

Faculdade de Ciências e Tecnologia
Universidade Nova de Lisboa
Departamento de Matemática

Planos em Blocos Incompletos Parcialmente Equilibrados

Vera Susana Rodrigues Mascarenhas

Dissertação apresentada na Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade
Nova de Lisboa para obtenção do grau de Mestre em Estatística e Optimização

Orientador:
Prof.^a Doutora Teresa Paula Costa Azinheira Oliveira

Lisboa 2008

Agradecimentos

Dirijo os meus sinceros agradecimentos a todas as pessoas que de alguma forma me incentivaram e apoiaram, quer a nível científico quer a nível pessoal e sem as quais a realização deste trabalho não teria sido possível. Em particular, agradeço reconhecida:

À Professora Doutora Teresa Oliveira pelo conhecimento científico que partilhou comigo, pela sua disponibilidade e pelas suas imprescindíveis orientações, sem as quais não teria sido possível realizar este trabalho.

Ao Professor Doutor Tiago Mexia pelo seu contagiante entusiasmo pela Matemática, que com as suas aulas me permitiu alargar os meus horizontes estatísticos.

À minha família, em particular aos meus pais, por toda a sua dedicação.

Resumo

Nesta dissertação apresentam-se os resultados do estudo e da investigação dos Planos em Blocos Incompletos Parcialmente Equilibrados (PBIBD) no que concerne à sua estrutura e à análise da informação contida nestes planos. Procurou-se, sempre que possível, ilustrar as descrições teóricas com exemplos.

Seguidamente, procede-se à síntese de cada um dos capítulos:

No capítulo 1, explicitam-se as razões pelas quais estes planos surgiram e fazem-se algumas referências históricas. Introduzem-se ainda os conceitos necessários à compreensão do significado de PBIBD, referem-se aplicações dos mesmos e citam-se alguns trabalhos recentes.

No capítulo 2, apresentam-se as definições de esquema de associação e de PBIBD, esta última com base na primeira. Referem-se as principais propriedades e efectua-se o estudo algébrico dos PBIBD.

No capítulo 3, começa-se por apresentar a análise: intrabloco, interbloco e a combinada intra-interbloco, para o caso geral dos Planos em Blocos Incompleto. Segue-se o estudo da análise do caso particular dos PBIBD e explicita-se com um exemplo.

No capítulo 4, descrevem-se e caracterizam-se os PBIBD para duas, três ou mais classes de associação.

No capítulo 5, abordam-se os PBIBD sob o ponto de vista geométrico e da teoria de grafos, que assume particular destaque nos dias de hoje. Recorre-se ainda à teoria das partições para estudar determinados PBIBD.

No capítulo 6, sintetizam-se as principais ideias desta dissertação e exploram-se eventuais perspectivas de trabalho futuro.

Summary

This dissertation presents the results of the study and the investigation on Partially Balanced Incomplete Blocks Designs (PBIBD) and it focuses on the structure and analysis of the information contained in these designs. It was our concern to illustrate the theoretic descriptions with examples.

Next we will synthesis each chapter:

In chapter 1, it is explained the reasons by which these designs were studied and we do some historical references and developments. We introduce concepts which will allow us to understand the meaning of PBIBD. We also refer applications of PBIBD and quote recent papers.

In chapter 2, association schemes and PBIBD are defined and the most important properties are studied. We also refer PBIBD through an algebraic point.

In chapter 3, we begin presenting the intrablock, interblock and the combined intra-interblock information for the general case of the Incomplete Block Designs. It follows the study of the analysis in the particular case of the PBIBD and we will exemplify it.

In chapter 4, it is described and characterized PBIBD with two, three and more associate classes.

In chapter 5, we study PBIBD under the point of geometrical view, graph theory - which is assuming particular highlight nowadays – and partitions.

In chapter 6, we summarize the main ideas of this dissertation and we explore eventual perspectives of future work.

Simbologia e notações

IBD: Planos em Blocos Incompletos

BIBD: Planos em Blocos Incompletos Equilibrados

PBIBD: Planos em Blocos Incompletos Parcialmente Equilibrados

EGD: Extensão dos planos divisíveis em grupos

v : número de tratamentos ou variedades

b : número de blocos

k : número de unidades experimentais do bloco

r : número de vezes que cada tratamento ocorre

m : número de classes de um esquema de associação

λ_i : número de vezes que cada par de tratamentos se repete

n_i : número de i -ésimos associados

p_{jk}^i : para tratamentos i -ésimos associados, p_{jk}^i representa o número de tratamentos comuns

j -ésimos associados de um tratamento e k -ésimos associados de outro tratamento

$\mathbf{A}_{i \times j}$: matriz \mathbf{A} constituída por i linhas e j colunas,

a_{ij} : elemento da matriz \mathbf{A} que se encontra na intersecção da i -ésima linha com a j -ésima coluna

\mathbf{A}^T : matriz transposta da matriz \mathbf{A}

\mathbf{I} : matriz identidade ($a_{ij} = 1$ se $i = j$, $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$)

\mathbf{J}_n : vector coluna unitário

$\mathbf{J}_{i \times j}$: matriz cujos elementos são 1.

$tr \mathbf{A}$: traço da matriz quadrada ($tr \mathbf{A} = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{ij}$).

$|\mathbf{A}|$: determinante da matriz \mathbf{A}

G : grafo

V : conjunto de vértices

$C_i(\alpha)$: conjunto de classes de associação dos i -ésimos associados do tratamento α

C' : dual de uma classe de associação

ÍNDICE

Capítulo 1:

Introdução aos Planos em Blocos Incompletos Parcialmente Equilibrados	8
1.1 Planos em Blocos	8
1.2 Planos em Blocos Incompletos (Caso Geral)	9
1.3 Planos em Blocos Incompletos Equilibrados	9
1.4 Planos em Blocos Incompletos Parcialmente Equilibrados	10
1.5 Retrospectiva histórica	11
1.6 Abordagens recentes e aplicações dos PBIBD	14

Capítulo 2:

Planos em Blocos Incompletos Parcialmente Equilibrados e Esquemas de Associação ...	16
2.1 Definição de esquema de associação	16
2.2 Planos em Blocos Incompletos Parcialmente Equilibrados (PBIBD) e Esquemas de Associação: relações e exemplos	17
2.2.1 Definição de PBIBD	17
2.2.2 Relações entre os parâmetros de um PBIBD	18
2.2.3 Exemplos	19
2.2.3.1 PBIBD com duas classes de associação	19
2.2.3.2 PBIBD com três classes de associação	23
2.3 Matrizes de associação, resultados e teoremas	24
2.3.1 Introdução e definições	24
2.3.2 Concretização da forma matricial para um PBIBD ($m = 2$)	33

Capítulo 3:

Análise em Planos em Blocos Incompletos Parcialmente Equilibrados	39
3.1 Introdução	39
3.2 Análise intrabloco	40
3.2.1 Análise intrabloco para o caso geral dos PBI	40
3.2.2 Análise intrabloco de um PBIBD com duas classes de associação	46
3.3 Análise interbloco	49
3.3.1 Análise interbloco para o caso geral dos PBI	49
3.4 Análise combinada intra-interbloco	51
3.4.1 Análise combinada intra-interbloco para o caso geral dos PBI	51
3.4.2 Análise combinada intra-interbloco de um PBIBD com duas classes de associação	53
3.4.3 Exemplo da análise de variância de um PBIBD com duas classes de associação	54

Capítulo 4:

Classificação dos PBIBD	62
4.1 Classificação dos PBIBD ($m = 2$)	62
4.1.1 PBIBD ($m = 2$) Divisível em Grupos	62
4.1.2 PBIBD ($m = 2$) Simples	65
4.1.3 PBIBD ($m = 2$) Triangular	65
4.1.4 PBIBD ($m = 2$) Quadrado Latino	68
4.1.5 PBIBD ($m = 2$) Cíclico	72
4.2 Classificação dos PBIBD ($m = 3$)	75
4.2.1 PBIBD ($m = 3$) Rectangular	75
4.2.2 PBIBD ($m = 3$) Divisível em Grupos Generalizados	77

4.2.3 PBIBD ($m = 3$) Triangular	78
4.2.4 PBIBD ($m = 3$) Cúbico	81
4.3 Classificação dos PBIBD ($m > 3$)	84
4.3.1 Extensão dos Planos Divisíveis em Grupos (EGD)	84
4.3.2 Hipercúbico	87
4.3.3 PBIBD($m = 4$) Angular Recto	89
4.4 Considerações	90
 Capítulo 5:	
PBIBD: abordagem geométrica	91
5.1 Introdução	91
5.2 Resultados preliminares da teoria de grafos	91
5.3 Aplicações da teoria de grafos aos PBIBD	94
5.4. Abordagem aos PBIBD com recurso a partições em classes	102
5.5 PBIBD e geometria parcial	108
5.6 Considerações	111
 Capítulo 6:	
Considerações finais e perspectivas futuras de investigação	112
 Referências bibliográficas	 114

Índice de esquemas

Esquema 2.1: PBIBD com duas classes de associação ($v = 6, b = 6, r = 3, k = 3, \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$)	19
Esquema 2.2: PBIBD com três classes de associação ($v = 8, b = 6, r = 3, k = 4, \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 0$)	23
Esquema 3.1: PBIBD com duas classes de associação ($v = 9, b = 9, r = 3, k = 3, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0$)	54
Esquema 3.2: Resultados obtidos na concretização de uma experiência de um PBIBD ($v = 9, b = 9, r = 3, k = 3, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0$)	56
Esquema 4.1: PBIBD divisível em grupos com duas classes de associação ($v = 6, b = 6, r = 3, k = 3, \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$)	64
Esquema 4.2: PBIBD triangular com duas classes de associação ($v = 10, b = 5, r = 2, k = 4, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0$)	67
Esquema 4.3: PBIBD com duas classes de associação ($v = 10, b = 5, r = 2, k = 4, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0$) representação triangular	67
Esquema 4.4: PBIBD com duas classes de associação triangular ($v = 10, b = 5, r = 2, k = 4, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0$), representação com recurso a coordenadas	68
Esquema 4.5: Representação de um PBIBD quadrado latino com duas classes de associação ($v = 9, b = 6, r = 2, k = 3, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0$)	70
Esquema 4.6: Representação de um PBIBD quadrado latino com duas classes de associação	72
Esquema 4.7: Representação de um PBIBD com duas classes de associação cíclico ($v = 5, b = 5, r = 3, k = 3, \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$)	73
Esquema 4.8: Representação de um PBIBD cíclico ($v = 5, b = 5, r = 3, k = 3, \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$), recorrendo a um grafo	75 76
Esquema 4.9: Representação de um PBIBD rectangular com três classes de associação	
Esquema 4.10: Representação de um PBIBD ($m = 3$) divisível em grupos generalizados	77
Esquema 4.11: Representação de um PBIBD ($m = 3$) triangular	80
Esquema 4.12: Representação de um PBIBD ($m = 3$) cúbico	84

Esquema 4.13: Representação de um PBIBD ($m = 4$) angular recto	89
Esquema 5.1: Representação de um PBIBD cíclico ($v = 5, b = 5, r = 3, k = 3, \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$), recorrendo a um grafo	95
Esquema 5.2: Representação, sob a forma de grafo, do PBIBD cúbico ($v = 8, b = 12, r = 3, k = 2, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0$ e $\lambda_3 = 0$) com três classes de associação..	97
Esquema 5.3: Representação, sob a forma de grafo com arestas coloridas, do PBIBD cúbico ($v = 8, b = 12, r = 3, k = 2, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0$ e $\lambda_3 = 0$) com três classes de associação..	98
Esquema 5.4: Representação, sob a forma de grafo com arestas coloridas, do PBIBD cúbico ($v = 8, b = 12, r = 3, k = 2, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0$ e $\lambda_3 = 0$) com três classes de associação, através de um cubo	98
Esquema 5.5: Determinação de $P_{\text{amarelo,preto}}^{\text{vermelho}}$, sob a forma de grafo com arestas coloridas, para o PBIBD cúbico ($v = 8, b = 12, r = 3, k = 2, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0$ e $\lambda_3 = 0$) com três classes de associação, através de um cubo	99
Esquema 5.6.: PBIBD triangular com duas classes de associação: ($v = 10, b = 5, r = 2, k = 4, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0$), representação com recurso ao grafo de Peterson para tratamentos segundos associados	100
Esquema 5.7.: PBIBD triangular com duas classes de associação: ($v = 10, b = 5, r = 2, k = 4, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0$), representação com recurso ao grafo de Peterson para tratamentos primeiros associados	101
Esquema 5.8.: Segundos associados do tratamento 1, num PBIBD triangular com duas classes de associação ($v = 10, b = 5, r = 2, k = 4, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0$), representação com recurso ao grafo de Peterson para tratamentos segundos associados	101
Esquema 5.9.: Primeiros associados do tratamento 1, num PBIBD triangular com duas classes de associação ($v = 10, b = 5, r = 2, k = 4, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0$), representação com recurso ao grafo de Peterson para tratamentos segundos associados	102
Esquema 5.10: Partição em classes de um PBIBD divisível com m classes de associação	103
Esquema 5.11: Partição em classes de um PBIBD divisível em grupos com duas classes	104
Esquema 5.12: Grafo de Peterson	106
Esquema 5.13: Representação de um PBIBD quadrado latino com duas classes de associação ($v = 9, b = 6, r = 2, k = 3, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0$) com recurso à geometria parcial	110

Índice de tabelas

Tabela 2.1: Classes de associação do <i>PBIBD</i> ($v = 6, b = 6, r = 3, k = 3, \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$)	20
Tabela 2.2: Classes de associação do <i>PBIBD</i> ($v = 8, b = 6, r = 3, k = 4, \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 0$)	24
Tabela 3.1: ANOVA intrablocos para os Planos em Blocos Incompletos para o modelo $\mathbf{y} = \mu\mathbf{J}_n + \mathbf{X}_\beta\boldsymbol{\beta} + \mathbf{X}_\tau\boldsymbol{\tau} + \mathbf{e}$	45
Tabela 3.2: ANOVA intrablocos para os Planos em Blocos Incompletos para o modelo $\mathbf{y} = \mu\mathbf{J}_n + \mathbf{X}_\tau\boldsymbol{\tau} + \mathbf{X}_\beta\boldsymbol{\beta} + \mathbf{e}$	46
Tabela 3.3: Classes de associação do <i>PBIBD</i> ($v = 9, b = 9, r = 3, k = 3, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0$)	54
Tabela 3.4: Soma dos efeitos dos tratamentos para cada bloco	57
Tabela 3.5: Soma dos efeitos de cada tratamento	57
Tabela 3.6: Cálculos conducentes à análise intrablocos	57
Tabela 3.7: Estimativas dos efeitos dos tratamentos	58
Tabela 3.8: Análise intrablocos dos resultados obtidos na concretização de uma experiência de um <i>PBIBD</i> ($v = 9, b = 9, r = 3, k = 3, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0$)	59
Tabela 3.9: Cálculos conducentes à análise combinada intra-interblocos	60
Tabela 3.10: Análise combinada intra-interblocos dos resultados obtidos na concretização de uma experiência de um <i>PBIBD</i> ($v = 9, b = 9, r = 3, k = 3, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0$)	61
Tabela 4.1: Classes de associação do <i>PBIBD</i> triangular ($v = 10, b = 5, r = 2, k = 4, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0$)	67
Tabela 4.2: Classes de associação do <i>PBIBD</i> quadrado latino ($v = 9, b = 6, r = 2, k = 3, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0$)	70
Tabela 4.3: Classes de associação do tratamento 1, com recurso a coordenadas, para o <i>PBIBD</i> ($v = 9, b = 6, r = 2, k = 3, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0$) quadrado latino com duas classes de associação	71
Tabela 4.4: Classes de associação do <i>PBIBD</i> quadrado latino com duas classes de associação	72
Tabela 4.5: Classes de associação do <i>PBIBD</i> cíclico ($v = 5, b = 5, r = 3, k = 3, \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$)	74

Tabela 4.6: Classes de associação do PBIBD rectangular ($v = 6$, $m = 2$ e $n = 3$)	76
Tabela 4.7: Classes de associação de um PBIBD ($m = 3$) divisível em grupos generalizados	78
Tabela 4.8: Classes de associação do PBIBD ($m = 3$) triangular	81
Tabela 4.9: Classes de associação do tratamento 1 com recurso a coordenadas para um PBIBD ($m = 3$) cúbico	83
Tabela 4.10: Classes de associação de um PBIBD ($m = 3$) cúbico	83
Tabela 4.11: Classes de associação de um PBIBD EGD	87
Tabela 4.12: Classes de associação de um PBIBD hipercúbico ($m = 4$)	88
Tabela 4.13: Classes de associação de PBIBD angular recto	90
Tabela 5.1: Partição em classes de um esquema com duas classes de associação para primeiros associados	103
Tabela 5.2: Partição em classes de um esquema com duas classes de associação para segundos associados	104
Tabela 5.3: Tabela de partição em classes de um PBIBD divisível em grupos com duas classes	104
Tabela 5.4: Partição em classes de um esquema com três classes de associação para primeiros associados	105
Tabela 5.5: Partição em classes de um esquema com três classes de associação para segundos associados	106
Tabela 5.6: Partição em classes de um esquema com três classes de associação para terceiros associados	106
Tabela 5.7: Tabela incompleta da partição em classes do grafo de Peterson para tratamentos primeiros associados, preenchida apenas pela observação do grafo	107
Tabela 5.8: Partição em classes do grafo de Peterson para tratamentos primeiros associados.....	107
Tabela 5.9: Partição em classes do grafo de Peterson para tratamentos segundos associados.....	107

Capítulo 1

Introdução aos Planos em Blocos Incompletos Parcialmente Equilibrados

1.1 Planos em Blocos

Em experiências agrícolas, a necessidade de comparar todas as variedades ou tratamentos, em condições de homogeneidade, implicou a organização e o planeamento de experiências em unidades experimentais ou parcelas agrupadas em blocos.

Nos Planos em Blocos Completos Casualizados pretende melhorar-se a precisão das estimativas de diferenças entre as médias de determinadas variedades, minimizando a variabilidade dentro de cada bloco e maximizando a variabilidade entre blocos. Considere-se um plano dividido em b blocos e seja ν o número de variedades ou tratamentos do plano. Em cada bloco figura uma observação de cada variedade, sendo aleatória a ordem pela qual a variedade ocorre. Neste tipo de planos cada um dos b blocos encontra-se dividido em k unidades experimentais, com $k = \nu$.

Para dar resposta à dificuldade de concretização de experiências, para as quais não é possível dispor os ν tratamentos em cada bloco, ou seja, quando o número de unidades experimentais em cada bloco é inferior ao número de tratamentos ($k < \nu$), é possível recorrer-se a experiências estruturadas sob a forma de Planos em Blocos Incompletos. Estes planos assumiram um papel relevante no planeamento de experiências e foram introduzidos por Yates (1936a).

Yates (1936b) introduziu os Planos em Blocos Incompletos Equilibrados com o objectivo de resolver situações especiais para as quais as condições de equilíbrio não se verificavam.

1.2 Planos em Blocos Incompletos (Caso Geral)

Os Planos em Blocos Incompletos (IBD: *Incomplete Block Designs*) são um delineamento bastante abrangente dado que não se colocam determinadas restrições: não é necessário que os blocos tenham todos a mesma dimensão nem é preciso que cada variedade se repita o mesmo número de vezes.

Os Planos em Blocos Incompletos são planos onde ocorrem v tratamentos em b blocos de dimensão k , sendo $v > k$.

Considerem-se v tratamentos dispostos em b blocos. Suponha-se que o i -ésimo tratamento ($i = 1, 2, \dots, v$) é testado em r_i parcelas e que o j -ésimo bloco ($j = 1, 2, \dots, b$) contém k_j parcelas. Seja ainda n_{ij} o número de vezes que cada variedade i ocorre no bloco j . Um plano dir-se-á:

1.2.1 Binário se cada variedade ocorre no máximo uma vez em cada bloco, isto é:

$$n_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se a variedade } i \text{ ocorre no bloco } j \\ 0, & \text{se a variedade } i \text{ não ocorre no bloco } j \end{cases};$$

1.2.2 Apropriado se $k_j = k$, qualquer que seja j .

1.2.3 Equirreplicado se $r_i = r$, qualquer que seja i .

1.3 Planos em Blocos Incompletos Equilibrados

Yates (1936b) introduziu os Planos em Blocos Incompletos Equilibrados (BIBD: *Balanced Incomplete Block Designs*) como um caso particular dos Planos em Blocos Incompletos.

Foi sugerido por Yates que, em situações nas quais não é possível ter todos os pares de tratamentos a ocorrer em cada bloco, poderá definir-se um delineamento impondo a seguinte restrição: cada par de tratamentos ocorre simultaneamente em λ blocos, sendo λ uma constante.

Um BIBD é caracterizado por cinco parâmetros não independentes b, v, r, k e λ , que são números inteiros, sujeitos às restrições:

1.3.1 $n = rv = bk$;

1.3.2 $r(k-1) = \lambda(v-1)$;

1.3.3 $b \geq v$ (Desigualdade de Fisher).

Um BIBD é um Plano em Blocos Incompletos binário, apropriado e equirreplicado.

Assim, e de acordo com Oliveira, T. (1999) tem-se a definição de BIBD:

“Os Planos em Blocos Incompletos Equilibrados são planos para v variedades em b blocos, em que cada bloco contém k parcelas, com $k < v$. Cada variedade repete-se r vezes no total dos b blocos e cada par de variedades aparece junto nos diversos blocos λ vezes. Nenhuma variedade ocorre mais do que uma vez no mesmo bloco.”

Em Oliveira, T. (1999) encontra-se também a definição de BIBD resolúvel:

“Quando é possível separar os b blocos em r conjuntos de m blocos cada, $b = mr$, de modo a que cada variedade ocorra apenas uma vez entre os blocos de um dado conjunto e cada conjunto forme uma réplica completa estamos perante um BIBD resolúvel”.

1.4 Planos em Blocos Incompletos Parcialmente Equilibrados

Bose e Nair (1939) definiram pela primeira vez os Planos em Blocos Incompletos Parcialmente Equilibrados (*PBIBD: Partially Balanced Incomplete Block Designs*) como um delineamento constituído por v tratamentos, dispostos em b blocos, de dimensão k em que cada tratamento ocorre em r blocos; quaisquer dois tratamentos são i -ésimos associados e ocorrem simultaneamente em λ_i blocos. O plano $PBIBD(m)$, com m classes de associação fica definido pelos parâmetros $v, b, r, k, \lambda_i, (1 \leq i \leq m)$.

Os PBIBD surgiram da necessidade de dar resposta ao facto de determinadas condições impostas aos parâmetros dos BIBD não serem contempladas ou serem de difícil aplicação. Por exemplo, nos BIBD o requisito de λ ser um número inteiro pode implicar que o número de blocos e a sua dimensão atinjam valores impraticáveis para a realização de uma experiência. Dado que $\lambda = r(k-1)/(v-1)$ (1.3.2), então se $v-1$ for um número primo, r terá de ser um número múltiplo desse primo e terá ainda que se verificar a restrição $b = rv/k$ (1.3.1). Considerando as restrições anteriores, para um plano onde, por exemplo, se pretende aplicar 32 tratamentos, r terá de ser um número múltiplo de 31 e, se por acaso, o número de unidades experimentais for ímpar e primo, b terá de ser múltiplo de 31×32 .

Enquanto que nos BIBD a variância da diferença entre os efeitos dos pares dos tratamentos estimados isto é, $V(\hat{\tau}_h - \hat{\tau}_i)$, tem o mesmo valor para qualquer par de tratamentos (h, i) , nos PBIBD essa propriedade nem sempre se verifica. Por exemplo, para duas classes

de associação, $V(\hat{\tau}_h - \hat{\tau}_i)$ pode tomar dois valores dependendo do facto dos tratamentos serem primeiros ou segundos associados, ou seja, dependendo do número de vezes que ocorrem juntos.

No planeamento de experiências, os Planos em Blocos Completos Casualizados são o delineamento mais usado desde que haja condições para a sua aplicabilidade. Tal como não é lógico usar um IBD em situações nas quais é possível usar um Plano em Blocos Completos, também os BIBD são preferencialmente usados sempre que possível em relação aos PBIBD, devido à sua eficiência superior (Oliveira, T (1999)). Dentro dos PBIBD os planos que mais são usados são os planos divisíveis em grupo para duas classes de associação, dado que constituem a extensão mais simples de um BIBD.

1.5 Retrospectiva histórica

O delineamento experimental ou planeamento de experiências foi inicialmente desenvolvido por Fisher, entre 1919 e 1933, e surgiu da necessidade de analisar e interpretar os valores provenientes de experiências agrícolas. Por isso, ainda hoje, se usam termos e expressões como blocos, parcelas, variedades ou tratamentos, directamente relacionados com a agricultura. Estes estudos expandiram-se e hoje em dia são bastante utilizados na análise de resultados de experiências laboratoriais ou de engenharia e aplicados a áreas diversas como a genética, a medicina e a criptografia. Os livros de autoria de Fisher - *Statistical Methods for Research Workers* (1925) e *The Design of Experiments* (1935) - reflectem as primeiras abordagens e pesquisas na área do delineamento experimental tendo por base os dados provenientes do seu trabalho, desenvolvido no *Rothamsted Experimental Station*.

A partir de 1930 e até 1965 Yates colaborou com Fisher. A partir de dados reais de experiências agrícolas foram realizados trabalhos relevantes em planeamento de experiências, desenvolvendo-se sobretudo a teoria de Planos em Blocos Incompletos e a investigação na área da experimentação factorial.

Apesar do delineamento experimental ter assumido relevância a partir desta altura, outras abordagens, sem uma evidente formalização, foram anteriormente feitas e posteriormente retomadas para expandir a teoria de delineamento experimental e proceder à sua conjugação com a análise combinatória, a teoria de grupos ou a teoria de grafos. Devido a estes factos e numa outra perspectiva, encontra-se em Bailey (2004) a atribuição da origem do

conceito de Planos em Bloco Incompletos Equilibrados aos autores Kirkman (1847) e Steiner (1853) sob o ponto de vista de análise combinatória, e ainda a Carmichael (1937) que designou este delineamento por configurações completas. Este autor definiu os Planos Incompletos Binários Equirreplicados, atribuindo-lhes o nome de configurações táticas, estudo que desenvolveu na continuidade do trabalho de Moore (1896).

Yates (1936a, 1940) definiu os Planos em Blocos Incompletos Equilibrados e estudou a análise intrabloco e interbloco destes planos. Contudo, Yates não se limitou ao estudo destes delineamentos e propôs novos planos tais como os reticulados simples e o delineamento quase-factorial (1936b, 1937b). Uma noção muito importante surgiu também por esta altura – a noção de eficiência de um BIBD.

Relativamente a um BIBD, Fisher (1940) demonstrou que se verifica a condição $b \geq v$ (1.3.3), a qual ficou conhecida por desigualdade de Fisher. Em Oliveira, T. (1999) encontra-se uma abordagem desta demonstração. A estrutura e a construção destes planos começaram por ser estudadas nos artigos de Bose (1939, 1942) e de Fisher (1940). Roy J. (1958) provou que o Plano em Blocos Incompletos mais eficiente é o Plano Equilibrado, caso exista.

Uma abordagem detalhada aos BIBD é apresentada em Oliveira, T. (1994). Nesse trabalho são definidos os IBD e os BIBD, mencionados os teoremas fundamentais, é descrita a análise estatística dos IBD e dos BIBD e são estudados os BIBD com repetições e a sua construção. Os BIBD com repetições permitem simplificar a concretização das experiências e a análise dos resultados obtidos. Note-se que, a definição de BIBD não impõe qualquer restrição relativamente à repetição de blocos, desta forma quando há $b^* < b$ blocos distintos num plano, diz-se que há repetições de blocos.

No seguimento deste trabalho, Oliveira, T. (1999) aprofunda os temas anteriores e são estudados os PBIBD com aplicações à genética. São também apresentados casos particulares de BIBD com blocos repetidos, com diferentes suportes (número de blocos não repetidos no plano) e diferentes estruturas. Exemplos de BIBD com repetições de blocos encontram-se em Oliveira, T. (2004).

Para dar resposta à problemática da rigidez das condições impostas aos BIBD, Bose e Nair (1939) introduziram e desenvolveram os Planos em Blocos Incompletos Parcialmente Equilibrados (PBIBD) e os esquemas de associação. No trabalho destes autores, os esquemas de associação foram introduzidos implicitamente na definição dos PBIBD, mas não foram formalmente definidos. Na primeira definição de PBIBD todos os parâmetros λ_i eram

distintos, contudo Nair e Rao (1942) mostraram que essa restrição era desnecessária. Bose e Nair (1939) defendiam ainda que os contrastes não eram todos estimados com a mesma variância. Posteriormente, Bose e Shimamoto (1952) concluíram também que esta condição não era necessária. Estes autores classificaram ainda os PBIBD para duas classes de associação: divisível em grupos, simples, triangular, quadrados latinos e cíclico.

Bose e Mesner (1959) recorreram à álgebra para desenvolver o seu trabalho em delineamento experimental, dando origem à álgebra hoje conhecida como Álgebra de Bose-Mesner. No entanto, verifica-se que, anteriormente, Connor e Clatworthy (1954) tinham já chegado a resultados interessantes nesta área. Recentemente, Bailey (2004) estudou detalhadamente esta álgebra abordando a partir dela os grafos fortemente regulares com possíveis aplicações aos PBIBD.

Os anos 50 e 60 foram profícuos na descoberta de resultados referentes a esquemas de associação, havendo o objectivo de classificar todos os esquemas de associação e catalogar todos os PBIBD. Por exemplo, nas listas de Bose e Shimamoto (1952) encontram-se novos esquemas de associação. Vartak (1955) introduziu o esquema rectangular com três classes de associação que anteriormente fora estudado por Harshbarger (1946, 1947 e 1949). Roy P. (1953) introduziu os esquemas de associação hierárquicos divisíveis em grupos. Hinkelmann e Kempthorne (1963) reinventaram os esquemas de associação factoriais como uma extensão dos grupos divisíveis, trabalhos posteriormente desenvolvidos por Kusumoto (1967) e Surendran (1968).

John, P. (1966) generalizou os esquemas triangulares, embora esta generalização tenha também sido efectuada independentemente por Bose e Laskar (1967) e por Kusomoto (1965). Kempthorne (1956) retomou o estudo dos factores de eficiência nos Planos em Blocos Incompletos e Pearce (1968) estudou-os nos planos equirreplicados. James e Wilkinson (1971) introduziram os factores de eficiência canónica e os contrastes foram estudados por Pearce *et al* (1974).

Patterson e Williams (1976) introduziram um novo tipo de Planos em Blocos Incompletos: os Planos α . Estes planos podem ser aplicados sempre que o número de tratamentos é múltiplo da dimensão dos blocos, isto é de k , contudo só se aplicam quando os planos são resolúveis. Os Planos α foram descobertos através do recurso a um processo de construção cíclica, tendo uma aplicação bastante ampla. Patterson *et al* (1978) catalogaram os Planos α mais eficientes com 100 tratamentos e 4 réplicas. A partir desta altura, o recurso a algoritmos informáticos permitiu um avanço significativo na geração de planos com factores

de eficiência mais relevantes, não só no que concerne à descoberta de novos Planos α , bem como de todos os outros delineamentos.

Investigação, revisão e sistematização dos PBIBD e dos esquemas de associação aparecem em trabalhos de Bose (1963), Kageyama (1974), P. John (1971) e Raghavarao (1971). No artigo de Clatworthy (1973) encontram-se tabelas de PBID. Os planos cíclicos foram também tabelados em John *et al* (1972) e são um dos principais temas dos livros John (1987) e de John e Williams (1995).

1.6 Abordagens recentes e aplicações dos PBIBD

Hinkelmann e Kempthorne (2005) apresentam uma compilação da análise intrabloc, interbloc e análise combinada intra-interbloc para o caso geral dos IBD, particularizando para os BIBD e PBIBD e sugerindo pontualmente novos procedimentos. Referem ainda métodos para a construção destes blocos. Numa outra perspectiva, Bailey (2004) estuda os esquemas de associação abordando-os sob três pontos de vista - matricial, com recurso a grafos e através de partições – e analisa detalhadamente a álgebra de Bose-Mesner, a partir da qual dedica especial atenção aos grafos fortemente regulares e à sua aplicação aos PBIBD.

Numa perspectiva algébrica e geométrica Sun (2002) obtém novos delineamentos do tipo PBIBD, a partir de anéis finitos, e Bayrak e Gaonery (2002) estudam alguns delineamentos duais dos BIBD e dos PBIBD para além de relacionarem alguns parâmetros entre os IBD e os BIBD, recorrendo a propriedades geométricas. Novos PBIBD resolúveis com três classes de associação são estudados por Varghese e Sharma (2004). Sinha e Sanpei (2006) referem novos processos para a construção de grupos divisíveis e Thannippara *et al* (2007) estudam métodos para a construção de planos hipercúbicos, a partir de planos factoriais simétricos. Bailey (2006) *et al* abordam como o conceito de parcialmente equilibrado pode ser alargado a outros delineamentos. Hensona *et al* (2007) apresentam a construção de novos grupos divisíveis.

Muito recentemente foi publicado o artigo de Bhattacharya (2008) *et al* onde se refere a existência e a construção de PBIBD recorrendo a delineamentos poligonais assim como o artigo de Hurd e Sarvat (2008) onde são introduzidas novas famílias de grupos divisíveis e as condições necessárias e suficientes para assegurar a sua existência.

A aplicabilidade dos PBIBD está longe de se restringir à análise de resultados provenientes de experiências agrícolas. O seu papel nos testes de grupos experimentais é evidenciado no trabalho de Vakil e Parnes (1994) e no trabalho de See *et al* (1997) onde se apresentam aplicações dos PBIBD na amostragem controlada.

O recurso aos PBIBD permite também novas aplicações a outros tipos de delineamento. Na área dos planos de melhoramento vegetal, destacam-se o trabalho de Ghosh e Divecha (1997) no qual esta problemática é estudada com recurso aos PBIBD com duas classes de associação e aos *diallel crosses* parciais e o trabalho de Das *et al* (1998), onde é abordada a optimização dos *diallel crosses* parciais.

Na construção de delineamentos *diallel crosses* com recurso aos PBIBD destacam-se os artigos de: Shama (2000) que propõe o uso dos PBIBD para a construção de delineamentos *diallel crosses* completos e Varghese *et al* (2004) onde é proposto o uso dos PBIBD com três classes de associação para a construção de *diallel crosses* parciais. Salieta-se ainda o trabalho de Oliveira, T. (2002) no qual se apresentam aplicações dos PBIBD e dos BIBD com repetições em delineamentos *diallel crosses*.

Na área das ciências médicas é frequente o recurso aos PBIBD na elaboração das experiências e análise dos resultados. Destacam-se, por exemplo, o estudo de Endres (2006) no qual se pretende estudar o índice tornozelo-braquial medido por três grupos distintos de médicos e o trabalho de Gallagher (2005) onde os PBIBD são um recurso para o estudo das cargas de flexão no dorso e a falha por fadiga dos segmentos de movimentos lombares. Nas ciências médicas veterinárias, refere-se o estudo desenvolvido por Takemura (2003) em que mais uma vez são aplicados PBIBD para a análise do efeito da imunoglobulina G extraída de vacas imunizadas com citrato férrico na captação de ferro pela *Escherichia coli*.

Uma das áreas que recorre ao planeamento de experiências estruturadas sob a forma de PBIBD é a criptografia, com a finalidade de procurar codificar informação em blocos e extrair informações a partir daí, como é apresentado no artigo de Bose, M. e Mukerjee (2006), no qual é explorada relação entre esquemas visuais criptográficos e os PBIBD. Adhikari *et al* (2000) referem que os PBIBD podem ser utilizados para a construção de esquemas visuais de criptografia com imagens a preto e branco e com expansão de pequenos pixels. Ainda dentro desta área, o recurso aos grupos divisíveis possibilitou gerar e armazenar bases de dados com códigos que permitem detectar a autenticidade de imagens, vídeos e cds, através de códigos de barras, tendo a patente deste algoritmo sido registada nos EUA, por Lee (2008).

