



Iúri Cristiano Hilário Simões

Licenciado em Ciências da Engenharia e Gestão Industrial

**Novas Abordagens do Controlo Estatístico do
Processo: Carta $In(S^2)$, Capacidade do Processo e
Cartas Conjuntas**

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em
Engenharia e Gestão Industrial

Orientador: Professor Doutor José Requeijo,
Professor Auxiliar, Faculdade de Ciências e Tecnologia da
Universidade Nova de Lisboa



Novembro 2020

Novas Abordagens do Controlo Estatístico do Processo: Carta $\ln(S^2)$, Capacidade do Processo e Cartas Conjuntas

Copyright © Iúri Cristiano Hilário Simões, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa.

A Faculdade de Ciências e Tecnologia e a Universidade Nova de Lisboa têm o direito, perpétuo e sem limites geográficos, de arquivar e publicar esta dissertação através de exemplares impressos reproduzidos em papel ou de forma digital, ou por qualquer outro meio conhecido ou que venha a ser inventado, e de a divulgar através de repositórios científicos e de admitir a sua cópia e distribuição com objetivos educacionais ou de investigação, não comerciais, desde que seja dado crédito ao autor e editor.

Para ti, avó Maria,

AGRADECIMENTOS

A presente dissertação finaliza um capítulo de cinco anos de muito trabalho, dedicação, dificuldades e desafios que me fizeram evoluir enquanto pessoa, estudante e profissional. Foi caminho que percorri com a ajuda e apoio de pessoas muito especiais, às quais quero deixar o meu sincero agradecimento e sentido de orgulho por me terem apoiado incondicionalmente!

Em primeiro lugar, quero agradecer à Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa, por ter garantido que todos os alunos que tiveram, têm e terão a oportunidade de estudar nesta instituição, por possuir as melhores ferramentas, quer ao nível de infraestruturas, quer ao nível de recursos humanos, mas, em especial, ao nível de acolhimento e bem-estar, para desenvolverem as suas capacidades académicas e se superarem todos os dias!

Ao Professor Doutor José Gomes Requeijo, pelo sempre exigente, mas extremamente inspirador professor que é, por todo o apoio nesta dissertação e por todos os pequenos grandes ensinamentos que me foi passando, sobre a engenharia e sobre a vida. Por ter sempre acreditado no meu potencial, mesmo quando eu mesmo duvidava! Sem dúvida um professor que levo no coração, com muito carinho!

Ao professor doutor Izunildo Cabral por toda a ajuda na elaboração desta dissertação e por ser um dos responsáveis pelo meu gosto especial pela área da Engenharia da Qualidade. Um professor extraordinário, com uma capacidade de passar a mensagem como poucos! Um agradecimento especial à professora doutora Helena Alvelos, foi uma mais valia no desenvolvimento deste trabalho!

Uma palavra de consideração especial aos meus colegas e amigos Gonçalo Alvim, Jessica Rodrigues, Pedro Rodrigues, João André, Camila Freitas e Catarina Ladeira. Todos vocês foram fundamentais para o sucesso desta jornada! Por todas as conversas, horas de almoço, noitadas a fazer trabalhos e horas de estudo até ao último minuto! Por todos os bons momentos, ficarão no meu coração para sempre!

À Inês Soares, por partilhar a sua alegria de viver comigo, por toda a paciência, por todo o apoio e por toda a boa disposição! És maravilhosa e a inspiração para dar sempre o melhor de mim, em tudo o que faço!

À minha família! Aos meus pais, por todos os sacrifícios que fizeram por mim e por nunca duvidarem das minhas capacidades. Por sempre acreditarem em mim e no meu futuro! Por todos os bons momentos em que me enalteciram e pelos momentos menos bons, em que sempre me consolaram! São um orgulho e uma inspiração!

A todos, Obrigado, do fundo do coração!

RESUMO

A evolução do mercado, da sociedade e da indústria significam que, agora, mais que nunca, as empresas devem usar todas as ferramentas ao seu dispor para se manterem competitivas no mundo. Desta forma, para garantir a competitividade, as organizações devem realizar o controlo da qualidade dos seus produtos e processos. Ao longo do tempo o controlo da qualidade foi evoluindo, surgindo no século XX pela mão de Shewhart o Controlo Estatístico do Processo (*SPC*), que visa o controlo de características da qualidade, monitorizando o processo e garantindo produção dentro das especificações técnicas estabelecidas.

De forma a implementar as cartas tradicionais de Shewart, é necessário garantir, entre outros pressupostos, a normalidade dos dados. No controlo da dispersão do processo, esse pressuposto é violado, o que pode enviesar os resultados e as conclusões a retirar da análise dos resultados. Nesse sentido, esta dissertação tem como objetivo verificar a não-Normalidade das cartas de controlo da dispersão tradicionais (R e S), bem como realizar a determinação e validação dos parâmetros da carta de controlo $\ln(S^2)$, sugerida por Pacheco (2019).

O estudo da capacidade do processo é realizado no final da Fase 1 do *SPC* de forma a garantir que o processo tem capacidade de produzir segundo especificação pré-definida de forma consistente. Posteriormente, durante a Fase 2 do *SPC*, o estudo da capacidade do processo não tem uma metodologia bem definida, sendo que a periodicidade da realização deste estudo depende do responsável pelo controlo estatístico. Nesse sentido, se a periodicidade do estudo de capacidade do processo for demasiado longa, pode ocorrer que o processo deixe de ter capacidade e, como consequência, o processo deixa de conseguir produzir, de forma consistente, dentro dos requisitos impostos, incorrendo assim em prejuízos desnecessários para a organização. Nesta dissertação são apresentadas duas metodologias de estudo de capacidade do processo em tempo real, durante a Fase 2 do *SPC*. A primeira metodologia tem como base uma modificação dos índices tradicionais, de forma a criar os índices I_U e I_L , baseados nos índices $(C_{pk})_S$ e $(C_{pk})_I$. A outra metodologia desenvolvida tem como base a criação de uma carta *PCIRUN*, na qual são calculados os intervalos de confiança dos índices de capacidade tradicionais C_p e C_{pk} que são usados para definir se o processo é capaz.

O último assunto trabalhado na presente dissertação corresponde à elaboração de cartas de controlo conjuntas, que possam, em simultâneo, realizar o controlo estatístico dos parâmetros de localização e dispersão do processo, vindo esta metodologia contribuir para o aumento de ferramentas disponíveis para o controlo estatístico do processo, bem como facilitar a implementação do *SPC* tradicional nas organizações, uma vez que, através desta metodologia, não são necessárias duas cartas de controlo, mas apenas uma, que irá controlar estatisticamente ambos os parâmetros do processo.

Palavras-chave: Controlo Estatístico do Processo (*SPC*), Cartas de Controlo Tradicionais, Estudo da Capacidade do Processo em Tempo Real, Cartas de Controlo Conjuntas, Simulação, $\ln(S^2)$.

ABSTRACT

The evolution of the market, society and industry mean that now, more than ever, companies must use all the tools at their disposal to remain competitive in the industrial world. Thus, to guarantee competitiveness, organizations must carry out quality control. Over time, quality control has evolved, emerging in the 20th century by W. Shewhart, the Statistical Process Control (SPC), which aims to control quality characteristics, monitoring the process and ensuring that the product is being produced within the established specifications.

To implement the traditional Shewart charts, it is necessary to ensure, among other assumptions, that the data follows a Normal distribution. In the control of the dispersion of the process, this assumption is violated, which can skew the results and the conclusions to be drawn from the analysis of the results. In this sense, this dissertation aims to verify the non-normality of the traditional dispersion control charts (R and S), as well as to perform the determination and validation of the parameters of the new $ln(S^2)$ control chart, suggested by Pacheco (2019).

Regarding the study of the process capacity, this is carried out at the end of Phase 1 of SPC to ensure that the process has the capacity to produce according to a pre-defined specification in a consistent manner. Subsequently, during Phase 2 of the statistical control, the study of the process capacity does not have a well-defined methodology, and the frequency of carrying out this study depends on the engineer responsible for the statistical control. In this sense, if the periodicity of the process capacity study is too long, it may happen that the process has no capacity and, as a consequence, the process is unable to produce consistently, within the imposed requirements, thus incurring losses unnecessary for the organization. In order to solve this problem, two methodologies for studying the capacity of the process in real time during Phase 2 of statistical control are proposed in this thesis. The first methodology is based on the principles used in the study of the process capacity in the Short Run charts, having carried out a modification of the traditional indices, in order to create the I_U and I_L , based on $(C_{pk})_S$ and $(C_{pk})_I$. The other methodology developed is based on the creation of a *PCIRUN* chart, in which the confidence intervals of the traditional capacity indexes C_p and C_{pk} are calculated. Depending on the location of the limits of the confidence intervals of these limits, it is possible to study the capacity of the process, being that, if the process has capacity, it is possible to study the performance of the process (if the process is producing in a statistically centered way in relation to the requirements).

The last subject worked on in this thesis corresponds to the elaboration of joint control charts, which can, simultaneously, carry out the statistical control of the process location and dispersion parameters. This methodology contributes to the increase of tools available for the statistical control of the process, as well as facilitates the implementation of traditional SPC in organizations, since, through this methodology, it's not necessary to create two control charts, but only one, which will statistically control both parameters of the process.

Keywords: Statistical Process Control (SPC), Traditional Control Charts, Real Time Process Capacity Study, Joint Control Charts, Simulation, $ln(S^2)$.

Índice

1. INTRODUÇÃO	1
1.1 MOTIVAÇÃO	1
1.2 OBJETIVOS	2
1.3 METODOLOGIA DE INVESTIGAÇÃO	2
1.4 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO	4
2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	5
2.1 EVOLUÇÃO DO CONCEITO DE QUALIDADE	5
2.2 CONTROLO ESTATÍSTICO UNIVARIADO DO PROCESSO – ABORDAGEM TRADICIONAL	9
2.2.1 PRINCÍPIOS DAS CARTAS DE CONTROLO	10
2.2.2 DETEÇÃO DE CAUSAS ESPECIAIS DE VARIAÇÃO	11
2.2.3 RECOLHA DOS DADOS	12
2.2.4 CONDIÇÕES DE APLICABILIDADE	14
2.2.4.1 ALEATORIEDADE	14
2.2.4.2 INDEPENDÊNCIA	14
2.2.4.3 NORMALIDADE	14
2.2.4.3.1 TESTE DE KOLMOGOROV-SMIRNOV	15
2.2.5 TIPOS DE CARTAS DE CONTROLO	15
2.2.6 CARTAS DE CONTROLO DE VARIÁVEIS	16
2.2.7 FASE 1 – LIMITES DE CONTROLO E LINHA CENTRAL	16
2.2.7.1 CARTAS DE CONTROLO DA MÉDIA E DA AMPLITUDE	16
2.2.7.2 CARTAS DE CONTROLO DA MÉDIA E DO DESVIO PADRÃO	17
2.2.7.3 CARTAS DE CONTROLO DA MÉDIA E DA VARIÂNCIA	18
2.2.7.4 CARTAS DE CONTROLO DA MEDIANA E DA AMPLITUDE	18
2.2.7.5 CARTAS DE CONTROLO DE OBSERVAÇÕES INDIVIDUAIS E AMPLITUDES MÓVEIS	19
2.2.8 FASE 1 – ESTIMAÇÃO DOS PARÂMETROS DO PROCESSO	20
2.2.9 FASE 2 – PARÂMETROS DO PROCESSO CONHECIDOS	20
2.2.10 CAPACIDADE UNIVARIADA DO PROCESSO	21
2.2.11 ÍNDICES DE CAPACIDADE DO PROCESSO	22
2.3 CONTROLO ESTATÍSTICO UNIVARIADO DO PROCESSO – PEQUENAS PRODUÇÕES	24
2.3.1 TIPOS DE CARTAS DE CONTROLO DE VARIÁVEIS PARA SHORT RUNS	25
2.3.2 CARTAS DE CONTROLO Z E W	25
2.3.2.1 CARTAS DA MÉDIA E AMPLITUDE	26
2.3.2.2 CARTAS DA MÉDIA E DESVIO PADRÃO	27
2.3.2.3 CARTAS DE OBSERVAÇÕES INDIVIDUAIS E AMPLITUDE MÓVEL	28
2.3.3 CAPACIDADE DO PROCESSO (NAS CARTAS Z)	29

2.3.4	CARTAS DE CONTROLO Q.....	30
2.3.4.1	CARTAS Q PARA A MÉDIA E VARIÂNCIA	31
2.3.4.2	CARTAS Q PARA OBSERVAÇÕES INDIVIDUAIS E AMPLITUDES MÓVEIS.....	31
2.3.5	CAPACIDADE DO PROCESSO (NAS CARTAS Q)	31
2.4	CONTROLO ESTATÍSTICO MULTIVARIADO DO PROCESSO	32
2.4.1	CARTAS DE CONTROLO MULTIVARIADAS TRADICIONAIS	33
2.4.2	TIPOS DE CARTAS DE CONTROLO	34
2.4.2.1	AMOSTRAS.....	34
2.4.2.2	OBSERVAÇÕES INDIVIDUAIS	36
2.4.3	INTERPRETAÇÃO DE CAUSAS ESPECIAIS DE VARIAÇÃO	38
2.4.4	CAPACIDADE MULTIVARIADA DO PROCESSO	39
2.4.4.1	ÍNDICES DE CAPACIDADE PARA PROCESSOS COM ESPECIFICAÇÕES TÉCNICAS BILATERAIS 39	
2.4.4.2	ÍNDICES DE CAPACIDADE PARA PROCESSOS COM ESPECIFICAÇÕES TÉCNICAS UNILATERAIS 41	
2.4.4.3	ÍNDICES DE CAPACIDADE PARA PROCESSOS COM ESPECIFICAÇÕES TÉCNICAS BILATERIAS E UNILATERIAS.....	41
2.5	A ATUALIDADE DO CONTROLO ESTATÍSTICO DO PROCESSO	44
3.	VALIDAÇÃO DOS PARÂMETROS DA CARTA $LN(S^2)$	51
3.1	CARTAS DE CONTROLO DA DISPERSÃO	51
3.1.1	Carta R	51
3.1.2	Carta S	53
3.2	CARTAS DE CONTROLO \bar{X} E $LN(S^2)$	55
3.2.1	CARTA $LN(S^2)$ - FASE 1.....	55
3.2.2	CARTA $LN(S^2)$ - FASE 2.....	56
3.2.3	CARTA \bar{X} - FASE 1.....	56
3.2.4	CARTA \bar{X} - FASE 2.....	57
3.3	SIMULAÇÕES MATLAB®	58
3.4	CONSTANTES	60
3.5	ESTUDO COMPARATIVO	61
3.6	EXEMPLO PRÁTICO DE APLICAÇÃO	62
4.	CAPACIDADE DO PROCESSO EM TEMPO REAL.....	67
4.1	CAPACIDADE DO PROCESSO EM TEMPO REAL – ABORDAGEM 1.....	67
4.1.1	DESENVOLVIMENTO DOS ÍNDICES DE CAPACIDADE DO PROCESSO.....	68
4.1.2	EXEMPLO DE APLICAÇÃO.....	71
4.2	CAPACIDADE DO PROCESSO EM TEMPO REAL – ABORDAGEM 2.....	74

4.2.1	DESENVOLVIMENTO DA METODOLOGIA DE ESTUDO DA CAPACIDADE DO PROCESSO ATRAVÉS DE INTERVALOS DE CONFIANÇA DOS ÍNDICES DE CAPACIDADE	75
4.2.1.1	CLASSIFICAÇÃO DE DESEMPENHO DO GRÁFICO PCIRUN	76
4.2.2	EXEMPLOS DE APLICAÇÃO	77
5.	CARTAS DE CONTROLO CONJUNTAS	81
5.1	CARTA $CX/\ln(S^2)$	81
5.1.1	Fase 1.....	82
5.1.2	Fase 2.....	84
5.2	EXEMPLO DE APLICAÇÃO DE CARTAS CONJUNTAS.....	84
5.2.1	Fase 1.....	85
5.2.2	Fase 2.....	87
6.	CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	89
6.1	CONCLUSÕES E SUGESTÕES – VALIDAÇÃO DOS PARÂMETROS DA CARTA $LN(S^2)$	89
6.2	CONCLUSÕES E SUGESTÕES – ESTUDO E MONITORIZAÇÃO DA CAPACIDADE DO PROCESSO EM TEMPO REAL	90
6.3	CONCLUSÕES E SUGESTÕES – CARTAS CONJUNTAS PARA CONTROLO DOS PARÂMETROS DE LOCALIZAÇÃO E DISPERSÃO DO PROCESSO	91
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	92
	ANEXO A – CONSTANTES NECESSÁRIAS PARA CONSTRUÇÃO DAS CARTAS DE CONTROLO	100
	ANEXO B - DISTRIBUIÇÃO DE R PARA DIFERENTES DIMENSÕES DA AMOSTRA (N).....	101
	ANEXO C - DISTRIBUIÇÃO DE S PARA DIFERENTES DIMENSÕES DA AMOSTRA (N)	103
	ANEXO D – SIMULAÇÃO DOS LIMITES DE CONTROLO DA ESTATÍSTICA $LN(S^2)$ PARA DIFERENTES DIMENSÕES DA AMOSTRA (N).....	105
	ANEXO E – FICHEIRO DE APOIO EM EXCEL USADO PARA CÁLCULO DAS CONSTANTES DA CARTA $LN(S^2)$	113
	ANEXO F – ARTIGO “$LN(S^2)$ CHART PARAMETRIZATION – AN ALTERNATIVE TO THE STATISTICAL CONTROL OF PROCESS VARIANCE”	114
	ANEXO G – ARTIGO “MONITORIZAÇÃO DA CAPACIDADE DO PROCESSO NA FASE 2 DO SPC – ÍNDICES DE CAPACIDADE IU E IL”	120

Índice de Figuras

FIGURA 2.1 - PROCESSO (ADAPTADO DE (MONTGOMERY, 2009))	8
FIGURA 2.2 - CARTA DE CONTROLO	10
FIGURA 2.3 - PADRÕES NÃO ALEATÓRIOS RESPONSÁVEIS POR CAUSAS ESPECIAIS DE VARIAÇÃO	12
FIGURA 2.4 - INFLUÊNCIA DA VARIABILIDADE NA CAPACIDADE DO PROCESSO (ADAPTADO DE (OAKLAND, 2003)).....	22
FIGURA 2.5 - METODOLOGIA PARA IMPLEMENTAÇÃO DO CONTROLO ESTATÍSTICO MULTIVARIADO DO PROCESSO (MSPC).34	
FIGURA 2.6 - EXEMPLO DO CÁLCULO DE ÁREAS PARA ESTUDO DA CAPACIDADE MULTIVARIADA DO PROCESSO	39
FIGURA 2.7 - EXEMPLO DE D_1 E D_2 (EXTRAÍDO DE JALILI ET AL., 2012).....	42
FIGURA 2.8 - METODOLOGIA PARA IMPLEMENTAÇÃO DA METODOLOGIA ATTRIVAR.....	47
FIGURA 2.9 - ESTUDO COMPARATIVO ENTRE AS CARTAS SSMR, SSMDR, EWMA E D-MEWMA	48
FIGURA 3.1 - DISTRIBUIÇÃO DE R PARA DIFERENTES DIMENSÕES DA AMOSTRA E DISTRIBUIÇÃO POPULACIONAL $N(1000; 400)$ (VALORES OBTIDOS POR SIMULAÇÃO)	52
FIGURA 3.2 - DISTRIBUIÇÃO DE R PARA DIFERENTES DIMENSÕES DA AMOSTRA E DISTRIBUIÇÃO POPULACIONAL $N(1000; 400)$ (VALORES OBTIDOS POR SIMULAÇÃO)	54
FIGURA 3.3 - ALGORITMO PARA DESENVOLVIMENTO DAS SIMULAÇÕES	59
FIGURA 3.4 - OUTPUT DA SIMULAÇÃO DOS PARÂMETROS DA CARTA $LN(S^2)$	60
FIGURA 3.5 - ESTUDO COMPARATIVO DAS DISTRIBUIÇÕES DE R , S E $LN(S^2)$, PARA $N = 5, 10, 20$	62
FIGURA 3.6 - CARTAS DE CONTROLO DA MÉDIA E CARTAS DE CONTROLO R, S E $LN(S^2)$ PARA $N = 5$ E $N(250; 10^2)$	63
FIGURA 3.7 - CARTAS DE CONTROLO DA MÉDIA E CARTAS DE CONTROLO R, S E $LN(S^2)$ PARA $N = 10$ E $N(1000; 20^2)$	64
FIGURA 3.8 - CARTAS DE CONTROLO DA MÉDIA E CARTAS DE CONTROLO R, S E $LN(S^2)$ PARA $N = 25$ E $N(125; 4^2)$	65
FIGURA 4.1 – EXEMPLO DA APLICAÇÃO DA NOVA METODOLOGIA DE ESTUDO DA CAPACIDADE DO PROCESSO EM TEMPO REAL (FASE 1)	72
FIGURA 4.2 - EXEMPLO DA APLICAÇÃO DA NOVA METODOLOGIA DE ESTUDO DA CAPACIDADE DO PROCESSO EM TEMPO REAL (FASE 2)	73
FIGURA 4.3 - EXEMPLO DE CARTA <i>PCIRUN</i> DE PROCESSO COM "BOM" DESEMPENHO	77
FIGURA 4.4- EXEMPLO DE CARTA <i>PCIRUN</i> DE PROCESSO COM "MAU" DESEMPENHO.....	78
FIGURA 4.5- EXEMPLO DE CARTA <i>PCIRUN</i> DE PROCESSO SEM CAPACIDADE.....	78
FIGURA 5.1 – GRÁFICO ϕ/ψ	83
FIGURA 5.2 - CARTA DE SHEWHART \bar{X} BARRA - S (EXTRAÍDO DE REQUEIJO, 2003).....	85
FIGURA 5.3 - CARTA CONJUNTA $C\bar{X}$ BARRA – S (EXTRAÍDO DE REQUEIJO, 2003).....	85
FIGURA 5.4 - GRÁFICO ϕ/ψ (EXTRAÍDO DE REQUEIJO, 2003)	86
FIGURA 5.5 - CARTA DE SHEWHART \bar{X} - MR (EXTRAÍDO DE REQUEIJO, 2003)	87
FIGURA 5.6 - CARTA CONJUNTA $C\bar{X}$ – MR (EXTRAÍDO DE REQUEIJO, 2003)	87
FIGURA 5.7 - GRÁFICO ϕ/ψ (EXTRAÍDO DE REQUEIJO, 2003)	88

Índice de Tabelas

TABELA 2.1 - CARTAS DE CONTROLO DE VARIÁVEIS	16
TABELA 2.2 - CARTAS DE CONTROLO DE ATRIBUTOS	16
TABELA 2.3 - VALORES DA CONSTANTE A_2	19
TABELA 2.4 - ESTIMAÇÃO DOS PARÂMETROS DAS CARTAS DE CONTROLO DE ATRIBUTOS (FASE 1).....	20
TABELA 2.5 - PARÂMETROS DAS CARTAS DE CONTROLO DE VARIÁVEIS (FASE 2)	21
TABELA 2.6 - VALORES MÍNIMOS PARA GARANTIR CAPACIDADE DO PROCESSO	24
TABELA 2.7 - CARTAS DE CONTROLO DE VARIÁVEIS PARA <i>SHORT RUNS</i>	25
TABELA 3.1 - CONSTANTES PARA CONSTRUÇÃO DA CARTA DA MÉDIA E DA CARTA $LN(S^2)$	61
TABELA 3.2 - SÍNTESE DA COMPARAÇÃO DE DESEMPENHO ENTRE AS CARTAS DE CONTROLO	66
TABELA 4.1 - ALTERNATIVA PARA ESTUDO DA CAPACIDADE DO PROCESSO EM TEMPO REAL (ÍNDICES DE CAPACIDADE)	68
TABELA 4.2 - ESTIMAÇÃO DOS PARÂMETROS DO PROCESSO	72
TABELA 4.3 - ÍNDICES DE CAPACIDADE DO PROCESSO.....	72
TABELA 4.4 - ALTERNATIVA PARA ESTUDO DA CAPACIDADE DO PROCESSO EM TEMPO REAL (CARTA <i>PCIRUN</i>)	74

SIMBOLOGIA E NOTAÇÕES

A, A_2, A_3	Fatores para construção das cartas de controlo de variáveis para a Carta da Média.
ARL	<i>Average Run Length</i> , número médio de observações até a carta sinalizar um ponto fora de controlo.
$ARL_{Em\ Controlo}$	Número médio de observações até a carta sinalizar um ponto fora de controlo, quando o processo está em controlo.
ARL_{EC}	Versão mais curta de $ARL_{Em\ Controlo}$.
ARL_{FC}	Versão mais curta de $ARL_{Fora\ de\ Controlo}$.
$ARL_{Fora\ de\ Controlo}$	Número médio de observações até a carta sinalizar um ponto fora de controlo, quando o processo já não está em controlo.
B_3, B_4, B_5, B_6	Fatores para construção das cartas de controlo de variáveis para a Carta do Desvio Padrão.
CCE	Software criado por (Nogueira, 2018).
C_1, C_2	Fatores para a construção da carta de controlo \bar{X} e $ln(S^2)$.
C_4	Fator para a construção das cartas de controlo de variáveis.
C_p	Índice de capacidade potencial do processo.
C_{pk}	Índice de capacidade do processo.
C_{pm}	Índice de capacidade potencial corrigido pelo desvio da média em relação ao valor nominal.
C_{pmk}	Índice de capacidade corrigido pelo desvio da média em relação ao valor nominal.
d_2	Fatores para construção das cartas de controlo de variáveis.
$D_{crítico}$	Valor crítico para o teste Kolmogorov-Smirnov.
D_1, D_2, D_3, D_4	Fatores para construção das cartas de controlo de variáveis para a Carta da Amplitude.
<i>Excel</i>	<i>Software</i> de folha de cálculo utilizado na presente dissertação.
<i>FCC</i>	Nome do <i>software</i> atualizado por (Pacheco, 2019).
<i>FCT</i>	Faculdade de Ciências e Tecnologia.
G_1, G_2, G_3, G_4	Fatores para construção da carta $ln(S^2)$.
LC	Limite Central.
LIC	Limite Inferior de Controlo.

LIE	Limite Inferior de Especificação.
LSC	Limite Superior de Controlo.
LSE	Limite Superior de Especificação.
m	Número de amostras.
<i>Matlab</i>	<i>Software</i> utilizado para realização das simulações.
MR	Amplitudes Móveis.
n	Dimensão da amostra.
$N(0, 1)$	Distribuição normal com média igual a 0 e variância igual a 1.
R	Amplitude amostral.
R^2	Coefficiente de determinação.
\bar{R}	Média de amplitudes de amostras.
S	Desvio padrão amostral.
\bar{S}^2	Média das variâncias das amostras.
S^2	Variância amostral.
SPC	Controlo Estatístico do processo (<i>Statistical Process Control</i>)
t	Tempo.
<i>UNL</i>	Universidade Nova de Lisboa.
\bar{X}	Média.
\tilde{X}	Mediana.
$Z_{\alpha/2}$	Valor crítico da Normal reduzida.
α	Risco do tipo 1; nível de significância; risco do produtor.
β	Risco do tipo 2; risco do consumidor.
ω	Característica da qualidade a controlar.
μ	Média da população.
σ	Desvio padrão da população.
σ^2	Variância da população.
$\sigma_{\bar{x}}$	Desvio padrão da média

1. INTRODUÇÃO

No presente capítulo são apresentadas as motivações que levaram à realização deste estudo, a metodologia adotada, bem como a estrutura da presente dissertação.

1.1 MOTIVAÇÃO

O Controlo Estatístico do Processo representa uma metodologia cada vez mais utilizada e desenvolvida no mundo industrial, sendo uma metodologia de excelência para fornecer informações sobre o controlo da qualidade em processos produtivos, facilitando as tomadas de decisão na linha de produção e promovendo um melhor fluxo de comunicação entre quem está na linha a produzir e quem toma as decisões sobre alterações no processo. Desde que Walter Shewhart apresentou as primeiras cartas de controlo, em 1920, esta técnica tem vindo a ser adaptada e desenvolvida de forma a que se torne cada vez mais apropriada para fazer face aos elevados desafios industriais, mas, o objetivo principal da metodologia tem-se mantido inalterado durante este século de desenvolvimento: monitorização e redução da variabilidade da produção de forma a minimizar, e, em última instância, evitar, a produção de produtos não conformes, de forma a produzir de forma eficaz e eficiente, maximizando a utilização de recursos disponíveis, aumentando o nível de serviço e de competitividade das organizações.

As cartas de controlo, quer as tradicionais, as especiais, as de *Short-Run*, como as multivariadas, são ferramentas fundamentais no *SPC*, permitindo detetar as causas especiais de variação, as alterações nos parâmetros do processo produtivo, e, através dessas informações, utilizar outras ferramentas da qualidade para identificar as causas dessas variações e, por sua vez, proceder à sua melhoria.

Nos primeiros desenvolvimentos do *SPC*, Shewhart (1931) desenvolveu cartas de controlo que se baseavam nos princípios de dados independentes e identicamente distribuídos segundo uma distribuição Normal. As cartas relativamente ao controlo estatístico do parâmetro de localização do processo, nomeadamente a carta \bar{X} , respeitam esses pressupostos, o que não pode ser dito para as cartas de controlo estatístico da dispersão do processo, onde o pressuposto de Normalidade não é garantido.

As cartas do desvio padrão (carta *S*) e da amplitude (carta *R*) são utilizadas com este pressuposto, ainda que sendo violado, podendo conferir imprecisões e enviesamento de resultados no controlo da dispersão.

No sentido de continuamente melhorar esta ferramenta da qualidade, torna-se importante estudar alternativas que permitam em simultâneo estudar a dispersão do processo e garantir o pressuposto de Normalidade.

Com o desenvolvimento do Controlo Estatístico do Processo, surgiram desenvolvimentos às cartas tradicionais, tendo sido desenvolvidas cartas especiais, cartas específicas para *Short-Runs* e até cartas de controlo em que pudessem ser estudadas várias características da

qualidade em simultâneo (Controlo Estatístico Multivariado do Processo ou MSPC). As cartas Q e Z são dois exemplos dos desenvolvimentos realizados nesta área. Ao contrário do que acontece nas cartas tradicionais, nestas cartas, o estudo da capacidade do processo, ou seja, a aptidão do processo em produzir consistentemente segundo as especificações do cliente, ocorre em tempo real. Torna-se então importante estudar métodos que permitam controlar a capacidade do processo em tempo real, e não apenas através dos índices de capacidade já existentes.

A metodologia *SPC* utiliza, em grande parte, cartas de controlo para fornecer informações sobre o processo aos seus clientes. Estas cartas de controlo podem ser utilizadas para estudar o parâmetro de localização de determinada característica da qualidade ou para estudar o parâmetro de dispersão dessa característica, mas não para estudar, em simultâneo, ambos os parâmetros. Assente nesta premissa surge uma oportunidade de desenvolvimento do *SPC* em que se criam cartas de controlo que permitam controlar em conjunto, os parâmetros de localização e dispersão de uma característica da qualidade.

1.2 OBJETIVOS

A realização da presente dissertação assenta em três objetivos principais:

- Realizar uma revalidação dos parâmetros da carta de controlo da dispersão $\ln(S^2)$. Para isto são realizadas todas as deduções de forma independente, de forma a corrigir imprecisões no desenvolvimento das expressões matemáticas que servem de suporte à carta. De seguida, através da utilização de softwares como o *MATLAB®* e o *Excel* procede-se à simulação da distribuição, bem como de todos os parâmetros necessários para a sua construção, de forma a obter valores os mais precisos possíveis. A utilização do software *MATLAB®* também será utilizado para realizar a simulação das estatísticas R e S de forma a garantir, através de métodos empíricos, o problema da não-Normalidade que cria a necessidade da criação da carta $\ln(S^2)$.
- Criar uma metodologia de estudo da capacidade do processo em tempo real, de forma a garantir que em cada instante do controlo estatístico do processo é possível avaliar e quantificar a aptidão que o processo possui para produzir consistentemente segundo a especificação técnica.
- Estudar e desenvolver cartas de controlo conjuntas que permitam estudar em simultâneo os parâmetros de localização e dispersão do processo. Nesta fase do desenvolvimento da dissertação serão utilizados os conhecimentos adquiridos sobre as cartas de controlo da dispersão, em concreto sobre a nova carta $\ln(S^2)$ de forma a criar uma ferramenta mais precisa e robusta no controlo estatístico do processo.

1.3 METODOLOGIA DE INVESTIGAÇÃO

Para desenvolver esta dissertação com o mínimo de complicações possíveis, é necessário definir um plano de ação, que permita não só estruturar o período temporal para recolha de informação,

investigação e análise de dados, bem como definir quais os objetivos que seriam realizados em primeiro lugar, permitindo organização e método na realização deste estudo. Nesse sentido, foram definidas as seguintes fases para desenvolvimento deste estudo:

1. Revisão de literatura

- Esta dissertação baseia-se nos desenvolvimentos que têm vindo a ser realizados ao longo dos anos na área do Controlo Estatístico do Processo, pelo que, em primeiro lugar, foi necessário recolher toda a informação relevante sobre o tema, de forma a obter uma envolvimento na área, ferramentas e metodologias utilizadas.

2. Revalidação dos parâmetros da carta $ln(S^2)$

- a. Estudo da Normalidade das distribuições das estatísticas que constam das diferentes cartas de controlo da dispersão
 - Utilização do software Matlab para gerar números pseudoaleatórios e desta forma poder estudar as diferentes estatísticas e verificar se o pressuposto de Normalidade é respeitado.
- b. Criação de programas informáticos para simulação e determinação dos parâmetros da carta $ln(S^2)$
 - Utilização do software Matlab para determinar os percentis correspondentes a 0,135% e 99,875% da distribuição, de forma a garantir um nível de significância de 0,27%, como sugerido nos estudos de Shewhart. Através da determinação por simulação destes valores, é possível determinar as constantes necessárias à construção da carta $ln(S^2)$.
- c. Tratamento dos dados obtidos
- d. Comparação entre cartas de dispersão como forma de análise da performance da nova carta $ln(S^2)$
 - Criação de exemplos práticos para realizar uma comparação entre as diferentes cartas de controlo da dispersão, com o intuito de compreender se as conclusões teóricas se refletem na prática e se, em última instância, a nova carta proposta se apresenta como uma boa alternativa para o controlo estatístico da dispersão do processo.

3. Monitorização da Capacidade do Processo em tempo real

- a. Índices de capacidade I_L e I_U
 - Desenvolvimento de índices de capacidade, baseados nos índices de capacidade tradicionais que permitam, durante a Fase 2 do SPC, realizar o estudo da capacidade do processo em tempo real, criando desta forma uma metodologia que permita estudar a capacidade do processo de forma uniforme por todos os investigadores.
- b. Carta *PCIRUN*
 - Com base no estudo da capacidade em tempo real durante a fase 2, surge a ideia de criar uma carta, que, com base nos intervalos de confiança dos índices de capacidade tradicionais permite estudar, não só a capacidade do

processo bem como o desempenho do processo relativamente às especificações técnicas pré-definidas.

4. Cartas de controlo conjuntas para controlo dos parâmetros de localização e dispersão do processo
 - Desenvolvimento de metodologia para controlo estatístico do processo utilizando apenas uma carta de controlo, criando uma estatística G^2 , que permite estudar, em simultâneo, os parâmetros de localização e dispersão do processo.

1.4 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO

Para melhor compreensão da presente dissertação, são, de seguida, apresentados os assuntos dos seis principais capítulos deste estudo.

Capítulo 1 – Introdução;

Capítulo 2 – Fundamentação Teórica;

Capítulo 3 – Validação dos parâmetros da carta $\ln(S^2)$;

Capítulo 4 – Monitorização da Capacidade do Processo em tempo real;

Capítulo 5 – Cartas Conjuntas para controlo dos parâmetros de localização e dispersão do processo;

Capítulo 6 – Conclusões e sugestões para trabalhos futuros.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

O presente capítulo serve de suporte a todas as técnicas e ferramentas, bem como conceitos teóricos relevantes na área do Controlo Estatístico do processo. Primeiramente irá ser abordado o conceito e evolução histórica da Qualidade e qual a importância no atual paradigma industrial.

De seguida serão abordados diversos métodos estatístico de controlo da qualidade, iniciando-se pelas Cartas de Controlo Tradicionais, habitualmente descritas como Cartas de Controlo de Shewhart, que consistem na base do *SPC* tradicional. Acerca desta temática irão ser abordadas as diversas cartas de controlo desenvolvidas, bem como os pressupostos e condições de utilização e aplicação destas Cartas de Controlo. Será também abordada a questão relativa à capacidade do processo, extremamente importante no âmbito da verificação do cumprimento das especificações técnicas.

Adicionalmente é realizada a abordagem ao *SPC* para “pequenas produções”, ou *Short Runs*, uma modificação do *SPC* tradicional que permite um ajuste aos novos desafios do mundo industrial altamente competitivo. Acerca deste tema serão abordadas as condições de aplicabilidade, as diversas Cartas de Controlo, bem como questões relativas à capacidade do processo.

Por último, é abordado o *SPC* Multivariado, no qual são estudadas diversas características da qualidade em simultâneo, permitindo, no mesmo gráfico, analisar mais informação. Acerca do *SPC* Multivariado, serão analisadas as diferentes Cartas de Controlo a utilizar dependendo das circunstâncias em que se encontre o processo, bem como o estudo da capacidade multivariada do processo.

2.1 EVOLUÇÃO DO CONCEITO DE QUALIDADE

Na sua definição de “qualidade”, Shewhart (1931) define dois aspetos importantes, um quantitativo e mensurável, relacionado com as características físicas, e outro subjetivo, que se relaciona com os sentimentos e aspetos sensoriais transmitidos.

Crosby (1979) definiu “qualidade” como o cumprimento e conformidade com as especificações técnicas do produto, isto é, desde que o produto estivesse contido dentro dos limites de especificação do cliente, este tinha qualidade. É importante referir que esta definição é também válida para serviços.

Feigenbaum (1983) define “qualidade” como o “conjunto total de características de um produto (...) através dos quais o produto será capaz de satisfazer as expectativas do cliente”, características estas que poderiam ser “em termos de marketing, engenharia, produção e manutenção”.

Outro guru da qualidade, Juran (1988), também propôs uma definição para “qualidade”, em 1988, classificando a “qualidade” como “aptidão para o uso”. Embora uma definição curta, é concisa e aplicável tanto a produtos como a serviços. É uma definição que engloba aspetos como a

qualidade na concepção, na conformidade e na disponibilidade. Juran define ainda algumas vertentes a serem consideradas para a satisfação do consumidor:

- **Qualidade do projeto** – concepção do produto e definição das especificações;
- **Qualidade de conformidade** – avalia a conformidade entre o produto produzido e projetado;
- **Disponibilidade** – questões relacionadas com a fiabilidade e manutibilidade do produto;
- **Segurança** – identificação do risco que o consumidor pode incorrer ao utilizar um produto fora de especificação;
- **Utilização** – condições do produto quando é entregue ao cliente, tem em conta não só a produção, mas também o embalamento, armazenagem e transporte.

Juran dá uma abrangência ao significado de “qualidade” que vai muito para além da produção, englobando o planeamento, fornecimento, concepção, controlo da produção, inspeção, transporte e relacionamento com os clientes (Juran, 1951, 1988).

Taguchi defende a “qualidade” como o inverso do dano provocado na sociedade por um produto, desde a concepção até ao final da utilização, dando, nesta altura ênfase a variabilidade na produção, que tem de ser tida em conta. Esta é uma definição que exprime a importância de produzir produto segundo a especificação do cliente, pelo que, se deve tomar especial cuidado na concepção e desenvolvimento do produto, bem como na definição dos limites de especificação e de produção do produto, de forma a garantir que a variabilidade de produção é a menor possível, ou pelo menos tão baixa quanto o aceitável pelo cliente (Taguchi et al., 2005; Taguchi & Organization, 1986).

Outra referência importante na definição de “qualidade” é Deming, com a sua abordagem da melhoria contínua da qualidade, consolidada nos 14 Pontos da Filosofia de Deming (Deming, 1986):

1. Vontade constante de melhorar o produto ou serviço – preocupação com a melhoria contínua a longo prazo;
2. Adoção de uma nova filosofia, onde produtos não-conformes, mão-de-obra não qualificada e matéria-prima de baixa qualidade não seriam aceitáveis;
3. Eliminar a inspeção em massa – inspeção por si só não serve como controlo da qualidade uma vez que apenas deteta produto fora de especificação muito tarde e não permite corrigir o processo de forma a melhorar a produção;
4. Terminar a prática de comprar produto (matéria-prima) apenas com base nos preços – O preço de um produto está sempre associado ao nível de qualidade associado, logo, produtos mais baratos são, geralmente, de qualidade inferior ou com maior variabilidade. Começa a filosofia de trabalhar com um número mais reduzido de fornecedores, mas mais qualificados, que produzam dentro de certos standards aceitáveis pela empresa;

5. Melhorar de forma contínua os sistemas de produção – ponto que vem em linha do que é dito no ponto 3: é necessário criar mecanismos de melhoria contínua que permitam identificar as causas do produto não-conforme, de forma a serem mitigadas, melhorando o processo de produção;
6. Instituir métodos modernos de formação aos operadores, definindo quais os requisitos para qualidade aceitável. Estes métodos de formação devem ainda garantir que os operadores, para além de saberem identificar padrões de qualidade, os consigam atingir, produzir produto conforme com especificação;
7. Implementar métodos de supervisão modernos, onde os supervisores devem ter o poder e conhecimento necessário para informar a gestão de topo sobre situações que necessitam de correção, ainda como garantir que são tomadas as medidas necessárias para a correção do problema, investindo sempre no caminho da melhoria gradual, mas contínua;
8. Eliminar barreiras de comunicação, de forma a que a informação flua de forma harmoniosa dentro da organização com o objetivo de melhorar as operações e procedimentos;
9. Eliminar barreiras entre departamentos, garantindo trabalho colaborativo dentro da empresa, em que todos se esforçam para um objetivo comum, o desenvolvimento e melhoria contínua da organização;
10. Eliminar as metas numéricas para os operadores, uma vez que a melhoria da qualidade não depende, em grande parte, dos operadores, mas sim da gestão. A única meta da empresa deve ser a melhoria contínua;
11. Eliminar padrões de trabalho e quotas numéricas, deixando de afirmar a quantidade de conformes aceite na produção, mas sim garantindo que todos os esforços estão alinhados com a redução de desperdícios e variabilidade, de forma a tornar as linhas de produção mais robustas;
12. Remover todas as barreiras que desmoralizem os trabalhadores, que pode ser alcançado através da formação, que permite ao operador produzir dentro de especificação e saber quais são os padrões a seguir;
13. Implementar um plano intensivo de educação e formação, alinhado com o ponto 6, de forma a formar operadores capazes de analisar o seu trabalho e de melhorar dia após dia;
14. Criar uma filosofia dentro da gestão de topo que aplique e difunda todos os pontos anteriores.

No seguimento do desenvolvimento destes catorze pontos de Melhoria Contínua da Qualidade, Deming dá especial relevo ao ciclo PDCA (Planear, Fazer, Controlar, Atuar) como uma metodologia de gestão da qualidade e de melhoria contínua (Prashar, 2017; Sangpikul, 2017; Silva et al., 2017).

(Deming, 1986) defende ainda que cerca de 85% dos problemas de uma organização são da responsabilidade dos gestores, uma vez que eles são os responsáveis máximos pelas decisões tomadas. A melhoria contínua do processo passa por duas ações:

- Redução causas comuns de variação;
- Eliminação de causas especiais de variação.

Este é o princípio subjacente ao controlo estatístico do processo e às Cartas de controlo, que será desenvolvido mais à frente.

De forma a garantir a redução das causas comuns e eliminação das causas especiais de variação, é necessário identificar essas causas, utilizando para este efeito ferramentas da qualidade, como o diagrama de Pareto, diagrama de Ishikawa, fluxogramas, entre outros.

Uma definição mais recente de qualidade, fruto de toda a investigação feita até esse momento e influenciada por todos os gurus da qualidade, é a definição de Montgomery (Figura 2.1). Segundo (Montgomery, 2009), a Saída corresponde à satisfação dos clientes, influenciada pelas características da qualidade estudadas. Verifica-se que o processo é influenciado por: Entrada, que corresponde a matérias primas, materiais, entre outros; Variáveis controláveis que correspondem aos fatores do processo que podem ser ajustados e alterados sempre que necessário; Variáveis não controláveis, fatores que não é possível controlar, independentes do processo produtivo; Ações realizadas sobre a saída, que corresponde muitas vezes ao controlo da(s) característica(s) da Qualidade (Montgomery, 2009).

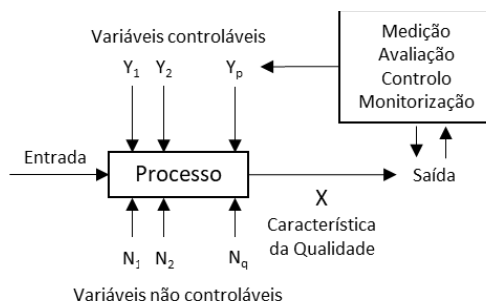


Figura 2.1 - Processo (adaptado de (Montgomery, 2009))

Apesar dos autores apresentados terem opiniões ligeiramente diferentes acerca da definição de Qualidade, é possível verificar que esta tem múltiplas vertentes e que a orientação da qualidade se encontra baseada nas necessidades dos clientes. As necessidades dos clientes são variadíssimas e individuais, pelo que cabe à organização decidir quais as dimensões da qualidade a que se deve dar mais importância. Relativamente à gestão da qualidade dentro da organização, fica vincado o papel fundamental da gestão de topo, que tem de se envolver nos processos, a autonomia dos trabalhadores, na qual se possuam ferramentas estatísticas para controlar a variabilidade do produto ou serviço, de forma a maximizar a satisfação do cliente.

2.2 CONTROLO ESTATÍSTICO UNIVARIADO DO PROCESSO – ABORDAGEM TRADICIONAL

O mercado cada vez mais competitivo leva a que os clientes, cada vez mais exigentes e competitivos tenham uma maior variedade de produtos que podem escolher, pelo que, para uma empresa manter a sua competitividade no mundo industrial é necessário garantir a estabilidade dos processos produtivos, de forma a assegurar o nível de qualidade exigida pelos clientes. De forma a aumentar a competência empresarial nesta nova era industrial, surge o Controlo Estatístico do Processo (*SPC*, do inglês, *Statistical Process Control*), como uma ferramenta que permite às organizações ter uma vantagem competitiva sobre a concorrência (Pereira & Requeijo, 2012).

Em 1931, Walter Shewart publica os primeiros estudos sobre o *SPC* (Shewhart, 1931), cujos princípios continuam a ser válidos nos dias de hoje. Esta temática, devido à sua inovação e aplicabilidade no mundo industrial, foi sendo desenvolvida e estudada ao longo tempo por diversos autores, como Juran (1951), D. J. Wheeler (1995), Quesenberry (1997), Oakland (2003) Mitra (2008), D. C. Montgomery (2009), Pereira & Requeijo (2012), entre outros autores

Um dos principais objetivos do *SPC* é a redução da variabilidade. A variabilidade de um processo é o efeito das várias fontes de variação que se fazem sentir, que podem ser distinguidas entre causas comuns e especiais de variação. As causas comuns de variação, que correspondem às fontes de variação que afetam o processo quando este se encontra sob controlo estatístico, devem ser reduzidas, enquanto que as causas especiais de variação, causas esporádicas que fazem com que o processo fique fora de controlo estatístico, devem ser eliminadas (Pereira & Requeijo, 2012).

O *SPC* permite monitorizar o processo ao longo do tempo, reduzir a variabilidade e estimar os parâmetros do processo, verificando se este tem capacidade, ou seja, se é capaz de cumprir as especificações técnicas.

Estudos de sensibilidade afirmam que as cartas tradicionais são indicadas para detetar alterações superiores a $2,5\sigma$ na média do processo, pelo que para alterações mais pequenas (pequenas ou moderadas alterações) estas cartas apresentam um desempenho insuficiente. De forma a monitorizar processos cujas alterações nos parâmetros são pequenas ou moderadas, surgem as denominadas Cartas de Controlo Especiais, como sejam as cartas CUSUM (Somadas Acumuladas) e EWMA (Médias Moveis Exponencialmente Amortecidas), para controlo de alterações da média do processo e as cartas H81-CUSUM, EWMS, CUSUM- $\ln(S^2)$ e EWMA- $\ln(S^2)$ para o controlo da dispersão do processo (Pereira & Requeijo, 2012; Freitas et al., 2019; Mukherjee et al., 2019; Zaman et al., 2019).

2.2.1 PRINCÍPIOS DAS CARTAS DE CONTROLO

Uma Carta de controlo, representada na Figura 2.2, corresponde à representação gráfica da evolução temporal de uma estatística (ω) referente a uma característica da qualidade. Esta representação temporal é realizada através dos pares de pontos (t, ω), os quais servem de base para a análise estatística do processo. No gráfico são ainda representados os limites superior (LSC) e inferior (LIC) de controlo estatístico e a linha central do processo (LC).

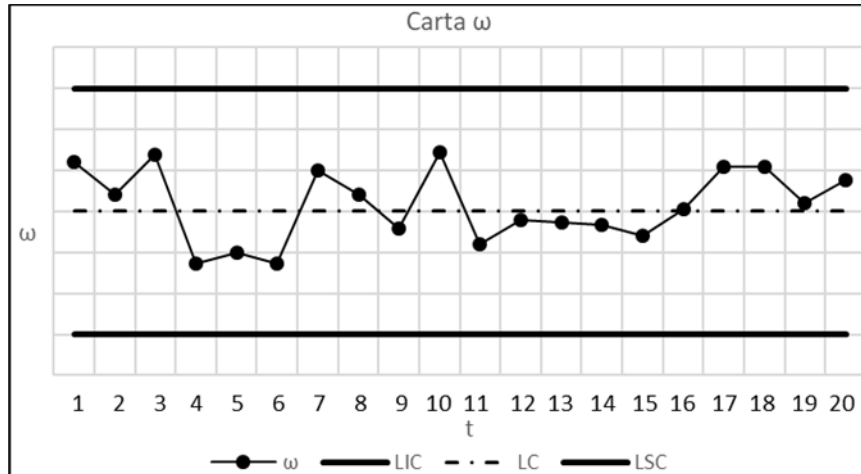


Figura 2.2 - Carta de Controlo

Um processo considera-se sob controlo estatístico se se os valores recolhidos da estatística ω estiverem contidos entre os limites superior e inferior de controlo e não haja comportamentos não aleatórios ou tendências sistemáticas dos dados recolhidos.

Sempre que exista um par (t, ω) fora dos limites de controlo, ou que se detete um comportamento não aleatório, diz-se que o processo está fora de controlo estatístico, tendo sido detetada uma causa especial de variação, que deve ser investigada de forma a implementar ações no processo no sentido de corrigir essa causa de variação no processo.

O controlo estatístico do processo através de cartas de controlo é um processo iterativo, no qual se distinguem duas fases na sua implementação: a Fase 1, na qual se desconhecem os parâmetros do processo, sendo o intuito desta fase estimar esses parâmetros, sendo habitualmente denominada de controlo preliminar ou retrospectivo, e a Fase 2, na qual já se conhecem os parâmetros do processo (estimados na Fase 1), cujo intuito corresponde à monitorização e controlo do processo.

Um dos pressupostos das cartas de Shewhart corresponde à Normalidade da variável $\omega \sim N(\mu_\omega, \sigma_\omega^2)$. Desta forma, os limites de controlo e a linha central das cartas de Shewhart são dadas por:

$$\begin{aligned}LSC_\omega &= \mu_\omega + 3\sigma_\omega \\LC_\omega &= \mu_\omega \\LSC_\omega &= \mu_\omega - 3\sigma_\omega\end{aligned}\tag{2.1}$$

Constata-se então que os limites das cartas de Shewhart situam-se localizados a $\pm 3 \sigma_\omega$ da linha central. Visto que ω é Normalmente distribuída, existe uma probabilidade de 99,73% de qualquer ponto estar contido nos limites de controlo.

De acordo com o princípio exposto no parágrafo anterior, pode deduzir-se que existe um risco de um ponto se situar fora dos limites de controlo. Segundo Shewhart, sempre que um ponto não esteja incluído nos limites de controlo, gera uma causa especial de variação, considerando que esse ponto não pertence à distribuição normal de ω . Ainda assim existe um risco α de esse ponto pertencer à distribuição (considerar-se o processo fora de controlo estatístico quando este se encontra controlado estatisticamente), denominado de risco do produtor, nível de significância ou probabilidade de cometer o erro do tipo I. Existe então, analogamente um risco β de se considerar que o processo está controlado estatisticamente, quando na realidade não está, também denominado de risco do consumidor ou probabilidade de cometer o erro do tipo II (Pereira & Requeijo, 2012).

Qualquer ferramenta industrial é exposta a uma avaliação de desempenho, sem exceção, pelo que as cartas de controlo também têm medidas para avaliar o seu desempenho, sendo a mais utilizada o *ARL* (*Average Run Length*), que corresponde ao número médio de pontos representados na carta de controlo até que se detete um ponto fora dos limites de controlo. Deseja-se que o *ARL* quando o processo está sob controlo estatístico (ARL_{EC}) seja o maior possível, minimizado, desta forma, o número de falsos alarmes, enquanto que o *ARL* quando o processo está fora de controlo estatístico (ARL_{FC}) seja o menor possível, garantindo assim que se detetam alterações nos parâmetros do processo de forma rápida e eficaz (Lima-Filho et al., 2019; Weiß et al., 2018). Obtêm-se então as seguintes expressões matemáticas para o ARL_{EC} e para o ARL_{FC} :

$$ARL_{EC} = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{0,0027} = 370 \quad (2.2)$$

$$ARL_{FC} = \frac{1}{1 - \beta} \quad (2.3)$$

Uma vez que os limites das cartas de Shewhart estão sempre posicionados a $\pm 3 \sigma_\omega$ da linha central, o valor de ARL_{EC} das cartas de Shewhart é sempre 370, o que significa que, em média, a cada 370 pontos existe um falso alarme, isto é, a cada 370 pontos pressupõem-se, erradamente, que o processo está fora de controlo estatístico (Pereira & Requeijo, 2012).

É ainda importante afirmar que para a o mesmo valor da dimensão da amostra (n), não é possível em simultâneo aumentar ARL_{EC} e diminuir ARL_{FC} , sendo então necessário fazer um compromisso entre os dois (nas cartas de Shewhart esse compromisso é realizado através da fixação do ARL_{EC}) (Pereira & Requeijo, 2012; Weiß et al., 2018; Lima-Filho et al., 2019).

2.2.2 DETEÇÃO DE CAUSAS ESPECIAIS DE VARIAÇÃO

Um processo pode considerar-se sob controlo estatístico relativamente a ω se não for detetada nenhuma causa especial de variação. Segundo a norma ISO 7870-2:2013 (*ISO 7870-2:2013* -

Control charts — Part 2: Shewhart control charts, 2013), as regras a adotar de forma a detetar uma causa especial são as seguintes:

- Regra 1** – Um qualquer ponto fora dos limites de ação ($\pm 3 \sigma_\omega$);
- Regra 2** – Nove pontos consecutivos na zona C, do mesmo lado da linha central;
- Regra 3** – Seis pontos consecutivos a ascender ou descender;
- Regra 4** – Catorze pontos consecutivos crescendo e decrescendo alternadamente;
- Regra 5** – Dois de três pontos consecutivos na zona A, do mesmo lado da linha central;
- Regra 6** – Quatro de cinco pontos consecutivos nas zonas A ou B, do mesmo lado da linha central;
- Regra 7** – Quinze pontos consecutivos na zona C, acima e abaixo da linha central;
- Regra 8** – Oito pontos consecutivos de ambos os lados da linha central, sem nenhum na zona C.

