



Elisabete Moita Dinis Mariano

Licenciatura em Matemática - ramo Formação Educacional

**O desenvolvimento do pensamento
algébrico com recurso à folha de cálculo:
um estudo com alunos de 9.º ano**

Dissertação para a obtenção do Grau de Mestre em
Educação Matemática do 3.º Ciclo do Ensino Básico e Secundário

Orientador: Doutor António Manuel Dias Domingos,
Professor Auxiliar, Faculdade de Ciências e Tecnologia da UNL

Júri:

Presidente: Prof. Doutora Maria Helena Coutinho Gomes de Almeida Santos
Arguente: Prof. Doutor António Manuel Águas Borralho
Vogal: Prof. Doutor António Manuel Dias Domingos



FACULDADE DE
CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Março de 2013

O desenvolvimento do pensamento algébrico com recurso à folha de cálculo: um estudo com alunos de 9.º ano

Dissertação para a obtenção do Grau de Mestre em Educação Matemática do 3.º Ciclo do Ensino Básico e Secundário

© Elisabete Moita Dinis Mariano / FCT-UNL / UNL

“A Faculdade de Ciências e Tecnologia e a Universidade Nova de Lisboa têm o direito, perpétuo e sem limites geográficos, de arquivar e publicar esta dissertação através de exemplares impressos reproduzidos em papel ou de forma digital, ou por qualquer outro meio conhecido ou que venha a ser inventado, e de a divulgar através de repositórios científicos e de admitir a sua cópia e distribuição com objetivos educacionais ou de investigação, não comerciais, desde que seja dado crédito ao autor e editor”.

Agradecimentos

Ao orientador, Professor Doutor António Domingos, pelo incentivo e exigência, pela disponibilidade e confiança manifestadas.

Ao Professor Doutor José Duarte, pela oportunidade que me deu em experimentar novas metodologias e estratégias de ensino e, conseqüentemente, a reflexão sobre as mesmas considerando várias investigações e estudos sobre o pensamento algébrico e a tecnologia. Foi desta experiência de projeto em conjunto com este professor que tive o impulso para realizar esta investigação. Desta forma lhe agradeço e registo o apoio e os conselhos que me deixou.

À escola onde foi desenvolvido este trabalho, pela permissão da sua realização.

À colega Cátia Salvador pela colaboração e disponibilidade demonstradas.

Aos alunos que participaram neste estudo, pela simpatia com que me receberam, e sobretudo pela sua colaboração e disponibilidade.

Ao meu esposo pelas muitas palavras de incentivo e motivação, paciência e amizade incondicionais, e pelo apoio e colaboração manifestados ao longo da realização deste trabalho.

Aos meus pais por todo o amor manifestado e apoio à minha família, em todo o tempo de dedicação a esta investigação.

Aos meus filhos Rafael e Rodrigo, pela paciência e compreensão expressadas em todo o processo de realização deste estudo.

A todos aqueles, família e amigos, que não sendo aqui nomeados, me ajudam a ser a pessoa que sou e os quais encontro no caminho da felicidade.

Resumo

Este estudo tem como objetivo investigar os processos utilizados pelos alunos na resolução de problemas e dar conta dos aspetos do pensamento algébrico quando utilizam a folha de cálculo. Compreender o modo como esta ferramenta tecnológica influencia a apreensão das representações matemáticas mais convencionais, é outro dos aspetos que se procura estudar neste trabalho. O foco desta investigação centra-se na utilização da folha de cálculo como forma de desenvolvimento do pensamento algébrico.

O pensamento algébrico, as representações e a folha de cálculo constituem os domínios do quadro teórico da investigação. A resolução de problemas com a folha de cálculo apela ao envolvimento do aluno no seu processo de aprendizagem, fazendo com que sobressaia um raciocínio mais abstrato e estruturado. O desenvolvimento deste tipo de pensamento, visto como um processo de generalização de casos particulares, é uma preocupação das orientações curriculares atuais. As características dinâmicas e interativas da folha de cálculo dão significado às abordagens de alguns conceitos algébricos e facilitam a articulação entre as diferentes representações.

Este estudo, pelo seu carácter, objetivos e pela essência dos resultados finais, é um estudo de natureza qualitativa, na modalidade de estudo de caso instrumental, com características descritivas e analíticas. A recolha de dados efetuou-se numa turma de 9.º ano de escolaridade, durante o ano letivo de 2011/2012. Esta fase da investigação baseou-se na observação participante, com registo livre dos acontecimentos e na análise dos registos áudio e/ou vídeo das aulas observadas e de documentos produzidos pelos alunos (manuscritos e em formato digital).

A análise dos dados realizou-se em quatro fases diferentes. A primeira fase ocorreu durante a recolha de dados; numa segunda fase foram definidos critérios relacionados com o pensamento algébrico para análise posterior dos dados recolhidos, de acordo com a revisão de literatura; na terceira fase foi feita uma análise dos dados recolhidos de acordo com os aspetos do pensamento algébrico; e por último, efetuou-se uma análise cruzada, mais ampla, ao nível do pensamento algébrico com o intuito de compreender e realçar as características de cada tipo de grupo de alunos estudado, comparando o seu desempenho inicial com as capacidades desenvolvidas quando utilizam a folha de cálculo na resolução de problemas. Por fim, fez-se uma resenha das conclusões deste estudo.

Os resultados desta investigação evidenciam dois tipos diferentes de alunos no que concerne aos processos utilizados para a generalização do problema, uma predominância da utilização da representação tabelar perante a folha de cálculo, para auxiliar nesses processos e na interpretação dos problemas, e a utilização conectada das diferentes representações repletas de significado.

Palavras - chave: Álgebra; pensamento algébrico; tecnologias de informação e comunicação; folha de cálculo; representações; resolução de problemas;

Abstract

The purpose of this study is to determine the processes used by students in problem solving and elucidate the aspects of the algebraic thought when using the spreadsheet.

The understanding of how this technological tool influences the apprehension of the most conventional mathematical representations is another aspect studied in this work. The focus of this investigation is centered in the use of the spreadsheet as a way of developing the algebraic thought.

Algebraic thought, representations and the spreadsheet are the fields of the theoretical board of this investigation. The use of the spreadsheet in problem solving appeals to the students' involvement in its own process of learning, standing out a more abstract and structured reasoning. The development of this kind of thought, seen as a process of generalization of particular cases, is a concern in the actual curricular orientations. The dynamic and interactive attributes of the spreadsheet give meaning to the approaches of some algebraic notions e facilitate the articulation between different representations.

This study, due to its character, objective and essence of final results, its mainly qualitative, case-study form with analytical and descriptive characteristics. The analyzed data where taken in a 9th grade class, during the school year of 2011/2012. This phase of the investigation was based in a participant observation, with free recording of the events and the analysis of audio and video recordings of the observed classes and documents made by the students (manuscripts and in digital format).

Data analysis toke place in four different phases. The first phase occurred during data gathering; on a second phase, criteria were defined related with the algebraic thought, for further analysis of gathered data, according with revised literature; in third phase data were analyzed according with algebraic thought; at the last phase, a wider cross-check was made at algebraic thought level, with the aim of understanding and emphasize the particulars of each type of group of students studied, by comparing their initial performance with the developed skills when using the spreadsheet in problem solving. Finally, a review was made of the conclusions of this study.

The results of this investigation point out two different types of students concerning the processes used towards the generalization of the problem, predominance in using tabular representation when using a spreadsheet to help on those processes and in problem interpretation, and the connected use of meaningful different representations.

Key-words: Algebra; algebraic thought; information and communication technologies; spreadsheet; representations; problem solving;

Índice

Agradecimentos	iii
Resumo.....	v
Abstract.....	vii
Índice	ix
Índice de Figuras.....	xiii
Índice de Tabelas	xvii
Capítulo I - Introdução	1
Motivações pessoais do estudo.....	1
Pertinência do estudo	3
Objetivos e questões do estudo.....	3
Clarificação de termos e acrónimos.....	4
Organização da dissertação	4
Capítulo II - Revisão de literatura	7
O pensamento algébrico	7
Caracterização do pensamento algébrico	7
Aritmética generalizada	10
Pensamento funcional	11
Álgebra escolar e o pensamento algébrico	11
O professor no desenvolvimento do pensamento algébrico	15
Síntese.....	16
Representações	17
O conceito de representação.....	17
Tipos de representações no ensino da Álgebra	18
As representações e as TIC	20
As representações no currículo	21
A folha de cálculo e o pensamento algébrico	23
As tecnologias na aprendizagem da Matemática.....	23
A folha de cálculo na resolução de problemas algébricos	27
Potencialidades e limitações da folha de cálculo na aprendizagem da Álgebra.....	31
Capítulo III - Metodologia	35
Opções metodológicas.....	35
Estudo de natureza interpretativa.....	35
Investigação de natureza qualitativa	36
Modalidade de estudo de caso.....	37

Contexto de investigação	39
Caracterização da escola	39
Caracterização da turma	40
Os alunos participantes: caracterização, opções e critérios de seleção.....	41
Intervenção didática	43
Tema.....	43
Organização do trabalho	43
Tarefas.....	44
Dados	47
Fontes e métodos de recolha de dados	47
O papel da investigadora e a sua relação com os alunos.....	48
A análise de dados	48
Capítulo IV - Análise de dados	51
A Folha de Cálculo na evidência do pensamento algébrico da turma	51
Tarefa 1 - Sequências geométricas	51
Problema 1.....	52
Problema 2.....	59
Tarefa 2 - Uma vedação do terreno	64
Síntese.....	77
Tarefa 3 - Quadrados inscritos em quadrados	84
Exploração inicial da <i>applet</i> “Quadrados inscritos em quadrados”	85
Contextualização do problema	85
Generalização do problema.....	88
Representação gráfica do problema	98
Interpretação do problema a partir das representações	99
Capítulo V - Conclusões	105
Conclusões do estudo	105
Considerações finais	108
Anexos	- 1 -
ANEXO 1	- 3 -
ANEXO 2	- 5 -
ANEXO 3	- 7 -

Índice de Figuras

Figura 2- 1: Símbolos "olhar para" vs. "através" (Kaput, 1999, p.11)	9
Figura 2- 2: A sobreposição e inter-relacionamentos das cinco formas de pensamento algébrico (Kaput, 1999, p.5).....	9
Figura 2- 3: Vertentes fundamentais do pensamento algébrico (Ponte, et al., 2009, p.11)	12
Figura 4- 1: Sequência de figuras do problema 1, da primeira tarefa.....	52
Figura 4- 2: Representação tabelar do grupo 1 (Problema 1 - Tarefa 1).....	53
Figura 4- 3: Relação numérica entre o número de cubos e o número da figura do grupo 1 (Problema 1 - Tarefa 1)	53
Figura 4- 4: Estratégia de cálculo do total de cubos da sequência da figura 6, do grupo 2 (Problema 1 - Tarefa 1)	54
Figura 4- 5: Estratégia do grupo 3 para determinar o total de cubos da figura 6 da sequência (Problema 1 - Tarefa 1)	56
Figura 4- 6: Verificação da existência (ou não) de uma figura com 100 cubos do grupo 1 (Problema 1 - Tarefa 1).....	57
Figura 4- 7: Uso de uma equação, pelo grupo 3, para verificar a existência (ou não) de uma figura com 100 cubos (Problema 1 - Tarefa 1)	57
Figura 4- 8: Uso errado da “regra de três simples”, pelo grupo 2, para verificar a existência (ou não) de uma figura com 100 cubos (Problema 1 - Tarefa 1)	58
Figura 4- 9: Escrita do termo geral da sequência pelo grupo 1 (Problema 1 - Tarefa 1)	58
Figura 4- 10: Sequência geométrica (Problema 2 - Tarefa 1)	59
Figura 4- 11: Representação tabelar do grupo 1 (Problema 2 - Tarefa 1)	60
Figura 4- 12: Esquema do grupo 1 para solucionar o problema 2 (Tarefa 1).....	60
Figura 4- 13: Segunda estratégia do grupo 1 (Problema 2 - Tarefa 1).....	61
Figura 4- 14: Ilustração da última estratégia seguida pelo grupo 2 (Problema 2 - Tarefa 1)	62
Figura 4- 15: Última estratégia seguida pelo grupo 2 (Problema 2 - Tarefa 1)	62
Figura 4- 16: Ilustração da estratégia do grupo 3 (Problema 2 - Tarefa 1)	63
Figura 4- 17: Estratégia do grupo 3 (Problema 2 - Tarefa 1).....	63
Figura 4- 18: Problema da tarefa 2	64
Figura 4- 19: Excerto da descrição das dificuldades sentidas pelo grupo 1 (Tarefa 2).....	65
Figura 4- 20: Excerto do relatório iniciado pelo grupo 1 (Tarefa 2)	65
Figura 4- 21: Excerto do relatório reformulado pelo grupo 1 (tarefa 2).....	66
Figura 4- 22: Descrição dos passos do grupo 1 para resolver a tarefa 2 (elaborado na aula)	66
Figura 4- 23: Descrição do 3.º passo do relatório reformulado, do grupo 1, após a aula (tarefa 2).....	66
Figura 4- 24: Organização inicial da tabela de dados na folha de cálculo do grupo 1 (Tarefa 2)	67
Figura 4- 25: Preenchimento da tabela estruturada pelo grupo 1 (Tarefa 2)	67
Figura 4- 26: Reformulação da tabela já construída pelo grupo 1 (Tarefa 2).....	68
Figura 4- 27: Nova Reformulação da tabela já construída pelo grupo 1 (Tarefa 2)	68
Figura 4- 28: Outra reformulação da tabela já construída pelo grupo 1 (Tarefa 2)	68
Figura 4- 29: Outra Reformulação da tabela já construída pelo grupo 1 (Tarefa 2).....	68

Figura 4- 30: Outra Reformulação da tabela já construída pelo grupo 1 (Tarefa 2).....	69
Figura 4- 31: Outra reformulação da tabela já construída pelo grupo 1 (Tarefa 2)	69
Figura 4- 32: Casos particulares do problema definidos pelo grupo 1 (Tarefa 2)	70
Figura 4- 33: Outra Reformulação da tabela já construída pelo grupo 1 (Tarefa 2).....	71
Figura 4- 34: Estrutura da tabela obtida pelo grupo 1 após várias tentativas (Tarefa 2).....	72
Figura 4- 35: Excerto da exposição das dificuldades sentidas pelo grupo 1 (Tarefa 2)	72
Figura 4- 36: Tabela final obtida pelo grupo 1 (Tarefa 2)	73
Figura 4- 37: Parágrafo das conclusões do grupo 1 (Tarefa 2)	73
Figura 4- 38: Segunda solução do grupo 1 à primeira questão do problema (Tarefa 2).....	74
Figura 4- 39: Representação gráfica do problema elaborado pelo grupo 1 (Tarefa 2)	74
Figura 4- 40: Análise e interpretação do gráfico pelo grupo 1 (Tarefa 2)	74
Figura 4- 41: 1.º Excerto do relatório realizado pelo grupo 2 (Tarefa 2).....	75
Figura 4- 42: 2.º Excerto do relatório realizado pelo grupo 2 (Tarefa 2).....	75
Figura 4- 43: Exemplo de um esquema realizado pelo grupo 3 (Tarefa 2)	76
Figura 4- 44: Descrição do processo pelo grupo 3 na procura da generalização (Tarefa 2)	76
Figura 4- 45: 1.ª tabela construída pelo grupo 3 (Tarefa 2)	76
Figura 4- 46: 1.º passo do grupo 1 para determinar a área máxima do terreno.....	78
Figura 4- 47: Representações tabelar e gráfica do problema pelo grupo 1	78
Figura 4- 48: Análise e interpretação das representações tabelar e gráfica pelo grupo 1	78
Figura 4- 49: Representação de uma combinação possível do problema apresentada pelo grupo 2 (Tarefa 2)	79
Figura 4- 50: Escrita da equação pelo grupo 2 (Tarefa 2)	79
Figura 4- 51: Excerto da tabela obtida pelo grupo 2 após escrita da relação entre dimensões do terreno e perímetro (Tarefa 2)	80
Figura 4- 52: Justificação da devolução de valores negativos na tabela dada pelo grupo 2 (Tarefa 2).....	80
Figura 4- 53: Tabela obtida pelo grupo 2 (Tarefa 2)	81
Figura 4- 54: Gráfico obtido pelo grupo 2 (tarefa 2).....	82
Figura 4- 55: Tabela obtida pelo grupo 3 (tarefa 2)	82
Figura 4- 56: Descrição do 7.º passo do grupo 3 na resolução do problema (tarefa 2)	83
Figura 4- 57: Rabiscos do grupo 3 (tarefa 2)	83
Figura 4- 58: Conclusões do grupo 3 (tarefa 2)	83
Figura 4- 59: Gráfico da área do terreno em função da largura construído pelo grupo 3 (tarefa 2).....	83
Figura 4- 60: Applet de apoio à tarefa 3 construído pela investigadora	84
Figura 4- 61: Manipulação da applet quando a distância de B a P era 4 unidades	86
Figura 4- 62: Coordenadas dos pontos, quando P é deslocado 1 e 4 unidades, respetivamente, pelo grupo 1	86
Figura 4- 63: Resposta do grupo 3 à primeira questão (tarefa 3).....	87
Figura 4- 64: Resposta completa do grupo 2 à primeira questão (tarefa 3)	87

