



**João Carlos Carapinha Oliveira**

Licenciado em Engenharia Civil

# **Métodos de integração no tempo para estudo de problemas de interação solo-estrutura**

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre  
em Engenharia Civil

Orientador: Professor Doutor José Nuno Varandas Ferreira,  
Professor Auxiliar, FCT/UNL

Júri:

Presidente: Professor Doutora Zuzana Dimitrovová, FCT/UNL

Arguente: Professor Doutor Corneliu Cismasiu, FCT/UNL

Vogal: Professor Doutor José Nuno Varandas Ferreira, FCT/UNL



Novembro de 2017



Métodos de integração no tempo para estudo de problemas de interacção solo-estrutura

“Copyright” João Carlos Carapinha Oliveira, FCT/UNL e UNL

A Faculdade de Ciências e Tecnologia e a Universidade Nova de Lisboa têm o direito, perpétuo e sem limites geográficos, de arquivar e publicar esta dissertação através de exemplares impressos reproduzidos em papel ou de forma digital, ou por qualquer outro meio conhecido ou que venha a ser inventado, e de a divulgar através de repositórios científicos e de admitir a sua cópia e distribuição com objetivos educacionais ou de investigação, não comerciais, desde que seja dado crédito ao autor e editor.



# Agradecimentos

Ao concluir esta etapa, não posso deixar de expressar o meu reconhecido agradecimento a todas as pessoas que de uma forma direta ou indireta contribuíram para a realização deste trabalho.

Em primeiro lugar, agradeço à Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa que me confere o grau de mestre, bem como a todos os seus colaboradores, pela partilha de conhecimentos e profissionalismo demonstrado.

Ao meu orientador, Professor Doutor José Nuno Varandas da Silva Ferreira, pela oportunidade concedida, completa disponibilidade e por acreditar na minha capacidade de desenvolver este trabalho, e pelo conhecimento partilhado.

Por último não menos importante, gostava de agradecer a minha família, aos meus pais pelo incentivo e apoio que me dão desde sempre. À minha namorada, Sara Silva, por todo o companheirismo, apoio constante. Sem eles nada disto seria possível.



# Resumo

Esta dissertação pretende contribuir para a melhor compreensão da eficiência de métodos numéricos de integração no tempo usados na resolução de problemas de dinâmica de estruturas. Concretamente é estudada a influência do amortecimento, das condições de fronteira, das propriedades dos materiais e das dimensões dos modelos, no passo de tempo requerido e na correspondente eficiência computacional.

No trabalho são referenciados alguns dos métodos numéricos mais conhecidos, tendo sido escolhidos dois métodos, um implícito e outro explícito, para estudo mais aprofundado. Estes foram testados em 3 sistemas, o primeiro um caso simples de um grau de liberdade, o segundo um modelo 3D cúbico constituído por um único material e por último um modelo de uma via férrea.

Por último, testa-se a aplicação de métodos mistos de integração implícito-explícito, na solução de problemas típicos de interação solo-estrutura, demonstrando-se as claras vantagens na combinação destes dois tipos de métodos na resolução de problemas desta natureza.

**Palavras chave:** via ferroviária, Métodos numéricos, métodos passo a passo, Newmark, Zhai, Programa Pegasus.



# Abstract

This dissertation is intended to contribute to a better understanding of the efficiency of the numerical methods of time integration used in the resolution of problems in the Dynamics of Structures. Mainly by studying the influence of damping, boundary conditions, properties of materials and model dimensions, the required time step and corresponding computational efficiency.

In the dissertation some known numerical methods are referred and two of them are chosen, an implicit one and an explicit, to be studied in more depth. Three dynamic systems were tested, the first one was a simple event of a degree of freedom, the second one was a cubic model composed of a single material and lastly a model of a railroad.

Lastly, the application of implicit-explicit methods of integration are tested, in solving typical problems of soil structures integration showing the clear advantages in the combination of both of these methods in solving problems of this nature

**Key words:** Numerical Methods, Step-by-step Methods, Newmark, Zhai, Pegasus Program.



# Índice

<b>Capítulo 1 - Apresentação geral do Tema.....</b>	<b>1</b>
1.1 Enquadramento.....	1
1.2 Objetivos Gerais.....	2
1.3 Estrutura do trabalho .....	2
<b>Capítulo 2 - Métodos de integração no tempo.....</b>	<b>5</b>
2.1 Introdução aos métodos de integração .....	5
2.2 Método de Newmark.....	8
2.3 Método de Zhai .....	9
2.4 Aplicação a sistemas de um grau de liberdade.....	10
<b>Capítulo 3 - Pegasus 3D FEM– Apresentação do programa de calculo.....</b>	<b>15</b>
3.1 Apresentação genérica do Pegasus.....	15
3.2 Aplicação do Pegasus 3D FEM a vias férreas.....	17
<b>Capítulo 4 - Aplicação do método de Zhai a um Solido 3D .....</b>	<b>21</b>
4.1 Passo de Tempo Critico.....	21
4.2 Fronteiras Livres .....	23
4.2.1 Estudo da influência da variação das propriedades dos materiais no passo de tempo, com condições de fronteira livres.....	24
4.2.2 Estudo da influência do tamanho dos elementos no passo de tempo .....	27
4.3 Fronteira na base .....	28
4.3.1 Estudo da influência da variação das propriedades dos materiais no passo de tempo, com encastramento da base .....	29
4.3.2 Estudo da influência da variação das propriedades dos materiais no passo de tempo, com molas rígidas na direção Z.....	32
4.3.3 Estudo da influência da variação das propriedades dos materiais no passo de tempo, com molas e amortecedores na base.....	34
4.3.4 Estudo da influência do tamanho dos elementos no passo de tempo, com encastramento da base.....	37
4.3.5 Estudo da influência do tamanho dos elementos no passo de tempo, com molas e amortecedores na base.....	39

4.4 Fronteira lateral absorvente .....	40
4.4.1 Estudo da influência da variação das propriedades dos materiais no passo de tempo, com condições de fronteiras absorventes .....	40
4.4.2 Estudo da influência do tamanho dos elementos no passo de tempo, com condições de fronteira absorvente .....	42
4.5 Estudo da influência do amortecimento material no passo de tempo .....	43
4.5.1 Estudo da influência do amortecimento de Rayleigh no passo de tempo .....	45
4.6 Resumo das conclusões obtidas .....	49
<b>Capítulo 5 - Aplicação do método de Newmark a um Solido 3D .....</b>	<b>51</b>
5.1 Introdução método de Newmark .....	51
5.2 Estudo da precisão do método de Newmark .....	52
5.3 Resumo das conclusões obtidas .....	53
<b>Capítulo 6 - Métodos Mistos .....</b>	<b>55</b>
6.1 Introdução métodos mistos.....	55
6.2 Métodos explícitos versus Métodos mistos.....	56
6.2.1 Apresentação do modelo utilizado .....	56
6.2.2 Resultados .....	58
6.3 Conclusões .....	61
<b>Capítulo 7 - Conclusões .....</b>	<b>63</b>
7.1 Conclusões .....	63
7.2 Desenvolvimentos futuros.....	63
<b>Anexo 1 – Estudo precisão do metodo de Zhai</b>	

# Índice de Figuras

<b>Capítulo 2.....</b>	<b>3</b>
Figura 2. 1 Modelo com 1 grau de liberdade .....	5
Figura 2. 2 Modelo com 1 grau de liberdade .....	10
Figura 2. 3 Gráfico de força aplicada no sistema de 1 grau de liberdade .....	11
Figura 2. 4 Deslocamento $u$ para um passo de tempo de 1 segundo .....	12
Figura 2. 5 Deslocamento $u$ para um passo de tempo de 0.25 segundos .....	12
Figura 2. 6 Deslocamento $u$ para um passo de tempo de 0.1 segundos .....	13
<b>Capítulo 3.....</b>	<b>13</b>
Figura 3. 1 Elementos que compõem o sistema ferroviário .....	17
Figura 3. 2 Vista 3D do modelo típico de via férrea criado com o Pegasus 3D FEM.....	19
<b>Capítulo 4.....</b>	<b>19</b>
Figura 4. 1 Representação geométrica do modelo .....	23
Figura 4. 2 Características geométricas e condições de fronteira para o modelo de fronteiras livres .....	23
Figura 4. 3 Deslocamento do ponto (0,0,0) durante o ensaio de velocidade de propagação constante para o modelo de fronteiras livres.....	25
Figura 4. 4 Deslocamento do ponto (0,0,0) durante o ensaio de variação do módulo de elasticidade com condições de fronteiras livres. ....	25
Figura 4. 5 Deslocamento do ponto (0,0,0) durante o ensaio de variação da massa volúmica com condições de fronteiras livres.....	26
Figura 4. 6 Deslocamento do ponto (0,0,0) durante o ensaio de variação do espaçamento da malha de elementos finitos com condições de fronteira livre.....	27
Figura 4. 7 Deslocamento do ponto (0,0,0) durante o ensaio de velocidade de propagação constante com encastramento da base.....	30
Figura 4. 8 Deslocamento do ponto (0,0,0) durante o ensaio de variação do módulo de elasticidade com encastramento da base.....	31
Figura 4. 9 Deslocamento do ponto (0,0,0) durante o ensaio de variação da massa volúmica com encastramento da base. ....	31
Figura 4. 10 Características geométricas e condições de fronteira para o modelo com apoio simples da base .....	32

Figura 4. 11 Características geométricas e condições de fronteira para o modelo com fronteiras absorventes na base.....	34
Figura 4. 13 Deslocamento do ponto (0,0,0) durante o ensaio de velocidade de propagação constante com molas e amortecedores na base .....	35
Figura 4. 14 Deslocamento do ponto (0,0,0) durante o ensaio de variação do módulo de elasticidade com molas e amortecedores na base .....	35
Figura 4. 15 Deslocamento do ponto (0,0,0) durante o ensaio de variação da massa volúmica com molas e amortecedores na base.....	36
Figura 4. 16 Deslocamento do ponto (0,0,0) durante o ensaio de variação do espaçamento da malha de elementos finitos com encastramento da base. ....	38
Figura 4. 17 Características geométricas e condições de fronteira para o modelo com fronteiras absorventes .....	40
Figura 4. 18 Deslocamento do ponto (0,0,0) durante o ensaio de velocidade de propagação constante com condições de fronteira absorventes.....	41
Figura 4. 19 Deslocamento do ponto (0,0,0) durante o ensaio de variação do módulo de elasticidade com condições de fronteira absorventes. ....	41
Figura 4. 20 Deslocamento do ponto (0,0,0) durante o ensaio de variação da massa volúmica com condições de fronteira absorventes. ....	42
Figura 4. 21 Deslocamento do ponto (0,0,0) durante o ensaio de variação do espaçamento da malha de elementos finitos com condições de fronteira absorvente. ....	43
Figura 4. 22 Amortecimento de Rayleigh de 5% para frequências de 29 Hz e 500 Hz .....	44
Figura 4. 23 Deslocamento do ponto (0,0,0) para as diferentes condições de fronteira .....	45
Figura 4. 24 Curvas de amortecimento de Rayleigh para baixas frequências .....	46
Figura 4. 25 Deslocamento do ponto (0,0,0) para ensaio de amortecimento de baixas frequências.....	47
Figura 4. 26 Curvas de amortecimento de Rayleigh para altas frequências.....	48
Figura 4. 27 Deslocamento do ponto (0,0,0) para ensaio de amortecimento de altas frequências.....	49
<b>Capítulo 5.....</b>	<b>51</b>
Tabela 5. 1 Parâmetros do ensaio do estudo de estabilidade do método de Newmark.....	52
<b>Capítulo 6.....</b>	<b>55</b>
Figura 6. 1 Precetiva do modelo da via férrea .....	57

Figura 6. 2 Corte longitudinal do modelo da via férrea .....	57
Figura 6. 3 Corte Transversal do modelo da via férrea .....	57
Figura 6. 4 Gráfico de deslocamento obtidos pelo método de Zhai para carril durante vários instantes da movimentação do comboio ( $\Delta t=1,33e-5$ ) .....	59
Figura 6. 5 Gráfico de deslocamento obtidos pelo método de Newmark para carril durante vários instantes da movimentação do comboio ( $\Delta t=1,33e-4$ ) .....	59
Figura 6. 6 Gráfico de deslocamento obtidos pelo método de Newmark para carril durante vários instantes da movimentação do comboio ( $\Delta t=1,00e-4$ ) .....	60
Figura 6. 7 Gráfico de deslocamento obtidos pelo método de Newmark para carril durante vários instantes da movimentação do comboio ( $\Delta t=8,00e-5$ ) .....	60
Figura 6. 8 Sobreposição dos deslocamentos obtidos pelo método de Misto e pelo método de Zhai .....	61



# Índice de Tabelas

<b>Capítulo 2</b> .....	<b>3</b>
Tabela 2. 1 Erro médio .....	14
<b>Capítulo 4</b> .....	<b>19</b>
Tabela 4. 1 Parâmetros do modelo durante o ensaio de velocidade de propagação constante para o modelo de fronteiras livres.....	24
Tabela 4. 2 Parâmetros do modelo durante o ensaio de variação do módulo de elasticidade com condições de fronteiras livres. ....	25
Tabela 4. 3 Parâmetros do modelo durante o ensaio de variação da massa volúmica com condições de fronteiras livres. ....	26
Tabela 4. 4 Parâmetros do modelo durante o ensaio de variação do espaçamento da malha de elementos finitos com condições de fronteira livre. ....	27
Tabela 4. 5 Características geométricas e condições de fronteira para o modelo com encastramento da base.....	29
Tabela 4. 6 Tabela de parâmetros do modelo durante o ensaio de velocidade de propagação constante com encastramento da base.....	30
Tabela 4. 7 Parâmetros do modelo durante o ensaio de variação do módulo de elasticidade com encastramento da base.....	30
Tabela 4. 8 Parâmetros do modelo durante o ensaio de variação da massa volúmica com encastramento da base.....	31
Tabela 4. 9 Parâmetros do modelo durante o ensaio de velocidade de propagação constante com apoio simples.....	33
Tabela 4. 10 Parâmetros do modelo durante o ensaio de variação do módulo de elasticidade com apoio simples. ....	33
Tabela 4. 11 parâmetros do modelo durante o ensaio de variação da massa volúmica com apoio simples .....	33
Tabela 4. 12 Parâmetros do modelo durante o ensaio de velocidade de propagação constante com molas e amortecedores na base .....	34
Tabela 4. 13 Parâmetros do modelo durante o ensaio de variação do módulo de elasticidade com molas e amortecedores na base .....	35

Tabela 4. 14 Parâmetros do modelo durante o ensaio de variação da massa volúmica com molas e amortecedores na base .....	36
Tabela 4. 15 Parâmetros do modelo durante o ensaio de variação do espaçamento da malha de elementos finitos com encastramento da base.....	38
Tabela 4. 16 Parâmetros do modelo durante o ensaio de variação do espaçamento da malha de elementos finitos com molas e amortecedores na base. ....	39
Tabela 4. 17 Deslocamento do ponto (0,0,0) durante o ensaio de variação do espaçamento da malha de elementos finitos com molas e amortecedores na base.....	39
Tabela 4. 18 Parâmetros do modelo durante o ensaio de velocidade de propagação constante com condições de fronteira absorventes.....	40
Tabela 4. 19 Parâmetros do modelo durante o ensaio de variação do módulo de elasticidade com condições de fronteira absorventes. ....	41
Tabela 4. 20 Parâmetros do modelo durante o ensaio de variação da massa volúmica com condições de fronteira absorventes.....	42
Tabela 4. 21 Parâmetros do modelo durante o ensaio de variação do espaçamento da malha de elementos finitos com condições de fronteira absorvente. ....	43
Tabela 4. 22 Parâmetros para as diferentes condições de amortecimento. ....	44
Tabela 4. 23 Resultados obtidos no ensaio de amortecimento de baixas frequências.....	47
Tabela 4. 24 Resultados obtidos no ensaio de amortecimento de altas frequências .....	48
<b>Capítulo 5.....</b>	<b>51</b>
Tabela 5. 1 Parâmetros do ensaio do estudo de estabilidade do método de Newmark.....	52
<b>Capítulo 6.....</b>	<b>55</b>
Tabela 6. 1 Características dos materiais da via férrea.....	58
Tabela 6. 2 Resultados ensaios modelo da via férrea .....	58
Tabela 6. 3 Passo tempo críticos para o modelo da via férrea .....	62

# Simbologia

## Convenções

$A$  Matriz

$\bar{A}$  Media

## Símbolos

$a$  ou  $A$  Acelerações

$\beta$  Coeficiente de Newmark

$C$  Matriz de Amortecimento

$f$  ou  $F$  Forças Externas

$\varphi$  Coeficiente de Zhai

$\gamma$  Coeficiente de Newmark

$u$  ou  $U$  Deslocamentos

$K$  Matriz de Rigidez

$L$  Comprimento da malha elementos finitos

$M$  Matriz de Massa

$M_{edo}$  Modulo Edométrico

$\psi$  Coeficiente de Zhai

$O$  Ponto aplicação de Carga

$a_1$  Coeficiente de Rayleigh

$a_2$  Coeficiente de Rayleigh

$t$  Tempo

$T_n$  Período

$\sigma$  Variância

$v$  ou  $V$  Velocidades

$\zeta$  Fator Amortecimento

$F_c$  Força Amortecimento

$F_e$  Força Elástica

## Abreviaturas

Gdl Graus de liberdade

EM Erro medio

EQM Erro quadrático medio

# Capítulo 1

## Apresentação geral do Tema

### 1.1 Enquadramento

Muitos problemas de engenharia civil são de índole dinâmica, para os quais as equações de equilíbrio são equações diferenciais, e estas têm de ser resolvidas por um dos vários métodos disponíveis para o efeito. Um grupo de métodos bastante popular e com grande sucesso para a resolução deste tipo de problemas são os métodos de integração numérica no tempo passo a passo.

O comportamento não-linear pode ser considerado facilmente por esta abordagem, meramente assumindo que as propriedades estruturais permanecem constantes durante cada passo e fazendo com que elas mudem de acordo com qualquer forma específica de comportamento de um passo para o outro. Deste modo, a análise não-linear é, na verdade, uma sequência de análises lineares de um sistema em mudança. Qualquer grau desejado de refinamento no comportamento não-linear pode ser alcançado neste procedimento, tornando os passos de tempo suficientemente curtos. Também pode ser aplicado a qualquer tipo de não-linearidade, incluindo mudanças de propriedades como a massa e o amortecimento, bem como as não-linearidades mais comuns devido a mudanças de rigidez. São estas características aliadas a uma fácil implementação em programas computacionais que tornam estes métodos tão populares.

Este grupo de métodos pode ser dividido em duas classes principais: métodos implícitos e métodos explícitos. Os métodos implícitos geralmente permitem passos de tempo maiores, mas requerem operações matemáticas mais complexas, associadas à resolução de um sistema formado por um elevado número de equações acopladas. Os métodos explícitos, por outro lado, requerem passos de tempo de uma ordem geralmente inferior, mas só necessitam de operações algébricas simples para resolver os problemas. A escolha do método mais adequado depende sempre das características de cada modelo numérico. Em geral, para modelos com muitos graus de liberdade, como estudo de solos, os métodos explícitos são mais adequados, e para modelos mais pequenos, onde as matrizes de rigidez ou massa sejam diagonais ou de banda estreita, os métodos implícitos podem ser mais adequados. Este é o estado da arte na escolha de métodos numéricos de integração à priori, não existe um procedimento que permita escolher o método de

integração no tempo mais eficiente, para cada tipo de modelo dinâmico. E com a imensidade de métodos passo a passo existentes torna-se difícil escolher à priori qual o método mais eficiente e qual o passo de tempo mais apropriado, de forma a garantir a precisão e eficiência da análise.

## 1.2 Objetivos Gerais

Esta dissertação pretende contribuir para o melhoramento da eficiência na escolha de métodos numéricos para a resolução de problemas de dinâmica de estruturas, através do estudo da influência de aspetos como o amortecimento, condições de fronteira e propriedades de materiais no passo de tempo que cada método permite utilizar.

O foco desta dissertação no passo de tempo devesse ao facto de este influenciar diretamente o tempo computacional, e qualquer incremento do passo de tempo, que permita obter resultados precisos, pode proporcionar um ganho considerável em modelos de larga escala.

## 1.3 Estrutura do trabalho

Esta dissertação é composta por 7 capítulos. O primeiro consistiu no enquadramento geral do tema e os seus principais objetivos.

O segundo capítulo é dedicado à descrição dos métodos numéricos utilizados.

O terceiro capítulo consiste na descrição do método de funcionamento do programa Pegasus com a descrição dos vários parâmetros e aplicação do programa a uma via férrea.

No quarto capítulo é feito o estudo da influência dos parâmetros como o amortecimento, as condições de fronteira, as propriedades dos materiais e o espaçamento da malha de elementos finitos no passo de tempo associado ao método numérico de Zhai.

No quinto capítulo é feita a comparação do método de Newmark com o método de Zhai, e é estudada a precisão do método de Newmark para um modelo prismático de pequenas dimensões.

No sexto capítulo é utilizado um método de integração misto explícito-implícito aplicado à resolução de um problema de interacção solo-estrutura, e comparam-se os resultados com aqueles obtidos nos Capítulos anteriores.

Por último, o sétimo capítulo é o resumo das conclusões retiradas desta dissertação e sugestões para desenvolvimento de futuros trabalhos de investigação.



## Capítulo 2

# Métodos de integração no tempo

## 2.1 Introdução aos métodos de integração

Este capítulo será dedicado à apresentação de alguns métodos de integração disponíveis para a resolução da equação de equilíbrio dinâmico. O capítulo começa com uma breve apresentação da equação do equilíbrio dinâmico, explicando quais são as grandezas que entram na equação e exemplificando uma das muitas formas que esta pode ser deduzida. De seguida são enunciadas as principais metodologias de resolução da equação de equilíbrio dinâmico, explicitando as vantagens e desvantagens de cada abordagem.

As características essenciais para caracterizar qualquer sistema dinâmico são: a massa, propriedades elásticas ou de rigidez e o amortecimento. [Chopra,1995] O movimento de um sistema após a aplicação de uma força, pode ser calculado através da equação de movimento que tem a seguinte expressão:

$$Ma + Cv + Ku = F(t) \quad (2.1)$$

Esta equação é conhecida de todos os livros de Dinâmica de Estruturas e relaciona a massa ( $M$ ), o amortecimento ( $C$ ), a rigidez ( $K$ ), com as forças aplicadas ( $F(t)$ ) e com o movimento do sistema, definido em termos de aceleração, velocidade e deslocamento. Se assumirmos que todas estas grandezas podem ser concentradas num só elemento, podemos desenhar o seguinte modelo com um grau de liberdade, e o respetivo diagrama de corpo livre.

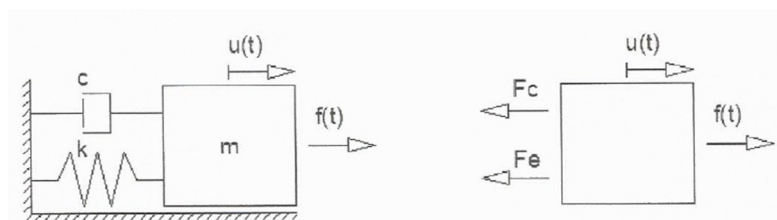


Figura 2. 1 Modelo com 1 grau de liberdade

Uma forma simples de obter a equação de equilíbrio dinâmico para sistemas de 1 grau de liberdade é aplicar a segunda lei de Newton considerando só a parte de translação ( $\sum \vec{F} = M \cdot \vec{a}$ ), na direção do deslocamento  $u$  ao diagrama de corpo livre apresentado, tendo em conta que a força de amortecimento ( $F_c$ ) e a Força elástica ( $F_e$ ) são dadas por  $F_c = C \cdot v$ ;  $F_e = K \cdot u$

A equação de equilíbrio dinâmico é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem, para a qual estão definidas varias formas de resolução dependendo das características do sistema. Estas resoluções podem ser dividida em dois grupos, métodos analíticos contínuos e métodos numéricos passo a passo.

As principais diferenças entre estes grupos é que as metodologias dos métodos analíticos contínuos só funcionam em geral quando as características do sistema são fisicamente lineares, ou seja a massa, rigidez e amortecimento são constantes ao longo do tempo, e a solução para o deslocamento ( $u(t)$ ) é dada em forma de função, permitindo assim saber o deslocamento, velocidade ou aceleração, em qualquer instante. Contrariamente a metodologia do grupo dos métodos numéricos pode ser aplicada a sistemas com características físicas não lineares no tempo, mas como estes métodos são com um passo de tempo predefinido, só é conhecida a resposta do sistema em instantes predeterminados, sendo que valores para instantes intermédios têm de ser interpolados.