Na Figura 2.3 é possível ver a representação gráfica das 8 regras para deteção de causas especiais

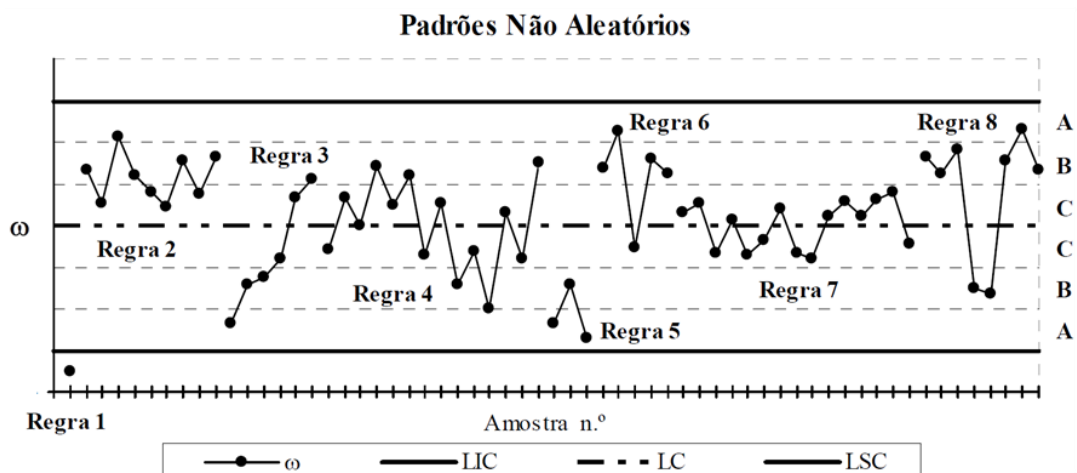


Figura 2.3 - Padrões não aleatórios responsáveis por causas especiais de variação

A aplicação simultânea das 8 regras pode aumentar significativamente o número de falsos alarmes, aumentando os custos da qualidade. Para além disto, a utilização de todas as regras pode comprometer a simplicidade de utilização das cartas de controlo, pelo que (Pereira & Requeijo, 2012) defende que as regras são úteis na fase inicial de implementação do controlo estatístico, quando o processo ainda não se encontra estabilizado, mas o uso frequente das regras, com vista ao aumento da sensibilidade das cartas, deve ser evitado. Uma alternativa para aumentar a sensibilidade das cartas de controlo, para pequenas alterações, pode passar pela implementação de cartas de controlo CUSUM ou EWMA, que se demonstram mais eficazes a detetar causas especiais de variação, para variações inferiores a $2,5\sigma$ no parâmetro do processo (Pereira & Requeijo, 2012; Zaman et al., 2019; Freitas et al., 2019; Mukherjee et al., 2019).

2.2.3 RECOLHA DOS DADOS

A recolha de dados é uma etapa de extrema importância na implementação do SPC, uma vez que se esta recolha não for realizada devidamente, pode incorrer-se no risco de todas as conclusões retiradas das cartas de controlo e do controlo estatístico estarem erradas, indicando padrões e causas especiais de variação que na realidade podem não estar a ocorrer. Neste

sentido e com o objetivo de fornecer conclusões que espelhem a realidade do processo, deve ter-se especial atenção na definição da dimensão da amostra (n), do número de amostras (m) e da frequência da amostragem (Pereira & Requeijo, 2012).

Por forma a recolher amostras corretamente, Shewhart introduziu o *princípio dos subgrupos racionais*, que consiste na recolha de amostra de tal forma que se maximize a probabilidade de serem detetadas diferenças entre subgrupos e se minimize a probabilidade de serem detetadas diferenças dentro dos subgrupos (Montgomery, 2009).

Para garantir que este princípio é assegurado, procura-se que a constituição das amostras seja o mais homogénea possível, sendo que dentro de cada amostra, as unidades devem ser produzidas consecutivamente e de forma análoga. Para além disto é importante que as amostras sejam recolhidas em intervalos de tempo regulares. Aplicando estas técnicas, pretende-se que a variação dentro das amostras se deva a causas aleatórias e que a variação entre amostras seja um reflexo das causas especiais de variação. Ao aplicar este procedimento é ainda possível alcançar uma melhor estimativa do desvio padrão, quando se efetua o controlo de variáveis contínuas.

De uma forma geral, dimensões da amostra mais elevadas tornam mais fácil a deteção de pequenas alterações nos parâmetros do processo, pelo que se o objetivo for detetar alterações maiores, pode ser uma dimensão da amostra mais reduzida. Uma alternativa ao aumento da dimensão da amostra de forma a detetar pequenas alterações nas cartas de controlo tradicionais, pode passar pela utilização de cartas de controlo especiais, como a CUSUM e EWMA, que para pequenas alterações nos parâmetros do processo se demonstram mais eficazes (Montgomery, 2009; Pereira & Requeijo, 2012).

No mundo industrial, a dimensão amostral utilizada no controlo de variáveis contínuas é relativamente pequena, devido a questões económicas e operacionais. Ainda assim, geralmente utilizam-se amostras de dimensão 4 ou 5, uma vez que pelo Teorema do Limite Central é garantido que a distribuição das médias é aproximadamente Normal para dimensão igual ou superior a 4, mesmo que os valores individuais não sigam uma distribuição Normal (Pereira & Requeijo, 2012).

Em alguns casos, devido a limitações do processo produtivo, pode não ser possível ou viável recolher amostras, pelo que se tem de recorrer a uma análise baseada em observações individuais. Uma vez que neste caso não é possível calcular a dispersão amostral, cria-se uma medida da dispersão denominada Amplitude Móvel, que se calcula através da diferença entre o valor da observação atual e o valor da observação imediatamente anterior (Pereira & Requeijo, 2012).

Na Fase 1 do *SPC* para controlo de variáveis, é prática comum recolher entre 25 a 30 amostras de dimensão 4 ou 5, de forma a que hajam no mínimo 100 valores individuais (Pereira & Requeijo, 2012).

Contudo, Quesenberry discorda do valor supramencionado, afirmando que o critério não é suficiente. (Quesenberry, 1997) estabelece então uma relação entre a dimensão da amostra e o número de amostras a serem recolhidas na Fase 1 do controlo estatístico.

$$m \geq \frac{400}{(n-1)} \quad (2.4)$$

O autor refere ainda que no caso de observações individuais ($n=1$), devem ser recolhidas 300 observações na Fase 1.

2.2.4 CONDIÇÕES DE APLICABILIDADE

Para que a aplicação das cartas de controlo seja correta e rigorosa, os dados utilizados devem cumprir alguns requisitos. Com o intuito de não enviesar as conclusões do estudo, os dados recolhidos para realização do Controlo estatístico do processo devem ser aleatórios, independentes e devem seguir uma distribuição (aproximadamente) Normal.

2.2.4.1 ALEATORIEDADE

A aleatoriedade dos dados apresenta a incapacidade de prever o comportamento desses mesmos dados. Esta pode ser comprometida ao serem misturados dados de populações diferentes, através da correlação entre observações consecutivas ou desfasadas no tempo, entre outras. Os métodos mais utilizados na verificação da aleatoriedade dos dados são o Teste das Sequências, Teste das Sequências Ascendentes e Descendentes e o Teste Modificado do Quadrado das Médias Sucessivas (Pereira & Requeijo, 2012).

2.2.4.2 INDEPENDÊNCIA

A independência dos dados é outro pressuposto que necessita ser verificado para implementação das cartas de controlo. Afirmar que os dados recolhidos são independentes significa que o valor que a variável X assume num determinado instante t não depende do valor da variável no instante desfasado k instantes ($t-k$), com $k \geq 1$. Se tal não acontecer quer dizer que os dados não são independentes, ou seja, são dados Auto-Correlacionados. Para verificar este pressuposto devem ser aplicadas as Funções de Autocorrelação (FAC) e de Autocorrelação Parcial (FACP) (Montgomery, 2009; Pereira & Requeijo, 2012).

2.2.4.3 NORMALIDADE

O pressuposto da Normalidade dos dados implica que os valores relativos à característica da qualidade a estudar sigam uma distribuição Normal de média μ e variância σ^2 . Numa fase inicial pode elaborar-se um histograma para se verificar de forma visual se os dados seguem uma distribuição aproximadamente normal. O passo seguinte é a utilização do teste estatístico de Kolmogorov-Smirnov (KS) ou o teste do Qui-Quadrado para verificar a Normalidade dos dados (Pereira & Requeijo, 2012).

2.2.4.3.1 TESTE DE KOLMOGOROV-SMIRNOV

O teste de Kolmogorov-Smirnov, desenvolvido pelos matemáticos Andrey Nikolaevich Kolmogorov e Vladimir Yvanovich Smirnov, consiste na verificação do ajustamento da Função de distribuição amostral, para uma determinada variável aleatória X . Neste estudo apenas se fará menção à aplicação do teste K-S à distribuição Normal.

Sendo $S(x)$ a Função de Distribuição amostral e $F_0(x)$ a Função de Distribuição Normal, a metodologia para aplicação deste teste consiste nas seguintes hipóteses:

$$H_0: S(x) = F_0(x), \text{ para todos os valores de } x$$

$$H_1: S(x) \neq F_0(x), \text{ para algum valor de } x$$

O passo seguinte consiste em retirar-se da população uma amostra aleatória constituída por n elementos, ordenados por ordem crescente do seu valor, designando por $x(i)$ a observação de ordem i , onde $x(i+1) > x(i)$.

Determinam-se os valores de $S(x)$, $F_0(x)$ e $|S(x) - F_0(x)|$, para $i=1, 2, \dots, N$, em que $N \leq n$. De seguida define-se a estatística de teste:

$$D = \sup_x \text{remo} |S(x) - F_0(x)|$$

Ao estabelecer o nível de significância (α), determina-se o valor de $D_{\text{crítico}}$.

O critério utilizado para rejeição da Hipótese Nula (H_0) é o seguinte, para um nível de significância α :

$$D > D_{\text{crítico}}$$

A rejeição da Hipótese nula permite concluir que, para um nível de significância α , a distribuição amostral não segue uma distribuição Normal, pelo que, se não se rejeitar a Hipótese nula, não existem evidências estatísticas para garantir que a distribuição amostral não seja estatisticamente semelhante à distribuição Normal, com nível de significância α , admitindo-se então que a distribuição amostral é aproximadamente Normal.

2.2.5 TIPOS DE CARTAS DE CONTROLO

As cartas de controlo utilizadas para realizar o controlo estatístico univariado de um processo podem ser classificadas em duas categorias distintas: cartas de controlo de variáveis e cartas de controlo de atributos.

Estas cartas diferem no tipo de característica que está a ser estudada. As cartas de controlo de variáveis são utilizadas para controlar características mensuráveis e que possam ser expressas através de um espectro contínuo de valores, alguns exemplos sendo o peso, comprimento, densidade, entre outras. Quando a característica é do tipo contínuo, devem ser construídas duas cartas, uma para controlar o parâmetro de localização e outra para controlar o parâmetro de dispersão. Se, por outro lado, a característica estudada for do tipo discreto, como exemplo o número de defeitos por unidade ou o número de unidades não-conforme, então, são utilizadas

cartas de controlo de atributos. Neste caso, é apenas necessário construir uma carta, uma vez que o desvio padrão (dispersão) apenas depende da média (localização) e da dimensão da amostra.

A Tabela 2.1 e a

Tabela 2.2 resumem as cartas de controlo tradicionais mais utilizadas no controlo de variáveis e atributos, respetivamente, sendo que, seguidamente, apenas irão ser abordadas as cartas de controlo de variáveis, tendo em conta que serão estas as abordadas neste estudo de caso.

Tabela 2.1 - Cartas de Controlo de variáveis

Cartas de Controlo de Variáveis	
Tipo de Carta de Controlo	Contexto de Aplicação
Carta \bar{X} e Carta R	Média e Amplitude
Carta \bar{X} e Carta S	Média e Desvio Padrão
Carta \bar{X} e Carta S^2	Média e Variância
Carta \tilde{X} e Carta R	Mediana e Amplitude
Carta X e Carta MR	Observações Individuais e Amplitudes Móveis

Tabela 2.2 - Cartas de Controlo de atributos

Cartas de Controlo de Atributos	
Tipo de Carta de Controlo	Contexto de Aplicação
Carta p	Proporção de unidades não conformes
Carta np	Número de unidades não conformes
Carta c	Número de defeitos
Carta u	Número de defeitos por unidade

2.2.6 CARTAS DE CONTROLO DE VARIÁVEIS

As Cartas de controlo de variáveis são utilizadas para controlar estatisticamente características que se expressem através de uma gama contínua de valores. De forma a conduzir um estudo objetivo e rigoroso, o controlo estatístico deve ser iniciado com a verificação dos pressupostos de aleatoriedade, normalidade e independência dos dados, como referido mais aprofundadamente no subcapítulo 2.2.4.

É ainda importante manter presente a existência de duas Fases no controlo estatístico do processo: Fase 1, uma análise retrospectiva do processo, na qual são recolhidos e analisados os dados, tendo como objetivo garantir a estabilidade do processo; e Fase 2, onde os parâmetros do processo já são conhecidos, onde o objetivo principal se foca com a monitorização do processo.

2.2.7 FASE 1 – LIMITES DE CONTROLO E LINHA CENTRAL

2.2.7.1 CARTAS DE CONTROLO DA MÉDIA E DA AMPLITUDE

São recolhidas m amostras de dimensão n . Para cada amostra, é calculado o valor da média \bar{X}_i e amplitude R_i , calculados segundo as seguintes equações:

$$\bar{X}_i = \frac{\sum_{j=1}^n X_{ij}}{n} \quad (2.5)$$

$$R_i = X_{m\acute{a}x} - X_{m\acute{i}n} \quad (2.6)$$

Nesta fase, os parâmetros do processo são desconhecidos, pelo que, de forma a calcular os limites de controlo e a linha central das cartas da média e da amplitude, recorrem-se as equações seguintes:

$$\begin{aligned} LSC_{\bar{X}} &= \bar{\bar{X}} + A_2 \bar{R} \\ LC_{\bar{X}} &= \bar{\bar{X}} = \frac{\sum_{i=1}^m \bar{X}_i}{m} \\ LIC_{\bar{X}} &= \bar{\bar{X}} - A_2 \bar{R} \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} LSC_R &= D_4 \bar{R} \\ LC_R &= \bar{R} = \frac{\sum_{i=1}^m \bar{R}_i}{m} \\ LIC_R &= D_3 \bar{R} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Os valores das constantes A_2 , D_3 e D_4 correspondem a valores tabelados, que dependem da dimensão da amostra, podendo ser consultados através da tabela no Anexo A.

2.2.7.2 CARTAS DE CONTROLO DA MÉDIA E DO DESVIO PADRÃO

Nas Cartas de controlo da Média e do Desvio Padrão, o cálculo dos limites de controlo bem como a linha central dependem do cálculo do desvio padrão amostral, para cada amostra i , que se calcula através da seguinte fórmula:

$$S_i = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X}_i)^2}{n-1}} \quad (2.9)$$

Tendo o valor do desvio padrão amostral calculado para cada amostra, podem ser calculados os limites de controlo e a linha central para as Cartas de Controlo da Média e do Desvio Padrão, com recurso às equações 2.10 e 2.11, respetivamente:

$$\begin{aligned} LSC_{\bar{X}} &= \bar{\bar{X}} + A_3 \bar{S} \\ LC_{\bar{X}} &= \bar{\bar{X}} = \frac{\sum_{i=1}^m \bar{X}_i}{m} \\ LIC_{\bar{X}} &= \bar{\bar{X}} - A_3 \bar{S} \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} LSC_S &= B_4 \bar{S} \\ LC_S &= \bar{S} = \frac{\sum_{i=1}^m \bar{S}_i}{m} \\ LIC_S &= B_3 \bar{S} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Os valores das constantes A_3 , B_3 e B_4 podem ser consultados na tabela do Anexo A.

2.2.7.3 CARTAS DE CONTROLO DA MÉDIA E DA VARIÂNCIA

Nas Cartas de controlo da Média e da Variância, o cálculo dos limites de controlo bem como a linha central dependem do cálculo da variância amostral, para cada amostra i , que se calcula através da seguinte fórmula:

$$S_i^2 = \frac{\sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X}_i)^2}{n - 1} \quad (2.12)$$

Tendo o valor da variância amostral calculado para cada amostra, podem ser calculados os limites de controlo e a linha central para as Cartas de Controlo da Média e do Desvio Padrão, com recurso às equações 2.13 e 2.14, respetivamente:

$$\begin{aligned} LSC_{\bar{X}} &= \bar{\bar{X}} + 3 \sqrt{\frac{\bar{S}^2}{n}} \\ LC_{\bar{X}} &= \bar{\bar{X}} = \frac{\sum_{i=1}^m \bar{X}_i}{m} \\ LIC_{\bar{X}} &= \bar{\bar{X}} - 3 \sqrt{\frac{\bar{S}^2}{n}} \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} LSC_{S^2} &= \frac{\bar{S}^2}{n - 1} \chi^2_{(\alpha/2; n-1)} \\ LSC_{S^2} &= \bar{S}^2 = \frac{\sum_{i=1}^m \bar{S}_i^2}{m} \\ LSC_{S^2} &= \frac{\bar{S}^2}{n - 1} \chi^2_{(1-\alpha/2; n-1)} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Os valores de $\chi^2_{(\alpha/2; n-1)}$ e $\chi^2_{(1-\alpha/2; n-1)}$ correspondem aos valores críticos superior e inferior da distribuição do Qui-Quadrado (χ^2), respetivamente, com $(n-1)$ graus de liberdade. Estes valores correspondem aos percentis à direita e são calculados com nível de significância α .

2.2.7.4 CARTAS DE CONTROLO DA MEDIANA E DA AMPLITUDE

Nas Cartas de Controlo da Mediana e da Amplitude, são utilizadas, em geral, amostras com número ímpar de observações, fator que facilita o cálculo da mediana amostral, bem como uma dimensão da amostra igual nas diversas amostras recolhidas. Esta carta geralmente pode ser utilizada como alternativa à carta da média quando a dimensão da amostra é inferior ou igual a 10 observações.

De forma a calcular os limites de controlo destas cartas começa-se por calcular a mediana média, que irá corresponder à linha central da Carta da Mediana (\bar{X}), assim como a amplitude média, que, por sua vez, irá corresponder à linha central da Carta da Amplitude (R), que são calculados com base nas equações 2.15 e 2.16, respetivamente:

$$LC_{\bar{X}} = \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^m \tilde{X}_i}{m} \quad (2.15)$$

$$LC_R = \bar{R} = \frac{\sum_{i=1}^m R_i}{m} \quad (2.16)$$

Uma vez calculados os valores da mediana média e amplitude média, é possível calcular os limites de controlo das cartas, segundo as seguintes equações:

$$\begin{aligned} LSC_{\bar{X}} &= \bar{X} + \tilde{A}_2 \bar{R} \\ LIC_{\bar{X}} &= \bar{X} - \tilde{A}_2 \bar{R} \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} LSC_R &= D_4 \bar{R} \\ LIC_R &= D_3 \bar{R} \end{aligned} \quad (2.18)$$

As constantes D_3 e D_4 podem ser obtidas através da tabela presente no Anexo A. Em relação aos valores da constante \tilde{A}_2 , podem ser obtidos através da Tabela 2.3, para dimensão da amostra $n = 3, 5, 7, 9$.

Tabela 2.3 - Valores da constante \tilde{A}_2

n	3	5	7	9
\tilde{A}_2	1,187	0,691	0,508	0,412

2.2.7.5 CARTAS DE CONTROLO DE OBSERVAÇÕES INDIVIDUAIS E AMPLITUDES MÓVEIS

Quando não é possível recolher amostras com diversos valores, devido a questões económicas ou limitações do processo de produção, a amostra é constituída por observações individuais. O facto de o estudo ser baseado em observações individuais inviabiliza o cálculo de uma estatística que forneça informações sobre a dispersão. No sentido de colmatar este problema, recorrem-se a amostras fictícias, constituídas por observações consecutivas, entre as quais se calcula uma Amplitude Móvel, como é possível verificar na equação 2.19:

$$MR_i = |X_i - X_{i-1}| \quad (2.19)$$

Uma vez obtida uma estatística para a dispersão do processo, pode proceder-se ao cálculo dos limites de controlo e da linha central das Cartas de Controlo das Observações Individuais e das Amplitudes Móveis, segundo as equações 2.20 e 2.21, respetivamente.

$$\begin{aligned} LSC_X &= \bar{X} + 3 \frac{\overline{MR}}{d_2} \\ LC_X &= \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^m X_i}{m} \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$LIC_X = \bar{X} - 3 \frac{\overline{MR}}{d_2}$$

$$LSC_{MR} = D_4 \overline{MR}$$

$$LC_{MR} = \overline{MR} = \frac{\sum_{i=2}^{m-1} MR_i}{m} \quad (2.21)$$

$$LIC_{MR} = D_3 \overline{MR}$$

Os valores das constantes d_2 , D_3 e D_4 são calculados através da tabela do Anexo A. É importante notar que estes valores são calculados para dimensão da amostra, n , igual a dois, uma vez que é essa a dimensão da amostra fictícia utilizada para criação da estatística da dispersão do processo.

2.2.8 FASE 1 – ESTIMAÇÃO DOS PARÂMETROS DO PROCESSO

Depois de construídas as Cartas de Controlo e de ser garantida a estabilidade do processo, eliminando as causas especiais de variação e recalculando os limites de controlo, é, nesta altura, possível estimar os parâmetros do processo, média ($\hat{\mu}$) e desvio padrão ($\hat{\sigma}$).

Na Tabela 2.4 é exposto um resumo dos estimadores para os parâmetros do processo, de acordo com as Cartas de Controlo utilizadas.

Tabela 2.4 - Estimação dos parâmetros das cartas de controlo de atributos (Fase 1)

Carta	Média	Desvio Padrão
Cartas \bar{X} e R	$\hat{\mu} = \bar{\bar{X}}$	$\hat{\sigma} = \bar{R} / d_2$
Cartas \bar{X} e S		$\hat{\sigma} = \bar{S} / c_4$
Cartas \bar{X} e S		$\hat{\sigma} = \bar{S}^2$
Cartas \bar{X} e R	$\hat{\mu} = \bar{\bar{X}}$	$\hat{\sigma} = \bar{R} / d_2$
Cartas X e MR	$\hat{\mu} = \bar{X}$	$\hat{\sigma} = \overline{MR} / d_2$

2.2.9 FASE 2 – PARÂMETROS DO PROCESSO CONHECIDOS

Uma vez finalizada a Fase 1, o processo encontra-se sob controlo estatístico e estão estimados os parâmetros do processo, pelo que o principal objetivo da Fase 2 é monitorizar o processo.

Enquanto que os valores dos limites de controlo e da linha central na Fase 1 eram calculados com base nas amostras recolhidas na Fase 1, na Fase 2, esses limites são calculados com base na dimensão da amostra e parâmetros estimados na Fase 1. Na Tabela 2.5 é apresentado um

resumo dos limites de controlo e linha central para as Cartas de Controlo de Variáveis, quando os parâmetros do processo já são conhecidos.

Tabela 2.5 - Parâmetros das cartas de controlo de variáveis (Fase 2)

		LIC	LC	LSC
Cartas \bar{X} e R	Carta \bar{X}	$\mu - A\sigma$	μ	$\mu + A\sigma$
	Carta R	$D_1\sigma$	$d_2\sigma$	$D_2\sigma$
Cartas \bar{X} e S	Carta \bar{X}	$\mu - A\sigma$	μ	$\mu + A\sigma$
	Carta S	$B_5\sigma$	$c_4\sigma$	$B_6\sigma$
Cartas \bar{X} e S ²	Carta \bar{X}	$\mu - A\sigma$	μ	$\mu + A\sigma$
	Carta S ²	$\frac{\sigma^2}{n-1} \chi^2_{(1-\frac{\alpha}{2});n-1}$	σ^2	$\frac{\sigma^2}{n-1} \chi^2_{(\frac{\alpha}{2});n-1}$
Cartas \tilde{X} e R	Carta \tilde{X}	$\mu - A\sigma$	μ	$\mu + A\sigma$
	Carta R	$D_1\sigma$	$d_2\sigma$	$D_2\sigma$
Cartas X e MR	Carta X	$\mu - 3\sigma$	μ	$\mu + 3\sigma$
	Carta MR	$D_1\sigma$	$d_2\sigma$	$D_2\sigma$

Note-se que todas as constantes utilizadas podem ser calculadas através da tabela do Anexo A.

2.2.10 CAPACIDADE UNIVARIADA DO PROCESSO

Os engenheiros da qualidade desenvolvem as cartas de controlo com o intuito de controlar estatisticamente um determinado processo. Estas cartas de controlo, apesar de fornecerem muita informação relevante e indispensável ao controlo do processo, demonstram-se ineficazes na identificação da capacidade que o processo tem em produzir consistentemente de acordo com as especificações técnicas definidas.

A capacidade do processo reflete a variação devido às causas comuns de variação, ou seja, um processo pode estar sob controlo estatístico (no sentido em não existem causas especiais de variação), mas a distribuição que caracteriza o processo pode possuir uma variabilidade elevada relativamente às especificações estabelecidas (Oakland, 2003; Pereira & Requeijo, 2012). Assim, é possível ter processos controlados estatisticamente e que estejam a produzir fora dos limites de especificação, ou seja, sem capacidade. Isto significa que uma carta de controlo pode apenas conter causas comuns de variação e apesar disso, não estar a cumprir os requisitos de especificação (Oakland, 2003). A Figura 2.4 demonstra a influência que a variabilidade tem na capacidade do processo.

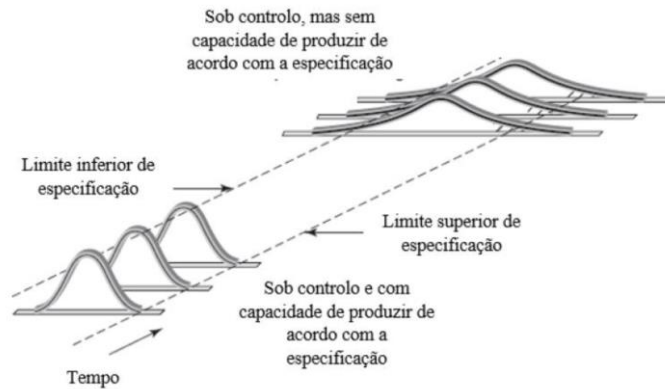


Figura 2.4 - Influência da variabilidade na capacidade do processo (adaptado de (Oakland, 2003))

Se um processo estiver controlado estatisticamente, mas não for capaz de produzir segundo a especificação necessária, devem ser aplicadas medidas para diminuir a variabilidade do processo, ajustar a média, ou ambos. Nestes casos, o Desenho de Experiências e os Métodos de Taguchi podem desempenhar um papel fundamental (Pereira & Requeijo, 2012).

São vários os fatores que podem influenciar a correta análise da capacidade do processo, como exemplo a independência dos dados e Normalidade. Torna-se fundamental distinguir duas metodologias a seguir de forma a analisar os dados de forma correta. Neste sentido foram desenvolvidos índices de capacidade para avaliar a capacidade de processos cujos dados seguem distribuições Normais, bem como índices de capacidade para processos não-normais.

2.2.11 ÍNDICES DE CAPACIDADE DO PROCESSO

Assumindo que o processo em estudo pode ser modelado segundo uma distribuição Normal, a análise da capacidade do processo tem como referência uma variação aceitável para o processo de 6σ , assumindo que os dados seguem uma distribuição Normal de média μ e desvio padrão σ . Isto significa que 99,73% dos dados se encontram no intervalo $\mu \pm 3\sigma$ (Montgomery, 2009; Pereira & Requeijo, 2012).

O estudo da capacidade do processo tem vindo a ser estudada e desenvolvida há muitos anos, podendo, atualmente ser considerados três gerações de índices de capacidade, tendo a primeira geração de índices de capacidade sido desenvolvida em 1974 por Juran (Juran, 1988), definida como índice C_p .

O índice C_p é definido, para processos com especificação bilateral por:

$$C_p = \frac{LSE - LIE}{6\sigma} \quad (2.22)$$

Na literatura, C_p é designado por índice de capacidade potencial, considerando-se, para processos já existentes e com especificação bilateral, $C_p = 1,33$ como um valor aceitável. Este índice de primeira geração é apenas aplicável a processos que possuam especificação bilateral.

Através de uma análise cuidada da fórmula deste índice é possível verificar que este apenas relaciona a amplitude da especificação (numerador) com a amplitude do processo

(denominador), pelo que nada informa sobre a localização do processo. Isto significa que o processo pode ter um $C_p > 1,33$ e estar a produzir produto não conforme porque a média do processo não está centrada com o valor nominal da especificação.

Os índices de capacidade de segunda e terceira geração surgiram para complementar o índice de Capacidade Potencial, considerando não só a dispersão do processo, mas também a média do mesmo. Os índices de segunda geração desenvolvidos correspondem ao C_{pk} e ao C_{pm} .

O índice de segunda geração, C_{pk} , introduzido por (Kane, 1986), é calculado através da equação 2.23.

$$C_{pk} = \min \left((C_{pk})_s, (C_{pk})_l \right) \quad (2.23)$$

Em que,

$$\begin{aligned} (C_{pk})_s &= \frac{LSE - \mu}{3\sigma} \\ (C_{pk})_l &= \frac{\mu - LIE}{3\sigma} \end{aligned} \quad (2.24)$$

O processo é considerado capaz de produzir dentro de especificação se $C_{pk} \geq 1,33$ para processos com especificação bilateral ou $C_{pk} \geq 1,25$ para processos com especificação unilateral (Montgomery, 2009). Quanto maior for o valor destes índices, maior é a capacidade de o processo produzir dentro de especificação. O processo diz-se centrado se $C_{pk} = (C_{pk})_s = (C_{pk})_l$.

O índice C_{pm} , desenvolvido por Taguchi & Hsiang (1985) adota um princípio semelhante ao índice C_p , diferenciando-se deste ao considerar no intervalo de tolerância natural do processo o desvio da média relativamente ao valor nominal (T) da característica. Este índice só é possível ser calculado quando a especificação é bilateral. O índice C_{pm} é definido por:

$$C_{pm} = \frac{LSE - LIE}{6\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}} \quad (2.25)$$

Analisando a fórmula para o cálculo do índice C_{pm} é possível verificar que quanto maior for o desvio da média (μ) relativamente ao valor nominal (T), maior será o valor do denominador, e consequentemente menor o valor global de C_{pm} , sendo então desejável que o valor do índice seja o maior possível, desta forma garantindo a redução da variabilidade do processo.

Por último, surge o índice de terceira geração, C_{pmk} , introduzido por (Pearn et al., 1992). Este índice calcula-se segundo a equação 2.26 e é semelhante ao índice C_{pk} , diferenciando-se deste da mesma forma que o C_{pm} se diferencia do C_p , considerando-se o desvio entre a média e o valor nominal da característica.

$$C_{pmk} = \min \left((C_{pmk})_s, (C_{pmk})_l \right) \quad (2.26)$$

Em que,

$$(C_{pmk})_S = \frac{LSE - \mu}{3\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}} \quad (2.27)$$

$$(C_{pmk})_I = \frac{\mu - LIE}{3\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}}$$

Após identificar todos os índices de capacidade, é importante definir critérios de forma a definir se o processo tem ou não a capacidade de produzir produto continuamente dentro de especificação. Vários estudos foram realizados no sentido de definir quais os valores a partir dos quais se pode considerar que um processo tem capacidade. Alguns desses autores são (Kane, 1986; Kotz & Johnson, 1993, 2002; Somerville & Montgomery, 1996; Spiring et al., 2003; Montgomery, 2009). Mais recentemente, a introdução da metodologia Seis-Sigma pressupõe uma capacidade igual a 2 no início do estudo (Pereira & Requeijo, 2012).

Na Tabela 2.6, são apresentados os valores mínimos dos índices de capacidade, segundo os estudos de (Montgomery, 2009), de acordo com o tipo de processo e característica e tipo de especificação.

Tabela 2.6 - Valores mínimos para garantir capacidade do processo

	Especificação Bilateral	Especificação Unilateral
Processos existentes	1,33	1,25
Novos Processos	1,50	1,45
Características de Segurança, Resistência ou Críticas em Processos Existentes	1,50	1,45
Características de Segurança, Resistência ou Críticas em Processos Novos	1,67	1,60

2.3 CONTROLO ESTATÍSTICO UNIVARIADO DO PROCESSO – PEQUENAS PRODUÇÕES

Com a industrialização e o mercado cada vez mais personalizado, as empresas vêm-se obrigadas a produzir lotes de pequena dimensão, o que se demonstra um problema para as cartas de Shewhart, uma vez que com a escassez dos dados não se torna possível a estimação dos parâmetros do processo. Com esta premissa em mente, Quesenberry desenvolve as Cartas Q, baseadas nos princípios de Shewhart, mas em que é possível fazer o controlo do processo, monitorização e estimação dos parâmetros em simultâneo, colmatando assim essa fraqueza das Cartas de Shewhart. As cartas Q, em conjunto com as Cartas Z (também uma alteração às cartas de Shewhart para produção em lotes de pequena dimensão ou produção de lotes de grande dimensão mas nos quais a produção ocorre muito rapidamente em termos temporais, nos quais os dados são suficientes para a estimação dos parâmetros do processo), surge o Controlo

Estatístico de “Pequenas Produções” (Short Run, na terminologia inglesa) (Pereira & Requeijo, 2012).

Segundo Pereira & Requeijo (2012), entende-se por “Pequena Produção” aquela em que:

- O número de unidades produzidas, de cada vez, é reduzido (< 20), com tempo entre produções elevado;
- O número de unidades produzidas é suficientemente grande (> 100), mas a produção ocorre rapidamente em termos temporais;
- Produção por lotes limitados ao longo do tempo.

À semelhança do que acontece com as cartas tradicionais, deve ser garantida a independência e Normalidade dos dados recolhidos. Da mesma forma que Shewhart realizava o controlo de variáveis e atributos nas cartas tradicionais, o mesmo é possível ser realizado em situação de *Short Run*. Para uma leitura mais completa sobre o controlo estatístico de *Short Run*, aconselha-se a leitura da seguinte bibliografia: (Wheeler, 1992; Castillo et al., 1996; Quesenberry, 1997; Wise & Fair, 1998; Montgomery, 2009; Pereira & Requeijo, 2012; Montgomery & Runger, 2013).

2.3.1 TIPOS DE CARTAS DE CONTROLO DE VARIÁVEIS PARA SHORT RUNS

Existem várias Cartas de Controlo de Variáveis que podem ser utilizadas em situação de *Short Run*, podendo estas ser divididas em dois grupos relacionados com a existência ou não de dados suficientes para estimar os parâmetros do processo. Assim sendo, Pereira & Requeijo (2012) sugere a seguinte caracterização das Cartas de Controlo de variáveis, visível na Tabela 2.7.

Tabela 2.7 - Cartas de Controlo de Variáveis para *Short Runs*

	Tipo de Carta
Dados suficientes para estimar os parâmetros do processo	<ul style="list-style-type: none"> • Cartas D • Cartas Z e W
Dados insuficientes para estimar os parâmetros do processo	<ul style="list-style-type: none"> • Cartas Q • Cartas CUSUMQ ou EWMAQ

Neste estudo apenas serão abordadas e utilizadas as Cartas Z e W, no caso de o número de dados ser suficiente para a estimação dos parâmetros do processo e as Cartas Q, caso contrário.

2.3.2 CARTAS DE CONTROLO Z E W

As Cartas de Controlo Z e W são utilizadas para controlar estatisticamente diferentes características da qualidade numa única carta, independentemente do valor das variâncias dos diferentes processos. De forma a possibilitar que sejam estudadas várias características na mesma carta é realizada uma adimensionalização das estatísticas em estudo, realizando este procedimento para os valores da média, variância, desvio padrão ou amplitude de cada uma das características em análise. A grande vantagem que as cartas Z e W fornecem ao Controlo Estatístico do Processo corresponde ao facto de não ser necessário realizar uma carta para

monitorizar cada característica, mas, desta forma todas as características ficam aglomeradas em um único documento (duas cartas: uma para monitorizar o parâmetro de localização e outra para monitorizar o parâmetro da dispersão). Desta forma é aumentada a eficiência e eficácia da organização, conseguindo garantir a monitorização dos processos e ao mesmo tempo facilitando a análise para todos os intervenientes.

As transformações efetuadas aos dados são realizadas através das estimativas dos parâmetros dos processos obtidos através da aplicação da Fase 1 do *SPC*, pelo que estas cartas são utilizadas, de um modo geral, na Fase 2 do Controlo Estatístico do Processo.

Segundo Pereira & Requeijo (2012) as cartas Z e W apresentam uma grande vantagem relativamente às cartas de Diferenças D, uma vez podem ser representadas, na mesma carta de controlo, todas as estatísticas de qualquer produto (devido à transformação dos dados, transformando-os em valores adimensionais), pelo que, defendem que ainda que as variâncias dos processos não sejam significativamente diferentes, se devem utilizar as cartas Z e W em detrimento das cartas D.

Relativamente aos princípios subjacentes a estas cartas, estes mantêm-se os mesmos das cartas de Shewhart, ou seja, a recolha de dados, frequência de amostragem adequada ao processo, bem como o nível de significância ($\alpha = 0,27\%$). Todas as regras de deteção de padrões não aleatórios presentes na (*ISO 7870-2:2013 - Control charts — Part 2: Shewhart control charts*, 2013) são aplicáveis às cartas Z e W.

2.3.2.1 CARTAS DA MÉDIA E AMPLITUDE

Relativamente à característica em estudo, X, são recolhidos dados e agrupados em m amostras de dimensão n_i . Determinam-se os respetivos valores das médias e amplitudes amostrais. Os valores das estatísticas Z e W, em cada instante i, são determinados com base nas seguintes equações.

$$(Z_i)_j = \left[\frac{\bar{X}_i - \mu}{\sigma_{\bar{x}}} \right]_j = \left[\frac{\bar{X}_i - \mu}{\sigma / \sqrt{n_i}} \right]_j \quad (2.28)$$

$$(W_i)_j = \left[\frac{R_i}{d_2 \sigma} \right]_j = \left[\frac{R_i}{\bar{R}} \right]_j \quad (2.29)$$

Em que,

$(n_i)_j$ - dimensão da amostra i, para o produto j

$(\bar{X}_i)_j$ - média da amostra i para o produto j

$(R_i)_j$ - amplitude da amostra i para o produto j

$(\mu)_j$ - média do processo, relativamente à característica X, para o produto j

$(\sigma)_j$ - desvio padrão do processo, relativamente à característica X, para o produto j

A constante d_2 é calculada através da tabela do Anexo A.

Como referido anteriormente, as cartas Z são, geralmente, utilizadas na Fase 2 do Controlo Estatístico, pelo que os valores da média, μ , e desvio padrão, σ , do processo, são estimados a partir das cartas de controlo tradicionais, previamente construídas na Fase 1.

Os limites de controlo e respetiva linha central das cartas Z e W_R são definidos pelas seguintes equações.

$$\begin{aligned} LSC_Z &= 3 \\ LC_Z &= 0 \\ LSC_Z &= -3 \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned} LSC_{W_R} &= D_4 \\ LC_{W_R} &= 1 \\ LSC_{W_R} &= D_3 \end{aligned} \quad (2.31)$$

Os valores das constantes D_3 e D_4 são calculados através da tabela apresentada no Anexo A.

Uma vez calculadas as estatísticas e limites de controlo, é altura de construir as cartas de controlo, que são construídas por ordem cronológica, representando os valores das variáveis $(Z_i)_j$ e $(W_i)_j$ nas cartas, independentemente do produto a que se referem. Como é possível analisar, os limites de controlo da carta Z são independentes da dimensão da amostra, o que não pode ser dito em relação à carta W, pelo que, se aconselha a utilização de amostras com a mesma dimensão de forma a mitigar a variação dos limites de controlo na carta W (Pereira & Requeijo, 2012).

2.3.2.2 CARTAS DA MÉDIA E DESVIO PADRÃO

Estas cartas têm um procedimento de construção bastante semelhante às Cartas da média e da amplitude, sendo que neste caso, ao invés de se determinarem os valores de médias e amplitudes amostrais, determinam-se os valores de médias e desvios padrão amostrais. Desta forma, a estatística e os limites de controlo da variável Z são calculados de acordo com as equações 2.28 e 2.30, enquanto que a estatística W_s e os respetivos limites de controlo e linha central são definidos pelas seguintes equações.

$$(W_i)_j = \left[\frac{S_i}{c_4 \sigma} \right]_j = \left[\frac{S_i}{\bar{S}} \right]_j \quad (2.32)$$

Em que,

$(S_i)_j$ - desvio padrão da amostra i para o produto j

$(\bar{S}_i)_j$ - média dos desvios padrão amostrais para o produto j

A constante c_4 é calculada através da tabela do Anexo A.

Todas as considerações tecidas anteriormente sobre a média e o desvio padrão do processo, mantém-se válidas nestas cartas, pelo que estes parâmetros se consideram estimados através das cartas tradicionais utilizadas na Fase 1 do SPC.

Os limites de controlo da carta W_s são determinados por:

$$\begin{aligned} LSC_{W_s} &= B_4 \\ LC_{W_s} &= 1 \\ LSC_{W_s} &= B_3 \end{aligned} \quad (2.33)$$

Os valores das constantes B_3 e B_4 são calculados através da tabela no Anexo A e dependem exclusivamente da dimensão amostral, pelo que se aconselha o uso de dimensão amostral constante em todos os produtos de forma a que os limites de controlo da carta W_s sejam constantes. De igual forma às cartas da média e da amplitude, estas cartas devem ser construídas cronologicamente, independentemente do produto.

2.3.2.3 CARTAS DE OBSERVAÇÕES INDIVIDUAIS E AMPLITUDE MÓVEL

Quando não é possível recolher amostras para controlo estatístico, devido a limitações da produção, ou à grande diversidade de produtos, tem de recorrer-se a observações individuais. Neste caso, as variáveis Z e W são definidas por:

$$(Z_i)_j = \left[\frac{X_i - \mu}{\sigma} \right]_j \quad (2.34)$$

$$(W_i)_j = \left[\frac{MR_i}{d_2 \sigma} \right]_j = \left[\frac{MR_i}{\overline{MR}} \right]_j \quad (2.35)$$

Em que,

$(MR_i)_j$ - amplitude móvel no instante i para o produto j

$(\overline{MR})_j$ - média das amplitudes móveis para o produto j

A constante c_4 é calculada através da tabela do Anexo A.

Neste caso, os limites de controlo das cartas Z e W_{MR} são obtidos através das seguintes equações:

$$\begin{aligned} LSC_Z &= 3 \\ LC_Z &= 0 \\ LSC_Z &= -3 \\ LSC_{W_{MR}} &= D_4 \\ LC_{W_{MR}} &= 1 \\ LSC_{W_{MR}} &= D_3 \end{aligned} \quad (2.36)$$

$$\quad (2.37)$$

As constantes D_3 e D_4 é calculada através da tabela do Anexo A.

Uma vez que as constantes utilizadas dependem da dimensão da amostra (neste caso dependem do número de observações individuais utilizadas para a criação da estatística MR), é possível que os limites da carta W sejam variáveis. Desta forma, e de acordo com o que se

prática no panorama industrial, utilizam-se duas observações individuais para a determinação da amplitude móvel.

2.3.3 CAPACIDADE DO PROCESSO (NAS CARTAS Z)

A análise da capacidade do processo tem como intuito principal compreender se o processo em estudo tem robustez para produzir continuamente segundo uma especificação pré-definida. Uma vez que as cartas Z se aplicam, na generalidade dos casos, à Fase 2 do SPC, está garantido que os processos estejam sob controlo estatístico, pelo que nesta fase se fará a monitorização do processo. Quando se estudam “pequenas produções”, a análise da capacidade do processo torna-se mais ambígua, uma vez que se torna necessário estudar a capacidade do processo em tempo real, à medida que estão a ser recolhidos os dados. Desta forma Pereira & Requeijo (2012) sugere a utilização de dois índices, designados por Z_I e Z_S , que são calculados em todos os instantes em que são recolhidos dados e representados na carta Z. Estes índices representam uma transformação dos índices $(C_{pk})_s$ e $(C_{pk})_I$. Um processo bilateral é considerado capaz de produzir consistentemente segundo as especificações pré-definidas se:

$$\begin{aligned} (Z_I)_j &= \left(\frac{LIE - \mu}{k \sigma} \right)_j \leq -3 \\ (Z_S)_j &= \left(\frac{LSE - \mu}{k \sigma} \right)_j \geq 3 \end{aligned} \quad (2.38)$$

No caso de o processo apenas possuir especificação unilateral, o critério de decisão passa a corresponder exclusivamente ao índice de capacidade respetivo (apenas limite de especificação unilateral inferior utiliza apenas $(Z_I)_j$, e limite de especificação unilateral superior utiliza apenas $(Z_S)_j$).

Em relação à constante k , Pereira & Requeijo (2012) defende que se deve utilizar $k = 1,33$ para especificações bilaterais e $k = 1,25$ para especificações unilaterais.

As estimativas, em cada instante, dos índices de capacidade, são obtidas através das estimativas dos parâmetros do processo nesse mesmo instante, sendo que o valor dos parâmetros estimados $(\hat{\mu})_j$ e $(\hat{\sigma})_j$ sofre um processo de constante atualização, à medida que são recolhidos novos dados produtivos. Assim sendo, os índices, calculados em cada instante r , são calculados de acordo com as seguintes equações:

$$\begin{aligned} (\hat{Z}_I)_j &= \left(\frac{LIE - \hat{\mu}_r}{k \hat{\sigma}_r} \right) \\ (\hat{Z}_S)_j &= \left(\frac{LSE - \hat{\mu}_r}{k \hat{\sigma}_r} \right) \end{aligned} \quad (2.39)$$

As estimativas dos parâmetros do processo dependem das cartas que são utilizadas, sendo que de seguida são apresentados os cálculos para todas as cartas apresentadas.

$$\hat{\mu}_r = \bar{\bar{X}}_r \text{ (amostras) OU } \hat{\mu}_r = \bar{X}_r \text{ (Obs. Individuais)} \quad (2.40)$$

$$\hat{\sigma}_r = \frac{\bar{S}_r}{c_4} \text{ OU } \hat{\sigma}_r = \frac{\bar{R}_r}{d_2} \text{ OU } \hat{\sigma}_r = \frac{\overline{MR}_r}{d_2} \quad (2.41)$$

Em que,

$$\bar{\bar{X}}_r = \frac{1}{r} \left((r-1)\bar{\bar{X}}_{r-1} + \bar{X}_r \right), r = 2, 3, \dots \quad (2.42)$$

$$\bar{X}_r = \frac{1}{r} \left((r-1)\bar{X}_{r-1} + X_r \right), r = 2, 3, \dots \quad (2.43)$$

$$\bar{S}_r = \frac{1}{r} \left((r-1)\bar{S}_{r-1} + S_r \right), r = 2, 3, \dots \quad (2.44)$$

$$\bar{R}_r = \frac{1}{r} \left((r-1)\bar{R}_{r-1} + R_r \right), r = 2, 3, \dots \quad (2.45)$$

$$\overline{MR}_r = \frac{1}{r} \left((r-1)\overline{MR}_{r-1} + MR_r \right), r = 2, 3, \dots \quad (2.46)$$

Uma particularidade destes índices corresponde à possibilidade de perceber se os processos, para além de terem capacidade, se estão centrados com a especificação técnica, tal acontece quando $(Z_I)_j$ e $(Z_S)_j$ são simétricos.

Quando são detetadas causas especiais de variação, não são calculados os índices de capacidade, nem são utilizados os valores recolhidos para realizar a estimação dos parâmetros do processo, uma vez que foram esses os dados que contribuíram para a causa especial e se fossem utilizados, poderiam enviesar de forma significativa as estimativas dos parâmetros do processo.

2.3.4 CARTAS DE CONTROLO Q

A forte evolução industrial que se tem vindo a desenvolver ao longo das décadas teve impacto tanto na forma como as empresas e organizações planeiam o controlo da qualidade bem como na exigência da sociedade como clientes. Cada vez mais as organizações têm de garantir que cada cliente tem exatamente o produto que procura, uma vez que a feroz competição industrial significa que cada vez existem mais alternativas entre as quais os clientes podem escolher. Desta forma, muitas vezes e cada vez mais, as organizações efetuam as produções em pequenos lotes, ou até mesmo, em certos casos, em produção unitária, o que, para o Controlo Estatístico do Processo, é um problema, uma vez que desta forma pode não ser possível estimar os parâmetros do processo, que, por sua vez, inviabiliza a utilização de cartas Z e W (e das tradicionais cartas de Shewhart).

Atento aos desenvolvimentos da indústria e verificando uma clara inviabilidade nos métodos de SPC desenvolvidos até então, Quesenberry (1997) desenvolve uma nova metodologia que consiste na transformação das estatísticas referentes a uma característica da qualidade X em variáveis Q. Esta transformação garante que a variável Q segue aproximadamente a distribuição Normal reduzida (média zero e variância unitária). Uma das condições de aplicabilidade desta metodologia é que os dados referentes à característica da qualidade X sejam independentes e identicamente distribuídos de acordo com uma distribuição Normal, $X \sim N(\mu; \sigma^2)$.

Uma vez que não é possível realizar uma estimativa dos parâmetros do processo anteriormente ao início do estudo, com a aplicação desta metodologia está a ser realizada, em simultâneo a estimação dos parâmetros, bem como a monitorização do processo.

2.3.4.1 CARTAS Q PARA A MÉDIA E VARIÂNCIA

Quando, apesar de não existirem dados suficientes para estimação dos parâmetros do processo, os dados recolhidos correspondem a amostras de dimensão igual ou superior a dois, são utilizadas as cartas $Q(\bar{X})$ e $Q(S^2)$. Desta forma, define-se, através da média amostral, a estatística $Q(\bar{X})$, definida pela seguinte equação:

$$Q_i(\bar{X}_i) = \Phi^{-1}\left(G_{n_1+\dots+n_{i-1}}(\omega_i)\right) = \Phi^{-1}\left(G_{v_1+\dots+v_i}(\omega_i)\right), i = 2, 3, \dots \quad (2.47)$$

Em que $v_i = n_i - 1$.

A construção da Carta $Q(\bar{X})$ é construída através do par $(i, Q_i(\bar{X}_i))$.

O controlo do parâmetro de dispersão é realizado através da carta $Q(S^2)$, cuja estatística se baseia nas variâncias amostrais e é calculada segundo a seguinte equação.

$$Q_i(S^2_i) = \Phi^{-1}\left(F_{n_{i-1}; n_1+\dots+n_i}(\theta_i)\right) = \Phi^{-1}\left(F_{v_1+\dots+v_{i-1}}(\theta_i)\right), i = 2, 3, \dots \quad (2.48)$$

Em que $v_i = n_i - 1$.

2.3.4.2 CARTAS Q PARA OBSERVAÇÕES INDIVIDUAIS E AMPLITUDES MÓVEIS

$$Q_r(X_r) = \Phi^{-1}\left[G_{r-2}\left(\sqrt{\frac{r-1}{r}}\left(\frac{X_r - \bar{X}_{r-1}}{S_{r-1}}\right)\right)\right], r = 3, 4, 5, \dots \quad (2.49)$$

$$Q_r(MR_r) = \Phi^{-1}\left[F_{1,v}\left(\frac{vMR_r^2}{MR_2^2 + MR_4^2 + \dots + MR_{r-2}^2}\right)\right], r = 4, 6, \dots \quad (2.50)$$

$$v = \frac{r}{2} - 1 \quad (2.51)$$

$$MR_i = |X_{i-1} - X_i| \quad (2.52)$$

2.3.5 CAPACIDADE DO PROCESSO (NAS CARTAS Q)

À semelhança do que foi dito acerca do estudo de capacidade do processo das cartas Z, nas cartas Q os índices de capacidade também são determinados através de uma transformação do índice de capacidade tradicional C_{pk} . Nas cartas Q o estudo da capacidade é realizado em tempo real, de forma a detetar o mais rapidamente possível quaisquer faltas de capacidade que possam colocar em risco a habilidade do processo produzir consistentemente produto conforme.

De forma a determinar a capacidade do processo, surgem então os índices Q_I e Q_S , que são calculados e é verificada a capacidade do processo, segundo as seguintes equações.

$$(Q_I)_j = \left(\frac{LIE - \mu}{k \sigma}\right)_j \leq -3 \quad (2.53)$$

$$(Q_S)_j = \left(\frac{LSE - \mu}{k \sigma}\right)_j \geq 3 \quad (2.54)$$

A constante k utilizada corresponde a 1,33 no caso de especificações bilaterais e 1,25 para especificações unilaterais. As restantes considerações relativamente aos índices de capacidade apresentados na secção 2.2.11 permanecem válidas para os índices de capacidade Q .

Como foi exposto anteriormente, os índices de capacidade são calculados em tempo real, em cada instante que são recolhidos dados, pelo que, naturalmente, as estimativas dos parâmetros do processo também vão sendo atualizadas sempre que são recolhidos dados. É importante notar que no caso dos dados recolhidos não se encontrarem dentro dos limites de controlo do processo, então esses dados não serão utilizados nas estimativas dos parâmetros uma vez que estariam a enviesar e trazer erro para o controlo estatístico. Deste modo, os valores dos índices de capacidade, estimados em cada instante j , são dados pelas seguintes equações.

$$(\hat{Q}_I)_j = \left(\frac{LIE - \hat{\mu}_r}{k \hat{\sigma}_r} \right)_j \quad (2.55)$$

$$(\hat{Q}_S)_j = \left(\frac{LSE - \hat{\mu}_r}{k \hat{\sigma}_r} \right)_j \quad (2.56)$$

As estimativas dos parâmetros do processo, são calculadas através das seguintes equações.

$$\hat{\mu}_r = \bar{\bar{X}}_r \text{ (amostras) OU } \hat{\mu}_r = \bar{X}_r \text{ (Obs. Individuais)} \quad (2.57)$$

$$\hat{\sigma}_r = \frac{S_{p,r}}{c_4} \text{ (amostras) OU } \hat{\sigma}_r = \frac{S_r}{c_4} \text{ (Obs. Individuais)} \quad (2.58)$$

Em que,

$$\bar{\bar{X}}_r = \frac{1}{r} \left((r-1)\bar{\bar{X}}_{r-1} + \bar{X}_r \right), r = 2, 3, \dots \quad (2.59)$$

$$\bar{X}_r = \frac{1}{r} \left((r-1)\bar{X}_{r-1} + X_r \right), r = 2, 3, \dots \quad (2.60)$$

$$S_{p,r} = \sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2 + \dots + (n_i-1)S_i^2}{n_1 + \dots + n_i - 1}} \quad (2.61)$$

$$S_r = \sqrt{\left(\frac{r-2}{r-1} \right) S_{r-1}^2 + \frac{1}{r} (X_r - \bar{X}_{r-1})^2}, r = 2, 3, \dots \quad (2.62)$$

A constante c_4 é calculada com base na tabela presente no Anexo A. Ao contrário do que acontece com as cartas Z , quando um processo não apresenta capacidade procede-se ao reinício do estudo, enquanto que nas cartas Z apenas se agia sobre o processo e se ignoravam esses dados para a realização das estatísticas dos parâmetros do processo.

2.4 CONTROLO ESTATÍSTICO MULTIVARIADO DO PROCESSO

As cartas de controlo multivariadas correspondem a outro desenvolvimento na temática do *SPC*, que vêm colmatar uma das fragilidades do *SPC* univariado (Cartas de Shewhart, Cartas de Controlo Especiais e Controlo Estatístico de “Pequenas Produções”) que corresponde ao facto destas cartas de controlo apenas permitirem analisar uma característica da qualidade.

Através do *SPC* multivariado (*MSPC*) é possível monitorizar e controlar várias (p) características da qualidade em simultâneo. Este desenvolvimento torna o *SPC* uma ferramenta mais complexa, mas mais robusta para o mercado industrial, sendo a sua utilização facilitada pelo poder computacional que existe atualmente à disposição das organizações.

Como referido anteriormente, na exposição do Controlo Estatístico tradicional, quando se estuda uma característica da qualidade, existe uma probabilidade de 0,27% de existirem falsos alarmes, o mesmo significa que existe uma probabilidade de 0,27% de um ponto estar fora dos limites de controlo, valor ao qual se atribui a designação de risco do tipo I, ou α . Quando um processo está controlado estatisticamente, mas estão a ser controladas duas características da qualidade, o risco do tipo I, ou seja, o risco de, simultaneamente, as variáveis se encontrarem fora dos limites de controlo é de $(1 - (1 - 0,0027))(1 - 0,0027) = 0,0054$, ou seja 0,54%, valor este superior ao risco do tipo I em *SPC* univariado.

Consoante o número de características em estudo (p) vai aumentando, o valor de α vai sendo alterado, podendo, então, ser calculado em função do risco do tipo I de cada característica α_i :

$$\alpha = P(\text{erro do tipo I}) = 1 - \prod_{i=1}^p (1 - \alpha_i)$$

A probabilidade de todos os pontos das p características pertencerem, em simultâneo, ao intervalo definido pelos limites de controlo é dada por:

$$P = P(p \text{ pontos dentro dos limites de controlo}) = \prod_{i=1}^p (1 - \alpha_i)$$

À semelhança do que é realizado no *SPC* univariado, também no *MSPC* se distinguem duas fases distintas: a Fase 1, onde se realiza um estudo retrospectivo do processo e se procede à estimativa dos parâmetros do processo; e a Fase 2, onde ocorre a monitorização, em tempo real, do processo em estudo.