Figura 4- 65: Visualização geométrica do limite máximo do domínio do problema pelo grupo 2 (tarefa 3)	88
Figura 4- 66: Indicação do domínio do problema pelos grupos 2 e 3 (tarefa 3)	88
Figura 4- 67: Indicação do domínio do problema pelo grupo 1 (tarefa 3).....	88
Figura 4- 68: Resposta à 3. ^a questão pelo grupo 1 (tarefa 3).....	89
Figura 4- 69: Resolução da questão 3 pelo grupo 2 (tarefa 3)	89
Figura 4- 70: Estratégia e conclusão do grupo 3 (tarefa 3)	90
Figura 4- 71: 2. ^a tentativa de construção da tabela pelo grupo 1 (tarefa 3).....	91
Figura 4- 72: 3. ^a tentativa de construção da tabela pelo grupo 1 (tarefa 3).....	91
Figura 4- 73: Última tabela obtida pelo grupo 1 (tarefa 3)	92
Figura 4- 74: Descrição da simetria da tabela pelo grupo 1 (tarefa 3).....	92
Figura 4- 75: Observação, pelo grupo 2, da imagem quando a distância de B a P é 0,5 (tarefa 3)	93
Figura 4- 76: Início da estratégia do grupo 2, na resolução da 4. ^a questão (tarefa 3)	93
Figura 4- 77: Passos da estratégia do grupo 2, na resolução da 4. ^a questão (tarefa 3), cujas imagens foram captadas com o software Camtasia Studio7	94
Figura 4- 78: Fórmula obtida pelo do grupo 2 para calcular a área do quadrado [GPEF], em função de d (tarefa 3)	95
Figura 4- 79: Casos particulares do problema obtidos pelo grupo 3 (tarefa 3)	95
Figura 4- 80: Organização tabelar dos casos particulares escritos no caderno (excerto do relatório do grupo 3 referente à tarefa 3).....	96
Figura 4- 81: Passos da estratégia do grupo 3, na resolução da 4. ^a questão (tarefa 3), cujas imagens foram captadas com o software Camtasia Studio7	97
Figura 4- 82: Gráficos obtidos pelos grupos 1 e 3 (à esquerda) e pelo grupo 2 (à direita)	98
Figura 4- 83: Extremos da função observados pelo grupo 1 (excerto do seu relatório).....	99
Figura 4- 84: Tabela do grupo 3 e extremos da função observados (excerto do seu relatório).....	99
Figura 4- 85: Tabela do grupo 2 e extremos da função observados (excerto do seu relatório).....	100
Figura 4- 86: Tabela de valores após algumas iterações (excerto do relatório do grupo 1)	101
Figura 4- 87: Tabela com os valores da área de 14,5 e 22,18 evidenciados pelo grupo 1 (excerto do seu relatório)	101
Figura 4- 88: Representações do grupo 2, dos dois cenários questionados (tarefa 3).....	102
Figura 4- 89: Estratégia do grupo 3 para determinar o caso de a área ser 22,18 (excerto do seu relatório).....	102
Figura 4- 90: Representação simbólica das condições da questão 8 (grupo 1).....	103
Figura 4- 91: Conclusões do relatório do grupo 1	103
Figura 4- 92: Excerto das conclusões do relatório do grupo 2	103
Figura 4- 93: Excerto das conclusões do relatório do grupo 3	104

Índice de Tabelas

Tabela 3- 1: Tarefas, contexto de aplicação e calendarização.....	43
---	----

Capítulo I

Introdução

Este capítulo apresenta o conjunto das motivações pessoais decorrentes do percurso profissional da investigadora que conduziram ao estudo, identifica a pertinência dos temas que o constituem com base na investigação atual, apresenta o objetivo do estudo e descreve a estrutura e o conteúdo desta dissertação.

Para apresentar estas ideias, a investigadora estruturou o capítulo em cinco secções:

- Motivações pessoais do estudo;
- Pertinência do estudo;
- Objetivo e questões do estudo;
- Clarificação de termos e acrónimos;
- Organização da dissertação.

Motivações pessoais do estudo

As questões do pensamento algébrico na matemática escolar evidenciaram-se recentemente, em Portugal, com a introdução do novo programa da matemática no ensino básico. As origens históricas da álgebra remetem para a formalização e sistematização de determinadas técnicas de resolução de problemas. A visão mais habitual da álgebra passa pela aplicação de regras de transformação de expressões (monómios, polinómios, frações algébricas, expressões com radicais) e pela utilização de processos de resolução de equações. Esta é uma visão redutora desta área da matemática pois desvaloriza muitos aspetos importantes inerentes a esta. As questões do pensamento relacional e algébrico e a distinção entre variável e incógnita são exemplos de aspetos relevantes da álgebra, muitas vezes, pouco evidenciados. Distinguir variável de incógnita é uma dificuldade que persistia ao longo dos anos de escolaridade para a maioria dos alunos e, evidenciar e desenvolver aspetos do pensamento relacional que conduzem ao pensamento algébrico ficava ainda em fases preliminares. A conexão de conteúdos e de outros recursos e instrumentos de trabalho também parecia quase forçado, limitando-se à utilização da calculadora.

O pensamento algébrico e a álgebra foram sempre uma área da matemática que fascinou a investigadora e, por isso, tentar passar aos alunos o entusiasmo que sentia quando se tocam estas questões foi sempre um desafio. Como podia ajudar os alunos a entender estas questões que estavam ligadas à realidade e ao quotidiano? Como resolver os problemas onde a conexão das representações dos mesmos fosse natural? Como ajudar na análise e na interpretação? No papel de professora, como pode ajudar os alunos a desenvolver a sua autonomia e a adquirir as competências transversais desta disciplina, respeitando o ritmo da sua aprendizagem, aplicando conteúdos, deixando que a liberdade dos discentes na sua definição de estratégias e de comunicação reinasse? Estas são questões, que todos os dias a investigadora coloca na sua profissão. Estava em vantagem! Gosta de utilizar tecnologia no seu trabalho, além dos materiais manipuláveis estruturados ou não! E porque não utilizá-la no processo de ensino-aprendizagem? A investigadora iniciou este trabalho pouco a pouco, utilizando *software* de Geometria Dinâmica nas aulas, numas manipulavam os alunos noutras apenas a investigadora como professora para facilitar a compreensão de conceitos, propriedades, entre outros e sistematização de conteúdos. A maioria das formações contínuas que a investigadora se envolveu relacionavam-se também com a tecnologia no ensino da matemática e assim, foi aprendendo, gradualmente, a utilizá-la de forma mais eficaz na sala de aula. Apesar destes investimentos, sente que ainda há muito para aprender e desenvolver, uma vez que tudo em nosso redor se altera e evolui, havendo necessidade de se adaptar.

Nos últimos quatro anos, o interesse da investigadora em desenvolver as suas competências na utilização da tecnologia na sala de aula, foi aceso por colegas que tinham o mesmo interesse e que preconizavam ideologias e filosofias semelhantes em relação ao ensino. Participou também num estudo que estava intimamente ligado a este tema que lhe permitiu alargar os seus horizontes, desenvolver as suas competências e até reequacionar e alterar as suas práticas letivas e metodologias.

Após estes anos, a investigadora considera importante continuar a experimentar e a investigar sobre as formas que facilitam o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos do ensino básico. É pertinente apresentar tarefas diversificadas e que permitem a conexão de conteúdos, de recursos e até de áreas do saber com materiais tecnológicos como a folha de cálculo, o *GeoGebra* e algumas *applets*.

Ao nível do 7.º ano de escolaridade, as experiências da investigadora com tarefas e atividades neste âmbito confirmam o que dizem Ponte, Branco e Matos (2009) e outros investigadores, como Teresa Rojano (1996). E no 9.º ano, como é que os alunos utilizam a tecnologia na resolução de problemas? E o desenvolvimento do pensamento algébrico é favorecido com a utilização da tecnologia?

O leitor pensará que a investigadora excluiu o 8.º ano! É o momento de esclarecer que durante este ano letivo em que a investigadora se propôs desenvolver este projeto, lecionava apenas a turmas de 7.º e 9.º anos, pelo que o estudo incidirá sobre um grupo de alunos deste último ano.

Pertinência do estudo

Para alguns professores portugueses, o próprio pensamento algébrico ainda se resume ao estudo de funções, resolução de equações, inequações e sistemas de equações e à manipulação de expressões algébricas. No entanto, o pensamento algébrico é um tema transversal aos diferentes tópicos da disciplina de matemática que deve ser iniciado no pré-escolar. Esta é uma questão que ainda não foi interiorizada por alguns professores. Sendo assim, com este projeto gostaria de registar a forma como os alunos raciocinam e resolvem problemas com a utilização da folha de cálculo e de algumas *applets*, evidenciando as questões do pensamento algébrico. Será que os alunos ficam dotados de competências que, em outros contextos, lhes permitem resolver as situações? De que modo esta tecnologia os ajuda; o que facilita?

É certo que os alunos ficarão já com noções destes *softwares* e conscientes de algumas das suas capacidades que poderão utilizar mais tarde, na sua vida adulta e profissional, por exemplo. A observância de regularidades e padrões no seu quotidiano, no desenvolvimento do seu trabalho, na facilidade de cálculo mental, a capacidade de analisar e interpretar as situações para tomar decisões... não serão competências que irão dar qualificação a estes jovens? Será que a nossa sociedade futura poderá beneficiar do contributo destes futuros adultos na qualificação da sociedade? Com certeza, com este estudo não se conseguirá dar resposta a estas questões mas, a longo prazo, ir-se-á colher os frutos deste investimento.

Objetivos e questões do estudo

Face aos aspetos referidos relativamente às motivações da investigadora, às questões deixadas em aberto e à relevância das vertentes identificadas, este estudo tem como objetivo caracterizar os processos de resolução de problemas na dimensão aritmética - álgebra e de descrever a capacidade de resolução de problemas dos alunos recorrendo à folha de cálculo. Nesta descrição, pretende-se, evidenciar as relações estabelecidas dos processos aritméticos e algébricos, as representações criadas e a forma como as utilizam para resolverem os problemas e a evolução na utilização da linguagem simbólica da matemática.

Para se conseguir atingir este objetivo, a investigadora definiu as seguintes questões orientadoras:

- Quais os processos de resolução de problemas na dimensão aritmética-algébrica com a folha de cálculo;
- De que modo a folha de cálculo influencia a compreensão das representações convencionais da matemática;
- Quais os aspetos do pensamento algébrico realçados pelos alunos quando resolvem problemas algébricos em ambiente de folha de cálculo.

Para cumprir o objetivo desta investigação, a investigadora elaborou um estudo de caso relativo a um grupo de alunos de uma turma de 9.^o ano, participantes no estudo.

Clarificação de termos e acrónimos

Ao longo deste relatório são usados alguns termos e acrónimos. O acrónimo TIC, uma abreviatura de Tecnologias de Informação e Comunicação que é usado para designar os diversos meios e ferramentas computacionais. Neste acrónimo, a investigadora inclui os computadores, as calculadoras, os quadros interativos e o *software* utilizado, tal como, os programas de geometria dinâmica, os sistemas de Álgebra por computador (*Computer Algebra Systems* ou *CAS*), as folhas de cálculo, as *applets* e as plataformas de gestão de aprendizagem (*Learning Management Systems* ou *LMS*). Nas investigações que acoplam as TIC e o ensino da Matemática, os termos usados com frequência são tecnologias ou tecnologias digitais e que também serão utilizados neste relatório.

No entanto, a investigadora utilizará termos como ferramentas quando se referir aos objetos de trabalho neste estudo, como são a folha de cálculo ou as *applets*. No sentido de facilitar a escrita, quando houver referência à folha de cálculo, usará a sigla FC.

Também o termo representações aparecerá em dois sentidos distintos: as representações que os alunos fazem das situações a solucionar (as não convencionais da matemática) e as representações matemáticas (as expressões algébricas, as tabelas e os gráficos) resultantes das suas produções.

Uma vez que a investigadora utilizava as plataformas de gestão de aprendizagem, neste estudo irá designá-las por plataforma ou plataforma *Moodle* que é o acrónimo de *Modular Oriented Dynamic Learning Environment*, um *software* livre de apoio à aprendizagem que pode ser usado e copiado sem restrições e que funciona em ambiente virtual.

Organização da dissertação

Esta dissertação está estruturada em cinco capítulos. Este Capítulo I de introdução, onde são apresentadas as motivações que conduziram ao estudo, as justificações da sua pertinência e os seus objetivos, no capítulo II é apresentada uma revisão de literatura e são expostos alguns resultados empíricos relativos ao tema central do estudo.

No Capítulo II, são apresentadas três temáticas que estão envolvidas nesta investigação: (i) Álgebra e pensamento algébrico - são descritos o entendimento e a evolução deste tipo de pensamento, as características da álgebra escolar e a forma como o pensamento algébrico se desenvolve na resolução de problemas; (ii) Representações - a investigadora descreve a noção de representação, indica e caracteriza os tipos de representações no ensino da Álgebra, as representações que se encontram na resolução de problemas relacionadas com as TIC e as do currículo; (iii) Folha de cálculo e o pensamento algébrico - após uma leve cronologia da introdução das tecnologias na escola e no ensino da Matemática, são descritos resultados das investigações sobre a integração da folha de cálculo no desenvolvimento do pensamento algébrico, bem como algumas das suas potencialidades e limitações na aprendizagem da Álgebra.

No Capítulo III, a investigadora apresenta e argumenta a opção por uma abordagem qualitativa de natureza interpretativa, na modalidade de estudo de caso. Nesta fase, é descrito o contexto da investigação (caracterização da escola, da turma onde foi realizado o estudo, da relação da investigadora com os alunos participantes e o tema onde foi feita a intervenção didática do projeto), as técnicas de recolha de dados, o processo e os procedimentos da análise de dados.

No Capítulo IV, são descritas as estratégias definidas pelos alunos durante a realização das diferentes tarefas e é apresentada a análise e interpretação das mesmas ao nível da utilização da folha de cálculo como uma ferramenta que ajuda a evidenciar características do pensamento algébrico.

Finalmente, no Capítulo V, são discutidos os resultados do estudo, apresentadas as conclusões e algumas reflexões finais.

Capítulo II

Revisão de literatura

O pensamento algébrico

Esta secção dedica-se a definir pensamento algébrico e a caracterizá-lo, indicando os seus aspetos e vertentes, segundo as perspetivas de alguns investigadores. De entre as diferentes vertentes apresentar-se-á com mais pormenor as que dizem respeito à aritmética generalizada e ao pensamento funcional.

Por fim, irá estabelecer-se uma relação entre a álgebra e a álgebra escolar e dar-se-á atenção às orientações curriculares portuguesas sobre o pensamento algébrico.

Caracterização do pensamento algébrico

Canavaro (2009), mediante um problema proposto a um conjunto de alunos, identifica aspetos do raciocínio matemático que revelam as suas capacidades de desenvolvimento do pensamento algébrico, tais como: (i) a identificação da estrutura matemática da situação em análise; (ii) o estabelecimento de relações numéricas entre as duas variáveis em causa; (iii) a generalização de uma regra para determinar qualquer termo da sequência, em linguagem natural, com a sua justificação; (iv) a capacidade de expressar a generalização de duas formas distintas, por recorrência e através do termo geral.