De entre os métodos analíticos mais conhecidos encontra-se o método de integral de Duhamel, que representa a força aplicada ( $F(t)$ ) como a sequência de impulsos de pequena duração e aplica o princípio da sobreposição de efeitos, válido exclusivamente em sistemas lineares, para calcular a resposta. Também muito conhecido é o método da análise modal, que divide a vibração real em vários modos de vibração ortogonais, e combina a resposta de cada modo pelo princípio da sobreposição para calcular o deslocamento real. Este método é utilizado normalmente pelos programas computacionais para o cálculo da resposta sísmica.

Para além destes métodos existem na bibliografia muitas soluções analíticas [Chopra,1995] [Clough&Penzien,1995], para sistemas, mais simples, por exemplo sistemas não amortecidos ou para casos de carga mais simples como forças harmónicas ou movimento harmónico da base. Estas soluções geralmente são soluções exatas.

Tal como nos métodos anteriores existem vários métodos numéricos conhecidos, para a resolução de equações diferenciais, sendo os mais conhecidos o método das diferenças finitas, a família de métodos de Newmark e a família de métodos de Runge-Kutta. Nos subcapítulos seguintes serão apresentados em pormenor os métodos que foram utilizados na tese, sendo o restante deste subcapítulo dedicado ao resumo de alguns aspetos que são em geral válidos para todos os métodos passo a passo.

Os métodos numéricos podem ser divididos em duas classes, explícitos e implícitos. Explícitos utilizam dados do passo de tempo  $n$  ou anteriores para prever a resposta do sistema. A grande vantagem desta abordagem é que a análise prossegue diretamente de um passo para outro, e a maior desvantagem é a necessidade de utilizar passos de tempo mais pequenos para atingir a precisão desejada. Por outro lado, os algoritmos implícitos utilizam dados do passo de tempo  $n$  e posteriores para calcular a resposta dos sistema, criando a necessidade de estimar valores e refinar o resultado através de um processo iterativo. A vantagem é que permitem usar passos de tempo maiores e em alguns casos são incondicionalmente estáveis, ou seja a solução nunca tende para infinito. [Chopra,1995] [Zhai, 1996]

O fator principal a considerar na escolha do método passo a passo deve ser a eficiência, que diz respeito ao esforço computacional requerido para atingir o nível de precisão desejado durante o intervalo de tempo para o qual a resposta é necessária. A precisão por si só não pode ser o critério para a seleção do método porque, em geral, qualquer nível de precisão pode ser obtido por qualquer método numérico, se o passo de tempo for curto o suficiente (mas com óbvio aumento correspondente de custos computacionais). Em qualquer caso, o passo de tempo deve ser curto o suficiente para fornecer uma definição adequada do histórico do carregamento e da história da resposta. Uma resposta com uma frequência alta não pode ser descrita com um passo de tempo longo.

Os fatores que podem contribuir para erros nos resultados obtidos a partir de cargas bem definidas são:

- Arredondamentos – resultante de cálculos feitos usando números expressos por poucas casas decimais.
- Instabilidade – causada pela ampliação dos erros de um passo de tempo nos cálculos dos passos de tempo subsequentes. A precisão de qualquer método é melhorada reduzindo o passo de tempo.
- Truncamento – usar poucos termos na descrição de quantidades.

Erros resultantes de qualquer causa podem ser manifestados por um ou ambos dos seguintes efeitos:

- Mudança aparente de frequência em resultados cíclicos.
- Amortecimento fictício, em que o procedimento numérico remove ou adiciona energia ao sistema dinâmico.

[Clough&Penzien,1995]

## 2.2 Método de Newmark

O método de Newmark é um método implícito desenvolvido por Nathan M. Newmark no ano de 1958 com base nas seguintes equações: [Newmark,1958]

$$U_{n+1} = U_n + V_n \Delta t + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) A_n \Delta t^2 + \beta A_{n+1} \Delta t^2 \quad (2.2)$$

$$V_{n+1} = V_n + (1 - \gamma) A_n \Delta t - \gamma A_{n+1} \Delta t \quad (2.3)$$

Os parâmetros  $\beta$  e  $\gamma$  definem a variação da aceleração em cada passo de tempo, e permitem controlar a estabilidade e precisão do método. Existem valores de  $\beta$  e  $\gamma$  conhecidos para dois casos especiais, que são aceleração constante ( $\beta = 1/2$ ;  $\gamma = 1/4$ ) e aceleração linear ( $\beta = 1/2$ ;  $\gamma = 1/6$ ). O valor de  $\beta$  é igual em ambos os casos. Nos estudos de R.Clough & J.Penzien, 1995 foi concluído que  $\beta$  controla a quantidade de amortecimento artificial introduzido no método, que o valor de  $1/2$  equivale a um amortecimento artificial nulo, sendo este valor recomendado para qualquer sistema de equilíbrio dinâmico.

O método de Newmark é estável se: [Chopra,1995]

$$\frac{\Delta t}{T_n} = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{\gamma - 2\beta}} \quad (2.4)$$

Substituindo  $\beta = 1/2$ ;  $\gamma = 1/4$  obtemos:

$$\frac{\Delta t}{T_n} < \infty \quad (2.5)$$

Isto implica que para uma aceleração constante o método é estável, independentemente o  $\Delta t$  escolhido, mas só é preciso se  $\Delta t$  for suficientemente pequeno. [Chopra,1995]

Substituindo  $\beta = 1/2$ ;  $\gamma = 1/6$  obtemos:

$$\frac{\Delta t}{T_n} < 0.551 \quad (2.6)$$

Em alternativa à formulação anterior [Chopra,1995] apresenta as equações de Newmark escritas na forma incremental da seguinte forma:

$$\Delta U = \frac{F_{n+1} - F_n + \left(\frac{1}{\beta\Delta t}M + \frac{\gamma}{\beta}C\right)V_n + \left(\frac{1}{2\beta}M + \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1\right)C\Delta t\right)A_n}{K + \frac{\gamma}{\beta\Delta t}C + \frac{1}{\beta\Delta t^2}M} \quad (2.7)$$

$$\Delta V = \frac{\gamma}{\beta\Delta t}\Delta U - \frac{\gamma}{\beta}V_n + \Delta t\left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right)A_n \quad (2.8)$$

$$\Delta A = \frac{1}{\beta\Delta t^2}\Delta U - \frac{1}{\beta\Delta t}V_n - \frac{1}{2\beta}A_n \quad (2.9)$$

$$U_{n+1} = U_n + \Delta U ; V_{n+1} = V_n + \Delta V ; A_{n+1} = A_n + \Delta A \quad (2.10)$$

Com a formulação incremental em vez de termos de conhecer o valor de  $A_{n+1}$  temos de conhecer o valor de  $F_{n+1}$ . Esta formulação é vantajosa em problemas que temos uma força bem definida no tempo, por exemplo queremos estudar se certa estrutura resiste a um certo sismo bem definido.

## 2.3 Método de Zhai

O método de Zhai é um método explícito desenvolvido por Wan-Ming Zhai na Academia de Engenharia e Ciências da Universidade do Sudoeste de Jiaotong no ano de 1996. [Zhai, 1996]

O método propõe o seguinte esquema de integração em dois passos:

- Prever os valores do deslocamento (U) e da velocidade (V) no instante n+1 com as equações.

$$U_{n+1} = U_n + V_n\Delta t + \left(\frac{1}{2} + \psi\right)A_n\Delta t^2 - \psi A_{n-1}\Delta t^2 \quad (2.11)$$

$$V_{n+1} = V_n + (1 + \varphi)A_n\Delta t - \varphi A_{n-1}\Delta t \quad (2.12)$$

- Calcular a aceleração ( $A$ ) através da equação de equilíbrio dinâmico formulada no instante  $n + 1$ ,

$$A_{n+1} = M^{-1}(F_{n+1} - KU_{n+1} - CV_{n+1}) \quad (2.13)$$

Os parâmetros  $\psi$  e  $\varphi$  são parâmetros livres para controlo da estabilidade e dissipação numérica do algoritmo. Para a primeira iteração o autor propõem que se considere  $\psi = \varphi = 0$  para iniciar o processo de integração.

A estabilidade do método de Zhai depende dos valores escolhidos para os fatores  $\psi$  e  $\varphi$ . Para os valores  $\psi = \varphi = 1/2$  a expressão apresenta por Zhai para o passo de tempo crítico é: [Zhai,1996]

$$\Delta t \leq \frac{2}{\omega}; \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.14)$$

## 2.4 Aplicação a sistemas de um grau de liberdade

Tal como foi enunciado no capítulo 2.1, qualquer método numérico é preciso desde que o passo de tempo escolhido seja pequeno o suficiente. Este subcapítulo será dedicado à aplicação do método de Zhai e do Método de Newmark a um caso de simples de um grau de liberdade para se explicitar este aspeto.

O modelo utilizado é um sistema de um grau de liberdade com massa, rigidez e amortecimento concentrados em um único elemento. A figura 2.2 é uma possível representação o sistema utilizado.

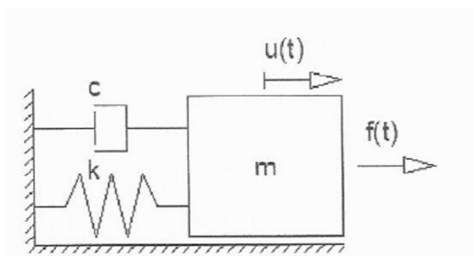


Figura 2. 2 Modelo com 1 grau de liberdade

Os valores utilizados no cálculo foram 10 toneladas para a massa, uma rigidez de 64 kN/m, um amortecimento de 10% e uma força por troços representada na Figura 2.3.

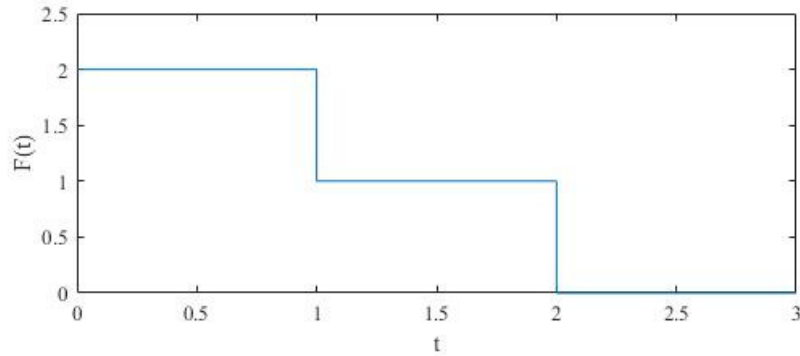


Figura 2.3 Gráfico de força aplicada no sistema de 1 grau de liberdade

Os valores para a frequência natural e período do sistema podem ser calculados pelas seguintes expressões,

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 2,53 \text{ rad/s}; \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2,48 \text{ s} \quad (2.15)$$

Os parâmetros numéricos utilizados no método de Newmark são  $\beta = 1/2$ ;  $\gamma = 1/4$ , para os quais o método é incondicionalmente estável, correspondendo ao método da aceleração constante. Para o método de Zhai foi utilizado  $\psi = \varphi = 1/2$ , para este valor podemos calcular que o passo de tempo crítico é,

$$\Delta t \leq \frac{2}{\omega} = 0,79 \text{ s} \quad (2.16)$$

Os resultados obtidos através do método de Newmark e do método de Zhai para o deslocamento  $u$ , são comparados nas figuras 4 a 6, com a solução exata obtida através do integral de Duhamel aplicado aos três troços da carga.

$$u(t) = \frac{1}{m\omega_n} \int_0^t F(\tau) e^{-\xi \omega_n t} \text{sen}(\omega_d(t - \tau)) \delta\tau; \quad (2.17)$$

Os gráficos apresentados foram executados com o auxílio de um programa de cálculo em Matlab. São apresentados de seguida os gráficos para os passos de tempo de 1,00s; 0,25s e 0,10s.

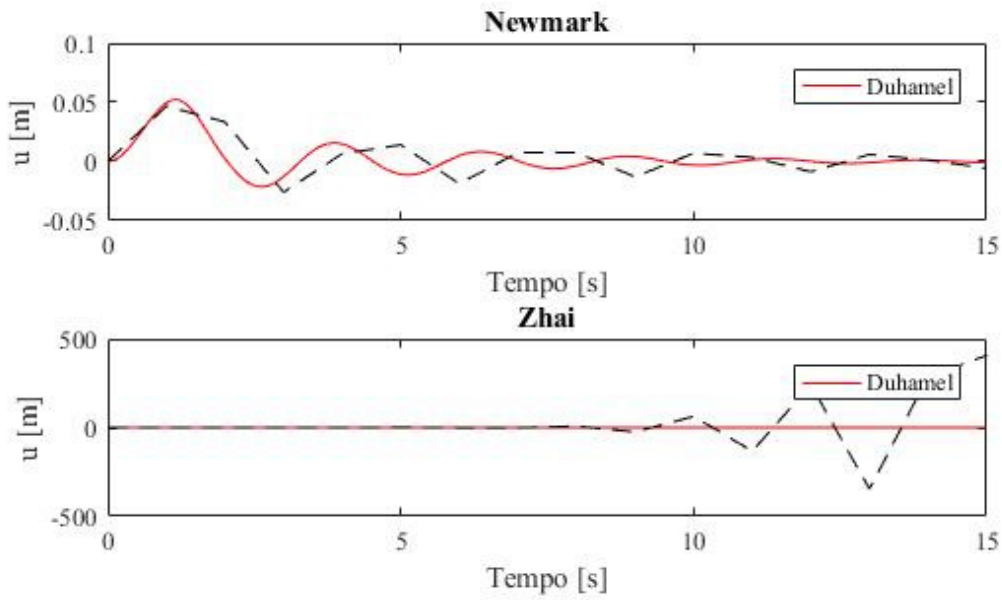


Figura 2. 4 Deslocamento  $u$  para um passo de tempo de 1 segundo

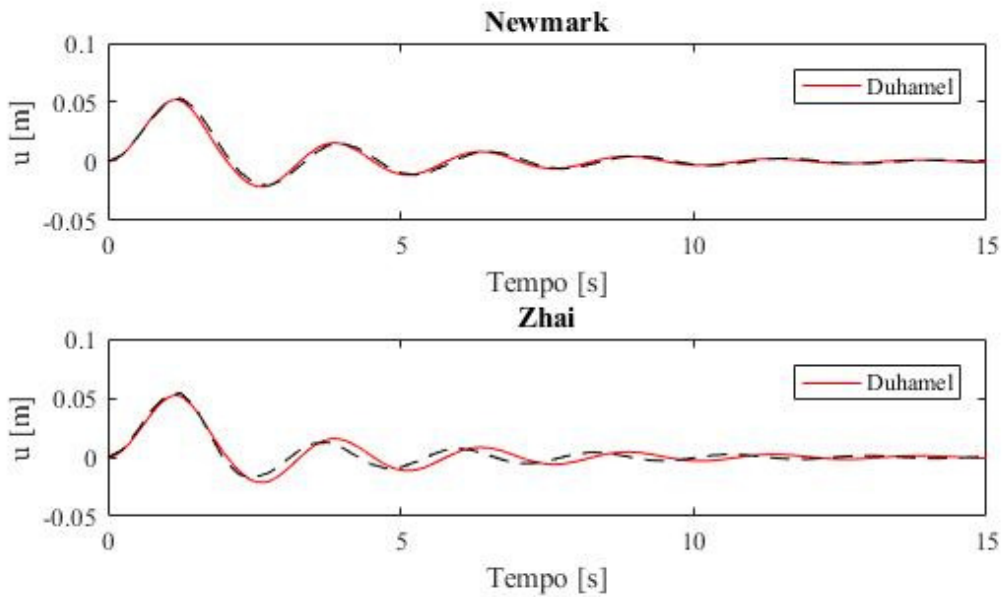


Figura 2. 5 Deslocamento  $u$  para um passo de tempo de 0.25 segundos

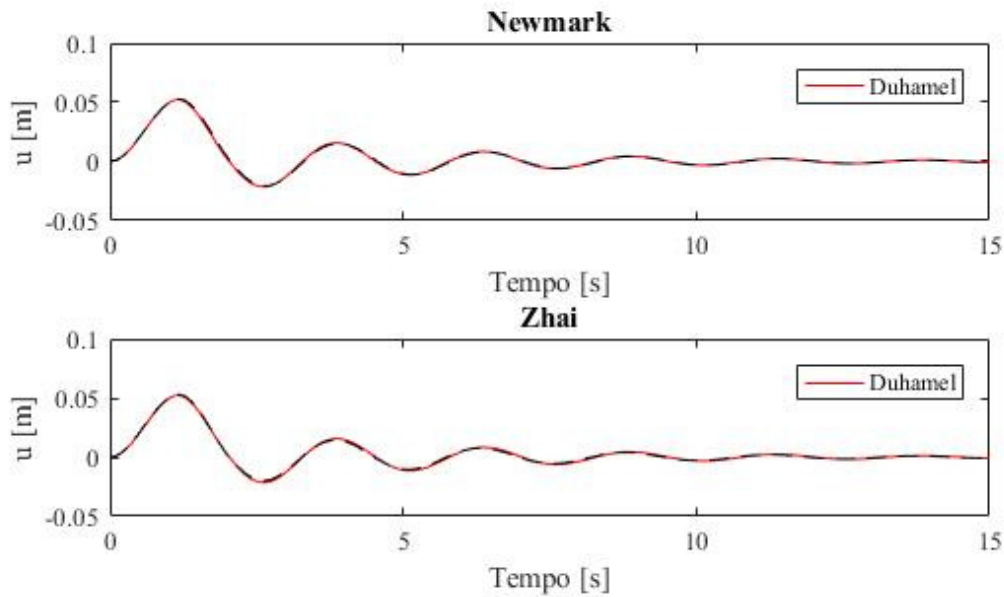


Figura 2. 6 Deslocamento  $u$  para um passo de tempo de 0.1 segundos

Podemos observar que com a diminuição do passo de tempo ambos os métodos convergem na solução exata. Para o passo de tempo de 1 segundo observa-se que o método de Zhai é instável e o método de Newmark apresenta resultados pouco exatos, no passo de tempo seguinte (0,25s), ambos os métodos apresentam resultados próximos da solução exata, e no passo de tempo de 0,1s ambos os métodos apresentam resultados precisos.

Esta observação ilustra o inconveniente principal de cada um dos métodos. O método de Newmark atinge estabilidade para passos de tempo de ordem superior aos do método de Zhai, mas os resultados não são precisos. O método de Zhai necessita de passos de tempo de ordem inferior para ser estável, o que neste caso o torna menos eficiente.

Para conseguirmos observar em mais pormenor a diferença de resultados entre os dois métodos é apresentado de seguida o erro quadrático médio. O erro quadrático médio foi calculado pela seguinte expressão:

$$Erro = |U_{Exato} - U_{Aproximado}| ; \quad (2.18)$$

$$EM = \frac{\sum_{i=1}^n Erro_i}{n} ; \quad (2.19)$$

$$EQM(\overline{Erro}) = E[(\overline{Erro} - \mu)^2] = \frac{\sigma^2}{n} ; \quad (2.20)$$

$$\sigma = \frac{\sum_{i=1}^n (Erro_i - \overline{Erro})^2}{n - 1} ; \quad (2.21)$$

Os erros quadráticos médios obtidos para cada passo-de-tempo considerado são apresentados na tabela 2.1:

$\Delta t$ (s)	EQM	
	Newmark	Zhai
1,00	2,58E-10	1,03E+16
0,25	2,31E-14	3,49E-13
0,10	1,07E-16	9,60E-17

*Tabela 2. 1 Erro quadrático médio*

Nos capítulos 4 e 5 será demonstrada a aplicação destes métodos a problemas mais complexos, em que o domínio espacial será discretizado com o método dos elementos finitos.

## Capítulo 3

# Pegasus 3D FEM– Apresentação do programa de calculo

### 3.1 Apresentação genérica do Pegasus

O Pegasus 3D FEM é um programa de simulação dinâmica de problemas de interação solo-estrutura, que foi desenvolvido por José Nuno Varandas no âmbito do seu trabalho de doutoramento [Varandas, 2013][Varandas,2016]. O programa está implementado no software Matlab. Neste subcapítulo serão descritos os aspetos gerais do programa de forma muito resumida.

O Pegasus 3D FEM realiza a discretização do espaço através do método de elementos finitos tradicionais. Esta abordagem de discretização divide o espaço em elementos mais pequenos que podem ter várias formas desde elementos de barra até elementos tridimensionais. Cada elemento tem vários nós, cujas componentes de deslocamento correspondem aos graus de liberdade do modelo. Muitos programas computacionais que existem atualmente usam este método devido à sua elevada eficiência na quantidade de recursos computacionais necessários e simplicidade de programação.

No programa Pegasus 3D FEM existem elementos finitos de barra com dois nós e elementos tridimensionais cúbicos com 8 nós. Nos nós dos elementos de barra consideram-se seis graus-de-liberdade, correspondentes à translação e rotação tridimensional do nó, e nos nós dos elementos sólidos apenas se consideram os três graus-de-liberdade de translação tridimensional. A formulação de elementos finitos em deslocamentos utiliza como funções de interpolação dos deslocamentos as funções polinomiais cúbicas de Hermite para elementos de barra, e funções polinomiais tri-lineares para os elementos sólidos 3D.

A construção da matriz de rigidez segue o processo de montagem standard do método dos elementos finitos convencionais, a matriz de massa é diagonal, admitindo-se que a massa esta concentrada nos nós do modelo. O amortecimento material é então definido através da expressão de Rayleigh, que pode ser descrita por

$$C = a_0 * M + a_1 * K \quad (3.1)$$

Em que C, M e K representam respetivamente as matrizes de amortecimento, massa e rigidez. Os parâmetros  $a_0$  e  $a_1$  são calculados pela expressão seguinte,

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \frac{2\zeta}{w_1 + w_2} \begin{bmatrix} w_1 w_2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

onde  $\zeta$  é o amortecimento escolhido para as frequências  $w_1$  e  $w_2$ .

Como condição de fronteira do problema o Pegasus permite introduzir amortecedores, molas ou nós livres. Os apoios fixos são simulados pela colocação de molas de muito elevada rigidez.

Em problemas que envolvem a representação de meios semi-infinitos, o modelo deve ser sempre o maior possível para se aproximar das características de rigidez de um caso real. No entanto, os resultados do modelo que têm interesse na maioria das análises encontram-se na proximidade do local onde a carga é aplicada. A colocação de molas na fronteira do modelo Pegasus 3D FEM visa assim reduzir ao máximo o volume de solo efetivamente modelado com elementos finitos, sendo esta abordagem particularmente adequada para representar estratos de solo existente em profundidade.

Os amortecedores são necessários, porque nenhum sistema computacional tem a capacidade para processar o sistema numérico com um tamanho necessário para dissipar a totalidade das ondas de deslocamento gerada. Por isso, as ondas de deslocamento irão inevitavelmente atingir a fronteira do modelo e ser refletidas continuamente, criando o efeito adicional que irá influenciar os resultados do efeito em estudo [Varandas, 2013]. O modelo de amortecedores utilizado pelo programa Pegasus foi proposto por [Lysmer and Kuhlemeyer, 1969].

Os aspetos referidos anteriormente resumem a forma como o programa trata a discretização do espaço físico do modelo, sendo no próximo subcapítulo apresentado esta discretização em mais pormenor para o caso de uma via férrea. Após termos o espaço físico bem definido o programa Pegasus utiliza os métodos de Zhai e/ou Newmark, para resolver a equação de equilíbrio dinâmico no tempo e calcular os deslocamentos do sistema. Ambos os métodos foram apresentados no capítulo anterior.

## 3.2 Aplicação do Pegasus 3D FEM a vias férreas

Da interação entre a via-férrea e o material circulante nasce o sistema ferroviário, sendo, portanto, de extrema importância garantir que todos os elementos presentes na via assegurem determinada função, proporcionando um bom funcionamento global e equilibrado para a passagem do tráfego.

Considera-se que a estrutura da via férrea consiste no conjunto de instalações e equipamentos que compõem a superestrutura e a subestrutura ferroviária. Os elementos que constituem a superestrutura são o denominado armamento de via, habitualmente constituído pelos carris, travessas, palmilhas, sistema de fixação carril - travessa e ainda pelos aparelhos de mudança de via. A Subestrutura da via férrea é constituída pelo balastro e pela fundação, podendo ainda contemplar outras camadas com o sub-balastro e o coroamento.