2.4.1 CARTAS DE CONTROLO MULTIVARIADAS TRADICIONAIS

O Controlo Estatístico Multivariado foi introduzido pela primeira vez por Alt (1985), tendo-se baseado no conceito da estatística T^2 desenvolvida por Hotelling (1947). De forma análoga ao controlo estatístico univariado, o *MSPC* também se pode dividir em duas fases, a Fase 1 e a Fase 2. Na Fase 1 são recolhidos dados referentes às características da qualidade em estudo. Segundo Pereira & Requeijo (2012) devem ser recolhidos em simultâneo pelo menos 100 medições por cada característica em estudo. Através destes dados é possível proceder à estimativa dos parâmetros do processo, ou seja, o vetor média e a matriz das covariâncias do processo. Posteriormente, é implementada a Fase 2 do *MSPC*, no qual se procede, em tempo real, à monitorização do processo, com base nos parâmetros estimados na Fase 1. Após recolhidas amostras suficientes (m) que pertençam ao intervalo definido pela equação 2.63, inicia-se o controlo estatístico através de uma nova carta, a carta χ^2 (Pereira & Requeijo, 2012).

$$\frac{800p}{3(n-1)} \leq m \leq \frac{400p}{n-1} \quad (2.63)$$

A metodologia a seguir quando se pretende implementar o MSPC encontra-se explicada, sinteticamente no seguinte fluxograma:



Figura 2.5 - Metodologia para implementação do Controle Estatístico Multivariado do Processo (MSPC)

A aplicação destas cartas de controlo pressupõe os princípios de aleatoriedade, independência e Normalidade dos dados recolhidos, conceitos e técnicas a utilizar abordados na secção 2.2.4. Pressupõe-se ainda que a distribuição das p características em estudo seja modelada por uma distribuição Normal multivariada $N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, com o vetor média $\boldsymbol{\mu}^T = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p)$ e a matriz das covariâncias $\boldsymbol{\Sigma}$.

2.4.2 TIPOS DE CARTAS DE CONTROLO

2.4.2.1 AMOSTRAS

Fase 1 – Carta T^2

Na Fase 1 da implementação da carta multivariada T^2 , procede-se à recolha de m amostras de dimensão n , para cada uma das p características da qualidade em estudo. As médias, variâncias

e covariâncias amostrais são calculadas com base nas observações individuais X_{ijk} ($i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, p; k = 1, 2, \dots, m$), sendo calculadas através das seguintes equações:

$$\bar{X}_{jk} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{ijk} \quad (2.64)$$

$$S^2_{jk} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_{ijk} - \bar{X}_{jk})^2 \quad (2.65)$$

$$S_{jhk} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_{ijk} - \bar{X}_{jk})(X_{ihk} - \bar{X}_{hk}); j \neq h \quad (2.66)$$

De forma a calcular o vetor média ($\bar{\mathbf{X}}$) e a matriz das covariâncias (\mathbf{S}) procede-se ao cálculo das médias amostrais, variâncias e covariâncias amostrais, respetivamente, através das seguintes expressões:

$$\bar{X}_j = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \bar{X}_{jk} \quad (2.67)$$

$$\bar{S}_{jj} = \bar{S}^2_j = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m S^2_{jk} \quad (2.68)$$

$$\bar{S}_{jh} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m S_{jhk}; j \neq h \quad (2.69)$$

Assim, torna-se possível determinar o vetor média e a matriz das covariâncias, que são definidos por:

$$\bar{\mathbf{X}} = (\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_p)^T \quad (2.70)$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \bar{S}_{11} & \cdots & \bar{S}_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{S}_{p1} & \cdots & \bar{S}_{pp} \end{bmatrix} \quad (2.71)$$

O vetor $\bar{\mathbf{X}}_k$ é determinado pelas médias das p características da amostra k :

$$\bar{\mathbf{X}}_k = (\bar{X}_{1k}, \bar{X}_{2k}, \dots, \bar{X}_{pk})^T \quad (2.72)$$

Em cada instante k , a estatística que será controlada e representada graficamente na carta de controlo é denominada de *Hotelling* T^2 e é definida através da seguinte expressão:

$$(T^2)_k = n(\bar{\mathbf{X}}_k - \bar{\mathbf{X}})^T \mathbf{S}^{-1}(\bar{\mathbf{X}}_k - \bar{\mathbf{X}}) \quad (2.73)$$

De forma a representar graficamente a carta de controlo T^2 , é necessário definir os limites de controlo, os quais são calculados através das seguintes expressões:

$$LSC_{T^2} = \frac{p(m-1)(n-1)}{mn-m-p+1} F_{\alpha; p, mn-m-p+1} \quad (2.74)$$

$$LIC_{T^2} = 0 \quad (2.75)$$

Deteta-se uma causa especial de variação sempre que o valor, no instante k , da estatística T^2 seja superior ao limite superior de controlo da carta. Sempre que seja detetada uma causa especial de variação, as amostras relativamente aos pontos fora dos limites são retiradas da

carta, recalculando-se os valores de $\bar{\bar{X}}$ e \mathbf{S} . Quando todos os pontos fora dos limites de controlo forem retirados da carta T^2 , considera-se que o processo se encontra sob controlo estatístico, podendo nesta altura ser realizada a estimativa dos parâmetros do processo, sendo $\bar{\bar{X}}$ o estimador de μ e \mathbf{S} o estimador de Σ .

Fase 2 – Carta T^2

Nesta fase, considera-se que o processo está sob controlo estatístico, pelo que, a partir deste momento será realizado o controlo do processo em tempo real, a partir dos dados provenientes da Fase 1, sendo T^2 a estatística utilizada e sendo esta calculada segundo a equação 2.73. Nesta carta os limites de controlo são determinados através das seguintes expressões:

$$LSC_{T^2} = \frac{p(m+1)(n-1)}{mn-m-p+1} F_{\alpha;p,mn-m-p+1} \quad (2.76)$$

$$LIC_{T^2} = 0 \quad (2.77)$$

A deteção de causas especiais de variação é realizada de forma análoga à utilizada na Fase 1. Sempre que seja detetada uma causa especial de variação, deve ser identificada a variável (ou variáveis ou covariância entre variáveis) responsável por essa situação, procedendo-se de seguida à tomada de ações corretivas no processo

Fase 2 – Carta χ^2

Quando o processo permanece sob controlo estatístico durante um longo período de tempo, pode considerar-se que este tem vindo a demonstrar garantias de estar sob controlo estatístico. Nesse caso, os parâmetros μ e Σ são dados como conhecidos e estáveis. Deste modo, o controlo estatístico pode passar a ser representado através da estatística χ^2 , que é calculada, em cada instante k , através da seguinte equação:

$$(\chi^2)_k = n(\bar{\mathbf{X}}_k - \mu)^T \Sigma^{-1} (\bar{\mathbf{X}}_k - \mu) \quad (2.78)$$

Os limites de controlo desta carta são dados por:

$$LSC_{T^2} = \chi_{\alpha;p}^2 \quad (2.79)$$

$$LIC_{T^2} = 0$$

De forma semelhante ao que ocorre na Fase 2 da Carta T^2 , sempre que é detetada uma situação de causa especial de variação, ou seja, falta de controlo estatístico, deve ser identificada a variável (ou variáveis, ou covariância entre variáveis) responsável por essa causa especial, de modo a serem tomadas medidas corretivas no processo.

2.4.2.2 OBSERVAÇÕES INDIVIDUAIS

Fase 1 – Carta T^2

Na Fase 1 da implementação da carta multivariada T^2 , procede-se à recolha de m observações individuais, para cada uma das p características da qualidade em estudo. As médias, variâncias e covariâncias são calculadas com base nas observações individuais X_{jk} ($j = 1, 2, \dots, p; k = 1, 2, \dots, m$), sendo calculadas através das seguintes equações:

$$\bar{X}_j = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^n X_{jk} \quad (2.80)$$

$$S^2_j = \frac{1}{m-1} \sum_{k=1}^n (X_{jk} - \bar{X}_j)^2 \quad (2.81)$$

$$S_{jh} = \frac{1}{m-1} \sum_{k=1}^n (X_{jk} - \bar{X}_j)(X_{hk} - \bar{X}_h); j \neq h \quad (2.82)$$

De forma, tem-se que o vetor média ($\bar{\mathbf{X}}$) e a matriz das covariâncias (\mathbf{S}), são dados por:

$$\bar{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \\ \vdots \\ \bar{X}_p \end{bmatrix} \quad (2.83)$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{11} & \cdots & S_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{p1} & \cdots & S_{pp} \end{bmatrix} \quad (2.84)$$

O vetor \mathbf{X}_k é determinado pelas observações das p características no instante k :

$$\mathbf{X}_k = (X_{1k}, X_{2k}, \dots, X_{pk})^T \quad (2.85)$$

Em cada instante k , a estatística que será controlada e representada graficamente na carta de controlo é denominada de *Hotelling* T^2 e é definida através da seguinte expressão:

$$(T^2)_k = n(\mathbf{X}_k - \bar{\mathbf{X}})^T \mathbf{S}^{-1} (\mathbf{X}_k - \bar{\mathbf{X}}) \quad (2.86)$$

De forma a representar graficamente a carta de controlo T^2 , é necessário definir os limites de controlo, os quais são calculados através das seguintes expressões:

$$LSC_{T^2} = \frac{(m-1)}{m} \beta_{\alpha, p/2, m-p-1/2} \quad (2.87)$$

$$LIC_{T^2} = 0 \quad (2.88)$$

Deteta-se uma causa especial de variação sempre que o valor, no instante k , da estatística T^2 seja superior ao limite superior de controlo da carta. Sempre que seja detetada uma causa especial de variação, as observações relativas aos pontos fora dos limites são retiradas da carta, recalculando-se os valores de $\bar{\mathbf{X}}$ e \mathbf{S} . Quando todos os pontos fora dos limites de controlo forem retirados da carta T^2 , considera-se que o processo se encontra sob controlo estatístico, podendo nesta altura ser realizada a estimativa dos parâmetros do processo, sendo $\bar{\mathbf{X}}$ o estimador de $\boldsymbol{\mu}$ e \mathbf{S} o estimador de $\boldsymbol{\Sigma}$.

Fase 2 – Carta T^2

Nesta fase, considera-se que o processo está sob controlo estatístico, pelo que, a partir deste momento será realizado o controlo do processo em tempo real, a partir dos dados provenientes da Fase 1, sendo T^2 a estatística utilizada e sendo esta calculada segundo a equação 2.86. Nesta carta os limites de controlo são determinados através das seguintes expressões:

$$LSC_{T^2} = \frac{p(m+1)(m-1)}{m(m-p)} F_{\alpha, p, m-p} \quad (2.89)$$

$$LIC_{T^2} = 0 \quad (2.90)$$

A deteção de causas especiais de variação é realizada de forma análoga à utilizada na Fase 1. Sempre que seja detetada uma causa especial de variação, deve ser identificada a variável (ou variáveis ou covariância entre variáveis) responsável por essa situação, procedendo-se de seguida à tomada de ações corretivas no processo

Fase 2 – Carta χ^2

Quando o processo permanece sob controlo estatístico durante um longo período de tempo, pode considerar-se que este tem vindo a demonstrar garantias de estar sob controlo estatístico. Nesse caso, os parâmetros $\boldsymbol{\mu}$ e $\boldsymbol{\Sigma}$ são dados como conhecidos e estáveis. Deste modo, o controlo estatístico pode passar a ser representado através da estatística χ^2 , que é calculada, em cada instante k , através da seguinte equação:

$$(\chi^2)_k = n(\mathbf{X}_k - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{X}_k - \boldsymbol{\mu}) \quad (2.91)$$

Os limites de controlo desta carta são dados por:

$$\begin{aligned} LSC_{T^2} &= \chi_{\alpha;p}^2 \\ LIC_{T^2} &= 0 \end{aligned} \quad (2.92)$$

De forma semelhante ao que ocorre na Fase 2 da Carta T^2 , sempre que é detetada uma situação de causa especial de variação, ou seja, falta de controlo estatístico, deve ser identificada a variável (ou variáveis, ou covariância entre variáveis) responsável por essa causa especial, de modo a serem tomadas medidas corretivas no processo.

2.4.3 INTERPRETAÇÃO DE CAUSAS ESPECIAIS DE VARIAÇÃO

Analogamente ao que acontece no estudo univariado, é detetada uma causa especial de variação sempre que o valor da estatística em estudo se situa, num determinado instante, fora dos limites de controlo. Mas, ao contrário do estudo univariado, quando se estudam várias características em simultâneo, a causa especial de variação pode estar associada a uma ou mais variáveis ou à alteração da correlação entre duas ou mais variáveis, pelo que, de forma a tomar ações corretivas no processo, é necessário compreender o que está a causar a causa especial de variação.

Existem diversos métodos utilizados para interpretar, nas cartas multivariadas, quais as variáveis ou alterações nas correlações entre variáveis, dos quais se destacam:

- Utilização de gráficos com limites de controlo baseados nas desigualdades de Bonferroni, utilizados para reduzir o número de falsos alarmes (Alt, 1985);
- Decomposição da estatística em estudo em componentes principais (Jackson, 1980);
- Decomposição da estatística em estudo em componentes ortogonais (Mason et al., 1997);
- Estatística d (Runger et al., 1996; Montgomery, 2009);
- Cartas univariadas com limites de diagnóstico (Nedumaran & Jr, 1998);
- Método do Ponto Crítico (Hayter & Tsui, 1994);

2.4.4 CAPACIDADE MULTIVARIADA DO PROCESSO

2.4.4.1 ÍNDICES DE CAPACIDADE PARA PROCESSOS COM ESPECIFICAÇÕES TÉCNICAS BILATERAIS

Depois de garantida a estabilidade do processo, deve proceder-se ao estudo da capacidade do processo produzir, de forma consistente, dentro dos limites de especificação.

Diversos estudos explicitam diversos índices de capacidade para o estudo da capacidade multivariada do processo, sendo que, os estudos de Shahriari et al. (1995) sugerem o estudo de um vetor composto por três índices de capacidade (C_{pM} , PV, LI).

Nesta abordagem, o índice C_{pM} compara os volumes das regiões correspondentes à especificação e ao processo, tendo um comportamento semelhante ao índice de capacidade potencial univariado C_p .

O índice PV compara a localização do vetor média do processo, μ , com a localização do vetor T dos valores nominais de especificação.

Por último, o vetor LI analisa a localização das regiões definidas pela especificação e pelo processo, verificando se a região do processo está completamente contida na região de especificação, condição necessária para considerar o processo capaz.

O índice C_{pM} é definido por:

$$C_{pM} = \left(\frac{\text{Volume da região referente à especificação}}{\text{Volume modificado referente ao processo}} \right)^{\frac{1}{p}} \quad (2.93)$$

A especificação técnica é definida por uma região p -retangular, ou seja, no caso de $p=2$, essa região é um retângulo, para $p=3$, essa região é um prisma, e para $p>3$, um p -retângulo. De uma forma análoga, a região referente ao processo, corresponde a um p -elipsoide, desde que o processo multivariado seja considerado Normal estatisticamente $N_p(\mu, \Sigma)$. O denominador deste índice corresponde ao volume modificado da região referente ao processo, o que corresponde ao menor p -retângulo que contenha o p -elipsoide do processo. A Figura 2.6 permite visualizar um exemplo gráfico das áreas correspondentes para $p=2$, ou seja, para o controlo simultâneo de duas características da qualidade.

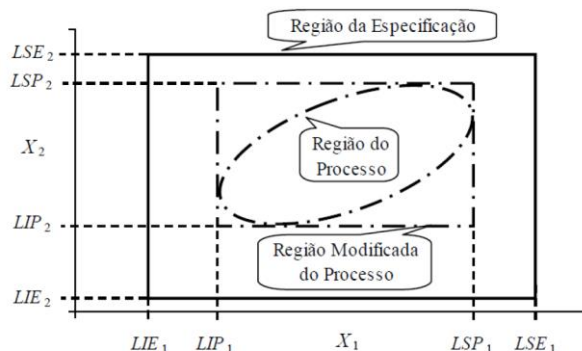


Figura 2.6 - Exemplo do cálculo de áreas para estudo da capacidade multivariada do processo

Desenvolvendo a expressão anterior para o índice, e considerando os limites do processo (LIP e LSP), bem como os limites de especificação do processo (LIE e LSE), obtém-se a seguinte expressão:

$$C_{pM} = \left(\frac{\sum_{i=1}^p (LSE_i - LIE_i)}{\sum_{i=1}^p (LSP_i - LIP_i)} \right)^{\frac{1}{p}} \quad (2.94)$$

Em que,

$$LSP_i = \mu_i + \sqrt{\frac{\chi^2_{\alpha;p} \det(\Sigma_i^{-1})}{\det(\Sigma_i^{-1})}}; \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (2.95)$$

$$LIP_i = \mu_i - \sqrt{\frac{\chi^2_{\alpha;p} \det(\Sigma_i^{-1})}{\det(\Sigma_i^{-1})}}; \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (2.96)$$

Nas equações anteriores considera-se:

Σ - matriz das covariâncias

Σ_i - matriz das covariâncias desprezando a coluna i e linha i da matriz Σ

$\det(\Sigma_i^{-1})$ - determinante da matriz inversa de Σ_i

$\chi^2_{\alpha;p}$ - percentil à direita, para uma probabilidade α , da distribuição χ^2 com p graus de liberdade

Para processos em que todas as características apresentem especificações bilaterais, considera-se $C_{pM} > 1,33$ uma condição necessária (mas não suficiente) para garantir a capacidade de um processo multivariado.

O índice PV baseia-se no facto do centro da especificação técnica (vetor \mathbf{T}) ser considerado o alvo para o centro do processo, sendo então desejável que a média do processo (vetor $\boldsymbol{\mu}$) se encontre tão próximo quanto possível desse vetor. Este índice é calculado segundo a seguinte equação:

$$PV = P \left(T^2 > \frac{p(N-1)}{N-p} \cdot F_{p,N-p} \right) \quad (2.97)$$

Onde a estatística T^2 é calculada com base nas estimativas do vetor média ($\hat{\boldsymbol{\mu}}$), da matriz das covariâncias ($\hat{\Sigma}$) e ainda no vetor \mathbf{T} que caracteriza a especificação técnica, da seguinte forma:

$$T^2 = n(\hat{\boldsymbol{\mu}} - \mathbf{T})' \hat{\Sigma}^{-1} (\hat{\boldsymbol{\mu}} - \mathbf{T}) = n(\bar{\mathbf{X}} - \mathbf{T})' S^{-1} (\bar{\mathbf{X}} - \mathbf{T}) \quad (2.98)$$

Uma vez que o índice PV fornece informação sobre a centralidade do processo, considera-se que o processo está centrado se PV for aproximadamente igual a um (correspondendo esse valor ao percentil à direita da distribuição de Fisher).

O índice LI é um índice binário que analisa se existe alguma região do processo que não esteja contida na região de especificação do processo, sendo definido por:

$$LI = \begin{cases} 1, & \text{se a região modificada do processo está contida na especificação} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Concluindo, um processo em que estejam a ser controladas várias características da qualidade em simultâneo, considera-se capaz quando se verificam, em simultâneo, as seguintes condições:

$$C_{pM} > 1,33 \cap PV \cong 1 \cap LI = 1$$

2.4.4.2 ÍNDICES DE CAPACIDADE PARA PROCESSOS COM ESPECIFICAÇÕES TÉCNICAS UNILATERAIS

De forma a analisar a capacidade do processo de processos com especificações técnicas unilaterais, Perakis & Xekalaki (2012) sugerem a utilização das equações 2.99 e 2.100, respetivamente, quando se desejam valores tanto-maiores ou tanto menores quanto possível e sendo r o número de características em estudo.

$$MCPI = \left(\prod_{i=1}^r |CPI^{Y_i}| \right)^{\frac{1}{r}} \quad (2.99)$$

$$MCPS = \left(\prod_{i=1}^r |CPS^{Y_i}| \right)^{\frac{1}{r}} \quad (2.100)$$

Onde os valores CPI^{Y_i} e CPS^{Y_i} representam os valores dos índices $(C_{pk})_l$ e $(C_{pk})_s$. No caso de se estar a estudar um processo onde todas as variáveis apresentem especificação técnica lateral à esquerda, é necessário calcular o índice $MCPI$. De forma análoga, caso todas as variáveis apresentem especificação técnica lateral à direita, é necessário calcular o índice $MCPS$. De forma a concluir que o processo é capaz, é necessário garantir que os valores sejam superiores a 1,33.

2.4.4.3 ÍNDICES DE CAPACIDADE PARA PROCESSOS COM ESPECIFICAÇÕES TÉCNICAS BILATERIAS E UNILATERIAS

Desenvolvimentos de Jalili et al. (2012)

Jalili et al. (2012) sugerem a utilização de um índice para controlar estatisticamente processos multivariados em que as especificações das características a estudar sejam unilaterais e/ou bilaterais. Para realizar este estudo, os autores sugerem a definição da região do processo, PR (*Process Region*), que se irá dividir em duas partes, CV (*Conformance Volume*) e NCV (*Non Conformance Volume*). A primeira parte corresponde ao rácio do processo que se insere na região tolerada modificada do processo, enquanto que a segunda parte corresponde ao rácio do processo que não se insere na região tolerada modificada do processo.

A distância entre o processo e o alvo é dada por:

$$D = \left(1 + (\boldsymbol{\mu} - \mathbf{T})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{\mu} - \mathbf{T}) \right)^{1/2} \quad (2.101)$$

Assim, em casos com duas variáveis com especificações bilaterais tem-se que:

$$MCP_{NVC} = \left[\frac{\lambda \cdot PR + CV + \beta}{PR + NVC}, \frac{1}{D} \right] \quad (2.102)$$

Onde,

- λ - Parâmetro de sensibilidade do processo, variando no intervalo $[0, 1]$
- β - Parâmetro para aumentar a sensibilidade de λ . Pode tomar o valor de 0,1 ou, se o volume da região modificada for inferior a 1, deve adotar-se a multiplicação de $\beta = 0,5$ pelo valor do volume.

Em processos com duas variáveis com especificações unilaterais, a determinação do índice MCP_{NVC} faz-se através da seguinte expressão:

$$MCP_{NVC} = \left[\frac{\lambda \cdot PR + CV + \beta}{PR + NVC}, \frac{1}{D'} \right] \quad (2.103)$$

Onde:

$$\frac{1}{D'} = (1 + D_1) \cdot \frac{1}{1 + D_2} \quad (2.104)$$

Onde,

- D_1 - Distância entre o *LIE* da segunda variável e a linha paralela ao *LIE* da primeira variável, passando pela média do processo;
- D_2 - Distância entre a linha paralela do *LIE* ou *LSE* de Y_1 e do ponto $\left(\frac{LSE_{Y_1} + LIE_{Y_1}}{2}, LSE_{Y_2} \right)$ e a média do processo.

De seguida, apresenta-se a figura 2.7 com o objetivo de clarificar as variáveis D_1 e D_2 .

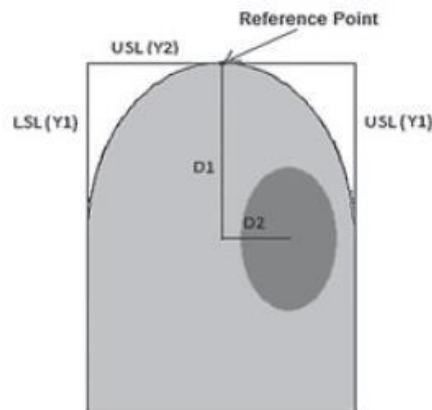


Figura 2.7 - Exemplo de D_1 e D_2 (extraído de Jalili et al., 2012)

Em processos com a especificações unilaterais e b especificações bilaterais, os autores sugerem que se adotem as seguintes expressões:

$$\frac{1}{D'} = k^a \cdot \frac{1}{(1 + D_{i2})^b} \quad (2.105)$$

Onde:

$$k = \begin{cases} 1 + D_{i1}, \mu_i \leq LSC(Y_i), \mu_i \geq LIC(Y_i) \\ \frac{1}{1 + D_{i1}}, \mu_i \geq LSC(Y_i), \mu_i \leq LIC(Y_i) \end{cases} \quad (2.106)$$

Sabendo o valor de D' , aplica-se a equação 2.103, com o recurso ao valor das áreas ou volumes de PR , CV e NCV .

Desenvolvimentos de Gu et al. (2015)

Para realizar o estudo da capacidade do processo, Gu et al. (2015) apresentam nos seus estudos o índice MEC_{pk} , que deve ser utilizado sempre que o estudo de capacidade do processo incida sobre um processo multivariado cujas características da qualidade apresentem especificações técnicas unilaterais e/ou bilaterais.

De forma a estudar a capacidade do processo, os autores sugerem então a aplicação da seguinte metodologia:

1. Estimação dos parâmetros do processo $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ e $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$;
2. Depois de confirmar que os dados seguem uma distribuição normal multivariada, determina-se a função densidade através de:

$$f_p(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = \frac{1}{2\pi^{p/2} |\hat{\boldsymbol{\Sigma}}|^{1/2}} \cdot \exp \left[-\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \hat{\boldsymbol{\mu}})^T \cdot \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \cdot (\mathbf{x} - \hat{\boldsymbol{\mu}}) \right] \quad (2.107)$$

Assim, tem-se:

$$\eta = \int_{LIE}^{LSE} f_p(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) \, d\mathbf{x} = \int_{LIE}^{LSE} \frac{1}{2\pi^{p/2} |\hat{\boldsymbol{\Sigma}}|^{1/2}} \cdot \exp \left[-\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \hat{\boldsymbol{\mu}})^T \cdot \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \cdot (\mathbf{x} - \hat{\boldsymbol{\mu}}) \right] \, d\mathbf{x} \quad (2.108)$$

Onde $|\hat{\boldsymbol{\Sigma}}|$ corresponde ao determinante da matriz das variâncias-covariâncias. Assim, se alguma das p características possuir uma especificação unilateral, têm-se os seguintes casos:

- $LSC_i = +\infty$, no caso da característica ser limitada à esquerda;
- $LSC_i = -\infty$, no caso da característica ser limitada à direita;

Para o cálculo do integral apresentado, pode utilizar-se o programa *MVNCDF*, de linguagem C++ (atualmente também já foram criados programas semelhantes noutras linguagens, em particular em *MATLAB*), para processos multivariados com até quatro características. Este programa apresenta erros de cálculo na ordem 10^{-15} no caso de se trabalhar com duas ou três características e erros na ordem 10^{-6} se se estiverem a controlar estatisticamente quatro características.

3. Depois de determinado o valor de η , calcula-se:

$$\eta = \Phi(1,5 + \Psi) - \Phi(1,5 - \Psi) \quad (2.109)$$

4. Assim, torna-se possível calcular o índice MEC_{pk} , através da seguinte equação:

$$MEC_{pk} = \frac{\Psi}{3} - 0,5 \quad (2.110)$$

2.5 A ATUALIDADE DO CONTROLO ESTATÍSTICO DO PROCESSO

Com a evolução do mundo industrial e com a crescente exigência dos mercados, o Controlo Estatístico do Processo como metodologia de controlo da qualidade das organizações tem vindo a sofrer alterações, evoluções e desenvolvimentos de forma a manter-se uma técnica atualizada, útil e apropriada à realidade de cada organização. Desde os primeiros desenvolvimentos, apresentados por (Shewhart, 1931), denominados por *SPC* tradicional, ao Controlo Estatístico para Pequenas Produções, mais adequado a linhas de produção cada vez mais multifacetadas, em que se produzem vários produtos, estudado, entre outros autores, por Quesenberry (1997) e Pereira & Requeijo (2012), passando pelas cartas de controlo especiais, como as cartas CUSUM, EWMA, bem como todas as variantes destas, culminando no *SPC* multivariado, em que é possível controlar estatisticamente diversas características. Todo este desenvolvimento é possível devido à facilidade desta técnica ser adaptada à realidade de cada organização, linha de produção e caso de aplicação, pelo que esta secção deste estudo tem como principal objetivo estudar alguns desenvolvimentos mais recentes desta técnica, verificando as tecnologias que têm sido associadas a esta metodologia, bem como quais os casos de estudo a que esta metodologia tem sido aplicada.

A utilização do Controlo Estatístico do Processo em ambiente hospitalar demonstra a robustez e adaptabilidade desta metodologia. Estudos recentes mencionam a utilização de diversos tipos de *SPC* em vários ramos da medicina.

No estudo de Keller et al. (2019) é utilizado o *SPC* para estudar os efeitos do tempo de permanência no hospital (TPH) após cirurgia colorretal, cujas conclusões indicam que o TPH pode ser modelado como uma variável estável, variabilidade decrescente ao longo do tempo e fácil deteção de *outliers* (apresentam TPH estatisticamente superior aos restantes casos), que apresentaram mais complicações pós-cirurgia, readmissões e operações subsequentes, tornando a identificação destes *outliers* uma ótima forma de localizar potenciais melhorias na qualidade do serviço.

Outra aplicação médica do *SPC* pode ser encontrada nos estudos de Rukhsar et al. (2019), com a utilização do *MSPC* para predição de convulsões epiléticas, cujos resultados apontam para uma sensibilidade de 91,30% e falsos positivos de $0,39 \text{ h}^{-1}$, o que segundo os autores, correspondem a valores promissores. A utilização deste método de predição de convulsões epiléticas através do estudo do eletrocardiograma e eletroencefalograma pode auxiliar os pacientes, diminuindo a sua dor e a administração de medicamentos tóxicos ao organismo.

Outra área da medicina onde o *SPC* é utilizado é a radiologia, onde recentemente surgiram na comunidade científica dois estudos, um sobre a utilização de *SPC* para estudar a performance de dispositivos de controlo da constância dos dispositivos radiológicos (Pal et al., 2020) e o outro acerca da monitorização de mudanças anatómicas de pacientes durante radioterapia no cérebro e pescoço através de *SPC* (Lowther et al., 2019). Nos estudos de Pal et al. (2020) foram utilizadas

cartas tradicionais de Shewhart e cartas especiais (CUSUM e EWMA) para detetar perdas de controlo nas variáveis em estudo (perdas de controlo da constância do aparelho radiológico). De seguida foram desenvolvidos diagramas de Ishikawa para determinar as possíveis causas para perda de controlo da constância.

Os desenvolvimentos de Lowther et al. (2019) concluíram que através da utilização do *SPC* foi possível detetar alterações anatómicas sistemáticas nos pacientes submetidos a radioterapia nas primeiras quatro semanas de tratamento. O estudo tem algumas reservas, sendo necessário realizar investigação do impacto dosimétrico nos desvios observados de forma a evidenciar a eficácia do *SPC*, com o intuito de indicar uma adaptação ao tratamento.

Os estudos de Jaffray (2020) sugerem a criação de cartas de controlo para análise das consequências em cirurgia infantil. De uma forma geral, um cirurgião, ou hospital, rastreiam a proporção de pacientes que sobrevivem ou a proporção de pacientes de sofrem complicações no seguimento de cirurgia, utilizando esse valor para comparar com a norma, verificando se estão dentro de limites aceitáveis. Este estudo sugere que esta abordagem pode levar a erros de julgamento acerca da performance, uma vez que o desempenho do cirurgião pode alterar-se ao longo do tempo ou a cirurgia em causa ter uma baixa frequência, sendo assim estatisticamente difícil proceder-se a uma avaliação robusta. Desta forma, é sugerida a criação de cartas de controlo de atributos (“sucessos” e “insucessos”) para avaliar e monitorizar o desempenho das cirurgias médicas, desta forma fornecendo aos cirurgiões uma ferramenta de escrutínio do seu trabalho. Este estudo aponta para a dificuldade na determinação de valores aceitáveis para percentagens de sucessos e insucessos.

A farmacêutica industrial é uma das indústrias que utiliza o *SPC* de forma a otimizar, controlar e monitorizar os processos de fabrico, sendo visível em Tórres et al. (2018) a utilização de *MSPC* para monitorizar e detetar alterações nos processos de fabrico de produtos farmacêuticos. Neste estudo foram controladas em simultâneo 7 características da qualidade (peso, dureza, friabilidade, desintegração, dissolução, uniformidade e conteúdo do princípio ativo) de forma a verificar se o processo de produção apresentava variabilidade excessiva e se cumpria as normas de produção exigidas. Segundo os autores deste estudo, os resultados foram positivos, tendo a aplicação da metodologia sido um sucesso e os resultados adequados de acordo com as normas da qualidade, tendo o *MSPC* sido implementado nessa organização como uma ferramenta de controlo da qualidade do processo.

Outra aplicação na indústria farmacêutica surgiu através dos estudos de Duran-Villalobos et al. (2020) em que foram aplicadas técnicas de *MSPC* e controlo preditivo de modelos para otimização do processo de fabrico por lotes de penicilina, controlando, estudando e reduzindo a variabilidade de produção dentro e entre os lotes.

A elevada competição entre empresas, aliada ao avanço tecnológico sofrido ao longo das últimas décadas, significam que cada vez mais se procura melhorar e aprimorar técnicas já existentes, sendo que o Controlo Estatístico do Processo, como ferramenta de controlo da qualidade, não é exceção. Nos últimos anos têm vindo a ser estudadas novas cartas de controlo, a utilização da

inteligência artificial, algoritmos de redes neuronais e a utilização de *fuzzy logic* como potenciadores desta metodologia, pelo que, de seguida, são apresentados alguns dos mais recentes estudos realizados nesta área.

Nos estudos de Bezerra et al. (2018) os autores sugerem uma nova carta de controlo de atributos para monitorização da variabilidade, com base na estatística G_S^2 . De forma a avaliar a performance desta carta, fez-se uma análise comparativa com a carta S^2 , verificando os custos associados à inspeção e controlo estatístico das duas cartas.

Os autores otimizaram os parâmetros para satisfazer um determinado ARL_{EC} e minimizar o valor de ARL_{FC} . A comparação entre esta nova carta e a carta comumente utilizada no controlo estatístico da variabilidade do processo (S^2) foi realizada através do valor de ARL_{FC} e custos de implementação. Os autores concluem que a comparação direta entre os valores de ARL_{FC} favorecem sempre a carta S^2 , uma vez que a medição de uma característica da qualidade fornece sempre mais informação do que a classificação segundo atributos. Por outro lado, o controlo de atributos é mais rápido e fácil, pelo que se pode aumentar a dimensão amostral no controlo de atributos de forma a diminuir o ARL_{FC} e garantir que a carta G_S^2 se demonstre como uma alternativa viável à tradicional carta S^2 .

Os estudos de Bezerra et al. (2018) evidenciam de forma clara as vantagens e desvantagens das cartas de controlo de variáveis e de atributos, pelo que um desenvolvimento interessante poderia passar pela tentativa de interligar o que de melhor existe em cada tipo de cartas, de forma a desenvolver uma nova metodologia, que mantivesse a eficiência e grau de detalhe do controlo de variáveis aliado à facilidade de implementação e baixo custo do controlo de atributos. De seguida são apresentados alguns estudos nesse sentido, em que são desenvolvidas novas cartas com o intuito de responder a esta questão.

As cartas de controlo, como já foi abordado na presente dissertação, podem ser classificadas em cartas de controlo de atributos e cartas de controlo de variáveis, dependendo da característica da qualidade que se pretenda estudar. Cada uma delas apresenta, no âmbito da sua aplicação, vantagens e desvantagens, sendo que as cartas de atributos apresentam menores custos operacionais e de implementação que as cartas de variáveis, que, por sua vez, são mais eficazes e eficientes na deteção de variações nos parâmetros do processo. Desta forma, Ho & Aparisi (2016) propõem nos seus estudos a criação de duas novas cartas que permitam controlar a média do processo, aliando o que de melhor as cartas de variáveis e de atributos têm para oferecer. De seguida é apresentado um fluxograma que explica a metodologia associada a estas cartas.

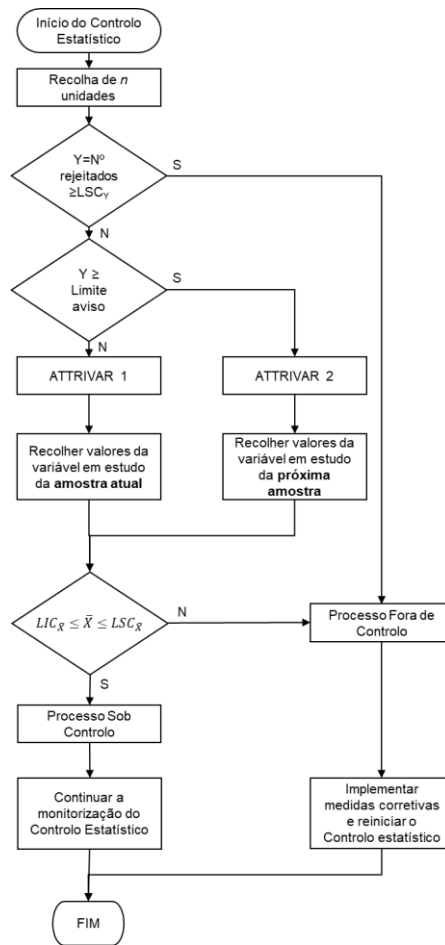


Figura 2.8 - Metodologia para implementação da metodologia ATTRIVAR

Como é possível analisar através da Figura 2.8, em primeiro lugar são aplicados os princípios das cartas de atributos, como análise preliminar do processo. De seguida são aplicados os princípios das cartas de variáveis, deste modo controlando efetivamente o parâmetro de localização do processo.

Deste estudo, os autores concluíram que através da utilização destas cartas de controlo é possível obter resultados semelhantes em termos de performance das cartas (em termos de valores de ARL) relativamente às cartas \bar{X} , conseguindo uma redução significativa dos custos operacionais de implementação desta técnica uma vez que utilizando as cartas ATTRIVAR, é necessário recolher o valor da característica da qualidade a estudar um menor número de vezes. Desta forma as cartas ATTRIVAR demonstraram-se, segundo Ho & Aparisi (2016) uma ótima alternativa às cartas tradicionais, reduzindo custos de amostragem e mantendo bons valores de performance na deteção de alterações dos parâmetros do processo.

No mesmo âmbito de pesquisa, Simões et al. (2019) continuaram a desenvolver as cartas ATTRIVAR, desenvolvendo variantes da carta com o âmbito de aumentar a sua performance, tornando estas cartas mais úteis e robustas para aplicações industriais. Deste estudo, os autores concluíram que a versão trinomial da carta ATTRIVAR, desenvolvida e estudada por estes autores, é mais eficiente que as cartas desenvolvidas por Ho & Aparisi (2016), especialmente para dimensões amostrais baixas ($n \leq 5$).

No âmbito da investigação e desenvolvimento desta técnica, têm surgido, durante os últimos anos, diversos autores que têm vindo a estudar a técnica, aplicando-a em simbiose com outras metodologias de forma a resolver complexos problemas industriais. Sánchez-Fernández et al. (2018) sugerem, nos seus estudos, uma nova metodologia de deteção de falhas com recurso a modelação de séries temporais, utilizando séries temporais como a autorregressiva (AR), médias móveis (MA), autorregressiva e médias móveis (ARMA) e autorregressiva e médias móveis quando o sistema não é estacionário (ARIMA), por forma a obter o melhor modelo descritivo, linear ou não linear para modelar cada variável. Do pré-processamento e processamento dos dados, são originados resíduos, estes analisados através de técnicas de Controlo Estatístico do Processo (univariado caso os resíduos sejam analisados de forma individual, ou multivariado caso os resíduos sejam analisados globalmente). Esta metodologia foi aplicada em duas indústrias, sendo que a metodologia em que os resíduos eram analisados individualmente (através de cartas EWMA) proporciona bons resultados, mas não melhores a outras técnicas já utilizadas para este problema. No caso da aplicação da metodologia em que os resíduos eram analisados através de MSPC, esta mostrou-se uma metodologia muito eficaz, fornecendo o maior número de falhas detetadas com o menor tempo de deteção (*delay*). Desta forma, no ponto de vista dos autores deste estudo, esta metodologia demonstrou ser um sucesso na deteção de falhas para processos dinâmicos e não lineares.

Outro dos desenvolvimentos realizados nesta área foram fruto dos estudos de Haanchumpol et al. (2019) que sugerem a utilização de cartas de controlo multivariadas de médias móveis exponencialmente amortecidas com *spatial signed rank* (SSRM) para deteção de pequenas variações nos parâmetros do processo para distribuições não-normais e gama.

Os estudos demonstram através de testes comparativos que a carta SSRM tem uma performance significativamente superior às cartas MEWMA e d-MEWMA (Multivariada de médias móveis exponencialmente amortecidas e Multivariada de médias móveis duplamente exponencialmente amortecidas). Um dos estudos comparativos entre as diversas cartas é demonstrado na Figura 2.9.

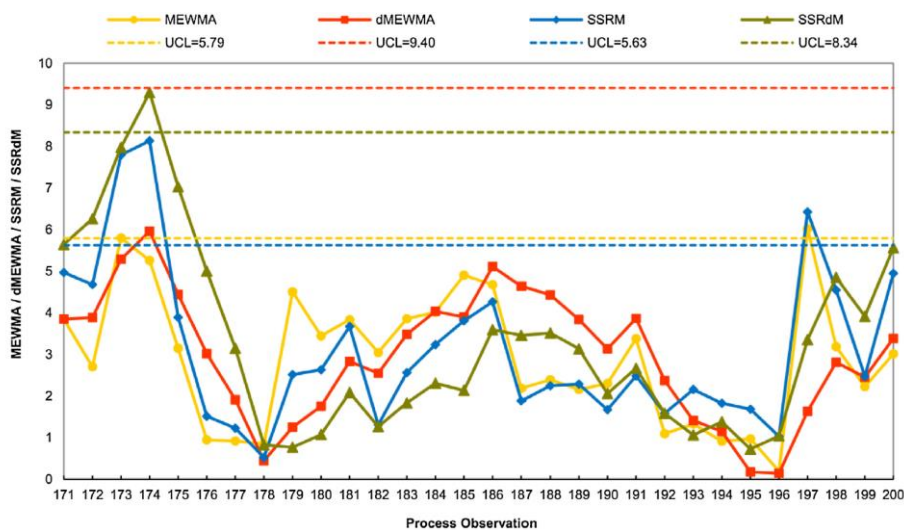


Figura 2.9 - Estudo Comparativo entre as cartas SSRM, SSRdR, EWMA e d-MEWMA

Assim, os autores deste trabalho defendem esta nova carta como uma ótima ferramenta que pode ser aplicada em diversas indústrias, uma vez que é uma carta apropriada para o estudo de dados não normais.

Filho & Valk (2020) propõem a utilização de uma série temporal de vetor autorregressivo (VAR) considerando a estrutura tripartida dos dados dos processos por lotes (N° lotes; N° variáveis; instante temporal). Os estudos desenvolvidos até à publicação deste artigo, acerca deste método apenas se focavam na análise dos resíduos do VAR, pelo que este artigo vem propor uma mudança de paradigma, propondo que o controlo e monitorização dos processos se foque nos coeficientes do VAR e não na análise dos seus resíduos.

De forma a implementar este modelo, os autores sugerem a utilização de dados históricos de lotes em controlo estatístico para estimar os parâmetros e coeficientes do VAR, de forma a criar duas cartas multivariadas para monitorizar novos lotes.

A aplicação deste modelo apresenta resultados positivos, mas os autores referem que ainda existem dificuldades na aplicação deste modelo e que, por isso, ainda deve ser refinado de forma a tornar este modelo mais prático e utilizável.

A área da inteligência artificial, logica *fuzzy* e redes neuronais também se tem aliado ao mundo do Controlo Estatístico do Processo, tendo sido publicados diversos estudos nesse sentido. De forma a aprofundar esses temas, sugere-se a leitura de artigos como os de Alaeddini et al. (2009), Shu & Wu (2011), Şentürk et al. (2014), Khormali & Addeh (2016), Costa & Fichera (2017), Kaya et al. (2017), Addeh et al. (2018), De la Torre-Gutiérrez & Pham (2019), Xu et al. (2019), Hryniewicz et al. (2019), Fuqua & Razzaghi (2020), Ahsan et al. (2020), Chou et al. (2020), Sales et al. (2020) e Zaman et al. (2020).

A indústria alimentar tem vindo a utilizar diferentes técnicas de controlo estatístico para melhorar a eficiência e eficácia dos seus processos, sendo que, alguns dos estudos mais significantes neste campo de ação e os quais se aconselha a leitura e análise para uma melhor compreensão do tema são, entre outros, Grigg et al. (1998), Itzés (2001), Srikaeo & A. Hourigan (2002), Escudero-Gilete et al. (2005), Srikaeo et al. (2005), Mataragas et al. (2012), , Lim et al. (2014), Lim & Antony (2016), Munir et al. (2017), Knauer et al. (2018).

3. VALIDAÇÃO DOS PARÂMETROS DA CARTA $LN(S^2)$

Neste capítulo será realizada uma revisão da carta $Ln(S^2)$, introduzida e estudada por Pacheco (2019), com o intuito de efetuar um estudo mais aprofundado, de forma a validar as constantes anteriormente determinadas, efetuar novas simulações das cartas da dispersão R, S e $Ln(S^2)$, com o intuito de verificar as suas diferenças e a necessidade de criação da nova carta.

Por forma a criar todas estas simulações, foi utilizado o software *MATLAB®*, cujas funções criadas, esquemas de programação e pensamento crítico para desenvolvimento destas simulações, serão explicados em maior detalhe, mais à frente.

3.1 CARTAS DE CONTROLO DA DISPERSÃO

Como já abordado anteriormente, os pressupostos para aplicação e implementação de cartas de controlo correspondem à aleatoriedade, independência e normalidade dos dados (ou seja, dados que sigam uma distribuição estatística Normal, de média μ e variância σ^2).

Estes pressupostos das cartas de controlo, em específico o pressuposto da Normalidade dos dados, permitem fixar os limites de controlo das cartas em ± 3 desvios padrão da estatística em estudo. Estudos indiciam a não-Normalidade das cartas R e S, fator que pode afetar a eficiência e introduzir erros na análise dos dados provenientes do Controlo Estatístico do Processo (Woodall, 2000).

3.1.1 Carta R

Os limites de controlo da carta R baseiam-se na normalidade dos dados, daí serem definidos como uma função de $\mu_R \pm 3\sigma_R$, em que $Z_{\alpha/2} = 3$, para $\alpha=0,27\%$. Assim sendo, são apresentados, com base nesta linha de pensamento, os limites de controlo e a linha central da carta R, nas seguintes equações.

$$LSC_R = \mu_R + 3\sigma_R = \bar{R} + 3d_3\hat{\sigma} = \bar{R} + 3d_3\frac{\bar{R}}{d_2} = \bar{R}\left(1 + \frac{d_3}{d_2}\right) = D_4\bar{R} \quad (3.1)$$

$$LC_R = \mu_R = \bar{R} \quad (3.2)$$

$$LIC_R = \mu_R - 3\sigma_R = \bar{R} - 3d_3\hat{\sigma} = \bar{R} - 3d_3\frac{\bar{R}}{d_2} = \bar{R}\left(1 - \frac{d_3}{d_2}\right) = D_3\bar{R} \quad (3.3)$$

Como é possível verificar da análise das equações 3.1 a 3.3, os limites de controlo estão localizados à mesma distância da linha central, admitindo a normalidade dos dados. As constantes D_4 e D_3 apenas dependem da dimensão da amostra e são calculadas através das equações no Anexo A.

O facto de os limites de controlo estarem localizados a $\pm 3\sigma_R$ pode significar que o limite inferior de controlo seja negativo, situação não possível, pelo que se justifica o valor nulo da constante D_3 para dimensões da amostra $n \leq 6$.

No entanto, os estudos de Woodall (2000) e Pacheco (2019) sugerem que a estatística R não aparenta seguir uma distribuição Normal, pelo que, é apresentado de seguida o resultado da simulação dessa estatística para diferentes dimensões da amostra de forma a verificar o comportamento da estatística R .

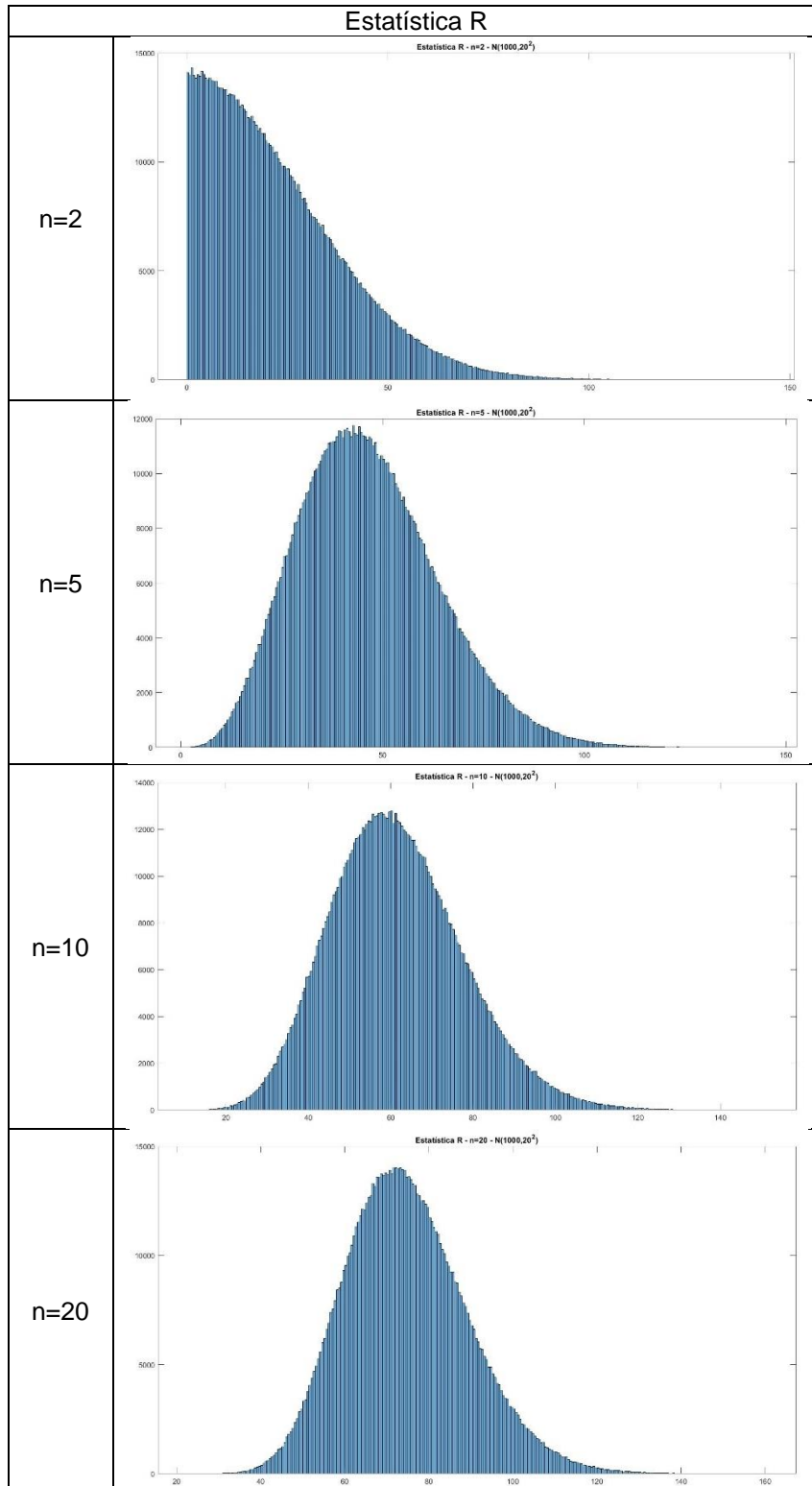


Figura 3.1 - Distribuição de R para diferentes dimensões da amostra e distribuição populacional $N(1000; 400)$ (valores obtidos por simulação)

O procedimento de simulação desta estatística será explicado em maior detalhe na secção X, mas é importante salientar que por forma a gerar estas estatísticas foram gerados um milhão de dados, de forma a que os resultados provenientes desta simulação fossem os mais aproximados da realidade possíveis.

Como é possível verificar através da Figura 3.1, torna-se evidente a não-Normalidade da estatística R, em especial para valores pequenos da dimensão da amostra ($n \leq 5$). Quanto maior a dimensão da amostra, menor é o efeito da não-Normalidade nesta carta, o que vai de encontro aos resultados dos estudos de Pacheco (2019). No Anexo B é possível verificar a simulação realizada para as dimensões da amostra $n = \{3,4,6,7,8,9,20,50\}$.

Na literatura, sempre que a carta R é utilizada para o controlo estatístico da dispersão de um processo, considera-se que o pressuposto de normalidade não é violado, o que se prova uma prática que enviesa as conclusões que dessa carta se retiram, uma vez que a distribuição é altamente assimétrica, apresentando uma cauda à direita mais acentuada que a cauda à esquerda. Assim sendo, na dedução dos limites de controlo desta carta, deveria ser tomada em conta a não-Normalidade dos dados, de forma a garantir uma análise rigorosa.

3.1.2 Carta S

De forma semelhante à carta da amplitude, a carta do desvio-padrão também é construída sobre o pressuposto da Normalidade, pelo que, os limites de controlo desta carta se situam em $\mu_S \pm 3\sigma_S$, em que $Z_{\alpha/2} = 3$, para $\alpha=0,27\%$. Desta forma, os limites de controlo e a linha central da carta S são definidos da seguinte forma:

$$LSC_S = \mu_S + 3\sigma_S = \bar{S} + 3 \frac{\bar{S}}{c_4} \sqrt{1 - c_4^2} = \bar{S} \left(1 + \frac{3}{c_4} \sqrt{1 - c_4^2} \right) = B_4 \bar{R} \quad (3.4)$$

$$LC_S = \mu_S = \bar{S} \quad (3.5)$$

$$LIC_S = \mu_S - 3\sigma_S = \bar{S} - 3 \frac{\bar{S}}{c_4} \sqrt{1 - c_4^2} = \bar{S} \left(1 - \frac{3}{c_4} \sqrt{1 - c_4^2} \right) = B_3 \bar{R} \quad (3.6)$$

Como é possível verificar da análise das equações 3.4, 3.5 e 3.6, os limites de controlo estão localizados à mesma distância da linha central, admitindo a normalidade dos dados. As constantes B_4 e B_3 apenas dependem da dimensão da amostra e são calculadas através das equações no Anexo A.

O facto de os limites de controlo estarem localizados a $\pm 3\sigma_S$ pode significar que o limite inferior de controlo seja negativo, situação não possível, pelo que se justifica o valor nulo da constante B_3 para dimensões da amostra $n \leq 6$.

Analogamente ao estudo realizado para a carta R, procedeu-se à simulação, em *MATLAB*®, desta estatística, de forma a confirmar se esta respeita o pressuposto de Normalidade. Os resultados apresentam-se na Figura 3.2.

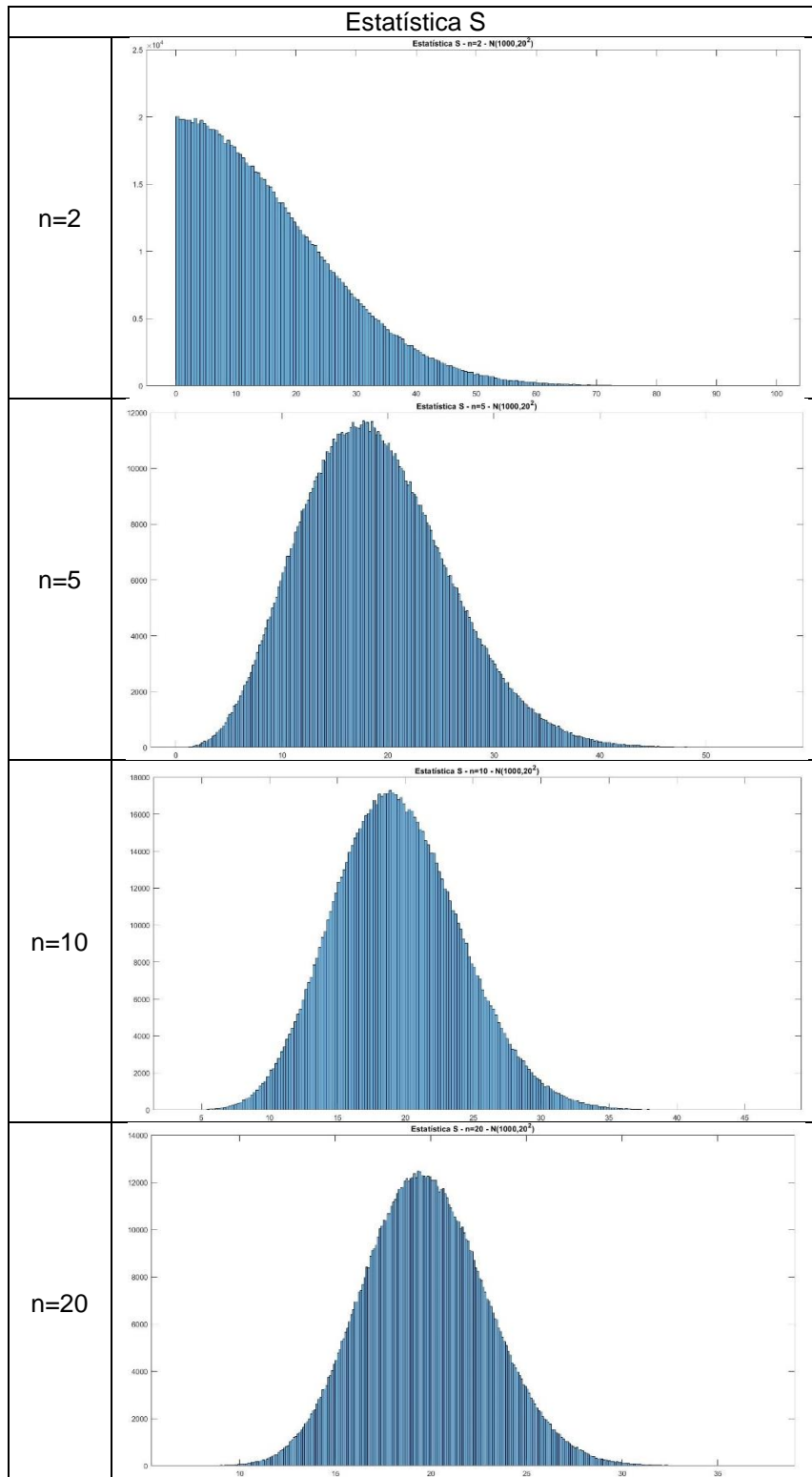


Figura 3.2 - Distribuição de R para diferentes dimensões da amostra e distribuição populacional $N(1000; 400)$ (valores obtidos por simulação)

O procedimento de simulação adotado na carta S é semelhante ao adotado anteriormente para realização da simulação da estatística R e será igualmente esclarecido em maior detalhe na secção 3.3.

