



**Tiago Tomás Patrício**

Licenciado em Ciências de Engenharia Civil

## **Análise de vigas de secção fechada em losango de parede fina sob flexão**

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em  
Engenharia Civil

Orientador : Rodrigo de Moura Gonçalves, Professor Auxiliar,  
Universidade Nova de Lisboa

Júri:

Presidente: Doutor Armando Manuel Sequeira Nunes Antão

Arguente: Doutor João Rocha de Almeida

Vogal: Doutor Rodrigo de Moura Gonçalves



FACULDADE DE  
CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

**Junho, 2012**



“Copyright” Tiago Tomás Patrício, FCT/UNL e UNL

A Faculdade de Ciências e Tecnologia e a Universidade Nova de Lisboa têm o direito, perpétuo e sem limites geográficos, de arquivar e publicar esta dissertação através de exemplares impressos reproduzidos em papel ou de forma digital, ou por qualquer outro meio conhecido ou que venha a ser inventado, e de a divulgar através de repositórios científicos e de admitir a sua cópia e distribuição com objectivos educacionais ou de investigação, não comerciais, desde que seja dado crédito ao autor e editor.



# Agradecimentos

Ao professor Rodrigo Gonçalves pela orientação, a incansável paciência e a admirável sabedoria que pude testemunhar ao longo dos anos em que frequentei a FCT.

Aos meus pais pelo apoio incondicional.

A todos os amigos que fiz na FCT.



# Resumo

Na presente dissertação analisa-se a instabilidade bifurcacional e a resistência de barras com secção fechada em losango de parede fina sob flexão, dando-se particular relevo à influência do modo de instabilidade distorcional. Faz-se a uma comparação com o Eurocódigo 3 (EC3). Com base nas ilações obtidas, procede-se a recomendações quanto à aplicação das disposições regulamentares do EC3.

A análise linear de estabilidade é efectuada através do software faixas finitas CUFSM e através da GBT. As cargas de colapso são determinadas recorrendo ao software de elementos finitos de casca ADINA.

## **Palavras chave:**

Vigas de parede fina

Secções em losango

Instabilidade distorcional

Eurocódigo 3



# Abstract

## **Analysis of thin-walled beams with closed lozenge-shaped cross-section under bending**

The current dissertation is aimed at analysing the bifurcational instability and resistance of thin-walled beams with closed lozenge-shaped cross-section under bending, with particular emphasis being given to the distortional buckling mode. Furthermore, a comparison between the test results and the Eurocode 3 (EC3) is made. Subsequently, recommendations are made on the application of the EC3 standards.

The linear stability analysis is made with the aid of the finite strip software CUFSM and the Generalized Beam Theory. The collapse loads are determined with the shell finite element software ADINA.

### **Keywords:**

Thin-walled beams

lozenge-shaped cross-sections

Distortional buckling

Eurocode 3



# Índice de Matérias

<b>Índice de Matérias</b>	<b>ix</b>
<b>Índice de Figuras</b>	<b>xi</b>
<b>Índice de Tabelas</b>	<b>xv</b>
<b>Lista de abreviaturas, siglas e símbolos</b>	<b>xvii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 O aço na construção . . . . .	1
1.2 Conceitos gerais . . . . .	2
1.2.1 Estabilidade estrutural . . . . .	2
1.2.1.1 Instabilidade Bifurcacional . . . . .	3
1.2.1.2 Instabilidade de elementos de parede fina . . . . .	4
1.2.2 Noções de plasticidade . . . . .	6
1.2.3 Cálculo da resistência de elementos flectidos segundo o EC3 . . . . .	9
1.2.3.1 Classificação das secções transversais . . . . .	9
1.2.3.2 Resistência à flexão . . . . .	10
1.2.3.3 O modo distorcional no EC3 . . . . .	12
1.2.3.4 Curvas de encurvadura de acordo com o EC3 . . . . .	13
1.2.4 O Método da Largura Efectiva . . . . .	15
1.2.5 O Método da Resistência Directa . . . . .	17
1.2.6 Efeito Brazier . . . . .	21
1.3 Objectivos . . . . .	23

## Índice de Matérias

---

1.4	Organização da dissertação . . . . .	24
<b>2</b>	<b>Bifurcação de vigas de secção fechada em losango com parede fina</b>	<b>27</b>
2.1	Introdução . . . . .	27
2.2	Parâmetros intervenientes . . . . .	31
2.3	Análise de bifurcação . . . . .	32
<b>3</b>	<b>Resistência de vigas de secção fechada em losango com parede fina</b>	<b>43</b>
3.1	Introdução . . . . .	43
3.2	Aspectos de modelação . . . . .	43
3.2.1	Condições de fronteira . . . . .	43
3.2.2	Cargas aplicadas . . . . .	44
3.2.3	Malha de Elementos Finitos . . . . .	44
3.2.4	Modelação do material . . . . .	46
3.2.5	Imperfeições . . . . .	46
3.2.6	Caracterização geométrica . . . . .	47
3.3	Comparação entre o EC3 e o ADINA . . . . .	48
3.3.1	Fronteira entre secções de classe 2 e 3 . . . . .	48
3.3.2	Fronteira entre secções de classe 3 e 4 . . . . .	53
3.3.3	Comparação dos resultados com as curvas de dimensionamento . . . . .	56
<b>4</b>	<b>Conclusões e desenvolvimentos futuros</b>	<b>61</b>
4.1	Conclusões . . . . .	61
4.2	Desenvolvimentos futuros . . . . .	63
	<b>Bibliografia</b>	<b>65</b>
<b>A</b>	<b>Rotina em MATLAB para aplicação da GBT</b>	<b>71</b>
<b>B</b>	<b>Tabelas</b>	<b>77</b>

# Índice de Figuras

1.1	Conceito de estabilidade do equilíbrio (Urutseg, 2009). . . . .	3
1.2	Intabilidade bifurcacional (adaptado de Reis e Camotim, 2001). . . . .	4
1.3	Modos de instabilidade de uma secção transversal fechada em losango. . . . .	5
1.4	Modos de instabilidade de uma secção transversal em «c» com reforços. . . . .	5
1.5	Modos de instabilidade de uma secção transversal em «z» com reforços. . . . .	6
1.6	Distribuição elástica de tensões numa viga com secção transversal em «I» (Adaptado de Segui, 2007). . . . .	7
1.7	Processo de formação de uma rótula plástica numa secção fechada sujeita a flexão (Adaptado de Simões, 2007). . . . .	8
1.8	Mecanismo devido a formação de uma rótula plástica. . . . .	8
1.9	Comportamento de secções à flexão (adaptado de Simões, 2007). . . . .	10
1.10	Quadro com os limites máximos das relações largura-espessura para componentes internos comprimidos (CEN, 2010). . . . .	11
1.11	Quadro com os limites máximos das relações largura-espessura para componentes salientes comprimidos (CEN, 2010). . . . .	12
1.12	Modelo para determinação da rigidez equivalente do reforço de extremidade para secções em «C» e «Z» (CEN, 2004). . . . .	13
1.13	Curvas de encurvadura de acordo com o EC3 (CEN, 2010). . . . .	14
1.14	Conceito de largura efectiva (adaptado de Trahair et al., 2008). . . . .	15
1.15	Rácios entre as tensões verificadas nas paredes dos elementos e factores de encurvadura local (CEN, 2006). . . . .	18
1.16	Comparação entre as curvas do MRD das equações (1.24) e (1.25) e resultados de ensaios em colunas (Schafer, 2010). . . . .	20

## Índice de Figuras

---

1.17	Comparação entre as curvas do MRD das equações (1.26) e (1.27) e resultados de ensaios em vigas (Schafer, 2010). . . . .	21
1.18	Mecânismo do efeito Brazier que conduz à ovalização de uma secção tubular (Tatting <i>et al.</i> , 1997). . . . .	22
1.19	Comparação das características de flexão de tubos com paredes finas e robustas (Wierzbicki e Sinmao, 1997). . . . .	22
1.20	Relação momento flector-rotação, para o caso de $\theta = 16^\circ$ e $b/t = 38$ . Regista-se a ocorrência de um ponto limite e de um fenómeno de «snap-back». . . . .	23
1.21	O efeito Brazier nas lâminas das eólicas. . . . .	24
2.1	Discretização de uma secção em «c» com reforços com elementos finitos de casca e faixas finitas (extraído de Li e Schafer, 2010). . . . .	27
2.2	Discretização por faixas finitas numa secção de parede fina em «c» com reforços e graus de liberdade de uma faixa finita (extraído de Schafer e Ádány, 2006). . . . .	28
2.3	Sistema de eixos locais de cada parede adoptado para um elemento com geometria arbitrária (extraído de Gonçalves e Camotim, 2007). . . . .	29
2.4	Deslocamento axial numa placa: decomposição nas parcelas de membrana e flexão (adaptado de Schardt, 1989). . . . .	30
2.5	Barra com secção em losango de parede fina com os respectivos parâmetros geométricos. . . . .	32
2.6	Modos de instabilidade de acordo com o CUFSM para $\theta=12^\circ$ e $b/t = 38$ . Neste caso, o modo de instabilidade anti-simétrico é crítico. . . . .	33
2.7	Modos de instabilidade de acordo com o CUFSM para $\theta = 14^\circ$ e $b/t = 16$ . Neste caso, o modo de instabilidade simétrico é crítico. . . . .	34
2.8	Sistema de eixos utilizado para definir as equações dos modos de deformação representado nas paredes da secção transversal. . . . .	35
2.9	Modos de deformação utilizados na análise pela GBT. . . . .	37
2.10	Comparação entre os resultados do CUFSM e os obtidos pela GBT no caso de $\theta = 12^\circ$ e $b/t = 30$ . . . . .	39
2.11	Comparação entre os resultados do CUFSM e os obtidos pela GBT no caso de $\theta = 14^\circ$ e $b/t = 16$ . . . . .	40
2.12	Parâmetros geométricos correspondentes à fronteira entre o modo de instabilidade distorcional e o modo local-de-placa. . . . .	41
3.1	Representação do perfil tipo analisado no ADINA, com as respectivas simplificações, condições de fronteira e sistema de eixos. . . . .	44
3.2	Malha de Elementos Finitos com 5 elementos na parede, representada com a tensão de comparação de Von Misses. . . . .	45

3.3	Malha de Elementos Finitos com 7 elementos na parede, representada com a tensão de comparação de Von Misses. . . . .	45
3.4	Malha de Elementos Finitos com 10 elementos na parede, representada com a tensão de comparação de Von Misses. . . . .	45
3.5	Gráfico momento flector-rotação onde se compara a precisão dos resultados obtidos com malhas de elementos finitos com 5, 7 e 10 elementos finitos na parede da secção transversal. . . . .	46
3.6	Imperfeição geométrica local de acordo com o EN 1993-1-5 (CEN, 2006). . . . .	47
3.7	Efeito das imperfeições em algumas das vigas estudadas. . . . .	48
3.8	Relação momento flector-rotação, para o caso de $\theta = 14^\circ$ e $b/t = 38$ . . . . .	49
3.9	Deformação do perfil na zona do ponto limite, para o caso de $\theta = 14^\circ$ e $b/t = 38$ . . . . .	49
3.10	Deformação do perfil em rotação = 0.1 rad, para o caso de $\theta = 14^\circ$ e $b/t = 38$ . . . . .	50
3.11	Deformação do perfil em rotação = 0.2 rad, para o caso de $\theta = 14^\circ$ e $b/t = 38$ . . . . .	50
3.12	Representação dos eixos para cálculo do momento de inércia. . . . .	51
3.13	Representação do círculo de Mohr. . . . .	51
3.14	Relação momento flector-rotação, para o caso de $\theta = 14^\circ$ e $b/t = 55$ . . . . .	54
3.15	Deformação do perfil na zona do ponto limite, para o caso de $\theta = 14^\circ$ e $b/t = 55$ . . . . .	54
3.16	Deformação do perfil em rotação = 0.1 rad, para o caso de $\theta = 14^\circ$ e $b/t = 55$ . . . . .	55
3.17	Deformação do perfil em rotação = 0.2 rad, para o caso de $\theta = 14^\circ$ e $b/t = 55$ . . . . .	55
3.18	Representação da secção transversal efectiva. A área efectiva encontra-se representada a amarelo. . . . .	57
3.19	Comparação dos momentos flectores resistentes obtidos pelo ADINA e pelo EC3 com as curvas de dimensionamento do MRD e as curvas de encurvadura do EC3, considerando a resistência elástica da secção transversal. Considerou-se a tensão crítica correspondente aos modos anti-simétricos. . . . .	59
3.20	Comparação dos momentos flectores resistentes obtidos pelo ADINA e pelo EC3 com as curvas de dimensionamento do MRD e as curvas de encurvadura do EC3, considerando a resistência elástica da secção transversal. Considerou-se a tensão crítica correspondente aos modos simétricos. . . . .	59
3.21	Comparação dos momentos flectores resistentes obtidos pelo ADINA e pelo EC3 com as curvas de dimensionamento do MRD e as curvas de encurvadura do EC3, considerando a resistência plástica da secção transversal. Considerou-se a tensão crítica correspondente aos modos anti-simétricos. . . . .	60
3.22	Comparação dos momentos flectores resistentes obtidos pelo ADINA e pelo EC3 com as curvas de dimensionamento do MRD e as curvas de encurvadura do EC3, considerando a resistência plástica da secção transversal. Considerou-se a tensão crítica correspondente aos modos simétricos. . . . .	60



# Índice de Tabelas

1.1	Factores de imperfeição para as curvas de encurvadura . . . . .	14
2.1	Parâmetros geométricos correspondentes à fronteira entre o modo de instabilidade distorcional e o modo local-de-placa, respectivas classificações das secções e esbeltezas normalizadas para quatro classes de aço, segundo o EC3. . . . .	41
3.1	Momentos flectores resistentes calculados de acordo com o EC3 e registados no ADINA, para secções próximas da fronteira entre as classes 2 e 3. . . . .	53
3.2	Momentos flectores resistentes calculados de acordo com o EC3 e registados no ADINA com e sem imperfeições geométricas, para secções próximas da fronteira entre as classes 3 e 4. . . . .	55
B.1	Momentos flectores resistentes calculados de acordo com o EC3 e registados no ADINA, para secções de aço S275, próximas da fronteira entre as classes 2 e 3. . . . .	78
B.2	Momentos flectores resistentes calculados de acordo com o EC3 com os registados no ADINA, para secções de aço S275, próximas da fronteira entre as classes 3 e 4. . . . .	79
B.3	Momentos flectores resistentes calculados de acordo com o EC3 com os registados no ADINA, para as secções de aço S275 com $b/t = 45$ . . . . .	80
B.4	Momentos flectores resistentes calculados de acordo com o EC3 com os registados no ADINA, para as secções de aço S460 com $b/t = 38$ . . . . .	81
B.5	Momentos flectores resistentes calculados de acordo com o EC3 e registados no ADINA, para uma secção de aço S460 com $b/t=55$ ). . . . .	82
B.6	Momentos flectores resistentes calculados de acordo com o EC3 e registados no ADINA, para uma secção de aço S460 com $b/t=70$ ). . . . .	83



# Lista de abreviaturas, siglas e símbolos

## Abreviaturas

EC3 Eurocódigo 3

GBT Teoria Generalizada de Vigas

MLE Método das Larguras Efectivas

MRD Método da Resistência Directa

## Siglas

CUFSM Cornell University Finite Strip Method

FCT Faculdade de Ciências e Tecnologia

UNL Universidade Nova de Lisboa

## Índices

$( )_l$  relativo à encurvadura local-de-placa

$( )_d$  relativo à encurvadura distorcional

$( )_{cr}$  valor crítico de bifurcação

$( )_{Ed}$  valor actuante de cálculo

$( )_{pl}$  valor plástico

$( )_{el}$  valor elástico

$( )_{eff}$  valor efectivo

$max$  valor máximo

$( )_{Rd}$  valor resistente de cálculo

$( )_y$  valor de cedência

## Lista de abreviaturas, siglas e símbolos

---

### Letras Latinas Maiúsculas

- $A$  área da secção transversal
- $E$  módulo de elasticidade
- $G$  módulo de distorção
- $I$  momento de inércia
- $L$  semi-comprimento de onda
- $M$  momento flector
- $N$  carga axial
- $S$  momento estático
- $U$  componente de deslocamento
- $W$  módulo de flexão

### Letras Latinas Minúsculas

- $b$  largura de uma parede da secção transversal
- $d$  distância
- $l$  comprimento da viga
- $f_y$  tensão de cedência característica do aço
- $t$  espessura das paredes da secção metálica
- $u$  componente do deslocamento do plano médio de uma parede segundo  $x$ .
- $v$  componente do deslocamento do plano médio de uma parede segundo  $y$ .
- $w$  componente do deslocamento do plano médio de uma parede segundo  $z$ .

### Letras Gregas

- $\chi$  factor de redução
- $\lambda$  esbelteza
- $\bar{\lambda}$  esbelteza normalizada

$\theta$  ângulo entre as paredes da secção transversal e o plano horizontal

$\gamma_{M0}$  coeficiente parcial de segurança para a resistência das secções de qualquer classe

$\nu$  coeficiente de Poisson

$\phi$  valor para determinar o factor de redução

$\psi$  rácio entre tensões

$\sigma$  tensão normal

$\rho$  parâmetro de redução das paredes das secções transversais de classe 4



# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 O aço na construção

A extracção e utilização do ferro, que é o principal componente do aço, remonta a 2000 anos a.C., prendendo-se, essencialmente, com a produção de simples ferramentas em ferro forjado, na região da Anatólia e da Pérsia (Walker, 2012). Em finais do século XVIII e inícios do século XIX, o ferro forjado e o ferro começaram a ser aplicados em vários tipos de pontes, com a «Iron Bridge» (1779) em Coalbrookdale, Inglaterra, a ser percussora deste tipo de utilização (Sawyer, 1979). O uso deste material permitiu a construção de algumas das obras mais emblemáticas da revolução industrial, como a torre Eiffel (1889) (Sebestyén, 1998) ou, no panorama português, a ponte ferroviária Maria Pia (1877) (Cordeiro e Vasconcelos, 2005).

O aço, uma liga metálica constituída por ferro e carbono, com muito poucas impurezas e menos carbono do que o ferro, foi introduzido na construção no século XIX, tornando-se economicamente competitivo em relação aos elementos de ferro em meados do século, com o advento de novos processos industriais (Segui, 2007). A produção barata e abundante do aço conduziu a um intenso desenvolvimento da indústria metalúrgica e de todos os sectores a ela ligada, nomeadamente a construção civil (Carnegie, 1902).

Apesar de o uso do aço na indústria da construção ter principiado na segunda metade do século XIX, o recurso a elementos metálicos de parede fina só ocorreu com regularidade durante o século XX (Silvestre e Camotim, 2002). Ainda que este material tenha conhecido grande popularidade em nações como os Estados Unidos da América e o Reino Unido, o facto de a utilização deste material para uso civil ter sido restringido durante a segunda guerra mundial impediu a progressão deste tipo de construção, o que veio a acontecer no pós-guerra, com a expansão e prosperidade desta indústria até aos níveis actuais, nomeadamente nos países mencionados (Allen, 2006).

Nas últimas décadas, verifica-se uma tendência de aplicação de elementos e estruturas com cada vez mais elevada esbelteza – termo utilizado para descrever elementos com uma elevada relação

comprimento-espessura. Esta tendência é suportada pelo grande desenvolvimento das tecnologias de produção – que tornam esta solução construtiva cada vez mais competitiva economicamente –, acompanhadas pela evolução dos métodos de dimensionamento, das normas regulamentares e, também, das ferramentas computacionais disponíveis (Davies, 2000).

A utilização extensiva de perfis metálicos de parede fina na indústria da construção prende-se, principalmente, com vantagens que variam desde (Yu, 2000):

- leveza;
- alta eficiência estrutural, devido à sua elevada relação resistência-peso;
- versatilidade na produção, permitindo a produção de elementos com geometrias menos convencionais e maior precisão nos detalhes;
- qualidade homogénea do material;
- Facilidade de pré-fabricação e produção em massa;
- rapidez e facilidade de instalação;
- Redução substancial dos atrasos em obra devido a más condições atmosféricas;
- desnecessidade de cofragens;
- material incombustível;
- material reciclável.

Este tipo de perfil pode possuir grandes dimensões e espessuras pequenas, o que lhe confere um elevado momento de inércia (Rondal *et al.*, 1992). No entanto, a elevada esbelteza destes elementos suscita uma variedade de problemas, nomeadamente a alta susceptibilidade a fenómenos de instabilidade.

## 1.2 Conceitos gerais

### 1.2.1 Estabilidade estrutural

Na análise de estruturas, a classificação das configurações de equilíbrio está intimamente relacionada com a noção de estabilidade. Quando uma estrutura é sujeita à acção de forças exteriores, esta apresenta uma configuração de equilíbrio caracterizada pelos valores dos deslocamentos dos seus pontos. A estabilidade dessa configuração de equilíbrio pode ser avaliada pelo comportamento da estrutura quando sujeita a uma «perturbação» provocada por uma acção exterior arbitrária (Reis e Camotim, 2001). A configuração de equilíbrio pode ser descrita como (i) estável, se a estrutura regressa a essa

mesma configuração quando finda a perturbação; (ii) instável, se a estrutura não regressa à configuração inicial; (iii) neutra, se o movimento da estrutura não afecta o estado de equilíbrio. O conceito de estabilidade de equilíbrio é ilustrado na Figura 1.1.

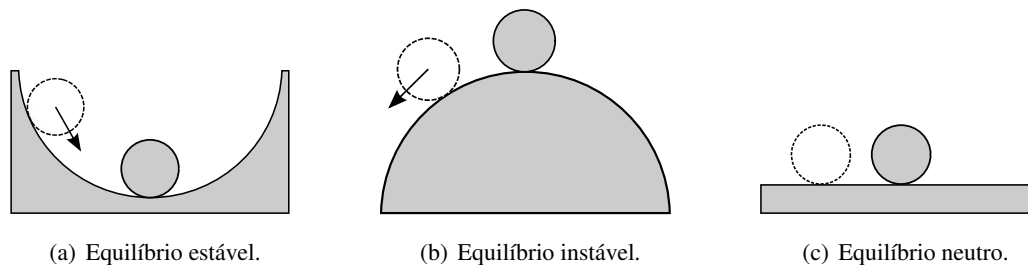


Figura 1.1: Conceito de estabilidade do equilíbrio (Urutseg, 2009).

Apesar da importância capital que a análise da resistência e da deformabilidade dos materiais tem para o projecto de estruturas, os fenómenos relacionados com a estabilidade – quer os que dizem respeito à estrutura como um todo, quer aos elementos isoladamente –, têm, igualmente, um papel decisivo na segurança das estruturas, particularmente no caso das estruturas mais esbeltas, como são tipicamente exemplo as estruturas em aço. Estes fenómenos de estabilidade são genericamente designados «fenómenos de estabilidade estrutural». Contudo, na terminologia portuguesa ligada ao projecto de estruturas, a palavra «encurvadura» tem sido vulgarmente empregue para designar estes fenómenos, independentemente da sua natureza (Reis e Camotim, 2001).

A instabilidade de uma estrutura corresponde à transição entre configurações de equilíbrio estáveis e instáveis. No presente texto, é abordado um tipo de instabilidade que se materializa através de uma bifurcação de equilíbrio, fenómeno designado por «instabilidade bifurcacional», o qual é discutido na secção seguinte.

### 1.2.1.1 Instabilidade Bifurcacional

Tal como ilustrado na figura 1.2, a instabilidade bifurcacional caracteriza-se por (Reis e Camotim):

- (i) Uma trajectória de equilíbrio fundamental (linear ou não linear), que se inicia na origem do diagrama carga-deslocamento.
- (ii) Uma trajectória de equilíbrio de pós-encurvadura, que não passa pela origem do diagrama carga-deslocamento.
- (iii) Um ponto de bifurcação, que corresponde à intersecção das duas trajectórias e no qual as configurações de equilíbrio da trajectória fundamental passam de estáveis a instáveis.

A análise dum problema deste tipo, envolve a determinação (i) das coordenadas do ponto de bifurcação – nomeadamente a carga de bifurcação –, (ii) da configuração deformada da estrutura que

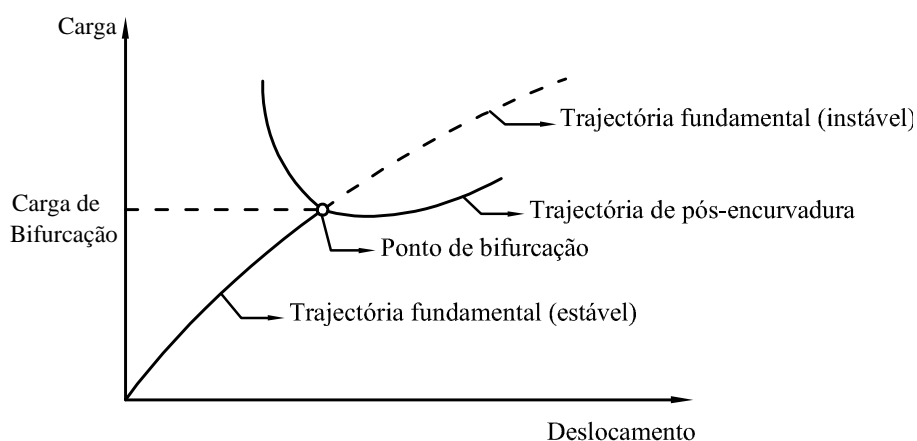


Figura 1.2: Intabilidade bifurcacional (adaptado de Reis e Camotim, 2001).

advém da bifurcação – o chamado «modo de instabilidade» –, (iii) das propriedades da trajectória de pós encurvadura. Nesta dissertação, é efectuada uma análise linear de estabilidade, que abrange os dois primeiros pontos enunciados. A determinação da trajectória pós-encurvadura mencionada no terceiro ponto, que envolveria uma análise não-linear de maior complexidade, não é objecto do presente texto.

### 1.2.1.2 Instabilidade de elementos de parede fina

Tal como referido anteriormente, os elementos de parede fina têm uma elevada susceptibilidade a fenómenos de instabilidade e, após a bifurcação, podem apresentar uma série de configurações deformadas distintas, os denominados «modos de instabilidade». Dentro destes, tipicamente, distinguem-se os modos de instabilidade (i) global, (ii) local-de-placa e (iii) distorcional. Dependendo da geometria da barra (o seu comprimento e o formato e dimensões da secção transversal) e das suas condições de apoio, qualquer um destes modos de instabilidade pode ser crítico (Santos et al., 2012). Contudo, apesar de ser consensual a existência destes três modos, não existe concordância na comunidade científica quanto à terminologia e a uma definição clara dos modos (Schafer e Ádány, 2005). Ainda assim, uma definição possível é (Schafer, 2010)

i) A instabilidade global provoca, apenas, movimentos de corpo rígido da secção transversal (ver Figuras 1.3(c), 1.4(c) e 1.5(c)).

ii) Os fenómenos de instabilidade local-de-placa caracterizam-se pela permanência do eixo longitudinal na configuração indeformada e por uma deformação da secção devida à flexão das paredes, sem que os nós sofram qualquer deslocamento (ver Figuras 1.3(a), 1.4(a) e 1.5(a)).

iii) Por sua vez, a instabilidade distorcional apresenta características de modo global e de modo local, pois o eixo da barra mantém-se fixo, mas os seus nós sofrem deslocamentos, havendo deforma-

ção das paredes da secção transversal e empenamento (deslocamento dos nós na direcção longitudinal da barra) (ver Figuras 1.3(b), 1.4(b) e 1.5(b)).

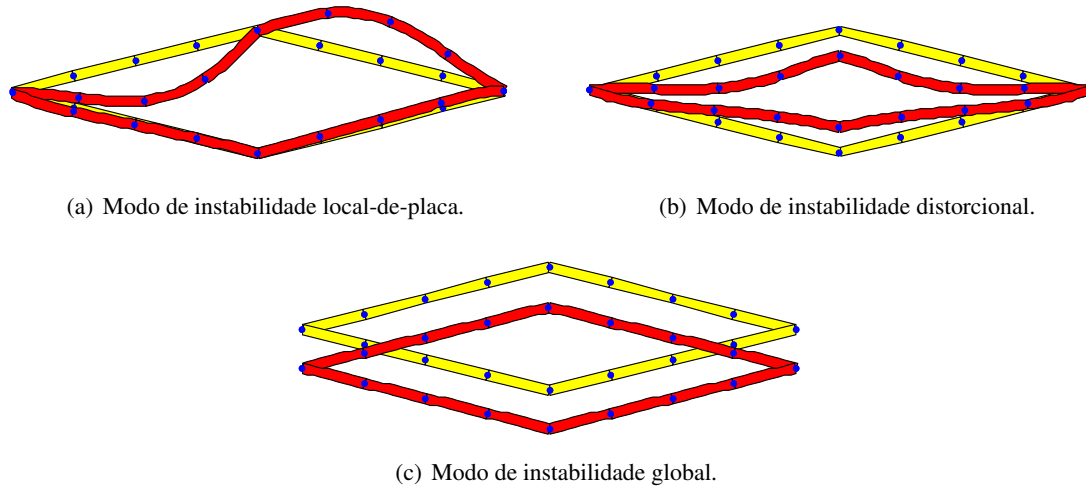


Figura 1.3: Modos de instabilidade de uma secção transversal fechada em losango.

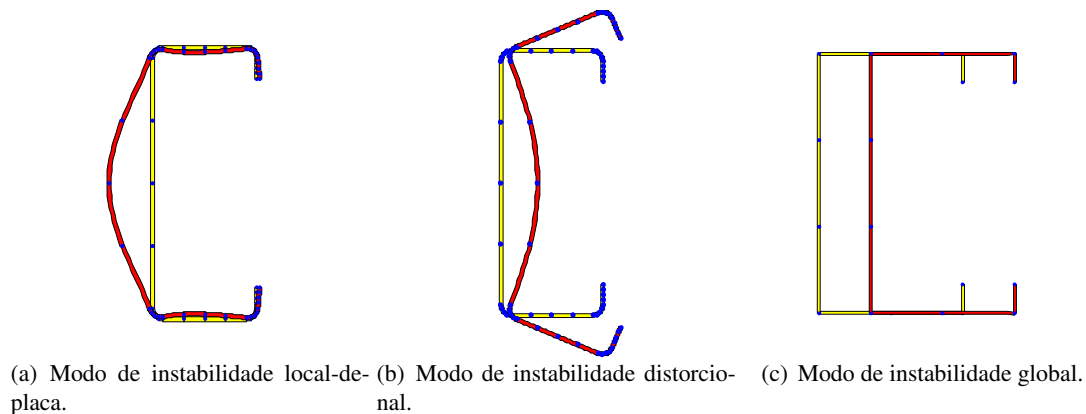
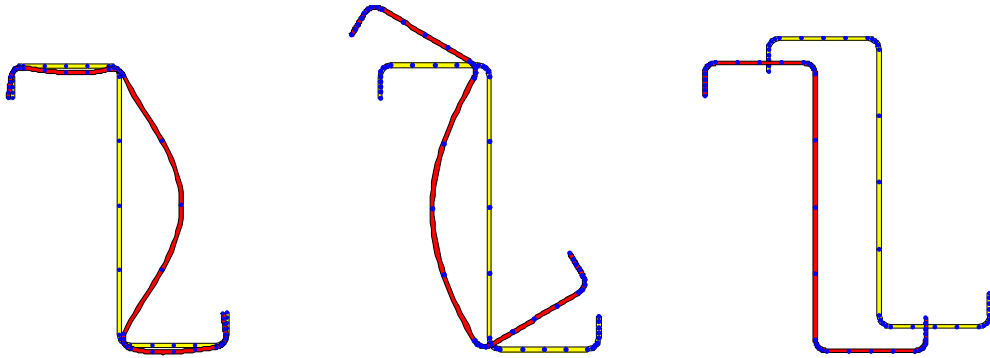


Figura 1.4: Modos de instabilidade de uma secção transversal em «c» com reforços.