O principal motivo de se adotar esta divisão, entre subestrutura e superestrutura, prende-se com o facto de que tanto a via balastrada, como a via não balastrada (via em laje) apresentarem características semelhantes entre si [Paixão e Fortunato, 2009]. Esta forma de divisão também é utilizada pelo Pegasus. O programa modela a subestrutura com elementos finitos cúbicos, e superestrutura com elementos finitos de barra, fazendo a interação entre estes através de forças de contato como representa a Figura 3.1.

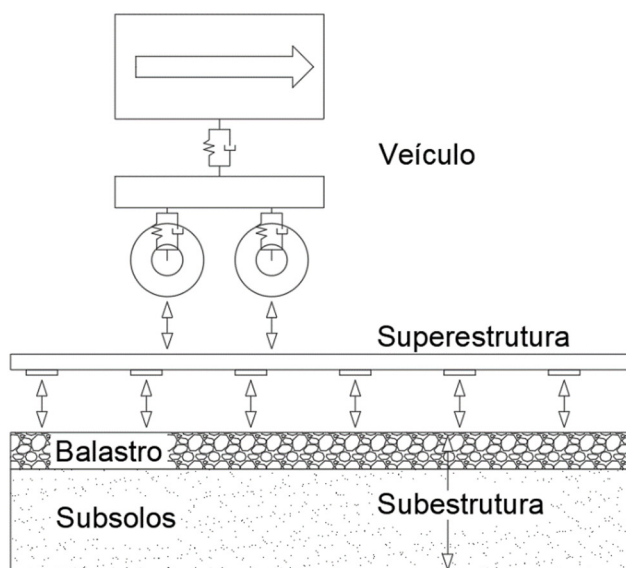


Figura 3. 1 Elementos que compõem o sistema ferroviário

Os carris são os elementos da via em aço que sustentam e guiam o material circulante no seu trajeto. Os carris têm a função de impor direção às rodas e distribuir as solicitações a que estão

sujeitos para os elementos subjacentes, neste caso as travessas, e conduzir energia elétrica, algo essencial para o funcionamento dos sistemas de sinalização e controlo da via (Fontul, 2015).

As travessas são elementos intermédios da via, situadas na direção transversal da via ligando os carris e a camada de balastro, normalmente com um espaçamento longitudinal de 60 cm, salvo algumas exceções. Estas têm como função distribuir cargas, suportar o sistema de fixação e impedir os movimentos dos carris preservando assim a sua inclinação e a bitola da via (Fortunato, 2005).

A subestrutura tem como principal função a estabilidade da via, suportando a superestrutura. Esta é composta pela fundação e integra ainda o sistema de drenagem, secções de terraplanagem, obras de arte e obras de contenção.

O balastro funciona como uma camada de apoio, que se localiza entre as travessas e a fundação, proporcionando um suporte flexível. O balastro representa a camada de pedra britada que é colocada sob as travessas, ocupando não só o espaço debaixo destas, mas também algum espaço após o termo da via.

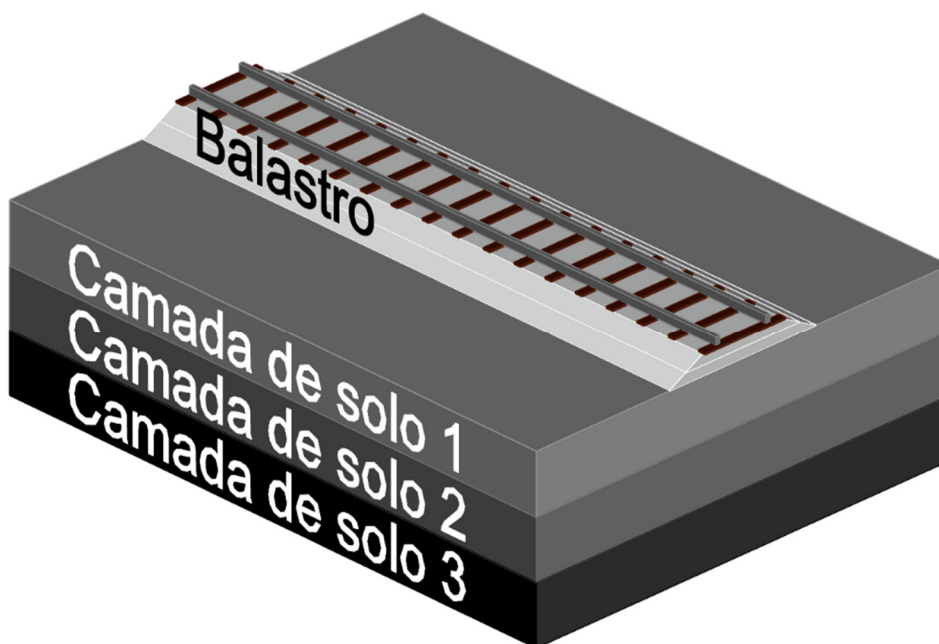
As principais funções desempenhadas pela camada de balastro são, nomeadamente: i) servir de apoio às travessas, mantendo a via no alinhamento correto; ii) promover a absorção de vibrações; iii) permitir o escoamento das águas da chuva que caem na via; iv) reduzir a tensão transmitida pelas travessas às camadas subjacentes e fazer essa transferência da forma mais uniforme possível.

A camada de sub-balastro presente sobre a fundação tem como função: reduzir as tensões impostas pelo material circulante para níveis aceitáveis na fundação. No entanto, a camada de sub-balastro tem outras funções específicas, como sejam: promover a separação entre o balastro e a fundação, evitando assim a interpenetração e a migração do material fino; funcionar como camada impermeabilizante, evitando que as águas que caem no balastro cheguem à fundação.

A fundação da via é frequentemente designada por plataforma. No entanto, de forma mais correta, deve distinguir-se duas zonas: a fundação, mais profunda e o leito de via, mais superficial, onde se apoiam as camadas de balastro e de sub-balastro.

A fundação da via prolonga-se em profundidade até onde se fazem sentir de forma significativa as solicitações do tráfego. Embora essa profundidade possa atingir sete a oito metros abaixo da base da travessa (Li e Selig, 1995), é normal haver uma preocupação especial com as características dos terrenos até profundidades da ordem de 1 a 2 m abaixo da base da travessa [Fortunato, 2005].

Para simular as diferentes características possíveis de existir no subsolo o Pegasus permite introduzir várias camadas de solo com características diferentes, como pode ser observado na figura 3.2.



*Figura 3. 2 Vista 3D do modelo típico de via férrea criado com o Pegasus 3D FEM*

O processo de cálculo do Pegasus decorre em 6 fases, a primeira com a criação da malha de elementos finitos do sistema, a segunda fase é a atribuição das características dos materiais ao modelo e introdução das condições fronteira, a terceira, quarta e quinta fases são respetivamente i) a aplicação do peso da sub-estrutura; ii) aplicação do peso da superestrutura ao modelo; iii) aplicação do peso do comboio no início da via. A fase seguinte só se inicia quando as vibrações devido à aplicação do peso na fase anterior tiverem estabilizado, correspondendo à passagem do comboio, sendo que nesta o comboio acelera rapidamente até à velocidade pretendida e desloca-se nessa velocidade até ao final do modelo.



## Capitulo 4

# Aplicação do método de Zhai a um Solido 3D

### 4.1 Passo de Tempo Critico

Como vimos no subcapítulo 2.4 o método de Zhai não é incondicionalmente estável, logo precisamos de um passo de tempo suficientemente pequeno para conseguirmos obter resultados. Para os valores utilizados pelo Pegasus ( $\psi = \varphi = 1/2$ ), o método propõe um passo de tempo máximo que pode ser obtido pela seguinte expressão,

$$\Delta t \leq \frac{2}{\omega} \quad (4.1)$$

Onde  $\omega$  é a maior frequência natural do sistema em radianos por segundo. A expressão pode ser escrita de forma equivalente em função do menor período fundamental (T), da seguinte forma,

$$\Delta t \leq \frac{T}{\pi} \quad (4.2)$$

O período de um elemento é diretamente proporcional ao comprimento do elemento (L) e inversamente proporcional à velocidade de propagação de ondas ( $v_p$ ), o que nos permite dizer que o período próprio é igual a,

$$T = c \cdot \frac{L}{v_p} \quad (4.3)$$

A velocidade de propagação depende do tipo de elemento. Para elementos cúbicos, pode ser calculada pela seguinte expressão, onde  $M_{oed}$  é o modulo edométrico.

$$v_p = \sqrt{\frac{M_{oed}}{\rho}} ; M_{oed} = \frac{E \cdot (1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (4.4)$$

Juntando agora as duas equações anteriores (4.2) e (4.3) obtem-se:

$$\Delta t \leq \frac{c}{\pi} \frac{L}{v_p} \quad (4.5)$$

onde  $c$  é uma constante que depende das características do sistema. Sabe-se considerando oscilações axiais num elemento contínuo (problema 1D) que o valor de  $c = 2$  para barras com ambas as extremidades encastradas e  $c = 4$  para barras com uma extremidade livre e a outra bloqueada. (Sebenta de dinâmica de estruturas, Prof. Luís Guerreiro IST)

Nos próximos subcapítulos são apresentados ensaios para analisar como cada fator influencia o passo de tempo. Segundo a fórmula proposta por Zhai o passo tempo é influenciado pela velocidade de propagação das ondas e pelo comprimento dos elementos da malha dos elementos finitos. Para além destes serão testados também amortecimento e as condições de fronteira.

Os ensaios numéricos estão organizados da seguinte forma: primeiro são apresentados os ensaios para avaliar a influência das propriedades dos materiais (módulo de elasticidade e massa volumica) e tamanho dos elementos da malha de elementos finitos. Estes ensaios estão feitos para três casos de condições de fronteira, que são fronteiras livres, fronteira na base e fronteiras absorventes, estando cada um destes conjuntos apresentado em um subcapítulo próprio. Após estes três subcapítulos, é estudado a influência do amortecimento material no quarto subcapítulo. No final é feito um estudo sobre a estabilidade do método e por último, por uma questão de conveniência para o leitor, os resumos dos resultados estão agrupados no sexto subcapítulo.

Todos os ensaios numéricos foram feitos num modelo fictício de solo como uma geometria prismática com uma área de 5 metros por 5 metros e uma profundidade de 2,5m. A solicitação feita ao solo é uma pressão de 100 kPa aplicada à superfície na direção descendente, na zona central do modelo numa área de 0,2 por 0,2 metros. O coeficiente de Poisson utilizado em todos os ensaios é de 0,2.

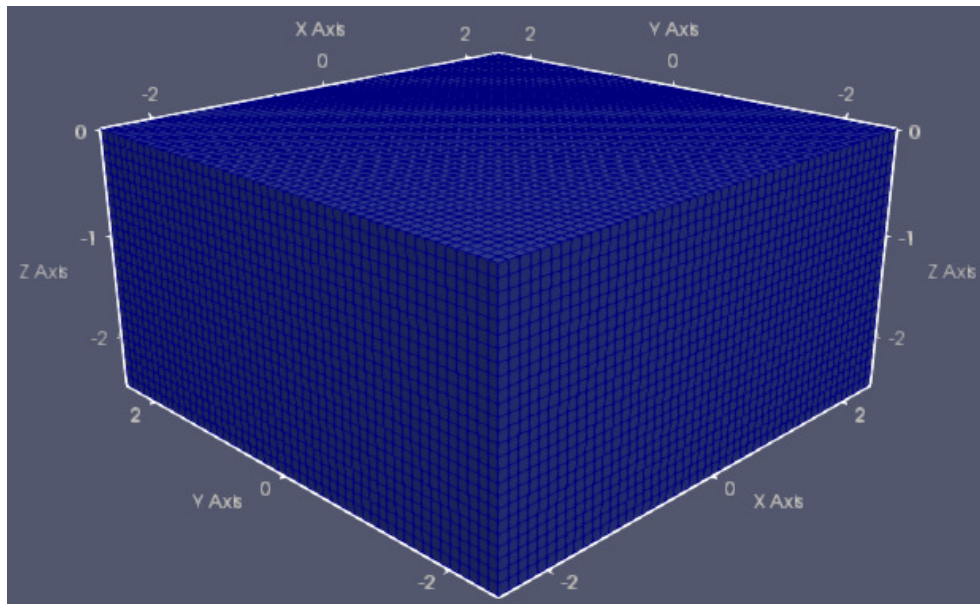


Figura 4. 1 Representação geométrica do modelo

## 4.2 Fronteiras Livres

Estas condições de fronteira correspondem a um modelo de solo livre no espaço, sem quaisquer restrições nas fronteiras. A resposta em deslocamentos do sistema caracteriza-se por uma componente de corpo rígido, regulada pela equação  $F = m a$ , em que  $F$  corresponde à força constante aplicada à superfície do corpo, e por uma componente de deformação local devida à aplicação da pressão superficial. Não foram consideradas cargas gravíticas.

A figura seguinte resume as características geométricas e as condições de fronteira do modelo.

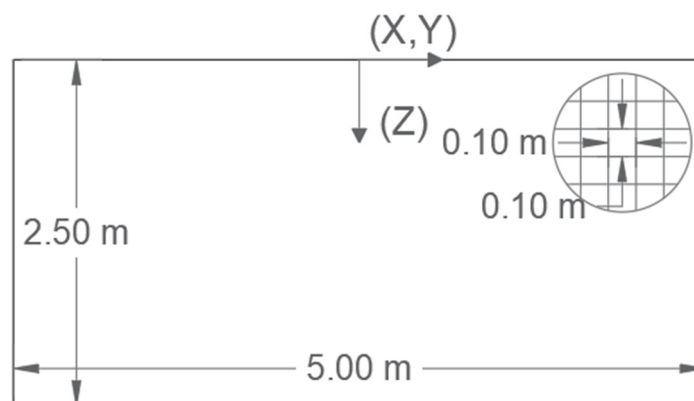


Figura 4. 2 Características geométricas e condições de fronteira para o modelo de fronteiras livres

#### 4.2.1 Estudo da influência da variação das propriedades dos materiais no passo de tempo, com condições de fronteira livres

Este estudo será feito em três fases, na primeira irá ser realizada a variação do módulo de elasticidade ( $E$ ) e da massa volúmica ( $\rho$ ) de forma a que velocidade de propagação das ondas ( $v_p$ ) se mantenha constante.

Na segunda fase foi feita a variação do módulo de elasticidade com uma massa volúmica constante de forma a fazer variar a velocidade de propagação das ondas.

Por último, para clarificação dos resultados das fases anteriores é feito variar a massa volúmica mantendo o módulo de elasticidade constante de forma a obter as mesmas velocidades de propagação, obtidas no ensaio da fase 2.

Os valores de modo de elasticidade e massa volúmica utilizados em cada ensaio podem ser observados na seguinte tabela, bem como os passos de tempo máximos obtidos no programa Pegasus para os quais as respostas não tendem para infinito e o tempo que o Pegasus demorou a executar o cálculo. O valor de  $c$  foi calculado pela expressão 4.5, tendo sido o valor do  $\Delta t$  obtido por um processo de tentativa e erro no programa Pegasus (o  $\Delta t$  corresponde ao maior passo-de-tempo que não provoca a instabilidade da solução). Os respetivos valores do deslocamento para o ponto (0,0,0) podem ser observados nas Figuras 4.3, 4.4 e 4.5.

Caso	Características					Resultados Pegasus		tempo de calculo (s)
	Le (m)	Amort.(%)	E (MPa)	$\rho$ (ton/m <sup>3</sup> )	$v_p$	dt max (s)	c	
1			150	2,00		3,33E-04	3,023	9,9
2			250	3,33		3,33E-04	3,023	9,8
3	0,1	0,00%	500	6,67	288,68	3,33E-04	3,023	10,0
4			750	10,00		3,33E-04	3,023	9,8
5			1000	13,33		3,33E-04	3,023	9,8

Tabela 4. 1 Parâmetros do modelo durante o ensaio de velocidade de propagação constante para o modelo de fronteiras livres

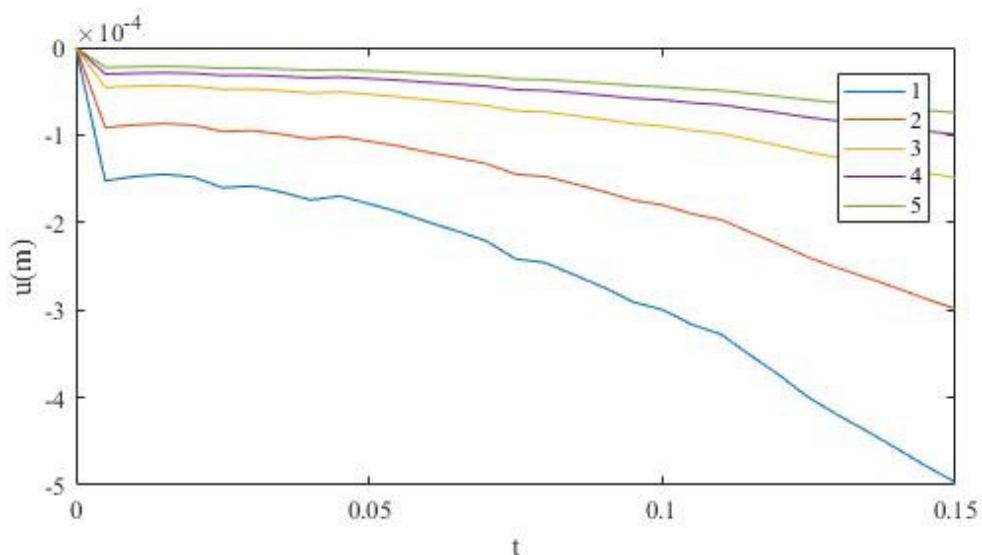


Figura 4. 3 Deslocamento do ponto (0,0,0) durante o ensaio de velocidade de propagação constante para o modelo de fronteiras livres

Caso	Características					Resultados Pegasus		tempo de calculo (s)
	Le (m)	Amortec.	E (MPa)	$\rho$ (ton/m <sup>3</sup> )	vp	dt max (s)	c	
1			150		288,68	3,33E-04	3,023	9,9
6			250		372,68	2,63E-04	3,081	13,2
7	0,1	0,00%	500	2,00	527,05	1,85E-04	3,066	17,9
8			750		645,50	1,52E-04	3,073	20,7
9			1000		745,36	1,32E-04	3,081	24,6

Tabela 4. 2 Parâmetros do modelo durante o ensaio de variação do módulo de elasticidade com condições de fronteiras livres.

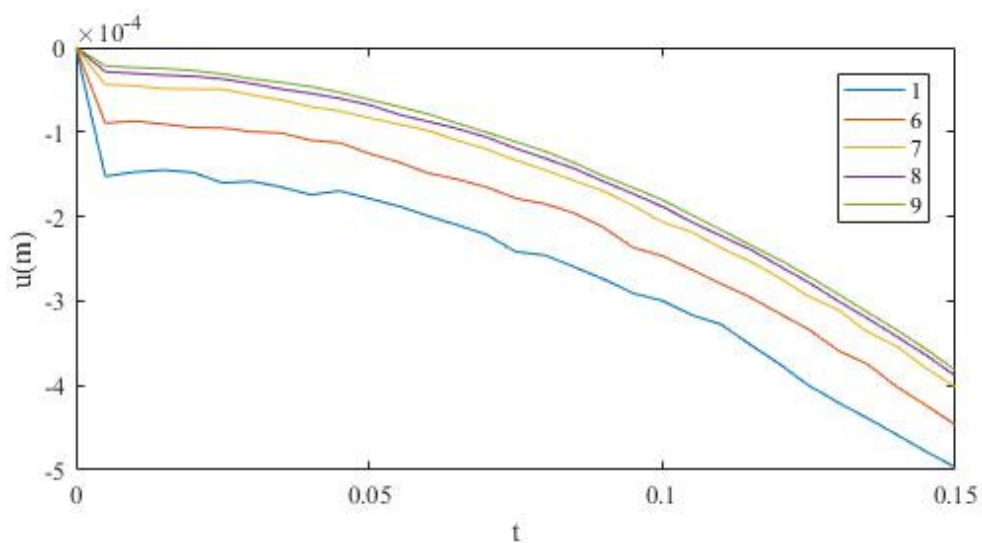


Figura 4. 4 Deslocamento do ponto (0,0,0) durante o ensaio de variação do módulo de elasticidade com condições de fronteiras livres.

Caso	Características					Resultados Pegasus		tempo de calculo (s)
	Le (m)	Amortec.	E (MPa)	$\rho$ (ton/m <sup>3</sup> )	vp	dt max (s)	c	
1				2,00	288,68	3,33E-04	3,023	9,9
10				1,20	372,68	2,50E-04	2,927	12,5
11	0,1	0,00%	150	0,60	527,05	1,85E-04	3,066	17,3
12				0,40	645,50	1,52E-04	3,073	21,2
13				0,30	745,36	1,32E-04	3,081	25,1

Tabela 4. 3 Parâmetros do modelo durante o ensaio de variação da massa volúmica com condições de fronteiras livres.

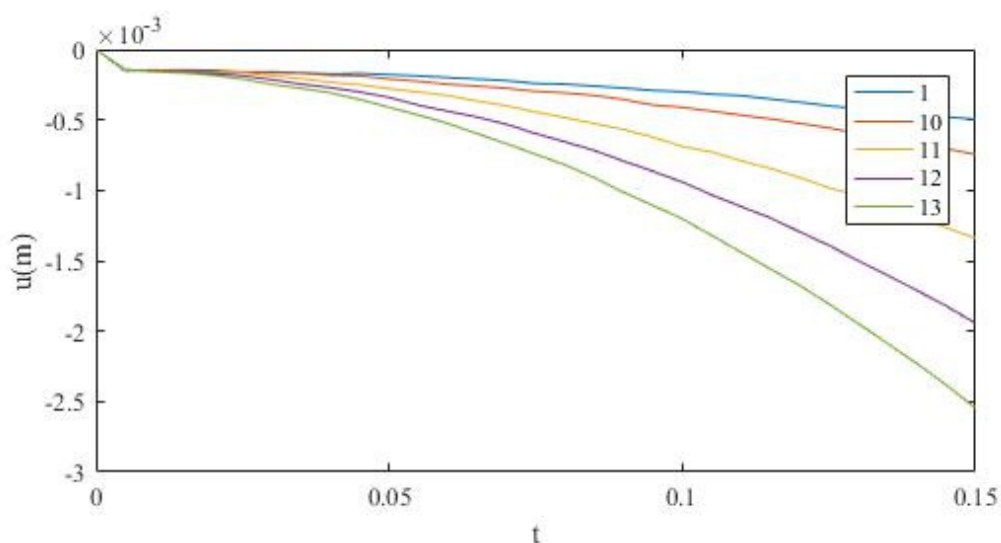


Figura 4. 5 Deslocamento do ponto (0,0,0) durante o ensaio de variação da massa volúmica com condições de fronteiras livres.

Nas tabelas podemos observar que o fator  $c$  se mantém aproximadamente constante em todos os ensaios, evidenciando que o passo de tempo é efetivamente proporcional à velocidade de propagação e não depende do módulo de elasticidade ou da massa volúmica do material por si só.

O valor obtido para  $c$  que é aproximadamente 3, o que pode parecer contraintuitivo visto que o modelo está livre no espaço, e o valor de  $c$  para uma barra encastrada-encastrada e encastrado-livre é respectivamente 2 e 4 como apresentado no subcapítulo anterior. A explicação é que o método numérico é influenciado por cada elemento finito, e estes encontram-se rodeados por outros elementos finitos que conferem restrições.

#### 4.2.2 Estudo da influência do tamanho dos elementos no passo de tempo

Neste subcapítulo vai ser estudado a influência do tamanho dos elementos da malha de elementos finitos para as condições de fronteiras livres.

Os valores de modulo de elasticidade, massa volúmica, amortecimento e tamanho dos elementos utilizados podem ser observados na seguinte tabela, bem como os passos de tempo máximos obtidos e o tempo que o Pegasus demorou a executar o cálculo.

Caso	Características					Resultados Pegasus		tempo de calculo (s)
	Le (m)	Amortec.	E (MPa)	$\rho$ (ton/m <sup>3</sup> )	vp	dt max (s)	c	
14	0,05	0,00%	150	2,00	288,68	1,72E-04	3,127	153,9
1	0,10					3,33E-04		9,9

Tabela 4. 4 Parâmetros do modelo durante o ensaio de variação do espaçamento da malha de elementos finitos com condições de fronteira livre.