Capítulo 2

Planos em Blocos Incompletos Parcialmente Equilibrados e Esquemas de Associação

2.1 Definição de esquema de associação

Dados ν tratamentos $1, 2, \dots, \nu$, uma relação diz-se um esquema de associação com m classes de associação se:

- i)* Quaisquer dois tratamentos são 1.º, 2.º, ..., ou m -ésimos associados tal que, se o tratamento α é i -ésimo associado do tratamento β , então o tratamento β é i -ésimo associado do tratamento α ;
- ii)* Qualquer tratamento α tem n_i i -ésimos associados, sendo n_i independente de α ;
- iii)* Sejam α e β dois tratamentos quaisquer i -ésimos associados, então o número de tratamentos j -ésimos associados de α e k -ésimos associados de β é p_{jk}^i , sendo p_{jk}^i independente do par de i -ésimos associados.

Um esquema de associação com m classes é portanto definido pelos parâmetros:

$$\nu, n_i \text{ e } p_{jk}^i, i, j, k = 1, 2, \dots, m.$$

A definição anterior foi formalmente apresentada em Bose e Shimamoto (1952). Mais tarde, Bose e Mesner (1959) mostraram que a condição $p_{jk}^i = p_{kj}^i$, assumida nos primeiros artigos, era redundante na medida em que é uma consequência da definição de esquema de associação. Bose e Clatworthy (1955) mostram que, para duas classes de associação, não é necessário assumir que os parâmetros p_{jk}^i sejam constantes, uma vez que assumindo que n_1, n_2, p_{11}^1 e p_{12}^1 são constantes, as restantes condições advêm automaticamente.

2.2 Planos em Blocos Incompletos Parcialmente Equilibrados (PBIBD) e Esquemas de Associação: relações e exemplos

2.2.1 Definição de PBIBD

Um esquema de associação com m classes, definido pelos respectivos parâmetros, é um Plano em Blocos Incompleto Parcialmente Equilibrado com m classes de associação (PBIBD (m)) se os ν tratamentos estão dispostos em b blocos de dimensão k e $k < \nu$, tal que:

- i)* Cada tratamento ocorre no máximo uma única vez em cada bloco (plano binário) de dimensão k (plano próprio);
- ii)* Cada tratamento ocorre em r blocos (plano equirreplicado);
- iii)* Dois tratamentos α e β i -ésimos associados ocorrem juntos em λ_i blocos, sendo λ_i independente do par de tratamentos i -ésimos associados escolhidos.

Um PBIBD é definido pelos parâmetros $(\nu, b, r, k, \lambda_i)$, $i = 1, 2, \dots, m$. Os parâmetros anteriores são designados por parâmetros de primeira ordem e os parâmetros p_{jk}^i por parâmetros de segunda ordem.

Os parâmetros p_{jk}^i podem ser escritos sob a forma de m matrizes simétricas \mathbf{P}_i , tal que:

$$\mathbf{P}_i = \left[p_{jk}^i \right], \quad i = 1, 2, \dots, m \quad i, j, k = 1, 2, \dots, m$$

e p_{jk}^i representa o termo de ordem (j, k) na matriz \mathbf{P}_i .

Destaca-se que um PBIBD é um esquema de associação, embora um esquema de associação nem sempre determine um PBIBD. Salienta-se ainda que um PBIBD com uma classe de associação é um BIBD e um PBIBD com duas classes de associação, para o qual $\lambda_1 = \lambda_2$, é também um BIBD.

2.2.2 Relações entre os parâmetros de um PBIBD

a) Verifica-se que $\nu r = bk$. (2.1)

b) Para qualquer tratamento α , cada um dos restantes $\nu - 1$ tratamentos é classificado como 1.º, 2.º, ..., ou m -ésimo associado e, como cada tratamento tem n_i i -ésimos associados, então:

$$\sum_{i=1}^m n_i = \nu - 1. \quad (2.2)$$

c) Considerem-se os r blocos nos quais ocorre o tratamento α . A partir desses blocos podem formar-se $r(k-1)$ pares de tratamentos, sendo α um desses tratamentos. Nos pares formados, os i -ésimos associados de α ocorrem λ_i vezes, havendo n_i i -ésimos associados de α , $i = 1, 2, \dots, m$, então:

$$\sum_{i=1}^m n_i \lambda_i = r(k-1). \quad (2.3)$$

d) Sejam α e β tratamentos i -ésimos associados. Para $i \neq j$, verifica-se que

$$\sum_{k=1}^m p_{jk}^i = n_j, \text{ dado que os } k\text{-ésimos associados de } \alpha \text{ abrangem os } n_j \text{ associados de } \beta.$$

Para $i = j$, tem-se que $\sum_{k=1}^m p_{jk}^i = n_j - 1$, dado que os k -ésimos associados de α abrangem os $n_j - 1$ associados de β . Sintetizando:

$$\sum_{k=1}^m p_{jk}^i = n_j - \delta_{ij}, \quad \begin{cases} \delta_{ij} = 1, & i = j \\ \delta_{ij} = 0, & i \neq j \end{cases} \quad (2.4)$$

e) Considere-se o tratamento α . Seja G_i o conjunto dos i -ésimos associados de α e G_j o conjunto dos j -ésimos associados de α . Qualquer tratamento pertencente a G_i tem p_{jk}^i k -ésimos associados em G_j e qualquer tratamento em G_j tem p_{ik}^j k -ésimos associados em G_i . Formando pares de G_i e G_j de k -ésimos associados obtêm-se $n_i p_{jk}^i$ pares e formando pares de G_j e G_i de k -ésimos associados obtêm-se $n_j p_{ik}^j$ pares, logo:

$$n_i p_{jk}^i = n_j p_{ik}^j, \quad i, j, k = 1, 2, \dots, m \quad (2.5)$$

Os parâmetros p_{jk}^i podem ser escritos sob a forma de m matrizes simétricas P_i , tal que: $P_i = [p_{jk}^i]$, $i, j, k = 1, 2, \dots, m$ e p_{jk}^i representa o termo de ordem (j, k) na matriz P_i . Salienta-se ainda, o facto de ser um resultado conhecido que o número de parâmetros p_{jk}^i independentes é $m(m^2 - 1)/6$.

Para um PBIBD com duas classes de associação as relações entre os parâmetros podem ser escritas na forma:

$$n_1 + n_2 = v - 1 \quad (2.6) \qquad p_{11}^2 + p_{12}^2 = n_1 \quad (2.10)$$

$$n_1 \lambda_1 + n_2 \lambda_2 = r(k - 1) \quad (2.7) \qquad p_{21}^2 + p_{22}^2 = n_2 - 1 \quad (2.11)$$

$$p_{11}^1 + p_{12}^1 = n_1 - 1 \quad (2.8) \qquad n_1 p_{12}^1 = n_2 p_{11}^2 \quad (2.12)$$

$$p_{21}^1 + p_{22}^1 = n_2 \quad (2.9) \qquad n_1 p_{22}^1 = n_2 p_{12}^2 \quad (2.13)$$

2.2.3 Exemplos

2.2.3.1 PBIBD com duas classes de associação

Considere-se o PBIB com duas classes de associação ($m = 2$) definido pelos parâmetros: $v = 6$, $b = 6$, $r = 3$, $k = 3$, $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 1$. Este delineamento é constituído pelos tratamentos 1, 2, 3, 4, 5 e 6, dado que ($v = 6$), agrupados em seis blocos ($b = 6$) de dimensão três ($k = 3$), ocorrendo cada tratamento em três blocos ($r = 3$).

B₁ 1 2 3	B₂ 2 5 6	B₃ 3 4 6	B₄ 3 4 5	B₅ 1 2 4	B₆ 1 5 6
-------------------------------	-------------------------------	-------------------------------	-------------------------------	-------------------------------	-------------------------------

Esquema 2.1: PBIBD com duas classes de associação ($v = 6$, $b = 6$, $r = 3$, $k = 3$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$)

O tratamento 1 ocorre nos blocos B_1 , B_5 e B_6 . Tomando por base o tratamento 1 podem formar-se os seguintes pares de tratamentos: (1, 2), (1, 3), (1, 2), (1, 4), (1, 5) e

(1, 6). Como o par (1, 2) ocorre duas vezes, os tratamentos 1 e 2 dizem-se primeiros associados e $\lambda_1 = 2$. Os tratamentos 3, 4, 5, e 6 são segundos associados do tratamento 1, dado que ocorrem uma única vez associados a este tratamento e $\lambda_2 = 1$.

Qualquer que seja o tratamento a considerar, o número de tratamentos seus primeiros associados é um, logo $n_1 = 1$. O número de elementos seus segundos associados é quatro, pelo que $n_2 = 4$.

Sintetizando os resultados, obtêm-se as seguintes classes de associação:

Tratamento	Primeiros associados	Segundos associados
1	2	3, 4, 5, 6
2	1	3, 4, 5, 6
3	4	1, 2, 5, 6
4	3	1, 2, 5, 6
5	6	1, 2, 3, 4
6	5	1, 2, 3, 4

Tabela 2.1: Classes de associação do *PBIBD* ($v = 6, b = 6, r = 3, k = 3, \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$)

Pela definição de esquema de associação alínea *iii*), p_{jk}^i representa o número de tratamentos j -ésimos associados de α e k -ésimos associados de β , sendo α e β dois tratamentos i -ésimos associados, então:

Escolhendo dois tratamentos primeiros associados entre si, tem-se que:

p_{11}^1 : representa o número de tratamentos em comum dos primeiros associados;

p_{12}^1 : representa o número de tratamentos comuns entre os primeiros associados de um dos tratamentos e os segundos associados do outro tratamento.

Escolhendo dois tratamentos segundos associados entre si, tem-se que:

p_{11}^2 : representa o número de tratamentos em comum dos seus primeiros associados;

p_{12}^2 : representa o número de tratamentos comuns entre os primeiros associados de um dos tratamentos e os segundos associados do outro tratamento.

Para exemplificar a determinação dos parâmetros de segunda ordem, escolheu-se como primeiros associados os tratamentos 1 e 2 e como segundos associados os tratamentos 1 e 3. Tem-se, então:

$$p_{11}^1 = \# \{ \{2\} \cap \{1\} \} = 0$$

$$p_{12}^1 = \# \{ \{2\} \cap \{3, 4, 5, 6\} \} = 0$$

$$p_{21}^1 = \# \{ \{3, 4, 5, 6\} \cap \{1\} \} = 0$$

$$p_{22}^1 = \# \{ \{3, 4, 5, 6\} \cap \{3, 4, 5, 6\} \} = 4$$

$$p_{11}^2 = \# \{ \{2\} \cap \{4\} \} = 0$$

$$p_{12}^2 = \# \{ \{2\} \cap \{1, 2, 5, 6\} \} = 1$$

$$p_{21}^2 = \# \{ \{3, 4, 5, 6\} \cap \{4\} \} = 1$$

$$p_{22}^2 = \# \{ \{3, 4, 5, 6\} \cap \{1, 2, 5, 6\} \} = 2$$

Como os parâmetros p_{jk}^i podem ser escritos sob a forma de m matrizes simétricas \mathbf{P}_i ,

vem:
$$\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} p_{11}^1 & p_{12}^1 \\ p_{21}^1 & p_{22}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} p_{11}^2 & p_{12}^2 \\ p_{21}^2 & p_{22}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Seguidamente, procede-se à verificação das relações entre os parâmetros, deste PBIBD em particular:

a) Cada um dos ν ($\nu = 6$) tratamentos ocorre r ($r = 3$) vezes, então o produto νr é igual ao número total de observações. Como existem b ($b = 6$) blocos, cada um de dimensão k ($k = 3$), então o produto bk é igual ao número total de observações. Logo, $\nu r = bk$.

b) Seja α o tratamento 1. Cada um dos restantes $\nu - 1$ ($\nu - 1 = 5$) tratamentos é primeiro ou segundo associado deste. O tratamento 2 é primeiro associado do tratamento 1 e $n_1 = 1$; os tratamentos 3, 4, 5 e 6 são segundos associados do tratamento 1 portanto $n_2 = 4$, então $\sum_{i=1}^2 n_i = n_1 + n_2 = \nu - 1 \Rightarrow 1 + 4 = 6 - 1 \Leftrightarrow 5 = 5$.

c) Considerem-se os r ($r = 3$) blocos nos quais ocorre o tratamento 2. A partir destes blocos podem formar-se $r(k - 1)$ pares de tratamentos, isto é, 6 pares de tratamentos nos quais ocorre o tratamento 2 e são eles: (2, 1), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (2, 5) e (2, 6). Por

outro lado, nos pares formados o primeiro associado do tratamento 2 é apenas o tratamento 1 ($n_1 = 1$) que ocorre duas vezes ($\lambda_1 = 2$), daí que $n_1 \lambda_1 = 2$.

Os quatro tratamentos segundos associados ($n_2 = 4$) ocorrem uma vez nos 6 pares de tratamentos de onde consta o tratamento 2, daí que $\lambda_2 = 1$ e $n_2 \lambda_2 = 4$. Então:

$$\sum_{i=1}^m n_i \lambda_i = n_1 \lambda_1 + n_2 \lambda_2 = 6.$$

d) Sejam α e β os tratamentos 1 e 3 segundos associados ($i = 2$).

➤ Para $i \neq j \Rightarrow j = 1$: Os primeiros associados do tratamento 1 (que é somente o tratamento 2) juntamente com os seus segundos associados, isto é, $\{2, 3, 4, 5, 6\}$ contêm os n_1 ($n_1 = 1$) primeiros associados do tratamento 3. Por outro lado,

$$p_{11}^2 = \# \{ \{4\} \cap \{2\} \} = 0 \text{ e } p_{12}^2 = \# \{ \{4\} \cap \{3, 4, 5, 6\} \} = 1;$$

$$\begin{aligned} p_{11}^2 + p_{12}^2 &= \# [(\{4\} \cap \{2\}) \cup (\{4\} \cap \{3, 4, 5, 6\})] = \# [\{4\} \cap (\{2\} \cup \{3, 4, 5, 6\})] = \\ &= \# [\{4\} \cap \{2, 3, 4, 5, 6\}] = 1. \end{aligned}$$

Como $i \neq j \Rightarrow \delta_{ij} = 0$, então $\sum_{k=1}^m p_{1k}^2 = p_{11}^2 + p_{12}^2 = n_1$, como se pretendia verificar.

➤ Para $i = j \Rightarrow j = 2$: Os primeiros associados do tratamento 1 juntamente com os seus segundos associados ($\{2, 3, 4, 5, 6\}$) contêm $n_2 - 1$ ($n_2 - 1 = 3$) segundos associados do tratamento 3. Por outro lado,

$$p_{21}^2 = \# \{ \{1, 2, 5, 6\} \cap \{2\} \} = 1 \text{ e } p_{22}^2 = \# \{ \{1, 2, 5, 6\} \cap \{3, 4, 5, 6\} \} = 2.$$

$$p_{21}^2 + p_{22}^2 = \# [(\{1, 2, 5, 6\} \cap \{2\}) \cup (\{1, 2, 5, 6\} \cap \{3, 4, 5, 6\})] = 3$$

Como para $i = j \Rightarrow \delta_{ij} = 1$, então $\sum_{k=1}^m p_{2k}^2 = p_{21}^2 + p_{22}^2 = n_2 - 1 = 3$.

e) Seja α o tratamento 2; seja ainda $j = 1$ tal que G_1 representa o conjunto dos primeiros associados do tratamento 2, isto é, $G_1 = \{1\}$ e seja $i = 2$ tal que G_2 representa o conjunto dos segundos associados do tratamento 2, isto é, $G_2 = \{3, 4, 5, 6\}$.

O tratamento $3 \in G_2$ tem $p_{11}^2 = 0$ primeiros associados em G_1 e o tratamento $1 \in G_1$ tem $p_{21}^1 = 0$ primeiros associados em G_2 .

Note-se que se seleccionou o tratamento 3, mas poder-se-ia ter optado por outros três tratamentos porque $n_2 = 4$. Relativamente ao tratamento 1, apenas havia uma opção dado que $n_1 = 1$. Seria então possível formar 4 pares logo $n_2 p_{11}^2 = n_1 p_{21}^1$.

O tratamento $3 \in G_2$ tem apenas um tratamento ($p_{12}^2 = 1$) segundo associado em G_1 e o tratamento $1 \in G_1$ tem $p_{22}^1 = 4$ tratamentos segundos associados em G_2 . Como $n_2 = 4$ e $n_1 = 1$ então $n_2 p_{12}^2 = n_1 p_{22}^1$.

2.2.3.2 PBIBD com três classes de associação

Em seguida, concretiza-se a exemplificação para um PBIBD com três classes de associação. Considere-se então o PBIB ($m = 3$), definido pelos parâmetros:

$$v = 8, b = 6, r = 3, k = 4, \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1 \text{ e } \lambda_3 = 0 \text{ e } n_1 = 3, n_2 = 3 \text{ e } n_3 = 1,$$

que pode ser apresentado da seguinte forma esquemática:

Bloco 1 1 2 3 4	Bloco 2 1 2 5 6	Bloco 3 1 3 5 7
Bloco 4 2 4 6 8	Bloco 5 3 4 7 8	Bloco 6 5 6 7 8

Esquema 2.2: PBIBD com três classes de associação ($v = 8, b = 6, r = 3, k = 4, \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 0$)

Na tabela seguinte irá considerar-se que qualquer tratamento é zero-ésimo associado de si próprio:

Zero-ésimos associados	1. ^{os} associados	2. ^{os} associados	3. ^{os} associados
1	2, 3, 5	4, 6, 7	8
2	1, 4, 6	3, 5, 8	7
3	1, 4, 7	2, 5, 8	6
4	2, 3, 8	1, 6, 7	5
5	1, 6, 7	2, 3, 8	4
6	2, 5, 8	1, 4, 7	3
7	3, 5, 8	1, 4, 6	2
8	4, 6, 7	2, 3, 5	1

Tabela 2.2: Classes de associação do *PBIBD* ($v = 8, b = 6, r = 3, k = 4, \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 0$)

Os parâmetros de segunda ordem $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$ e \mathbf{P}_3 são:

$$\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} p_{11}^1 & p_{12}^1 & p_{13}^1 \\ p_{21}^1 & p_{22}^1 & p_{23}^1 \\ p_{31}^1 & p_{32}^1 & p_{33}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} p_{11}^2 & p_{12}^2 & p_{13}^2 \\ p_{21}^2 & p_{22}^2 & p_{23}^2 \\ p_{31}^2 & p_{32}^2 & p_{33}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_3 = \begin{bmatrix} p_{11}^3 & p_{12}^3 & p_{13}^3 \\ p_{21}^3 & p_{22}^3 & p_{23}^3 \\ p_{31}^3 & p_{32}^3 & p_{33}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.3 Matrizes de associação, resultados e teoremas

2.3.1 Introdução e definições

Considerem-se m matrizes $\mathbf{B}_i (v \times v)$ tal que $\mathbf{B}_i = [b_{\alpha\beta}^i]$, para $i = 1, 2, \dots, m$ e

$$b_{\alpha\beta}^i = \begin{cases} 1, & \alpha \text{ e } \beta \text{ } i\text{-ésimos associados} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

As matrizes $\mathbf{B}_i, i = 1, 2, \dots, m$ são simétricas e os totais de cada linha e coluna são iguais a n_i .

Considere-se ainda que cada símbolo é zero-ésimo associado de si próprio, então:

$$\mathbf{B}_0 = \mathbf{I}_v \quad (2.14)$$

$$n_0 = 1 \quad (2.15)$$

$$p_{ij}^0 = n_i \delta_{ij} \quad (2.16)$$

$$p_{0k}^i = \delta_{ik} \quad (2.17)$$

$$\lambda_0 = r \quad (2.18)$$

e as relações entre os parâmetros do PBIBD podem ser escritas da seguinte forma:

$$\sum_{i=0}^m n_i = v \quad (2.19)$$

$$\sum_{i=0}^m n_i \lambda_i = rk \quad (2.20)$$

$$\sum_{k=0}^m p_{jk}^i = n_j \quad (2.21)$$

$$n_i p_{jk}^i = n_j p_{ik}^j \quad (2.22)$$

Usando esta notação os parâmetros de segunda ordem podem ser escritos na matriz $\mathbf{P}_i = [p_{jk}^i]$, $i, j, k = 0, 1, \dots, m$ de ordem $(m+1) \times (m+1)$.

As matrizes $\mathbf{B}_0, \mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_m$ designam-se por matrizes de associação do esquema de associação. Dados dois tratamentos α e β , os tratamentos são $0, 1, \dots, ou m$ -ésimos associados, sendo os elementos da matrizes $\mathbf{B}_0, \mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_m$ representados por $b_{\alpha\beta}^0, b_{\alpha\beta}^1, \dots, b_{\alpha\beta}^m$. Portanto, apenas um dos elementos $b_{\alpha\beta}^0, b_{\alpha\beta}^1, \dots, b_{\alpha\beta}^m$ é igual à unidade e então:

$$\sum_{i=0}^m \mathbf{B}_i = \mathbf{J}_{v,v} = \mathbf{J}_v \mathbf{J}_v^T \quad (2.23)$$

$$\text{e } \sum_{i=0}^m c_i \mathbf{B}_i = \mathbf{O}_{v,v} \text{ se e só se } c_0 = c_1 = \dots = c_m = 0.$$

Dado que cada tratamento tem n_i i -ésimos associados então

$$\mathbf{B}_i \mathbf{J}_{v \times v} = n_i \mathbf{J}_{v \times v}. \quad (2.24)$$

Bose e Mesner (1959) mostraram que as funções lineares $\mathbf{B}_0, \mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_m$ formam um espaço vectorial com base $\mathbf{B}_0, \mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_m$, de dimensão $m+1$ e que o conjunto das funções lineares $\mathbf{B}_0, \mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_m$ é um anel com elemento unidade.

Considere-se a matriz $\mathbf{B}_j \mathbf{B}_k$, em que o elemento correspondente à linha α e à coluna β representa o número de tratamentos comuns aos j -ésimos associados do tratamento α e aos k -ésimos associados do tratamento β . Sendo α e β i -ésimos associados então

$$\mathbf{B}_j \mathbf{B}_k = \sum_{i=0}^m p_{jk}^i \mathbf{B}_i, \quad j, k = 0, 1, \dots, m. \quad (2.25)$$

e desta forma a multiplicação é fechada para o conjunto das funções lineares .

Como as matrizes \mathbf{B}_i são simétricas, vem que:

$$\mathbf{B}_k \mathbf{B}_j = \mathbf{B}_k^T \mathbf{B}_j^T = (\mathbf{B}_j \mathbf{B}_k)^T = \left(\sum_{i=0}^m p_{jk}^i \mathbf{B}_i \right)^T = \sum_{i=0}^m p_{jk}^i \mathbf{B}_i^T = \sum_{i=0}^m p_{jk}^i \mathbf{B}_i = \mathbf{B}_j \mathbf{B}_k$$

e sendo a multiplicação das matrizes \mathbf{B}_i comutativa:

$$\mathbf{B}_k \mathbf{B}_j = \mathbf{B}_j \mathbf{B}_k, \quad (2.26)$$

$$\text{e consequentemente } p_{jk}^i = p_{kj}^i. \quad (2.27)$$

Como a multiplicação de matrizes goza da associatividade, ou seja, $\mathbf{B}_i (\mathbf{B}_j \mathbf{B}_k) = (\mathbf{B}_i \mathbf{B}_j) \mathbf{B}_k$, podemos simplificar as expressões

$$\mathbf{B}_i (\mathbf{B}_j \mathbf{B}_k) = \mathbf{B}_i \sum_{u=0}^m p_{jk}^u \mathbf{B}_u = \sum_{u=0}^m p_{jk}^u \mathbf{B}_i \mathbf{B}_u = \sum_{u=0}^m \sum_{t=0}^m p_{jk}^u p_{iu}^t \mathbf{B}_t \quad \text{e}$$

$$(\mathbf{B}_i \mathbf{B}_j) \mathbf{B}_k = \left(\sum_{u=0}^m p_{ij}^u \mathbf{B}_u \right) \mathbf{B}_k = \sum_{u=0}^m p_{ij}^u \mathbf{B}_u \mathbf{B}_k = \sum_{u=0}^m \sum_{t=0}^m p_{ij}^u p_{uk}^t \mathbf{B}_t.$$

Uma vez que $\mathbf{B}_0, \mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_m$ são independentes, então

$$\sum_{u=0}^m p_{jk}^u p_{iu}^t = \sum_{u=0}^m p_{ij}^u p_{uk}^t. \quad (2.28)$$

Considere-se a matriz de incidência $\mathbf{N} = [n_{ij}]$, $v \times b$, tal que n_{ij} representa o número de vezes que cada variedade i ocorre no bloco j .

Seja \mathbf{N} a matriz de incidência de um PBIBD com m classes de associação em que cada coluna é constituída por k uns e os restantes elementos são zero. Ao multiplicar-se a matriz $\mathbf{J}_{v \times v}$ pela matriz $\mathbf{N}_{v \times b}$ irá obter-se k vezes a matriz $\mathbf{J}_{v \times b}$, ou seja:

$$\mathbf{J}_{v \times v} \mathbf{N}_{v \times b} = k \mathbf{J}_{v \times b} \quad (2.29)$$

De uma forma análoga, dado que cada tratamento ocorre em r blocos e a matriz de incidência é constituída por r uns por linha e os restantes elementos são zero, então:

$$\mathbf{N}_{v \times b} \mathbf{J}_{b \times b} = r \mathbf{J}_{v \times b} \quad (2.30)$$

A célula (i, j) da matriz $\mathbf{N}\mathbf{N}^T$ representa o número de vezes que os tratamentos i e j aparecem juntos no mesmo bloco, isto é: o número será r se $i = j$ e será λ_i se forem i -ésimos associados. Então, $\mathbf{N}\mathbf{N}^T$ pode ser escrita na forma $\lambda_1 \mathbf{B}_1 + \lambda_2 \mathbf{B}_2 + \dots + \lambda_m \mathbf{B}_m + r \mathbf{I}$, ou seja:

$$\mathbf{N}\mathbf{N}^T = r \mathbf{I} + \sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{B}_i. \quad (2.31)$$

Verificam-se ainda as seguintes igualdades:

$$\mathbf{J}_{v \times v} \mathbf{J}_{v \times b} = v \mathbf{J}_{v \times b} \quad (2.32)$$

$$\mathbf{J}_{v \times b} \mathbf{J}_{b \times b} = b \mathbf{J}_{v \times b} \quad (2.33)$$

$$\mathbf{N}_{b \times v}^T \mathbf{J}_{v \times v} = k \mathbf{J}_{b \times v} \quad (2.34)$$

As igualdades apresentadas anteriormente revelam-se bastante úteis na demonstração dos seguintes resultados anteriormente referidos em (2.1), (2.2), (2.3) e (2.4):

Atendendo a que, $\mathbf{J}_{v \times v} (\mathbf{N}_{v \times b} \mathbf{J}_{b \times b}) = \mathbf{J}_{v \times v} r \mathbf{J}_{v \times b} = r \mathbf{J}_{v \times v} \mathbf{J}_{v \times b} = r v \mathbf{J}_{v \times b}$ e a que

$$(\mathbf{J}_{v \times v} \mathbf{N}_{v \times b}) \mathbf{J}_{b \times b} = k \mathbf{J}_{v \times b} \mathbf{J}_{b \times b} = k b \mathbf{J}_{v \times b},$$

como $\mathbf{J}_{v \times v} (\mathbf{N}_{v \times b} \mathbf{J}_{b \times b}) = (\mathbf{J}_{v \times v} \mathbf{N}_{v \times b}) \mathbf{J}_{b \times b}$ então pode escrever-se:

$$r v \mathbf{J}_{v \times b} = k b \mathbf{J}_{v \times b} \text{ e } vr = bk.$$

Note-se que, $\sum_{i=1}^m \mathbf{B}_i = \sum_{i=0}^m \mathbf{B}_i - \mathbf{B}_0 = \mathbf{J}_{v \times v} - \mathbf{B}_0 = \mathbf{J}_{v \times v} - \mathbf{I}_{v \times v}$. Então:

$$\left(\sum_{i=1}^m \mathbf{B}_i \right) \mathbf{J}_{v \times v} = (\mathbf{J}_{v \times v} - \mathbf{I}_{v \times v}) \mathbf{J}_{v \times v} = \mathbf{J}_{v \times v} \mathbf{J}_{v \times v} - \mathbf{I}_{v \times v} \mathbf{J}_{v \times v} = v \mathbf{J}_{v \times v} - \mathbf{J}_{v \times v} = (v-1) \mathbf{J}_{v \times v} \text{ e}$$

$$\left(\sum_{i=1}^m \mathbf{B}_i \right) \mathbf{J}_{v \times v} = \sum_{i=1}^m \mathbf{B}_i \mathbf{J}_{v \times v} = \sum_{i=1}^m n_i \mathbf{J}_{v \times v} \text{ e portanto conclui-se que:}$$

$$\sum_{i=1}^m n_i = v-1.$$

Dado que $\mathbf{N}_{v \times b} \mathbf{N}_{b \times v}^T = r \mathbf{I} + \sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{B}_i$, então:

$$\mathbf{N}_{v \times b} \mathbf{N}_{b \times v}^T \mathbf{J}_{v \times v} = r \mathbf{I} \mathbf{J}_{v \times v} + \sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{B}_i \mathbf{J}_{v \times v} = r \mathbf{J}_{v \times v} + \sum_{i=1}^m \lambda_i n_i \mathbf{J}_{v \times v} \text{ e}$$

$$\mathbf{N}_{v \times b} \mathbf{N}_{b \times v}^T \mathbf{J}_{v \times v} = \mathbf{N}_{v \times b} k \mathbf{J}_{b \times v} = k \mathbf{N}_{v \times b} \mathbf{J}_{b \times v} = kr \mathbf{J}_{v \times v}, \text{ então}$$

$$kr \mathbf{J}_{v \times v} = r \mathbf{J}_{v \times v} + \sum_{i=1}^m \lambda_i n_i \mathbf{J}_{v \times v} \Leftrightarrow (kr - r) \mathbf{J}_{v \times v} = \sum_{i=1}^m \lambda_i n_i \mathbf{J}_{v \times v} \Leftrightarrow r(k-1) = \sum_{i=1}^m \lambda_i n_i.$$

Observe-se que $\sum_{h=0}^m n_j \mathbf{B}_h = n_j \sum_{h=0}^m \mathbf{B}_h = n_j \mathbf{J}_{v \times v} = \mathbf{B}_j \mathbf{J}_{v \times v}$. Por outro lado, a expressão

$$\mathbf{B}_j \mathbf{J}_{v \times v} \text{ é igual a } \mathbf{B}_j \mathbf{J}_{v \times v} = \mathbf{B}_j \sum_{u=0}^m \mathbf{B}_u = \sum_{u=0}^m \mathbf{B}_j \mathbf{B}_u = \sum_{u=0}^m \sum_{h=0}^m p_{ju}^h \mathbf{B}_h,$$

$$\text{então igualando os coeficientes } \sum_{h=0}^m n_j \mathbf{B}_h = \sum_{u=0}^m \sum_{h=0}^m p_{ju}^h \mathbf{B}_h \Leftrightarrow n_j = \sum_{u=0}^m p_{ju}^h.$$

O teorema seguinte irá revelar-se de grande utilidade quando se pretender averiguar a existência de um PBIBD com duas classes de associação, pelo facto das multiplicidades da matriz quadrada $\mathbf{N} \mathbf{N}^T$ dependerem apenas de alguns parâmetros. Este resultado foi obtido por Connor e Clatworthy (1954). Posteriormente, Bose e Mesner (1959) apresentaram outra demonstração deste teorema.

Teorema 2.1:

Seja \mathbf{N} a matriz de incidência de um PBIBD com duas classes de associação e sejam $\gamma = p_{12}^2 - p_{12}^1$, $\beta = p_{12}^1 + p_{12}^2$ e $\Delta = \gamma^2 + 2\beta + 1$. Os valores próprios da matriz $\mathbf{N}\mathbf{N}^T$ são:

$$rk \text{ e } \theta_i = r - \frac{1}{2} \left[(\lambda_1 - \lambda_2) \left(-\gamma + (-1)^i \sqrt{\Delta} \right) + (\lambda_1 + \lambda_2) \right], \quad i = 1, 2$$

com multiplicidades 1 e $\alpha_i = \frac{n_1 + n_2}{2} + (-1)^i \frac{n_1 - n_2 + \gamma(n_1 + n_2)}{2\sqrt{\Delta}}$, $i = 1, 2$, respectivamente.

Apresenta-se a demonstração deste teorema, mas previamente far-se-á uma breve revisão de resultados algébricos conhecidos e de resultados preliminares:

Seja \mathbf{A} uma matriz quadrada. Se existir um vector coluna \mathbf{x} e um escalar λ , tal que: $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, então λ é designado por valor próprio e \mathbf{x} por vector próprio.

Salienta-se o resultado algébrico demonstrado em John (1971): Sejam λ_i e λ_j dois valores próprios de uma matriz simétrica \mathbf{A} ($\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$), tal que $\lambda_i \neq \lambda_j$. Considere-se que \mathbf{x}_i e \mathbf{x}_j são os correspondentes vectores próprios, então \mathbf{x}_i e \mathbf{x}_j são ortogonais, isto é $\mathbf{x}_j^T \mathbf{x}_i = 0$.

Resultados preliminares

1. Para um PBIBD com duas classes de associação tem-se que $\mathbf{N}\mathbf{N}^T = r\mathbf{I} + \lambda_1\mathbf{B}_1 + \lambda_2\mathbf{B}_2$ sendo $\mathbf{N}\mathbf{N}^T$ uma matriz quadrada de ordem $v \times v$. A partir da definição verifica-se facilmente que rk é um valor próprio, podendo escrever-se

$$\begin{aligned} \mathbf{N}\mathbf{N}^T \mathbf{J}_v &= [r\mathbf{I} + \lambda_1\mathbf{B}_1 + \lambda_2\mathbf{B}_2] \mathbf{J}_v = r\mathbf{I}\mathbf{J}_v + \lambda_1\mathbf{B}_1\mathbf{J}_v + \lambda_2\mathbf{B}_2\mathbf{J}_v = r\mathbf{J}_v + \lambda_1 n_1 \mathbf{J}_v + \lambda_2 n_2 \mathbf{J}_v = \\ &= (r + r(k-1)) \mathbf{J}_v = rk \mathbf{J}_v. \end{aligned}$$

2. A partir da equação $\sum_{i=0}^m \mathbf{B}_i = \mathbf{J}_{v \times v}$ pode escrever-se:

$$\mathbf{B}_2 = \mathbf{J}_{v \times v} - \mathbf{B}_0 - \mathbf{B}_1 = \mathbf{J}_{v \times v} - \mathbf{I} - \mathbf{B}_1 \text{ e conseqüentemente}$$

$$\mathbf{N}\mathbf{N}^T = r\mathbf{I} + \lambda_1\mathbf{B}_1 + \lambda_2\mathbf{B}_2 = r\mathbf{I} + \lambda_1\mathbf{B}_1 + \lambda_2(\mathbf{J}_{v \times v} - \mathbf{I} - \mathbf{B}_1) = (r - \lambda_2)\mathbf{I} + (\lambda_1 - \lambda_2)\mathbf{B}_1 + \lambda_2\mathbf{J}_{v \times v}.$$

Note-se ainda que $(\lambda_1 - \lambda_2)^2 \mathbf{B}_1^2 = (\lambda_1 - \lambda_2)^2 \left[(n_1 - p_{11}^2) \mathbf{I} + (p_{11}^1 - p_{11}^2) \mathbf{B}_1 + p_{11}^2 \mathbf{J}_{v \times v} \right]$.

