer à aprendizagem dos alunos e o papel que a realização e manipulação de construções no ecrã de um computador pode ter na ultrapassagem desses obstáculos. Mas, longe de ter esgotado o tema, muitas questões permanecem — entre outras, questões derivadas da obrigatoriedade de fazer construções resistentes. Como compreendem os alunos a regra da resistência? Ela pareceu contribuir para o desenvolvimento do raciocínio geométrico. Mas como, especificamente? Quando pareciam seguros do processo de construção que estavam a utilizar, no fim a maioria os alunos não arrastava a construção para a validar. Porquê? Confiavam sobretudo na aparência visual?

Neste campo podem levantar-se ainda as questões seguintes. Que representações internas formam os alunos sobre os conceitos geométricos a partir da observação dessas novas "imagens em movimento"? Como é que elas enriquecem os seus conceitos? E que novos obstáculos introduzem? Quais são as representações que mais facilitam a aprendizagem? Que influência tem o desenvolvimento da capacidade de visualização na aprendizagem de outros ramos da Matemática? E na capacidade de resolução de problemas? O recurso sistemático à visualização não levará a abandonar outras formas de raciocínio?

Provas e conjecturas

Provas e conjecturas foi outro tema bastante destacado neste estudo e que também levanta muitas questões. O estudo mostrou que a aparência visual das construções influenciava grandemente o trabalho dos alunos. Será que o recurso aos AGD os leva a privilegiar a evidência como forma de argumentação? Qual papel têm os raciocínios indutivos e dedutivos?

Apenas um número reduzido de alunos pareceu compreender o sentido da justificação formal das construções geométricas, facto que pareceu estar relacionado com o seu nível de van Hiele, mas essa relação necessita de ser mais bem caracterizada. Será também interessante perceber como é que os alunos transformam as suas justificações empíricas próprias em justificações formalizadas. Que actividades serão mais indicadas para isso?

Como se referiu, as conclusões sobre investigação das construções geométricas com vista à formulação de conjecturas basearam-se na observação de um número muito restrito de casos. Será pertinente observar o que acontece em situações mais vastas e diversificadas. Em particular, perceber como motivar os alunos pouco habituados a resolver problemas desse tipo tão característicos da actividade matemática.

Modelo de van Hiele

O modelo de van Hiele de desenvolvimento de raciocínio geométrico revelou poder explicativo para muitas situações detectadas neste trabalho. Como se mostra em §6.4 e §7.2.3, estabeleceram-se níveis na forma como os alunos justificaram e exploraram as construções, que se associaram aos três primeiros níveis de van Hiele. Mas como, à partida, este estudo não tinha por objectivo essa associação, os dados recolhidos não permitiram fazê-la de uma forma muito completa. Por exemplo, certos desempenhos dos alunos apontaram mais para uma transição entre níveis de van Hiele contíguos, o que se opõe à teoria, embora concorde com resultados de muitas investigações recentes. Assim, considera-se ser esta uma questão a tratar em investigações futuras.

No que se refere à influência da interacção com os AGD, a literatura salienta o seu papel na progressão do Nível 1 (Visual) para o Nível 2 (Descritivo/Analítico) de van Hiele, mas é menos conclusiva no que se refere à progressão para outros níveis. Os resultados deste estudo estão na mesma linha. É pertinente explicar este facto. Terá isso a ver com o tipo actividades propostas? Será que a progressão para níveis mais altos não pode ser conseguida com recurso ao computador? Será que o modelo de van Hiele apenas explica uma parte do desenvolvimento do raciocínio geométrico? O que é que deixa de fora? Que adaptações necessita?

Outra questão prende-se com a caracterização do nível de van Hiele dos alunos. Investigadores da Universidade de Valência estão a desenvolver um instrumento que permite caracterizar o Nível de van Hiele de grandes quantidades de sujeitos (Gutiérrez e Jaime, 1994). O instrumento dos autores espanhóis, adaptado ao currículo português, pode ser utilizado para caracterizar o nível de van Hiele dos nossos alunos. Em particular para perceber se, no $10^{\underline{o}}$ ano de escolaridade, estão em condições de acompanhar uma abordagem da Geometria com uma orientação axiomática-dedutiva, como propõe o currículo actual do ensino secundário.

Obstáculos verbais

Ao longo da intervenção didáctica, os alunos participantes referiram por diversas vezes a sua dificuldade em exprimir «as ideias que tinham na cabeça», usando isso como um dos argumento principais para não fazerem a justificação das construções. A análise das suas respostas nas fichas de trabalho mostra as dificuldades na expressão de ideias, também quando tinham de fazê-lo por escrito. Por outro lado, as conclusões referidas em §8.2 destacam o papel dos diálogos travados entre os alunos e a investigadora, principalmente nos episódios de ensino, na clarificação das suas ideias.

Perceber mais em concreto quais são os obstáculos verbais com que os alunos se deparam quando pretendem expor um raciocínio geométrico, e as relações que têm com o seu nível de van Hiele, constituem temas que interessaria aprofundar, considerando ainda a importância que está a ser dada à comunicação em Matemática nas orientações curriculares actuais (DGEBS, 1991a, 1991b; NCTM, 1991).

Tradição da sala de aula; interacções, atitudes dos alunos

A realização de actividades em pequenos grupos com recurso a um ambiente computacional alterou a rotina habitual das aulas de Matemática da turma participante neste estudo. Novas interacções aconteceram, entre os alunos, entre os alunos e a professora, entre os alunos e o computador, que se reflectiram nos processos de aprendizagem desenvolvidos. Que interacções foram essas? Que influências tiveram nas aprendizagens dos alunos? Como poderiam ter sido enriquecidas?

Por exemplo, a professora da turma considerou que a intervenção didáctica tinha sido muito vantajosa para os alunos mais fracos, em particular para algumas raparigas, pois permitiu-lhes trabalharem ao seu próprio ritmo e, assim, adquirirem mais confiança em si próprias, não se deixando apagar pelos "bons alunos" que habitualmente dominavam as aulas. Também a observação do trabalho dos oito grupos em que a turma se dividiu levantou muitas questões. Esses grupos, formados à vontade dos alunos, apresentavam caraterísticas muito diferentes. Um único era misto (dois rapazes e duas raparigas), uns tinham três alunos, outros quatro, uns funcionaram realmente em grupo outros não, nuns perceberam-se fenómenos de liderança, outros apresentaram uma organização mais democrática. A observação empírica destes e de outros factos aponta para que as características de cada pequeno grupo se reflectiram no trabalho que produzia. Especificamente como? Esta questão é relevante, se se considerar que o trabalho em pequenos grupos sendo um motor do desenvolvimento dos alunos, também acarreta algumas limitações, como salienta Laborde (1994).

Do ponto de vista da interacção com o computador, notaram-se igualmente atitudes individuais e de grupo que influenciaram a realização das actividades. Por exemplo, alguns alunos levaram um certo tempo até se sentirem à vontade para manipular o rato e mesmo o teclado do computador, outros fizeram-no sem dificuldade, alguns recusaram-se a fazê-lo até ao fim. Alguns alunos preocupavam-se em aperfeiçoar os seus trabalhos e apreciavam a facilidade com que o podiam fazer através do computador, para outros isso era uma questão algo secundária. Isso foi relevante na sua aprendizagem?

As conversas que a investigadora teve com os alunos, durante as aulas, e sobretudo no final dos episódios de ensino (resumidas em §4.4.3.), sugerem muitas das influências referidas. Em particular, apontam para que muitos alunos começaram a pensar de uma forma diferente sobre o que é a Matemática e o que é aprender Matemática. Que influência concreta terá isso tido no desenvolvimento da sua aprendizagem, naquela altura, e no futuro?

As questões enunciadas levam a considerar que estudos como o que se fez necessitam de ser complementados com outros em que seja dada uma maior atenção às interacções sociais dos alunos com o *milieu*, isto é, segundo Laborde (1994), todos os elementos do ambiente no qual agem e que lhes podem proporcionar *feedback* sobre a sua actuação. Numa linha análoga, Cobb, Wood, Yackel e McNeal (1992) consideram relevante o estudo da tradição das salas de aulas. Que papel tem a introdução dos ambientes computacionais nessas tradições?

Materiais de apoio à utilização dos AGD

Mesmo sem ter sido uma temática privilegiada neste estudo, consideram-se as fichas elaboradas para apoiar o trabalho dos alunos com o Cabri-géomètre (ver §4.2- Anexos 1 e 2) como um dos seus alicerces. Longo tempo foi dispendido em pesquisas e execução desses materiais. Como salientam diversos autores (Hart, 1993; Laborde, 1993b; Yerushalmy, Chazan e Gordon, 1992), o facto de os ambientes computacionais ampliarem muito o domínio e a complexidade das actividades e problemas que se podem explorar torna muito mais exigente a sua elaboração.

A análise do trabalho dos alunos participantes neste estudo sugeriu muitas reformulações nas fichas, algumas das quais serão tidas em conta em materiais para exploração do Cabri-géomètre adequados às orientações dos novos currículos portugueses, que estão a ser produzidos no âmbito do projecto de investigação Pólya[1].

A investigação já realizada permite levantar nesta área as seguintes questões: Que tipos de actividades devem ser propostas (construções, investigações, actividades que desafiem à demonstração, problemas da vida real)? Que estruturas podem ter (fechadas, abertas)? Que ligações ao currículo de Geometria (e não só) se podem estabelecer? Como explorar as diferentes potencialidades do Cabri-géomètre? Como gerir a sua utilização na sala de aula? Actividades para aulas de compensação educativa?

Muitas outras questões podem ser formuladas. Este é um campo onde é urgente fazer incidir a investigação.

Mais investigações sobre Geometria escolar são pertinentes e urgentes!

Tendo iniciado este trabalho com uma referência à minha experiência profissional, vou terminá-lo do mesmo modo. Depois de toda a pesquisa sobre ensino e aprendizagem da Geometria a que me dediquei nos últimos anos, e de ter voltado ao convívio diário com os alunos após oito anos de interregno, preocupa-me a ausência de capacidades de raciocínio geométrico, principalmente capacidades de visualização, mas também de raciocínio indutivo e dedutivo, que observo à minha volta. O facto de a Geometria na prática ter estado tanto tempo afastada dos currículos escolares parece ter provocado bastantes "estragos".

Um esforço de recuperação da Geometria está a ser feito nas escolas, fruto do trabalho das associações profissionais e das orientações do novos currículos, reflexo também do movimento de internacional sobre esta matéria. Mas parece-me que a investigação portuguesa em Educação Matemática não está a acompanhar devidamente esse comboio, ao qual poderia e deveria dar um andamento maior e de melhor qualidade!

---

[1] Projecto Pólya - JNICT/IIE PCED/C/DCI/4/91

Agradecimentos

Este trabalho beneficiou muito com a colaboração prestada por diversas pessoas. Para todas o meu agradecimento pela solidariedade manifestada.

Muito em especial, agradeço a:

João Correia de Freitas e Vítor Teodoro, o incentivo, o apoio logístico e científico;

Ana Maria Boavida e José Manuel Matos, o apoio moral e científico, em particular os longos debates travados;

Cremilde Ribeiro, a companhia;

José Moura Carvalho, as traduções;

Rui Viana Pereira, a revisão do texto;

Isabel Selas e alunos e alunas da turma 9° 5, a participação na intervenção didáctica.

Agradeço também à Secção de Ciências de Educação da FCT/UNL, em particular ao Pólo do Projecto MINERVA, e ao Conselho Directivo da Escola Secundária de S. João do Estoril, todo o apoio logístico.

Por último, (os últimos são os primeiros), para o Gonçalinho, um grande beijinho pela paciência para fazer de correio e muitas outras coisas...

Referências bibliográficas

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. Em *Educational Studies in Mathematics 18*, 147-176.

Balacheff, N. (1991a). The benefits and limits of social interaction: the case of mathematical proof. Em A. J. Bishop, S. Mellin-Olsen e J. van Dormolen (Eds.), *Mathematical knowledge: its growth through teaching* (pp. 175-192). Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

Balacheff, N. (1991b). Treatment of refutations: aspects of the complexity of a construtivist approach to mathematics learning. Em E. Glasersfeld (Ed.), *Radical construtivism in mathematics education* (pp. 89-110). Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

Balacheff, N. (1993). Artificial intelligence and real teaching. Em C. Keitel e K. Ruthven (Eds), *Learning from computers: Mathematics education and thecnology* (pp. 131-158). Berlim: Springer-Verlag.

Barbin, E. (1993a). Que concepções epistemológicas da demonstração? Para que aprendizagens? (I). Em *Educação e Matemática 27*, 21-25.

Barbin, E. (1993b). Que concepções epistemológicas da demonstração? Para que aprendizagens? (II). Em *Educação e Matemática 28*, 11-14.

Bardin, L. (1977). *Análise de conteúdo.* Lisboa: Edições 70.

Battista, M., Clements, D. (1992). Geometry and spatial reasoning. Em D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning. "A project of the NCTM"* (pp. 420-464). New York: Macmillan Publishing Company.

Battista, M., Clements, D. (1995). Geometry and proof. Em *Mathematics Teacher, 88 (1)*, 48-54.

Boavida, A. (1993). *Resolução de problemas em educação matemática, contributo para uma análise epistemológica e.educativa das representações pessoais dos professores.* Tese para obtenção do grau de Mestre da Faculdade de Ciências e Tecnologia da UNL.

Boero, P., Garuti, R. (1994). Approaching rational geometry: from physical relationships to condicional statements. Em J. P. Ponte e J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the Eighteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education (II)* (pp. 96-103). Lisboa: Program Committee of the 18th PME Conference.

Bogdan, R., Bilken, S. (1982). *Qualitative research for education: an introduction to theory and methods.* Boston: Allyn and Bacon Inc.

Brown, J. S., Collins, A., Duguid, P. (1988). *Situated cognition and culture of learning* (Report nº IRL 88-0008). Palo Alto, Ca: Institute for Research on Learning.

