



Joseph dos Santos Chiquito

Licenciado em Matemática

**Provisão de Sinistros:
Estudo de uma Companhia de Seguros Angolana**

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em
**Matemática e Aplicação em Atuariado, Estatística e Investigação
Operacional**

Orientadora: Maria de Lourdes Belchior Afonso,
Professora Associada, Universidade Nova de Lisboa

Júri

Presidente: Doutor Manuel Leote Tavares Inglês Esquível
Vogais: Doutor Pedro Alexandre da Rosa Corte Real



FACULDADE DE
CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Previsão de Sinistros Estudo de Uma Companhia de Seguros Angolana

Copyright © Joseph dos Santos Chiquito, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade NOVA de Lisboa.

A Faculdade de Ciências e Tecnologia e a Universidade NOVA de Lisboa têm o direito, perpétuo e sem limites geográficos, de arquivar e publicar esta dissertação através de exemplares impressos reproduzidos em papel ou de forma digital, ou por qualquer outro meio conhecido ou que venha a ser inventado, e de a divulgar através de repositórios científicos e de admitir a sua cópia e distribuição com objetivos educacionais ou de investigação, não comerciais, desde que seja dado crédito ao autor e editor.

"Se eu vi mais longe, foi por estar sobre os ombros de gigantes"
Isaac Newton for Robert Hooke - Fevereiro de 1676

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pelo fôlego da vida e a criação de todas as coisas existentes.

Um especial agradecimento à minha orientadora Professora Doutora Maria de Lourdes Belchior Afonso, pelo incentivo, disponibilidade, atenção e compreensão ao longo da realização do trabalho final de mestrado.

Agradeço à minha esposa, Maria Odete Lourenço Miguel Chiquito, pelo estímulo e apoio incondicional durante a realização do presente trabalho. O teu amor é a minha fortaleza.

É com enorme prazer que agradeço aos meus Pais, José Manuel Chiquito e Conceição Graciano Dias dos Santos Chiquito, à mãe que ganhei ao longo da vida, Catarina Lourenço Domingos Miguel pelo amor, incentivo e confiança depositada.

Agradeço também ao meu querido irmão Emerson José dos Santos Chiquito, às minhas amadas cunhadas Madalena Miguel Eduardo e Bibiana Russa Miguel, aos meus colegas e amigos, particularmente o Domingos Lourenço, pelo apoio e disponibilidade em todas as fases da formação.

Por fim, agradeço à todos que contribuíram directa ou indirectamente para que o meu sonho se realizasse.

Muito obrigado Maria Odete Lourenço Miguel Chiquito.

RESUMO

As empresas de seguros assumem as responsabilidades de eventuais sinistros dos seus clientes, sem conhecer a gravidade dos mesmos, por isso é necessário que a seguradora garanta recursos financeiros necessários para fazer face às responsabilidades assumidas. Deste modo, os atuários devem constituir uma provisão técnica adequada para garantir os recursos financeiros da seguradora.

O presente trabalho tem como finalidade saber se a análise da provisão constituída por uma seguradora angolana é, ou não adequada para as suas responsabilidades futuras.

Assim, desenvolveu-se o trabalho em 3 (três) capítulos. O primeiro capítulo é constituído pela introdução do problema estudado, o segundo capítulo está dividido em duas partes, a primeira está destinada ao cálculo das estimativas de sinistro, em que, aplicamos os vários métodos determinísticos entre eles: *Link Ratio* e o *Grossing Up* para o cálculo da provisão, e na segunda parte aplicamos os modelos estocástico *Thomas Mack* e *Simulações de Bootstrap* para obter intervalos de confiança para as estimativas das provisões. Por fim, no terceiro capítulo apresentou-se algumas considerações a partir das quais a seguradora deverá incrementar com vista a garantir uma melhor gerência, e evitar uma possível insolvência.

Palavras-chave: Provisões, Indemnizações, Sinistros, Link Ratio, Thomas Mack, Bootstrap.

ABSTRACT

Insurance companies assume the responsibility to deal with claims of their customers, without knowing the seriousness of the same, so it is necessary for the insurer to guarantee the necessary financial resources to face the assumed liabilities. Thus, actuaries must make an adequate technical provision to guarantee the insurer's financial resources.

The present work has to know if the analysis of the provision for an Angolan insurer is, or not, adequate for its future responsibilities.

Thus, the work is intellectual in 3 (three) chapters. The first chapter is constituted by the introduction of the studied problem, the second chapter is divided in two parts, the first is destined to the calculation of the claim indications, in which, we apply the several deterministic methods among them: textit Link Ratio and the textit Grossing Up for the calculation of the provision, and in the second part we apply the stochastic models textit Thomas Mack and textit Bootstrap simulations to obtain confidence intervals for the connections of the provisions. Finally, in the third chapter we present some considerations from which the insurer must increase in order to guarantee a better area, and avoid a possible insolvency.

Keywords: Provisions, Indemnities, Claims, Link Ratio, Thomas Mack, Bootstrap.

ÍNDICE

Lista de Figuras	xv
Lista de Tabelas	xvii
Listagens	xix
Siglas	xxi
1 Introdução	1
2 Métodos Para Provisões de Sinistros	3
2.1 Introdução	3
2.2 Modelos Determinísticos	3
2.2.1 Conceitos Básicos	4
2.2.2 Método <i>Link Ratios</i>	6
2.2.3 Método de <i>Chain Ladder</i>	7
2.2.4 Método <i>Grossing UP</i>	8
2.3 Projecção do factor Cauda	9
2.4 Modelos Estocásticos	10
2.4.1 Introdução	10
2.4.2 Thomas Mack	10
2.4.3 Simulações de <i>tstrap</i>	13
2.4.4 Cálculo das medidas de Variabilidade	15
3 Resultados	17
3.1 Modelos Determinísticos	19
3.1.1 <i>Link Ratios</i>	19
3.1.2 Método de <i>Chain Ladder</i>	20
3.1.3 <i>Grossing Up</i>	21
3.1.4 Resultados - Modelos determinísticos	21
3.2 Projecção do Factor Cauda	22
3.3 Modelos Estocásticos	23
3.3.1 <i>Thomas Mack</i>	23
3.3.2 Simulação de <i>Bootstrap</i>	28

3.4	Aplicação do Modelo Determinístico para o Número de Sinistros	31
3.5	Observações dos Resultados	33
4	Conclusão	35
	Bibliografia	37
I	Resultados do R	39
I.1	Indemnizações	39
I.1.1	Dados	39
I.1.2	Chain Ladder	40
I.1.3	Thomas Mack	41
I.1.4	Simulações Bootstrap	42
I.2	Número de Sinistro	43
I.2.1	Thomas Mack	44

LISTA DE FIGURAS

2.1	Processo Temporal de Sinistro	4
3.1	Indemnização Acumulada	19
3.2	Número de Sinistros Acumulado	19
3.3	Coefficiente de Desenvolvimento Projectado	22
3.4	Proporcionalidade entre os anos de desenvolvimento	23
3.5	Coefficiente de <i>Spearman</i>	24
3.6	Resíduos ponderados	26
3.7	Resíduos <i>vs</i> Período de Desenvolvimento	29
3.8	Resíduos <i>vs</i> Ano de Ocorrência	29
3.9	Ajuste da Distribuição Normal às Estimativas de <i>Bootstrap</i>	30
I.1	Thomas Mack R	41
I.2	Bootstrap R	43

LISTA DE TABELAS

2.1	Número de Sinistros	5
2.2	Indemnizações Pagas	5
3.1	Indemnizações Pagas em Cada Período	17
3.2	Indemnizações Acumuladas	18
3.3	Número de Sinistros em Cada Período	18
3.4	Número de Sinistros Acumulado	18
3.5	Link Ratio	20
3.6	Coefficiente de Desenvolvimento	20
3.7	Indemnizações Acumuladas	21
3.8	<i>Grossing Up</i>	21
3.9	Provisão para Sinistros pelos métodos determinísticos	22
3.10	Anos de Desenvolvimento do Coeficiente Projectado	23
3.11	Número de Ordem dos Factores de Desenvolvimento Individuais	24
3.12	Coefficiente de correlação de Spearman	24
3.13	Anos de Desenvolvimento do Coeficiente Projectado	25
3.14	Conjuntos S e L	25
3.15	Momentos das variáveis Z_j e Z	26
3.16	Estimativa da variância e Erro Quadrático Médio	27
3.17	Intervalo de Confiança	27
3.18	Exemplos de Resíduos de <i>Person</i>	28
3.19	Exemplos de Resíduos de <i>Person</i> Corrigido	28
3.20	Exemplo das Indemnizações Ajustadas - Modelo de <i>Poisson</i> Sobre-dispersão	29
3.21	Exemplo das Indemnizações Projectadas	30
3.22	Resultados do Método de <i>Bootstrap</i>	31
3.23	Link Ratio - Número de Sinistros	31
3.24	<i>Chain Ladder</i> - Número de Sinistros	32
3.25	<i>Grossing Up</i> - Número de Sinistros	32
3.26	Reserva para os Números de Sinistros	33
3.27	Provisões Intervalo de Confiança	33
3.28	Custo Médio por Sinistro	34
3.29	Custo Estimado da Seguradora	34

LISTA DE TABELAS

I.1	Dados R	39
I.2	Matriz Acumulada R	40
I.3	Factor de Desenvolvimento R	40
I.4	Método de Chain Ladder	40
I.5	Thomas Mack Sem factor cauda R	41
I.6	Thomas Mack Com factor cauda R	42
I.7	Simulações de Bootstrap R	42
I.8	Número de Sinistro	43
I.9	Coeficiente de Desenvolvimento	43
I.10	Coeficênte de Desenvolvimento	44
I.11	Thomas Mack	44

LISTAGENS

I.1	Versão R	39
-----	----------	----

SIGLAS

<i>CL</i>	Chain Ladder.
<i>EQM</i>	Erro médio Quadrado.
<i>IBNER</i>	Incurred But Not Enough Reported.
<i>IBNR</i>	Incurred But Not Reported.
<i>IC</i>	Intervalo de Confiança.
<i>Kz</i>	Kwanza.
<i>Run Off</i>	Matriz de Desenvolvimento.

INTRODUÇÃO

A necessidade de calcular o montante que a empresa de seguros deve contabilizar e financiar adequadamente e ser suficiente para fazer face às responsabilidades resultantes dos contratos de seguro denominado provisão ou reservas surge em várias circunstâncias diferentes, das quais, avaliar a condição financeira de uma seguradora, uma vez que os movimentos nas reservas durante um período de tempo são essenciais para avaliar o seu processo, assegurar o negócios de seguros no sentido de estimar o custo futuro dos sinistros de riscos a serem assumidos, avaliar a solvência de uma seguradora, em termos da sua capacidade de honrar os seus passivos, atribuir valor ao património líquido de uma seguradora, principalmente para fins de vendas ou aquisição e colocar um valor financeiro de uma carteira de negócios de seguros.

A subida do volume de negócios, a exigência do mercado e directivas internacionais levou a que, o estudos sobre reservas passasse de estimativas pontuais para análise estatísticas.

As reservas para sinistros são classificadas segundo a data de avaliação em duas categorias: processo de sinistros para as quais o evento ocorreu e que já são conhecidos e relatados à seguradora, com a designação *IBNER*, e os processos de sinistros para as quais o evento já ocorreu, mas que ainda não foram relatados à seguradora *IBNR*.

MÉTODOS PARA PROVISÕES DE SINISTROS

2.1 Introdução

As provisões de sinistros correspondem ao custo total estimado que uma seguradora do ramo não vida terá de suportar para regularizar os compromissos financeiros. Normalmente, baseia-se na experiência passada, relativamente ao número de sinistros e ao montante pago num exercício económico.

Os vários métodos para provisões de sinistros têm como objectivo estimar o custo dos sinistros que se encontram participados e regularizados, estes envolvem aplicação de uma série de suposições aos dados subjacentes a partir dos quais uma provisão seria avaliada, por esta razão um dos pontos importante na estimativa da provisão de sinistro é o conhecimento da natureza e da qualidade dos dados, pois, as informações recolhidas em excesso ou reduzidas podem comprometer a significância dos métodos, uma vez que excesso de dados poderá introduzir tendências passadas e não explicaria a realidade actual, por outro lado, dados reduzidos podem não ser suficientes para uma boa conclusão. Nesta secção iremos estudar os métodos mais usuais nas estimativas de provisões de sinistros.