Assim, tem-se:

$$\begin{aligned}
 & (\lambda_1 - \lambda_2)^2 \mathbf{B}_1^2 = \\
 & = (\lambda_1 - \lambda_2)^2 \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1 = \\
 & = (\lambda_1 - \lambda_2)^2 (p_{11}^0 \mathbf{B}_0 + p_{11}^1 \mathbf{B}_1 + p_{11}^2 \mathbf{B}_2) = \\
 & = (\lambda_1 - \lambda_2)^2 \left[n_1 \mathbf{I} + p_{11}^1 \mathbf{B}_1 + p_{11}^2 (\mathbf{J}_{v \times v} - \mathbf{I} - \mathbf{B}_1) \right] = \\
 & = (\lambda_1 - \lambda_2)^2 \left[(n_1 - p_{11}^2) \mathbf{I} + (p_{11}^1 - p_{11}^2) \mathbf{B}_1 + p_{11}^2 \mathbf{J}_{v \times v} \right].
 \end{aligned}$$

Recorrer-se-á à escrita das expressões nas formas:

$$p_{11}^1 - p_{11}^2 = n_1 - 1 - p_{12}^1 - n_1 + p_{12}^2 = p_{12}^2 - p_{12}^1 - 1 = \gamma - 1$$

$$p_{11}^1 + p_{12}^1 = n_1 - 1 \Leftrightarrow p_{11}^1 = n_1 - 1 - p_{12}^1$$

$$p_{11}^2 + p_{12}^2 = n_1 \Leftrightarrow p_{11}^2 = n_1 - p_{12}^2.$$

Demonstração:

Seja x um vector próprio de $\mathbf{N}\mathbf{N}^T$, então $x^T \mathbf{J}_v = 0$, dado que $\mathbf{N}\mathbf{N}^T$ é uma matriz simétrica e seja θ o correspondente valor próprio, então $\mathbf{N}\mathbf{N}^T x = \theta x$ e $\mathbf{N}\mathbf{N}^T \mathbf{N}\mathbf{N}^T x = \theta^2 x$.

Por outro lado, $\mathbf{N}\mathbf{N}^T x = \left[(r - \lambda_2) \mathbf{I} + (\lambda_1 - \lambda_2) \mathbf{B}_1 + \lambda_2 \mathbf{J}_{v \times v} \right] x = (r - \lambda_2) \mathbf{I} x + (\lambda_1 - \lambda_2) \mathbf{B}_1 x$, isto é:

$$\theta x = \left[(r - \lambda_2) \mathbf{I} + (\lambda_1 - \lambda_2) \mathbf{B}_1 + \lambda_2 \mathbf{J}_{v \times v} \right] x$$

$$\Leftrightarrow \theta x = (r - \lambda_2) \mathbf{I} x + (\lambda_1 - \lambda_2) \mathbf{B}_1 x$$

$$\Leftrightarrow (\lambda_1 - \lambda_2) \mathbf{B}_1 x = \theta x - (r - \lambda_2) \mathbf{I} x \quad (2.35)$$

Desenvolvendo a expressão

$$\mathbf{N}\mathbf{N}^T \mathbf{N}\mathbf{N}^T x = \left[(r - \lambda_2) \mathbf{I} + (\lambda_1 - \lambda_2) \mathbf{B}_1 \right]^2 x$$

$$\Leftrightarrow \theta^2 x = \left[(r - \lambda_2) \mathbf{I} + (\lambda_1 - \lambda_2) \mathbf{B}_1 \right]^2 x$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow \theta^2 x &= \left[(r - \lambda_2)^2 \mathbf{I} + 2(r - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_2) \mathbf{B}_1 + (\lambda_1 - \lambda_2)^2 \mathbf{B}_1^2 \right] x \\
\Leftrightarrow \theta^2 x &= \left((r - \lambda_2)^2 \mathbf{I} + 2(r - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_2) \mathbf{B}_1 + (\lambda_1 - \lambda_2)^2 \left[(n_1 - p_{11}^2) \mathbf{I} + (p_{11}^1 - p_{11}^2) \mathbf{B}_1 + p_{11}^2 \mathbf{J}_{v \times v} \right] \right) x \\
\Leftrightarrow \theta^2 x &= \left[(r - \lambda_2)^2 + (\lambda_1 - \lambda_2)^2 (n_1 - p_{11}^2) \right] \mathbf{I} x + \left[2(r - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_2) + (\lambda_1 - \lambda_2)^2 (p_{11}^1 - p_{11}^2) \right] \mathbf{B}_1 x + \\
&\quad + (\lambda_1 - \lambda_2)^2 p_{11}^2 \mathbf{J}_{v \times v} x \\
\Leftrightarrow \theta^2 x &= \left[(r - \lambda_2)^2 + (\lambda_1 - \lambda_2)^2 (n_1 - p_{11}^2) \right] \mathbf{I} x + \left[2(r - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_2) + (\lambda_1 - \lambda_2)^2 (p_{11}^1 - p_{11}^2) \right] \mathbf{B}_1 x \\
&\hspace{20em} \mathbf{(2.36)}
\end{aligned}$$

Recorrendo à expressão (2.35), a expressão (2.36) pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
\theta^2 x &= \left[(r - \lambda_2)^2 + (\lambda_1 - \lambda_2)^2 (n_1 - p_{11}^2) \right] \mathbf{I} x + \left[2(r - \lambda_2) + (\lambda_1 - \lambda_2)(p_{11}^1 - p_{11}^2) \right] (\lambda_1 - \lambda_2) \mathbf{B}_1 x \\
\Leftrightarrow \theta^2 x &= \left[(r - \lambda_2)^2 + p_{12}^2 (\lambda_1 - \lambda_2)^2 \right] \mathbf{I} x + \left[2(r - \lambda_2) + (p_{11}^1 - p_{11}^2)(\lambda_1 - \lambda_2) \right] [\theta x - (r - \lambda_2) \mathbf{I} x] \\
\Leftrightarrow \theta^2 x &= \left[(r - \lambda_2)^2 + p_{12}^2 (\lambda_1 - \lambda_2)^2 \right] x + \left[2(r - \lambda_2) + (p_{11}^1 - p_{11}^2)(\lambda_1 - \lambda_2) \right] [\theta x - (r - \lambda_2) x] \\
\Rightarrow \theta^2 &= (r - \lambda_2)^2 + p_{12}^2 (\lambda_1 - \lambda_2)^2 + \left[2(r - \lambda_2) + (p_{11}^1 - p_{11}^2)(\lambda_1 - \lambda_2) \right] [\theta - (r - \lambda_2)] \\
\Leftrightarrow \theta^2 - \theta \left[2(r - \lambda_2) + (p_{11}^1 - p_{11}^2)(\lambda_1 - \lambda_2) \right] &= (r - \lambda_2)^2 + p_{12}^2 (\lambda_1 - \lambda_2)^2 - (r - \lambda_2) \left[2(r - \lambda_2) + (p_{11}^1 - p_{11}^2)(\lambda_1 - \lambda_2) \right] \\
\Leftrightarrow \theta^2 - \theta \left[2(r - \lambda_2) + (p_{11}^1 - p_{11}^2)(\lambda_1 - \lambda_2) \right] &= (r - \lambda_2)^2 + p_{12}^2 (\lambda_1 - \lambda_2)^2 - 2(r - \lambda_2)^2 - (p_{11}^1 - p_{11}^2)(\lambda_1 - \lambda_2)(r - \lambda_2) \\
\Leftrightarrow \theta^2 - \theta \left[2(r - \lambda_2) + (p_{11}^1 - p_{11}^2)(\lambda_1 - \lambda_2) \right] &= -(r - \lambda_2)^2 + p_{12}^2 (\lambda_1 - \lambda_2)^2 - (p_{11}^1 - p_{11}^2)(\lambda_1 - \lambda_2)(r - \lambda_2) \\
\Leftrightarrow \theta^2 - \theta \left[2(r - \lambda_2) + (p_{11}^1 - p_{11}^2)(\lambda_1 - \lambda_2) \right] &+ (r - \lambda_2)^2 - p_{12}^2 (\lambda_1 - \lambda_2)^2 + (p_{11}^1 - p_{11}^2)(\lambda_1 - \lambda_2)(r - \lambda_2) = 0.
\end{aligned}$$

Resolvendo a equação do 2º grau, em ordem a θ obtêm-se:

$$\begin{aligned}
\theta &= \frac{2(r - \lambda_2) + (p_{11}^1 - p_{11}^2)(\lambda_1 - \lambda_2) \pm \sqrt{H}}{2} \\
\Leftrightarrow \theta &= \frac{2(r - \lambda_2) + (\gamma - 1)(\lambda_1 - \lambda_2) \pm (\lambda_1 - \lambda_2) \sqrt{\Delta}}{2}
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \theta = \frac{2r + (\lambda_1 - \lambda_2)\gamma - (\lambda_1 + \lambda_2) \pm (\lambda_1 - \lambda_2)\sqrt{\Delta}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \theta = r + \frac{-(\lambda_1 + \lambda_2) + (\lambda_1 - \lambda_2)\gamma \pm (\lambda_1 - \lambda_2)\sqrt{\Delta}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \theta = r + \frac{1}{2} \left[(\lambda_1 - \lambda_2)(\gamma \pm \sqrt{\Delta}) - (\lambda_1 + \lambda_2) \right]$$

$$\Rightarrow \theta_i = r - \frac{1}{2} \left[(\lambda_1 - \lambda_2)(-\gamma + (-1)^i \sqrt{\Delta}) + (\lambda_1 + \lambda_2) \right], \quad i = 1, 2, \text{ como se queria demonstrar.}$$

Cálculo auxiliar de H :

$$\begin{aligned} H &= \left[2(r - \lambda_2) + (p_{11}^1 - p_{11}^2)(\lambda_1 - \lambda_2) \right]^2 - 4 \left[(r - \lambda_2)^2 - p_{12}^2(\lambda_1 - \lambda_2)^2 + (p_{11}^1 - p_{11}^2)(\lambda_1 - \lambda_2)(r - \lambda_2) \right] = \\ &= \left[2(r - \lambda_2) + (\gamma - 1)(\lambda_1 - \lambda_2) \right]^2 - 4 \left[(r - \lambda_2)^2 - p_{12}^2(\lambda_1 - \lambda_2)^2 + (\gamma - 1)(\lambda_1 - \lambda_2)(r - \lambda_2) \right] = \\ &= 4(r - \lambda_2)^2 + 4(r - \lambda_2)(\gamma - 1)(\lambda_1 - \lambda_2) + (\gamma - 1)^2(\lambda_1 - \lambda_2)^2 - 4(r - \lambda_2)^2 + 4p_{12}^2(\lambda_1 - \lambda_2)^2 - 4(\gamma - 1)(\lambda_1 - \lambda_2)(r - \lambda_2) = \\ &= (\gamma - 1)^2(\lambda_1 - \lambda_2)^2 + 4p_{12}^2(\lambda_1 - \lambda_2)^2 = \\ &= (\lambda_1 - \lambda_2)^2 \left[(\gamma - 1)^2 + 4p_{12}^2 \right] = \\ &= (\lambda_1 - \lambda_2)^2 \left[(\gamma - 1)^2 + 2(p_{12}^2 + p_{12}^2) \right] = \\ &= (\lambda_1 - \lambda_2)^2 \left[(\gamma - 1)^2 + 2(p_{12}^2 - p_{12}^1 + p_{12}^2 + p_{12}^1) \right] = \quad (\text{sendo } \gamma = p_{12}^2 - p_{12}^1 \text{ e } \beta = p_{12}^1 + p_{12}^2) \\ &= (\lambda_1 - \lambda_2)^2 \left[(\gamma - 1)^2 + 2(\gamma + \beta) \right] = \\ &= (\lambda_1 - \lambda_2)^2 (\gamma^2 + 2\beta + 1) = \\ &= (\lambda_1 - \lambda_2)^2 \Delta \quad \text{e portanto, } \Delta = \gamma^2 + 2\beta + 1. \end{aligned}$$

Note-se que as multiplicidades satisfazem a condição $\alpha_1 + \alpha_2 = v - 1$. (2.37)

Por outro lado, mostra-se ainda que:

$$\text{tr}(\mathbf{NN}^T) = vr \Leftrightarrow \text{tr}(\mathbf{NN}^T) = rk + \alpha_1\theta_1 + \alpha_2\theta_2. \quad (2.38)$$

Assim, a partir de $\theta_i = r - \frac{1}{2} \left[(\lambda_1 - \lambda_2)(-\gamma + (-1)^i \sqrt{\Delta}) + (\lambda_1 + \lambda_2) \right]$, $i = 1, 2$, tem-se

$$\theta_1 = r - \frac{1}{2} \left[(\lambda_1 - \lambda_2)(-\gamma - \sqrt{\Delta}) + (\lambda_1 + \lambda_2) \right]$$

$$\theta_2 = r - \frac{1}{2} \left[(\lambda_1 - \lambda_2)(-\gamma + \sqrt{\Delta}) + (\lambda_1 + \lambda_2) \right]$$

$$\text{e } \theta_2 - \theta_1 = -(\lambda_1 - \lambda_2)\sqrt{\Delta}$$

Resolvendo a equação (2.38) em ordem a α_2 obtém-se $\alpha_2 = \frac{vr - rk - (v-1)\theta_1}{\theta_2 - \theta_1}$ que

após a simplificação dos cálculos ficará:

$$\alpha_2 = \frac{n_1 + n_2}{2} + \frac{n_1 - n_2 + \gamma(n_1 + n_2)}{2\sqrt{\Delta}}.$$

Resolvendo a equação (2.37) em ordem a α_1 , vem:

$$\alpha_1 = v - 1 - \alpha_2 = \frac{n_1 + n_2}{2} - \frac{n_1 - n_2 + \gamma(n_1 + n_2)}{2\sqrt{\Delta}},$$

ou seja, tal como se queria demonstrar os valores próprios de θ têm multiplicidades

$$\alpha_i = \frac{n_1 + n_2}{2} + (-1)^i \frac{n_1 - n_2 + \gamma(n_1 + n_2)}{2\sqrt{\Delta}}, \quad i = 1, 2.$$

2.3.2 Concretização da forma matricial para um PBIBD (m=2)

Passamos a exemplificar a forma matricial, tomando o exemplo anterior 2.2.3.1, no qual foi apresentado um PBIBD ($v = 6, b = 6, r = 3, k = 3, \lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 1$), com duas classes de associação. Recorrendo à notação matricial esse plano poderá ser apresentado da seguinte forma:

$$\mathbf{B}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}_v, \quad \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Numa matriz de zero-ésimos associados, cada tratamento é primeiro associado de si próprio sendo os restantes elementos zero por isso $\mathbf{B}_0 = \mathbf{I}_v$, logo $n_0 = 1$ e $\lambda_0 = r$.

Observa-se ainda que $\sum_{i=0}^2 \mathbf{B}_i = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 = \mathbf{J}_{v \times v}$.

Dado que nas matrizes \mathbf{B}_i , $i = 1, 2, \dots, m$ os totais de cada linha e coluna são iguais a n_i , então $\mathbf{B}_i \mathbf{J}_{v \times v} = n_i \mathbf{J}_{v \times v}$, tal como se mostra no exemplo:

$$\mathbf{B}_2 \mathbf{J}_{v \times v} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = n_2 \mathbf{J}_{v \times v}$$

Note-se que p_{11}^0 representa o número de tratamentos primeiros associados de dois tratamentos zero-ésimos associados entre si e p_{12}^0 representa o número de tratamentos zero-ésimos associados entre si e que são primeiros associados de um dos tratamentos e segundos associados do outro tratamento. Então, escolhendo o tratamento 1, zero-ésimo associado de si próprio, obtém-se:

Para $i = j \Rightarrow \delta_{ij} = 1$ e p_{ij}^0 será:

$$p_{11}^0 = \#\{\{2\} \cap \{2\}\} = 1, \text{ isto é, } p_{11}^0 = n_1 \text{ sendo portanto } p_{11}^0 = n_1 \delta_{11}$$

$$p_{22}^0 = \#\{\{3, 4, 5, 6\} \cap \{3, 4, 5, 6\}\} = 4, \text{ isto é } p_{22}^0 = n_2 \text{ então } p_{22}^0 = n_2 \delta_{22}$$

Para $i \neq j \Rightarrow \delta_{ij} = 0$ e p_{ij}^0 será:

$$p_{12}^0 = \#\{\{2\} \cap \{3, 4, 5, 6\}\} = 0 \text{ e } n_1 \delta_{12} = 1 \times 0 = 0; \text{ então } p_{12}^0 = n_1 \delta_{12}$$

$$p_{21}^0 = \#\{\{3, 4, 5, 6\} \cap \{2\}\} = 0 \text{ e } n_2 \delta_{21} = 4 \times 0 = 0; \text{ então } p_{21}^0 = n_2 \delta_{21}$$

Seguidamente, pretende calcular-se p_{0k}^i :

Para $i = 1$, considerem-se por exemplo os tratamentos 1 e 2 primeiros associados, o conjunto dos zero-ésimos associados do tratamento 1 é $\{1\}$ e o conjunto dos primeiros associados do tratamento 2 é $\{1\}$, então p_{0k}^i será $p_{01}^1 = \#\{\{1\} \cap \{1\}\} = 1 = \delta_{11}$ porque $i = k = 1$.

Para $i = 2$, considerando os tratamentos 1 e 3 segundos associados, o conjunto dos zero-ésimos associados do tratamento 1 é $\{1\}$ e o conjunto dos primeiros associados do tratamento 3 é $\{4\}$, então $k = 1$ e $p_{01}^2 = \#\{\{1\} \cap \{4\}\} = 0 = \delta_{21}$, dado que $i \neq k$.

Sintetizando, para $i \neq k$, δ_{ij} será zero e $p_{0k}^i = 0$. Se $i = k$ então $\delta_{ij} = 1$ e $p_{0k}^i = 1$.

As matrizes $\mathbf{P}_i = [p_{jk}^i]$, $i, j, k = 0, 1, \dots, m$ de ordem $(m+1) \times (m+1)$ podem ser escritas da seguinte forma:

$$\mathbf{P}_0 = \begin{bmatrix} p_{00}^0 & p_{01}^0 & p_{02}^0 \\ p_{10}^0 & p_{11}^0 & p_{12}^0 \\ p_{20}^0 & p_{21}^0 & p_{22}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} p_{00}^1 & p_{01}^1 & p_{02}^1 \\ p_{10}^1 & p_{11}^1 & p_{12}^1 \\ p_{20}^1 & p_{21}^1 & p_{22}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} p_{00}^2 & p_{01}^2 & p_{02}^2 \\ p_{10}^2 & p_{11}^2 & p_{12}^2 \\ p_{20}^2 & p_{21}^2 & p_{22}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Será exemplificado em seguida que, na matriz $\mathbf{B}_j \mathbf{B}_k$, o elemento correspondente à linha α e à coluna β representa o número de tratamentos comuns aos j -ésimos associados do tratamento α e aos k -ésimos associados do tratamento β , sendo α e β i -ésimos associados.

Tem-se $\mathbf{B}_j \mathbf{B}_k = \sum_{i=0}^m p_{jk}^i \mathbf{B}_i$, $j, k = 0, 1, 2$.

$$\mathbf{B}_0 \mathbf{B}_0 = p_{00}^0 \mathbf{B}_0 + p_{00}^1 \mathbf{B}_1 + p_{00}^2 \mathbf{B}_2 = 1 \times \mathbf{B}_0 + 0 \times \mathbf{B}_1 + 0 \times \mathbf{B}_2 = \mathbf{B}_0 = \mathbf{I}_{v \times v}$$

$$\mathbf{B}_0 \mathbf{B}_1 = p_{01}^0 \mathbf{B}_0 + p_{01}^1 \mathbf{B}_1 + p_{01}^2 \mathbf{B}_2 = 0 \times \mathbf{B}_0 + 1 \times \mathbf{B}_1 + 0 \times \mathbf{B}_2 = \mathbf{B}_1$$

$$\mathbf{B}_0 \mathbf{B}_2 = p_{02}^0 \mathbf{B}_0 + p_{02}^1 \mathbf{B}_1 + p_{02}^2 \mathbf{B}_2 = 0 \times \mathbf{B}_0 + 0 \times \mathbf{B}_1 + 1 \times \mathbf{B}_2 = \mathbf{B}_2$$

$$\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1 = p_{11}^0 \mathbf{B}_0 + p_{11}^1 \mathbf{B}_1 + p_{11}^2 \mathbf{B}_2 = 1 \times \mathbf{B}_0 + 0 \times \mathbf{B}_1 + 0 \times \mathbf{B}_2 = \mathbf{B}_0 = \mathbf{I}_{v \times v}$$

$$\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_2 = p_{12}^0 \mathbf{B}_0 + p_{12}^1 \mathbf{B}_1 + p_{12}^2 \mathbf{B}_2 = 0 \times \mathbf{B}_0 + 0 \times \mathbf{B}_1 + 1 \times \mathbf{B}_2 = \mathbf{B}_2$$

$$\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{12}^0 & p_{12}^1 & p_{12}^2 & p_{12}^2 & p_{12}^2 & p_{12}^2 \\ p_{12}^1 & p_{12}^0 & p_{12}^2 & p_{12}^2 & p_{12}^2 & p_{12}^2 \\ p_{12}^2 & p_{12}^2 & p_{12}^0 & p_{12}^1 & p_{12}^2 & p_{12}^2 \\ p_{12}^2 & p_{12}^2 & p_{12}^1 & p_{12}^0 & p_{12}^2 & p_{12}^2 \\ p_{12}^2 & p_{12}^2 & p_{12}^2 & p_{12}^2 & p_{12}^0 & p_{12}^1 \\ p_{12}^2 & p_{12}^2 & p_{12}^2 & p_{12}^2 & p_{12}^1 & p_{12}^0 \end{bmatrix}$$

Como se pode observar, a célula relativa à linha 1 e coluna 1 representa o número de tratamentos primeiros associados do tratamento 1 e segundos associados do tratamento 1, ou seja, $p_{12}^0 = 0$;

A célula relativa à linha 1 e coluna 3 representa o número de tratamentos primeiros associados do tratamento 1 e segundos associados do tratamento 3, isto é $p_{12}^2 = 1$;

A célula relativa à linha 4 e coluna 5 representa o número de tratamentos primeiros associados do tratamento 4 e segundos associados do tratamento 5, isto é $p_{12}^2 = 1$;

Calcule-se agora $\mathbf{B}_2\mathbf{B}_2$:

$$\mathbf{B}_2\mathbf{B}_2 = p_{22}^0\mathbf{B}_0 + p_{22}^1\mathbf{B}_1 + p_{22}^2\mathbf{B}_2 = 4 \times \mathbf{B}_0 + 4 \times \mathbf{B}_1 + 2 \times \mathbf{B}_2$$

$$\mathbf{B}_2\mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 4 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{22}^0 & p_{22}^1 & p_{22}^2 & p_{22}^2 & p_{22}^2 & p_{22}^2 \\ p_{22}^1 & p_{22}^0 & p_{22}^2 & p_{22}^2 & p_{22}^2 & p_{22}^2 \\ p_{22}^2 & p_{22}^2 & p_{22}^0 & p_{22}^1 & p_{22}^2 & p_{22}^2 \\ p_{22}^2 & p_{22}^2 & p_{22}^1 & p_{22}^0 & p_{22}^2 & p_{22}^2 \\ p_{22}^2 & p_{22}^2 & p_{22}^2 & p_{22}^2 & p_{22}^0 & p_{22}^1 \\ p_{22}^2 & p_{22}^2 & p_{22}^2 & p_{22}^2 & p_{22}^1 & p_{22}^0 \end{bmatrix}$$

Como se pode observar:

A célula relativa à linha 6 e coluna 5 representa o número de tratamentos comuns aos segundos associados do tratamento 6 e aos segundos associados do tratamento 5, logo $p_{22}^1 = 4$, dado que os tratamentos 5 e 6 são primeiros associados.

A célula relativa à linha 1 e coluna 6 representa o número de tratamentos comuns aos segundos associados do tratamento 1 e aos segundos associados do tratamento 6, logo $p_{22}^2 = 2$, dado que os tratamentos 1 e 6 são segundos associados.

Retomando o exemplo obtém-se a seguinte concretização de matrizes:

$$\mathbf{N}_{v \times b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{N}_{b \times v}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N}_{b \times v}^T \mathbf{J}_{v \times v} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = k \mathbf{J}_{b \times v}$$

Para além da simplificação na escrita, o tratamento matricial dos PBIBD revela-se muito vantajoso no tratamento e análise destes planos, em especial dos casos com grandes dimensões e que exigem um elevado esforço computacional.

Capítulo 3

Análise em Planos em Blocos Incompletos Parcialmente Equilibrados

3.1. Introdução

O principal objectivo da análise experimental é a redução do erro experimental, o que pode ser concretizado através do planeamento de experiências em Blocos Completos Casualizados, no qual a comparação entre o efeito dos tratamentos e o efeito dos blocos é ortogonal. A ortogonalidade não se verifica para os Planos em Blocos Incompletos e por isso, para tratar a informação, é necessário proceder à **análise intrabloco**, isto é dentro do bloco.

O nome análise intrabloco deve-se ao facto dos contrastes dos efeitos dos tratamentos ser estimado como uma combinação linear de comparações das observações do mesmo bloco. Desta forma, o efeito dos blocos é eliminado e as estimativas são dadas em função dos efeitos dos tratamentos e do erro (apenas dentro do bloco). Yates (1936) encontrou o melhor estimador linear centrado (BLUE) intrabloco para a comparação de tratamentos. Baseado em pressupostos de eficiência, Yates (1939) defendeu que na análise intrabloco parte da informação contida na comparação total dos blocos era ignorada e como resposta propôs a recuperação da informação **interbloco**, isto é entre os blocos.

O mesmo autor (1939, 1940) mostrou que nos Planos em Blocos Incompletos Equilibrados o restabelecimento da informação interbloco pode ser conjugado com a análise intrabloco, para obter estimadores mais eficientes na comparação dos tratamentos. Nair (1944) expandiu estes resultados aos Planos em Blocos Incompletos Parcialmente Equilibrados e Rao (1947) desenvolveu a análise para o caso geral dos Planos em Blocos Incompletos e estudou a relação combinada intra-interbloco.

Dado que a análise do caso geral dos Planos em Blocos Incompletos é bastante referida na literatura, não se irá proceder ao seu estudo detalhado, fazendo sempre que oportuno referência aos resultados já conhecidos. Seguidamente aborda-se, de uma forma

mais detalhada, a análise intrabloco e a análise combinada intra-interbloco dos Planos em Blocos Incompletos Parcialmente Equilibrados.

3.2. Análise intrabloco

3.2.1. Análise intrabloco para o caso geral dos PBI

Considerem-se b blocos com k_1, k_2, \dots, k_b unidades experimentais e v tratamentos que ocorrem r_1, r_2, \dots, r_v vezes então $\sum_{i=1}^v r_i = \sum_{j=1}^b k_j = N$, sendo N o número total de observações.

O modelo estatístico é:

$$y_{ij\ell} = \mu + \tau_i + \beta_j + e_{ij\ell}, \quad i = 1, 2, \dots, v; \quad j = 1, 2, \dots, b \quad \text{e} \quad \ell = 1, 2, \dots, n_{ij} \quad (3.1)$$

Neste modelo, $y_{ij\ell}$ representa a ℓ -ésima observação, do i -ésimo tratamento, no j -ésimo bloco; μ é a média global e τ_i e β_j representam respectivamente o efeito do i -ésimo tratamento e do j -ésimo bloco.

A componente aleatória do erro é representada por $e_{ij\ell}$. Esta componente contém o erro experimental ($\varepsilon_{ij\ell}$) e o erro das observações ($\eta_{ij\ell}$), tal que: $e_{ij\ell} = \varepsilon_{ij\ell} + \eta_{ij\ell}$. Obedece ainda às restrições usuais: é uma variável aleatória que segue uma distribuição normal e identicamente distribuída, gozando de independência e homocedasticidade: $e_{ij\ell} \text{ i.i.d. } \approx N(0, \sigma_e^2 = \sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\eta^2)$.

As equações normais de μ, τ_i e β_j são dadas por:

$$\begin{aligned} G &= n\bar{\mu} + \sum_{i=1}^v r_i \hat{\tau}_i + \sum_{j=1}^b k_j \hat{\beta}_j \\ T_i &= r_i \bar{\mu} + r_i \hat{\tau}_i + \sum_{j=1}^b n_{ij} \hat{\beta}_j, \quad i = 1, 2, \dots, v \\ B_j &= k_j \bar{\mu} + \sum_{i=1}^v n_{ij} \hat{\tau}_i + k_j \hat{\beta}_j, \quad j = 1, 2, \dots, b \end{aligned} \quad (\text{Equações 3.2})$$

T_i representa a soma de todas os valores observados correspondentes ao i -ésimo tratamento $\left(T_i = \sum_{j\ell} y_{ij\ell} \right)$, B_j é a soma total dos valores observados do j -ésimo bloco $\left(B_j = \sum_{i\ell} y_{ij\ell} \right)$ e G representa o somatório de todos os valores obtidos $G = \sum_i T_i = \sum_j B_j$.

Recorrendo à notação matricial pode escrever-se o modelo da seguinte forma:

$$\mathbf{y} = \mu \mathbf{J}_n + \mathbf{X}_\tau \boldsymbol{\tau} + \mathbf{X}_\beta \boldsymbol{\beta} + \mathbf{e}. \quad (3.3)$$

\mathbf{J}_n representa o vector coluna unitário de ordem n e \mathbf{X}_β é a matriz de incidência das observações dos blocos, definida como:

$$\mathbf{X}_\beta = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{k_1} & & & \\ & \mathbf{J}_{k_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{J}_{k_b} \end{bmatrix},$$

tal que: \mathbf{J}_{k_j} representa vector coluna com k_j elementos unitários, $j = 1, 2, \dots, b$ e $\mathbf{X}_\tau = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_\nu)$ simboliza a matriz de incidência das observações dos tratamentos, sendo \mathbf{x}_i o vector coluna constituído por r_i elementos unitários e os restantes $(n - r_i)$ elementos são zero, tal que $\mathbf{x}_i^T \mathbf{x}_i = r_i$ e $\mathbf{x}_i^T \mathbf{x}_{i'} = 0$ para $i \neq i'$ ($i, i' = 1, 2, \dots, \nu$).

Em notação matricial as equações (3.2) podem ser escritas como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{J}_n^T \mathbf{J}_n & \mathbf{J}_n^T \mathbf{X}_\tau & \mathbf{J}_n^T \mathbf{X}_\beta \\ \mathbf{X}_\tau^T \mathbf{J}_n & \mathbf{X}_\tau^T \mathbf{X}_\tau & \mathbf{X}_\tau^T \mathbf{X}_\beta \\ \mathbf{X}_\beta^T \mathbf{J}_n & \mathbf{X}_\beta^T \mathbf{X}_\tau & \mathbf{X}_\beta^T \mathbf{X}_\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mu} \\ \hat{\boldsymbol{\tau}} \\ \hat{\boldsymbol{\beta}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_n^T \mathbf{y} \\ \mathbf{X}_\tau^T \mathbf{y} \\ \mathbf{X}_\beta^T \mathbf{y} \end{bmatrix}$$

e após algumas simplificações tem-se que:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N} & \mathbf{J}_\tau^T \mathbf{R} & \mathbf{J}_b^T \mathbf{K} \\ \mathbf{R} \mathbf{J}_\nu & \mathbf{R} & \mathbf{N} \\ \mathbf{K} \mathbf{J}_b & \mathbf{N}^T & \mathbf{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mu} \\ \hat{\boldsymbol{\tau}} \\ \hat{\boldsymbol{\beta}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} \\ \mathbf{T} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Note-se que $\mathbf{R}_{v \times v} = \text{diag}(r_i)$, $\mathbf{K}_{b \times b} = \text{diag}(k_j)$, $\mathbf{N}_{v \times b} = n_{ij}$, $\mathbf{T}^T = (T_1, T_2, \dots, T_v)$, $\mathbf{B}^T = (B_1, B_2, \dots, B_b)$, $\boldsymbol{\tau}^T = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_v)$ e $\boldsymbol{\beta}^T = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_b)$.

A partir das equações (3.4) pode obter-se a expressão $\mathbf{KJ}_b \hat{\boldsymbol{\mu}} + \mathbf{N}^T \hat{\boldsymbol{\tau}} + \mathbf{K} \hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{B}$ equivalente a

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} \mathbf{J}_b + \hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{K}^{-1} (\mathbf{B} - \mathbf{N}^T \hat{\boldsymbol{\tau}}) \quad (3.5)$$

O segundo conjunto das equações (3.4) pode ser escrito como $\mathbf{R} \mathbf{J}_v \hat{\boldsymbol{\mu}} + \mathbf{R} \hat{\boldsymbol{\tau}} + \mathbf{N} \hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{T}$, que poderá também ser expresso como $\mathbf{N} \mathbf{J}_b \hat{\boldsymbol{\mu}} + \mathbf{N} \hat{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{R} \hat{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{T}$, dado que $\mathbf{N} \mathbf{J}_b = \mathbf{R} \mathbf{J}_v$. Simplificando vem $\mathbf{N} (\mathbf{J}_b \hat{\boldsymbol{\mu}} + \hat{\boldsymbol{\beta}}) = \mathbf{T} - \mathbf{R} \hat{\boldsymbol{\tau}}$.

Substituindo (3.5) no segundo conjunto das equações (3.4) obtém-se

$$\mathbf{N} \mathbf{K}^{-1} (\mathbf{B} - \mathbf{N}^T \hat{\boldsymbol{\tau}}) = \mathbf{T} - \mathbf{R} \hat{\boldsymbol{\tau}}$$

$$\mathbf{R} \hat{\boldsymbol{\tau}} - \mathbf{N} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{N}^T \hat{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{T} - \mathbf{N} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{B}$$

e obtém-se assim as equações normais reduzidas para $\boldsymbol{\tau}$

$$(\mathbf{R} - \mathbf{N} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{N}^T) \hat{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{T} - \mathbf{N} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{B} \quad (3.6)$$

A notação standard é dada por

$$\mathbf{C} \hat{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{Q} \quad (3.7)$$

$$\text{com } \mathbf{C} = \mathbf{R} - \mathbf{N} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{N}^T \quad (3.8)$$

$$\text{e } \mathbf{Q} = \mathbf{T} - \mathbf{N} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{B} \quad (3.9)$$

Uma dedução detalhada destas equações encontra-se em Oliveira, Teresa (1994).

O elemento (i, i') da matriz \mathbf{C} é dado por $c_{ii'} = \delta_{ii'} r_i - \sum_{j=1}^b \frac{n_{ij} n_{i'j}}{k_j}$, com $\delta_{ii'} = 1$ para $i = i'$ ou $\delta_{ii'} = 0$ para $i \neq i'$.

O i -ésimo elemento da matriz \mathbf{Q} é Q_i que também se designa como o total ajustado do i -ésimo tratamento e pode ser expresso como:

$$Q_i = T_i - \sum_{j=1}^b n_{ij} B_j / k_j \quad (3.10)$$

A matriz \mathbf{C} é frequentemente designada por matriz de informação, uma vez que é determinada em função da matriz de incidência. Pode escrever-se \mathbf{C} como $\mathbf{C} = (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_v)$, no qual \mathbf{c}_i representa a i -ésima coluna da matriz \mathbf{C} .

Em Hinkelmann e Kempthorne (2005) é referido e demonstrado o importante teorema:

Teorema 3.1:

Seja \mathbf{C} a matriz de informação (3.8) $\mathbf{C} = \mathbf{R} - \mathbf{N}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{N}^T$, de dimensão $v \times v$, com $r(\mathbf{C}) = v - 1$. A matriz $\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C} + a\mathbf{J}\mathbf{J}^T$, com $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, admite como inversa a matriz $\tilde{\mathbf{C}}^{-1}$ e a matriz $\tilde{\mathbf{C}}^{-1}$ é a matriz inversa generalizada de \mathbf{C} .