Tal como já se afirmou, a análise deste tipo de problema prende-se, precisamente, com a investigação da forma do modo de instabilidade e com a determinação da carga crítica de bifurcação. Independentemente das abordagens utilizadas pelos regulamentos de dimensionamento de elementos metálicos de parede fina, uma característica comum a todos eles é a necessidade de determinação das cargas críticas associadas aos modos de instabilidade, para cálculo da resistência dos elementos à encurvadura. Assim, uma análise precisa é essencial para garantir a segurança e a viabilidade económica dos elementos de parede fina. Actualmente, existem vários métodos numéricos aos quais se pode recorrer para calcular as cargas críticas de elementos de parede fina, como por exemplo, o Método dos Elementos Finitos com elementos de casca (MEF), o Método das Faixas Finitas (MFF) ou a Teoria de



(a) Modo de instabilidade local- (b) Modo de instabilidade distorcional. (c) Modo de instabilidade global de-placa.

Figura 1.5: Modos de instabilidade de uma secção transversal em «z» com reforços.

Vigas Generalizada (GBT), os quais são discutidos com detalhe no Capítulo 2. O âmago do problema é que existem métodos que conseguem lidar com qualquer tipo de secção transversal, condições de fronteira e carregamentos, mas não conseguem identificar explicitamente os modos de instabilidade. O MEF com elementos de casca é um caso paradigmático que, para aferir com precisão as cargas críticas, implica a utilização de um grande número de elementos finitos e, conseqüentemente, de muitos graus de liberdade. Ainda que, actualmente, não implique um grande esforço computacional, o método não identifica a participação modal. O MFF, utilizado neste trabalho, apresenta o mesmo tipo de limitações, embora revele, em certas situações, alguns benefícios face ao MEF, tal como será discutido em 2.1. Por outro lado, existem métodos especializados para peças lineares, como a GBT, que permitem resolver a questão da identificação dos modos automaticamente, utilizando um número relativamente reduzido de graus de liberdade.

### 1.2.2 Noções de plasticidade

As vigas são, por definição, elementos estruturais que suportam carregamentos transversais e, por conseguinte, são sujeitas a esforços de flexão. No caso de estarem presentes solicitações axiais significativas, o elemento é chamado «coluna-viga». Apesar de estar quase sempre presente algum grau de esforço axial em qualquer elemento estrutural, em muitos casos práticos este efeito é desprezável e o elemento pode ser tratado como uma viga (Segui, 2007).

De modo a ser possível quantificar a resistência duma viga, é necessário examinar minuciosamente o seu comportamento. Analisando o exemplo geral de uma viga com secção transversal em «I», composta por um material elástico linear, a solução da teoria de Euler-Bernoulli para a flexão fornece a distribuição de tensões representada na Figura 1.6, onde a tensão de flexão num ponto é

definida por

$$\sigma = \frac{Md}{I_x}, \quad (1.1)$$

onde  $M$  é o momento flector na secção transversal,  $d$  corresponde à distância do ponto em causa ao eixo central principal de inércia apropriado e  $I_x$  é o momento de inércia em relação a esse eixo. A tensão máxima ocorre quando  $d$  é máxima ( $d_{max}$ ). Assim, a partir da equação (1.1), a tensão máxima é dada por

$$f_{max} = \frac{Md_{max}}{I_x} = \frac{M}{I_x/d_{max}} = \frac{M}{W_{el}}, \quad (1.2)$$

onde  $W_{el}$  é o módulo de flexão elástico da secção transversal.

As expressões (1.1) e (1.2) são válidas enquanto a tensão máxima,  $f_{max}$ , não exceder a tensão de cedência,  $f_y$ . O momento flector, na situação limite, corresponde ao momento de cedência, definido por

$$M_y = f_y W_{el} \quad (1.3)$$

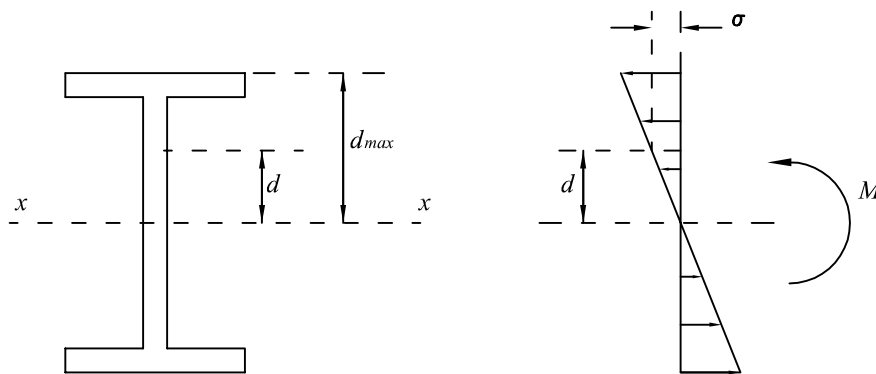


Figura 1.6: Distribuição elástica de tensões numa viga com secção transversal em «I» (Adaptado de Segui, 2007).

Atingido o momento de cedência, ocorre a transição da fase elástica para a fase elasto-plástica, iniciando-se a plastificação na fibra extrema, progredindo rumo ao eixo neutro, até à plastificação integral da secção transversal, alcançando-se o momento plástico,  $M_{pl}$  (ver Figura 1.7). Esgotada a capacidade máxima da secção, dá-se a formação de uma rótula plástica, o que, no exemplo da Figura 1.8, cria um mecanismo, levando ao colapso da estrutura (Simões, 2007).

O momento plástico é dado por

$$M_{pl} = A_c f_y d_c + A_t f_y d_t = (S_c + S_t) f_y = W_{pl} f_y \quad (1.4)$$

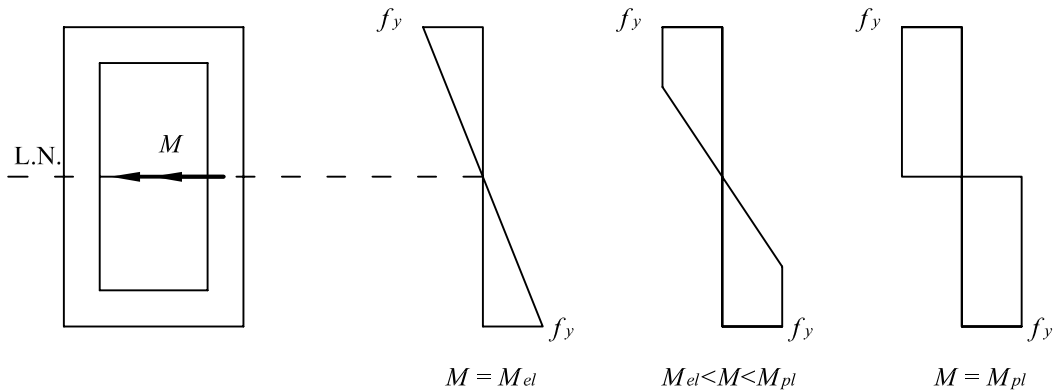


Figura 1.7: Processo de formação de uma rótula plástica numa secção fechada sujeita a flexão (Adaptado de Simões, 2007).

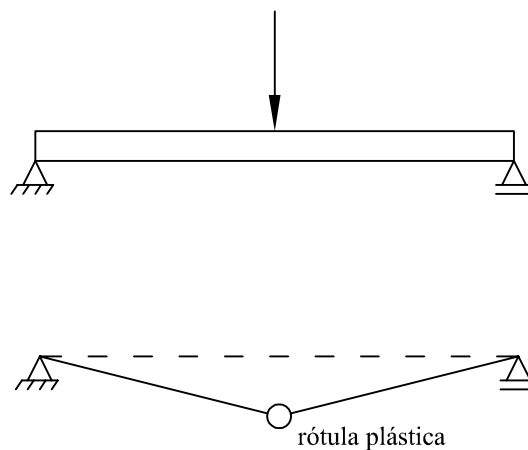


Figura 1.8: Mecanismo devido a formação de uma rótula plástica.

onde os índices  $c$  e  $t$  correspondem a compressão e tracção, respectivamente,  $A$  é a área da secção transversal e  $S$  é o momento estático de meia secção em relação ao eixo neutro. No caso em que o eixo neutro é, também, um eixo de simetria, a Equação (1.4) por

$$M_{pl} = A f_y d = 2 S f_y = W_{pl} f_y \quad (1.5)$$

A capacidade de um elemento mobilizar a sua resistência plástica antes de colapsar pode ser condicionada por fenómenos de encurvadura local. Por esta razão, antes de se proceder ao cálculo das propriedades resistentes, a metodologia preconizada pela regulamentação europeia passa pela definição da classe da secção transversal. Este tema é discutido na secção seguinte.

### 1.2.3 Cálculo da resistência de elementos flectidos segundo o EC3

#### 1.2.3.1 Classificação das secções transversais

A classificação das secções transversais segundo a norma NP EN 1993-1-1 (CEN, 2010) tem a finalidade de identificar em que medida a resistência e a capacidade de rotação de uma secção são influenciadas por fenómenos de encurvadura local. Quanto mais esbeltos forem os elementos que constituem a secção, mais susceptível esta é de sofrer de tal fenómeno.

O Eurocódigo 3 (EC3) define quatro classes de secções transversais, da seguinte forma

- As secções transversais da Classe 1 são aquelas em que se pode formar uma rótula plástica, com capacidade de rotação necessária para uma análise plástica, sem redução da sua resistência;
- As secções transversais da Classe 2 são aquelas que podem atingir o momento resistente plástico, mas cuja capacidade de rotação é limitada pela encurvadura local;
- As secções transversais da Classe 3 são aquelas em que a tensão na fibra extrema comprimida, calculada com base numa distribuição elástica de tensões, pode atingir o valor da tensão de cedência, mas em que a encurvadura local impede que o momento resistente plástico possa ser atingido;
- As secções transversais da Classe 4 são aquelas em que ocorre a encurvadura local antes de se atingir a tensão de cedência numa ou mais partes da secção transversal.

A Figura 1.9 ilustra como, de acordo com a classificação do EC3, são mobilizadas as resistências elástica e plástica numa secção transversal sujeita a flexão, num gráfico Momento-curvatura.  $M_{el}$  e  $M_{pl}$  representam o momento elástico e o momento plástico da secção, respectivamente.

As secções são classificadas comparando a esbelteza  $\lambda = (c/t)\sqrt{f_y/235}$  com os limites definidos nos quadros das Figuras 1.10 e 1.11, onde  $c$  e  $t$  são o comprimento e a espessura dos componentes comprimidos, respectivamente, e  $f_y$  é a tensão de cedência do aço, identificada de acordo com a classe do aço.

Assim, a classificação de uma secção transversal depende da classe do aço, dos esforços actuantes (assentando no diagrama de tensões normais correspondente à sua capacidade máxima), da relação entre a largura e a espessura das suas paredes sujeitas a tensões normais longitudinais de compressão e de se o elemento é interior ou exterior. Note-se que, nos quadros das Figuras 1.10 e 1.11, os limites definidos abrangem as classes 1, 2 e 3, pelo que um componente que não satisfaça os limites da Classe 3 deverá ser considerado como sendo de Classe 4. A classe da secção como um todo, é definida pela maior classe dos elementos que a compõem.

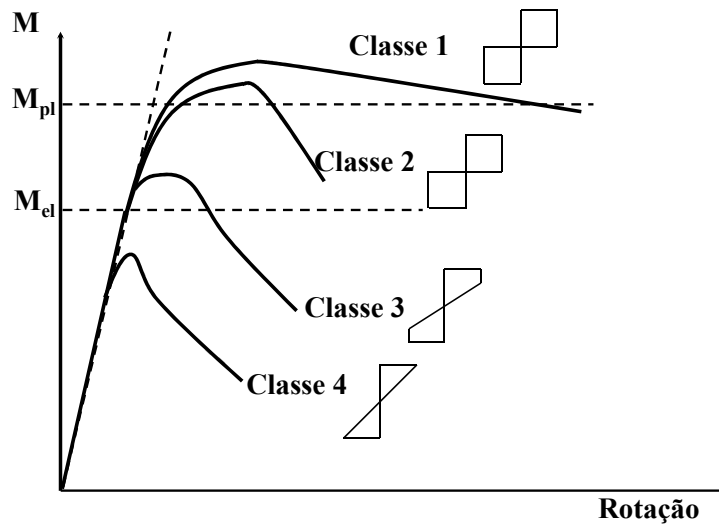


Figura 1.9: Comportamento de seções à flexão (adaptado de Simões, 2007).

### 1.2.3.2 Resistência à flexão

Para que uma viga verifique a resistência à flexão, a seguinte condição tem de ser verificada

$$M_{Ed} \leq M_{Rd} \quad (1.6)$$

Por conseguinte, o valor resistente de cálculo do momento flector de acordo com o EC3 é quantificado segundo as equações 1.7, 1.8 e 1.9.

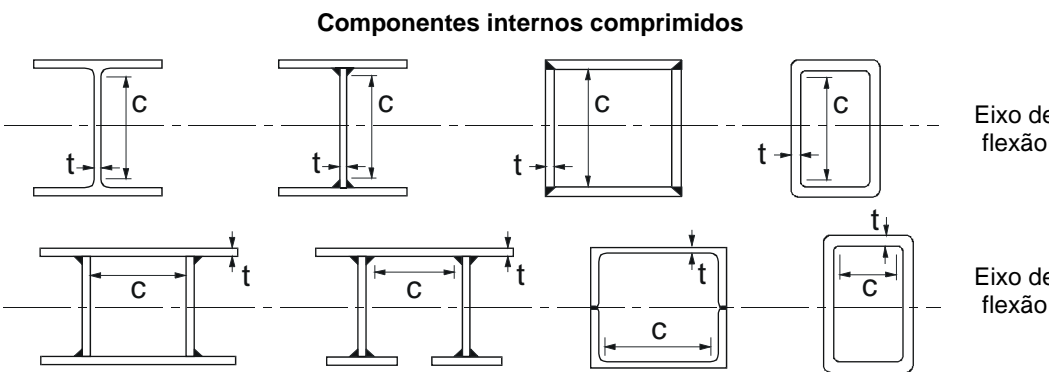
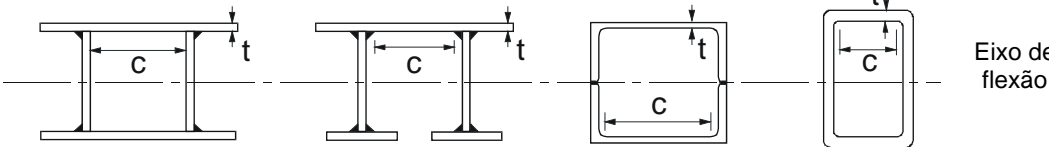
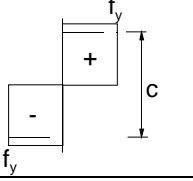
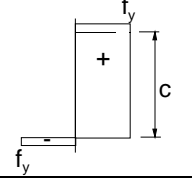
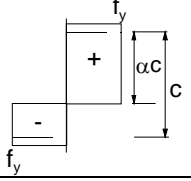
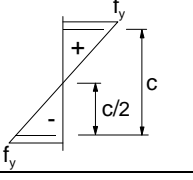
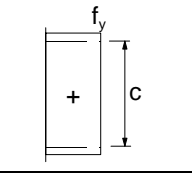
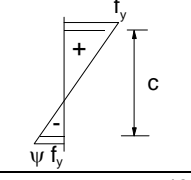
$$M_{Rd} = M_{pl,Rd} = \frac{W_{pl}f_y}{\gamma_{M0}} \quad \text{para as seções transversais de classe 1 ou 2} \quad (1.7)$$

$$M_{Rd} = M_{el,Rd} = \frac{W_{el}f_y}{\gamma_{M0}} \quad \text{para as seções transversais de classe 3} \quad (1.8)$$

$$M_{Rd} = \frac{W_{eff}f_y}{\gamma_{M0}} \quad \text{para as seções transversais de classe 4} \quad (1.9)$$

onde  $W_{el}$  e  $W_{pl}$  são os módulos de flexão elásticos e plásticos da secção, respectivamente e  $W_{eff}$  é o módulo de flexão elástico da secção efectiva, que se traduz numa secção reduzida, onde a tensão na fibra mais solicitada corresponde à tensão de cedência.

A elevada esbelteza dos elementos de parede fina torna este tipo de elementos particularmente susceptíveis à encurvadura local, o que coloca a hipótese de não ser atingida a tensão de cedência na fibra mais comprimida. Segundo o EC3 parte 1-1, estes elementos enquadram-se na classe 4, devendo proceder-se a uma redução da sua secção efectiva. Para tal, o EC3 preconiza a utilização do Método das Larguras Efectivas (MLE), o qual é discutido no subcapítulo 1.2.4.

Componentes internos comprimidos						
				Eixo de flexão		
				Eixo de flexão		
Classe	Componente solicitada à flexão	Componente solicitada à compressão	Componente solicitada à flexão e à compressão			
Distribuição das tensões nos componentes (compressão positiva)						
1	$c/t \leq 72\varepsilon$	$c/t \leq 33\varepsilon$	quando $\alpha > 0,5$ : $c/t \leq \frac{396\varepsilon}{13\alpha - 1}$ quando $\alpha \leq 0,5$ : $c/t \leq \frac{36\varepsilon}{\alpha}$			
2	$c/t \leq 83\varepsilon$	$c/t \leq 38\varepsilon$	quando $\alpha > 0,5$ : $c/t \leq \frac{456\varepsilon}{13\alpha - 1}$ quando $\alpha \leq 0,5$ : $c/t \leq \frac{41,5\varepsilon}{\alpha}$			
Distribuição das tensões nos componentes (compressão positiva)						
3	$c/t \leq 124\varepsilon$	$c/t \leq 42\varepsilon$	quando $\psi > -1$ : $c/t \leq \frac{42\varepsilon}{0,67 + 0,33\psi}$ quando $\psi \leq -1^*)$ : $c/t \leq 62\varepsilon (1 - \psi)\sqrt{-\psi}$			
$\varepsilon = \sqrt{235/f_y}$	$f_y$	235	275	355	420	460
	$\varepsilon$	1,00	0,92	0,81	0,75	0,71

\*)  $\psi \leq -1$  aplica-se quando a tensão de compressão  $\sigma \leq f_y$  ou quando a extensão de tracção  $\varepsilon_y > f_y/E$

Figura 1.10: Quadro com os limites máximos das relações largura-espessura para componentes internos comprimidos (CEN, 2010).

Banzos em consola						
		Secções laminadas		Secções soldadas		
Classe	Componente solicitado à compressão	Componente solicitado à flexão e à compressão				
		Extremidade comprimida		Extremidade traccionada		
Distribuição das tensões nos componentes (compressão positiva)						
1	$c/t \leq 9\varepsilon$	$c/t \leq \frac{9\varepsilon}{\alpha}$	$c/t \leq \frac{9\varepsilon}{\alpha\sqrt{\alpha}}$			
2	$c/t \leq 10\varepsilon$	$c/t \leq \frac{10\varepsilon}{\alpha}$	$c/t \leq \frac{10\varepsilon}{\alpha\sqrt{\alpha}}$			
Distribuição das tensões nos componentes (compressão positiva)						
3	$c/t \leq 14\varepsilon$	$c/t \leq 21\varepsilon\sqrt{k_\sigma}$ Para $k_\sigma$ ver EN 1993-1-5				
$\varepsilon = \sqrt{235/f_y}$	$f_y$	235	275	355	420	460
	$\varepsilon$	1,00	0,92	0,81	0,75	0,71

Figura 1.11: Quadro com os limites máximos das relações largura-espessura para componentes salientes comprimidos (CEN, 2010).

### 1.2.3.3 O modo distorcional no EC3

Na regulamentação europeia de estruturas metálicas, o modo de instabilidade distorcional só é tido em conta para as secções enformadas a frio, limitando-se à situação de elementos com reforços intermédios ou de extremidade. Estes elementos são abordados no EC3-1-3 (CEN, 2004).

Para ter em conta este modo de encurvadura, o EC3 prescreve, antes de mais, que a secção transversal seja reduzida à sua secção efectiva, devendo, depois, adoptarem-se espessuras reduzidas para os reforços. Para dimensionamento destes elementos, o EC3 assume um modelo do género do da Figura 1.12, devendo ser calculada uma rigidez equivalente dos reforços, que pode ser representada por uma mola cuja rigidez depende das condições de apoio e da rigidez de flexão dos elementos adjacentes.

Determinada a rigidez da mola equivalente, é calculada a tensão crítica distorcional de acordo

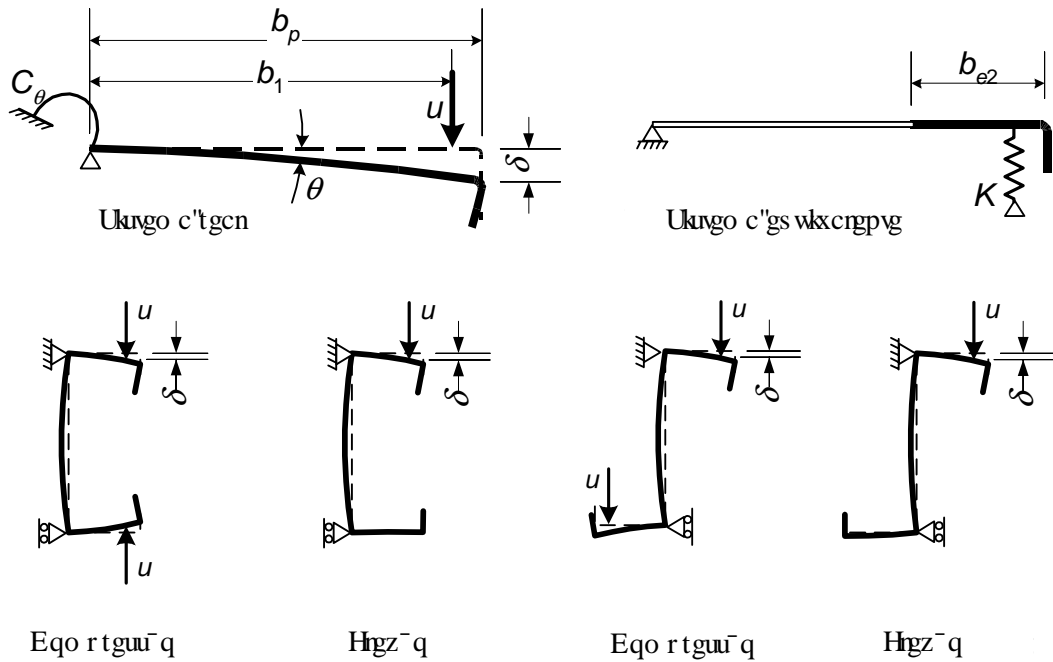


Figura 1.12: Modelo para determinação da rigidez equivalente do reforço de extremidade para secções em «C» e «Z» (CEN, 2004).

com o EC3, com base na qual se chega à esbelteza normalizada distorcional. Finalmente, com base na esbelteza normalizada distorcional, é possível quantificar a espessura reduzida do reforço através da formulação do EC3. Como se pode constatar, esta metodologia é bastante complexa e de aplicação morosa.

### 1.2.3.4 Curvas de encurvadura de acordo com o EC3

No EC3, a análise dos estados limites últimos de estabilidade passa pela verificação de resistência à encurvadura. Esta verificação é feita com base nas denominadas «curvas de encurvadura europeias», as quais se fundamentam numa série de investigações, de carácter numérico e experimental, elaboradas tendo em consideração as imperfeições geométricas e as tensões residuais nos elementos (Rondal, et al., 1992).

De acordo com o estabelecido na secção 6.3 do regulamento, as curvas de encurvadura para elementos uniformes comprimidos são determinadas através de (CEN, 2010)

$$\chi = \frac{1}{\Phi + \sqrt{\Phi^2 - \bar{\lambda}^2}} \leq 1,0, \quad (1.10)$$

em que

$$\Phi = 0,5 \left[ 1 + \alpha (\bar{\lambda} - 0,2) + \bar{\lambda}^2 \right], \quad (1.11)$$

com

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{N_R}{N_{cr}}}. \quad (1.12)$$

onde  $N_R$  é o esforço axial resistente e  $N_{cr}$  é o valor crítico do esforço axial. O parâmetro  $\alpha$  pretende integrar a influência de imperfeições nos elementos metálicos. O seu valor depende do tipo de perfil, da classe do aço, do plano de encurvadura condicionante e, eventualmente, das dimensões geométricas e do processo de fabrico do perfil metálico. Por conseguinte, podem ser criadas cinco curvas diferentes para os vários valores de  $\alpha$  assumidos pelo EC3-1-1, estando estes registados na tabela 1.1. As curvas de encurvadura encontram-se representadas na Figura 1.13.

Tabela 1.1: Factores de imperfeição para as curvas de encurvadura

Curva de encurvadura	$a_0$	a	b	c	d
Factor de imperfeição $\alpha$	0,13	0,21	0,34	0,49	0,76

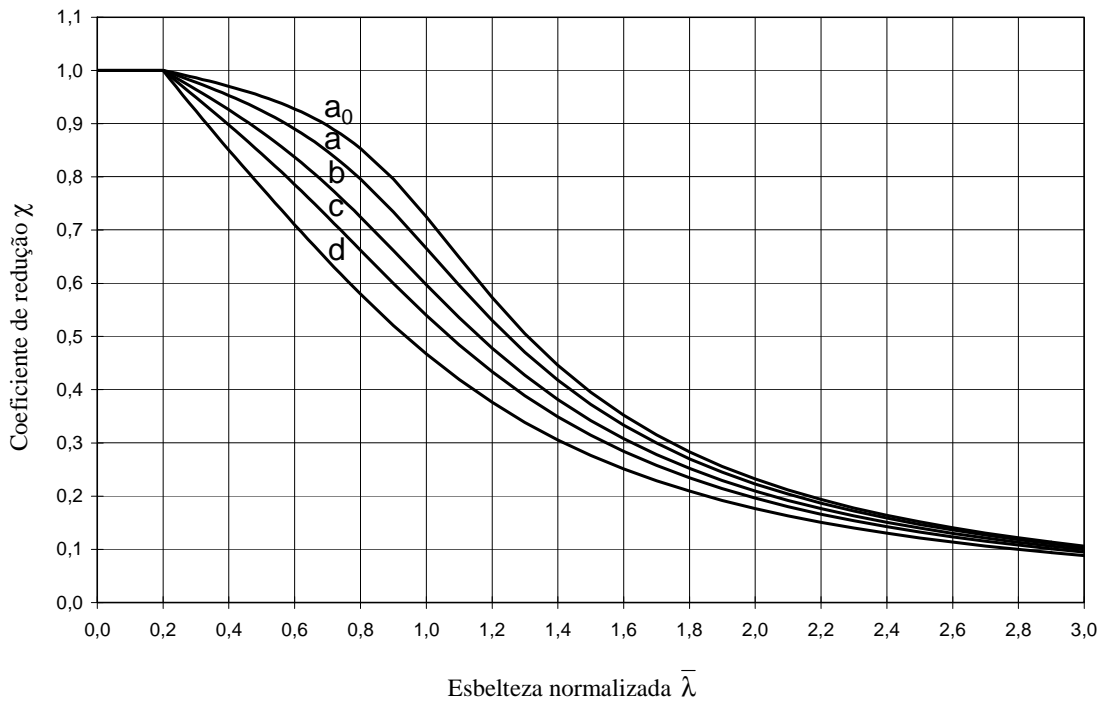


Figura 1.13: Curvas de encurvadura de acordo com o EC3 (CEN, 2010).

No caso de elementos sujeitos a flexão, a verificação à encurvadura lateral passa pela quantificação do factor de redução

$$\chi_{LT} = \frac{1}{\Phi_{LT} + \sqrt{\Phi_{LT}^2 - \bar{\lambda}_{LT}^2}} \leq 1,0, \quad (1.13)$$

em que

$$\Phi = 0,5 \left[ 1 + \alpha_{LT} (\bar{\lambda}_{LT} - 0,2) + \bar{\lambda}_{LT}^2 \right], \quad (1.14)$$

com

$$\bar{\lambda}_{LT} = \sqrt{\frac{M_R}{M_{cr}}}. \quad (1.15)$$

onde  $M_R$  é o momento flector resistente e  $M_{cr}$  corresponde ao momento crítico. O parâmetro de imperfeição  $\alpha_{LT}$  tem um significado semelhante ao parâmetro das colunas, estando-lhes associadas as mesmas curvas de encurvadura.

No caso das secções enformadas a frio, o EC3 prescreve a mesma metodologia utilizada do EC3 parte 1-1. A principal diferença reside na escolha das curvas de encurvadura.

### 1.2.4 O Método da Largura Efectiva

O conceito de largura efectiva foi introduzido em 1932, pelo trabalho pioneiro de Von Kármán. De acordo com este conceito, a distribuição real de tensões é substituída por uma distribuição simplificada, para a qual a zona do elemento mais flexível não é tida em conta e se assume que as tensões são distribuídas pela largura efectiva remanescente,  $b_{eff}$ , sujeita a uma distribuição uniforme das tensões com magnitude equivalente a  $f_y$  (ver Figura 1.14). A metodologia do MLE alicerça-se nas expressão do parâmetro de redução de Von Kármán (Von Kármán, Sechler e Donnel, 1932)

$$\rho = \frac{b_{eff}}{b} = \sqrt{\frac{\sigma_{cr}}{f_y}} = \frac{1}{\lambda_p}. \quad (1.16)$$

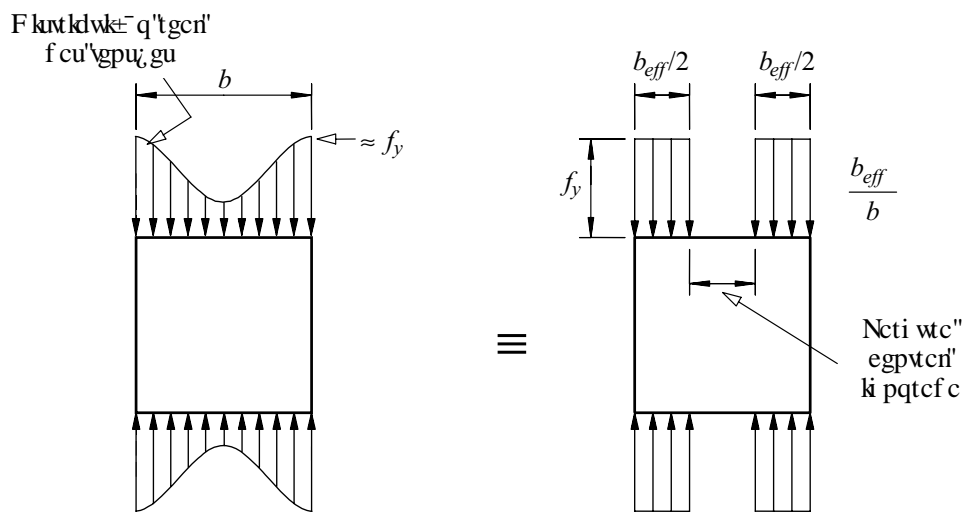


Figura 1.14: Conceito de largura efectiva (adaptado de Trahair et al., 2008).