Burger, W., Shaughnessy, J. (1986). Characterizing the van Hiele levels of development in geometry. Em *Journal for Research in Mathematics Education 17(1)*, 31-48.

Capponi, B. (1993a). Modifications des menus dans Cabri-géomètre, des symétries comme outils de construction. Em *Petit x 33*, 37-68.

Capponi, B. (1993b). *Cabri-classe, Apprendre la géomètrie avec un logiciel.* (Documento policopiado.)

Chazan, D. (1993). High school geometry students' justifications for their views of empirical evidence and mathematical proof. Em *Educational Studies in Mathematics 24 (4)*, 359-387.

Cobb, P., Steffe, L. (1983). The constructivist researcher as the teacher and model builder. Em *Journal for Research in Mathematics Education 14 (2)*, 83-94.

Cobb, P., Wood, T., Yackel, E., McNeal, B. (1992). Characteristics of classroom traditions: an interactional analysis. Em *American Educational Research Journal 29*, pp. 573-604.

Collins, A., Brown, J. S., e Newman, S. E. (1992). Cognitive apprenticeship: teaching the craft of reading, writing and mathematics. Em L. B. Resnick (Ed.), *Cognition and instruction: Issues and agendas.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Costa, A. (1986). A pesquisa de terreno em sociologia. Em A. Silva e J. M. Pinto (Orgs.), *Metodologia das Ciências Sociais* (pp. 129-148). Porto: Edições Afrontamento.

Coxford Jr., A. (1993). *Geometria a partir de múltiplas perspectivas.* Lisboa: APM.

Crowley, M. (1987). The van Hiele model of the development of geometric thought. Em M. Lindquist e A. Shulte (Eds.), *Learning and teaching geometry, K-12, 1987 Yearbook*, 1-16. Reston, VA: NCTM.

Crowley, M. (1990). Criterion-referenced reliability indices associated with the van Hiele geometry test. Em *Journal for Research in Mathematics Education 21 (3)*, 238-241.

Davis, P. J., Hersh, R., (1981). *The mathematical experience.* London: Penguin Books.

De Corte, E. (1992). Aprender na escola com as novas tecnologias da informação. Em V. D. Teodoro e J. C. Freitas (Orgs.), *Educação e computadores* (pp. 99-117). Lisboa: GEP.

De Corte, E. (1994). Toward the integration of computers in powerful learning environments. Em S. Vosniadou, E. De Corte e H. Mandel (Eds.), *Technology-based learning environments, psychological and educational foundations* (pp. 19-25). Berlin: Springer-Verlag.

DGEBS (1991a). *Programa Matemática - Plano de organização do ensino-aprendizagem, Ensino básico 3º Ciclo* (II). Lisboa: INCM EP.

DGEBS (1991b). *Matemática - Métodos Quantitativos - Organização curricular e programas, Ensino secundário.* Lisboa: INCM EP.

Dreyfus, T. (1989). Advanced mathematical thinking. Em J. Kilpatrick e P. Nesher (Eds.), *Mathematics and cognition: a research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 113-134). Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Dreyfus, T. (1992). Aspects of computerized learning environments which support problem solving. Em J. Ponte, J. F. Matos, J. M. Matos e D. Fernandes (Eds), *Mathematical problem solving and new information technologies, research in contexts of pratice* (pp. 255-266). Berlin: Springer-Verlag.

Dreyfus, T. (1993). Didactic design of computer-based learnig environments. Em C. Keitel e K. Ruthven (Eds.), *Learning from computers: mathematics education and thecnology* (pp. 102-130). Berlim: Springer-Verlag.

Dreyfus, T., Hadas, N. (1987). Euclid may stay — and even be taught. Em M. Lindquist e A. Shulte (Eds.), *Learning and teaching geometry, K-12, 1987 Yearbook* (pp. 47-58). Reston, VA: NCTM.

Evans, J. (1994). Quantitative and qualitative research methodologies: rivalry or cooperation? Em J. P. Ponte e J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the Eighteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education (II)* (pp. 320-327). Lisboa: Program Committee of the 18th PME Conference.

Farrell, M. (1987). Geometry for secondary school teachers. Em M. Lindquist e A. Shulte (Eds), *Learning and teaching geometry, K-12, 1987 yearbook* (pp. 236-250). Reston, VA: NCTM.

Fernandes, D. (1992). Resolução de problemas: investigação, ensino, avaliação, e formação de professores. Em *Temas de investigação: Educação matemática*, (pp. 45-104). Lisboa: IIE.

Fuys, D., Geddes, D., Tischler, R. (1988). The van Hiele model of thinking in geometry among adolescents. Em *Journal for Research in Mathematics Education - Monograph (3).* Reston VA: NCTM.

Gordo, F. (1993). *Visualização espacial e a aprendizagem da matemática. Um estudo no 1º ciclo do Ensino Básico*. Tese para obtenção do grau de Mestre da Faculdade de Ciências e Tecnologia da UNL.

Green, J. (1982). *Learning to use statistical tests in psychology: a student's guide*. Milton Keynes: The Open University Press.

Guilford, J. P., Fruchter, B. (1981). *Fundamental statistics in psychology and education*. McGraw-Hill.

Gutiérrez, A., Jaime, A. (1994). A model of test design to assess the van Hiele levels. Em J. P. Ponte e J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the Eighteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education (III)* (pp. 41-48). Lisboa: Program Committee of the 18th PME Conference.

Gutiérrez, A., Jaime, A., Fortuny, J. M. (1991). An alternative paradigm to evaluate the acquisistion of the van Hiele levels. Em *Journal for Research in Mathematics Education 22*, 237-251.

Hart, K. (1993). The influences of teaching materials on the learning of mathematics. Em A. Bishop, K. Hart, S. Lerman e T. Nunes (Eds.) *Significant influences on children's learning of mathematics*, (pp. 43-59). Paris: UNESCO.

Hershkowitz, R. (1989). Psychological aspects of learning geometry. Em J. Kilpatrick e P. Nesher (Eds.), *Mathematics and cognition: a research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 70-95). Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Hershkowitz, R. (1994). Working group 11: The role of geometry in general education. Em C. Gaulin, B. Hodgson, D. Wheeler, J. Egsgard (Eds.), *Proceedings of the 7th International Congress on Mathematical Education, 1992* (pp. 160-167). St.-Foy, Canada: Les Presses de l'Université Laval.

Hershkowitz, R., Bruckheimer, M., Vinner, S. (1987). Activities with teachers based on cognitive research. Em M. Lindquist e A. Shulte (Eds), *Learning and teaching geometry, K-12, 1987 yearbook* (pp. 222-235). Reston, VA: NCTM.

Hoffer, A. (1981). Geometry is more than prove. Em *The Mathematics Teacher (74)*, pp. 11-18.

Hoffer, A. (1983). Van Hiele - based research. Em R. Lesh e M. Landau (Eds.), *Acqusition of mathematics concepts and processes* (pp. 205-227). New York: NY Academic Press.

Hoyles, C., Noss, R. (1994). Dynamic geometry environments: what's the point? Em *Mathematics Teacher 87(9)*, 716-717.

ICMI (1994). *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century. Discussion document for an ICMI study*. (Documento policopiado.)

Junqueira, M. (1993). Conjecturas e provas informais em geometria com recurso a ferramentas computacionais. Em *Quadrante, 2 (1)*, 63-78.

Junqueira, M. (1994a). Construções geométricas em ambientes dinâmicos no 9º ano. Em A. Vieira, E. Veloso, L. Vicente (Orgs.) *ProfMat 94 — Actas* (pp. 206-215). Lisboa: APM.

Junqueira, M. (1994b). *Processos de realização de construções em ambientes geométricos dinâmicos*. Comunicação apresentada no VSIEM, Leiria: 7-8 Novembro 1994.

Kantowski, M. G. (1987). The teaching experiment and Soviet studies of problem solving. Em L. Hatfield (Ed.), *Mathematic Problem Solving* (pp. 43-52). Columbus, OH: ERIC Center for Science, Mathematics, and Environmental Education.

Kuhn, T. (1970). *The structure of scientific revolutions (2nd ed. enlarged)*. Chicago: University of Chicago Press.

Laborde, C. (1993a). The computer as part of the learning environment: the case of geometry. Em C. Keitel e K. Ruthven (Eds.), *Learning from computers: Mathematics education and thecnology* (pp. 48-67). Berlim: Springer-Verlag.

Laborde, C. (1993b). Do the pupils learn and what do they learn in a computer based environment? The case of Cabri-géomètre. Em B. Jaworski, (Ed.) *Proceedings of the Conference Technology in Mathematics Teaching 93* (pp. 39-52). Birmingham, UK., The University of Birmingham.

Laborde, C. (1994). Working in small groups: a learning situation. Em R. Biehler, R. Scholz, R. Sträßer e B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline* (pp. 147-158). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Laborde, C., Laborde, J.-M. (1992). Problem solving in geometry: from microworlds to intelligent computer environments. Em J. Ponte, J. F. Matos, J. M. Matos e D. Fernandes (Eds), *Mathematical problem solving and new information technologies, research in contexts of pratice* (pp. 177-192). Berlin: Springer-Verlag.

Laborde, J. M., Sträßer, R. (1990). Cabri-Géomètre: a microworld of geometry guided discovery learning. Em *International Reviews on Mathematical Education* - ZDM 90/5, 171-177.

Lakatos, I. (1984). *Preuves et réfutations - Essai sur la logique de la découverte mathématique*. Paris: Hermann.

Lesh, R., Amit, M., Kelly, E. (1994). Characteristics of effective model--eliciting problems. Em J. P. Ponte e J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the Eighteenth International Conference for the Psychology of Mathematics*

Education (III) (pp. 160-167). Lisboa: Program Committee of the 18th PME Conference.

Lesh, R., Kelly, E. (1994). Action-theoretic and phenomenological approaches to research in mathematics education: studies of continually developing experts. Em R. Biehler, R. Scholz, R. Sträßer e B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline* (pp. 277-286). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Lobato, G. (1992). Novos programas de Matemática no Ensino Básico e Secundário - Que mudanças? Em *Educação e Matemática 19/20*, pp. 3-6.

Mandelbrot, B. (1991). *Objectos fractais*. Lisboa: Gradiva.

Mariotti, M. A., Pesci, A. (1994). Visualization in teaching-learning situations. Em J. P. Ponte e J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the Eighteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education (I)* (p. 22). Lisboa: Program Committee of the 18th PME Conference.

Mason, J. (1993). Less may be more on a screen. Em B. Jaworski, (Ed.) *Proceedings of the Conference Technology in Mathematics Teaching 93* (pp. 367-374). Birmingham, UK., The University of Birmingham.

Matos, J. M. (1984). *Van Hiele levels of preservice primary teachers in Portugal*. Tese apresentada para a obtenção do grau de Mestre em Educação. Boston University, School of Education.

Matos, J. M. (1992a). Acomodando a teoria de van Hiele a modelos cognitivos idealizados. Em *Quadrante I*, 93-112.

Matos, J. M. (1992b). Cognitive models in geometry learning. Em J. P. Ponte, J. F. Matos, J. M. Matos e D. Fernandes (Eds.), *Mathematical problem solving and new information technologies, research in contexts of pratice*, 93-112. Berlin: Springer-Verlag.

Matos, J. M. (1994). Aprendizagens de Matemática, ou de que são feitos os conceitos matemáticos? Em A. Vieira, E. Veloso, L. Vicente (Orgs.) *ProfMat 94 — Actas* (pp. 45-49). Lisboa: APM.

Mayberry, J. (1983). The van Hiele levels of geometric thought in undergraduate preservice teachers. Em *Journal for Research in Mathematics Education 14*, 58-69.

McCoy, L. (1992). Correlates of mathematics anxiety. *Focus on Learning Problems in Mathematics 14*, 51-57.

NCTM (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar*. Lisboa: APM & IIE.

Neves, A. (1988) *O Computador na recuperação em Geometria de alunos do 9º Ano*. Tese de Mestrado em Educação submetida à Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. Lisboa: Projecto MINERVA, Pólo do DE-FCUL.

Neves, A., Brito, L. (1991) *Matemática, Livro de texto 9º ano de escolaridade.* Porto: Porto Editora.

Noss, R., Hoyles, C., Healy, L., Hoelzl, R. (1994). Constructing meanings for constructing: an exploratory study with Cabri Géomètre. Em J. P. Ponte e J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the Eighteenth International Conference for the Psychology of Mathematics* Education *(III)* (pp. 360-367). Lisboa: Program Committee of the 18th PME Conference.

Olive, J. (1992). *Example explorations with the Geometer's Sketchpad.* Comunicação apresentada no 7th International Congress on Mathematical Education, Quebeque, Canada Agosto 1992.

Oliveira, M. (1993). Vygotsky, aprendizado e desenvolvimento, um processo sócio-histórico. S. Paulo: Editora Scipione.

Putnam, R., Lampert, M., Peterson, P. (1990). Alternative perspectives on knowing mathematics in elementary schools. Em *Rewiew of Research in Education 16,* 57-150.

Saraiva, M. (1992). *O Computador na aprendizagem da Geometria - uma experiência com alunos do 10ª ano de escolaridade. Tese apresentada para a obtenção do grau de Mestre em Educação.* Lisboa: Pólo do Projecto MINERVA do DE-FCUL.

Scally, S. (1986). A clinical investigation of the impact of Logo learning environments on students' van Hiele levels of geometric understanding. Em *Proceedings of the Tenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education (1)* (pp. 123-128). London: University of London, Institute of Education.

Schumann, H. (1991). Interactive theorem finding through continous variation of geometric configuration. Em *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching 10 (3),* 81-105.

Schwartz, J. (1989). Symposyum: Visions for the use of computers in classroom instruction. Em *Harvard Educational Review 59 (1),* 51-61.

Schwartz, J. (1992). Can we solve the problem solving problem without posing the problem posing problem? Em J. Ponte, J. F. Matos, J. M. Matos e D. Fernandes (Eds), *Mathematical problem solving and new information technologies, research in contexts of pratice* (pp. 167-176). Berlin: Springer-Verlag.