Aplicando o teorema anterior, a solução da equação (3.7) será dada por

$$\hat{\boldsymbol{\tau}} = \tilde{\mathbf{C}}^{-1}\mathbf{Q} \quad (3.11)$$

Os mesmos autores mostram ainda que:

$$\text{var}(\mathbf{c}^T \hat{\boldsymbol{\tau}}) = \mathbf{c}^T \tilde{\mathbf{C}}^{-1} \mathbf{c} \sigma_e^2, \quad (3.12)$$

em que $\mathbf{c}^T \boldsymbol{\tau}$ é uma função estimável e $\mathbf{c}^T \hat{\boldsymbol{\tau}}$ o seu estimador.

Reescrevendo o modelo (3.3) como

$$\mathbf{y} = \mu\mathbf{J}_n + \mathbf{X}_\beta \boldsymbol{\beta} + \mathbf{X}_\tau \boldsymbol{\tau} + \mathbf{e}, \quad (3.13)$$

este poderá ser escrito em notação matricial:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}\mathbf{X}_\beta & \mathbf{X}_\tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\tau} \end{bmatrix} + \mathbf{e}$$

$$\equiv \mathbf{X}\boldsymbol{\Theta} + \mathbf{e}, \quad (3.14)$$

$$\text{com } \mathbf{X} = (\mathbf{J} : \mathbf{X}_\beta : \mathbf{X}_\tau) \text{ e } \boldsymbol{\Theta}^T = (\mu, \boldsymbol{\beta}^T, \boldsymbol{\tau}^T).$$

O modelo das equações normais é da forma $\mathbf{X}^T \mathbf{X} \boldsymbol{\Theta}^* = \mathbf{X}^T \mathbf{y}$ sendo a solução da equação anterior dada por $\boldsymbol{\Theta}^* = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^- \mathbf{X}^T \mathbf{y}$.

Seja $(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^-$ uma matriz de dimensão $(1+b+v) \times (1+b+v)$ que pode ser escrita de forma particionada:

$$(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^- = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{\mu\mu} & \mathbf{A}_{\mu\beta} & \mathbf{A}_{\mu\tau} \\ \mathbf{A}_{\mu\beta}^T & \mathbf{A}_{\beta\beta} & \mathbf{A}_{\beta\tau} \\ \mathbf{A}_{\mu\tau}^T & \mathbf{A}_{\beta\tau}^T & \mathbf{A}_{\tau\tau} \end{pmatrix},$$

Segundo Hinkelmann e Kempthorne (2005):

$$\text{var}(\mathbf{c}^T \boldsymbol{\tau}^*) = \mathbf{c}^T \mathbf{A}_{\tau\tau} \mathbf{c} \sigma_e^2 \quad (3.15)$$

além disso, para qualquer função estimável $\mathbf{c}^T \boldsymbol{\tau}$, tem-se que $\mathbf{c}^T \hat{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{c}^T \boldsymbol{\tau}^*$ e o valor numérico obtido aplicando a expressão (3.12) ou (3.15) é o mesmo.

Seja $c^{ii'}$ o elemento (i, i') de $\tilde{\mathbf{C}}^{-1}$ e $a^{ii'}$ o correspondente elemento de $\mathbf{A}_{\tau\tau}$, então para $\mathbf{c}^T \boldsymbol{\tau} = \tau_i - \tau_{i'}$ vem:

$$\text{var}(\hat{\tau}_i - \hat{\tau}_{i'}) = (c^{ii} - 2c^{ii'} + c^{i'i'}) \sigma_e^2 = (a^{ii} - 2a^{ii'} + a^{i'i'}) \sigma_e^2 \quad (3.16)$$

Recorrendo ao modelo (3.13): $\mathbf{y} = \mu \mathbf{J}_n + \mathbf{X}_\beta \boldsymbol{\beta} + \mathbf{X}_\tau \boldsymbol{\tau} + \mathbf{e}$, pretende testar-se a hipótese:

$$H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_v.$$

A tabela ANOVA, relativamente aos blocos nos quais se ignoram o efeito dos tratamentos, o que frequentemente é designado na literatura por tratamentos após os blocos, é dada por:

Fonte de variação	Soma de quadrados	Graus de liberdade	Esperança dos quadrados médios
Blocos (ignorando tratamentos)	$SQB = \sum_{j=1}^b \frac{B_j^2}{k_j} - \frac{G^2}{N}$	$b-1$	
Tratamentos ajustados (isto é, eliminando os blocos)	$SQT_{ajust.} = \sum_{i=1}^v \hat{\tau}_i Q_i$	$v-1$	$\sigma_e^2 + \frac{\boldsymbol{\tau}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\tau}}{v-1}$
Erro	$SQE = SQT_{total} - SQB - SQT_{ajust}$	$n-b-v+1$	σ_e^2
Total	$SQT_{total} = \sum_{ij\ell} y_{ij\ell}^2 - \frac{G^2}{N}$	$n-1$	

Tabela 3.1: ANOVA Intrabloco para os Planos em Blocos Incompletos para o modelo

$$\mathbf{y} = \mu \mathbf{J}_n + \mathbf{X}_\beta \boldsymbol{\beta} + \mathbf{X}_\tau \boldsymbol{\tau} + \mathbf{e}$$

A estatística de teste é dada por:

$$F = \frac{\frac{SQT_{ajust}}{v-1}}{\frac{SQE}{n-b-v+1}}.$$

Note-se que $SQE / (n-b-v+1)$ é um estimador de σ_e^2 que permite estimar (3.12), isto é, a $\text{var}(\mathbf{c}^T \hat{\boldsymbol{\tau}})$.

Recorrendo ao modelo (3.3): $\mathbf{y} = \mu \mathbf{J}_n + \mathbf{X}_\tau \boldsymbol{\tau} + \mathbf{X}_\beta \boldsymbol{\beta} + \mathbf{e}$, a seguinte tabela ANOVA revelar-se-á útil na análise combinada intra-interbloco. Esta análise é designada por blocos após os tratamentos, é dada por:

Fonte de variação	Soma de quadrados	Graus de liberdade
Tratamentos (ignorando os blocos)	$SQT = \sum_{i=1}^v \frac{T_i^2}{r_i} - \frac{G^2}{N}$	$v-1$
Blocos ajustados (isto é, eliminando os tratamentos)	$SQB_{ajustados} = SQT_{total} - SQE - SQT$	$b-1$
Erro	Da tabela 1.1.	$n-b-v+1$
Total	$SQT_{total} = \sum_{ij\ell} y_{ij\ell}^2 - \frac{G^2}{N}$	$n-1$

Tabela 3.2: ANOVA intrabloco para os Planos de Blocos Incompletos para o modelo
 $\mathbf{y} = \mu\mathbf{J}_n + \mathbf{X}_\tau\boldsymbol{\tau} + \mathbf{X}_\beta\boldsymbol{\beta} + \mathbf{e}$

3.2.2. Análise intrabloco de um PBIBD com duas classes de associação

Pretende comparar-se o efeito de v tratamentos distribuídos por b blocos, o mais possível homogêneos, num PBIBD com duas classes de associação. Neste modelo os tratamentos são distribuídos aleatoriamente pelos b blocos e pelas k unidades experimentais. A sua aplicação torna-se útil nos casos em que não existe interacção entre os blocos e os tratamentos, isto é quando os blocos não afectam significativamente o efeito dos tratamentos. Este modelo designa-se por análise intrabloco dado que as diferenças entre os blocos são eliminadas e as estimativas de todos os contrastes nos efeitos dos tratamentos podem ser expressas em termos de comparação entre parcelas do mesmo bloco.

Pretende testar-se as hipóteses $H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_v$ versus $H_1 : \exists \tau_i, \tau_i \neq 0$.

Considere-se o modelo estatístico (3.1): $y_{ijl} = \mu + \tau_i + \beta_j + e_{ijl}$, $i = 1, 2, \dots, v$; $j = 1, 2, \dots, b$, $l = 1, 2, \dots, n_{ij}$ e um PBIBD definido pelos parâmetros $v, b, r, k, \lambda_i, n_i, p_{jk}^i$ e $i, j, k = 1, 2, \dots, m$. Para um IBD, John (1971) mostra que (3.10) pode ser escrito como:

$$Q_h = \sum_{j=1}^b n_{hj}^2 \hat{\tau}_h - \sum_{i=1}^v \sum_{j=1}^b n_{ij} n_{ij} \hat{\tau}_i / k \quad (3.17)$$

Seja $\hat{\tau}_h$ o efeito do h -ésimo tratamento ($h=1,2,\dots,v$) e $S_j(\hat{\tau}_h)$ o somatório de todos os efeitos dos n_j tratamentos, j -ésimos associados de h , para $j=1,2,\dots,m$, então a equação reduzida do h -ésimo tratamento, $h=1,2,\dots,v$ pode ser escrita como

$$kQ_h = r(k-1)\hat{\tau}_h - \lambda_1 S_1(\hat{\tau}_h) - \lambda_2 S_2(\hat{\tau}_h) - \dots - \lambda_m S_m(\hat{\tau}_h) \quad (3.18)$$

$$\text{então: } kQ(\hat{\tau}_1) = r(k-1)\hat{\tau}_1 - \lambda_1 S_1(\hat{\tau}_1) - \lambda_2 S_2(\hat{\tau}_1) - \dots - \lambda_m S_m(\hat{\tau}_1)$$

$$kQ(\hat{\tau}_2) = r(k-1)\hat{\tau}_2 - \lambda_1 S_1(\hat{\tau}_2) - \lambda_2 S_2(\hat{\tau}_2) - \dots - \lambda_m S_m(\hat{\tau}_2)$$

⋮

$$kQ(\hat{\tau}_{n_j}) = r(k-1)\hat{\tau}_{n_j} - \lambda_1 S_1(\hat{\tau}_{n_j}) - \lambda_2 S_2(\hat{\tau}_{n_j}) - \dots - \lambda_m S_m(\hat{\tau}_{n_j})$$

Somando as n_j equações anteriores, obtém-se a equação:

$$kS_j(Q_h) = r(k-1)S_j(\hat{\tau}_h) - \lambda_1 P_1 - \lambda_2 P_2 - \dots - \lambda_m P_m, \quad (3.19)$$

$S_j(Q_h)$ encontra-se definido de forma análoga a $S_j(\hat{\tau}_h)$ e P_1, P_2, \dots, P_m são funções lineares dos efeitos dos tratamentos, tal que:

$$P_u = \sum_{i=1}^m p_{ju}^i S_i(\hat{\tau}_h), \quad u \neq j \text{ e } i = 1, 2, \dots, m$$

$$\text{e } P_j = n_j \hat{\tau}_h + \sum_{i=1}^m p_{jj}^i S_i(\hat{\tau}_h).$$

substituindo estas expressões em (3.19), vem para duas classes de associação:

$$kS_1(Q_h) = r(k-1)S_1(\hat{\tau}_h) - \lambda_1 P_1 - \lambda_2 P_2$$

$$\Leftrightarrow kS_1(Q_h) = r(k-1)S_1(\hat{\tau}_h) - \lambda_1 [n_1 \hat{\tau}_h + p_{11}^1 S_1(\hat{\tau}_h) + p_{11}^2 S_2(\hat{\tau}_h)] - \lambda_2 [p_{12}^1 S_1(\hat{\tau}_h) + p_{12}^2 S_2(\hat{\tau}_h)]$$

$$\Leftrightarrow kS_1(Q_h) = -n_1 \lambda_1 \hat{\tau}_h + S_1(\hat{\tau}_h) [r(k-1) - \lambda_1 p_{11}^1 - \lambda_2 p_{12}^1] + S_2(\hat{\tau}_h) [-\lambda_1 p_{11}^2 - \lambda_2 p_{12}^2] \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned}
kS_2(Q_h) &= r(k-1)S_2(\hat{\tau}_h) - \lambda_1 P_1 - \lambda_2 P_2 \\
\Leftrightarrow kS_2(Q_h) &= r(k-1)S_2(\hat{\tau}_h) - \lambda_1 [p_{21}^1 S_1(\hat{\tau}_h) + p_{21}^2 S_2(\hat{\tau}_h)] - \lambda_2 [n_2 \hat{\tau}_h + p_{22}^1 S_1(\hat{\tau}_h) + p_{22}^2 S_2(\hat{\tau}_h)] \\
\Leftrightarrow kS_2(Q_h) &= -\lambda_2 n_2 \hat{\tau}_h + [r(k-1) - \lambda_1 p_{21}^2 - \lambda_2 p_{22}^2] S_2(\hat{\tau}_h) + [-\lambda_1 p_{21}^1 - \lambda_2 p_{22}^1] S_1(\hat{\tau}_h) \quad (3.21)
\end{aligned}$$

Seguidamente, apresenta-se a resolução proposta por Rao (1947), para duas classes de associação.

Partindo da hipótese nula $\sum_h \hat{\tau}_h = 0 \Rightarrow \lambda_2 \sum_h \hat{\tau}_h = 0 \Rightarrow \lambda_2 [\hat{\tau}_h + S_1(\hat{\tau}_h) + S_2(\hat{\tau}_h)] = 0$ e com o intuito de eliminar $S_2(\hat{\tau}_h)$, vem somando à equação (3.18), para duas classes de associação:

$$\begin{aligned}
kQ_h &= r(k-1)\hat{\tau}_h - \lambda_1 S_1(\hat{\tau}_h) - \lambda_2 S_2(\hat{\tau}_h) + \lambda_2 [\hat{\tau}_h + S_1(\hat{\tau}_h) + S_2(\hat{\tau}_h)] = \\
&= [r(k-1) + \lambda_2] \hat{\tau}_h + (\lambda_2 - \lambda_1) S_1(\hat{\tau}_h).
\end{aligned}$$

$$\text{Sejam: } A_{12} = r(k-1) + \lambda_2 \quad (3.22)$$

$$\text{e } B_{12} = \lambda_2 - \lambda_1, \quad (3.23)$$

$$\text{então } kQ_h = A_{12} \hat{\tau}_h + B_{12} S_1(\hat{\tau}_h). \quad (3.24)$$

Por outro lado, a expressão (3.20) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
& -\lambda_1 n_1 \hat{\tau}_h + S_1(\hat{\tau}_h) [r(k-1) - \lambda_1 p_{11}^1 - \lambda_2 p_{12}^1] + S_2(\hat{\tau}_h) [-\lambda_1 p_{11}^2 - \lambda_2 p_{12}^2] + (\lambda_1 p_{11}^2 + \lambda_2 p_{12}^2) [\hat{\tau}_h + S_1(\hat{\tau}_h) + S_2(\hat{\tau}_h)] = \\
& = (-\lambda_1 n_1 + \lambda_1 p_{11}^2 + \lambda_2 p_{12}^2) \hat{\tau}_h + S_1(\hat{\tau}_h) [r(k-1) - \lambda_1 p_{11}^1 - \lambda_2 p_{12}^1 + \lambda_1 p_{11}^2 + \lambda_2 p_{12}^2] = \\
& = [-\lambda_1 (p_{11}^2 + p_{12}^2) + \lambda_1 p_{11}^2 + \lambda_2 p_{12}^2] \hat{\tau}_h + S_1(\hat{\tau}_h) [r(k-1) - \lambda_1 p_{11}^1 - \lambda_2 (n_1 - 1 - p_{11}^1) + \lambda_1 p_{11}^2 + \lambda_2 (n_1 - p_{11}^2)] = \\
& = (\lambda_2 - \lambda_1) p_{12}^2 \hat{\tau}_h + S_1(\hat{\tau}_h) [r(k-1) + \lambda_1 (p_{11}^2 - p_{11}^1) + \lambda_2 (p_{12}^2 - p_{12}^1)],
\end{aligned}$$

$$\text{então } kS_1(Q_h) = A_{22} \hat{\tau}_h + B_{22} S_1(\hat{\tau}_h), \quad (3.25)$$

$$\text{em que } A_{22} = (\lambda_2 - \lambda_1) p_{12}^2 \quad (3.26)$$

$$\text{e } B_{22} = r(k-1) + \lambda_2 + (\lambda_2 - \lambda_1)(p_{11}^1 - p_{11}^2). \quad (3.27)$$

Resolvendo as equações (3.24) e (3.25) em ordem a $S_1(\hat{\tau}_h)$ e igualando-as, obtém-se

$$\frac{kQ_h - A_{12}\hat{\tau}_h}{B_{12}} = \frac{kS_1(Q_h) + A_{22}\hat{\tau}_h}{B_{22}}, \text{ expressão que simplificada permite escrever:}$$

$$\hat{\tau}_h = \frac{k[B_{22}Q_h - B_{12}S_1(Q_h)]}{A_{12}B_{22} - A_{22}B_{12}} \quad (3.28)$$

$$\text{ou } \Delta_r \hat{\tau}_h = k[B_{22}Q_h - B_{12}S_1(Q_h)], \quad (3.29)$$

$$\text{sendo } A_{12}B_{22} - A_{22}B_{12} = \Delta_r.$$

Em John, Peter (1971) encontra-se que para um PBIBD com duas classe de associação, $c^{ii} = c^{i'i} = B_{22}k\Delta_r^{-1}$, $c^{ii'} = -kB_{12}\Delta_r^{-1}$, se h e i são primeiros associados e $c^{ii'} = 0$ se h e i são segundos associados. Substituindo em (3.16) obtêm-se as expressões:

$$V(\hat{\tau}_h - \hat{\tau}_i) = 2k(B_{22} + B_{12})\Delta_r^{-1}\sigma^2 = v_1, \text{ } h \text{ e } i \text{ primeiros associados;} \quad (3.30)$$

$$V(\hat{\tau}_h - \hat{\tau}_i) = 2kB_{22}\Delta_r^{-1}\sigma^2 = v_2, \text{ } h \text{ e } i \text{ segundos associados;} \quad (3.31)$$

$$\text{A média da variância é dada por } A.V. = \frac{n_1v_1 + n_2v_2}{n_1 + n_2}.$$

3.3. Análise interbloco

3.3.1. Análise interbloco para o caso geral dos PBI

Yates (1939, 1940) argumentou que, para um Plano em Blocos Incompletos as comparações entre os totais dos blocos contêm informação sobre a comparação dos tratamentos, pelo que desenvolveu o estudo da análise interbloco. Considerem-se, a título de exemplo, os blocos:

Bloco 1: y_{51}, y_{31}, y_{11}

Bloco 2: y_{22}, y_{42}, y_{32}

Sejam $B_1 = y_{51} + y_{31} + y_{11}$ e $B_2 = y_{22} + y_{42} + y_{32}$. Recorrendo ao modelo (3.1) pode escrever-se:

$$B_1 - B_2 : (\tau_5 + \tau_2 + \tau_1) - (\tau_2 + \tau_4 + \tau_3) + 3\beta_1 - 3\beta_2 + (e_{51} + e_{31} + e_{11}) - (e_{22} + e_{42} + e_{32})$$

Assumindo que β_j são variáveis aleatórias de média zero então:

$$E(B_1 - B_2) = \tau_1 + \tau_5 - \tau_2 - \tau_4$$

e, desta forma, pode concluir-se que a comparação entre os blocos contém informação acerca da comparação dos tratamentos, pelo que será conveniente estudar a análise interbloco.

O modelo estatístico a considerar é o modelo (3.3):

$$\mathbf{y} = \mu \mathbf{J}_n + \mathbf{X}_\tau \boldsymbol{\tau} + \mathbf{X}_\beta \boldsymbol{\beta} + \mathbf{e}$$

assumindo que o vector $\boldsymbol{\beta}$ é aleatório, a $E(\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{0}$ e a $\text{var}(\boldsymbol{\beta}) = \sigma_\beta^2 \mathbf{I}$.

Como foi referido anteriormente a análise interbloco tem por base a soma dos totais dos blocos e não a observação individual de cada célula, pelo que se irá considerar:

$$\mathbf{X}_\beta^T \mathbf{y} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_b \end{bmatrix} \mu + \mathbf{N}^T \boldsymbol{\tau} + \mathbf{K} \boldsymbol{\beta} + \mathbf{X}_\beta^T \mathbf{e}$$

$$\text{então tem-se que } E(\mathbf{X}_\beta^T \mathbf{y}) = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_b \end{bmatrix} \mu + \mathbf{N}^T \boldsymbol{\tau} \quad (3.28)$$

A matriz de variância-covariância para este modelo é dada por:

$$\text{var}(\mathbf{X}_\beta^T \mathbf{y}) = \mathbf{K}^2 \sigma_\beta^2 + \mathbf{K} \sigma_e^2$$

$$\text{então } \text{var}(\mathbf{X}_\beta^T \mathbf{y}) = \mathbf{K} \left(\mathbf{I} + \frac{\sigma_\beta^2}{\sigma_e^2} \mathbf{K} \right) \sigma_e^2 = \mathbf{L} \sigma_e^2$$

$$\text{e } \mathbf{L} = \text{diag} \{ \ell_j \} = \text{diag} \left\{ k_j \left(1 + \frac{\sigma_\beta^2}{\sigma_e^2} k_j \right) \right\} = \text{diag} \left\{ k_j \frac{w_1}{w_2^{-1}} \right\} = \text{diag} \{ k_j \rho_j \}$$

$$\text{com } w_1 = \frac{1}{\sigma_e^2} \quad (3.29)$$

$$w_2^{-1} = \frac{1}{\sigma_e^2 + k_j \sigma_\beta^2} \quad (3.30)$$

$$\rho_j = \frac{w_1}{w_2^{-1}} = \frac{\sigma_e^2 + k_j \sigma_\beta^2}{\sigma_e^2} \quad (3.31)$$

Os coeficientes w_1 e w_2^{-1} são designados por pesos intrablocos e interbloco respectivamente, sendo w_1 o equivalente à variância intrablocos e w_2^{-1} de forma análoga representa a variância interbloco.

Em Hinkelmann e Kempthorne (2005) encontra-se a solução das equações interbloco e o seu estudo detalhado. Os mesmos autores afirmam que quando $b < v$, isto é quando o delineamento é um IBD, a característica da matriz que contém a solução das equações interbloco é inferior a v , o que significa que a informação interbloco não está disponível para todos os contrastes dos tratamentos, sendo portanto recomendável recorrer à informação combinada intra-interbloco.

3.4. Análise combinada intra-interbloco

3.4.1. Análise combinada intra-interbloco para o caso geral dos PBI

A análise intrablocos e interbloco podem ser conjugadas de forma a encontrar a melhor função estimável dos efeitos dos tratamentos, sendo para tal necessário somar os coeficientes das matrizes das equações normais reduzidas da informação intrablocos e os coeficientes das matrizes das equações normais interbloco, o que permitirá obter um sistema de equações em ordem a $\tau_1^*, \tau_2^*, \dots, \tau_v^*$, que representa o efeito dos tratamentos para a análise combinada intra-interbloco. A solução destas equações permitirá encontrar os estimadores dos contrastes dos tratamentos.

Retomando o modelo (1.1)

$$y_{ij\ell} = \mu + \tau_{j\ell} + \beta_j + e_{j\ell}, \quad j = 1, 2, \dots, b \text{ e } \ell = 1, 2, \dots, k_j. \quad (3.32)$$

Neste modelo, $\tau_{j\ell}$ representa o efeito do tratamento aplicado à ℓ -ésima unidade experimental do j -ésimo bloco e β_j são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com $E(\beta) = 0$, $\text{var}(\beta) = \sigma_\beta^2$ e $e_{j\ell}$ são variáveis aleatórias i.i.d. com $E(e_{j\ell}) = 0$.

Em Hinkelmann e Kempthorne (2005) prova-se que a solução das equações normais reduzidas para a análise combinada intra-interbloco é dada por:

$$\left[\mathbf{R} - \mathbf{N}\mathbf{K}^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{S}^{-1}) \right] \hat{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{T} - \mathbf{N}\mathbf{K}^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{S}^{-1})\mathbf{B} \quad (3.33)$$

em $\mathbf{S} = \text{diag}(\rho_j)$, que podem ser escritas como:

$$\mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{P} \quad (3.34)$$

$$\text{ou } \hat{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{P} \quad (3.35)$$

$$\text{var}\left(\hat{\tau}_i - \hat{\tau}_{i'}\right) = \left(a^{ii} + a^{i'i'} - 2a^{ii'}\right)\sigma_e^2 \quad (3.36)$$

para o qual $a^{ii'}$ representa o elemento de ordem (i, i') da matriz \mathbf{A}^{-1} .

Note-se que \mathbf{A}^{-1} vem em função de σ_β^2 e de σ_e^2 . Salienta-se ainda, o facto de num delineamento equirreplicado e próprio, isto é, se $r_i = r$ e $k_i = k$, se tem:

$$\left[r\mathbf{I} - \frac{1}{k}(1 - \rho^{-1})\mathbf{N}\mathbf{N}^T \right] \hat{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{T} - \frac{1}{k}(1 - \rho^{-1})\mathbf{N}\mathbf{B}. \quad (3.37)$$

Para estimar os pesos w_1 e w_2 , irá recorrer-se aos estimadores referidos em Dey (1986):

$$\hat{w}_1 = \frac{1}{\sigma_e^2} \quad (3.38)$$

$$\text{e } \hat{w}_2 = \frac{v(r-1)}{k(b-1)\sigma_b^2 - (v-k)\sigma_e^2}. \quad (3.39)$$

3.4.2. Análise combinada intra-interbloco de um PBIBD com duas classes de associação

Em Dey (1986) refere-se que as equações normais das equações combinadas intra bloco são:

$$r[w_1(k-1)+w_2]\hat{\tau}_h - (w_1 - w_2)\left[\lambda_1 S_1(\hat{\tau}_h) + \lambda_2 S_2(\hat{\tau}_h)\right] = w_1 k Q_h + w_2 P_h \quad (3.40)$$

com $P_h = \sum_{j(h)} B_j - (r/b)G$, no qual $\sum_{j(h)} B_j$ representa o somatório dos totais dos blocos que contém o h -ésimo tratamento e G a soma de todas as observações.

Por um processo análogo à análise intrabloco para os PBIBD com duas classes de associação, considere-se a restrição $\hat{\tau}_h + S_1(\hat{\tau}_h) + S_2(\hat{\tau}_h) = 0$ e eliminando $S_2(\hat{\tau}_h)$ da expressão (3.40) obtêm-se:

$$\left[r(w_1(k-1)+w_2) + (w_1 - w_2)\lambda_2\right]\hat{\tau}_h + (w_1 - w_2)(\lambda_2 - \lambda_1)S_1(\hat{\tau}_h) = w_1 k Q_h + w_2 P_h, \quad h = 1, 2, \dots, v.$$

Somando as equações anteriores ao longo dos primeiros associados de $\hat{\tau}_h$ e eliminado $S_2(\hat{\tau}_h)$ vem:

$$(w_1 - w_2)(\lambda_2 - \lambda_1)p_{12}^2 \hat{\tau}_h + S_1(\hat{\tau}_h)\left(r[(k-1)w_1 + w_2] + (w_1 - w_2)\left[\lambda_2 + (\lambda_2 - \lambda_1)(p_{11}^1 - p_{11}^2)\right]\right) = S_1(R_h)$$

com $R_h = w_1 k Q_h + w_2 P_h$.

Resolvendo as equações $\hat{\tau}_h$ por um processo análogo às equações intrabloco vem

$$\hat{\tau}_h = \frac{k\left[B_{22}^* R_h - B_{12}^* S_1(R_h)\right]}{A_{12}^* B_{22}^* - B_{12}^* A_{22}^*}, \quad h = 1, 2, \dots, v \quad (3.41)$$

$$\text{com } A_{12}^* = r[w_1(k-1) + w_2 + (w_1 - w_2)\lambda_2], \quad (3.42)$$

$$B_{12}^* = (\lambda_2 - \lambda_1)(w_1 - w_2), \quad (3.43)$$

$$A_{22}^* = (w_1 - w_2)(\lambda_2 - \lambda_1)p_{12}^2 \quad (3.44)$$

$$\text{e } B_{22}^* = r[w_1(k-1) + w_2] + (w_1 - w_2)\left[\lambda_2 + (\lambda_2 - \lambda_1)(p_{11}^1 - p_{11}^2)\right]. \quad (3.45)$$

A partir da expressão (3.36) obtêm-se as expressões:

$$V(\hat{\tau}_h^* - \hat{\tau}_i^*) = \frac{2k(B_{22}^* + B_{12}^*)}{A_{12}^*B_{22}^* - B_{12}^*A_{22}^*}, \quad h \text{ e } i \text{ primeiros associados;} \quad (3.46)$$

$$V(\hat{\tau}_h^* - \hat{\tau}_i^*) = \frac{2kB_{22}^*}{A_{12}^*B_{22}^* - B_{12}^*A_{22}^*}, \quad h \text{ e } i \text{ segundos associados.} \quad (3.47)$$

3.4.3 Exemplo da análise de variância de um PBIBD com duas classes de associação

A partir das tabelas de PBIBD, para duas classes de associação, construídas por Bose, Clatworthy e Shrikhande (1954), seleccionou-se o seguinte plano, definido pelos parâmetros $v = 9, b = 9, r = 3, k = 3, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0, n_1 = 6 \text{ e } n_2 = 2$:

Bloco 1 3 8 4	Bloco 2 2 7 4	Bloco 3 1 7 5
Bloco 4 7 8 9	Bloco 5 4 5 6	Bloco 6 3 9 5
Bloco 7 1 8 6	Bloco 8 2 9 6	Bloco 9 1 2 3

Esquema 3.1: PBIBD com duas classes de associação ($v = 9, b = 9, r = 3, k = 3, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0$)

Na tabela seguinte apresentam-se as respectivas classes de associação:

Tratamento	Primeiros associados						Segundos associados	
1	2	3	5	7	6	8	4	9
2	1	3	4	6	7	9	5	8
3	1	2	4	5	8	9	6	7
4	2	3	5	6	7	8	1	9
5	1	3	4	6	7	9	2	8
6	1	2	4	5	8	9	3	7
7	1	2	4	5	8	9	3	6
8	1	3	4	6	7	9	2	5
9	2	3	5	6	7	8	1	4

Tabela 3.3: Classes de associação do PBIBD ($v = 9, b = 9, r = 3, k = 3, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0$)

Considerem-se como primeiros associados, por exemplo, os tratamentos 1 e 2, então:

$$p_{11}^1 = \#\{\{2,3,5,6,7,8\} \cap \{1,3,4,6,7,9\}\} = 3$$

$$p_{12}^1 = \#\{\{2,3,5,6,7,8\} \cap \{5,8\}\} = 2$$

$$p_{21}^1 = \#\{\{5,8\} \cap \{2,3,5,6,7,8\}\} = 2$$

$$p_{22}^1 = \#\{\{5,8\} \cap \{4,9\}\} = 0$$

Considerem-se como segundos associados, por exemplo, os tratamentos 1 e 4, então:

$$p_{11}^2 = \#\{\{2,3,5,6,7,8\} \cap \{2,3,5,6,7,8\}\} = 6$$

$$p_{12}^2 = \#\{\{2,3,5,6,7,8\} \cap \{1,9\}\} = 0$$

$$p_{21}^2 = \#\{\{4,9\} \cap \{2,3,5,6,7,8\}\} = 0$$

$$p_{22}^2 = \#\{\{4,9\} \cap \{1,9\}\} = 1$$

Escrevendo a informação anterior sob a forma de notação matricial vem:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } P_2 = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pretende estudar-se o efeito de nove tipos de adubos ($v=9$), na produção de sementes, em gramas, colhidas em nove parcelas ($b=9$). Cada parcela contém três unidades experimentais ($k=3$). Neste delineamento, cada tratamento foi repetido três vezes ($r=3$) e cada par de tratamentos primeiros associados ocorre no mesmo bloco uma única vez ($\lambda_1=1$). Os pares de tratamentos segundos associados nunca ocorrem no mesmo bloco ($\lambda_2=0$). Cada tratamento tem seis tratamentos primeiros associados ($n_1=6$) e dois tratamentos segundos associados ($n_2=2$). Admita-se a título exemplificativo que se obtiveram os seguintes resultados:

Bloco 1	Bloco 2	Bloco 3																		
<table border="1"> <tr><td>3</td><td>8</td><td>4</td></tr> <tr><td>59</td><td>56</td><td>53</td></tr> </table>	3	8	4	59	56	53	<table border="1"> <tr><td>2</td><td>7</td><td>4</td></tr> <tr><td>35</td><td>33</td><td>40</td></tr> </table>	2	7	4	35	33	40	<table border="1"> <tr><td>1</td><td>7</td><td>5</td></tr> <tr><td>48</td><td>42</td><td>42</td></tr> </table>	1	7	5	48	42	42
3	8	4																		
59	56	53																		
2	7	4																		
35	33	40																		
1	7	5																		
48	42	42																		
Bloco 4	Bloco 5	Bloco 6																		
<table border="1"> <tr><td>7</td><td>8</td><td>9</td></tr> <tr><td>46</td><td>56</td><td>51</td></tr> </table>	7	8	9	46	56	51	<table border="1"> <tr><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr> <tr><td>61</td><td>61</td><td>55</td></tr> </table>	4	5	6	61	61	55	<table border="1"> <tr><td>3</td><td>9</td><td>5</td></tr> <tr><td>52</td><td>53</td><td>48</td></tr> </table>	3	9	5	52	53	48
7	8	9																		
46	56	51																		
4	5	6																		
61	61	55																		
3	9	5																		
52	53	48																		
Bloco 7	Bloco 8	Bloco 9																		
<table border="1"> <tr><td>1</td><td>8</td><td>6</td></tr> <tr><td>54</td><td>58</td><td>62</td></tr> </table>	1	8	6	54	58	62	<table border="1"> <tr><td>2</td><td>9</td><td>6</td></tr> <tr><td>45</td><td>46</td><td>47</td></tr> </table>	2	9	6	45	46	47	<table border="1"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr> <tr><td>31</td><td>27</td><td>35</td></tr> </table>	1	2	3	31	27	35
1	8	6																		
54	58	62																		
2	9	6																		
45	46	47																		
1	2	3																		
31	27	35																		

Esquema 3.2:

Resultados obtidos na concretização de uma experiência de um PBIBD ($v=9, b=9, r=3, k=3, \lambda_1=1, \lambda_2=0$)

Análise intrabloco

Considere-se que a variável aleatória $y_{ij\ell}$ representa a quantidade em gramas de sementes colhidas sujeitas ao tratamento j , no bloco i na ℓ -ésima unidade experimental, com $1 \leq i \leq 9, 1 \leq j \leq 9$ e $1 \leq \ell \leq 3$.

Pretende testar-se a hipótese $\mathbf{H}_0: \tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_9$, versus $\mathbf{H}_1: \exists_{i,j}: \tau_i \neq \tau_j$.

A partir dos dados anteriores constata-se que o número de observações é $N=27$ e determina-se o grande total, isto é $G=59+56+53+\dots+27+35=1296$. Além disso,

$$CF = \frac{G^2}{N} = \frac{1296^2}{27} = 62208.$$

A partir das expressões (3.22), (3.23), (3.26) e (3.27): $A_{12} = r(k-1) + \lambda_2$, $B_{12} = \lambda_2 - \lambda_1$, $A_{22} = (\lambda_2 - \lambda_1)p_{12}^2$ e $B_{22} = r(k-1) + \lambda_2 + (\lambda_2 - \lambda_1)(p_{11}^1 - p_{11}^2)$ e procedendo à substituição dos parâmetros, conclui-se que $A_{12} = 6$, $B_{12} = -1$, $A_{22} = 0$ e $B_{22} = 9$. Para estimar as componentes de variância, tem-se:

$$V(\hat{\tau}_h - \hat{\tau}_i) = 2k(B_{22} + B_{12})\Delta_r^{-1}\sigma^2 = \frac{2 \times 3 \times (9-1)}{6 \times 9 + 1 \times 0}\sigma^2 = \frac{8}{9}\sigma^2, \text{ } h \text{ e } i \text{ 1.}^\circ\text{s associados;}$$

$$V(\hat{\tau}_h - \hat{\tau}_i) = 2kB_{22}Q_h\Delta_r^{-1}\sigma^2 = \frac{2 \times 3 \times 9}{6 \times 9 + 1 \times 0}\sigma^2 = \sigma^2, \text{ } h \text{ e } i \text{ 2.}^\circ\text{s associados;}$$

Dado que $\hat{\tau}_i = k[B_{22}Q_i - B_{12}S_1(Q_i)] / (A_{12}B_{22} - A_{22}B_{12})$, então $\hat{\tau}_i = 3[9Q_i + S_1(Q_i)] / 54$.