Uma análise crítica da Figura 3.2, permite observar claramente a não-Normalidade da estatística S , especialmente para dimensões de amostra mais baixas ($n \leq 5$). Uma análise mais cuidada

permite, no entanto, concluir que, apesar de não ser uma estatística cuja distribuição se assemelhe à Normal, uma vez que a cauda à direita é maior que a cauda à esquerda, esta estatística é menos assimétrica do que a estatística R, pelo que, ainda que enviesando os resultados, deve ser utilizada esta estatística em detrimento da estatística R. É ainda importante salientar que o efeito da não-Normalidade é atenuado à medida que se aumenta a dimensão da amostra.

No Anexo C é possível verificar a simulação realizada para as dimensões da amostra $n = \{3,4,6,7,8,9,20,50\}$.

3.2 CARTAS DE CONTROLO \bar{X} E $LN(S^2)$

De forma a minimizar os erros associados à não normalidade das cartas R e S, (Pacheco, 2019) sugeriu uma nova abordagem, na qual, a estatística utilizada para estudar a dispersão corresponde à transformação logarítmica natural da variância. Foram analisados os seus estudos, os quais apontam para os desenvolvimentos de Crowder & Hamilton (1992), nos quais são apresentadas deduções sobre a transformação logarítmica para controlo da dispersão, como se apresenta de seguida:

$$\overline{\ln(S^2)} = \ln(\sigma^2) - \frac{1}{n-1} - \frac{1}{3(n-1)^2} + \frac{2}{15(n-1)^4} \quad (3.7)$$

$$\sigma^2_{\ln(S^2)} = \frac{2}{n-1} - \frac{2}{(n-1)^2} + \frac{4}{3(n-1)^3} - \frac{16}{15(n-1)^5} \quad (3.8)$$

De seguida serão aprofundados estes estudos, tendo como objetivo, determinar os limites de controlo desta carta, realizando um trabalho retificativo aos estudos de Pacheco (2019).

3.2.1 CARTA $LN(S^2)$ - FASE 1

Nesta fase, os parâmetros do processo são desconhecidos, sendo o objetivo principal desta fase determinar as estimativas desses parâmetros. Nesse sentido, os limites de controlo e a linha central são obtidos através das seguintes expressões:

$$LSC_{\ln(S^2)} = \hat{\mu}_{\ln(S^2)} + k_1 \hat{\sigma}_{\ln(S^2)} = \overline{\ln(S^2)} + G_4 \quad (3.9)$$

$$LC_{\ln(S^2)} = \hat{\mu}_{\ln(S^2)} = \overline{\ln(S^2)} \quad (3.10)$$

$$LSC_{\ln(S^2)} = \hat{\mu}_{\ln(S^2)} - k_2 \hat{\sigma}_{\ln(S^2)} = \overline{\ln(S^2)} - G_3 \quad (3.11)$$

Ao invés do que acontece nas cartas R e S, nesta carta são utilizadas constantes k_1 e k_2 para determinar a localização dos limites de controlo. Isto deve-se ao facto da própria distribuição de $\ln(S^2)$ não ser completamente normal, sendo que, a utilização destas constantes permitirá garantir, através da simulação em *MATLAB*®, que os limites de controlo se situam nos percentis de 0,135% e 99,865%, garantindo, desta forma, o valor de $\alpha=0,27\%$.

Os parâmetros do processo são, nesta altura, estimados da seguinte forma:

$$\hat{\mu}_{\ln(S^2)} = \overline{\ln(S^2)} = \frac{\sum_{i=1}^m \ln(S^2)}{m} \quad (3.12)$$

$$\hat{\sigma}_{\ln(s^2)} = \sqrt{\frac{2}{n-1} - \frac{2}{(n-1)^2} + \frac{4}{3(n-1)^3} - \frac{16}{15(n-1)^5}} \quad (3.13)$$

Onde m corresponde ao número de amostras recolhidas e n corresponde à dimensão da amostra.

Através do manuseamento das equações 3.9 a 3.13, é possível chegar às equações matemáticas dos parâmetros G_3 e G_4 , os quais são determinados da seguinte forma:

$$G_4 = k_1 \hat{\sigma}_{\ln(s^2)} = k_1 \sqrt{\frac{2}{n-1} - \frac{2}{(n-1)^2} + \frac{4}{3(n-1)^3} - \frac{16}{15(n-1)^5}} \quad (3.14)$$

$$G_3 = k_2 \hat{\sigma}_{\ln(s^2)} = k_2 \sqrt{\frac{2}{n-1} - \frac{2}{(n-1)^2} + \frac{4}{3(n-1)^3} - \frac{16}{15(n-1)^5}} \quad (3.15)$$

3.2.2 CARTA $LN(S^2)$ - FASE 2

Na Fase 2, onde os parâmetros do processo já são conhecidos, estimados através da Fase 1, o controlo do processo passa de retrospectivo para monitorização em tempo real, no qual, os limites de controlo e a linha central são determinadas através das seguintes expressões:

$$LSC_{\ln(s^2)} = \mu_{\ln(s^2)} + k_1 \sigma_{\ln(s^2)} = \ln(\sigma^2) - c_2 + k_1 \sigma_{\ln(s^2)} = \ln(\sigma^2) + G_2 \quad (3.16)$$

$$LC_{\ln(s^2)} = \mu_{\ln(s^2)} = \ln(\sigma^2) - c_2 \quad (3.17)$$

$$LSC_{\ln(s^2)} = \mu_{\ln(s^2)} - k_2 \sigma_{\ln(s^2)} = \ln(\sigma^2) - c_2 - k_2 \sigma_{\ln(s^2)} = \ln(\sigma^2) - G_1 \quad (3.18)$$

Onde,

$$c_2 = \frac{1}{n-1} + \frac{1}{3(n-1)^2} - \frac{2}{15(n-1)^4} \quad (3.19)$$

$$\sigma_{\ln(s^2)}^2 = \frac{2}{n-1} - \frac{2}{(n-1)^2} + \frac{4}{3(n-1)^3} - \frac{16}{15(n-1)^5} \quad (3.20)$$

Pelo que, as constantes G_1 e G_2 são determinadas por:

$$G_2 = -c_2 + k_1 \sigma_{\ln(s^2)} = -c_2 + k_1 \sqrt{\frac{2}{n-1} - \frac{2}{(n-1)^2} + \frac{4}{3(n-1)^3} - \frac{16}{15(n-1)^5}} \quad (3.21)$$

$$G_1 = c_2 + k_2 \sigma_{\ln(s^2)} = c_2 + k_2 \sqrt{\frac{2}{n-1} - \frac{2}{(n-1)^2} + \frac{4}{3(n-1)^3} - \frac{16}{15(n-1)^5}} \quad (3.22)$$

3.2.3 CARTA \bar{X} - FASE 1

Ao contrário das cartas da dispersão, a carta da média não apresenta problemas relativamente à normalidade, uma vez que, garantindo a normalidade dos dados recolhidos, garante-se que as médias desses dados seguem uma distribuição Normal. De forma a determinar os limites de controlo e a linha central desta carta, é necessário conhecer os estimadores dos parâmetros do processo:

$$\hat{\mu}_{\bar{X}} = \bar{\bar{X}} \quad (3.23)$$

$$\hat{\sigma}_{\bar{X}} = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} \quad (3.24)$$

Onde:

$$\overline{\ln(S^2)} = \ln(\hat{\sigma}^2) - \frac{1}{n-1} - \frac{1}{3(n-1)^2} + \frac{2}{15(n-1)^4} \Leftrightarrow \quad (3.25)$$

$$\ln(\hat{\sigma}^2) = \overline{\ln(S^2)} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{3(n-1)^2} - \frac{2}{15(n-1)^4} \Leftrightarrow \quad (3.26)$$

$$e^{\ln(\hat{\sigma}^2)} = \hat{\sigma}^2 = e^{\overline{\ln(S^2)} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{3(n-1)^2} - \frac{2}{15(n-1)^4}} \Leftrightarrow \quad (3.27)$$

$$\hat{\sigma}^2 = e^{\overline{\ln(S^2)}} \cdot e^{\frac{1}{n-1} + \frac{1}{3(n-1)^2} - \frac{2}{15(n-1)^4}} \quad (3.28)$$

Com:

$$c_1 = e^{\frac{1}{n-1} + \frac{1}{3(n-1)^2} - \frac{2}{15(n-1)^4}} \quad (3.29)$$

Temos:

$$\hat{\sigma}^2 = e^{\overline{\ln(S^2)}} \cdot c_1 \quad (3.30)$$

Assim sendo, os limites de controlo e a linha central da carta da média, na Fase 1 são calculados com base nas equações seguintes:

$$\begin{aligned} LSC_{\bar{X}} = \hat{\mu}_{\bar{X}} + 3\hat{\sigma}_{\bar{X}} &= \bar{X} + 3\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} = \bar{X} + 3\frac{\sqrt{e^{\overline{\ln(S^2)}} \cdot c_1}}{\sqrt{n}} = \bar{X} + 3\frac{\sqrt{c_1}}{\sqrt{n}}\sqrt{e^{\overline{\ln(S^2)}}} \\ &= \bar{X} + A_4\sqrt{e^{\overline{\ln(S^2)}}} \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$LC_{\bar{X}} = \hat{\mu}_{\bar{X}} = \bar{X} \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} LIC_{\bar{X}} = \hat{\mu}_{\bar{X}} - 3\hat{\sigma}_{\bar{X}} &= \bar{X} - 3\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} = \bar{X} - 3\frac{\sqrt{e^{\overline{\ln(S^2)}} \cdot c_1}}{\sqrt{n}} = \bar{X} - 3\frac{\sqrt{c_1}}{\sqrt{n}}\sqrt{e^{\overline{\ln(S^2)}}} \\ &= \bar{X} - A_4\sqrt{e^{\overline{\ln(S^2)}}} \end{aligned} \quad (3.33)$$

Em que:

$$A_4 = 3\frac{\sqrt{c_1}}{\sqrt{n}} \quad (3.34)$$

Como é possível verificar através da análise das equações 3.31 e 3.33, uma vez que a carta da média não apresenta quaisquer problemas em relação à Normalidade, os limites de controlo situam-se à mesma distância (3 desvios padrão amostrais, que irão garantir o valor de $\alpha=0,27\%$) da linha central.

3.2.4 CARTA \bar{X} - FASE 2

Na Fase 2 do Controlo estatístico, com os parâmetros do processo conhecidos, através da sua estimação na Fase 1, é possível monitorizar o processo, com os seguintes limites de controlo e linha central:

$$LSC_{\bar{X}} = \mu_{\bar{X}} + 3\sigma_{\bar{X}} = \mu + 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \mu + A\sigma \quad (3.35)$$

$$LC_{\bar{x}} = \mu_{\bar{x}} = \mu \quad (3.36)$$

$$LIC_{\bar{x}} = \mu_{\bar{x}} - 3\sigma_{\bar{x}} = \mu - 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \mu - A\sigma \quad (3.37)$$

O valor da constante A pode ser calculado através da tabela no Anexo A.

3.3 SIMULAÇÕES *MATLAB*®

De forma a estudar as diferentes estatísticas utilizadas para estudar a dispersão do processo foi escolhido o programa *MATLAB*®. Desta forma foi possível criar funções que permitiram através da geração de números pseudo-aleatórios, gerar as estatísticas desejadas, bem como realizar as simulações dos parâmetros necessários para a determinação das constantes da carta $\ln(S^2)$.

Em primeiro lugar, o *MATLAB*® foi utilizado para estudar o comportamento das estatísticas R e S , pelo que foi necessário gerar essas estatísticas. Para tal, foram criadas duas metodologias, sendo que a segunda, apesar de apresentar resultados estatísticos semelhantes, permite uma enorme redução do tempo computacional de tratamento dos dados, sendo assim uma melhoria importante ao primeiro algoritmo. Esta melhoria aconteceu ao utilizar uma matriz de dupla entrada (dimensão da amostra e número de amostras) ao invés de uma matriz de tripla entrada (dimensão da amostra, número de amostras e número de corridas). Para realizar esta alteração, as variáveis “dimensão da amostra” e “número de corridas” foram agrupadas numa só. Em termos de geração dos dados esta alteração não produz nenhuma alteração, uma vez que o número de dados gerados é exatamente o mesmo, garantindo assim que são utilizados 1 milhão de valores amostrais para as simulações, mas ao substituir uma matriz de tripla entrada por uma matriz de dupla entrada, é mais simples realizar o processamento de dados.

O algoritmo para simulação das estatísticas é explicado através do fluxograma da Figura 3.3.

Depois de criado este esquema, foram escritas as três funções, uma para cada estatística, de forma a criar as simulações.

Uma vez que nestas simulações testam-se dimensões da amostra $n = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,15,20,50\}$, são realizadas 12 simulações por cada distribuição estatística, perfazendo 36 repetições no total, em que o tempo de simulação varia significativamente à medida que a dimensão da amostra aumenta. Por exemplo, 1 milhão de valores amostrais corresponde a 2 milhões de números aleatórios para $n = 2$, enquanto que para $n = 50$ corresponde a 50 milhões de números aleatórios.

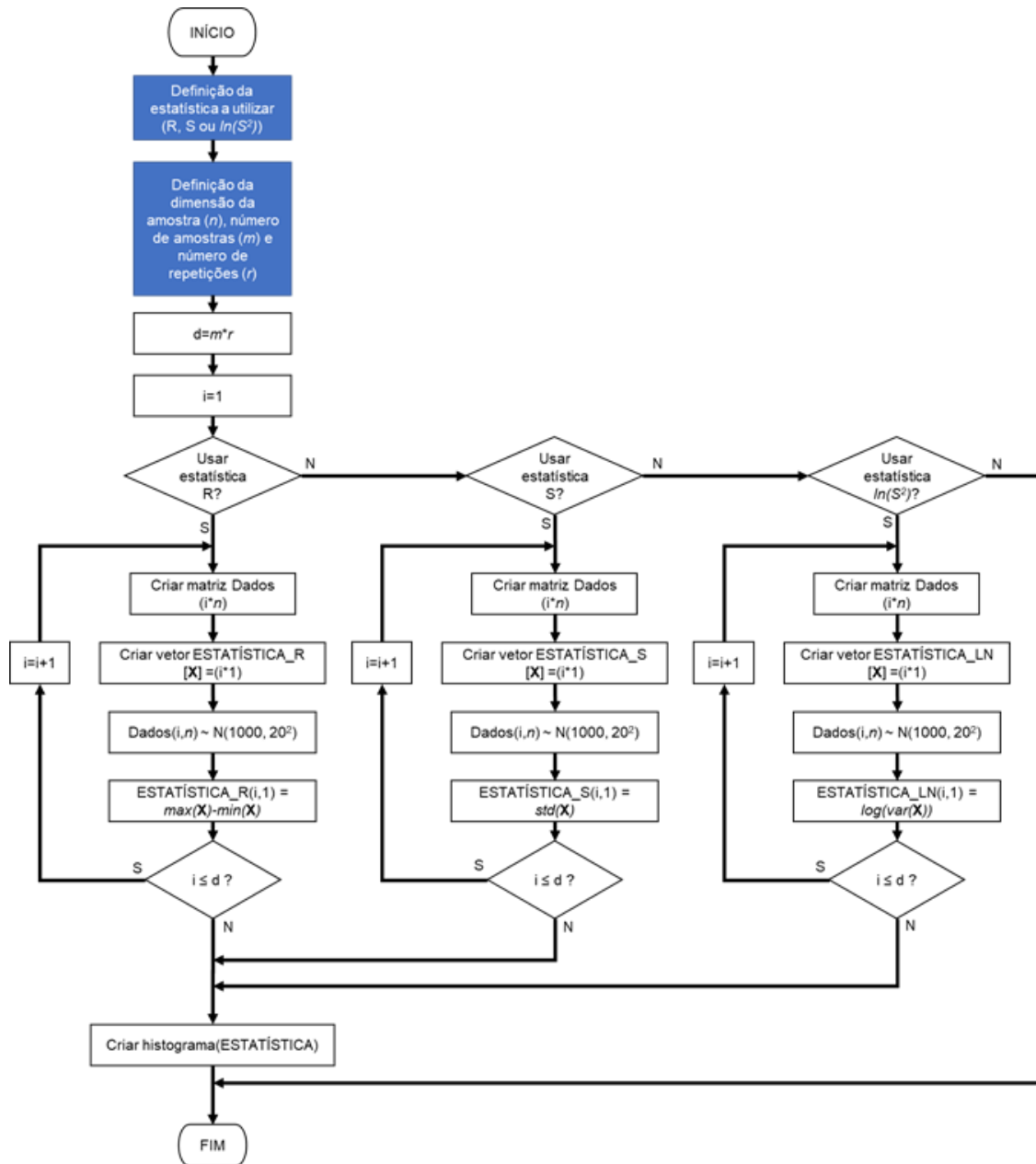


Figura 3.3 - Algoritmo para desenvolvimento das simulações

Depois da realização das simulações, guardam-se os histogramas resultantes, por forma a analisar graficamente o formato das curvas, com intuito de verificar se as distribuições estatísticas seguem uma distribuição Normal. É importante salientar que esta verificação é realizada de forma empírica, apenas através da observação visual, sem a confirmação matemática, uma vez que o principal objetivo é a visualização do formato das curvas das distribuições.

Por último, de forma a determinar os valores das constantes G_1 , G_2 , G_3 , G_4 , bem como k_1 , k_2 , c_1 , c_2 e A_4 , utiliza-se uma variação do código escrito para criar as distribuições estatísticas, no qual para além da criação do histograma, fornece informação sobre a linha central da distribuição (valor médio) bem como dos limites superior e inferior que garantem, respetivamente, os percentis de 0.135% e 99.865%. Na Figura 3.4 é apresentado um exemplo prático do output

desta função, que serve de input a um ficheiro EXCEL® programado para obter os valores das constantes, através dos limites de controlo e da linha central. Neste exemplo é apresentada a simulação realizada para $n = 25$.

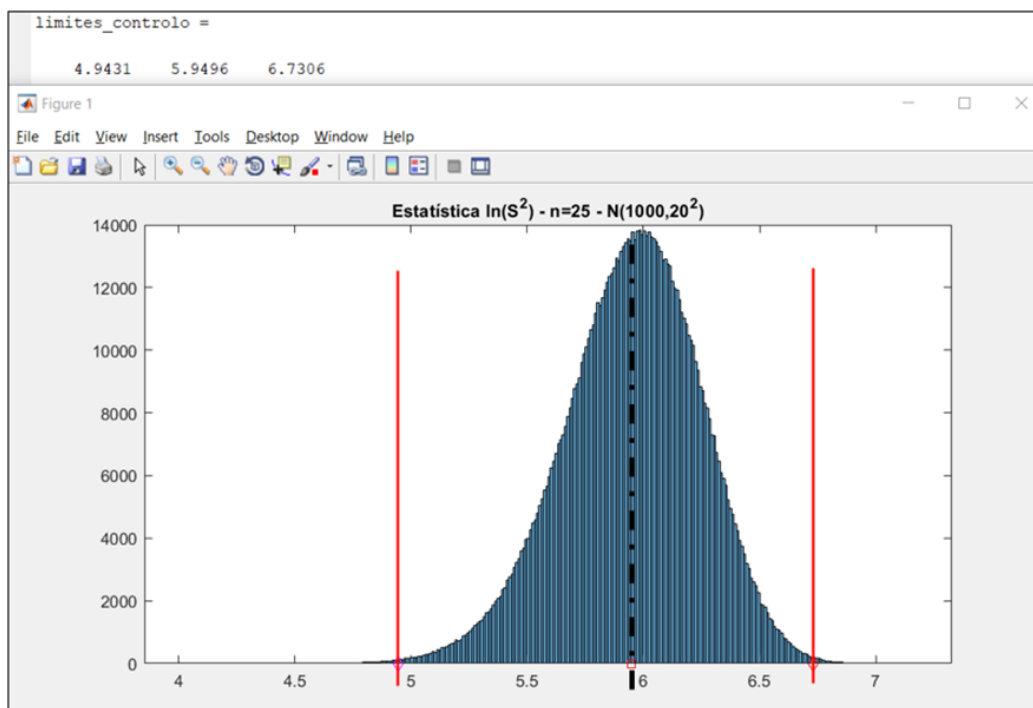


Figura 3.4 - Output da simulação dos parâmetros da carta $\ln(S^2)$

Como é possível verificar através da Figura 3.4, é apresentado um gráfico, correspondente à simulação da estatística $\ln(S^2)$, acompanhada de uma matriz na linha de comandos, "limites_de controlo = [4.9431 , 5,9496 , 6,7306]", que correspondem respetivamente aos limites de controlo e linha central para dimensão da amostra igual a 25 e a um número de amostras utilizadas (variável "d" no esquema X) igual a 1.000.000.

Para uma análise mais profunda dos resultados de cada simulação, são apresentados, no Anexo D, os outputs das simulações para todas as dimensões da amostra testadas.

3.4 CONSTANTES

As constantes determinadas para construção das cartas $\ln(S^2)$ e \bar{X} são dadas pela Tabela 3.1.

O ficheiro EXCEL® utilizado para auxiliar a determinação e cálculo destas constantes é apresentado no Anexo E.

Tabela 3.1 - Constantes para construção da carta da média e da carta $\ln(S^2)$

Dimensão amostra (n)	CARTA $\ln(S^2)$					CARTA \bar{X}		
	Fase 1		Fase 2			Fase 1		Fase 2
	G ₄	G ₃	c ₂	G ₂	G ₁	c ₁	A ₄	A
2	3,597	11,537	1,200	2,397	12,737	3,320	3,865	2,121
3	2,469	6,064	0,575	1,894	6,639	1,777	2,309	1,732
4	2,019	4,238	0,369	1,651	4,607	1,446	1,804	1,500
5	1,764	3,360	0,270	1,494	3,631	1,310	1,536	1,342
6	1,594	2,813	0,213	1,381	3,026	1,238	1,362	1,225
7	1,462	2,504	0,176	1,286	2,679	1,192	1,238	1,134
8	1,363	2,208	0,150	1,213	2,357	1,161	1,143	1,061
9	1,281	2,022	0,130	1,150	2,152	1,139	1,067	1,000
10	1,215	1,864	0,115	1,099	1,979	1,122	1,005	0,949
11	1,159	1,738	0,103	1,056	1,841	1,109	0,952	0,905
12	1,110	1,633	0,094	1,016	1,727	1,098	0,908	0,866
13	1,069	1,546	0,086	0,983	1,631	1,089	0,868	0,832
14	1,029	1,472	0,079	0,950	1,551	1,082	0,834	0,802
15	0,998	1,400	0,073	0,924	1,473	1,076	0,803	0,775
16	0,969	1,337	0,068	0,901	1,405	1,071	0,776	0,750
17	0,936	1,289	0,064	0,872	1,353	1,066	0,751	0,728
18	0,912	1,238	0,060	0,852	1,298	1,062	0,729	0,707
19	0,891	1,200	0,057	0,835	1,257	1,058	0,708	0,688
20	0,866	1,155	0,054	0,813	1,209	1,055	0,689	0,671
21	0,849	1,124	0,051	0,798	1,175	1,052	0,672	0,655
22	0,829	1,094	0,048	0,781	1,142	1,050	0,655	0,640
23	0,812	1,067	0,046	0,766	1,113	1,047	0,640	0,626
24	0,794	1,031	0,044	0,750	1,075	1,045	0,626	0,612
25	0,781	1,007	0,042	0,739	1,049	1,043	0,613	0,600

3.5 ESTUDO COMPARATIVO

Nesta secção, o objetivo principal foca-se na comparação das diversas estatísticas utilizadas no controlo estatístico tradicional para controlo da dispersão (estatísticas R e S), com a nova abordagem sugerida, através da carta $\ln(S^2)$. Na Figura 3.5 é possível verificar uma comparação

entre as três estatísticas, para dimensões da amostra iguais a 5, 10 e 20, permitindo ainda verificar a sua evolução.

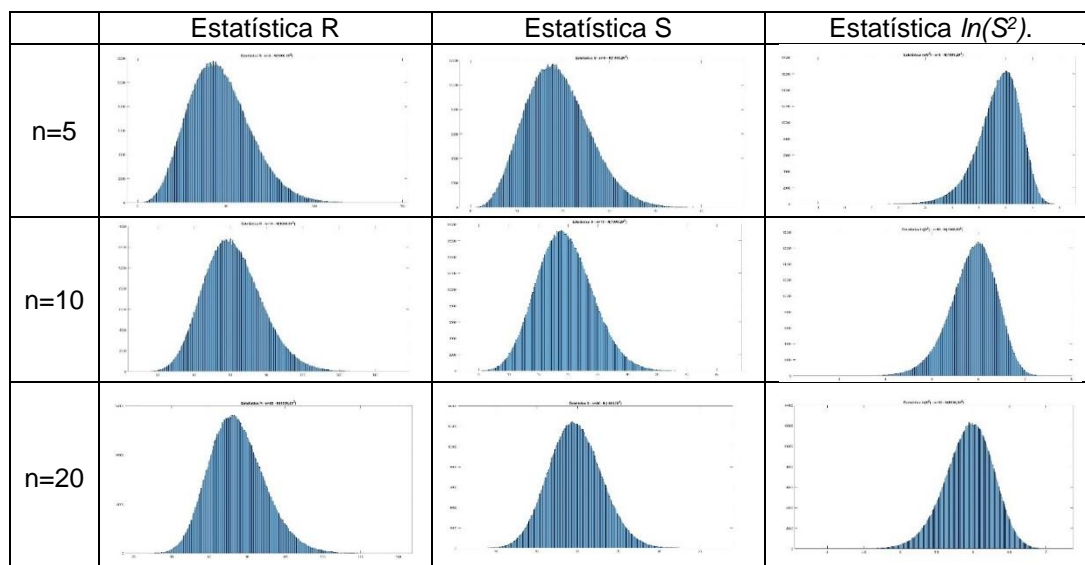


Figura 3.5 - Estudo comparativo das distribuições de R , S e $\ln(S^2)$, para $n = 5, 10, 20$

Para dimensões baixas da amostra, as cartas R e S demonstram de uma forma clara a sua não-Normalidade, sendo possível verificar a cauda acentuada para a direita, pelo que, se torna enviesada a sua utilização.

A nova carta $\ln(S^2)$, apesar de também não apresentar uma simetria perfeita, logo, não sendo perfeitamente normal, os parâmetros utilizados para definir os limites de controlo estão de acordo com essa não-Normalidade, argumentos que permitem afirmar esta carta como uma boa alternativa às utilizadas pelo controlo estatístico tradicional. O efeito da não-Normalidade e as diferentes dimensões da amostra foram tidas em consideração aquando da realização destas simulações em *MATLAB*®.

3.6 EXEMPLO PRÁTICO DE APLICAÇÃO

Por forma a comparar as diferentes cartas de controlo da dispersão, são apresentados nesta secção, diferentes cartas de controlo, obtidas através da geração de dados Normais, com diferentes médias e variâncias, estudando diferentes dimensões da amostra, com o intuito de verificar, em casos de aplicação práticos, como se comportam as cartas e de que forma a não-Normalidade das distribuições associadas às estatísticas pode afetar a performance das diversas cartas.

Para realizar este estudo foram criados três ficheiros *EXCEL*®, em que foram gerados dados de três distribuições Normais – $N(125,4^2)$, $N(250,10^2)$, $N(1000,20^2)$ – para os quais foram criadas as cartas de controlo R , S e $\ln(S^2)$. Em cada carta são estudados 40 valores amostrais, com dimensões da amostra $n = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 15, 20, 25\}$.

Na Figura 3.6, Figura 3.7 e Figura 3.8 são apresentados, respetivamente, três destes casos, correspondentes às seguintes comparações:

- $n=5$ e $N(250,10^2)$;
- $n=10$ e $N(1000,20^2)$;
- $n=25$ e $N(125,4^2)$.

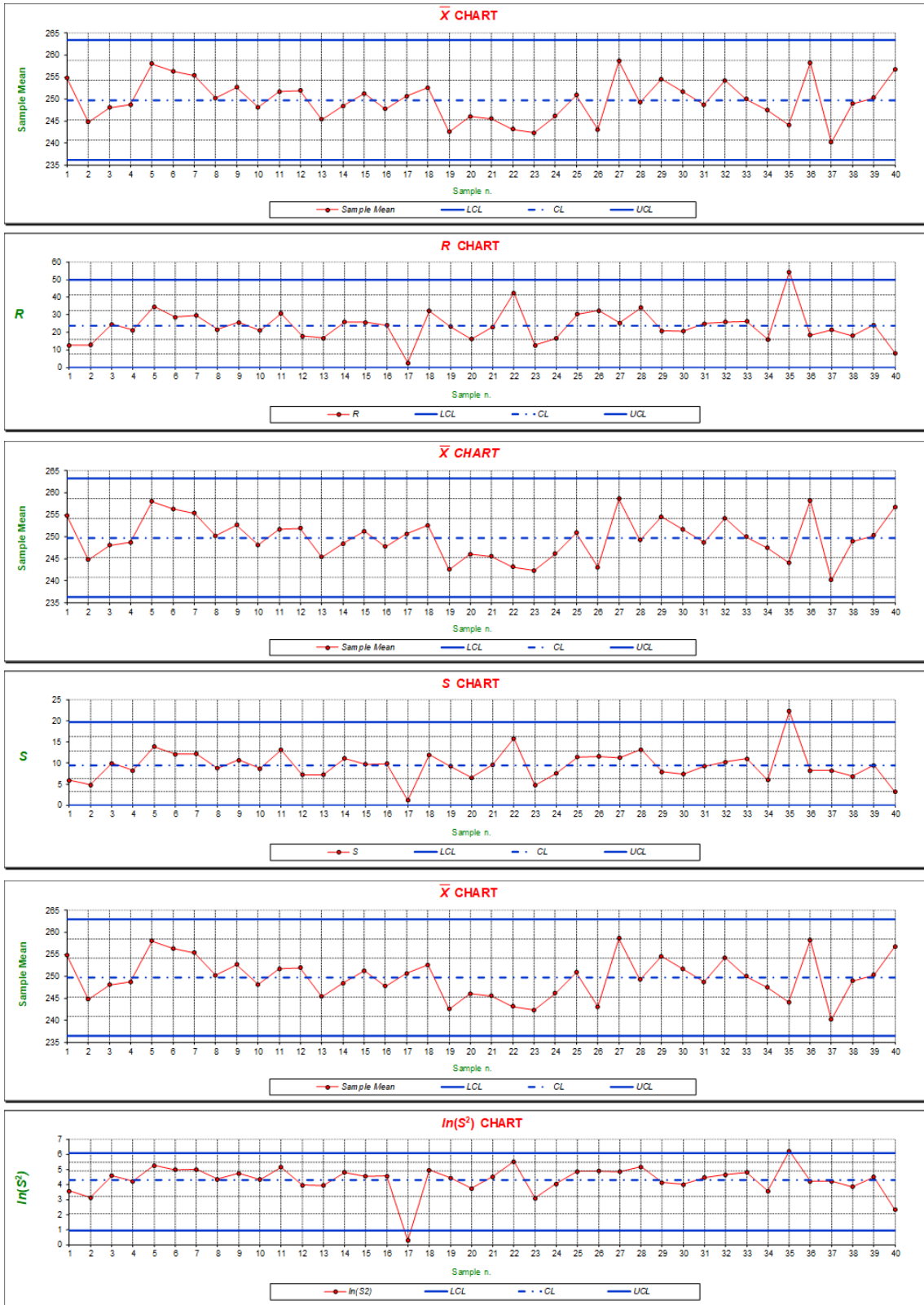


Figura 3.6 - Cartas de controlo da média e cartas de controlo R, S e $\ln(S^2)$ para $n = 5$ e $N(250; 10^2)$

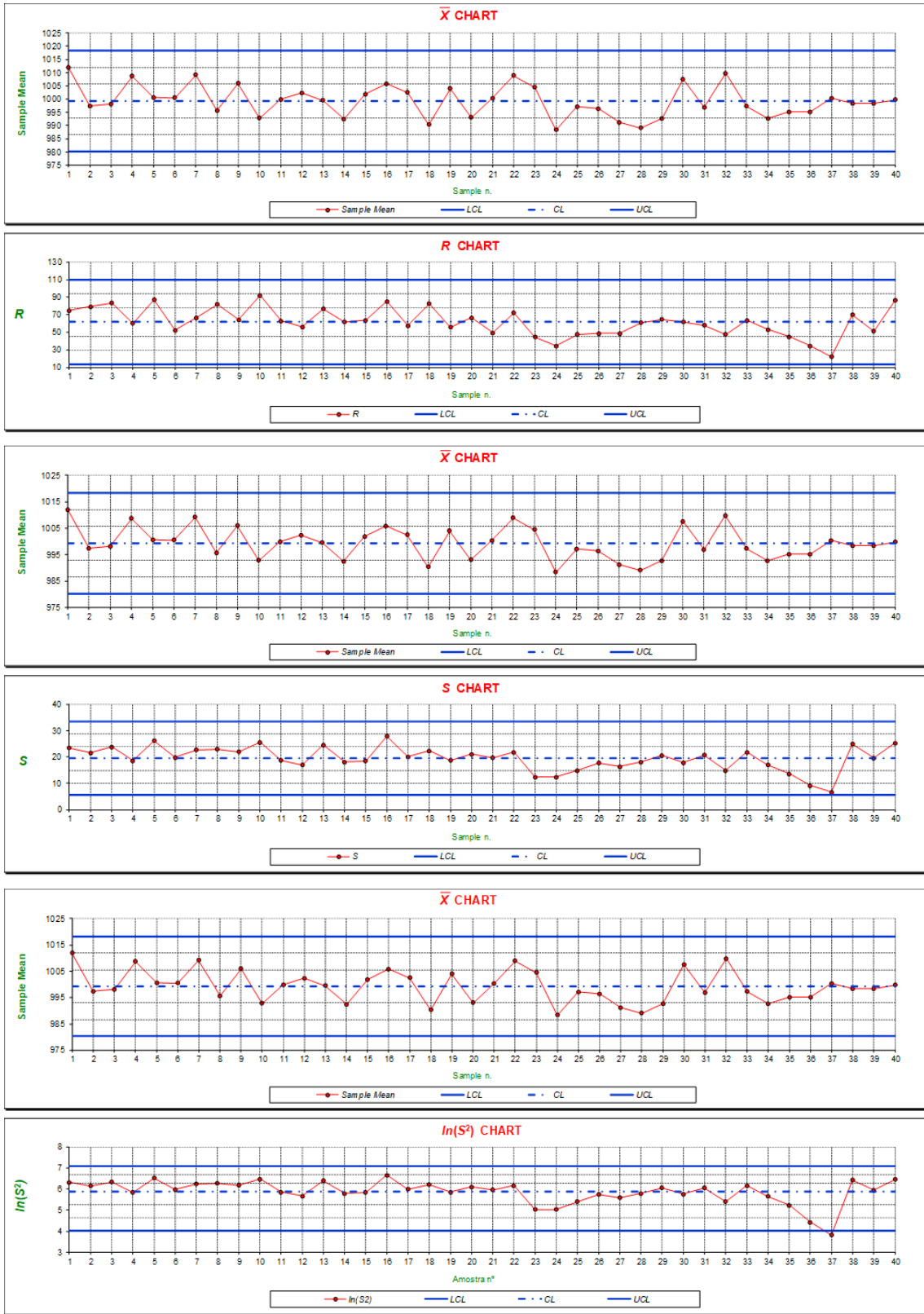


Figura 3.7 - Cartas de controle da média e cartas de controle R , S e $\ln(S^2)$ para $n = 10$ e $N(1000; 202)$

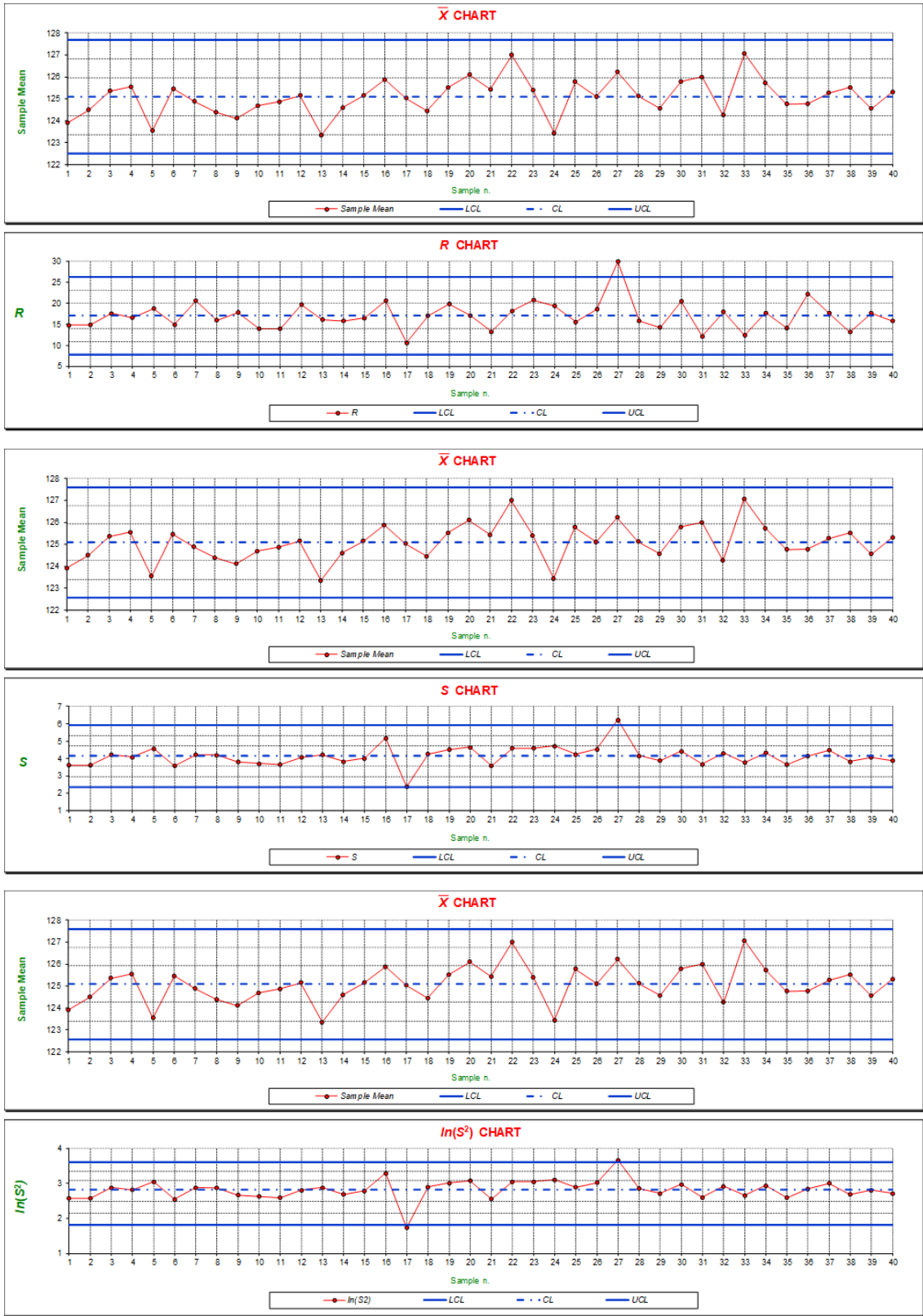


Figura 3.8 - Cartas de controle da média e cartas de controle R , S e $\ln(S^2)$ para $n = 25$ e $N(125; 4^2)$

Na Tabela 3.2 é apresentado um resumo das causas especiais detetadas pelas diferentes cartas de forma a compreender de forma mais explícita as diferenças em performance das mesmas.

Como é possível verificar, tanto para dimensões da amostra mais baixas ($n=5$), como para dimensões de amostra elevadas ($n=25$), a carta $\ln(S^2)$ apresenta uma performance superior às restantes cartas, detetando causas especiais de variação que as restantes cartas não detetam, demonstrando ser mais restritiva que as restantes. Para além deste fator importante, a carta $\ln(S^2)$ demonstra uma verdadeira vantagem na deteção de causas especiais de variação relacionadas com a diminuição de dispersão. Este facto pode dever-se em especial ao facto de na elaboração desta carta se ter tomado em conta o efeito da não-Normalidade da distribuição $\ln(S^2)$ o que não acontece nas restantes cartas, pelo que, apesar dos limites não serem simétricos em relação à linha central, são coerentes com a distribuição em causa, não enviesando os resultados e fornecendo um meio de controlo estatístico mais preciso.

Tabela 3.2 - Síntese da comparação de desempenho entre as cartas de controlo

Dimensão da amostra	Causa especial de variação	Carta S	Carta R	Carta $\ln(S^2)$
5	Aumento da dispersão	$t = 35$	$t = 35$	$t = 35$
	Redução da dispersão	—	—	$t = 17$
10	Aumento da dispersão	—	—	—
	Redução da dispersão	—	—	$t = 37$
20	Aumento da dispersão	$t = 27$	$t = 27$	$t = 27$
	Redução da dispersão	—	—	$t = 17$

4. CAPACIDADE DO PROCESSO EM TEMPO REAL

O Controlo Estatístico do Processo é uma metodologia que tem como objetivo principal controlar as causas de variação de um processo, mitigando as causas especiais de variação e controlando as causas comuns de variação. Na realização destes objetivos, as cartas de controlo são utilizadas como ferramentas de excelência para garantir a produção de bens e serviços que correspondam aos limites de especificação implementados. Uma parte importante do *SPC* tem que ver com a Capacidade do Processo, que tem como objetivo verificar se um determinado processo consegue produzir, de forma consistente segundo as especificações, ou seja, se é estável ao longo do tempo e não apresenta causas especiais de variação. No estudo da capacidade do processo no *SPC* tradicional são utilizados diversos índices, como o C_p e C_{pk} . Um dos problemas inerentes ao estudo da capacidade do processo corresponde à dificuldade em definir momentos temporais onde estudar a capacidade. O estudo e desenvolvimentos realizados nesta secção pretendem elaborar um método que permita não só estudar a capacidade do processo no final da Fase 1, mas também ao longo da Fase 2, em tempo real, fornecendo ainda mais informação vital sobre o processo.

Nesta secção da dissertação serão discutidas duas propostas para monitorização da capacidade do processo em tempo real: a primeira, mais simplista, tem como base o estudo da capacidade do processo em tempo real, de forma análoga ao que é realizado nas cartas de controlo de *Short Runs*, onde se criam índices, cujo limiar de aceitação se definem com base nos limites de controlo das cartas, desta forma sendo possível, em simultâneo, na mesma carta analisar causas especiais de variação e a capacidade do processo; a segunda, mais complexa, na qual existe a necessidade de criação de outra ferramenta de auxílio, o gráfico PCIRUN, que, na Fase 2 do *SPC* permitirá verificar e analisar em tempo real os valores dos índices de capacidade C_p e C_{pk} , bem como os seus intervalos de confiança.

4.1 CAPACIDADE DO PROCESSO EM TEMPO REAL – ABORDAGEM 1

Nas cartas de controlo de *Short Runs*, designadamente, cartas Z e Q, a capacidade do processo é estudada em tempo real, através de índices de capacidade desenvolvidos para serem calculados através de estimativas em tempo real dos parâmetros do processo.

Considere-se o instante $t=0$ como o momento temporal em que se estabelece a diferenciação entre a Fase 1 e a Fase 2 do *SPC*. Nesse instante considera-se que o processo está controlado estatisticamente, são estimados os parâmetros do processo e procede-se ao estudo da capacidade do processo relativamente à especificação técnica. Se o processo for apto, ou seja, se apresentar capacidade, passa à Fase 2, definindo-se então cartas de controlo com limites de controlo que dependem das estimativas dos parâmetros do processo, definidos na Fase 1. Na Fase 2, o que se propõe é a realização de uma análise em tempo real dos índices de capacidade, utilizando os valores das observações da Fase 2 para realizar uma estimativa mais alargada dos

parâmetros do processo e assim podendo controlar instante a instante o processo e a sua capacidade. Na Tabela 4.1 é apresentada uma ilustração gráfica da alternativa proposta para estudar a capacidade do processo.

Tabela 4.1 - Alternativa para estudo da capacidade do processo em tempo real (índices de capacidade)

	Fase 1					Fase 2				
t	- k + 1	- k + 2	⋮	- 1	0	1	2	...	j	...
\bar{X}	\bar{X}_{-k+1}	\bar{X}_{-k+2}	⋮	\bar{X}_{-1}	\bar{X}_0	\bar{X}_1	\bar{X}_2	...	\bar{X}_j	...
R	R_{-k+1}	R_{-k+2}	⋮	R_{-1}	R_0	R_1	R_2	...	R_j	...
S	S_{-k+1}	S_{-k+2}	⋮	S_{-1}	S_0	S_1	S_2	...	S_j	...
$\ln(S^2)$	$\ln(S^2)_{-k+1}$	$\ln(S^2)_{-k+2}$	⋮	$\ln(S^2)_{-1}$	$\ln(S^2)_0$	$\ln(S^2)_1$	$\ln(S^2)_2$...	$\ln(S^2)_j$...
$\hat{\mu}$	—	—	—	—	$\hat{\mu}_0$	$\hat{\mu}_1$	$\hat{\mu}_2$...	$\hat{\mu}_j$...
$\hat{\sigma}$	—	—	—	—	$\hat{\sigma}_0$	$\hat{\sigma}_1$	$\hat{\sigma}_2$...	$\hat{\sigma}_j$...
Índices capacidade	—	—	—	—	$(\hat{C}_{pk})_0$	$(I_U)_1$ $(I_L)_1$	$(I_U)_2$ $(I_L)_2$...	$(I_U)_j$ $(I_L)_j$...

Como é possível verificar, na Fase 2 do SPC são recalculados os valores dos parâmetros do processo através das estimativas que incluem os valores da Fase 1 (estimativas dos parâmetros do processo que servem de base para a Fase 2) e os valores da Fase 2 até ao instante em que o processo se encontra.

4.1.1 DESENVOLVIMENTO DOS ÍNDICES DE CAPACIDADE DO PROCESSO

Nesta seção será realizado um desenvolvimento teórico dos índices de capacidade que se pretende adotar para controlar a capacidade do processo instante a instante durante a Fase 2 do SPC tradicional.

Da mesma forma que nas cartas de *Short Runs*, nas quais os índices de capacidade definem-se de acordo com limites que são coerentes com os limites de controlo das respetivas cartas de controlo, nesta abordagem pretende-se que o limiar de aceitação dos índices de capacidade seja coerente com os limites de controlo da carta em causa, desta forma facilitando uma análise visual da capacidade do processo. Assim sendo, torna-se importante identificar os limiares de aceitação para os índices de capacidade. Como abordado na secção 2.2.7.1, os limites de controlo da carta de controlo \bar{X} , para a Fase 2 do controlo estatístico, são os seguintes:

$$LSC_{\bar{X}} = \mu + A\sigma \quad (4.1)$$

$$LIC_{\bar{X}} = \mu - A\sigma \quad (4.2)$$

Desta forma, os índices de capacidade que serão desenvolvidos têm de respeitar estes limites como os limiares de aceitação de capacidade do processo. Assim, desenvolvem-se os seguintes índices, através dos índices tradicionais $(C_{pk})_s$ e $(C_{pk})_l$:

$$\begin{aligned}
(C_{pk})_s &= \frac{LSE - \mu}{3\sigma} \geq k \\
\Rightarrow ((C_{pk})_s)_r &= \frac{LSE - \mu_r}{3\sigma_r} \geq k \\
\Leftrightarrow \frac{LSE - \mu_r}{3k\sigma_r} &\geq 1 \Leftrightarrow U_r \geq 1 \\
&\Leftrightarrow U_r \cdot (\sigma_{\bar{x}})_0 \geq 1 \cdot (\sigma_{\bar{x}})_0 \\
\text{Se } (ref)_U = LSC_{\bar{x}} &\Rightarrow U_r \cdot (\sigma_{\bar{x}})_0 + (ref)_U \geq 1 \cdot (\sigma_{\bar{x}})_0 + (ref)_U \\
&\Leftrightarrow LSC_{\bar{x}} + U_r \cdot (\sigma_{\bar{x}})_0 \geq LSC_{\bar{x}} + (\sigma_{\bar{x}})_0 \\
&\Leftrightarrow LSC_{\bar{x}} + U_r \cdot (\sigma_{\bar{x}})_0 \geq \mu_0 + 4 \cdot (\sigma_{\bar{x}})_0
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Assim sendo, através deste desenvolvimento, torna-se possível fazer a análise da capacidade do processo, em tempo real, através das seguintes condições:

- Se $U_r > 1$, então o processo é considerado capaz;
- Se $U_r < 1$, então o processo é considerado não capaz.

Apesar de em termos teóricos não haver problema com a aplicação desta metodologia, o certo é que por forma a ser uma metodologia eficaz, deve ser de prática utilização, bem como de fácil compreensão por parte dos utilizadores. Através da manipulação matemática realizada, torna-se difícil, em termos gráficos visualizar as situações possíveis (processo ser capaz ou não capaz). De forma a resolver este contratempo, sugere-se a afetação do segundo termo do primeiro membro da equação 4.3 através de um fator γ (e.g. $\gamma=2$) que vai facilitar a visualização gráfica, uma vez que valores de γ superiores a 1 irão provocar um afastamento do índice da linha de referência, quer o processo seja capaz ou não.

Desta modificação, surge o índice superior que permitirá monitorizar a capacidade do processo em tempo real, denominado de I_U (índice *upper*), que pode ser expresso da seguinte forma:

$$I_U = LSC_{\bar{x}} + \gamma \cdot [U_r \cdot (\sigma_{\bar{x}})_0] \geq \mu_0 + 4 \cdot (\sigma_{\bar{x}})_0 \tag{4.4}$$

Os mesmos desenvolvimentos foram realizados para o índice de capacidade inferior, com base no índice tradicional $(C_{pk})_l$, que resultaram nas seguintes expressões:

$$\begin{aligned}
(C_{pk})_l &= \frac{\mu - LIE}{3\sigma} \geq k \\
\Rightarrow ((C_{pk})_l)_r &= \frac{\mu_r - LIE}{3\sigma_r} \geq k \\
\Leftrightarrow \frac{\mu_r - LIE}{3k\sigma_r} &\geq 1 \Leftrightarrow L_r \geq 1 \\
&\Leftrightarrow L_r \cdot (\sigma_{\bar{x}})_0 \geq 1 \cdot (\sigma_{\bar{x}})_0 \\
&\Leftrightarrow -L_r \cdot (\sigma_{\bar{x}})_0 \leq -(\sigma_{\bar{x}})_0 \\
\text{Se } (ref)_L = LIC_{\bar{x}} &= \mu_0 - 3 \cdot (\sigma_{\bar{x}})_0
\end{aligned} \tag{4.5}$$

$$\Leftrightarrow LIC_{\bar{X}} - L_r \cdot (\sigma_{\bar{X}})_0 \leq LIC_{\bar{X}} - (\sigma_{\bar{X}})_0$$

$$\Leftrightarrow LIC_{\bar{X}} - L_r \cdot (\sigma_{\bar{X}})_0 \leq \mu_0 - 4 \cdot (\sigma_{\bar{X}})_0$$

Assim sendo, através deste desenvolvimento, torna-se possível fazer a análise da capacidade do processo, em tempo real, através das seguintes condições:

- Se $L_r > 1$, então o processo é considerado capaz;
- Se $L_r < 1$, então o processo é considerado não capaz.

De forma a facilitar a análise gráfica deste índice, sugere-se novamente a afetação do índice por um fator γ .

O índice de capacidade resultante destes desenvolvimentos pode definir-se por I_L (índice *lower*), que pode ser expresso da seguinte forma:

$$I_L = LIC_{\bar{X}} - \gamma \cdot [L_r \cdot (\sigma_{\bar{X}})_0] \leq \mu_0 - 4 \cdot (\sigma_{\bar{X}})_0 \quad (4.6)$$

Por forma a considerar o processo capaz, em qualquer instante r , este tem de obedecer às seguintes restrições:

$$(I_U)_r \geq \mu_0 + 4 \cdot (\sigma_{\bar{X}})_0 \quad (4.7)$$

$$(I_L)_r \leq \mu_0 - 4 \cdot (\sigma_{\bar{X}})_0 \quad (4.8)$$

Relativamente aos parâmetros μ_r e σ_r , estes são estimados através das seguintes expressões:

$$\hat{\mu}_r = \frac{1}{r} \left((r-1)\bar{X}_{r-1} + \bar{X}_r \right) \quad (4.9)$$

$$\hat{\sigma}_r = \bar{R}_r / d_2 \text{ ou } \hat{\sigma}_r = \bar{S}_r / c_4 \quad (4.10)$$

$$\bar{R}_r = \frac{1}{r} \left((r-1)\bar{R}_{r-1} + R_r \right) \quad (4.11)$$

$$\bar{S}_r = \frac{1}{r} \left((r-1)\bar{S}_{r-1} + S_r \right) \quad (4.12)$$

Uma vez definidos os indicadores a utilizar, passa-se à definição de metodologia de implementação desta técnica de controlo da capacidade do processo em tempo real, para a qual se sugere a implementação do seguinte procedimento:

1. Considere-se que no instante 0 da Fase 1 o processo se encontra estabilizado e com capacidade. São estimados os parâmetros do processo através das seguintes estimativas:
 - 1.1. $\hat{\mu}_0 = \bar{X}$;
 - 1.2. $\hat{\sigma}_0 = \bar{R}/d_2$ ou $\hat{\sigma}_0 = \bar{S}/c_4$.
2. Determinam-se, com base nos parâmetros do processo estimados, os índices de capacidade C_p e C_{pk} com o objetivo de verificar se o processo é capaz. Caso o processo seja capaz, passa-se ao ponto 3, caso contrário deve parar-se o Controlo Estatístico do Processo, estudar a causa da falta de capacidade do processo e implementar medidas corretivas de forma a garantir que o processo apresente capacidade de acordo com a especificação técnica.
3. Recolher a amostra correspondente a $t=1$ (r) (primeiro instante (r -ésimo instante) da Fase 2) e determinar as estatísticas necessárias \bar{X}_1 e R_1 ou S_1 .

4. Verificar se o processo continua sob controlo estatístico no instante $t=1$ (r).
5. Estimar os novos parâmetros do processo, para o instante 1 (r), dados por:
 - 5.1. $\hat{\mu}_r = \frac{1}{r} \left((r-1)\bar{X}_{r-1} + \bar{X}_r \right)$
 - 5.2. $\hat{\sigma}_r = \bar{R}_r / d_2$ ou $\hat{\sigma}_r = \bar{S}_r / c_4$
 - 5.2.1. $\bar{R}_r = \frac{1}{r} \left((r-1)\bar{R}_{r-1} + R_r \right)$
 - 5.2.2. $\bar{S}_r = \frac{1}{r} \left((r-1)\bar{S}_{r-1} + S_r \right)$
6. Estimar os valores dos índices de capacidade I_L e I_U , para o instante 1 (r), dados pelas equações 4.4 e 4.6;
7. Verificar as condições necessárias para considerar o processo capaz no instante 1 (r), que são definidas pelas equações 4.7 e 4.8.
8. Se o processo não apresentar capacidade, no instante 2 ($r+1$), deve parar-se o processo, uma vez que não tem capacidade, reestruturar o processo de fabrico de forma a que se torne robusto a produzir dentro de especificação e reiniciar o controlo estatístico na Fase 1. Caso o processo apresente capacidade, devem continuar a ser seguidos os passos 3 a 8, de forma a controlar e monitorizar, em tempo real, a capacidade do processo.