2.2 Modelos Determinísticos

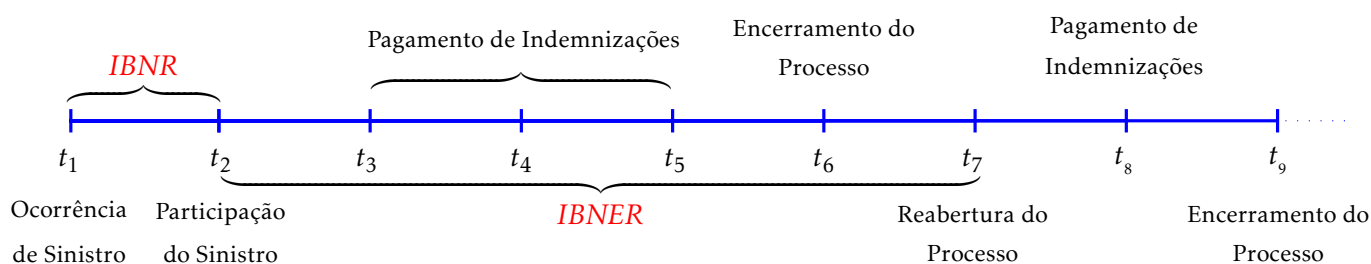
As provisões de sinistros pendentes são obtidas usando modelos determinísticos. Estes são métodos convencionais que fornecem simplicidade a excelentes modelagens, são um bom ponto de partida para avaliar as provisões de sinistros e também têm sido usados como base para o desenvolvimento de muitos modelos estocásticos. Nos modelos clássicos, algoritmos determinísticos são aplicados para obter uma estimativa central única do passivo com sinistros pendentes. Os modelos não consideram a natureza estocástica do

passivo [16].

2.2.1 Conceitos Básicos

Consideremos o seguinte esquema que descreve o tempo do processo sobre provisão de sinistros:

Figura 2.1: Processo Temporal de Sinistro



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

em que:

- t_1 Instante em que a seguradora passa ter responsabilidades;
- t_2 Instante em que a seguradora toma conhecimento das suas responsabilidades;
- t_3, t_4 e t_5 Instante de análise, avaliação e pagamento de possíveis indemnizações decorrente das responsabilidades;
- t_6 Encerramento do processo;
- t_7 Instante da possível reabertura do processo;
- t_8 e t_9 Instante do pagamento de mais indemnizações e o encerramento definitivo do processo.

Os dados recolhidos das companhias de seguros são agrupados, por norma, anualmente, em classes homogéneas, sob forma de matriz triangular, denominado *Matriz de Desenvolvimento* ou *run-off*.

Tabela 2.1: Número de Sinistros

<i>Período de Ocorrência</i>	<i>Período de Desenvolvimento</i>								
	0	1	2	...	j	...	n-1	n	∞
0	$N_{0,0}$	$N_{0,1}$	$N_{0,2}$...	$N_{0,j}$...	$N_{0,n-1}$	$N_{0,n}$	$N_{0,\infty}$
1	$N_{1,0}$	$N_{1,1}$	$N_{1,2}$	\vdots	$N_{1,j}$	\vdots	$N_{1,n-1}$		
2	$N_{2,0}$	$N_{2,1}$	$N_{2,2}$	\vdots	$N_{2,j}$	\vdots			
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots				
i	$N_{i,0}$	$N_{i,1}$	$N_{i,2}$	\vdots					
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots						
n-1	$N_{n-1,0}$	$N_{n-1,1}$							
n	$N_{n,0}$								

Tabela 2.2: Indemnizações Pagas

<i>Período de Ocorrência</i>	<i>Período de Desenvolvimento</i>								
	0	1	2	...	j	...	n-1	n	∞
0	$X_{0,0}$	$X_{0,1}$	$X_{0,2}$...	$X_{0,j}$...	$X_{0,n-1}$	$X_{0,n}$	$X_{0,\infty}$
1	$X_{1,0}$	$X_{1,1}$	$X_{1,2}$	\vdots	$X_{1,j}$	\vdots	$X_{1,n-1}$		
2	$X_{2,0}$	$X_{2,1}$	$X_{2,2}$	\vdots	$X_{2,j}$	\vdots			
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots				
i	$X_{i,0}$	$X_{i,1}$	$X_{i,2}$	\vdots					
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots						
n-1	$X_{n-1,0}$	$X_{n-1,1}$							
n	$X_{n,0}$								

Em que, as linhas da matriz nas tabelas 2.1 e 2.2 representam o período de ocorrência de sinistro $i \in \{0, \dots, n\}$ e as colunas o período de desenvolvimento dos sinistros $j \in \{0, \dots, n\}$. O $X_{i,j}$ é a média ou total das indemnizações referentes a sinistros ocorridos no período i mas emitidas ou pagas apenas no período j ou movimentos das provisões, o n é o último período para qual existem dados disponíveis na companhia, e o período ∞ é a estimativa do *run-off*. No caso de $N_{0,\infty}$ entende-se o número de sinistros que ainda serão reportados, nos período futuros, para o i anos de ocorrência em análise. No caso de $X_{0,\infty}$ entende-se todos os pagamentos que ainda se esperam realizar no futuro, para os sinistros ocorridos no i período em análise. Quando o horizonte temporal é alargado, é usual recorrer-se à provisão constituída para os processos ainda em aberto à data do estudo, por se entender que o gestor de sinistro, já terá bom conhecimento dos mesmos. No entanto não será a abordagem seguida neste trabalho, como se ira observar em 2.3. O raciocínio desenvolvido para $X_{i,j}$, pode ser aplicado a $N_{i,j}$.

Consideremos $C_{i,j}$ as indemnizações acumuladas, teremos:

$$C_{i,j} = \sum_{k=0}^j X_{i,k} \quad \text{onde } i, k \in \mathbb{Z}^+, 0 \leq j \leq n \quad (2.1)$$

Os incrementos são obtidos a partir das indemnizações acumuladas, isto é:

$$X_{i,j} = \begin{cases} C_{i,j} & \text{se } j = 0 \\ C_{i,j} - C_{i,j-1} & \text{c.c} \end{cases} \quad (2.2)$$

A estimativa futura das indemnizações acumuladas são obtidas por:

$$\hat{C}_{i,j} = C_{i,n-1} + \sum_{k=n-i+1}^j \hat{C}_{i,k} \quad (2.3)$$

e as incrementais dadas por:

$$\hat{X}_{i,j} = \begin{cases} \hat{C}_{i,n-i+1} & \text{se } j = n - i + 1 \\ \hat{C}_{i,j} - C_{i,j-1} & \text{c.c} \end{cases} \quad (2.4)$$

O valor estimado das responsabilidades atuais, associado ao ano de ocorrência i , denotado por \hat{R}_i é:

$$\hat{R}_i = \hat{C}_{i,\infty} - C_{i,n-i} \quad 0 \leq i \leq n \quad (2.5)$$

em que, $\hat{C}_{i,\infty}$ representa as estimativas dos montantes acumulado em cada ano de acidente. Portanto, o valor estimado da provisão total é dado por:

$$\hat{R} = \sum_{i=0}^n \hat{R}_i \quad (2.6)$$

2.2.2 Método *Link Ratios*

O método de *Link Ratios* [6] do qual o de *Chain Ladder* é um caso particular, difere no estimador dos coeficientes de desenvolvimento.

$$f_{i,j} = \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} \quad i + j \leq n \quad (2.7)$$

em que $f_{k,j}$ é um coeficiente individual.

Os coeficientes de desenvolvimento \hat{f}_j são dados por:

- Pior Factor

$$\hat{f}_j = \max_i \{f_{i,j}\} \quad j \leq n \quad (2.8)$$

- Média dos Factores

$$\hat{f}_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ \frac{1}{n-j} \sum_{k=0}^{n-j-1} f_{k,j} & \text{se c.c} \end{cases} \quad (2.9)$$

- Melhor Factor

$$\hat{f}_j = \min_i \{f_{i,j}\} \quad j \leq n \quad (2.10)$$

Para completar o triângulo inferior da matriz de desenvolvimento acumulado, é suficiente fazer, para $i + j \geq n$

$$\hat{C}_{i,k} = C_{i,n-i} \prod_{k=n-i+1}^j \hat{f}_k \quad (2.11)$$

2.2.3 Método de *Chain Ladder*

É um algoritmo recursivo usado para estimar as reservas de sinistros, baseado num conjunto de rácios que relacionam os montantes de um determinado ano como os montantes dos anos seguintes [7]. Por ser de fácil aplicação é um método muito usual, robusto e apresenta resultados fiáveis.

O método de *Chain Ladder* [8] parte do pressuposto de que existe proporcionalidade entre os anos de desenvolvimentos. Os diferentes anos de sinistros são independentes e os coeficientes de desenvolvimento são constantes ao longo dos anos.

$$\hat{C}_{i,j} \simeq \hat{f}_j \hat{C}_{i,j-1} \quad (2.12)$$

Os estimadores de *Chain ladder* das indemnizações acumuladas $C_{i,j}$ com $i + j \geq n$ são obtidos pela fórmula (2.11), onde a estimativa \hat{f}_j será:

$$\hat{f}_j = \begin{cases} \frac{\sum_{i=0}^{n-j} C_{i,j}}{\sum_{i=0}^{n-j} C_{i,j-1}} & \text{se } 0 \leq j \leq n-1 \\ \frac{\hat{C}_{0,\infty}}{C_{0,n}} & \text{c.c} \end{cases} \quad (2.13)$$

O valor da estimativa da reserva no ano de ocorrência k pode ser obtido por (2.5) e para a reserva total aplica-se (2.6).

2.2.4 Método *Grossing Up*

Método de *Grossing Up* ou técnica de *Técnica de Iceberg* definida por *Salzmann* [14], considera que a reserva pode ser obtida por subtracção entre massa total prevista de indemnizações para cada ano e a parte visível paga das indemnizações até à data.

O método baseia-se na hipótese de que existem parâmetros $\hat{\gamma}_1, \dots, \hat{\gamma}_k$, designado por factores *Grossing Up* [15]. Com os dados agrupados em classes homogéneas, são apresentadas sob forma de matriz (Triângulo de desenvolvimento), considerando o primeiro ano de ocorrência $C_{1,j}$ como encerrados. Determina-se a percentagem de cada montante pago a cada ano de desenvolvimento, isto é:

$$\hat{\gamma}_j = \hat{\gamma}_{1,j} = \frac{C_{1,j}}{C_{1,\infty}} \quad j = 1, \dots, n \quad (2.14)$$

A estimativa dos montantes de indemnizações é dada por:

$$\hat{C}_{i,n} = \frac{C_{i,n-i+1}}{\hat{\gamma}_{n-i+1}} \quad (2.15)$$

onde

$$\hat{f}_j = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ \frac{\sum_{j=0}^{i-k-1} C_{j,k}}{\sum_{j=0}^{i-k-1} \hat{C}_{k,n}} & \text{c.c} \end{cases} \quad (2.16)$$

A indemnização acumulada do ano de desenvolvimento j será:

$$E[\hat{C}_{i,j}] = \hat{\gamma}_j \frac{E[C_{i,n-i+1}]}{\hat{\gamma}_{n-i+1}} \quad (2.17)$$

O cálculo das indemnizações acumuladas de extrapolação e dos estimadores de extrapolação para as perdas acumuladas finais procede por recursão ao longo dos anos, que gera:

$$\hat{C}_{i,j} = \hat{C}_{i,n} \times \hat{\gamma}_j \quad (2.18)$$

Como podemos observar, os preditores de extrapolação nada mais são do que os preditores de desenvolvimento de perdas com relação às indemnizações acumuladas γ_j , assim temos:

$$\hat{C}_{i,j} = C_{i,n-i+1} + (\hat{\gamma}_j - \hat{\gamma}_{n-i+1})\hat{C}_{i,n} \quad i + j \geq n + 2 \quad (2.19)$$

Sabendo que:

$$\hat{R}_i = \hat{C}_{i,n} + C_{i,n-i+1} = C_{i,n-i+1} \left(\frac{1}{\hat{\gamma}_{n-i+1}} - 1 \right) \quad (2.20)$$

No método *Grossing Up*, possui algumas particularidades para o cálculo dos factores de desenvolvimento:

- *with Averaging*

Neste caso, os estimadores *Grossing Up* são calculados através da média de cada coluna da matriz, constituídas pelas proporções dos pagamentos até ao final do exercício.

$$\hat{\gamma}_j = \begin{cases} 1 & \text{se } j = n \\ \frac{\sum_{k=1}^{n-j} C_{j,k}}{(n-j)C_{k,n-k+1}} & \text{c.c} \end{cases} \quad (2.21)$$

- *Worst Case*

Para os estimadores do pior caso, é necessário considerar os factores de *Grossing Up* menos favorável (o menor deles), assim obteremos o maior valor da provisão.

$$\hat{\gamma}_j = \begin{cases} 1 & \text{se } j = n \\ \min \left\{ \frac{C_{j,k}}{C_{k,n-k+1}} \right\} & \text{c.c} \end{cases} \quad (2.22)$$

- *Best Case*

Ao contrário do *Worst Case*, usamos o maior valor dos factores.

$$\hat{\gamma}_j = \begin{cases} 1 & \text{se } j = n \\ \max \left\{ \frac{C_{j,k}}{C_{k,n-k+1}} \right\} & \text{c.c} \end{cases} \quad (2.23)$$

2.3 Projecção do factor Cauda

Uma vez que os sinistros relativamente ao período de ocorrência são participados num período posterior ao exercício financeiro, e os pagamentos ocorrem ao longo de muitos exercícios, deve-se incorporar as melhores estimativas de pagamentos futuros, até ao encerramento do processo (run off) na estimação da evolução das indemnizações futuras. Caso contrário, poderá levar as estimativas de provisões para sinistros pouco adequadas à realidade da seguradora. Portanto, deve ser integrado nas estimativas finais o factor cauda, que é definido pelo atuário.