Bloco 1	Bloco 2	Bloco 3	Bloco 4	Bloco 5	Bloco 6	Bloco 7	Bloco 8	Bloco 9
59	35	48	46	61	52	54	45	31
56	33	42	56	61	53	58	46	27
53	40	42	51	55	48	62	47	35
$B_1 = 168$	$B_2 = 108$	$B_3 = 132$	$B_4 = 153$	$B_5 = 177$	$B_6 = 153$	$B_7 = 174$	$B_8 = 138$	$B_9 = 93$

Tabela 3.4: Soma dos efeitos dos tratamentos para cada bloco

Tratamento								
1	2	3	4	5	6	7	8	9
48	35	59	53	42	55	33	56	53
54	45	52	40	61	62	42	56	51
31	27	35	61	48	47	46	58	46
$T_1 = 133$	$T_2 = 107$	$T_3 = 146$	$T_4 = 154$	$T_5 = 151$	$T_6 = 164$	$T_7 = 121$	$T_8 = 170$	$T_9 = 150$

Tabela 3.5: Soma dos efeitos de cada tratamento

Tratamento	Blocos em que ocorre o tratamento	$\sum_{j(i)} B_j$	$\frac{1}{k} \sum_{j(i)} B_j$	T_i	$Q_i = T_i - \sum_{j(i)} B_j / k$
1	3, 7, 9	$B_3 + B_7 + B_9 = 399$	133	$T_1 = 133$	$Q_1 = 0$
2	2, 8, 9	$B_2 + B_8 + B_9 = 339$	113	$T_2 = 107$	$Q_2 = -6$
3	1, 6, 9	$B_1 + B_6 + B_9 = 414$	138	$T_3 = 146$	$Q_3 = 8$
4	1, 2, 5	$B_1 + B_2 + B_5 = 453$	151	$T_4 = 154$	$Q_4 = 3$
5	3, 5, 6	$B_3 + B_5 + B_6 = 462$	154	$T_5 = 151$	$Q_5 = -3$
6	5, 7, 8	$B_5 + B_7 + B_8 = 489$	163	$T_6 = 164$	$Q_6 = 1$
7	2, 3, 4	$B_2 + B_3 + B_4 = 393$	131	$T_7 = 121$	$Q_7 = -10$
8	1, 4, 7	$B_1 + B_4 + B_7 = 495$	165	$T_8 = 170$	$Q_8 = 5$
9	4, 6, 8	$B_4 + B_6 + B_8 = 444$	148	$T_9 = 150$	$Q_9 = 2$

Tabela 3.6: Cálculos conducentes à análise intrabloco

$S_1(Q_i)$	$\hat{\tau}_i = 3[9Q_i + S_1(Q_i)]/54$
$S_1(Q_1) = Q_2 + Q_3 + Q_5 + Q_6 + Q_7 + Q_8 = -5$	$\hat{\tau}_1 = -5/18$
$S_1(Q_2) = Q_1 + Q_3 + Q_4 + Q_6 + Q_7 + Q_9 = 4$	$\hat{\tau}_2 = -50/18$
$S_1(Q_3) = Q_1 + Q_2 + Q_4 + Q_5 + Q_8 + Q_9 = 1$	$\hat{\tau}_3 = 73/18$
$S_1(Q_4) = Q_2 + Q_3 + Q_5 + Q_6 + Q_7 + Q_8 = -5$	$\hat{\tau}_4 = 22/18$
$S_1(Q_5) = Q_1 + Q_3 + Q_4 + Q_6 + Q_7 + Q_9 = 4$	$\hat{\tau}_5 = -23/18$
$S_1(Q_6) = Q_1 + Q_2 + Q_4 + Q_5 + Q_8 + Q_9 = 1$	$\hat{\tau}_6 = 10/18$
$S_1(Q_7) = Q_1 + Q_2 + Q_4 + Q_5 + Q_8 + Q_9 = 1$	$\hat{\tau}_7 = -89/18$
$S_1(Q_8) = Q_1 + Q_3 + Q_4 + Q_6 + Q_7 + Q_9 = 4$	$\hat{\tau}_8 = 49/18$
$S_1(Q_9) = Q_2 + Q_3 + Q_5 + Q_6 + Q_7 + Q_8 = -5$	$\hat{\tau}_9 = 13/18$

Tabela 3.7: Estimativas dos efeitos dos tratamentos

Seguidamente, serão determinados os valores necessários para preencher a tabela ANOVA:

Soma dos quadrados total:

$$SQT_{total} = \sum y_{ij\ell}^2 - CF = 59^2 + 56^2 + 53^2 + \dots + 35^2 - 62208 = 64698 - 62208 = 2490$$

Soma dos quadrados dos blocos:

$$SQB = \frac{1}{k} \sum B_j^2 - CF = \frac{193428}{3} - 62208 = 2268$$

Soma de quadrados de tratamentos ajustados $\left(SQT_{ajust.} = \sum_{i=1}^v \hat{\tau}_i Q_i \right)$:

$$SQT_{ajust.} = -0 \times \frac{5}{18} + 6 \times \frac{50}{18} + 8 \times \frac{73}{18} + 3 \times \frac{22}{18} + 3 \times \frac{23}{18} + 1 \times \frac{10}{18} + 10 \times \frac{89}{18} + 5 \times \frac{49}{18} + 2 \times \frac{13}{18} = \frac{365}{3}$$

Soma de quadrados do erro:

$$SQE = SQT_{total} - SQB - SQT_{ajust} = 2490 - 2268 - 365/3 = 100,33$$

Análise intrabloco				
Fonte de variação	Soma de quadrados	Graus de liberdade	Quadrados Médios	Estatística de teste
Blocos desajustados (ignorando tratamentos)	$SQB = 2268$	8		
Tratamentos (ajustados), isto é eliminando os blocos	$SQT_{ajust} = 121,67$	8	$\frac{SQT_{ajust.}}{v-1} = 15,21$	$F_T = 1,52$
Erro	$SQE = 100,33$	10	$\frac{SQE}{n-b-v+1} = 10,03$	
Total	$SQT_{total} = 2490$	26		

Tabela 3.8: Análise intrabloco dos resultados obtidos na concretização de uma experiência de um PBIBD
($v=9, b=9, r=3, k=3, \lambda_1=1, \lambda_2=0$)

Nas tabelas da distribuição F de Snedcor encontra-se para $F(t-1, bk-b-v+1); \alpha$, neste caso, $F_{8;10;0,05} = 3,07$. Como o valor observado $F_T = 1,52 < F_{8;10;0,05} = 3,07$, não se rejeita a hipótese nula, com uma significância a 5%, isto é não há diferenças significativas entre os tratamentos.

Para estimar as componentes de variância, para $\sigma^2 = 10,03$, tem-se portanto:

$$V(\hat{\tau}_h - \hat{\tau}_i) = \frac{8}{9} \sigma^2 = 8,9182, \text{ } h \text{ e } i \text{ 1.}^{os} \text{ associados;}$$

$$V(\hat{\tau}_h - \hat{\tau}_i) = \sigma^2 = 10,03, \text{ } h \text{ e } i \text{ 2.}^{os} \text{ associados.}$$

Análise combinada intra-interbloco

Seguidamente, irá proceder-se à estimativa dos pesos w_1 e w_2 , considerando que

$$\hat{w}_1 = \frac{1}{\sigma_e^2} \text{ e } \hat{w}_2 = \frac{v(r-1)}{k(b-1)\sigma_b^2 - (v-k)\sigma_e^2}, \text{ então:}$$

$$\hat{w}_1 = \frac{1}{10,033} \text{ e}$$

$$\hat{w}_2 = \frac{3}{4 \times \sigma_b^2 - \sigma_e^2} = \frac{3}{4 \times 136,83375 - 10,033} = 0,005583452 ,$$

dados que $\sigma_b^2 = \frac{SQB_{ajust}}{b-1} = \frac{1094,67}{8} = 136,83375 .$

A expressão $R_i = \hat{w}_1 k Q_i + \hat{w}_2 P_i$ será dada por $R_i = \frac{1}{10,033} \times 3 \times Q_i + 0,005583452 .$

A partir das expressões (3.42), (3.43), (3.44) e (3.45) e procedendo à substituição dos parâmetros, conclui-se que $A_{12}^* = 0,61478$, $B_{12}^* = 0,09409$, $A_{22}^* = 0$ e $B_{22}^* = 0,89704$.

O efeito dos tratamentos $\hat{\tau}_i^* = \frac{B_{22}^* R_i - B_{12}^* S_1(R_i)}{A_{12}^* B_{22}^* - B_{12}^* A_{22}^*}$ será expresso como

$$\hat{\tau}_i^* = \frac{0,89704 R_i - 0,09409 S_1(R_i)}{0,55170} .$$

Conclui-se portanto que:

Tratamento	$P_i = \sum_{j(i)} B_j - rG/b$	$R_i = \hat{w}_1 k Q_i + \hat{w}_2 P_i$	$S_1(R_i)$	$\hat{\tau}_i^*$
1	$P_1 = -33$	$R_1 = -0,1843$	$S_1(R_1) = -1,4951$	$\hat{\tau}_1^* = -0,0446$
2	$P_2 = -93$	$R_2 = -2,3133$	$S_1(R_2) = 1,1961$	$\hat{\tau}_2^* = -3,9654$
3	$P_3 = -18$	$R_3 = 2,2916$	$S_1(R_3) = 0,299$	$\hat{\tau}_3^* = 3,6751$
4	$P_4 = 21$	$R_4 = 1,0143$	$S_1(R_4) = -1,4951$	$\hat{\tau}_4^* = 1,9042$
5	$P_5 = 30$	$R_5 = -0,7295$	$S_1(R_5) = 1,1961$	$\hat{\tau}_5^* = -1,3902$
6	$P_6 = 57$	$R_6 = 0,6173$	$S_1(R_6) = 0,299$	$\hat{\tau}_6^* = 0,9527$
7	$P_7 = -39$	$R_7 = -3,2079$	$S_1(R_7) = 0,299$	$\hat{\tau}_7^* = -5,2669$
8	$P_8 = 63$	$R_8 = 1,8468$	$S_1(R_8) = 1,1961$	$\hat{\tau}_8^* = 2,7989$
9	$P_9 = 12$	$R_9 = 0,6650$	$S_1(R_9) = -1,495$	$\hat{\tau}_9^* = 1,3363$

Tabela 3.9: Cálculos conducentes à análise combinada intra-interbloco

Para estimar as componentes de variância tem-se portanto:

$$V(\hat{\tau}_h^* - \hat{\tau}_i^*) = \frac{2k(B_{22}^* + B_{12}^*)}{A_{12}^* B_{22}^* - B_{12}^* A_{22}^*} = 10,7833 , h \text{ e } i \text{ primeiros associados;}$$

$$V(\hat{\tau}_h^* - \hat{\tau}_i^*) = \frac{2kB_{22}^*}{A_{12}^*B_{22}^* - B_{12}^*A_{22}^*} = 9,7596, \text{ h e i segundos associados;}$$

Seguidamente, calcula-se:

$$SQB_{ajustados} = SQT_{total} + SQB - SQT = 121,67 + 2268 - 1094,67 = 1295 \text{ e}$$

$$SQT = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^v T_i^2 - \frac{G^2}{N} = \frac{189908}{3} - \frac{1296^2}{27} = 1094,67.$$

Análise combinada intra-interbloco				
Fonte de variação	Soma de quadrados	Graus de liberdade	Quadrados Médios	Estatística de teste
Blocos ajustados (eliminando os tratamentos)	$SQB_{ajust.} = 1295$	8	$\frac{SQB_{ajust}}{b-1} = 161,88$	16,138
Tratamentos desajustados (ignorando blocos)	$SQT = 1094,67$	8		
Erro	$SQE = 100,33$	10	$\frac{SQE}{n-b-v+1} = 10,033$	
Total	$SQT_{total} = 2490$	26		

Tabela 3.10: Análise combinada intra-interbloco dos resultados obtidos na concretização de uma experiência de um PBIBD ($v = 9, b = 9, r = 3, k = 3, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0$)

Nas tabelas da distribuição F de Snedcor encontra-se para $F(t-1, bk-b-v+1); \alpha$, neste caso $F_{8;10;0,05} = 3,07$. Como o valor observado $F_T = 16,138 > F_{8;10;0,05} = 3,07$, rejeita-se a hipótese nula, com uma significância a 5%, isto é, há evidência de diferenças significativas entre os blocos ajustados (eliminando os tratamentos).

Chama-se a atenção para a importância de recorrer a métodos de comparação múltipla de Tukey, Scheffé ou Bonferroni, nos casos de rejeição da hipótese de igualdade entre tratamentos.

Capítulo 4

Classificação dos PBIBD

A observação de determinadas regularidades dos PBIBD suscitou o interesse na sua classificação, sendo este assunto estudado desde a sua introdução por Bose e Nair (1939). Inicialmente, o estudo realizou-se apenas para duas e três classes de associação e posteriormente expandiu-se para um número superior de classes.

No entanto, a classificação clássica mais abordada na literatura continua a ser a de Bose e Shimamoto (1952). Tabelas de PBIB com duas classes de associação encontram-se em Bose, Clatworthy e Shrikhande (1954) e em Clatworthy (1956). Em Morales (2005) podem encontrar-se 30 novos PBIBD ($m = 2$) cíclicos. Todos os PBIBD conhecidos com três classes de associação estão catalogados em Varghese *et al* (2008) e foram identificados no total 615 planos.

Neste capítulo irá estudar-se a classificação dos PBIBD procurando sempre que possível apresentar exemplos e ilustrar com representações esquemáticas.

4.1 Classificação dos PBIBD($m = 2$)

4.1.1 PBIBD($m = 2$) Divisível em Grupos

Considere-se um PBIBD com duas classes de associação. Se os v tratamentos puderem ser agrupados em m grupos contendo cada um n tratamentos ($n > 1$) e se $v = mn$, então o PBIBD diz-se divisível em grupos. Assim, quaisquer dois tratamentos do mesmo grupo são primeiros associados e dois tratamentos de grupos distintos são segundos associados. Os v tratamentos são representados numa matriz de m linhas por n colunas.

Os parâmetros de um PBIBD divisível em grupos são $n_1 = n-1$, $n_2 = n(m-1)$,

$$P_1 = \begin{bmatrix} n-2 & 0 \\ 0 & n(m-1) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0 & n-1 \\ n-1 & n(m-2) \end{bmatrix}.$$

Os valores próprios associados de \mathbf{NN}^T são $\theta_0 = rk$, $\theta_1 = rk - v\lambda_2$ e $\theta_2 = r - \lambda_1$ com as respectivas multiplicidades 1, $m(n-1)$ e $m-1$, dado que:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= r - \frac{1}{2} [(\lambda_1 - \lambda_2)[- \gamma - \sqrt{\Delta}] + (\lambda_1 + \lambda_2)] = \\ &= r + \frac{1}{2} [(\lambda_1 - \lambda_2) \left[(p_{12}^2 - p_{12}^1) + \sqrt{(p_{12}^2 - p_{12}^1)^2 + 2(p_{12}^1 + p_{12}^2) + 1} \right] - (\lambda_1 + \lambda_2)] = \\ &= r + \frac{1}{2} [(\lambda_1 - \lambda_2) \left[(n-1) + \sqrt{(n-1)^2 + 2(n-1) + 1} \right] - (\lambda_1 + \lambda_2)] = \\ &= r + \frac{1}{2} [(\lambda_1 - \lambda_2)(2n-1) - (\lambda_1 + \lambda_2)] = r + \frac{1}{2} (2n\lambda_1 - 2\lambda_1 - 2n\lambda_2) = r + n\lambda_1 - \lambda_1 - n\lambda_2 = \\ &= r + (n_1 + 1)\lambda_1 - \lambda_1 - (n_1 + 1)\lambda_2 = r + n_1\lambda_1 - n_1\lambda_2 - \lambda_2 = r + n_1\lambda_1 + n_2\lambda_2 - n_2\lambda_2 - n_1\lambda_2 - \lambda_2 = \\ &= r + \sum_{i=1}^m n_i\lambda_i - (n_1 + n_2 + 1)\lambda_2 = r + r(k-1) - \left(1 + \sum_{i=1}^m n_i\right)\lambda_2 = rk - v\lambda_2 \end{aligned}$$

$$\theta_2 = r - \frac{1}{2} [(\lambda_1 - \lambda_2)[-n+1+n] + (\lambda_1 + \lambda_2)] = r - \lambda_1$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{n_1 + n_2}{2} - \frac{n_1 - n_2 + (n-1)(n_1 + n_2)}{2n} = \frac{nn_1 + nn_2 - n_1 + n_2 - nn_1 - nn_2 + n_1 + n_2}{2n} = \frac{n_2}{n} = \\ &= \frac{n(m-1)}{n} = m-1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \frac{n_1 + n_2}{2} + \frac{n_1 - n_2 + (n-1)(n_1 + n_2)}{2n} = \frac{nn_1 + nn_2 + n_1 - n_2 + nn_1 + nn_2 - n_1 - n_2}{2n} = \frac{nn_1 + nn_2 - n_2}{n} = \\ &= \frac{n(n-1) + n^2(m-1) - n(m-1)}{n} = n-1 + n(m-1) - m+1 = m(n-1) \end{aligned}$$

Segundo Bose e Connor (1952), um PBIBD($m = 2$) classificado como divisível em grupos pode ainda ser subclassificado, de acordo com os valores próprios:

4.1.1.1 Singular: se $r - \lambda_1 = 0$;

4.1.1.2 Semi-Regular: se $r - \lambda_1 > 0$ e se $rk - v\lambda_2 = 0$;

4.1.1.3 Regular: se $r - \lambda_1 > 0$ e se $rk - v\lambda_2 > 0$.

Exemplo de um PBIB com duas classes de associação divisível em grupos

O exemplo referido no capítulo 2.2.3.1 é um plano divisível em grupos. Recorde-se que o plano se encontrava estruturado da seguinte forma:

B₁	B₂	B₃	B₄	B₅	B₆
1 2 3	2 5 6	3 4 6	3 4 5	1 2 4	1 5 6

Esquema 4.1: PBIBD divisível em grupos com duas classes de associação
($v = 6, b = 6, r = 3, k = 3, \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$)

Note-se que é possível constituir três grupos ($m = 3$) contendo cada um deles dois tratamentos ($n = 2$) tal que $v = 6$, sendo a matriz associada do esquema, dada por:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Dois tratamentos do mesmo grupo são primeiros associados e dois tratamentos de grupos distintos são segundos associados, isto é: os tratamentos 1 e 2 pertencem ao mesmo grupo e são por isso primeiros associados ($\lambda_1 = 2$ e $n_1 = 1$) e os tratamentos 3, 4, 5 e 6 são segundos associados ($\lambda_2 = 1$ e $n_2 = 4$).

Os parâmetros deste grupo divisível são:

$$\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Os valores próprios associados de \mathbf{NN}^T e as respectivas multiplicidades são:

$$\theta_0 = 9 \quad \theta_1 = 3 \quad \theta_2 = 1 \quad \alpha_0 = 1 \quad \alpha_1 = 3 \quad \alpha_2 = 2$$

Como $r - \lambda_1 > 0$ e $rk - v\lambda_2 > 0$ este esquema de associação é regular.

4.1.2 PBIBD($m = 2$) Simples

Um PBIBD com duas classes de associação diz-se simples se $(\lambda_1 \neq 0 \wedge \lambda_2 = 0) \vee (\lambda_1 = 0 \wedge \lambda_2 \neq 0)$. Um plano simples pode estar inserido num plano divisível em grupos, triangular, quadrado latino ou cíclico.

Nos planos em que $\lambda_2 = 0$, os tratamentos dos diferentes grupos nunca ocorrem simultaneamente no mesmo bloco e o delineamento designa-se por não conexo.

4.1.3 PBIBD($m = 2$) Triangular

Um PBIBD com duas classes de associação diz-se triangular se for possível escrever o número de tratamentos v como $v = n(n-1)/2$, tal que $n \geq 5$, e se for possível representar o esquema de associação numa matriz de dimensão $(n \times n)$ em que se verificam as seguintes condições:

- A diagonal principal não está preenchida;
- As $n(n-1)/2$ células acima da diagonal principal estão preenchidas com $1, 2, \dots, n(n-1)/2$ tratamentos distintos;
- As $n(n-1)/2$ células abaixo da diagonal principal estão preenchidas de forma a que a matriz seja simétrica em relação à diagonal principal;
- Para cada tratamento i os primeiros associados são somente os que ocorrem na mesma coluna (ou linha) em que i se encontra.

Os parâmetros correspondentes a este plano são $n_1 = 2(n-2)$, $n_2 = (n-2)(n-3)/2$,

$$\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} n-2 & n-3 \\ n-3 & (n-3)(n-4)/2 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} 4 & 2(n-4) \\ 2(n-4) & (n-4)(n-5)/2 \end{bmatrix}$$

Os valores próprios associados de \mathbf{NN}^T de um PBIBD, com duas classes de associação, classificado como triangular são $\theta_0 = rk$, $\theta_1 = r + (n-4)\lambda_1 - (n-3)\lambda_2$ e $\theta_2 = r - 2\lambda_1 + \lambda_2$ com as respectivas multiplicidades 1, $n-1$ e $n(n-3)/2$, dado que:

$$\begin{aligned}\theta_1 &= r - \frac{1}{2} \left[(\lambda_1 - \lambda_2) \left[-n + 5 - \sqrt{(n-2)^2} \right] + (\lambda_1 + \lambda_2) \right] = r - \frac{1}{2} \left[(\lambda_1 - \lambda_2)(-2n+7) + (\lambda_1 + \lambda_2) \right] = \\ &= r - \frac{1}{2} \left[\lambda_1(-2n+7+1) + \lambda_2(2n-7+1) \right] = r - \frac{1}{2} \left[\lambda_1(-2n+8) + \lambda_2(2n-6) \right] = \\ &= r + (n-4)\lambda_1 - (n-3)\lambda_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\theta_2 &= r - \frac{1}{2} \left[(\lambda_1 - \lambda_2) \left[-n + 5 + \sqrt{(n-2)^2} \right] + (\lambda_1 + \lambda_2) \right] = r - \frac{1}{2} \left[3(\lambda_1 - \lambda_2) + (\lambda_1 + \lambda_2) \right] = \\ &= r - 2\lambda_1 + \lambda_2\end{aligned}$$

$$\gamma = p_{12}^2 - p_{12}^1 = 2(n-4) - n + 3 = n-5$$

$$\beta = p_{12}^1 + p_{12}^2 = n-3 + 2(n-4) = 3n-11$$

$$\Delta = \gamma^2 + 2\beta + 1 = (n-5)^2 + 2(3n-11) + 1 = n^2 - 10n + 25 + 6n - 22 + 1 = n^2 - 4n + 4 = (n-2)^2$$

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \frac{n_1 + n_2}{2} - \frac{n_1 - n_2 + (n-5)(n_1 + n_2)}{2(n-2)} = \frac{n_1 + n_2}{2} - \frac{n_1 - n_2 + n_1(n-5) + n_2(n-5)}{2(n-2)} = \\ &= \frac{n_1}{2} + \frac{n_2}{2} - \frac{n_1(n-4) + n_2(n-6)}{2(n-2)} = n-2 + \frac{(n-2)(n-3)}{4} - n+4 - \frac{(n-3)(n-6)}{4} = \\ &= 2 + \frac{(n-3)(n-2-n+6)}{4} = 2 + n-3 = n-1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_2 &= \frac{n_1 + n_2}{2} + \frac{n_1 - n_2 + (n-5)(n_1 + n_2)}{2(n-2)} = \frac{n_1 + n_2}{2} + \frac{n_1 - n_2 + n_1(n-5) + n_2(n-5)}{2(n-2)} = \\ &= \frac{n_1}{2} + \frac{n_2}{2} + \frac{n_1(n-4) + n_2(n-6)}{2(n-2)} = n-2 + \frac{(n-2)(n-3)}{4} + n-4 + \frac{(n-3)(n-6)}{4} = \\ &= 2n-6 + \frac{(n-3)(n-4)}{2} = \frac{n^2 - 3n}{2} = \frac{n(n-3)}{2}\end{aligned}$$

Exemplo de um PBIB com duas classes de associação triangular

Considere-se o PBIBD($m = 2$), com $v = 10$, $b = 5$, $r = 2$ e $k = n - 1 = 4$:

B₁	B₂	B₃	B₄	B₅
1 2 3 4	1 5 6 7	2 5 8 9	3 6 8 10	4 7 9 10

Esquema 4.2: PBIBD triangular com duas classes de associação
($v = 10$, $b = 5$, $r = 2$, $k = 4$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$)

Como $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 0$, este delineamento além de triangular também é classificado como simples. Para $n = 5$, este delineamento pode ser estruturado da seguinte forma:

*	1	2	3	4
1	*	5	6	7
2	5	*	8	9
3	6	8	*	10
4	7	9	10	*

Esquema 4.3: PBIBD com duas classes de associação ($v = 10$, $b = 5$, $r = 2$, $k = 4$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$),
representação triangular

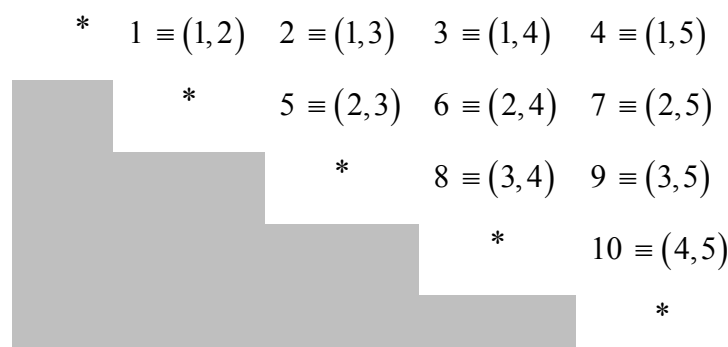
Zero-ésimos associados	Primeiros associados	Segundos associados
1	2, 3, 4, 5, 6, 7	8, 9, 10
2	1, 3, 4, 5, 8, 9	6, 7, 10
3	1, 2, 4, 6, 8, 10	5, 7, 9
4	1, 2, 3, 7, 9, 10	5, 6, 8
5	1, 2, 6, 7, 8, 9	3, 4, 10
6	1, 3, 5, 7, 8, 10	2, 4, 9
7	1, 4, 5, 6, 9, 10	2, 3, 8
8	2, 3, 5, 6, 9, 10	1, 4, 7
9	2, 4, 5, 7, 8, 10	1, 3, 6
10	3, 4, 6, 7, 8, 9	1, 2, 5

Tabela 4.1: Classes de associação do PBIBD triangular ($v = 10$, $b = 5$, $r = 2$, $k = 4$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$,)

As matrizes \mathbf{P}_i são: $\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$.

John (1966) mostrou que o esquema triangular pode ser abordado representando cada tratamento por um par ordenado (x, y) , tal que $1 \leq x < y < n$. Dois tratamentos são: primeiros associados se as coordenadas apresentarem um número inteiro em comum e segundos associados caso contrário.

Para o exemplo anterior, de um PBIB $(m = 2)$ triangular, considere-se que o tratamento 1 é representado pelo par ordenado $(1, 2)$, o tratamento 2 pelo par ordenado $(1, 3)$ e assim sucessivamente:



Esquema 4.4: PBIBD com duas classes de associação triangular
 $(v = 10, b = 5, r = 2, k = 4, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0)$, representação com recurso a coordenadas

Para determinar os primeiros associados do tratamento 1, deverá considerar-se o par ordenado $(1, 2)$ e seguidamente seleccionar todos os pares ordenados que contenham os números 1 ou 2, ou seja, os pares: $(1, 3)$; $(1, 4)$; $(1, 5)$; $(2, 3)$; $(2, 4)$ e $(2, 5)$. Os tratamentos correspondentes aos pares ordenados anteriores são 2, 3, 4, 5, 6, 7 pelo que estes tratamentos são os primeiros associados do tratamento 1. Os restantes tratamentos 8, 9 e 10 são os segundos associados do tratamento 1.

Esta forma de representação revelar-se-á útil para esquemas triangulares com três classes de associação.

4.1.4 PBIBD $(m = 2)$ Quadrado Latino

Um PBIBD com duas classes de associação diz-se do tipo quadrado latino com i restrições (linha, coluna ou letra) se for possível escrever o número de tratamentos v como

$v = s^2$. Neste esquema, os tratamentos estão dispostos numa matriz quadrada $s \times s$ sendo necessários $i-2$ quadrados latinos mutuamente ortogonais (MOLS). Note-se que, dois quadrados latinos com a mesma dimensão, dizem-se ortogonais se quando sobrepostos, cada par ordenado de tratamentos ocorre uma única vez.

Estes planos são construídos de maneira a que dois tratamentos são primeiros associados se e só se ocorrerem na mesma linha (ou coluna) ou em posições ocupadas pela mesma letra, em qualquer um dos quadrados latinos.

Os parâmetros deste plano são: $n_1 = i(s-1)$, $n_2 = (s-i+1)(s-1)$

$$\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} (i-1)(i-2) + s - 2 & (i-1)(s-i+1) \\ (s-i+1)(i-1) & (s-i)(s-i+1) \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} i(i-1) & i(s-i) \\ i(s-i) & (s-i)^2 + s - 2 \end{bmatrix}$$

Os valores próprios associados de \mathbf{NN}^T de um PBIBD, com duas classes de associação, classificado como quadrado latino são $\theta_0 = rk$, $\theta_1 = r + (s-i)\lambda_1 - (s-i+1)\lambda_2$ e $\theta_2 = r - i\lambda_1 + (i-1)\lambda_2$ com as respectivas multiplicidades 1, $i(s-1)$ e $(s-i+1)(s-1)$.

Tem-se:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= r - \frac{1}{2} \left\{ (\lambda_1 - \lambda_2) \left[-(s-2i+1) - \sqrt{s^2} \right] + \lambda_1 + \lambda_2 \right\} = r - \frac{1}{2} \left\{ (\lambda_1 - \lambda_2)(-2s+2i-1) + \lambda_1 + \lambda_2 \right\} = \\ &= r + \lambda_1(s-i) - \lambda_2(s-i+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta_2 &= r - \frac{1}{2} \left\{ (\lambda_1 - \lambda_2) \left[-(s-2i+1) + \sqrt{s^2} \right] + \lambda_1 + \lambda_2 \right\} = r - \frac{1}{2} \left\{ (\lambda_1 - \lambda_2)(2i-1) + \lambda_1 + \lambda_2 \right\} = \\ &= r - \frac{1}{2} \left\{ 2i\lambda_1 + 2(-i+1)\lambda_2 \right\} = r - i\lambda_1 + (i-1)\lambda_2 \end{aligned}$$

$$\gamma = p_{12}^2 - p_{12}^1 = i(s-i) - (s-i+1)(i-1) = s - 2i + 1$$

$$\beta = p_{12}^2 + p_{12}^1 = i(s-i) + (s-i+1)(i-1) = 2is - 2i^2 - s + 2i - 1$$

$$\begin{aligned} \Delta &= \gamma^2 + 2\beta + 1 = (s-2i+1)^2 + 4is - 4i^2 - 2s + 4i - 2 + 1 = \\ &= s^2 - 2si + s - 2si + 4i^2 - 2i + s - 2i + 1 + 4is - 4i^2 - 2s + 4i - 2 + 1 = s^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \frac{n_1 + n_2}{2} - \left[\frac{(n_1 - n_2) + (s - 2i + 1)(n_1 + n_2)}{2s} \right] = \frac{n_1 s + n_2 s - n_1 + n_2 - (s - 2i + 1)(n_1 + n_2)}{2s} = \\ &= \frac{n_1(s - 1 - s + 2i - 1) + n_2(s + 1 - s + 2i - 1)}{2s} = \frac{n_1(i - 1) + n_2 i}{s} = \frac{i(s - 1)(i - 1) + (s - i + 1)(s - 1)i}{s} = \\ &= \frac{(s - 1)(i^2 - i + si - i^2 + i)}{s} = (s - 1)i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_2 &= \frac{n_1 + n_2}{2} + \left[\frac{(n_1 - n_2) + (s - 2i + 1)(n_1 + n_2)}{2s} \right] = \frac{n_1 s + n_2 s + n_1 - n_2 + (s - 2i + 1)(n_1 + n_2)}{2s} = \\ &= \frac{n_1(s + 1 + s - 2i + 1) + n_2(s - 1 + s - 2i + 1)}{2s} = \frac{n_1(s + 1 - i) + n_2(s - i)}{s} = \\ &= \frac{i(s - 1)(s + 1 - i) + (s - i + 1)(s - 1)(s - i)}{s} = (s - 1)(s + 1 - i).\end{aligned}$$

Exemplo de um quadrado latino tipo L_2

Considere-se um PBIBD ($v = 9$, $b = 6$, $r = 2$, $k = 3$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$) quadrado latino com duas classes de associação. Neste esquema, como há duas restrições ($i = 2$), não existe nenhum quadrado latino mutuamente ortogonal.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Esquema 4.5: Representação de um PBIBD quadrado latino com duas classes de associação
($v = 9$, $b = 6$, $r = 2$, $k = 3$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$)

Zero-ésimos associados	Primeiros associados	Segundos associados
1	2, 3, 4, 7	5, 6, 8, 9
2	1, 3, 5, 8	4, 6, 7, 9
3	1, 2, 6, 9	4, 5, 7, 8
4	1, 5, 6, 7	2, 3, 8, 9
5	2, 4, 6, 8	1, 3, 7, 9
6	3, 4, 5, 9	1, 2, 7, 8
7	1, 4, 8, 9	2, 3, 5, 6
8	2, 5, 7, 9	1, 3, 4, 6
9	3, 6, 7, 8	1, 2, 4, 5

Tabela 4.2: Classes de associação do PBIBD quadrado latino ($v = 9$, $b = 6$, $r = 2$, $k = 3$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$)

As matrizes \mathbf{P}_1 e \mathbf{P}_2 são $\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$.

Neste esquema, os tratamentos podem também ser representados por pares ordenados (x, y) tal que $1 \leq x$ e $y \leq s$. Seja δ a “distância” entre dois tratamentos (x, y) e (x', y') , definida como o número de elementos diferentes de zero de $(x - x', y - y')$. Se $\delta = 1$ os tratamentos são primeiros associados, caso contrário são segundos associados.

Os tratamentos serão denotados por pares ordenados:

Tratamento 1 $\equiv (1, 1)$ Tratamento 2 $\equiv (1, 2)$ Tratamento 3 $\equiv (1, 3)$
 Tratamento 4 $\equiv (2, 1)$ Tratamento 5 $\equiv (2, 2)$ Tratamento 6 $\equiv (2, 3)$
 Tratamento 7 $\equiv (3, 1)$ Tratamento 8 $\equiv (3, 2)$ Tratamento 9 $\equiv (3, 3)$

Seguidamente apresenta-se, para o tratamento 1, a forma de encontrar os seus associados:

	Pares	$(x - x', y - y')$	δ	Associados
Tratamento 1	(1,1) e (1,2)	(0, -1)	1	O tratamento 2 é 1.º associado
	(1,1) e (1,3)	(0, -2)	1	O tratamento 3 é 1.º associado
	(1,1) e (2,1)	(-1, 0)	1	O tratamento 4 é 1.º associado
	(1,1) e (2,2)	(-1, -1)	2	O tratamento 5 é 2.º associado
	(1,1) e (2,3)	(-1, -2)	2	O tratamento 6 é 2.º associado
	(1,1) e (3,1)	(-2, 0)	1	O tratamento 7 é 1.º associado
	(1,1) e (3,2)	(-2, -1)	2	O tratamento 8 é 2.º associado
	(1,1) e (3,3)	(-2, -2)	2	O tratamento 9 é 2.º associado

Tabela 4.3: Classes de associação do tratamento 1, com recurso a coordenadas, para o PBIBD ($v = 9, b = 6, r = 2, k = 3, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0$): quadrado latino com duas classes de associação

Exemplo de um quadrado latino tipo L_3

No quadrado latino seguinte observam-se três restrições ($i = 3$) havendo, portanto, um quadrado latino mutuamente ortogonal.