4.1.2 EXEMPLO DE APLICAÇÃO

Nesta secção é apresentado um exemplo de aplicação desta nova metodologia, onde é apresentada a Fase 1 do SPC, onde se irá verificar a estabilidade do processo e realizar a estimação dos parâmetros. Com o final da Fase 1, é possível obter um processo livre de causas especiais de variação, ou, seja, sob controlo estatístico. Desta forma é possível estimar os parâmetros do processo e verificar a capacidade deste processo produzir, de forma consistente, segundo as especificações definidas. Após estes procedimentos, passa-se à Fase 2 do Controlo Estatístico, fase de monitorização do processo, onde se irão implementar as metodologias de controlo da capacidade abordadas nesta dissertação. Desta forma, na Fase 2 são criadas as cartas de controlo para monitorização do processo, onde serão também incluídos os índices de capacidade em tempo real I_L e I_U de forma a verificar se para além de o processo estar estabilizado, se este continua a manter capacidade de produzir segundo a especificação.

Neste exemplo de aplicação, foram utilizadas 50 amostras de dimensão 5 para estimar os parâmetros do processo. São apresentadas, de seguida, as cartas de controlo resultantes da análise deste exemplo.

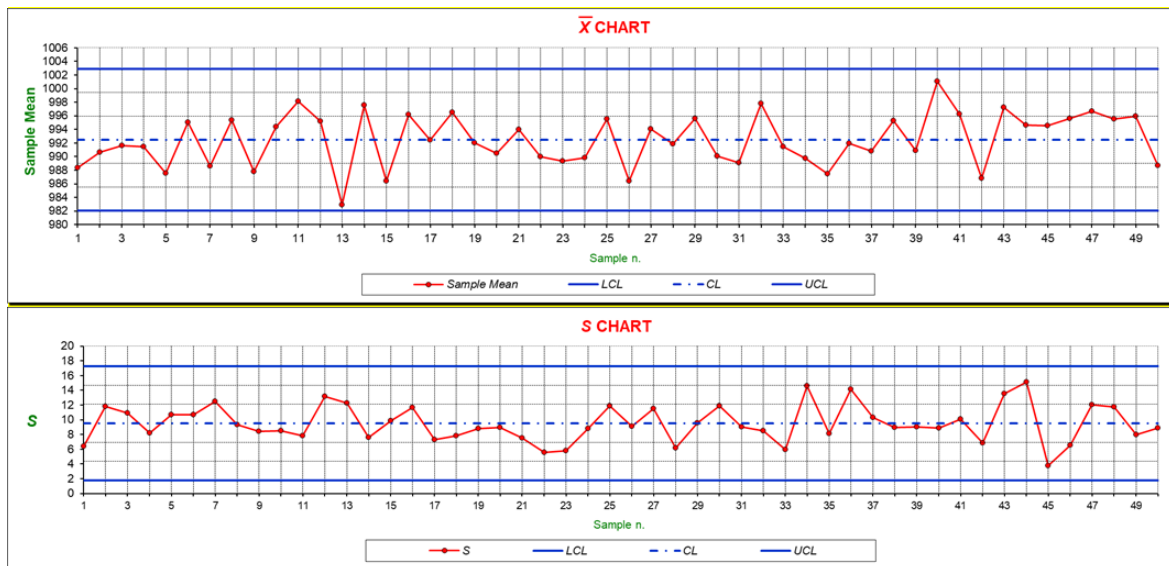


Figura 4.1 – Exemplo da aplicação da nova metodologia de estudo da capacidade do processo em tempo real (Fase 1)
 Após uma análise cuidadosa da Figura 4.1, é possível verificar que não existem causas especiais de variação, pelo que podem ser estimados os parâmetros do processo, os quais são apresentados na Tabela 4.2.

Tabela 4.2 - Estimação dos parâmetros do processo

	Média	Desvio Padrão
Cartas \bar{X} e S	$\hat{\mu} = \bar{\bar{X}}$	$\hat{\sigma} = \bar{S}/c_4$
	992,456	9,8446

Finalizando a Fase 1 do SPC, é então altura de verificar se o processo tem capacidade de produzir segundos as especificações definidas. Neste processo os limites de especificação considerados aceitáveis para produto conforme, situam-se no intervalo [950; 1050]. Sabendo os limites de especificação e com os parâmetros do processo já estimados, torna-se possível realizar o estudo à capacidade do processo, através dos índices C_p e C_{pk} , calculados através das equações 2.22, 2.23 e 2.24, cujos valores são apresentados na Tabela 4.3.

Tabela 4.3 - Índices de capacidade do processo

C_p	1,693
C_{pk}	1,438
$(C_{pk})_s$	1,948
$(C_{pk})_l$	1,438

Uma vez que estamos perante um processo com especificação bilateral, o critério utilizado para garantir a capacidade do processo exige que ambos os índices de capacidade possuam valores superiores a 1,33. Neste caso, C_p e C_{pk} são ambos superiores a esse valor, logo considera-se um processo capaz. Torna-se, nesta fase, ainda importante salientar que, uma vez que C_p e C_{pk} possuem valores diferentes, este processo não se encontra perfeitamente centrado. Através da análise dos índices $(C_{pk})_s$ e $(C_{pk})_l$ é possível afirmar que a média do processo está descentrada

com tendência para o limite inferior de especificação, daí o índice inferior de capacidade apresentar um valor mais baixo. Ainda assim, o processo possui capacidade, condição suficiente para se avançar para a Fase 2 do Controlo Estatístico.

Na Fase 2 do SPC, são recolhidas amostras de dimensão 5 e realiza-se a monitorização do processo, procedendo adicionalmente ao controlo de capacidade através dos índices desenvolvidos na secção anterior desta dissertação. As cartas de controlo desta Fase do SPC são apresentadas na Figura 4.2.

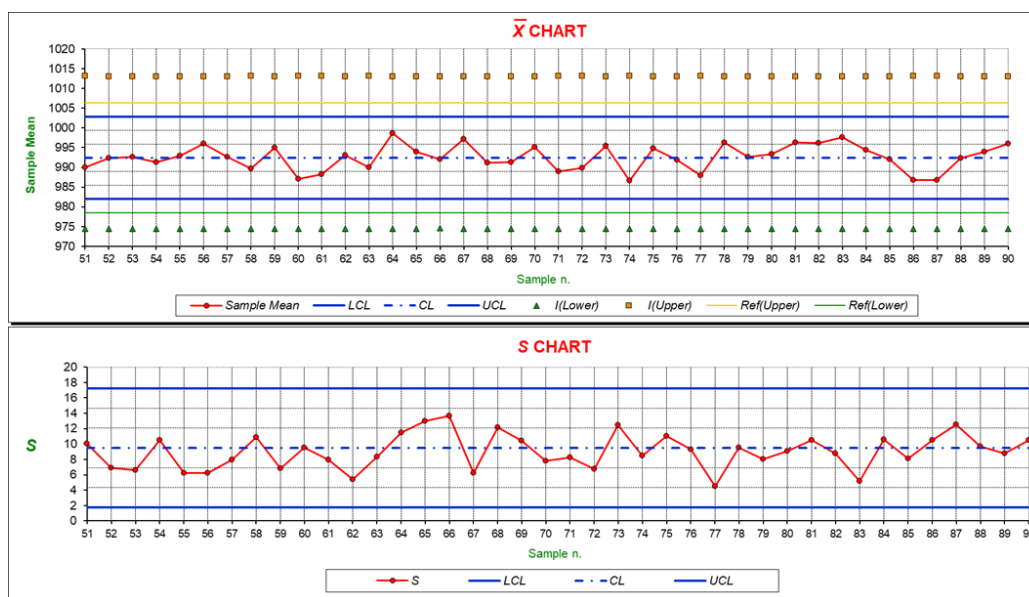


Figura 4.2 - Exemplo da aplicação da nova metodologia de estudo da capacidade do processo em tempo real (Fase 2) Como é possível verificar, não existem causas especiais de variação a salientar, pelo que se conclui que o processo se mantém sob controlo estatístico.

Relativamente aos índices de capacidade, é importante salientar algumas conclusões:

- Em primeiro lugar, uma vez que o índice I_L é sempre inferior ao valor de referência inferior ($\mu_0 - 4 \cdot (\sigma_{\bar{x}})_0$) e o índice I_U é sempre superior ao valor de referência superior ($\mu_0 + 4 \cdot (\sigma_{\bar{x}})_0$), podemos concluir que o processo se mantém capaz ao longo da segunda fase do SPC. Se em algum instante um destes pressupostos fosse violado, o processo seria considerado com falta de capacidade, pelo que teria de se investigar a causa dessa falta de capacidade, implementar ações corretivas no processo e reiniciar o controlo estatístico do processo.
- Por outro lado, os índices apresentam distâncias distintas dos respetivos valores de referência, verificando-se que o índice I_U apresenta uma maior “folga” relativamente ao valor de referência, logo em relação ao limite superior, este processo é “mais capaz” do que relativamente ao limite inferior, o que vai de encontro ao que já foi exposto nas conclusões tecidas sobre a Fase 1 relativamente à média do processo não estar centrada com a especificação imposta. Uma vez que a média tende para o limite inferior de especificação, é natural que o processo seja “menos capaz” aos olhos do índice

inferior de capacidade do que do índice superior de capacidade. De qualquer das formas, ambos os índices apresentam valores superiores (no caso do índice superior) e inferiores (no caso do índice inferior) aos seus limites, pelo que se conclui que o processo se mantém com capacidade durante o período analisado.

4.2 CAPACIDADE DO PROCESSO EM TEMPO REAL – ABORDAGEM 2

De forma análoga ao apresentado na abordagem 1, o que se propõe é a realização de uma análise em tempo real dos índices de capacidade, utilizando os valores das observações da Fase 2 para realizar uma estimativa mais alargada dos parâmetros do processo e assim podendo controlar instante a instante o processo e a sua capacidade.

Ao contrário da primeira abordagem, em que foram desenvolvidos novos índices de capacidade que poderiam ser comparados com os respetivos valores de referência (secção 4.1), de forma a poder analisar em simultâneo as causas especiais de variação e a capacidade do processo, nesta abordagem, o que se sugere é a utilização dos índices de capacidade tradicionais. Para isto adaptam-se os índices ao estudo da capacidade em tempo real, através das estimativas dos novos parâmetros do processo, alargando a estimativa a todos os valores das estatísticas recolhidas na Fase 1 e Fase 2. Desta forma, é possível, em cada instante, determinar os intervalos de confiança para os índices de capacidade e assinalá-los num gráfico de controlo que será designado como “Carta PCIRUN” (*Process Capability Indexes*), que é a base para analisar e controlar a capacidade do processo em tempo real.

Na Tabela 4.4 é apresentada uma ilustração gráfica da alternativa proposta para estudar a capacidade do processo.

Tabela 4.4 - Alternativa para estudo da capacidade do processo em tempo real (carta PCIRUN)

	Fase 1					Fase 2				
t	- k + 1	- k + 2	...	- 1	0	1	2	...	j	...
\bar{X}	\bar{x}_{-k+1}	\bar{x}_{-k+2}	...	\bar{x}_{-1}	\bar{x}_0	\bar{x}_1	\bar{x}_2	...	\bar{x}_j	...
R	R_{-k+1}	R_{-k+2}	...	R_{-1}	R_0	R_1	R_2	...	R_j	...
S	S_{-k+1}	S_{-k+2}	...	S_{-1}	S_0	S_1	S_2	...	S_j	...
$\ln(S^2)$	$\ln(S^2)_{-k+1}$	$\ln(S^2)_{-k+2}$...	$\ln(S^2)_{-1}$	$\ln(S^2)_0$	$\ln(S^2)_1$	$\ln(S^2)_2$...	$\ln(S^2)_j$...
$\hat{\mu}$	—	—	—	—	$\hat{\mu}_0$	$\hat{\mu}_1$	$\hat{\mu}_2$...	$\hat{\mu}_j$...
$\hat{\sigma}$	—	—	—	—	$\hat{\sigma}_0$	$\hat{\sigma}_1$	$\hat{\sigma}_2$...	$\hat{\sigma}_j$...
Índices capacidade	—	—	—	—	$(\hat{C}_p)_0$	$(\hat{C}_p)_1$	$(\hat{C}_p)_2$...	$(\hat{C}_p)_j$...
	—	—	—	—	$(\hat{C}_{pk})_0$	$(\hat{C}_{pk})_1$	$(\hat{C}_{pk})_2$...	$(\hat{C}_{pk})_j$...

	—	—	—	—	—	Carta <i>PCIRUN</i>
--	---	---	---	---	---	---------------------

Como é possível verificar, na Fase 2 do *SPC* são reestimados os valores dos parâmetros do processo através das estimativas que incluem os valores da Fase 1 (estimativas dos parâmetros do processo que servem de base para a Fase 2) e os valores da Fase 2 até ao instante em que o processo se encontra.

4.2.1 DESENVOLVIMENTO DA METODOLOGIA DE ESTUDO DA CAPACIDADE DO PROCESSO ATRAVÉS DE INTERVALOS DE CONFIANÇA DOS ÍNDICES DE CAPACIDADE

Nesta secção são abordados todos os princípios necessários à construção da carta *PCIRUN*, cujo objetivo corresponde à análise da capacidade do processo em tempo real (monitorização) através dos intervalos de confiança dos índices de capacidade tradicionais. De forma a realizar estes desenvolvimentos, serão abordados e explorados os fundamentos matemáticos subjacentes aos intervalos de confiança dos índices, bem como a realização de deduções acerca das estimativas necessárias para os parâmetros do processo e ainda o desenvolvimento de um procedimento de implementação para a construção e análise da carta *PCIRUN*.

O intervalo de confiança bilateral para o índice C_p pode ser calculado, segundo Kotz & Johnson (2002), através da seguinte equação:

$$\hat{C}_p \sqrt{\frac{\chi^2(1-\frac{\alpha}{2});N-1}}{N-1}} \leq C_p \leq \hat{C}_p \sqrt{\frac{\chi^2(\frac{\alpha}{2});N-1}}{N-1}} \quad (4.13)$$

Onde \hat{C}_p corresponde à estimativa pontual do índice C_p .

Relativamente ao índice C_{pk} , o intervalo de confiança bilateral é dado, segundo Kotz & Johnson (2002), por:

$$\hat{C}_{pk} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{C}_{pk}^2}{2(N-1)} + \frac{1}{9N}} \leq C_{pk} \leq \hat{C}_{pk} + Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{C}_{pk}^2}{2(N-1)} + \frac{1}{9N}} \quad (4.14)$$

Em que, analogamente, \hat{C}_{pk} corresponde à estimativa pontual do índice C_{pk} .

Uma vez que os índices de capacidade são calculados com base em dados amostrais, estes são apenas estimativas pontuais da capacidade do processo, sendo então conveniente definir um intervalo de confiança no qual o verdadeiro valor do índice se situe, considerando para o efeito uma determinada probabilidade (Pereira & Requeijo, 2012).

Por forma a implementar esta metodologia de monitorização da capacidade do processo, sugere-se a adoção e implementação do seguinte procedimento:

1. Considere-se que no instante 0 da Fase 1 o processo se encontra estabilizado e com capacidade. São estimados os parâmetros do processo através das seguintes estimativas:
 - 1.1. $\hat{\mu}_0 = \bar{X}$;
 - 1.2. $\hat{\sigma}_0 = \bar{R}/d_2$ ou $\hat{\sigma}_0 = \bar{S}/c_4$.

2. Determinam-se, com base nos parâmetros do processo estimados, os índices de capacidade C_p e C_{pk} e os intervalos de confiança de C_p e C_{pk} com o objetivo de verificar se o processo é capaz; caso o processo seja capaz, passa-se ao ponto 3, caso contrário deve-se suspender o Controlo Estatístico do Processo, estudar a causa da falta de capacidade do processo e implementar medidas corretivas de forma a garantir que o processo apresente capacidade de acordo com a especificação técnica.
3. Representar no gráfico (Carta *PCIRUN*) os pontos correspondentes aos intervalos de confiança determinados no ponto 2.
4. Recolher a amostra no instante 1 (r) e determinar as estatísticas \bar{X}_1 e R_1, S_1 ou $\ln(S^2)_1$.
5. Verificar que o processo continua sob controlo estatístico no instante 1 (r).
6. Estimar os parâmetros do processo para o instante 1 (r), dados por:
 - 6.1. $\hat{\mu}_r = \frac{1}{r} \left((r-1)\bar{X}_{r-1} + \bar{X}_r \right)$
 - 6.2. $\hat{\sigma}_r = \bar{R}_r / d_2$ ou $\hat{\sigma}_r = \bar{S}_r / c_4$
 - 6.2.1. $\bar{R}_r = \frac{1}{r} \left((r-1)\bar{R}_{r-1} + R_r \right)$
 - 6.2.2. $\bar{S}_r = \frac{1}{r} \left((r-1)\bar{S}_{r-1} + S_r \right)$
7. Estimar os valores dos índices de capacidade para o instante 1 (r), dados por:
 - 7.1. $(\hat{C}_p)_1 = \frac{LSE-LIE}{6\hat{\sigma}_1}$
 - 7.2. $(\hat{C}_{pk})_1 = \min \left(\frac{\hat{\mu}_1-LIE}{3\hat{\sigma}_1}, \frac{LSE-\hat{\mu}_1}{3\hat{\sigma}_1} \right)$
8. Determinar os intervalos de confiança para C_p e C_{pk} no instante 1 (r), recorrendo às equações 4.13 e 4.14.
9. Representar no gráfico (carta *PCIRUN*) os pontos correspondentes aos intervalos de confiança determinados no ponto 8, unindo-os, através de uma linha, aos pontos do instante anterior.
10. Repetir os passos 4 a 9 para os instantes consequentes ($t=2, 3, \dots, j, \dots$).
11. O gráfico construído designa-se carta *PCIRUN*, que pode apresentar diversas situações, que serão classificadas como bom desempenho e mau desempenho, que serão devidamente identificadas, analisadas e definidos os rumos de ação a tomar em cada um dos casos.

4.2.1.1 CLASSIFICAÇÃO DE DESEMPENHO DO GRÁFICO *PCIRUN*

Para analisar o gráfico *PCIRUN* é necessário ter em atenção diversos fatores:

- O limite inferior do intervalo de confiança de cada um dos índices deverá ser, sempre, superior a 1,33 (PCI_{min}). Esta é uma condição necessária e suficiente para considerar o processo capaz.
- A atribuição de “bom” ou “mau” desempenho do processo é realizada em função da localização da média do processo face ao valor nominal da especificação; processos suficientemente centrados são considerados com “bom” desempenho e processos descentrados são considerados com “mau” desempenho.

- Um processo considera-se suficientemente centrado $((C_{pk})_s \approx (C_{pk})_l)$ se os valores de $(\hat{C}_{pk})_j$ são sempre maiores ou iguais aos valores do limite inferior de C_p .
- Quando a condição anterior não se verifica, considera-se que o processo está significativamente descentrado, pelo que ações corretivas devem ser aplicadas no sentido de centrar a média do processo com o valor nominal da especificação.
- Ao contrário das cartas de controlo, o gráfico *PCIRUN* não pode ser utilizado para verificar se o processo se encontra sob controlo estatístico; o gráfico *PCIRUN* apenas analisa o desempenho do processo face à especificação (capacidade do processo). O controlo estatístico do processo deve ser realizado em simultâneo com a carta *PCIRUN* através das cartas de controlo mais adequadas, sendo assim possível um estudo completo e abrangente do processo.

4.2.2 EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

Nesta secção são apresentados dois exemplos de aplicação da metodologia sugerida, uma no qual o processo se encontra com “bom” desempenho e a outra em que o processo se encontra com “mau” desempenho, de forma a verificar quais as diferenças gráficas entre as cartas *PCIRUN*. Na Figura 4.3 é apresentado um exemplo de um processo com “bom desempenho”.

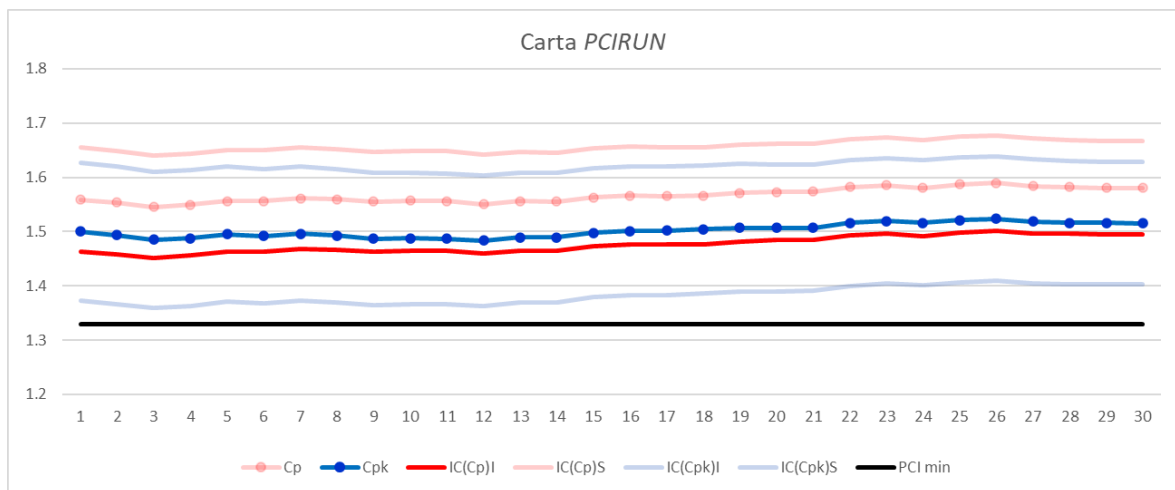


Figura 4.3 - Exemplo de carta *PCIRUN* de processo com "bom" desempenho

Como é possível verificar na carta apresentada na Figura 4.3, os valores dos intervalos de confiança de ambos os índices são sempre superiores a 1,33, logo o processo encontra-se com capacidade. Adicionalmente, pode-se afirmar que os valores de C_{pk} são sempre superiores aos valores do limite inferior do intervalo de confiança do índice C_p , logo, considera-se que o processo possui “bom” desempenho.

Na Figura 4.4 é apresentado um exemplo de um processo com “mau desempenho”.

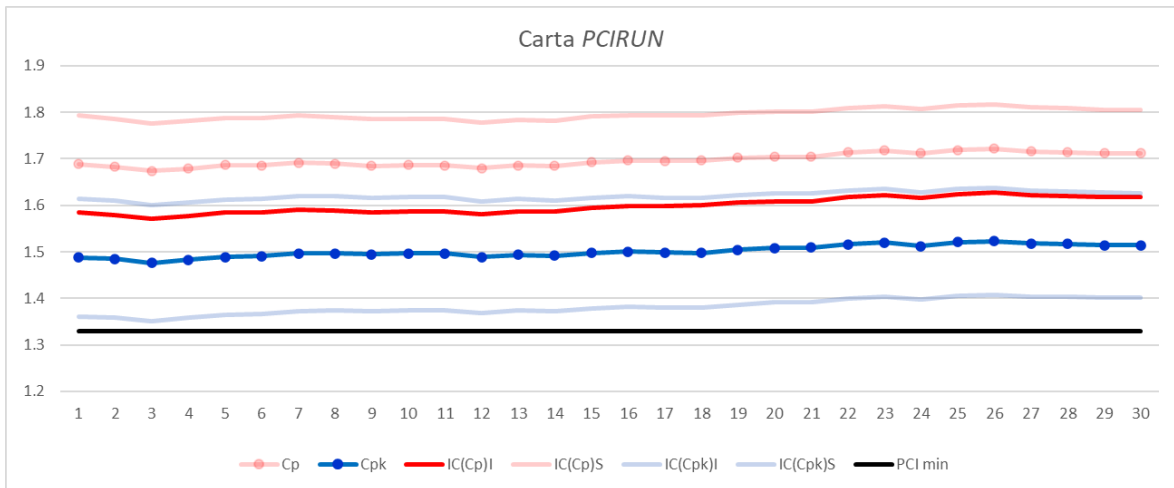


Figura 4.4- Exemplo de carta *PCIRUN* de processo com "mau" desempenho

De forma semelhante ao que acontece na carta exposta na figura 20, na carta da Figura 4.4 é possível verificar que ambos os intervalos de confiança para os índices de capacidade C_p e C_{pk} são sempre superiores ao valor mínimo admissível de *PCI* (1,33, adotado dos estudos de Shewhart (1931)), logo, em primeira instância pode ser afirmado que o processo apresenta capacidade. Ainda assim, segundo a metodologia proposta pode ser verificado o desempenho do processo em relação ao intervalo da especificação, verificando se este está suficientemente centrado. Ao analisar esta carta *PCIRUN* verifica-se que o valor do índice C_{pk} é inferior ao valor do limite inferior do intervalo de confiança do índice C_p , pelo que, apesar do processo ter capacidade para produzir segundo a especificação técnica, não se encontra centrado com essa especificação. Neste caso, sugere-se que se verifiquem quais as causas do desvio da média em relação ao valor nominal de especificação e se tomem medidas corretivas no sentido de centrar o processo.

Na Figura 4.5 é apresentado um exemplo em que o processo não possui capacidade, logo, este deveria ser parado, realizadas as devidas correções e reiniciar o estudo estatístico.

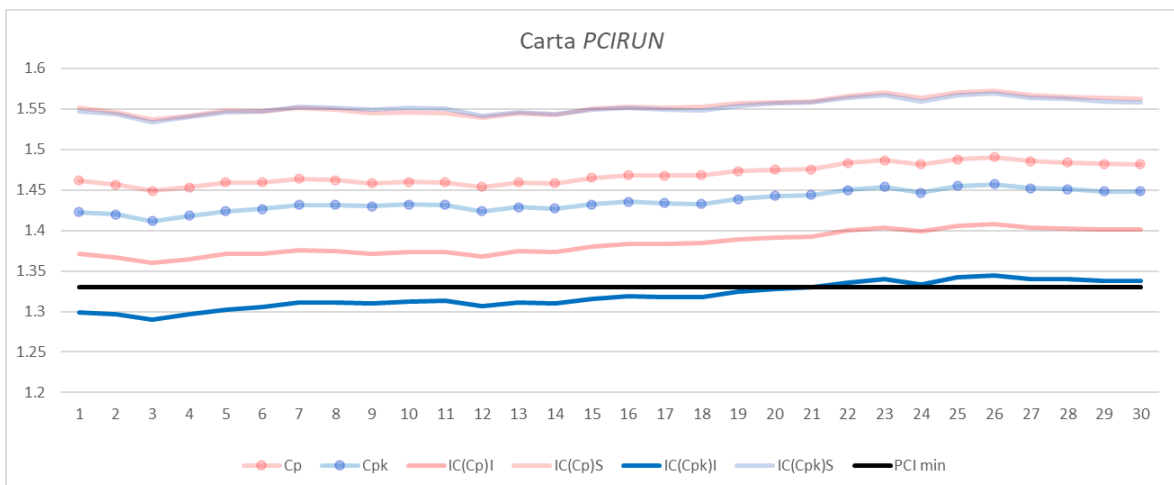


Figura 4.5- Exemplo de carta *PCIRUN* de processo sem capacidade

Por último, na Figura 4.5 é apresentado o caso mais extremo que pode ser analisado através da metodologia proposta, no qual, com base nesta metodologia, se pode considerar que o processo não apresenta capacidade. Neste caso, no final da Fase 1 do *SPC* o processo apresenta capacidade de produzir segundo a especificação. Quando se transita para a Fase 2, o valor de C_{pk} continua superior a 1,33, dando indicação à luz do estudo tradicional que este processo continua a apresentar capacidade. À luz da metodologia proposta nesta secção, considera-se em sentido contrário, *i. e.*, analisando a carta *PCIRUN*, considera-se que o processo deixa de ter capacidade de produzir segundo a especificação uma vez que os intervalos de confiança dos índices em estudo (neste exemplo, o intervalo de confiança do índice C_{pk}) apresenta valores inferiores ao PCI_{min} . Neste caso, assim que é detetado, no instante 1, a falta de capacidade, deve-se suspender a recolha de amostras, investigar a causa da falta de capacidade do processo e estabelecer medidas corretivas, no sentido de garantir a capacidade do processo produzir segundo a sua especificação técnica.

5. CARTAS DE CONTROLO CONJUNTAS

O controlo estatístico do processo como ferramenta da qualidade para monitorizar processos tem vindo a demonstrar-se uma mais valia para as organizações uma vez que permite obter uma visão global sobre o desempenho do processo, quais as falhas que ocorrem e, com auxílio de outras ferramentas da qualidade, quais as causas dessas falhas e como é que essas falhas podem ser mitigadas ou corrigidas. Para controlar estatisticamente um processo, o procedimento habitual passa pela criação de cartas de controlo, cartas estas que irão controlar os parâmetros de localização e dispersão do processo.

Nesta secção aborda-se uma nova metodologia de estudo que pretende realizar o controlo estatístico do processo através do controlo conjunto dos parâmetros de localização e dispersão do mesmo, permitindo, através de apenas uma carta de controlo, monitorizar o processo.

5.1 CARTA $C\bar{X}/\ln(S^2)$

Os princípios da carta de controlo conjunta $C\bar{X}/\ln(S^2)$ podem ser enumerados da seguinte forma:

- Todos os princípios válidos na abordagem tradicional de Shewhart mantêm-se válidos nesta nova abordagem, entre os quais a Normalidade dos dados, recolha de amostras racionais, independência dos dados e a fixação dos limites de controlo a 3 desvios padrão da variável em estudo;
- A carta de controlo $C\bar{X}/\ln(S^2)$ é constituída pelo gráfico (t, G_t^2) , em que G_t^2 corresponde ao valor da variável G^2 no instante t .
- Os limites de controlo desta carta são dados por:
 - LIC = 0;
 - LSC = 1;
- Deteta-se uma situação de fora de controlo quando a variável G^2 toma valores superiores a 1 ($G^2 > 1$).
- No caso de se detetar uma causa especial de variação, procede-se à transformação das estatísticas amostrais para o controlo da média e da dispersão de forma a obter valores adimensionais, que são designados por ϕ (média) e ψ (dispersão);
- As transformadas da média e da dispersão de cada amostra (ϕ_i, ψ_i) , são representadas num gráfico, que se designa por *gráfico ϕ/ψ* .
- Verifica-se a existência de uma causa especial de variação se o ponto (ϕ_i, ψ_i) não pertencer ao interior da região definida por um círculo de raio 1.
- Através da análise do *gráfico ϕ/ψ* é possível verificar se a causa especial de variação é devida a alterações na média, na dispersão ou devido a alterações em simultâneo na média e dispersão.
- Uma das limitações desta análise prende-se com a dificuldade em analisar o *gráfico ϕ/ψ* em termos cronológicos.

Assumindo que os dados da variável em estudo (ω) são Normalmente distribuídos ($X \sim N(\mu_\omega, \sigma_\omega^2)$), define-se a estatística G^2 por:

$$G^2 = \mathbf{c}' \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{c} \quad (5.1)$$

em que,

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} \bar{X} - E(X) \\ \ln(s^2) - E(\ln(s^2)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{X} - \mu \\ \ln(s^2) - \left(\ln(\sigma^2) - \frac{1}{n-1} - \frac{1}{3(n-1)^2} + \frac{2}{15(n-1)^4} \right) \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{3 \cdot \sigma_{\bar{X}}} \right)^2 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{3 \cdot \sigma_{\ln(s^2)}} \right)^2 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

$$= \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{A \cdot \sigma} \right)^2 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{3 \cdot \sqrt{\frac{2}{n-1} - \frac{2}{(n-1)^2} + \frac{4}{3(n-1)^3} - \frac{16}{15(n-1)^5}}} \right)^2 \end{bmatrix}$$

A equações 5.2 e 5.3 baseiam-se nas equações 3.7 e 3.8 apresentadas na secção 3.2 que definem $E(\ln(s^2))$ e $\sigma_{\ln(s^2)}$.

Nas equações 5.2 e 5.3 adota-se a seguinte simbologia:

- c** – Vetor das diferenças entre a média e o logaritmo da variância e os seus respetivos valores esperados;
- M** – Matriz das variâncias da distribuição de médias e logaritmos da variância;
- \bar{X} – Média da amostra;
- $\ln(s^2)$ – Logaritmo da variância da amostra;
- $E(X)$ – Valor esperado da característica da qualidade X;
- $E(\ln(s^2))$ – Valor esperado do logaritmo da variância amostral;
- $\sigma_{\bar{X}}$ – Desvio padrão da distribuição da média de amostras;
- $\sigma_{\ln(s^2)}$ – Desvio padrão da distribuição do logaritmo de variâncias amostrais;
- μ – Média do processo;
- $\ln(\sigma^2)$ – Logaritmo da variância do processo;

5.1.1 Fase 1

O objetivo principal da Fase 1 do SPC, para além de verificar a estabilidade do processo, consiste na estimação dos parâmetros do processo. No caso do SPC envolver carta da média (\bar{X}) e do

logaritmo da variância ($\ln(s^2)$), estes parâmetros são estimados, respetivamente, através dos estimadores \bar{X} e $\overline{\ln(S^2)}$. Desta forma, a equação 5.1, para o instante i , será dada por:

$$G_i^2 = \left(\frac{\bar{X}_i - \bar{X}}{\sigma_{\bar{X}}} \right)^2 + \left(\frac{\ln(s_i^2) - \overline{\ln(S^2)}}{\hat{\sigma}_{\ln(s^2)}} \right)^2 \quad (5.4)$$

em que,

$$\phi_i = \left(\frac{\bar{X}_i - \bar{X}}{\sigma_{\bar{X}}} \right) \quad (5.5)$$

$$\psi_i = \left(\frac{\ln(s_i^2) - \overline{\ln(S^2)}}{\hat{\sigma}_{\ln(s^2)}} \right) \quad (5.6)$$

Assim sendo, a estatística G^2 passará a ser definida por:

$$G_i^2 = \phi_i^2 + \psi_i^2 \quad (5.7)$$

A representação gráfica da equação 5.7 corresponde ao gráfico ϕ/ψ . De seguida é apresentada a Figura 5.1 exemplificativa de quais os cenários possíveis e de que forma se analisam, de acordo com a situação em questão.

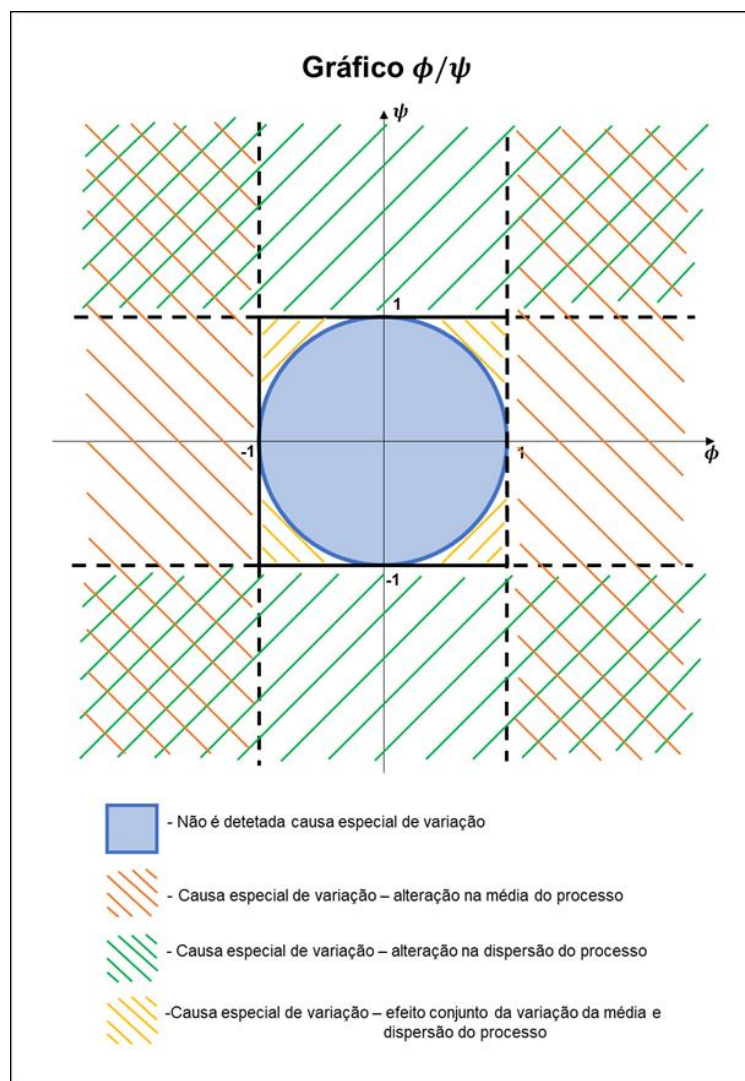


Figura 5.1 – Gráfico ϕ/ψ

Como é possível verificar através da figura anterior, este gráfico permite verificar qual o parâmetro (ou os parâmetros, ou nenhum deles individualmente) responsável pela causa especial de variação.

É considerada como causa especial de variação, qualquer instante em que se verifique que o valor da estatística G_i^2 seja superior a 1 (Requeijo, 2003), sendo que neste caso, podem surgir quatro situações:

- $|\phi| > 1$ e $|\psi| > 1$ – Verifica-se alteração na média e na dispersão do processo;
- $|\phi| > 1$ e $|\psi| < 1$ – Verifica-se alteração na média, mas não na dispersão do processo;
- $|\phi| < 1$ e $|\psi| > 1$ – Verifica-se alteração na dispersão do processo, mas não na média;
- $|\phi| < 1$ e $|\psi| < 1$ – Situação de difícil resolução, necessária maior investigação.

No gráfico ϕ/ψ não é possível verificar a sequência cronológica dos dados, o que não permite a deteção de padrões não aleatórios. De forma a ultrapassar esta desvantagem, sugere-se a construção de um gráfico em função da estatística G_i^2 e da sequência cronológica dos dados. De seguida apresenta-se um exemplo deste gráfico, o qual se designa de carta de controlo conjunta $C\bar{X}/\ln(s^2)$.

5.1.2 Fase 2

Na Fase 2 do SPC, os parâmetros do processo já são conhecidos ou foram estimados na Fase 1 através das estatísticas \bar{X} e $\overline{\ln(S^2)}$. Desta forma, para determinar a estatística G^2 , deve ser utilizada a seguinte equação:

$$G_i^2 = \left(\frac{\bar{X}_i - \mu}{A. \sigma} \right)^2 + \left(\frac{\ln(s_i^2) - \overline{\ln(S^2)}}{\sigma_{\ln(s^2)}} \right)^2 \quad (5.8)$$

Todas as considerações realizadas na Fase 1 aplicam-se à Fase 2, pelo que o passo seguinte será a construção da carta de controlo conjunta $C\bar{X}/\ln(s^2)$ e do gráfico ϕ/ψ de forma a poder analisar a existência de causas especiais de variação, e, desta forma, proceder à monitorização do processo.

5.2 Exemplo de aplicação de Cartas Conjuntas

Nesta secção serão apresentados exemplos de aplicação de cartas conjuntas, tanto para a Fase 1 como para a fase 2 do SPC.

Os desenvolvimentos teóricos desta dissertação assentaram em especial sobre a criação de uma carta conjunta em que se utilizasse a nova estatística $\ln(S^2)$, sendo que Requeijo (2003) abordara este assunto relativamente às estatísticas S e MR , pelo que nesta secção serão analisados esses exemplos.

5.2.1 Fase 1

Nesta secção apresenta-se a comparação entre a utilização de cartas de Shewhart tradicionais (Figura 5.2) e a utilização da abordagem tratada nesta dissertação acerca de cartas conjuntas (Figura 5.3 e Figura 5.4).

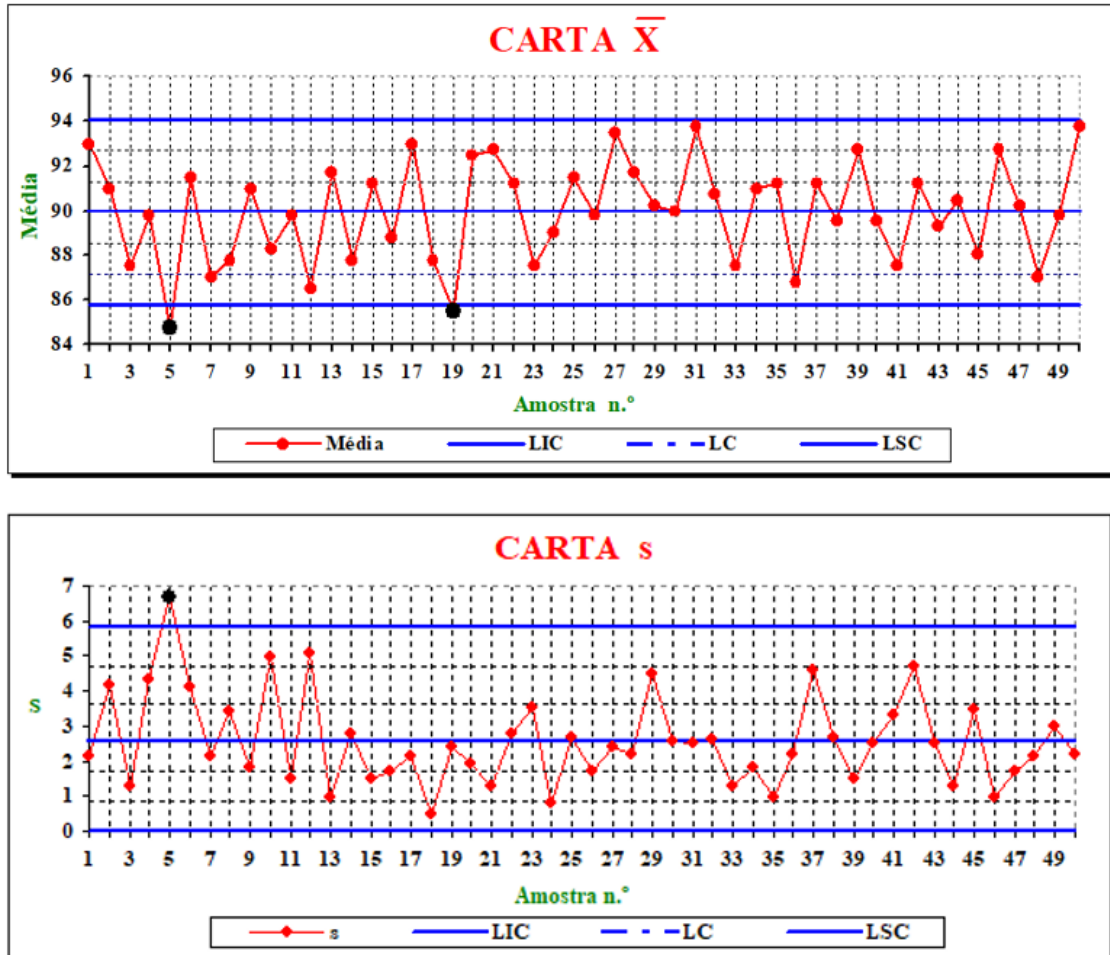


Figura 5.2 - Carta de Shewhart \bar{X} - s (extraído de Requeijo, 2003)

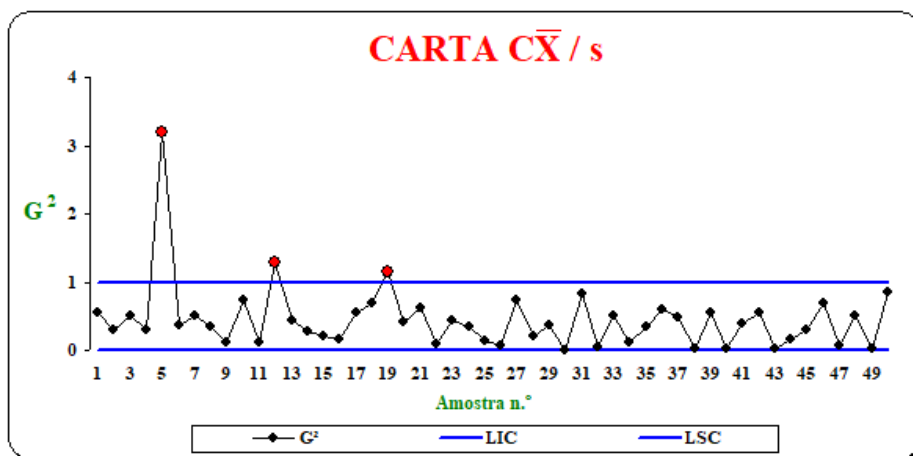


Figura 5.3 - Carta Conjunta $C\bar{X}$ - s (extraído de Requeijo, 2003)

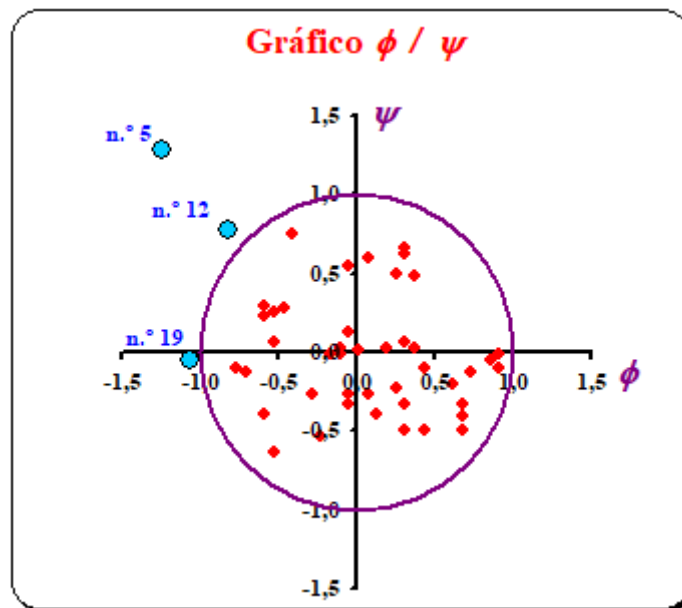


Figura 5.4 - Gráfico ϕ/ψ (extraído de Requeijo, 2003)

Através de uma análise cuidadosa da Figura 5.2 é possível verificar que, através da abordagem tradicional são detetadas causas especiais de variação nos instantes 5 (média e dispersão) e 19 (média).

A mesma situação, controlada estatisticamente através de cartas de controlo conjuntas deteta três causas especiais de variação, nos instantes 5, 12 e 19. Realizando uma análise ao gráfico ϕ/ψ e atendendo às regras enunciadas na Figura 5.1 é possível verificar que a causa especial de variação no instante 5 deve-se a uma alteração na média e na dispersão do processo (em concordância com análise tradicional), a causa especial no instante 12 deve-se ao efeito conjunto da variação da média e dispersão, uma situação mais difícil de analisar que requer estudo e a causa especial no instante 19 deve-se a uma alteração na média do processo (em concordância com análise tradicional).

Como é possível verificar através deste exemplo, as cartas de controlo conjuntas permitem realizar o controlo estatístico do processo de forma mais eficiente (utilização de apenas uma carta de controlo ao invés de duas cartas no controlo tradicional) e eficaz (deteção de 3 causas especiais de variação ao invés de apenas duas na abordagem tradicional).

5.2.2 Fase 2

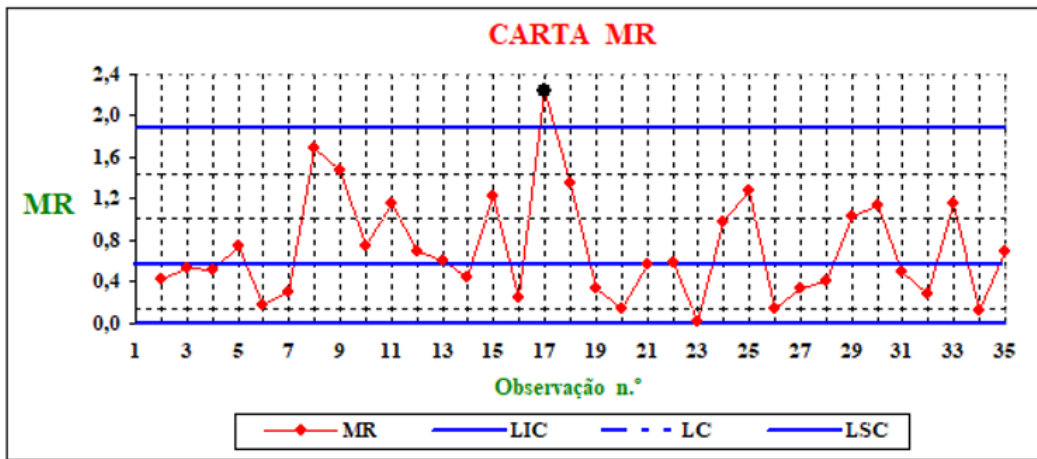
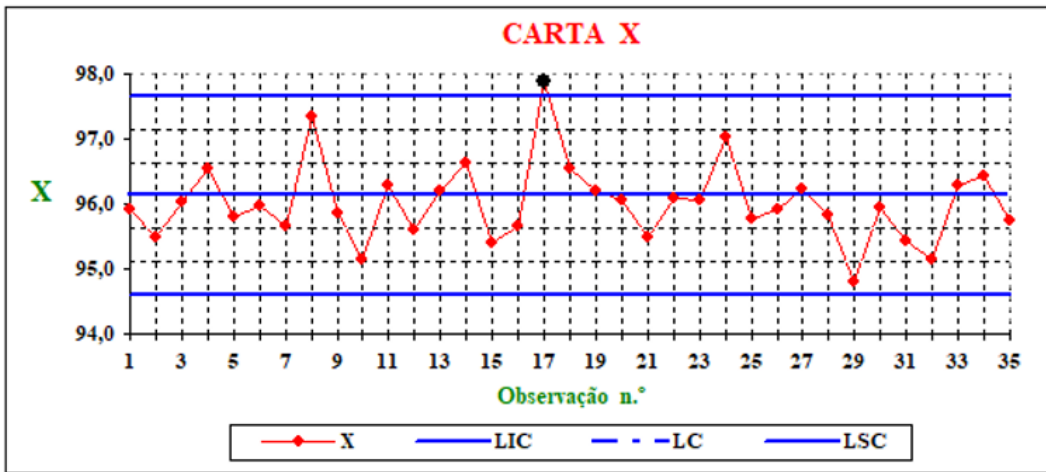


Figura 5.5 - Carta de Shewhart \bar{X} - MR (extraído de Requeijo, 2003)

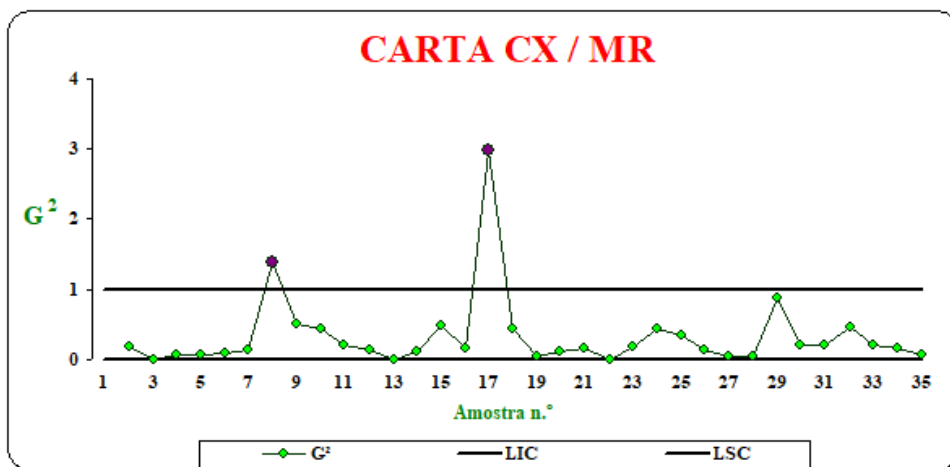


Figura 5.6 - Carta Conjunta $C\bar{X}$ - MR (extraído de Requeijo, 2003)

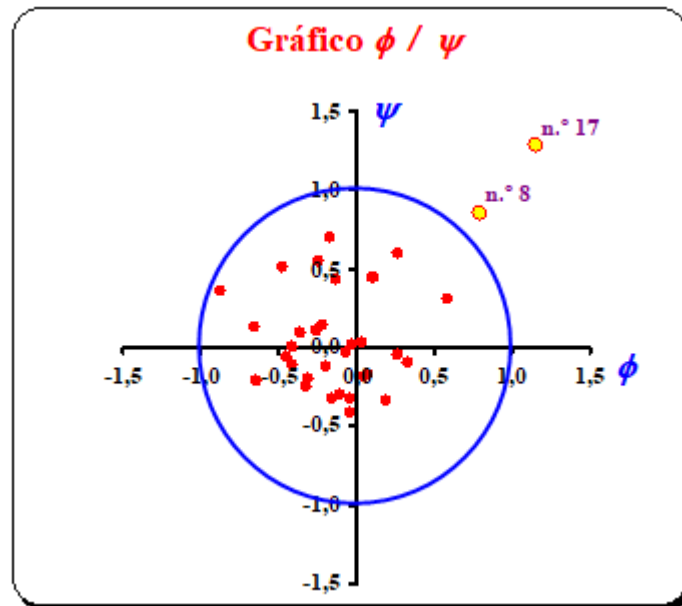


Figura 5.7 - Gráfico ϕ/ψ (extraído de Requeijo, 2003)

Através de uma análise cuidada da Figura 5.5 é possível verificar que, através da abordagem tradicional foi detetada causa espacial de variação no instante 17 (média e dispersão).

A mesma situação, controlada estatisticamente através de cartas de controlo conjuntas deteta três causas especiais de variação, nos instantes 8 e 17. Realizando uma análise ao gráfico ϕ/ψ e atendendo às regras enunciadas na Figura 5.1 é possível verificar que a causa especial de variação no instante 8 deve-se ao efeito conjunto da variação da média e dispersão, uma situação mais difícil de analisar que requer estudo e a causa especial no instante 17 deve-se a uma alteração na média e na dispersão do processo (em concordância com análise tradicional).

Como é possível verificar através deste exemplo, as cartas de controlo conjuntas permitem realizar o controlo estatístico do processo de forma mais eficiente (utilização de apenas uma carta de controlo ao invés de duas cartas no controlo tradicional) e eficaz (deteção de duas causas especiais de variação ao invés de apenas uma na abordagem tradicional).

6. CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

A presente dissertação pode ser subdividida em três partes distintas. Em primeiro lugar, através do estudo, simulação e desenvolvimento dos parâmetros para a carta de controlo da dispersão $\ln(S^2)$. Em segundo lugar, o desenvolvimento de duas metodologias para uniformizar o estudo da capacidade do processo durante a Fase 2 do SPC. A terceira abordagem consiste na criação de uma carta de controlo que pudesse, em simultâneo controlar os parâmetros de localização e dispersão de um processo. Assim sendo, esta secção irá ser apresentada em 3 subsecções, nas quais serão abordadas as conclusões e sugestões para trabalhos futuros mais relevantes sobre cada parte integrante desta dissertação.

6.1 CONCLUSÕES E SUGESTÕES – VALIDAÇÃO DOS PARÂMETROS DA CARTA $\ln(S^2)$

A presente dissertação teve como objetivo colmatar lacunas existentes na aplicação das cartas de controlo tradicionais de Shewhart, em específico, na aplicação de cartas de controlo de variáveis para controlo da dispersão, como são exemplo as cartas da amplitude (R) e do desvio-padrão (S). Nestes casos, o pressuposto da Normalidade dos dados é violado, situação já discutida anteriormente por Pacheco (2019) e verificada novamente nesta dissertação através da realização de simulação destas estatísticas (R e S) para diversas dimensões da amostra. Após geração do código para realizar as simulações destas estatísticas, procedeu-se a um novo cálculo dos limites de controlo e constantes necessárias para a criação da carta de controlo $\ln(S^2)$, carta que vem apresentar uma alternativa ao controlo estatístico da dispersão do processo, sem violar o pressuposto da Normalidade. Após determinar as funções necessárias para gerar as constantes necessárias para a construção desta nova carta, foi necessário escrever e implementar o código de forma a simular estas constantes no sentido de validar o trabalho de Pacheco (2019). A realização destas simulações teve em consideração a necessidade de um elevado número de repetições de forma a obter resultados confiáveis. De forma a criar um compromisso entre fiabilidade dos resultados e tempo de simulação, determinou-se a geração de um milhão de valores amostrais para a realização das amostras. Com estes valores, os tempos de simulação variaram entre 90 minutos e algumas horas, dependendo da dimensão da amostra a simular.

Através da realização de simulação foi possível obter os valores das constantes para criação da nova carta de controlo da dispersão, podendo então realizar algumas correções aos estudos de Pacheco (2019), nos quais, algumas dimensões da amostra apresentavam valores imprecisos relativamente às constantes e melhoramentos devido à utilização de um número mais elevado de valores gerados.