Os investigadores pioneiros no pensamento algébrico, Blanton e Kaput caracterizam este tipo de pensamento como sendo um processo de generalização de ideias matemáticas a partir de casos particulares, cujas generalizações são evidenciadas pelo discurso argumentativo e expressas de um modo formal e gradual de acordo com a idade dos alunos (Blanton & Kaput, 2005).

Nesta perspetiva, também Kieran vê a álgebra, não apenas como um conjunto de procedimentos que envolve símbolos em forma de letras, mas como uma atividade de generalização e como um conjunto de ferramentas utilizadas na representação das relações matemáticas, dos padrões e de regras. Deste modo, a álgebra, além de ser uma técnica é também uma forma de pensamento e raciocínio sobre as situações matemáticas (Kieran, 2007a).

Assim, segundo estes investigadores, o centro do pensamento algébrico está na generalização que abarca a extensão deliberada do raciocínio ou da comunicação para além do caso ou casos

particulares considerados. Esta atividade é realizada quando se identifica e expõe o que é comum entre os casos ou fazendo raciocínios e/ou comunicando a um nível mais elevado no qual o foco são os padrões, procedimentos, estruturas e as relações entre eles, em vez dos casos particulares. Estes objetos resultantes da atividade de generalização tornam-se objetos de um nível mais elevado para o raciocínio e a comunicação (Kaput, 1999).

Sob este ponto de vista, destacam-se dois aspetos do pensamento algébrico: (i) as ideias algébricas podem ser expressas utilizando várias representações (linguagem natural, diagramas, tabelas, expressões numéricas, gráficos) além da notação algébrica convencional que envolve letras e, (ii) a ênfase é colocada nos significados e na compreensão, ou seja, o recurso aos símbolos é um modo de representar as ideias gerais tidas do raciocínio e da compreensão.

Como investigou Brown (2004), a álgebra pode ser ensinada como sendo uma linguagem que emerge de situações e contextos repletos de significado. Esta pode ser usada para exprimir e dar a compreender tais situações e, nesta forma de expressão de um nível mais elevado, os alunos sentem a necessidade de lhe recorrer de um modo intrínseco. Ou seja, na procura de respostas às questões colocadas por si (Como acontece? Acontece sempre para todos os casos? Porque é que acontece?) durante a fase de resolução de um problema, naturalmente utilizam a álgebra cheia de significado e sentido, sem que esta seja apresentada como apenas a manipulação simbólica e reprodução de regras operatórias, muitas vezes aplicadas mecanicamente e sem compreensão (Brown, 2004).

O primeiro aspeto do pensamento algébrico - simbolização sistemática de generalizações de regularidades e condições - está relacionado com o *pensamento representacional* (Smith, 2008) que considera como sendo os processos mentais através dos quais um indivíduo cria significados num sistema de representação. O segundo aspeto - pensamento orientado sintaticamente e ações sobre as generalizações expressas através de sistemas de símbolos convencionais - diz respeito ao *pensamento simbólico* (Smith, 2008) que está associado à forma como o indivíduo compreende e usa o sistema de símbolos e as suas regras, sendo os símbolos o foco desse pensamento.

Ora, na defesa deste elemento do pensamento algébrico “sentido de símbolo” (*symbol sense*) (Arcavi, 1994) está Arcavi que o descreve como a capacidade de interpretar e usar de forma criativa os símbolos matemáticos na descrição de situações e na resolução de problemas. Segundo ele, o poder da álgebra está no discernimento para resolver questões que sem ela não se poderiam resolver. Este investigador refere-se ao simbolismo algébrico que é introduzido, inicialmente, em situações que os alunos conseguem observar o quão poderoso é o símbolo como uma forma de generalizar e justificar os fenómenos aritméticos. Este investigador também refere a necessidade de se desenvolver uma sensibilidade perante o símbolo para tomar decisões sobre a sua utilidade, provar relações e aceitar ou rejeitar conjeturas. Além desta, é preciso compreender o problema a partir da inspeção dos símbolos e da comparação dos significados com os resultados da manipulação, não se deixar ofuscar, tendo uma visão global do que se está a trabalhar, sendo flexível e evitando cair em rotinas ou manipulações despidas de significado. Uma expressão de pensamento algébrico também está na escolha da representação simbólica

adequada a um determinado problema e na manipulação simbólica que pode acrescentar mais-valias da emergência de expressões equivalentes resultantes dessa manipulação.

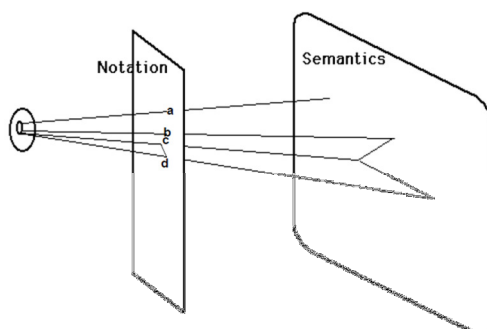


Figura 2- 1: Símbolos "olhar para" vs. "através" (Kaput, 1999, p.11)

Os aspetos referidos anteriormente estão presentes nas diversas vertentes da álgebra, que são: (i) estudo das estruturas e sistemas obtidos a partir do resultado de operações e estabelecimento de relações (inclui os que emergem da aritmética - álgebra como aritmética generalizada - e do raciocínio quantitativo); (ii) estudo das funções, relações e co-variação; (iii) aplicação de um conjunto de linguagens de modelação tanto dentro como fora da Matemática (Kaput, 2008). No entanto, as mais comuns no ensino elementar são a Aritmética generalizada e o pensamento funcional, que serão analisados nas duas secções seguintes. Na figura 2- 2 encontra-se uma subdivisão destes aspetos em cinco formas de pensamento algébrico definidas por Kaput (1999), que considera estarem relacionadas entre si: (i) a generalização e a formalização de padrões e restrições; (ii) a manipulação de formalismos guiada sintaticamente; (iii) o estudo de estruturas abstratas; (iv) o estudo de funções, relações e variação conjunta de duas variáveis; e (v) a utilização de múltiplas linguagens na modelação matemática e no controlo de fenómenos.

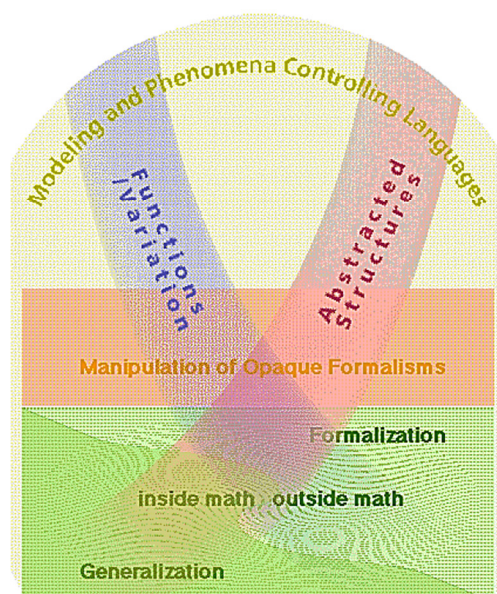


Figura 2- 2: A sobreposição e inter-relacionamentos das cinco formas de pensamento algébrico (Kaput, 1999, p.5)

Em 2008, Kaput refere-se a estes aspetos mas de um modo mais sintético: integra os dois primeiros (simbolismo e generalização) considerando-os “aspetos nucleares” (*core aspects*) da Álgebra e os três últimos como sendo os seus “ramos” (*strands*). Este investigador considera que, através de conjecturas e argumentos, o pensamento algébrico se manifesta quando se estabelecem generalizações sobre dados e relações matemáticas que são expressas por linguagens formais.

Ponte, Branco e Matos (2009), relativamente a este processo de generalização, referem que:

“(…) no pensamento algébrico dá-se atenção não só aos objetos mas principalmente às relações existentes entre eles, representando e raciocinando sobre essas relações tanto quanto possível de modo geral e abstrato” (p.10).

Kaput (1999) ainda reforça que se estes aspetos forem explorados convenientemente, eles tornam-se “hábitos da mente” e as formas de observar e atuar matematicamente (generalizar, abstrair e formalizar) repercutem-se transversalmente a todos os temas, auxiliando a construção do conhecimento matemático dos alunos e proporcionando uma experiência matemática significativa.

Aritmética generalizada

A aritmética generalizada é baseada no carácter algébrico da aritmética para ser explorado de forma sistemática e expondo a sua generalidade. A construção dos aspetos sintáticos da álgebra concretiza-se a partir da estrutura da aritmética, o que implica a análise das expressões aritméticas em termos da sua forma e não ao nível do valor numérico obtido a partir do cálculo. Canavarro exemplifica esta característica: “concluir que $33+8=8+33$ não porque ambos representam 41, mas porque na adição a ordem das parcelas é indiferente.” (Canavarro, 2009).

Nesta vertente estão inclusos vários aspetos enunciados por Kaput e Blanton (2005), tais como: exploração de propriedades e relações de números inteiros, de propriedades das operações com números inteiros, da igualdade como expressão de uma relação entre quantidades, tratar o número algebricamente (isto é, realçar a sua estrutura e não o seu valor) e resolução de expressões numéricas com um número desconhecido em falta. De entre estes, os que estão no cerne da aritmética generalizada são: (i) a generalização acerca das operações e das suas propriedades e, (ii) o raciocínio acerca das relações entre números.

A falta de articulação da Álgebra com a Aritmética e a forma como, muitas vezes é lecionada, é uma das causas para que os alunos tenham conceções muito pouco favoráveis à aprendizagem da álgebra (Canavarro, 2009). Esta investigadora ainda remata que “uma abordagem algebrizada da Aritmética poderá contribuir para ancorar de forma mais sustentada a aprendizagem da Álgebra em anos posteriores.” (Canavarro, 2009, p.12).

Neste sentido, a investigação recomenda a “algebrização” dos problemas aritméticos, ou seja, converter estes (de solução única) em momentos de construção de regularidades, conjecturas, generalizações e a sua justificação e explicitação. Neste sentido, Kieran eleva as tarefas que

focam a atenção dos alunos nos aspetos fundamentais da forma e da generalização - tarefas de natureza problemática e as de investigação.

Pensamento funcional

Com o intuito de desenvolver esta vertente (descrição das relações funcionais), as atividades que inicialmente se propõem relacionam-se com a generalização de padrões e o estabelecimento de conexões entre padrões geométricos e numéricos. São a descrição das regularidades com símbolos, a alteração da forma das expressões que traduzem regularidades, a comparação de diferentes expressões que traduzem regularidades ou a determinação de valores particulares de uma função exigem a existência de uma sintaxe da álgebra.

Portanto, o pensamento funcional envolve a generalização por meio da noção de função que pode ser vista como a descrição da variação de instâncias numa parte do domínio, implicando conceber as letras como variáveis.

Também nesta vertente do pensamento algébrico, Kaput e Blanton (2005) enunciam vários exemplos inclusos no pensamento funcional: (i) simbolizar quantidades e operar com as expressões simbólicas (usar símbolos na modelação de problemas e na operação com as expressões simbólicas); (ii) representar dados graficamente (construção de gráficos de pontos como uma representação de relações funcionais e fazer uma análise da variação das funções apoiada nesses gráficos); (iii) descobrir relações funcionais (exploração da correspondência entre quantidades e de relações recursivas, desenvolvimento de uma regra para descrever as relações, uso de tabelas de duas variáveis e simbolização das regras descobertas); (iv) previsão dos resultados desconhecidos usando os conhecidos (formulação de conjecturas sobre o que se ignora, a partir do que se conhece sem repetir todo o processo anterior); (v) identificação e descrição de padrões numéricos e geométricos (identificação de regularidades numéricas geradas geometricamente, de padrões em sequências de figuras geométricas e de padrões em conjuntos de expressões numéricas).

O trabalho com padrões, no sentido de desenvolver o pensamento algébrico, só resulta se se estabelecerem fortes e evidentes conexões entre padrões. Particularmente, Smith aconselha que se identifiquem as variáveis envolvidas, seja analisada a sua variação e se estabeleça uma relação explícita para que seja possível fazer uma abordagem funcional por correspondência. Se a variação da variável dependente ficar mais evidente, corre-se o risco de ser feita, exclusivamente, uma abordagem recursiva da variação dos termos entre si (Smith, 2008).

Álgebra escolar e o pensamento algébrico

Apesar da existência de um programa (Ponte, et al., 2007) que preconiza todas as vertentes da álgebra referidas na secção anterior, desde o 1.º ciclo ao 3.º, e de todas as investigações e documentos existentes sobre esta temática, ainda vai persistindo a ideia de que a álgebra escolar

se reduz à manipulação e transformação de expressões com variáveis e aos processos de resolução de equações, inequações e sistemas de equações. Esta ideia é consequência do modo como os programas do ensino básico de 1991 tratavam esta temática: nos 1.º e 2.º ciclos não existia e no 3.º ciclo era reduzida ao cálculo algébrico. Agora, no programa em vigor, a álgebra aparece inserida no tema “Números e Operações” no 1.º ciclo (em vez de “Números e cálculo”) e, nos 2.º e 3.º ciclos, como um tema autónomo (“Álgebra”, no qual se incluem as funções que eram um tema único do programa de 1991), com ênfase na generalização, simbolização e modelação.

“Procurando contrariar-se a noção de álgebra como um campo de simples manipulação simbólica, tem vindo a afirmar-se a noção de pensamento algébrico.” (Ponte & Sousa, 2010, p.24)

Como afirmam Ponte, Branco e Matos (2009), ao valorizar-se o pensamento algébrico está-se a realçar a ideia de que este tema não é apenas o trabalho com o simbolismo formal. Implica antes, a capacidade de pensar de modo abstrato em diferentes situações que envolvam relações, regularidades, variação e modelação. A atividade algébrica restringida à manipulação simbólica, é equivalente a reduzir o seu valor a uma única das suas facetas. Estes autores acabam por organizar três vertentes do pensamento algébrico do seguinte modo: (i) representar – capacidade do aluno usar diferentes sistemas de representação; (ii) raciocinar (dedutiva e indutivamente) – envolve relacionar (análise das propriedades dos objetos matemáticos) e generalizar (estabelecimento das relações válidas para uma determinada classe de objetos); (iii) resolver problemas – formular e concretizar estratégias de resolução envolvendo representações de objetos algébricos em diversas situações (modelação). Estas são sintetizadas no quadro seguinte:

Representar	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Ler, compreender, escrever e operar com símbolos usando as convenções algébricas usuais; ▪ Traduzir informação representada simbolicamente para outras formas de representação (por objectos, verbal, numérica, tabelas, gráficos) e vice-versa; ▪ Evidenciar sentido de símbolo, nomeadamente interpretando os diferentes sentidos no mesmo símbolo em diferentes contextos.
Raciocinar	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Relacionar (em particular, analisar propriedades); ▪ Generalizar e agir sobre essas generalizações revelando compreensão das regras; ▪ Deduzir.
Resolver problemas e modelar situações	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Usar expressões algébricas, equações, inequações, sistemas (de equações e de inequações), funções e gráficos na interpretação e resolução de problemas matemáticos e de outros domínios (modelação).

Figura 2- 3: Vertentes fundamentais do pensamento algébrico (Ponte, et al., 2009, p.11)

É a sua perspetiva que está subjacente no Programa de Matemática do Ensino Básico uma vez que neste é associado o pensamento algébrico à capacidade de interpretar, representar e resolver problemas usando procedimentos algébricos e de utilizar estes conhecimentos e capacidades na

exploração e modelação de situações contextualizadas. Neste programa também se reforça a ideia de que além de os alunos adquirirem a capacidade de manipular símbolos, este pensamento envolve a interpretação do seu significado e a capacidade de generalização. Nas orientações metodológicas, o programa evidencia o estudo de sequências com o intuito de formular generalizações e de as representar simbolicamente. O desenvolvimento da noção de variável é outra preocupação que é salientada. Além destas, propõe o estudo de relações de diferentes tipos (equações, inequações e funções) e da variação e, também preconiza o trabalho com tarefas que envolvam simbolização e modelação. Para que se consiga desenvolver o pensamento algébrico, é recomendado que os alunos tenham experiências informais antes da manipulação algébrica formal e que se valorize o trabalho com as fórmulas conhecidas dos alunos (Ponte, et al., 2007).