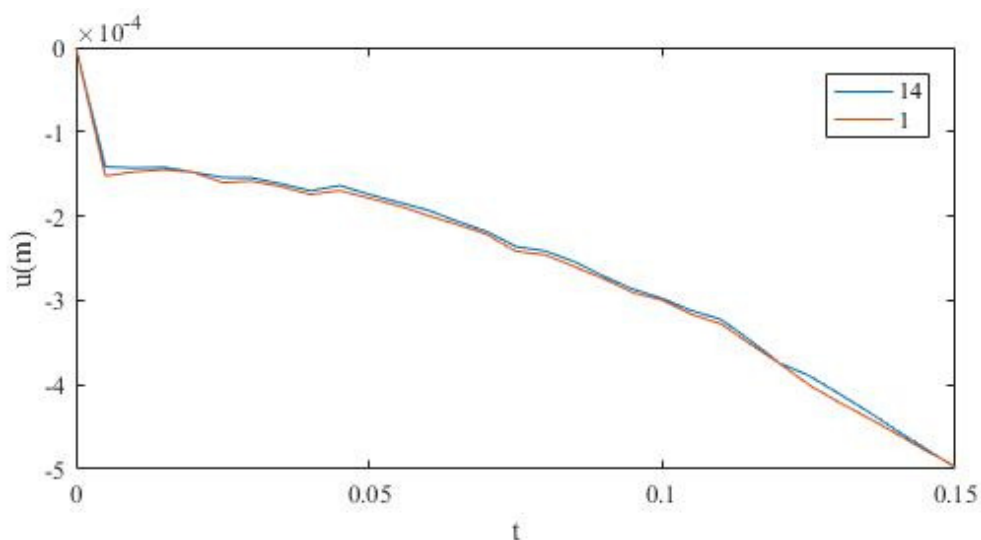


Figura 4. 6 Deslocamento do ponto (0,0,0) durante o ensaio de variação do espaçamento da malha de elementos finitos com condições de fronteira livre.

Constata-se que o fator  $c$  se mantém mais ou menos constante, evidenciando novamente a proporcionalidade entre o passo de tempo crítico e o tamanho dos elementos finitos, como indica a equação. Constata-se também que o tamanho dos elementos finitos utilizados não influencia consideravelmente o deslocamento.

### 4.3 Fronteira na base

Estas condições de fronteira correspondem a um modelo com fronteira restringida na base do modelo, e livre nas faces laterais e superior.

Foram estudados três casos de condições de fronteira na base: o primeiro foi o encastramento da base, o segundo o bloqueio apenas na direção z na base e o terceiro a colocação de molas e amortecedores, de forma a simular um estrato adicional de solo subjacente ao modelo.

O encastramento da base é obtido através da introdução de molas muito rígidas que provocam que o valor dos deslocamentos dos nós da base seja de uma ordem de grandeza muito inferior ao dos restantes nós do modelo. Apesar de não ser um encastramento perfeito, considera-se que os resultados são satisfatórios. O valor de rigidez da mola em cada nó é atualmente obtido multiplicando o valor  $5 \times 10^6 \text{ kN/m}^3$  pela área de influencia de cada nó. Para o primeiro caso estas molas são aplicadas nas três direções e para o segundo são somente aplicadas na direção Z.

No caso das fronteiras absorventes as características das molas e dos amortecedores introduzidos nos nós da base são calculadas com base nas características do material do solo que representam. O objetivo é simular uma rigidez e amortecimento equivalentes ao caso de solo em ensaio estar apoiado noutra camada de solo. O Pegasus permite escolher a espessura h da camada de solo que é simulada com molas e amortecedores. O Pegasus calcula a rigidez e amortecimento de cada direção da seguinte forma:

A rigidez segundo a direção Z é calculada com base no modulo edométrico ( $M_{edo}$ ) e rigidez de corte do solo (G):

$$K_{edo} = \frac{E}{3(1-2\nu)} ; G = \frac{E}{2(1+\nu)} ; M_{oed} = K_{edo} + \frac{4}{3} G ; \quad (4.6)$$

$$K_Z = \frac{M_{oed}}{h} \quad (4.7)$$

A rigidez segundo a direção X e Y é calculada com base na rigidez de corte do solo (G):

$$K_{X;Y} = \frac{G}{h} \quad (4.8)$$

O amortecimento segundo a direção Z é calculado multiplicando a massa volúmica pela velocidade propagação das ondas P: [Kramer 1996]

$$C_Z = \rho \cdot v_p \quad (4.9)$$

O amortecimento segundo as direções X e Y é calculado multiplicando a massa volúmica pela velocidade propagação das ondas S:

$$C_{X;Y} = \rho \cdot v_s \quad (4.10)$$

### 4.3.1 Estudo da influência da variação das propriedades dos materiais no passo de tempo, com encastramento da base

Este subcapítulo contém os resultados do estudo da influência da variação das propriedades do material no passo de tempo, com colocação de molas rígidas na base de forma a bloquear os três graus de liberdade de deslocamentos. O objetivo é simular um encastramento. A rigidez da mola utilizada é  $5 \times 10^6 \text{ kN/m}^3$ .

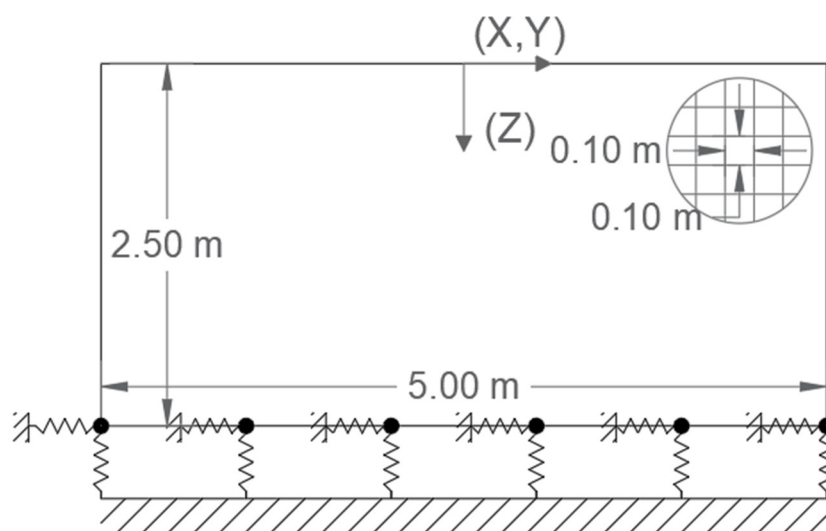


Tabela 4. 5 Características geométricas e condições de fronteira para o modelo com encastramento da base.

De forma a estes ensaios serem comparáveis com capítulos anteriores e seguintes, estes ensaios estão feitos com o mesmo procedimento utilizado no ponto 4.2.1.

Os valores de módulo de elasticidade e massa volúmica utilizados em cada ensaio podem ser observados na seguinte tabela, bem como os passos de tempo máximos obtidos e o tempo que o Pegasus demorou a executar o cálculo e os respetivos valores do deslocamento para o ponto (0,0,0) podem ser observados nas Figuras 4.7, 4.8 e 4.9. Nestas Figuras observa-se que o valor do deslocamento máximo é controlado pela rigidez do modelo em termos do módulo de elasticidade do material, e que a massa volúmica não tem influência neste valor. Recordar-se que o carregamento corresponde a uma pressão superficial constante, e que não foram consideradas as cargas gravíticas.

Caso	Características					Resultados Pegasus		tempo de calculo (s)
	Le (m)	Amort.(%)	E (MPa)	$\rho$ (ton/m <sup>3</sup> )	vp	dt max (s)	c	
15	0,1	0,00%	150	2,00	288,68	2,27E-04	2,061	15,4
16			250	3,33		2,63E-04	2,387	13,8
17			500	6,67		2,94E-04	2,667	12,5
18			750	10,00		3,13E-04	2,834	11,5
19			1000	13,33		3,13E-04	2,834	11,0

Tabela 4. 6 Tabela de parâmetros do modelo durante o ensaio de velocidade de propagação constante com encastramento da base.

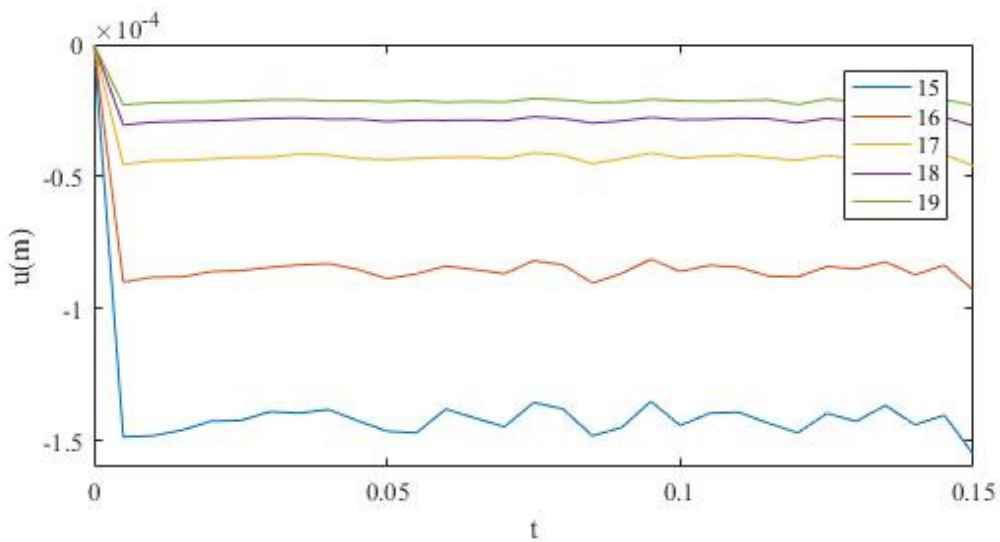


Figura 4. 7 Deslocamento do ponto (0,0,0) durante o ensaio de velocidade de propagação constante com encastramento da base.

Caso	Características					Resultados Pegasus		tempo de calculo
	Le (m)	Amortec.	E (MPa)	$\rho$ (ton/m <sup>3</sup> )	vp	dt max (s)	c	
15	0,1	0,00%	150	2,00	288,68	2,27E-04	2,061	15,4
20			250		372,68	2,00E-04	2,342	17,8
21			500		527,05	1,61E-04	2,671	23,2
22			750		645,50	1,39E-04	2,817	24,5
23			1000		745,36	1,25E-04	2,927	27,7

Tabela 4. 7 Parâmetros do modelo durante o ensaio de variação do módulo de elasticidade com encastramento da base

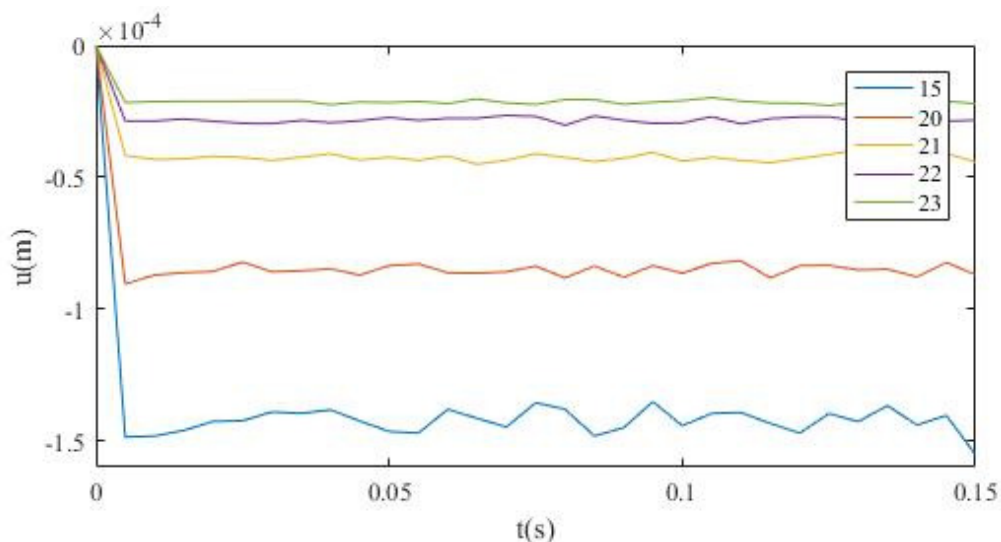


Figura 4. 8 Deslocamento do ponto (0,0,0) durante o ensaio de variação do módulo de elasticidade com encastramento da base.

Caso	Características					Resultados Pegasus		tempo de calculo
	Le (m)	Amortec.	E (MPa)	$\rho$ (ton/m <sup>3</sup> )	vp	dt max (s)	c	
15				2,00	288,68	2,27E-04	2,061	15,4
24				1,20	372,68	1,72E-04	2,019	20,2
25	0,1	0,00%	150	0,60	527,05	1,25E-04	2,070	27,2
26				0,40	645,50	1,02E-04	2,069	33,8
27				0,30	745,36	8,77E-05	2,054	37,0

Tabela 4. 8 Parâmetros do modelo durante o ensaio de variação da massa volúmica com encastramento da base.

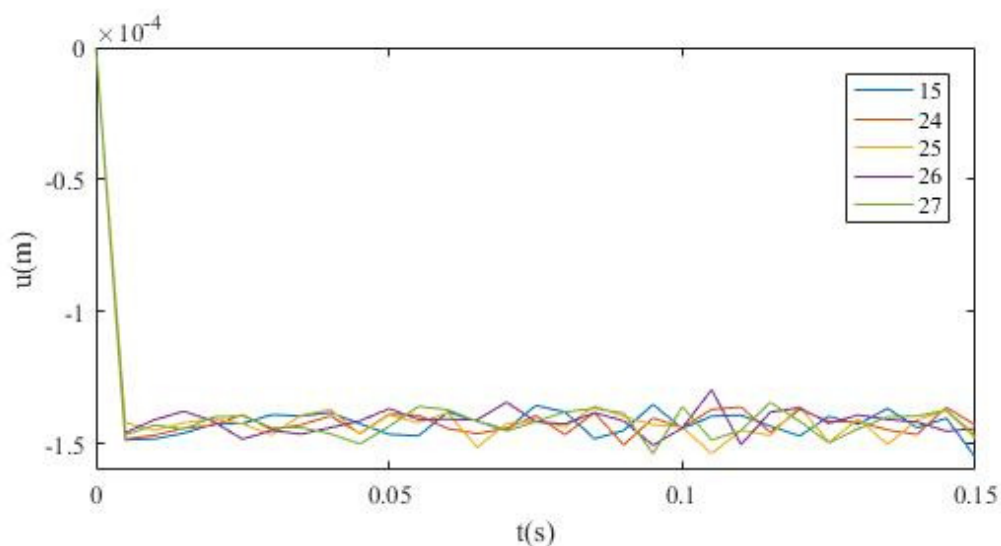


Figura 4. 9 Deslocamento do ponto (0,0,0) durante o ensaio de variação da massa volúmica com encastramento da base.

Pela observação dos valores obtidos para c constatamos que este está a ser influenciado pela condição de fronteira imposta na base e também pelo módulo de elasticidade do material. Esta

dependência acontece porque as molas colocadas na base induzem uma frequência própria associada à vibração dos nós da base que para os módulos de elasticidade mais baixos, como por exemplo o utilizado no ensaio 15, é mais condicionante do que a frequência própria do material sem estas molas adicionais.

Esta frequência introduzida pelas molas e o respetivo passos de tempo crítico pode ser calculada através da rigidez e massa local em cada nó.

$$K_{Local} = K \cdot A = 5 \times 10^6 \cdot 0,1^2 = 5 \times 10^4 \text{ kN/m}; \quad (4.11)$$

$$M_{Local} = 4 \cdot \frac{V}{8} \cdot \rho = 4 \cdot \frac{0,1^3}{8} \cdot 2 = 0,001 \text{ ton}; \quad (4.12)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{K_{Local}}{M_{Local}}} = 7,07 \times 10^3 \text{ rad/s}; \quad \Delta t \leq \frac{2}{\omega} = 2,8 \times 10^{-4} \text{ s}; \quad (4.13)$$

Este passo de tempo crítico é coerente com os resultados obtidos. À medida que se aumenta o módulo de elasticidade, aumentamos a rigidez própria do sistema e diminuimos a influência das molas introduzidas na base, obtendo valores de  $c$  cada vez mais próximos de 3.

#### 4.3.2 Estudo da influência da variação das propriedades dos materiais no passo de tempo, com molas rígidas na direção Z

Este subcapítulo contém os resultados do estudo da influência da variação das propriedades dos materiais no passo de tempo, com molas rígidas na direção Z. A rigidez da mola utilizada é  $5 \times 10^6 \text{ kN/m}^3$ , esta condição de apoio será designada de apoio simples da base.

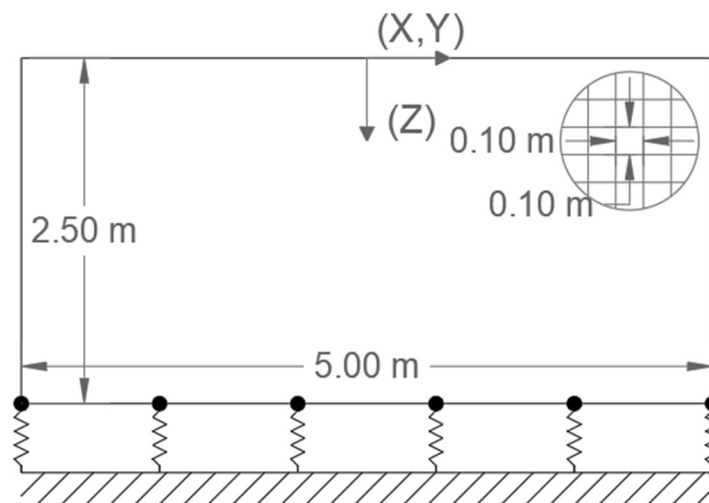


Figura 4. 10 Características geométricas e condições de fronteira para o modelo com apoio simples da base

Tal como no subcapítulo anterior os ensaios foram feitos com o mesmo procedimento utilizado no ponto 4.2.1.

Os valores de modo de elasticidade e massa volúmica utilizados em cada ensaio podem ser observados na seguinte tabela, bem como os passos de tempo máximos obtidos e o tempo que o Pegasus demorou a executar o cálculo. Os valores do deslocamento para o ponto (0,0,0) foram muito semelhantes aos obtidos nas Figuras 4.7, 4.8 e 4.9.

Caso	Características					Resultados Pegasus		tempo de calculo (s)
	Le (m)	Amort.(%)	E (MPa)	$\rho$ (ton/m <sup>3</sup> )	vp	dt max (s)	c	
28	0,1	0,00%	150	2,00	288,68	2,38E-04	2,159	14,0
29			250	3,33		2,78E-04	2,519	12,4
30			500	6,67		3,13E-04	2,834	10,5
31			750	10,00		3,13E-04	2,834	10,9
32			1000	13,33		3,33E-04	3,023	10,1

Tabela 4. 9 Parâmetros do modelo durante o ensaio de velocidade de propagação constante com apoio simples

Caso	Características					Resultados Pegasus		tempo de calculo
	Le (m)	Amortec.	E (MPa)	$\rho$ (ton/m <sup>3</sup> )	vp	dt max (s)	c	
28	0,1	0,00%	150	2,00	288,68	2,38E-04	2,159	14,0
33			250		372,68	2,08E-04	2,439	15,8
34			500		527,05	1,72E-04	2,855	18,5
35			750		645,50	1,47E-04	2,982	21,2
36			1000		745,36	1,28E-04	3,002	25,0

Tabela 4. 10 Parâmetros do modelo durante o ensaio de variação do módulo de elasticidade com apoio simples.

Caso	Características					Resultados Pegasus		tempo de calculo
	Le (m)	Amortec.	E (MPa)	$\rho$ (ton/m <sup>3</sup> )	vp	dt max (s)	c	
28	0,1	0,00%	150	2,00	288,68	2,38E-04	2,159	14,0
37				1,20	372,68	1,85E-04	2,168	17,2
38				0,60	527,05	1,28E-04	2,123	24,4
39				0,40	645,50	1,06E-04	2,157	29,0
40				0,30	745,36	9,26E-05	2,168	34,2

Tabela 4. 11 parâmetros do modelo durante o ensaio de variação da massa volúmica com apoio simples

Neste ensaio tal como esperado foram obtidos resultados próximos aos do subcapítulo anterior onde tínhamos o “encastramento da base”. As condições de apoio de ambos os ensaios são muito idênticas não se revelando nenhum efeito adicional, devido à libertação de dois graus de liberdade em cada nó da base do modelo.

### 4.3.3 Estudo da influência da variação das propriedades dos materiais no passo de tempo, com molas e amortecedores na base

Este subcapítulo contém os resultados do estudo da influência da variação das propriedades dos materiais no passo de tempo, com molas e amortecedores na base, a espessura de camada fictícia simulada pelas molas é de cinco metros.

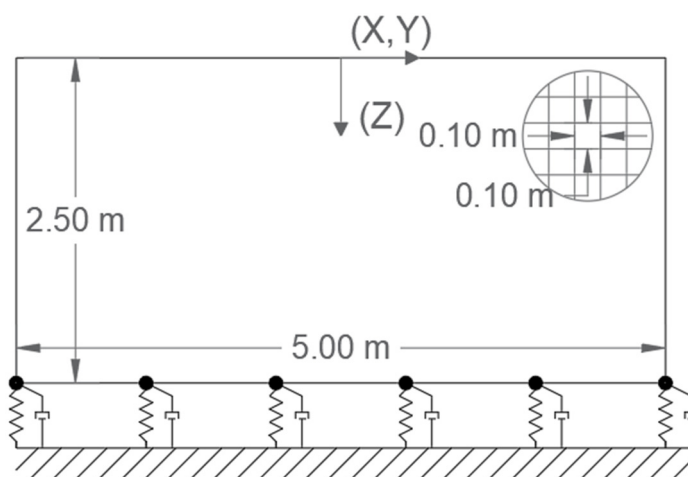


Figura 4. 11 Características geométricas e condições de fronteira para o modelo com fronteiras absorventes na base

Os procedimentos utilizados neste subcapítulo são iguais aos usados no ponto 4.2.1.

Os valores de módulo de elasticidade e massa volúmica utilizados em cada ensaio podem ser observados na seguinte tabela, bem como os passos de tempo máximos obtidos no programa Pegasus para os quais as respostas não tendem para infinito e o tempo que o Pegasus demorou a executar o cálculo. O valor de  $c$  foi calculado pela expressão 4.5. Os respectivos valores do deslocamento para ponto  $(0,0,0)$  podem ser observados nos gráficos 4.12, 4.13 e 4.14.