Existem vários modelos para se estimar o factor cauda, por exemplo [5]. Neste trabalho optou-se por utilizar o modelo proposto por *Neuhaus* [11].

Segundo Neuhaus, a projecção dos coeficientes de desenvolvimento é definida por:

$$\hat{f}_j = 1 + \delta(\hat{f}_{j-1} - 1) \quad (2.24)$$

onde δ está definido no intervalo $[0, 1]$, e é escolhido pelos atuários conforme as informações disponíveis. Este δ permite ao atuário ajustar o factor cauda às características do ramo em análise. O momento j a partir do qual se efectua este alisamento e projecção também é escolhido pelo atuário.

2.4 Modelos Estocásticos

2.4.1 Introdução

Os modelos determinísticos produzem resultados sensíveis a variabilidade, não avaliando a incerteza em torno dos resultados obtidos. Os métodos estocásticos apresentam-se como solução para medir a variabilidade dos métodos determinísticos.

Os métodos de cálculo de reservas estocásticas fornecem a melhor estimativa das indemnizações futuras e apresentam estimativas da variabilidade em torno desta estimativa, em alguns casos, fornecem as distribuições e seus fluxos de caixa associados.

Nesta secção, iremos estudar alguns métodos estocásticos paramétricos e não paramétricos que permitem determinar variabilidade dos métodos estudados em 2.2.

2.4.2 Thomas Mack

O método *Thomas Mack* [9] é um modelo estocástico não paramétrico que permite determinar a variabilidade das estimativas das reservas técnicas obtidas com o método *Chain Ladder*.

Por se basear no método de *Chain Ladder*, o método de *Thomas Mack* seguirá os mesmos pressupostos de *Chain Ladder* :

- 1 Existe coeficiente de desenvolvimento $f_j > 0, j = 0, 1, \dots, n - 1$, tal que:

$$E(C_{i,j+1} | C_{i,0}, \dots, C_{i,j}) = C_{i,j} \times f_j, \quad 0 \leq i \leq n$$

a) Proporcionalidade entre anos de desenvolvimento

Para testar a existência de proporcionalidade entre os anos de desenvolvimento, deve-se construir um gráfico com os pares $C_{i,j}, C_{i,j+1}$ e traçar uma recta que passe na origem, com declive \hat{f}_j , caso existam desvios significativos, rejeita-se a hipótese e deve-se procurar um estimador que melhor se ajuste aos dados.

b) Existência de correlação entre os factores de desenvolvimento

Verifica-se a existência de correlação entre os factores de desenvolvimento usando o teste de *Spearman* [13]. O teste de *Spearman* definido como medida

não paramétrica que permite testar a dependência entre duas variáveis, com base na avaliação de uma função monótona através da descrição das variáveis. Este teste não tem em conta qualquer distribuição para os dados [6].

$$T_j = 1 - 6 \sum_{i=0}^{n-j-1} \frac{(r_{i,j} - s_{i,j})^2}{(n-1)^3 - n - j} \quad 1 \leq j \leq n-2 \quad -1 \leq T_j \leq 1 \quad (2.25)$$

onde:

- * $[r_{i,j}]$ é uma matriz e, $r_{i,j}$ é o numero de ordem atribuído ao $\hat{f}_{i,j}$
- * $[s_{i,j}]$ é uma matriz com $s_{i,j}$ o numero de ordem atribuído ao $\hat{f}_{i,j-1}$

Na ausência de correlação, tem-se que:

$$E(T_j) = 0 \quad 1 \leq j \leq n-2$$

$$V(T_j) = \frac{1}{n-j-1} \quad 1 \leq j \leq n-2$$

o estimador de variância mínima, segundo [8] será:

$$T = \frac{\sum_{j=1}^{n-2} (n-j-1) T_j}{\sum_{j=1}^{n-2} (n-j-1)} \quad (2.26)$$

com

$$\begin{cases} E(T) = 0 \\ V(T) = \frac{1}{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \end{cases}$$

T é o estimador definido pela soma ponderada das variáveis aleatórias não correlacionadas e com distribuição normal, logo podemos assumir que T tem distribuição assintótica normal pela aplicação do teorema do limite central.

$$\left[E(T) - \Phi^{-1} \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) \sqrt{V(T)}; E(T) + \Phi^{-1} \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) \sqrt{V(T)} \right] \quad (2.27)$$

com $\Phi^{-1} \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right)$ o quantil de probabilidade $1 - \frac{\alpha}{2}$ da distribuição normal reduzida. Portanto, se a estimativa T estiver fora do intervalo de confiança definido acima, com nível de confiança $100(1 - \alpha)\%$, sendo $\alpha \in [0, 1]$, rejeita-se a ausência de correlação entre os factores individuais de desenvolvimento.

2 Centralidade dos factores de desenvolvimento

Os diferentes anos de ocorrência de acidentes são independentes, isto é: $\{C_{i,0}, \dots, C_{i,\infty}\}$ e $\{C_{k,0}, \dots, C_{k,\infty}\}$, $0 \leq i, k \leq n-1$ e $i \neq k$, logo \hat{f}_j são não enviesados.

Assumindo uma aproximação a distribuição normal, existe independência como vimos em 1, logo:

$$\left[E(Z) - \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{V(Z)}; E(Z) + \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{V(Z)} \right]$$

com $Z = \sum_{j=0}^n Z_j$, e com os momentos de Z_j dados por:

$$\begin{cases} E(Z_j) = \frac{z}{2} - C_m^{z-1} \frac{z}{2^z} \\ V(Z_j) = \frac{z(z-1)}{4} - C_m^{z-1} \frac{z(z-1)}{2^z} + E(Z_j) - [E(Z_j)]^2 \end{cases} \quad (2.28)$$

Onde:

$z = L_j + S_j$ com S_j , número de elemento de S (*small factor*) e L_j , número de elemento de L (*Large factor*) em cada diagonal de factores de desenvolvimento, que segue a distribuição $B(z, p = 0.5)$.

m representa o maior valor inteiro, menor ou igual do quociente $\frac{n-1}{2}$.

3 Variabilidade Mínima

Seja $\sigma_j^2 \geq 0$ constante de proporcionalidade desconhecida, tal que:

$$Var(C_{i,j+1}|C_{i,0}, \dots, C_{i,j}) = C_{i,j} \hat{\sigma}_j^2, \quad 0 \leq i \leq n \text{ e } 0 \leq j \leq n-1 \quad (2.29)$$

onde

$$\hat{\sigma}_j^2 = \frac{1}{n-j-1} \sum_{i=0}^{n-j-k} C_{i,j} \left(\frac{C_{i,j}}{C_{i,j-1}} - \hat{f}_j \right)^2, \quad 0 \leq j \leq n-2 \quad (2.30)$$

Neste caso, teremos:

$$\hat{\sigma}_n^2 = \left[1 - \left(\frac{\hat{f}_{j-1} - \hat{f}_n}{\hat{f}_{j-1} - \hat{f}_j} \right) \right] \hat{\sigma}_{j-1}^2 + \left(\frac{\hat{f}_{j-1} - \hat{f}_n}{\hat{f}_{j-1} - \hat{f}_j} \right) \hat{\sigma}_j^2 \quad (2.31)$$

e

$$\hat{\sigma}_{n-1}^2 = \begin{cases} 0 & \text{caso } \hat{f}_{n-1} = 1 \\ \min\left(\frac{\hat{\sigma}_{n-2}^2}{\hat{\sigma}_{n-3}^2}, \min(\hat{\sigma}_{n-3}^2, \hat{\sigma}_{n-2}^2)\right) & \text{c.c} \end{cases} \quad (2.32)$$

Assim, uma vez analisados os pressupostos, procede-se a estimação do erro quadrático médio (EQM) e do intervalo de confiança para determinar a variabilidade dessas estimativas.

$$EQM(\hat{R}) = E\left((R_i - \hat{R}_i)^2 | T_c\right) = E\left((C_{i,n} - \hat{C}_{i,n})^2 | T_c\right) \quad (2.33)$$

onde, $C_{i,j} | i + j \leq n$ é o conjunto de todos os montantes pagos e $EQM(\hat{C}_{i,n}) = EQM(\hat{R}_i)$ sob os pressupostos, o erro quadrático médio de \hat{R}_i é estimado por:

$$\widehat{EQM}(\hat{R}_i) = \hat{C}_{i,\infty}^2 \sum_{k=n-i-1}^{n-1} \frac{\hat{\sigma}_k^2}{\hat{f}_k^2} \left(\frac{1}{\hat{C}_{i,k}} + \frac{1}{\sum_{r=0}^{n-k-1} C_{r,k}} \right) \quad (2.34)$$

portanto o $\widehat{EMQ}(\hat{R})$ é estimado pela seguinte expressão:

$$\widehat{EMQ}(\hat{R}) = \sum_{i=n}^n \left\{ (\widehat{EQM}(\hat{R}_i))^2 + \hat{C}_{i,\infty} \sum_{j=1}^n \hat{C}_{j,\infty} \sum_{k=n-i-1}^{n-1} \frac{2 \frac{\hat{\sigma}_k^2}{\hat{f}_k^2}}{\sum_{r=0}^{n-k-1} C_{r,k}} \right\} \quad (2.35)$$

Assumindo que as estimativas das reservas \hat{R}_i e \hat{R} possuem hipóteses de normalidade, estima-se os intervalos de confiança a $(1 - \alpha)100\%$:

$$\left[\hat{R}_i - \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \sqrt{\widehat{EQM}(\hat{R}_i)}; \hat{R}_i + \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \sqrt{\widehat{EQM}(\hat{R}_i)} \right] \quad (2.36)$$

$$\left[\hat{R} - \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \sqrt{\widehat{EQM}(\hat{R})}; \hat{R} + \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \sqrt{\widehat{EQM}(\hat{R})} \right] \quad (2.37)$$

2.4.3 Simulações de *tstrap*

O método de *Bootstrap* para o cálculo das provisões foi introduzido por *Efron e Tibshirani*[2], é uma técnica de simulação e reamostragem que se pode também aplicar à estimação de provisão, que permite calcular as medidas de variabilidade das estimativas, de acordo com [4] e [12], baseado nos resíduos de *Pearson* dos montantes incrementais, sub-hipótese de que são variáveis aleatórias, independentes e identicamente distribuídas, desprezando a hipótese dos dados.

Procedimento de Bootstrap aplicado ao cálculo de provisões para sinistros, segundo [1]

1 *Obtenção dos resíduos de Pearson*

$$r_{i,j} = \frac{x_{i,j} - \hat{\mu}_{i,j}}{\sqrt{\hat{\mu}_{i,j}}} \quad 0 \leq i \leq n \text{ e } 0 \leq j \leq n - i \quad (2.38)$$

sabendo que $x_{i,j}$ são as observações de $X_{i,j}$.

Com base nos resíduos obtidos por (2.38) por amostragem com reposição, vai ser construído um triângulo de resíduos.

Para aplicar as simulações, deve ser feito o ajustamento dos *Resíduos de Person*, multiplicando pelo grau de liberdade dos dados observado, isto é:

$$r_{i,j}^* = r_{i,j} \times \sqrt{\frac{n}{n-p}} \quad (2.39)$$

onde $p = 2n - 1$.

2 *Geração dos Pseudo-dados*

Para cada um dos triângulos de resíduos cria-se um novo triângulo incremental de dados, $T_n^{*(K)} = \{ X_{i,j}^{*(K)} | i + j \leq n \}$.

$$x_{i,j}^{*(k)} = r_{i,j}^{*(k)} \sqrt{\hat{\mu}_{i,j} + \hat{\mu}_{i,j}}, \quad 1 \leq k \leq K, \quad 0 \leq i \leq n \text{ e } 0 \leq j \leq n - i \quad (2.40)$$

onde K é o número total de simulações.

3 *Estimação das Pseudo-Reserva*

Para cada triângulo $T_n^{*(k)}$, $1 \leq k \leq K$, aplica-se o método de *sobre dispersão de Poisson* e calcula-se o montante de reserva para cada ano de ocorrência i . A média dos estimadores $\hat{R}_i^{*(k)}$ e $\hat{R}^{*(k)}$ são designadas por $\bar{\hat{R}}_i^{*(k)}$ e $\bar{\hat{R}}^{*(k)}$

$$\begin{cases} \bar{\hat{R}}_i^{*(k)} &= \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \hat{R}_i^{*(k)}, \quad 0 \leq i \leq n \\ \bar{\hat{R}}^{*(k)} &= \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \hat{R}^{*(k)} \end{cases} \quad (2.41)$$

Guarda-se os resultados e volta-se ao primeiro passo, repete-se o processo até terminar o ciclo de simulações.