## Capítulo 1. Introdução

---

A difusão generalizada do MLE iniciou-se no anos 40, com a publicação da primeira especificação do *American Iron and Steel Institute* nos Estados Unidos da América (AISI, 1946) (Hancock et al., 2001). O facto de se começar a ter em conta a resistência de pós-encurvadura dos elementos, constituía uma novidade nas normas de estruturas de aço (Hancock et al., 2001). Tipicamente, os elementos de parede fina são susceptíveis à encurvadura quando sujeitos a tensões de compressão relativamente baixas. No entanto, verifica-se que existe uma certa largura da secção transversal, juntos aos cantos, que se mantém efectiva para resistir a maiores tensões de compressão. Assim, a questão resume-se a quantificar quanto da largura original continua eficiente. Trahair et al. (2008) definem largura efectiva como: «A porção da largura de uma placa com uma distribuição não uniforme de tensões que se pode considerar totalmente efectiva quando a distribuição não uniforme das tensões é ignorada».

Vulgarmente, os perfis metálicos enformados a frio contêm imperfeições geométricas e tensões residuais devido ao processo de fabrico (Hancock et al., 2001). Consequentemente, o método conheceu uma importante evolução impulsionada pelo trabalho de Winter, que calibrou o método com base em resultados experimentais (Winter, 1946)

$$\rho = \frac{\bar{\lambda}_p - 0,25}{\bar{\lambda}_p^2}. \quad (1.17)$$

A equação de Winter corresponde, basicamente, à expressão utilizada na actualidade, tendo sofrido apenas um pequeno ajuste, assumindo-se, no EC3, como

$$\rho = \frac{\bar{\lambda}_p - 0,22}{\bar{\lambda}_p^2}. \quad (1.18)$$

Note-se que a largura efectiva  $b_{eff}$  iguala  $b$  para  $\bar{\lambda}_p = 0,673$ , pelo que, para  $\bar{\lambda}_p \leq 0,673$  toda a largura do elemento é considerada eficiente.

Actualmente, o MLE é o método mais amplamente utilizado pelos regulamentos estruturais tendo em vista a inclusão dos fenómenos de encurvadura local no dimensionamento das estruturas metálicas de parede fina, sendo utilizado no EC3, tal como mencionado na secção 1.2.3. No EC3 parte 1-5 (CEN, 2006), é prescrita a metodologia para redução das secções brutas dos elementos de classe 4. Assim, a redução da zona comprimida é dada por

$$\rho = 1,0 \quad , \text{ se } \bar{\lambda}_p \leq 0,673$$
$$\rho = \frac{\bar{\lambda}_p - 0,055(3 + \psi)}{\bar{\lambda}_p^2} \leq 1,0 \quad , \text{ se } \bar{\lambda}_p > 0,673 \quad (1.19)$$

em que a esbelteza é

$$\bar{\lambda}_p = \sqrt{\frac{f_y}{\sigma_{cr}}}, \quad (1.20)$$

enquanto que o parâmetro  $\psi$  corresponde ao rácio entre as tensões verificadas nas paredes da secção e pode ser consultado na Figura 1.15. Segundo o Anexo A do EC3-1-5, a tensão crítica,  $\sigma_{cr}$  pode ser calculada de acordo com

$$\sigma_{cr} = k_{\sigma}\sigma_E, \quad (1.21)$$

onde

$$\sigma_E = \frac{\pi^2 Et^2}{12(1-\nu^2)b^2} = 190000 \left(\frac{t}{b}\right)^2, \quad (1.22)$$

em que  $k_{\sigma}$  é o factor de encurvadura, definido de acordo com as condições de fronteira e com o rácio das tensões, dado de acordo com os quadros da Figura 1.15. Substituindo  $\sigma_{cr}$  na expressão (1.20), a esbelteza normalizada pode ser calculada por

$$\bar{\lambda}_p = \sqrt{\frac{f_y}{\frac{k_{\sigma}\pi^2 Et^2}{12(1-\nu^2)b^2}}} = \frac{b/t}{\sqrt{\frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} f_y \sqrt{k_{\sigma}}}} = \frac{b/t}{28,4\varepsilon\sqrt{k_{\sigma}}}, \quad (1.23)$$

$$\text{com } \varepsilon = \sqrt{\frac{235}{f_y[N/mm^2]}}.$$

### 1.2.5 O Método da Resistência Directa

À parte do MLE, existem abordagens de cálculo alternativas que abrangem outros modos de encurvadura, para além da encurvadura local-de-placa. É exemplo o Método da Resistência Directa, desenvolvido por Schafer e Peköz (1998b), que teve a sua génese no trabalho de Hancock et al. (1994), e que, actualmente, já está integrado em normas regulamentares, nomeadamente no regulamento Australiano/Neo-Zelandês AS/NZS 4600 (Standards Australia/Standards New Zealand, 2005) e no Norte-Americano AISI (AISI, 2004).

De forma relativamente simples, o MRD permite estimar a resistência última de colunas e vigas de aço enformado a frio, cujo colapso ocorre em modos globais (por flexão, torção ou flexão-torção), locais-de-placa, distorcionais, ou mecanismos que envolvem interacção entre modos de instabilidade locais-de-placa. Para tal, a premissa do MRD é que a resistência pode ser definida em termos da instabilidade elástica da secção e da força ou momento que levam a secção a ceder (Schafer, 2010).

Contrastando com o Método das Larguras Efectivas, que se foca individualmente nos elementos que compõem a secção transversal, o MRD analisa a secção como um todo (Schafer, 2010). Isto é particularmente relevante no caso de secções transversais com geometrias complexas (com introdução de reforços no perfil, por exemplo), em que o uso do MLE não tem em conta a interacção entre os elementos que compõem a secção.

No entanto, o MRD também apresenta desvantagens. Schafer alerta que, devido ao facto de o MRD prever a resistência com base nas cargas de bifurcação, obtêm-se soluções muito conservativas

Capítulo 1. Introdução

"F kmtkdwk± q f'cu\gput,gu"ºeqo r tguu q r qukkxc+				"rti wtc"ghgevkxc b <sub>eff</sub>		
				$\psi = 1:$ $b_{eff} = \rho \bar{b}$ $b_{e1} = 0,5 b_{eff} \quad b_{e2} = 0,5 b_{eff}$		
				$1 > \psi > 0:$ $b_{eff} = \rho \bar{b}$ $b_{e1} = \frac{2}{5 - \psi} b_{eff} \quad b_{e2} = b_{eff} - b_{e1}$		
				$\psi < 0:$ $b_{eff} = \rho b_c = \rho \bar{b} / (1 - \psi)$ $b_{e1} = 0,4 b_{eff} \quad b_{e2} = 0,6 b_{eff}$		
$\psi = \sigma_2 / \sigma_1$	1	$1 > \psi > 0$	0	$0 > \psi > -1$	-1	$-1 > \psi > -3$
"hcevt"gpewtx0 k <sub>σ</sub>	4,0	$8,2 / (1,05 + \psi)$	7,81	$7,81 - 6,29\psi + 9,78\psi^2$	23,9	$5,98 (1 - \psi)^2$

(a) Componentes internos sujeitos a compressão.

"F kmtkdwk± q f'cu\gput,gu"ºeqo r tguu q r qukkxc+				"rti wtc"ghgevkxc b <sub>eff</sub>		
				$1 > \psi > 0:$ $b_{eff} = \rho c$		
				$\psi < 0:$ $b_{eff} = \rho b_c = \rho c / (1 - \psi)$		
$\psi = \sigma_2 / \sigma_1$	1	0	-1	$1 \geq \psi \geq -3$		
"hcevt"gpewtx0 k <sub>σ</sub>	0,43	0,57	0,85	$0,57 - 0,21\psi + 0,07\psi^2$		
				$1 > \psi > 0:$ $b_{eff} = \rho c$		
				$\psi < 0:$ $b_{eff} = \rho b_c = \rho c / (1 - \psi)$		
$\psi = \sigma_2 / \sigma_1$	1	$1 > \psi > 0$	0	$0 > \psi > -1$	-1	
"hcevt"gpewtx0 k <sub>σ</sub>	0,43	$0,578 / (\psi + 0,34)$	1,70	$1,7 - 5\psi + 17,1\psi^2$	23,8	

(b) Componentes salientes sujeitos a compressão.

Figura 1.15: Rácios entre as tensões verificadas nas paredes dos elementos e factores de encurvadura local (CEN, 2006).

no caso de existirem elementos muito esbeltos na secção transversal. Isto ocorre porque quando um elemento da secção é muito esbelto, este faz com que a tensão crítica seja reduzida; assim, o MRD vai assumir uma resistência reduzida para a secção, enquanto que no MLE esta perda de resistência ocorre apenas no elemento individualmente (e não em toda a secção) (Schafer e Peköz, 1998b).

Utilizando o MRD e recorrendo a uma solução computacional para quantificação das cargas de bifurcação, a determinação da resistência de um perfil é bastante simples, independentemente da geometria da secção transversal. Pelo contrário, para calcular a resistência de perfis com alguma complexidade geométrica, nomeadamente secções transversais compostas por muitos sub-elementos, o MLE conduz a cálculos complicados, sem qualquer benefício para a precisão da solução. De modo geral, tendo em conta que os perfis metálicos utilizados na construção são otimizados (e.g. secções com múltiplos reforços), o MRD mune-se de uma metodologia mais simples e com uma aplicação mais abrangente do que o MLE (Schafer, 2006a, 2010). Ainda assim, permanece um pouco de cepticismo da parte de alguns autores, alegando que o método ainda requer uma investigação mais profunda antes de se tornar num método geral de dimensionamento (Rusch e Lindner, 2001). De qualquer forma, é importante ter presente em qualquer discussão que envolva o MLE, o MRD ou qualquer outro método semi-empírico de dimensionamento de estruturas metálicas de parede fina, que nenhum deles é estritamente correcto em termos teóricos. Estes correspondem sim a uma simplificação de um complexo problema não linear, permitindo a utilização de modelos práticos, sem entrar em análises detalhadas ou testes experimentais dos elementos (Schafer, 2010).

Segundo o MRD, as resistências associadas aos modos de instabilidade locais-de-placa e distorcionais são estimados através de

$$N_l = N_{pl} \quad \text{se } \bar{\lambda} \leq 0,776 \quad (1.24)$$

$$N_l = \left[ 1 - 0.15 \left( \frac{1}{\bar{\lambda}^{0.8}} \right) \right] \left( \frac{1}{\bar{\lambda}^{0.8}} \right) N_{pl} \quad \text{se } \bar{\lambda} > 0,776$$

$$N_d = N_{pl} \quad \text{se } \bar{\lambda} \leq 0,561 \quad (1.25)$$

$$N_d = \left[ 1 - 0.25 \left( \frac{1}{\bar{\lambda}^{1.2}} \right) \right] \left( \frac{1}{\bar{\lambda}^{1.2}} \right) N_{pl} \quad \text{se } \bar{\lambda} > 0,561$$

para colunas e, para vigas, com

$$M_l = M_{pl} \quad \text{se } \bar{\lambda} \leq 0,776 \quad (1.26)$$

$$M_l = \left[ 1 - 0.15 \left( \frac{1}{\bar{\lambda}^{0.8}} \right) \right] \left( \frac{1}{\bar{\lambda}^{0.8}} \right) M_{pl} \quad \text{se } \bar{\lambda} > 0,776$$

$$M_d = M_{pl} \quad \text{se } \bar{\lambda} \leq 0,673 \quad (1.27)$$

$$M_d = \left[ 1 - 0.22 \left( \frac{1}{\bar{\lambda}} \right) \right] \left( \frac{1}{\bar{\lambda}} \right) M_{pl} \quad \text{se } \bar{\lambda} > 0,673$$

onde

$N_l$  ou  $M_l$  e  $N_d$  ou  $M_d$  correspondem às resistências referente aos modos de instabilidade local-de-placa e distorcional;

$N_{pl}$  e  $M_{pl}$  são as capacidades plásticas da secção transversal à compressão e à flexão (em torno do eixo de maior inércia);

$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{N_{pl}}{N_{cr}}}$  ou  $\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{M_{pl}}{M_{cr}}}$  é a esbelteza, podendo o  $N_{cr}$  e  $M_{cr}$  estar associado ao modo local-de-placa ou ao modo distorcional.

Note-se que o facto de o expoente de  $\bar{\lambda}$  nas expressões do modo local ser inferior ao das equações referentes ao modo distorcional reflecte a menor resistência de pós-encurvadura de uma secção total neste último (Hancock et al., 2001).

A previsão rigorosa das cargas/momentos de colapso distorcionais é importante, em virtude de (i) a resistência de pós-encurvadura distorcional ser bastante menor e mais sensível às imperfeições que a sua congénere local-de-placa e de (ii) existirem, na literatura, vários resultados numéricos indicando que um elevado número de colunas e vigas que instabilizam em modos locais-de-placa exibem mecanismos de colapso distorcionais (Silvestre, Camotim e Dinis, 2007).

Uma comparação entre as curvas do MRD e resultados de ensaios pode ser observada na Figura 1.16 no caso de colunas e na Figura 1.17 para vigas.

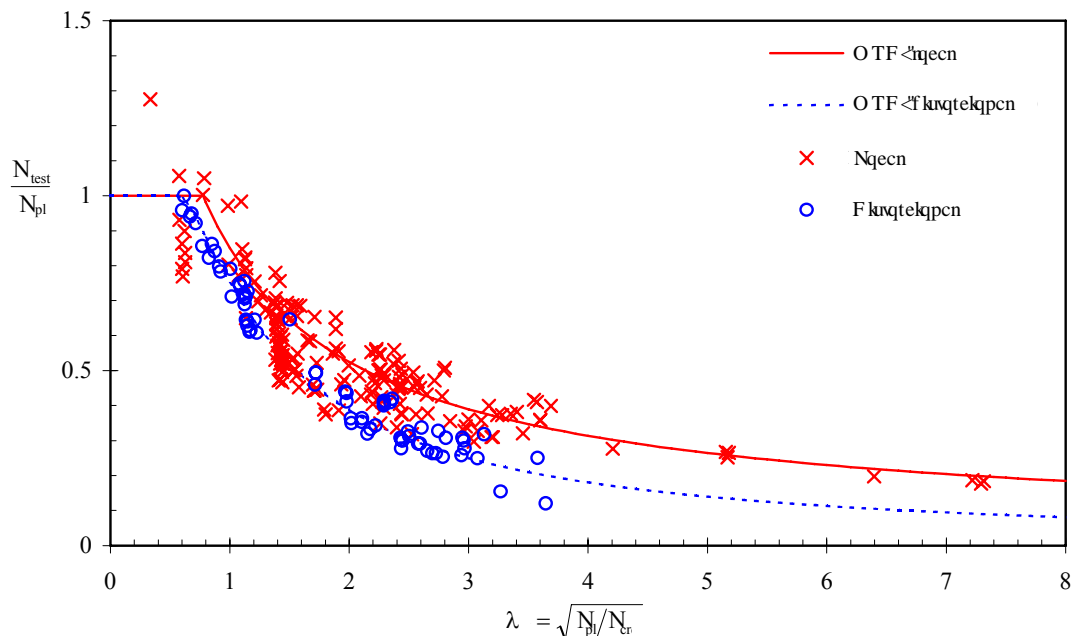


Figura 1.16: Comparação entre as curvas do MRD das equações (1.24) e (1.25) e resultados de ensaios em colunas (Schafer, 2010).

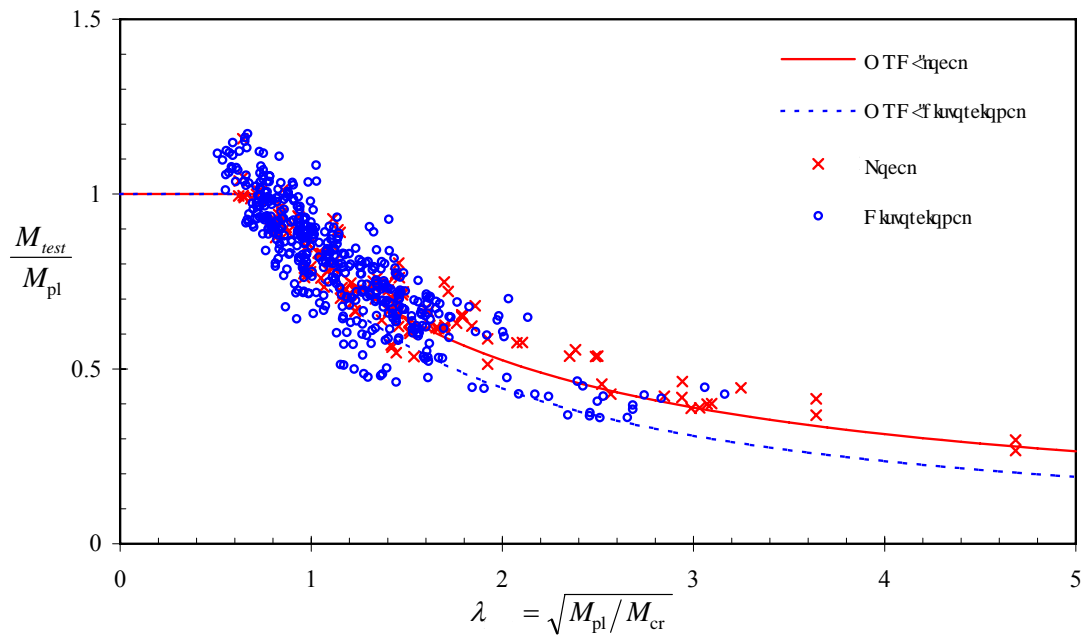


Figura 1.17: Comparação entre as curvas do MRD das equações (1.26) e (1.27) e resultados de ensaios em vigas (Schafer, 2010).

### 1.2.6 Efeito Brazier

Tal como foi referido anteriormente, o modo de instabilidade distorcional não goza da mesma atenção que o modo de instabilidade local-de-placa no EC3. No entanto, importantes fenómenos de carácter distorcional foram investigados em elementos com características diferentes dos abordados nesta dissertação. É exemplo o caso da ovalização de tubos cilíndricos estudado por Brazier (1927). Brazier identificou que, quando o tubo é sujeito a flexão, as tensões normais longitudinais tendem a despoletar o achatamento da secção transversal (Brazier, 1927). Devido à curvatura do eixo do tubo, as tensões de compressão e de tracção actuam segundo um ângulo em relação à secção transversal adjacente, deformando a configuração inicialmente circular em oval, tal como representado na Figura 1.18. Por sua vez, esta deformação reduz o momento de inércia da secção, conduzindo a uma relação não linear entre o carregamento e o deslocamento. Ademais, a deformação da secção leva ao aumento das tensões normais longitudinais de flexão e à redução da carga crítica de bifurcação local (Tatting et al., 1997).

Mais concretamente, tal como se pode verificar na Figura 1.19, a relação momento-curvatura possui, inicialmente, uma resposta aproximadamente elástica linear para pequenas curvaturas, seguindo-se uma redução da rigidez provocada pela ovalização da secção transversal, o que conduz a um ponto limite (ou momento flector máximo) (Wadee et al., 2006). Após o ponto limite, o comportamento da estrutura torna-se instável, verificando-se uma queda do momento flector resistente com o incremento da rotação, mais evidente no caso das secções transversais com paredes mais esbeltas (ver

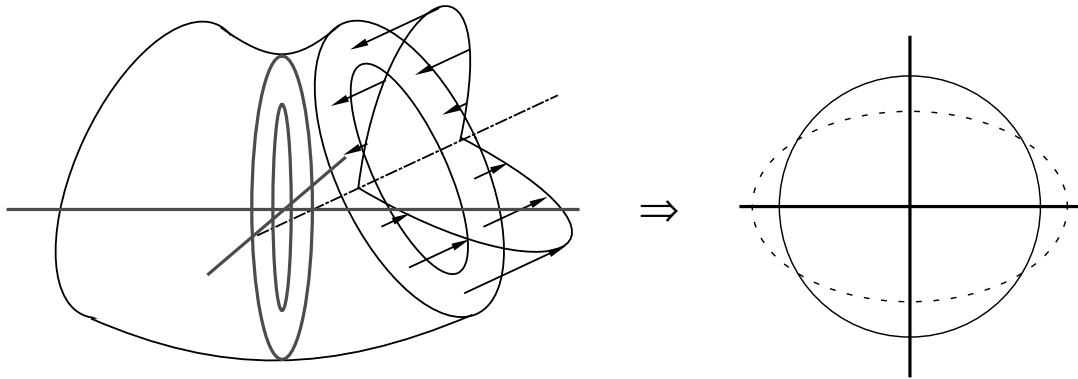


Figura 1.18: Mecanismo do efeito Brazier que conduz à ovalização de uma secção tubular (Tatting *et al.*, 1997).

Figura 1.19).

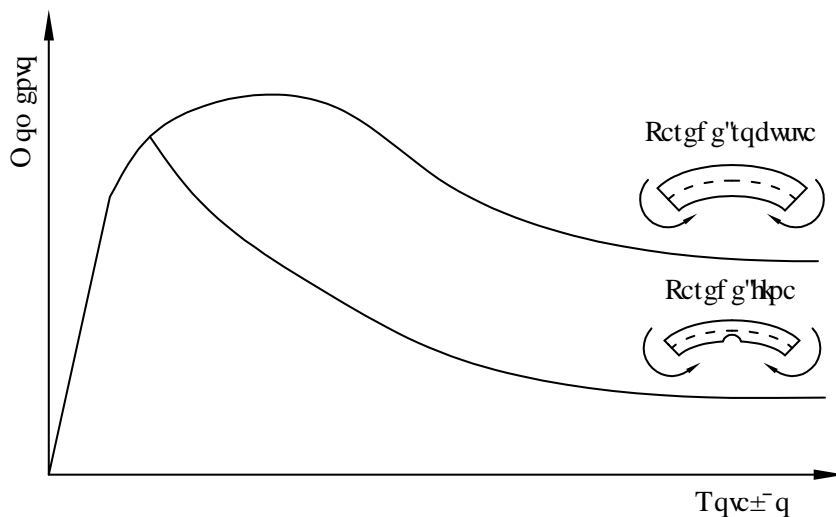


Figura 1.19: Comparação das características de flexão de tubos com paredes finas e robustas (Wierzbicki e Sinmao, 1997).

Conforme se verá no Capítulo 3, o comportamento dos elementos de secção em losango estudados neste trabalho assemelha-se ao descrito acima, com grande sensibilidade às imperfeições geométricas. A Figura 1.20 representa um gráfico momento flector-rotação numa barra do tipo estudado. O comportamento destes elementos caracteriza-se pela existência de um ponto limite seguido, frequentemente, por um fenómeno de «snap-back».

Desde o trabalho de Brazier, a análise deste fenómeno não-linear tem progredido no sentido da investigação dos seus efeitos em estruturas constituídas por materiais compósitos, em estruturas com secção transversal não-circular (e.g., vigas com secção transversal tubular rectangular) e em

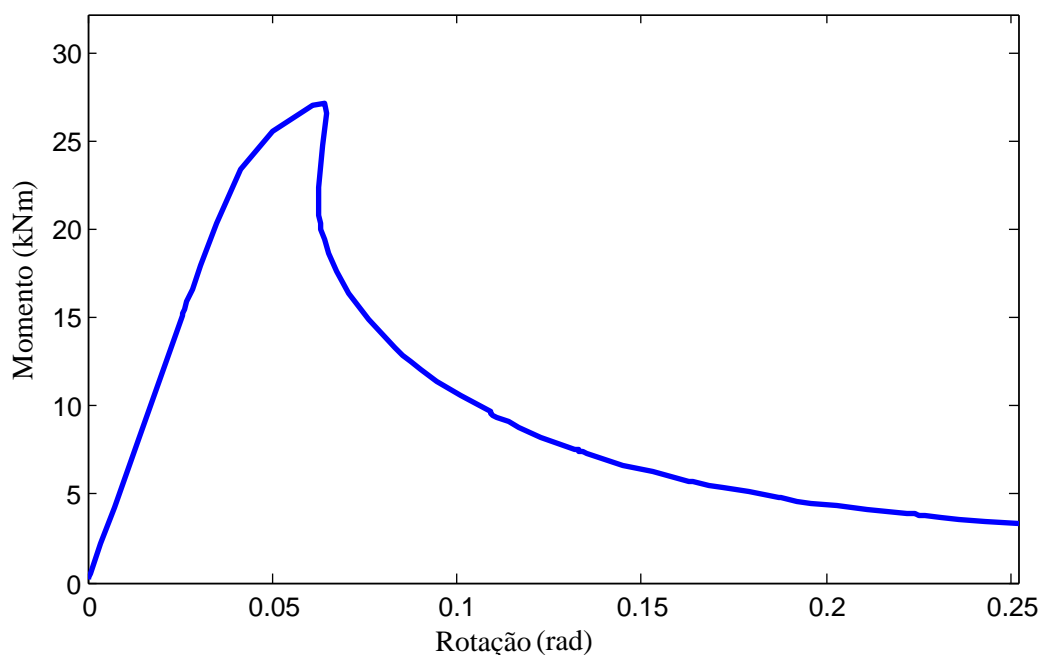


Figura 1.20: Relação momento flector-rotação, para o caso de  $\theta = 16^\circ$  e  $b/t = 38$ . Regista-se a ocorrência de um ponto limite e de um fenómeno de «snap-back».

perfis alares (também conhecidos por aerofólios, utilizados nas lâminas das turbinas eólicas (ver Figura 1.21)) (Jensen, et al., 2011).

Porém, exemplos de investigação em torno de fenómenos distorcionais em secções poligonais de parede fina ainda são algo escassos. Ainda assim, Takahashi, Ishohara e Nakamura (2003) investigaram a bifurcação de uma viga com secção em losango sujeita a flexão, focando-se no achatamento desta por distorção e comparando soluções analíticas e numéricas.

### 1.3 Objectivos

O alvo desta dissertação é estudar o comportamento de secções fechadas em losango de parede fina sujeitas à flexão, as quais são susceptíveis a um fenómeno distorcional que não é contabilizado pelo EC3.

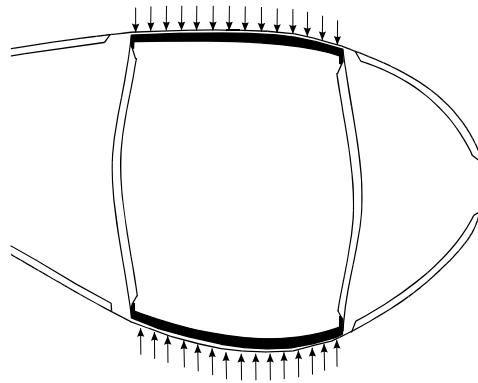
Este trabalho é original, no sentido que não existem estudos acerca da resistência de vigas com estas características, muito embora o comportamento de estabilidade (bifurcação) já tenha sido estudado por Takahashi, Ishohara e Nakamura (2003). No entanto, nesta dissertação, pretende-se ir um pouco mais além, tentando fazer uma análise completa de todos os parâmetros envolvidos e estudar a resistência destes elementos. Finalmente, constitui objectivo do presente trabalho, propôr regras de verificação de segurança que contabilizem o fenómeno distorcional em secções em losango sujeitas à



(a) Lâmina de uma turbina eólica (Manito, 2012).



(b) Turbina eólica (Nedman, 2010).



(c) Corte de um perfil alar sujeito às tensões que conduzem à ovalização por efeito Brazier (adaptado de Jensen, 2008).

flexão.

### 1.4 Organização da dissertação

A presente dissertação encontra-se dividida em quatro capítulos, em que o primeiro capítulo compõe a introdução. É feita uma breve abordagem à história da utilização do aço na construção civil e são abordados conceitos gerais necessários para compreensão do texto. Passa-se, de seguida, a descrever o conteúdo dos remanescentes capítulos.

No segundo capítulo faz-se uma caracterização da bifurcação de vigas de secção fechada em losango com parede fina, utilizando o Método das Faixas Finitas e a Teoria Generalizada de Vigas. Procede-se à especificação dos parâmetros geométricos e mecânicos que caracterizam a secção transversal. Ademais, é feita uma descrição pormenorizada dos modos de instabilidade que ocorrem na bifurcação deste tipo de secções, sendo detectada a fronteira geométrica que separa o modo distorci-

onal do modo local-de-placa.

No terceiro capítulo aborda-se a resistência de vigas de secção fechada em losango de parede fina, com base em resultados obtidos com o programa de Elementos Finitos ADINA e calculados de acordo com o EC3. Começa-se pela indicação dos aspectos de modelação relevantes e procede-se, de seguida, a uma análise de secções transversais localizadas nas fronteiras entre as classes 2 e 3 e as classes 3 e 4, de acordo com o EC3. É ainda feita uma comparação entre os resultados obtidos e as curvas de encurvadura do EC3 e do Método da Resistência Directa.

No quarto e último capítulo são apresentadas as conclusões finais, apontando-se possíveis desenvolvimentos futuros.



## Capítulo 2

# Bifurcação de vigas de secção fechada em losango com parede fina

### 2.1 Introdução

Para efectuar a análise de bifurcação de vigas de secção fechada em losango com parede fina, recorreu-se ao Método das Faixas Finitas (MFF) e à Teoria Generalizada de Vigas (GBT).

O MFF é uma variante do Método dos Elementos Finitos (MEF), inicialmente proposta por Cheung (1968a,b), em que a discretização do elemento é efectuada por faixas longitudinais de largura constante, o que implica que, para se obterem soluções válidas, as secções transversais devem ser regulares longitudinalmente. (veja-se a Figura 2.1).

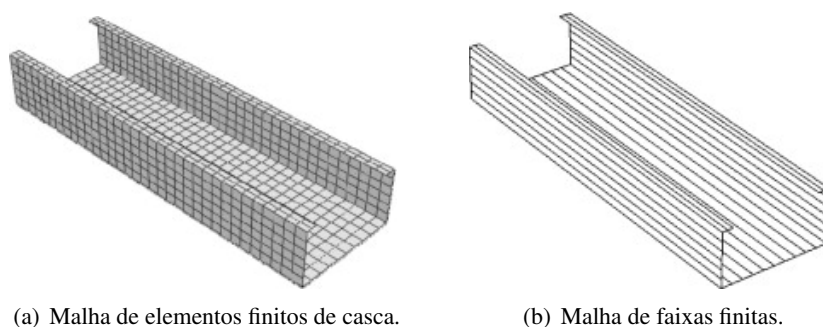


Figura 2.1: Discretização de uma secção em «c» com reforços com elementos finitos de casca e faixas finitas (extraído de Li e Schafer, 2010).

A vantagem do MFF sobre outros métodos – como o MEF com elementos de casca –, está dependente duma escolha judiciosa das funções de forma para descrever o campo de deslocamentos longitudinais (Schafer e Ádány, 2006). Na Figura 2.2, é apresentado uma barra de secção em «c», discretizada em faixas longitudinais, destacando-se uma faixa com os correspondentes graus de liberdade. No programa CUFSM – acrónimo de Cornell University Finite Strip Method –, desenvolvido

## Capítulo 2. Bifurcação de vigas de secção fechada em losango com parede fina

por Schafer, é utilizada uma combinação de funções lineares e cúbicas na direcção transversal (para os deslocamentos de membrana) e de funções sinusoidais na direcção longitudinal (Schafer e Ádány, 2006). Todavia, este método é mais restritivo quanto às condições de fronteira pois, convencionalmente, o MFF assume que as paredes da barra são simplesmente apoiadas e livres de empenar nas extremidades longitudinais. Assim, assumindo estas restrições, é possível obter soluções fiáveis com reduzido esforço computacional comparando com o MEF com elementos de casca, uma vez que o número de graus de liberdade da estrutura na direcção longitudinal é reduzido.