Como tinha de acontecer, o descrito no programa vai ao encontro daquilo que o NCTM considera ser o pensamento algébrico que diz respeito ao estudo das estruturas, à simbolização, à modelação e ao estudo da variação e, conseqüentemente, inclui duas capacidades: (i) a de lidar com expressões algébricas, equações, inequações, sistemas de equações e de inequações e funções e, (ii) a de lidar com outras relações e estruturas matemáticas e usá-las na interpretação e resolução de problemas (NCTM, 2007).

Esta instituição de referência no domínio das tendências curriculares internacionais (NCTM), assume a álgebra como um tema transversal a outros temas da matemática e refere que este tema inclui as relações entre quantidades, o uso de símbolos, a modelação de fenómenos e o estudo da variação. Deste modo, define objetivos para os alunos, desde o pré-escolar ao 12.º ano, cujos aspetos vão ao encontro dos da investigação.

Normas para a Álgebra

Os programas de ensino do pré-escolar ao 12.º ano deverão habilitar todos os alunos para:

- Compreender padrões, relações e funções;
- Representar e analisar situações e estruturas matemáticas usando símbolos algébricos;
- Usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas;
- Analisar a variação em diversos contextos.

(NCTM, 2007, p.39)

Se se fizer uma análise mais aprofundada dos objetivos para cada faixa etária de alunos, compreende-se que a proposta apresentada abarca os aspetos e as vertentes essenciais do pensamento algébrico, adequando-os às experiências e às capacidades dos alunos, usando as diferentes representações e introduzindo gradualmente os símbolos algébricos.

Kieran (1996) desenvolveu um modelo (GTG) que categoriza as atividades da álgebra escolar em tipos: Generacional (*“generational”*), Transformacional (*“transformational”*) e de nível Meta/Global (*“global/meta-level”*).

O primeiro tipo de atividades envolve a formação de expressões e equações como objetos da álgebra, nomeadamente através do trabalho com variáveis, incógnitas e igualdades. Os problemas típicos associados a estas atividades são equações cuja incógnita representa uma situação do

problema quantitativo, expressões gerais que representam padrões geométricos ou sequências numéricas e, expressões que representam as regras das relações numéricas. Associados a estas expressões e equações estão as variáveis e as incógnitas.

O centro destas atividades é a representação e a interpretação das situações, propriedades, padrões e relações. Neste tipo de atividade é imprescindível saber atribuir significado aos objetos algébricos. Para desenvolver esta competência, nas aulas de álgebra são utilizadas duas estruturas principais, transversais aos três tipos de atividades: as funções e a generalização da aritmética.

À utilização das funções, estão associados diferentes aspetos: as representações gráficas e tabulares ajudam a desenvolver a capacidade de atribuir um significado às expressões e equações; o desconhecido tende a ser considerado um caso especial de variáveis, apesar de serem estas o principal foco; as equações de primeiro grau com uma incógnita tendem a ser interpretadas como uma igualdade de duas funções, mesmo quando estas são representadas por dois gráficos lineares; a solução de uma equação pode ser interpretada como o valor da variável independente para o qual as duas funções são iguais, entre outros. Nos estudos sobre o desempenho na atribuição de significado aos objetos algébricos com recurso à tecnologia, é valorizada uma abordagem funcional com as suas múltiplas representações.

Se a generalização da aritmética for a base para dar significado aos objetos algébricos, o desconhecido tem prioridade sobre a variável e, as expressões e as equações tendem a ser vistas como representações de relações numéricas em vez de relações funcionais.

O segundo tipo de atividades é baseado em regras ou procedimentos algébricos e, por isso, incluem-se atividades de resolução de equações, simplificação e factorização de polinómios, entre outros. Ou seja, nestas atividades está claramente implícita a exigência da manipulação algébrica, das noções de equivalência e a integração do uso da tecnologia de manipulação simbólica. Por isso, neste domínio da atividade transformacional destacam-se três aspetos: (i) elementos teóricos, tais como, a equivalência e o controlo teórico; (ii) elementos técnicos, como são a manipulação de expressões e equações; (iii) o uso de manipulativos concretos.

O último tipo de atividades são aquelas em que a álgebra é usada como uma ferramenta e que não são exclusivas deste tema. Estas incluem a resolução de problemas, a modelação de situações, estudo da variação, generalização, análise de relações, justificação, demonstração e validação.

No ensino da álgebra, a compreensão concetual dos objetos algébricos tende a ser absorvido pelo desenvolvimento da manipulação algébrica e, segundo Kieran (2004), são poucos os teóricos que defendem que essa compreensão ajuda a incentivar e a envolver os alunos nos processos algébricos que desenvolvem o seu pensamento algébrico.

Stacey e Chick (2004), referem que quando a álgebra é vista apenas como a manipulação simbólica tem pouca relevância para a vida quotidiana, sendo um dos motivos de alienação dos alunos em relação à álgebra. Deste modo, dizem que é imprescindível tornar os objetos e os

processos algébricos com significado para que os alunos entendam que a álgebra é mais que apenas a manipulação simbólica. Com este intuito e de desenvolver nos discentes os seus pontos fortes da sua inteligência, é requerido imaginação, uma boa fundamentação das abordagens escolhidas e estruturas escolares que abranjam diferentes capacidades e interesses dos alunos.

Também o NCTM (2007), refere:

“A resolução de problemas estrategicamente selecionados e cuidadosamente sequenciados constitui um veículo fundamental para aprender conteúdos matemáticos (...). Os professores deverão aproveitar as oportunidades inesperadas para os usar de modo a cativar os alunos para noções matemáticas importantes e promover uma melhor compreensão dessas. A maioria dos conceitos matemáticos ou das generalizações pode ser introduzida eficientemente utilizando uma situação de problema que ajude os alunos a compreender aspetos importantes da ideia a ser generalizada.” (p.395)

No entanto, antes da criação de várias oportunidades de ensino torna-se fundamental conhecer e compreender as dificuldades cognitivas de aprendizagem da álgebra. Estas investigadoras, Stacey e Chick (2004), referem algumas delas: capacidade e nível de abstração, aprendizagem primária da aritmética, manipulação simbólica e capacidade de realizar transições processuais no pensamento estrutural.

Contudo, Kieran (2004) realça que ao assumir-se uma visão mais sofisticada da compreensão concetual e das capacidades de manipulação não se pode desvalorizar o saber as técnicas da álgebra pois são importantes na resolução de problemas e no entendimento dos objetos algébricos envolvidos. Isto significa que não se podem separar os conceitos e as capacidades; ao invés, tem de se conjugar os dois, uma vez que torna as técnicas mais eficazes. Esta investigadora, baseada nas pesquisas e experiências existentes, refere que o processo de manipulação é também um objeto concetual e que não é anulado com a utilização de sistemas computacionais de álgebra.

Esta visão, diz Kieran (2004), é a chave para melhorar o ensino e a aprendizagem da álgebra.

As investigações nesta temática têm recomendado uma “algebrização do currículo” (Canavarro, 2009). Esta recomendação implica uma abordagem ao pensamento algébrico desde os primeiros anos, como já vem contemplado no programa do ensino básico atual (Ponte, et al., 2009), integrado noutros temas da matemática, incluindo diferentes vertentes que se baseiam nas capacidades cognitivas e linguísticas dos alunos e motivando uma aprendizagem com significado e compreensão.

O professor no desenvolvimento do pensamento algébrico

Tarefas “algebrizadas” e que permitem a utilização de diferentes representações pelos alunos são de certo modo importantes mas quando estão aliadas à ação do professor sobre o desempenho gradual dos seus alunos. O professor tem que auxiliar os alunos na formação do conjunto de ferramentas intelectuais que apoiam o desenvolvimento do pensamento algébrico.

O professor tem que mostrar aos aprendizes “objetos” (tabelas, retas numéricas, gráficos de vários tipos, artefactos visuais, materiais concretos) em torno dos quais se desenvolve o pensamento algébrico (Blanton & Kaput, 2005), ensiná-los a lidar com processos matemáticos (forma de registo, recolha, representação, organização de dados) que são muito úteis. Em suma, o professor ao promover a utilização de modos de representação favoráveis à generalização está a apoiar os alunos na visualização das estruturas matemáticas subjacentes ao contexto em estudo.

A *posteriori* do descrito no parágrafo anterior, a organização da aula é outro fator de extrema importância no favorecimento do pensamento algébrico. Se esta contemplar espaços de trabalho autónomo sobre as tarefas propostas, de confronto e discussão das produções dos alunos e de síntese coletiva das aprendizagens realizadas no grupo turma, está-se perante um ambiente favorável a esta forma de pensamento. Este tem que ser dotado dos seguintes aspetos: (i) valorização do raciocínio dos alunos em todas as suas diferenças como o ponto de partida para a construção do conhecimento matemático, envolvendo-os no próprio desenvolvimento do saber; (ii) valorização da comunicação e do modo como se processa, para ajudar a que a expressão dos raciocínios seja eficaz (por exemplo, a tecnologia tem aqui o seu contributo favorável); (iii) o tipo de questões colocadas pelo professor são importantes para clarificar raciocínios e orientar a estabelecer relações e generalizações; (iv) a descodificação matemática das mensagens dos alunos como expressão de uma generalização, por vezes, pouco explícitas, é outro aspeto muito importante; (v) a seleção das produções dos alunos e a organização das apresentações para a discussão coletiva, é referida por Canavarro (2009) como sendo outro aspeto relevante pois o professor ao reservar para o fim as que revelam a generalização de forma mais completa e/ou em que a sua expressão surja mais formalizada, está a favorecer o crescimento intelectual dos seus alunos; (vi) a construção coletiva da generalização (quando não é apresentada pelos alunos), sua clarificação, aprofundamento ou ampliação (Canavarro, 2009).

“A aposta por parte do professor no pensamento algébrico implica, talvez sobretudo, uma aposta no raciocínio dos alunos e um acreditar na possibilidade destes construírem conhecimento matemático (...). A necessidade do desenvolvimento de “hábitos da mente” não pode incidir apenas nos alunos — eles devem necessariamente instalar-se e transbordar dos professores.” (Canavarro, 2009, p.37)

Síntese

A álgebra associada à manipulação simbólica e transformação de expressões está, gradualmente, a ser tratada de um modo muito mais amplo, onde a generalização, manipulação e a modelação têm um lugar mais privilegiado. Este está associado àquilo que os programas curriculares da matemática estão agora a preconizar valorizando a aritmética generalizada e o pensamento funcional como vertentes fundamentais do pensamento algébrico. Ligada a esta questão está a introdução da tecnologia na sala de aula de matemática, como se poderá confirmar numa secção deste capítulo mais adiante.

Representações

A representação é central no estudo da matemática e predominante na Álgebra (NCTM, 2007).

Os diagramas, gráficos, expressões simbólicas, entre outras são algumas formas de representação que fazem parte da matemática escolar e que devem ser consideradas como elementos essenciais no apoio à compreensão dos conceitos e das relações matemáticas, na comunicação de abordagens, argumentos e conhecimentos matemáticos, na identificação de conexões entre conceitos matemáticos interrelacionados e na aplicação da matemática a problemas realistas. As boas representações desempenham um duplo papel: são ferramentas de raciocínio e instrumentos de comunicação. As geradas pelos alunos são ferramentas poderosas para observar o seu pensamento.

Muitas das representações que hoje se consideram como garantidas são o resultado de um processo de aperfeiçoamento cultural. Quando os alunos conseguem aceder às representações matemáticas e às ideias que elas expressam, adquirem um conjunto de ferramentas que aumentam a sua capacidade de pensar matematicamente. Por isso, as representações têm vindo a assumir especial destaque nas orientações curriculares para o ensino da Matemática. O NCTM (2007) dedica uma norma específica à representação a considerar para todos os alunos desde o pré-escolar ao 12.º ano, que define como objetivos: (i) criar e usar representações para organizar, registar e comunicar ideias matemáticas; (ii) selecionar, aplicar e traduzir representações matemáticas para resolver problemas e (iii) usar as representações para modelar e interpretar fenómenos físicos, sociais e matemáticos.

Deste modo, neste capítulo a investigadora descreve o que os teóricos entendem por representação, as diferenças entre representações, os fatores que influenciam as representações dos alunos, a sua importância para o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos e formas de observação e inferência das representações.

O conceito de representação

O comportamento matemático dos indivíduos aliado às características dos seus ambientes externos é passível de ser observado (Goldin, 1998). No entanto, os diversos conceitos, estruturas e/ou processos que ocorrem na mente dos alunos não podem ser observados diretamente. É preciso observar, classificar e medir diferentes tipos de comportamento considerando as informações ambientais e do contexto em que se inserem, para inferir o que ocorre na mente dos alunos.

A observação tem que incluir medidas qualitativas e quantitativas recolhidas nas entrevistas, nas interações com os seus pares em situação de pequenos grupos e na sala de aula na resolução de problemas, e nas interações em ambientes computacionais dinâmicos. As quantitativas são apenas os resultados, ou seja, a medição dos resultados das aprendizagens matemáticas ou de

sucesso na resolução de problemas aliado às características e atitudes dos alunos, como são exemplo, as pontuações dos testes ou fichas, os padrões de respostas corretas e incorretas num conjunto de problemas estruturados, o tempo de resolução, o número de passos realizados até encontrar a solução e as estratégias definidas pelos alunos na resolução de problemas. As qualitativas resultam da observação das estratégias utilizadas, das planificações definidas e métodos heurísticos, da capacidade de visualização espacial e da verbalização das ideias, da tomada de consciência do conhecimento, da ocorrência de vários estados afetivos, entre outros. Estes são inferidos a partir de processos do tipo “pensar alto”, das descrições verbais, das respostas a questões estruturadas durante as entrevistas, da utilização das notações e representações externas, das imagens mentais, das expressões faciais, de movimentos corporais e de entre outros semelhantes.

Portanto, os modos de representação ou os sistemas de representação incluem as expressões oral e escrita, modelos de figuras estáticas ou de imagens, modelos de manipulação e de situações reais na resolução de problemas que Goldin designa por Sistemas Externos de Representação.

O termo *representação* diz respeito ao processo e ao resultado, ou seja, é a aquisição de um conceito ou de uma relação matemática expressa numa determinada forma e é a forma em si mesma. Este termo aplica-se aos processos e aos resultados obtidos externamente e aos que ocorrem “internamente” nas mentes dos indivíduos quando fazem matemática (NCTM, 2007).

Tipos de representações no ensino da Álgebra

De entre as orientações metodológicas para o ensino da matemática, saliente-se a que diz respeito às representações matemáticas uma vez que desempenham um papel importante na aprendizagem da disciplina (Ponte, et al., 2007), e em particular, da Álgebra. Estas orientações apelam ao envolvimento de mais que uma forma de representação no trabalho com os conceitos matemáticos pois eles serão mais capazes de resolver problemas algébricos, se conseguirem mover-se com facilidade entre os diversos tipos de representações (NCTM, 2007).

Kaput (2008) refere que os alunos devem ser estimulados e ensinados a usar as formas de representação convencionais (notação algébrica, gráficos, tabelas, linguagem natural) uma vez que permitem exprimir, enriquecer e aprofundar os seus raciocínios algébricos.

Resolver problemas algébricos consiste em usar várias representações de objetos algébricos e, segundo Friendland e Tabach (2001), o uso das representações verbal, numérica, gráfica e algébrica, tem o potencial de tornar a aprendizagem da Álgebra significativa e eficaz. Estes investigadores apresentam quatro formas de representação essenciais no ensino desta temática da matemática que são as representações verbal, numérica, gráfica e algébrica, e assinalam as vantagens e desvantagens associadas a cada uma.

A representação verbal está associada ao raciocínio verbal, ou seja, à apresentação da situação e à interpretação final dos resultados obtidos, evidenciando a conexão da matemática com outras

áreas do conhecimento e entre a matemática e o cotidiano. Esta representação cria um ambiente natural para compreender o contexto do problema e para comunicar a sua solução, e pode facilitar a apresentação e aplicação de padrões. Esta forma pode ser um obstáculo à comunicação matemática porque não é universal, a sua utilização pode ser efetuada incorretamente ou conduzir a associações erróneas.