2.4.4 Cálculo das medidas de Variabilidade

Os desvios padrão dos estimadores de *Bootstrap* das reservas são definidos por:

$$\begin{cases} \hat{\sigma}_{boot}^k(\hat{R}_i^{*(k)}) = \sqrt{\frac{1}{K-1} \sum_{k=1}^K (\hat{R}_i^{*(k)} - \bar{\hat{R}}_i^{*k})^2}, & 0 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq K \\ \hat{\sigma}_{boot}^k(\hat{R}^{*(k)}) = \sqrt{\frac{1}{K-1} \sum_{k=1}^K (\hat{R}^{*(k)} - \bar{\hat{R}}^{*(k)})^2} \end{cases} \quad (2.42)$$

Para obter o erro quadrático médio, é necessário adicionar a medida de variabilidade do processo, obtido através do produto dos estimadores analíticos pelo parâmetro de dispersão, ϕ , definido pela seguinte expressão:

$$\hat{\phi} = \frac{1}{n-1} \sum_{n-1}^n \sum_{j=n-i}^n r_{i,j}^2 \quad (2.43)$$

Assim, segundo [3] desenvolvido em [4], os erros quadráticos médio dos estimadores de *Bootstrap* são definidos pelas seguintes expressões:

$$\begin{cases} \widehat{EQM}(\hat{R}_i^{*(k)}) = \sqrt{\hat{\phi} \hat{R}_i + \frac{n}{n-p} \hat{\sigma}_{boot}^k(\hat{R}_i^{*(k)})} & 0 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq K \\ \widehat{EQM}(\hat{R}^{*(k)}) = \sqrt{\hat{\phi} \hat{R} + \frac{n}{n-p} \hat{\sigma}_{boot}^k(\hat{R}^{*(k)})} \end{cases} \quad (2.44)$$

Assumindo que os estimadores das reservas de *Bootstrap* possuem distribuição normal, o intervalo de confiança é dado por:

$$\left[\hat{R}_i - \Phi^{-1}\left(\frac{1-\alpha}{2}\right) \sqrt{\widehat{EQM}(\hat{R}_i^{*(k)})}; \hat{R}_i + \Phi^{-1}\left(\frac{1-\alpha}{2}\right) \sqrt{\widehat{EQM}(\hat{R}_i^{*(k)})} \right] \quad (2.45)$$

$$\left[\hat{R} - \Phi^{-1}\left(\frac{1-\alpha}{2}\right) \sqrt{\widehat{EQM}(\hat{R}^{*(k)})}; \hat{R} + \Phi^{-1}\left(\frac{1-\alpha}{2}\right) \sqrt{\widehat{EQM}(\hat{R}^{*(k)})} \right] \quad (2.46)$$

RESULTADOS

Neste capítulo, os métodos apresentados serão aplicados a dados reais do ramo automóvel, danos materiais e pessoais ocorridos até Dezembro de 2018, fornecidos por uma seguradora Angolana, na qual foi aplicado um factor comum, a fim de manter a confidencialidade dos dados. As unidades monetárias apresentadas são em milhões de Kwanzas.

Tabela 3.1: Indemnizações Pagas em Cada Período

Ano de Ocorrência	Período de Desenvolvimento								
	0	1	2	3	4	5	6	7	∞
2011	16 974.43	18 760.39	3 299.21	1 481.11	1 437.89	549.88	346.25	140.58	101.48
2012	28 305.50	31 538.89	9 083.48	2 556.08	1 388.55	323.14	344.49		
2013	21 661.44	33 626.77	9 295.67	1 227.54	1 320.65	434.48			
2014	31 967.06	56 622.85	3 649.40	2 690.45	2 165.41				
2015	54 750.95	37 342.42	4 782.60	1 784.94					
2016	54 909.40	31 005.64	5 892.41						
2017	39 071.44	17 805.05							
2018	32 947.95								

Os dados foram organizados em dois triângulos, com dados agrupados por ano, para as indemnizações, como se pode ver na tabela 3.1, da qual, com a fórmula (2.1) determinamos o triângulo das indemnizações acumuladas apresentado na tabela 3.2.

Tabela 3.2: Indemnizações Acumuladas

Ano de Ocorrência	Período de Desenvolvimento								
	0	1	2	3	4	5	6	7	∞
2011	16 974.43	35 734.82	39 034.02	40 515.13	41 953.03	42 502.91	42 849.16	42 989.74	43 091.22
2012	28 305.50	59 844.40	68 927.87	71 483.96	72 872.50	73 195.64	73 540.13		
2013	21 661.44	55 288.20	64 583.88	65 811.41	67 132.06	67 566.54			
2014	31 967.06	88 589.90	92 239.30	94 929.75	97 095.16				
2015	54 750.95	92 093.37	96 875.97	98 660.91					
2016	54 909.40	85 915.04	91 807.45						
2017	39 071.44	56 876.49							
2018	32 947.95								

No segundo triângulo, apresentamos os incrementos dos números de sinistros na tabela 3.3, da mesma forma transformada num triângulo acumulado, conforme a tabela 3.4.

Tabela 3.3: Número de Sinistros em Cada Período

Ano de Ocorrência	Período de Desenvolvimento							
	0	1	2	3	4	5	6	7
2011	1427	162	0	0	0	0	0	0
2012	1834	9	2	2	2	0	0	
2013	1407	1459	1	0	0	0		
2014	1938	2134	2	1	0			
2015	2034	2099	1	0				
2016	1656	1707	0					
2017	1186	1216						
2018	794							

Tabela 3.4: Número de Sinistros Acumulado

Ano de Ocorrência	Período de Desenvolvimento							
	0	1	2	3	4	5	6	7
2011	1427	1589	1589	1589	1589	1589	1589	1589
2012	1834	1924	1926	1928	1930	1930	1930	
2013	1407	1459	1460	1460	1460	1460		
2014	1938	2134	2136	2137	2137			
2015	2034	2099	2100	2100				
2016	1656	1707	1707					
2017	1186	1216						
2018	794							

3.1 Modelos Determinísticos

Os modelos determinísticos definidos na secção 2.2 foram aplicados ao triângulo acumulado das Indemnizações figura 3.1 e ao triângulo acumulado de sinistros figura 3.2. Estes gráficos foram obtidos recorrendo ao packadge *Chain Ladder* versão 3.6.1 do R.

Figura 3.1: Indemnização Acumulada

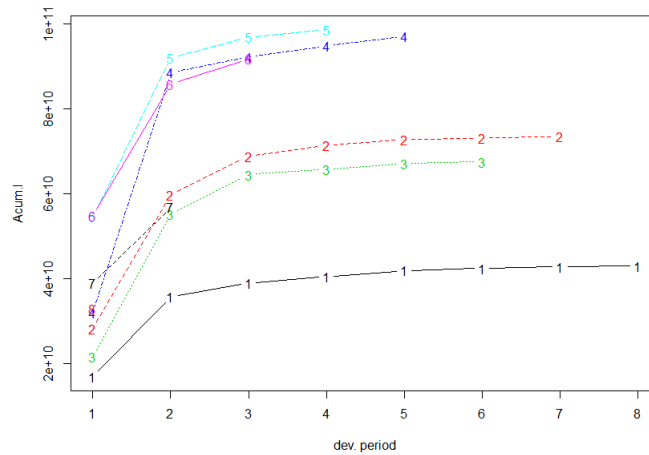
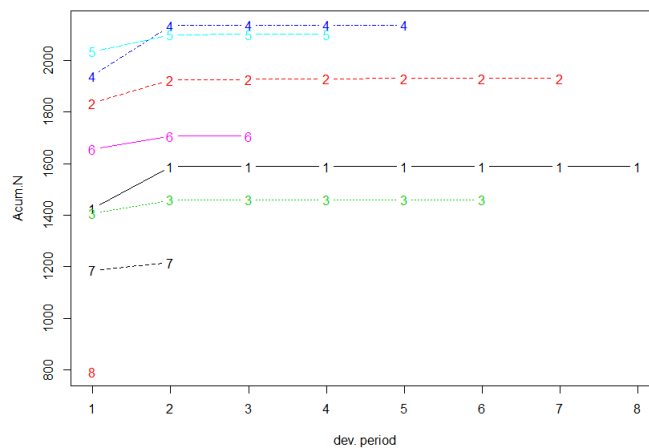


Figura 3.2: Número de Sinistros Acumulado



Podemos observar que as indemnizações incrementadas na figura 3.1 são pagas na maior parte nos primeiros períodos, assim como os sinistros ocorridos na figura 3.2.

3.1.1 Link Ratios

Aplicando as fórmulas (2.8), (2.9) e (2.10), determinamos os coeficientes de desenvolvimentos \hat{f}_j , e da mesma forma, determinamos as indemnizações acumuladas no final do ano de desenvolvimento 7 para cada ano de sinistro, obtendo-se a tabela 3.5.

Tabela 3.5: Link Ratio

Período	Coeficiente de Desenvolvimento			Ano	Estimativa das Indemnizações Acumuladas		
	Melhor	Média	Pior		Melhor	Média	Pior
0	1.455705	2.035076	2.771287	2011	43 091.22	43 091.22	43 091.22
1	1.041194	1.095659	1.168131	2012	73 955.56	73 955.56	73 955.56
2	1.018425	1.028326	1.037944	2013	68 268.02	68 384.89	68 501.77
3	1.019425	1.024448	1.03549	2014	98 538.22	99 057.76	99 729.36
4	1.004434	1.008004	1.013107	2015	102 072.2	103 116	104 934.1
5	1.004706	1.006426	1.008147	2016	96 731.79	98 670.98	101 349.9
6	1.003281	1.003281	1.003281	2017	62 395.87	66 976.05	73 344.88
7	1.00236	1.00236	1.00236	2018	52 616.85	78 957.92	117 746.2
				Total	597 669.7	632 210.4	682 653

Recorrendo ao *Pior Factor* teremos uma estimativa para o total das indemnizações de 682 653, de 632 210.4, para a *Média dos Factores* e de 597 667.7, se considerarmos o *Melhor Factor*.

3.1.2 Método de *Chain Ladder*

Na tabela 3.6 apresentamos os coeficientes de desenvolvimento de *Chain Ladder* \hat{f}_j calculados pela fórmula (2.13) e os coeficientes de desenvolvimento anuais na matriz, pela fórmula (2.7).

Tabela 3.6: Coeficiente de Desenvolvimento

Ano de Ocorrência	Período de Desenvolvimento							
	0	1	2	3	4	5	6	7
2011	2.10522	1.092325	1.037944	1.035490	1.013107	1.008146	1.00328	1.002360
2012	2.11423	1.151785	1.037083	1.019426	1.004434	1.004706		
2013	2.552379	1.168131	1.019007	1.020067	1.006472			
2014	2.771287	1.041194	1.029168	1.022811				
2015	1.682041	1.051932	1.018425					
2016	1.564669	1.068584						
2017	1.455705							
\hat{f}_j	1.915449	1.086241	1.026932	1.023145	1.007186	1.005970	1.003281	1.002360

Como podemos observar, o coeficiente de desenvolvimento vai perdendo peso ao longo dos anos, tal como observado na figura 3.1.

Pela fórmula (2.12) foi possível preencher o triângulo inferior na tabela 3.7.

Tabela 3.7: Indemnizações Acumuladas

Ano de Ocorrência	Período de Desenvolvimento								
	0	1	2	3	4	5	6	7	∞
2011	16 974.43	35 734.82	39 034.02	40 515.13	41 953.03	42 502.91	42 849.16	42 989.74	43 091.22
2012	28 305.50	59 844.40	68 927.87	71 483.96	72 872.50	73 195.64	73 540.13	73 781.41	73 955.56
2013	21 661.44	55 288.20	64 583.88	65 811.41	67 132.06	67 566.54	67 969.92	68 192.92	68 353.89
2014	31 967.06	88 589.90	92 239.30	94 929.75	97 095.16	97 792.86	98 376.69	98 699.45	98 932.43
2015	54 750.95	92 093.37	96 875.97	98 660.91	100 944.38	101 669.74	102 276.72	102 612.28	102 854.49
2016	54 909.40	85 915.04	91 807.45	94 279.97	96 462.06	97 155.21	97 735.23	98 055.89	98 287.35
2017	39 071.44	56 876.49	61 781.58	63 445.46	64 913.89	65 380.34	65 770.67	65 986.46	66 142.22
2018	32 947.95	63 110.12	68 552.82	70 399.06	72 028.42	72 546.00	72 979.11	73 218.54	73 391.37

Pelo método de *Chain Ladder*, estimamos um total de indemnizações pagas no valor de 625 008.35.