1 A	2 B	3 C
4 C	5 A	6 B
7 B	8 C	9 A

Esquema 4.6: Representação de um PBIBD quadrado latino com duas classes de associação

Zero-ésimos associados	Primeiros associados	Segundos associados
1	2, 3, 4, 5, 7, 9	6, 8
2	1, 3, 5, 6, 7, 8	4, 9
3	1, 2, 4, 6, 8, 9	5, 7
4	1, 3, 5, 6, 7, 8	2, 9
5	1, 2, 4, 6, 8, 9	3, 7
6	2, 3, 4, 5, 7, 9	1, 8
7	1, 2, 4, 6, 8, 9	3, 5
8	2, 3, 4, 5, 7, 9	1, 6
9	1, 3, 5, 6, 7, 8	2, 4

Tabela 4.4: Classes de associação do PBIBD quadrado latino com duas classes de associação

$$\text{As matrizes } \mathbf{P}_1 \text{ e } \mathbf{P}_2 \text{ são } \mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

4.1.5 PBIBD ($m = 2$) Cíclico

Considere-se que os v tratamentos de um PBIBD com duas classes de associação são denotados por $0, 1, 2, \dots, v-1$. Um PBIBD ($m = 2$) diz-se cíclico se o conjunto dos primeiros associados do i -ésimo tratamento for $(i + d_1, i + d_2, \dots, i + d_m) \bmod v$, tal que os d_j elementos satisfaçam as seguintes condições:

- i) Os elementos d são todos distintos e $0 < d_j < v$, $i = 1, 2, \dots, n_1$;
- ii) Entre as $n_1(n_1 - 1)$ diferenças $(d_j - d_{j'}) \bmod v$, cada um dos elementos d_1, d_2, \dots, d_{n_1} ocorre p_{11}^1 vezes e cada um dos e_1, e_2, \dots, e_{n_2} elementos ocorre p_{11}^2 vezes; os elementos e_1, e_2, \dots, e_{n_2} são inteiros $1, 2, \dots, v - 1$.
- iii) O conjunto $D = (d_1, d_2, \dots, d_{n_1})$ verifica ainda a condição $D = (-d_1, -d_2, \dots, -d_{n_1})$.

Os parâmetros destes planos são:

$$v = 4t + 1, \quad n_1 = n_2 = 2t, \quad \mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} t-1 & t \\ t & t \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} t & t \\ t & t-1 \end{bmatrix}.$$

Verifica-se ainda a igualdade $n_1 p_{11}^1 + n_2 p_{11}^2 = n_1(n_1 - 1)$.

Os valores próprios associados de \mathbf{NN}^T e as suas multiplicidades seguem o caso geral.

As condições i) e ii) foram introduzidas na definição original de Bose e Shimamoto (1952). Nandi e Adhikary (1966) concluíram que essas duas condições são suficientes para assegurar que o esquema de associação é cíclico se $p_{11}^1 = p_{11}^2$, o que não se verifica se $p_{11}^1 \neq p_{11}^2$, sendo necessário que se verifique a última condição. Esta é verificada sempre que $p_{11}^1 = p_{11}^2$. Note-se que, em todos os exemplos dados por Bose e Shimamoto (1952), p_{11}^1 era igual a p_{11}^2 , pelo que a terceira condição era sempre verificada.

Exemplo de um PBIB ($m = 2$) cíclico

Considerem-se 5 tratamentos denotados por 0, 1, 2, 3, 4. Neste delineamento $b = 5$, $r = 3$, $k = 3$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, $n_1 = 2$, $n_2 = 2$, $t = 1$, $p_{11}^1 = 0$ e $p_{11}^2 = 1$.

\mathbf{B}_1	\mathbf{B}_2	\mathbf{B}_3	\mathbf{B}_4	\mathbf{B}_5
0 1 2	1 2 3	2 3 4	3 4 0	4 0 1

Esquema 4.7: Representação de um PBIBD com duas classes de associação cíclico
 $(v = 5, b = 5, r = 3, k = 3, \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1)$

O conjunto dos primeiros associados obtém-se a partir da expressão $(i + d_1, i + d_2, \dots, i + d_{n_1}) \bmod v$, dado que $n_1 = 2$, com $d_1 = 1$, $d_2 = 4$:

Tratamento 0: $(0 + d_1, 0 + d_2) \bmod 5 \Rightarrow$ tratamentos 1 e 4

Tratamento 1: $(1 + d_1, 1 + d_2) \bmod 5 \Rightarrow$ tratamentos 2 e 0

Tratamento 2: $(2 + d_1, 2 + d_2) \bmod 5 \Rightarrow$ tratamentos 3 e 1

Tratamento 3: $(3 + d_1, 3 + d_2) \bmod 5 \Rightarrow$ tratamentos 4 e 2

Tratamento 4: $(4 + d_1, 4 + d_2) \bmod 5 \Rightarrow$ tratamentos 0 e 3

O conjunto dos segundos associados obtém-se a partir da expressão $(i + e_1, i + e_2, \dots, i + e_{n_2}) \bmod v$, dado que $n_2 = 2$ e $0 < e_i < 4$, $e_1 = 2$ e $e_2 = 3$.

Tratamento 0: $(0 + e_1, 0 + e_2) \bmod 5 \Rightarrow$ tratamentos 2 e 3

Tratamento 1: $(1 + e_1, 1 + e_2) \bmod 5 \Rightarrow$ tratamentos 3 e 4

Tratamento 2: $(2 + e_1, 2 + e_2) \bmod 5 \Rightarrow$ tratamentos 4 e 0

Tratamento 3: $(3 + e_1, 3 + e_2) \bmod 5 \Rightarrow$ tratamentos 0 e 1

Tratamento 4: $(4 + e_1, 4 + e_2) \bmod 5 \Rightarrow$ tratamentos 1 e 2

Na tabela seguinte apresentam-se as respectivas classes de associação:

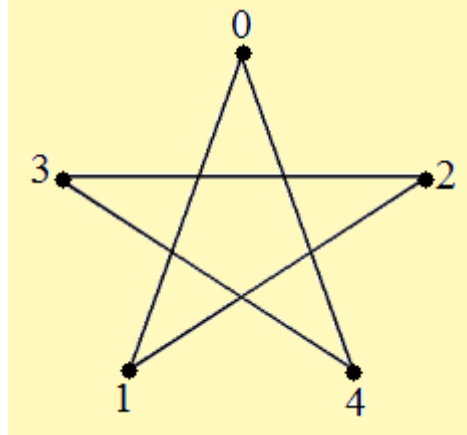
Zero-ésimos associados	Primeiros associados	Segundos associados
0	1, 4	2, 3
1	0, 2	3, 4
2	1, 3	0, 4
3	2, 4	0, 1
4	0, 3	1, 2

Tabela 4.5: Classes de associação do PBIBD cíclico ($v = 5$, $b = 5$, $r = 3$, $k = 3$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$)

As matrizes de associação deste esquema são:

$$\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

O esquema de associação anterior pode ser representado por um grafo, isto é, por uma estrela de 5 pontas, na qual os vértices representam os tratamentos. Caso dois vértices estejam unidos por uma aresta serão primeiros associados, caso contrário serão segundos associados. A representação recorrendo a grafos será posteriormente desenvolvida no capítulo 5.



Esquema 4.8: Representação de um PBIBD cíclico ($v = 5, b = 5, r = 3, k = 3, \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$), recorrendo a um grafo

4.2 Classificação dos PBIBD ($m = 3$)

4.2.1 PBIBD ($m = 3$) Rectangular

Vartak (1955) introduziu o esquema rectangular com três classes de associação. Considere-se um PBIBD com três classes de associação, se os tratamentos estiverem agrupados numa matriz rectangular com m linhas por n tratamentos ($n > 1$) e se $v = mn$, então o PBIBD diz-se rectangular. Assim, para qualquer tratamento, os seus primeiros associados são os restantes $n - 1$ tratamentos da mesma linha, os segundos associados são os $m - 1$ tratamentos da mesma coluna e os restantes $(m - 1)(n - 1)$ tratamentos são os terceiros associados.

Os parâmetros deste esquema são $n_1 = n - 1, n_2 = m - 1$ e $n_3 = (m - 1)(n - 1)$

$$\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} n-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m-1 \\ 0 & m-1 & (m-1)(n-2) \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & n-1 \\ 0 & m-2 & 0 \\ n-1 & 0 & (m-2)(n-1) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & n-2 \\ 1 & 0 & m-2 \\ n-2 & m-2 & (n-2)(m-2) \end{bmatrix}$$

Em Raghavarao (1971) são apresentados os valores próprios associados de \mathbf{NN}^T : $\theta_0 = rk$, $\theta_1 = r - \lambda_1 + (m-1)(\lambda_2 - \lambda_3)$, $\theta_2 = r - \lambda_2 + (n-1)(\lambda_1 - \lambda_3)$ e $\theta_3 = r - \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3$ bem como as respectivas multiplicidades $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = n-1$, $\alpha_2 = m-1$, $\alpha_3 = (n-1)(m-1)$.

Em Vartak (1955, 1959) e Shah (1964) encontram-se algumas propriedades deste delineamento.

Exemplo de um PBIB rectangular com três classes de associação

Considere-se o PBIBD com 3 classes de associação para $v = 6$, $m = 2$ e $n = 3$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Esquema 4.9: Representação de um PBIBD rectangular com três classes de associação

Na tabela seguinte apresentam-se as respectivas classes de associação:

Zero-ésimos Associados	Primeiros Associados	Segundos Associados	Terceiros Associados
1	3, 5	2	4, 6
2	4, 6	1	3, 5
3	1, 5	4	2, 6
4	2, 6	3	1, 5
5	1, 3	6	2, 4
6	2, 4	5	1, 3

Tabela 4.6: Classes de associação do PBIBD rectangular ($v = 6$, $m = 2$ e $n = 3$)

Os parâmetros deste esquema são $n_1 = 2$, $n_2 = 1$ e $n_3 = 2$ e as matrizes de associação são:

$$\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4.2.2 PBIB($m = 3$) Divisível em Grupos Generalizados

Este esquema de associação foi proposto por Roy (1953) e posteriormente estudado por Raghavarao (1960). Considerem-se v tratamentos tal que $v = N_1 N_2 N_3$ e que se possam dispor numa matriz tridimensional formada por N_1 linhas, N_2 colunas e N_3 níveis. Dois tratamentos são: primeiros associados se ocorrerem na mesma linha e coluna de níveis distintos, segundos associados se ocorrem na mesma linha mas em colunas diferentes, caso contrário serão terceiros associados.

Os parâmetros deste esquema são $n_1 = N_3 - 1$, $n_2 = (N_2 - 1)N_3$ e $n_3 = (N_1 - 1)N_2 N_3$

$$\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} N_3 - 2 & 0 & 0 \\ 0 & (N_2 - 1)N_3 & 0 \\ 0 & 0 & (N_1 - 1)N_2 N_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} 0 & N_3 - 1 & 0 \\ N_3 - 1 & (N_2 - 2)N_3 & 0 \\ 0 & 0 & (N_1 - 1)N_2 N_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & N_3 - 1 \\ 0 & 0 & (N_2 - 1)N_3 \\ N_3 - 1 & (N_2 - 1)N_3 & (N_1 - 2)N_2 N_3 \end{bmatrix}$$

Em Raghavarao (1971) são apresentados os valores próprios associados de \mathbf{NN}^T : $\theta_0 = rk$, $\theta_1 = r - \lambda_3(n_2 + n_1 + 1) + \lambda_2 n_2 + \lambda_1 n_1$, $\theta_2 = r - \lambda_2(n_1 + 1) + \lambda_1 n_1$ e $\theta_3 = r - \lambda_1$ bem como as respectivas multiplicidades $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = N_1 - 1$, $\alpha_2 = N_1(N_2 - 1)$, $\alpha_3 = N_1 N_2(N_3 - 1)$.

Exemplo de um PBIB ($m = 3$) divisível em grupos generalizados

Considere-se o PBIBD com 3 classes de associação para $v = 12$, $N_1 = 2$, $N_2 = 3$ e $N_3 = 2$, estruturado da seguinte forma:

Nível 1	Nível 2
$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 7 & 9 & 11 \\ 8 & 10 & 12 \end{bmatrix}$

Esquema 4.10: Representação de um PBIBD ($m = 3$) divisível em grupos generalizados

Na tabela seguinte apresentam-se as respectivas classes de associação:

Zero-ésimos Associados	Primeiros Associados	Segundos Associados	Terceiros Associados
1	7	3, 5, 9, 11	2, 4, 6, 8, 10, 12
2	8	4, 6, 10, 12	1, 3, 5, 7, 9, 11
3	9	1, 5, 7, 11	2, 4, 6, 8, 10, 12
4	10	2, 6, 8, 12	1, 3, 5, 7, 9, 11
5	11	1, 3, 7, 9	2, 4, 6, 8, 10, 12
6	12	2, 4, 8, 10	1, 3, 5, 7, 9, 11
7	1	3, 5, 9, 11	2, 4, 6, 8, 10, 12
8	2	4, 6, 10, 12	1, 3, 5, 7, 9, 11
9	3	1, 5, 7, 11	2, 4, 6, 8, 10, 12
10	4	2, 6, 8, 12	1, 3, 5, 7, 9, 11
11	5	1, 3, 7, 11	2, 4, 6, 8, 10, 12
12	6	2, 4, 8, 10	1, 3, 5, 7, 9, 11

Tabela 4.7: Classes de associação de um PBIBD ($m = 3$) divisível em grupos generalizados

Os parâmetros deste esquema são $n_1 = 1$, $n_2 = 4$ e $n_3 = 6$ e as matrizes de associação são:

$$\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

4.2.3 PBIBD($m = 3$) Triangular

John (1966) mostrou que é possível estabelecer uma analogia entre um esquema com duas classes de associação triangular e outro com três. Posteriormente, Bose e Laskar (1967) estudaram uma construção equivalente à de John.

Num PBIBD triangular com três classes de associação o número de tratamentos será escrito como $v = (s+2)(s+3)(s+4)/6$, sendo s um número inteiro. Cada tratamento é representado por coordenadas de números inteiros (x, y, z) , tal que $1 \leq x < y < z \leq s+4$. Dois

tratamentos são: primeiros associados se as suas coordenadas tiverem dois números inteiros em comum, segundos associados se as suas coordenadas tiverem apenas um número inteiro em comum e terceiros associados se não verificarem as condições anteriores.

Os parâmetros correspondentes a este plano são $n_1 = 3(s+1)$, $n_2 = 3s(s+1)/2$ e $n_3 = (s-1)(s+1)s/6$

$$\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} s+2 & 2s & 0 \\ 2s & s^2 & s(s-1)/2 \\ 0 & s(s-1)/2 & s(s-1)(s-2)/6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} 4 & 2s & s-1 \\ 2s & (s-1)(s+6)/2 & (s-1)(s-2) \\ s-1 & (s-1)(s-2) & (s-1)(s-2)(s-3)/6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 9 & 3(s-2) \\ 9 & 9(s-2) & 3(s-2)(s-3)/2 \\ 3(s-2) & 3(s-2)(s-3)/2 & (s-2)(s-3)(s-4)/6 \end{bmatrix}$$

Os valores próprios associados de \mathbf{NN}^T e as respectivas multiplicidades são referidos em Raghavarao (1971):

$$\begin{array}{ll} \theta_0 = rk & \alpha_0 = 1 \\ \theta_1 = r + (2s-1)\lambda_1 + s(s-5)\lambda_2/2 - s(s-1)\lambda_3/2 & \alpha_1 = s+3 \\ \theta_2 = r + (s-3)\lambda_1 - (2s-3)\lambda_2 + (s-1)\lambda_3 & \alpha_2 = (s+1)(s+4)/2 \\ \theta_3 = r - 3\lambda_1 + 3\lambda_2 - \lambda_3 & \alpha_3 = (s-1)(s+3)(s+4)/6. \end{array}$$

Exemplo de um PBIB ($m=3$) triangular

Considere-se o PBIBD com 3 classes de associação para $v=20$ e $s=2$. Os parâmetros correspondentes a este plano são $n_1 = 9$, $n_2 = 9$ e $n_3 = 1$.

As respectivas matrizes de associação são:

$$\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 9 & 0 \\ 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc}
1 \equiv (1, 2, 3) & 2 \equiv (1, 2, 4) & 3 \equiv (1, 2, 5) & 4 \equiv (1, 2, 6) \\
& 5 \equiv (1, 3, 4) & 6 \equiv (1, 3, 5) & 7 \equiv (1, 3, 6) \\
& & 8 \equiv (1, 4, 5) & 9 \equiv (1, 4, 6) \\
& & & 10 \equiv (1, 5, 6) \\
& & & \\
11 \equiv (2, 3, 4) & 12 \equiv (2, 3, 5) & 13 \equiv (2, 3, 6) & \\
& & 14 \equiv (2, 4, 5) & 15 \equiv (2, 4, 6) \\
& & & 16 \equiv (2, 5, 6) \\
& & & \\
& & 17 \equiv (3, 4, 5) & 18 \equiv (3, 4, 6) \\
& & & 19 \equiv (3, 5, 6) \\
& & & \\
& & & 20 \equiv (4, 5, 6)
\end{array}$$

Esquema 4.11: Representação de um PBIBD ($m = 3$) triangular

Os primeiros associados do tratamento 1 são os tratamentos 2, 3, 4, 5, 6, 7, 11, 12, 13 porque apresentam dois números inteiros comuns nas representações (x, y, z) :

$$\begin{array}{cccccc}
1 \equiv (1, 2, 3) & 2 \equiv (1, 2, 4) & 3 \equiv (1, 2, 5) & 4 \equiv (1, 2, 6) & 5 \equiv (1, 3, 4) \\
6 \equiv (1, 3, 5) & 7 \equiv (1, 3, 6) & 11 \equiv (2, 3, 4) & 12 \equiv (2, 3, 5) & 13 \equiv (2, 3, 6)
\end{array}$$

Os segundos associados do tratamento 1 são os tratamentos 8, 9, 10, 14, 15, 16, 17, 18, 19 porque apresentam apenas um número inteiro comum nas representações (x, y, z) .

$$\begin{array}{cccccc}
8 \equiv (1, 4, 5) & 9 \equiv (1, 4, 6) & 10 \equiv (1, 5, 6) & 14 \equiv (2, 4, 5) & 15 \equiv (2, 4, 6) \\
16 \equiv (2, 5, 6) & 17 \equiv (3, 4, 5) & 18 \equiv (3, 4, 6) & 19 \equiv (3, 5, 6)
\end{array}$$

O terceiro associado do tratamento 1 é o tratamento 20 dado que não apresenta nenhum número inteiro comum nas representações (x, y, z) .

Na tabela seguinte apresentam-se as respectivas classes de associação:

Zero-ésimos Associados	Primeiros Associados	Segundos Associados	Terceiros Associados
1	2, 3, 4, 5, 6, 7, 11, 12, 13	8, 9, 10, 14, 15, 16, 17, 18, 19	20
2	1, 3, 4, 5, 8, 9, 11, 14, 15	6, 7, 10, 12, 13, 16, 17, 18, 20	19
3	1, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16	5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 20	18
4	1, 2, 3, 7, 9, 10, 13, 15, 16	5, 6, 8, 11, 12, 14, 18, 19, 20	17
5	1, 2, 6, 7, 8, 9, 11, 17, 18	3, 4, 10, 12, 13, 14, 15, 19, 20	16
6	1, 3, 5, 7, 8, 10, 12, 17, 19	2, 4, 9, 11, 13, 14, 16, 18, 20	15
7	1, 4, 5, 6, 9, 10, 13, 18, 19	2, 3, 8, 11, 12, 15, 16, 17, 20	14
8	2, 3, 5, 6, 9, 10, 14, 17, 20	1, 4, 7, 11, 12, 15, 16, 18, 19	13
9	2, 4, 5, 7, 8, 10, 15, 18, 20	1, 3, 6, 11, 13, 14, 16, 17, 19	12
10	3, 4, 6, 7, 8, 9, 16, 19, 20	1, 2, 5, 12, 13, 14, 15, 17, 18	11
11	1, 2, 5, 12, 13, 14, 15, 17, 18	3, 4, 6, 7, 8, 9, 16, 19, 20	10
12	1, 3, 6, 11, 13, 14, 16, 17, 19	2, 4, 5, 7, 8, 10, 15, 18, 20	9
13	1, 4, 7, 11, 12, 15, 16, 18, 19	2, 3, 5, 6, 9, 10, 14, 17, 20	8
14	2, 3, 8, 11, 12, 15, 16, 17, 20	1, 4, 5, 6, 9, 10, 13, 18, 19	7
15	2, 4, 9, 11, 13, 14, 16, 18, 20	1, 3, 5, 7, 8, 10, 12, 17, 19	6
16	3, 4, 10, 12, 13, 14, 15, 19, 20	1, 2, 7, 8, 9, 11, 17, 18	5
17	5, 6, 8, 11, 12, 14, 18, 19, 20	1, 2, 3, 7, 9, 10, 13, 15, 16	4
18	5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 20	1, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16	3
19	6, 7, 10, 12, 13, 16, 17, 18, 20	1, 3, 4, 5, 8, 9, 11, 13, 15	2
20	8, 9, 10, 14, 15, 16, 17, 18, 19	2, 3, 4, 5, 6, 7, 11, 12, 13	1

Tabela 4.8: Classes de associação do PBIBD ($m = 3$) triangular

4.2.4 PBIBD($m = 3$) Cúbico

Raghavarao e Chandrasekhararao (1964) definiram o esquema de associação cúbico que pode ser considerado uma extensão dos PBIBD ($m = 2$) quadrado latino.

Considerem-se v tratamentos que possam ser escritos como $v = s^3$, denotando cada um deles por um conjunto de três coordenadas inteiras (x, y, z) , tal que $1 \leq x \leq s$, $1 \leq y \leq s$, $1 \leq z \leq s$.

Seja δ a “distância” entre dois tratamentos (x, y, z) e (x', y', z') definida como o número de elementos diferentes de zero de $(x - x', y - y', z - z')$. Se $\delta = 1$ os tratamentos são primeiros associados, se $\delta = 2$ os tratamentos são segundos associados e são terceiros associados se $\delta = 3$.

Os parâmetros relativos a este plano são $n_1 = 3(s-1)$, $n_2 = 3(s-1)^2$, $n_3 = (s-1)^3$ e as matrizes de associação são:

$$\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} s-2 & 2(s-1) & 0 \\ 2(s-1) & 2(s-1)(s-2) & (s-1)^2 \\ 0 & (s-1)^2 & (s-1)^2(s-2) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 2(s-2) & s-1 \\ 2(s-2) & 2(s-1) + (s-2)^2 & 2(s-1)(s-2) \\ s-1 & 2(s-1)(s-2) & (s-1)(s-2)^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3(s-2) \\ 3 & 6(s-2) & 3(s-2)^2 \\ 3(s-2) & 3(s-2)^2 & (s-2)^3 \end{bmatrix}$$

Os valores próprios associados de \mathbf{NN}^T e as respectivas multiplicidades são referidos em Raghavarao (1971):

$$\begin{array}{ll} \theta_0 = rk & \alpha_0 = 1 \\ \theta_1 = r + (2s-3)\lambda_1 + (s-1)(s-3)\lambda_2 - (s-1)^2\lambda_3 & \alpha_1 = 3(s-1) \\ \theta_2 = r + (s-3)\lambda_1 - (2s-3)\lambda_2 + (s-1)\lambda_3 & \alpha_2 = 3(s-1)^2 \\ \theta_3 = r - 3\lambda_1 + 3\lambda_2 - \lambda_3 & \alpha_3 = (s-1)^3. \end{array}$$

Exemplo de um PBIB ($m = 3$) cúbico

Considere-se o PBIBD com 3 classes de associação para $v = 8$ e $s = 2$. Os parâmetros correspondentes a este plano são $n_1 = 3$, $n_2 = 3$ e $n_3 = 1$, tal que:

$$\begin{array}{cccc}
1 \equiv (1,1,1) & 2 \equiv (1,1,2) & 3 \equiv (1,2,1) & 4 \equiv (1,2,2) \\
5 \equiv (2,1,1) & 6 \equiv (2,1,2) & 7 \equiv (2,2,1) & 8 \equiv (2,2,2)
\end{array}$$

Concretização para o tratamento 1:

Tratamento 1	Pares	$(x-x', y-y', z-z')$	δ	Associados
	(1,1,1) e (1,1,2)	(0, 0, -1)	1	O tratamento 2 é 1.º associado
	(1,1,1) e (1,2,1)	(0, -1, 0)	1	O tratamento 3 é 1.º associado
	(1,1,1) e (1,2,2)	(0, -1, -1)	2	O tratamento 4 é 2.º associado
	(1,1,1) e (2,1,1)	(-1, 0, 0)	1	O tratamento 5 é 1.º associado
	(1,1,1) e (2,1,2)	(-1, 0, -1)	2	O tratamento 6 é 2.º associado
	(1,1,1) e (2,2,1)	(-1, -1, 0)	2	O tratamento 7 é 2.º associado
	(1,1,1) e (2,2,2)	(-1, -1, -1)	3	O tratamento 8 é 3.º associado

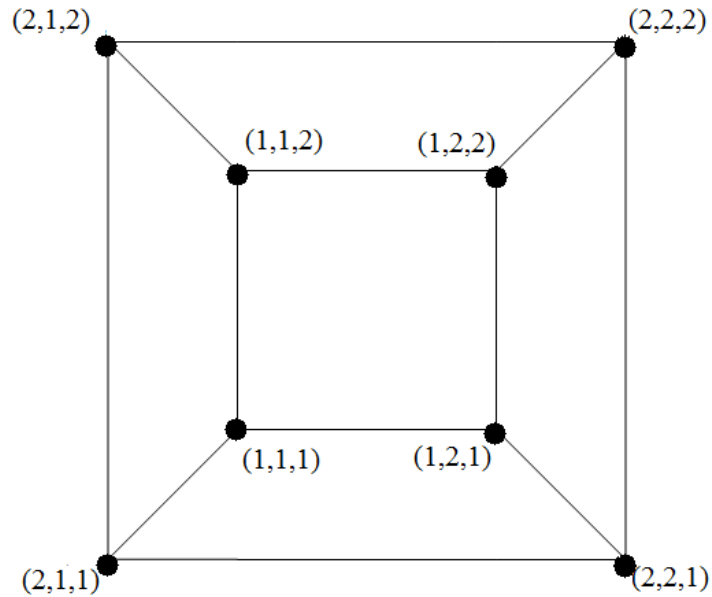
Tabela 4.9: Classes de associação do tratamento 1 com recurso a coordenadas para um PBIBD ($m = 3$) cúbico

Na tabela seguinte apresentam-se as respectivas classes de associação:

Zero-ésimos Associados	Primeiros Associados	Segundos Associados	Terceiros Associados
1	2, 3, 5	4, 6, 7	8
2	1, 4, 6	3, 5, 8	7
3	1, 4, 7	2, 5, 8	6
4	2, 3, 8	1, 6, 7	5
5	1, 6, 7	2, 3, 8	4
6	2, 5, 8	1, 4, 7	3
7	3, 5, 8	1, 4, 6	2
8	4, 6, 7	2, 3, 5	1

Tabela 4.10: Classes de associação de um PBIBD ($m = 3$) cúbico

Este esquema pode ser representado geometricamente recorrendo a um grafo, inserido num sistema de eixos, onde os tratamentos são representados através das suas coordenadas, como se pode observar no esquema 4.12:



Esquema 4.12: Representação de um PBIBD ($m = 3$) cúbico

As respectivas matrizes de associação são:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4.3 Classificação dos PBIBD ($m > 3$)

4.3.1 Extensão dos Planos Divisíveis em Grupos (EGD)

Estes planos foram introduzidos por Hinkelmann e Kempthorne (1963) como uma extensão dos PBIBD ($m = 3$) rectangulares, sendo o seu estudo aprofundado em Hinkelmann (1964). Considere-se um PBIBD com $(2^m - 1)$ classes de associação, em que os v tratamentos podem ser escritos como $v = t_1 t_2 \dots t_m$ denotados por (i_1, i_2, \dots, i_m) . Seja i_ℓ a ℓ -ésima componente de um tratamento, tal que: $i_\ell = 1, 2, \dots, t_\ell$, $\ell = 1, 2, \dots, m$. Salienta-se o facto de m não representar, neste caso, o número de classes de associação, mas ser um expoente que permitirá calcular o referido número.

Considere-se que os tratamentos serão denotados por coordenadas $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m)$, tomando apenas os valores 0 ou 1. Dois tratamentos são γ -ésimos associados, se os tratamentos diferirem apenas na componente unitária de γ .

O número de associados da γ -ésima classe é denotado por $n(\gamma)$, tal que:

$$n(\gamma) = n(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m) = \prod_{\ell=1}^m (t_\ell - 1)^{\gamma_\ell}.$$

É recorrente escrever-se as classes de associação em ordem lexicográfica, por exemplo para $m = 3$, vem $(0,0,0)$, $(0,0,1)$, $(0,1,0)$, $(0,1,1)$, $(1,0,0)$, $(1,0,1)$, $(1,1,0)$, $(1,1,1)$.

Exemplo de um PBIB EGD

Considere-se o PBIBD com $t = 36$ e $t_1 = t_2 = 3$ e $t_3 = 4$. Para $m = 3$ tem-se $(2^m - 1) = 2^3 - 1 = 7$. Definem-se portanto $\gamma = 7$ classes de associação. Sejam os tratamentos:

1 \equiv (1,1,1)	2 \equiv (1,1,2)	3 \equiv (1,1,3)	4 \equiv (1,1,4)
5 \equiv (1,2,1)	6 \equiv (1,2,2)	7 \equiv (1,2,3)	8 \equiv (1,2,4)
9 \equiv (1,3,1)	10 \equiv (1,3,2)	11 \equiv (1,3,3)	12 \equiv (1,3,4)
13 \equiv (2,1,1)	14 \equiv (2,1,2)	15 \equiv (2,1,3)	16 \equiv (2,1,4)
17 \equiv (2,2,1)	18 \equiv (2,2,2)	19 \equiv (2,2,3)	20 \equiv (2,2,4)
21 \equiv (2,3,1)	22 \equiv (2,3,2)	23 \equiv (2,3,3)	24 \equiv (2,3,4)
25 \equiv (3,1,1)	26 \equiv (3,1,2)	27 \equiv (3,1,3)	28 \equiv (3,1,4)
29 \equiv (3,2,1)	30 \equiv (3,2,2)	31 \equiv (3,2,3)	32 \equiv (3,2,4)
33 \equiv (3,3,1)	34 \equiv (3,3,2)	35 \equiv (3,3,3)	36 \equiv (3,3,4)

Para $m = 3$ tem-se $\gamma = 7$ classes de associação, tomando $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m)$ os valores $(0,0,0)$, $(0,0,1)$, $(0,1,0)$, $(0,1,1)$, $(1,0,0)$, $(1,0,1)$, $(1,1,0)$, $(1,1,1)$.

Para este tipo de plano Hinkelmann e Kempthorne (2005) propõem a seguinte distribuição de tratamentos:

As classes de associação e o respectivo número de associados é dado por:

$$0 \equiv (0,0,0) \Rightarrow n(0) = n(0,0,0) = (t_1 - 1)^0 (t_2 - 1)^0 (t_3 - 1)^0 = 1$$

$$1 \equiv (0,0,1) \Rightarrow n(1) = n(0,0,1) = (t_1 - 1)^0 (t_2 - 1)^0 (t_3 - 1)^1 = 3, \text{ o que significa que o número de primeiros associados de qualquer tratamento é } 3;$$

$$2 \equiv (0,1,0) \Rightarrow n(2) = n(0,1,0) = (t_1 - 1)^0 (t_2 - 1)^1 (t_3 - 1)^0 = 2, \text{ o que significa que o número de segundos associados de qualquer tratamento é } 2;$$

Sintetizando:

$$3 \equiv (0,1,1) \Rightarrow n(3) = 6;$$

$$4 \equiv (1,0,0) \Rightarrow n(4) = 2;$$

$$5 \equiv (1,0,1) \Rightarrow n(5) = 6;$$

$$6 \equiv (1,1,0) \Rightarrow n(6) = 4$$

$$7 \equiv (1,1,1) \Rightarrow n(7) = 12$$

Dois tratamentos são primeiros associados se os tratamentos diferirem apenas na componente unitária de $\gamma = (0,0,1)$, isto é apenas na terceira componente; assim, os tratamentos $2 \equiv (1,1,2)$, $3 \equiv (1,1,3)$ e $4 \equiv (1,1,4)$ são primeiros associados do tratamento $1 \equiv (1,1,1)$.

Dois tratamentos são quintos associados se os tratamentos diferirem apenas na componente unitária de $5 \equiv (1,0,1)$, isto é simultaneamente na primeira e na terceira componentes; assim, os tratamentos $1 \equiv (1,1,1)$, $14 \equiv (2,1,2)$, $15 \equiv (2,1,3)$, $16 \equiv (2,1,4)$, $26 \equiv (1,1,2)$, $27 \equiv (3,1,3)$ e $28 \equiv (3,1,4)$ são quintos associados.

Na tabela seguinte, encontra-se o estudo para os tratamentos 1, 2, 3, 4 e 5:

Classes de associação							
0.º	1.º	2.º	3.º	4.º	5.º	6.º	7.º
1	2,3,4	5,9	10,11,12,26,27,28	13,25	14,15,16,26,27,28	17,21,29,33	18,19,20,22,23,24, 30,31,32,34,35,36
2	1,3,4	6,10	5,7,8,9,11,12	14,26	13,15,16,25,27,28	18,22,30,34	17,19,20,21,23,24, 29, 31,32,33,35,36
3	1,2,4	7,11	5,6,8,9,10,12	15,27	13,14,16,25,26,28	19,23,31,35	17,18,20,21,22,24 29,31,32,33,34,36
4	1,2,3	8,12	5,6,7,9,10,11	16,28	13,14,15,25,26,27	20,24,32,36	17,18,19,21,22,23, 29,30,31,33,34,35
5	6,7,8	1,9	2,3,4,10,11,12	17,29	18,19,20,30,31,32	13,21,25,33	14,15,16,22,23,24, 26,27,28,34,35,36

Tabela 4.11: Classes de associação de um PBIBD EGD

4.3.2 Hipercúbico

Shah (1958) introduziu este delineamento e Kusumoto (1965) aprofundou o seu estudo, como uma extensão do modelo cúbico. Considerem-se v tratamentos que possam ser escritos como $v = q^m$, sendo m o número de classes de associação. Os v tratamentos serão denotados como (i_1, i_2, \dots, i_m) , com $i_\ell = 1, 2, \dots, q$ e $\ell = 1, 2, \dots, m$. Neste esquema de associação, dois tratamentos são j -ésimos associados se diferirem exactamente em j componentes. O número de j -ésimos associados é dado por $n_j = C_j^m (q-1)$, $j = 1, 2, \dots, m$.