A representação numérica é natural para os alunos que estão a iniciar o estudo da Álgebra, pois os métodos numéricos permitem estabelecer a ponte com a Álgebra e, normalmente, precedem qualquer outro tipo de representação. A utilização de números é importante na compreensão inicial dos problemas e na investigação de casos particulares mas, não é generalizável, constituindo uma ferramenta limitada quando, por exemplo, permite desperdiçar aspetos importantes ou soluções de um problema por não revelar a sua generalização. Estes autores, Friendland e Tabach (2001), consideram como exemplos desta representação, as sequências e as tabelas. Para Smith (2008), as tabelas são ferramentas muito poderosas no pensamento algébrico porque permitem registar de modo organizado os valores numéricos do problema e fazer uma análise numérica dos mesmos, quer de cada variável do problema quer da relação entre elas. Esta representação é muito eficiente na motivação ao pensamento funcional, como enfatiza Smith. É uma forma de representação que pode ser ensinada desde os primeiros anos e ser obtida através de recursos tecnológicos, como é exemplo a folha de cálculo.

A representação gráfica (os gráficos) é eficaz, proporcionando uma imagem clara de uma função de variável real; permite completar e clarificar o que as tabelas revelam e pode ser utilizada como aprofundamento da compreensão da variação entre as duas variáveis representadas nos eixos. É uma forma de representação intuitiva e apelativa para os alunos que gostam de uma abordagem visual e que também pode ser ensinada desde os primeiros anos, devendo corresponder a situações a que os alunos atribuam significado. No entanto, esta representação pode não ter a precisão necessária pois pode ser influenciada por fatores externos (por exemplo, a escala) e apresentar apenas uma parte do domínio do problema. O nível de utilidade desta ferramenta matemática varia conforme o problema que se pretende resolver. Tal como as tabelas, os gráficos também podem ser obtidos por meio das ferramentas tecnológicas como a folha de cálculo e as calculadoras gráficas.

A representação algébrica é uma ferramenta poderosa; de um modo geral, é concisa e eficaz na apresentação de padrões e modelos matemáticos e é, por vezes, a única ferramenta que justifica ou demonstra as generalizações. No entanto, a utilização exclusiva de notação simbólica da Álgebra pode dificultar a interpretação matemática ou o sentido da natureza dos objetos representados, levantando obstáculos aos alunos na interpretação dos resultados obtidos.

A adesão a estas representações na resolução de problemas depende das vantagens e desvantagens referidas e do tipo de pensamento dos alunos. Por isso, os professores devem, sistematicamente, proporcionar aos alunos experiências de uma variedade de representações levando os alunos a resolver um problema e a observar a sua solução nas diferentes

representações. E relacionado com este aspeto, as normas referem que para o desenvolvimento de noções de Álgebra por alunos dos 2.º e 3.º ciclos, as representações são muito úteis.

“À medida que se tornam matematicamente sofisticados, os alunos vão desenvolvendo um repertório cada vez mais alargado de representações matemáticas, bem como um conhecimento de como as utilizar de forma eficiente. (...) É importante que os alunos reflitam sobre o uso que fazem de representações de modo a desenvolverem uma compreensão dos pontos fortes e fracos de várias representações com objetivos diferentes.” (NCTM, 2007, p.78).

E, conseqüentemente, a transição de uma representação para a outra é encarada como uma necessidade em vez de uma exigência arbitrária (Friendland & Tabach, 2001).

Desde há muito tempo, estas representações têm feito parte da matemática escolar e, frequentemente são ensinadas e aprendidas como finalidades, em si mesmas.

“Deverão ser tratadas como elementos essenciais no apoio à compreensão, por parte dos alunos, dos conceitos e das relações matemáticas, na comunicação de abordagens, argumentos e conhecimentos matemáticos, para si mesmos e para os outros, na identificação de conexões entre conceitos matemáticos interrelacionados, e na aplicação da matemática a problemas realistas, através da modelação.” (NCTM, 2007, p. 75).

Quando se apresenta ao aluno uma tarefa que inclui um problema com questões orientadoras da sua investigação, a utilização das representações é motivada pela sequencialidade das questões colocadas pelas seguintes razões, segundo Friendland e Tabach (2001): (i) familiarização com a representação inicial - as perguntas que têm este intuito motivam os alunos à análise de cada elemento do problema no seu contexto inicial, a fazer extrapolações ou conjeturas. Nesta fase, muitos alunos evitam transitar entre as diferentes representações; (ii) transição entre representações - neste tipo de questões, os alunos são obrigados a trabalhar com uma dada representação específica; (iii) exploração - os alunos são interpelados com questões mais complexas e abertas e espera-se que escolham o seu próprio método de representação e definam o seu caminho em busca da solução.

As questões reflexivas também são um fator que influencia a utilização das representações pelos alunos porque permite o distanciamento das ações realizadas anteriormente, obrigando-os a avaliar as suas e as ações dos outros.

Existem outras formas de representação menos convencionais que se tornam referências e em torno dos quais os alunos podem pensar algebricamente. São objetos, estruturas ou processos que suportam e facilitam a expressão do pensamento algébrico dos alunos, tais como são exemplo os diagramas. A possibilidade de utilização destas representações aumenta as hipóteses de os alunos conseguirem estruturar o seu raciocínio, para além de facilitar a sua comunicação.

As representações e as TIC

Para beneficiar a utilização da multiplicidade de representações, o professor pode e deve recorrer a ambientes tecnologicamente suportados como contexto de exploração das tarefas que exigem

ou beneficiam do uso destas ferramentas. O uso das tecnologias é particularmente importante na resolução de problemas e na exploração de situações, casos em que os cálculos e os procedimentos de rotina não constituem objetivo prioritário de aprendizagem, e a atenção se deve centrar nas condições da situação, nas estratégias de resolução e na interpretação e avaliação dos resultados (Ponte, et al., 2007).

O recurso a computadores com *software* acessível que permite obter as diversas representações das funções é uma estratégia que o professor deve considerar uma vez que esta melhora as oportunidades de aprendizagem dos alunos que podem tirar o maior proveito do que a tecnologia permite fazer de forma correta e eficiente, como a construção de gráficos. À medida que os conhecimentos matemáticos, a capacidade de utilizar diversas representações matemáticas e o acesso às tecnologias aumentam, a capacidade de estabelecer conexões também se torna mais eficaz e eficiente. No entanto, para que os alunos a usem deste modo, precisam de se familiarizarem com as representações que é comum usar nesses contextos tecnológicos. Pelo facto de estas ferramentas informáticas serem dotadas da sua própria sintaxe com significados específicos e imprescindíveis à utilização da ferramenta, é necessário que os alunos aprendam estas representações e as distingam dos objetos matemáticos que estão a manipular. (NCTM, 2007).

As representações no currículo

A matemática constitui uma das maiores proezas culturais da humanidade. É a “linguagem da ciência”, proporcionando meios pelos quais o mundo à nossa volta pode ser representado e compreendido. As representações matemáticas que estes alunos aprendem fornecem-lhes a oportunidade de compreender o poder e a beleza da matemática, apetrechando-os de modo a poderem usar as representações nas suas vidas pessoais, no seu local de trabalho e em estudos futuros. São as experiências algébricas que devem permitir criar e utilizar as representações e analisar e compreender padrões, relações e funções. A temática matemática inclusa no programa onde a representação é rainha é a álgebra.

Os gráficos transmitem certos tipos de informação visual, enquanto as expressões simbólicas poderão ser mais facilmente manipuladas, analisadas e transformadas.

A modelação matemática requer a utilização de representações. O uso de matrizes para representar transformações no plano ilustra de que modo as operações geométricas podem ser representadas visualmente e, ainda ser sujeitas a representação e manipulação simbólica, de uma maneira que ajuda os alunos a compreenderem-nas.

Quando os alunos utilizam diferentes representações, poderão encontrar diferentes soluções e compará-las, uma vez que suportam várias formas de pensar e de manipular os objetos matemáticos. Estes podem ser mais facilmente compreendidos quando observados de diversas perspetivas. As representações auxiliam e facilitam o raciocínio e são instrumentos de demonstração, uma vez que são usadas para analisar relações e para validar resoluções

alternativas. Além destas vantagens, ainda sustentam o desenvolvimento dos conhecimentos e estão no foco da comunicação.

O trabalho dos alunos com entidades cada vez mais abstratas (funções, matrizes e equações) intensifica-se a partir do 9.º ano, pelo que a utilização de diferentes representações destes objetos é um meio para que reconheçam estruturas matemáticas comuns nos vários contextos. Segundo o NCTM (2007), estes alunos deverão ser capazes de criar e interpretar modelos de fenómenos mais complexos obtidos de diferentes contextos, identificando as características essenciais de cada situação e apresentando representações que traduzam as relações existentes entre essas.

Neste sentido, o NCTM (2007) recomenda que os professores deverão iniciar os alunos nas representações matemáticas convencionais e ajudá-los a utilizarem-nas eficazmente, recorrendo às representações pessoais e idiossincráticas dos mesmos, sempre que necessário. Na utilização de diversas representações dos mesmos objetos podem distinguir-se informações distintas, pelo que o professor deverá realçar os procedimentos inerentes destas representações e destacar a importância da seleção de determinada representação consoante a especificidade da tarefa. Portanto, uma parte do papel do professor consiste em ajudar os alunos a associar as suas imagens pessoais a representações mais convencionais. As representações geradas pelos alunos são ferramentas preciosas para observar o pensamento dos alunos.

A folha de cálculo e o pensamento algébrico

As tecnologias na aprendizagem da Matemática

Na década de 60 do séc. XX, ainda quando os computadores eram muito raros, dispendiosos e complicados de operar, surgiram as primeiras experiências de utilização das TIC no ensino da Matemática. Após algumas investigações no Ensino Assistido por Computador, concluiu-se que esta modalidade ficava muito aquém dos objetivos no que se refere à transmissão de conhecimentos e ao desenvolvimento de capacidades específicas, tal como se revelava desenquadrada dos objetivos do ensino da Matemática definidos nos anos 80, que valorizavam outros aspetos ligados à resolução de problemas, raciocínio e comunicação.

Entretanto, nos anos 70 deste mesmo século, surgem no ensino da matemática as calculadoras que foram vistas com muita desconfiança e provocaram fortes reações de rejeição, uma vez que pais e professores pensavam que os alunos não desenvolveriam destrezas de cálculo e a sua aprendizagem ficaria prejudicada. Até que se chegou a um ponto em que se começou a tirar melhor partido desta ferramenta em atividades de natureza investigativa, na resolução de problemas, na introdução de conceitos matemáticos e em atividades que desenvolvem o cálculo mental. Deste modo, a calculadora também veio facilitar a criação de uma melhor relação dos alunos com a Matemática, sendo uma ferramenta com muitas potencialidades na promoção de uma melhor aprendizagem desta disciplina.

Em simultâneo, o aparecimento dos computadores a preços acessíveis e o surgimento das ferramentas informáticas (folha de cálculo, *software* de processamento de texto e de gráficos e, posteriormente, *software* específico para o ensino da matemática) levaram à sua vulgarização na sociedade. Sendo visto como um elemento de progresso, a introdução do computador na escola foi bem encarada pelos educadores e pela opinião pública em geral (Ponte & Canavarro, 1997). Neste sentido, muitos professores entusiastas desta modalidade de ensino introduzem o computador na escola e na sala de aula como uma ferramenta de trabalho, apesar dos muitos fatores adversos como são a falta de recursos informáticos e as deficientes condições de trabalho. De todas as experiências realizadas ao longo dos anos, verificou-se que os alunos envolvidos melhoraram a sua relação com a matemática e criaram uma maior predisposição para a aprendizagem. Este instrumento de progresso também levou a que os professores fizessem diferentes abordagens dos conteúdos programáticos, adotassem diferentes metodologias de trabalho e reequacionassem o seu papel e o dos alunos no processo de ensino aprendizagem da Matemática.

Assim, Ponte (1995) diz que a utilização da calculadora e do computador em sala de aula tem expressivas influências relativamente aos objetivos e às formas de trabalho:

“impõe a relativização da importância das competências de cálculo e de simples manipulação simbólica, uma vez que o cálculo numérico e algébrico são realizados de forma mais eficiente pelas máquinas, que, neste domínio, superam o ser humano em rapidez e rigor; incentiva o investimento no desenvolvimento de capacidades intelectuais de ordem mais elevada, como o raciocínio, a resolução de

problemas e a capacidade crítica, que se situam para além do cálculo e da compreensão de conceitos e relações matemáticas simples; valoriza o papel da linguagem gráfica e de novas formas de representação, uma vez que as representações múltiplas que as máquinas proporcionam, com especial destaque para a gráfica, permitem outras abordagens às situações matemáticas, para além dos processos formais de cunho algébrico ou analítico; promove a realização de projetos e de atividades de modelação, de investigação e exploração pelos alunos, como parte fundamental da sua experiência matemática; possibilita o envolvimento dos alunos em atividade matemática intensa e significativa, favorecendo o desenvolvimento de atitudes positivas em relação à disciplina e uma visão mais próxima da sua verdadeira natureza.”(p.4)

Ponte e Canavarro (1997) também defendem que a utilização das TIC no ensino da Matemática pode contribuir para tornar a disciplina mais acessível aos alunos. Em relação aos valores e atitudes, despertam curiosidade e gosto pela aprendizagem, uma vez que proporcionam a criação de contextos de aprendizagem ricos e estimulantes. No que diz respeito à confiança, à autonomia e ao espírito de tolerância e cooperação são promovidas pelo papel mais ativo na sala de aula que desempenham com as TIC, pois é-lhes dada a possibilidade de realizarem atividades de investigação, formular e testar as próprias conjecturas, de discutir estratégias e comunicar matematicamente.

Com as TIC consegue-se desenvolver as capacidades relacionadas com o raciocínio matemático sem que se fique apenas pela ênfase dada à aprendizagem das técnicas. A tecnologia favorece o desenvolvimento: (i) do raciocínio estratégico (com a possibilidade de apresentar diversas experiências de exploração, investigação e de resolução de problemas); (ii) do espírito crítico, uma vez que é estimulado com a avaliação da razoabilidade dos resultados fornecidos pela tecnologia; (iii) da capacidade de resolução de problemas (alargam a possibilidade de trabalho com muitas situações); (iv) da capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no mundo que nos rodeia (facilitam o uso da Matemática como uma ferramenta para melhor compreender e até intervir no mundo, contribuindo para a formação de cidadãos informados e esclarecidos com maior poder matemático) (Ponte & Canavarro, 1997).

“Se a calculadora relativiza a importância do cálculo numérico, o computador, por seu lado, relativiza a importância do cálculo algébrico.” (Ponte & Canavarro, 1997). Stacey e Chick (2004) têm uma opinião que vai ao encontro do que Ponte e Canavarro afirmam, referindo que com a evolução da tecnologia, o ensino da álgebra é alterado uma vez que permite desenvolver novos métodos de resolução de problemas e, por isso, o que anteriormente era valorizado, agora não pode ser. Cálculos complexos podem ser efetuados com maior rapidez e correção, diminuindo-se a importância de aspetos mecânicos centrais no ensino da Matemática (por exemplo, a resolução de equações, inequações e temas associados às funções) tal como as manipulações simbólicas. Também as capacidades gráficas obrigam a uma nova abordagem das funções, valorizando aspetos intuitivos na construção de conceitos e na respetiva formalização.

Mediante a introdução da tecnologia nas escolas, Stacey e Chick (2004) dizem que os currículos de álgebra têm que fazer face às mudanças, pois da mesma forma que o avanço da tecnologia permite melhorar a aprendizagem da álgebra sem que se alterem os currículos, também os

educadores têm de se certificar que estas novas oportunidades são utilizadas para melhorar os resultados dos alunos.