Sekiguchi, Y. (1991). *An investigation on proofs and refutations in mathematics classroom.* Tese para obtenção do grau de Doctor of the Graduate Faculty of The University of Georgia.

Senk, S. (1989). Van Hiele levels and achievement in writing geometry proofs. Em *Journal for Research in Mathematics Education 20 (3)*, 309-321.

Shulman, L. S. (1986). Paradigms and research programs in the study of teaching: a contemporary perspective. Em M. Wittrock (Ed.) *Handbook of Research on Teaching (Third Edition)* (pp. 3-36). New York: Macmillan Publishing Company.

Sträßer, R. (1992). *Students' constructions and proofs in a computer environment — problems and potencials of a modeling experience.* (Ocasional Paper Nº 134). Bielefeld: IDM, Universität Bielefeld.

Struik, D. (1989). *História concisa da Matemática.* Lisboa: Gradiva.

Tall, D. (1994). Computer environments for the learnig of mathematics. Em R. Biehler, R. Scholz, R. Sträßer e B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline* (pp. 189-199). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Teodoro, V. (1993). A model to design computer exploratory software for science and mathematics. Em D. Towne, T. de Jong e H. Spada (Eds.), *The use of computer models for explication, analysis and experiential learning.* Berlin: Springer-Verlag.

Usiskin, Z. (1982). *Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry (Final report of the Cognitive Development and Achievement in Secondary School Geometry Project).* Chicago, Il: University of Chicago, Department of Education.

Usiskin, Z. (1987). Resolving the continuing dilemmas. Em M. Lindquist e A. Shulte (Eds), *Learning and teaching geometry, K-12, 1987 Yearbook* (pp. 17-31). Reston, VA: NCTM.

Vala, J. (1986). A análise de conteúdo. Em A. Silva e J. M. Pinto (Orgs.), *Metodologia das Ciências Sociais* (pp. 103-128). Porto: Edições Afrontamento.

Van Hiele, P. (1984). The child's thought and geometry. Em D. Fuys, D. Geddes e R. Tischeler (Eds.), *English translation of selected writings of D. Van Hiele-Geldof e P. M. van Hiele* (pp. 243-252). Brooklyn: Brooklyn College.

Van Hiele-Geldof, D. (1984). The didactics of geometry in the lowest class of secondary school. Em D. Fuys, D. Geddes e R. Tischeler (Eds.), *English translation of selected writings of D. Van Hiele-Geldof e P. M. van Hiele* (pp. 1-214). Brooklyn: Brooklyn College.

Veloso, E., Pinheiro, E. (1995). Renovação do ensino da geometria: contributos de Rita Bastos e Cristina Loureiro. Em *Educação e Matemática 32*, 21-24.

Vinner, S. (1994). Traditional mathematics classrooms - some seemingly unavoidable features. Em J. P. Ponte e J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the Eighteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education (IV)* (pp. 353-360). Lisboa: Program Committee of the 18th PME Conference.

Vygotsky, L. (1985). Le problème de l'enseignement et du développement mental à l'age scolaire. Em B. Schneuwly e J. Bronckart (Eds.), *Vygotsky Aujourd'hui*. Paris: Delachaux e Niestlé S. A.

Vygotsky, L. (1988). *A formação social da mente*. S. Paulo: Edições Martins Fontes.

Wilson M. (1990). Measuring a van Hiele geometry sequence: a reanalysis. Em *Journal for Research in Mathematics Education 21 (3)*, 230-237.

Yerushalmy, M. (1991). Enhancing acquisition of basic geometrical concepts with the use of Geometric Supposer. Em *Journal of Educational Computing Research 74*, 407-420.

Yerushalmy, M., Chazan, D. (1990). Overcoming visual obstacles with the aid of the Supposer. Em *Educational Studies in Mathematics 21*, 199-219.

Yerushalmy, M., Chazan, D., Gordon, M. (1990). *Mathematical problem posing: implications for facilitating student inquiry in classrooms*. Education Development Center, Inc., Havard Graduate School of Education.

Yerushalmy, M., Houde, R. (1988). *Geometry problems and projects: Triangles, Quadrilaterals, Circles*. Newton, MA: Education Development Center, Inc.

— (1992). *Um caderno informático para descobrir a Geometria* (edição policopiada). Monte da Caparica: Pólo do Projecto MINERVA da FCT/UNL.

Referência de *software*

Cabri-géomètre, Bellemainn, F., Laborde, J. M., LSD2-IMAG, Université Joseph Fourier, Grenoble, France.

Geometric Supposer, Schwartz, J., Yerushalmy, M., Sunburst Communications, Inc., IL, USA.

Logo.Geometria, Veloso, E., DEP-GEF, Lisboa, Portugal.

The Geometric's Sketchpad, Jackiw, N., Klotz, E., Key Curriculum Press, Berkeley, USA.

Anexo 1- Fichas de trabalho e de avaliação propostas na intervenção didáctica

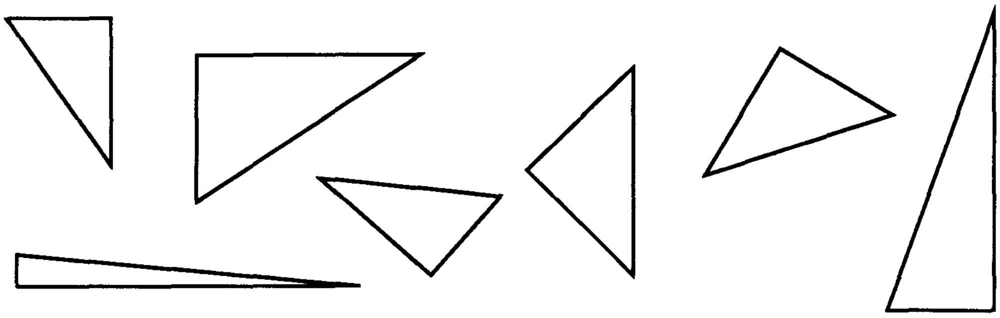
Escola Secundária de S. João do Estoril

CABRI

Nome____ Nº_____

9º Ano - Turma 5 - Grupo ____________ __/__/1993

Ficha 1: Propriedades dos triângulos rectângulos



1 Criem um triângulo qualquer.

a) Nomeiem os vértices.
Marquem os ângulos internos e meçam as amplitudes.

b) Desloquem um dos vértices do triângulo até obter um ângulo de 90^0.

c) Conseguem deslocar outro vértice de modo a obter um segundo ângulo recto? Porquê?

2 Procurem definir o que entendem por **triângulo rectângulo**.

Apaguem a construção anterior.

3

a) Construam um triângulo que permaneça rectângulo quando se deslocam os seus vértices iniciais.

b) Para terem a certeza que a construção está correcta marquem o ângulo recto e desloquem os vértices do triângulo. O ângulo que marcaram permanece *recto*?

Apaguem as linhas auxiliares e deixem ficar apenas o triângulo.
Gravem a construção na directoria Figuras.

4 Descrevam, o mais pormenorizadamente possível, o processo que utilizaram para construir o triângulo rectângulo.

5 Esbocem nesta folha o triângulo que construiram.

a) Nos triângulos rectângulos o maior lado chama-se hipotenusa. E os outros dois lados?

b) Escrevam os nomes dos lados na figura que desenharam.

c) Qual é a posição da hipotenusa em relação ao ângulo recto?

d) Desloquem os vértices do vosso triângulo. E confirmem a vossa afirmação.

6 Marquem os outros dois ângulos internos do triângulo e meçam as amplitudes.

a) Registem essas amplitudes nesta folha e somem-nas.

b) Imaginem um valor para a amplitude de um dos ângulos agudos do triângulo. Qual será a amplitude do outro ângulo agudo?

c) Qual é a soma das amplitudes dos ângulos agudos de um triângulo rectângulo?

d) Manipulem a construção. A vossa ideia mantém-se?

Escola Secundária de S. João do Estoril

CABRI

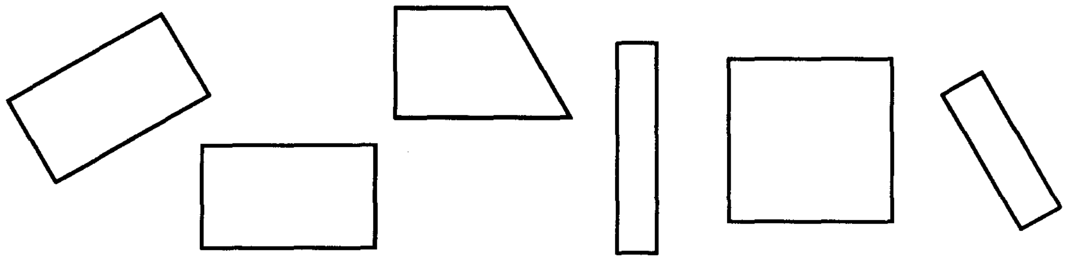
Nomes

__________________________ __________________________

__________________________ __________________________

9º Ano - Turma 5 - Grupo ________________ __/__/1993

Ficha 2: Rectângulos



Eu não sou um rectângulo. Qual sou eu?

Gravem as construções que fizerem na directoria Figuras.

1 Construam uma figura que permaneça um rectângulo quando se desloca qualquer um dos seus vértices.

a) Meçam os comprimentos dos lados e as amplitudes dos ângulos.

b) Esbocem a figura que obtiveram. Registem as medidas que efectuaram.

c) Expliquem pormenorizadamente como fizeram a construção. (Utilizem o outro lado da página.)

2 Procurem definir o que entendem por rectângulo.

3 A partir do vosso rectângulo conseguem obter um quadrado? Como?

Escola Secundária de S. João do Estoril

CABRI

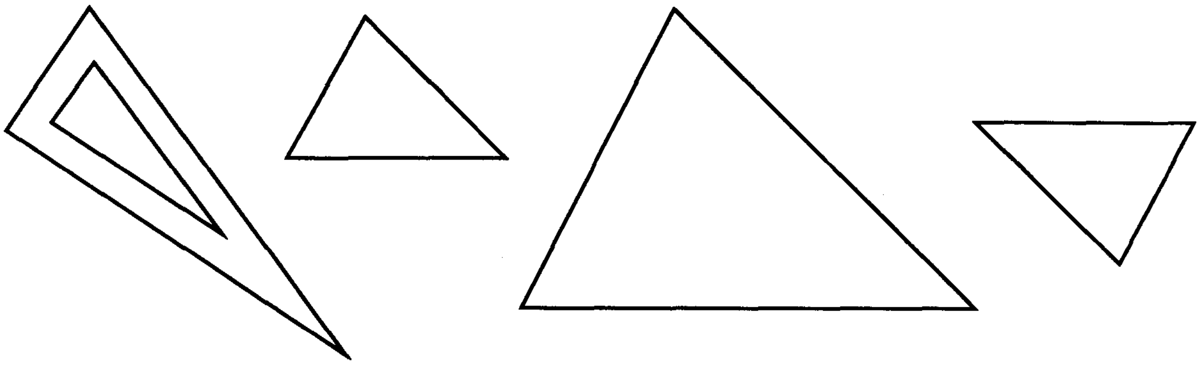
Nomes

______________________________ ______________________________

______________________________ ______________________________

9º Ano - Turma 5 - Grupo __________________ __/__/1993

Ficha 3: Triângulos de lados paralelos



Alguns de nós são semelhantes

Gravem as construções que fizerem na directoria Figuras.

1

a) Construam um triângulo qualquer.

b) Construam um segundo triângulo cujos lados sejam paralelos aos do primeiro triângulo.

Apaguem as linhas auxiliares e deixem apenas os dois triângulos.

c) Esbocem a figura que obtiveram.

2

a) Marquem os ângulos nos dois triângulos e meçam as suas amplitudes. Registem esses dados na vossa figura. Que observam?

b) Meçam os comprimentos dos lados dos dois triângulos. Registem esses dados na vossa figura. Calculem as razões entre os lados que se opõem a ângulos iguais (preencham a tabela em baixo, utilizem uma calculadora). Que observam?

	$\Delta 1$	$\Delta 2$	$\frac{\text{lado } \Delta 1}{\text{lado } \Delta 2}$
lado 1			
lado 2			
lado 3			

c) Que podem dizer sobre dois triângulos que têm os lados paralelos?

Escola Secundária de S. João do Estoril

CABRI

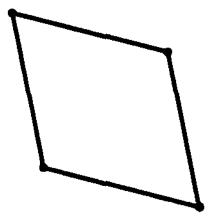
Nomes

____________________ ____________________

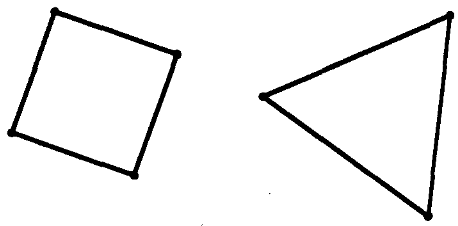
____________________ ____________________

9º Ano - Turma 5 - Grupo ________________ __/__/1993

Ficha 4: Quadriláteros e triângulos de lados iguais



Eu tenho os lados iguais



Eu tenho os lados e os ângulos iguais

Gravem as construções que fizerem na directoria Figuras.

1

1.1

- Criem um segmento [LA].
- Construam:
  - a circunferência de centro L que passa por A;
  - a circunferência de centro A que passa por L.
- Construam os pontos de intersecção das duas circunferências. Nomeiem esses pontos U e R.
- Construam o quadrilátero [LUAR].

Apaguem as linhas auxiliares e deixem apenas o quadrilátero.

1.2 Meçam os lados do quadrilátero [LUAR]. Que observam?

1.3 Desloquem os pontos L e A. Mantêm a observação anterior? Apresentem uma justificação para o facto.

1.4 Marquem e meçam os ângulos internos do quadrilátero [LUAR]. Esbocem nesta folha a figura que obtiveram.
Que nome tem esse quadrilátero?