Na presente dissertação, recorreu-se ao programa de Faixas Finitas CUFSM que, introduzindo a geometria da secção transversal, as propriedades mecânicas do material e a distribuição das tensões, efectua uma análise elástica de estabilidade. Assim, do CUFSM obtêm-se as cargas críticas para cada modo de instabilidade em função do semi-comprimento de onda.

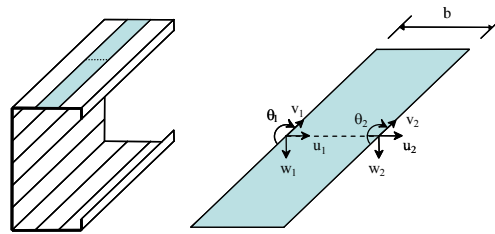


Figura 2.2: Discretização por faixas finitas numa secção de parede fina em «c» com reforços e graus de liberdade de uma faixa finita (extraído de Schafer e Ádány, 2006).

A Teoria Generalizada de Vigas, vulgarmente referida pelo termo anglo-saxónico *Generalised Beam Theory* (GBT), tem origem no trabalho de Scharadt (1966), sendo utilizada para a resolução de problemas estruturais em elementos de parede fina. Apesar de desenvolvida em meados do século XX, devido ao facto de a literatura científica relativa ao tema ter sido redigida, por muito tempo, unicamente no idioma materno do autor que a propôs, a teoria não obteve grande repercussão fora dos meios científicos e académicos de expressão alemã (Camotim et al., 2006). Todavia, na última década, devido às primeiras publicações acerca da teoria em língua inglesa (Davies e Leach, 1994; Davies, 1998) que emergiram na sequência da mais importante edição de Scharadt (1989), a GBT conheceu uma difusão sem precedentes na comunidade científica internacional, nomeadamente em Portugal (Camotim et al., 2004, 2006; Camotim et al., 2010).

Na GBT, a configuração deformada da secção transversal é definida como uma combinação de modos de deformação. Devido aos graus de liberdade da GBT serem deslocamentos modais (em vez de nodais), a GBT fornece resultados particularmente elucidativos, uma vez que é possível avaliar a natureza comportamental das estruturas de parede fina pela análise do peso de cada modo de deformação.

A GBT alicerça-se nas seguintes hipóteses (Gonçalves et al., 2010):

- As barras são rectilíneas, de secção constante e de parede fina (a espessura é muito pequena quando comparada com as restantes dimensões);
- A hipótese de Kirchhoff é válida, ou seja, após a deformação das paredes, as fibras perpendiculares ao plano médio permanecem indeformadas e perpendiculares ao plano médio da parede;
- A espessura de cada parede da barra é constante.

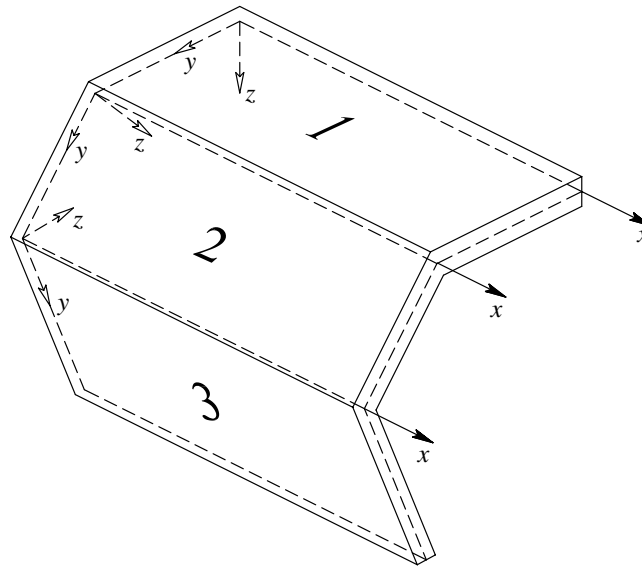


Figura 2.3: Sistema de eixos locais de cada parede adoptado para um elemento com geometria arbitrária (extraído de Gonçalves e Camotim, 2007).

Perante a hipótese de Kirchhoff enunciada e segundo o sistema de eixos locais ilustrados pela Figura 2.3, pode escrever-se o vector dos deslocamentos  $U$  para cada parede

$$\begin{Bmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u - zw_{,x} \\ v - zw_{,y} \\ w \end{Bmatrix} \quad (2.1)$$

Em que  $u$ ,  $v$  e  $w$  são as componentes do deslocamento do plano médio das paredes ao longo dos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente. Note-se que os primeiros termos de  $U_x$  e  $U_y$  correspondem à parcela de deslocamento de membrana e os segundos termos à flexão, tal como representado na Figura 2.4.

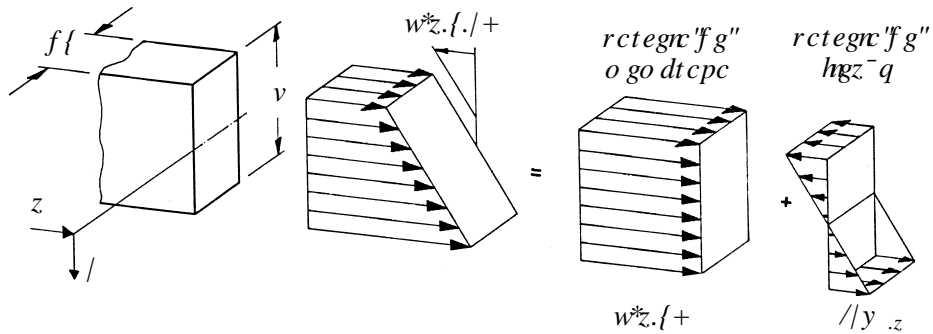


Figura 2.4: Deslocamento axial numa placa: decomposição nas parcelas de membrana e flexão (adaptado de Schardt, 1989).

As componentes de deslocamento do plano médio são expressidas por

$$\begin{aligned}
 u(x,y) &= \sum_{k=1}^n \bar{u}_k(y) \phi_k(x), \\
 v(x,y) &= \sum_{k=1}^n \bar{v}_k(y) \phi_k(x), \\
 w(x,y) &= \sum_{k=1}^n \bar{w}_k(y) \phi_k(x),
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

onde  $k = 1, \dots, D$ , sendo  $D$  o número de modos de deformação,  $\bar{u}_k(y)$ ,  $\bar{v}_k(y)$  e  $\bar{w}_k$  são as componentes de deslocamento dos modos de deformação,  $\phi_k(x)$  são as funções de amplitude ao longo da barra, constituindo as incógnitas do problema.

Recorrendo a funções de amplitude  $\phi_k(x) = \frac{\sin n\pi x}{L}$ , em que  $L$  é o semi-comprimento de onda (que constituem a solução exacta para uma barra simplesmente apoiada), é possível escrever a equação de bifurcação da GBT, que constitui um problema de vectores e valores próprios e, com a sua resolução, é possível quantificar o parâmetro crítico de carga  $\lambda$ . A expressão toma a seguinte forma (Gonçalves e Camotim, 2010)

$$\left( \left( \frac{n\pi}{L} \right)^4 [\mathbf{C}] + \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 [\mathbf{D}] + [\mathbf{B}] + \lambda \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 [\mathbf{X}] \right) \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_D \end{bmatrix} \sin \left( \frac{n\pi x}{L} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

com  $\mathbf{D} = \mathbf{D}_1 - 2\mathbf{D}_2^t$ . As matrizes inseridas na equação da GBT são definidas por

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B}_{ij} &= \int_{\bar{S}} \frac{t^3 E}{12(1-\nu^2)} \bar{w}_{i,yy} \bar{w}_{j,yy} dy, \\
 \mathbf{C}_{ij} &= \int_{\bar{S}} t E \bar{u}_i \bar{u}_j dy + \int_{\bar{S}} \frac{t^3 E}{12(1-\nu^2)} \bar{w}_i \bar{w}_j dy, \\
 \mathbf{D}_{1,ij} &= \int_{\bar{S}} \frac{t^3 G}{3} \bar{w}_{i,y} \bar{w}_{j,y} + \int_{\bar{S}} t \mathbf{G} (\bar{u}_{i,y} + \bar{v}_i) (\bar{u}_{j,y} + \bar{v}_j) dy, \\
 \mathbf{D}_{2,ij} &= \int_{\bar{S}} \nu \frac{t^3 E}{12(1-\nu^2)} \bar{w}_i \bar{w}_{j,yy} dy, \\
 \mathbf{X}_{ij} &= \int_{\bar{S}} \sigma_{xx}^M t (\bar{v}_i \bar{v}_j + \bar{w}_i \bar{w}_j) dy,
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

em que  $\lambda = M_{cr}/M$  corresponde ao parâmetro crítico de carga e  $M$  é o momento aplicado para o qual  $\mathbf{X}$  é calculada (ver a expressão (2.4)) e onde

$\mathbf{B}$  corresponde à rigidez de flexão transversal;

$\mathbf{C}$  é a rigidez de flexão longitudinal dos termos de membrana e de flexão;

$\mathbf{D}_1$  corresponde à rigidez de torção;

$\mathbf{D}_2$  é um termo relacionado com o acoplamento por efeito Poisson;

$\mathbf{X}$  engloba os efeitos geométricos não-lineares;

$\sigma_{xx}^M$  é a distribuição de tensões normais de membrana ao longo da parede.

Nesta dissertação, para calcular as tensões críticas pela GBT de modo expedito, criou-se uma rotina em MATLAB, que se apresenta no Anexo A.

Neste capítulo estuda-se a bifurcação de perfis metálicos com secção em losango de parede fina, recorrendo aos métodos citados.

## 2.2 Parâmetros intervenientes

Os perfis analisados possuem uma secção transversal fechada em losango e estão sujeitos à flexão pura. As variáveis geométricas interveniente, representadas na Figura 2.5 são

- $\theta$  é o ângulo entre as paredes da secção e o plano horizontal;
- $b$  é o comprimento das paredes da secção transversal;

## Capítulo 2. Bifurcação de vigas de secção fechada em losango com parede fina

---

- $t$  é a espessura das paredes da secção transversal;
- $l$  é a largura da barra (distância entre apoios);

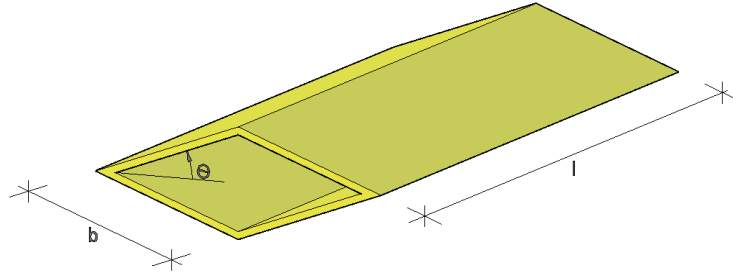


Figura 2.5: Barra com secção em losango de parede fina com os respectivos parâmetros geométricos.

A solução depende, ainda, dos seguintes parâmetros mecânicos, para os quais se assumiram valores típicos do aço:

- $E = 210$  GPa é o módulo de Young;
- $\nu = 0.3$  é o coeficiente de Poisson;
- $G = \frac{E}{2(1+\nu)} = 80,769$  GPa é o módulo de distorção;

### 2.3 Análise de bifurcação

Para se proceder à análise de bifurcação deste tipo de perfis, recorreu-se aos métodos discutidos em 2.1. Tal como foi referido anteriormente, o CUFSM permite conhecer as cargas de bifurcação para cada modo de instabilidade, bem como a configuração da secção transversal das barras analisadas para cada modo. Por seu lado, a GBT permite conhecer não só as cargas de bifurcação e a configuração dos modos de instabilidade, mas também quantificar a participação dos modos de deformação nos modos de instabilidade.

Examinando uma série de casos, nomeadamente para sete ângulos  $\theta$  diferentes e variando o parâmetro geométrico  $b/t$ , observa-se uma distinção no comportamento dos elementos: tal como é ilustrado pelas Figuras 2.6 e 2.7, observam-se vários modos de instabilidade, sendo que estes se distinguem em modos simétricos e modos anti-simétricos. Pelo estudo dos casos, verificou-se que são sempre dois modos em particular, um simétrico e outro anti-simétrico, que exibem as cargas críticas. De facto, qualquer um destes modos de instabilidade, que são sempre os que exibem cargas de bifurcação mais baixas, pode corresponder ao crítico (ver Figuras 2.6 e 2.7). Quanto aos restantes modos de instabilidade, verificou-se que nunca são críticos. Tipicamente, os 3º e o 4º modos de instabilidade caracterizam-se por serem modos anti-simétricos e simétricos, respectivamente, com duas semi-ondas

nas paredes da secção transversal. Contudo, estes modos de instabilidade têm cargas de bifurcação muito elevadas, apesar de ficarem um pouco mais próximos no caso de secções transversais com  $b/t$  elevados, tal como ilustrado pela Figura 2.6.

Concentrando-nos nos modos de instabilidade que podem ser críticos, é possível fazer uma caracterização preliminar destes modos apenas com a informação obtida pelo CUFSM. Em todos os casos (ver Figuras 2.6 e 2.7), o modo de instabilidade anti-simétrico apresenta características que correspondem à definição clássica do modo de instabilidade local-de-placa, para qualquer semi-comprimento de onda. No entanto, o modo de instabilidade simétrico apresenta características muito distintivas dos restantes modos. Pelo observado no CUFSM nos pequenos semi-comprimento de onda, este modo de instabilidade aparenta características de modo local-de-placa, mas também de modo distorcional (na Figura 2.7, que representa um caso de uma secção de parede notoriamente menos fina do que o ilustrado na Figura 2.6, entrevê-se deslocamentos em pelo menos um dos nós da secção transversal). No entanto, para semi-comprimentos de onda um pouco maiores, o modo de instabilidade começa a assemelhar-se à definição de modo distorcional, passando esta configuração a ser abandonada para semi-comprimentos de onda muito elevados.

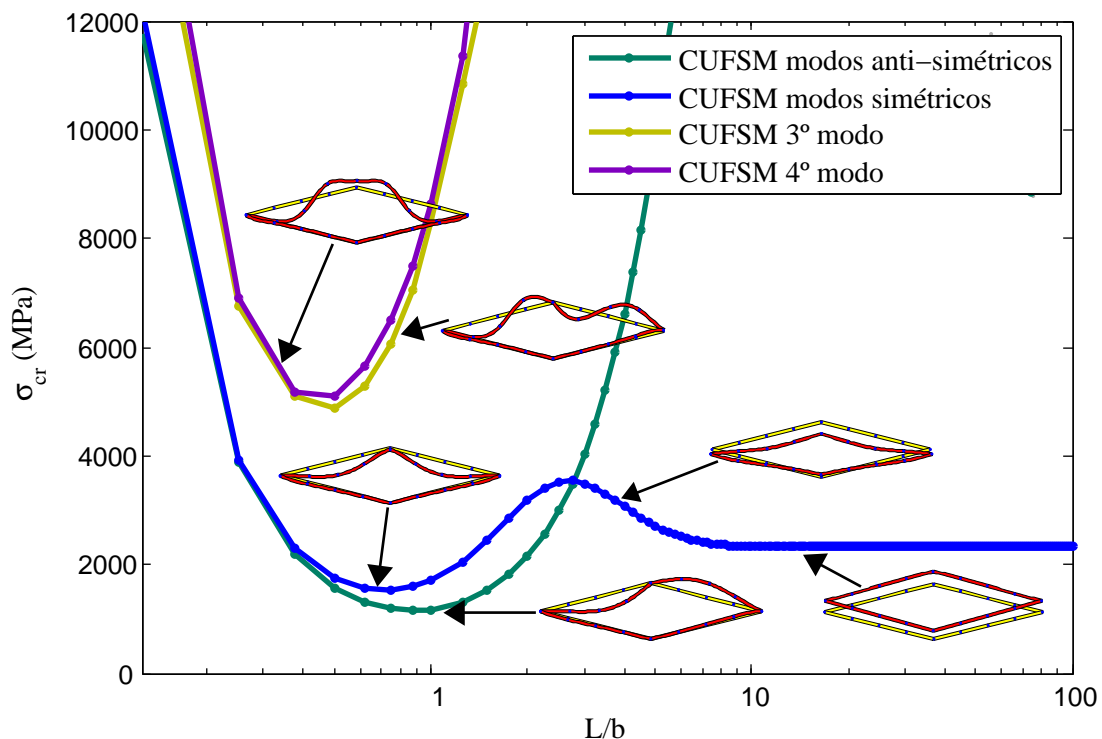


Figura 2.6: Modos de instabilidade de acordo com o CUFSM para  $\theta=12^\circ$  e  $b/t = 38$ . Neste caso, o modo de instabilidade anti-simétrico é crítico.

Para se compreender com clareza o comportamento e a natureza dos modos de instabilidade simétricos, recorreu-se à GBT. Os modos de deformação adoptados, que traduzem comportamentos

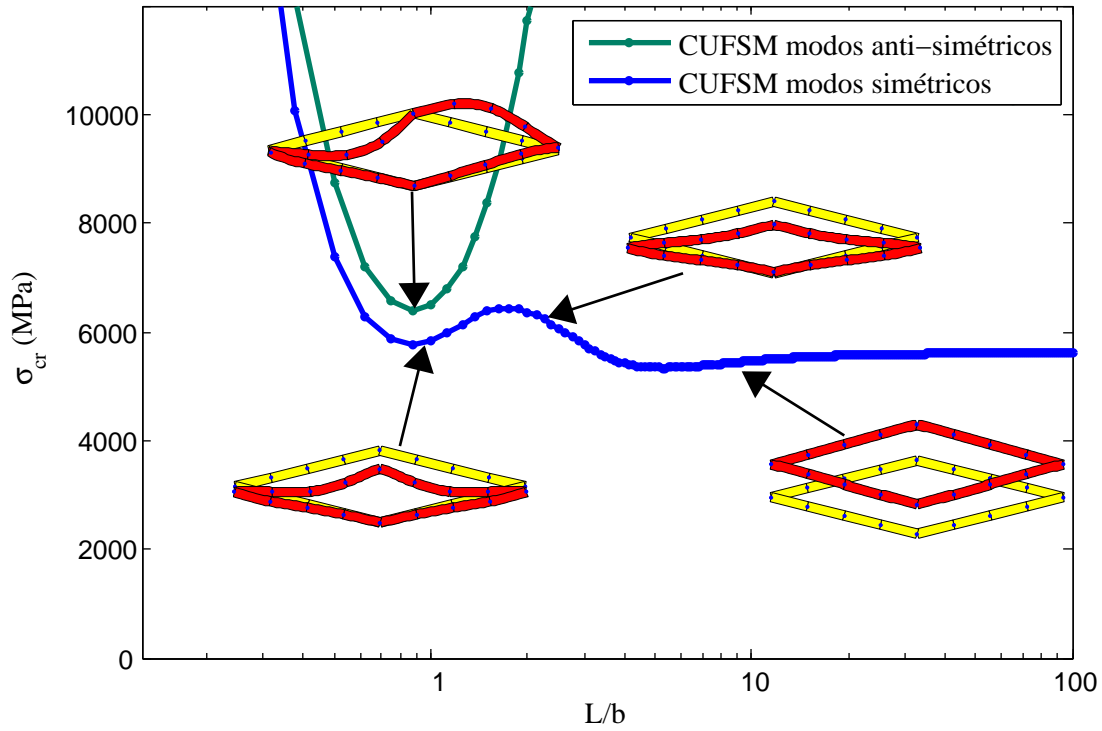


Figura 2.7: Modos de instabilidade de acordo com o CUFSM para  $\theta = 14^\circ$  e  $b/t = 16$ . Neste caso, o modo de instabilidade simétrico é crítico.

específicos da estrutura, foram os tipicamente utilizados na GBT, nomeadamente flexão e distorção, acrescentando-se modos locais-de-placa para refinar a solução.

Além das hipóteses mencionadas em 2.1, foi adoptada uma simplificação de simetria a meio da secção transversal. Assim, uma vez que se pretende estudar os modos simétricos em particular, é possível reduzir o número de modos a introduzir e, conseqüentemente, o esforço computacional, sem comprometer a precisão da solução.

Foi necessário adicionar modos de deformação que traduzissem comportamentos associados aos modos local-de-placa, distorcional e global, separadamente. Assim, as componentes de deslocamento  $w$ ,  $v$  e  $u$  dos modos de deformação ilustrados na Figura 2.9 foram definidas de acordo com um deslocamento ou rotação unitária imposta.

Em todos os modos, considerou-se que as paredes são inextensíveis

$$\epsilon_{yy}^M = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial v_k}{\partial y} = \bar{v}_{k,y} \phi = 0, \quad (2.5)$$

o que implica que o deslocamento  $v_k$  é constante. Para definição dos modos de flexão (1º modo) e distorção (2º modo), admitiu-se que a deformação por corte de membrana é nula ( $\gamma_{xy}^M = 0$ ), vindo que

$$(\gamma_{xy}^M)_k = \frac{\partial u_k}{\partial y} + \frac{\partial v_k}{\partial x} = \bar{u}_{k,y} \phi_{k,x} + \bar{v}_k \phi_{k,x} = (\bar{u}_{k,y} + \bar{v}_k) \phi_{k,x} = 0 \Rightarrow \bar{u}_{k,y} = -\bar{v}_k, \quad (2.6)$$

adicionando-se, nos 3º e 4º modos, o empenamento de flexão e o empenamento de distorção, com  $\gamma_{xy}^M \neq 0$ .

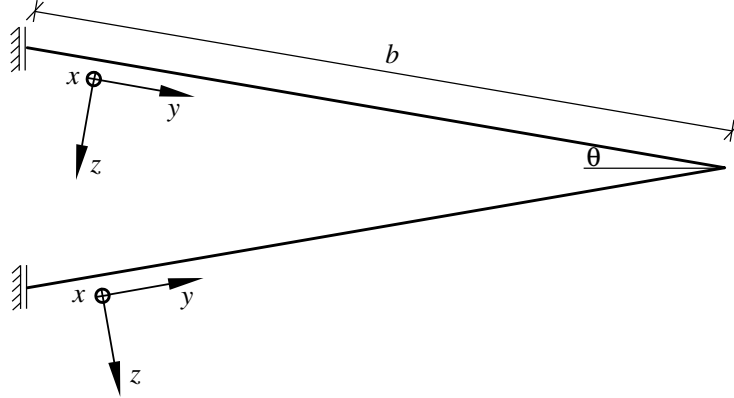


Figura 2.8: Sistema de eixos utilizado para definir as equações dos modos de deformação representado nas paredes da secção transversal.

Os vectores de deslocamento, cujas componentes correspondem às duas paredes da secção transversal (com a simplificação de simetria), foram definidos de acordo com o sistema de eixos da Figura 2.8. Assim, o modo de flexão corresponde a

$$\bar{w}_1 = \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ \cos \theta \end{Bmatrix}; \quad \bar{v}_1 = \begin{Bmatrix} \sin \theta \\ -\sin \theta \end{Bmatrix}; \quad \bar{u}_1 = \begin{Bmatrix} (b-y) \sin \theta \\ -(b-y) \sin \theta \end{Bmatrix}; \quad (2.7)$$

enquanto que o modo de distorção é definido por

$$\bar{w}_2 = \begin{Bmatrix} \cos \theta - \frac{3y^2}{b^2} (\tan \theta \sin \theta + \cos \theta) + \frac{2y^3}{b^3} (\tan \theta \sin \theta + \cos \theta) \\ -\cos \theta + \frac{3y^2}{b^2} (\tan \theta \sin \theta + \cos \theta) - \frac{2y^3}{b^3} (\tan \theta \sin \theta + \cos \theta) \end{Bmatrix} \quad (2.8)$$

$$\bar{v}_2 = \begin{Bmatrix} \sin \theta \\ \sin \theta \end{Bmatrix}; \quad \bar{u}_2 = \begin{Bmatrix} (\frac{b}{2} - y) \sin \theta \\ (\frac{b}{2} - y) \sin \theta \end{Bmatrix}.$$

O modo de empenamento de flexão com  $\gamma_{xy}^M \neq 0$  é

$$\bar{w}_3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad \bar{v}_3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad \bar{u}_3 = \begin{Bmatrix} (b-y) \sin \theta \\ -(b-y) \sin \theta \end{Bmatrix}; \quad (2.9)$$

e o modo de empenamento da distorção

$$\bar{w}_4 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad \bar{v}_4 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad \bar{u}_4 = \begin{Bmatrix} \left(\frac{b}{2} - y\right) \sin \theta \\ \left(\frac{b}{2} - y\right) \sin \theta \end{Bmatrix}. \quad (2.10)$$

No caso dos modos de deformação de carácter local-de-placa, o 5º modo de deformação, caracterizado por rotação nula numa das extremidades das paredes (Ver Figura 2.9(e)), foi definido como

$$\bar{w}_5 = \begin{Bmatrix} \frac{y^2(y-b)}{\left(\frac{2b}{3}\right)^2 \left(\frac{2b}{3} - b\right)} \\ -\frac{y^2(y-b)}{\left(\frac{2b}{3}\right)^2 \left(\frac{2b}{3} - b\right)} \end{Bmatrix}; \quad \bar{v}_5 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad \bar{u}_5 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad (2.11)$$

enquanto que o 6º modo de deformação, que corresponde a rotações nulas em ambas as extremidades das paredes Figura 2.9(e)), é dado por

$$\bar{w}_6 = \begin{Bmatrix} \frac{y^2(y-b)^2}{\left(\frac{b}{2}\right)^2 \left(\frac{b}{2} - b\right)^2} \\ \frac{y^2(y-b)^2}{\left(\frac{b}{2}\right)^2 \left(\frac{b}{2} - b\right)^2} \end{Bmatrix}; \quad \bar{v}_6 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad \bar{u}_6 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad (2.12)$$

quanto ao 7º modo, este é anti-simétrico em relação ao 6º modo, tal como se pode verificar nas Figuras 2.9(f) e 2.9(g), sendo dado por

$$\bar{w}_7 = \begin{Bmatrix} \frac{y^2(y-b)^2}{\left(\frac{b}{2}\right)^2 \left(\frac{b}{2} - b\right)^2} \\ -\frac{y^2(y-b)^2}{\left(\frac{b}{2}\right)^2 \left(\frac{b}{2} - b\right)^2} \end{Bmatrix}; \quad \bar{v}_7 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad \bar{u}_7 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (2.13)$$

Note-se que, nos modos locais-de-placa, os denominadores das expressões de  $w$  correspondem ao valor máximo das funções (que compõem o numerador). Isto foi feito para que os deslocamentos em todos os modos de deformação correspondessem a deslocamentos unitários segundo a direcção  $z$ .

Definidos os modos de deformação, passou-se à aplicação da GBT de acordo com a metodologia descrita em 2.1 e à comparação dos resultados desta com a curva do modo de instabilidade simétrico obtido no CUFSM. Observando o exemplo da Figura 2.10, verifica-se que a solução do CUFSM e a obtida pela GBT estão próximas. Por conseguinte, há uma série de informações importantes a registar.

Observando os factores de participação das Figuras 2.10 e 2.11, que são representativos dos casos em que os modos anti-simétricos e simétricos são críticos, respectivamente, verifica-se que os modos

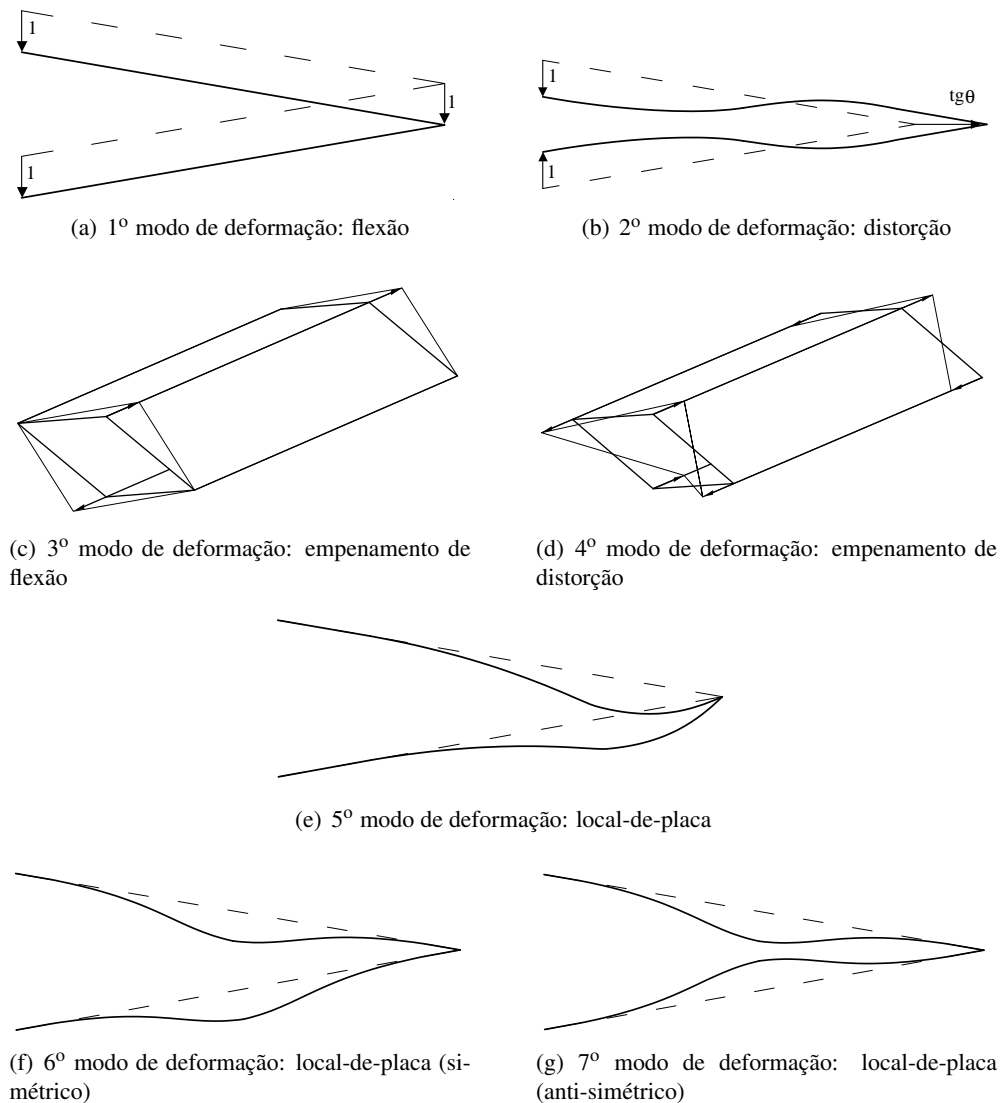


Figura 2.9: Modos de deformação utilizados na análise pela GBT.

locais-de-placa (5º, 6º e 7º modos de deformação) obtêm maiores participações na zona dos pequenos semi-comprimentos de onda ( $L/b \leq 2$ ). No caso em que os modos anti-simétricos são críticos (Figura 2.10), os factores de participação dos modos locais-de-placa são significativamente superiores aos restantes. Quanto aos casos em que os modos simétricos são críticos (Figura 2.11), para os pequenos semi-comprimentos de onda, não se verifica que existam modos de deformação com factores de participação decisivamente superiores aos restantes, pelo que o modo de instabilidade possui características de modo local-de-placa e de modo distorcional. Para semi-comprimentos de onda maiores, constata-se que a curva dos modos simétricos torna-se sempre crítica. Nesta zona, o aspecto da deformada da secção transversal apresenta características de modo de instabilidade distorcional, facto que é atestado pelos factores de participação do modo de deformação distorcional (2º modo

## Capítulo 2. Bifurcação de vigas de secção fechada em losango com parede fina

---

de deformação) obtidos pela GBT, que atinge maior relevo para uma gama de valores de  $L/b$  entre, aproximadamente, 2 e 10. Gradualmente, nota-se um crescimento consistente do peso do modo de flexão, tomando este a maior parte da participação dos modos, para grande semi-comprimentos de onda. Apesar de a influência do modo de deformação distorcional ainda se prolongar um pouco, este crescente peso do modo de flexão denuncia que o modo de instabilidade tende a abandonar o seu carácter distorcional e a assumir-se como um modo de instabilidade global.