No que se refere à tecnologia, os dois programas mais usados na Álgebra são a folha de cálculo (como o *Excel*) e os programas de cálculo simbólico (como o *Derive*). A FC é um *software* dirigido para a manipulação de dados e foi desenvolvido como uma ferramenta de contabilidade e é das mais utilizadas em diferentes contextos profissionais. Os dados estão organizados em “células” e algumas podem ser definidas em função de outras, tais que, essas alterações provocam mudanças automaticamente nas células anteriores. A folha de cálculo é relativamente simples de aprender, mas usa uma representação um pouco distante da habitual na matemática escolar. Esta ferramenta requer do utilizador a capacidade de identificar relações e padrões entre os dados que se pretendem representar na FC. Os programas de cálculo simbólico envolvem uma aprendizagem mais demorada e, possivelmente, só começam a ter verdadeiro interesse numa fase avançada da aprendizagem da álgebra por parte dos alunos. Quando esta ferramenta é utilizada no processo de ensino aprendizagem da matemática, as relações são modeladas utilizando regras que descrevem as relações no modelo. De acordo com Pea (1985), citado por Leung (2004), “a FC é um exemplo de uma tecnologia cognitiva que amplia e reorganiza o funcionamento mental”. Como diz Rojano (1996), entre outros investigadores, esta ferramenta é um intermediário entre as linguagens natural e algébrica, defendendo que capacita os alunos a fazerem a transição da representação numérica ou verbal para a simbólica, ou seja, do particular para o geral, do conhecido para o desconhecido e da intuição para a abstração. Em alguns estudos verificou-se que os alunos que trabalham com a FC na aritmética ou na iniciação à álgebra têm uma maior capacidade de comunicação e interessantes estratégias de resolução de problemas. Ponte e Canavarro acreditam que a FC pode contribuir para que as aprendizagens se tornem mais significativas como é o caso da Álgebra com a qual se liga mais facilmente (Ponte & Canavarro, 1997). Também o NCTM (2007) destaca a grande importância do recurso à tecnologia, uma vez que esta permite produzir gráficos de funções, operar simbolicamente e fazer cálculos instantâneos com grandes quantidades de informação. Para que haja eficiência no trabalho com a tecnologia, é indicado que os alunos comecem por compreender os conceitos algébricos, a estrutura e os princípios que regulam a manipulação simbólica e, só depois, aprendam a interpretar as representações usadas pelos instrumentos tecnológicos. Desta forma, o uso da FC no ensino da Álgebra, pode ser encarado como um apoio ao desenvolvimento do conceito de variável e à compreensão das relações entre variáveis.

Citado por Leung (2004), Heid (1995) defende que a utilização da FC vem exigir novas visões da álgebra escolar, pois transfere a ênfase da manipulação simbólica para a compreensão concetual, o sentido simbólico e para a modelação matemática. Ou seja, o objetivo principal da álgebra deixa de ser a manipulação simbólica e a aquisição de um conjunto predefinido de procedimentos para a resolução de um conjunto de problemas. Os alunos irão gastar menos tempo com estas atividades, uma vez que são realizadas com a tecnologia. Os conceitos de variável e de função com a tecnologia são mais enriquecidos do que os encontrados nos manuais escolares, pois “as variáveis realmente variam e as funções descrevem fenómenos reais”. As variáveis representam

quantidades que se alteram, e a álgebra é o estudo dessas relações das variações dessas quantidades. Com a utilização das TIC a própria natureza da álgebra pode ser modificada, pois deixa-se de ter a certeza se o que os alunos aprendem é “aritmética simbólica” ou “álgebra”, tornando-se mais turva a distinção entre as duas.

Em relação ao uso da tecnologia no ensino da álgebra, Ponte (2006) coloca algumas questões: (i) Quando deve ser facultado o uso da tecnologia pelos alunos?; (ii) Com que propósito devem os alunos usar a tecnologia para confirmar os resultados já obtidos com métodos de papel e lápis ou com instrumentos de exploração?.

A tecnologia tem muitas potencialidades mas também os seus problemas.

Com a entrada da tecnologia na sala de aula, o professor dispõe de uma maior diversidade de atividades e tarefas que pode propor aos alunos e que requerem capacidades relacionadas com o pensamento matemático: investigação e exploração; resolução de problemas, modelação e simulação, discussão, jogos e trabalho de projeto.

Quanto à investigação e exploração, a tecnologia permite realizar muitas experiências com diversos objetos matemáticos implicando a capacidade de observação, o espírito crítico, a formulação e teste de conjecturas, a criação de argumentação convincente e o desenvolvimento do raciocínio matemático.

No que se refere à resolução de problemas, a tecnologia permite o desenvolvimento desta competência por parte dos alunos, proporcionando novas estratégias e a resolução de alguns problemas que de outro modo seria exaustivo. Com a tecnologia é possível fazerem-se abordagens numéricas e iterativas ou de natureza gráfica sem necessidade de cálculo ou álgebra, o que se torna relevante para os alunos com dificuldades ao nível do cálculo algébrico que não ficam privados de progredir na matemática. Por exemplo, a folha de cálculo permite encontrar respostas de uma forma mais simples e natural, para problemas que envolvem sequências tornando a sua resolução possível a alunos que ainda não estudaram este tema. A construção de uma sequência de valores que traduz o fenómeno em estudo possibilita aos alunos uma resolução do problema. Os recursos tecnológicos ajudam também a estruturar problemas que envolvem grandes quantidades de dados e de cálculos, como é o caso de muitos dos problemas de otimização, por exemplo. Os alunos poderão estudar diversos cenários e explorar todas as possibilidades da situação para depois decidir qual a solução mais aconselhável (Ponte & Canavarro, 1997).

Relativamente à modelação e simulação, a tecnologia permite explorar, de forma simples e eficaz, modelos matemáticos que sem ela seria inacessível aos alunos. Para isso podem ser usados programas de gráficos de funções, de modelação, de manipulação simbólica e a folha de cálculo e as situações podem ser tratadas com mais realismo. Com a tecnologia na sala de aula, o trabalho com qualquer tipo de valores numéricos não levanta obstáculos, os alunos podem identificar quaisquer variáveis e parâmetros que influenciam o modelo e procurar as suas relações sem se preocuparem com a manipulação simbólica. A conjugação das múltiplas representações

possibilitadas pela tecnologia favorece a análise e a interpretação dos resultados proporcionados pela manipulação do modelo em causa. Este fator é importante uma vez que diferentes representações de uma ideia destacam diferentes aspetos permitindo uma análise mais completa da situação em estudo. Ao tirar vantagem desta possibilidade, os alunos ficam livres para experimentar diversos cenários de uma mesma situação, para testar a razoabilidade do modelo, aperfeiçoá-lo, usá-lo para fazer previsões e para tomar decisões. Com a tecnologia, os alunos podem construir o modelo a partir de um conjunto de dados, solicitar à tecnologia que encontre o modelo que melhor se ajusta a um conjunto de dados e explorar uma situação usando para isso uma simulação previamente programada (Ponte & Canavarro, 1997).

“A utilização do computador e da calculadora proporcionam um ambiente de trabalho que estimula o desenvolvimento da discussão, que pode ocorrer entre os alunos num grupo de trabalho, entre diversos grupos da turma, ou entre a turma inteira e o professor.” (Ponte & Canavarro, 1997, p. 12)

O trabalho de grupo com a tecnologia é favorável ao surgimento de oportunidades de discussão e comunicação e contribui para o desenvolvimento do espírito de cooperação entre os alunos, pois a estratégia de resolução deve ser definida por todos os elementos do grupo antes de passarem à utilização da tecnologia. Esta torna viável a exploração de alternativas e os resultados obtidos devem ser interpretados para se chegar a uma conclusão comum.

Também a interação entre os diferentes grupos da turma é promovida e estas discussões servem para criar consensos, construir generalizações, visar a exploração de ideias interessantes e aprofundar alguma ideia ou noção matemática.

A utilização dos jogos no ensino da Matemática é também favorecida pela tecnologia. Esta possibilita a criação de jogos de diversos tipos que motivam os alunos e que permitem o desenvolvimento de importantes ideias matemáticas.

As TIC contribuem para facilitar e melhorar a qualidade do trabalho de projeto podendo ter um papel decisivo na concretização de parte ou da totalidade das tarefas do projeto, auxiliando quer na obtenção de informação, no estudo estatístico de uma situação, na modelação de um determinado fenómeno, na exploração de uma ideia ou na apresentação de resultados.

A folha de cálculo na resolução de problemas algébricos

Fey (1991) refere que o desenvolvimento do conceito de variável pelos alunos pode ser promovido significativamente pela utilização da folha de cálculo na construção de modelos matemáticos (Ponte & Canavarro, 1997). Segundo Sutherland (1994), o código algébrico da FC suporta a formulação e implementação das relações necessárias para a resolução dos problemas. Este código é o primeiro meio de expressão das ideias matemáticas dos alunos; só depois é que conseguirão expressá-las em linguagem formal da matemática. Com a utilização da FC, os alunos compreenderão a utilidade e a importância da notação formal algébrica, pois o funcionamento desta ferramenta baseado em células e em fórmulas onde intervêm células, estimula os alunos a

pensar em variáveis e em expressões compostas pelas mesmas, justificando assim a importância da utilização de notação específica.

Nesta linha de pensamento e, acreditando e observando evidências de que os ambientes computacionais podem ajudar a superar as dificuldades e a resistência ao simbolismo algébrico, Rojano (1996) desenvolveu alguns projetos de investigação ligados ao desenvolvimento da Álgebra em ambientes de folha de cálculo que foram motivados pela constatação das dificuldades dos alunos na utilização de métodos algébricos aquando a resolução de problemas. Esta investigadora tomou como ponto de partida algumas perspetivas históricas do pensamento algébrico que passam por: (i) o risco de se dar ênfase a uma Álgebra apenas sintática e manipulativa sem prévia construção de significados para os símbolos algébricos; (ii) a importância de trabalhar com problemas que desafiem o conhecimento adquirido pelos alunos; (iii) a importância de não negar o conhecimento prévio dos alunos e os seus métodos e competências, por mais primitivos e informais que sejam. Esta última ideia é utilizada quando as estratégias dos alunos são o ponto de partida para aprenderem a sistematizar e a generalizar os métodos de resolução de problemas.

Já em 1994, Dettori descreveu a sua experiência com a FC na aprendizagem da álgebra. Ela introduziu esta ferramenta como um recurso para resolver problemas que envolviam muitos cálculos e que relacionavam os dados iniciais com os resultados intermédios, com o intuito de obter as soluções do problema pela análise dos resultados numéricos apresentados. Esta investigadora considera que os conceitos de variável e função são os apropriados para a ambientação à FC na resolução de problemas onde estão envolvidos.

No entanto, Dettori, Lemut e Netchitailova (1994) alertaram que antes de fazer uma análise do desempenho dos alunos na resolução de problemas algébricos é imprescindível compreender bem o que é a álgebra e que álgebra se encontra embutida num ambiente de folha de cálculo.

Compreender a álgebra em si, implica analisar a relação entre a aritmética e a álgebra, as suas principais funções e a relação da álgebra e da álgebra escolar. Compreender que álgebra se encontra embutida num ambiente de folha de cálculo implica pensar nos objetos algébricos e nos seus correspondentes utilizados na folha de cálculo, no pensamento algébrico e no pensamento na FC, nos métodos de resolução algébrica e nos métodos de resolução da FC.

Por isso, Ponte e Canavarro deixam algumas questões: (1) qual é, para os alunos, a natureza de um célula?; (2) a interação com a folha de cálculo promove a generalização? (3) como se transfere a notação da folha de cálculo para a notação matemática tradicional algébrica?.

Com o intuito de se tentar dar resposta a estas perguntas, Dettori (1994) e Rojano (1996) explicaram como decorreram as experiências no ensino da álgebra com a FC na resolução de problemas.

Na investigação de Dettori (1994), durante a realização da tarefa, os alunos foram estimulados a construir uma tabela na FC com base nas suas experiências de construção de tabelas com papel

e lápis. Para iniciarem a resolução dos problemas propostos, os alunos começaram por fazer uma tabela de duas colunas, pedindo ao computador para calcular o valor das expressões algébricas por eles introduzidas (ou seja, as chamadas fórmulas, usando a linguagem desta ferramenta), utilizando o endereço da célula ao invés de um número, situação que teve de ser motivada pelos professores. Este facto de associar um nome àquilo que é um número é muito importante, uma vez que, apesar de ainda longe do conceito de variável algébrica, este é o primeiro passo dado em direção à possibilidade de fazer representações simbólicas de quantidades numéricas. Após este passo, é necessário completar a tabela com o número de casos pretendidos, o que requer a automatização da tabela. Este processo pode ser realizado de diversos modos nas diferentes colunas da tabela: na primeira coluna, os alunos sabem quais os números a obter e, por isso, é necessário encontrar explicitamente a relação entre os mesmos; na segunda coluna, os alunos sabem quais as operações que necessitam de realizar, mas não sabem os números que vão obter. Quando os alunos passam por estas fases obtêm uma tabela numérica (só se vêem números) que corresponde à tabela de relações funcionais (na qual se podem visualizar as fórmulas). A primeira tabela é a criada pelos discentes depois de escreverem as fórmulas ou fazerem “Copy Paste”; a segunda não é, geralmente, utilizada pelos alunos, mas deve ser solicitada pelo professor para facilitar a visualização e perceção do conjunto das relações funcionais que ligam os dados do problema às células da FC.

Dettoni realça que os nomes das células da primeira coluna da tabela não são variáveis algébricas, mas representam números produzidos por cálculos iterativos e que no sistema de referência “A1”, em cada coluna apenas uma fórmula é copiada embora apareçam diferentes expressões, pelo que considera as fórmulas da segunda coluna apenas como expressões aritméticas. Esta investigadora ainda destaca que uma fórmula ou um conjunto de fórmulas numa FC assume um significado apenas operativo se se referirem a valores numéricos explicitamente expressos, enquanto que na Álgebra, uma fórmula tem um significado por si só.

Nestes ambientes, Rojano (1996) também ensinou os alunos a fazerem uma abordagem algébrica da FC uma vez que a sua utilização envolvia a resolução de problemas usando estratégias algébricas. Isto é, utilizando estratégias em que o aluno trabalha a partir do desconhecido ou de uma incógnita e trabalha com ela para encontrar a solução do problema. Assim, na FC o desconhecido é representado por uma célula (é como se fosse a incógnita de uma estratégia algébrica); outras relações matemáticas são expressas em função do desconhecido; quando o problema está representado em linguagem simbólica da FC, os alunos podem variar o desconhecido e copiar as regras ou alterar o número da célula que o representa (com papel e lápis, corresponderia à resolução de equações); a fórmula introduzida na FC gera imediatamente um número, apesar de o utilizador poder querer fazer aparecer a fórmula.

Desta forma, Rojano (1996) concluiu que o recurso à FC proporciona aos alunos um ambiente de trabalho agradável e estimulante na resolução de *word problems*. Estes são designados pela investigadora, por problemas de palavras que pressupõem representar a incógnita através de uma célula, exprimir o problema em termos dessa incógnita e fazer variar a incógnita para encontrar a

solução. Segundo as suas investigações, este *software* pode favorecer uma maior compreensão das relações de dependência entre variáveis; podem ser feitas as tentativas que forem necessárias verificando a sua solução e estratégia (introduzir a regra, replicá-la,...) sem qualquer julgamento e sem precisarem de ajuda de outros; os alunos podem progredir mais algebricamente no sentido em que desenvolvem a capacidade de definir estratégias; tomam consciência do papel da variável na resolução de problemas e da sua escolha, da relação de interdependência entre as variáveis (desconhecidos) e do trabalho com quantidades desconhecidas a fim de encontrar o valor numérico que dá resposta ao problema, sendo a base da diferença entre a variação do desconhecido na FC e a estratégia informal de tentativa e erro baseada numa experiência numérica no mundo da aritmética.

Para Dettori (1994), o professor tem um papel fundamental em ajudar os alunos a abstraírem-se da estrutura comum das expressões numéricas calculadas de modo a obterem a expressão geral que não pode ser imediatamente utilizada na FC, mas que é um primeiro passo em direção à modelação algébrica do problema. Deste modo, a FC oferece ao professor a oportunidade de introduzir o processo de abstração da modelação algébrica que, no entanto, necessita de ser desenvolvida, auxiliando-se da função da folha de cálculo “*visualizar todas as fórmulas*”. Assim, para que se registre o desenvolvimento do pensamento algébrico, é imprescindível uma intervenção mais aprofundada do professor para com os seus alunos; é necessário existir uma estimulação à generalização da estratégia de resolução dos problemas. Com este trabalho frequente, os alunos conseguirão estender a estratégia a outros semelhantes.

A recolha de evidências na investigação de Rojano (1996) é iniciada com dois problemas que visavam o encorajamento dos alunos a fazerem a passagem do pensamento sobre um objeto específico para um genérico. Só posteriormente é que os alunos trabalharam com *word problems*; inicialmente, sentiram dificuldades em aceitar a ideia de trabalharem com o genérico (desconhecido), para o qual tiveram de criar estratégias que podem passar por calcular uma aproximação à variável, escrevendo um número numa célula que representa essa variável.