2 Como se chama um triângulo com os três lados iguais?

2.1 Construam um triângulo com os três lados iguais. (Desloquem os pontos de base e verifiquem se os lados permanecem iguais!)

2.2 Imaginem que vão explicar a um colega como fizeram a construção e porquê. Descrevam e justifiquem os passos que deram.

2.3 Marquem e meçam os ângulos internos do triângulo. Que observam?

2.4 Pode existir um triângulo com os lados iguais e os ângulos não? Construam um triângulo qualquer e investiguem.

Escola Secundária de S. João do Estoril

CABRI

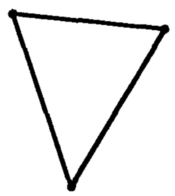
Nomes

______________________________ ______________________________

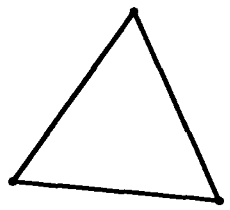
______________________________ ______________________________

9º Ano - Turma 5 - Grupo ________________ __/__/1993

Ficha 5: Mais triângulos de lados iguais



Eu tenho dois lados iguais



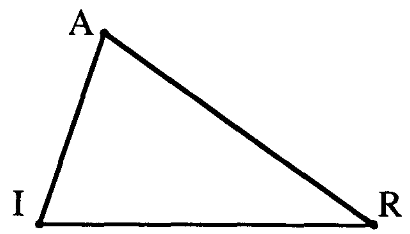
Eu também

Gravem as construções que fizerem na directoria Figuras.

1 Como se chama um triângulo com dois lados iguais?

1.1

- Construam um segmento [IR].
- Construam um triângulo com outro lado igual a [IR].



1.2 Descrevam a construção que fizeram.

2 Marquem e meçam os ângulos do triângulo. Que observam?
Desloquem os vértices do triângulo. Que verificam?

3 Escrevam uma mensagem a um colega explicando como poderia construir um triângulo rectângulo isósceles com o Cabri.
Suponham que ele conhece o Cabri, mas é necessário explicar-lhe porque é que se faz cada passo.

Escola Secundária de S. João do Estoril

CABRI

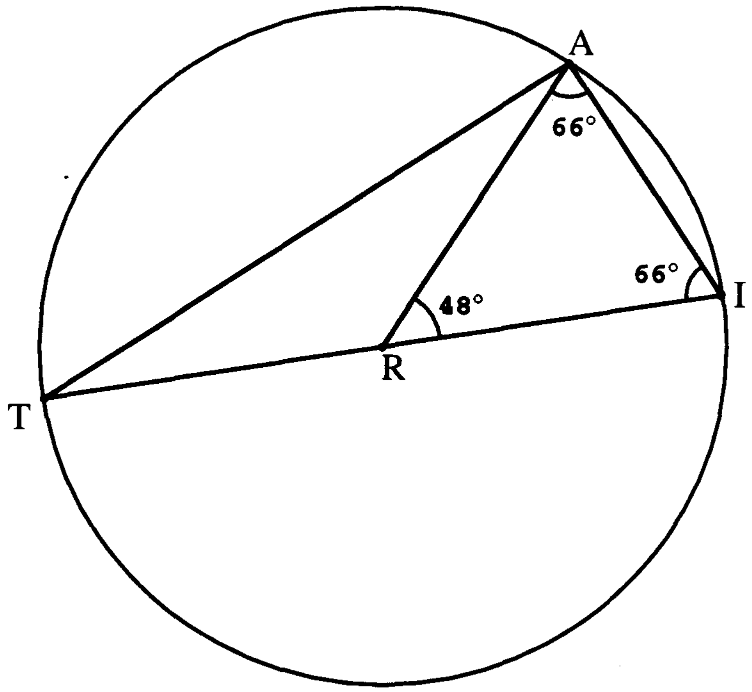
Nomes

____

____

9º Ano - Turma 5 ___/___/1993

Ficha 6: Relações entre lados e ângulos de triângulos



Na figura [TI] é um diâmetro da circunferência de centro R.

1 Como se chama o ângulo $\angle TRA$ relativamente ao triângulo [ARI]?
Qual é a sua amplitude?

2 Como classificas quanto aos lados o triângulo [TRA]?
Porquê?

3 Calcula $I\hat{T}A$. Regista na figura. Que relação existe entre $I\hat{T}A$ e $I\hat{R}A$?

4 Como classificas quanto aos ângulos o triângulo [TAI]?

Escola Secundária de S. João do Estoril

CABRI

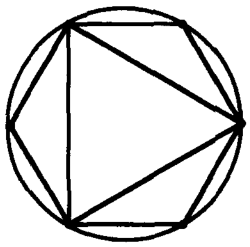
Nomes

____________________________ ____________________________

____________________________ ____________________________

9º Ano - Turma 5 - Grupo ________________ __/__/1993

Ficha 7: Polígonos inscritos numa circunferência



Recordam-se como se dividia uma circunferência em seis partes iguais com um compasso?

1

1.1

- Construam um segmento [IB] e o seu ponto médio M.
- Construam a circunferência de centro M e diâmetro [IB].
- Construam as circunferências:
  de centro I que passa por M
  de centro B que passa por M
- Construam os pontos de intersecção destas circunferências com a primeira. Nomeiem esses pontos S, L, A, E.
- Construam os segmentos [IS], [AB], ...,[LI].
- Pintem (*aspecto dos objectos - cor ou pincel*) o hexágono [ISABEL].

1.2 Meçam os comprimentos dos segmentos [IS], [SA], [AB], [BE], [EL], [LI]. Desloquem os vértices I e B. O que observam?

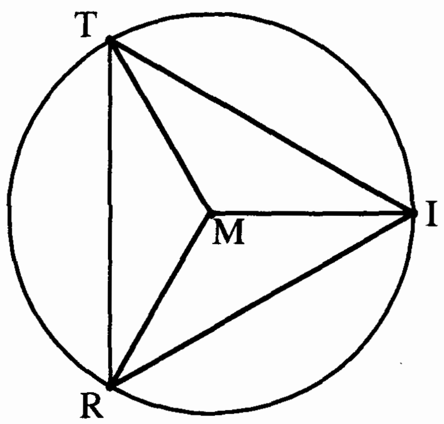
Dêem um **explicação convincente** para esse facto.

2 Voltem a gravar a construção anterior com um **nome diferente**.

2.1 Construam um triângulo equilátero inscrito na circunferência.

2.2 Como podem garantir que os lados do vosso triângulo são todos iguais?[1]

2.3 Marquem na vossa construção os ângulos $\angle$ TMI, $\angle$ IMR, $\angle$ RMT. Meçam a sua amplitude. Registem esses dados na figura em baixo.



[1] Não vale responder que o triângulo é equilátero!

Escola Secundária de S. João do Estoril

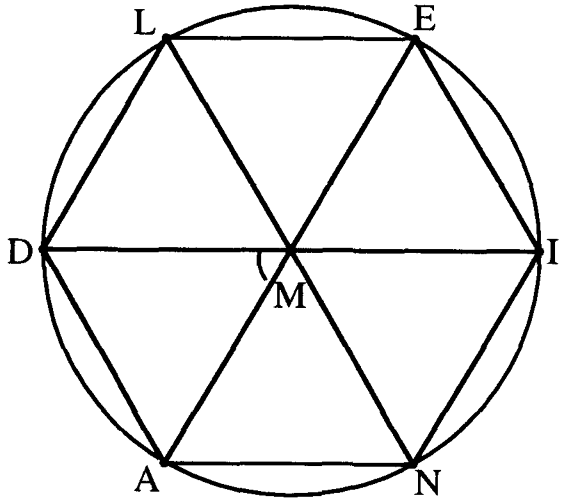
CABRI

Nome ______________________________ __/05/93

Ficha 8: Ângulo ao centro. Ângulo inscrito.

1 A figura [DANIEL] representa um hexágono regular[1] inscrito na circunferência de centro M. Os triângulos [DMA], [AMN], ..., [LMD] são todos equiláteros.

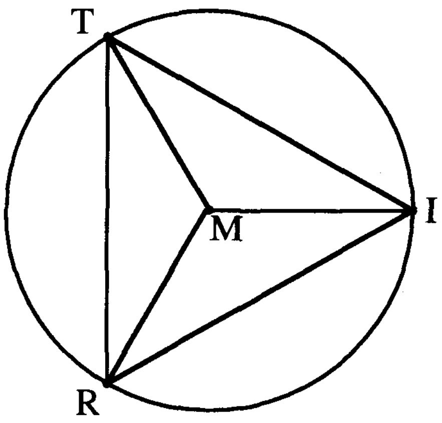
1.1 Qual é a amplitude dos ângulos ao centro $\angle DMA$, $\angle AMN$, ..., $\angle LMD$? Registe esses valores na figura.



1.2 Registe na figura as amplitudes de arc DA, arc AN, ... arc LD.

1.3 Qual é a soma das amplitudes desses arcos?

1.4 Qual é a amplitude do arco DAE?



2 A figura representa um triângulo equilátero [TIR] inscrito numa circunferência de centro M.

2.1 Os três arcos arc TI, arc IR, arc RT são iguais. Porquê?

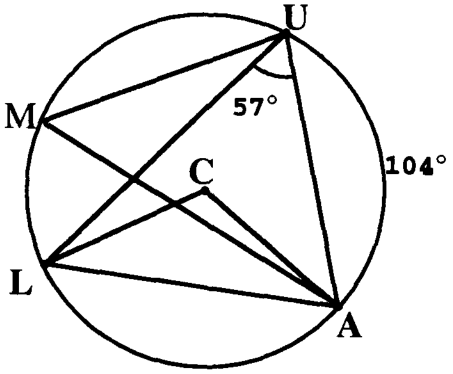
v.s.f.f

2.2 Qual é a amplitude de cada um dos arcos anteriores?

[1] Com os lados e os ângulos todos iguais.

2.3 Qual é a amplitude dos ângulos ao centro $\angle$ TMI, $\angle$ IMR, $\angle$ RMT? Registe esses dados na figura.

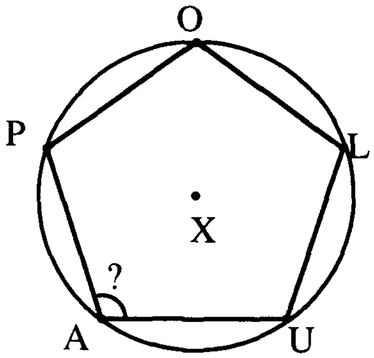
3 O ângulo $\angle$LUA está inscrito na circunferência de centro C.



3.1 Qual é a amplitude do $\angle$LCA?

3.2 Os ângulos UMA e ULA têm a mesma amplitude. Qual é? (Indique os cálculos.)

3.3 Calcule a amplitude de arc UL .



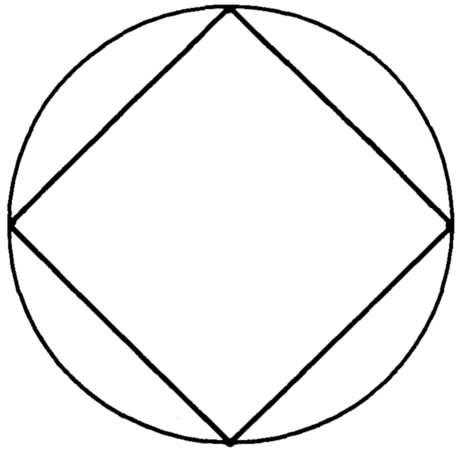
4 A figura representa um pentágono regular [PAULO] inscrito na circunferência de centro X.

4.1 Calcule a amplitude de arc PA e de arc AU.

4.2 Calcule a amplitude dos ângulos internos do pentágono.

2

2.1 Construam uma circunferência. Construam um quadrado inscrito na circunferência.



2.2 Meçam os comprimentos dos lados.
Marquem os ângulos e meçam as amplitudes. Registem os dados na figura ao lado.

2.3 Porque é que os lados ficam iguais quando deslocam os pontos de base do vosso quadrado? (Se tal não acontecer recomecem a construção!)

2.4 Porque é que os ângulos ficam iguais quando deslocam os pontos de base do vosso quadrado? (Se tal não acontecer recomecem a construção!)

Escola Secundária de S. João do Estoril

CABRI

Nomes

_______________________________ _______________________________

_______________________________ _______________________________

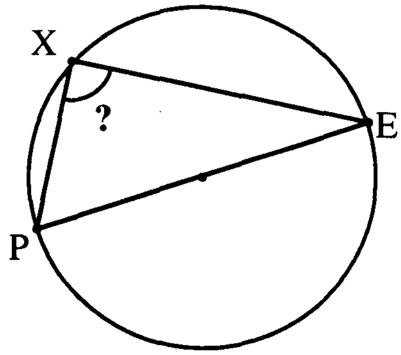
9º Ano - Turma 5 - Grupo ____________________ __/05/1993

Avaliação 1

Gravem as construções que fizerem na disquete (drive A ou B).

1

- Construam um segmento [PE].
- Construam a circunferência de diâmetro [PE].
- Construam um ponto X sobre a circunferência.

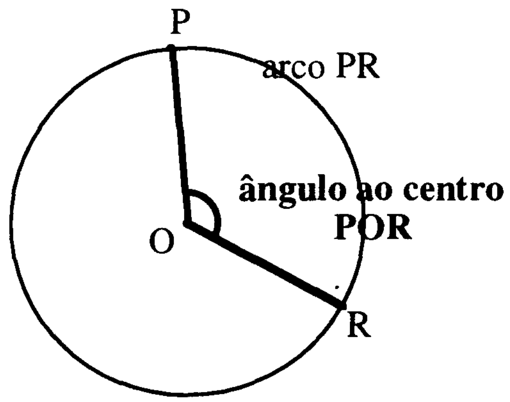


1.1 Marquem e meçam o $\angle$ PXE. Qual é a sua amplitude?

1.2 Desloquem o ponto X sobre a circunferência. O que acontece à amplitude do $\angle$ PXE?

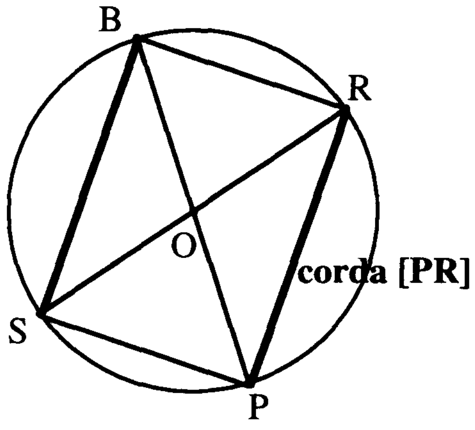
1.3 São capazes de justificar esse facto?