Da realização deste estudo, surgiu a oportunidade de escrever um artigo científico. Foi redigido o artigo " $\ln(S^2)$ Chart Parametrization – An alternative to the Statistical Control of Process

Variance”, que foi submetido à revista científica *Journal of Process Control* (apresentado no Anexo F).

6.2 CONCLUSÕES E SUGESTÕES – ESTUDO E MONITORIZAÇÃO DA CAPACIDADE DO PROCESSO EM TEMPO REAL

O estudo da capacidade do processo é realizado, de uma forma geral, através de índices de capacidade tradicionais C_p e C_{pk} , em primeiro lugar no final da Fase 1 do *SPC*, como condição necessária para o processo poder ser monitorizado na Fase 2. Em segundo lugar, é realizado ao longo da Fase 2, como forma de verificar se o processo mantém a sua capacidade de produzir segundo os requisitos impostos pela especificação técnica. Relativamente ao estudo de capacidade durante a Fase 2, não há metodologias que indiquem em que instantes é que esse estudo deve ser realizado, desta forma e com o objetivo de uniformizar o estudo da capacidade do processo na Fase 2 do *SPC*, sugerem-se duas metodologias para monitorização da capacidade do processo em tempo real.

A primeira metodologia proposta tem como base a ideologia apresentada no estudo da capacidade do processo nas cartas *Short-Run*, sendo que foram adaptados os índices de capacidade tradicionais de forma a que na carta para o controlo da média do processo da Fase 2 se pudessem também incluir os índices de capacidade do processo. Nesta carta, procedeu-se à adaptação dos índices para que se pudessem comparar os índices de capacidade (I_U e I_L) com valores de referência específico. Assim, os operadores que analisam as cartas de controlo conseguem, de forma simples, verificar se o processo tem capacidade para produzir de forma consistente de acordo com a especificação técnica.

A segunda metodologia proposta tem uma conceção diferente, no sentido de, apesar de também se basear nos índices de capacidade tradicionais C_p e C_{pk} , nesta metodologia são calculados os intervalos de confiança para cada um desses índices e, de acordo com a posição relativa dos limites desses intervalos de confiança, é traçada uma carta denominada *PCIRUN* que, de acordo com regras específicas permite não só verificar se o processo tem capacidade, mas, no caso de ter capacidade, permite tecer comentários acerca do seu desempenho, isto é, se, tendo capacidade para produzir de forma consistente segundo a especificação técnica, o processo produz de forma estatisticamente centrada relativamente a essa especificação.

Da realização deste estudo, surgiu a oportunidade de escrever um artigo científico, em processo de redação e submissão (Anexo G).

6.3 CONCLUSÕES E SUGESTÕES – CARTAS CONJUNTAS PARA CONTROLO DOS PARÂMETROS DE LOCALIZAÇÃO E DISPERSÃO DO PROCESSO

Desde a sua introdução, por Walter Shewhart, que o *SPC* tem vindo a ser desenvolvido, tendo sido introduzidas novas metodologias, novas cartas de controlo e novos conceitos que vieram complementar esta ferramenta da qualidade. Uma das frentes em que não tem havido muito desenvolvimento corresponde ao *SPC* univariado, em específico, as cartas de controlo de variáveis tradicionais, onde, de forma a controlar o processo, é necessário construir duas cartas de controlo: uma carta para controlar o parâmetro de localização (p. e. carta da média) e uma carta para controlar o parâmetro da dispersão (p.e. carta $\ln(S^2)$).

Na presente dissertação é sugerida uma nova metodologia, baseada nas ideias apresentadas por Chao & Cheng (1996) e Requeijo (2003) em que se pretende controlar estatisticamente ambos os parâmetros do processo (localização e dispersão) utilizando apenas uma carta de controlo. Para isto, foi necessário criar uma estatística (G^2) que combinasse os valores de ambos os parâmetros. O facto desta estatística combinar ambos os parâmetros do processo, apresenta uma vantagem relativamente às cartas tradicionais de Shewhart uma vez que para além de detetar todas as causas especiais relativamente a alterações do parâmetro de localização ou alterações do parâmetro de dispersão, esta carta também deteta causas especiais relativas à interação entre estes parâmetros.

Da realização deste estudo, surgiu a oportunidade de escrever um artigo científico em processo de redação.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Addeh, A., Khormali, A., & Golilarz, N. A. (2018). Control chart pattern recognition using RBF neural network with new training algorithm and practical features. *ISA Transactions*, *79*, 202–216. <https://doi.org/10.1016/j.isatra.2018.04.020>
- Ahsan, M., Mashuri, M., Lee, M. H., Kuswanto, H., & Prastyo, D. D. (2020). Robust adaptive multivariate Hotelling's T2 control chart based on kernel density estimation for intrusion detection system. *Expert Systems with Applications*, *145*, 113105. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2019.113105>
- Alaeddini, A., Ghazanfari, M., & Nayeri, M. A. (2009). A hybrid fuzzy-statistical clustering approach for estimating the time of changes in fixed and variable sampling control charts. *Information Sciences*, *179*(11), 1769–1784. <https://doi.org/10.1016/j.ins.2009.01.019>
- Alt, F. B. (1985). Multivariate Quality Control. Em *Encyclopedia of the Statistical Sciences* (S. Koltz e N. L. Jonhson, Vol. 6, pp. 110–122). Wiley.
- Bezerra, E. L., Ho, L. L., & da Costa Quinino, R. (2018). GS2: An optimized attribute control chart to monitor process variability. *International Journal of Production Economics*, *195*, 287–295. <https://doi.org/10.1016/j.ijpe.2017.10.023>
- Castillo, E. D., Grayson, J. M., Montgomery, D. C., & Runger, G. C. (1996). A review of statistical process control techniques for short run manufacturing systems. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, *25*(11), 2723–2737. <https://doi.org/10.1080/03610929608831866>
- Chao, M. T., & Cheng, S. W. (1996). Semicircle Control Chart for Variables Data. *Quality Engineering*, *8*(3), 441–446. <https://doi.org/10.1080/08982119608904646>
- Chou, S.-H., Chang, S., Tsai, T.-R., Lin, D. K. J., Xia, Y., & Lin, Y.-S. (2020). Implementation of statistical process control framework with machine learning on waveform profiles with no gold standard reference. *Computers & Industrial Engineering*, *142*, 106325. <https://doi.org/10.1016/j.cie.2020.106325>
- Costa, A., & Fichera, S. (2017). Economic statistical design of ARMA control chart through a Modified Fitness-based Self-Adaptive Differential Evolution. *Computers & Industrial Engineering*, *105*, 174–189. <https://doi.org/10.1016/j.cie.2016.12.031>
- Crosby, P. B. (1979). *Quality is Free: The Art of Making Quality Certain*. McGraw-Hill.

- Crowder, S. V., & Hamilton, M. D. (1992). An EWMA for Monitoring a Process Standard Deviation. *Journal of Quality Technology*, 24(1), 12–21. <https://doi.org/10.1080/00224065.1992.11979369>
- De la Torre-Gutiérrez, H., & Pham, D. (2019). A control chart pattern recognition system for feedback-control processes. *Expert Systems with Applications*, 138, 112826. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2019.112826>
- Deming, W. E. (1986). *Out of the Crisis*. Massachusetts Institute of Technology, Center for Advanced Engineering Study.
- Duran-Villalobos, C. A., Goldrick, S., & Lennox, B. (2020). Multivariate statistical process control of an industrial-scale fed-batch simulator. *Computers & Chemical Engineering*, 132, 106620. <https://doi.org/10.1016/j.compchemeng.2019.106620>
- Escudero-Gilete, M. L., González-Miret, M. L., & Heredia, F. J. (2005). Multivariate study of the decontamination process as function of time, pressure and quantity of water used in washing stage after evisceration in poultry meat production. *Journal of Food Engineering*, 69(2), 245–251. <https://doi.org/10.1016/j.jfoodeng.2004.08.015>
- Feigenbaum, A. V. (1983). *Total Quality Control*. McGraw-Hill.
- Filho, D. M., & Valk, M. (2020). Dynamic VAR model-based control charts for batch process monitoring. *European Journal of Operational Research*. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2019.12.038>
- Freitas, L. L. G., Henning, E., Kalbusch, A., Konrath, A. C., & Walter, O. M. F. C. (2019). Analysis of water consumption in toilets employing Shewhart, EWMA, and Shewhart-EWMA combined control charts. *Journal of Cleaner Production*, 233, 1146–1157. <https://doi.org/10.1016/j.jclepro.2019.06.114>
- Fuqua, D., & Razzaghi, T. (2020). A cost-sensitive convolution neural network learning for control chart pattern recognition. *Expert Systems with Applications*, 150, 113275. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2020.113275>
- Grigg, N. P., Daly, J., & Stewart, M. (1998). Case study: The use of statistical process control in fish product packaging. *Food Control*, 9(5), 289–297. [https://doi.org/10.1016/S0956-7135\(98\)00018-8](https://doi.org/10.1016/S0956-7135(98)00018-8)

- Gu, K., Jia, X., Liu, H., & You, H. (2015). Yield-Based Capability Index for Evaluating the Performance of Multivariate Manufacturing Process. *Quality and Reliability Engineering International*, 31(3), 419–430. <https://doi.org/10.1002/qre.1602>
- Haanchumpol, T., Sudasna-na-Ayudhya, P., & Singhtaun, C. (2019). Modern multivariate control chart using spatial signed rank for non-normal process. *Engineering Science and Technology, an International Journal*. <https://doi.org/10.1016/j.jestch.2019.12.001>
- Hayter, A. J., & Tsui, K.-L. (1994). Identification and Quantification in Multivariate Quality Control Problems. *Journal of Quality Technology*, 26(3), 197–208. <https://doi.org/10.1080/00224065.1994.11979526>
- Ho, L. L., & Aparisi, F. (2016). ATTRIVAR: Optimized control charts to monitor process mean with lower operational cost. *International Journal of Production Economics*, 182, 472–483. <https://doi.org/10.1016/j.ijpe.2016.09.011>
- Hotelling, H. (1947). Multivariate Quality Control. Em *Techniques of Statistical Analysis* (Eisenhart, Hastay e Wallis). McGraw-Hill.
- Hryniewicz, O., Kaczmarek-Majer, K., & Opara, K. R. (2019). Control charts based on fuzzy costs for monitoring short autocorrelated time series. *International Journal of Approximate Reasoning*, 114, 166–181. <https://doi.org/10.1016/j.ijar.2019.08.013>
- ISO 7870-2:2013—Control charts—Part 2: Shewhart control charts. (2013).
- Itzész, A. (2001). Statistical process control with several variance components in the dairy industry. *Food Control*, 12(2), 119–125. [https://doi.org/10.1016/S0956-7135\(00\)00031-1](https://doi.org/10.1016/S0956-7135(00)00031-1)
- Jackson, J. E. (1980). Principal Components and Factor Analysis: Part I—Principal Components. *Journal of Quality Technology*, 12(4), 201–213. <https://doi.org/10.1080/00224065.1980.11980967>
- Jaffray, B. (2020). Am I out of control? The application of statistical process control charts to children's surgery. *Journal of Pediatric Surgery*. <https://doi.org/10.1016/j.jpedsurg.2019.12.027>
- Jalili, M., Bashiri, M., & Amiri, A. (2012). A New Multivariate Process Capability Index Under Both Unilateral and Bilateral Quality Characteristics. *Quality and Reliability Engineering International*, 28(8), 925–941. <https://doi.org/10.1002/qre.1284>
- Juran, J. M. (1951). *Quality control handbook*. McGraw-Hill.

- Juran, J. M. (1988). *Juran on planning for quality*. The Free Press.
- Kane, V. E. (1986). Process Capability Indices. *Journal of Quality Technology*, 18(1), 41–52.
<https://doi.org/10.1080/00224065.1986.11978984>
- Kaya, İ., Erdoğan, M., & Yıldız, C. (2017). Analysis and control of variability by using fuzzy individual control charts. *Applied Soft Computing*, 51, 370–381.
<https://doi.org/10.1016/j.asoc.2016.11.048>
- Keller, D. S., Reif de Paula, T., Yu, G., Zhang, H., Al-Mazrou, A., & Kiran, R. P. (2019). Statistical Process Control (SPC) to drive improvement in length of stay after colorectal surgery. *The American Journal of Surgery*. <https://doi.org/10.1016/j.amjsurg.2019.08.029>
- Khormali, A., & Addeh, J. (2016). A novel approach for recognition of control chart patterns: Type-2 fuzzy clustering optimized support vector machine. *ISA Transactions*, 63, 256–264.
<https://doi.org/10.1016/j.isatra.2016.03.004>
- Knauer, W. A., Godden, S. M., Dietrich, A., Hawkins, D. M., & James, R. E. (2018). Evaluation of applying statistical process control techniques to daily average feeding behaviors to detect disease in automatically fed group-housed preweaned dairy calves. *Journal of Dairy Science*, 101(9), 8135–8145. <https://doi.org/10.3168/jds.2017-13947>
- Kotz, S., & Johnson, N. L. (1993). *Process capability indices* (1st ed.). Chapman & Hall.
- Kotz, S., & Johnson, N. L. (2002). Process Capability Indices—A Review, 1992–2000. *Journal of Quality Technology*, 34(1), 2–19. <https://doi.org/10.1080/00224065.2002.11980119>
- Lim, S. A. H., & Antony, J. (2016). Statistical process control readiness in the food industry: Development of a self-assessment tool. *Trends in Food Science & Technology*, 58, 133–139. <https://doi.org/10.1016/j.tifs.2016.10.025>
- Lim, S. A. H., Antony, J., & Albliwi, S. (2014). Statistical Process Control (SPC) in the food industry – A systematic review and future research agenda. *Trends in Food Science & Technology*, 37(2), 137–151. <https://doi.org/10.1016/j.tifs.2014.03.010>
- Lima-Filho, L. M. de A., Pereira, T. L., Souza, T. C. de, & Bayer, F. M. (2019). Inflated beta control chart for monitoring double bounded processes. *Computers & Industrial Engineering*, 136, 265–276. <https://doi.org/10.1016/j.cie.2019.07.017>
- Lowther, N. J., Hamilton, D. A., Kim, H., Evans, J. M., Marsh, S. H., & Louwe, R. J. W. (2019). Monitoring anatomical changes of individual patients using statistical process control

- during head-and-neck radiotherapy. *Physics and Imaging in Radiation Oncology*, 9, 21–27. <https://doi.org/10.1016/j.phro.2018.12.004>
- Mason, R. L., Tracy, N. D., & Young, J. C. (1997). A Practical Approach for Interpreting Multivariate T2 Control Chart Signals. *Journal of Quality Technology*, 29(4), 396–406. <https://doi.org/10.1080/00224065.1997.11979791>
- Mataragas, M., Drosinos, E. H., Tsola, E., & Zoiopoulos, P. E. (2012). Integrating statistical process control to monitor and improve carcasses quality in a poultry slaughterhouse implementing a HACCP system. *Food Control*, 28(2), 205–211. <https://doi.org/10.1016/j.foodcont.2012.05.032>
- Mitra, A. (2008). *Fundamentals of Quality Control and Improvement* (3ª). John Wiley & Sons.
- Montgomery, D. C. (2009). *Introduction to statistical quality control*. John Wiley & Sons.
- Montgomery, Douglas C., & Runger, G. C. (2013). *Applied Statistics and Probability for Engineers* (Edição: 6). John Wiley & Sons.
- Mukherjee, A., Chong, Z. L., & Khoo, M. B. C. (2019). Comparisons of some distribution-free CUSUM and EWMA schemes and their applications in monitoring impurity in mining process flotation. *Computers & Industrial Engineering*, 137, 106059. <https://doi.org/10.1016/j.cie.2019.106059>
- Munir, M. T., Wilson, D. I., Depree, N., Boiarkina, I., Prince-Pike, A., & Young, B. R. (2017). Real-time product release and process control challenges in the dairy milk powder industry. *Current Opinion in Food Science*, 17, 25–29. <https://doi.org/10.1016/j.cofs.2017.08.005>
- Nedumaran, G., & Jr, J. J. P. (1998). DIAGNOSING SIGNALS FROM T 2 AND χ^2 MULTIVARIATE CONTROL CHARTS. *Quality Engineering*, 10(4), 657–667. <https://doi.org/10.1080/08982119808919183>
- Nogueira, J. (2018). *Determinação de Parâmetros das Cartas CUSUM-In(S²) e EWMA-In(S²) e Desenvolvimento de Software de Apoio ao Controlo Estatístico do Processo*. Faculdade de Ciências e Tecnologias da Universidade Nova de Lisboa.
- Oakland, J. S. (2003). *Statistical Process Control*. Butterworth Heinemann.
- Pacheco, C. (2019). *Determinação de Parâmetros das Cartas de Controlo da Dispersão e Desenvolvimento de Software de Apoio* [Dissertação de Mestrado]. Universidade Nova de Lisboa - Faculdade de Ciências e Tecnologia.

- Pal, B., Pal, A., Das, S., Palit, S., Sarkar, P., Mondal, S., Mallik, S., Goswami, J., Das, S., Sen, A., & Mondol, M. (2020). Retrospective study on performance of constancy check device in Linac beam monitoring using Statistical Process Control. *Reports of Practical Oncology & Radiotherapy*, 25(1), 91–99. <https://doi.org/10.1016/j.rpor.2019.12.004>
- Pearn, W. L., Kotz, S., & Johnson, N. L. (1992). Distributional and Inferential Properties of Process Capability Indices. *Journal of Quality Technology*, 24(4), 216–231. <https://doi.org/10.1080/00224065.1992.11979403>
- Perakis, M., & Xekalaki, E. (2012). On the Implementation of the Principal Component Analysis–Based Approach in Measuring Process Capability. *Quality and Reliability Engineering International*, 28(4), 467–480. <https://doi.org/10.1002/qre.1260>
- Pereira, Z. L., & Requeijo, J. G. (2012). *Qualidade: Planeamento e Controlo Estatístico de Processos* (2ª). Fundação FCT-UNL.
- Prashar, A. (2017). Adopting PDCA (Plan-Do-Check-Act) cycle for energy optimization in energy-intensive SMEs. *Journal of Cleaner Production*, 145, 277–293. <https://doi.org/10.1016/j.jclepro.2017.01.068>
- Quesenberry, C. P. (1997). *SPC Methods for Quality Improvement*. John Wiley & Sons.
- Requeijo, J. G. (2003). *Técnicas Avançadas do Controlo Estatístico do Processo* [Tese de Doutoramento]. Universidade Nova de Lisboa - Faculdade de Ciências e Tecnologia.
- Rukhsar, S., Khan, Y. U., Farooq, O., Sarfraz, M., & Khan, A. T. (2019). Patient-Specific Epileptic Seizure Prediction in Long-Term Scalp EEG Signal Using Multivariate Statistical Process Control. *IRBM*, 40(6), 320–331. <https://doi.org/10.1016/j.irbm.2019.08.004>
- Runger, G. C., Alt, F. B., & Montgomery, D. C. (1996). Contributors to a multivariate statistical process control chart signal. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 25(10), 2203–2213. <https://doi.org/10.1080/03610929608831832>
- Sales, L. O. F., Pinho, A. L. S., Vivacqua, C. A., & Ho, L. L. (2020). Shewhart control chart for monitoring the mean of Poisson mixed integer autoregressive processes via Monte Carlo simulation. *Computers & Industrial Engineering*, 140, 106245. <https://doi.org/10.1016/j.cie.2019.106245>
- Sánchez-Fernández, A., Baldán, F. J., Sainz-Palmero, G. I., Benítez, J. M., & Fuente, M. J. (2018). Fault detection based on time series modeling and multivariate statistical process

- control. *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems*, 182, 57–69.
<https://doi.org/10.1016/j.chemolab.2018.08.003>
- Sangpikul, A. (2017). Implementing academic service learning and the PDCA cycle in a marketing course: Contributions to three beneficiaries. *Journal of Hospitality, Leisure, Sport & Tourism Education*, 21, 83–87. <https://doi.org/10.1016/j.jhlste.2017.08.007>
- Şentürk, S., Erginel, N., Kaya, İ., & Kahraman, C. (2014). Fuzzy exponentially weighted moving average control chart for univariate data with a real case application. *Applied Soft Computing*, 22, 1–10. <https://doi.org/10.1016/j.asoc.2014.04.022>
- Shewhart, W. A. (1931). *The economic control of quality of manufactured products*. Macmillan.
- Shu, M.-H., & Wu, H.-C. (2011). Fuzzy \bar{X} and R control charts: Fuzzy dominance approach. *Computers & Industrial Engineering*, 61(3), 676–685.
<https://doi.org/10.1016/j.cie.2011.05.001>
- Silva, A. S., Medeiros, C. F., & Vieira, R. K. (2017). Cleaner Production and PDCA cycle: Practical application for reducing the Cans Loss Index in a beverage company. *Journal of Cleaner Production*, 150, 324–338. <https://doi.org/10.1016/j.jclepro.2017.03.033>
- Simões, F. D., Costa, A. F. B., & Machado, M. A. G. (2019). The Trinomial ATTRIVAR control chart. *International Journal of Production Economics*, 107559.
<https://doi.org/10.1016/j.ijpe.2019.107559>
- Somerville, S. E., & Montgomery, D. C. (1996). Process Capability Indices and Non-Normal Distributions. *Quality Engineering*, 9(2), 305–316.
<https://doi.org/10.1080/08982119608919047>
- Spiring, F., Leung, B., Cheng, S., & Yeung, A. (2003). A Bibliography of Process Capability Papers. *Quality and Reliability Engineering International*, 19(5), 445–460.
<https://doi.org/10.1002/qre.538>
- Srikaeo, K., & A. Hourigan, J. (2002). The use of statistical process control (SPC) to enhance the validation of critical control points (CCPs) in shell egg washing. *Food Control*, 13(4), 263–273. [https://doi.org/10.1016/S0956-7135\(02\)00024-5](https://doi.org/10.1016/S0956-7135(02)00024-5)
- Srikaeo, K., Furst, J. E., & Ashton, J. (2005). Characterization of wheat-based biscuit cooking process by statistical process control techniques. *Food Control*, 16(4), 309–317.
<https://doi.org/10.1016/j.foodcont.2004.03.010>

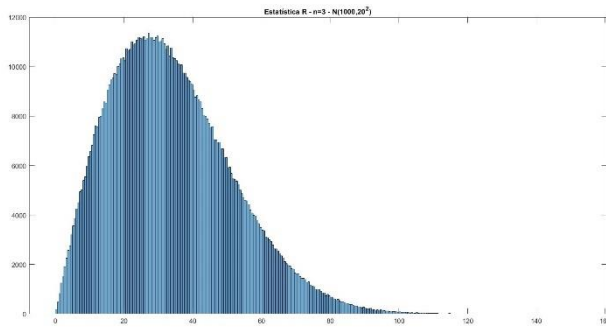
- Taguchi, G., Chowdhury, S., & Wu, Y. (2005). *Taguchi's Quality Engineering Handbook*. Wiley.
<https://books.google.pt/books?id=zc4mQAAMAAJ>
- Taguchi, G., & Hsiang, T. C. (1985). *Tutorial on Quality Control and Assurance – The Taguchi Methods*. Joint Meetings of the American Statistical Association.
- Taguchi, G., & Organization, A. P. (1986). *Introduction to quality engineering: Designing quality into products and processes*. The Organization.
<https://books.google.pt/books?id=1NtTAAAAMAAJ>
- Tôrres, A. R., de Oliveira, A. D. P., Grangeiro, S., & Fragoso, W. D. (2018). Multivariate statistical process control in annual pharmaceutical product review. *Journal of Process Control*, 69, 97–102. <https://doi.org/10.1016/j.jprocont.2018.06.001>
- Weiß, C. H., Steuer, D., Jentsch, C., & Testik, M. C. (2018). Guaranteed conditional ARL performance in the presence of autocorrelation. *Computational Statistics & Data Analysis*, 128, 367–379. <https://doi.org/10.1016/j.csda.2018.07.013>
- Wheeler, D. J. (1995). *Advanced Topics in Statistical Process Control (2ª)*. SPC Press.
- Wheeler, Donald J. (1992). *Short Run SPC*. SPC PRESS.
- Wise, S. A., & Fair, D. C. (1998). *Innovative Control Charting: Practical SPC Solutions for Today's Manufacturing Environment*. ASQ Quality Press.
- Woodall, W. H. (2000). Controversies and Contradictions in Statistical Process Control. *Journal of Quality Technology*, 32(4), 341–350.
<https://doi.org/10.1080/00224065.2000.11980013>
- Xu, J., Lv, H., Zhuang, Z., Lu, Z., Zou, D., & Qin, W. (2019). Control Chart Pattern Recognition Method Based on Improved One-dimensional Convolutional Neural Network. *IFAC-PapersOnLine*, 52(13), 1537–1542. <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2019.11.418>
- Zaman, B., Lee, M. H., Riaz, M., & Abujiya, M. R. (2019). An adaptive EWMA chart with CUSUM accumulate error-based shift estimator for efficient process dispersion monitoring. *Computers & Industrial Engineering*, 135, 236–253.
<https://doi.org/10.1016/j.cie.2019.06.012>
- Zaman, B., Lee, M. H., Riaz, M., & Abujiya, M. R. (2020). An improved process monitoring by mixed multivariate memory control charts: An application in wind turbine field. *Computers & Industrial Engineering*, 142, 106343. <https://doi.org/10.1016/j.cie.2020.106343>

Anexo A – Constantes necessárias para construção das Cartas de Controle

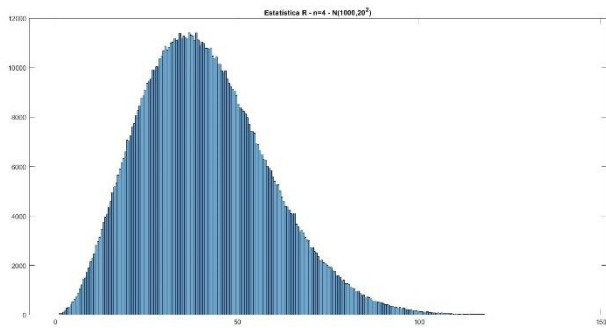
n	\bar{X} Chart							S Chart				R Chart				
	A	A ₂	A ₃	A ₄	d ₂	c ₁	c ₄	B ₃	B ₄	B ₅	B ₆	d ₃	D ₁	D ₂	D ₃	D ₄
2	2.121	1.881	2.659	3.865	1.128	3.320	0.798	0	3.267	0	2.606	0.853	0	3.686	0	3.267
3	1.732	1.023	1.954	2.309	1.693	1.777	0.886	0	2.568	0	2.276	0.888	0	4.358	0	2.575
4	1.500	0.729	1.628	1.804	2.059	1.446	0.921	0	2.266	0	2.088	0.880	0	4.698	0	2.282
5	1.342	0.577	1.427	1.536	2.326	1.310	0.940	0	2.089	0	1.964	0.864	0	4.918	0	2.115
6	1.225	0.483	1.287	1.362	2.534	1.238	0.952	0.030	1.970	0.029	1.874	0.848	0	5.078	0	2.004
7	1.134	0.419	1.182	1.238	2.704	1.192	0.959	0.118	1.882	0.113	1.806	0.833	0.204	5.204	0.076	1.924
8	1.061	0.373	1.099	1.143	2.847	1.161	0.965	0.185	1.815	0.179	1.751	0.820	0.388	5.306	0.136	1.864
9	1.000	0.337	1.032	1.067	2.970	1.139	0.969	0.239	1.761	0.232	1.707	0.808	0.547	5.393	0.184	1.816
10	0.949	0.308	0.975	1.005	3.078	1.122	0.973	0.284	1.716	0.276	1.669	0.797	0.687	5.469	0.223	1.777
11	0.905	0.285	0.927	0.952	3.173	1.109	0.975	0.321	1.679	0.313	1.637	0.787	0.811	5.535	0.256	1.744
12	0.866	0.266	0.886	0.908	3.258	1.098	0.978	0.354	1.646	0.346	1.610	0.778	0.922	5.594	0.283	1.717
13	0.832	0.249	0.850	0.868	3.336	1.089	0.979	0.382	1.618	0.374	1.585	0.770	1.025	5.647	0.307	1.693
14	0.802	0.235	0.817	0.834	3.407	1.082	0.981	0.406	1.594	0.399	1.563	0.763	1.118	5.696	0.328	1.672
15	0.775	0.223	0.789	0.803	3.472	1.076	0.982	0.428	1.572	0.421	1.544	0.756	1.203	5.741	0.347	1.653
16	0.750	0.212	0.763	0.776	3.532	1.071	0.984	0.448	1.552	0.440	1.526	0.750	1.282	5.782	0.363	1.637
17	0.728	0.203	0.739	0.751	3.588	1.066	0.985	0.466	1.534	0.458	1.511	0.744	1.356	5.820	0.378	1.622
18	0.707	0.194	0.718	0.729	3.640	1.062	0.985	0.482	1.518	0.475	1.496	0.739	1.424	5.856	0.391	1.608
19	0.688	0.187	0.698	0.708	3.689	1.058	0.986	0.497	1.503	0.490	1.483	0.734	1.487	5.891	0.403	1.597
20	0.671	0.180	0.680	0.689	3.735	1.055	0.987	0.510	1.490	0.504	1.470	0.729	1.549	5.921	0.415	1.585
21	0.655	0.173	0.663	0.672	3.778	1.052	0.988	0.523	1.477	0.516	1.459	0.724	1.605	5.951	0.425	1.575
22	0.640	0.167	0.647	0.655	3.819	1.050	0.988	0.534	1.466	0.528	1.448	0.720	1.659	5.979	0.434	1.566
23	0.626	0.162	0.633	0.640	3.858	1.047	0.989	0.545	1.455	0.539	1.438	0.716	1.710	6.006	0.443	1.557
24	0.612	0.157	0.619	0.626	3.895	1.045	0.989	0.555	1.445	0.549	1.429	0.712	1.759	6.031	0.451	1.548
25	0.600	0.153	0.606	0.613	3.931	1.043	0.990	0.565	1.435	0.559	1.420	0.708	1.806	6.056	0.459	1.541

Anexo B - Distribuição de R para diferentes dimensões da amostra (n)

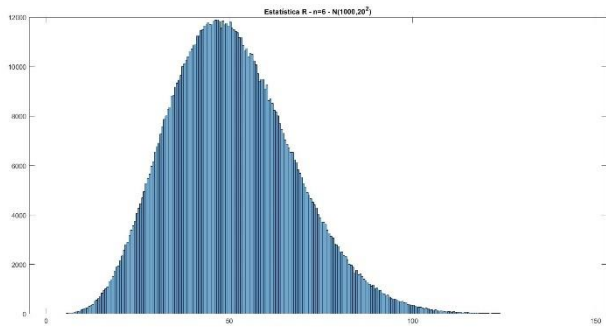
Anexo B.1 – Distribuição de R para $n=3$



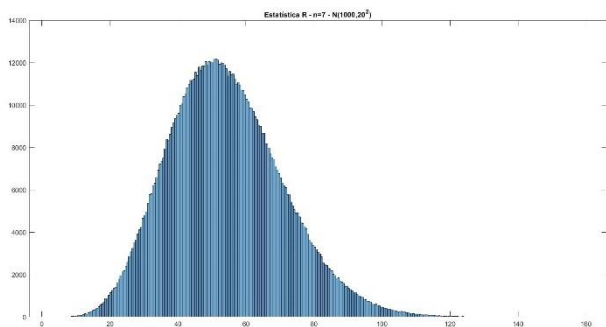
Anexo B.2 – Distribuição de R para $n=4$



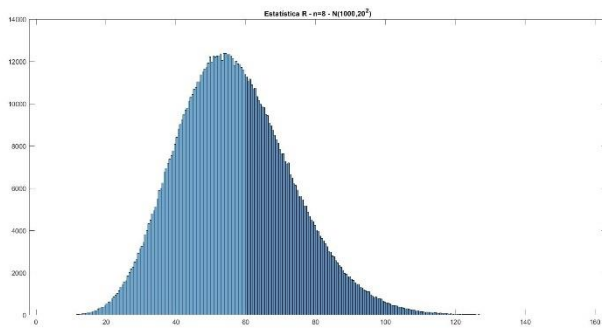
Anexo B.3 – Distribuição de R para $n=6$



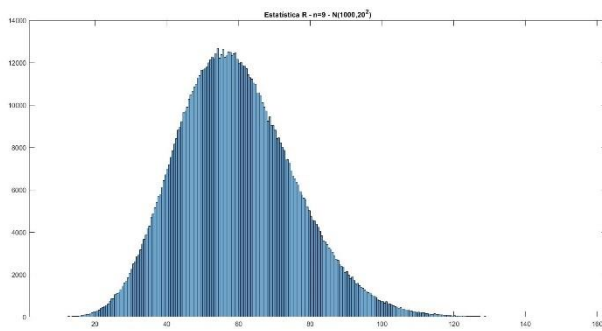
Anexo B.4 – Distribuição de R para $n=7$



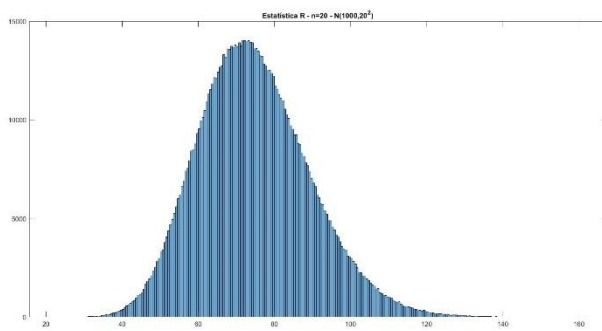
Anexo B.5 – Distribuição de R para $n=8$



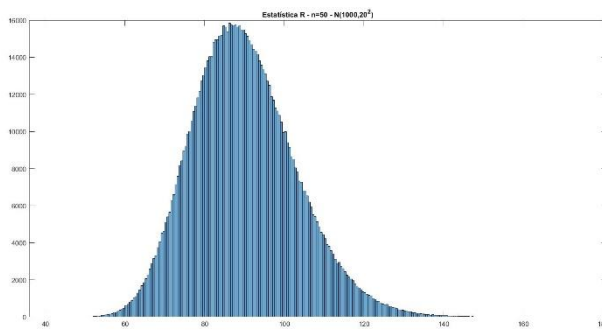
Anexo B.6 – Distribuição de R para $n=9$



Anexo B.7 – Distribuição de R para $n=20$

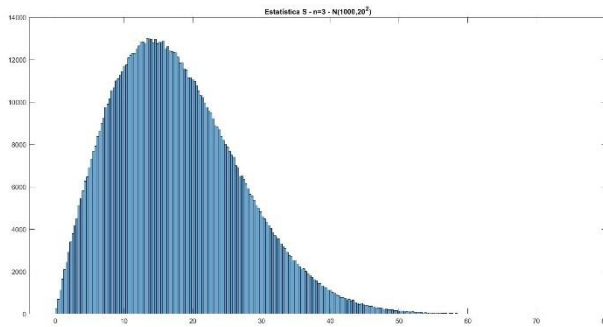


Anexo B.8 – Distribuição de R para $n=50$

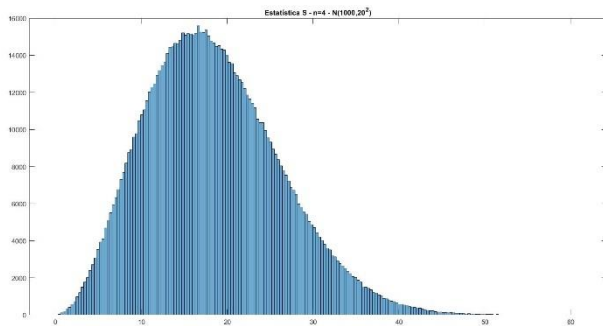


Anexo C- Distribuição de S para diferentes dimensões da amostra (n)

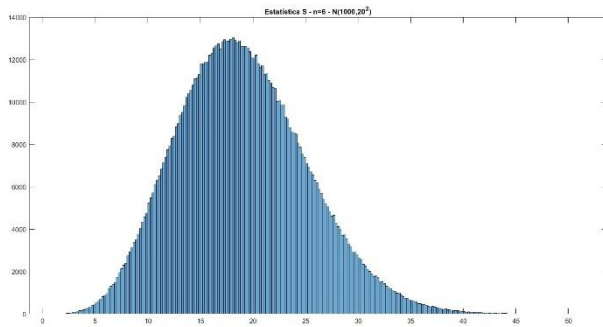
Anexo C.1 – Distribuição de S para $n=3$



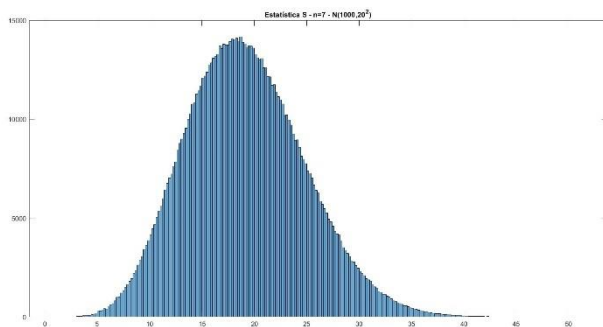
Anexo C.2 – Distribuição de S para $n=4$



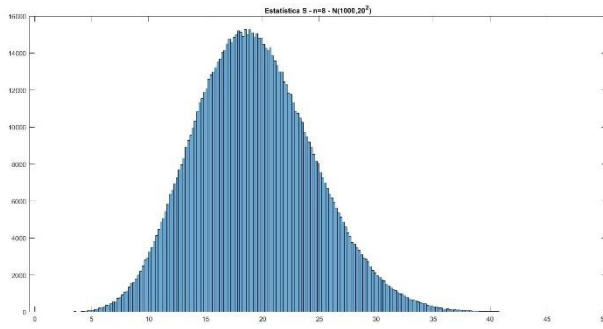
Anexo C.3 – Distribuição de S para $n=6$



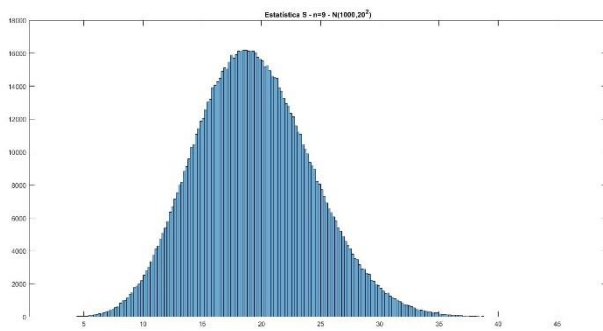
Anexo C.4 – Distribuição de S para $n=7$



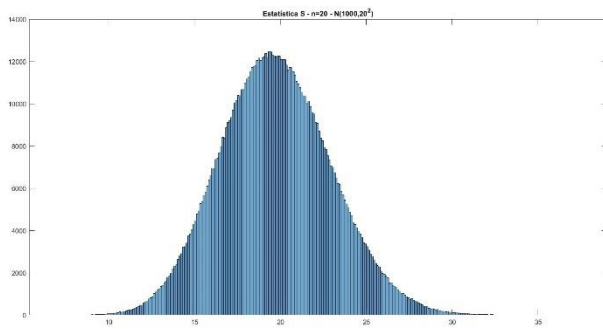
Anexo C.5 – Distribuição de S para $n=8$



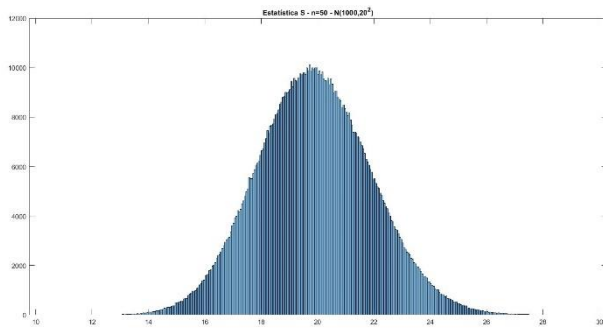
Anexo C.6 – Distribuição de S para $n=9$



Anexo C.7 – Distribuição de S para $n=20$

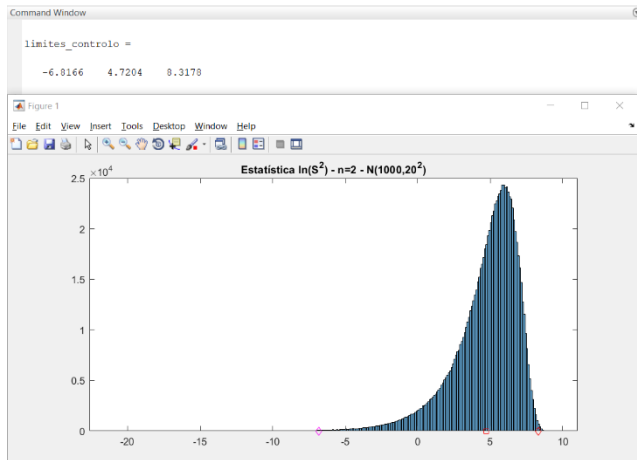


Anexo C.8 – Distribuição de S para $n=50$

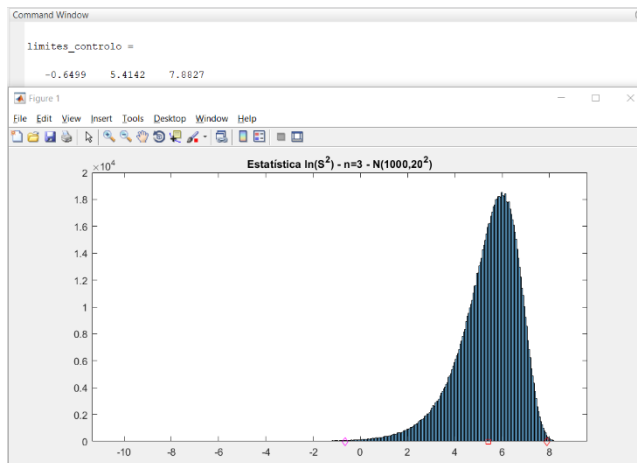


Anexo D – Simulação dos limites de controlo da estatística $\ln(S^2)$ para diferentes dimensões da amostra (n)

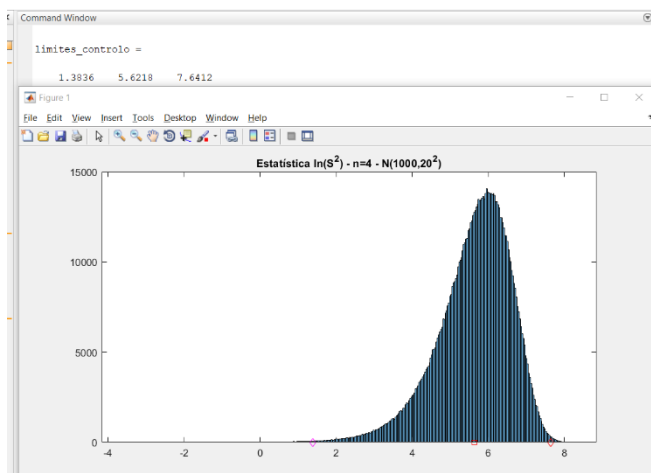
Anexo D.1 – Simulação dos limites de controlo da estatística $\ln(S^2)$ para $n=2$



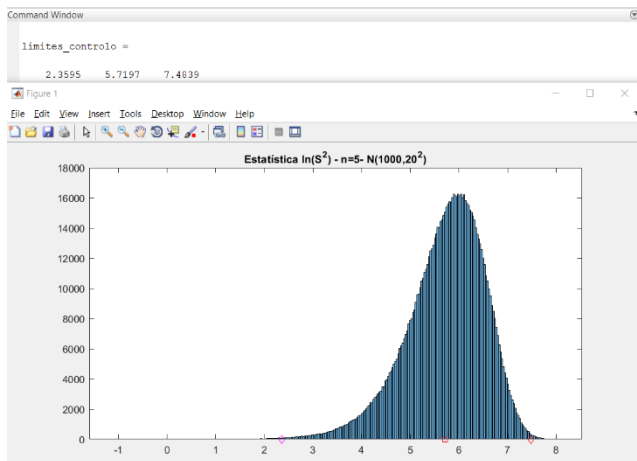
Anexo D.2 – Simulação dos limites de controlo da estatística $\ln(S^2)$ para $n=3$



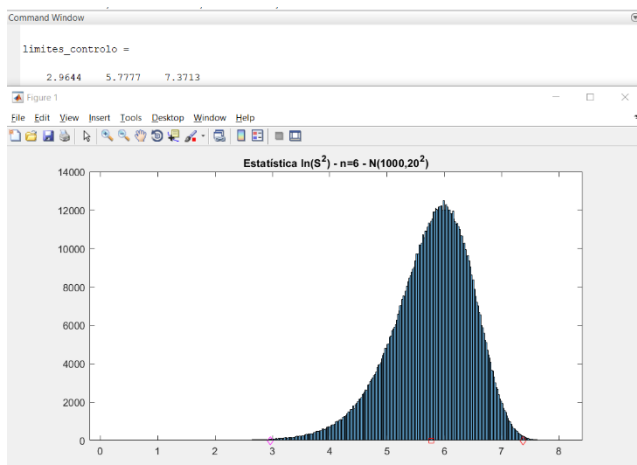
Anexo D.3 – Simulação dos limites de controlo da estatística $\ln(S^2)$ para $n=4$



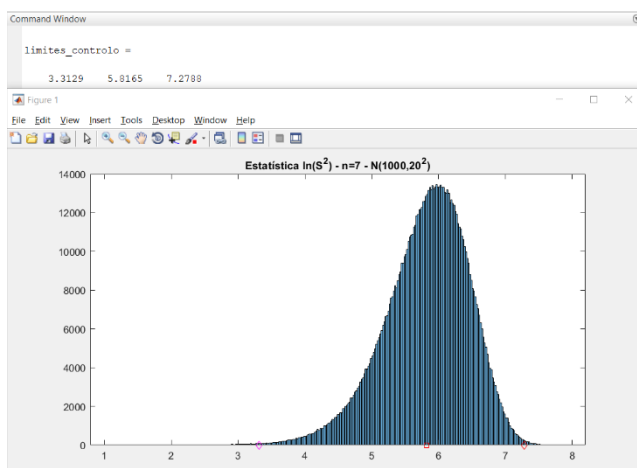
Anexo D.4 – Simulação dos limites de controlo da estatística $\ln(S^2)$ para $n=5$



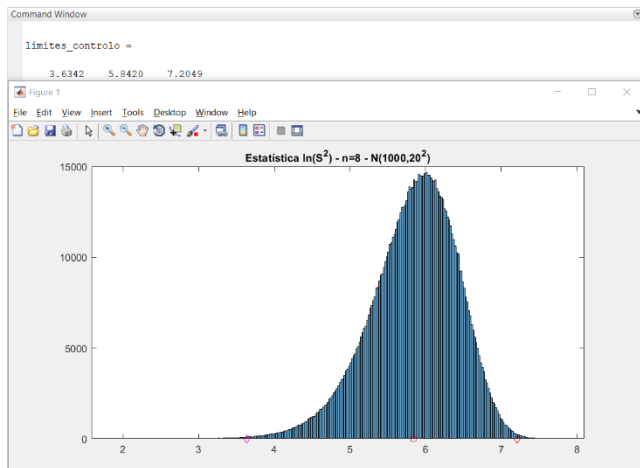
Anexo D.5 – Simulação dos limites de controlo da estatística $\ln(S^2)$ para $n=6$



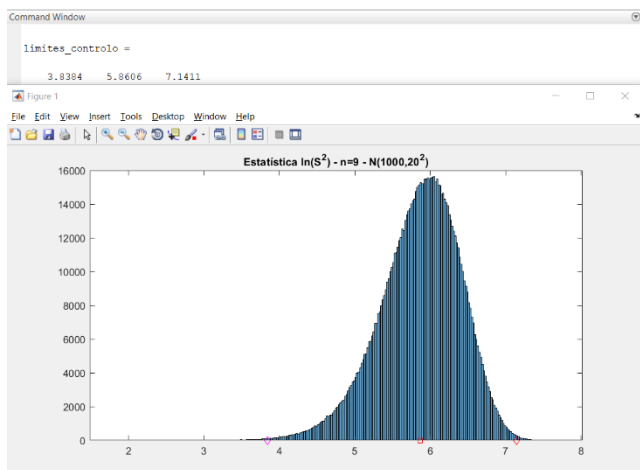
Anexo D.6 – Simulação dos limites de controlo da estatística $\ln(S^2)$ para $n=7$



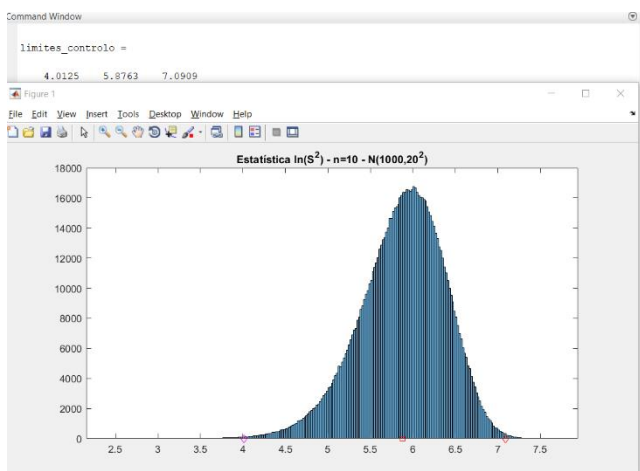
Anexo D.7 – Simulação dos limites de controlo da estatística $\ln(S^2)$ para $n=8$



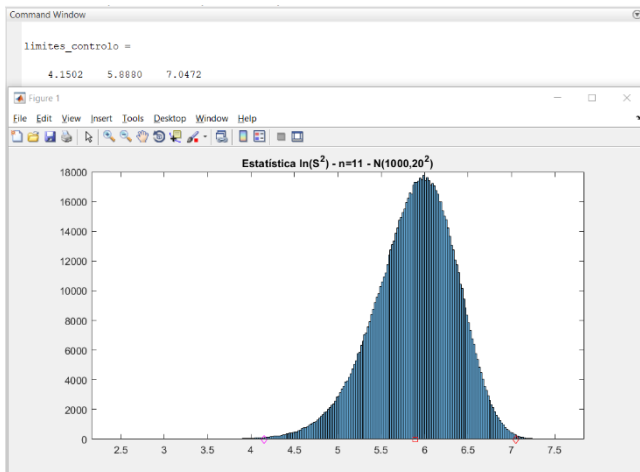
Anexo D.8 – Simulação dos limites de controlo da estatística $\ln(S^2)$ para $n=9$



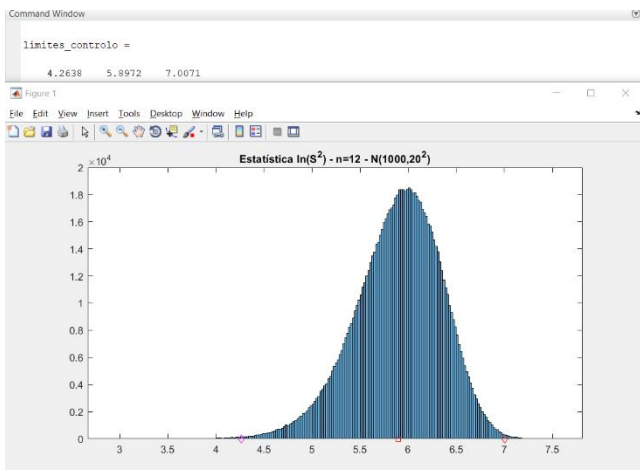
Anexo D.9 – Simulação dos limites de controlo da estatística $\ln(S^2)$ para $n=10$



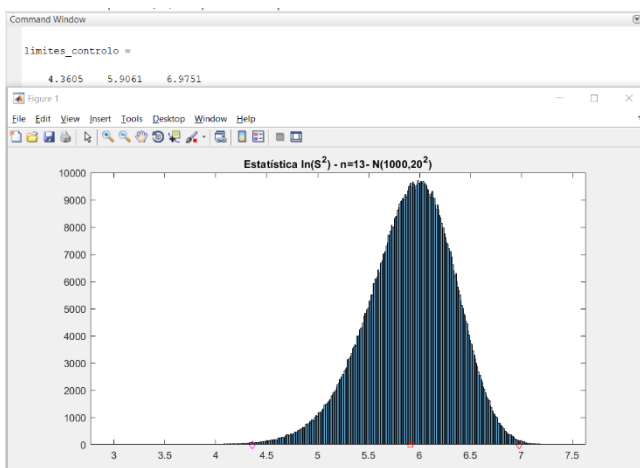
Anexo D.10 – Simulação dos limites de controle da estatística $\ln(S^2)$ para $n=11$



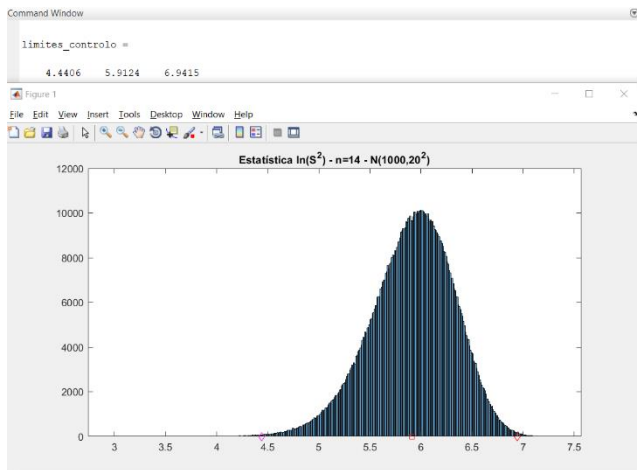
Anexo D.11 – Simulação dos limites de controle da estatística $\ln(S^2)$ para $n=12$



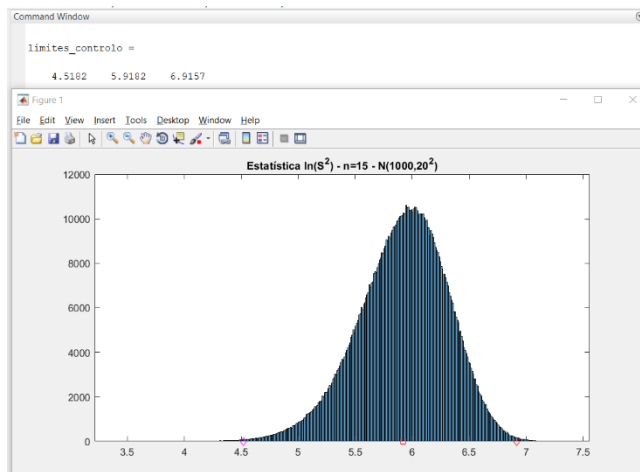
Anexo D.12 – Simulação dos limites de controle da estatística $\ln(S^2)$ para $n=13$



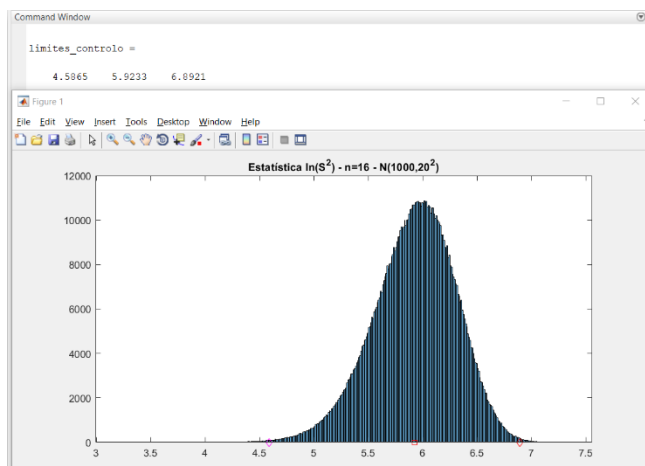
Anexo D.13 – Simulação dos limites de controlo da estatística $\ln(S^2)$ para $n=14$



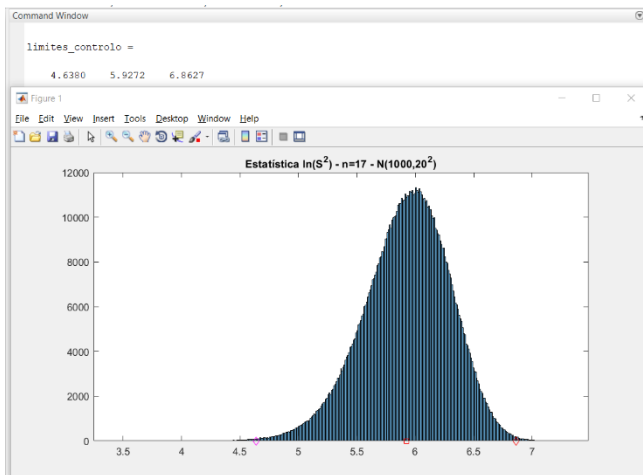
Anexo D.14 – Simulação dos limites de controlo da estatística $\ln(S^2)$ para $n=15$