Caso	Características					Resultados Pegasus		tempo de cálculo (s)
	Le (m)	Amort.(%)	E (MPa)	$\rho$ (ton/m <sup>3</sup> )	vp	dt max (s)	c	
41	0,1	0,00%	150	2,00	288,68	1,56E-04	1,417	20,6
42			250	3,33		1,56E-04	1,417	20,8
43			500	6,67		1,56E-04	1,417	20,8
44			750	10,00		1,56E-04	1,417	20,2
45			1000	13,33		1,56E-04	1,417	20,6

Tabela 4. 12 Parâmetros do modelo durante o ensaio de velocidade de propagação constante com molas e amortecedores na base

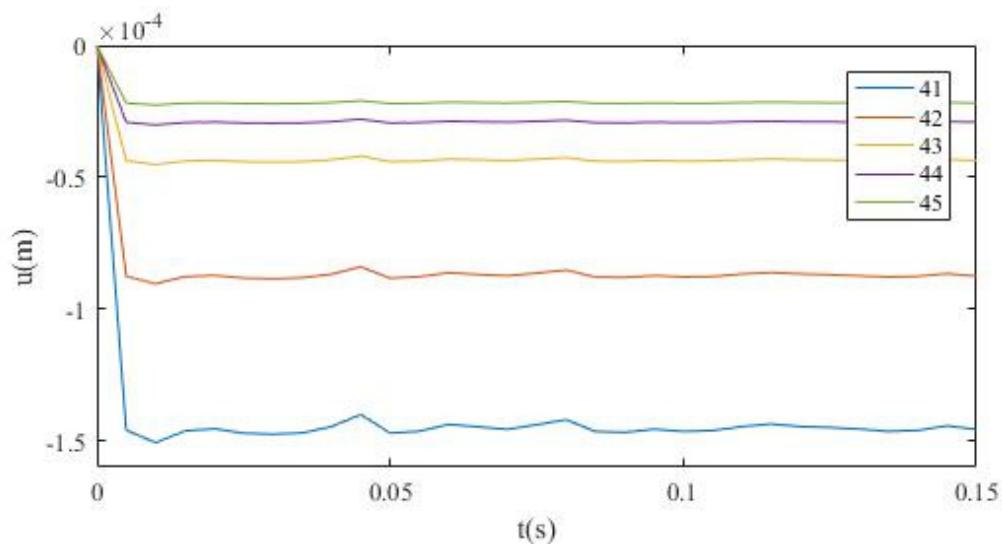


Figura 4. 12 Deslocamento do ponto (0,0,0) durante o ensaio de velocidade de propagação constante com molas e amortecedores na base

Caso	Características					Resultados Pegasus		tempo de calculo
	Le (m)	Amortec.	E (MPa)	$\rho$ (ton/m <sup>3</sup> )	vp	dt max (s)	c	
41			150		288,68	1,56E-04	1,417	20,6
46			250		372,68	1,22E-04	1,428	26,7
47	0,1	0,00%	500	2,00	527,05	8,47E-05	1,403	37,8
48			750		645,50	6,94E-05	1,408	44,9
49			1000		745,36	6,02E-05	1,411	54,4

Tabela 4. 13 Parâmetros do modelo durante o ensaio de variação do módulo de elasticidade com molas e amortecedores na base

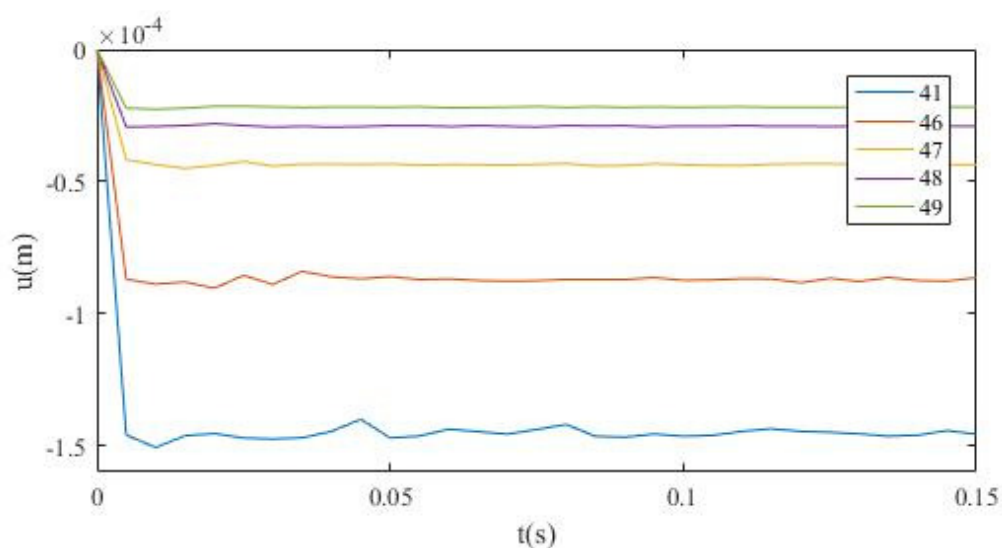


Figura 4. 13 Deslocamento do ponto (0,0,0) durante o ensaio de variação do módulo de elasticidade com molas e amortecedores na base

Caso	Características					Resultados Pegasus		tempo de calculo
	Le (m)	Amortec.	E (MPa)	$\rho$ (ton/m <sup>3</sup> )	vp	dt max (s)	c	
41				2,00	288,68	1,56E-04	1,417	20,6
50				1,20	372,68	1,22E-04	1,428	26,0
51	0,1	0,00%	150	0,60	527,05	8,47E-05	1,403	39,0
52				0,40	645,50	6,94E-05	1,408	75,6
53				0,30	745,36	6,02E-05	1,411	54,4

Tabela 4. 14 Parâmetros do modelo durante o ensaio de variação da massa volúmica com molas e amortecedores na base

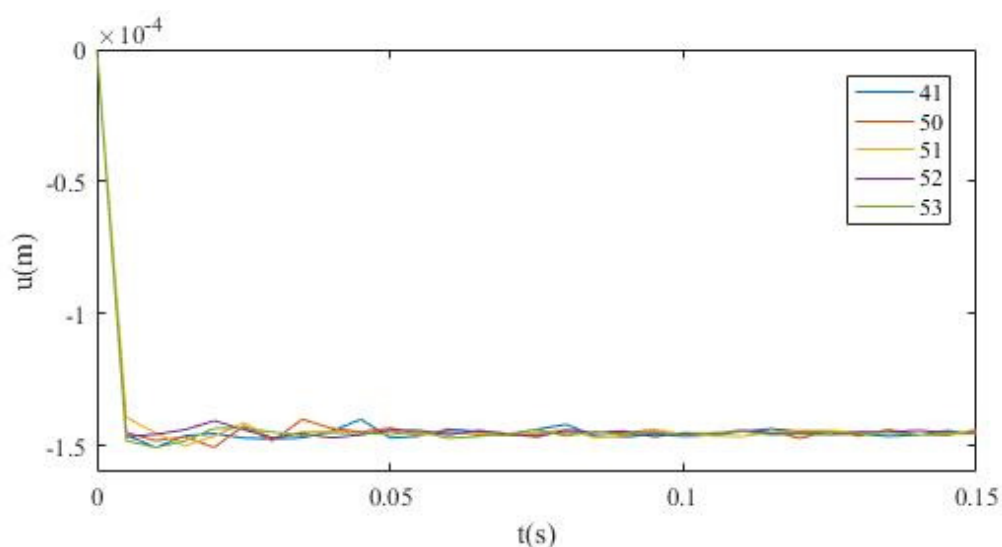


Figura 4. 14 Deslocamento do ponto (0,0,0) durante o ensaio de variação da massa volúmica com molas e amortecedores na base

Foram testadas outras espessuras para a camada fictícia de solo, mas os resultados obtidos foram idênticos aos apresentados não se mostrando nenhuma alteração no passo de tempo crítico. Esta observação mostra que o método numérico é principalmente condicionado pelos amortecedores, visto que a alteração da espessura da camada contribui diretamente para a alteração da rigidez das molas introduzidas, não provocando alteração ao valor de amortecimento aplicado. Observando a Tabela 4.14, constata-se que o factor  $c$  reduziu para aproximadamente 1.4, relativamente aos casos apresentados nos subcapítulos anteriores em que  $c \approx 3$ . Esta redução é devida à introdução dos amortecedores na base, tal como será explicado de seguida. Não é apresentado por Zhai nenhuma forma de calcular o passo de tempo crítico para casos com amortecimento. No entanto, um dos métodos numéricos explícitos existentes mais estudados é o método das diferenças finitas centrais, para o qual existe uma expressão que calcula o passo de tempo crítico em modelos com amortecimento [J. Hallquist, 2006]:

$$\Delta t \leq \frac{T}{\pi} \left( \sqrt{1 + \xi^2} - \xi \right) \quad (4.14)$$

A expressão é idêntica à apresentada por Zhai, com o acrescento de mais um termo que contempla o amortecimento. O coeficiente de amortecimento associado aos dampers introduzidos nos nós de fronteira do modelo para impedir a reflexão de ondas para o interior pode ser estimado por:

$$\xi = \frac{c}{c_{crit}} = \frac{\rho \cdot v \cdot A}{2 \cdot M \cdot \frac{\pi}{T}} = \frac{3}{2\pi}; \quad (4.15)$$

Que aplicando à expressão anterior Eq. (4.14) a expressão para o passo-de-tempo crítico fica:

$$\Delta t \leq \frac{0.63 T}{\pi} \quad (4.16)$$

O que associado ao fator  $c=3$  para o período próprio do sistema conduz a:

$$\Delta t \leq \frac{1.90}{\pi} \frac{L}{v_p} \quad (4.17)$$

No entanto constata-se nos resultados obtidos acima que para o método de Zhai o factor multiplicativo é inferior a 1.90, rondando o valor 1.4.

Por ultimo podemos concluir novamente que o passo de tempo crítico é proporcional a velocidade de propagação e não depende do modulo de elasticidade ou da massa volúmica por si só.

#### 4.3.4 Estudo da influência do tamanho dos elementos no passo de tempo, com encastramento da base

Neste subcapítulo vai ser estudada a influência do tamanho dos elementos da malha de elementos finitos para as condições de fronteira de encastramento da base, estas condições são iguais as aplicadas no subcapítulo 4.3.1 e representado na figura 4.5.

Os valores de modulo de elasticidade, massa volúmica, amortecimento e tamanho dos elementos utilizados podem ser observados na seguinte tabela, bem como os passos de tempo máximos obtidos e o tempo que o Pegasus demorou a executar o cálculo.

Caso	Características					Resultados Pegasus		tempo de calculo
	Le (m)	Amortec.	E (MPa)	$\rho$ (ton/m <sup>3</sup> )	vp	dt max (s)	c	
54	0,05	0,00%	150	2,00	288,68	1,35E-04	2,451	188,4
15	0,10					2,27E-04	2,061	15,4

Tabela 4. 15 Parâmetros do modelo durante o ensaio de variação do espaçamento da malha de elementos finitos com encastramento da base.

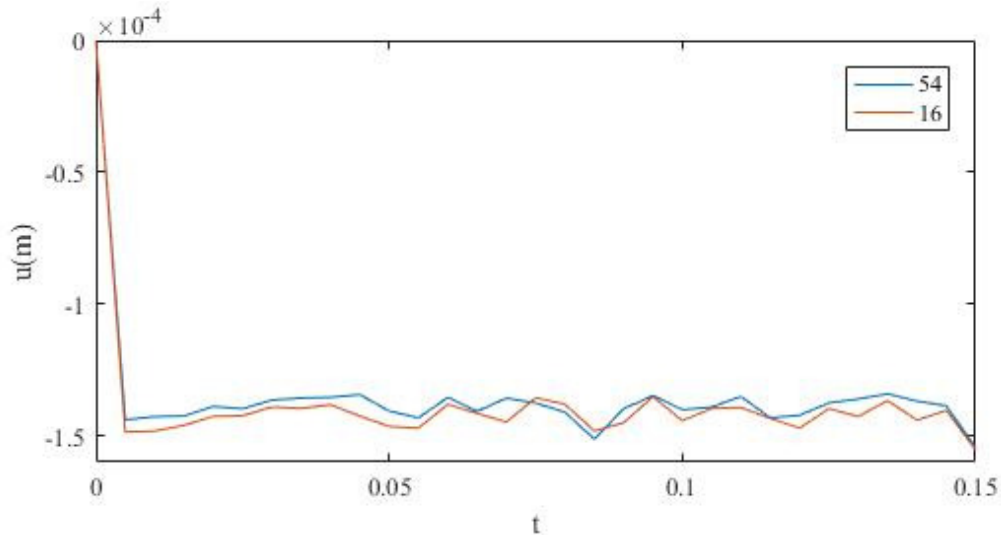


Figura 4. 15 Deslocamento do ponto (0,0,0) durante o ensaio de variação do espaçamento da malha de elementos finitos com encastramento da base.

Na tabela 4.15 podemos observar que a diminuição da malha de elementos finitos altera a frequência natural introduzida pelas molas. A nova frequência natural introduzida pelas molas no ensaio 54 é de  $1 \times 10^4 \text{ rad/s}$ , sendo que o passo de tempo crítico associado é de  $2,00 \times 10^{-4} \text{ s}$ , relembra-se que os valores obtidos para o ensaio 16 no subcapítulo 4.3.1 foram  $\omega = 7,07 \times 10^3 \text{ rad/s}$  e  $\Delta t = 2,83 \times 10^{-4} \text{ s}$ .

Estes valores são ligeiramente superiores aos valores para os quais o método numérico não rebenta, o que é coerente visto que a rigidez real é uma combinação da rigidez introduzida pelas molas na base e da rigidez do material, sendo que a combinação destas atua de forma a diminuir o passo de tempo crítico.

### 4.3.5 Estudo da influência do tamanho dos elementos no passo de tempo, com molas e amortecedores na base

Neste subcapítulo vai ser estudado a influencia do tamanho dos elementos da malha de elementos finitos para as condições de fronteira de molas e amortecedores na base, que são condições iguais as aplicadas no subcapítulo 4.3.3. Tabela seguinte resume todos os valores obtidos no ensaio.

Caso	Características					Resultados Pegasus		tempo de calculo
	Le (m)	Amortec.	E (MPa)	$\rho$ (ton/m <sup>3</sup> )	vp	dt max (s)	c	
55	0,05	0,00%	150	2,00	288,68	7,81E-05	1,417	357,0
41	0,10					1,56E-04		20,6

Tabela 4. 16 Parâmetros do modelo durante o ensaio de variação do espaçamento da malha de elementos finitos com molas e amortecedores na base.

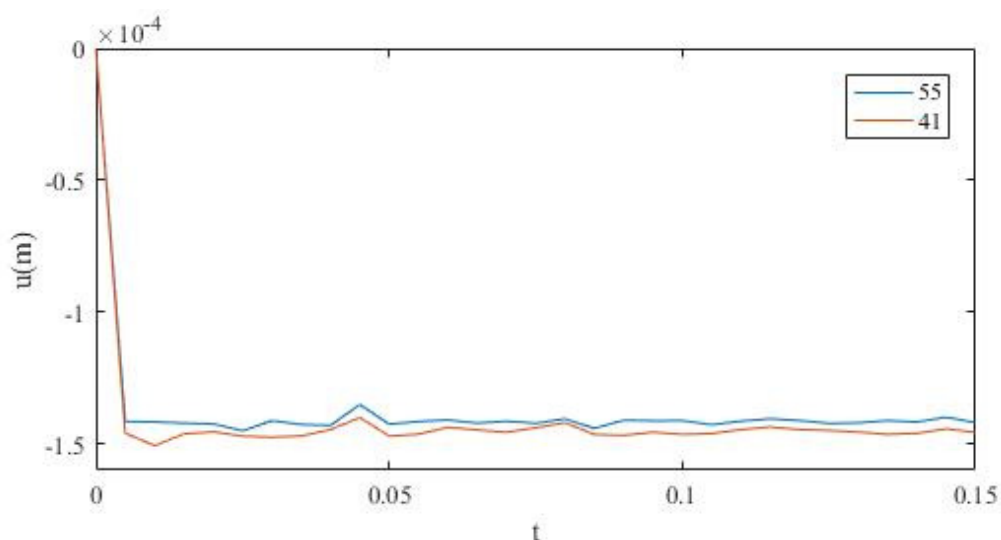


Tabela 4. 17 Deslocamento do ponto (0,0,0) durante o ensaio de variação do espaçamento da malha de elementos finitos com molas e amortecedores na base.

Os valores obtidos para o fator c permitem nos concluir que a dimensão dos elementos finitos não influencia o passo de tempo crítico do método numérico.

## 4.4 Fronteira lateral absorvente

Neste subcapítulo são apresentados os resultados dos ensaios para condições de fronteira absorventes na base e na lateral tal como mostra a figura 4.19. As características das molas e dos amortecedores são calculadas com foi explicado no subcapítulo 4.1. A espessura simulada pelas molas é de 5 m.

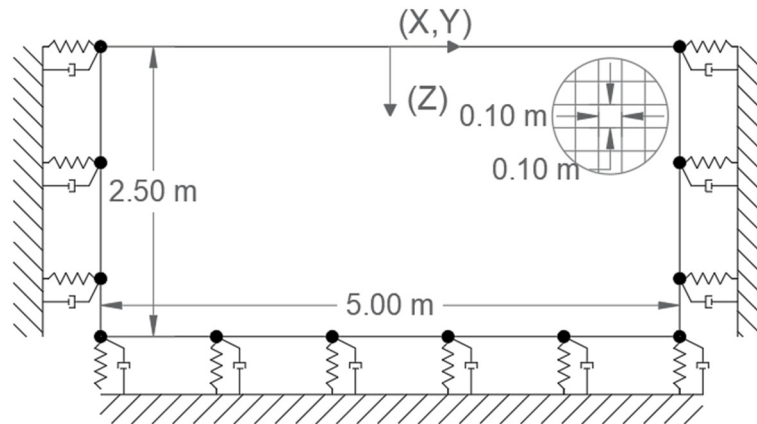


Figura 4. 16 Características geométricas e condições de fronteira para o modelo com fronteiras absorventes

### 4.4.1 Estudo da influência da variação das propriedades dos materiais no passo de tempo, com condições de fronteiras absorventes

Este subcapítulo contém os resultados do estudo da influência da variação das propriedades dos materiais no passo de tempo, com condições de fronteira absorvente. O procedimento do ensaio está explicitado no subcapítulo 4.2.1. A Tabela seguinte resume todos os valores obtidos.

Caso	Características					Resultados Pegasus		tempo de calculo (s)
	Le (m)	Amort.(%)	E (MPa)	$\rho$ (ton/m <sup>3</sup> )	vp	dt max (s)	c	
56	0,1	0,00%	150	2,00	288,68	1,52E-04	1,374	41,9
57			250	3,33		1,52E-04	1,374	41,0
58			500	6,67		1,52E-04	1,374	43,2
59			750	10,00		1,52E-04	1,374	41,7
60			1000	13,33		1,52E-04	1,374	42,9

Tabela 4. 18 Parâmetros do modelo durante o ensaio de velocidade de propagação constante com condições de fronteira absorventes.

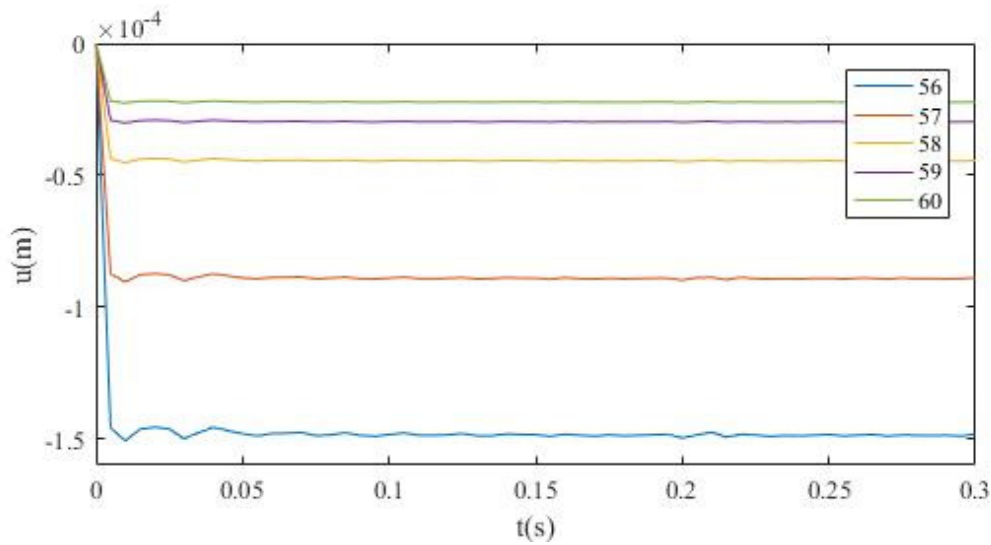


Figura 4. 17 Deslocamento do ponto (0,0,0) durante o ensaio de velocidade de propagação constante com condições de fronteira absorventes.

Caso	Características					Resultados Pegasus		tempo de calculo
	Le (m)	Amortec.	E (MPa)	$\rho$ (ton/m <sup>3</sup> )	vp	dt max (s)	c	
56			150		288,68	1,52E-04	1,374	41,9
61			250		372,68	1,19E-04	1,394	54,9
62	0,1	0,00%	500	2,00	527,05	8,33E-05	1,380	78,5
63			750		645,50	6,85E-05	1,389	91,1
64			1000		745,36	5,95E-05	1,394	110,8

Tabela 4. 19 Parâmetros do modelo durante o ensaio de variação do módulo de elasticidade com condições de fronteira absorventes.

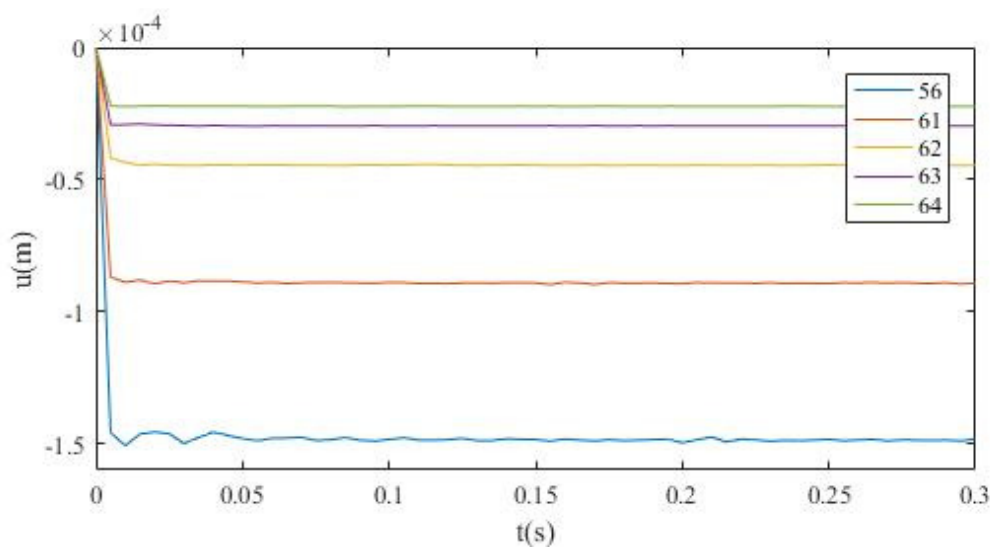


Figura 4. 18 Deslocamento do ponto (0,0,0) durante o ensaio de variação do módulo de elasticidade com condições de fronteira absorventes.

Caso	Características					Resultados Pegasus		tempo de calculo
	Le (m)	Amortec.	E (MPa)	$\rho$ (ton/m <sup>3</sup> )	vp	dt max (s)	c	
56	0,1	0,00%	150	2,00	288,68	1,52E-04	1,374	41,9
65				1,20	372,68	1,19E-04	1,394	54,1
66				0,60	527,05	8,33E-05	1,380	75,9
67				0,40	645,50	6,85E-05	1,389	91,8
68				0,30	745,36	5,95E-05	1,394	108,1

Tabela 4. 20 Parâmetros do modelo durante o ensaio de variação da massa volúmica com condições de fronteira absorventes.

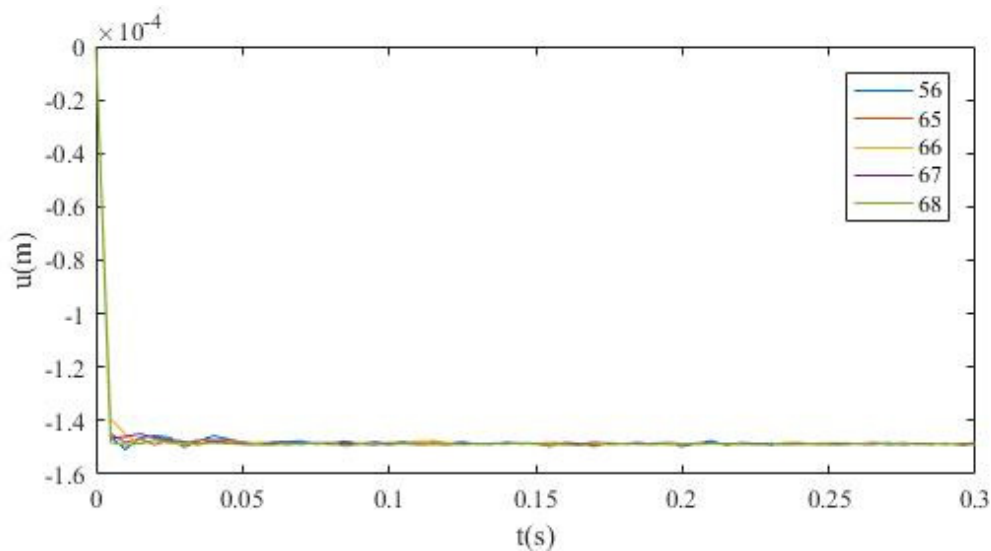


Figura 4. 19 Deslocamento do ponto (0,0,0) durante o ensaio de variação da massa volúmica com condições de fronteira absorventes.

Os resultados obtidos reforçam as conclusões obtidas anteriormente. O método numérico é proporcional a velocidade de propagação, e o amortecimento do sistema provoca a diminuição do passo de tempo crítico. Constata-se ainda que o valor do parâmetro  $c$  reduz nesta situação para cerca de 1.37, comparativamente à situação anterior com fronteiras absorventes apenas na base.