Ângulos ao centro, cordas e arcos correspondentes



A amplitude do arco PR é igual à amplitude do ângulo ao centro POR.

$$\overset{\frown}{PR} = P\hat{O}R$$



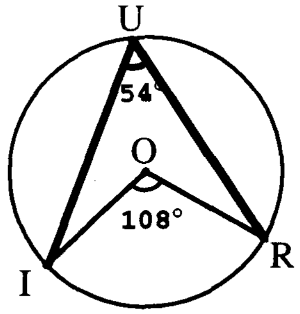
Numa circunferência, se dois arcos (ou dois ângulos ao centro) são iguais, as cordas correspondentes também o são.

arc PR $\cong$ arc BS $\Leftrightarrow$ [PR] $\cong$ [BS]

Reciprocamente, se duas cordas são iguais, os arcos correspondentes (ou os ângulos ao centro) também o são.

[PR] $\cong$ [BS] $\Leftrightarrow \angle$ SOP $\cong \angle$ ROB

Ângulo inscrito



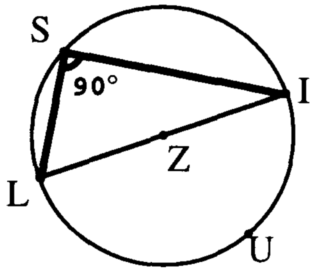
A amplitude do ângulo inscrito é igual a metade da amplitude do ângulo ao centro (ou do arco) corespondente.

$$R\hat{U}I = \frac{1}{2}\,R\hat{O}I$$

Propriedades do ângulo inscrito

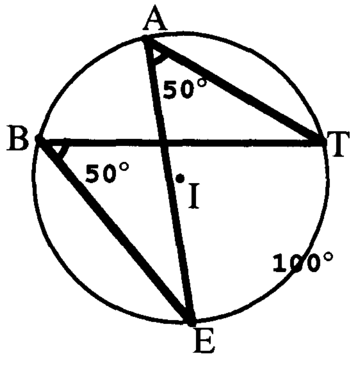
1. Um ângulo inscrito numa semi-circunferência é recto.

$$L\hat{S}I = \frac{1}{2}\,\overset{\frown}{LUI} = \frac{180^\circ}{2}$$



2. Dois ângulos inscritos no mesmo arco são iguais.

$$E\hat{B}T = \frac{1}{2}\,\overset{\frown}{ET}$$
$$E\hat{A}T = \frac{1}{2}\,\overset{\frown}{ET}$$



Escola Secundária de S. João do Estoril

CABRI

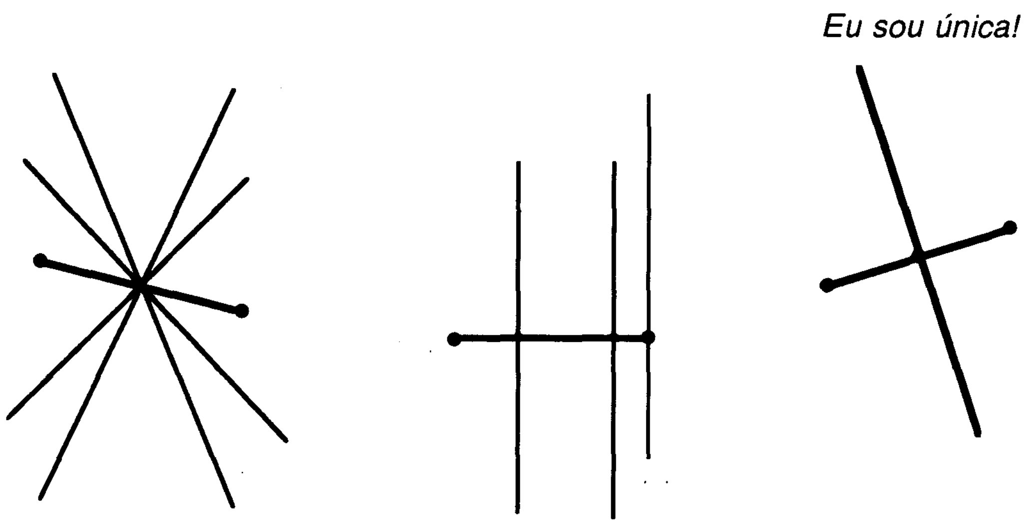
Nomes

______________________ ______________________

______________________ ______________________

9º Ano - Turma 5 - Grupo ______________ __/__/1993

Ficha 9: Mediatriz. Circunferência circunscrita a um triângulo.



1 Observem a figura em cima. O que é a *mediatriz* de um segmento de recta?

2 Os pontos da mediatriz têm uma propriedade importante. Tentem descobrir qual é.

2.1

- Criem um segmento [BE] e contruam a sua mediatriz.
- Construam um ponto U sobre a mediatriz.
- Criem e meçam os segmentos [UB] e [UE]. O que observam?

- Desloquem o ponto U (verifiquem se ele permanece sobre a mediatriz). O que observam?

2.2 Qual é a propriedade dos pontos da mediatriz referida em 2? Escrevam-na dentro do rectângulo da página seguinte e não se esqueçam dela.

3 A propriedade da mediatriz estudada anteriormente tem muitas aplicações.

3.1 Criem um triângulo qualquer. Construam as mediatrizes dos seus três lados.

3.2 Desloquem os vértices do vosso triângulo. O que observam?

3.3 Construam a circunferência cujo centro é o ponto de intersecção das mediatrizes e que passa por um dos vértices do triângulo.

3.4 Voltem a deslocar os vértices do triângulo. O que observam desta vez?

3.5 São capazes de encontrar uma justificação matemática para o facto?[1]

[1] Querem uma ajuda? Criem os três segmentos definidos pelo centro da circunferência e por cada um dos vértices do triângulo. Meçam o seu comprimento.

Escola Secundária de S. João do Estoril

CABRI

Nomes

____________________________ ____________________________

____________________________ ____________________________

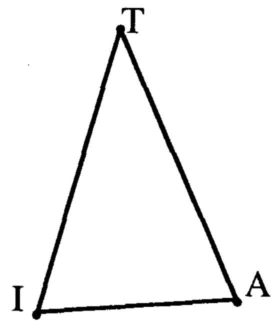
9º Ano - Turma 5 - Grupo ________________ __/__/1993

Ficha 9B: Mediatriz. Circuncentro de um triângulo.

Gravem as construções que fizerem na disquete (drive A ou B).

1

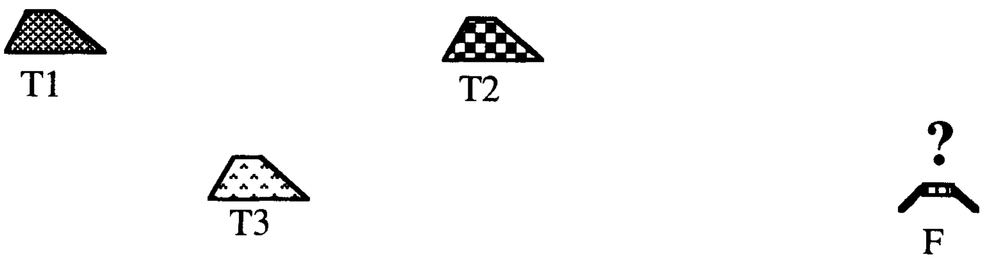
1.1 Criem um segmento [IA]. Construam um triângulo isósceles em que [IA] seja a base.



1.2 Desloquem os pontos I e A. O triângulo [TIA] permanece sempre isósceles?

Como podem garantir?

2 Em que local deve um grupo de campistas colocar um fogão de modo a ficar à mesma distância das suas três tendas?



Criem três pontos T1, T2 e T3 que representam as tendas. Façam uma construção que permita localizar o ponto F.

Escola Secundária de S. João do Estoril

CABRI

Nomes

______________________ ______________________

______________________ ______________________

9º Ano - Turma 5 - Grupo ______________ __/__/1993

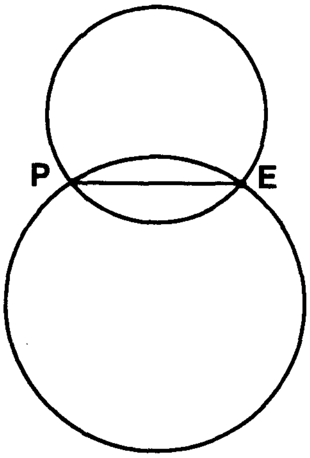
Ficha 10: Aplicações da mediatriz

Gravem as construções que fizerem na disquete (drive A ou B).

1

1.1 Criem um segmento de recta [PE]. Construam a mediatriz de [PE].

1.2 Construam duas circunferências distintas que passem pelos pontos P e E.



1.3 Poderiam construir outras circunferências passando pelos pontos P e E? Quantas? Porquê?

2 No menu **Criação (Création)** escolham o item **Circunferência. (Cercle)**.
Coloquem o cursor num ponto qualquer do ecrã, carreguem no botão do rato e arrastem.
Aparece uma circunferência sem o centro.

2.1 Façam uma construção que permita localizar o centro da circunferência.

2.2 O ponto que construiram é mesmo o centro da circunferência? Porquê?

Escola Secundária de S. João do Estoril

CABRI

Nomes

______________________ ______________________

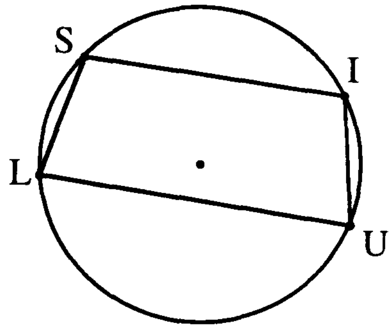
______________________ ______________________

9º Ano - Turma 5 - Grupo ______________ __/__/1993

Ficha 11: Propriedades geométricas em circunferências

1

1.1 Criem uma circunferência.



1.2 Construam um trapézio[1] [LUIS] inscrito na circunferência.

1.3 Descrevam a vossa construção.

1.4 Meçam o comprimento dos lados [UI] e [LS]. Desloquem os vértices de base do trapézio. O que observam? Como justificam?

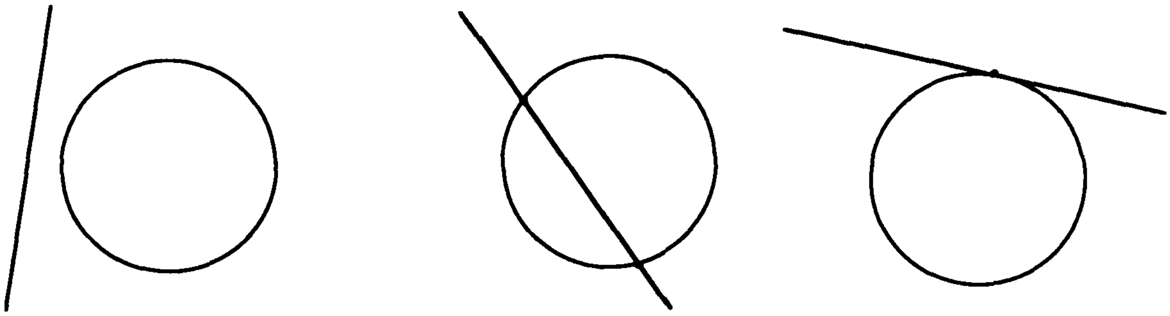
1.5 Meçam as amplitudes dos ângulos internos do trapézio ($L\hat{U}I$, $U\hat{I}S$, $I\hat{S}L$, $S\hat{L}U$). Calculem as amplitudes do arco SIU e do arco SLU. (Registem na figura as amplitudes dos ângulos e dos arcos).

[1] Para quem não se lembra: um **trapézio é um quadrilátero com dois lados paralelos.**

Gravem a construção 1. Abram uma folha de desenho nova.

2

Recta exterior	Recta secante	Recta tangente



Eu e a circunferência não temos nada em comum	Eu e a circunferência temos dois pontos em comum	Eu e a circunferência temos um só ponto em comum

2.1 Criem uma circunferência e um ponto sobre ela.
Construam **rigorosamente** a recta tangente à circunferência nesse ponto.

2.2 Qual foi a propriedade que utilizaram para fazer a construção anterior?

Gravem a construção 2. Abram uma folha de desenho nova.

3

3.1 Criem uma circunferência. Construam um quadrado cujos lados sejam tangentes a essa circunferência.

3.2 Qual é a medida do comprimento do lado do quadrado?
E a medida do raio da circunferência?

3.3 Existe alguma relação entre os dois comprimentos? Essa relação verifica-se sempre?

3.4 Calculem a área do quadrado e a área do círculo[2].

[2] Para quem não se lembra: $\mathbf{A_q=l^2}$ (l-lado do quadrado); $\mathbf{A_c=\pi r^2}$ (r-raio do círculo, $\pi\approx3,14$).

Escola Secundária de S. João do Estoril

CABRI

Nomes

________________________ ________________________

________________________ ________________________

9º Ano - Turma 5 - Grupo ______________ __/__/1993

Ficha 12: Distância de um ponto a uma recta. Bissectriz de um ângulo.