Assim, Rojano diz que na primeira fase da investigação em que os alunos tomaram contacto com a FC, a maioria dos alunos não raciocinou espontaneamente em relação à procura da fórmula geral, tendo havido necessidade de os orientar. O ambiente da FC ajudou os alunos a passarem do específico para o geral, quer em termos de variável quer das relações matemáticas expressas nos problemas. De entre as estratégias definidas por estes alunos existem as informais não algébricas (em que o aluno trabalha do conhecido para o desconhecido), que coincidem com as dos alunos menos motivados e mais resistentes em utilizar métodos algébricos e simbolismo e, as que revelam uma maior aproximação algébrica. Nesta última situação, os alunos começam a utilizar a FC para expressar as suas ideias mais imaturas e validar as suas conjeturas, vendo esta ferramenta muito útil na resolução dos problemas. Rojano concluiu que os alunos progrediram no sentido em que começaram a proceder mais algebricamente: tomaram consciência da relação interdependente entre variáveis e sentiram a necessidade de escolher uma variável para variar e de trabalhar com uma determinada quantidade de modo a encontrar o seu valor numérico

mediante as condições do problema. Estas características são aquelas que marcam a diferença entre a relação da variável num ambiente de FC e a estratégia informal de tentativa e erro baseada na experiência numérica da Aritmética.

Todas as fases de utilização da FC para resolver problemas evidenciaram algumas das potencialidades da FC como facilitadora de manipulação de grandes quantidades de números e fórmulas, com realce para os aspetos dinâmicos e automática atualização dos cálculos.

Rojano (1996) afirma que é muito importante propor aos alunos a resolução de problemas no ensino da álgebra como um ponto de partida e não como um fim, sugerindo que se considerem os processos de mudança que intervêm na passagem do pensamento aritmético para o pensamento algébrico. A investigadora apela à reflexão sobre a forma como a álgebra é ensinada e sobre o papel que a resolução de problemas tem no desenvolvimento do pensamento algébrico, defendendo a possibilidade de iniciar os alunos na álgebra com este tipo de atividades e assim poder recuperar estratégias pré-algébricas e métodos informais dos alunos. Também Dettori (1994), ao referir-se à resolução de problemas algébricos comenta que resolvê-los não tem como principal intuito encontrar a sua solução mas sim aprender a utilizar as ferramentas algébricas. Por exemplo, a estratégia de tentativa e erro pode ser evocada pela variação da variável na FC. Segundo Dettori (1994), existe uma relação dialética entre duas componentes do Pensamento Algébrico: a puramente sintática, que diz respeito ao desenvolvimento da manipulação algébrica, e a semântica que se refere à sua utilização na modelação e resolução de problemas. Ambas evoluem a par, cujos pormenores são observados ao nível do pensamento individual e ao nível histórico da evolução.

Potencialidades e limitações da folha de cálculo na aprendizagem da Álgebra

Qualquer experiência desenvolvida em sala de aula com recurso a qualquer *software* requer um período de familiarização com o mesmo.

A FC é um *software* que não requer o conhecimento de uma linguagem de programação. Esta ferramenta utiliza-se para mostrar um conjunto de valores e as suas relações em qualquer problema ou conteúdo numericamente. Identificando os valores e desenvolvendo fórmulas que os relacionem, ajudam os alunos a compreender os algoritmos usados na sua comparação e os modelos matemáticos usados para descrever conteúdos. Com a utilização da FC, os alunos ficam mais disponíveis para desenvolverem os métodos de resolução dos problemas e o seu desempenho melhorou por terem sido libertados de cálculos e manipulações algébricas e por serem capazes de dar significado às situações problemáticas (Leung, 2004).

Para Dettori (1994), com a utilização da FC corre-se o risco de manter os alunos afastados do raciocínio de um modo declarativo, o que pode ser, parcialmente evitado usando a função da FC “visualizar fórmulas” quando se escrevem as relações funcionais entre os dados e os resultados parciais.

Também refere que a operação “*Copy Paste*” pode dar origem a problemas, dado que após a modificação de uma fórmula todas as restantes células em que a fórmula foi previamente copiada permanecem inalteradas. Desta forma, torna a FC propensa a erros, uma vez que o utilizador tem que voltar a copiar as fórmulas modificadas ao longo da tabela.

A utilização da FC pode ajudar a aproximar os alunos da álgebra como a distanciar-se dela. A diferença está na sábia intervenção do professor.

Existem alguns efeitos enganosos cuja origem pode ser o uso descontrolado desta ferramenta, tais como: (i) o reforço de aspetos aritméticos na resolução do problema; (ii) o retardar da necessária quebra concetual entre a aritmética e a álgebra; (iii) a penalização do esforço dos alunos na generalização dos problemas e na definição das variáveis; (iv) a procura de soluções dos problemas considerando apenas as tabelas numéricas; (v) a ativação de estratégias de pensamento que são essencialmente casuais ou focadas em tentativa e erro. Estas são consequências que advêm pelo facto de a FC lidar essencialmente com números ou endereços de números e funções; de nenhuma variável algébrica ou relação poder ser diretamente manipulada pela FC, sendo feitas apenas atribuições às mesmas. O mais importante do conhecimento algébrico (do texto às equações, das equações à sua resolução através da manipulação simbólica, do desconhecido (incógnita) ao conhecido) não está realmente envolvido nas estratégias de resolução de problemas com a FC nem existe a possibilidade de uma representação algébrica completa do problema a solucionar (Dettori, et al., 1994).

Uma importante metodologia de sala de aula são a criação de momentos para confronto de resultados e discussão de estratégias que podem levar a erróneas interpretações matemáticas quando é baseada em apenas tabelas criadas na FC. Uma comparação entre pares de resultados calculados pode ser assumida como uma metodologia correta com o intuito de estabelecer uma equivalência de relação, mas pode levar os alunos a pensar que é inútil concentrar a sua atenção na função transformadora da álgebra, afastando-os da essência do equivalente algébrico que é a possibilidade de transformar uma equação ou fórmula noutra com base em regras precisas e relações semânticas.

Com a utilização da FC, o processo de modelação é ativado mas a construção do modelo é apenas parcialmente algébrico e não exige qualquer manipulação algébrica. No entanto, Dettori et al (1994) enfatizam que uma orientação atenta do professor poderá atingir efeitos positivos de natureza cognitiva e metacognitiva, que passam por (i) introduzir o conceito de variável através de um processo de abstração; (ii) distinguir entre variáveis e parâmetros; (iii) aprender a sintetizar funções e fórmulas que expressam relações entre as quantidades envolvidas num dado problema que representa a construção de blocos de modelos algébricos; (iv) generalizar a estratégia de resolução de um dado problema a outros do mesmo tipo; (v) introduzir o conceito de cálculo aproximado; (vi) introduzir o conceito de solução de uma equação apesar de nunca escrever ou resolver nenhuma; (vii) discutir sobre as diversas naturezas de diferentes ambientes de resolução para um mesmo problema, tais como, a aritmética, a álgebra ou a FC.

Segundo Dettori (1994), com a utilização da FC pretende-se tornar os alunos conscientes da relação entre a aritmética e a álgebra e, em simultâneo, que aprendam algumas das principais funções da álgebra, desenvolvendo competências algébricas. Da sua experiência, refere que o potencial da FC para aprender álgebra é explorado quando o professor conduz os alunos a uma reflexão sobre as diferentes formas de resolver um problema e não apenas quando os alunos resolvem simplesmente o problema com a FC. Este trabalho é imprescindível porque em ambiente de FC, as estratégias de resolução de problemas algébricos não são de natureza algébrica. No entanto, os alunos quando utilizam a FC podem reforçar as suas competências algébricas enquanto comparam diferentes metodologias de resolução de um problema - uma atividade metacognitiva.

Assim, o papel do professor continua a ser essencial quando também se trabalha em ambientes de FC. Este tem de conduzir os alunos a abstraírem-se do conceito de variável algébrica (ausente na FC), realçando as analogias das fórmulas repetidas nas diferentes linhas de uma tabela; mostrar aos alunos a forma de sintetizar equações que representam um problema, baseadas nas fórmulas usadas na FC e nos valores diretamente apresentados por elas; consciencializar os discentes da diversidade de significados do operador "=" na FC e na Álgebra - atribuição de um valor versus relação (sem esta distinção, a utilização da FC pode ser enganadora) e introduzir a generalização de problemas quando distingue variável e parâmetro.

Segundo Leung (2004), as ferramentas TIC são caracterizadas essencialmente por: (i) eficiência na manipulação matemática e comunicação; (ii) diversas representações matemáticas e, em especial, no acoplamento eficaz da representação visual com outras formas de representação e, (iii) a interatividade proporcionada entre o aluno e a matemática.

Deste modo, as TIC são um elemento fundamental na mudança cultural e não são apenas mais uma ferramenta que pode ser utilizada no processo de ensino e aprendizagem da matemática. Como Kaput (1999) disse, "o computador anuncia um novo tipo de cultura - uma cultura virtual - que difere fundamentalmente das formas culturais anteriores. Não só existe uma nova infraestrutura de representação, mas também uma exteriorização (a partir da mente humana) do processamento algorítmico geral." (Leung, 2004). Uma ferramenta TIC é, além de um artefacto, um esquema cognitivo.

Inspirados no projeto de Rojano (1996), Ponte desenvolveu em Portugal uma experiência com a FC com a qual lhe permitiu identificar algumas potencialidades desta ferramenta, mas também algumas dificuldades (Ponte, et al., 2006). Ponte diz que:

"(...) esta experiência evidencia diversas potencialidades educacionais da folha de cálculo e da tecnologia em geral, nomeadamente: libertar o estudante dos cálculos numéricos e das manipulações algébricas repetitivas, permitindo maior concentração no desenvolvimento concetual; possibilitar a expansão dos domínios concetuais da Álgebra que podem ser adquiridos em cada nível; criar um interface natural entre o mundo dos números e o da Álgebra; possibilitar representações gráficas ricas; proporcionar ambientes de trabalho em que a utilização da Álgebra surge como um procedimento normal, e não como uma exigência arbitrária na resolução de problemas significativos. (...) o software,

não faz julgamentos, e os alunos podem fazer tantas tentativas quantas queiram na procura da solução, sem que fique qualquer rasto e sem a reprovação do professor.” (Ponte, et al., 2006, p.331)

Ponte refere que estas potencialidades são uma consequência natural de vários fatores relacionados com as vivências dos alunos e, por isso, os alunos tendem a compreender as potencialidades da tecnologia, movimentando-se com facilidade num ambiente que consideram apelativo e manuseando ferramentas com que se sentem confortáveis.

Mas este investigador realça que não são só potencialidades aquando a utilização da FC no ensino da álgebra. De um modo generalizado, realça os problemas logísticos que caracterizam as escolas portuguesas e mais quatro que considera como sendo “grandes dificuldades”, que passo a nomear: (i) domínio dos professores em relação à tecnologia (dotados de características diferentes, têm que proceder a uma escolha da tarefa de acordo com os objetivos que pretendem atingir e têm que ter flexibilidade para acompanhar diferentes percursos desenvolvidos pelos alunos); (ii) a gestão do ambiente de ensino-aprendizagem na sala de aula com o computador que proporciona novas interações (o professor terá de se adaptar a este novo ambiente, às especificidades da sua sala de aula e aos seus próprios objetivos, controlando o processo de aprendizagem, os seus resultados e os significados que os alunos são supostos construir neste ambiente); (iii) a possível criação de desigualdade de oportunidades (nem todos os alunos têm computador em casa ou estão familiarizados com o seu manuseamento); (iv) a transposição da linguagem da FC para o formalismo algébrico.

Deste modo, Ponte conclui que a utilização da FC deve acontecer em momento oportuno, ser bem planeada, com objetivos bem definidos e apoiar-se em tarefas criteriosamente selecionadas, de modo a facilitar a promoção do espírito crítico dos alunos e o desenvolvimento da sua autoconfiança na resolução de problemas (Ponte, et al., 2006). A utilização educativa da tecnologia passa pelos professores que têm de reformular métodos de ensino, desenvolver atividades adequadas e alterar o seu papel na sala de aula.

Como concluem Ponte e Canavarro (1997), as novas tecnologias parecem favorecer (i) a vivência de uma atividade matemática mais significativa, na qual há lugar à resolução de problemas, à investigação e experimentação, à formulação e teste de conjecturas, à produção de conhecimento matemático por parte dos alunos; (ii) uma abordagem conceptual compreensiva, possibilitando o aprofundamento de conceitos e ideias matemáticas de outra forma inacessíveis aos alunos; (iii) uma maior ênfase no desenvolvimento de capacidades de nível cognitivo elevado, como a resolução de problemas; (iv) a melhoria geral das atitudes face à Matemática.

Capítulo III

Metodologia

No presente capítulo, apresenta-se e justifica-se a metodologia utilizada durante o decurso da presente investigação, elabora-se a caracterização do contexto de investigação (da escola, da turma onde se desenvolveu a investigação e dos grupos de alunos que constituíram os estudos de caso) e são referenciadas as técnicas utilizadas na recolha de dados.

Opções metodológicas

Estudo de natureza interpretativa

Sendo o objetivo deste estudo conhecer o desempenho dos alunos com recurso à folha de cálculo na resolução de problemas, esta investigação qualitativa baseia-se na perspetiva interpretativa, baseada na fenomenologia. Ou seja, é centrada na atividade humana que é uma experiência social em que cada um vai constantemente elaborando significado (Ponte, 1994).

Neste estudo de caso interpretativo pretende-se conhecer a realidade tal como ela é vista pelos atores que intervêm diretamente. Segundo Bogdan e Biklen (1994), as diversas formas de interpretar as experiências são acessíveis aos investigadores através da sua interação com os outros quando procuram compreender o pensamento subjetivo dos participantes nos seus estudos. Assim, o investigador tem que analisar os dados considerando também o seu próprio ponto de vista.

Também Ponte (1994), evidencia que “neste tipo de investigação o principal instrumento é o investigador, não havendo nada que substitua a sua perspicácia observadora, bem como a riqueza e pertinência das suas perspetivas de análise.” (p.14). A interpretação não é uma questão de aplicação mecânica de instrumentos mas, a sua qualidade passa pelo reforço da fundamentação teórica.

A perspetiva interpretativa é uma orientação teórica que se apoia em duas grandes correntes: na fenomenologia e no interacionismo simbólico. A primeira tem a preocupação em compreender o sentido dos acontecimentos e interações das pessoas ordinárias nas suas situações particulares. A segunda pressupõe que a experiência humana é mediada pela interpretação (os objetos, as situações e os acontecimentos não têm significado em si mesmos, sendo-lhes este atribuído pelas pessoas); que os sentidos são o resultado da interação social entre os seres humanos e que são

produzidos e alterados através de um processo interpretativo que cada pessoa vive permanentemente ao lidar com os símbolos que encontra do seu dia-a-dia (Meltzer, Petras e Reynolds (1975) citado por Ponte (1994)).

Concluindo, a investigação do tipo interpretativo preocupa-se com os processos e as dinâmicas; depende da forma decisiva do investigador; conduz-se por indução, reformulando os seus objetivos, problemáticas e instrumentos no curso do seu desenvolvimento e baseia-se numa descrição pormenorizada do contexto, das emoções e das interações sociais que ligam os diversos participantes entre si (Ponte, 1994).

Investigação de natureza qualitativa

Nesta investigação, de natureza qualitativa, a investigadora privilegiou a compreensão das inter-relações entre tudo o que existe e tratou a singularidade dos casos e contextos individuais como importantes para a compreensão (Stake, 2009). Ou seja, em investigações desta natureza, o investigador tem de prestar atenção a cada pormenor do ambiente que o rodeia, pois tudo pode ser importante e contribuir para uma melhor compreensão dos casos. Neste tipo de investigação os investigadores são não intervencionistas, ou seja, durante o trabalho de campo, procuram não chamar a atenção para si próprios ou para o seu trabalho, procurando evitar situações específicas para testar as suas hipóteses.

Segundo Bogdan e Biklen (1994), a investigação qualitativa é caracterizada do seguinte modo: (1) a fonte direta dos dados é o ambiente natural, sendo o investigador o principal instrumento; (2) descritiva; (3) os investigadores deste tipo de estudos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados; (4) os investigadores tendem a analisar os dados de forma indutiva; e, (5) o significado é de extrema importância.