#### 4.4.2 Estudo da influência do tamanho dos elementos no passo de tempo, com condições de fronteira absorvente

Neste subcapítulo vai ser estudado a influência do tamanho dos elementos da malha de elementos finitos para as condições de fronteira absorvente. Os resultados do ensaio são apresentados na tabela seguinte.

Caso	Características					Resultados Pegasus		tempo de calculo
	Le (m)	Amortec.	E (MPa)	$\rho$ (ton/m <sup>3</sup> )	vp	dt max (s)	c	
69	0,05	0,00%	150	2,00	288,68	7,69E-05	1,395	688,0
56	0,10					1,52E-04	1,374	41,9

Tabela 4. 21 Parâmetros do modelo durante o ensaio de variação do espaçamento da malha de elementos finitos com condições de fronteira absorvente.

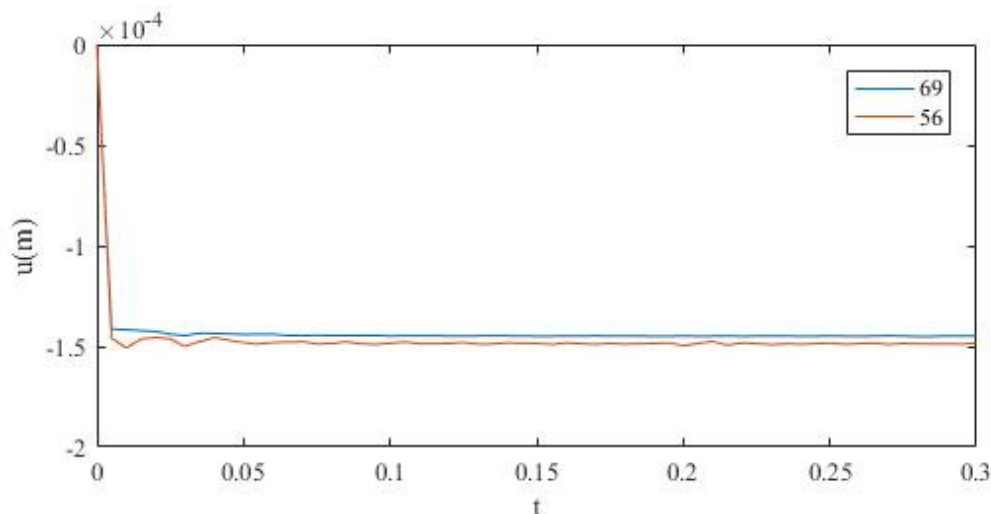


Figura 4. 20 Deslocamento do ponto (0,0,0) durante o ensaio de variação do espaçamento da malha de elementos finitos com condições de fronteira absorvente.

O resultado obtido reforça a conclusão que o tamanho dos elementos não influencia o passo de tempo crítico do método numérico de integração no tempo. No gráfico 4.23 podemos observar que o deslocamento do ponto (0,0,0) estabiliza em valores ligeiramente diferentes, o que não deveria acontecer visto que as características físicas do modelo são iguais. Esta anomalia ocorre também em todos os subcapítulos anteriores onde foi feito variar o tamanho da malha de elementos finitos. Este aspecto pode estar relacionado com o facto da área de aplicação da carga ser apenas  $0,20 \times 0,20 \text{ m}^2$  o que significa que com uma malha de 0,10 m há uma concentração de carga no nó central muito significativa e irrealista. Com uma malha de 0,05 m a aplicação de carga assemelha-se mais ao cenário representado de carga uniforme de superfície.

## 4.5 Estudo da influência do amortecimento material no passo de tempo

Como introdução ao tema do amortecimento é apresentado no gráfico 4.25 o deslocamento no ponto (0,0,0), para demonstrar a influencia do amortecimento material versus o amortecimento das condições de fronteira. Neste gráfico 4.25 podemos observar 4 combinações de condições

de amortecimento diferentes, que correspondem a sistema sem amortecimento e apoio simples na base (70), um sistema só com amortecimento do solo e apoio simples na base (71), um sistema só com amortecimento devido às condições de fronteira absorventes (72) e um sistema com amortecimento do solo e amortecimento devido às condições de fronteira absorventes (73). Os dados usados em cada ensaio podem ser consultados na tabela seguinte.

Caso	Características					
	Le (m)	Amortec.	Front. Absorv.	E (MPa)	$\rho$ (ton/m <sup>3</sup> )	vp
70	0,10	0,00%	não	150	2,00	288,68
71		5,00%	não			
72		0,00%	sim			
73		5,00%	sim			

Tabela 4. 22 Parâmetros para as diferentes condições de amortecimento.

O amortecimento do Rayleigh utilizado no solo corresponde a um amortecimento de 5% para as frequências de 29 e 500 Hz, o valor de amortecimento para outras frequências pode ser retirado do gráfico 4.1.

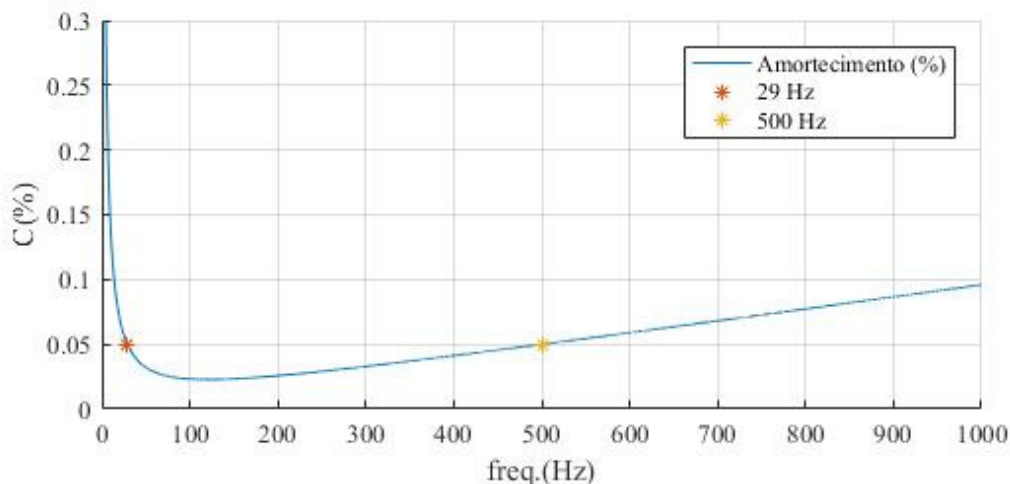


Figura 4. 21 Amortecimento de Rayleigh de 5% para frequências de 29 Hz e 500 Hz

A frequência de 29 Hz foi escolhida por ser a menor frequência própria do sistema, calculada pela seguinte expressão, [Karmer, 1996]

$$f = \frac{v}{4h} = \frac{288.7}{4 \times 2.5} = 28.9 \text{ Hz} \quad (4.18)$$

Como podemos observar na figura 4.25 o amortecimento do modelo é feito principalmente pelas condições de fronteira. O amortecimento material só tem influencia para estabilizar vibrações residuais.

Nos ensaios seguintes serão utilizadas condições de fronteira absorventes, por esta simularem condições mais próximas de modelos reais, pelos motivos explicados no capítulo 3.1.

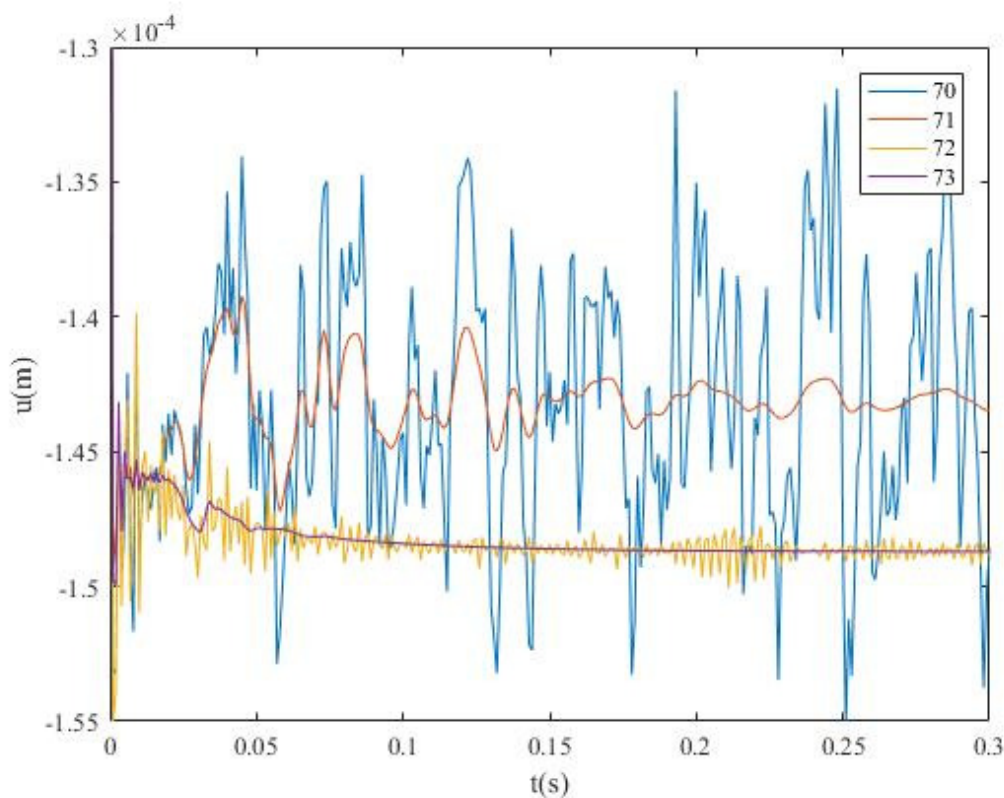


Figura 4. 22 Deslocamento do ponto (0,0,0) para as diferentes condições de fronteira

#### 4.5.1 Estudo da influência do amortecimento de Rayleigh no passo de tempo

O amortecimento material dos materiais (tipo solo) representados no programa Pegasus é contabilizado através da construção de uma matriz de amortecimento proporcional à matriz de massa e de rigidez, como foi explicado no subcapítulo 3.1. A parcela da massa amortece principalmente baixas frequências e a parcela da rigidez tem maior influência em altas frequências, por isso dependendo do problema pode ser vantajoso considerar só parte da expressão de Rayleigh.

Devido a esta razão este subcapítulo está dividido em duas seções, na primeira será estudada a influência do amortecimento proporcional à massa no passo de tempo e na segunda será estudada a influência do amortecimento proporcional à rigidez no passo de tempo.

#### 4.5.1.1 Estudo da influência do amortecimento proporcional à massa no passo de tempo

Quando queremos considerar só amortecimento proporcional à massa na equação de amortecimento de Rayleigh temos de igualar  $a_1$  a zero, e a equação de amortecimento pode ser simplificada para,

$$C = a_0 \cdot M ; a_0 = 2 \cdot \omega \cdot \xi \quad (4.19)$$

O Pegasus está programado para considerar o amortecimento só devido à massa pela equação apresentada anteriormente, quando é introduzido o valor de 0 na segunda frequência.

Os valores de amortecimento utilizados no ensaio podem ser consultados na figura 4.26.

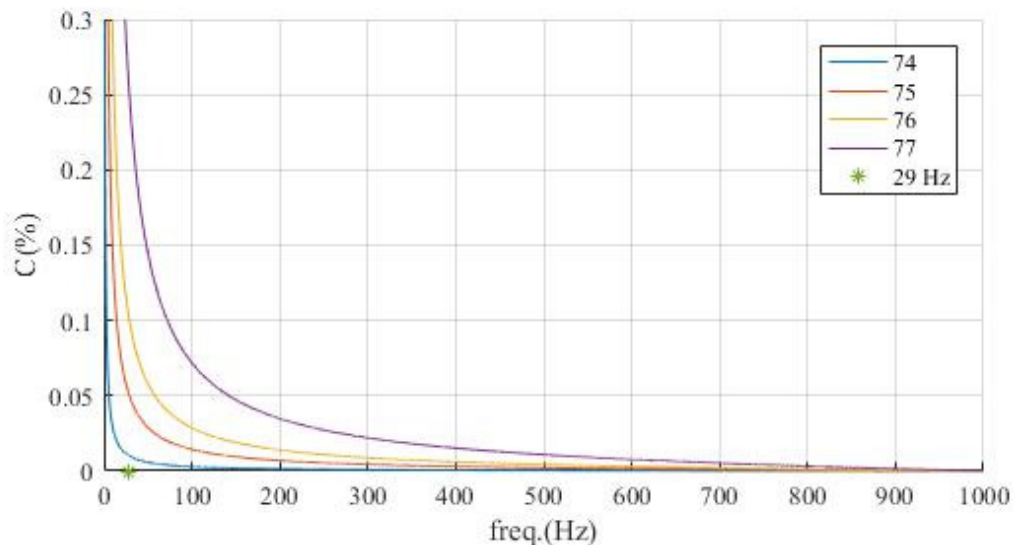


Figura 4. 23 Curvas de amortecimento de Rayleigh para baixas frequências

Os valores das características do modelo, e resultados obtidos para o passo de tempo e deslocamento do ponto (0,0,0) podem ser consultados na tabela 4.23 e no gráfico 4.27, respetivamente.

Caso	Características					Resultados Pegasus		tempo de calculo
	Le (m)	Amor. a0	E (MPa)	$\rho$ (ton/m3)	vp	dt max (s)	c	
74	0,10	1,00%	150	2,00	288,68	1,52E-04	1,3741	71,7
75		5,00%						72,9
76		10,00%						71,4
77		25,00%						71,0

Tabela 4. 23 Resultados obtidos no ensaio de amortecimento de baixas frequências

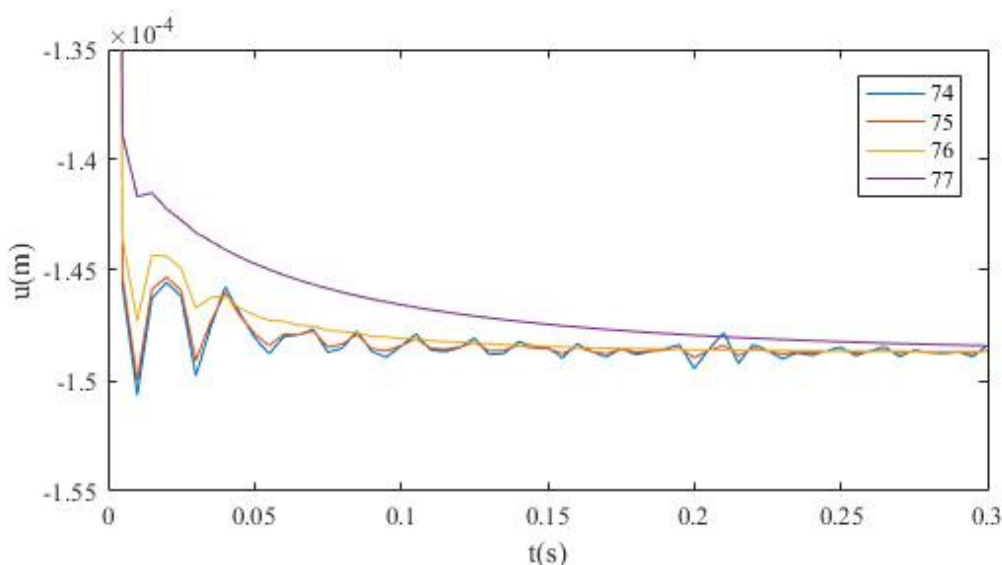


Figura 4. 24 Deslocamento do ponto (0,0,0) para ensaio de amortecimento de baixas frequências

Podemos observar que o amortecimento de baixas frequências não influencia o passo de tempo crítico e reduz significativamente o número de ciclos que o modelo faz até atingir o equilíbrio.

#### 4.5.1.2 Estudo da influência do amortecimento proporcional à rigidez no passo de tempo

Tal como anteriormente, para considerar o amortecimento proporcional à rigidez a equação de Rayleigh pode ser simplificada para,

$$C = a_1 \cdot K ; a_1 = \frac{2 \cdot \xi}{\omega} \quad (4.20)$$

Para o programa Pegasus assumir este tipo de amortecimento basta colocar a primeira frequência igual a zero.

Os valores de amortecimento utilizados neste ensaio podem ser consultados na figura 4.28.

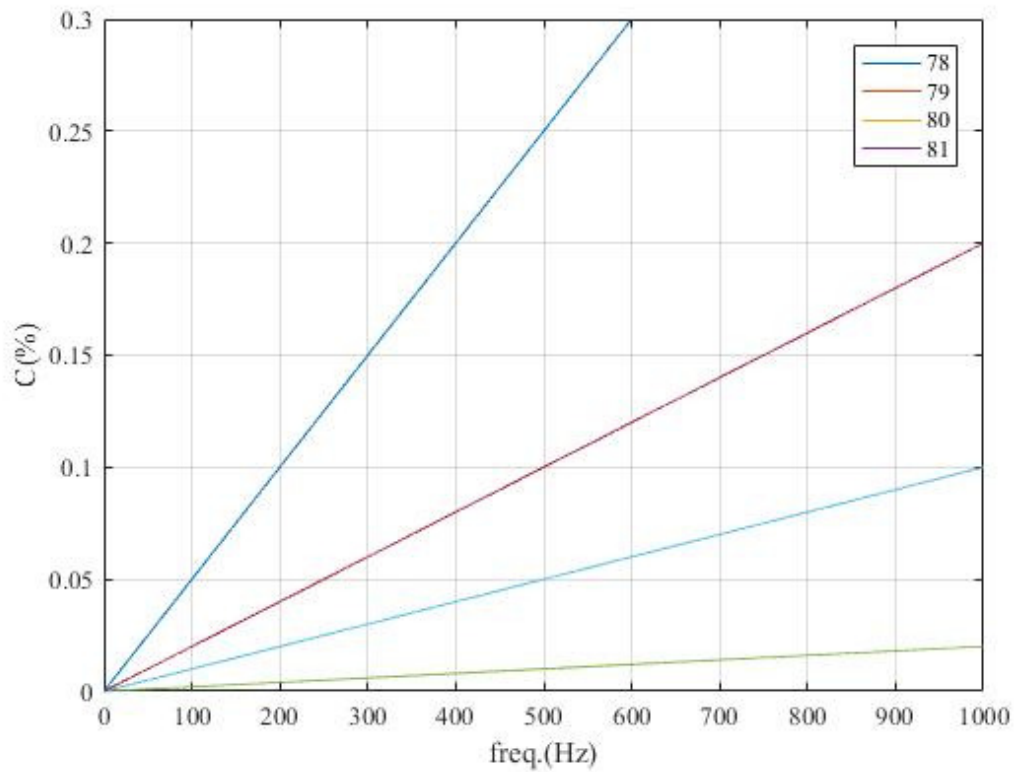


Figura 4. 25 Curvas de amortecimento de Rayleigh para altas frequências

O passo de tempo passo obtido pelo método experimental pode ser consultado na seguinte tabela.

Caso	Características					Resultados Pegasus		tempo de calculo
	Le (m)	Amort. a1	E (MPa)	$\rho$ (ton/m3)	vp	dt max (s)	c	
78	0,10	1,00%	150	2,00	288,68	1,52E-04	1,374	72,5
79		5,00%				1,39E-04	1,260	74,4
80		10,00%				1,32E-04	1,193	78,6
81		25,00%				1,25E-04	1,134	89,4

Tabela 4. 24 Resultados obtidos no ensaio de amortecimento de altas frequências

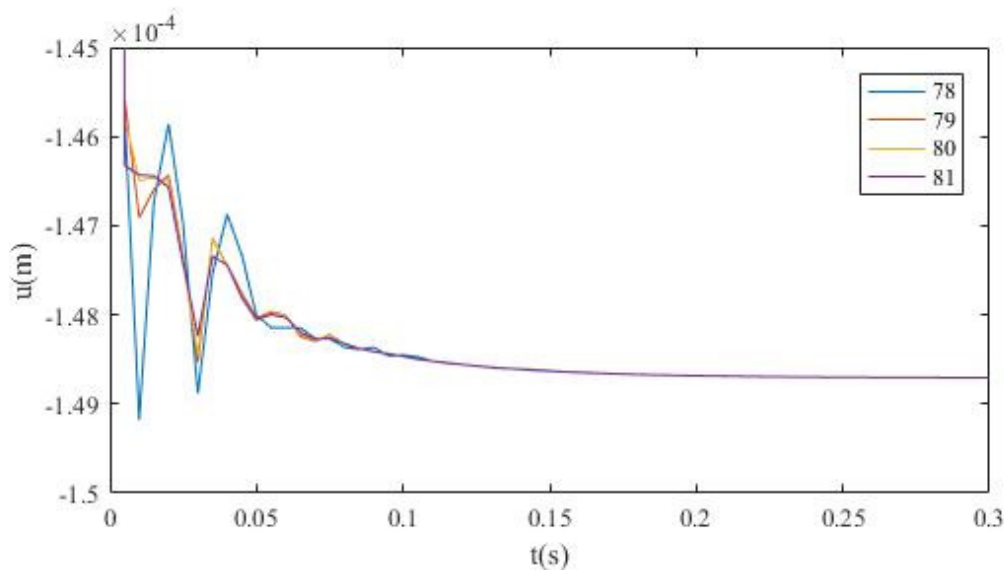


Figura 4. 26 Deslocamento do ponto (0,0,0) para ensaio de amortecimento de altas frequências

O amortecimento proporcional a rigidez influencia o passo de tempo crítico do método numérico. Também se pode observar pelo deslocamento do ponto (0,0,0) que o amortecimento proporcional à rigidez tem um influencia muito maior na resposta do que o amortecimento proporcional à massa.

## 4.6 Resumo das conclusões obtidas

A conclusão principal de todos estes ensaios é que as condições de fronteira condicionam significativamente o passo de tempo e eficiência do método devido a introduzirem amortecimento e/ou rigidez ao modelo.

Conseguimos observar também que o passo de tempo crítico é proporcional á velocidade de propagação de ondas, ao tamanho dos elementos finitos e ao amortecimento. Outros fatores como modulo de elasticidade e massa volúmica se forem alterados de forma a velocidade de propagação se manter constante não condicionam o passo de tempo crítico.

O valor do fator  $c$ , que é a constante que relaciona o período fundamental com a velocidade de propagação e espaçamento da malha de elementos finitos, para as condições de modelo estudado é aproximadamente 3 para ensaios sem amortecimento e aproximadamente 1,4 para ensaios com amortecimento.

Por ultimo, com o auxilio do anexo 1 que contem gráficos de todos os ensaios apresentados neste capitulo para passo de tempo crítico e para o um passo de tempo que é metade do passo de tempo crítico, concluimos que o método de Zhai atinge a convergência para o primeiro passo de tempo que é possível correr sem o método instabilizar, em que tende para o infinito.



## Capítulo 5

# Aplicação do método de Newmark a um Solido 3D

### 5.1 Introdução método de Newmark

Com vimos no subcapítulo 2.4 o método de Newmark é um método de integração implícito, que pode ser incondicionalmente estável mediante uma escolha adequada dos parâmetros do método. De qualquer forma o passo de tempo tem de ser pequeno o suficiente de forma a que a solução seja precisa.

No próximo subcapítulo é apresentado um estudo de estabilidade para um caso idêntico ao apresentado no subcapítulo 4.5 caso 73. A única diferença é a dimensão do modelo. O modelo utilizado no capítulo 4 tem  $5 \times 5 \times 2,5$  m (X, Y, Z) com uma malha de elementos finitos de 0,1 m o que equivale a 202 878 graus de liberdade, e o modelo utilizado no subcapítulo seguinte tem  $1 \times 1 \times 1$  m (X,Y,Z), também com uma malha de elementos finitos de 0,1 m o que equivale a 3993 graus de liberdade.

O motivo desta alteração é devido à eficiência dos métodos implícitos versus a eficiência dos métodos explícitos, quando usados para resolver problemas de larga escala (superiores a dezenas de milhares de graus de liberdade), dado que os métodos explícitos apenas utilizam operações vetoriais, e os métodos implícitos em geral obrigarem ao cálculo da inversa da matriz de rigidez ou equivalente [Zhai, 1996]. O cálculo que tem maior impacto na eficiência no método de Newmark de facto, é a inversão da matriz de rigidez do modelo, que demora aproximadamente entre os 80% a 99% do tempo de cálculo dependendo do tamanho do modelo.