3.1.3 *Grossing Up*

Para o cálculo dos factores de desenvolvimentos pelo método de *Grossing Up*, recorremos a equação (2.14).

Tabela 3.8: *Grossing Up*

Período de Desenvolvimento	Coefficiente de Desenvolvimento	Ano de Ocorrência	Estimativas das Indemnizações
0	2.11	2011	43 091.22
1	1.09	2012	73 955.56
2	1.04	2013	68 501.77
3	1.04	2014	99 729.36
4	1.01	2015	104 934.08
5	1.01	2016	101 349.91
6	1.00	2017	68 585.13
7	1.00	2018	83 641.55
		Total	643 788.58

Na tabela 3.8 apresentamos o resultado do *factor puro* do método *Grossing Up* e a estimativa de 643 788.6 para o total de indemnizações pagas.

3.1.4 Resultados - Modelos determinísticos

Com a estimativa de indemnizações acumuladas apuradas na tabela 3.5 e tabela 3.8, apresentamos na tabela 3.9, a estimativa de provisão para sinistros, para cada método

pela aplicação da fórmula 2.5.

Tabela 3.9: Provisão para Sinistros pelos métodos determinísticos

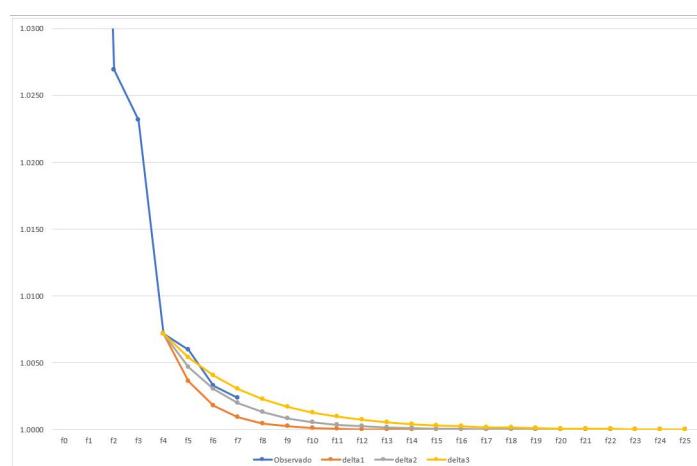
Ano de Ocorrência	Link Ratio				Grossonp Up
	Chain Ladder	Melhor	Média	Pior	Puro
2011	101.48	141.04	101.48	101.48	101.48
2012	415.43	483.35	415.43	415.43	415.43
2013	787.35	764.17	818.35	935.23	935.23
2014	1 837.27	1 533.55	1 962.61	2 634.20	2 634.20
2015	4 193.59	3 505.00	4 455.09	6 273.18	6 273.18
2016	6 479.90	5 013.17	6 863.54	9 542.46	9 542.46
2017	9 265.73	5 576.68	10 099.56	16 468.40	11 708.64
2018	40 443.42	19 717.21	46 009.97	84 798.29	50 693.60
Total	63 524.17	36 734.17	70 726.03	121 168.67	82 304.22

Podemos observar que pelos métodos *Link Ratio* a estimativa da provisão varia entre 36735.17 e 121 168.67 e pelo método *Grossing Up* a estimativa é de 82 304.22.

3.2 Projecção do Factor Cauda

Visto que, em 2018 não foi possível encerrar definitivamente as indemnizações de 2011, surge a necessidade de analisar a projecção dos coeficientes em alguns cenários. Portanto, na figura 3.3 apresentamos os cenários dos coeficientes de desenvolvimento aplicando a fórmula (2.24) com $j = 5$ e com $\hat{\delta}_1 = 0.5$, $\hat{\delta}_2 = 0.65$ e $\hat{\delta}_3 = 0.75$.

Figura 3.3: Coeficiente de Desenvolvimento Projectado



A curva que melhor se ajusta de acordo com a opinião do atuário, aos coeficientes estimados é com $\hat{\delta} = 0.65$, como podemos observar na figura 3.3.

Na tabela 3.10 apresentamos os factores de desenvolvimento obtidos até ao período de desenvolvimento 15.

Tabela 3.10: Anos de Desenvolvimento do Coeficiente Projectado

f	f0	f1	f2	f3	f4	f5	f6	f7
	1.9154	1.08624124	1.026931631	1.023144708	1.0072	1.0047	1.0030	1.0020
f	f8	f9	f10	f11	f12	f13	f14	f15
	1.001282697	1.000833753	1.000541939	1.000352261	1.000228969	1.00014883	1.00009674	1.000062881

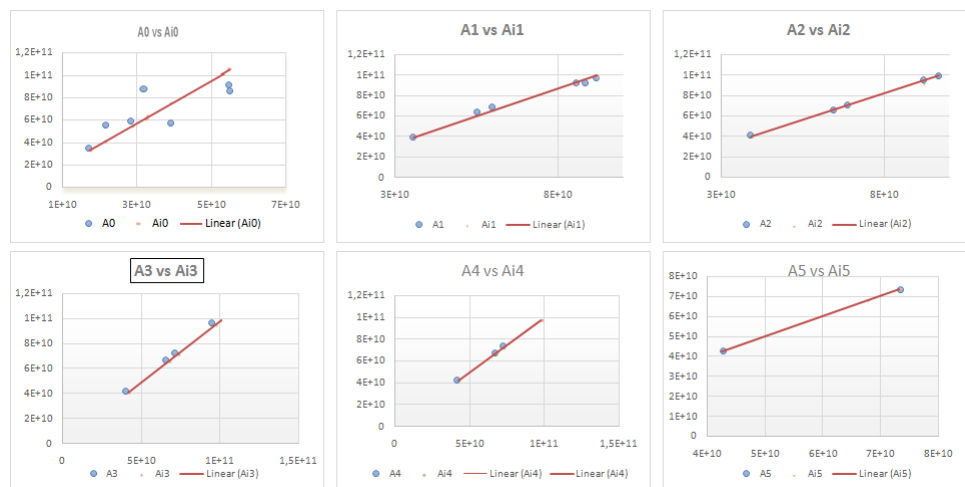
3.3 Modelos Estocásticos

3.3.1 Thomas Mack

Como o objectivo de obter a estimativa para o erro padrão e o intervalo de confiança pelo método de *Chain Ladder* verifica-se os pressupostos definidos na secção 2.4.2. Para mais informações consultar [10]

- Proporcionalidade entre os anos de desenvolvimento e a inexistência de correlação entre os factores de desenvolvimento.

Figura 3.4: Proporcionalidade entre os anos de desenvolvimento



Conforme se pode observar pelos gráficos da figura 3.4, os dados observados estão alinhadas com a reta de declive \hat{f}_j (Tabela 3.6).

Tabela 3.11: Número de Ordem dos Factores de Desenvolvimento Individuais

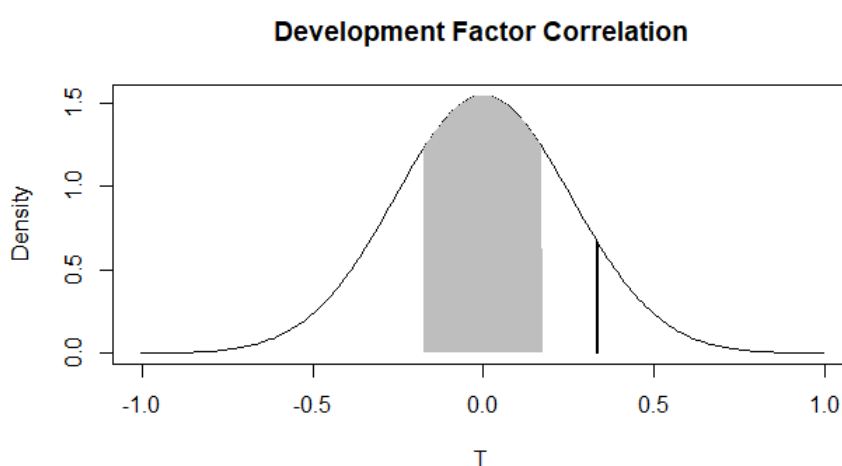
Ano	0		1		2		3		4		5		6		7	
	r	s	r	s	r	s	r	s	r	s	r	s	r	s	r	s
2011																
2012	4	3	5	3	4	4	3	3	2	2	1	1	1			
2013	5	4	4	2	1	3	1	1	1	1						
2014	6	5	2	1	2	1	2	2								
2015	1	6	3	5	3	2										
2016	2	2	1	4												
2017	3	1														
2018																

Com os números de ordem dos coeficientes calculados na tabela 3.11, usamos a equação (2.25) para calcular o coeficiente de Spearman T_j , o estimador da variância mínima $V(T)$, o estimador T e finalmente o intervalo de confiança pela equação (2.27) na tabela 3.12.

Tabela 3.12: Coeficiente de correlação de Spearman

T	E	V	%	I
0.335	0.000	0.067	50	-0.174 0.174

Figura 3.5: Coeficiente de Spearman



Visto que a estimativa calculada de 0.335 encontra-se fora do intervalo obtido $[-0.174; 0.174]$, mesmo considerando um nível de confiança 50%, logo, rejeita-se a hipótese de ausência de correlação entre os fatores individuais de desenvolvimento.

- Independência entre os anos de ocorrência

Tabela 3.13: Anos de Desenvolvimento do Coeficiente Projectado

Ano de Ocorrência	Período de Desenvolvimento							
	0	1	2	3	4	5	6	7
2011	4	4	5	4	3	2	1	1
2012	5	5	4	1	1	1		
2013	6	6	2	2	2			
2014	7	1	3	3				
2015	3	2	1					
2016	2	3						
2017	1							
2018								

Na tabela 3.14 apresentamos os resultados obtidos com o agrupamento dos factores em dois conjuntos L e S em que, desprezamos o valor mediano dos números dos coeficientes de desenvolvimento.

Tabela 3.14: Conjuntos S e L

Ano de Ocorrência	Período de Desenvolvimento							
	0	1	2	3	4	5	6	7
2011	*	L	L	L	L	L	*	
2012	L	L	L	S	S	S		
2013	L	L	S	S	*			
2014	L	S	*	L				
2015	S	S	S					
2016	S	S						
2017	S							
2018								

Com os conjuntos de valores determinados, calculamos os momentos das variáveis Z_j e Z a partir das equações (2.28).

Tabela 3.15: Momentos das variáveis Z_j e Z

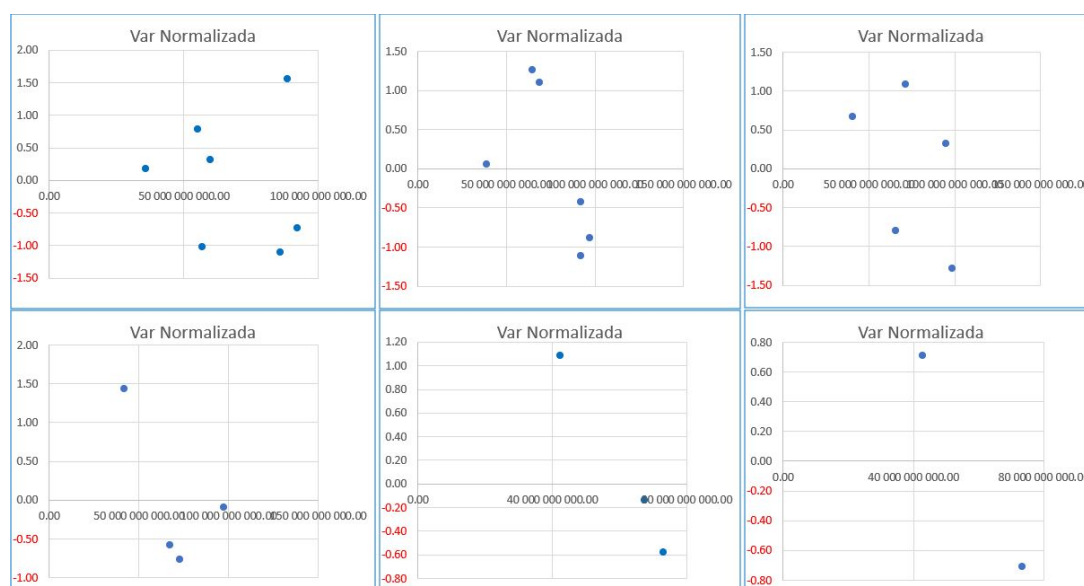
k	S_k	L_k	Z_k	n	m	$E(Z_k)$	$V(Z_k)$	$\frac{L_k+S_k}{2}$
1	0	2	0	2	0	0.5	0.25	1
2	0	3	0	3	1	0.8	0.1875	1.5
3	0	4	0	4	1	1.25	0.4375	2
4	1	4	1	5	2	1.5625	0.37109375	2,5
5	1	4	1	5	2	1.5625	0.37109375	2.5
6	1	4	1	5	2	1.5625	0.37109375	2.5
Soma	3	21	3	24	8	7.1875	1.98828125	12
%	95		99					
IC	4.424	8.778	3.555	10.911				

Os resultados da tabela 3.15, apesar de revelar um predominância dos factores reduzida ou elevada na diagonal da matriz, podemos observar que se rejeita a hipótese da existência de independência entre os anos de ocorrência, visto que, o valor da variável Z é 3 e encontra-se fora do intervalo de confiança [4.424; 8.877] a 95%. Porém, a 99% o valor encontra-se próximo ao intervalo [3.555; 10.911], logo prossegue-se com aplicação deste modelo. Caso contrário, recomendaria outros coeficientes de desenvolvimento.