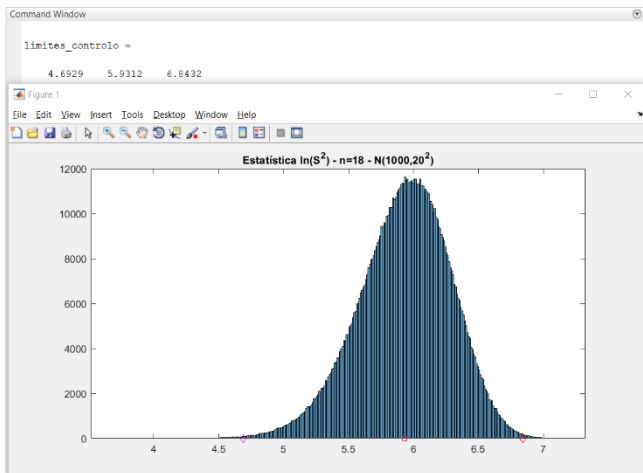
Anexo D.15 – Simulação dos limites de controlo da estatística $\ln(S^2)$ para $n=16$



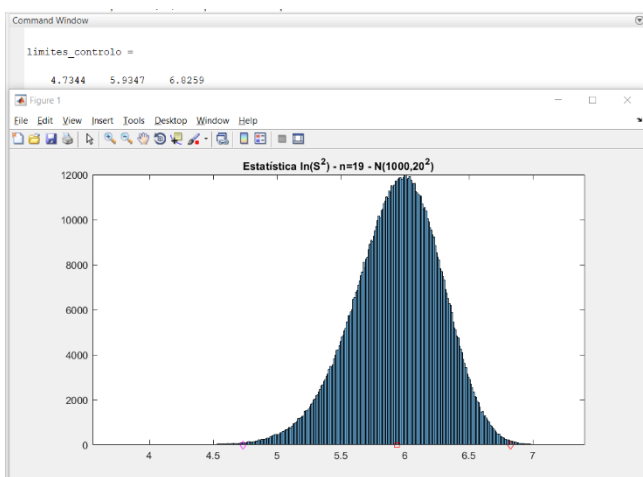
Anexo D.16 – Simulação dos limites de controle da estatística $\ln(S^2)$ para $n=17$



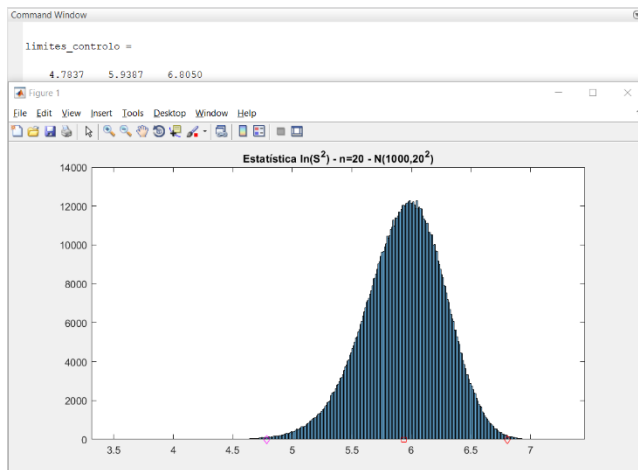
Anexo D.17 – Simulação dos limites de controle da estatística $\ln(S^2)$ para $n=18$



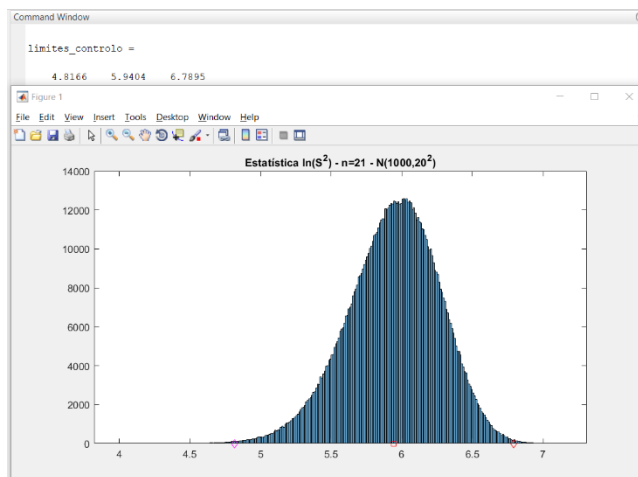
Anexo D.18 – Simulação dos limites de controle da estatística $\ln(S^2)$ para $n=19$



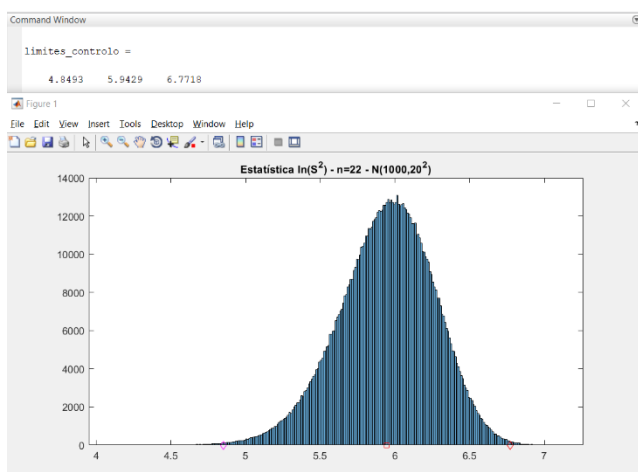
Anexo D.19 – Simulação dos limites de controlo da estatística $\ln(S^2)$ para $n=20$



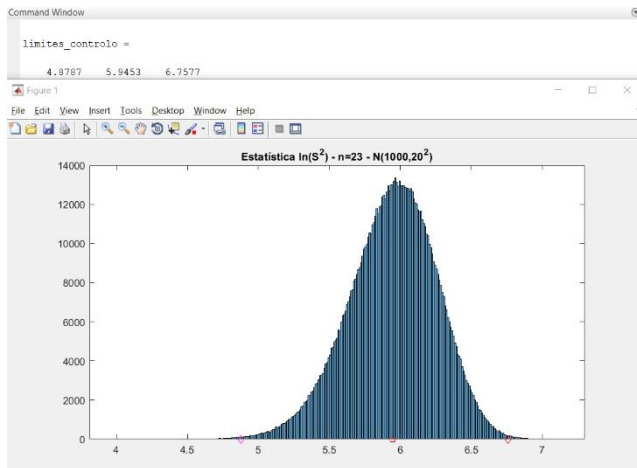
Anexo D.20 – Simulação dos limites de controlo da estatística $\ln(S^2)$ para $n=21$



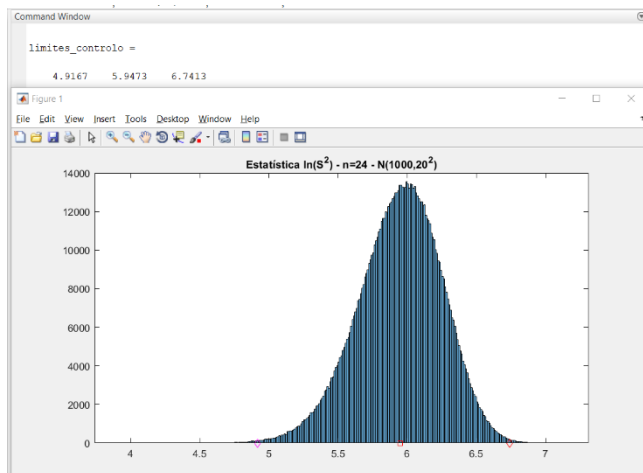
Anexo D.21 – Simulação dos limites de controlo da estatística $\ln(S^2)$ para $n=22$



Anexo D.22 – Simulação dos limites de controlo da estatística $\ln(S^2)$ para $n=23$



Anexo D.23 – Simulação dos limites de controlo da estatística $\ln(S^2)$ para $n=24$



Anexo E – Ficheiro de apoio em EXCEL usado para cálculo das constantes da carta $ln(S^2)$

dim. amostr. n	dev padrão $\sigma_{ln(S^2)}$	variância $\sigma^2_{ln(S^2)}$	CARTA $ln(S^2)$										CARTA Xbarra						
			Fase 1					Fase 2					Fase 1	A4	Fase 2	A			
			k1	k2	G3	G4	L1C	L2C	L3C	L4C	L5C	c1	c2	G1	G2	G1	c1	A4	A
2	2.066	4.267	1.742	5.585	3.597	11.537	-6.817	4.720	8.318	4.720	8.318	3.320	2.397	1.200	2.397	12.737	1.777	3.865	2.121
3	1.778	1.633	1.932	4.745	2.469	6.064	-0.650	5.414	7.883	5.414	7.883	1.446	1.894	0.575	1.894	6.639	1.446	2.809	1.732
4	0.866	0.934	2.090	4.386	2.019	4.238	1.384	5.622	7.641	5.622	7.641	1.310	1.651	0.369	1.651	4.607	1.310	1.804	1.500
5	0.803	0.645	2.197	4.185	1.764	3.860	2.360	5.720	7.484	5.720	7.484	1.238	1.494	0.270	1.494	3.631	1.238	1.536	1.342
6	0.700	0.490	2.277	4.017	1.594	3.413	2.777	5.817	7.371	5.817	7.371	1.192	1.381	0.213	1.381	3.026	1.192	1.362	1.225
7	0.628	0.395	2.327	3.984	1.462	2.904	3.313	5.872	7.279	5.872	7.279	1.161	1.286	0.176	1.286	2.679	1.161	1.238	1.134
8	0.575	0.330	2.371	3.841	1.363	2.508	3.634	5.842	7.205	5.842	7.205	1.139	1.213	0.150	1.213	2.357	1.139	1.163	1.061
9	0.533	0.284	2.404	3.796	1.281	2.222	3.838	5.861	7.141	5.861	7.141	1.122	1.150	0.130	1.150	2.052	1.122	1.067	1.000
10	0.499	0.249	2.435	3.737	1.215	1.964	4.013	5.876	7.091	4.013	5.876	1.109	1.099	0.115	1.099	1.979	1.109	1.052	0.949
11	0.470	0.221	2.464	3.694	1.159	1.738	4.150	5.888	7.047	4.150	5.888	1.098	1.094	0.106	1.094	1.811	1.098	1.045	0.905
12	0.446	0.199	2.486	3.658	1.110	1.533	4.264	5.897	7.007	4.264	5.897	1.089	1.086	0.098	1.086	1.631	1.089	1.038	0.866
13	0.426	0.181	2.510	3.630	1.069	1.346	4.361	5.906	6.975	4.361	5.906	1.082	1.084	0.094	1.084	1.473	1.082	1.034	0.832
14	0.408	0.166	2.524	3.609	1.029	1.172	4.441	5.912	6.942	4.441	5.912	1.076	1.079	0.092	1.079	1.324	1.076	1.033	0.802
15	0.392	0.154	2.546	3.573	0.998	1.000	4.518	5.923	6.916	4.518	5.923	1.066	1.071	0.088	1.071	1.184	1.066	1.033	0.775
16	0.378	0.143	2.565	3.540	0.969	0.837	4.587	5.927	6.892	4.587	5.927	1.062	1.068	0.086	1.068	1.052	1.062	1.033	0.750
17	0.365	0.133	2.584	3.533	0.956	0.709	4.638	5.927	6.863	4.638	5.927	1.058	1.062	0.084	1.062	0.924	1.058	1.033	0.728
18	0.353	0.125	2.601	3.501	0.912	0.581	4.693	5.931	6.826	4.693	5.931	1.052	1.057	0.082	1.057	0.800	1.052	1.033	0.707
19	0.343	0.118	2.600	3.467	0.866	0.464	4.734	5.935	6.805	4.734	5.935	1.048	1.051	0.080	1.051	0.698	1.048	1.033	0.688
20	0.333	0.111	2.618	3.465	0.849	0.358	4.784	5.939	6.805	4.784	5.939	1.045	1.048	0.079	1.048	0.600	1.045	1.033	0.671
21	0.324	0.105	2.622	3.460	0.829	0.264	4.817	5.940	6.790	4.817	5.940	1.042	1.044	0.078	1.044	0.516	1.042	1.033	0.660
22	0.316	0.100	2.622	3.457	0.812	0.187	4.849	5.943	6.772	4.849	5.943	1.040	1.040	0.077	1.040	0.442	1.040	1.033	0.655
23	0.308	0.095	2.633	3.457	0.812	0.125	4.879	5.945	6.758	4.879	5.945	1.037	1.037	0.076	1.037	0.382	1.037	1.033	0.640
24	0.301	0.091	2.634	3.419	0.794	0.071	4.917	5.947	6.741	4.917	5.947	1.035	1.034	0.075	1.034	0.328	1.035	1.033	0.632
25	0.295	0.087	2.649	3.414	0.781	0.031	4.943	5.950	6.731	4.943	5.950	1.033	1.032	0.074	1.032	0.281	1.033	1.033	0.630

SIMULAÇÃO MATLAB	N (1000, 20²)
$G_1 = k_1 \sigma_{ln(S^2)} = k_1 \sqrt{\frac{2}{n-1} - \frac{2}{(n-1)^2} + \frac{4}{3(n-1)^3} - \frac{16}{15(n-1)^5}}$ $G_2 = k_2 \sigma_{ln(S^2)} = k_2 \sqrt{\frac{2}{n-1} - \frac{2}{(n-1)^2} + \frac{4}{3(n-1)^3} - \frac{16}{15(n-1)^5}}$	$G_1 = -c_1 + k_1 \sigma_{ln(S^2)} = -c_1 + k_1 \sqrt{\frac{2}{n-1} - \frac{2}{(n-1)^2} + \frac{4}{3(n-1)^3} - \frac{16}{15(n-1)^5}}$ $G_2 = c_2 + k_2 \sigma_{ln(S^2)} = c_2 + k_2 \sqrt{\frac{2}{n-1} - \frac{2}{(n-1)^2} + \frac{4}{3(n-1)^3} - \frac{16}{15(n-1)^5}}$
$LSC_{ln(S^2)} = \mu_{ln(S^2)} + k_1 \sigma_{ln(S^2)} = \ln(\sigma^2) + G_1$ $LCL_{ln(S^2)} = \mu_{ln(S^2)} - k_2 \sigma_{ln(S^2)} = \ln(\sigma^2) - G_2$	$LSC_{ln(S^2)} = \mu_{ln(S^2)} + k_1 \sigma_{ln(S^2)} = \ln(\sigma^2) - c_1 + k_1 \sigma_{ln(S^2)} = \ln(\sigma^2) + G_2$ $LCL_{ln(S^2)} = \mu_{ln(S^2)} - k_2 \sigma_{ln(S^2)} = \ln(\sigma^2) - c_2$

$c_1 = \frac{1}{n-1} + \frac{1}{3(n-1)^2} - \frac{2}{15(n-1)^4}$	$c_2 = \frac{1}{n-1} + \frac{1}{3(n-1)^2} - \frac{2}{15(n-1)^4}$
$A = \frac{3}{\sqrt{n}}$	$A_4 = 3 \frac{\sqrt{c_1}}{\sqrt{n}}$
$c_1 = e^{\frac{1}{n-1} + \frac{1}{3(n-1)^2} - \frac{2}{15(n-1)^4}}$	$c_2 = e^{\frac{1}{n-1} + \frac{1}{3(n-1)^2} - \frac{2}{15(n-1)^4}}$

CROWDER & HAMILTON (1992) $\sigma_{ln(S^2)}^2 = \frac{2}{n-1} - \frac{2}{(n-1)^2} + \frac{4}{3(n-1)^3} - \frac{16}{15(n-1)^5}$	CROWDER & HAMILTON (1992) $\ln(S^2) = \ln(\sigma^2) - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{3(n-1)^2} - \frac{2}{15(n-1)^4}$
$\mu_{ln(S^2)} = \ln(S^2) = \frac{\sum_{i=1}^m \ln(S_i^2)}{m}$	CROWDER & HAMILTON (1992) $\ln(S^2) = \ln(\sigma^2) - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{3(n-1)^2} - \frac{2}{15(n-1)^4}$

Anexo F – Artigo “ $\ln(S^2)$ Chart Parametrization – An alternative to the Statistical Control of Process Variance”

$\ln(S^2)$ Chart Parametrization – An alternative to the Statistical Control of Process Variance

Ílri Simões¹, José Gomes Requeijo², Izunido Cabral¹, Helena Alvelos²

¹UNIDEMI, Departamento de Engenharia Mecânica e Industrial, Faculdade de Ciências e Tecnologias, Universidade Nova de Lisboa, 2828-516 Caparica, Portugal
²Center for Research and Development in Mathematics and Applications and Department of Economics, Management, Industrial Engineering and Tourism, University of Aveiro, 2610-193 Aveiro, Portugal

Abstract

The traditional control charts developed by Walter Shewhart are based on certain assumptions, namely the Normality of the variables under study, the collection of homogeneous samples, adequate sampling frequency for the process being controlled and a significance level of 0.27%. While in the control of process mean, the Normality assumption is, in most cases, satisfied (in particular when sample means are used), regarding the control of process variability, through the sample ranges or the sample standard deviations, this assumption is no longer guaranteed, particularly for small sample sizes (4, 5 or 6). However, the application of R chart (range chart) or S chart (standard deviation chart) has been a frequent option in the implementation of Statistical Process Control (SPC).

To overcome the limitation related to the non-normality of the distribution of sample ranges and the distribution of sample standard deviations, this work suggests the control of the process variability through a new variable, $\ln(S^2)$: natural logarithm of the sample variance. In the attempt to increase the efficiency of the techniques used for controlling process variability, the results presented in this paper are based on simulations performed in MATLAB®, in order to confirm the non-normality of the statistical distributions of R (sample range) and S (sample standard deviation), and to study the statistical distribution of $\ln(S^2)$. Based on the study of the distribution of the natural logarithm of the sample variance, a new control chart ($\ln(S^2)$ chart) is proposed. This chart takes into account the potential effects of non-normality of the $\ln(S^2)$ distribution on the calculation of the control limits of control, ensuring a significance level of 0.27%. This can result in control limits that are more asymmetric the more asymmetric this distribution is. Thus, it is guaranteed that, although the $\ln(S^2)$ distribution is not perfectly normal, the results and analyses performed are not biased. For the design and implementation of the $\ln(S^2)$ chart and the corresponding average chart (\bar{X} chart), new constants suggested by the authors are presented. These constants depend exclusively on the sample size and were determined through simulations in MATLAB®.

To validate the investigation carried out, an application example is presented to study and compare the performance of the traditional charts (R and S) and the $\ln(S^2)$ chart. The results suggest that the $\ln(S^2)$ is a strong and potential alternative to the traditional R and S charts as it presents a better performance than the R and S charts, particularly in the detection of decreases in the process variance. Therefore, the implementation of the \bar{X} and $\ln(S^2)$ charts is recommended, as an alternative to the corresponding traditional Shewhart charts.

Keywords—SPC (Statistical Process Control); Dispersion Control; S Chart; R Chart; $\ln(S^2)$ Chart; Normality

1. Introduction

The growing competition among companies, together with the quality consistency required by customers, implies that the production processes must be stable and operate with a minimum of variability around the target or nominal values of the key quality characteristics. However, a large part of processes, whether they are productive or services, do not meet these requirements, reinforcing the importance of implementing methodologies that allow companies to overcome the problem and to have a competitive advantage (Pereira & Requeijo, 2012). One of the methodologies that has been widely used in quality control and process improvement is Statistical Process Control (SPC) (Requeijo et al., 2014; Costa & Fichera, 2017; Torres et al., 2018; Kraver et al., 2016; Lowther et al., 2019; Pal et al., 2020; Duran-Vilalobos et al., 2020). This methodology integrates a vast set of quality and statistical tools that, when applied systematically, according to a logical sequence, allow to achieve continuous improvement of an organization's processes and products, which may result in increased satisfaction of all parties involved.

Among the various quality tools and techniques applicable in SPC for planning, controlling and improving processes, we highlight control charts, that have played an extremely important role in measuring, evaluating and reducing the variability of products and processes. Control charts allow to monitor the process behaviour, reduce variability and determine, based on estimates of the process parameters, whether it is able to produce according to pre-defined specifications (Pereira & Requeijo, 2012). Thus, this tool assumes special relevance in the process control, since, when used by operators at their workstations, they provide credible information about the need to take corrective actions. In addition, they allow to objectively study the process capability by providing credible information that supports decision making at the management level and the development of

1

appropriate strategies to reduce variation and adjust the process average. The first control charts were developed by Dr. Walter Shewhart in the 1920s, at Bell Laboratories, while studying the variation of a specific characteristic of a process. The results of this study were published by Shewhart (1931) and the principles underlying his charts are still valid today. This theme, due to its relevance and applicability in industry, has been studied and developed over time by several authors, such as Juran (1951), Wheeler (1995), Quesenberry (1997), Oakland (2003), Mitra (2008), Montgomery (2012), Pereira and Requeijo (2012), among others.

In the traditional process control, Shewhart (1931) suggests the joint use of two charts to monitor quality characteristics that can be expressed through a continuous scale (e.g. weight, dimensions or viscosity): one for controlling process mean and another for controlling process variance. When samples are used, the control of the process mean is usually carried out through the mean chart (\bar{X} chart) and the process variance is generally controlled through the standard deviation chart (S chart) or through the range chart (R chart). According to Montgomery (2012), the \bar{X} and R (or S) charts are among the most important techniques used in SPC. In fact, these charts have been extensively used, mainly in Phase I of control chart implementation, to verify the process stability and to estimate the process parameters. However, they present some limitations that can bias the analysis of the results obtained in their applications. One is that the traditional Shewhart control charts only consider the latest information about the process, ignoring, for example, the information revealed by the data sequence, thus decreasing the sensitivity of detecting small and moderate changes in the process parameters (Montgomery, 2012; Pereira & Requeijo, 2012). The other limitation is related to the distribution of the quality characteristic to be controlled. It is known that the traditional control charts developed by Walter Shewhart assume the Normality of the variables under study and a significance level of 0.27%. This means that the control limits of these charts are located at 3 standard deviations from the expected value of the statistics under study. If in the control of the process mean, the assumption of Normality is most cases ensured (in particular when sample means are used), in the control of the process variability, through the sample ranges or the samples standard deviations, this assumption is no longer satisfied, particularly for small sample sizes (4, 5 or 6). Even for relatively large samples ($n > 10$), it is known that the distributions of R and S variables are not Normal, even if the samples come from Normal populations (Quesenberry, 1997; Montgomery, 2012; Pereira and Requeijo, 2012). This can be seen in the simulations' results presented in Section 4. One of the practical implications is that, knowing that in the traditional Shewhart charts the control limits for a variable x are located at $\pm 3\sigma_x$ of the central line, the lower limit of the R or S chart might be negative, assuming that its value is equal to zero (Pereira & Requeijo, 2012). This implies that, in these cases, the significance level of 0.27%, usually used in the traditional Shewhart control charts, is not guaranteed. Another important implication is that, since the R and S charts are extremely sensitive to deviations from normality, limits located at $\pm 3\sigma_x$ are only an approximation, thus increasing the risk of mistakenly assuming that the process is out of statistical control. As a result, the ARL (Average Run Length), when the process is under statistical control, may deviate considerably from the value 370. These limitations make the R and S charts relatively insensitive in detecting changes in the process variance, particularly when it occurs a decrease, often a signal that the process is improving. An increase in the process variance is an undesirable situation, which should be quickly detected. On the other hand, the reverse situation of a decrease in the variability is desirable, so appropriate mechanisms must be in place to detect it as soon as possible in order to identify the (desirable) cause(s) that contributed for such improvement (Pereira & Requeijo, 2012).

There is yet another relevant aspect to mention. Since the distribution of sample means depends on both the process mean and the process standard deviation, a non-detection of a change in the process standard deviation will result in a chart with less sensitivity in detecting changes in the process mean (Quesenberry, 1997). One of the approaches that has been suggested in the literature to overcome the non-normality of the R and S variables is to characterize, using the available data, the true distribution of the variable to be controlled, determine the correct percentiles and use them in the calculation of the control limits (e.g. Quesenberry, 1997; Pereira & Requeijo, 2012). However, even with correct limits, S and R charts still have little sensitivity to detect a decrease in the process variance as mentioned above and demonstrated by Quesenberry (1997). Taking into account these limitations, this study aims to develop a new chart for controlling process variance, which has greater sensitivity in detecting decreases in the process variance, a situation always desirable. This new chart ($\ln(S^2)$ chart), which will be an alternative to the traditional control of process variance, is parameterized using the random variable $\ln(S^2)$, which has proven to be an effective alternative in modeling process variability (Montgomery, 2012). The rationale for using this variable is that the distribution of the $\ln(S^2)$ values is approximately Normal when the quality characteristic X is normally distributed, while the distributions of R and S are not Normal, even if X is Normal (Pereira & Requeijo, 2012). In addition, when parameterizing this chart, it is always possible to guarantee a significance level of 0.27%, regardless of the sample size.

2

2. Traditional Shewhart's Control Charts

2.1. An overview

A control chart corresponds to a graphical representation of the evolution of a ω statistic over time. The ω statistic refers to the quality characteristic that is intended to be monitored. In addition to the pair of points (t, ω) , this graph also shows the upper and lower control limits, as well as the central line of the ω chart.

The design of a Shewhart control chart is an iterative process, covering two phases in its implementation. Phase I, where the process is known and Phase II, where the process parameters estimates that were obtained in Phase I are used. Thus, Phase I corresponds to a retrospective (or preliminary) process control, while Phase II corresponds to the process monitoring (Shewhart, 1931; Pereira & Requeijo, 2012).

As referred in Section 1, one of the assumptions of the Shewhart's control charts corresponds to the Normality of the variable under study, assuming that it is normally distributed with mean μ and variance σ^2 ($\omega \sim N(\mu, \sigma^2)$). Thus, considering a level of significance of 0.27% ($\alpha = 0.27\%$), the control limits and the central line of the Shewhart's control charts are given by

$$\begin{aligned} UCL_{\omega} &= \mu + 3\sigma \\ CL_{\omega} &= \mu \\ LCL_{\omega} &= \mu - 3\sigma \end{aligned} \quad (1)$$

As can be seen above, the Shewhart charts' limits are located at $\pm 3\sigma$ of the central line. Since ω is normally distributed, there is a probability of 99.73% that any point will fall within the range between the control limits. Based on this principle, it can be deduced that there is a risk that a point is outside the control limits of 0.27%. According to Shewhart (1931), whenever a point falls outside the control limits' interval, it is considered that such point does not belong to the Normal distribution of ω , assuming that a special cause of variation occurred. Nevertheless, there is a risk α of that point belonging to the distribution of ω (i.e., considering the process to be out of statistical control when it is statistically controlled), called the producer's risk, level of significance or Type I error. There is also a β risk of considering the process statistically controlled, when in reality it is not, also called consumer's risk or Type II error (Montgomery, 2012; Pereira & Requeijo, 2012).

It is known that, without exception, any statistical analysis tool is subject to a performance evaluation. In this line, there are also measures to evaluate the performance of control charts. The most used is the ARL, which corresponds to the average number of points represented on the control chart until a point outside the control limits is detected. When the process is under statistical control, the ARL (ARL₀) is desired to be as large as possible, thus minimizing the number of false alarms. On the other hand, when the process is out of statistical control, the ARL (ARL₁) must be the lowest possible, so that changes in the process parameters are quickly and effectively detected (Weil et al., 2018; Lima-Filho et al., 2019). The equations for ARL₀ and ARL₁ are then obtained as follows:

$$ARL_{0C} = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{0.0027} \approx 370 \quad (2)$$

$$ARL_{1C} = \frac{1}{1-\beta} \quad (3)$$

Since the limits of the Shewhart control charts are always positioned at $\pm 3\sigma$ from the center line, the ARL₀ value of these charts is always 370, which means that, on average, every 370 points there is a false alarm, i.e., at every 370 points, it is wrongly assumed that the process is out of statistical control (Pereira & Requeijo, 2012).

2.2. Types of Traditional Shewhart Control Charts

There are two types of traditional control charts, one for variables and another for attributes (Requeijo et al., 2014; Montgomery, 2012). In short, control charts for variables enable to monitor quality characteristics that can be expressed through a continuous scale (e.g. weight, dimensions or viscosity) while the control charts for attributes allow to monitor characteristics that can only be expressed in a discrete scale (e.g. number of non-conforming units in a production line or number of defects per unit). Table 1 summarizes the types of traditional control charts that are most used in the statistical control of variables and attributes.

3

Table 1 – Types of Traditional Control Charts

Control Chart		Attributes
Variables		
Mean and Amplitude	\bar{X} and R Charts	Proportion of non-compliant units p Chart
Mean and Standard Deviation	\bar{X} and S Charts	Number of non-compliant units np Chart
Median and Amplitude	\bar{X} and R Charts	Number of defects c Chart
Individual Observations and Moving Average	\bar{X} and MR Charts	Number of defects per unit u Chart

2.2.1. The R Chart

The control limits of the R chart are based on the assumption that the distribution of the variable R is Normal. Thus, considering a significance level of 0.27%, the control limits of the R chart are defined according to Eq. (1) as $\mu_R \pm 3\sigma_R$. Considering the relations between μ_R , σ_R and the process dispersion σ , the control limits and the center line of R chart are obtained using Eq. (4):

$$\begin{aligned} UCL_R &= \mu_R + 3\sigma_R = \bar{R} + 3d_3\sigma = \bar{R} + 3d_3\frac{\bar{R}}{d_2} \left(1 + \frac{d_4}{d_2}\right) = D_3\bar{R} \\ CL_R &= \bar{R} \\ LCL_R &= \max(0, \mu_R - 3\sigma_R) = \max(0, \bar{R} - 3d_3\sigma) = \max\left(0, \bar{R} - 3d_3\frac{\bar{R}}{d_2}\right) = \max\left(0, \bar{R}\left(1 - \frac{d_4}{d_2}\right)\right) = D_4\bar{R} \end{aligned} \quad (4)$$

From the analysis of Eq. (4), it appears that the control limits will be located at the same distance from the central line, when the constant D_3 is different from zero (the constants D_3 e D_4 depend exclusively on the sample size and their values are shown in Table A.1).

However, the R statistic does not appear to follow a Normal distribution. In Fig. 1 is shown the graph resulting from the simulation of this statistic, for a Normal population distribution with a mean of 1000 and standard deviation of 20, and for different sample sizes. The simulation study allowed to verify the behaviour of the R statistic, and the its results are presented in Section 4.3.

4

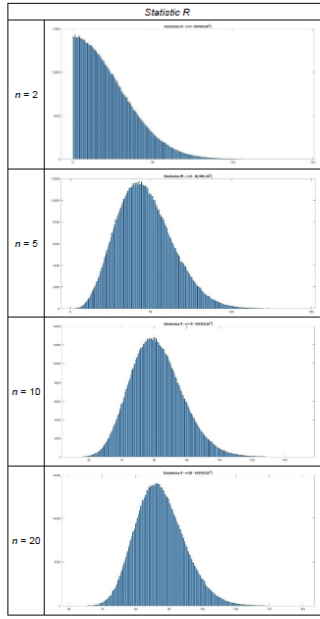


Fig. 1 – R distribution for different sample sizes and N (1000; 400) (simulation results)

The procedure used for simulating the R statistic is explained in more detail in Section 4.1. It is important to note that the values of these distributions were obtained by generating one million individual values, in order to ensure that the results from this simulation are as close as possible to reality.

As can be seen in Fig. 1, the non-normality of the distribution of R is evident, especially for small values of the sample size ($n \leq 5$). The larger the sample size, the smaller the effect of non-normality, which is in line with the results of Pacheco (2019) study. The complete results resulting from the simulation studies, performed for sample sizes $n = \{3, 4, 6, 7, 8, 9, 20, 50\}$, are presented in Fig. B.1.

5

In the literature, whenever the R chart is used for statistical control of the process variance, the assumption of Normality is considered to be satisfied. Given that this assumption is often violated, there is a skew when analysing the patterns on R chart, because the distribution of R is asymmetric and not Normal, with a more pronounced tail on the right side than the left side. Therefore, when the control limits of this chart are to be established, the non-normality of data should be considered in order to ensure a more rigorous analysis.

2.2.2. The S Chart

Similarly to the R chart, the standard deviation chart, S, is also designed under the Normality assumption of the S distribution, so the control limits for this chart are located at $\mu_S \pm 3\sigma_S$. Considering the relations between μ_S , σ_S and the dispersion of the process σ , the control limits and the center line of S chart are obtained using Eq. (5):

$$\begin{aligned} UCL_S &= \mu_S + 3\sigma_S = \bar{S} + 3\sqrt{1-c_1^2}\sigma = \bar{S} + 3\frac{\bar{S}}{c_1}\sqrt{1-c_1^2} = \bar{S}\left(1 + \frac{3}{c_1}\sqrt{1-c_1^2}\right) = B_1\bar{S} \\ CL_S &= \bar{S} \\ LCL_S &= \mu_S - 3\sigma_S = \max\left(0, \bar{S} - 3\sqrt{1-c_1^2}\sigma\right) = \max\left(0, \bar{S} - 3\frac{\bar{S}}{c_1}\sqrt{1-c_1^2}\right) = B_2\bar{S} \end{aligned} \quad (5)$$

As verified in R chart, it appears that the control limits of chart S are located at the same distance from the central line, when the constant B_3 is different from zero (the constants B_1 and B_2 depend exclusively on the sample size and their values are shown in Table A.1).

In line with the simulation study carried out for the distribution of R, the distribution of S was also simulated in MATLAB®. In order to confirm that it satisfies the Normality assumption or not, the simulation results, considering the same population distribution (Normal (1000; 400)), are presented in Fig. 2.

The simulation procedure adopted for studying the distribution of the S statistic is similar to the one adopted for studying the distribution of R. Further details of this simulation study are provided in Section 4.1.

An analysis of Fig. 2 allows to verify the non-normality of the distribution of the S statistic, especially for small sample sizes ($n \leq 5$). A more careful analysis allows, however, to conclude that, although it is not a statistic whose distribution is similar to Normal, since the tail on the right is larger than the tail on the left, the distribution of S is less asymmetric than the R distribution. Therefore, even skewing the results, the S statistic should be used to control the process variance, instead of the R statistic. It is also important to note that the non-normality effect is more attenuated as the sample dimension increases. Fig. C.1 presents the simulation results for the sample sizes $n = \{3, 4, 6, 7, 8, 9, 20, 50\}$.

6

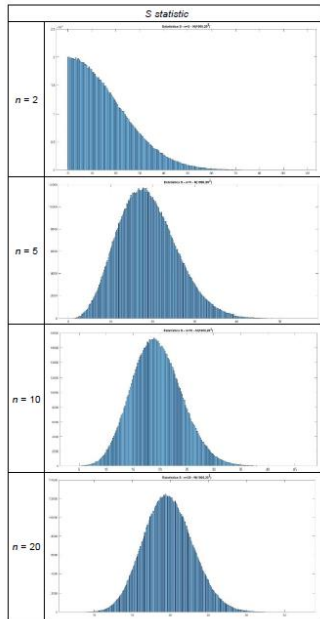


Fig. 2 – S distribution for different sample sizes and N (1000; 400) (simulation results)

3. The $\ln(S^2)$ and \bar{X} Charts

In order to minimize the errors associated with the non-normality of R and S charts, Pacheco (2019) suggested a new approach, in which the statistic used to study the process variance corresponds to the natural logarithmic transformation of the sample variance, the $\ln(S^2)$ control chart. The control limits of the $\ln(S^2)$ chart, which is suggested as a better alternative to the R and S charts in controlling process variability, are based on the studies

7

of Crowder and Hamilton (1992). This study proposes that the mean and variance of the distribution $\ln(S^2)$ can be calculated through the following equations

$$\begin{aligned} \mu_{\ln(S^2)} &= \overline{\ln(S^2)} = \ln(\sigma^2) - \frac{1}{n-1} - \frac{1}{3(n-1)^2} + \frac{2}{15(n-1)^3} \\ \sigma_{\ln(S^2)}^2 &= \frac{2}{n-1} - \frac{2}{(n-1)^2} + \frac{4}{3(n-1)^3} - \frac{16}{15(n-1)^4} \end{aligned} \quad (6)$$

The principles of this new control chart are the same as those behind the design of the traditional Shewhart control charts, i.e., the value of the significance level is equal to 0.27% ($\alpha = 0.27\%$).

3.1. Phase I

3.1.1. The $\ln(S^2)$ Chart

In this phase, the process parameters are not known, so one of its main objectives is the estimation of these parameters, mean and standard deviation. Considering the principles underlying the traditional Shewhart control charts, the control limits and the center line of the $\ln(S^2)$ chart are obtained through the equations referred in (7).

$$\begin{aligned} UCL_{\ln(S^2)} &= \hat{\mu}_{\ln(S^2)} + k_2\sigma_{\ln(S^2)} = \overline{\ln(S^2)} + G_2 \\ CL_{\ln(S^2)} &= \hat{\mu}_{\ln(S^2)} = \overline{\ln(S^2)} \\ LCL_{\ln(S^2)} &= \hat{\mu}_{\ln(S^2)} - k_1\sigma_{\ln(S^2)} = \overline{\ln(S^2)} - G_1 \end{aligned} \quad (7)$$

Considering that m samples of dimension n are used in Phase I of the SPC, $\overline{\ln(S^2)}$ is given by Eq. (8).

$$\overline{\ln(S^2)} = \frac{\sum_{i=1}^m \ln(S_i^2)}{m} \quad (8)$$

In contrast to what happens on the R and S charts, this chart uses the constants k_1 and k_2 to estimate the two control limits, instead of ± 3 . The rationale for this is that the $\ln(S^2)$ distribution itself is not perfectly Normal, and the use of these constants (obtained through MATLAB® simulation) will guarantee that the control limits are in the 0.135% and 99.865% percentiles of the $\ln(S^2)$ distribution. As a result, the value of $\alpha = 0.27\%$ is ensured.

As explained for the constants B_1 and B_2 used in the design of the S chart and D_3 and D_4 of the R chart, the constants G_1 and G_2 depend exclusively on the sample size. The values of these constants are obtained using Eq. (9) and (10).

$$G_1 = k_1\sigma_{\ln(S^2)} = k_1\sqrt{\frac{2}{n-1} - \frac{2}{(n-1)^2} + \frac{4}{3(n-1)^3} - \frac{16}{15(n-1)^4}} \quad (9)$$

$$G_2 = k_2\sigma_{\ln(S^2)} = k_2\sqrt{\frac{2}{n-1} - \frac{2}{(n-1)^2} + \frac{4}{3(n-1)^3} - \frac{16}{15(n-1)^4}} \quad (10)$$

The values of k_1 and k_2 are obtained by simulation in MATLAB® in order to guarantee a level of significance $\alpha = 0.27\%$.

3.1.2. The \bar{X} Chart

Unlike the S and R charts, the mean chart does not present problems with regarding the Normality, since the distribution of sample means is approximately Normal for sample sizes equal to or greater than four ($n \geq 4$). As the control limits of \bar{X} chart are located at $\pm 3\sigma_{\bar{X}}$ from the center line ($\mu_{\bar{X}}$), these limits are defined by

8

$$UCL_{\bar{X}} = \mu_0 + 3\sigma_0 - \bar{X} + 3\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} - \bar{X} + 3\sqrt{\frac{\sigma_0^2}{n}} \frac{c_1}{\sqrt{n}} - \bar{X} + A_4\sqrt{\frac{\sigma_0^2}{n}}$$

$$CL_{\bar{X}} = \bar{X}$$

$$LCL_{\bar{X}} = \mu_0 - 3\sigma_0 - \bar{X} - 3\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} - \bar{X} - 3\sqrt{\frac{\sigma_0^2}{n}} \frac{c_1}{\sqrt{n}} - \bar{X} - A_4\sqrt{\frac{\sigma_0^2}{n}}$$

in which

$$c_1 = e^{-\frac{1}{2} \frac{1}{3(n-1)^2} - \frac{1}{15(n-1)^2}}$$

$$A_4 = 3\sqrt{\frac{A}{n}}$$

3.1.3. Process Parameters

The estimates of the process parameters, using both \bar{X} and $\ln(S^2)$ charts, are defined by Eq. (14) and (15):

$$\beta = \bar{X}$$

$$\sigma^2 = e^{-\frac{1}{2} \frac{1}{3(n-1)^2} - \frac{1}{15(n-1)^2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{1}{3(n-1)^2} - \frac{1}{15(n-1)^2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{1}{3(n-1)^2} - \frac{1}{15(n-1)^2}} c_1$$

3.2. Phase II

3.2.1. The $\ln(S^2)$ Chart

In Phase I, where the process parameters are already known or estimated in Phase I, the process control changes from retrospective to real-time monitoring. The control limits and the central line are determined through

$$UCL_{\ln(S^2)} = \mu_{\ln(S^2)} + k_1\sigma_{\ln(S^2)} - \ln(\sigma^2) - c_2 + k_2\sigma_{\ln(S^2)} - \ln(\sigma^2) + G_2$$

$$CL_{\ln(S^2)} = \mu_{\ln(S^2)} - \ln(\sigma^2) - c_2$$

$$LCL_{\ln(S^2)} = \mu_{\ln(S^2)} - k_2\sigma_{\ln(S^2)} - \ln(\sigma^2) - c_2 - k_1\sigma_{\ln(S^2)} - \ln(\sigma^2) - G_1$$

in which

$$c_2 = \frac{1}{n-1} + \frac{1}{3(n-1)^2} - \frac{2}{15(n-1)^2}$$

Thus, the constants G_1 and G_2 , which depend exclusively on the sample size, are defined by Eq. (18) and (19).

$$G_1 = c_2 + k_2\sigma_{\ln(S^2)} = c_2 + k_2\sqrt{\frac{2}{n-1} + \frac{2}{3(n-1)^2} + \frac{4}{15(n-1)^2}}$$

$$G_2 = -c_2 + k_1\sigma_{\ln(S^2)} = -c_2 + k_1\sqrt{\frac{2}{n-1} + \frac{2}{3(n-1)^2} + \frac{4}{15(n-1)^2}}$$

3.2.2. The \bar{X} Chart

In Phase II of SPC, the process parameters are known or have been estimated in Phase I, so it is possible to monitor the process, with the central line and control limits defined by

9

$$UCL_{\bar{X}} = \mu_0 + 3\sigma_0 - \mu + 3\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} - \mu + A\sigma$$

$$CL_{\bar{X}} = \mu_0 - \mu$$

$$LCL_{\bar{X}} = \mu_0 - 3\sigma_0 - \mu - 3\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} - \mu - A\sigma$$

The constant A depends exclusively on the sample size and is given by $A = 3/\sqrt{n}$.

4. Results

4.1. MATLAB Simulations

In order to study the different distributions of the statistics used to control the process variance, MATLAB® has been chosen. By using MATLAB® it was possible to create functions that allow, through the generation of pseudo-random numbers, to generate the desired statistical distributions, as well as to carry out the simulations of the parameters necessary to compute the constants of the $\ln(S^2)$ chart.

First, MATLAB® was used to study the behaviour of the R and S statistics distributions, so it was necessary to generate these statistics. To this end, two methodologies were developed. The second one, despite presenting similar statistical results, allows a significant reduction of the computational time of data processing, representing an important improvement in comparison to the first algorithm. This improvement happened when using a double entry matrix (sample size and number of samples) instead of a triple entry matrix (sample size, number of samples and number of repetitions). To make this change, the variables "sample size" and "number of repetitions" were grouped into one. In terms of random data generation, this difference does not produce any change, since the number of data generated is the same, thus ensuring that 1 million sample values are used for the simulations. In short, when a triple input matrix is replaced by one double entry matrix, data processing becomes simpler and faster to execute.

The algorithm used for simulating the statistics is illustrated in the form of the flowchart shown in Fig. 3.

10

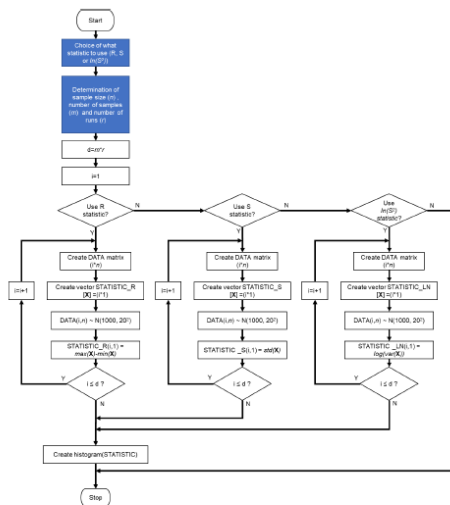


Fig. 3 – Simulation development algorithm

After defining the algorithm, the three functions were written (one for each statistic) to create the simulations. Since sample sizes of $n = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 15, 20, 50\}$ are tested in these simulations, 12 simulations are performed for each statistical distribution, corresponding to 36 repetitions. It is to be noted that the simulation time varies significantly as the sample size increases. For example, 1 million sample values correspond to 2 million random numbers for $n = 2$, while for $n = 50$ it corresponds to 50 million random numbers.

After performing the simulations, the resulting histograms are saved to enable a graphical analysis of the distributions shape, which in turn allow to verify whether the statistical distributions follow a Normal distribution. It is important to note that since the main objective is to visualize the distributions shape this verification is performed empirically, only through visual observation, i.e. without mathematical confirmation.

Finally, in order to compute the values of the constants G_1 , G_2 , G_3 , G_4 , as well as k_1 , k_2 , c_1 , c_2 and A_4 , a variant of the written code is used to create the statistical distributions. In addition to the creation of the histogram, such variant provides information on the central distribution line (average value) as well as the upper and lower limits that guarantee, respectively, the 0.135% and 99.865% percentiles. In Fig. 4 a practical example of this function output is presented, which serves as an input to an EXCEL® file programmed to obtain the values of the

11

constants, through the control limits and the central line. In this example, the simulation was performed for $n = 25$.

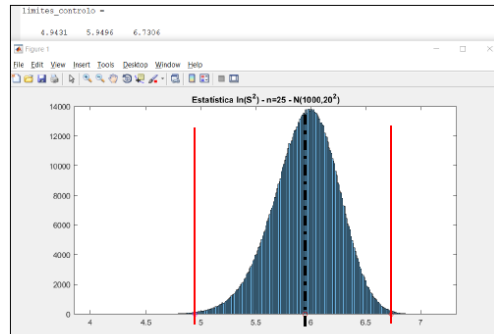


Fig. 4 – Simulation output of the $\ln(S^2)$ chart parameters

As can be seen in Fig. 4, a histogram corresponding to the simulation of statistical distribution $\ln(S^2)$ is presented, accompanied by a matrix on the command line, "control limits = [4.9431; 5.9466; 6.7006]". These correspond respectively to the lower control limit, central line and upper control limit, for sample size equal to 25 and a number of used samples (variable "d" in the diagram shown in Fig. 3) equal to one million.

Fig. D.1 shows the graphical output of one of the simulations. For a more in-depth analysis of the results of each simulation, simulation outputs are presented in Table D.1, covering all the sample sizes tested.

4.2. Constants to design the $\ln(S^2)$ and mean charts

The values of the constants to design the \bar{X} and the $\ln(S^2)$ charts were computed through simulations in MATLAB®. The values of these constants were computed in the ambit of this research and are provided in Table 2.

12

Table 2 - Constants to design the $\ln(S^2)$ and \bar{X} charts

Sample Size (n)	$\ln(S^2)$ CHART						\bar{X} CHART	
	Phase I			Phase II			Phase I	Phase II
	G_{11}	G_{12}	c_1	G_{21}	G_{22}	c_2	A_1	A_2
2	3.597	11.537	1.200	2.397	12.737	3.320	3.866	2.121
3	2.409	6.004	0.575	1.894	6.636	1.777	2.309	1.732
4	2.019	4.238	0.369	1.651	4.607	1.446	1.804	1.500
5	1.704	3.360	0.270	1.464	3.631	1.310	1.536	1.342
6	1.504	2.813	0.213	1.381	3.026	1.238	1.362	1.226
7	1.462	2.504	0.176	1.286	2.679	1.162	1.236	1.154
8	1.363	2.208	0.150	1.213	2.357	1.101	1.143	1.061
9	1.281	2.022	0.130	1.150	2.162	1.159	1.087	1.000
10	1.215	1.884	0.115	1.099	1.979	1.122	1.005	0.949
11	1.159	1.738	0.103	1.056	1.841	1.109	0.952	0.905
12	1.110	1.633	0.094	1.016	1.727	1.098	0.908	0.866
13	1.069	1.546	0.086	0.983	1.631	1.089	0.868	0.832
14	1.029	1.472	0.079	0.950	1.551	1.082	0.834	0.802
15	0.998	1.400	0.073	0.924	1.473	1.076	0.803	0.775
16	0.969	1.337	0.068	0.901	1.405	1.071	0.776	0.750
17	0.936	1.289	0.064	0.872	1.353	1.066	0.751	0.728
18	0.912	1.238	0.060	0.852	1.298	1.062	0.729	0.707
19	0.891	1.200	0.057	0.835	1.257	1.059	0.708	0.689
20	0.868	1.165	0.054	0.813	1.209	1.055	0.689	0.671
21	0.849	1.124	0.051	0.798	1.175	1.052	0.672	0.655
22	0.829	1.094	0.048	0.781	1.142	1.050	0.655	0.640
23	0.812	1.067	0.046	0.766	1.113	1.047	0.640	0.626
24	0.794	1.031	0.044	0.750	1.075	1.045	0.626	0.612
25	0.781	1.007	0.042	0.739	1.049	1.043	0.613	0.600

4.3. Constants to design the \bar{X} and variance control charts

Considering the values of the new constants suggested in Table 2 and the values of the constants already known and used in the Shewhart charts, Table 3 summarizes the constants that should be taken into account in the implementation of the SPC (both in Phase I and Phase II), using any of the possible combinations (\bar{X} chart - R Chart; \bar{X} chart - S Chart; \bar{X} chart - $\ln(S^2)$ Chart).

Table 3 - Constants to design control charts for variables

n	\bar{X} CHART						$\ln(S^2)$ CHART						S CHART						R CHART					
	Phase I			Phase II			Phase I			Phase II			Phase I			Phase II			Phase I			Phase II		
	A_1	A_2	A_3	d_1	d_2	d_3	G_1	G_2	G_3	d_1	d_2	d_3	B_1	B_2	B_3	d_1	d_2	d_3	D_1	D_2	D_3	D_1	D_2	D_3
2	1.121	1.881	2.689	3.866	1.128	3.320	0.798	0.798	1.128	1.128	1.128	1.128	1.200	0	2.696	0.853	0	3.686	0	3.267	0	2.696	0	3.267
3	1.732	1.023	1.894	2.309	1.693	1.777	0.886	0.886	1.693	1.693	1.693	1.693	0	0	2.276	0.886	0	4.388	0	4.388	0	2.276	0	2.276
4	1.500	1.238	1.464	1.536	1.446	1.446	0.952	0.952	1.446	1.446	1.446	1.446	0	0	2.089	0	0	4.918	0	4.918	0	2.089	0	2.089
5	1.342	1.207	1.270	1.342	1.238	1.238	1.023	1.023	1.238	1.238	1.238	1.238	0	0	1.964	0.864	0	5.078	0	5.078	0	1.964	0	1.964
6	1.226	1.083	1.083	1.226	1.083	1.083	1.083	1.083	1.083	1.083	1.083	1.083	0	0	1.876	0.876	0	5.194	0	5.194	0	1.876	0	1.876
7	1.154	1.019	1.019	1.154	1.019	1.019	1.019	1.019	1.019	1.019	1.019	1.019	0	0	1.802	0.802	0	5.284	0	5.284	0	1.802	0	1.802
8	1.081	0.979	0.979	1.081	0.979	0.979	0.979	0.979	0.979	0.979	0.979	0.979	0	0	1.739	0.739	0	5.353	0	5.353	0	1.739	0	1.739
9	1.000	0.937	0.937	1.000	0.937	0.937	0.937	0.937	0.937	0.937	0.937	0.937	0	0	1.683	0.683	0	5.412	0	5.412	0	1.683	0	1.683
10	0.949	0.908	0.908	0.949	0.908	0.908	0.908	0.908	0.908	0.908	0.908	0.908	0	0	1.634	0.634	0	5.462	0	5.462	0	1.634	0	1.634
11	0.895	0.867	0.867	0.895	0.867	0.867	0.867	0.867	0.867	0.867	0.867	0.867	0	0	1.591	0.591	0	5.504	0	5.504	0	1.591	0	1.591
12	0.838	0.808	0.808	0.838	0.808	0.808	0.808	0.808	0.808	0.808	0.808	0.808	0	0	1.554	0.554	0	5.539	0	5.539	0	1.554	0	1.554
13	0.832	0.799	0.799	0.832	0.799	0.799	0.799	0.799	0.799	0.799	0.799	0.799	0	0	1.521	0.521	0	5.568	0	5.568	0	1.521	0	1.521
14	0.802	0.776	0.776	0.802	0.776	0.776	0.776	0.776	0.776	0.776	0.776	0.776	0	0	1.491	0.491	0	5.592	0	5.592	0	1.491	0	1.491
15	0.775	0.752	0.752	0.775	0.752	0.752	0.752	0.752	0.752	0.752	0.752	0.752	0	0	1.464	0.464	0	5.612	0	5.612	0	1.464	0	1.464
16	0.750	0.729	0.729	0.750	0.729	0.729	0.729	0.729	0.729	0.729	0.729	0.729	0	0	1.440	0.440	0	5.629	0	5.629	0	1.440	0	1.440
17	0.729	0.709	0.709	0.729	0.709	0.709	0.709	0.709	0.709	0.709	0.709	0.709	0	0	1.418	0.418	0	5.644	0	5.644	0	1.418	0	1.418
18	0.707	0.694	0.694	0.707	0.694	0.694	0.694	0.694	0.694	0.694	0.694	0.694	0	0	1.398	0.398	0	5.657	0	5.657	0	1.398	0	1.398
19	0.688	0.678	0.678	0.688	0.678	0.678	0.678	0.678	0.678	0.678	0.678	0.678	0	0	1.380	0.380	0	5.668	0	5.668	0	1.380	0	1.380
20	0.671	0.660	0.660	0.671	0.660	0.660	0.660	0.660	0.660	0.660	0.660	0.660	0	0	1.364	0.364	0	5.678	0	5.678	0	1.364	0	1.364
21	0.655	0.643	0.643	0.655	0.643	0.643	0.643	0.643	0.643	0.643	0.643	0.643	0	0	1.349	0.349	0	5.687	0	5.687	0	1.349	0	1.349
22	0.640	0.627	0.627	0.640	0.627	0.627	0.627	0.627	0.627	0.627	0.627	0.627	0	0	1.335	0.335	0	5.695	0	5.695	0	1.335	0	1.335
23	0.626	0.612	0.612	0.626	0.612	0.612	0.612	0.612	0.612	0.612	0.612	0.612	0	0	1.322	0.322	0	5.702	0	5.702	0	1.322	0	1.322
24	0.612	0.601	0.601	0.612	0.601	0.601	0.601	0.601	0.601	0.601	0.601	0.601	0	0	1.310	0.310	0	5.708	0	5.708	0	1.310	0	1.310
25	0.600	0.593	0.593	0.600	0.593	0.593	0.593	0.593	0.593	0.593	0.593	0.593	0	0	1.300	0.300	0	5.714	0	5.714	0	1.300	0	1.300

4.4. Comparative study

The aim of this section is to compare the statistical distributions used in the traditional statistical control of process variance (statistics R and S) with the new approach suggested for the $\ln(S^2)$ chart. To help in this comparison, Fig. 5 presents the statistical distributions of the three statistics being compared, for sample sizes of 5, 10 and 20. These distributions allow to establish a comparative analysis between them (horizontal analysis) as well as their evolution (vertical analysis).

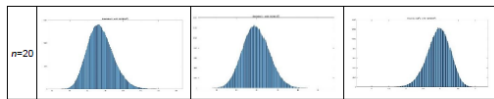
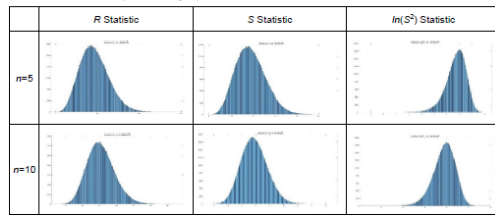


Fig. 5 - Comparative study of R, S and $\ln(S^2)$ statistics, for sample sizes $n = 5, 10, 20$

For small sample sizes ($n = 4, 5, 6$), the non-Normality of R and S statistics is evident, since there is an accentuated tail on the right of their distributions. As a result, considering the principles underlying Shewhart's control charts, the analyses become skewed.

Although the distribution of $\ln(S^2)$ is not also symmetric, and therefore is not Normal, the parameters used to define the control limits of the new $\ln(S^2)$ chart are in accordance with this non-Normality. These arguments allow to state that the $\ln(S^2)$ chart is a good alternative to those used in traditional SPC. It is to note that the effects of non-normality, for the different sample sizes, were considered when performing these simulations in MATLAB®.