Em resumo, olhando para os casos particulares ilustrados pelas Figuras 2.10 e 2.11 nota-se que, no primeiro caso, em que os elementos que compõem a secção transversal são mais esbeltos, os modos de deformação locais têm um maior peso no modo de instabilidade crítico do que no segundo caso, para pequenos semi-comprimentos de onda. Para semi-comprimentos de onda maiores, o observado, em ambos os casos, é idêntico, com o modo de instabilidade a tomar, inicialmente, um carácter tendencialmente mais distorcional e, posteriormente, a distinguir-se claramente o perfil global do modo de instabilidade. No geral, o modo distorcional assume um peso bastante significativo para uma grande gama de semi-comprimentos de onda, constituindo, portanto, parte essencial da caracterização do modo de instabilidade simétrico. Da análise da participação modal pode concluir-se que o modo 1 (flexão), o qual caracteriza a trajectória fundamental, participa sempre no modo de instabilidade simétrico, o que permite afirmar que não se trata de uma bifurcação mas sim de um ponto limite.

Fazendo uma observação generalista das cargas críticas das Figuras 2.10 e 2.11, nota-se que ocorrem dois pontos mínimos, i.e., distinguem-se duas cargas críticas mínimas que, tipicamente, se situam em  $L/b = 1$  e em, aproximadamente, entre  $L/b = 5$  e  $L/b = 10$ , sendo que este último é pouco perceptível, pois a configuração da curva aproxima-se de um patamar para grandes semi-comprimentos de onda. Se na zona do 2º mínimo é inequívoco que este está associado ao modo simétrico distorcional – vejam-se os factores de participação e a configuração deformada da secção transversal nos distintos casos representados –, no caso do 1º mínimo, este pode estar associado tanto ao modo de instabilidade anti-simétrico local-de-placa como ao modo simétrico com características de modo local-de-placa e de modo distorcional. Curiosamente, observou-se que, sempre que a tensão crítica mínima está associada ao modo de instabilidade simétrico, esta ocorre sempre na zona do segundo mínimo, estando, portanto, sempre associada ao modo distorcional. Posto isto, é possível afirmar que a ocorrência do valor mínimo das tensões críticas está associado ao modo anti-simétrico local-de-placa ou ao modo simétrico distorcional, sendo pertinente conhecer em que circunstâncias é que ocorre um caso ou o outro.

De forma a compreender em que medida é que os parâmetros geométricos afectam a ocorrência de determinado tipo de modo de instabilidade associado à carga crítica mínima, investigou-se a fronteira para a qual, em função do ângulo  $\theta$  e do parâmetro adimensional  $b/t$ , a carga crítica mínima passa do modo local-de-placa para o modo distorcional, para qualquer valor do semi-comprimento de onda,  $L$ .

A Tabela 2.1 exhibe os valores destes parâmetros para os quais a tensão crítica mínima obtida no CUFMS está associada aos modos de instabilidade locais-de-placa e distorcionais, bem como infor-

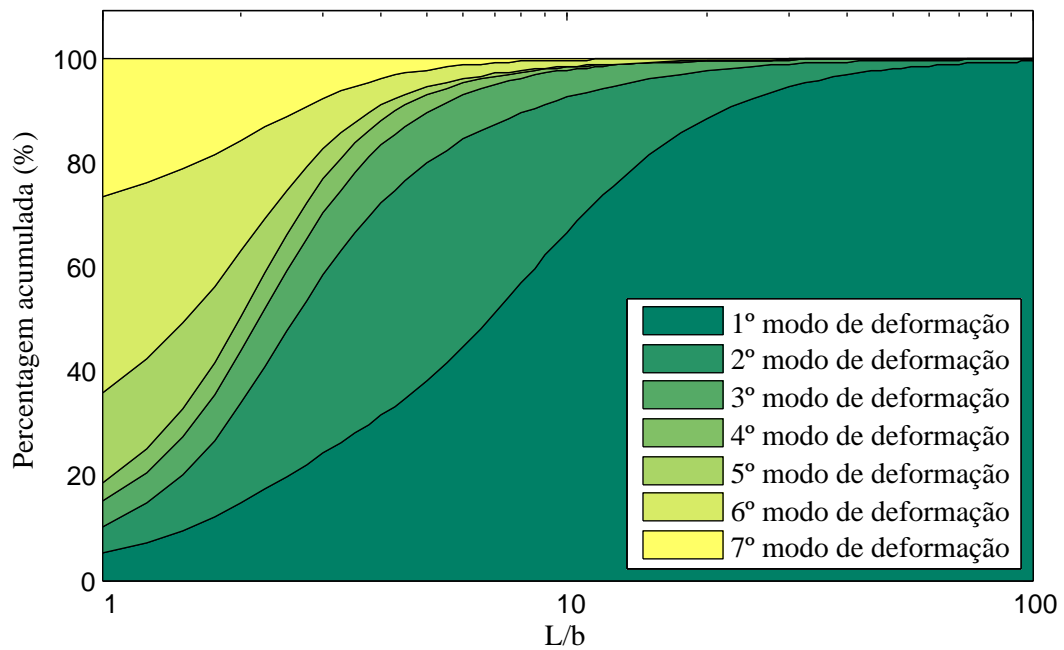
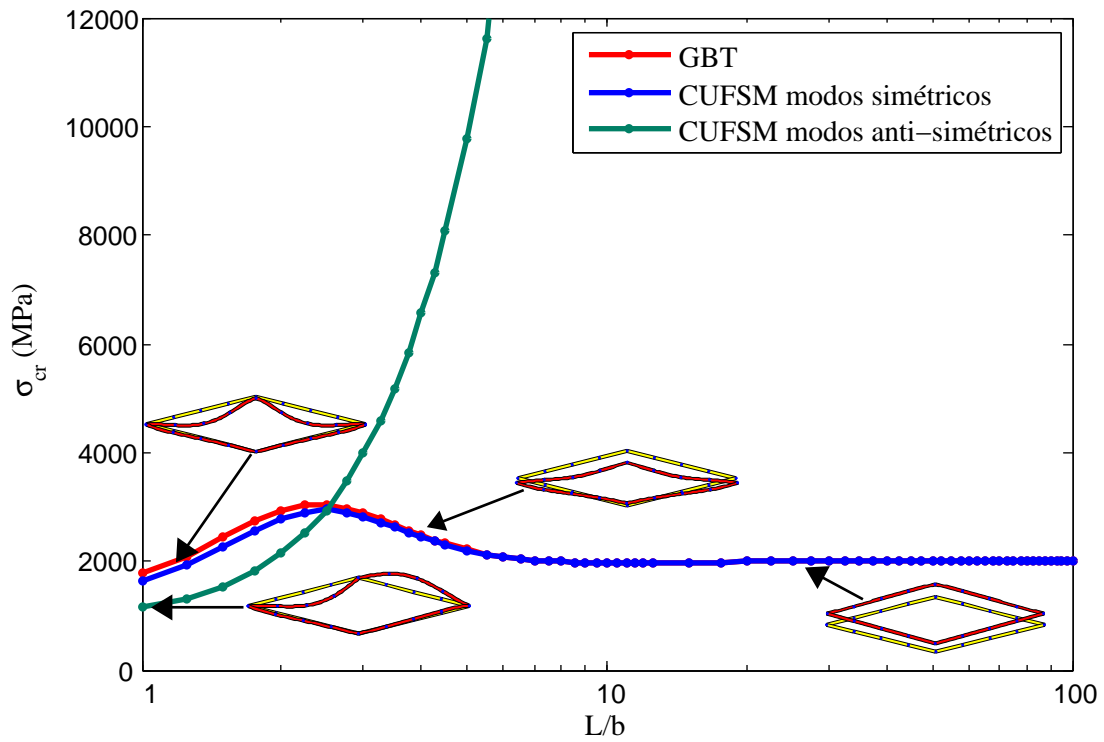


Figura 2.10: Comparação entre os resultados do CUFSM e os obtidos pela GBT no caso de  $\theta = 12^\circ$  e  $b/t = 30$ .

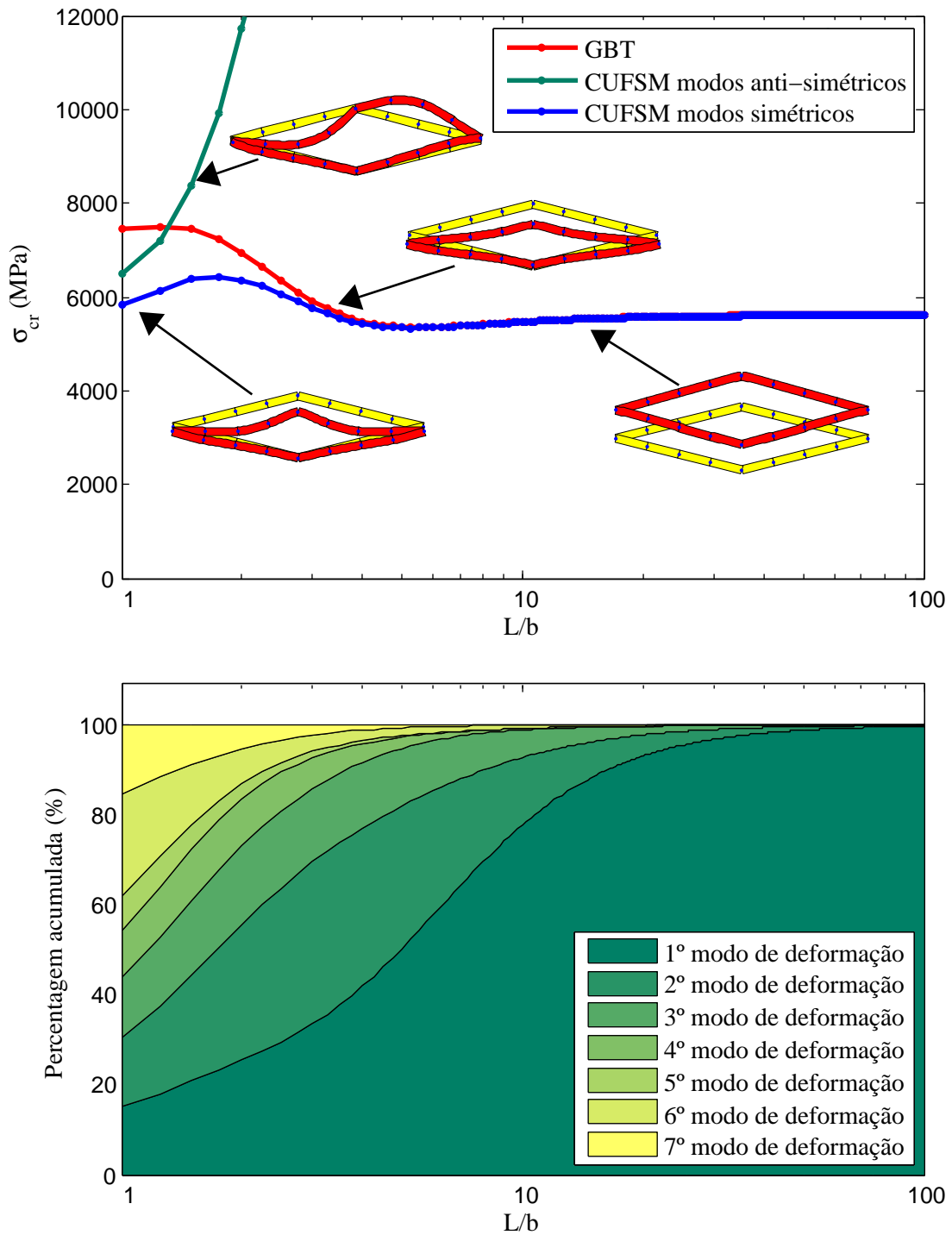


Figura 2.11: Comparação entre os resultados do CUFSM e os obtidos pela GBT no caso de  $\theta = 14^\circ$  e  $b/t = 16$ .

mação relativa à classificação das secções transversais de acordo com o EC3 e a esbelteza normalizada das mesmas,

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{f_y}{\sigma_{cr,min}}}, \quad (2.14)$$

para cinco classes de aço. A Figura 2.12 ilustra isto graficamente. Tal como se pode observar pela Figura 2.12, o modo distorcional crítico é mínimo para uma gama de valores baixos de  $\theta$  e  $b/t$ .

Tabela 2.1: Parâmetros geométricos correspondentes à fronteira entre o modo de instabilidade distorcional e o modo local-de-placa, respectivas classificações das secções e esbeltezas normalizadas para quatro classes de aço, segundo o EC3.

$\frac{\sigma_{cr}^{dist}}{\sigma_{cr}^{loc}} = 1$		S 235		S 275		S 355		S 420		S 460	
$\theta$	b/t	Classe da Secção	$\bar{\lambda}$	Classe da Secção	$\bar{\lambda}$	Classe da Secção	$\bar{\lambda}$	Classe da secção	$\bar{\lambda}$	Classe da Secção	$\bar{\lambda}$
8 °	34	1	0.41	2	0.44	3	0.50	3	0.54	3	0.57
10 °	27	1	0.32	1	0.35	1	0.40	2	0.43	2	0.45
12 °	22	1	0.26	1	0.29	1	0.33	1	0.35	1	0.37
14 °	19	1	0.23	1	0.25	1	0.28	1	0.30	1	0.32
16 °	17	1	0.20	1	0.22	1	0.25	1	0.27	1	0.28
18 °	15	1	0.18	1	0.19	1	0.22	1	0.24	1	0.25
20 °	13	1	0.16	1	0.17	1	0.19	1	0.21	1	0.22

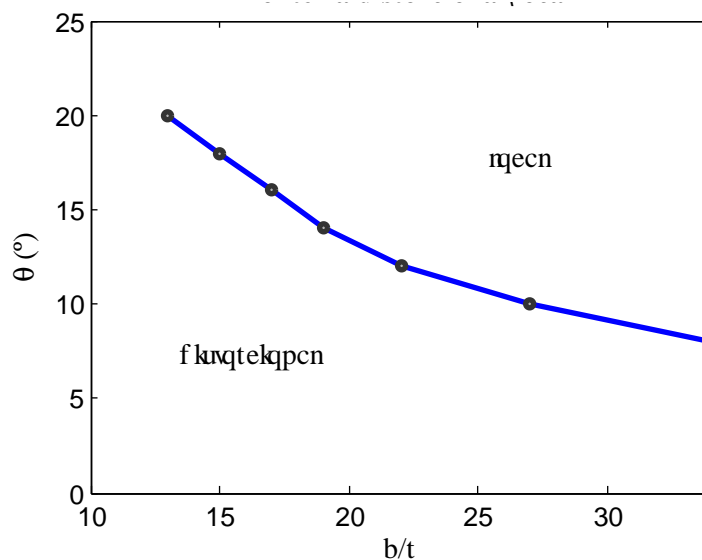


Figura 2.12: Parâmetros geométricos correspondentes à fronteira entre o modo de instabilidade distorcional e o modo local-de-placa.



## Capítulo 3

# Resistência de vigas de secção fechada em losango com parede fina

### 3.1 Introdução

Neste capítulo, analisou-se a capacidade resistente das vigas recorrendo ao software de Elementos Finitos de casca ADINA (Bathe, 2010), com o intuito de perceber se e como os fenómenos distorcionais influenciam a resistência de vigas com as características abordadas neste trabalho. No total, foram analisadas 42 vigas com secções transversais com características distintas, nomeadamente na sua configuração geométrica e na sua classe de aço, sendo abordados todos os pormenores relativamente aos cálculos realizados e à modelação efectuada. Tentou-se, também, perceber se a capacidade resistente calculada de acordo com a metodologia preconizada pelo EC3 é válida para este tipo de perfis. De seguida, as capacidades resistentes, tanto as calculadas pelo ADINA como as calculadas pelo EC3, são comparadas com as curvas de dimensionamento do MRD e com as curvas de encurvadura do EC3, para tentar perceber se pode ser feita alguma relação com os resultados obtidos. Finalmente, são efectuadas recomendações quanto ao dimensionamento destes elementos.

### 3.2 Aspectos de modelação

#### 3.2.1 Condições de fronteira

Com o propósito de reduzir o esforço computacional, foram introduzidas simplificações de simetria a meio vão da viga e a meia secção transversal, impondo-se as condições de fronteira convenientes. Assim, a meio vão foram restringidos os deslocamentos segundo  $y$  e as rotações segundo  $x$  e  $z$ ; a meia secção restringiram-se o deslocamento segundo  $x$  e as rotações segundo  $y$  e  $z$ . Nas extremidades da viga restringiram-se os deslocamentos segundo os eixos  $x$  e  $z$ . As condições de fronteira e o sistema de eixos encontram-se representados na figura 3.1.

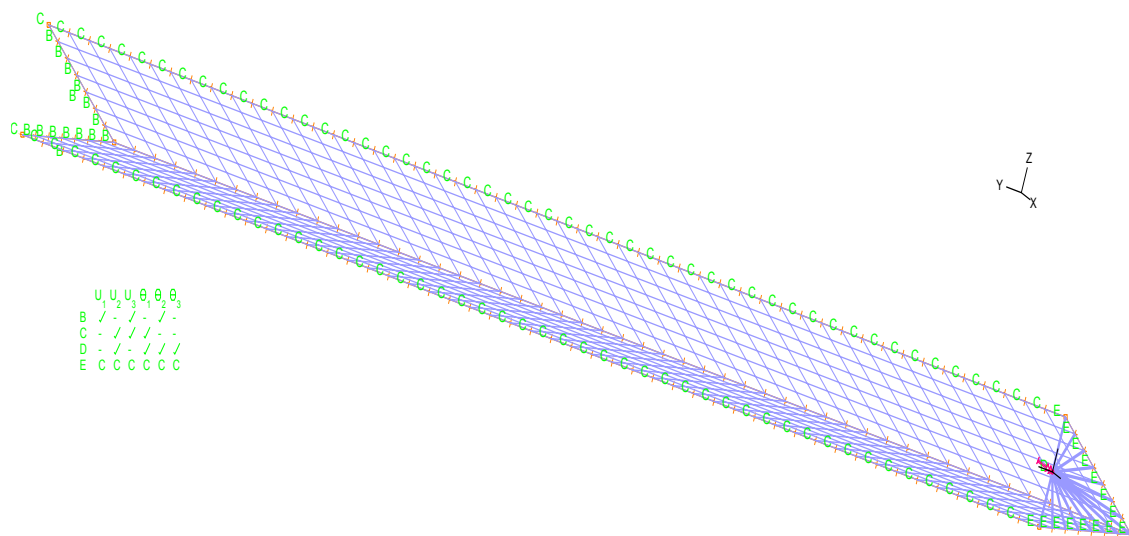


Figura 3.1: Representação do perfil tipo analisado no ADINA, com as respectivas simplificações, condições de fronteira e sistema de eixos.

#### 3.2.2 Cargas aplicadas

Foi introduzida uma rotação unitária segundo o eixo  $x$  na extremidade da barra. Tal como se pode ver na Figura 3.1, foram introduzidas barras rígidas na extremidade da barra, de modo a assegurar uma distribuição uniforme da carga aplicada.

#### 3.2.3 Malha de Elementos Finitos

Decidiu-se adoptar elementos finitos de quatro nós, os quais são aconselhados para efectuar análises física e geometricamente não-lineares (Bathe, 2010). Outro aspecto capital que é necessário ter em conta, é a dimensão dos elementos finitos, pois é imprescindível obter resultados precisos, ao mesmo tempo que se tenta mitigar o esforço computacional envolvido. Assim, para obter uma optimização satisfatória destes dois aspectos, foi necessário efectuar um estudo preliminar.

Decidiu-se comparar três dimensões de malhas diferentes, com 5, 7 e 10 elementos finitos na parede da secção transversal, representadas nas Figuras 3.2, Figura 3.3 e Figura 3.4, respectivamente, com a tensão de comparação de Von Mises. Pela análise do gráfico momento flector-rotação da Figura 3.5, constatou-se que os resultados da malha mais grosseira estão significativamente afastados dos restantes casos analisados, pelo que se decidiu que a precisão dos resultados deveria ser ligeiramente melhor, devendo optar-se por uma malha mais justa. Assim, escolheu-se a malha com 7 elementos finitos na parede da secção transversal, pois esta já apresenta resultados bastante aceitáveis comparativamente com o caso da malha mais refinada, onde o acréscimo de esforço computacional não se traduz numa melhoria significativa da precisão.

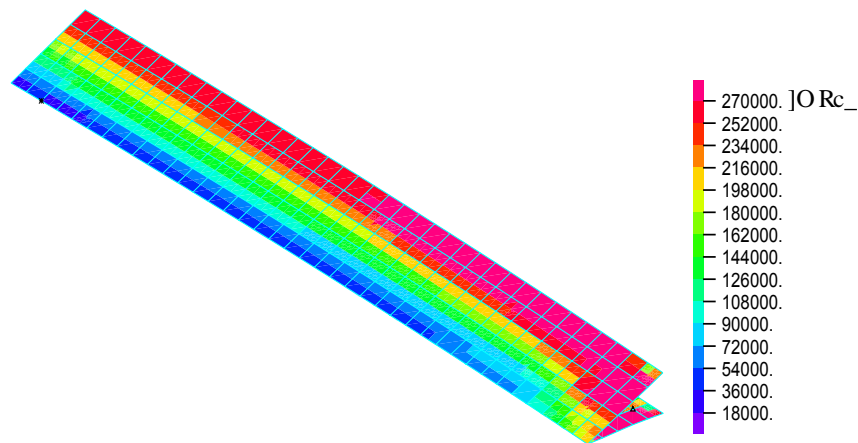


Figura 3.2: Malha de Elementos Finitos com 5 elementos na parede, representada com a tensão de comparação de Von Misses.

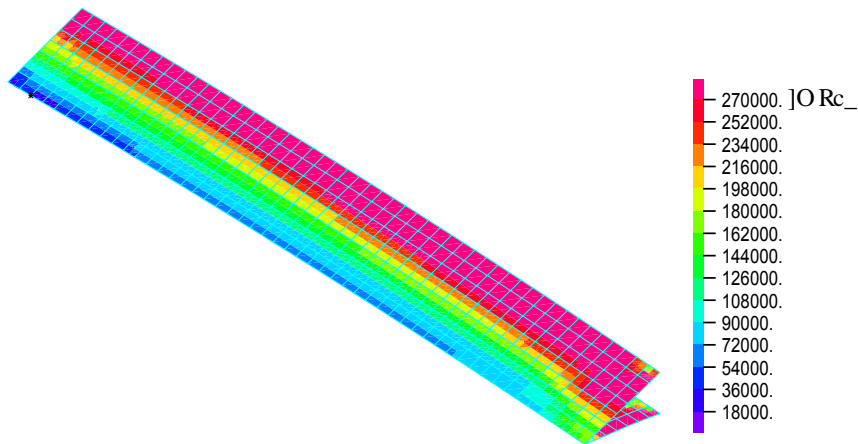


Figura 3.3: Malha de Elementos Finitos com 7 elementos na parede, representada com a tensão de comparação de Von Misses.

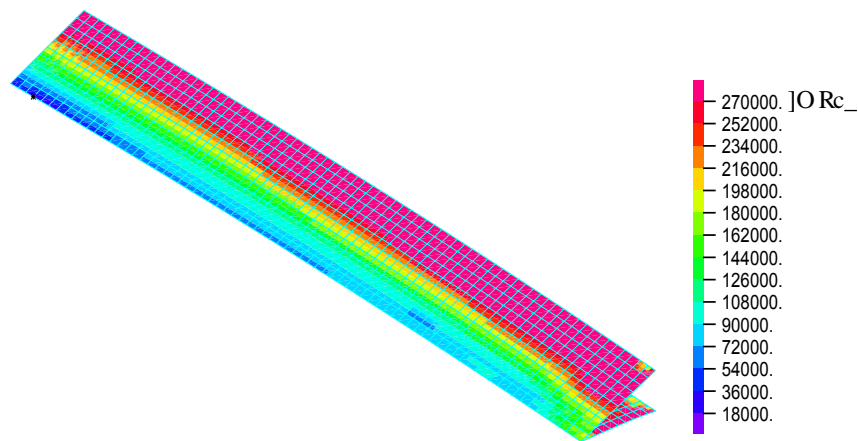


Figura 3.4: Malha de Elementos Finitos com 10 elementos na parede, representada com a tensão de comparação de Von Misses.

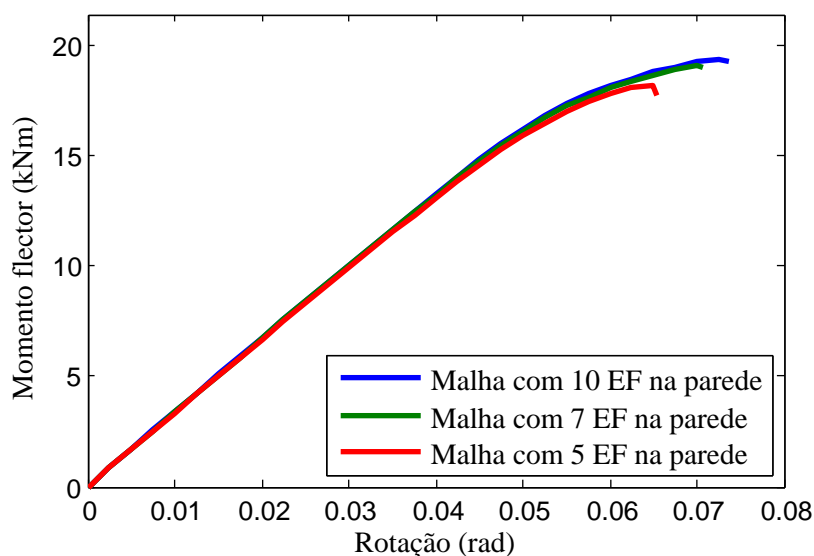


Figura 3.5: Gráfico momento flector-rotação onde se compara a precisão dos resultados obtidos com malhas de elementos finitos com 5, 7 e 10 elementos finitos na parede da secção transversal.

#### 3.2.4 Modelação do material

Para atribuição das propriedades mecânicas do perfil metálico, foi definido um material elasto-plástico perfeito cujo comportamento é caracterizado pelo módulo de Young  $E = 210$  MPa e pelo coeficiente de Poisson  $\nu = 0,3$ . Nos casos estudados, a tensão de cedência adoptada foi  $f_y = 275$  MPa e  $f_y = 460$  MPa.

#### 3.2.5 Imperfeições

No estudo de elementos de parede fina, não existe grande unanimidade na comunidade científica quanto à distribuição e magnitude das imperfeições a admitir para a modelação computacional (Shafer e Peköz, 1998a). Shafer e Peköz procederam a uma colecta de dados existentes e efectuaram testes com o propósito de fornecer directrizes para a modelação de imperfeições geométricas e tensões residuais em perfis de aço enformado a frio. Assim, foi proposta uma série de magnitudes para as imperfeições geométricas máximas associadas a uma probabilidade de ocorrência (Shafer e Peköz, 1998a). No entanto, a incerteza quanto à magnitude das imperfeições geométricas permanece, acontecendo que muitos autores optam por arbitrar valores mais ou menos vulgares neste tipo de investigação. Muitas vezes, a imperfeição geométrica é introduzida com magnitude equivalente a uma percentagem da espessura das paredes (Dinis e Camotim, 2010) ou mesmo no comprimento do perfil (Silvestre, Camotim e Young, 2009).

Na presente dissertação, seguiu-se a indicação fornecida pelo Anexo C da norma EN 1993-1-5 (CEN, 2006), que concerne à determinação de cargas de colapso por Métodos de Elementos Finitos.

Assim, fixou-se uma imperfeição geométrica local equivalente a  $b/200$  (ver Figura 3.6). Por exemplo, esta imperfeição está em consonância com as imperfeições admitidas por Migita e Fukumoto (1997), que investigaram o comportamento de encurvadura local de secções poligonais de parede fina. Para introduzir a imperfeição geométrica no ADINA, foi necessário fazer uma análise de estabilidade para cada um dos casos estudados. De seguida, aplicou-se a imperfeição no ponto onde se registaram maiores deslocamentos.

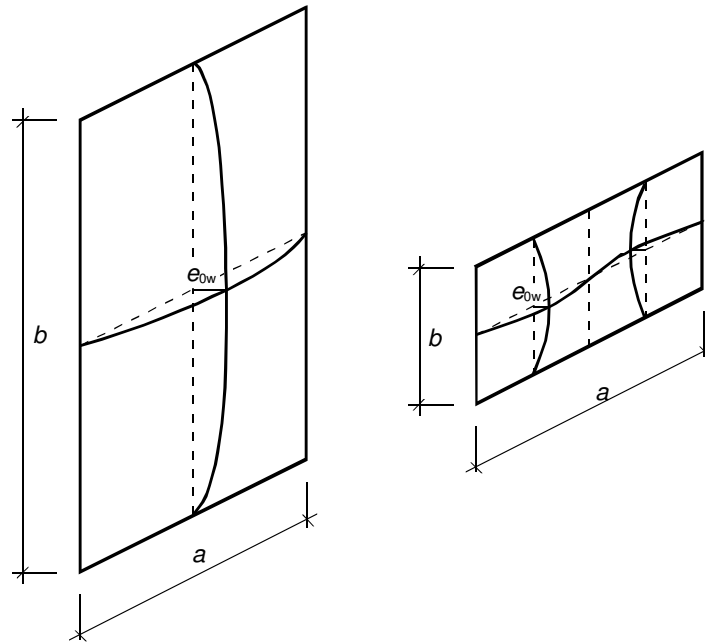


Figura 3.6: Imperfeição geométrica local de acordo com o EN 1993-1-5 (CEN, 2006).

Para ilustrar a influência das imperfeições para a resistência deste tipo de secções, foram analisados 4 casos no ADINA. Tal como é possível contactar pela observação da Figura 3.7, verifica-se que a inclusão de imperfeições na modelação leva a uma redução significativa da capacidade resistente da secção.

#### 3.2.6 Caracterização geométrica

À semelhança do perfil tipo do capítulo anterior, foi analisado um perfil com uma secção transversal em losango com paredes com largura  $b = 200$  mm. Os parâmetros  $\theta$  e  $t$  são variáveis. O comprimento do perfil foi definido como  $l = 3$  m (apesar de só se ter representado no ADINA  $l = 1,5$  m, pois aplicou-se uma simplificação de simetria a meio vão).