- Estimadores dos factores de desenvolvimento são estimadores de variância mínima

Para avaliar o terceiro pressuposto, é necessário analisar os resíduos dos factores de desenvolvimento da figura 3.6.

Figura 3.6: Resíduos ponderados



Visto que em todos os gráficos existe uma dispersão dos resíduos ponderados, não existe nenhuma tendência, ou seja, aparentemente são aleatórios, portanto, podemos concluir que se verifica o pressuposto.

Uma vez analisado os três pressupostos, calculamos as estimativas da variância pela equação (2.30) e o erro quadrático médio pela equação (2.35) apresentada na tabela 3.16.

Tabela 3.16: Estimativa da variância e Erro Quadrático Médio

N	7							
j	0	1	2	3	4	5	6	7
r (j)	1.9154491	1.0862412	1.0269316	1.0231447	1.0071857	1.0059701	1.0032809	1.0023605
σ	8 654.91	188.83	5.84	2.60	1.03	0.32	0.10	0.10
EQM_{f_j}	0.0349495	0.0004523	0.0000162	0.0000095	0.0000057	0.0000028	0.0000023	0.0000023
σ^2	0.1869479	0.0212677	0.0040189	0.0030872	0.0023774	0.0016584	0.0015159	0.0015159

Como a variância não pode ser negativa, então consideramos as estatísticas de n-1 no último ano. Portanto, com um nível de confiança de 95%, os intervalos de confiança das provisões calculados pelas equações (2.36) e (2.37) são apresentados na tabela 3.17.

Tabela 3.17: Intervalo de Confiança

Ano	Limite Inferior	Limite Superior
2011	-71.01	281.96
2012	25.72	805.15
2013	271.63	1 303.07
2014	802.04	2 872.50
2015	2 603.96	5 783.22
2016	4 203.03	8 756.77
2017	1 721.70	16 809.76
2018	-1 300.23	82 187.07
	20 638.36	106 409.98

3.3.2 Simulação de *Bootstrap*

Nas tabelas 3.18 apresentamos exemplos dos resíduos de *Person*, obtidos pela equação (2.38) e na tabela 3.19 os resíduos ajustados de *Person* obtidos pela equação (2.39).

Tabela 3.18: Exemplos de Resíduos de *Person*

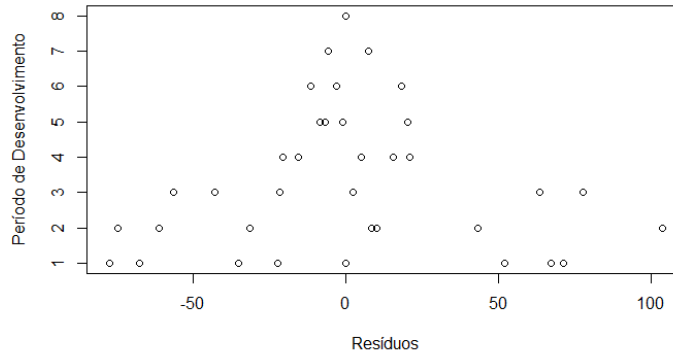
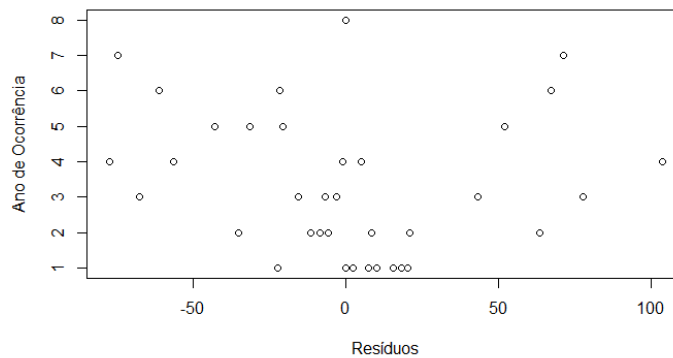
Ano de Ocorrência	Período de Desenvolvimento							
	0	1	2	3	4	5	6	7
2011	-17.0449	7.896845	1.832128	12.06115	15.55827	14.11089	5.766159	0.00
2012	-26.86833	6.566818	48.59651	16.12809	-6.252246	-8.68814	-4.401448	
2013	-51.51983	33.02313	59.36358	-11.86426	-5.053969	-2.166718		
2014	-59.06218	79.16996	-43.04955	4.04307	-0.6613836			
2015	39.90985	-23.97106	-32.57602	-15.77606				
2016	51.34174	-46.71163	-16.35796					
2017	54.42192	-56.87963						
2018	0.00							

7

Tabela 3.19: Exemplos de Resíduos de *Person* Corrigido

Ano de Ocorrência	Período de Desenvolvimento							
	0	1	2	3	4	5	6	7
2011	-22.31701	10.3394	2.398819	15.79175	20.37055	18.4755	7.549674	0.00
2012	-35.1789	8.597983	63.62777	21.11663	-8.186111	-11.37545	-5.76285	
2013	-67.45529	43.23743	77.72517	-15.53396	-6.617198	-2.8369		
2014	-77.33055	103.6578	-56.36509	5.293622	-0.8659544			
2015	52.25426	-31.38549	-42.65202	-20.65571				
2016	67.22212	-61.15988	-21.41759					
2017	71.25502	-74.47292						
2018	0.00							

Os gráficos 3.7 e 3.8 apresentados são os resíduos por ano, bem como por período de desenvolvimento.

Figura 3.7: Resíduos *vs* Período de DesenvolvimentoFigura 3.8: Resíduos *vs* Ano de Ocorrência

Com os resíduos simulados, apresentamos na tabela 3.21 um exemplo dos resultados das indenizações simuladas obtido pela *simulação de Bootstrap (Pseudo-dados)* calculada pela equação (2.40).

Tabela 3.20: Exemplo das Indenizações Ajustadas - Modelo de *Poisson* Sobre-dispersão

Ano de Ocorrência	Período de Desenvolvimento							
	0	1	2	3	4	5	6	7
2011	19 345.15	17 709.50	3 195.64	1 084.01	956.67	303.89	254.30	140.58
2012	33 201.23	30 394.04	5 484.54	1 860.43	1 641.89	521.56	436.44	
2013	30 686.45	28 091.88	5 069.12	1 719.52	1 517.53	482.05		
2014	44 414.23	40 658.96	7 336.82	2 488.75	2 196.41			
2015	46 174.98	42 270.84	7 627.68	2 587.42				
2016	44 124.62	40 393.85	7 288.98					
2017	29 693.55	27 182.94						
2018	32 947.95							

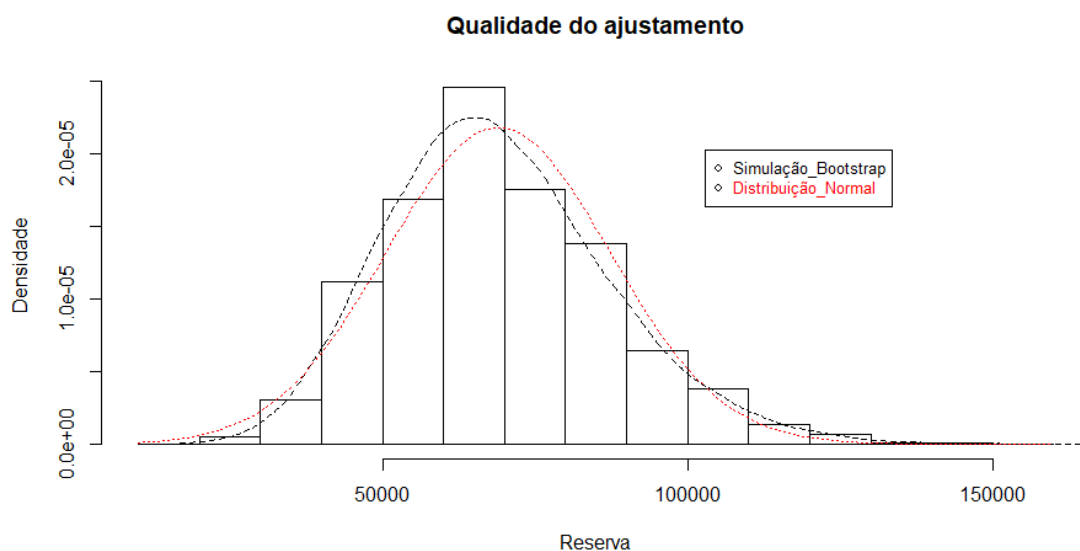
Tabela 3.21: Exemplo das Indemnizações Projectadas

Ano de Ocorrência	Período de Desenvolvimento							
	0	1	2	3	4	5	6	7
2011	20 878.13	40 167.20	37 673.41	50 001.37	47 755.63	25 451.30	35 105.15	53 887.35
2012	34 615.40	66 596.19	62 461.55	82 901.00	79 177.62	42 197.60	58 203.44	89 343.84
2013	22 020.59	42 365.17	39 734.91	52 737.47	50 368.84	26 844.00	37 026.12	56 836.09
2014	42 266.97	81 316.96	76 268.37	101 225.86	96 679.44	51 525.18	71 069.03	109 092.86
2015	47 863.77	92 084.59	86 367.49	114 629.74	109 481.31	58 347.91	80 479.67	123 538.46
2016	48 638.13	93 574.36	87 764.77	116 484.26	111 252.53	59 291.88	81 781.70	125 537.11
2017	31 550.10	60 698.90	56 930.39	75 559.87	72 166.20	38 460.88	53 049.35	814 32.18
2018	42 942.86	82 617.31	77 487.99	102 844.58	98 225.46	52 349.12	72 205.50	110 837.39

Os resultados da tabela 3.21 foram obtidos recorrendo ao método de *Sobre dispersão de Poisson* para o cálculo de reserva (*Pseudo da Reserva*) pela equação (2.41).

No gráfico 3.9 apresentamos o histograma das provisões totais obtido pelas simulações de *bootstrap* para cada ano de ocorrência e sobre ela a vermelho, a curva obtida por ajustamento da distribuição normal.

Figura 3.9: Ajuste da Distribuição Normal às Estimativas de *Bootstrap*



Na tabela 3.22, apresentamos os resultados das reservas obtidos pela equação (2.41), o desvio padrão pela equação (2.42), o erro quadrático médio pela equação (2.44) e o intervalo de confiança pelas equações (2.45) e (2.46) da *simulação de Bootstrap*.

3.4. APLICAÇÃO DO MODELO DETERMINÍSTICO PARA O NÚMERO DE SINISTROS

Tabela 3.22: Resultados do Método de *Bootstrap*

Ano	R	R_{bst}	μ_{ibnr}	EMQ_{bst}	σ	σ^2	Inferior	Superior
2011	42 990.00	42 990.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
2012	73 540.00	73 813.00	273.00	1 489.00	193.04	37 264.50	-2 647.35	3 193.35
2013	67 567.00	68 226.00	659.00	1 874.00	380.47	144 760.33	-3 070.81	4 388.81
2014	97 095.00	98 770.00	1 675.00	2 844.00	837.50	701 406.25	-4 026.54	7 376.54
2015	98 661.00	102 713.00	4 052.00	3 886.00	1 812.11	3 283 740.80	-3 546.78	11 650.78
2016	91 807.00	98 209.00	6 402.00	4 560.00	2 613.61	6 830 934.00	-2 684.39	15 488.39
2017	56 876.00	66 219.00	9 343.00	5 097.00	3 531.32	12 470 235.57	-594.02	19 280.02
2018	32 948.00	73 936.00	40 988.00	14 022.00	14 491.45	210 002 018.00	13 918.94	68 057.06
	561 484.00	624 876.00	63 392.00	19 160.00	21 130.67		25 839.09	100 944.91

O intervalo de confiança a 95% será entre 25 839.09 e 100 944.91 com uma provisão de 63 392.00.

3.4 Aplicação do Modelo Determinístico para o Número de Sinistros

Do mesmo modo, aplicamos os modelos determinísticos ao triângulo 3.3 números de sinistros acumulado.

Para os métodos Link Ratios teremos os resultados apresentados na tabela 3.23.