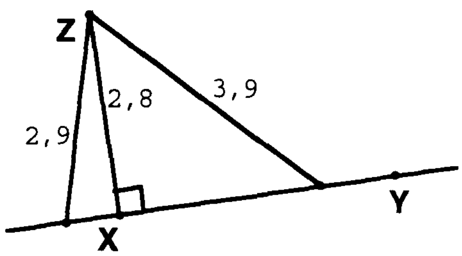
1

1.1

- Criem uma recta e dois pontos X, Y sobre a recta (bem afastados).
- Criem um ponto Z que não pertença à recta XY.
- Criem o segmento ZX e meçam o seu comprimento.
- Marquem o ângulo ZXY e meçam a sua amplitude.

1.2 Desloquem o ponto X sobre a recta até obterem o menor comprimento para o segmento [ZX]. Qual é, neste caso, a amplitude do ângulo ZXY?

Distância do ponto Z à recta XY é a medida do comprimento do segmento [ZX], perpendicular à recta.



Gravem a construção 1. Abram uma folha de desenho nova.

2

2.1

- Criem uma circunferência.
- Construam uma corda que não passe pelo centro da circunferência.
- Construam **rigorosamente** o apótema da corda.

2.2 Esbocem nesta folha a figura que obtiveram.

2.3 Meçam a distância do centro da circunferência à corda. Registem os dados na vossa figura.

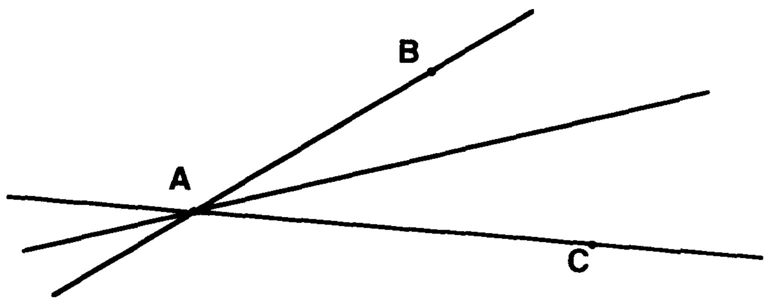
v.s.f.f

2.3 Calculem a área do triângulo[1] cujos lados são a corda e os dois raios da circunferência que passam pelos extremos da corda.

Gravem a construção 2. Abram uma folha de desenho nova.

3

3.1 Criem duas rectas e o seu ponto de intersecção A (como mostra a figura).



3.2 Construam dois pontos B e C sobre cada uma das rectas.

3.3 Construam a bissectriz do ângulo BAC (escolham o item **bissectriz (bissectrice)** e indiquem sucessivamente os pontos B, A, C).

3.4 Construam um ponto P sobre a bissectriz.

3.5 Construam **rigorosamente** os segmentos que representam as distâncias do ponto P às rectas AB e AC. Meçam essas distâncias. (Registem na figura).

3.6 Desloquem o ponto P sobre a bissectriz. O que observam?

3.7 Tentem escrever uma propriedade dos pontos da bissectriz de um ângulo:

---

1 Para quem não se lembra: $A_t=\frac{b\times h}{2}$, (b-base do triângulo, h-altura do triângulo).

Escola Secundária de S. João do Estoril

CABRI

Nomes

______________________ ______________________

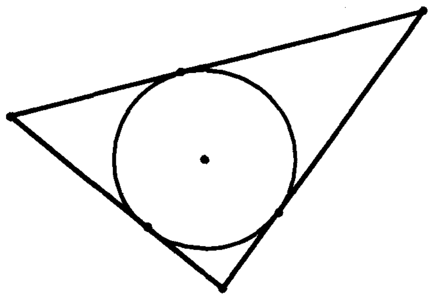
______________________ ______________________

9º Ano - Turma 5 - Grupo ______________ __/__/1993

Ficha 13: Incentro de um triângulo.

1

1.1



- Criem uma circunferência e construam três pontos sobre a circunferência.
- Construam rigorosamente as três tangentes à circunferência nesses pontos.
- Construam o triângulo cujos lados são essas tangentes.

1.2 Construam as bissectrizes dos ângulos internos do triângulo.

1.3 Desloquem os pontos sobre a circunferência (mas sem perderem o triângulo).
As três bissectrizes intersectam-se num mesmo ponto. Porquê? Que ponto é esse?

1.4 Meçam a distância do incentro (ponto de interseccção das três bissectrizes) aos lados do triângulo. Registem na figura essa medida. O que observam?

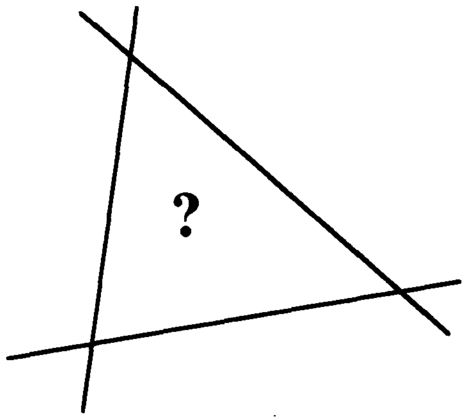
1.5 Escrevam uma propriedade do incentro de um triângulo:

Gravem a construção 1. Abram uma folha de desenho nova.

2

2.1 Onde colocar um candeeiro que fique à mesma distância de três ruas?

- Construam três rectas que representem as ruas, como se mostra na figura.
- Façam uma construção que lhes permita localizar rigorosamente o ponto onde deve ser colocado o candeeiro.



2.2 Descrevam a construção que fizeram.

2.3 Como podem garantir que o ponto que construiram está à mesma distância das três rectas?

Gravem a construção 2

Escola Secundária de S. João do Estoril

CABRI

Nomes

____

____

9º Ano - Turma 5 __/__/1993

Avaliação 2A

1

1.1 Criem um segmento de recta [AB]. Construam um losango[1] de tal modo que:

- [AB] é uma das diagonais do losango;
- os lados do losango devem poder variar de comprimento (mas os quatro lados devem ficar sempre iguais).

1.2 Como podem garantir que a vossa figura é um losango?

Gravem a construção anterior com o nome av21.
Abram uma folha de desenho nova.

2

2.1 Criem uma circunferência. Construam um octógono regular[2] inscrito na circunferência.

2.2 Nomeiem os vértices do octógono. Marquem um dos seus ângulos ao centro e um dos seus ângulos internos. Meçam as amplitudes respectivas.

Gravem a construção anterior com o nome av22.
Abram uma folha de desenho nova.

---

[1] Losango - quadrilátero com os quatro lados iguais.

[2] Octógono regular - polígono com oito lados e oito ângulos iguais.

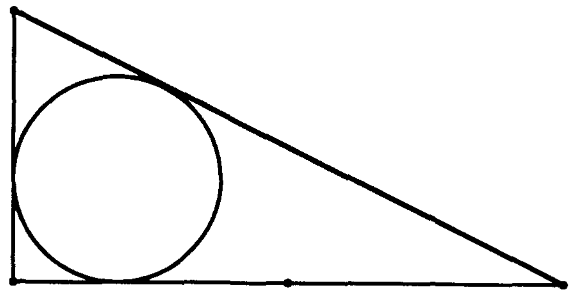
3

3.1 Construam um triângulo rectângulo em que um dos catetos tenha o dobro do comprimento do outro cateto.

3.2 Nomeiem os pontos que construiram. Descrevam a vossa construção.

3.3 Construam a circunferência inscrita no triângulo.

3.4 Calculem a área da parte sombreada representada na figura:



Gravem a construção anterior com o nome av23.

Escola Secundária de S. João do Estoril

CABRI

Nomes

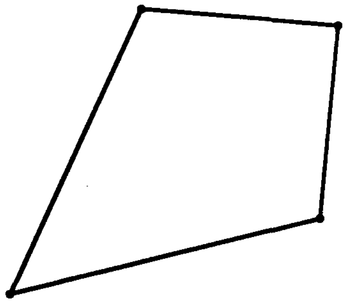
____

____

9º Ano - Turma 5 __/__/1993

Avaliação 2B

1 Um papagaio é um quadrilátero com os lados consecutivos iguais dois a dois.



1.1 Construam um papagaio.

1.2 Como podem garantir que a vossa figura é um papagaio?

Gravem a construção anterior com o nome av21.
Abram uma folha de desenho nova.

2

2.1 Criem uma circunferência. Construam um octógono regular[1] inscrito na circunferência.

2.2 Nomeiem os vértices do octógono. Marquem um dos seus ângulos ao centro e um dos seus ângulos internos. Meçam as amplitudes respectivas.

Gravem a construção anterior com o nome av22.
Abram uma folha de desenho nova.

[1] Para quem não se lembra: um octógono regular é um polígono com oito lados e oito ângulos iguais.

3

3.1 Construam um triângulo rectângulo isósceles.

3.2 Nomeiem os pontos que construiram. Descrevam a vossa construção.

3.3 Construam a circunferência inscrita no triângulo[2].

3.4 Calculem a área da parte sombreada representada na figura 1[3]:

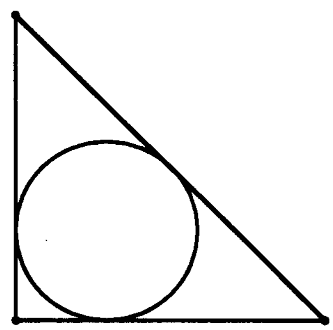


Fig. 1

Gravem a construção anterior com o nome av23.

[2] Se não forem capazes construam a circunferência circunscrita ao triângulo.

[3] Se optaram por construir a circunferência circunscrita calculem a área da parte sombreada representada na figura 2.

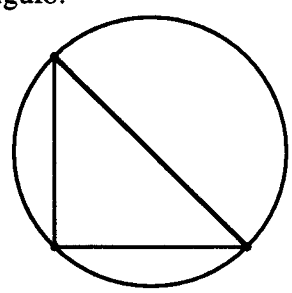


Fig. 2

Anexo 2 - Guiões dos episódios de ensino; autorização para participação nos episódios de ensino

Episódio de ensino 1 (E1)

Data: 10/5/93

Alunos: DE, JC, JG (Grupo JJDM)

Informar os alunos de que o objectivo da entrevista[1] *é tentar perceber a maneira como pensam quando fazem as actividades propostas. Pedir que falem em voz alta e que digam tudo em que estiverem a pensar. A entrevista não tem efeitos para avaliação, é apenas para o trabalho de investigação. Agradecer a colaboração que vão dar.*

I

1. Repetir a ficha Avaliação1.

1.1 Actividade 1. Desloquem o ponto *X*. O que observam e porquê? (*Observar como manipulam o ponto X. Fazem-no com à vontade e segurança? Percebem o que se pretende? Verificam a invariância?*)

1.2 Actividade 2.
À partida tinham a certeza de que iam obter um quadrado? Porquê?
Expliquem a resposta que deram a 2.3.
Qual foi a dificuldade em responder a 2.4?

1.3 Para resolver o mesmo problema, um outro grupo marcou dois pontos sobre a circunferência. Conseguiriam fazer a construção a partir desses dois pontos? Expliquem a vossa resposta.

2. *Último desafio*: Criar um segmento que vai ser uma das diagonais de um rectângulo. Construir o rectângulo.

II

Opinião de cada aluno sobre o trabalho que se tem feito. Que diferenças notam em relação às aulas habituais?

---

[1] Para facilitar a comunicação com os alunos e os seus encarregados de educação os episódios de ensino foram-lhes apresentados como "entrevistas".

Episódio de ensino 2 (E2)

Data: 14/5/93

Alunos: XA, YB (Grupo QWERTY)

Informar os alunos de que o objectivo da entrevista é tentar perceber a maneira como pensam quando fazem as actividades propostas. Pedir que falem em voz alta e que digam tudo em que estiverem a pensar. A entrevista não tem efeitos para avaliação, é apenas para o trabalho de investigação. Agradecer a colaboração que vão dar.

I

1. Repetir a ficha 9

1.1 Actividade 2.1 - construção da mediatriz do segmento. Afinal o que é para vocês a madiatriz de um segmento de recta? (*Comparar com a resposta na ficha.*)

1.2 Concluam a actividade 2.1. Desloquem o ponto *U*. O que observam e porquê? (*Observar como manipulam o ponto U. Fazem-no com à vontade e segurança? Percebem o que se pretende? Verificam a invariância?*)

1.3 Qual é a propriedade da mediatriz que se pretendia descobrir?

1.4 Actividades 3.1. e 3.2. O que observam? (*Mantêm a observação que escreveram na ficha?*)

1.5 Actividades 3.3 e 3.4. O que observam? (*Mantêm a observação que escreveram na ficha?*)

1.6 Não fizeram 3.5. Agora já são capazes?

2. *Último desafio*: problema das tendas de campismo (ficha 9B - 2).

II

Opinião de cada aluno sobre o trabalho que se tem feito. Que diferenças encontraram em relação às aulas habituais?

Episódio de ensino 3 (E3)

Data: 17/5/93

Alunos: PF, RD (Grupo 6)

Informar os alunos de que o objectivo da entrevista é tentar perceber a maneira como pensam quando fazem as actividades propostas. Pedir que falem em voz alta e que digam tudo em que estiverem a pensar. A entrevista não tem efeitos para avaliação, é apenas para o trabalho de investigação. Agradecer a colaboração que vão dar.

I

1. Analisar a ficha 10.

1.1 Para responderem a 1.2 escolheram um ponto da mediatriz para centro da circunferência e um dos extremos do segmento para ponto da circunferência. Tinham a certeza de que essa circunferência iria passar pelo outro extremo do segmento? Porquê?

1.2 Qual foi a primeira ideia que tiveram para fazer a segunda construção? Abram o ficheiro S10 e vamos ver a *história*. Expliquem o que fizeram.

1.3 Concordam com a resposta que deram a 2.2? Porquê?

2. Vamos aproveitar a construção anterior para fazer uma investigação matemática. Desloquem os vértices do triângulo. O que acontece ao circuncentro? (*Observar como manipulam a construção.*)
São capazes de encontrar uma relação entre o triângulo e a localização do circuncentro? (*Observar como manipulam a construção.*)

3. *Último desafio*: localizar um ponto sobre uma estrada equidistante da casa de PF e de RD (criar uma recta e dois pontos *P* e *R*).