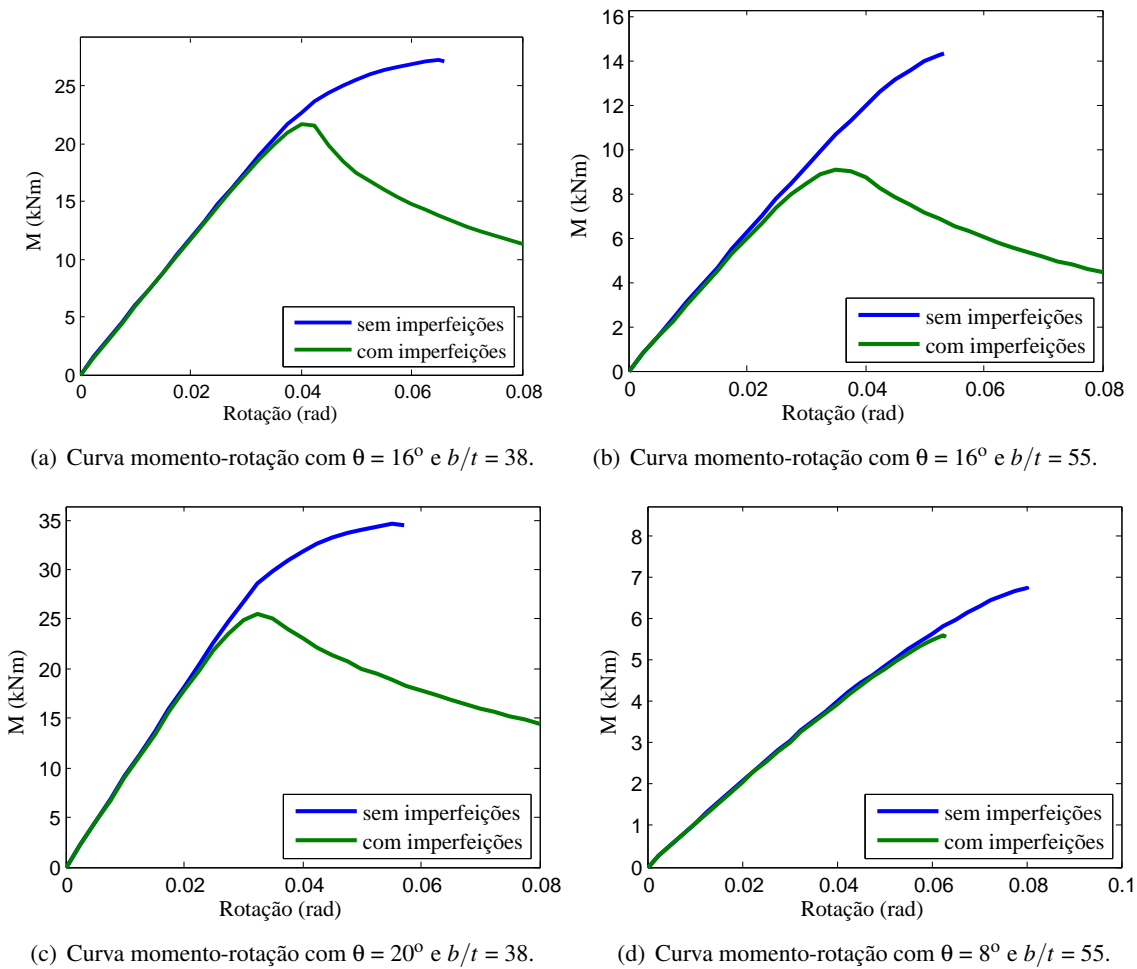


Figura 3.7: Efeito das imperfeições em algumas das vigas estudadas.

### 3.3 Comparação entre o EC3 e o ADINA

#### 3.3.1 Fronteira entre secções de classe 2 e 3

Foram analisadas vigas cuja geometria da secção transversal se localiza próxima da fronteira entre as classes 2 e 3, segundo o EC3, para perfis de aço da classe S275. Para tal, as secções escolhidas possuem  $b/t = 38$ , pois assim, seguindo as indicações do EC3 (ver quadro da Figura 1.10), é possível mobilizar a resistência plástica das secções.

Na generalidade dos casos, verifica-se que, na relação momento-rotação, o comportamento dos perfis caracteriza-se pela ocorrência de um momento limite, tal como se pode verificar pelo gráfico da Figura 3.8. Verifica-se que o incremento da rotação é acompanhado por um aumento gradual da deformação das paredes da secção transversal, sendo que este já é visível na zona do momento limite (Figura 3.9). Após a zona do momento limite, a distorção da secção torna-se mais evidente, observando-se um achatamento da secção semelhante ao do efeito Brazier, tal como se pode ver na

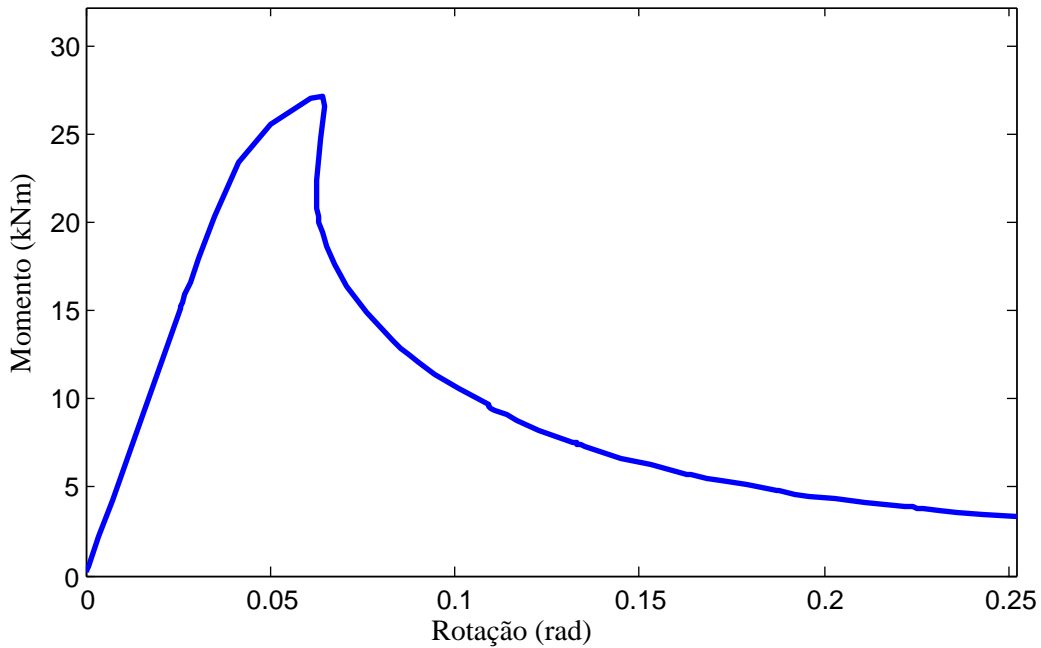


Figura 3.8: Relação momento flector-rotação, para o caso de  $\theta = 14^\circ$  e  $b/t = 38$ .

Figura 3.10. A Figura 3.11 demonstra que a ovalização da secção transversal aumenta continuamente.

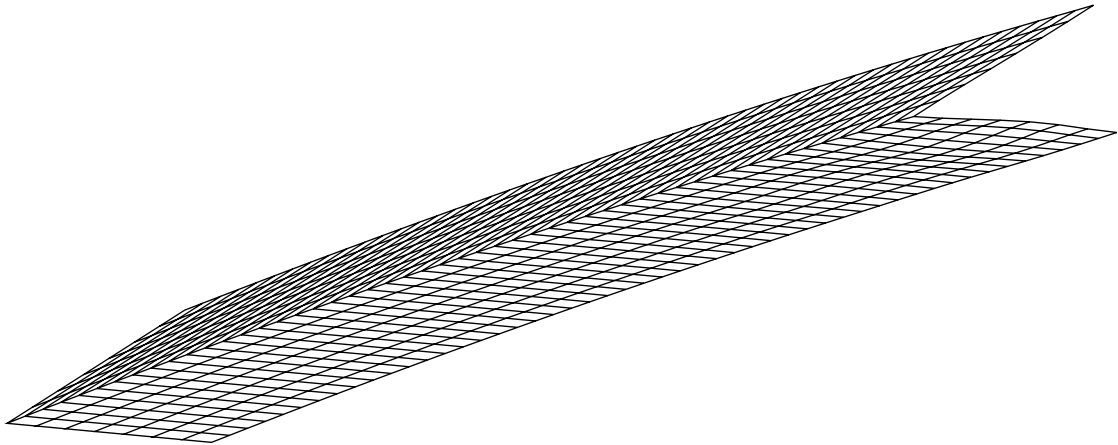


Figura 3.9: Deformação do perfil na zona do ponto limite, para o caso de  $\theta = 14^\circ$  e  $b/t = 38$ .

Para fazer a comparação da capacidade resistente das vigas, foi necessário proceder ao cálculo dos momentos flectores resistentes de acordo com o EC3, pelo que se efectuou uma série de cálculos, de acordo com o enunciado no Capítulo 1. Começou-se por calcular o momento de inércia da secção transversal. De acordo com a representação da Figura 3.12, a matriz de inércia do elemento

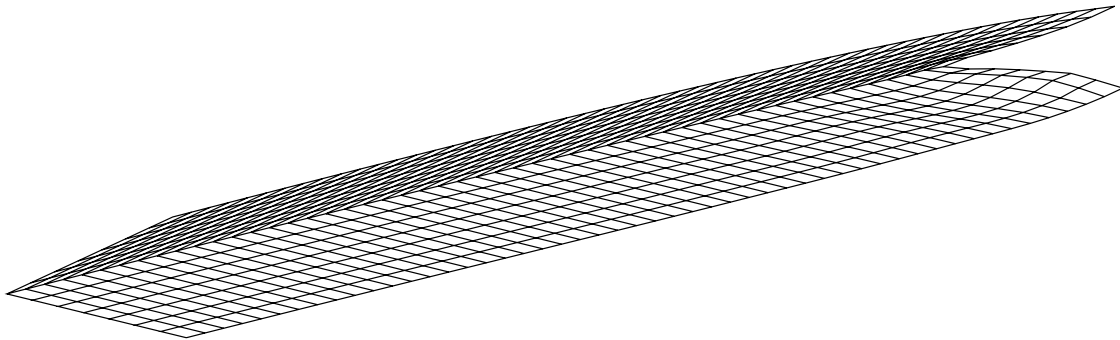


Figura 3.10: Deformação do perfil em rotação = 0.1 rad, para o caso de  $\theta = 14^\circ$  e  $b/t = 38$ .

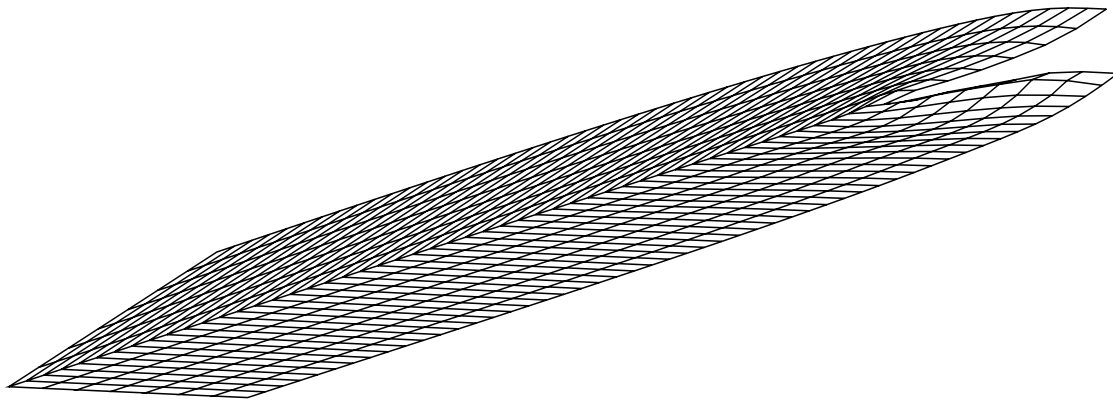


Figura 3.11: Deformação do perfil em rotação = 0.2 rad, para o caso de  $\theta = 14^\circ$  e  $b/t = 38$ .

(equivalente a duas paredes da secção transversal) corresponde a

$$I = \begin{bmatrix} \frac{t(2b)^3}{12} & 0 \\ 0 & \frac{(2b)t^3}{12} \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

Pela representação do círculo de Mohr da Figura 3.13, uma vez que se pretende obter o momento de inércia com os eixos das paredes rodados, tem-se

$$\overline{OC} = \frac{I + II}{2}, \quad (3.2)$$

$$R = \frac{I - II}{2}, \quad (3.3)$$

pelo que, o momento de inércia relativamente ao eixo  $x$  é

$$I_x = \overline{OC} + R \cos(180 - 2\alpha), \quad (3.4)$$

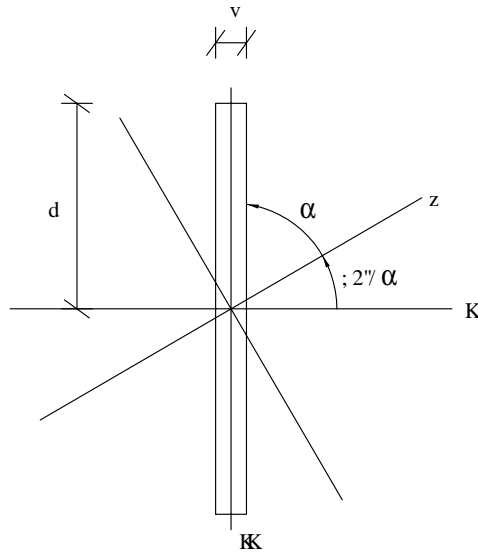


Figura 3.12: Representação dos eixos para cálculo do momento de inércia.

e o momento de inércia da secção transversal toda é

$$I^{total} = 2I_x. \quad (3.5)$$

Assim, a partir da matriz de inércia (3.1), vem que

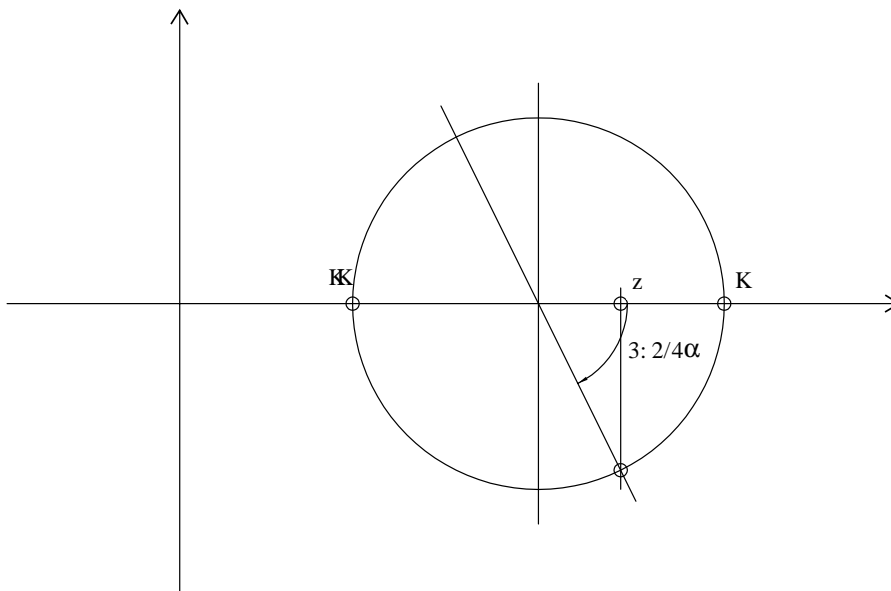


Figura 3.13: Representação do círculo de Mohr.

$$\overline{OC} = \frac{t(2b)^3 + (2b)t^3}{24}, \quad (3.6)$$

e

$$R = \frac{t(2b)^3 - (2b)t^3}{24}, \quad (3.7)$$

logo,

$$I_x = \frac{t(2b)^3 + (2b)t^3}{24} + \frac{t(2b)^3 - (2b)t^3}{24} \cos(180 - 2\alpha), \quad (3.8)$$

obtendo-se, finalmente, a inércia total da secção transversal

$$I^{total} = \frac{t(2b)^3 + (2b)t^3 + (t(2b)^3 - (2b)t^3) \cos(180 - 2\alpha)}{12}. \quad (3.9)$$

Depois de se conhecer o momento de inércia da secção transversal, calculou-se o módulo de flexão elástico

$$W_{el} = \frac{I^{total}}{b \sin \theta}. \quad (3.10)$$

Quanto ao módulo de flexão plástico, este foi calculado por

$$W_{pl} = Ab \sin \theta, \quad (3.11)$$

onde a área é

$$A = 4bt. \quad (3.12)$$

Assim, o momento de cedência e o momento flector plástico foram calculados através das equações (1.8) e (1.7), respectivamente, já enunciadas em 1.2.3.2.

A Tabela 3.1 contém os resultados da comparação entre os momentos flectores resistentes calculados de acordo com o EC3 e os registados no ADINA. A tabela é composta pela classe das secções de acordo com o EC3, os momentos plástico e de cedência de cada secção transversal, a magnitude da imperfeição geométrica tal como introduzida no modelo do ADINA e o respectivo momento resistente verificado, os momentos críticos calculados a partir das tensões críticas obtidas no CUFSM para os modos simétricos e anti-simétricos e, ainda, o factor de redução  $\chi$  dado por

$$\chi = \frac{M_R^{ADINA}}{M_{pl}}, \quad (3.13)$$

uma vez que a resistência considerada neste caso corresponde à plástica. A mesma tabela, mas com maior detalhe, pode ser consultada na Tabela B.1 do Anexo B.

Verificou-se que em nenhum dos casos os valores registados no ADINA excederam os momentos flectores resistentes do EC3. Na verdade, os resultados do ADINA indiciam que a resistência plástica não é mobilizada, ao contrário do que o EC3 prescreve. Os momentos flectores máximos registados aproximam-se do momento elástico da secção, sendo que, caso fosse admitida uma distribuição elástica de tensões, então o momento resistente do EC3 já seria mais próximo do registado no ADINA.

### 3.3. Comparação entre o EC3 e o ADINA

Tabela 3.1: Momentos flectores resistentes calculados de acordo com o EC3 e registados no ADINA, para secções próximas da fronteira entre as classes 2 e 3.

$\theta$	b/t	Classe da Secção	$M_{pl}$ (kNm)	$M_{el}$ (kNm)	Imperfeição (m)	$M_R$ (kNm) ADINA	$M_R$ (kNm) ADINA (sem imp)	$\chi_{pl}$
8°	38	2	16.11	10.84	9.903E-04	11.19	11.69	0.695
10°	38	2	20.11	13.48	9.848E-04	14.37	15.66	0.715
12°	38	2	24.07	16.11	9.781E-04	17.15	19.60	0.712
14°	38	2	28.01	18.73	9.703E-04	19.57	23.43	0.699
16°	38	2	31.92	21.32	9.613E-04	21.62	27.23	0.677
18°	38	2	35.78	23.89	9.511E-04	23.61	30.96	0.660
20°	38	2	39.60	26.44	9.397E-04	25.49	34.59	0.644

Verificou-se ainda, que os momentos resistentes registados no ADINA com e sem imperfeições geométricas são, no caso dos ângulos  $\theta$  mais pequenos, bastante próximos um do outro. No entanto, quando  $\theta$  aumenta, os momentos flectores começam a divergir mais.

Quanto ao factor de redução,  $\chi_{pl}$ , os seus valores não são muito elevados, uma vez que os momentos resistentes plásticos da secção são significativamente superiores aos momentos flectores observados no ADINA. A oscilação de  $\chi$  é pouco previsível, não se verificando nenhuma relação directa com a variação de  $\theta$ .

#### 3.3.2 Fronteira entre secções de classe 3 e 4

Analisaram-se secções com  $b/t = 55$  com o intuito de examinar a fronteira entre as classes 3 e 4 de acordo com o EC3, mas utilizando uma secção ainda enquadrada na classe 3, evitando o cálculo da secção efectiva, tal como como é prescrito para as secções de classe 4.

Em termos do comportamento, este é bastante semelhante ao observado no caso anterior (ver Figura 3.14), sendo, nestes casos, um pouco mais perceptível a deformação das paredes da secção transversal na zona do momento limite, fruto da maior esbelteza dos elementos (Ver as Figuras 3.15, 3.17 e 3.17).

A Tabela 3.2, à semelhança da analisada na secção anterior, compara os resultados dos momentos flectores resistentes calculados de acordo com o EC3 e os registados no ADINA, com e sem imperfeições geométricas. Para estes casos, o factor de redução foi calculado como

$$\chi_{el} = \frac{M_R^{ADINA}}{M_{el}}, \quad (3.14)$$

Constatou-se que os momentos flectores resistentes calculados pelo EC3 excedem os obtido pelo ADINA, apesar de serem ligeiramente mais próximos do que nos casos discutidos em 3.3.2 ( $\chi$  está um pouco mais próximo da unidade). No entanto, verifica-se que os momentos flectores registados

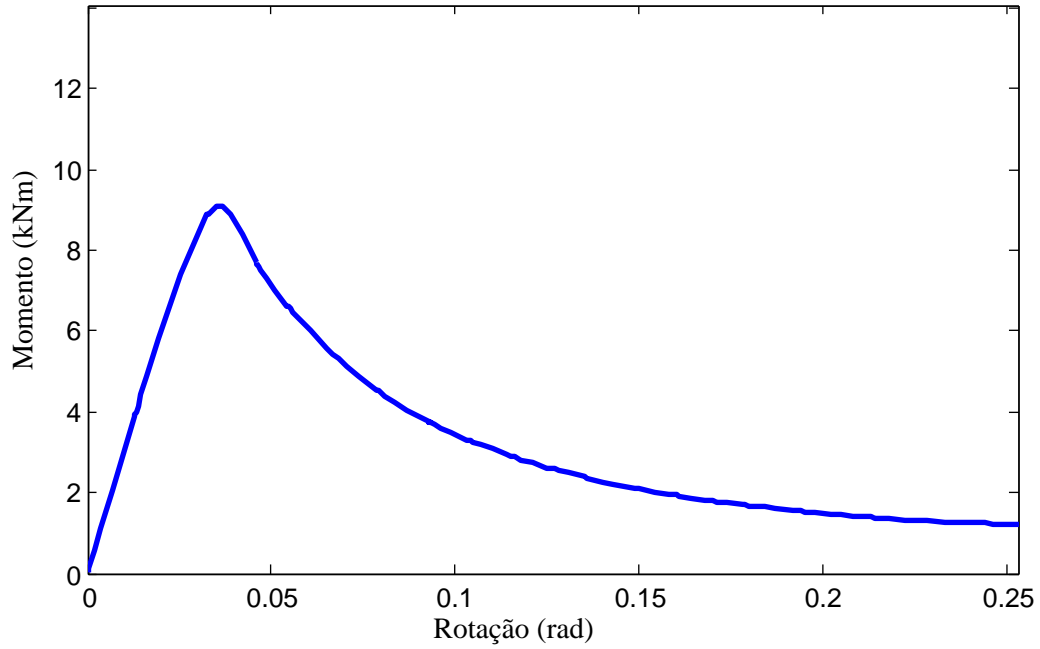


Figura 3.14: Relação momento flector-rotação, para o caso de  $\theta = 14^\circ$  e  $b/t = 55$ .

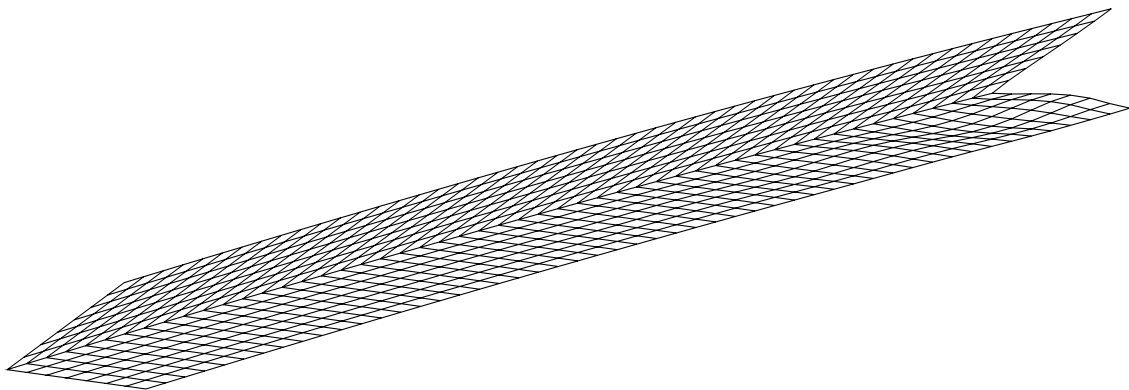


Figura 3.15: Deformação do perfil na zona do ponto limite, para o caso de  $\theta = 14^\circ$  e  $b/t = 55$ .

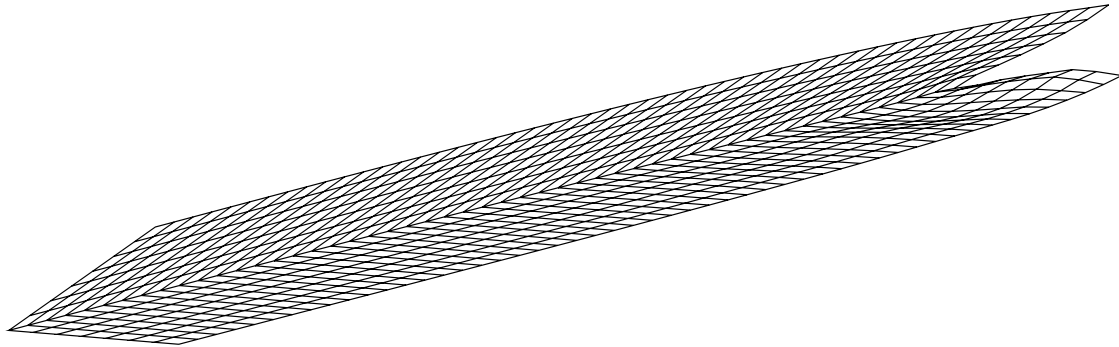


Figura 3.16: Deformação do perfil em rotação = 0.1 rad, para o caso de  $\theta = 14^\circ$  e  $b/t = 55$ .

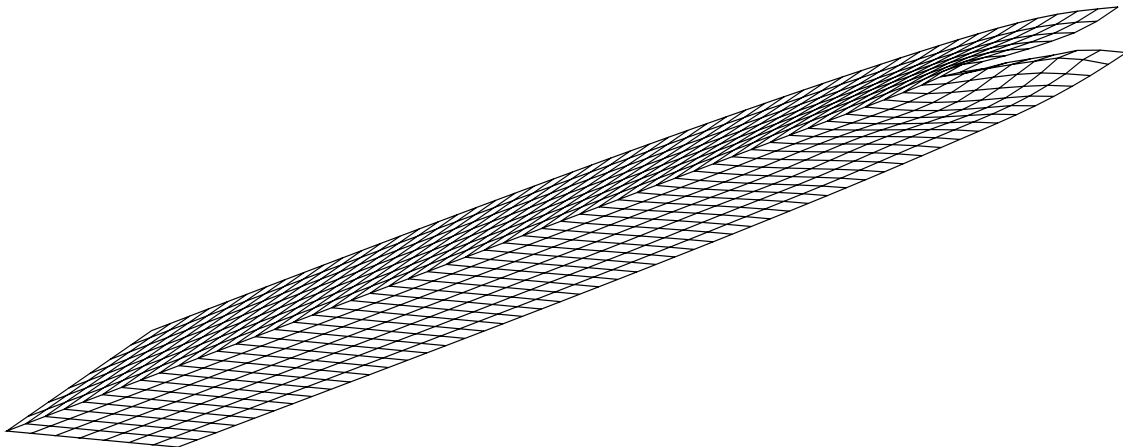


Figura 3.17: Deformação do perfil em rotação = 0.2 rad, para o caso de  $\theta = 14^\circ$  e  $b/t = 55$ .

Tabela 3.2: Momentos flectores resistentes calculados de acordo com o EC3 e registados no ADINA com e sem imperfeições geométricas, para secções próximas da fronteira entre as classes 3 e 4.

$\theta$	b/t	Classe da Secção	$M_{pl}$ (kNm)	$M_{el}$ (kNm)	Imperfeição (m)	$M_R$ (kNm) ADINA	$M_R$ (kNm) ADINA (sem imp)	$\chi_{el}$
8°	55	3	11.13	7.45	9.903E-04	5.60	6.74	0.751
10°	55	3	13.89	9.29	9.848E-04	6.90	9.30	0.743
12°	55	3	16.63	11.11	9.781E-04	8.06	11.83	0.725
14°	55	3	19.35	12.92	9.703E-04	9.08	14.34	0.703
16°	55	3	22.05	14.72	9.613E-04	10.12	16.79	0.687
18°	55	3	24.72	16.49	9.511E-04	11.14	19.24	0.675
20°	55	3	27.36	18.25	9.397E-04	12.20	21.58	0.668

no ADINA sem as imperfeições geométricas são superiores aos momentos do EC3, com excepção para o caso de  $\theta = 8^\circ$ . No Anexo B pode consultar-se esta tabela com maior pormenor (Tabela B.2).

### 3.3.3 Comparação dos resultados com as curvas de dimensionamento

Na sequência dos resultados obtidos nas Secções 3.3.1 e 3.3.2, é conveniente investigar como é que os momentos flectores resistentes se relacionam com as curvas de encurvadura do EC3 e do supramencionado MRD, já discutidos em 1.2.3.4 e 1.2.5, respectivamente. Deste modo, foram registados os momentos flectores resistentes, considerando 42 secções transversais com propriedades geométricas diversas. Além dos casos estudados em 3.3.1 e 3.3.2, foram acrescentados os casos de  $b/t=45$  para a classe de aço S275 e de  $b/t=38$ ,  $b/t=55$  e  $b/t=70$  para a classe de aço S460. Para cada relação  $b/t$  estudada, analisou-se uma série de sete geometrias diferentes, com  $\theta$  a variar deste  $8^\circ$  até  $20^\circ$ . As tabelas com os cálculos efectuados podem ser consultadas no Anexo B.

Atente-se que, nos casos das vigas com  $b/t=55$  e  $b/t=70$  da classe de aço S460, enquadradas na classe 4 do EC3, foi necessário calcular a secção efectiva. O cálculo foi efectuado segundo a metodologia detalhada na secção 1.2.3. Assim, a largura efectiva é

$$b_{eff} = b \quad \text{se } \bar{\lambda} \leq 0,673,$$

$$b_{eff} = b \frac{\bar{\lambda} - 0,055(3 + \psi)}{\bar{\lambda}^2} \leq 1,0 \quad \text{se } \bar{\lambda} > 0,673,$$
(3.15)

com

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{f_y}{\sigma_{cr}}}.$$
(3.16)

Simplificadamente, a quantificação de  $\psi$  pode ser feita admitindo a secção não reduzida, de forma a contornar morosos cálculos iterativos (Rondal *et al.*, 1992). Desta forma, as larguras efectivas foram calculadas usando  $\psi = 0$ . Assim, a área efectiva corresponde a

$$A_{eff} = A - 2t(b - b_{eff}),$$
(3.17)

estando representada na Figura 3.18. Quanto ao cálculo do módulo de flexão elástico, uma vez que se passou a admitir uma secção efectiva, é necessário recalcular a posição do centróide

$$y_G = \frac{Ab \sin \theta - t(b - b_{eff}) \frac{3}{2} b \sin \theta}{A_{eff}}.$$
(3.18)

Assim, calculando a distância desde o centróide da área removida até ao centróide da secção efectiva

$$d = \frac{3}{2} b \sin \theta - y_G,$$
(3.19)

e calculando o momento de inércia da área removida de forma análoga ao processo descrito em 3.3.1, é possível calcular o momento de inércia final, tendo em conta o Teorema de Lagrange-Steiner,

$$I^{final} = I^{total} - \left( I^{removida} + 2t(b - b_{eff})d^2 \right), \quad (3.20)$$

procedendo-se, de seguida, ao cálculo do módulo de flexão elástico de acordo com a equação (3.10).