5. Application example

In order to compare the performance of the traditional charts used to control the process variance (R and S charts) with the $\ln(S^2)$ chart, several control charts are presented in this section. The data used in the design of these charts were obtained through the generation of random data from Normal distributions, considering different means and variances, and different sample sizes. Some values resulting from the three generated distributions generated (instants 17 and 35 of $N(250; 10^2)$; instant 37 of $N(1000; 20^2)$; instants 17 and 27 of $N(125; 4^2)$) were purposely changed, in order to cause the existence of special causes of variation in the process variability. The purpose of this study is to verify, in practical application scenarios, how those charts behave and how the non-normality of the distributions of R, S and $\ln(S^2)$ statistics can affect their performance.

To conduct this study, three EXCEL® files were created, with data from three Normal distributions - $N(250; 10^2)$, $N(1000; 20^2)$ and $N(125; 4^2)$ - for which R, S and $\ln(S^2)$ control charts were designed. In each chart, 40 sample statistics were used, with sample sizes of $n = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 15, 20, 25\}$.

Fig.s 6-8 show three of these application examples, corresponding respectively to:

- $n = 5$ and $N(250; 10^2)$;
- $n = 10$ and $N(1000; 20^2)$;
- $n = 25$ and $N(125; 4^2)$.

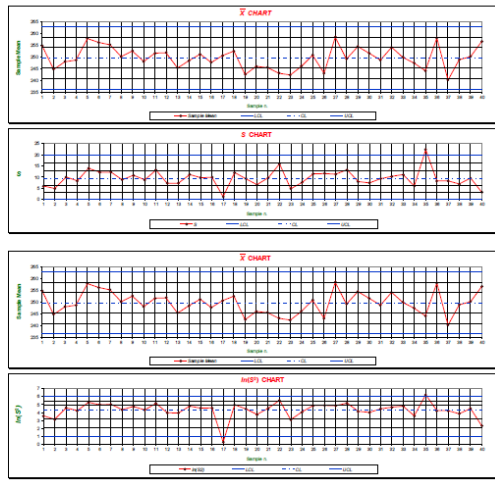
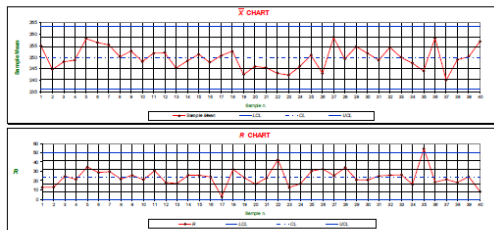
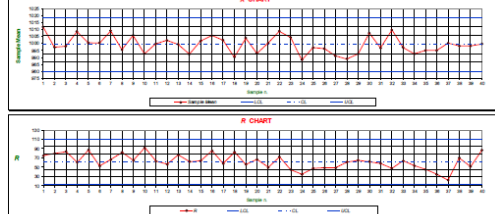


Fig. 6 - \bar{X} , R, S and $\ln(S^2)$ control charts for $n = 5$ and $N(250; 10^2)$



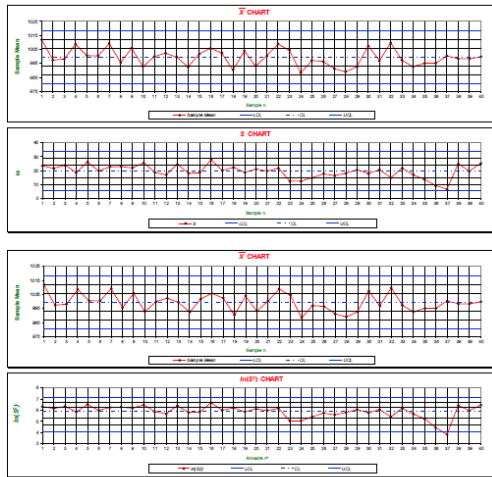


Fig. 7 - \bar{X} , R , S and $\ln(S)$ control charts for $n = 10$ and $N(1000; 20)$

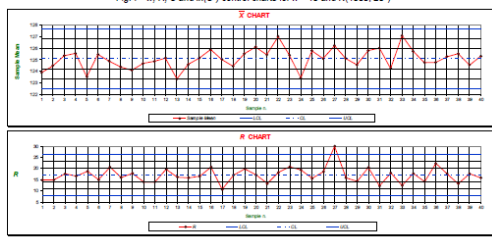


Fig. 8 - \bar{X} , R , S and $\ln(S)$ control charts for $n = 25$ e $N(125; 4)$

As shown in Fig. 6, for a sample size of 5, the \bar{X} control charts show similar results, while in the dispersion charts the $\ln(S)$ chart shows better performance in detecting a special cause of variation related to a decrease in the process variance. Note that there is a decrease in the process variance in instant 17 that is not detected in the R and S charts. The other special cause of variation occurs in instant 36, related to an increase in the process variance. However, such abnormal situation was detected by all the three charts. Regarding the \bar{X} charts, their behaviours were similar in the three application examples, and no special causes of variation were detected.

Regarding the sample size of 10 (Fig. 7), it is visible that the \bar{X} charts show similar results and no special causes of variation were detected, i.e., the process mean is controlled statistically. In relation to the dispersion charts, there is again a better performance of the $\ln(S)$ chart compared to R and S charts, since the $\ln(S)$ chart detects a special cause of variation corresponding to a decrease in the process variance at instant 17, which is not detected by any of the other two charts.

For sample size equal to 20 (Fig. 8), it is visible that the \bar{X} charts show similar results and no special causes of variation were detected. This is in line with the results obtained for other sample sizes and statistical distributions studied. Regarding the process variance, once again, the $\ln(S)$ chart revealed a greater sensitivity in detecting special causes of variation, especially if these are due to a decrease of dispersion. The $\ln(S)$ chart is the unique that detects a special cause of variation due to the decrease of process dispersion at instant 17. On the other hand, the special causes of variation occurred at instant 27, with correspond to an increase of the process variance, were detected in all the three dispersion charts.

Grounded on the analysis of the three application examples presented in Figs 6-8, Table 4 summarizes the instants at which the special causes of variation have been detected in the three dispersion control charts.

Table 4 - Performance comparison between R , S and $\ln(S)$ control charts

Sample Size	Special cause of variation	S Chart	R Chart	$\ln(S^2)$ Chart
5	Increase in process variance	$t = 35$	$t = 35$	$t = 35$
	Decrease in process variance	—	—	$t = 17$
10	Increase in process variance	—	—	—
	Decrease in process variance	—	—	$t = 37$
20	Increase in process variance	$t = 27$	$t = 27$	$t = 27$
	Decrease in process variance	—	—	$t = 17$

As can be seen in Table 4, both for smaller sample sizes (e.g. $n = 5$) and for larger sample sizes (e.g. $n = 25$), the $\ln(S^2)$ chart performs better than the R and S charts as it is able to detect special causes of variation that the other two charts do not detect. For this reason, the $\ln(S^2)$ chart proved to be more sensitive than R and S charts. In addition to this important factor, the $\ln(S^2)$ chart demonstrates a clear advantage in detecting special causes of variation that correspond to decreases of process variance. The rationale for this is that the effect of non-normality of the $\ln(S^2)$ statistic distribution was taken into account in the design of the $\ln(S^2)$ chart, something that did not happen in the design of the R and S charts. Note that, despite the control limits of the $\ln(S^2)$ chart are not symmetric in relation to the central line, they are consistent with the distribution of the $\ln(S^2)$ statistic. As a result, the analyses are not biased and ensuring a more precise means of statistical control.

6. Conclusions

In this research several important aspects of SPC are highlighted. It was demonstrated, through computer simulation, with a large number of data (one million values generated by simulation), that the distributions of R and S statistics are not Normal. Therefore, they are not in accordance with the underlying assumptions of the Shewhart's traditional charts. When R or S charts are used to control the process variance, the analyses and conclusions can be skewed, especially for smaller sample sizes, where, in both cases, the asymmetry of the underlying distribution is more evident.

To overcome this limitation of the R and S charts, it is suggested the implementation of the $\ln(S^2)$ chart. The study of the $\ln(S^2)$ distribution for different sample sizes also reveals its non-Normality. Therefore, in order ensure that the analyses and conclusions are not biased when implementing the $\ln(S^2)$ chart, it was taken into account that the control limits are located according to the percentiles of 0.135% and 99.865%, i.e., the value of the significance levels is 0.27% ($\alpha = 0.27\%$), which is in line with the underlying principles of Shewhart (1931) control charts.

For the implementation of SPC with continuous random variables, using the $\ln(S^2)$ statistic, a new approach is suggested. This consists of the application of the \bar{X} chart to control the process mean and the $\ln(S^2)$ chart to control the process variance. To support the design of these control charts, it is necessary to use specific constants, which were computed in ambit of this research (see Table 2). These constants were determined based on an algorithm developed and implemented in MATLAB®, and by realizing a significative number of simulations.

To prove the greater sensitivity in detecting special causes of variation of the proposed $\ln(S^2)$ chart in relation to the traditional R or S charts, an application example was created. The results obtained with the implementation of these three dispersion control charts reveal that the $\ln(S^2)$ chart presents some advantages over the R or S charts, namely:

- Greater sensitivity to detect a decrease of process variance.

- Greater sensitivity than the R chart to detect an increase of process variance.
- Identical sensitivity to detect an increase of process variance, in relation to S chart.

• While R and S charts, due to the non-symmetry that the distributions of R and S statistics show, do not guarantee a significant level of 0.27%, the $\ln(S^2)$ chart always ensures this significance level ($\alpha = 0.27\%$), regardless of the sample size; although the distribution of the $\ln(S^2)$ statistic is also not symmetrical, the percentiles of 0.135% and 99.865% are considered for the computation of control limits.

Given that the $\ln(S^2)$ chart is more sensitive to detection of process variance decreases, the implementation of \bar{X} and $\ln(S^2)$ charts reveal to be an important factor for improving the quality of production processes, since the decrease of process variance is desirable to improve the consistency of products and services, contributing to increase the competitiveness of companies.

Acknowledgment

Authors acknowledge Fundação para a Ciência e a Tecnologia (FCT - MCTES) for its financial support via the projects UIDB/00687/2020 (UNIDEMI) and UIDB/04108/2020 (CIDMA).

References

- Costa, A., & Fichera, S. (2017). Economic statistical design of ARMA control chart through a Modified Fitness-based Self-Adaptive Differential Evolution. *Computers & Industrial Engineering*, 105, 174-189. <https://doi.org/10.1016/j.cie.2016.12.031>
- Crowder, S. V. & Hamilton, M. D. (1992). An EWMA for Monitoring a Process Standard Deviation. *Journal of Quality Technology*, Vol. 24, n. 1, pp. 12-21, Jan. 1992. doi: 10.1080/00224066.1992.11979369
- Duran-Vilaobos, C. A., Godrick, S., & Lemos, B. (2020). Multivariate statistical process control of an industrial-scale fed-batch simulator. *Computers & Chemical Engineering*, 132, 106620. <https://doi.org/10.1016/j.compchemeng.2019.106620>
- Juran, J. M. (1961). *Quality Control Handbook*. New York, McGraw-Hill.
- Knauer, W. A., Godden, S. M., Dietrich, A., Hawkins, D. M., & James, R. E. (2018). Evaluation of applying statistical process control techniques to daily average feeding behaviors to detect disease in automatically fed group-housed preweaned dairy calves. *Journal of Dairy Science*, 101(9), 8195-8197. <https://doi.org/10.3168/jds.2017-13947>
- Lima-Filho, L. M. A., Pereira, T. L., Souza, T. C., Bayer, F. M. (2019). Inflated Beta Control Chart for Monitoring Double Bounded Processes. *Computers & Industrial Engineering*, Vol. 138, pp. 265-276, Oct. 2019. doi: 10.1016/j.cie.2019.07.017
- Lowther, N. J., Hamilton, D. A., Kim, H., Evans, J. M., Marsh, S. H., & Louwe, R. J. W. (2019). Monitoring anatomical changes of individual patients using statistical process control during head-and-neck radiotherapy. *Physics and Imaging in Radiation Oncology*, 9, 21-27. <https://doi.org/10.1016/j.pho.2016.12.004>
- Mitra, A. (2008). *Fundamentals of Quality Control and Improvement*, 3rd Edition, John Wiley & Sons, New Jersey.
- Montgomery, D. C. (2012). *Introduction to Statistical Quality Control*, 7th Edition, John Wiley & Sons, New York.
- Oakland, J. S. (2003). *Statistical Process Control*. Butterworth Heinemann, Oxford.
- Pacheco, C. (2019). *Determinação de Parâmetros das Cartas de Controlo da Dispersão e Desenvolvimento de Software de Apoio*. Dissertação de Mestrado, Universidade Nova de Lisboa - Faculdade de Ciências e Tecnologia, Alameda - campus da Capicaia.
- Pal, B., Pal, A., Das, S., Palit, S., Sankar, P., Mondal, S., Malik, S., Goswami, J., Das, S., Sen, A., & Mondal, M. (2020). Retrospective study on performance of constancy check device in Linac beam monitoring using Statistical Process Control. *Reports of Practical Oncology & Radiotherapy*, 25(1), 91-99. <https://doi.org/10.1016/j.rpor.2019.12.004>
- Pereira, Z. L. & Requeijo, J. G. (2012). *Qualidade: Planeamento e Controlo Estatístico do Processo (Quality: Process Planning and Statistical Control)*, 2nd Edition, Fundação FCT-UNL, Lisboa (in Portuguese).
- Quisenberry, C. P. (1997). *SPC Methods for Quality Improvement*, John Wiley & Sons, New York.
- Requeijo, J. G., Fuga-Leal, R., & Matos, A. S. (2014). Road Map to the Statistical Process Control. *Proceedings of the Eighth International Conference on Management Science and Engineering Management*. Lisboa, Portugal, pp. 949-958.
- Shewhart, W. A. (1931). *The Economic Control of Quality of Manufactured Products*. Macmillan, London.
- Tóres, A. R., de Oliveira, A. D. P., Grangeiro, S., & Fragozo, W. D. (2016). Multivariate statistical process control in annual pharmaceutical product review. *Journal of Process Control*, 69, 97-102. <https://doi.org/10.1016/j.procon.2016.06.001>
- Weib, C. H., Steiner, D., Jenrich, C., & Teslik, M. C. (2018). Guaranteed Conditional ARL Performance in the Presence of Autocorrelation. *Comput. Stat. Data Anal.*, Vol. 128, pp. 367-379, Dez. 2018. doi: 10.1016/j.csda.2018.07.013.
- Wheeler, D. J. (1995). *Advanced Topics in Statistical Process Control*, 2nd Edition, SPC Press, Tennessee.

Appendix A

Table A.1 – Constants for traditional control charts

n	X Chart						S Chart						R Chart					
	A	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄	A ₅	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	B ₅	B ₆	D ₁	D ₂	D ₃	D ₄		
2	2.121	1.881	2.659	3.865	1.128	3.320	0.788	0	3.267	0	2.606	0.853	0	3.686	0	3.287		
3	1.732	1.023	1.954	2.309	1.693	1.777	0.866	0	2.566	0	2.276	0.868	0	4.356	0	2.975		
4	1.500	0.729	1.628	1.804	2.059	1.446	0.921	0	2.366	0	2.088	0.880	0	4.696	0	2.382		
5	1.342	0.577	1.427	1.536	2.326	1.310	0.940	0	2.099	0	1.964	0.864	0	4.918	0	2.115		
6	1.225	0.483	1.297	1.362	2.534	1.238	0.952	0.030	1.970	0.029	1.874	0.848	0	5.078	0	2.004		
7	1.134	0.419	1.182	1.238	2.704	1.192	0.959	0.118	1.892	0.113	1.806	0.833	0.204	5.204	0.076	1.924		
8	1.061	0.373	1.099	1.143	2.847	1.161	0.965	0.185	1.816	0.179	1.751	0.820	0.388	5.306	0.136	1.864		
9	1.000	0.337	1.032	1.067	2.970	1.139	0.969	0.239	1.761	0.232	1.707	0.808	0.547	5.393	0.184	1.816		
10	0.949	0.308	0.976	1.005	3.078	1.122	0.973	0.284	1.716	0.276	1.669	0.797	0.687	5.469	0.223	1.777		
11	0.908	0.285	0.927	0.952	3.173	1.109	0.975	0.321	1.679	0.313	1.637	0.787	0.811	5.535	0.256	1.744		
12	0.866	0.266	0.886	0.908	3.259	1.099	0.978	0.354	1.646	0.346	1.610	0.778	0.922	5.594	0.283	1.717		
13	0.832	0.249	0.850	0.869	3.336	1.099	0.979	0.382	1.618	0.374	1.586	0.770	1.025	5.647	0.307	1.693		
14	0.802	0.235	0.817	0.834	3.407	1.092	0.981	0.406	1.594	0.399	1.563	0.763	1.118	5.696	0.328	1.672		
15	0.775	0.223	0.789	0.803	3.472	1.076	0.982	0.428	1.572	0.421	1.544	0.756	1.203	5.741	0.347	1.653		
16	0.750	0.212	0.763	0.776	3.532	1.071	0.984	0.448	1.552	0.440	1.526	0.750	1.282	5.782	0.363	1.637		
17	0.728	0.203	0.739	0.751	3.588	1.066	0.985	0.468	1.534	0.458	1.511	0.744	1.356	5.820	0.378	1.622		
18	0.707	0.194	0.718	0.729	3.640	1.062	0.985	0.482	1.518	0.475	1.496	0.739	1.424	5.856	0.391	1.608		
19	0.688	0.187	0.698	0.708	3.689	1.058	0.986	0.497	1.503	0.490	1.483	0.734	1.487	5.891	0.403	1.597		
20	0.671	0.180	0.680	0.689	3.735	1.055	0.987	0.510	1.490	0.504	1.470	0.729	1.549	5.921	0.415	1.585		
21	0.655	0.173	0.663	0.672	3.778	1.052	0.988	0.523	1.477	0.516	1.459	0.724	1.605	5.951	0.425	1.575		
22	0.640	0.167	0.647	0.655	3.819	1.050	0.988	0.534	1.466	0.528	1.448	0.720	1.659	5.979	0.434	1.566		
23	0.626	0.162	0.633	0.640	3.858	1.047	0.989	0.545	1.455	0.539	1.438	0.716	1.710	6.006	0.443	1.557		
24	0.612	0.157	0.619	0.626	3.895	1.045	0.989	0.555	1.445	0.549	1.429	0.712	1.759	6.031	0.451	1.548		
25	0.600	0.153	0.606	0.613	3.931	1.043	0.990	0.565	1.435	0.559	1.420	0.708	1.806	6.056	0.459	1.541		

Appendix B

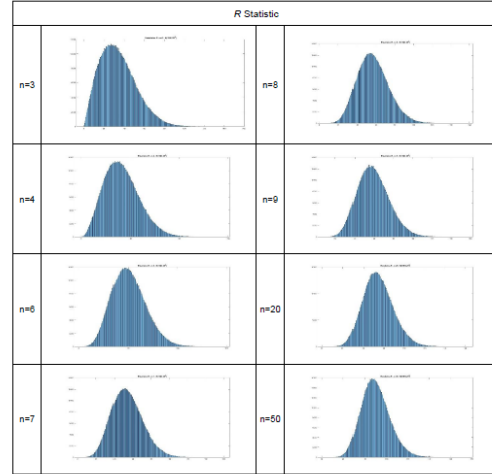


Fig. B.1 – Constants for traditional control charts

Appendix C

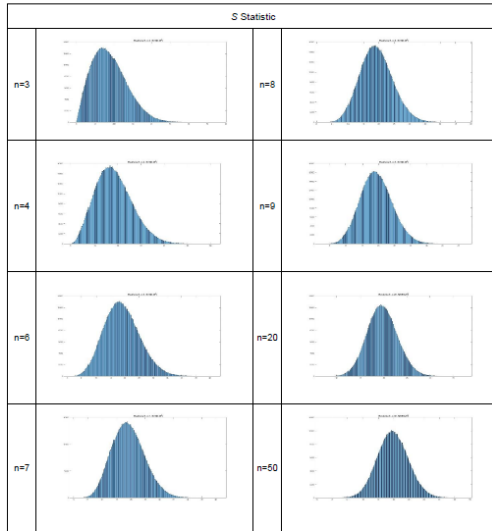


Fig. C.1 – Constants for traditional control charts

Appendix D

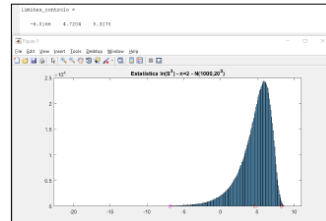


Fig. D.1 – Constants for traditional control charts

Table D.1 – ln(S) Chart Parameters' simulation results

n	LIC	LC	LSC
2	-5.8166	4.7204	8.3176
3	-0.6499	5.4142	7.8827
4	1.3836	5.6218	7.6412
5	2.3595	5.7197	7.4839
6	2.9644	5.7770	7.3713
7	3.3129	5.8165	7.2788
8	3.6342	5.8420	7.2049
9	3.8384	5.8606	7.1411
10	4.0125	5.8763	7.0909
11	4.1502	5.8880	7.0472
12	4.2638	5.8972	7.0071
13	4.3605	5.9061	6.9751
14	4.4405	5.9124	6.9415
15	4.5152	5.9182	6.9157
16	4.5865	5.9233	6.8921
17	4.638	5.9272	6.8627
18	4.6929	5.9312	6.8432
19	4.7344	5.9347	6.8259
20	4.7837	5.9387	6.808
21	4.8166	5.9404	6.7895
22	4.8453	5.9429	6.7718
23	4.8787	5.9453	6.7577
24	4.9167	5.9473	6.7413
25	4.9431	5.9496	6.7306

Anexo G – Artigo “Monitorização da Capacidade do Processo na Fase 2 do SPC – Índices de capacidade I_U e I_L ”

Monitorização da Capacidade do Processo na Fase 2 do SPC – Índices de capacidade I_U e I_L

Iúri Simões¹, José Gomes Requeijo², Irmalido Cabral¹, Helena Alvelos²

¹ UNIDEMI, Departamento de Engenharia Mecânica e Industrial, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa, 2825-16 Caparica, Portugal.
² Center for Research and Development in Mathematics and Applications and Department of Economic, Management, Industrial Engineering and Tourism, University of Aveiro, 3510-103 Aveiro, Portugal.

Abstract

As cartas de controlo permitem verificar se um processo está ou não sob controlo estatístico. No entanto, é ainda necessário verificar se o processo tem capacidade de produzir de acordo com especificações técnicas pré-definidas. Enquanto que para verificar se o processo está sob controlo estatístico se procede à sua monitorização e deteção de causas especiais de variação, para analisar a capacidade do processo é imperioso que o processo apresente unicamente causas comuns de variação. Neste sentido, e visto que a análise da capacidade do processo consiste em comparar a distribuição de uma determinada característica da qualidade com especificações previamente estabelecidas, o estudo da capacidade do processo é um passo muito importante na implementação do controlo estatístico do processo pois pode permitir prever se o processo é capaz de produzir segundo as suas especificações técnicas, analisar o processo de escolha ou modificação de um processo, linha produtiva ou máquina, permite selecionar os melhores fornecedores; ou reduzir a variabilidade do processo. Geralmente, de acordo com o controlo estatístico tradicional, o estudo da capacidade do processo não está bem definido em termos temporais. Este é realizado no final da Fase 1 do SPC (Controlo Estatístico do Processo), como meio de confirmar que o processo pode passar para a Fase 2, mas durante a Fase 2 não é claro quando este estudo de capacidade deve ser realizado. Este estudo surge, na tentativa de resolver esta questão, tendo sido criados índices de capacidade I_U e I_L baseados nos tradicionais C_p e C_{pk} . Com estes desenvolvimentos, pretende-se uniformizar a forma como é realizado o estudo da capacidade do processo, utilizando os índices propostos neste artigo para realizar um estudo de capacidade do processo em tempo real, verificado, em cada instante de que forma o processo evolui. I. e., se continua a ser capaz de produzir segundo a especificação definida e se o processo é centrado em relação ao valor nominal da especificação técnica. Desta forma, quaisquer desvios do processo podem ser detetados de uma forma mais eficaz, prevenindo prejuízos desnecessários para as organizações.

Keywords – Controlo estatístico do Processo (SPC), Índices de Capacidade, Capacidade do Processo, Capacidade do Processo em Tempo Real

1. Introdução

Os engenheiros da qualidade desenvolvem as cartas de controlo com o intuito de controlar estatisticamente um determinado processo. Estas cartas de controlo, apesar de fornecerem muita informação relevante e indispensável ao controlo do processo, demonstram-se ineficazes na identificação da capacidade que o processo tem em produzir consistentemente de acordo com as especificações técnicas definidas.

A capacidade do processo reflete a variação devido às causas comuns de variação, ou seja, um processo pode estar sob controlo estatístico (no sentido em não existem causas especiais de variação), mas a distribuição que caracteriza o processo pode apresentar um valor médio pouco consistente com o valor nominal da especificação e/ou possuir uma variabilidade elevada relativamente às especificações estabelecidas [1], [2]. Assim, é possível ter processos controlados estatisticamente e que estejam a produzir fora dos limites de especificação, ou seja, sem capacidade. Isto significa que uma carta de controlo pode apenas conter causas comuns de variação e apesar disso, não estar a cumprir os requisitos de especificação [2]. A Figura 1 demonstra a influência que a variabilidade tem na capacidade do processo. Supõe-se a aplicação da Norma ISO 7870-2:2013 para verificar a estabilidade do processo, i. e., não ocorrerem quaisquer uma das cinco regras que são referidas nessa Norma.

Se um processo estiver controlado estatisticamente, mas não for capaz de produzir segundo a especificação técnica estabelecida, devem ser aplicadas medidas ajustar o seu valor médio ao valor nominal da especificação e/ou diminuir a variabilidade do processo. Nestes casos, o Desenho de Experiências e os Métodos de Taguchi podem desempenhar um papel fundamental [1].

São vários os fatores que podem influenciar a correta análise da capacidade do processo, como exemplo a independência e a Normalidade dos dados. Torna-se fundamental distinguir duas metodologias a seguir de forma a analisar os dados de forma correta. Neste sentido foram desenvolvidos índices de capacidade para avaliar a capacidade de processos cujos dados seguem distribuições Normais, bem como índices de capacidade para processos não-normais.

Analisando o índice C_{pm} é possível verificar que quanto maior for o desvio da média (μ) relativamente ao valor nominal (T), maior será o valor do denominador, e consequentemente menor o valor global de C_{pm} . Sendo desejável que o valor do índice C_{pm} seja o maior possível e sempre superior a 1, implica a garantia de que o processo tenha uma variabilidade adequada à especificação técnica. A aplicação do índice C_{pm} , com a consequente utilização do desvio da média do processo face ao valor nominal da especificação ($\mu - T$) implica que, para manter um processo capaz de satisfazer a especificação técnica, se consiga adicionalmente a redução da variabilidade do processo.

Por último, surge o índice de terceira geração, C_{pmk} , introduzido por [7]. Este índice calcula-se segundo a equação (6) e é semelhante ao índice C_{pk} , diferenciando-se deste da mesma forma que o C_{pm} se diferencia do C_p , considerando-se o desvio entre a média e o valor nominal da especificação.

$$C_{pmk} = \min((C_{pm})_L, (C_{pmk})_U) \quad (6)$$

em que,

$$(C_{pmk})_L = \frac{LSE - \mu}{3\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}} \quad (7)$$

$$(C_{pmk})_U = \frac{\mu - LSE}{3\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}} \quad (8)$$

Após identificar todos os índices de capacidade, é importante definir critérios de forma a definir se o processo tem ou não a capacidade de produzir produto continuamente dentro de especificação. Vários estudos foram realizados no sentido de definir quais os valores a partir dos quais se pode considerar que um processo tem capacidade. Alguns desses autores são [3], [5], [8]-[11]. Mais recentemente, a introdução da metodologia Seis-Sigma pressupõe uma capacidade igual a 2 no início do estudo [1].

Na Tabela 1 são apresentados os valores mínimos dos índices de capacidade, segundo os estudos de [3], de acordo com o tipo de processo e característica e tipo de especificação.

Tabela 1 – Valores mínimos dos índices de capacidade para processos capazes

	Especificação Bilateral	Especificação Unilateral
Processos existentes	1,33	1,25
Novos Processos	1,50	1,45
Características de Segurança, Resistência ou Críticas em Processos Existentes	1,50	1,45
Características de Segurança, Resistência ou Críticas em Processos Novos	1,67	1,60

2. Proposta para o estudo da Capacidade do processo em tempo real na Fase 2 do SPC

Nas cartas de controlo de *Short Run*, designadamente, cartas Z e Q , a capacidade do processo é estudada em tempo real, através de índices de capacidade desenvolvidos para serem calculados através de estimativas em tempo real dos parâmetros do processo [4].

Considera-se o instante $t = 0$ como o momento temporal em que se estabelece a diferenciação entre a Fase 1 e a Fase 2 do SPC. Nesse instante considera-se que o processo está controlado estatisticamente, são estimados os parâmetros do processo e procede-se ao estudo da capacidade do processo relativamente à especificação técnica. Se o processo for apto, ou seja, se apresentar capacidade, passa-se à Fase 2 do SPC, definindo-se então cartas de controlo com limites de controlo que dependem das estimativas dos parâmetros do processo, definidos na Fase 1. Na Fase 2, o que se propõe é a realização de uma análise em tempo real dos índices de capacidade, utilizando os valores das observações da Fase 2 para realizar uma estimativa mais alargada dos parâmetros do processo e assim podendo controlar instantaneamente o processo e a sua capacidade. Na Tabela 2 é apresentada uma ilustração gráfica da alternativa proposta para estudar a capacidade do processo.



Figura 1 – Influência da variabilidade na capacidade do processo

1.1. Índice de Capacidade do Processo

Assumindo que o processo em estudo pode ser modelado segundo uma distribuição Normal, a análise da capacidade do processo tem como referência uma variação aceitável para o processo (σ_0), assumindo que os dados seguem uma distribuição Normal de média μ e desvio padrão σ . Isto significa que 99,73% dos dados se encontram no intervalo $\mu \pm 3\sigma$ [1], [3].

A análise da capacidade do processo tem vindo a ser estudada e desenvolvida há muitos anos, podendo, atualmente ser consideradas três gerações de índices de capacidade. A primeira geração de índices de capacidade foi desenvolvida em 1974 por Juran [4], tendo sido definido como índice C_p .

O índice C_p é definido, para processos com especificação bilateral por:

$$C_p = \frac{LSE - LIE}{6\sigma} \quad (1)$$

O índice C_p é designado por índice de capacidade potencial, considerando-se, para processos já existentes e com especificação bilateral, $C_p = k$ como um valor aceitável. Habitualmente, para especificações técnicas bilaterais $k = 1,33$. Este índice de primeira geração é apenas aplicável a processos que possuam especificação bilateral.

Além de uma análise cuidada deste índice, é possível verificar que este apenas relaciona a amplitude da especificação ($LSE - LIE$) com a amplitude do processo (6σ), pelo que não informa sobre a localização do processo. Isto significa que o processo pode ter um valor de $C_p > k$ e estar a produzir produto não conforme porque a média do processo não está centrada com o valor nominal (T) da especificação.

Os índices de capacidade de segunda e terceira geração surgiram para complementar o índice de capacidade potencial, considerado não só a dispersão do processo, mas também a média do mesmo. Os índices de segunda geração desenvolvidos correspondem ao C_{pk} e ao C_{pm} .

O índice de segunda geração, C_{pk} , introduzido por [5], é calculado através da equação (2).

$$C_{pk} = \min((C_{pk})_L, (C_{pk})_U) \quad (2)$$

em que,

$$(C_{pk})_L = \frac{LSE - \mu}{3\sigma} \quad (3)$$

$$(C_{pk})_U = \frac{\mu - LIE}{3\sigma} \quad (4)$$

O processo é habitualmente considerado capaz de produzir de acordo com a especificação técnica se $C_{pk} \geq k$. Habitualmente, para especificações bilaterais $k = 1,33$ e para especificações unilaterais $k = 1,25$ [3]. Quanto maior for o valor destes índices, maior é a capacidade de o processo produzir dentro de especificação. O processo diz-se centrado se $C_{pk} = (C_{pk})_U = (C_{pk})_L$.

O índice C_{pm} , desenvolvido por [6], adota um princípio semelhante ao índice C_p , diferenciando-se deste ao considerar no intervalo de tolerância natural do processo o desvio da média relativamente ao valor nominal (T) da característica. Este índice só é possível ser calculado quando a especificação é bilateral. O índice C_{pm} é definido por:

$$C_{pm} = \frac{LSE - LIE}{6\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}} \quad (5)$$

Tabela 2 – Metodologia a aplicar no presente estudo para estudo da capacidade do processo

t	Fase 1					Fase 2				
	$-k-1$	$-k-2$...	-1	0	1	2	...	j	...
\bar{X}	\bar{x}_{k+1}	\bar{x}_{k+2}	...	\bar{x}_1	\bar{x}_0	\bar{x}_1	\bar{x}_2	...	\bar{x}_j	...
R	R_{k+1}	R_{k+2}	...	R_1	R_0	R_1	R_2	...	R_j	...
S	S_{k+1}	S_{k+2}	...	S_1	S_0	S_1	S_2	...	S_j	...
$\ln(S)$	$\ln(S)_{k+1}$	$\ln(S)_{k+2}$...	$\ln(S)_1$	$\ln(S)_0$	$\ln(S)_1$	$\ln(S)_2$...	$\ln(S)_j$...
β	—	—	—	—	β_0	β_1	β_2	...	β_j	...
σ	—	—	—	—	σ_0	σ_1	σ_2	...	σ_j	...
Índices de capacidade	—	—	—	—	$(I_{pk})_0$	$(I_{pk})_1$	$(I_{pk})_2$...	$(I_{pk})_j$...

Como é possível verificar, na Fase 2 do SPC são recalculados os valores dos parâmetros do processo através das estimativas que incluem os valores da Fase 1 (estimativas dos parâmetros do processo que servem de base para a Fase 2) e os valores da Fase 2 até ao instante em que o processo se encontra.

3. Índices de capacidade do processo I_U e I_L

Na presente seção serão abordados os conceitos teóricos dos índices de capacidade que se pretende adotar para controlar a capacidade do processo em cada instante durante a Fase 2 do SPC tradicional. Sugere-se a designação de I_U e I_L para estes dois índices de capacidade do processo a estimar em cada instante da Fase 2 do SPC, sendo I_U o índice de capacidade superior (equivalente ao $(C_{pk})_U$) e I_L o índice de capacidade inferior (equivalente ao $(C_{pk})_L$).

Da mesma forma que *Short Run SPC*, em que os índices de capacidade (Z , Z_i ou Q , Q_i) [1] são definidos em cada instante tendo em conta os limites da especificação e as estimativas da média e do desvio padrão nesse instante, a abordagem que se propõe neste artigo contempla o mesmo princípio. Para o *Short Run SPC*, considera-se que um processo tem capacidade se o valor absoluto calculado para esse índice é maior ou igual a 3 [4].

Na abordagem que se sugere, é necessário identificar os limites de aceitação para os índices de capacidade I_U e I_L . Assim, os desenvolvimentos que se apresentam seguidamente têm por objetivo definir concretamente os valores de referência que permitem afirmar se um processo é ou não capaz de satisfazer a sua especificação técnica.

Os limites de controlo da carta de controlo \bar{X} para a Fase 2 do SPC dados por

$$LSC_{\bar{X}} = \mu + A\sigma$$

$$LIC_{\bar{X}} = \mu - A\sigma \quad (9)$$

A abordagem que se sugere deve considerar os valores numéricos dos limites de controlo definidos pela equação (9) como os limites de aceitação dos índices de capacidade I_U e I_L . Chama-se a atenção que se pretende comparar os valores destes índices com os valores numéricos e não com os limites de controlo da carta \bar{X} .

Assim, desenvolvem-se os seguintes índices, através dos índices de capacidade tradicionais $(C_{pk})_U$ e $(C_{pk})_L$.

Para se considerar um processo capaz é condição necessária que

$$(C_{pk})_U \geq k \quad (10)$$

Procedendo a manipulação matemática adequada, obtém-se para o instante t

$$\frac{LSE - \mu_t}{3\sigma_t} \geq k \quad (11)$$

$$\frac{LSE - \mu_t}{3k\sigma_t} \geq 1 \quad (12)$$

Considerando

$$\frac{LSE - \mu_t}{3k\sigma_t} = U_t \quad (13)$$

obtém-se

$$U_t \geq 1 \quad (14)$$

Tendo em consideração o valor do desvio padrão da distribuição de médias de amostras obtida na Fase 1 do SPC ($(\sigma_{\bar{x}})_0$), obtém-se

$$U_r(\sigma_{\bar{x}})_0 \geq 1 \cdot (\sigma_{\bar{x}})_0 \quad (15)$$

Fazendo $(ref)_{U_r}$ obtém-se

$$\begin{aligned} U_r(\sigma_{\bar{x}})_0 + (ref)_{U_r} &\geq 1 \cdot (\sigma_{\bar{x}})_0 + (ref)_{U_r} \\ LSC_{\bar{x}} + U_r(\sigma_{\bar{x}})_0 &\geq LSC_{\bar{x}} + (\sigma_{\bar{x}})_0 \\ LSC_{\bar{x}} + U_r(\sigma_{\bar{x}})_0 &\geq \mu_0 + 4 \cdot (\sigma_{\bar{x}})_0 \end{aligned} \quad (16)$$

Assim sendo, através deste desenvolvimento, torna-se possível fazer a análise da capacidade do processo, em tempo real, através das seguintes condições:

- Se $U_r > 1$, o processo é considerado capaz;
- Se $U_r < 1$, o processo é considerado não capaz.

Apesar de em termos teóricos não haver problema com a aplicação desta metodologia, o certo é que por forma a ser uma metodologia eficaz, deve ser de utilização prática, bem como de fácil compreensão por parte dos utilizadores. Através da manipulação matemática realizada, torna-se difícil, em termos gráficos visualizar as situações possíveis (processo ser capaz ou não capaz). De forma a resolver este constrangimento, sugere-se a afetação ao primeiro membro da equação (16) de um fator γ (e.g. $\gamma = 2$) que vai facilitar a visualização gráfica, uma vez que valores de γ superiores a 1 irão provocar um afastamento do índice de linha de referência, quer o processo seja ou não capaz.

Desta modificação, surge o índice de capacidade superior que permitirá monitorizar a capacidade do processo em tempo real, denominado de I_U (índice upper), que pode ser definido por

$$I_U = LSC_{\bar{x}} + \gamma \cdot [U_r(\sigma_{\bar{x}})_0] \quad (17)$$

Para que um processo seja considerado capaz é necessário que se verifique a condição

$$I_U \geq \mu_0 + 4 \cdot (\sigma_{\bar{x}})_0 \quad (18)$$

Os mesmos desenvolvimentos foram realizados para o índice de capacidade inferior, com base no índice tradicional (C_{pk}), que resultam nas seguintes equações:

$$\frac{\mu - LSE}{3\sigma} \geq k \quad (19)$$

$$\frac{\mu - LSE}{3\sigma} \geq k \quad (20)$$

$$\frac{\mu - LSE}{3k\sigma} \geq 1 \quad (21)$$

$$\frac{\mu - LSE}{3k\sigma} = L_r \quad (22)$$

$$L_r \geq 1 \quad (23)$$

$$L_r(\sigma_{\bar{x}})_0 \geq 1 \cdot (\sigma_{\bar{x}})_0$$

$$-L_r(\sigma_{\bar{x}})_0 \leq -(\sigma_{\bar{x}})_0$$

$$Se (ref)_{L_r} = LSC_{\bar{x}} + \mu_0 - 3 \cdot (\sigma_{\bar{x}})_0$$

$$LSC_{\bar{x}} - L_r(\sigma_{\bar{x}})_0 \leq LSC_{\bar{x}} - (\sigma_{\bar{x}})_0$$

$$LSC_{\bar{x}} - L_r(\sigma_{\bar{x}})_0 \leq \mu_0 - 4 \cdot (\sigma_{\bar{x}})_0 \quad (24)$$

Assim sendo, através deste desenvolvimento, torna-se possível fazer a análise da capacidade do processo, em tempo real, através das seguintes condições:

- Se $L_r > 1$, o processo é considerado capaz;
- Se $L_r < 1$, o processo é considerado não capaz.

De forma a facilitar a análise gráfica deste índice, sugere-se novamente a afetação na equação (24) do fator γ .

O índice de capacidade resultante destes desenvolvimentos pode definir-se por I_L (índice lower), que pode ser expresso da seguinte forma:

$$I_L = LSC_{\bar{x}} - \gamma \cdot [L_r(\sigma_{\bar{x}})_0] \quad (25)$$

Para que um processo seja considerado capaz é necessário que se verifique a condição

e I_L , i.e., se estes índices se apresentarem na carta \bar{X} aproximadamente à mesma distância da linha central, pode-se afirmar que o processo se encontra centrado com a sua especificação técnica. Caso contrário, infere-se que o processo não está centrado com a especificação.

A escolha mais conveniente da constante γ deve permitir que a representação gráfica dos índices I_U e I_L se afaste suficientemente das linhas que caracterizam os seus valores críticos destes índices (representadas na carta \bar{X} por linhas afastadas da linha central de $4 \cdot (\sigma_{\bar{x}})_0$). Assim, sugere-se a utilização de valores inteiros para a constante γ (e.g. $\gamma = 2$).

$$\gamma = 2, 3, \dots \quad (33)$$

4. Exemplo de aplicação

Nesta secção é apresentado um exemplo de aplicação desta nova metodologia, onde é apresentada a Fase 1 do SPC, onde se irá verificar a estabilidade do processo e realizar a estimação dos parâmetros. Com o final da Fase 1 é possível obter um processo livre de causas especiais de variação, ou, seja, sob controlo estatístico. Desta forma é possível estimar os parâmetros do processo e verificar a capacidade de processo produzindo, de forma consistente, segundo as especificações definidas. Após estes procedimentos, passa-se à Fase 2 do Controlo Estatístico, fase de monitorização do processo, onde se irão implementar as metodologias de controlo da capacidade abordadas nesta dissertação. Desta forma, na Fase 2 são criadas as cartas de controlo para monitorização do processo, onde serão também incluídos os índices de capacidade em tempo real I_U e I_L de forma a verificar se para além de o processo estar estabilizado, se este continua a manter capacidade de produzir segundo a especificação.

Neste exemplo de aplicação, foram utilizadas 50 amostras de dimensão 5 para estimar os parâmetros do processo. São apresentadas, de seguida, as cartas de controlo resultantes da análise deste exemplo.

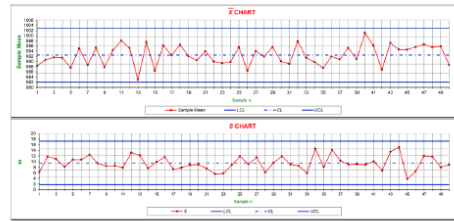


Figura 2 – Exemplo da aplicação da nova metodologia de estudo da capacidade do processo em tempo real (Fase 1)

Após uma análise cuidada da Figura 2, é possível verificar, não existem causas especiais de variação, pelo que podem ser estimados os parâmetros do processo, os quais são apresentados na Tabela 3.

Tabela 3 – Estimação dos parâmetros do processo

	Média	Desvio Padrão
Cartas \bar{X} e S	$\hat{\mu} = \bar{\bar{x}}$	$\hat{\sigma} = \hat{S}/c_4$
	992,456	9,8446

Finalizando a Fase 1 do SPC, é então altura de verificar se o processo tem capacidade de produzir segundo as especificações definidas. Neste processo os limites de especificação considerados aceitáveis para produto conforme, situam-se no intervalo [950; 1050]. Sabendo os limites de especificação e com os parâmetros do processo já estimados, torna-se possível realizar o estudo à capacidade do processo, através dos índices C_p e C_{pk} , calculados através das equações 2.22, 2.23 e 2.24, cujos valores são apresentados na Tabela 4.

$$I_U \leq \mu_0 - 4 \cdot (\sigma_{\bar{x}})_0 \quad (26)$$

O estudo da capacidade do processo tem obrigatoriamente de contemplar a análise dos índices de capacidade resultantes tanto do limite superior como do limite inferior da especificação. Assim, considerando os dois índices de capacidade I_U e I_L , um processo é capaz, em qualquer instante r , desde que obedea às duas condições:

$$(I_U)_r \geq \mu_0 + 4 \cdot (\sigma_{\bar{x}})_0 \quad (27)$$

$$(I_L)_r \leq \mu_0 - 4 \cdot (\sigma_{\bar{x}})_0 \quad (28)$$

Relativamente aos parâmetros μ_r e σ_r , estes são estimados através das equações

$$\hat{\mu}_r = \frac{1}{r} \left((r-1)\bar{X}_{r-1} + \bar{X}_r \right) \quad (29)$$

$$\hat{\sigma}_r = \hat{S}_r / c_4 \text{ ou } \hat{\sigma}_r = \hat{S}_r / c_4 \quad (30)$$

em que

$$\bar{X}_r = \frac{1}{r} \left((r-1)\bar{X}_{r-1} + \bar{X}_r \right) \quad (31)$$

$$\hat{S}_r = \frac{1}{r} \left((r-1)\hat{S}_{r-1} + S_r \right) \quad (32)$$

Uma vez definidos os indicadores a utilizar, passa-se à definição de metodologia de implementação desta técnica de monitorização da capacidade do processo em tempo real, para a qual se sugere a implementação do seguinte procedimento:

1. Considera-se que no final da Fase 1 do SPC, identificado como instante 0, o processo se encontra estabilizado e com capacidade. São estimados os parâmetros do processo através das seguintes estimativas:
 - 1.1. $\hat{\mu}_0 = \bar{\bar{x}}$;
 - 1.2. $\hat{\sigma}_0 = \hat{S}_0 / c_4$ ou $\hat{\sigma}_0 = \hat{S}_0 / c_4$.
2. Determinam-se, com base nos parâmetros do processo estimados, os índices de capacidade C_p e C_{pk} com o objetivo de verificar se o processo é capaz. Caso o processo seja capaz, passa-se ao ponto 3. Caso contrário deve ser suspenso o SPC, estudar a causa da falta de capacidade do processo e implementar medidas corretivas, alterando substancialmente o processo, de forma a garantir que após essas correções o processo apresenta capacidade de acordo com a especificação técnica.
3. Recolher a amostra correspondente ao instante $r = 1$ (primeiro instante r -ésimo instante) e determinar os estatísticos necessários \bar{X}_1 e S_1 ou \hat{S}_1 .
4. Verificar se o processo continua estabilizado, i.e. estar sob controlo estatístico no instante $r = 1$ (r).
5. Estimar os novos valores dos parâmetros do processo, para o instante 1 (r), dados por:
 - 5.1. $\hat{\mu}_1 = \frac{1}{r} \left((r-1)\bar{X}_{r-1} + \bar{X}_r \right)$
 - 5.2. $\hat{\sigma}_1 = \hat{S}_1 / c_4$ ou $\hat{\sigma}_1 = \hat{S}_1 / c_4$
 - 5.2.1. $\bar{X}_r = \frac{1}{r} \left((r-1)\bar{X}_{r-1} + \bar{X}_r \right)$
 - 5.2.2. $S_r = \frac{1}{r} \left((r-1)S_{r-1} + S_r \right)$
6. Estimar os valores dos índices de capacidade I_U e I_L para o instante 1 (r), dados pelas equações (17) e (25);
7. Verificar as condições necessárias para considerar o processo capaz no instante 1 (r), que são definidas pelas equações (27) e (28);
8. Se o processo não apresentar capacidade, no instante 2 ($r=1$), deve suspender-se o SPC, uma vez que o processo revela não ter capacidade de produzir de acordo com a sua especificação técnica, reestudar o processo de fabrico de forma a que se torne robusto e com capacidade; reiniciar o SPC na Fase 1; caso o processo apresente capacidade, seguir os passos 3 a 8, de forma a monitorizar, em tempo real, a capacidade do processo.

Escolha da constante γ

No desenvolvimento dos novos índices de capacidade do processo de I_U e I_L , que se propõem no presente artigo, foi necessário a introdução de uma constante com o intuito de permitir uma melhor visualização gráfica dos valores destes índices face aos seus valores críticos. Esta visualização consiste na comparação com qualquer equivalente dos valores dos índices I_U e I_L , com os seus valores críticos, permitindo assim concluir se um processo apresenta capacidade em tempo real.

Além de se analisar a capacidade do processo, pelo cumprimento das condições referidas nas equações (27) e (28), a introdução da constante γ possibilita uma melhor compreensão relativamente a se um processo está ou não suficientemente centrado com a especificação. Esta melhor compreensão consiste em comparar visualmente os índices de capacidade I_U

Tabela 4 – Índices de capacidade do processo

C_p	1,693
C_{pk}	1,438
$(C_{pk})_S$	1,948
$(C_{pk})_I$	1,438

Uma vez que estamos perante um processo com especificação bilateral, o critério utilizado para garantir a capacidade do processo exige que ambos os índices de capacidade possuam valores superiores a 1,33. Neste caso, C_p e C_{pk} são ambos superiores a esse valor, logo consideram-se um processo capaz. Torna-se, nesta fase, ainda importante salientar que, uma vez que C_p e C_{pk} possuem valores diferentes, este processo não se encontra perfeitamente centrado. Através da análise dos índices $(C_{pk})_S$ e $(C_{pk})_I$ é possível afirmar que a média do processo está descentrada com incidência para o limite inferior de especificação, daí o índice inferior de capacidade apresentar um valor mais baixo. Ainda assim, o processo possui capacidade, condição suficiente para se avançar para a Fase 2 do Controlo Estatístico.

Na Fase 2 do SPC, são recolhidas amostras de dimensão 5 e realiza-se a monitorização do processo, procedendo adicionalmente ao controlo de capacidade através dos índices desenvolvidos na secção anterior desta dissertação. As cartas de controlo desta Fase do SPC são apresentadas na Figura 3.

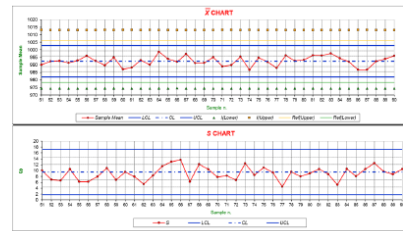


Figura 3 – Exemplo da aplicação da nova metodologia de estudo da capacidade do processo em tempo real (Fase 2)

Como é possível verificar, não existem causas especiais de variação a salientar, pelo que se conclui que o processo se mantém sob controlo estatístico.

Relativamente aos índices de capacidade, é importante salientar algumas conclusões:

- Em primeiro lugar, uma vez que o índice I_U é sempre inferior ao valor de referência inferior ($\mu_0 - 4 \cdot (\sigma_{\bar{x}})_0$) e o índice I_L é sempre superior ao valor de referência superior ($\mu_0 + 4 \cdot (\sigma_{\bar{x}})_0$), podemos concluir que o processo se mantém capaz ao longo da segunda fase do SPC. Se em algum instante um destes pressupostos fosse violado, o processo seria considerado com falta de capacidade, pelo que seria de se investigar a causa desta falta de capacidade, implementar ações corretivas no processo e reiniciar o controlo estatístico do processo.
- Por outro lado, os índices apresentam distâncias distintas dos respetivos valores de referência, verificando-se que o índice I_U apresenta uma maior "folga" relativamente ao valor de referência, logo em relação ao limite superior, este processo é "mais capaz" do que relativamente ao limite inferior, o que vai de encontro ao que já foi exposto nas conclusões tidas sobre a Fase 1 relativamente à média do processo não estar centrada com a especificação imposta. Uma vez que a média tende para o limite inferior de especificação, é natural que o processo seja "menos capaz" aos olhos do índice inferior de capacidade do que do índice superior de capacidade. De qualquer das formas, ambos os índices apresentam valores superiores (no caso do índice superior) e inferiores

(no caso do índice inferior) aos seus limites, pelo que se conclui que o processo se mantém com capacidade durante o período analisado.

5. Conclusões

Através da realização deste estudo é possível retirar várias conclusões importantes. Em primeiro lugar, o estudo da capacidade do processo não possui uma metodologia bem definida e apenas se define o seu estudo como condição necessária para se passar da Fase 1 para a Fase 2 do SPC, sendo que, durante a Fase 2 do SPC não há concordância na literatura acerca de quando se deve realizar o estudo de capacidade.

Históricamente é usado na Fase 2 do SPC o bom senso para definir a periodicidade da análise da capacidade do processo, pelo que muitas das vezes as organizações se esquecem de proceder a esse estudo. Este artigo pretende colmatar este lapso do SPC, criando uma metodologia que permite monitorizar (estudar em tempo real) a capacidade do processo, durante a Fase 2. Para isso foram tidos como base de estudo os índices de capacidade já utilizados no SPC tradicional, com ligeiras alterações para que se adaptassem a situação descrita.

Por forma a tornar a utilização desta metodologia simples e de fácil aplicação, criaram-se dois índices de capacidade, I_c e J_c , baseados nos índices tradicionais (C_{pk}) e (C_{pk}^*), respetivamente, cujos limites de aceitação correspondem a valores idênticos aos dos limites de controlo da carta de controlo \bar{X} , para a Fase 2. Desta forma, é possível adicionar estes índices ao gráfico correspondente a carta de controlo da média, permitindo assim cumulativamente monitorizar o processo através das cartas para controlo (da média e da dispersão), e também monitorizar a capacidade do processo através dos índices de capacidade agora propostos.

Esta metodologia apresenta diversas vantagens relativamente ao estudo de capacidade que se realiza habitualmente, dos quais se destacam:

- Estudo de capacidade em instantes definidos (todos os instantes) ao invés de uma escolha algo randomizada e que varia de caso para caso;
- Ao realizar o estudo de capacidade em tempo real, assim que o processo deixa de ter capacidade de produzir segundo a sua especificação técnica, esta situação é imediatamente detetada, permitindo, não só verificar qual a causa que lhe deu origem e resolvê-la, mas também fazê-lo de forma imediata, minimizando os custos associados à possibilidade de produção não conforme;
- Metodologia de fácil aplicação e simples análise pelos operadores na linha de produção e pelos responsáveis da qualidade devido à componente gráfica e à integração dos índices de capacidade na carta de controlo da média (Fase 2 do SPC); estabelecer os limites de aceitação como definido no presente artigo reforça a simplicidade na análise da metodologia;
- Através da análise gráfica da localização na carta de controlo dos índices de capacidade I_c e J_c é claramente visível se o processo está centrado ou descentrado e, neste último caso, qual a tendência do mesmo.

Agradecimentos

Authors acknowledge Fundação para a Ciência e a Tecnologia (FCT - MCTES) for its financial support via the projects UIDB/00667/2020 (UNIDEM) and UIDB/04106/2020 (CIDMA).

Referências

- [1] Z. L. Pereira e J. G. Raqueto, *Qualidade: Planeamento e Controlo Estatístico de Processos*, 2ª. Lisboa: Fundação FCT-UNL, 2012.
- [2] J. S. Oakland, *Statistical Process Control*, Oxford: Butterworth-Heinemann, 2003.
- [3] D. C. Montgomery, *Introduction to statistical quality control*, Nova Jersey: John Wiley & Sons, 2009.
- [4] J. M. Juran, *Juran on planning for quality*, Nova Iorque: The Free Press, 1988.
- [5] V. E. Kane, «Process Capability Indices», *J. Qual. Technol.*, vol. 18, n. 1, pp. 41–52, Jan. 1986, doi: 10.1080/00234065.1986.11979294.
- [6] G. Taguchi e T. C. Hsiang, «Tutorial on Quality Control and Assurance – The Taguchi Methods» Joint Meetings of the American Statistical Association, 1985.
- [7] W. L. Panu, S. Kotz, e N. L. Johnson, «Distributional and Inferential Properties of Process Capability Indices», *J. Qual. Technol.*, vol. 24, n. 4, pp. 216–231, Out. 1992, doi: 10.1080/00234065.1992.11979403.
- [8] S. Kotz e N. L. Johnson, *Process capability indices*, 1st ed. London, New York: Chapman & Hall, 1993.
- [9] S. E. Somsavilla e D. C. Montgomery, «Process Capability Indices and Non-Normal Distributions», *Qual. Eng. Int.*, vol. 9, n. 2, pp. 305–316, Jan. 1996, doi: 10.1080/0898119608819047.
- [10] F. Spring, B. Leung, S. Cheng, e A. Yeung, «A Bibliography of Process Capability Papers», *Qual. Reliab. Eng. Int.*, vol. 19, n. 4, pp. 445–460, 2003, doi: 10.1002/qre.338.
- [11] S. Kotz e N. L. Johnson, «Process Capability Indices—A Review, 1992–2000», *J. Qual. Technol.*, vol. 34, n. 1, pp. 2–19, Jan. 2002, doi: 10.1080/00234065.2002.11980119.