II

Opinião de cada aluno sobre o trabalho que se tem feito. Que diferenças encontraram em relação às aulas habituais?

Episódio de ensino 4 (E4)[2]

Data: 18/5/93

Alunos: BF, LA (Grupo GENIOS)

Informar os alunos de que o objectivo da entrevista é tentar perceber a maneira como pensam quando fazem as actividades propostas. Pedir que falem em voz alta e que digam tudo em que estiverem a pensar. A entrevista não tem efeitos para avaliação, é apenas para o trabalho de investigação. Agradecer a colaboração que vão dar.

I

1. Analisar a ficha 10.

1.1 Para responderem a 1.2 escolheram um ponto da mediatriz para centro da circunferência e um dos extremos do segmento para ponto da circunferência. Tinham a certeza de que essa circunferência iria passar pelo outro extremo do segmento? Porquê?

1.2 Qual foi a primeira ideia que tiveram para fazer a segunda construção? Abram o ficheiro N10b e vamos ver a *história*. Porque é que desistiram da primeira ideia? Expliquem o que fizeram depois.

1.3 Qual foi a dificuldade em responder a 2.2?

2.[3] Vamos aproveitar a construção para fazer uma investigação matemática. Desloquem os vértices do triângulo. O que acontece ao circuncentro? (*Observar como manipulam a construção.*)
São capazes de encontrar uma relação entre o triângulo e a localização do circuncentro? (*Observar como manipulam a construção.*)

3. *Último desafio*: localizar um ponto sobre uma estrada equidistante da casa de BF e de LA (criar uma recta e dois pontos *B* e *L*).

II

Opinião de cada aluno sobre o trabalho que se tem feito. Que diferenças encontraram em relação às aulas habituais?

---

[2] O guião deste episódio de ensino é muito semelhante ao do episódio anterior porque uma parte da gravação em vídeo deste episódio (E3) ficou danificada.

[3] Esta actividade não foi realizada, uma vez que os alunos apresentaram diferentes ideias para resolver a actividade anterior que demoraram bastante tempo a explorar.

Episódio de ensino 5 (E5)

Data: 25/5/93

Alunas: CL, IS, PA (Grupo SCIP)

Informar as alunas de que o objectivo da entrevista é tentar perceber a maneira como pensam quando fazem as actividades propostas. Pedir que falem em voz alta e que digam tudo em que estiverem a pensar. A entrevista não tem efeitos para avaliação, é apenas para o trabalho de investigação. Agradecer a colaboração que vão dar.

I

1. Repetir e concluir a ficha 11 (*na aula apenas fizeram a actividade 1*).

1.1 Lembram-se do que fizeram nesta actividade? (Ver a *história*.) Qual foi a dificuldade?

1.2 Actividade 2 (2.1 e 2.2).

1.3 Actividade 3 (3.1 a 3.4).

2. Na ficha 12 tiveram alguma dificuldade em especial? Perceberam bem:
a) como se mede a distância de um ponto a uma recta?
b) qual é a propriedade dos pontos da bissectriz de um ângulo?

3. *Último desafio*: problema do candeeiro (ficha 13 - 2).

II

Opinião de cada aluna sobre o trabalho que se tem feito. Que diferenças encontraram em relação às aulas habituais?

Episódio de ensino 6 (E6)

Data: 26/5/93

Alunas: MA, SA, TA (Grupo MXT)

Informar as alunas de que o objectivo da entrevista, é tentar perceber a maneira como pensam quando fazem as actividades propostas. Pedir que falem em voz alta e que digam tudo em que estiverem a pensar. A entrevista não tem efeitos para avaliação, é apenas para o trabalho de investigação. Agradecer a colaboração que vão dar.

I

1. Analisar a ficha 9B.

1.1 Lembram-se da actividade 1? Expliquem a resposta à actividade 1.2.

1.2 Actividade 2 ver a *história*. (*Tentar perceber o que fizeram e a resposta que deram.*)

2. Concluir a ficha 11 (*na aula apenas fizeram a actividade 1*).

2.1 Actividade 2. (*Como traçam a perpendicular? Sabem que é preciso construir primeiro o segmento? Tentar esclarecer se têm a noção de que uma recta é perpendicular a outra, ou a um segmento...*)

2.2 Actividade 3. Já sabiam que iriam obter um quadrado? De certeza? Porquê? (*Tentar perceber se usam conscientemente ou intuitivamente as propriedades do quadrado, na sua construção.*)

3 Ficha 12

3.1 Qual foi o sentido da resposta à actividade 1?

3.2 Actividade 2.

4[4]. *Último desafio*: Construir um losango.
Construam uma circunferência tangente a um dos lados do losango.
A circunferência vai ser tangente aos outros lados. Porquê?
É possível construir uma circunferência circunscrita a um losango?

II

Opinião de cada aluna sobre o trabalho que se tem feito. Que diferenças encontraram em relação às aulas habituais?

---

[4] Esta actividade não foi realizada por falta de tempo.

Episódio de ensino 7 (E7)

Data: 27/5/93

Alunas: AC, ZC (Grupo DAD)

Informar as alunas de que o objectivo da entrevista, é tentar perceber a maneira como pensam quando fazem as actividades propostas. Pedir que falem em voz alta e que digam tudo em que estiverem a pensar. A entrevista não tem efeitos para avaliação, é apenas para o trabalho de investigação. Agradecer a colaboração que vão dar.

I

1. Ficha 10. Lembram-se da actividade 2? Expliquem a vossa ideia para determinar o centro da circunferência. (*Comparar com a* história.)

2. Ficha 11 - actividade 3 (esta actividade não foi feita aula.) (*Observar como traçam as perpendiculares.*)
Já sabiam que iriam obter um quadrado? De certeza? Porquê?
(*Tentar perceber se usam conscientemente ou intuitivamente as propriedades do quadrado, na sua construção.*)

3[5]. *Último desafio*: Construir um losango.
Construam uma circunferência tangente a um dos lados do losango.
A circunferência vai ser tangente aos outros lados. Porquê?
É possível construir uma circunferência circunscrita a um losango?

II

Opinião de cada aluna sobre o trabalho que se tem feito. Que diferenças encontraram em relação às aulas habituais?

[5] Esta actividade não foi realizada por falta de tempo.

Autorização para participação dos alunos nos episódios de ensino
(carta enviada aos encarregados de educação)

Exmº(ª) Sr(ª)
Encarregado(a) de Educação do(a) aluno(a)
____
Nº ___ da Turma 5 do 9º Ano.

Tem estado a ser desenvolvido com os(as) alunos(as) desta turma, e em colaboração com a professora de Matemática e Directora da Turma Dr.ª Isabel Selas, um projecto de aprendizagem da Geometria do Plano com recurso a ferramentas computacionais e que tem como objectivo estudar o desenvolvimento de capacidades de raciocínio e argumentação em alunos(as) deste nível de escolaridade.

O projecto insere-se no âmbito da investigação na área da Educação Matemática que está a ser realizada pela Secção de Ciências de Educação da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa.

O(a) seu(ua) educando(a) tem desenvolvido um trabalho que se revelou com interesse para a investigação em curso. Assim sendo solicito que me autorize a entrevistá-lo(a). A entrevista será gravada em vídeo e abordará problemas de Geometria resolvidos com recurso ao computador. Realizar-se-á no próximo dia _____ de _________, entre as ___ h e ___ m e as ___ h e ___ m na sala do CEM da Escola Secundária de S. João do Estoril.

Desde já fica garantido que os dados obtidos apenas serão utilizados para os objectivos da investigação. Garante-se igualmente o anonimato do(a) entrevistado(a) se tal for solicitado.

Para o efeito deve V. Exª. destacar e devolver a declaração em baixo depois de assinada.

Desde já agradeço a colaboração prestada.

Com os meus cumprimentos,

S. João do Estoril, __ de _______ de 1993

=Declaração=

Declaro que autorizo o(a) meu(inha) educando(a) __________________
________________________ a realizar uma entrevista com a Drª Margarida Junqueira, no âmbito da sua dissertação de Mestrado, subordinada ao tema "Implicações da utilização de ambientes computacionais na aprendizagem da Geometria".

Solicito/Não solicito que seja mantido o anonimato do(a) meu(inha) educando(a) no texto que for publicado. (*Riscar o que não interessa*).

Data
Assinatura (legível)

Anexo 3 - Teste de Geometria de van Hiele; folha de respostas; autorização para utilização do Teste

TESTE DE GEOMETRIA DE VAN HIELE*

Instruções

Não abra este teste até receber instruções para o fazer.

O teste contém 25 questões. Não se espera que saiba tudo neste teste.

Quando lhe disserem pode começar:

1. Leia cada questão cuidadosamente.
2. Decida qual a resposta que pensa ser correcta. Só há uma resposta correcta a cada questão. Assinale com um círculo a letra correspondente à sua resposta na folha de respostas.
3. Use o espaço na folha de respostas para desenhos ou rascunhos. Não marque nada neste teste.
4. Se quiser mudar uma resposta apague completamente a primeira resposta.
5. Tem 35 minutos para completar o teste.

Espere até que o professor diga que pode começar.

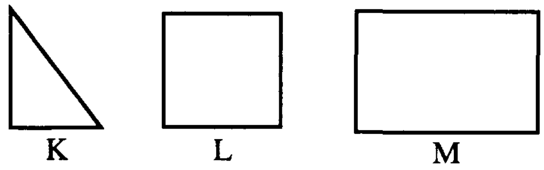
---

* Este teste é baseado no trabalho de P.M. van Hiele.

TESTE DE GEOMETRIA DE VAN HIELE

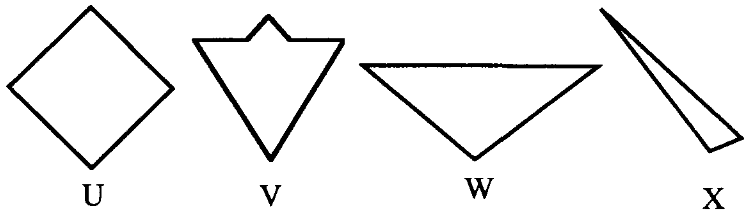
1. Quais são quadrados?

   (A) Só K.
   (B) Só L.
   (C) Só M.
   (D) Só L e M.
   (E) Todos são quadrados.



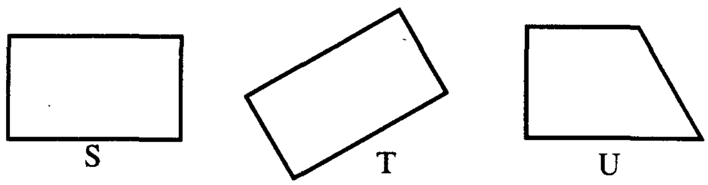
2. Quais são triângulos?

   (A) Nenhum é triângulo.
   (B) Só V.
   (C) Só W.
   (D) Só W e X.
   (E) Só V e W.



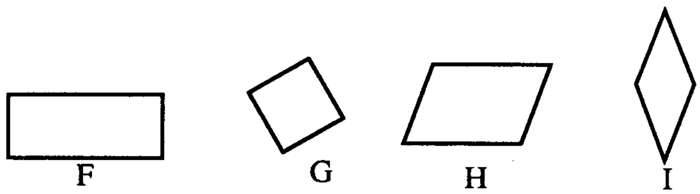
3. Quais são rectângulos?

   (A) Só S.
   (B) Só T.
   (C) Só S e T.
   (D) Só S e U.
   (E) Todos são rectângulos.



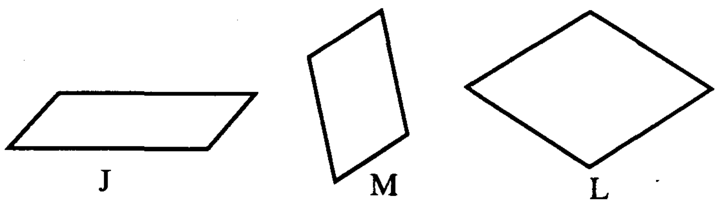
4. Quais são quadrados?

   (A) Nenhum é quadrado.
   (B) Só G.
   (C) Só F e G.
   (D) Só G e I.
   (E) Todos são quadrados.



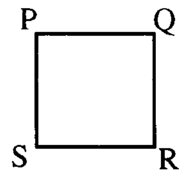
5. Quais são paralelogramos?

   (A) Só J.
   (B) Só L.
   (C) Só J e M.
   (D) Nenhum é paralelogramo.
   (E) Todos são paralelogramos.



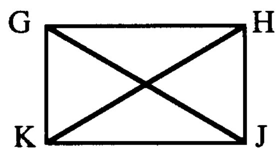
6. [PQRS] é um quadrado.

Que relação é verdadeira para todos os quadrados?



(A) [PR] e [RS] têm o mesmo comprimento.
(B) [QS] e [PR] são perpendiculares.
(C) [PS] e [QR] são perpendiculares.
(D) [PS] e [QS] têm o mesmo comprimento.
(E) A amplitude do ângulo Q é maior do que a do ângulo R.

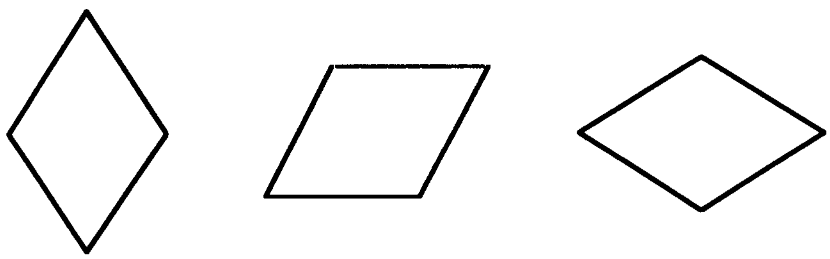
7. Num rectângulo [GHJK], [GJ] e [HK] são as **diagonais**.



Qual é das alíneas (A) a (D) que **não** é verdadeira para **todos** os rectângulos?