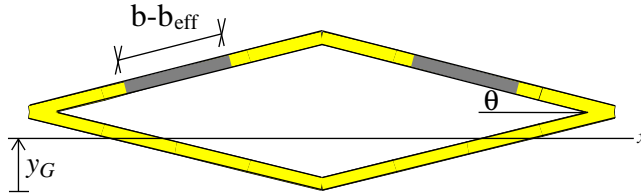


Figura 3.18: Representação da secção transversal efectiva. A área efectiva encontra-se representada a amarelo.

Os resultados obtidos foram comparados em gráficos relacionando a esbelteza,  $\bar{\lambda}$ , com o factor de redução,  $\chi$ . À semelhança dos casos já estudados, o factor de redução foi calculado tendo em conta a resistência elástica por

$$\chi = \frac{M_R}{M_{el}}, \quad (3.21)$$

onde  $M_R$  é o momento flector resistente obtido no ADINA ou calculado de acordo com o EC3, tal como foi registado nos gráficos das Figuras 3.20 e 3.19. Nos gráficos das Figuras 3.22 e 3.21, considerou-se a resistência plástica da secção transversal, sendo  $\chi$  dado por

$$\chi = \frac{M_R}{M_{pl}}. \quad (3.22)$$

A esbelteza normalizada,  $\bar{\lambda}$ , que compõe o eixo das abcissas, foi calculada por

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{M_{el}}{M_{cr}}}, \quad (3.23)$$

ou

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{M_{pl}}{M_{cr}}}, \quad (3.24)$$

conforme se esteja a analisar a resistência elástica ou plástica, onde o momento crítico,  $M_{cr}$ , corresponde ao produto entre o módulo de flexão da secção transversal e a tensão crítica obtida no programa CUFSM. Uma vez que se coloca a hipótese de utilizar as tensões críticas dos modos de instabilidade simétricos e anti-simétricos, foram criados dois tipos de gráficos distintos, considerando os modos de instabilidade simétricos (Figuras 3.20 e 3.22) e os modos de instabilidade anti-simétricos (Figuras 3.19 e 3.21). Note-se que, de forma a que os dados fossem comparáveis, considerou-se sempre o módulo

### Capítulo 3. Resistência de vigas de secção fechada em losango com parede fina

---

de flexão da secção transversal total. Além das legendas que constam nos gráficos, distinguem-se as classes das secções transversais de acordo com o EC3 pelas cores roxa, vermelha e azul, para as classes 2, 3 e 4, respectivamente.

Pela avaliação do gráfico da Figura 3.19, onde os momentos flectores obtidos pelo ADINA e os calculados de acordo com o EC3 são comparados com o momento flector elástico da secção e em que se teve em conta a tensão crítica dos modos anti-simétricos, verifica-se que os valores de  $\chi$  correspondentes ao EC3 coincidem com a curva de dimensionamento do MRD do modo de instabilidade local. No entanto, os  $\chi$  correspondentes ao ADINA são significativamente inferiores, sendo que apenas a curva de encurvadura «d» do EC3 garante que os resultados estão do lado da segurança. Na Figura 3.20, onde se teve em conta a tensão de cedência dos modos de instabilidade simétricos, todos os valores de  $\chi$  baixam relativamente ao gráfico da Figura 3.19, verificando-se que vários dos resultados do ADINA ficam abaixo da curva «d», independentemente da classe da secção transversal.

Nas situações em que se considerou a resistência plástica da secção, os resultados obtidos são bastante inferiores ao caso anterior, com a generalidade dos valores de  $\chi$  relativos ao ADINA a aparecerem abaixo das curvas do MRD e do EC3 (ver Figuras 3.21 e 3.22). Os valores calculados de acordo com a metodologia do EC3 também são significativamente baixos, com os  $\chi$  correspondentes à classe 2 a ficarem bastante perto dos valores relativos ao ADINA. Assim, fica patente que neste tipo de secções transversais não deve ser tida em conta a resistência plástica da secção transversal, pois esta encontra-se muito longe da resistência observada no ADINA, mesmo nos elementos com paredes menos finas.

Resumindo, os resultados são melhores quando se considera a resistência elástica da secção transversal e se utiliza a carga crítica dos modos de instabilidade anti-simétricos, podendo ser, nestes casos, adoptada a curva «d» do EC3. As grandes diferenças verificadas entre o observado no ADINA e o calculado de acordo com o EC3 residem na influência que fenómenos distorcionais como o efeito Brazier têm na resistência deste tipo de vigas. Aconselha-se que a tensão crítica seja obtida com base em métodos numéricos apropriados, como o MFF ou a GBT.

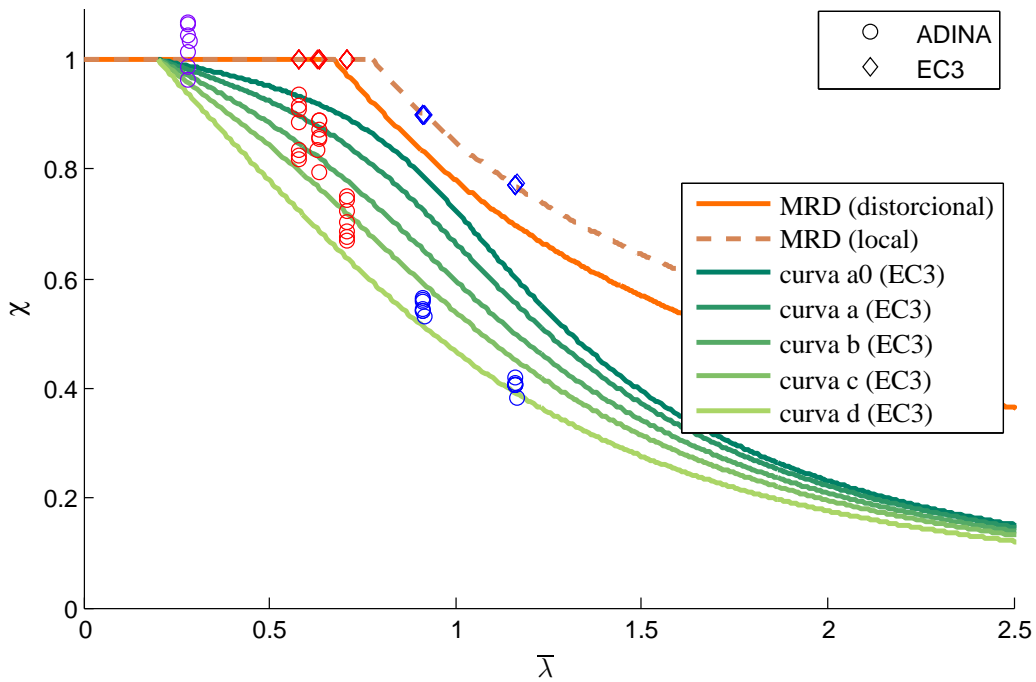


Figura 3.19: Comparação dos momentos flectores resistentes obtidos pelo ADINA e pelo EC3 com as curvas de dimensionamento do MRD e as curvas de encurvadura do EC3, considerando a resistência elástica da secção transversal. Considerou-se a tensão crítica correspondente aos modos anti-simétricos.

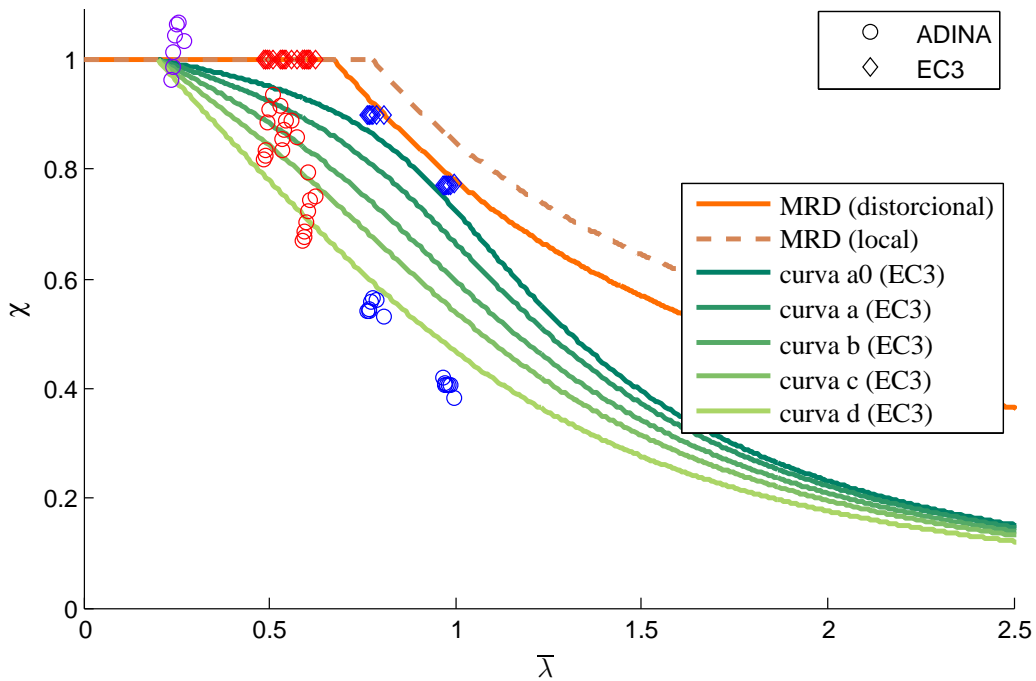


Figura 3.20: Comparação dos momentos flectores resistentes obtidos pelo ADINA e pelo EC3 com as curvas de dimensionamento do MRD e as curvas de encurvadura do EC3, considerando a resistência elástica da secção transversal. Considerou-se a tensão crítica correspondente aos modos simétricos.

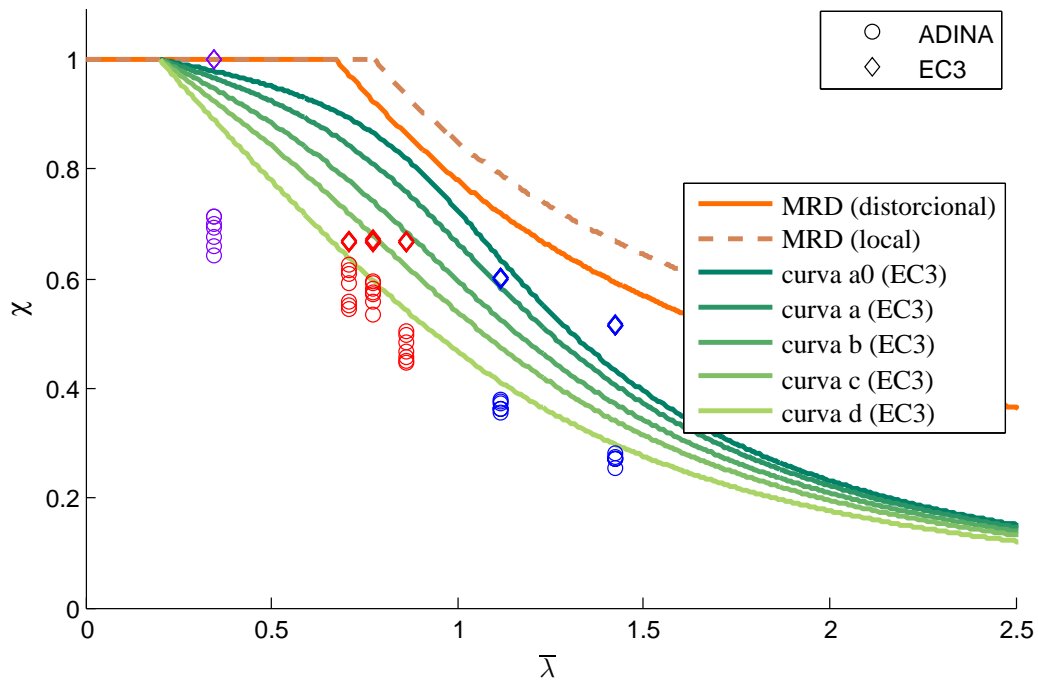


Figura 3.21: Comparação dos momentos flectores resistentes obtidos pelo ADINA e pelo EC3 com as curvas de dimensionamento do MRD e as curvas de encurvadura do EC3, considerando a resistência plástica da secção transversal. Considerou-se a tensão crítica correspondente aos modos anti-simétricos.

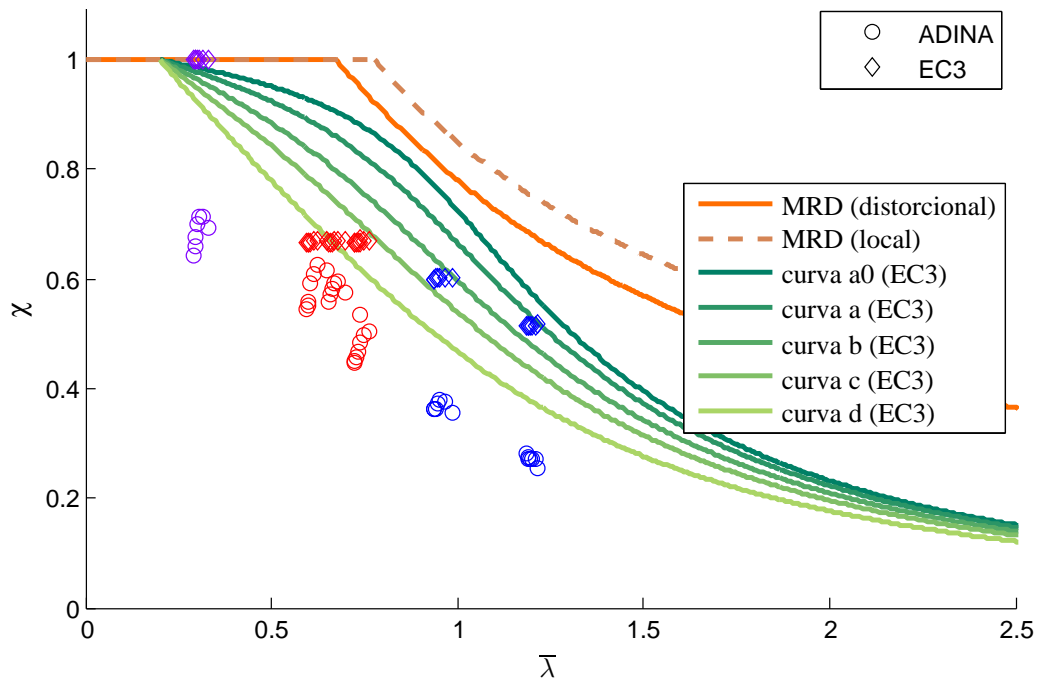


Figura 3.22: Comparação dos momentos flectores resistentes obtidos pelo ADINA e pelo EC3 com as curvas de dimensionamento do MRD e as curvas de encurvadura do EC3, considerando a resistência plástica da secção transversal. Considerou-se a tensão crítica correspondente aos modos simétricos.

## Capítulo 4

# Conclusões e desenvolvimentos futuros

### 4.1 Conclusões

O trabalho desenvolvido focou-se, principalmente, na análise dos fenómenos distorcionais, executada através da análise da instabilidade bifurcacional efectuada com recurso a métodos numéricos e da análise da resistência.

Foi discutida a natureza dos fenómenos de instabilidade (Capítulo 1), nomeadamente a sua caracterização e os métodos apropriados para a sua análise. Foram, também, abordados conceitos e metodologias, de modo a permitir uma melhor compreensão de como os regulamentos e os diferentes métodos lidam com os fenómenos de instabilidade, sendo apresentada a metodologia adoptada pelo EC3, seguida de uma discussão acerca do Método das Larguras Efectivas e do Método da Resistência Directa. Foi, também, discutido o fenómeno distorcional efeito Brazier, discutindo-se o comportamento das estruturas susceptíveis ao mesmo.

Na análise da Bifurcação (Capítulo 2), foram apresentados os métodos utilizados neste trabalho, nomeadamente o MFF e a GBT. Concluiu-se que o MFF representa uma boa alternativa a outros métodos mais complexos (e.g., MEF de casca), pois consegue, com pouco esforço computacional, determinar as cargas críticas associadas aos modos de Instabilidade. No entanto, para se poder caracterizar os modos de instabilidade, foi necessário recorrer a GBT, pois esta permite obter a participação modal associada aos modos. Para tal, foi necessário criar uma rotina em MATLAB. Depois de parametrizado o problema, foi efectuada uma descrição completa da bifurcação deste tipo de secções transversais, através da análise de vários casos. Em particular, obtiveram-se as seguintes conclusões:

- Os modos de instabilidade observados podem ser distinguidos entre modos de instabilidade simétricos e anti-simétricos;
- Apenas dois modos de instabilidade é que podem ser críticos, nomeadamente os modos simétricos e anti-simétricos com uma semi-onda no comprimento das paredes da secção transversal. Os restantes modos de instabilidade apresentam cargas de bifurcação muito mais elevadas;

## Capítulo 4. Conclusões e desenvolvimentos futuros

---

- O modo de instabilidade anti-simétrico é essencialmente local-de-placa, pois estes modos de deformação atingem grandes participações modais quando este é crítico;
- Em todos os casos, os modos locais-de-placa têm participações significativas nos pequenos semi-comprimentos de onda (maiores nos casos em que o modo crítico corresponde ao modo de instabilidade anti-simétrico), sendo que a sua participação modal praticamente se extingue para semi-comprimentos de onda maiores;
- O modo de instabilidade simétrico apresenta características mistas de modo local-de-placa e de modo distorcional para pequenos semi-comprimentos de onda. Para semi-comprimentos maiores, o modo apresenta características de modo distorcional/global;
- Verificou-se que, nas curvas das cargas críticas, existem dois mínimos. Quando o modo de instabilidade crítico está associado ao modo anti-simétrico, a carga crítica ocorre no primeiro mínimo, enquanto que nos casos em que o modo simétrico é crítico, então a carga crítica ocorre no segundo mínimo;
- Constatou-se que a carga crítica mínima está associada ao modo de instabilidade simétrico para valores de  $\theta$  e  $b/t$  baixos.

Quanto à análise da resistência das vigas (Capítulo 3), foram analisadas 42 vigas através da comparação de resultados obtidos pela metodologia preconizada pelo EC3 e obtidos pelo ADINA com as curvas de dimensionamento do MRD e as curvas de encurvadura do EC3. Foram, também, abordados todos os aspectos essenciais da modelação, nomeadamente, as condições de fronteiras adoptadas, a aplicação das cargas, a definição da malha de Elementos Finitos, as propriedades do material e a definição e introdução das imperfeições geométricas. As conclusões efectuadas quanto à resistência deste tipo de vigas foram:

- Na generalidade dos casos, verifica-se que, num gráfico momento flector-rotação, o comportamento da estrutura caracteriza-se pela ocorrência de um momento limite e por uma crescente distorção da secção transversal, mais evidente após o momento limite;
- Nas secções classificadas pelo EC3 como classe 2, mas localizadas na fronteira entre classe 2 e 3, verificou-se que a resistência plástica da secção transversal não é mobilizada, ao contrário do que o EC3 prescreve, pois esta ficou bastante abaixo dos valores registados no ADINA, obtendo-se um factor de redução,  $\chi$ , que oscila entre 0,644 e 0,715. Justifica-se considerar a resistência elástica da secção, uma vez que esta encontra-se abaixo dos momentos flectores do ADINA;
- Verificou-se que, na fronteira entre classe 2 e 3, os momentos flectores do ADINA com e sem imperfeições geométricas são mais próximos quando o  $\theta$  é baixo;

- Nas secções classificadas como classe 3, mas situadas na fronteira entre as classes 3 e 4, verificou-se os momentos flectores registados no ADINA são inferiores à resistência elástica das secção transversal;
- Também nas secções classificadas como classe 3, verificou-se que, caso não fossem introduzidas as imperfeições geométricas no modelo, então o momento flector do ADINA seria superior à resistência elástica da secção transversal , para a maior parte dos casos estudados;
- Verificou-se que, quando se considera a resistência elástica da secção transversal, os momentos flectores calculados de acordo com o EC3 são bastante próximos das curvas de dimensionamento do MRD;
- Observou-se que considerando a resistência plástica da secção e/ou a tensão crítica associada ao modo de instabilidade simétrico, os resultados ficam abaixo das curvas do MRD e das curvas de encurvadura do EC3;
- Concluiu-se que o efeito Brazier observado nestes elementos conduz a uma grande redução da capacidade resistente das vigas;
- Recomenda-se a utilização da curva «d» do EC3, considerando a resistência elástica da secção transversal e a tensão crítica associada ao modo de instabilidade anti-simétrico, devendo esta ser quantificada com base em métodos numéricos apropriados, como o MFF e a GBT.

## 4.2 Desenvolvimentos futuros

Os resultados obtidos sugerem uma grande influência dos fenómenos distorcionais neste tipo de elementos. Para validação dos resultados obtidos, deveria-se proceder à realização de ensaios.

Propõe-se, também, que se estude qual a influência do efeito Brazier em elementos com características diferentes, tendo em vista verificar em que medida é que o EC3 consegue garantir a segurança na ocorrência deste fenómeno. Futuramente, poderia-se alargar este tipo de análise a secções poligonais com mais faces, uma vez que possuem características semelhantes às dos elementos estudados neste trabalho.



# Bibliografia

- AISI (American Iron and Steel Institute), 1946. *Specification for the Design of Light Gage Steel Structural Members*. American Iron and Steel Institute: Nova Iorque, NY, Estados Unidos da América.
- AISI (American Iron and Steel Institute), 2004. *Appendix I of the North American Specification (NAS) for the Design of Cold-Formed Steel Structural Members: Design of Cold-Formed Steel Structural Members with the Direct Strength Method*. American Iron and Steel Institute: Washington DC, Estados Unidos da América.
- Allen D., 2006. *History of Cold Formed Steel*. Structure Magazine, November 2006, p. 28-32. Nacional Council of Structural Engineers Associations: Chicago, IL, Estados Unidos da América.
- Bathe K.J., 2010. *ADINA system 8.7*. ADINA R&G Inc.
- Brazier L.G., 1927. *On the Flexure of Thin Cylindrical Shells and Other "Thin" Sections*. Proceedings of the Royal Society London Series A vol. 116 n. 773, p. 104-114. Royal Society Publishing: Londres, Reino Unido.
- Camotim D., Silvestre N., Gonçalves R. e Dinis P.B., 2004. *GBT analysis of thin-walled members: new formulation and applications*. J. Loughlan (Ed.), Thin-walled structures: recent advances and future trends in thin-walled structures technology, p. 137-168. Canopus Publishing Ltd.: Bath, Reino Unido.
- Camotim D., Silvestre N., Gonçalves R. e Dinis P., 2006. *GBT-based Structural Analysis of Thin-walled members: Overview, Recent Progress and Future Developments*. Advances in Engineering Structures, Mechanics & Construction. Solid Mechanics and Its Applications, vol. 140, p. 187-204. Springer: Países Baixos.
- Camotim D., Basaglia C., Silva N.M.F. e Silvestre N., 2010. *Numerical Analysis of Thin-Walled Structures using Generalised Beam Theory: Recent and Future Developments*., Computational Technology Reviews, vol. 1, p. 315-354. Saxe-Coburg Publications: Reino Unido.
- Carnegie A., 1902. *The Empire of Business*. Doubleday, Page & Co.: New York, NY, Estados Unidos da América.

## Bibliografia

---

- CEN (Comité Européen de Normalisation), 2004. *EN 1993-1-3 Eurocode 3: Design of steel structures. Part 1-3: General rules. Supplementary rules for cold-formed members and sheeting*. Comité Européen de Normalização: Bruxelas, Bélgica.
- CEN (Comité Européen de Normalisation), 2006. *EN 1993-1-5 Eurocode 3: Design of steel structures. Part 1-5: Plated structural elements*. Comité Européen de Normalização: Bruxelas, Bélgica.
- CEN (Comité Européen de Normalisation), 2010. *NP EN 1993-1-1 Eurocódigo 3: Projecto de estruturas de aço. Parte 1-1: Regras gerais e regras para edifícios*. Comité Européen de Normalização: Bruxelas, Bélgica.
- Cheung Y.K., 1968a. *The finite strip method in the analysis of elastic plates with two opposite simply supported ends*. Proceedings of the Institution of Civil Engineers, vol. 40, n. 1, p. 1-7. ICE Publishing: Londres, Reino Unido.
- Cheung Y.K., 1968b. *The finite strip method analysis of elastic slabs*. Journal of Engineering Mechanics, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, vol. 94, n. EM6, p. 1365-1378. ASCE Press: Estados Unidos da América.
- Cordeiro J.M.L ed. e Vasconcelos A.C.A.F. ed., 2005. *Ponte Maria Pia: A obra-prima de Seyrig*. Ordem dos Engenheiros - Região Norte: Porto, Portugal.
- Davies J.M., Leach P., 1994. *First-order generalised beam theory*. Journal of Constructional Steel Research, vol. 31, n. 2-3, p. 187-220. Elsevier Science Ltd.: Reino Unido.
- Davies J.M., 1998. Generalised Beam Theory (GBT) for coupled instability problems. Rondal L. (ed.), Coupled instability in metal structures: theoretical and design aspects (CISM course n. 379), p. 151-223. Springer: Viena, Áustria.
- Davies J.M., 2000. *Recent research in cold-formed steel structures*. Journal of Constructional steel research, vol. 55, n. 1-3, p. 267-288. Elsevier Science Ltd.: Reino Unido.
- Dinis P.B. e Camotim D., 2010. *Local/distortional mode interaction in cold-formed steel lipped channel beams*. Thin-Walled Structures, vol. 48, n. 10-11, p. 771-785. Elsevier Science Ltd.: Reino Unido.
- Gonçalves R. e Camotim D., 2007. *Thin-walled member plastic bifurcation analysis using generalised beam theory*. Advances in Engineering Software, vol. 38, n. 8-9, p. 637-646. Elsevier Science Ltd.: Reino Unido.
- Gonçalves R. e Camotim D., 2010. *Steel-concrete composite bridge analysis using generalised beam theory*. Steel and Composite Structures, vol. 10, n. 3, p. 223-243. Technopress: Seul, Coreia do Sul.
- Gonçalves R., Ritto-Corrêa M., Camotim D., 2010. *A new approach to the calculation of cross-*

- section deformation modes in the framework of Generalized Beam Theory*. Computational Mechanics, vol. 46, n. 5, p. 759-781. Springer-Verlag: Berlim, Alemanha.
- Hancock G.J., Kwon Y.B. e Bernard E.S. 1994. *Strength design curves for thin-walled sections undergoing distortional buckling*. Journal of Constructional Steel Research, vol. 31, n. 2-3, p. 169-186. Elsevier Science Ltd., Reino Unido.
- Hancock G.J., Murray T.M e Ellifritt D.S., 2001. *Cold-Formed Steel Structures to the AISI Specification*. Marcel Dekker: Nova Iorque, NY, Estados Unidos da América.
- Jensen F.M., 2008. *Ultimate strength of a large wind turbine blade*. Tese de Doutorado. Technical University of Denmark: Risø, Roskilde, Dinamarca.
- Jensen F.M., Weaver P., Cecchini L., Stang H. e Nielsen R.F., 2011. *The Brazier effect in wind turbine blades and its influence on design*. Wind Energy, vol. 15, n. 2, p. 319-333. John Wiley & Sons, Ltd.: Malden, MA, Estados Unidos da América.
- Li Z., Schafer B.W., 2010. *Application of the finite strip method in cold-formed steel member design*. Journal of Constructional Steel Research, vol 66, n. 8-9, p. 971-980. Elsevier Science Ltd.: Reino Unido.
- Manito, 2012. *Wind turbine blades - Grand Forks, North Dakota*. Flickr (online). Disponível em <http://www.flickr.com/63132871@N04/7062599461>.
- MathWorks, 2010. *MATLAB version 7 (R2010b)* The MathWorks Inc.: Natick, MA, Estados Unidos da América.
- Migita Y. e Fukumoto Y., 1997. *Local buckling behaviour of polygonal sections*, Journal of Constructional Steel Research, Volume 41, n. 2-3, February-March 1997, p. 221-233. Elsevier Science Ltd.: Reino Unido.
- Nedman, 2010. *Wind Farm 5*. Flickr (online). Disponível em <http://www.flickr.com/nedman/4805987325>.
- Reis A. e Camotim D., 2001. *Estabilidade Estrutural*. McGraw-Hill: Lisboa, Portugal.
- Rondal J., Würker K.-G., Dutta D., Wardenier J. e Yeo-mans N., 1992. *Structural Stability of Hollow Sections*. CIDECT Design Guide n. 2, CIDECT (Ed.) e VerlagTÜV Rheinland: Köln, Alemanha.
- Rusch A. e Lindner J., 2001. *Remarks to the Direct Strength Method*. Thin-Walled Structures, vol. 39, n. 9, p. 807-820. Elsevier Science Ltd.: Reino Unido.
- Santos E.S., Batista E.M. e Camotim D., 2012. *Experimental investigation concerning lipped channel columns undergoing local-distortional-global buckling mode interaction*. Thin-Walled Structures, vol. 54, Maio, p. 19-34. Elsevier Science Ltd.: Reino Unido.

## Bibliografia

---

- Schafer B.W. e Peköz T., 1998a. *Computational modeling of cold-formed steel: characterizing geometric imperfections and residual stresses*. Journal of Constructional Steel Research, vol. 47, n. 3, p. 193-210. Elsevier Science Ltd.: Reino Unido.
- Schafer B.W. e Peköz T., 1998b. *Direct strength prediction of cold-formed steel members using numerical elastic buckling solutions Proceedings*. Second International Conference on Thin-Walled Structures: Thin-Walled Structures, Research and Development, p. 137-144. Elsevier Science Ltd.: Singapore.
- Schafer B.W., Ádány S., 2005. *Understanding and classifying local, distortional and global buckling in open thin-walled members*. Proceedings of the annual technical session and meeting, p. 27-46. Structural Stability Research Council: Montreal, Quebec, Canadá.
- Schafer B.W., 2006a. *Review: The Direct Strength Method of cold-formed steel member design*. Journal of Constructional Steel Research, vol. 64, n. 7-8, p. 766-778. Elsevier Science Ltd.: Reino Unido.
- Schafer B.W., 2006b. *Direct Strength Method design guide*. American Iron and Steel Institute: Washington, DC, Estados Unidos da América.
- Schafer B.W. e Ádány S., 2006. *Buckling analysis of cold-formed steel members using CUFSM: conventional and constrained finite strip methods*. Eighteenth International Specialty Conference on Cold-Formed Steel Structures: Orlando, FL, Estados Unidos da América.
- Schafer B.W., 2010. Thin-Walled Metal Construction, em Ziemian, R.D. (ed), *Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures*, Sixth Edition. John Wiley & Sons Inc., Hoboken, NJ, Estados Unidos da América.
- Schardt R., 1966. *Eine erweiterung der technischen biegetheorie zur berechnung prismatischer faltwerke*. Stahlbau, vol. 35, p. 161-171. Alemanha.
- Schardt R., 1989. *Verallgemeinerte Technische Biegetheorie*. Springer-Verlag: Berlim, Alemanha.
- Sebestyén G., 1998. *Construction - craft to industry*. Taylor & Francis: Londres, Reino Unido.
- Segui W.T., 2007. *Steel Design*, 4th edition. Nelson-Thomas Canada Ltd.: Toronto, Canadá.
- Silvestre N. e Camotim D., 2002. *First-order generalised beam theory for arbitrary orthotropic materials*. Thin-Walled Structures, vol. 40, n. 9, p.755-789. Elsevier Science Ltd.: Reino Unido.
- Silvestre N., Camotim D. e Dinis P.B., 2007. *Aplicação do método da resistência direta a colunas e vigas de aço enformadas a frio com seção em C afetadas por interação entre instabilidade local-de-placa e distorcional*. Rem: Revista Escola de Minas, vol. 60, núm. 2, abril-junho, 2007, p. 341-354. Universidade Federal de Ouro Preto: São Paulo, Brasil.