Tabela 3.23: Link Ratio - Número de Sinistros

Coeficiente de Desenvolvimento				Estimativa do Número de Sinistros			
Período	Melhor	Media	Pior	Ano	Melhor	Média	Pior
0	1.03	1.06	1.11	2011	1 589.00	1 589.00	1 589.00
1	1	1.08	1.17	2012	1 930.00	1 930.00	1 930.00
2	1	1.02	1.04	2013	1 460.00	1 463.44	1 466.87
3	1	1.02	1.02	2014	2 137.00	2 149.82	2 160.95
4	1	1.00	1.01	2015	2 100.00	2 145.50	2 171.98
5	1	1.00	1.00	2016	1 707.00	1 780.15	1 830.98
6	1	1	1	2017	1 216.00	1 369.90	1 523.61
7	1	1	1	2018	814.08	944.17	1 107.80
				Soma	12 953.08	13 371.97	13 781.20

As estimativas para o total do número de sinistros ocorridos de 2011 a 2018 obtido pelo método *Melhor Factor* é de 12 935.08, de 13 371.97 pelo método *Médias dos Factores* e de 13 781.20 para o *Pior Factor*.

Usando o método de *Chain Ladder* teremos os resultados da tabela 3.24.

Tabela 3.24: *Chain Ladder* - Número de Sinistros

Coeficientes de desenvolvimento		Estimativa dos Números de Sinistros	
Período		Ano	
0	1.06	2011	1 589
1	1.00	2012	1 930
2	1.04	2013	1 460
3	1.02	2014	2 137
4	1.01	2015	2 100.59
5	1.00	2016	1 708.04
6	1	2017	1 217.41
7	1	2018	839.64
		Soma	12 981.68

Pelo método de **Chain Ladder**, obtém-se a estimativa total dos números de sinistros de 12 981.68.

Na tabela 3.25 apresentamos os resultados dos coeficientes e das estimativas dos números de sinistros pelo método de *Grossing Up*.

Tabela 3.25: *Grossing Up* - Número de Sinistros

Período	Coeficiente de	Ano de	Estimativas das
Desenvolvimento	Desenvolvimento	Ocorrência	Indemnizações
0	1.11	2011	1 589.00
1	1	2011	1 930.00
2	1	2011	1 460.00
3	1	2011	2 137.00
4	1	2011	2 100.00
5	1	2011	1 707,00
6	1	2011	1 216.00
7	1	2011	884.14
		Total	13 023.14

Para o método *Grossing Up* teremos 13 032.14 como estimativa para a totalidade dos números de sinistros.

Portanto, teremos na tabela 3.26 as reservas para os números de sinistros nos diferentes métodos estudados, entende-se o número de sinistros ocorridos e ainda não reportados *IBNR*. Este resultado obtém-se por diferença entre o número total de sinistros estimados por cada modelo e o número de sinistro declarado até à data do estudo, por ano de ocorrência.

Tabela 3.26: Reserva para os Números de Sinistros

Ano de Ocorrência	Link Ratio				Grossing Up
	Chain Ladder	Melhor	Média	Pior	Puro
2011	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
2012	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
2013	0.00	0.00	3.44	6.87	0.00
2014	0.00	0.00	12.82	23.95	0.00
2015	0.59	0.00	45.50	71.98	0.00
2016	1.04	0.00	73.15	123.98	0.00
2017	1.41	0.00	153.90	307.61	0.00
2018	45.64	20.08	150.17	313.80	90.14
Total	48.68	20.08	438.97	848.20	90.14

Pelo método de *Link Ratio* teremos como melhor valor 20 e o pior 848, já para o método *Grossing Up* temos 90.14 usando o factor puro.

3.5 Observações dos Resultados

Depois dos cálculos efectuados, podemos verificar que, a provisão estimada pela seguradora 60 834, encontra-se dentro do intervalo de confiança a 95% determinados pelos métodos de *Thomas Mack* e pelas *Simulações de Bootstrap* conforme a tabela 3.27.

Tabela 3.27: Provisões Intervalo de Confiança

Período de Ocorrência	Seguradora Provisão	Thomas Mack			Simulações de Bootstrap		
		Provisão	Inferior	Superior	Provisão	Inferior	Superior
2011	101	101.48	-79.01	281.96	0.00	0.00	-2 647.35
2012	415	415.43	25.72	805.15	273.00	-3 070.81	3 193.35
2013	944	787.35	271.63	1 303.07	659.00	-4 026.54	4 388.81
2014	1 761	1 837.27	802.04	2 872.50	1 675.00	-3 546.78	7 376.54
2015	4 384	4 193.59	2 603.96	5 783.22	4 052.00	-2 684.39	11 650.78
2016	5 163	6 479.90	4 203.03	8 756.77	6 402.00	-594.02	15 488.39
2017	8 374	9 265.73	1 721.70	16 809.76	9 343.00	13 918.94	19 280.02
2018	39 692	40 443.42	-1 300.23	82 187.07	40 988.00	13 918.94	68 057.06
	60 834	63 524.17	20 638.36	106 409.98	63 392.00	25 839.09	100 944.91

Por outro lado, a diferença entre o capital financeiro da seguradora 60 834 e a provisão estimada pelo método de *Chain Ladder* 63 524.17 é de 2 689.83.

Tabela 3.28: Custo Médio por Sinistro

Ultimate Chain Ladder

	<i>Indemnizações Pagas</i>	<i>N Sinistros</i>	<i>Custo médio por sinistro</i>
2011	43 091.22	1 589.00	27.12
2012	73 955.56	1 930.00	38.32
2013	68 353.89	1 460.00	46.82
2014	98 932.43	2 137.00	46.30
2015	102 854.49	2 100.59	48.96
2016	98 287.35	1 708.04	57.54
2017	66 142.22	1 217.41	54.33
2018	73 391.37	839.64	87.41
<i>Total</i>	<i>625 008.53</i>	<i>12 981.68</i>	<i>48.14</i>

Conforme a tabela 3.28 dos custos médios por sinistro estima-se que, a seguradora até ao ano de 2018 fará o pagamento de 625 008.53, em 12 981.68 sinistros, tendo um custo médio por sinistro de aproximadamente 48.14.

Tabela 3.29: Custo Estimado da Seguradora

Ultimate Chain Ladder

	<i>IBNR Sin</i>	<i>Custo estimado IBNR</i>	<i>Custo estimado IBNER</i>	<i>Prov total</i>
2011	0.00	0.00	101.48	101.48
2012	0.00	0.00	415.43	415.43
2013	0.00	0.00	787.35	787.35
2014	0.00	0.00	1 837.27	1 837.27
2015	0.59	28.91	4 164.68	4 193.59
2016	1.04	59.62	6 420.28	6 479.90
2017	1.41	76.45	9 189.29	9 265.73
2018	45.64	3 989.51	36 453.91	40 443.42
<i>Total</i>	<i>48.68</i>	<i>4 154.48</i>	<i>59 369.69</i>	<i>63 524.17</i>

O custo estimado IBNR em cada ano de ocorrência é obtido pelo produto do número estimado de sinistros IBNR ($IBNR_{Sin}$) pelo respectivo custo médio (custo médio por sinistro na tabela 3.28), originando um total de 4 154.48. O custo estimado IBNER obtém-se por diferença entre o valor estimado de provisão (Provisão total) e o custo estimado IBNR, obtendo-se o valor total de 59 369.69, conforme a tabela 3.29.

CONCLUSÃO

Para o melhor funcionamento das seguradoras, é necessário garantir capital suficiente com a finalidade de fazer face a todos os seus compromissos financeiros. Assim sendo, permitirá que se tome decisões antecipadas, evitando uma eventual insolvência.

Desta forma, com os modelos determinísticos determinou-se as estimativas das provisões. Todavia, como os dados (Triângulo de desenvolvimento) não foram encerrados, tivemos a necessidade de projetar os coeficientes de desenvolvimento utilizando para tal a metodologia definida em *Neuhaus*, a fim de encontrar a melhor curva para os nossos coeficientes de desenvolvimento.

Com os modelos estocásticos, conseguiu-se obter os intervalos de confiança para a estimativa da provisão de sinistro.

Com base na estimativa do custo médio de sinistro por ano de ocorrência obteve-se também uma estimativa para provisão *IBNR* de 4 154.48 e por diferença para a provisão no valor de 59 369.69. Embora o valor de provisão de sinistros para os sinistros ocorridos de 2011 a 2018 no valor de 60 834, esteja nos intervalos de confiança obtidos pelos métodos *Thomas Mack* e *Bootstrap*, entende-se que a seguradora deveria reforçar a provisão no montante de 2 689.83 para aproximar ao método de *Chain Ladder*.

BIBLIOGRAFIA

- [1] C. S. R. Conceição. *Modelos determinísticos e estocásticos aplicados ao cálculo de provisões para sinistros*. 2014.
- [2] B. E. Efron e R. J. Tibshirani. *An Introduction To The Bootstrap*. Chapman Hall / CRC., 1998.
- [3] P. England e R. Verral. *Standard errors of prediction in claims reserving: a comparison of methods*. Institute of Actuaries, London., 1998.
- [4] P. D. England e R. J. Verrall. *Stochastic claims reserving in general insurance*. British Actuarial Journal, 8, 443–518, 2002.
- [5] a. I. Halpernt A. *The Estimation of Loss Development Tail Factors: A Summary Report*. Casualty Actuarial Society E-forum., 2013.
- [6] M. Kendall e A. Stuart. *The Advanced Theory of Statistics*. Inference e Relationship, Griffin, 2, 1973.
- [7] M. Kendall e A. Stuart. *The Chain Ladder Technique - A Stochastic Model*. Claims Reserving Manual: The Institute of Actuaries e the Faculty of Actuaries, 2, 1989.
- [8] T. Mack. *Measuring the variability of Chain Ladder reserve estimates*. Casualty Actuarial Society, 101–182, 1993.
- [9] T. Mack. *The standard error of chain ladder reserve estimates: Recursive calculation and inclusion of a tail factor*. ASTIN Bulletin 29, 2, 361–366, 1999.
- [10] T. Mack. *Measuring the Variability of Chain Ladder Reserve Estimates publisher = Casualty Actuarial Society Forum, year = 1994,*
- [11] W. Neuhaus. *Lecture Notes on Estimating Outstanding Claims in General Insurance*. 2008.
- [12] P. J. Pinheiro, R. Andrade, J. M. Silva e M. L. C. Centeno. *Bootstrap Methodology*. 2003.
- [13] V. K. Rohatgi. *An Introduction to Probability and Statistics*. Obtido de John Wiley Sons. 2015.
- [14] R. E. Salzmänn. *Estimated Liabilities for losses loss adjustment expenses*. PrenticeHall., 1984.

BIBLIOGRAFIA

- [15] K. D. Schmidt. *Methods and models of loss reserving based on run-off triangles: A unifying survey*. Casualty Actuarial Society Forum Fall, 269 - 317., 2006.
- [16] G. C. Taylor. *Loss Reserving - An Actuarial Perspective*. Boston: Kluwer Academic., 2000.

RESULTADOS DO R

Listagem I.1: Versão R

```

1 R version 3.6.1 (2019-07-05) -- "Action_of_the_Toes"
2 Copyright (C) 2019 The R Foundation for Statistical Computing
3 Platform: x86_64-w64-mingw32/x64 (64-bit)
4
5 R is free software and comes with ABSOLUTELY NO WARRANTY.
6 Type 'license()' or 'licence()' for distribution details.
7
8 R is a collaborative project with many contributors.
9 'citation()' on how to cite R or R packages in publications.
10 Type 'demo()' for some demos, 'help()' for on-line help, or
11 'help.start()' for an HTML browser interface to help.