(A) Há quatro ângulos rectos.
(B) Há quatro lados.
(C) As diagonais têm o mesmo comprimento.
(D) Os lados opostos têm o mesmo comprimento.
(E) Todas as alíneas (A) a (D) são verdadeiras para todos os rectângulos.

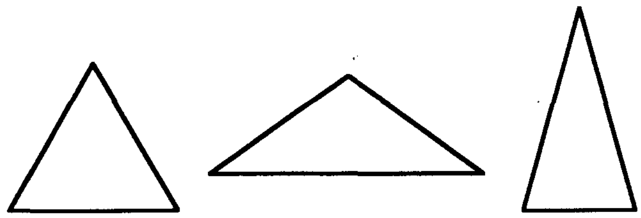
8. Um **losango** é uma figura de 4 lados em que todos os lados têm o mesmo comprimento. Eis três exemplos:



Qual é das alíneas (A) a (D) que **não** é verdadeira para todos os losangos?

(A) As duas diagonais têm o mesmo comprimento.
(B) Cada diagonal bissecta dois ângulos do losango.
(C) As duas diagonais são perpendiculares.
(D) Os ângulos opostos têm a mesma amplitude.
(E) Todas as alíneas de (A) a (D) são verdadeiras para todos os losangos.

9. Um triângulo isósceles é um triângulo que tem dois lados de igual comprimento. Eis três exemplos:



Qual é das alíneas (A) a (D) que é verdadeira para todos os triângulos isósceles?

(A) Os três lados têm de ter o mesmo comprimento.

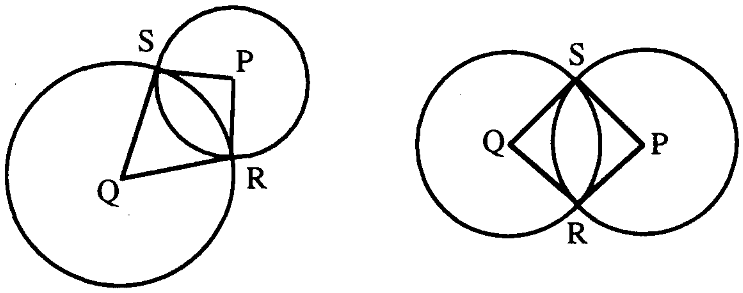
(B) Um lado tem de ter o dobro do comprimento do outro.

(C) Tem de haver pelo menos dois ângulos com a mesma amplitude.

(D) Os três ângulos têm de ter a mesma amplitude.

(E) Nenhuma das alíneas (A) a (D) é verdadeira para nenhum triângulo isósceles.

10. Duas circunferências com centros P e Q intersectam-se em R e S para formar uma figura de 4 lados [PRQS]. Eis dois exemplos:



Qual é das alíneas (A) a (D) que **não** é sempre verdadeira?

(A) [PRQS] terá dois pares de lados de igual comprimento.

(B) [PRQS] terá pelo menos dois ângulos de amplitude igual.

(C) Os segmentos [PQ] e [RS] serão perpendiculares.

(D) Os ângulos P e Q terão a mesma amplitude.

(E) Todas as alíneas (A) a (D) são verdadeiras.

11. Eis duas afirmações:

Afirmação 1: A figura F é um rectângulo.

Afirmação 2: A figura F é um triângulo.

Qual é correcta?

(A) Se 1 é verdadeira, então 2 é verdadeira.

(B) Se 1 é falsa, então 2 é verdadeira.

(C) 1 e 2 não podem ser ambas verdadeiras.

(D) 1 e 2 não podem ser ambas falsas.

(E) Nenhuma das alíneas (A) a (D) é correcta.

12. Eis duas afirmações:

Afirmação S: O Δ [ABC] tem três lados com o mesmo comprimento.

Afirmação T: No Δ [ABC], o ∠ B e o ∠ C têm a mesma amplitude.

Qual é correcta?

(A) As afirmações S e T não podem ser ambas verdadeiras.

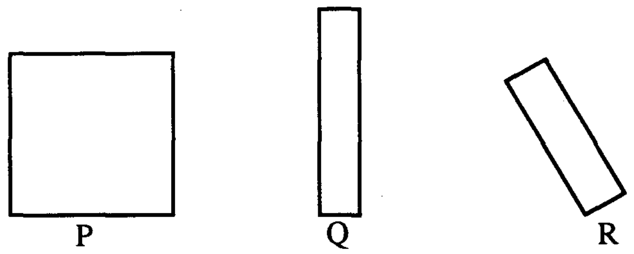
(B) Se S é verdadeira, então T é verdadeira.

(C) Se T é verdadeira, então S é verdadeira.

(D) Se S é falsa, então T é falsa.

(E) Nenhuma das alíneas (A) a (D) é correcta.

13. Quais podem ser chamadas rectângulos?



(A) Todas podem.

(B) Só Q.

(C) Só R.

(D) Só P e Q.

(E) Só Q e R.

14. Qual é verdadeira?

(A) Todas as propriedades dos rectângulos são propriedades de todos os quadrados.

(B) Todas as propriedades dos quadrados são propriedades de todos os rectângulos.

(C) Todas as propriedades dos rectângulos são propriedades de todos os paralelogramos.

(D) Todas as propriedades dos quadrados são propriedades de todos os paralelogramos.

(E) Nenhuma das alíneas (A) a (D) é verdadeira.

15. O que é que todos os rectângulos têm e que alguns paralelogramos não têm?

(A) Lados opostos iguais.

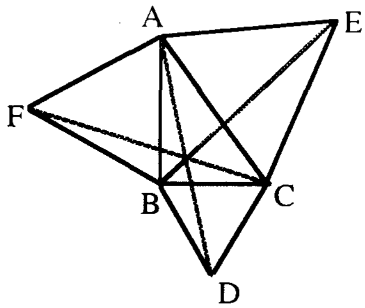
(B) Diagonais iguais.

(C) Lados opostos paralelos.

(D) Ângulos opostos iguais.

(E) Nenhuma das alíneas (A) a (D).

16. Eis um triângulo rectângulo [ABC]. Sobre os lados de [ABC] foram construídos triângulos equiláteros: [ACE], [ABF] e [BCD].



A partir desta informação, pode provar-se que [AD], [BE] e [CF] têm um ponto comum. O que é que esta demonstração lhe diria?

(A) Só neste triângulo desenhado podemos ter a certeza de que [AD], [BE] e [CF] têm um ponto comum.

(B) Em alguns mas não em todos os triângulos rectângulos, [AD], [BE] e [CF] têm um ponto comum.

(C) Em qualquer triângulo rectângulo, [AD], [BE] e [CF] têm um ponto comum.

(D) Em qualquer triângulo, [AD], [BE] e [CF] têm um ponto comum.

(E) Em qualquer triângulo equilátero, [AD], [BE] e [CF] têm um ponto comum.

17. Eis três propriedades de uma figura.

Propriedade D: Tem diagonais de igual comprimento.

Propriedade S: É um quadrado.

Propriedade R: É um rectângulo.

Qual é verdadeira?

(A) D implica S, que, por sua vez, implica R.

(B) D implica R, que, por sua vez, implica S.

(C) S implica R, que, por sua vez, implica D.

(D) R implica D, que, por sua vez, implica S.

(E) R implica S, que, por sua vez, implica D.

18. Eis duas proposições:

I. Se uma figura é um rectângulo, então as suas diagonais bissectam-se.

II. Se as diagonais de um figura se bissectam, então a figura é um rectângulo.

Qual é verdadeira?

(A) Para provar que I é verdadeira, basta provar que II é verdadeira.

(B) Para provar que II é verdadeira, basta provar que I é verdadeira.

(C) Para provar que II é verdadeira, basta encontrar um rectângulo cujas diagonais se bissectem.

(D) Para provar que II é falsa, basta encontrar uma figura que não seja um rectângulo cujas diagonais se bissectem.

(E) Nenhuma das alíneas (A) a (D) é correcta.

19. Em Geometria:

(A) Cada termo pode ser definido e cada proposição verdadeira pode ser demonstrada.

(B) Cada termo pode ser definido mas é necessário saber que certas proposições são verdadeiras.

(C) Alguns termos têm de ficar indefinidos mas cada proposição verdadeira pode ser demonstrada.

(D) Alguns termos têm de ficar indefinidos. É necessário ter algumas proposições que são consideradas verdadeiras.

(E) Nenhuma das alíneas (A) a (D) é correcta.

20. Examine estas três proposições:

(1) Duas rectas perpendiculares à mesma recta são paralelas.

(2) Uma recta que é perpendicular a uma de duas rectas paralelas, é perpendicular à outra.

(3) Se duas rectas são equidistantes então são paralelas.

Na figura em baixo, as rectas **m** e **p** são perpendiculares e as rectas **n** e **p** são perpendiculares. Qual é das proposições abaixo que poderia ser a razão porque a recta **m** é paralela à recta **n**?

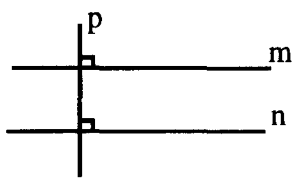
(A) Só (1).

(B) Só (2).

(C) Só (3).

(D) (1) ou (2).

(E) (2) ou (3).



21. Na Geometria F, uma que é diferente da que está habituado(a), há exactamente quatro pontos e seis rectas. Cada recta contém exactamente dois pontos. Se os pontos são P, Q, R e S, as rectas são {P, Q}, {P, R}, {P, S}, {Q, R}, {Q, S} e {R, S}.

Q P

R S

Eis como as palavras *intersectam* e *paralelo* são usadas na Geometria F. As rectas {P, Q} e {P, R} intersectam-se porque têm P em comum. As rectas {P, Q} e {R, S} são paralelas porque não têm pontos comuns.

Partindo desta informação qual é correcta?

(A) {P, R} e {Q, S} intersectam-se.

(B) {P, R} e {Q, S} são paralelas.

(C) {Q, R} e {R, S} são paralelas.

(D) {P, S} e {Q, R} intersectam-se.

(E) Nenhuma das alíneas (A) a (D) é correcta.

22. **Trissectar** um ângulo significa dividi-lo em três partes de amplitude igual.

Em 1847, P.L. Wantzel provou que, em geral, é **impossível** trissectar ângulos usando apenas um compasso e uma régua não graduada. Desta sua demonstração, o que pode concluir?

(A) Em geral é impossível **bissectar** ângulos usando somente um compasso e uma régua não graduada.

(B) Em geral, é impossível trissectar ângulos usando somente um compasso e uma régua **graduada**.

(C) Em geral, é impossível trissectar ângulos usando quaisquer instrumentos de desenho.

(D) É ainda possível que no futuro alguém encontre uma forma de trissectar ângulos usando somente um compasso e uma régua não graduada.

(E) Ninguém será alguma vez capaz de encontrar um método geral para trissectar ângulos usando apenas um compasso e uma régua não graduada.

23. Há uma Geometria inventada por um matemático J na qual o seguinte é verdade:

A soma das amplitudes dos ângulos de um triângulo é menor do que 180^0.

Qual é correcto?

(A) J cometeu um erro ao medir os ângulos do triângulo.

(B) J cometeu um erro de raciocínio lógico.

C) J tem uma ideia errada sobre o significado de *verdade*.

(D) J começou com pressupostos diferentes dos da Geometria usual.

(E) Nenhuma das alíneas (A) a (D) é correcta.

24. Dois livros de Geometria definem a palavra rectângulo de forma diferente.

Qual é verdadeiro?

(A) Um dos livros tem um erro.

(B) Uma das definições está errada. Não pode haver duas definições diferentes de rectângulo.

(C) Os rectângulos de um dos livros devem ter propriedades diferentes dos do outro livro.

(D) Os rectângulos de um dos livros devem ter as mesmas propriedades dos do outro livro.

(E) As propriedades dos rectângulos nos dois livros podem ser diferentes.

25. Suponha que provou as proposições I e II.

I. Se p, então q.

II. Se s, então não q.

Que proposição se conclui das proposições I e II?

(A) Se p, então s.

(B) Se não p, então não q.

(C) Se p ou q, então s.

(D) Se s, então não p.

(E) Se não s, então p.

FOLHA DE RESPOSTAS

Turma ______ Ano ______ Data do Teste __/__/__

Escola ________________________________

Nome ____

Sexo (circule) F M Data de Nascimento __/__/__

Classificação ____________

Circule as respostas correctas *Rascunho*

1.	A	B	C	D	E
2.	A	B	C	D	E
3.	A	B	C	D	E
4.	A	B	C	D	E
5.	A	B	C	D	E
6.	A	B	C	D	E
7.	A	B	C	D	E
8.	A	B	C	D	E
9.	A	B	C	D	E
10.	A	B	C	D	E
11.	A	B	C	D	E
12.	A	B	C	D	E
13.	A	B	C	D	E
14.	A	B	C	D	E
15.	A	B	C	D	E
16.	A	B	C	D	E
17.	A	B	C	D	E
18.	A	B	C	D	E
19.	A	B	C	D	E
20.	A	B	C	D	E
21.	A	B	C	D	E
22.	A	B	C	D	E
23.	A	B	C	D	E
24.	A	B	C	D	E
25.	A	B	C	D	E

UNIVERSITY OF CHICAGO
Department of Education
5835 S. Kimbark Avenue
Chicago, IL 60637

January 22, 1993

Ms. Margarida Junqueira
Faculdade de Ciências e Tecnologia - UNL
Projecto MINERVA
Qt.ª da Torre
2825 Monte da Caparica
PORTUGAL

Dear Ms. Junqueira:

I am happy to give you permission to use the van Hiele Geometry Test, but there are three provisions.

1. Please send me a copy of the test. Dr. Matos never sent me a copy of the translation he made.

2. Please indicate the origin of the test on each copy, as follows. "Original English language version of the van Hiele test developed by the CDASSG project, Department of Education, The University of Chicago. Reprinted by permission of the University of Chicago."

3. Please send me a copy of any write-up of your results.

Best wishes for success in your work.

Sincerely,

Zalman Usiskin

Zalman Usiskin
Professor of Education
Director, UCSMP