- Silvestre N. e Camotim D., 2009. *On the use of the EC3 and AISI specifications to estimate the ultimate load of CFRP-strengthened cold-formed steel lipped channel columns*. Thin-Walled Structures, vol. 47, n. 10, p. 1102-1111. Elsevier Science Ltd., Reino Unido.
- Simões R.A.D., 2007. *Manual de dimensionamento de estruturas metálicas*, 2ª edição. Associação Portuguesa de Construção Metálica e Mista, Coimbra, Portugal.
- Standards Australia/Standards New Zealand, 2005. *Australian/New Zealand Standard on Cold-Formed Steel Structures*, AS/NZS 4600 (second edition), Sydney-Wellington, Austrália-Nova-Zelândia.
- Sawyer, M.H., 1979. *World's First Iron Bridge*. Civil Engineering Magazine, vol. 49, n. 2, p. 46-49. ASCE Press: Estados Unidos da América.
- Takahashi K., Ishohara N. e Nakamura, H., 2003. *Analytical and numerical solutions for distortional instabilities of thin-walled beams under bending moment*. Coupled instabilities in metal structures, p. 73-81. Lisbon: Imperial College Press.
- Tatting B.F., Gürdal Z. e Vasiliev V.V., 1997. *The brazier effect for finite length composite cylinders under bending*. International Journal of Solids and Structures, vol. 34, n. 12, p. 1419-1440. Elsevier Science Ltd.: Reino Unido.
- Trahair N.S., Bradford M.A., Nethercot D.A., Gardner L., 2008. *The Behaviour and design of steel structures to EC3*, 4th edition. Taylor & Francis: Abington, Oxford, Reino Unido.
- Von Kármán T., Sechler E.E. e Donnell L.H., 1932. *The strength of thin plates in compression*. Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, vol. 54, p. 53-57. Nova Iorque, NY, Estados Unidos da América.
- Urutseg, 2009. *Mechanical equilibrium*. Wikimedia Foundation, Inc. (online). Disponível em [https://commons.wikimedia.org/wiki/File%3AUnstable\\_equilibrium.svg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File%3AUnstable_equilibrium.svg)
- Walker R.D., 2012. *Iron Processing*. Encyclopaedia Britannica Ultimate Reference Suite. Encyclopaedia Britannica: Chicago, IL, Estados Unidos da América.
- Wadee M.K., Wadee M.A., Bassom A.P. e Aigner A.A., 2006. *Longitudinally inhomogeneous deformation patterns in isotropic tubes under pure bending*. Proceedings of the Royal Society, series A, vol. 462, n. 2067, p. 817-838. Royal Society Publishing: Londres, Reino Unido.
- Winter, G., 1946. *Strength of thin steel compression flanges*. Transactions of the American Society of Civil Engineers, vol. 112, p. 339-387. ASCE Press: Estados Unidos da América.
- Wierzbicki T. e Sinmao M.V., 1997. *A simplified model of Brazier effect in plastic bending of cylindrical tubes*. International Journal of Pressure Vessels and Piping, Vol. 71, n. 1, p. 19-28. Elsevier Science Ltd.: Reino Unido.

## **Bibliografia**

---

Yu, W.W., 2000. *Cold Formed Steel Design (3rd edition)*. John Wiley & Sons, Inc.: Nova Iorque, NY, Estados Unidos da América.

## Anexo A

# Rotina em MATLAB para aplicação da GBT

```
function lambda_variacaoL(b,t,teta,L_inferior,passo,L_superior,modos)

digits(100);
%Parâmetros mecânicos:
E=210000;
niu=0.3;
G=E/(2*(1+niu));

n=1;
teta=teta*pi/180; %converte theta de graus para radianos.

% Introdução dos parâmetros simbólicos:
syms y;

%Introdução das matrizes, com valores nulos.
B=zeros;
C=zeros;
D1=zeros;
D2=zeros;
X=zeros;

K=zeros;
H=zeros;
```

## Anexo A. Rotina em MATLAB para aplicação da GBT

---

%Definição das equações dos modos de deformação:

```
w=[cos(teta),-cos(teta);... % 1º modo
    cos(teta)-3*y^2*(tan(teta)*sin(teta)+cos(teta))/...
    b^2+2*y^3*(tan(teta)*sin(teta)+cos(teta))/b^3,... % 2º modo (1ª parede)
    cos(teta)-3*y^2*(tan(teta)*sin(teta)+cos(teta))/...
    b^2+2*y^3*(tan(teta)*sin(teta)+cos(teta))/b^3;...% 2º modo (2ª parede)
    0,0;... % 3º modo
    0,0;... % 4º modo
    y^2*(y-b)/((2*b/3)^2*(2*b/3-b)),...% 5º modo (1ª parede)
    -(y^2*(y-b)/((2*b/3)^2*(2*b/3-b)));...% 5º modo (2ª parede)
    y^2*(y-b)^2/((b/2)^2*(b/2-b)^2),...% 6º modo (1ª parede)
    y^2*(y-b)^2/((b/2)^2*(b/2-b)^2)]; % 6º modo (2ª parede)
    y^2*(y-b)^2/((b/2)^2*(b/2-b)^2),...% 7º modo (1ª parede)
    -(y^2*(y-b)^2/((b/2)^2*(b/2-b)^2)),...% 7º modo (2ª parede)
```

```
v=[sin(teta),-sin(teta);... % 1º modo
    sin(teta),sin(teta);... % 2º modo
    0,0;... % 3º modo
    0,0;... % 4º modo
    0,0;... % 5º modo
    0,0]; % 6º modo
```

```
u=[(b-y)*sin(teta),-(b-y)*sin(teta);... % 1º modo
    sin(teta)*(b/2-y),sin(teta)*(b/2-y);... % 2º modo
    (b-y)*sin(teta),-(b-y)*sin(teta);... % 3º modo
    sin(teta)*(b/2-y),sin(teta)*(b/2-y);... % 4º modo
    0,0;... % 5º modo
    0,0]; % 6º modo
```

```
sigma=[-(1-y/b);(1-y/b)];
```

%ciclo para os semi-comprimentos de onda:

```
c=L_inferior:passo:L_superior;
for h=1:length(c)
```

```

    if h==1
        L=L_inferior;
    else
        L=L_inferior+passo*(h-1);
    end
    %ciclo para o número de linhas (nº de modos) pedidos pelo utilizador:
    for i=1:modos
        for j=1:modos
B(i,j)=E*t^3/(12*(1-niu^2))*...
        (int(diff(diff(w(i,1),y),y)*diff(diff(w(j,1),y),y),0,b)...
        +int(diff(diff(w(i,2),y),y)*diff(diff(w(j,2),y),y),0,b));
C(i,j)=E/(1-niu^2)*...
        (int(t*(1-niu^2)*u(i,1)*u(j,1)+t^3/12*w(i,1)*w(j,1),0,b)...
        +int(t*(1-niu^2)*u(i,2)*u(j,2)+t^3/12*w(i,2)*w(j,2),0,b));
D1(i,j)=G*(int(t^3/3*diff(w(i,1),y)*diff(w(j,1),y),0,b)...
        +int(t^3/3*diff(w(i,2),y)*diff(w(j,2),y),0,b)...
        +int(t*(diff(u(i,1),y)+v(i,1))*(diff(u(j,1),y)+v(j,1)),0,b)...
        +int(t*(diff(u(i,2),y)+v(i,2))*(diff(u(j,2),y)+v(j,2)),0,b));
D2(i,j)=niu*E*t^3/(12*(1-niu^2))*(int(diff(diff(w(i,1),y),y)*w(j,1),0,b)...
        +int(diff(diff(w(i,2),y),y)*w(j,2),0,b));
X(i,j)=t*(int(sigma(1)*(v(i,1)*v(j,1)+w(i,1)*w(j,1)),0,b)...
        +int(sigma(2)*(v(i,2)*v(j,2)+w(i,2)*w(j,2)),0,b));
        end
    end

    D=D1-D2-D2';

    K=(n*pi/L)^4*C+(n*pi/L)^2*D+B;
    H=(n*pi/L)^2*X;

    %vector e valor próprios:
    [vp,LAMBDA]=eig(K,H);
    %devolve a carga crítica mínima e a sua posição:
    tmp=LAMBDA;tmp(tmp==0)=NaN;vector_minimos=min(tmp);
    [cr,posicao]=min(abs(vector_minimos));
    vec_cr(h,:)=cr; %vector que guarda os parâmetros críticos para cada L.
    vplm=vp(:,posicao); %devolve a coluna do vector próprio da carga crítica.

```

## Anexo A. Rotina em MATLAB para aplicação da GBT

---

```
prc=abs(vp1m)/sum(abs(vp1m))*100; % percentagem de participação dos modos.

percentagem(:,h)=prc'; %guarda os vectores percentagem numa matriz.
    comp(h,:)=L;          %guarda os semi-comprimentos L num vector.
end

[p_cr,pos]=min(vec_cr); %devolve a carga crítica e a sua posição no vector.

%OUTPUT:
disp(['Parâmetro crítico no presente intervalo = ' num2str(p_cr)...
    ' MPa, ocorre para L = ' num2str(comp(pos)) 'mm']);
%gráfico L-parâmetro crítico de carga:
warning('off','MATLAB:legend:IgnoringExtraEntries');
figural=figure(1);
plot(comp,vec_cr,...
    'LineWidth',2,...
    'Marker','o',...
    'MarkerSize',3,...
    'MarkerEdgeColor',[.2 .2 .2],...
    'MarkerFaceColor',[.7 .7 .7]);
titulo=title(['Evolução do parâmetro crítico de carga para teta = '...
    num2str(teta*180/pi) ' e b/t = ' num2str(b/t)]);
eixox=xlabel('Semi-comprimentos de onda (mm)');
eixoy=ylabel('\sigma (MPa)');
legend('1º modo de instabilidade',...
    'location','NorthEast')
axis([comp(1) comp(end) 0 max(vec_cr)+1000]);
set(gca,'Xscale','log');
set([titulo,eixox,eixoy,legend],...
    'FontName','Times');
set([eixox,eixoy,legend],...
    'FontSize',11);
set(titulo,...
    'FontSize',11,...
    'FontWeight','bold');
set(figural,'Position',[200 100 750 400]);
```

```
%gráfico L-participação acumulada:
figura2=figure(2);
area(comp,percentagem');
colormap summer
titulo=title(['Participação dos modos de deformação para teta = '...
            num2str(teta*180/pi) ' e b/t = ' num2str(b/t)]);
eixox2 = xlabel('Semi-comprimentos de onda (mm)');
eixoy2 = ylabel('Percentagem acumulada (%)');
legend('1º modo de deformação','2º modo de deformação',...
       '3º modo de deformação','4º modo de deformação',...
       '5º modo de deformação','6º modo de deformação',...
       '7º modo de deformação','8º modo de deformação',...
       '9º modo de deformação','location','SouthEast');
axis([comp(1) comp(end) 0 109]);
set(gca,'Xscale','log');
set([titulo,eixox2,eixoy2,legend],...
    'FontName','Times');
set([eixox2,eixoy2,legend],...
    'FontSize',11);
set(titulo,...
    'FontSize',11,...
    'FontWeight','bold');
set(figura2,'Position',[200 100 750 400]);
end
```



## **Anexo B**

## **Tabelas**

Tabela B.1: Momentos flectores resistentes calculados de acordo com o EC3 e registados no ADINA, para secções de aço S275, próximas da fronteira entre as classes 2 e 3.

$\theta$	b/t	L (m)	Classe da Secção	I ( $m^4$ )	A ( $m^2$ )	$W_{pl}$ ( $m^3$ )	$W_{el}$ ( $m^3$ )	$M_{pl}$ (kNm)	$M_{el}$ (kNm)	Imperfeição (m)	$M_R$ (kNm) ADINA (sem imp.)
8°	38	1.5	2	1.097E-06	0.0042	1.172E-04	3.941E-05	16.11	10.84	9.903E-04	11.19
10°	38	1.5	2	1.702E-06	0.0042	1.462E-04	4.901E-05	20.11	13.48	9.848E-04	14.37
12°	38	1.5	2	2.436E-06	0.0042	1.751E-04	5.858E-05	24.07	16.11	9.781E-04	17.15
14°	38	1.5	2	3.295E-06	0.0042	2.037E-04	6.810E-05	28.01	18.73	9.703E-04	19.57
16°	38	1.5	2	4.274E-06	0.0042	2.321E-04	7.753E-05	31.92	21.32	9.613E-04	21.62
18°	38	1.5	2	5.370E-06	0.0042	2.602E-04	8.688E-05	35.78	23.89	9.511E-04	23.61
20°	38	1.5	2	6.576E-06	0.0042	2.880E-04	9.613E-05	39.60	26.44	9.397E-04	25.49

$\theta$	b/t	$\sigma_{cr}^{anti}$	$M_{cr}^{anti}$	$\bar{\lambda}_{el}^{anti}$	$\bar{\lambda}_{pl}^{anti}$	$\sigma_{cr}^{sim}$	$M_{cr}^{sim}$	$\bar{\lambda}_{el}^{sim}$	$\bar{\lambda}_{pl}^{sim}$	$\chi_{el}^{ADINA}$	$\chi_{pl}^{ADINA}$	$\chi_{el}^{EC3}$	$\chi_{pl}^{EC3}$
8°	38	1145.83	134.29	0.284	0.346	1263.16	148.04	0.271	0.330	1.033	0.695	1.487	1
10°	38	1149.66	168.11	0.283	0.346	1399.11	204.59	0.257	0.313	1.066	0.715	1.492	1
12°	38	1151.72	201.65	0.283	0.346	1484.04	259.83	0.249	0.304	1.065	0.712	1.494	1
14°	38	1152.95	234.88	0.282	0.345	1539.27	313.59	0.244	0.299	1.045	0.699	1.496	1
16°	38	1153.79	267.81	0.282	0.345	1574.31	365.42	0.242	0.296	1.014	0.677	1.497	1
18°	38	1154.33	300.39	0.282	0.345	1598.06	415.85	0.240	0.293	0.988	0.660	1.498	1
20°	38	1154.75	332.59	0.282	0.345	1614.93	465.13	0.238	0.292	0.964	0.644	1.498	1

Tabela B.2: Momentos flectores resistentes calculados de acordo com o EC3 com os registados no ADINA, para secções de aço S275, próximas da fronteira entre as classes 3 e 4.

$\theta$	b/t	L (m)	Classe da Secção	I ( $m^4$ )	A ( $m^2$ )	$W_{pl}$ ( $m^3$ )	$W_{el}$ ( $m^3$ )	$M_{pl}$ (kNm)	$M_{el}$ (kNm)	Imperfeição (m)	$M_R$ (kNm) ADINA (sem imp.)
8°	55	1.5	3	7.544E-07	0.0029	8.097E-05	2.710E-05	11.13	7.45	9.903E-04	6.74
10°	55	1.5	3	1.173E-06	0.0029	1.010E-04	3.377E-05	13.89	9.29	9.848E-04	9.30
12°	55	1.5	3	1.680E-06	0.0029	1.210E-04	4.040E-05	16.63	11.11	9.781E-04	11.83
14°	55	1.5	3	2.273E-06	0.0029	1.408E-04	4.698E-05	19.35	12.92	9.703E-04	14.34
16°	55	1.5	3	2.950E-06	0.0029	1.604E-04	5.351E-05	22.05	14.72	9.613E-04	16.79
18°	55	1.5	3	3.707E-06	0.0029	1.798E-04	5.998E-05	24.72	16.49	9.511E-04	19.24
20°	55	1.5	3	4.540E-06	0.0029	1.990E-04	6.637E-05	27.36	18.25	9.397E-04	21.58

$\theta$	b/t	$\sigma_{cr}^{anti}$	$M_{cr}^{anti}$	$\bar{\lambda}_{el}^{anti}$	$\bar{\lambda}_{pl}^{anti}$	$\sigma_{cr}^{sim}$	$M_{cr}^{sim}$	$\bar{\lambda}_{el}^{sim}$	$\bar{\lambda}_{pl}^{sim}$	$\chi_{el}^{ADINA}$	$\chi_{pl}^{ADINA}$	$\chi_{el}^{EC3}$	$\chi_{pl}^{EC3}$
8	55	549.59	14.90	0.707	0.865	703.32	19.06	0.625	0.764	0.751	0.503	1	0.669
10	55	550.56	18.59	0.707	0.864	738.28	24.93	0.610	0.746	0.743	0.496	1	0.668
12	55	551.05	22.26	0.706	0.864	758.13	30.63	0.602	0.737	0.725	0.484	1	0.668
14	55	551.32	25.90	0.706	0.864	770.63	36.20	0.597	0.731	0.703	0.469	1	0.668
16	55	551.53	29.51	0.706	0.864	778.40	41.65	0.594	0.728	0.687	0.459	1	0.667
18	55	551.65	33.09	0.706	0.864	783.90	47.02	0.592	0.725	0.675	0.451	1	0.667
20	55	551.77	36.62	0.706	0.864	787.73	52.28	0.591	0.723	0.668	0.446	1	0.667

Tabela B.3: Momentos flectores resistentes calculados de acordo com o EC3 com os registados no ADINA, para as secções de aço S275 com  $b/t = 45$ .

$\theta$	$b/t$	$L$ (m)	Classe da Secção	$I$ ( $m^4$ )	$A$ ( $m^2$ )	$W_{pl}$ ( $m^3$ )	$W_{el}$ ( $m^3$ )	$M_{pl}$ (kNm)	$M_{el}$ (kNm)	Imperfeição (m)	$M_R$ (kNm)	ADINA
8°	45	1.5	3	9.240E-07	0.0036	9.897E-05	3.320E-05	13.61	9.13	9.903E-04	8.36	
10°	45	1.5	3	1.435E-06	0.0036	1.235E-04	4.132E-05	16.98	11.36	9.848E-04	10.63	
12°	45	1.5	3	2.055E-06	0.0036	1.478E-04	4.942E-05	20.33	13.59	9.781E-04	12.37	
14°	45	1.5	3	2.780E-06	0.0036	1.720E-04	5.746E-05	23.65	15.80	9.703E-04	14.00	
16°	45	1.5	3	3.607E-06	0.0036	1.960E-04	6.543E-05	26.95	17.99	9.613E-04	14.84	
18°	45	1.5	3	4.532E-06	0.0036	2.197E-04	7.333E-05	30.21	20.17	9.511E-04	16.87	
20°	45	1.5	3	5.551E-06	0.0036	2.432E-04	8.115E-05	33.44	22.32	9.397E-04	18.22	

$\theta$	$b/t$	$\sigma_{cr}^{anti}$	$M_{cr}^{anti}$	$\bar{\lambda}_{el}^{anti}$	$\bar{\lambda}_{pl}^{anti}$	$\sigma_{cr}^{sim}$	$M_{cr}^{sim}$	$\bar{\lambda}_{el}^{sim}$	$\bar{\lambda}_{pl}^{sim}$	$\chi_{el}^{ADINA}$	$\chi_{pl}^{ADINA}$	$\chi_{el}^{EC3}$	$\chi_{pl}^{EC3}$
8°	45	819.18	27.19	0.579	0.707	975.96	32.40	0.531	0.648	0.916	0.615	1	0.671
10°	45	821.24	33.94	0.579	0.707	1053.48	43.53	0.511	0.625	0.935	0.626	1	0.669
12°	45	822.31	40.64	0.578	0.707	1099.26	54.32	0.500	0.612	0.910	0.608	1	0.668
14°	45	822.93	47.28	0.578	0.707	1127.32	64.77	0.494	0.604	0.886	0.592	1	0.668
16°	45	823.37	53.88	0.578	0.707	1144.63	74.90	0.490	0.600	0.825	0.551	1	0.668
18°	45	823.65	60.40	0.578	0.707	1156.82	84.83	0.488	0.597	0.837	0.558	1	0.667
20°	45	823.88	66.86	0.578	0.707	1165.40	94.57	0.486	0.595	0.817	0.545	1	0.667

Tabela B.4: Momentos flectores resistentes calculados de acordo com o EC3 com os registados no ADINA, para as secções de aço S460 com  $b/t = 38$ .

$\theta$	$b/t$	L (m)	Classe da Secção	$I (m^4)$	$A (m^2)$	$W_{pl} (m^3)$	$W_{el} (m^3)$	$M_{pl} (kNm)$	$M_{el} (kNm)$	Imperfeição (m)	$M_R (kNm)$
8°	38	1.5	3	1.097E-06	0.0042	1.172E-04	3.941E-05	26.96	18.13	9.903E-04	14.41
10°	38	1.5	3	1.702E-06	0.0042	1.462E-04	4.901E-05	33.63	22.55	9.848E-04	19.33
12°	38	1.5	3	2.436E-06	0.0042	1.751E-04	5.858E-05	40.27	26.95	9.781E-04	23.94
14°	38	1.5	3	3.295E-06	0.0042	2.037E-04	6.810E-05	46.86	31.32	9.703E-04	27.81
16°	38	1.5	3	4.274E-06	0.0042	2.321E-04	7.753E-05	53.39	35.67	9.613E-04	31.07
18°	38	1.5	3	5.370E-06	0.0042	2.602E-04	8.688E-05	59.85	39.97	9.511E-04	34.20
20°	38	1.5	3	6.576E-06	0.0042	2.880E-04	9.613E-05	66.24	44.22	9.397E-04	36.96

$\theta$	$b/t$	$\sigma_{cr}^{anti}$	$M_{cr}^{anti}$	$\bar{\lambda}_{el}^{anti}$	$\bar{\lambda}_{pl}^{anti}$	$\sigma_{cr}^{sim}$	$M_{cr}^{sim}$	$\bar{\lambda}_{el}^{sim}$	$\bar{\lambda}_{pl}^{sim}$	$\chi_{el}^{ADINA}$	$\chi_{pl}^{ADINA}$	$\chi_{el}^{EC3}$	$\chi_{pl}^{EC3}$
8°	38	1145.83	45.16	0.634	0.773	1263.16	49.78	0.603	0.795	0.795	0.535	1	0.673
10°	38	1149.66	56.35	0.633	0.773	1399.11	68.58	0.573	0.857	0.857	0.575	1	0.670
12°	38	1151.72	67.47	0.632	0.773	1484.04	86.94	0.557	0.888	0.888	0.594	1	0.669
14°	38	1152.95	78.51	0.632	0.773	1539.27	104.82	0.547	0.888	0.888	0.594	1	0.669
16°	38	1153.79	89.46	0.631	0.773	1574.31	122.06	0.541	0.871	0.871	0.582	1	0.668
18°	38	1154.33	100.29	0.631	0.773	1598.06	138.85	0.537	0.856	0.856	0.571	1	0.668
20°	38	1154.75	111.01	0.631	0.772	1614.93	155.25	0.534	0.836	0.836	0.558	1	0.668

Tabela B.5: Momentos flectores resistentes calculados de acordo com o EC3 e registados no ADINA, para uma secção de aço S460 com  $b/t=55$

$\theta$	b/t	Classe da Secção	I ( $m^4$ )	A ( $m^2$ )	$W_{pl}$ ( $m^3$ )	$W_{el}$ ( $m^3$ )	$M_{pl}$ (kNm)	$M_{el}$ (kNm)	Imperfeição (m)	$\lambda_p$	$\rho$	$A_{eff} m^2$	$y_G$ (m)	$I^{final}$ ( $m^4$ )
8°	55	4	7.544E-07	0.0029	8.097E-05	2.710E-05	18.62	12.47	9.903E-04	0.973	0.853	0.0027	0.0267	7.058E-07
10°	55	4	1.173E-06	0.0029	1.010E-04	3.377E-05	23.24	15.53	9.848E-04	0.973	0.853	0.0027	0.0334	1.097E-06
12°	55	4	1.680E-06	0.0029	1.210E-04	4.040E-05	27.82	18.58	9.781E-04	0.973	0.853	0.0027	0.0399	1.572E-06
14°	55	4	2.273E-06	0.0029	1.408E-04	4.698E-05	32.37	21.61	9.703E-04	0.973	0.853	0.0027	0.0465	2.127E-06
16°	55	4	2.950E-06	0.0029	1.604E-04	5.351E-05	36.89	24.61	9.613E-04	0.973	0.853	0.0027	0.0529	2.760E-06
18°	55	4	3.707E-06	0.0029	1.798E-04	5.998E-05	41.35	27.59	9.511E-04	0.973	0.853	0.0027	0.0594	3.468E-06
20°	55	4	4.540E-06	0.0029	1.990E-04	6.637E-05	45.77	30.53	9.397E-04	0.973	0.853	0.0027	0.0657	4.248E-06

$\theta$	b/t	$W_{el}^{classe}$ ( $m^3$ )	$M_R$ EC3 (kNm)	$M_R$ ADINA (kNm)	$\sigma_{cr}^{anti}$	$M_{cr}^{anti}$	$\bar{\lambda}_{el}^{anti}$	$\bar{\lambda}_{pl}^{anti}$	$\sigma_{cr}^{sim}$	$M_{cr}^{sim}$	$\bar{\lambda}_{el}^{sim}$	$\bar{\lambda}_{pl}^{sim}$	$\chi_{el}^{ADINA}$	$\chi_{pl}^{ADINA}$	$\chi_{el}^{EC3}$	$\chi_{pl}^{EC3}$
8°	55	2.439E-05	11.22	6.64	549.59	14.90	0.915	1.118	703.32	19.06	0.809	0.988	0.533	0.357	0.900	0.603
10°	55	3.039E-05	13.98	8.75	550.56	18.59	0.914	1.118	738.28	24.93	0.789	0.965	0.563	0.377	0.900	0.602
12°	55	3.636E-05	16.72	10.52	551.05	22.26	0.914	1.118	758.13	30.63	0.779	0.953	0.566	0.378	0.900	0.601
14°	55	4.229E-05	19.45	12.07	551.32	25.90	0.913	1.118	770.63	36.20	0.773	0.946	0.558	0.373	0.900	0.601
16°	55	4.816E-05	22.15	13.43	551.53	29.51	0.913	1.118	778.40	41.65	0.769	0.941	0.545	0.364	0.900	0.601
18°	55	5.398E-05	24.83	14.98	551.65	33.09	0.913	1.118	783.90	47.02	0.766	0.938	0.543	0.362	0.900	0.601
20°	55	5.974E-05	27.48	16.56	551.77	36.62	0.913	1.118	787.73	52.28	0.764	0.936	0.543	0.362	0.900	0.600

Tabela B.6: Momentos flectores resistentes calculados de acordo com o EC3 e registados no ADINA, para uma secção de aço S460 com  $b/t=70$

$\theta$	b/t	Classe da Secção	I ( $m^4$ )	A ( $m^2$ )	W <sub>pl</sub> ( $m^3$ )	W <sub>el</sub> ( $m^3$ )	M <sub>pl</sub> (kNm)	M <sub>el</sub> (kNm)	Imperfeição (m)	$\lambda_p$	$\rho$	A <sub>eff</sub> m <sup>2</sup>	$\gamma_G$ (m)	I <sup>final</sup> ( $m^4$ )
8°	70	4	5.918E-07	0.0023	6.362E-05	2.126E-05	14.63	9.78	9.903E-04	1.238	0.700	0.0019	0.0254	4.977E-07
10°	70	4	9.205E-07	0.0023	7.938E-05	2.650E-05	18.26	12.19	9.848E-04	1.238	0.700	0.0019	0.0317	7.740E-07
12°	70	4	1.319E-06	0.0023	9.505E-05	3.172E-05	21.86	14.59	9.781E-04	1.238	0.700	0.0019	0.0379	1.109E-06
14°	70	4	1.785E-06	0.0023	1.106E-04	3.689E-05	25.44	16.97	9.703E-04	1.238	0.700	0.0019	0.0441	1.501E-06
16°	70	4	2.317E-06	0.0023	1.260E-04	4.203E-05	28.98	19.33	9.613E-04	1.238	0.700	0.0019	0.0503	1.948E-06
18°	70	4	2.912E-06	0.0023	1.413E-04	4.711E-05	32.49	21.67	9.511E-04	1.238	0.700	0.0019	0.0563	2.448E-06
20°	70	4	3.566E-06	0.0023	1.564E-04	5.214E-05	35.96	23.98	9.397E-04	1.238	0.700	0.0019	0.0624	2.999E-06

$\theta$	b/t	W <sub>el</sub> <sup>classe 4</sup> ( $m^3$ )	M <sub>R</sub> EC3 (kNm)	M <sub>R</sub> ADINA (kNm)	$\sigma_{cr}^{anti}$	M <sub>cr</sub> <sup>anti</sup>	$\bar{\lambda}_{el}^{anti}$	$\bar{\lambda}_{pl}^{anti}$	$\sigma_{cr}^{anti}$	M <sub>cr</sub> <sup>anti</sup>	$\bar{\lambda}_{el}^{anti}$	$\bar{\lambda}_{pl}^{anti}$	$\chi_{el}^{ADINA}$	$\chi_{pl}^{ADINA}$	$\chi_{el}^{EC3}$	$\chi_{pl}^{EC3}$
8°	70	1.643E-05	7.56	3.73	339.90	7.23	1.163	1.423	465.18	9.89	0.994	1.216	0.382	0.255	0.773	0.516
10°	70	2.048E-05	9.42	4.94	340.29	9.02	1.163	1.423	470.81	12.48	0.988	1.210	0.405	0.270	0.773	0.516
12°	70	2.451E-05	11.27	5.93	340.47	10.80	1.162	1.423	478.53	15.18	0.980	1.200	0.406	0.271	0.773	0.516
14°	70	2.851E-05	13.11	6.91	340.57	12.57	1.162	1.423	483.43	17.84	0.975	1.194	0.407	0.272	0.773	0.516
16°	70	3.247E-05	14.94	7.88	340.65	14.32	1.162	1.423	486.36	20.44	0.973	1.191	0.408	0.272	0.773	0.515
18°	70	3.640E-05	16.74	8.90	340.70	16.05	1.162	1.423	488.48	23.01	0.970	1.188	0.411	0.274	0.773	0.515
20°	70	4.029E-05	18.53	10.07	340.75	17.77	1.162	1.423	489.92	25.54	0.969	1.187	0.420	0.280	0.773	0.515