O tempo de cálculo necessário para resolver o caso 73 (subcapítulo 4.5) com o método de Zhai para um modelo com 202 878 graus de liberdade (Caso 91, subcapítulo 4.6) é 89.2 segundos ou 1 min e 29.2 segundos. Constatou-se que o computador utilizado tem 16Gb de Ram o que não é suficiente para inverter a matriz de rigidez com o programa Matlab para esta quantidade de graus de liberdade. Assim tiveram de ser testados modelos mais pequenos. O tempo de cálculo do método de Newmark para um modelo com  $1\text{m} \times 1\text{m} \times 1\text{m}$ , com o mesmo espaçamento da

malha de elementos finitos, que equivale a 3993 graus de liberdade foi 44.5 s, e para um modelo com 2.5m x 2.5m x 1.2m, também com o mesmo espaçamento da malha de elementos finitos, que equivale a 26 364 graus de liberdade foi 4448.76 segundos ou 1 hora e 14,1 minutos. Por estes exemplos é possível ter uma ideia da diferença de eficiência de cada método para a resolução destes problemas.

## 5.2 Estudo da precisão do método de Newmark

O modelo utilizado neste estudo tem condições de fronteira absorventes na base e nas fronteiras laterais, um amortecimento do material é de 5% para a frequências de 100 Hz e 500 Hz, as propriedades do material e resultados obtidos no ensaio estão discriminadas na tabela 5.1.

Caso	Características					Resultados Pegasus			tempo de calculo
	Le (m)	Amortec.	E (MPa)	$\rho$ (ton/m <sup>3</sup> )	vp	dt max (s)	Converge	R. esperada	
1						1,00E-02	Não	Não	40,9
2						1,00E-03	Sim	Não	45,0
3	0,1	5,00%	150	2,00	288,68	5,00E-04	Sim	Não	49,2
4						1,00E-04	Sim	Sim	81,4
5						1,00E-05	Sim	Sim	457,5

Tabela 5. 1 Parâmetros do ensaio do estudo de estabilidade do método de Newmark

Na figura 5.1 podemos observar os resultados obtidos para cada ensaio. Para o caso 1, com um passo de 0,01 s, que equivale a realizar 20 iterações durante o processo de calculo, podemos observar que o passo de tempo não converge e a resposta não é próxima do esperado, mas o método é estável, ou seja não tende para infinito.

Nos casos 2 e 3 onde são respetivamente utilizados passos de tempo 10 e 20 vezes inferiores ao do caso 1, podemos observar que a resposta para além de convergir já se encontra próxima da solução esperada, principalmente a resposta do caso 3.

No caso 4 com um passo de 0,0001s obtemos a resposta esperada, e a diminuição do passo de tempo para além deste valor não contribui para resultados diferentes.

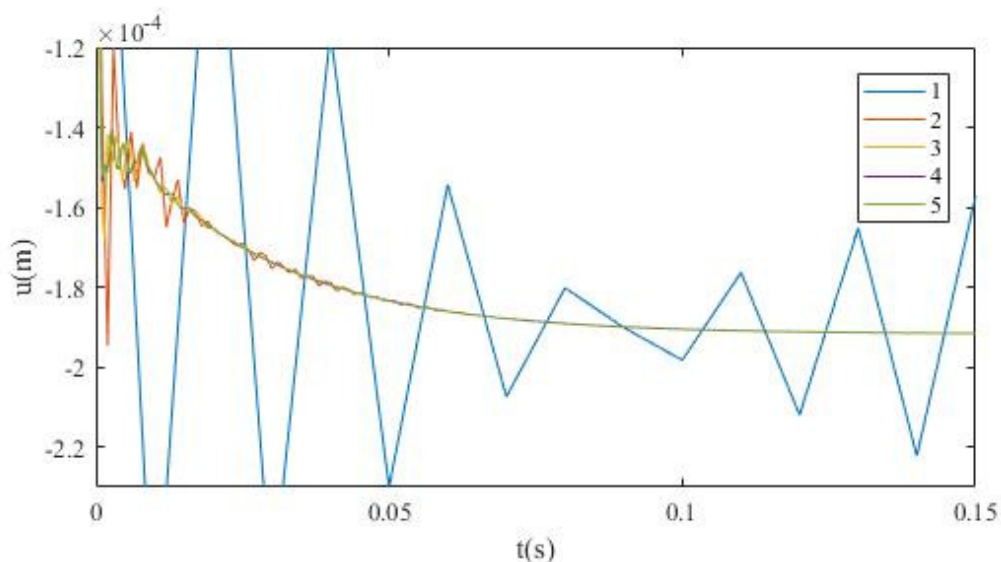


Figura 5.2.1 Deslocamento do ponto  $(0,0,0)$  para os diferentes passos de tempo

### 5.3 Resumo das conclusões obtidas

Neste breve capítulo podemos observar que o método de Newmark é menos eficiente do que o método de Zhai, ou seja para o mesmo problema o método de Zhai consegue apresentar resultados mais rápidos do que o método de Newmark. Esta questão torna-se mais evidente quanto maior for o número de graus de liberdade do problema, como foi mostrado neste capítulo.

A vantagem dos métodos implícitos face aos explícitos, como tinha sido enunciado no capítulo 2, é permitirem usar passos de tempo maiores do que tem de ser usados nos métodos explícitos. Os resultados obtidos reforçam este facto. O que permite a definição de métodos mistos como os enunciados no capítulo seguinte.



## Capítulo 6

# Métodos Mistos

### 6.1 Introdução métodos mistos

Nos capítulos anteriores foi estudado um método numérico implícito e outro explícito de forma a explorar as vantagens e as desvantagens de cada uma das abordagens. Em resumo os métodos numéricos implícitos, como o método de Newmark, são em geral mais estáveis, o que permite usar passos de tempo maiores, e os métodos explícitos, como o método de Zhai, têm processos de cálculo mais simples, o que melhora a sua eficiência para sistemas de larga escala, reduzindo o tempo de cálculo computacional.

Outra abordagem de métodos numéricos são os métodos numéricos mistos, que podem ser aplicados em casos onde existam dois ou mais materiais. Os métodos numéricos mistos consistem precisamente em utilizar um integrador implícito, como o método de Newmark, para uma determinada parte do modelo, e um integrador explícito, como por exemplo o método de Zhai, para outra parte do modelo. As duas partes conectam-se por meio de forças de contacto.

A maior vantagem desta abordagem acontece quanto as características dos materiais são muito diferentes, por exemplo em uma via férrea onde temos a superestrutura e subestrutura. A superestrutura que compõe 5% do modelo é composta por materiais com velocidades de propagação de ondas muito elevadas quando comparados com os materiais que compõem a subestrutura. Como foi visto no capítulo 4, velocidades de propagação maiores requerem passos de tempo mais pequenos, logo o passo de tempo que tem de ser usado para a superestrutura é muito mais pequeno do que aquele que pode ser usado na subestrutura. Como não é possível usar dois passos de tempo diferentes, por causa de um material que compõe apenas 5% do modelo, temos de diminuir o passo de tempo para todo o modelo piorando drasticamente a eficiência do processo. Os métodos mistos propõem que nestes casos seja usado um método implícito para o material condicionante, neste caso para a superestrutura da via, assim levantando o condicionamento no passo de tempo por este material, e usando um método explícito para a parte do modelo com materiais menos rígidos (como a subestrutura da via férrea).

Para caso de uma via férrea esta abordagem é claramente vantajosa, como é demonstrado no subcapítulo seguinte, mas em casos em que a percentagem do material condicionante seja maior, esta abordagem pode se tornar menos eficiente, visto o tempo de calculo do método implícito poder aumentar muito significativamente.

## 6.2 Métodos explícitos versus Métodos mistos

Este subcapítulo esta organizado em duas partes, a primeira onde é apresentado as características do modelo, e são dadas informações sobre o processo de calculo de forma a clarificar os resultados apresentados. Na segunda são apresentados e discutidos os resultados obtidos por cada um dos métodos.

### 6.2.1 Apresentação do modelo utilizado

O modelo utilizado é um modelo genérico de uma via férrea, composto por uma subestrutura que engloba o solo, coroamento, sub-balastro e balastro, representados na figura 6.1 pelas cores vermelho, bege, azul claro e azul escuro respetivamente e uma superestrutura composta por 31 travessas e 18 metros de carris. A camada de solo tem 10 metros de profundidade, e as condições de fronteira na base são absorventes, ou seja, são compostas por molas e amortecedores que simulam a rigidez de uma camada de solo com 4 metros de altura. O amortecimento material foi de 5% para as frequências de 100 e 500 Hz. Nas fronteiras laterais são igualmente colocadas condições absorventes.

Na figura 6.1 podemos observar que o espaçamento da malha de elementos contínuos esta mais refinada na zona central do modelo, para maximizar a eficiência computacional sem diminuir a precisão dos resultados.

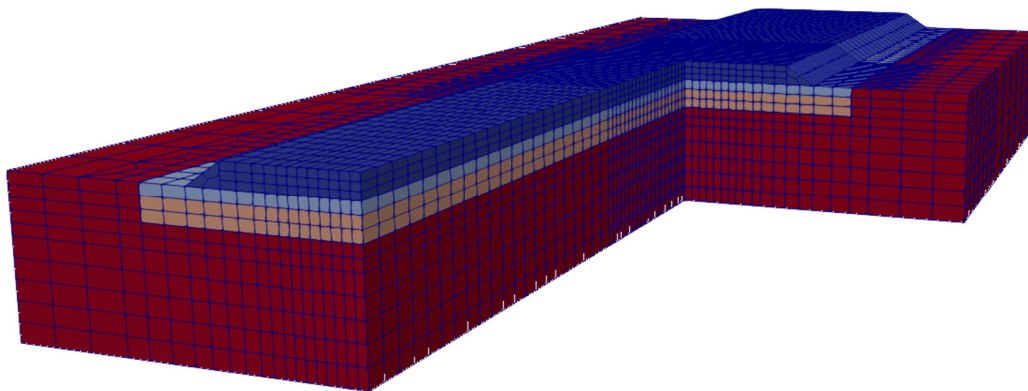


Figura 6. 1 Precetiva do modelo da via férrea

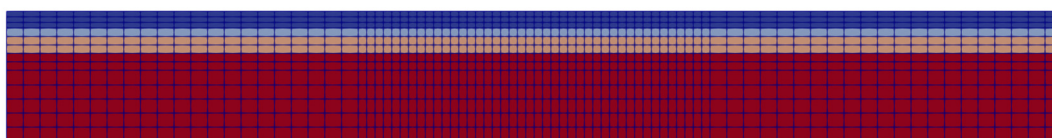


Figura 6. 2 Corte longitudinal do modelo da via férrea

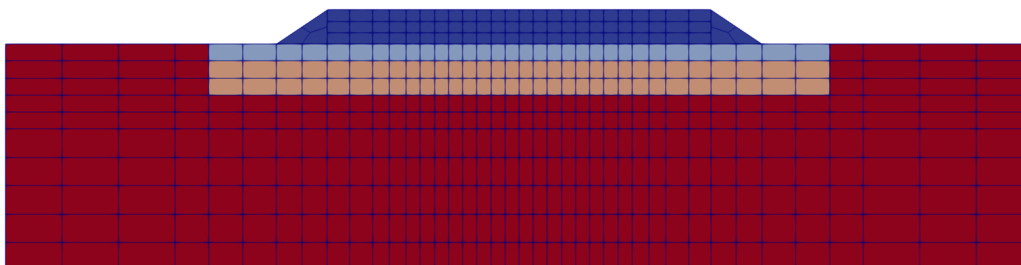


Figura 6. 3 Corte Transversal do modelo da via férrea

As características de cada material podem ser consultadas na tabela 6.1

Material	Características				
	Le (m)	Amort.(%)	E (Pa)	$\rho$ (ton/m <sup>3</sup> )	vp
Balastro	0,100	5,00%	1,30E+05	1,80	283,28
Sub-balastro	0,125		1,00E+05	1,90	241,83
Coroamento	0,125		8,00E+04	1,70	228,66
Solo	0,125		6,00E+04	1,60	204,12
Betão	0,125		3,00E+07	1,95	4134,49
Carril	0,200		2,10E+08	7,86	5448,50

Tabela 6. 1 Características dos materiais da via férrea

Como podemos observar a velocidade de propagação nos carris é muito superior à velocidade de propagação de ondas do balastro que é a camada mais condicionante da subestrutura. Se aplicar a formula de Zhai com o fator  $c = 3$  o tempo critico para os carris e para o balastro são  $1,75 \times 10^{-5}$  e  $3,37 \times 10^{-4}$  respetivamente. O fator  $c$  escolhido o exemplo provavelmente não é o mais adequado porque o modelo por este ser amortecido, mas permite ilustrar que o passo de tempo critico para o balastro é uma ordem superior ao passo de tempo critico dos carris.

## 6.2.2 Resultados

Apresenta-se de seguida os passos de tempo críticos e o tempo de calculo obtidos para as duas ultimas fases do Pegasus, que são a colocação do peso do comboio no inicio da linha (designado na tabela por 1) e o movimento do comboio ao longo da via (designado por 2).

Foram executados dois ensaios no primeiro foi utilizado o método de Zhai para a superestrutura e para a subestrutura e no segundo foi utilizado o método de Newmark para a superestrutura e o método de Zhai para subestrutura, correspondendo ao método misto aqui analisado.

Fase	Resultados Método Misto		Resultados Método Zhai	
	dt max (s)	tempo de calculo (s)	dt max (s)	tempo de calculo (s)
1	1,33E-04	82,6	1,33E-05	723,3
2	1,33E-04	36,0	1,33E-05	379,3

Tabela 6. 2 Resultados ensaios modelo da via férrea

Podemos observar que para este caso o método misto é aparentemente 9,3 vezes mais eficiente do que o método implícito, ou seja é 16,4 minutos mais rápido.

Os valores apresentados são os primeiros valores para os quais foi possível executar o cálculo sem que o método tendesse para infinito. Com base nas conclusões do capítulo 4 podemos assumir que os resultados do método de Zhai são precisos, mas relativamente ao método misto não podemos ter mesma confiança nos resultados. Apresenta-se de seguida os gráficos obtidos no ensaio 2 para os deslocamentos verticais no carril ao longo do tempo durante o movimento do comboio, para os dois métodos. Nas figuras 6.5 a 6.8 estão representados 21 intervalos de tempo sucessivos.

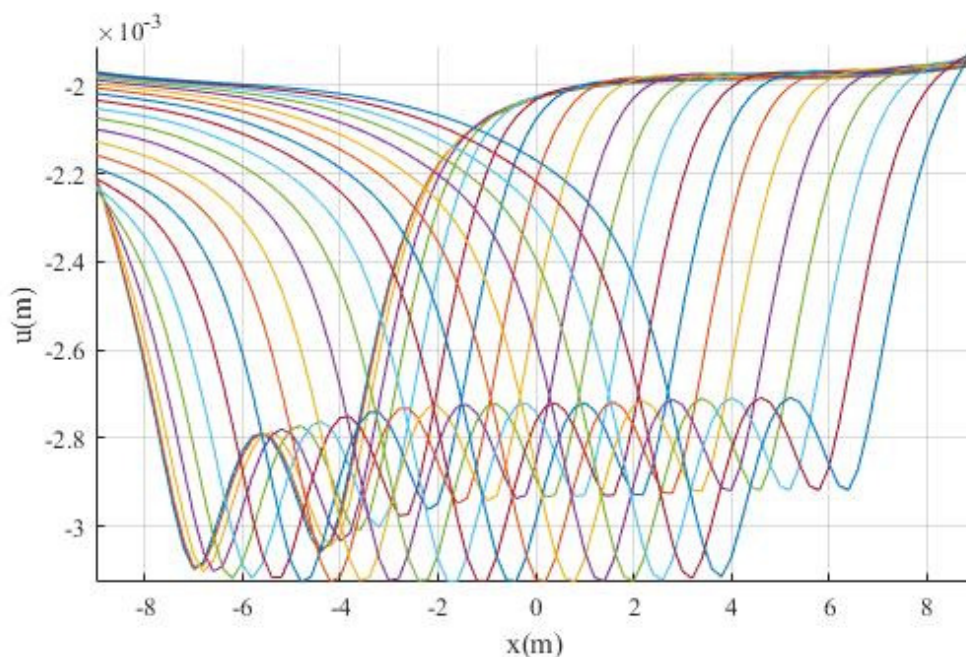


Figura 6. 4 Gráfico de deslocamento obtidos pelo método de Zhai para carril durante vários instantes da movimentação do comboio ( $\Delta t=1,33e-5$ )

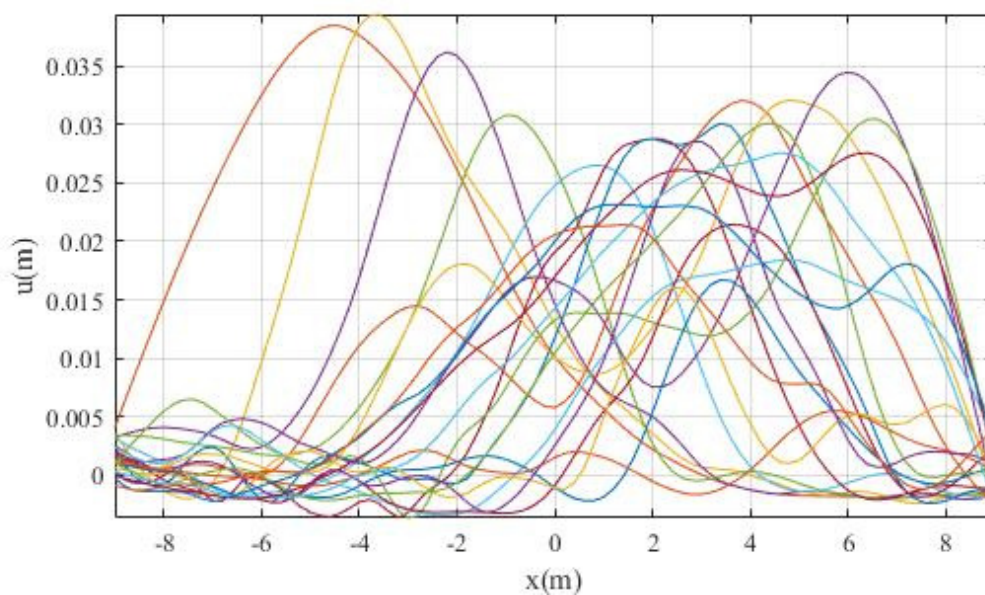


Figura 6. 5 Gráfico de deslocamento obtidos pelo método de Newmark para carril durante vários instantes da movimentação do comboio ( $\Delta t=1,33e-4$ )

Como podemos observar o método misto apresenta valores sem significado, para este passo de tempo. Após a diminuição do passo de tempo para o valor de  $1 \times 10^{-4}$  segundos que foi passo de tempo obtido no capítulo 5, obtemos o seguinte gráfico.

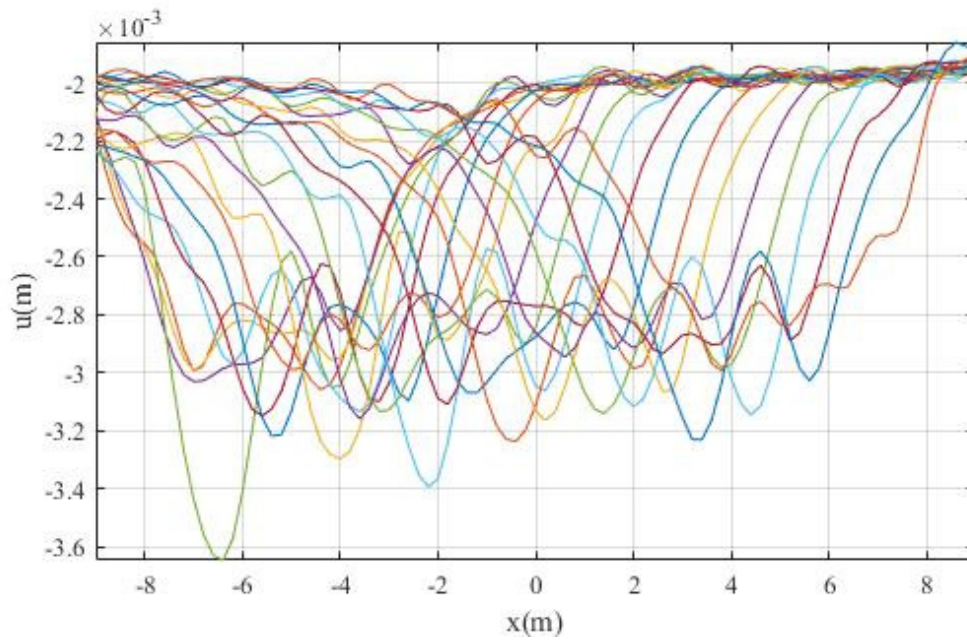


Figura 6. 6 Gráfico de deslocamento obtidos pelo método de Newmark para carril durante vários instantes da movimentação do comboio ( $\Delta t=1,00e-4$ )

Neste gráfico podemos observar que a grandeza dos deslocamentos já se encontra dentro dos valores esperados, apesar da reposta ainda não ser correta. O método torna-se preciso para um valor de 0,0008 segundos.

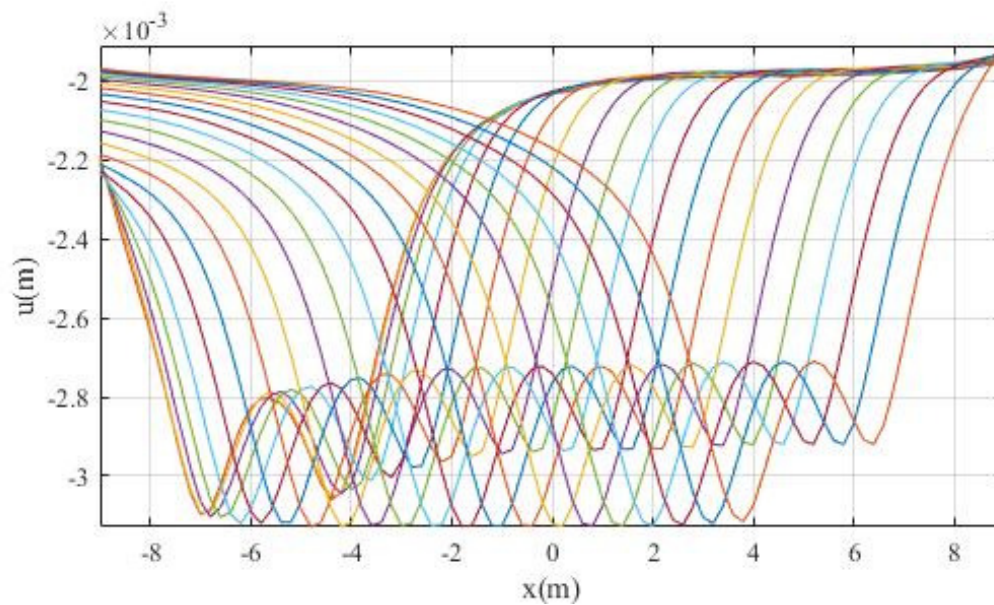


Figura 6. 7 Gráfico de deslocamento obtidos pelo método de Newmark para carril durante vários instantes da movimentação do comboio ( $\Delta t=8,00e-5$ )

Por ultimo é apresentado a sobreposição da resposta obtida pelo método de Zhai representada a verde e do método misto representa a tracejado preto. Esta sobreposição permite-nos concluir que ambas as resposta são precisas.