Exemplo de um PBIB hipercúbico ($m = 4$)

Considere-se o PBIBD com 4 classes de associação para $v = 16$ e $q = 2$, no qual os tratamentos são denotados por:

$1 \equiv (1,1,1,1)$	$2 \equiv (1,1,1,2)$	$3 \equiv (1,1,2,1)$	$4 \equiv (1,1,2,2)$
$5 \equiv (1,2,1,1)$	$6 \equiv (1,2,1,2)$	$7 \equiv (1,2,2,1)$	$8 \equiv (1,2,2,2)$
$9 \equiv (2,1,1,1)$	$10 \equiv (2,1,1,2)$	$11 \equiv (2,1,2,1)$	$12 \equiv (2,1,2,2)$
$13 \equiv (2,2,1,1)$	$14 \equiv (2,2,1,2)$	$15 \equiv (2,2,2,1)$	$16 \equiv (2,2,2,2)$

O número de primeiros associados é $n_1 = C_1^4 = 4$, de segundos associados é $n_2 = C_2^4 = 6$, de terceiros associados é $n_3 = C_3^4 = 4$ e de quartos associados é $n_4 = C_4^4 = 1$.

Na tabela seguinte apresentam-se as respectivas classes de associação:

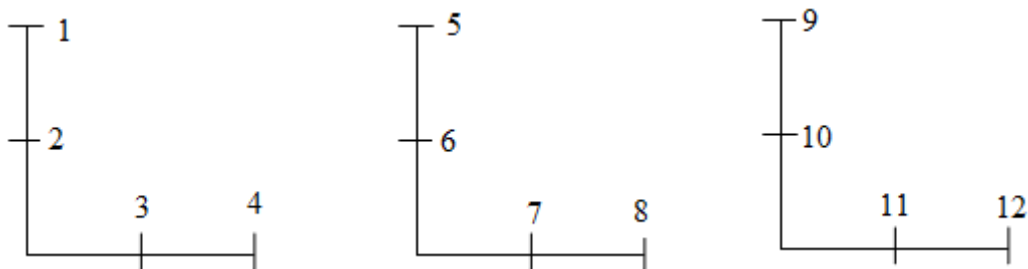
Classes de associação				
0.º	1.º	2.º	3.º	4.º
1	2, 3, 5, 9	4, 6, 7, 10, 11, 13	8, 12, 14, 15	16
2	1, 4, 6, 10	3, 5, 8, 9, 12, 14	7, 11, 13, 16	15
3	1, 4, 7, 11	2, 5, 8, 9, 12, 15	6, 10, 13, 16	14
4	2, 3, 8, 12	1, 6, 7, 10, 11, 16	5, 9, 14, 15	13
5	1, 6, 7, 13	2, 3, 8, 9, 14, 15	4, 10, 11, 16	12
6	2, 5, 8, 14	1, 4, 7, 10, 13, 16	3, 9, 12, 15	11
7	3, 5, 8, 15	1, 4, 6, 11, 13, 16	2, 9, 12, 14	10
8	4, 6, 7, 16	2, 3, 5, 12, 14, 15	1, 10, 11, 13	9
9	1, 10, 11, 13	2, 3, 5, 12, 14, 15	4, 6, 7, 16	8
10	2, 9, 12, 14	1, 4, 6, 11, 13, 16	3, 5, 8, 15	7
11	3, 9, 12, 15	1, 4, 7, 10, 13, 16	2, 5, 8, 14	6
12	4, 10, 11, 16	2, 3, 8, 9, 14, 15	1, 6, 7, 13	5
13	5, 9, 14, 15	1, 6, 7, 10, 11, 16	2, 3, 8, 12	4
14	6, 10, 13, 16	2, 5, 8, 9, 12, 15	1, 4, 7, 11	3
15	7, 11, 13, 16	3, 5, 8, 9, 12, 14	1, 4, 6, 10	2
16	8, 12, 14, 15	4, 6, 7, 10, 11, 13	2, 3, 5, 9	1

Tabela 4.12: Classes de associação de um PBIBD hipercúbico ($m = 4$)

4.3.3 PBIBD ($m = 4$) Angular Recto

Thartare (1963) estudou os PBIBD angular recto, para 4 classes de associação, no qual os v tratamentos são dispostos em q ângulos rectos cujos lados contêm s tratamentos equidistantes. Dois tratamentos são: primeiros associados se pertencem ao mesmo lado do ângulo, segundos associados se pertencem ao mesmo ângulo mas a lados diferentes, terceiros associados se pertencem a lados paralelos de ângulos distintos e quartos associados caso contrário. O número de i -ésimos associados é dado por $n_1 = s - 1$, $n_2 = s$ e $n_3 = n_4 = (q - 1)s$.

Considere-se o PBIBD com 4 classes de associação para $v = 12$, $q = 3$ e $s = 2$.



Esquema 4.13: Representação de um PBIBD ($m = 4$) angular recto

Particularizando para o tratamento 1:

Dado que o tratamento 2 pertence ao mesmo lado do ângulo em que o tratamento 1 está definido, estes tratamentos são primeiros associados.

Ainda no ângulo onde consta o tratamento 1 encontram-se os tratamentos 3 e 4, por isso, os tratamentos 3 e 4 são segundos associados do tratamento 1.

Considerando o lado do ângulo que contém o tratamento 1, observa-se que os lados paralelos a este ângulo contêm os tratamentos 5, 6, 9 e 10, então estes tratamentos são terceiros associados do tratamento 1.

Os restantes tratamentos, 7, 8, 11 e 12 são os quartos associados do tratamento 1.

Na tabela seguinte apresentam-se as respectivas classes de associação:

Classes de associação				
0.º	1.º	2.º	3.º	4.º
1	2	3, 4	5, 6, 9, 10	7, 8, 11, 12
2	1	3, 4	5, 6, 9, 10	7, 8, 11, 12
3	4	1, 2	7, 8, 11, 12	5, 6, 9, 10
4	3	1, 2	7, 8, 11, 12	5, 6, 9, 10
5	6	7, 8	1, 2, 9, 10	3, 4, 11, 12
6	5	7, 8	1, 2, 9, 10	3, 4, 11, 12
7	8	5, 6	3, 4, 11, 12	1, 2, 9, 10
8	7	5, 6	3, 4, 11, 12	1, 2, 9, 10
9	10	11, 12	1, 2, 5, 6	3, 4, 7, 8
10	9	11, 12	1, 2, 5, 6	3, 4, 7, 8
11	12	9, 10	3, 4, 7, 8	1, 2, 5, 6
12	11	9, 10	3, 4, 7, 8	1, 2, 5, 6

Tabela 4.13: Classes de associação de PBIBD angular recto

A partir do estudo deste esquema de associação, Tharthare (1965) ampliou o esquema angular recto para v tratamentos tal que $v = pqs$ e $p > 2$. Para descrever este esquema de associação sucintamente, os tratamentos serão denotados por 3 coordenadas (x_1, x_2, x_3) com $x_1 = 1, 2, \dots, q$, $x_2 = 1, 2, \dots, p$ e $x_3 = 1, 2, \dots, s$. Dois tratamentos (x_1, x_2, x_3) e (y_1, y_2, y_3) são: primeiros associados se $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$ e $x_3 \neq y_3$; segundos associados se $x_1 = y_1$ e $x_2 \neq y_2$; terceiros associados se $x_1 \neq y_1$ e $x_2 = y_2$ e quartos associados caso não se verifiquem as situações anteriores. Os parâmetros associados são $n_1 = s - 1$, $n_2 = (p - 1)s$, $n_3 = (q - 1)s$ e $n_4 = (q - 1)(p - 1)s$.

4.4 Considerações

O estudo e desenvolvimento dos vários tipos de PBIBD revela-se um campo de investigação muito prometedora, dados os muitos ramos ainda não explorados. Na abordagem à classificação dos PBIBD é imediato constatar a dimensão da problemática bem como o envolvimento e fortes ligações a outras áreas conhecidas, tais como a álgebra, a teoria de grafos e a geometria.

Capítulo 5

PBIBD: abordagem geométrica

5.1 Introdução

Bose (1963) aplicou a teoria de grafos, em particular os grafos fortemente regulares, à construção dos PBIBD. Este ramo expandiu-se e revelou-se particularmente útil na construção de esquemas de associação em geral, como se revela nos artigos de Cameron (2004), Bailey (2005) e Fiala e Haemers (2006).

Neste capítulo apresentam-se três abordagens distintas aos PBIBD: a partir da teoria de grafos com coloração de arestas, proposto por Bailey (2004); através da partição em classes de associação e recorrendo à geometria parcial. Através da concretização de exemplos pretende ilustrar-se que as diferentes abordagens se adequam melhor a determinados esquemas de associação, de acordo com a finalidade em estudo.

5.2 Resultados preliminares da teoria de grafos

Seja V um conjunto de pontos designados por vértices. Considerem-se dois vértices, a linha que une estes dois pontos designa-se por aresta. Um grafo G é um par (V, A) em que V representa o conjunto não vazio dos vértices e A o conjunto das arestas, constituído por pares ordenados de vértices.

Num grafo, dois vértices dizem-se adjacentes se tiverem uma aresta que os une e de forma análoga, duas arestas dizem-se adjacentes se tiverem um vértice em comum. Um grafo é completo se quaisquer dois dos seus vértices são adjacentes. Uma aresta que liga um vértice a ele próprio chama-se lacete. Se dois vértices estiverem ligados por mais do que uma aresta, então as arestas que os ligam chamam-se arestas paralelas. Um grafo sem arestas paralelas designa-se grafo simples e um grafo sem arestas chama-se grafo nulo.

A ordem de um grafo representa o número de vértices desse grafo e a dimensão de um grafo o número de arestas. O grau ou valência de um vértice é igual ao número de arestas que incidem nesse vértice. Em qualquer grafo, a soma de todos os graus dos vértices é o dobro do

número de arestas. Chama-se grafo regular a um grafo em que todos os vértices têm o mesmo grau de valência d .

A definição de grafo fortemente regular para classes de associação, deve-se a Bose (1963). Esta definição tem aplicabilidade apenas para os PBIBD com duas classes de associação. Bailey (2004) reforça a definição de Bose (1963), generalizando a sua aplicabilidade a qualquer esquema de associação com duas classes de associação. Haemers (2000) generaliza a definição proposta por Bose (1963) e apresenta a definição de grafo fortemente regular de ordem m .

Definição 1: Grafo fortemente regular (segundo Bose (1963))

Num grafo regular, se quaisquer dois vértices adjacentes estiverem ligados a p_{11}^1 vértices em comum e dois vértices quaisquer não adjacentes estiverem ligados a p_{11}^2 vértices em comum, o grafo é designado fortemente regular.

Definição 2: Grafo fortemente regular (segundo Bailey (2004))

Um grafo G é fortemente regular se:

- i)* O grafo é regular, isto é, todos os vértices têm o mesmo grau de valência;
- ii)* Cada aresta está contida no mesmo número de triângulos (cujos lados são arestas);
- iii)* Cada não aresta está contida no mesmo número de configurações do tipo:



- iv)* Não é um grafo completo nem é um grafo nulo.

Definição de grafo fortemente regular de ordem v :

Um grafo de ordem v que, não seja nem simples nem tenha lacetes, é fortemente regular com os parâmetros v, k, λ, μ se verificar as condições:

- i)* Cada vértice é adjacente a k vértices;
- ii)* Para cada par de vértices adjacentes existem λ vértices adjacentes a ambos;
- iii)* Para cada par de vértices não adjacentes existem μ vértices adjacentes a ambos;

Seidel (1967) introduziu o conceito de equivalência entre grafos. Em qualquer grafo $G = (X, U)$ a operação complementar, no que concerne a um vértice $x \in X$, resulta num grafo com o mesmo número de vértices X , no qual todas as arestas existentes a partir de x serão anuladas e as arestas não existentes serão desenhadas. Segundo este autor a complementação gera uma noção de equivalência.

Definição de equivalência de Seidel:

Dois grafos $G_1 = (X, U_1)$ e $G_2 = (X, U_2)$ gozam de equivalência Seidel (S-equivalentes) se um é obtido a partir do outro por complementação, no que concerne a um vértice x de um subconjunto não vazio S de X .

A matriz de adjacência $\mathbf{A}_{v \times v} = [a_{ij}]$ de um grafo é definida da seguinte forma:

$$\mathbf{A}_{v \times v} = [a_{ij}] = \begin{cases} 1, & \text{se os vértices } i \text{ e } j \text{ forem adjacentes;} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Na teoria de grafos, a matriz de adjacência desempenha um papel similar à matriz de incidência no delineamento de experiências. Se o grafo for regular, a matriz de adjacência de um grafo é simétrica e as somas das colunas e das linhas é constante.

Pela forma como a matriz \mathbf{A} foi definida, esta representa a matriz de primeiros associados anteriormente representada por \mathbf{B}_1 , então:

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{B}_1^2 = \sum_{i=0}^2 p_{11}^i \mathbf{B}_i = p_{11}^0 \mathbf{B}_0 + p_{11}^1 \mathbf{B}_1 + p_{11}^2 (\mathbf{J}\mathbf{J}^T - \mathbf{B}_1 - \mathbf{I}) .$$

Como $p_{11}^0 = n_1 = d$,

$$\mathbf{A}^2 = (d - p_{11}^2) \mathbf{I} + p_{11}^2 \mathbf{J}\mathbf{J}^T + (p_{11}^1 - p_{11}^2) \mathbf{A} = (e - f) \mathbf{A} + f \mathbf{J}\mathbf{J}^T + (d - f) \mathbf{I}, \text{ com } e = p_{11}^1 \text{ e}$$

$f = p_{11}^2$. Pode, portanto, concluir-se o seguinte teorema:

Teorema 5.1:

Num grafo G regular de valência d , a matriz de adjacência \mathbf{A} coincide com a matriz de adjacência de um grafo fortemente regular se existirem os inteiros não negativos e e f tal que: $e = p_{11}^1$, $f = p_{11}^2$ e

$$\mathbf{A}^2 = (e - f) \mathbf{A} + f \mathbf{J}_v \mathbf{J}_v^T + (d - f) \mathbf{I}_v . \tag{5.1}$$

5.3 Aplicações da teoria de grafos aos PBIBD

Seja G um grafo com v vértices e seja \mathbf{A} a matriz de adjacência. Os v vértices do grafo representam os tratamentos do PBIBD e os tratamentos x e y serão primeiros associados se x e y forem vértices adjacentes, caso contrário serão segundos associados. Em Raghavarao (1971) é referido que o conceito de grafo fortemente regular é isomorfo a um PBIBD com duas classes de associação bem como o conceito de grafo fortemente regular de ordem v é isomorfo a um PBIBD com m classes de associação.

O teorema que se segue foi anteriormente referido em (2.31), substituindo-se neste caso: \mathbf{B}_0 por \mathbf{I}_v e \mathbf{A} por \mathbf{B}_1 .

Teorema 5.2:

Seja \mathbf{N} uma matriz de ordem $v \times b$ cujos elementos são 0 ou 1 e os totais das linhas e das colunas são constantes, então \mathbf{N} é a matriz de incidência de um PBIBD com duas classes de associação se e só se:

$$\mathbf{N}\mathbf{N}^T = r\mathbf{I}_v + \lambda_1\mathbf{A} + \lambda_2(\mathbf{J}_v\mathbf{J}_v^T - \mathbf{I}_v - \mathbf{A})$$

com $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $r \geq \max(\lambda_1, \lambda_2)$ e sendo \mathbf{A} a matriz de adjacência de um grafo fortemente regular.

Definição de esquema de associação com recurso a grafos coloridos:

Num conjunto finito Ω , um esquema de associação com s classes de associação é um grafo completo cujos vértices são elementos do conjunto Ω , no qual as arestas que os unem são s coloridas e verificam as condições:

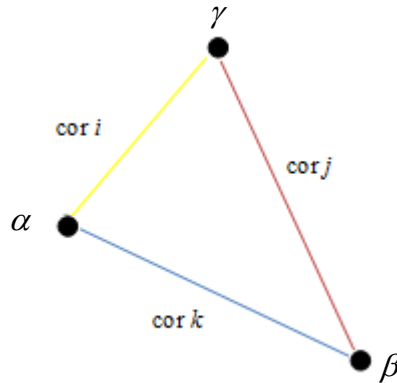
- i)* Quaisquer que sejam i, j, k no conjunto $\{0, \dots, s\}$, existe um inteiro p_{ij}^k tal que, qualquer que seja a aresta $\{\alpha, \beta\}$ de cor k se verifica a condição:

$$\#\{\gamma \in \Omega : (\alpha, \gamma) \text{ tem cor } i \text{ e } (\gamma, \beta) \text{ tem cor } j\} = p_{ij}^k$$

- ii)* Todas as cores são usadas pelo menos uma vez;
- iii)* Cada vértice está contido em a_i arestas de cor, sendo a_i representado por um número inteiro com $i \in \{1, \dots, s\}$.

Seguidamente explicita-se a condição **i)**:

Selecionem-se dois vértices distintos α e β e considere-se que a aresta definida por estes dois vértices tem cor k . Considere-se ainda um vértice γ . O triângulo definido por estes três pontos terá ainda uma aresta de cor i definida pelos vértices α e γ e outra de cor j , definida pelos vértices γ e β . O número de vértices que originam triângulos com esta coloração de arestas é p_{ij}^k , como se representa na imagem:

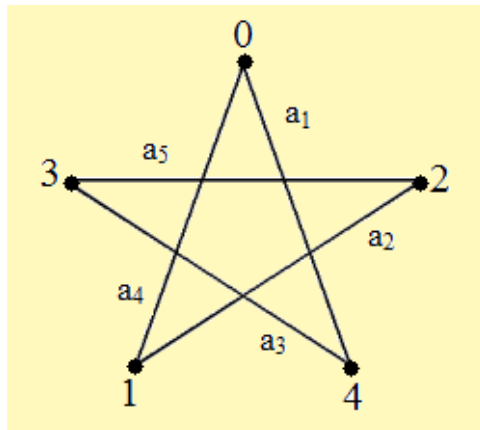


Considerações sobre a condição **iii)**:

Partir-se-á do princípio que nenhuma aresta tem cor branca e assumir-se-á que a cor dos vértices será branca, pelo que a sua cor será representada por zero, sendo estes os parâmetros zero-ésimos associados, então: $a_0 = 1$, $p_{ii}^0 = a_i$, $p_{i0}^i = p_{0i}^i = 1$ e $p_{ij}^0 = p_{i0}^j = p_{0j}^i = 0$ se $i \neq j$, tal como foi referido nas expressões 2.15, 2.16 e 2.17.

Exemplo 1:

Retomando o esquema 4.8 cíclico, para duas classes de associação:



Esquema 5.1: Representação de um PBIBD cíclico ($v = 5, b = 5, r = 3, k = 3, \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$), recorrendo a um grafo

Neste grafo o conjunto V dos vértices é constituído pelos tratamentos $V = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ e o conjunto A das arestas é $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$, pelo que a ordem e a dimensão do grafo são 5. O grau de valência d de cada vértice é 2 e conseqüentemente o grafo é regular.

Através da análise do grafo, observa-se por exemplo:

- os vértices 0 e 4 são adjacentes;
- os vértices 0 e 2 são não adjacentes;
- as arestas a_1 e a_4 são adjacentes;
- as arestas a_1 e a_2 são não adjacentes.

Tomando como exemplo os vértices 0 e 4: os vértices adjacentes ao vértice 0 são os vértices 1 e 4 e os vértices adjacentes ao vértice 4 são os vértices 0 e 3, logo não têm em comum nenhum vértice adjacente. Recorde-se que, neste exemplo, $p_{11}^1 = 0$ coincidindo com o número de vértices comuns.

Relativamente aos vértices não adjacentes 0 e 2: os vértices adjacentes ao vértice 0 são os vértices 1 e 4 e os vértices adjacentes ao vértice 2 são os vértices 1 e 3, pelo que têm em comum um vértice. Recorde-se que, neste exemplo, $p_{11}^2 = 1$ coincidindo com o número de vértices comuns.

O grafo é fortemente regular e tem por matriz de adjacência:

$$\mathbf{A}_{v \times v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{cujo quadrado é: } \mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

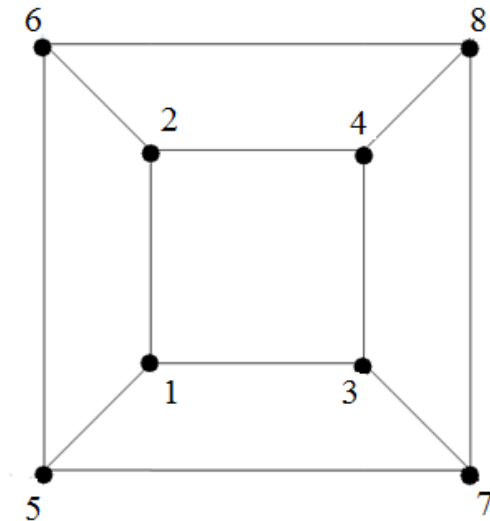
Recorrendo à expressão 5.1, vem:

$$\mathbf{A}^2 = (e - f)\mathbf{A} + f\mathbf{J}_v\mathbf{J}_v^T + (d - f)\mathbf{I}_v = (p_{11}^1 - p_{11}^2)\mathbf{A} + f\mathbf{J}_v\mathbf{J}_v^T + (d - p_{11}^2)\mathbf{I}_v =$$

$$= - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2:

Retomando o esquema cúbico 4.12 com 3 classes associação com os parâmetros $v = 8, b = 12, r = 3, k = 2, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0, n_1 = 3, n_2 = 3$ e $n_3 = 1$, tem-se esquematicamente:

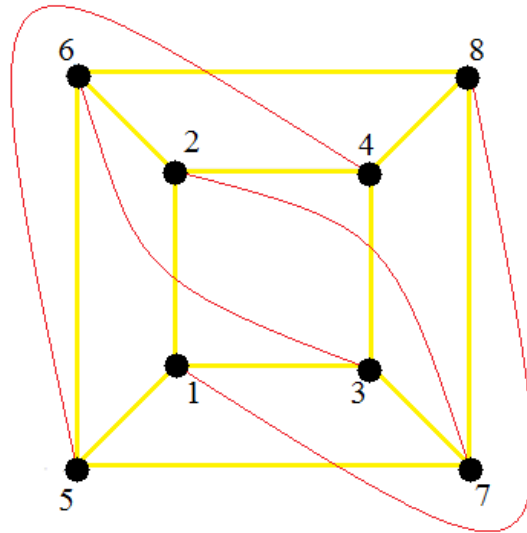


Esquema 5.2: Representação, sob a forma de grafo, do PBIBD cúbico
 $(v = 8, b = 12, r = 3, k = 2, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0$ e $\lambda_3 = 0)$ com três classes de associação

Pode concluir-se que o grafo é fortemente regular, uma vez que:

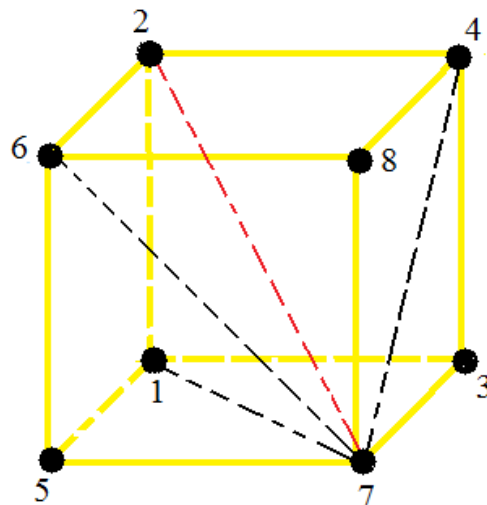
- i)* O grafo é regular, isto é, todos os vértices têm o mesmo grau de valência três;
- ii)* Cada aresta está contida no mesmo número de triângulos (que neste caso será zero);
- iii)* Cada não aresta está contida no mesmo número de configurações, por exemplo: a não aresta $[35]$ está contida nos triângulos $[153]$ e $[357]$;
- iv)* Não é um grafo completo porque nem todos os vértices são adjacentes nem é um grafo nulo, porque tem arestas.

Pela observação deste grafo não se visualizam as classes de segundos e terceiros associados, pelo que se irá recorrer a um grafo colorido, no qual as arestas amarelas são as arestas do cubo, as arestas vermelhas representam as diagonais principais do cubo e as arestas pretas simbolizam as diagonais das faces do cubo. Na representação seguinte, as arestas pretas foram omitidas.



Esquema 5.3: Representação sob a forma de grafo com arestas coloridas do PBIBD cúbico
 $(v = 8, b = 12, r = 3, k = 2, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0 \text{ e } \lambda_3 = 0)$ com três classes de associação

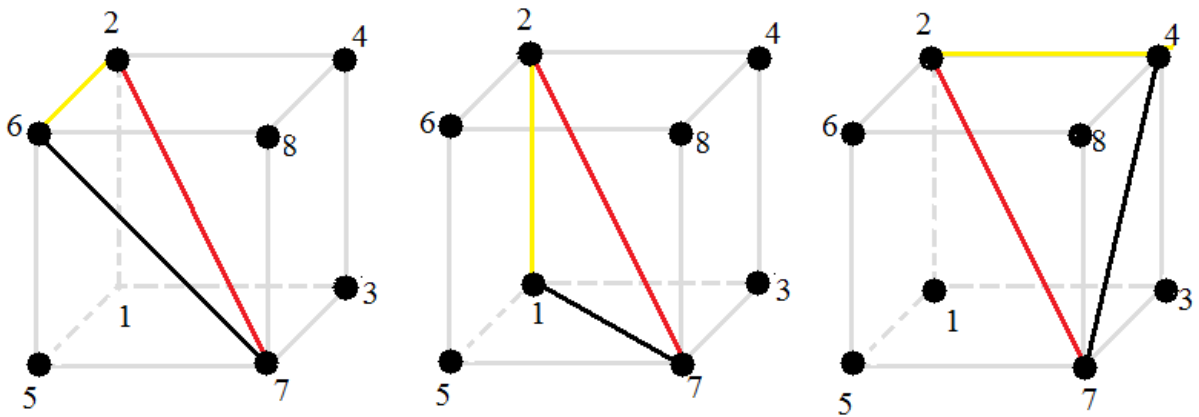
Considerando dois tratamentos, estes serão: primeiros associados se as arestas que os unem forem amarelas, segundos associados se as arestas que os unem forem vermelhas e terceiros associados se as arestas forem pretas. Como o desenho de todas estas arestas iria dificultar a sua interpretação, na figura seguinte assinalam-se apenas as arestas diagonais relativas ao tratamento 7, a três dimensões:



Esquema 5.4: Representação, sob a forma de grafo com arestas coloridas, do PBIBD cúbico
 $(v = 8, b = 12, r = 3, k = 2, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0 \text{ e } \lambda_3 = 0)$ com três classes de associação, através de um cubo

Seleccionando os vértices 2 e 7 e, tendo em consideração que estes tratamentos são terceiros associados ($k=3$) porque a aresta que os une é vermelha, pretende determinar-se por exemplo, p_{12}^3 :

A partir da aresta vermelha, irá seleccionar-se uma aresta amarela, a partir do vértice 2 por opção, porque o primeiro subíndice de p_{12}^3 é 1. Poderá optar-se pela aresta que une os tratamentos 2 e 1, 2 e 4 ou 2 e 6. Desta forma obtêm-se três triângulos todos com a mesma coloração (uma aresta vermelha, uma amarela e outra preta) logo $p_{12}^3 = 3$ ou $p_{\text{amarelo,preto}}^{\text{vermelho}}$.



Esquema 5.5: Determinação de $p_{\text{amarelo,preto}}^{\text{vermelho}}$, sob a forma de grafo com arestas coloridas, para o PBIBD cúbico ($v=8, b=12, r=3, k=2, \lambda_1=1, \lambda_2=0$ e $\lambda_3=0$) com três classes de associação, através de um cubo

Para cada vértice convergem 3 arestas amarelas, 3 arestas pretas e uma vermelha, então:

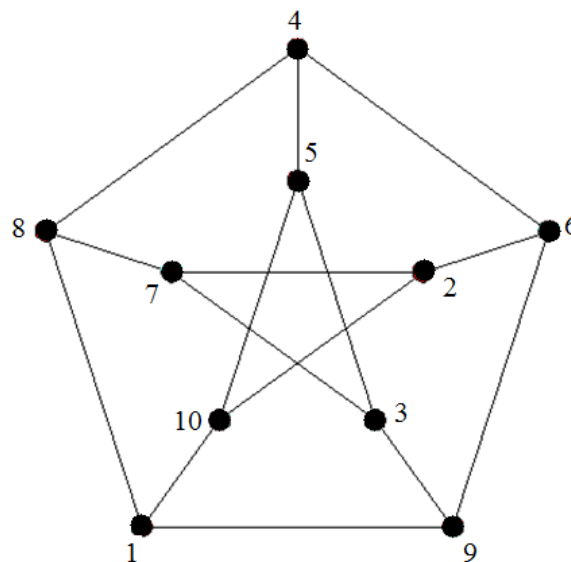
$$\mathbf{P}^{\text{amarelo}} = \begin{array}{cccc|l}
 & \text{branco} & \text{amarelo} & \text{vermelho} & \text{preto} & \\
 \left[\begin{array}{cccc}
 0 & 1 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 2 \\
 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 2 & 1 & 0
 \end{array} \right] & \text{branco} \\
 & \text{amarelo} \\
 & \text{vermelho} \\
 & \text{preto}
 \end{array}$$

$$\mathbf{P}^{\text{preto}} = \begin{array}{cccc|l}
 & \text{branco} & \text{amarelo} & \text{vermelho} & \text{preto} & \\
 \left[\begin{array}{cccc}
 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 2 & 1 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 2
 \end{array} \right] & \text{branco} \\
 & \text{amarelo} \\
 & \text{vermelho} \\
 & \text{preto}
 \end{array}$$

$$\mathbf{P}^{\text{vermelho}} = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{branco} & \text{amarelo} & \text{vermelho} & \text{preto} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{branco} \\ \text{amarelo} \\ \text{vermelho} \\ \text{preto} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

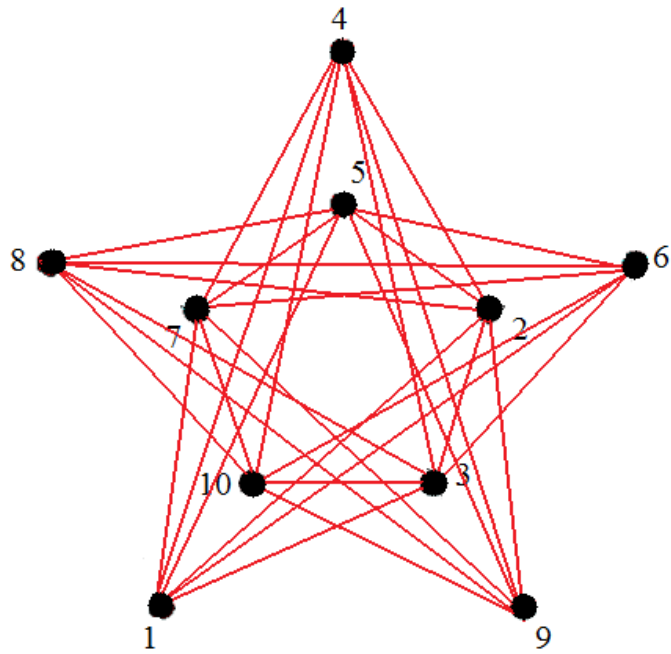
Exemplo 3:

Retomando o esquema 4.2, um PBIBD triangular com duas classes de associação, este será representado através de um grafo, conhecido por grafo de Peterson.



Esquema 5.6.: PBIBD triangular com duas classes de associação
 $(v = 10, b = 5, r = 2, k = 4, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0)$,
 representação com recurso ao grafo de Peterson para tratamentos segundos associados

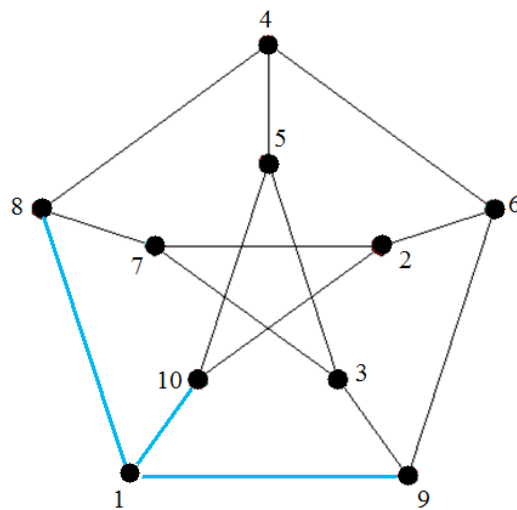
Observa-se que, neste grafo com 10 vértices estão simbolizados 10 tratamentos. Verifica-se ainda que, cada tratamento está unido por 3 arestas a 3 vértices, que no referido esquema são tratamentos segundos associados. Desenhando o grafo complementar, obtêm-se:



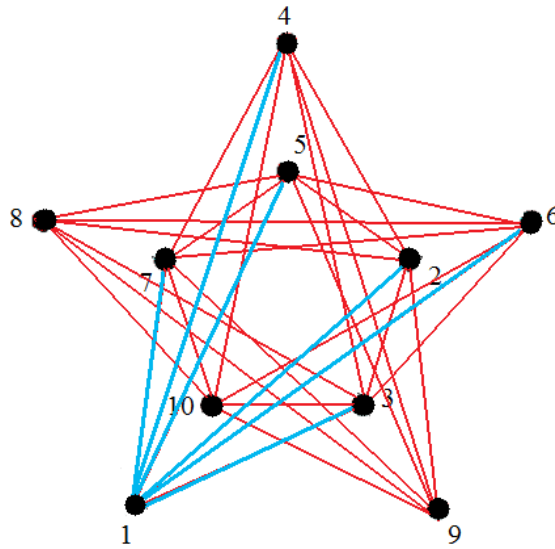
Esquema 5.7.: PBIBD triangular com duas classes de associação
 $(v = 10, b = 5, r = 2, k = 4, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0)$,
 representação com recurso ao grafo de Peterson para tratamentos primeiros associados

Da análise dos dois grafos anteriores, destaca-se o facto da leitura simplificada do primeiro, pelo que se destaca a utilidade da complementação e da equivalência de Seidel para que haja uma interpretação mais facilitada.

Destaca-se para o tratamento 1 os seus segundos associados e em seguida os segundos associados, em consonância com a tabela 4.1.