```

I.1 Indemnizações

I.1.1 Dados

Tabela I.1: Dados R

```

> TIncr=as.triangle(Indemniza, origin="Year", dev="Delay", "Payment");TIncr
      Delay
Year   0      1      2      3      4      5      6      7
2011 16974.43 18760.39 3299.206 1481.112 1437.894 549.8802 346.2499 140.5834
2012 28305.50 31538.89 9083.476 2556.084 1388.547 323.1393 344.4854      NA
2013 21661.44 33626.77 9295.674 1227.536 1320.648 434.4779      NA      NA
2014 31967.06 56622.85 3649.397 2690.451 2165.406      NA      NA      NA
2015 54750.95 37342.42 4782.600 1784.939      NA      NA      NA      NA
2016 54909.40 31005.64 5892.409      NA      NA      NA      NA      NA
2017 39071.44 17805.05      NA      NA      NA      NA      NA      NA
2018 32947.95      NA      NA      NA      NA      NA      NA      NA

```

I.1.2 Chain Ladder

Tabela I.2: Matriz Acumulada R

```
> Acum.I <- incr2cum(TIncr, na.rm=FALSE);Acum.I
      Delay
Year  0      1      2      3      4      5      6      7
2011 16974.43 35734.82 39034.02 40515.13 41953.03 42502.91 42849.16 42989.74
2012 28305.50 59844.40 68927.87 71483.96 72872.50 73195.64 73540.13      NA
2013 21661.44 55288.20 64583.88 65811.41 67132.06 67566.54      NA      NA
2014 31967.06 88589.90 92239.30 94929.75 97095.16      NA      NA      NA
2015 54750.95 92093.37 96875.97 98660.91      NA      NA      NA      NA
2016 54909.40 85915.04 91807.45      NA      NA      NA      NA      NA
2017 39071.44 56876.49      NA      NA      NA      NA      NA      NA      NA
2018 32947.95      NA      NA      NA      NA      NA      NA      NA      NA
```

Tabela I.3: Factor de Desenvolvimento R

```
> FactDes_I<-ata(Acum.I);FactDes_I
      Delay
Year  0-1  1-2  2-3  3-4  4-5  5-6  6-7
2011 2.105 1.092 1.038 1.035 1.013 1.008 1.003
2012 2.114 1.152 1.037 1.019 1.004 1.005      NA
2013 2.552 1.168 1.019 1.020 1.006      NA      NA
2014 2.771 1.041 1.029 1.023      NA      NA      NA
2015 1.682 1.052 1.018      NA      NA      NA      NA
2016 1.565 1.069      NA      NA      NA      NA      NA
2017 1.456      NA      NA      NA      NA      NA      NA
smp1 2.035 1.096 1.028 1.024 1.008 1.006 1.003
vwt1 1.915 1.086 1.027 1.023 1.007 1.006 1.003
```

Tabela I.4: Método de Chain Ladder

```
> predCL_I=predict(CL_I);predCL_I
      dev
origin 0      1      2      3      4      5      6      7
2011 16974.43 35734.82 39034.02 40515.13 41953.03 42502.91 42849.16 42989.74
2012 28305.50 59844.40 68927.87 71483.96 72872.50 73195.64 73540.13 73781.41
2013 21661.44 55288.20 64583.88 65811.41 67132.06 67566.54 67969.92 68192.92
2014 31967.06 88589.90 92239.30 94929.75 97095.16 97792.86 98376.69 98699.45
2015 54750.95 92093.37 96875.97 98660.91 100944.38 101669.74 102276.72 102612.28
2016 54909.40 85915.04 91807.45 94279.97 96462.06 97155.21 97735.23 98055.89
2017 39071.44 56876.49 61781.58 63445.46 64913.89 65380.34 65770.67 65986.46
2018 32947.95 63110.12 68552.82 70399.06 72028.42 72546.00 72979.11 73218.54
```

I.1.3 Thomas Mack

Figura I.1: Thomas Mack R

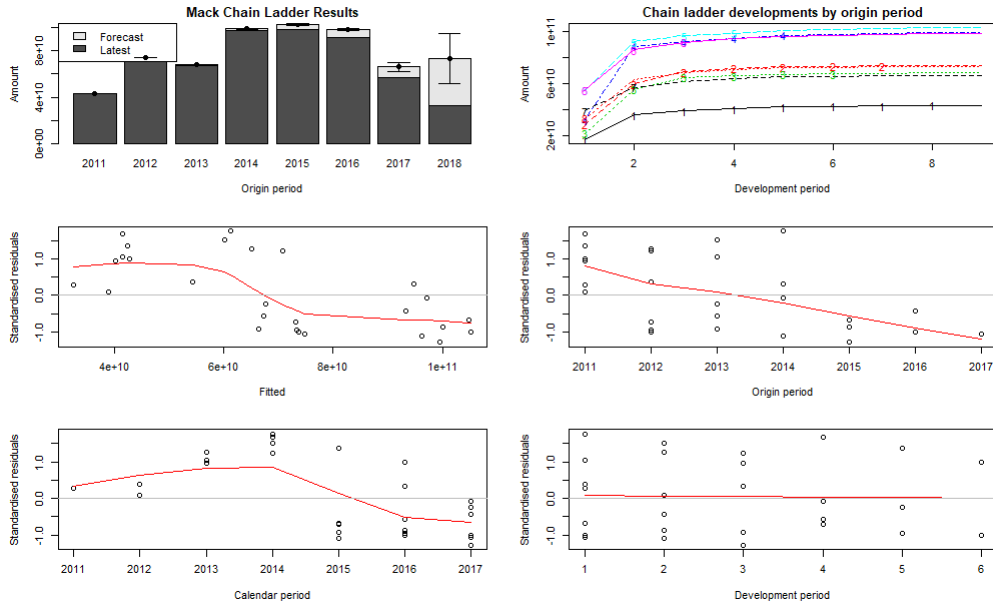


Tabela I.5: Thomas Mack Sem factor cauda R

MackChainLadder(Triangle = Acum.I, est.sigma = "Mack")

	Latest	Dev.To.Date	Ultimate	IBNR	Mack.S.E	CV(IBNR)
2011	42,990	1.000	42,990	0	0	NaN
2012	73,540	0.997	73,781	241	140	0.581
2013	67,567	0.991	68,193	626	227	0.363
2014	97,095	0.984	98,699	1,604	496	0.309
2015	98,661	0.961	102,612	3,951	788	0.199
2016	91,807	0.936	98,056	6,248	1,145	0.183
2017	56,876	0.862	65,986	9,110	3,838	0.421
2018	32,948	0.450	73,219	40,271	21,248	0.528

	Totals
Latest:	561,484.36
Dev:	0.90
Ultimate:	623,536.70
IBNR:	62,052.34
Mack.S.E	21,807.61
CV(IBNR):	0.35

Tabela I.6: Thomas Mack Com factor cauda R

```
MackChainLadder(Triangle = Acum.I, est.sigma = "Mack",
tail = 1.00234939772927)
```

	Latest	Dev.To.Date	Ultimate	IBNR	Mack.S.E	CV(IBNR)
2011	42,990	0.998	43,091	101	57.8	0.573
2012	73,540	0.994	73,955	415	164.1	0.396
2013	67,567	0.988	68,353	787	241.3	0.307
2014	97,095	0.981	98,931	1,836	508.0	0.277
2015	98,661	0.959	102,853	4,192	797.1	0.190
2016	91,807	0.934	98,286	6,479	1,152.7	0.178
2017	56,876	0.860	66,141	9,265	3,847.7	0.415
2018	32,948	0.449	73,391	40,443	21,297.6	0.527

	Totals
Latest:	561,484.36
Dev:	0.90
Ultimate:	625,001.64
IBNR:	63,517.28
Mack.S.E	21,865.17
CV(IBNR):	0.34

I.1.4 Simulações Bootstrap

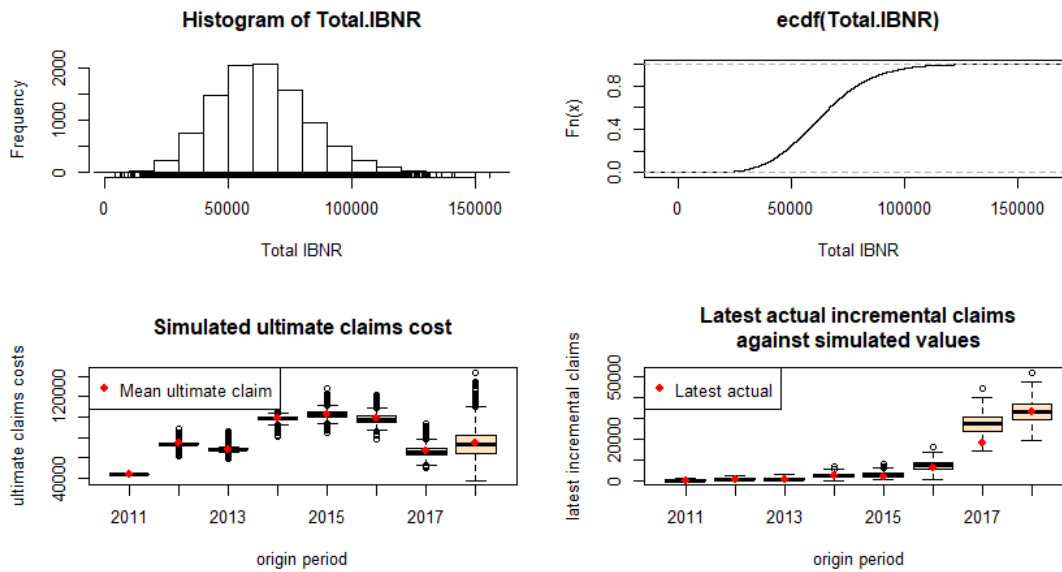
Tabela I.7: Simulações de Bootstrap R

```
BootChainLadder(Triangle = Acum.I, R = 10000, process.distr = "od.pois")
```

	Latest	Mean	Ultimate	Mean	IBNR	IBNR.S.E	IBNR 75%	IBNR 95%
2011	42,990		42,990		0	0	0	0
2012	73,540		73,802		262	1,433	347	2,730
2013	67,567		68,235		669	1,874	1,205	4,088
2014	97,095		98,859		1,764	2,936	3,070	7,225
2015	98,661		102,785		4,124	3,909	6,231	11,384
2016	91,807		98,316		6,508	4,598	8,991	14,974
2017	56,876		66,190		9,314	5,026	12,167	18,570
2018	32,948		73,857		40,909	13,817	49,188	66,322

	Totals
Latest:	561,484
Mean Ultimate:	625,034
Mean IBNR:	63,549
IBNR.S.E	19,037
Total IBNR 75%:	75,702
Total IBNR 95%:	96,690

Figura I.2: Bootstrap R



I.2 Número de Sinistro

Tabela I.8: Número de Sinistro

Year	Delay							
	0	1	2	3	4	5	6	7
2011	1427	162	0	0	0	0	0	0
2012	1834	90	2	2	2	0	0	NA
2013	1407	52	1	0	0	0	NA	NA
2014	1938	196	2	1	0	NA	NA	NA
2015	2034	65	1	0	NA	NA	NA	NA
2016	1656	51	0	NA	NA	NA	NA	NA
2017	1186	30	NA	NA	NA	NA	NA	NA
2018	794	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA

Tabela I.9: Coeficiente de Desenvolvimento

Year	Delay						
	0-1	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7
2011	1.114	1.000	1.000	1.000	1	1	1
2012	1.049	1.001	1.001	1.001	1	1	NA
2013	1.037	1.001	1.000	1.000	1	NA	NA
2014	1.101	1.001	1.000	1.000	NA	NA	NA
2015	1.032	1.000	1.000	NA	NA	NA	NA
2016	1.031	1.000	NA	NA	NA	NA	NA
2017	1.025	NA	NA	NA	NA	NA	NA
smp1	1.056	1.001	1.000	1.000	1	1	1
vwtD	1.056	1.001	1.000	1.000	1	1	1

Tabela I.10: Coeficiente de Desenvolvimento

origin	dev	0	1	2	3	4	5	6	7
2011	1427	1589.000	1589.0000	1589.0000	1589.0000	1589.0000	1589.0000	1589.0000	1589.0000
2012	1834	1924.000	1926.0000	1928.0000	1930.0000	1930.0000	1930.0000	1930.0000	1930.0000
2013	1407	1459.000	1460.0000	1460.0000	1460.0000	1460.0000	1460.0000	1460.0000	1460.0000
2014	1938	2134.000	2136.0000	2137.0000	2137.0000	2137.0000	2137.0000	2137.0000	2137.0000
2015	2034	2099.000	2100.0000	2100.0000	2100.5904	2100.5904	2100.5904	2100.5904	2100.5904
2016	1656	1707.000	1707.0000	1707.5560	1708.0360	1708.0360	1708.0360	1708.0360	1708.0360
2017	1186	1216.000	1216.6686	1217.0649	1217.4070	1217.4070	1217.4070	1217.4070	1217.4070
2018	794	838.672	839.1332	839.4065	839.6424	839.6424	839.6424	839.6424	839.6424

I.2.1 Thomas Mack

Tabela I.11: Thomas Mack

MackChainLadder(Triangle = Acum.N, est.sigma = "Mack")

	Latest	Dev.To.Date	Ultimate	IBNR	Mack.S.E	CV(IBNR)
2011	1,589	1.000	1,589	0.00e+00	0.00e+00	NaN
2012	1,930	1.000	1,930	0.00e+00	0.00e+00	NaN
2013	1,460	1.000	1,460	2.27e-13	6.46e-13	2.841
2014	2,137	1.000	2,137	0.00e+00	8.33e-13	Inf
2015	2,100	1.000	2,101	5.90e-01	1.17e+00	1.983
2016	1,707	0.999	1,708	1.04e+00	1.36e+00	1.317
2017	1,216	0.999	1,217	1.41e+00	1.32e+00	0.940
2018	794	0.946	840	4.56e+01	4.23e+01	0.927

Totals	
Latest:	12,933.00
Dev:	1.00
Ultimate:	12,981.68
IBNR:	48.68
Mack.S.E	42.39
CV(IBNR):	0.87