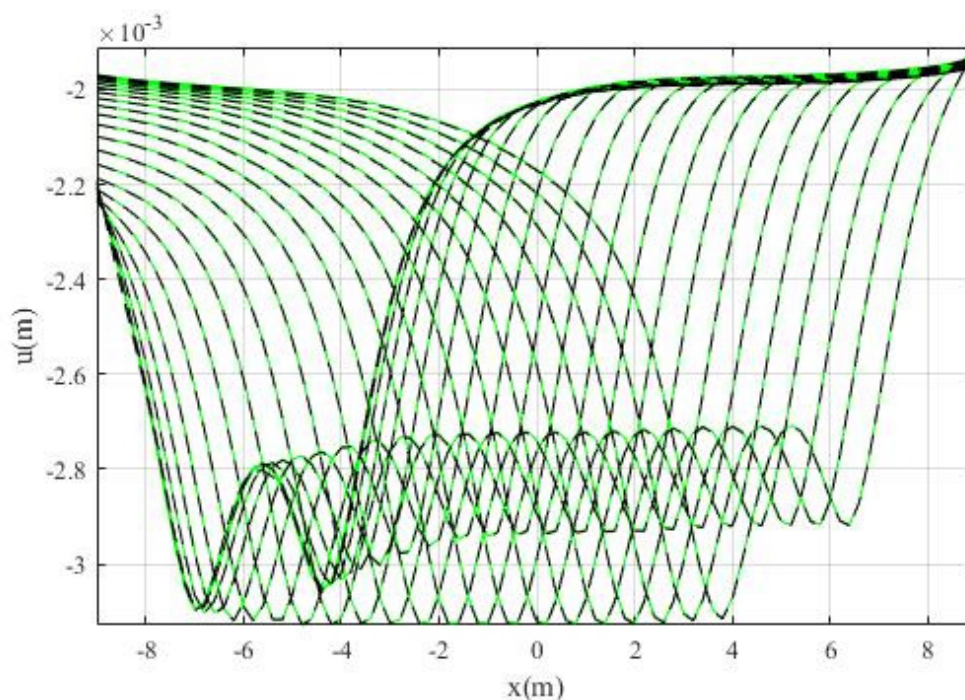


Figura 6. 8 Sobreposição dos deslocamentos obtidos pelo método de Misto e pelo método de Zhai

## 6.3 Conclusões

Este capítulo permite-nos concluir que os métodos mistos podem ser muito mais eficientes que um método explícito ou implícito por si só. Esta conclusão é em geral válida em problemas de iteração solo estrutura, onde temos dois conjuntos estruturais com características de rigidez muito distintas, e em que o material menos rígido tem uma dimensão (número de graus de liberdade) muito superior.

Verifica-se ainda que o método misto herda as desvantagens dos dois métodos que o compõem, ou seja, não é incondicionalmente estável, e atinge estabilidade antes da resposta ser precisa. Isto implica um estudo adicional para garantir que temos a resposta desejada, e como podemos observar nos gráficos 6.5, 6.6 e 6.7, uma alteração mínima do passo de tempo altera completamente os resultados.

Devido a estas diferenças serem tão pequenas um utilizador do método misto, poderá ter de correr o método varias vezes, antes de conseguir os resultados desejados, levando a que a eficiência efectiva do método misto possa ser inferior à diferença teórica observada comparando

apenas os resultados finais. Neste caso o resultado correto foi encontrado à terceira tentativa, e por isso constata-se o método misto foi aproximadamente 3 vezes mais rápido do que o método explícito.

Fase	Resultados Método Misto		Resultados Método Zhai	
	dt max (s)	tempo de calculo (s)	dt max (s)	tempo de calculo (s)
1	8,00E-05	87,4	1,33E-05	723,3
2	8,00E-05	38,0	1,33E-05	379,3

*Tabela 6. 3 Passo tempo críticos para o modelo da via férrea*

Para resolver esta questão, serão necessários estudos adicionais paramétricos que venham propor fórmulas de cálculo semelhantes aquelas apresentadas para o método de Zhai aplicado ao sólido 3D, mas agora referentes ao método misto aplicado no contexto da simulação dinâmica de vias-férreas.

## Capitulo 7

# Conclusões

### 7.1 Conclusões

Neste trabalho foram estudados que fatores influenciam os métodos numéricos implícitos, explícitos e mistos, e quais as principais vantagens e possíveis obstáculos à aplicação de cada um dos métodos.

Mostrou-se que em métodos explícitos como o método de Zhai, os fatores que condicionam o passo de tempo requerido na análise são o amortecimento, a dimensão da malha de elementos finitos, a velocidade de propagação de ondas, sendo que a velocidade de propagação pode ser influenciada através da variação do modulo de elasticidade ou da massa volúmica, ou através da introdução de condições de rigidez nas fronteiras.

Em geral mostrou-se que o passo de tempo critico pode ser previsto através da equação 7.1, e foram calculados valores para a constante  $c$  para modelos amortecidos ( $c=1.4$ ) e para modelos não amortecidos ( $c=3$ ).

$$\Delta t \leq \frac{c}{\pi} \cdot \frac{L}{v}$$

Mostrou-se ainda que a utilização de métodos mistos pode ser muito vantajosa para a resolução de problemas de integração solo-estrutura, tendo-se demonstrado que os métodos mistos são potencialmente 8 a 9 vezes mais rápidos que os métodos implícitos, mas para tirar partido total desta diferença é necessário continuar o estudo do passo de tempo critico.

### 7.2 Desenvolvimentos futuros

Sugere-se como linha de investigação futura o estudo de métodos mistos para o desenvolvimento de formulas simplificadas que permitam a identificação expedita do passo de tempo, para o qual o método misto apresenta resultados precisos. Um dos objetivos seria

identificar a priori qual a componente condicionante do método misto (a parte implícita ou a explícita), e a partir daí criar expressões que tenham em conta todos os fatores condicionantes.

Outra sugestão passa por analisar a interação roda-carril com modelos constitutivos não lineares e a introdução de irregularidades, de forma a identificar se os parâmetros estudados se mantêm válidos nessas condições, ou se tal implica a redução do passo-de-tempo de análise.

# Bibliografia

Chopra, Anil K. “Dynamics of structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering 3<sup>rd</sup> edition”, Englewood Cliffs, New Jersey: University of California at Berkeley, 1995.

Clough, Ray W. and Penzien, Joseph “dynamics of structures 3<sup>rd</sup> edition.”, Berkeley, University Ave, USA, 1995.

Fortunato, Eduardo Manuel Cabrita “Renovação de plataformas Ferroviárias: Tese de Doutoramento”, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 2005.

Guerreiro L. “Sebenta de dinâmica de estruturas IST” Instituto Superior Técnico, Lisboa, Portugal

Hallquist J. “LS-DYNA Theory Manual”, Livermore Software Technology Corporation, Livermore, California, 2006

Kramer S. “Geotechnical Earthquake Engineering” Frist edition, Prentice Hall, 1996

Li D. and Selic E. “Evaluation of Railway Subgrade Problems”, Transportation Research Record, U.S.A, 1995

Lru, W.k and Belytschko, T. “Mixed-time implicit-explicit finite elements for transient analysis”, Computers & Structures, Volume 15, edição 4, Paginas 445-450, 1982

Lysmer, J. and Kuhlemeyer, R. L. (1969) Finite Dynamic Model for Infinite Media, Journal of Engineering Mechanics Division, Volume 95, Edição 4, Paginas 859-878, 1969

Newmark, Nathan M. and ASCE, F. “A method of computation for structural Dynamics”, Journal of the Engineering Mechanics Division, Volume 85, Edição 3, Paginas 67-94, 1959.

Paixão, A. e Fortunato, E. “Novas soluções de superestrutura de via para a alta velocidade, Comparação com a via balastrada tradicional”, Laboratório Nacional de Engenharia Civil, 2009.

Varandas, J.N. and Holscher, P. and Silva, M.A.G. “Dynamic Behaviour of railway tracks on transtios zones”, Computers and Structures Volume 89, Edições 13-14, Julho 2011.

Varanda, J.N. “Long-term behavior of railway transitions under dynamic loading”, Dissertação para a obtenção do grau de Doutor, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa, Lisboa, Portugal 2013.

Varandas, J.N. and Paixão, A. and Fortunato, E. “Dynamic train track ballast/soil interaction at cut-fill transitions with buried culverts”, *Computers & Structures* Volume 189, Páginas 49 - 61, Setembro 2017.

Varandas, J.N. and Holscher, P. and Silva, M.A.G. “Three-dimensional track-ballast interaction model for the study of a culvert transition”, *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, Volume 89, Páginas 116-127, Outubro 2016.

Zhai, W.M., “Two simple fast integration methods for large-scale dynamic problems in engineering”, *Numerical methods in engineering*, Volume 39, Edição 24, páginas 4199-4214, Dezembro 1996.

Zhai, W.M. and Cai, Z. “Dynamic interaction between a lumped mass vehicle and a discretely supported continuous rail track”, *Computers & Structures*, Volume 63, Edição 5, Páginas 987-997, Junho 1997.

# Anexo 1

Neste anexo pretende-se estudar se o método de Zhai é preciso para o primeiro passo de tempo para o qual o método numérico não rebenta. Para tal apresentam-se os gráficos dos deslocamentos do ponto (0,0,0) dos modelos utilizados no capítulo 4. Todos os gráficos apresentam o deslocamento do passo de tempo crítico a verde e o deslocamento para um passo de tempo que é metade do crítico a tracejado preto.

Como se pode observar nos gráficos em geral o refinamento do passo de tempo não altera os resultados, sendo que ocasionalmente se o tempo de análise solicitado for suficientemente pequeno, o método de Zhai corre sem rebentar, mas apresenta resultados não tão precisos, como se vê no gráfico 1.6. Onde o tempo de análise solicitado é 0,3 segundos o que não é suficiente para o modelo atingir a estabilidade.

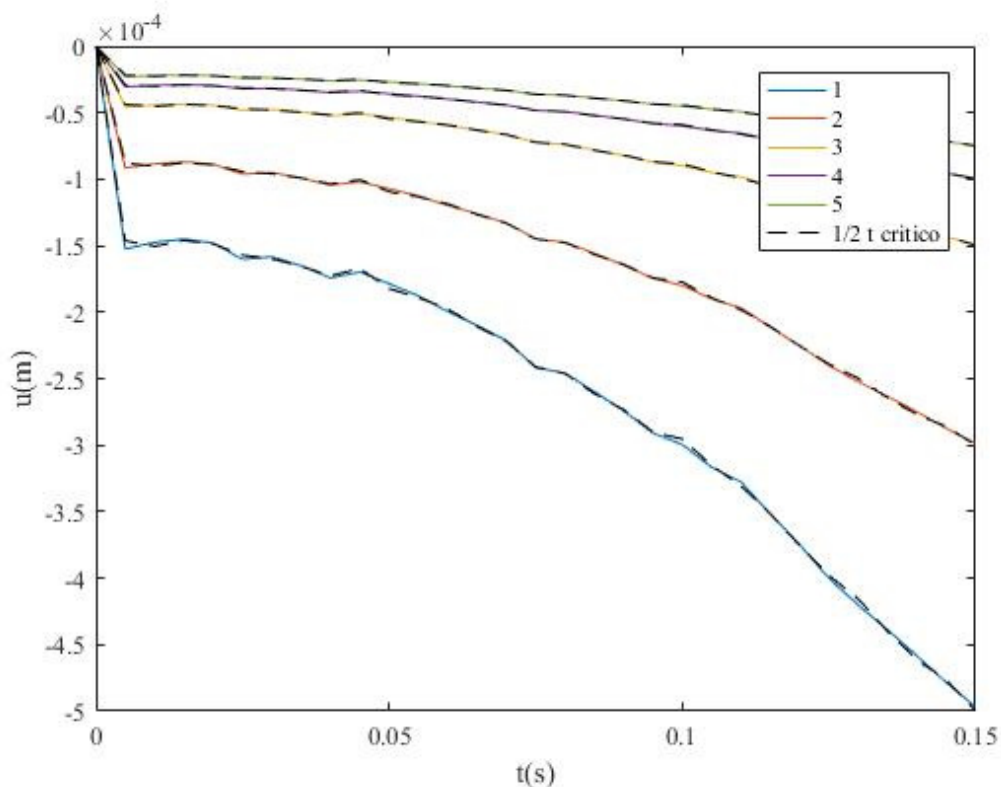


Figura 1. 1 Deslocamento do ponto (0,0,0) para os ensaios 1 a 5 do capítulo 4

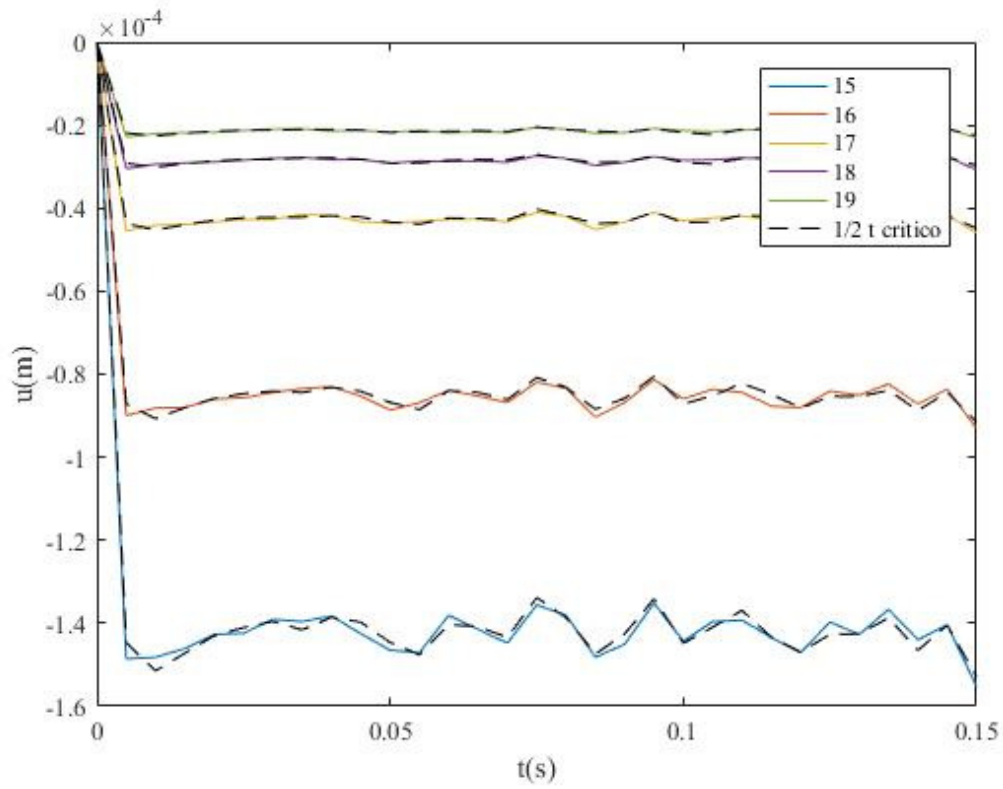


Figura 1. 2 Deslocamento do ponto (0,0,0) para os ensaios 15 a 19 do capítulo 4

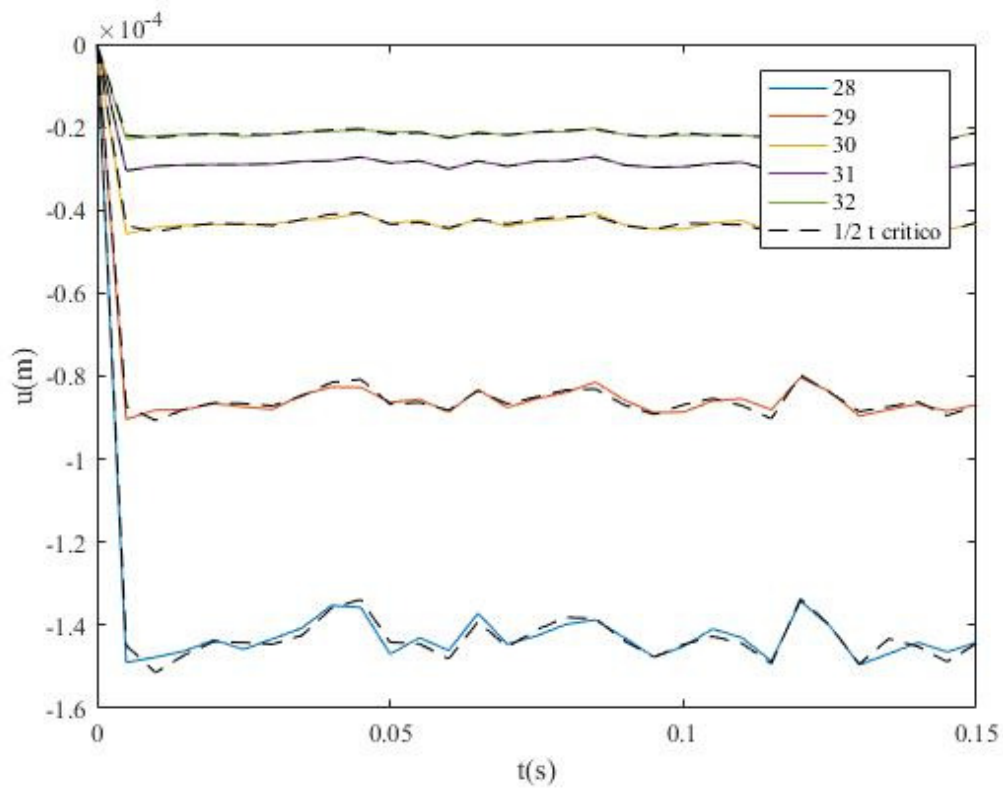


Figura 1. 3 Deslocamento do ponto (0,0,0) para os ensaios 28 a 32 do capítulo 4

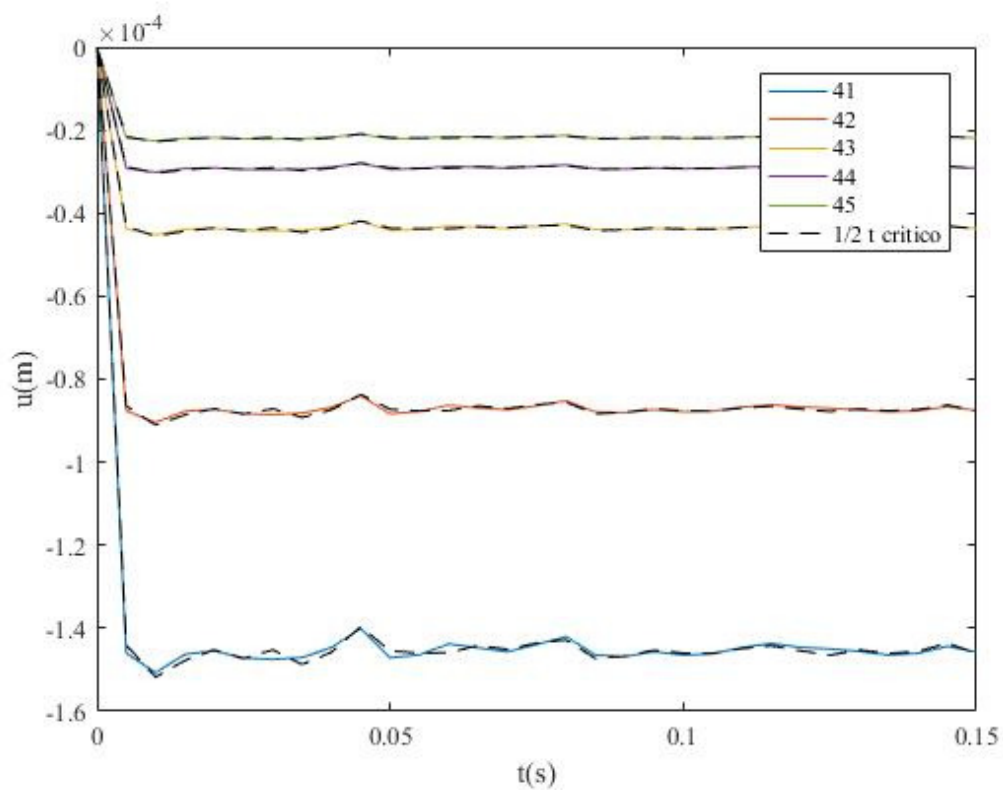


Figura 1. 4 Deslocamento do ponto  $(0,0,0)$  para os ensaios 41 a 45 do capítulo 4

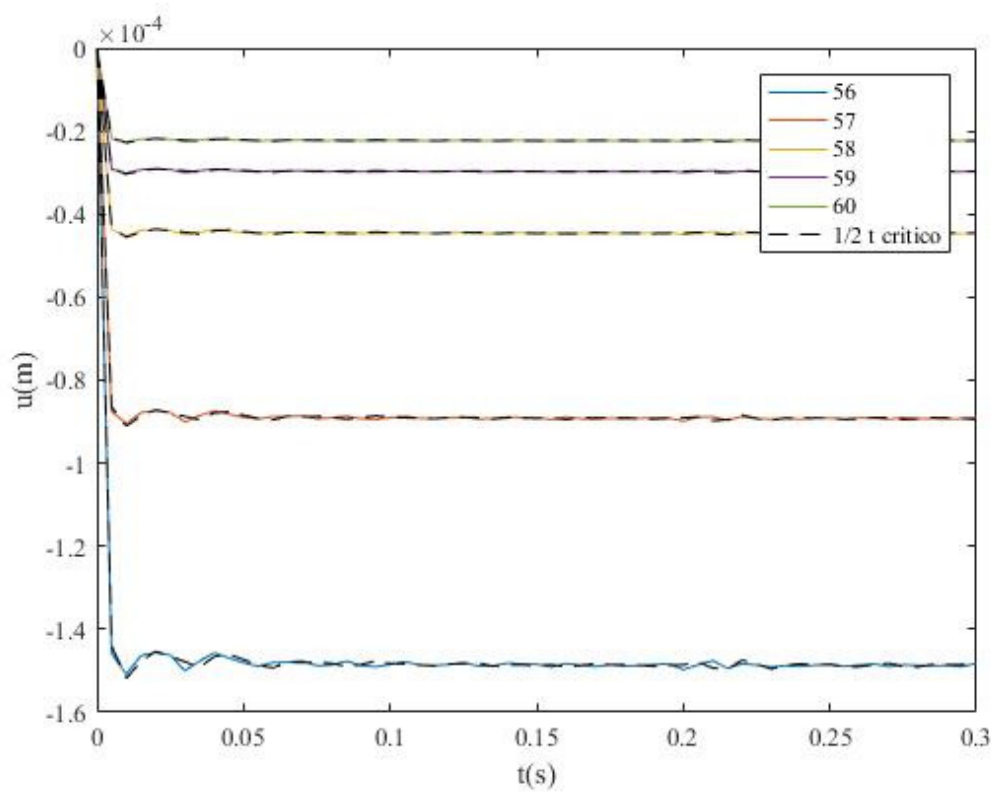


Figura 1. 5 Deslocamento do ponto  $(0,0,0)$  para os ensaios 56 a 60 do capítulo 4

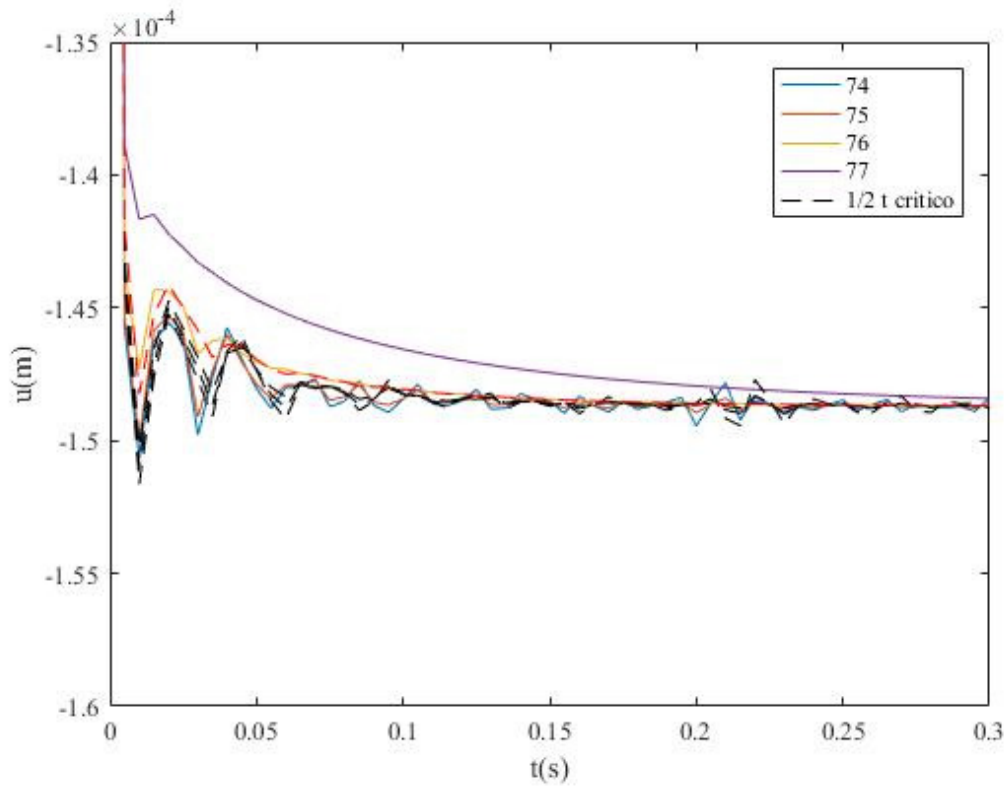


Figura 1. 6 Deslocamento do ponto (0,0,0) para os ensaios 74 a 77 do capítulo 4