Esquema 5.8.: Segundos associados do tratamento 1, num PBIBD triangular com duas classes de associação
 $(v = 10, b = 5, r = 2, k = 4, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0)$,
 representação com recurso ao grafo de Peterson para tratamentos segundos associados



Esquema 5.9.: Primeiros associados do tratamento 1, num PBIBD triangular com duas classes de associação ($v = 10, b = 5, r = 2, k = 4, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0$), representação com recurso ao grafo de Peterson para tratamentos segundos associados

5.4 Abordagem aos PBIBD com recurso a partições em classes

Esquemas de associação são relações entre pares de elementos de um conjunto finito Ω . Seja $\Omega \times \Omega$ o conjunto de pares ordenados de elementos de Ω , tal que:

$$\Omega \times \Omega = \{(\alpha, \beta) : \alpha \in \Omega \wedge \beta \in \Omega\}.$$

Seja C um subconjunto de $\Omega \times \Omega$. O subconjunto C' é o **dual** do subconjunto C se e só se $C' = \{(\beta, \alpha) : (\alpha, \beta) \in C\}$. C é um subconjunto simétrico se e só se $C = C'$. Salienta-se o caso particular do subconjunto simétrico $Diag(\Omega)$ definido por:

$$Diag(\Omega) = \{(\omega, \omega) : \omega \in \Omega\}.$$

Seja $C_i(\alpha)$ o conjunto de i -ésimos associados do tratamento α . Num conjunto finito Ω , um esquema de associação com s classes de associação é uma partição de $\Omega \times \Omega$ no conjunto de classes de associação C_0, C_1, \dots, C_s , tal que:

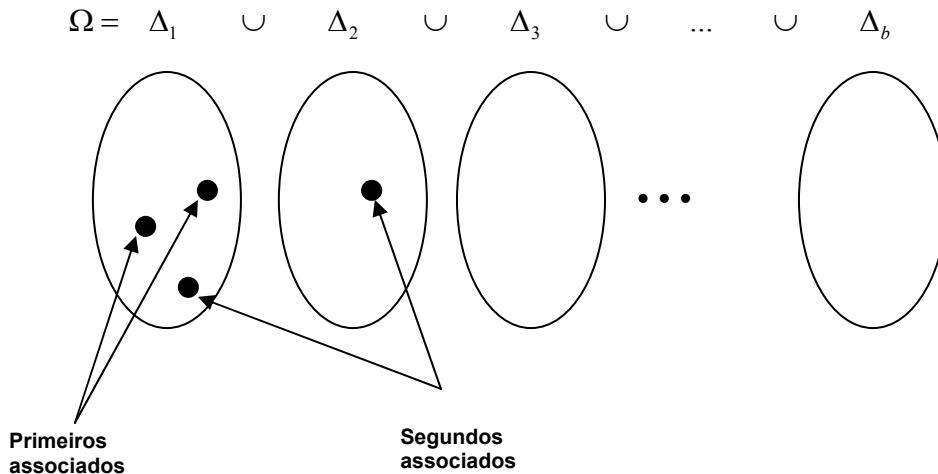
- i) $C_0 = Diag(\Omega)$;
- ii) C_i é simétrico para $i = 1, 2, \dots, s$;
- iii) Quaisquer que sejam $i, j, k \in \{0, \dots, s\}$, existe um número inteiro, tal que:

$$\forall (\alpha, \beta) \in C_k : \#\{\gamma \in \Omega : (\alpha, \gamma) \in C_i \wedge (\gamma, \beta) \in C_j\} = p_{ij}^k.$$

As expressões correspondentes às expressões 2.19 e 2.4 serão dadas por:

$$\sum_{i=0}^s a_i = \#\Omega \quad \text{e} \quad \sum_j p_{ij}^k = a_i.$$

Seja $\Delta_1 \cup \dots \cup \Delta_b$ uma partição de Ω em b blocos de dimensão m , tal que $b \geq 2$ e $m \geq 2$. Os subconjuntos $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_b$ são designados por grupos. Sejam α e β primeiros associados caso estejam no primeiro grupo e segundos associados caso contrário, então:



Esquema 5.10: Partição em classes de um PBIBD divisível com m classes de associação

Se $\omega \in \Omega$, então ω tem $m-1$ primeiros associados e $(b-1)m$ segundos associados. Se α e β são primeiros associados então o número de γ que são especificados a partir de α e β são:

α e β primeiros associados	$C_1(\beta)$	$C_2(\beta)$
$C_1(\alpha)$	$m-2$	0
$C_2(\alpha)$	0	$(b-1)m$

Tabela 5.1: Partição em classes de um esquema com duas classes de associação para primeiros associados

Por exemplo, os elementos que são primeiros associados simultaneamente de α e β são os $m-2$ restantes elementos do grupo que contém α e β . Se α e β são segundos associados então o número de γ que estão especificados como associados de α e β são:

α e β segundos associados	$C_1(\beta)$	$C_2(\beta)$
$C_1(\alpha)$	0	$m-1$
$C_2(\alpha)$	$m-1$	$(b-2)m$

Tabela 5.2: Partição em classes de um esquema com duas classes de associação para segundos associados

Facilmente se verifica que as tabelas anteriores correspondem às matrizes de associação \mathbf{P}_i , $i=1,2$, de um PBIBD divisível em grupos com duas classes de associação.

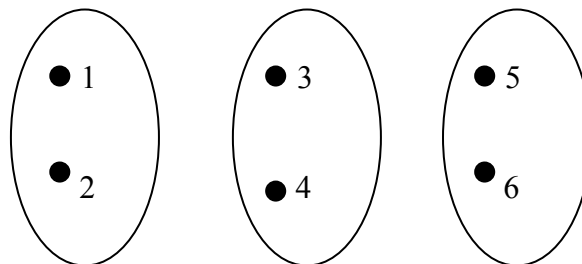
Exemplo 4:

O grupo divisível do esquema 4.1:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

pode ser representado por um esquema de associação definido por partições recorrendo a diagramas ou a tabelas, como se apresenta seguidamente:

$$\Omega = \{1,2\} \cup \{3,4\} \cup \{5,6\}$$



Esquema 5.11: Partição em classes de um PBIBD divisível em grupos com duas classes

		Elementos de $\Omega \times \Omega$					
		1	2	3	4	5	6
1	$C_0 = 0$	C_1	C_2	C_2	C_2	C_2	C_2
2	C_1	$C_0 = 0$	C_2	C_2	C_2	C_2	C_2
3	C_2	C_2	$C_0 = 0$	C_1	C_2	C_2	C_2
4	C_2	C_2	C_1	$C_0 = 0$	C_2	C_2	C_2
5	C_2	C_2	C_2	C_2	$C_0 = 0$	C_1	C_2
6	C_2	C_2	C_2	C_2	C_1	$C_0 = 0$	C_2

Tabela 5.3: Tabela de partição em classes de um PBIBD divisível em grupos com duas classes

De acordo com a definição, C_0 é a diagonal principal que será representada por zero e a tabela é simétrica em relação à diagonal principal.

A condição ii) implica que $p_{ij}^0 = 0$ se $i \neq j$. Analogamente, $p_{0j}^k = 0$ se $j \neq k$ e $p_{i0}^k = 0$ se $i \neq k$ enquanto que $p_{0j}^j = 1 = p_{i0}^i$. A condição iii) implica que qualquer elemento de Ω tem p_{ii}^0 i -ésimos associados. Recorrer-se-á à notação $a_i = p_{ii}^0$ sendo a_i designado pela valência da i -ésima classe de associação.

Exemplo 5:

O esquema 4.9 rectangular, com 3 classes de associação, pode ser também representado com recurso a partições. Recorde-se que o esquema era:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Seja Ω uma matriz rectangular com $n \geq 2$ e $m \geq 2$, então:

$$C_1 = \{(\alpha, \beta) : \alpha \text{ e } \beta \text{ estão na mesma linha e } \alpha \neq \beta\}$$

$$C_2 = \{(\alpha, \beta) : \alpha \text{ e } \beta \text{ estão na mesma coluna e } \alpha \neq \beta\}$$

$$C_3 = \{(\alpha, \beta) : \alpha \text{ e } \beta \text{ estão em colunas e linhas diferentes}\} = (\Omega \times \Omega) \setminus C_0 \setminus C_1 \setminus C_2$$

As tabelas seguintes mostram o número de tratamentos comuns para cada classe:

$(\alpha, \beta) \in C_1$	$C_1(\beta)$	$C_2(\beta)$	$C_3(\alpha)$
$C_1(\alpha)$	$m - 2$	0	0
$C_2(\alpha)$	0	0	$n - 1$
$C_3(\alpha)$	0	$n - 1$	$(n - 1)(m - 2)$

Tabela 5.4: Partição em classes de um esquema com três classes de associação para primeiros associados

$(\alpha, \beta) \in C_2$	$C_1(\beta)$	$C_2(\beta)$	$C_3(\alpha)$
$C_1(\alpha)$	0	0	$m-1$
$C_2(\alpha)$	0	$n-2$	0
$C_3(\alpha)$	$m-1$	0	$(n-2)(m-1)$

Tabela 5.5: Partição em classes de um esquema com três classes de associação para segundos associados

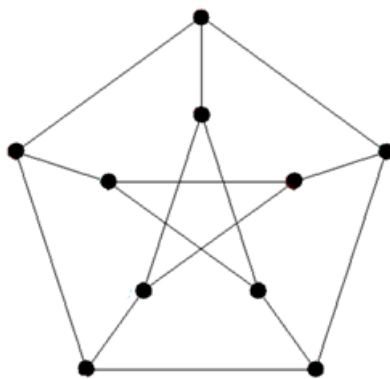
$(\alpha, \beta) \in C_3$	$C_1(\beta)$	$C_2(\beta)$	$C_3(\alpha)$
$C_1(\alpha)$	0	1	$m-2$
$C_2(\alpha)$	1	0	$n-2$
$C_3(\alpha)$	$m-2$	$n-2$	$(n-2)(m-2)$

Tabela 5.6: Partição em classes de um esquema com três classes de associação para terceiros associados

Facilmente se verifica que as tabelas anteriores correspondem às matrizes de associação \mathbf{P}_i , $i = 1, 2, 3$, de um PBIBD divisível em grupos com duas classes de associação.

Exemplo 6:

Considere-se o grafo de Peterson:



Esquema 5.12: Grafo de Peterson

Seguidamente, pretende mostrar-se que a principal vantagem em aplicar um esquema em partições é o facto de permitir preencher tabelas conhecendo apenas alguns parâmetros. Recorde-se que desta forma se podem obter as matrizes \mathbf{P}_i .

Seja C_1 o conjunto de arestas do grafo e C_2 o conjunto das arestas não desenhadas. Verifica-se que em cada vértice incidem 3 arestas pelo que $a_1 = 3$ e conseqüentemente $a_2 = 10 - 1 - 3 = 6$, aplicando a expressão $\sum_{i=0}^s a_i = \#\Omega$, facilmente se preenchem as seguintes células da tabela:

$(\alpha, \beta) \in C_1$	$C_1(\beta)$	$C_2(\beta)$	$C_3(\alpha)$	
$C_1(\alpha)$	0	1	-----	1
$C_2(\alpha)$	1	0	-----	3
$C_3(\alpha)$	0	-----	-----	6
	1	3	6	10

Tabela 5.7: Tabela incompleta da partição em classes do grafo de Peterson para tratamentos primeiros associados preenchida apenas pela observação do grafo

$(\alpha, \beta) \in C_1$	$C_1(\beta)$	$C_2(\beta)$	$C_3(\alpha)$
$C_1(\alpha)$	0	1	0
$C_2(\alpha)$	1	0	2
$C_3(\alpha)$	0	2	4

Tabela 5.8: Partição em classes do grafo de Peterson para tratamentos primeiros associados

$(\alpha, \beta) \in C_2$	$C_1(\beta)$	$C_2(\beta)$	$C_3(\alpha)$
$C_1(\alpha)$	0	0	1
$C_2(\alpha)$	0	1	2
$C_3(\alpha)$	1	2	3

Tabela 5.9: Partição em classes do grafo de Peterson para tratamentos segundos associados

5.5 PBIBD e Geometria Parcial

Uma geometria parcial (r, k, t) é um sistema de pontos e rectas que satisfazem a seguinte axiomática:

Axioma 1: Dois pontos distintos definem uma única recta;

Axioma 2: Cada ponto está contido em r rectas;

Axioma 3: Cada recta contém k pontos;

Axioma 4: Se o ponto P não estiver contido na recta ℓ , então existem t rectas ($t \geq 1$)

que contêm o ponto P e que intersectam em algum ponto da recta ℓ e $1 \leq t \leq \min(r, k)$.

Esta axiomática é similar aos axiomas de incidência da geometria euclidiana. O teorema seguinte deve-se a Bose (1963).

Teorema 5.3:

Considerando que os pontos representam os tratamentos e as linhas os blocos, a partir de uma geometria parcial (r, k, t) pode construir-se um PBIBD com duas classes de associação com os parâmetros:

$$v = k[(r-1)(k-1) + t] / t,$$

$$b = r[(r-1)(k-1) + t], r, k,$$

$$n_1 = r(k-1),$$

$$n_2 = (r-1)(k-1)(k-t) / t,$$

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0,$$

$$p_1^{11} = (t-1)(r-1) + k - 2 \text{ e } p_{11}^2 = rt.$$

Demonstração:

Definam-se dois tratamentos como primeiros associados se ocorrerem no mesmo bloco, caso contrário serão segundos associados. Os tratamentos serão representados por pontos e os blocos por rectas. Dado um ponto P há r rectas que o contêm, então o número de primeiros associados deste ponto é $n_1 = r(k-1)$.

Aplicando o axioma 4, cada uma das $(b-r)$ rectas que não passam pelo ponto P , contêm t pontos que intersectam as rectas que contêm o ponto P , e cada um destes pontos intersectam $(r-1)$ rectas, então n_1 também poderá ser escrito como $n_1 = t(b-r)/(r-1)$.

Igualando as duas últimas condições $n_1 = r(k-1)$ e $n_1 = t(b-r)/(r-1)$ tem-se $b = r[(r-1)(k-1)+t]/t$ e recorrendo à relação $vr = bk$, obtém-se $v = r[(r-1)(k-1)+t]/t$.

Cada um dos $b-r$ blocos que não contêm P têm $k-t$ segundos associados de P e cada um destes segundos associados está contido em r blocos, então:

$$n_2 = (k-t)(b-r)/r = (r-1)(k-1)(k-t)/t$$

Sejam os tratamentos P e Q primeiros associados que ocorrem no bloco ℓ . Contando os seus primeiros associados em comum, os outros $k-2$ pontos da recta ℓ têm $(r-1)(t-1)$ primeiros associados de Q que intersectam as $r-1$ rectas que contêm P são os primeiros associados de ℓ que intersectam as $r-1$ rectas que contêm o ponto P , então

$$p_{11}^1 = (r-1)(t-1) + k - 2$$

Sejam P e R dois tratamentos segundos associados então não há nenhuma recta a passar por P e R . Cada uma das r rectas que passam por P têm t primeiros associados de R , recorrendo ao axioma 4. Então, $p_{11}^1 = rt$.

A partir da demonstração anterior verifica-se que esta geometria parcial pode ser interpretada como um esquema com duas associações com os parâmetros:

$$v = k[(r-1)(k-1)+t]/t, \quad n_1 = r(k-1), \quad n_2 = (r-1)(k-1)(k-t)/t \quad p_{11}^1 = (t-1)(r-1) + k - 2$$

$$p_{11}^2 = rt.$$

Em Raghavarao (1971) provam-se os seguintes teoremas:

Teorema 5.4:

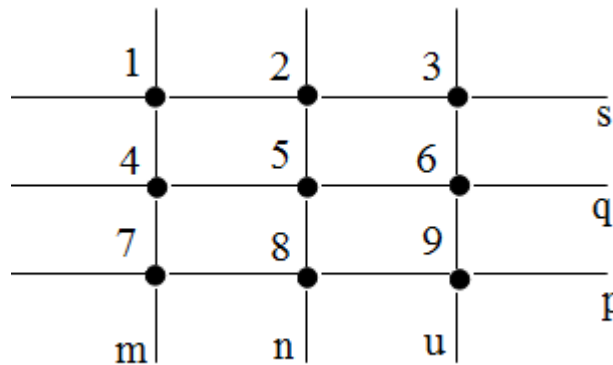
Um PBIBD com duas classes de associação com os parâmetros $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$ e $k > r$ é necessariamente uma geometria parcial.

Teorema 5.5:

É condição necessária para a existência de uma geometria parcial (r, k, t) que a fracção $\frac{rk(r-1)(k-1)}{r(k+r-t-1)}$ seja um número inteiro positivo.

Exemplo 7:

Considere-se o quadrado latino referido em 4.5 definido pelos parâmetros $v = 9, b = 6, k = 3, r = 2, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0, n_1 = 4$ e $n_2 = 4$. Este PBIBD com duas classes de associação pode ser representado da seguinte forma:



Esquema 5.13: Representação de um PBIBD quadrado latino com duas classes de associação ($v = 9, b = 6, r = 2, k = 3, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0$) com recurso à geometria parcial

Os blocos são representados pelas rectas e os pontos simbolizam os tratamentos. Definam-se dois tratamentos como primeiros associados se ocorrerem num bloco, caso contrário serão segundos associados. Recorrendo ao teorema 4, este PBIBD com duas classes de associação é necessariamente uma geometria parcial dado que os parâmetros são $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0$ e $k > r$

Pretende determinar-se o valor de t : considere-se, por exemplo, o tratamento 3 que não está contido na recta p . Pelo axioma 4, existem t rectas que contêm o ponto 3 e que intersectam em algum ponto a recta p . A única recta nestas condições é a recta u , pelo que $t = 1$. Seguidamente verificar-se-á que este delineamento é de facto uma geometria parcial:

$$\begin{aligned}
v &= k[(r-1)(k-1)+t]/t \Rightarrow v=9, & b &= r[(r-1)(k-1)+t] \Rightarrow b=6, & k &= 3, & r &= 2, \\
n_1 &= r(k-1) \Rightarrow n_1=4, & n_2 &= (r-1)(k-1)(k-t)/t \Rightarrow n_2=4, & \lambda_1 &= 1, & \lambda_2 &= 0, \\
p_1^{11} &= (t-1)(r-1)+k-2 \Rightarrow p_1^{11}=1 & \text{e} & & p_{11}^2 &= rt \Rightarrow p_{11}^2=2.
\end{aligned}$$

Relativamente ao ponto 3 há duas rectas que o contêm, as rectas u e s , por isso $r=2$. O número de primeiros associados deste ponto é dado pelo produto de r por $k-1$, dado que se terá de excluir o tratamento 3, pelo que $n_1=r(k-1)$.

Como cada um dos quatro $(b-r)$ blocos que, não contêm o ponto 3, têm 2 $(k-t)$ segundos associados do tratamento 3 e cada um destes segundos associados está contido em dois (r) blocos, $n_2=(k-t)(b-r)/r=(r-1)(k-1)(k-t)/t$ e será igual a 4.

5.6 Considerações

Investigou-se neste capítulo a abordagem geométrica ao estudo dos PBIBD, procurando ilustrar as diferentes perspectivas e a sua adequação a várias finalidades.

Relativamente à aplicabilidade da teoria de grafos destaca-se de imediato a visualização do esquema, como se observou no esquema (4.8) cíclico, para além de permitir determinar a matriz de adjacência, bem como visualizar facilmente os parâmetros p_{jk}^i .

A abordagem aos PBIBD com recurso a partições em classes é muito relevante no estudo e construção de casos particulares dos PBIBD, tais como: grupos divisíveis para duas classes de associação ou esquemas rectangulares para três classes de associação. Convém salientar que, o recurso a partições em classes traduz uma vantagem na obtenção de parâmetros desconhecidos recorrendo ao preenchimento de tabelas de classes de associação.

Apresentou-se a Geometria Parcial dada a sua ênfase na visualização de determinados delineamentos, tais como os quadrados latinos cuja representação não seria possível com recurso a grafos, por este tipo de delineamento não obedecer aos requisitos necessários para o representar sob esta forma. Além disso, esta geometria permite ainda assegurar a existência de delineamentos com base no conhecimento de apenas três parâmetros: r, k e v , o que se revela muito prático para a concretização de experiências.

Capítulo 6

Considerações finais e perspectivas futuras de investigação

No mundo actual, em que cada vez mais se recorre às novas tecnologias e à codificação de dados e de movimentos, reveste-se da maior importância investigar planos específicos, tais como os PBIBD, que permitem dar resposta às novas problemáticas em áreas tão relevantes como a Genética, a Medicina, a Biometria ou a Criptografia.

Em termos futuros, podemos ainda conjecturar se o facto dos PBIBD terem aplicabilidade na descodificação de esquemas criptográficos, não se virá a revelar de primordial importância na descodificação dos tão emblemáticos esquemas de partículas atómicas; ou se a solução tão procurada para resolver a actual crise energética, não residirá no recurso ao *bio-diesel* - e ser então urgente e necessário rentabilizar a produção de determinadas plantações, recorrendo a experiências agrícolas estruturadas eventualmente sob a forma de PBIBD.

Neste trabalho, procurou-se abordar os PBIBD sob diversas perspectivas – algébrica, geométrica e de análise de informação - com o intuito de tomar conhecimento sobre as suas abrangentes aplicações e de estabelecer perspectivas futuras de investigação. Apesar do papel fundamental dos esquemas de associação no estudo dos PBIBD, conclui-se que por si só não constituem nem geram efectivamente os planos, no sentido da afectação dos tratamentos aos blocos: para este efeito têm vindo a ser desenvolvidos diversos métodos de construção. Ambiciona-se ainda em trabalhos futuros incidir na investigação e a aplicabilidade destes métodos, bem como no estudo e desenvolvimento de software informático nesta área.

Ainda no que respeita a perspectivas futuras de investigação, destacam-se os seguintes aspectos:

- Estudo detalhado da álgebra Bose-Mesner, no que concerne à relação existente entre a ortogonalidade e classes de associação;
- Estudo do paralelismo entre as matrizes Hadmard e as matrizes- M_n e a sua aplicabilidade na construção de novos PBIBD simétricos (com base no estudo de Sinha *et al* (2006)).
- Estudo aprofundado de isomorfismos entre esquemas de associação, cruzamento de esquemas de associação, esquemas de associação encaixados e cruzamento de esquemas de associação iterados e encaixados.

Referências bibliográficas

Adhikari, Avishek; Bose, Mausumi; Kumar, Dewesh & Roy, Bimal (2000): *Applications of Partially Balanced Incomplete Block Designs in Developing (2,n) Visual Cryptographic Schemes*; Special Section on Discrete Mathematics and Its Applications.

Bailey, R. A. (2004): *Association Schemes: Designed Experiments, Algebra and Combinatorics*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge.

Bailey, R.A. (2005), *Balanced colourings of strongly regular graphs*, Discrete Mathematics, Volume 293, 1-3, 73-90.

Bailey, R.A.; Cameron, Peter J.; Dobcsányi, Peter; Morgan, John P. & Soicher, Leonard H. (2006): *Designs on the web*; Discrete Mathematics, Volume 306, Issue 23, 6 December, 3014-3027.

Bayrak, Haulya & Gaonery, Soner (2002): *Geometrical Structure of dual designs*, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, Volume 31, 53.

Bhattacharya, Gargi; Hegeman, John; Kim, Joohyung; Langford, Jeff & Song, Sung Y. (2008): *Some existence and construction results of polygonal designs*, European Journal of Combinatorics, Volume 29, Issue 6, August, 1396-1407.

Bose, Mausumi & Mukerjee, Rahul (2006): *Optimal (2, n) visual cryptographic schemes*, Designs, Codes and Cryptography, Volume 40, 3, 255 – 267.

Bose, R. C. (1939): *On the construction of balanced incomplete block designs*, Annals of Eugenics, 9, 353-399.

Bose, R. C. (1942): *A note of the resolvability of balanced incomplete block designs*, Sankhyā, 6, 105-110.

Bose, R. C. (1963): *Combinatorial properties of partially balanced designs and association schemes*, Sankhyā, Series A, Volume 25, part 2.

Bose, R. C. & Connor, W. S. (1952): *Combinatorial properties of group divisible incomplete block designs*, Annals of Mathematical Statistics, Volume 23, 367-383.

Bose, R. C. & Clatworthy, W. H. (1955): *Some classes of partially balanced designs*, Annals of Mathematical Statistics, Volume 26, 212-232.

Bose, R. C.; Clatworthy, W. H. & Shrikhande, S. S. (1954): *Tables of partially balanced incomplete block designs with two associate classes*, North Carolina Agricultural Experimental Bulletin, 107.

Bose, R. C. & Laskar, R. (1967): *A characterization of tetrahedral graphs*, Journal of Combinatorial Theory, 2, 266-385.

Bose, R. C. & Mesner, D. M. (1959): *On linear associative algebras corresponding to association schemes of partially balanced designs*, Annals of Mathematical Statistics, Volume 30, 31-38.

Bose, R. C. & Nair, K. R. (1939): *Partially balanced incomplete block designs*, Journal Sankhyā, Volume 4, 337-372.

Bose, R. C. & Shimamoto, T. (1952): *Classification and analysis of partially balanced incomplete block designs with two association schemes*, Journal of the American Statistical Association, Volume 47, 151-184.

Cameron, Peter J. (2004): *Strongly regular graphs*, Topics in Algebraic Graph Theory, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004, 203-221.

Carmichael, R. D. (1937): *Introduction to the Theory of Groups of Finite Order*, Ginn & Co, Boston.

- Clatworthy, W.H. (1956): *Contributions on partially balanced incomplete block designs with two associate classes*, National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series 47, Washington D.C..
- Clatworthy, W.H. (1973): *Tables of two-associate partially balanced designs*, National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series 63, Washington D.C..
- Connor, W. S. & Clatworthy, W. H. (1954): *Some theorems for partially balanced designs*, Annals of Mathematical Statistics, Volume 25, 100-112.
- Das, Ashish; Dean, Angela M. & Gupta, Sudhi (1998): On optimality of some partial diallel cross designs, Sankhya, Series: B, Volume: 60, 3, 511-524.
- Delsarte, P. (1973): *An algebraic approach to the association scheme of coding theory*, Ph. D. thesis, Université Dey, Alope (1986): *Theory of block designs*, John Wiley & Sons, Inc., New York.
- Endres, Heinz G; Hucke, Christian; Holland-Letz & Trampisch, Joachim (2006): *A new efficient trial design for assessing reliability of ankle-brachial index measures by three different observer groups*, BMC Cardiovascular Disorders.
- Fiala, Nick C. & Haemers, Willem H. (2006): *5-chromatic strongly regular graphs*, Discrete Mathematics, Volume 306, Issue 23, 3083-3096.
- Fisher, R. A. (1925): *Statistical methods for research workers*, Oliver and Boyd, Edinburgh.
- Fisher, R. A. (1935): *The design of experiments*, Oliver and Boyd, Edinburgh.
- Fisher, R. A. (1940): *An examination of the different possible solutions of a problem in incomplete blocks*, Annals of Eugenics, 10, 52-75.
- Gallagher S, Marras WS, Litsky AS & Burr D. (2005): *Torso flexion loads and the fatigue failure of human lumbosacral motion segments*, Spine, volume 30, 20,2265-2273.
- Ghosh, D. K. & Divecha, J. (1997): Two associate class partially balanced incomplete block designs and partial diallel crosses; Biometrika 84(1), 245-248.
- Haemers, Willem H. (2000): *Matrix techniques for strongly regular graphs and related geometries*, Intensive Course on Finite Geometries and Applications, University of Ghent.
- Harshbarger, B. (1946): *Preliminary report on the rectangular lattices*, Biometrics 2, 115-119.
- Harshbarger, B. (1947): *Rectangular lattices*, Virginia Agricultural Experiment Station, Memoir 1.
- Harshbarger, B. (1949): *Triple rectangular lattices*, Biometrics 5, 1-13.
- Hensona, D; Sarvatea, D.G.& Hurdb, S.P (2007): *Group divisible designs with three groups and block size four*, Discrete Mathematics, Volume 307, Issue 14, 28 June 2007, 1693-1706.
- Hinkelmann, K. (1964): *Extended group divisible partially balanced incomplete block designs*, Annals of Mathematical Statistics, 35, 681-695.
- Hinkelmann, K. & Kempthorne, D. (1963): *Two classes of group divisible partial diallel crosses*, Biometrika, 50 (3, 4), 281-291.
- Hinkelmann, Klaus e Kempthorne, Oscar (2005): *Design and Analysis of Experiments, Advanced Experimental Design*, Wiley Series in Probability and Statistics, Wiley-Interscience.
- Hurd, Spencer P. & Sarvat, Dinesh G. (2008): *Group divisible designs with block size four and two groups*, Discrete Mathematics; Volume 308, Issue 13, 6 July 2008, 2663-2673.
- James, A. T. & Wilkinson, G. N. (1971): *Factorization of the residual operator and canonical decomposition of nonorthogonal factors in the analysis of variance*, Biometrika, 58, 279-294.

- John, J. A. & Williams, E. R. (1995): *Cyclic and Computer generated Designs*, Chapman and Hall, London.
- John, J. A. (1987): *Cyclic Designs*, Chapman and Hall, London.
- John, J. A.; Wolock, F. W. & David, H. A. (1972): *Cyclic Designs*, Applied Mathematics Series, 62, National Bureau of Standards, Washington D.C..
- John, P. W. M. (1966): *An extension of the triangular association scheme to three associate classes*, Journal of the Royal Statistical Society, Series B, 28, 361-365.
- John, P. W. M. (1971): *Statistical design and analysis of experiments*, Macmillan, New York.
- Kageyama, S. (1974): *Reduction of associate classes of block designs and related combinatorial arrangements*, Hiroshima Mathematical Journal, 4, 527 – 618.
- Kempthorne O. (1956): *The efficiency factor of an incomplete block design*, Annals of Mathematical Statistics, 27, 846-849.
- Kirkman, T. P. (1847): *On a problem in combinations*, Cambridge and Dublin Mathematical Journal, 2, 191-204.
- Kusumoto, K. (1965): *Hyper cubic designs*, Wakayama Medical Reports, 9, 123-132.
- Kusumoto, K. (1967): *Association schemes of new types and necessary conditions for existence of regular and symmetrical PBIB designs with those association schemes*, Annals of Mathematical Statistics, 19, 73-100.
- Lee, Eun Mee; Lee, Heung Kyu & Park, Sung Hyuk (2008): *Method of generating anti-collusion fingerprint codes using*; <http://www.freshpatents.com/Method-of-generating-anti-collusion-fingerprint-codes-using-dt20080306ptan20080056497.php>
- Moore, E. H. (1896): *Tactical memoranda*, American Journal of Mathematics, 18, 264-303.
- Morales, Luis B. (2005): *Constructing Cyclic PBIBD(2)s through an Optimization Approach: Thirty Two New Cyclic Design!*, Journal of Combinatorial. Designs, Volume 13, 5, 377-387.
- Nair, K. R. (1944): *The recovery of inter-block information in incomplete block designs*, Sankhyā, 6, 383-390.
- Nair, K. R. & Rao, C. R. (1942): *A note on partially balanced incomplete block designs*, Science and Culture, 7, 568-569.
- Nandi, H. K. & Adhikary, B. (1966): *On the definition of Bose Shimamoto cyclical. association scheme*, Cal. Stat. Assoc. Bull. 15, 165-168.
- Oliveira, T. A. (1994): *Planos de Blocos Equilibrados Incompletos com Repetições*, Tese de Mestrado, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.
- Oliveira, T. A. (1999): *Planeamento de Experiências*, Tese de Doutoramento, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.
- Oliveira, T & Sousa, M. (2002): *Some correspondence between Diallel Crosses and BIB Designs*, Proceedings of the 17th International Workshop on Statistical Modelling, 515-520, Editors Mikis Stasinopoulos and Giota Touloumi.
- Oliveira, T & Sousa, M. (2004): *BIB Designs with repeated blocks: Some anlysis on BIBD (12, 44, 11, 3, 2) with different structures*, Colloquium Biometryczne, Tom 34a, 131-140.
- Oliveira, T & Sousa, M. (2004): *BIBDR: Some analysis on BIBD (9, 24,8, 3, 2) cardinalities*, Colloquium Biometryczne, Tom 34a, 161-170.
- Patterson, H. D.; Williams, E. R. (1976): *Some theoretical results on general block designs*, Congressus Numerantium, 15, 489 496.

- Patterson, H. D.; Williams, E. R.; Hunter E. A. (1978): *Block designs for variety trials*, Journal of Agricultural Science, 90, 395 – 400.
- Pearce, S. C. (1968): *The mean efficiency of equi-replicate designs*, Biometrika, 55, 251-253.
- Pearce, C.; Calinski, T. & Marshall, T. F. de C. (1974): *The basic contrasts of an experimental design with special reference to the analysis of data*, Biometrika, 61, 449-460.
- Rao, C. R. (1947): *General methods of analysis for incomplete block designs*, Journal of the American Statistical Association, 42, 541-561.
- Raghavarao, D. (1960): A generalization of group divisible designs, Annals of Mathematical Statistics, 31, 756-771.
- Raghavarao, D. (1971): *Constructions and Combinatorial Problems in Design of Experiments*, John Wiley and Sons, New York.
- Raghavarao, D. & Chandrasekhararao, K. (1964): Cubic designs, Annals of Mathematical Statistics, 35, 389-397.
- Roy, J. (1958): *On the efficiency factor of block designs*, Sankhyā, 19, 181-188.
- Roy, P. M. (1953): *Hierarchical group divisible incomplete block designs with m-associate classes*, Science and Culture, 19, 210-211.
- See, K.; Song, S.Y. & Stufken, J. (1997): *On a class of partially incomplete block designs with applications in survey sampling*, Comm. Statist. Theory Methods 26, 1-13.
- Seidel, J. J. (1967): *Strongly regular graphs of L_2 -type and of triangular type*, Indagationes Mathematicae, 29, 188-196.
- Sharma, M. K. (2000): Application of PBIB designs in CDC Method IV, Journal of Applied Statistics, Volume 27, Number 8, 1 November, 1013-1019(7).
- Shah, S. M. (1958): On balancing in factorial experiments, Annals of Mathematical Statistics, 29, 766-779.
- Shah, S. M. (1964): *An upper bound for the number of disjoint blocks in certain PBIB design*, Annals of Mathematical Statistics, 35, 398-407.
- Sinha, Kishore & Kageyama, Sanpei(2006) *Constructions of group divisible designs and related combinatorial structures* Journal of Statistical Planning and Inference, Volume 136, Issue 9, 1 September 2006, 3281-3286.
- Steiner, J. (1853): *Combinatorische Aufgabe*, Journal fur reine und angewandte Mathematik, 45, 181-182.
- Street, Anne Penfold & Street, Deborah J. (1987): *Combinatorics of Experimental Design*, Clarendon Press, Oxford.
- Sun H.-M. (2002): *PBIB designs and association schemes obtained from finite rings*, Discrete Mathematics, Volume 252, Number 1, 31,. 267-277.
- Surendran, P. U. (1968): *Association matrices and Kronecker product of designs*, Annals of Mathematical Statistics, 39, 676-680.
- Takemura, K.; Hogan, J. S. & Smith, K. L. (2003): *Effect of Immunoglobulin G from Cows Immunized with Ferric Citrate Receptor (FecA) on Iron Uptake by Escherichia coli*, American Dairy Science Association, J. Dairy Sci. 86:133–137.
- Thannippara, A.; Kurian, B.; Ghosh, D.; Bagui, S. Mandal, S. (2007): *Hypercubic designs and applications*; Statistical Papers, Volume 48, Number 3, 503-508(6).
- Tharthare, S. K. (1963): Right angular designs, Annals of Mathematical Statistics, 36, 1051-1062.

- Tharthare, S. K. (1965): Generalized right angular designs, *Annals of Mathematical Statistics*, 34, 1057-1067.
- Vakil, F. & Parnes, M. (1994): *On the structure of a class of sets useful in nonadaptive group testing*, *Journal of Statistical Planning and Inference*, vol. 39,, n.º1, 57-69.
- Varghese, Cini; Sharma, V. K. (2004): *A series of resolvable PBIB(3) designs with two replicates*, *Metrika*, Volume 60, Number 3, November, 251-254(4).
- Varghese, Cini, Sharma, V.K., Jaggi, Seema and Sharma, (2004): *Three-associate class partially balanced incomplete block designs and their application to partial diallel crosses*, Technical Report, IASRI Publication.
- Varghese, Cini, Sharma, V.K., Jaggi, Seema and Sharma, (2008): Indian Agricultural Statistics Research Institute; <http://www.iasri.res.in/webPBIB3/>
- Vartak, M. N. (1955): *On application of Kronecker product of matrices to statistical designs*, *Annals of Mathematical Statistics*, 26, 420-438.
- Vartak, M.N. (1959): *The non-existence of certain PBIB designs*, *Annals of Mathematical Statistics*, 30, 1051-1062.
- Yates, F. (1936a): *Incomplete randomized blocks*, *Annals of Eugenics*, 7, 121-140.
- Yates, F. (1936b): *A new method for arranging variety trials involving a large number of varieties*, *Journal of Agricultural Science*, 26, 424-455.
- Yates, F. (1937a): *The design and analysis of factorial experiments*, Technical Communication, 35, Imperial Bureau of Soil Science, Harpenden.
- Yates, F. (1937b): *A further note on the arrangement of variety trials: quasi-Latin squares*, *Annals of Eugenics*, 7, 319-332.
- Yates, F. (1939): *The recovery of inter-block information in variety trials arranged in three-dimensional lattices*, *Annals of Eugenics*, 9, 136-156.
- Yates, F. (1940): *The recovery of inter-block information in balanced incomplete block designs*, *Annals of Eugenics*, 10, 317-325.