Quanto à primeira característica, a investigadora deste estudo coincidia com a professora da turma e, por isso, conhecia bem os participantes, efetuando a recolha de dados utilizando equipamento tecnológico e bloco de apontamentos e lápis, completando-os com a informação obtida do contacto direto do dia-a-dia. Todos os materiais registados mecanicamente foram revistos na sua totalidade pela investigadora. Uma vez que esta trabalhava na escola onde foi efetuado o estudo há já seis anos, o contexto da investigação já era conhecido, conseguindo assim compreender melhor as ações dos participantes. Para Bogdan e Biklen (1994), "(...) as ações podem ser melhor compreendidas quando são observadas no seu ambiente natural de ocorrência." (pp. 48).

Relativamente ao facto de ser uma investigação descritiva, baseia-se no facto de os dados recolhidos serem em forma de palavras ou imagens e não de números. Por isso, os resultados escritos contêm citações baseadas nos dados para ilustrar e sustentar o estudo que incluem transcrições de entrevistas, fotos, vídeos, documentos pessoais, relatórios de alunos, entre outros. Assim, os dados não são tratados quantitativamente; a investigadora analisou-os na sua riqueza, respeitando, tanto quanto possível, a forma em que estes foram registados ou transcritos.

Uma vez que compreender os processos de utilização da folha de cálculo e a forma como ajudou os alunos no desenvolvimento do pensamento algébrico eram os principais objetivos deste estudo, é assim evidenciada a terceira característica desta investigação onde a principal preocupação se centra em procurar o “como”, os “porquês” e encontrar uma descrição e interpretação holística dos processos efetuados pelos alunos.

A análise dos dados é concretizada de forma indutiva, ou seja, só à medida que os dados forem sendo recolhidos, examinados e agrupados, é que é possível afunilar as questões mais importantes do estudo.

Neste tipo de estudo, a investigadora preocupou-se com as perspetivas dos participantes no que dizia respeito ao seu modo de proceder e pensar, questionando-os e solicitando descrições das suas ações e justificações de determinados procedimentos.

Também Stake (2009) qualifica as investigações qualitativas pela observação naturalista dos investigadores como sendo o principal meio de conhecimento. Quando não conseguem ver por si próprios, perguntam a outros intervenientes no estudo e quando existem registos formais, debruçam-se sobre esses documentos. No entanto, a maioria favorece a captação pessoal da experiência para que a partir do seu envolvimento, possam interpretá-la, reconhecer os seus contextos, meditar sobre os seus variados significados, efetuando um relato naturalista e experiencial. Desta forma os investigadores qualitativos procuram preservar as múltiplas realidades, as diferentes perspetivas e até contraditórias do que acontece; procuram registar com o maior rigor possível as suas observações preocupando-se em obter a sua validação através de procedimentos de triangulação e interpretam os significados. Deste modo, está-se perante uma investigação subjetiva que é valorizada por ser um elemento essencial da compreensão, não sendo considerada sinal de imperfeição.

Modalidade de estudo de caso

Esta investigação é também caracterizada como um estudo de caso, pelas suas características, objetivos e natureza dos resultados finais que se pretendem obter; é particularística, descritiva, heurística e indutiva.

Segundo Ponte (1994), o estudo de caso é caracterizado como um estudo que visa conhecer uma entidade bem definida (um programa, uma pessoa, uma instituição, um curso, uma disciplina, um sistema educativo, uma política ou qualquer outra unidade social) e tem como objetivo compreender em profundidade o “como” e os “porquês” dessa entidade, evidenciando a sua unidade e a sua identidade próprias. Assume-se como particularística, ou seja, debruça-se sobre uma situação específica que se supõe ser única em muitos aspetos, procurando descobrir o que há nela de mais essencial e característico para se poder contribuir para a compreensão global do fenómeno de interesse.

Em estudos deste tipo, a atenção centra-se nesse caso, que é um entre outros. Um caso, segundo Stake (2009), é uma coisa específica, uma coisa complexa e em funcionamento, é um sistema

integrado. Uma criança, um professor, um programa inovador, todas as escolas de um determinado local, são exemplos de casos passíveis de estudo. Considerando esta diversidade, Stake classifica os estudos de caso como: (i) estudo de caso intrínseco, (ii) estudo de caso instrumental e (iii) estudo de caso coletivos. No primeiro tipo, o caso é previamente selecionado por existir um interesse específico pelo mesmo pois com ele se aprende (há um interesse intrínseco) e também porque com ele se compreende outros casos ou um problema em geral. No segundo, o caso é selecionado sem que haja qualquer interesse específico por ele; o objeto de estudo tanto poderia ser o selecionado como outro qualquer. Nestes estudos de caso há um problema de investigação, uma perplexidade, uma necessidade de compreensão global, sentindo-se que se pode alcançar um conhecimento mais profundo se se estudar um caso particular. Nesta situação, o estudo de caso tem intenção de compreender outra coisa e não o caso em si. Se em vez de um caso, forem selecionados mais do que um com o mesmo fim, e existindo uma coordenação entre os vários estudos individuais, está-se perante um estudo de caso coletivos.

Mediante a descrição anterior, a presente investigação classifica-se como estudo de caso intrínseco. O caso em estudo é uma turma na qual, a investigadora observou a forma como os alunos utilizavam a folha de cálculo na resolução de problemas algébricos. Assim, a investigadora pretendeu alcançar mais do que apenas a compreensão da turma em específico.

Para Ponte (1994), os estudos de caso têm um forte carácter descritivo, não experimental e são de natureza empírica. Primeiro, o investigador não pretende alterar a situação, mas compreendê-la tal como ela é, apoiando-se numa descrição factual, literal, sistemática e o mais completa possível do objeto de estudo de forma a compreender a entidade. Segundo, recorre-se a este estudo quando não se tem controlo sobre os acontecimentos e não é possível ou desejável manipular as potenciais causas do comportamento dos participantes. Terceiro, o estudo decorre no contexto real da entidade.

Conforme o propósito dos estudos de caso, Ponte (1994) ainda os classifica em exploratórios, descritivos e analíticos. Os de carácter exploratório servem para obter informação preliminar acerca do respetivo objeto de interesse; os descritivos, pretendem descrever, ou seja, relatar “como é” o caso em consideração; e, os analíticos pretendem problematizar o seu objeto, construir ou desenvolver uma nova teoria ou confrontá-la com a já existente. Em Educação Matemática cabe qualquer um destes tipos de estudo de caso (Ponte, 1994).

Relativamente à presente investigação, caracteriza-se como um estudo de natureza qualitativa, na modalidade de estudo de caso instrumental, com características descritivas e analíticas.

Nos trabalhos desta natureza, os investigadores devem ter em consideração questões de ordem ética, essencialmente relacionadas com o consentimento informado dos participantes no estudo, bem como a manutenção do anonimato dos mesmos. Ponderando este aspeto, antes da realização deste estudo, a investigadora solicitou autorização ao Diretor do Agrupamento de Escolas onde decorreu a investigação, sendo-lhe facultada a informação sobre a finalidade do mesmo, os seus objetivos, o tipo de dados a recolher e a forma como se processaria essa recolha. Foi ainda solicitada autorização aos pais e encarregados de educação dos alunos que

participaram na investigação, facultando-lhes a mesma informação que foi dada à Direção do Agrupamento de Escolas. Quanto ao anonimato das entidades intervenientes no estudo, escola e alunos, o mesmo foi sempre mantido durante todo o trabalho de investigação.

Contexto de investigação

Caracterização da escola

A investigadora desenvolveu o seu estudo numa escola básica com 2.º e 3.º ciclos do distrito de Setúbal, onde a própria também trabalha como professora, que é a sede de um Agrupamento de Escolas. Esta escola recebe aproximadamente um milhar de alunos distribuídos por cerca de 40 turmas entre o 5.º e o 9.º anos de escolaridade, sendo um terço das turmas de 3.º ciclo. Numa maioria, os alunos são provenientes de agregados familiares com nível socioeconómico médio-baixo ou baixo e com nível de escolaridade básico. Esta escola entrou em funcionamento em 1984 e, atualmente, como sede de agrupamento, integra turmas desde o Jardim de Infância até ao 3.º ciclo de escolaridade.

Tem um corpo docente muito estável de cerca de 120 professores e é uma escola com recursos educativos bastantes razoáveis, nomeadamente ao nível da biblioteca e de salas com recursos informáticos e tecnológicos. Todas as salas dispõem de um projetor de vídeo e algumas estão equipadas com quadro interativo e um computador. Duas das salas estão equipadas com computadores, numa das quais funcionam as turmas dos Cursos de Educação e Formação e na outra, as aulas de TIC e de outras disciplinas, em especial as de Matemática, sempre que requisitada pelos professores. Uma das salas funciona como Laboratório de Matemática nas quais decorriam, maioritariamente, aulas desta disciplina. Estava equipada com quadro interativo, um computador, projetor de vídeo e material didático utilizado para o ensino da Matemática.

Esta escola ingressou no Projeto MINERVA (Meios Informáticos no Ensino - Racionalização, e Atualização) nos finais dos anos 80 e desenvolveu vários projetos na área da integração curricular das tecnologias de informação e comunicação.

Também esteve integrada nos projetos “Plano de Ação para a Matemática” e “Plano da Matemática II”, desde 2006/2007 a 2011/2012, promovidos pelo Ministério da Educação, durante os quais a escola promoveu diversas atividades com professores que os ajudavam a desenvolver competências profissionais e a refletir sobre as suas práticas; foram ainda dinamizadas atividades que promoviam o desenvolvimento das competências transversais da matemática nos alunos a partir de tarefas que implicavam um trabalho estruturado em sala de aula, de atividades de investigação e da participação em jogos quer de escola quer distritais quer nacionais e até internacionais.

No ano letivo em que foi feita a recolha dos dados para este estudo (2011/2012), a escola integrava o projeto pelo seu último ano, na qual todas as turmas estavam envolvidas, incluindo a

turma na qual foi realizada a investigação. Esta sempre foi objeto de análise desde o primeiro ano do projeto “Plano da Matemática II”, do qual a investigadora era coordenadora.

Além destes projetos ligados à Matemática, neste ano letivo de 2011/2012, a escola estava envolvida noutros projetos quer nacionais quer locais, tais como: Re/Animar a Escola, Linguagem e Comunicação, Promoção e Educação para a Saúde, Desporto Escolar, Plano Nacional da Leitura e Rede de Bibliotecas Escolares e Disciplina na Escola Vivência Enriquecida (DEVE).

Caracterização da turma

A turma que constitui o caso em estudo foi selecionada tendo em conta os seguintes critérios: facilidade de acesso ao caso e o contexto.

Foi uma turma de fácil acesso uma vez que a investigadora era docente desta turma e já conhecia uma grande parte dos elementos da mesma porque tinha lecionado os 7.º e 8.º anos a mais de metade dos alunos nos anos transatos e o 7.º ano a uma minoria (alunos que ficaram retidos no 9.º ano).

A turma era uma das três turmas de 9.º ano da escola, constituída por vinte e quatro alunos, treze do sexo feminino e 11 do sexo masculino. A idade destes alunos variava entre os catorze e os dezoito anos, sendo a média das idades 14,8 anos. Seis dos alunos encontram-se a repetir o 9.º ano de escolaridade e não existem alunos com necessidades educativas especiais.

Uma vez que nesta escola, as turmas deste nível de escolaridade usufruem de apoio com a professora titular da turma, a investigadora pensou que esta era mais uma oportunidade de poder realizar entrevistas aos alunos participantes sem os obrigar a estar na escola em tempos fora do seu horário. A este apoio recorrem os alunos que se encontram a repetir o 9.º ano e os sinalizados pela professora quando deteta dificuldades em determinados conteúdos e/ou áreas da matemática. De um modo geral, esta turma apresenta um bom aproveitamento, existindo um grupo de quatro a cinco alunos que se destacava com bons resultados (acima dos 90%) nos instrumentos de avaliação e nas competências transversais da matemática. Era um grupo de alunos interessados, empenhados e trabalhadores, embora alguns ainda revelassem dificuldades; estavam habituados a trabalhar com a tecnologia em sala de aula desde o 7.º ano de escolaridade e aprenderam alguns métodos de organização, trabalho e de estudo impressos pela professora no ano transato, e que mantiveram durante este ano. No final do 1.º período, os resultados traduziam-se da seguinte forma: 13% dos alunos foram avaliados com nível dois (não existem alunos com nível um), 29% com nível três, 38% com nível quatro e 21% com nível cinco. Em meados do 2.º período foi integrada na turma uma aluna natural do Brasil. No final do 3.º período, um dos alunos ficou retido ao abrigo do ponto 9, artigo 22º da Lei 39/2010 de 2 de setembro (falta de assiduidade). No final do ano letivo o aproveitamento geral da turma desceu ligeiramente: 19% dos alunos foram avaliados com nível dois cujo perfil estava muito aquém do pretendido de um aluno no final de 3.º ciclo, 52% com nível três, 13% com nível quatro e 22% com nível cinco.

Durante o 1.º período, a turma realizou três tarefas com recurso a *applets*, folha de cálculo e ao *software* de Geometria Dinâmica *GeoGebra*, resultando daí os relatórios correspondentes, mas que não fazem parte deste estudo. Durante as restantes aulas até ao final do ano, a professora manteve sempre esta metodologia de resolução de problemas com recurso à tecnologia, aliada à resolução de outros com recurso ao lápis e papel e “prevendo momentos para confronto de resultados, discussão de estratégias e institucionalização de conceitos e representações matemáticas” (Ponte, et al., 2007).

Os alunos participantes: caracterização, opções e critérios de seleção

Para a realização da intervenção didática, a professora organizou a turma em doze grupos de dois elementos cada que foram criados pela docente. Para este facto, esta teve em consideração os seguintes critérios: os alunos participantes no estudo integrarem os mesmos grupos de trabalho, as diferentes capacidades e competências matemáticas desses mesmos alunos, o empenho, o interesse, o comportamento, a afinidade entre os mesmos e a responsabilidade de cumprir com o definido no início do estudo.

Nos parágrafos seguintes, a investigadora apresenta uma caracterização de cada um dos três grupos envolvidos neste estudo.

Grupo 1: Este grupo era constituído por dois alunos, um de cada sexo. O rapaz tinha um aproveitamento razoável, equivalente ao nível três; tinha sido aluno da professora no ano transato (8.º ano) no qual iniciou o primeiro contacto com a FC, bem como com outras ferramentas tecnológicas auxiliares no processo ensino aprendizagem. Era um entusiasta com atividades do quotidiano (por exemplo, registo de resultados de jogos e estatística relacionados com os mesmos) e com as tarefas propostas pela professora que solicitavam a utilização de ferramentas tecnológicas. A rapariga tinha um aproveitamento bom, era muito responsável, trabalhadora, metódica, empenhada e exigente nas aprendizagens que tinha de realizar. Foi aluna da professora desde o 7.º ano de escolaridade, ano em que iniciou o seu contacto com a FC e as ferramentas tecnológicas na resolução das tarefas.

Grupo 2: Este grupo era constituído por dois alunos com um aproveitamento razoável, equivalente ao nível três que foi resultado de um trabalho continuado desde o 8.º ano com a mesma professora; foi neste ano que iniciaram o primeiro contacto com a FC, bem como com outras ferramentas tecnológicas auxiliares no processo ensino aprendizagem. Eram alunos que participavam ativamente nas tarefas propostas e sempre que alcançavam os objetivos pretendidos, revelavam grande entusiasmo e sentiam nessas conquistas uma forte vontade de continuar a tentar.

Grupo 3: Este grupo era constituído por duas alunas. Uma delas tinha um aproveitamento razoável no limiar entre o nível dois e três e estava a repetir o 9.º ano de escolaridade. Já tinha tomado contacto com a FC no 7.º ano com a professora titular da turma em que se insere desenvolvendo tarefas que motivaram a utilização desta ferramenta. Revelava algumas

dificuldades em compreender os objetivos das tarefas, bem como a definição de estratégias de resolução dos problemas e a estruturação do seu raciocínio. Além destes obstáculos, revelava outros relacionados com os procedimentos e conceitos matemáticos. A outra aluna, tinha um aproveitamento bom, era responsável, interessada e dotada de um bom raciocínio, revelando facilidade na definição de estratégias na resolução de problemas. Foi aluna da professora desde o 7.º ano de escolaridade, ano em que iniciou o seu contacto com a FC e as ferramentas tecnológicas na resolução das tarefas.

Com qualquer um dos alunos, tal como fizeram Dettori et al (1994), a fase de familiarização com a FC foi feita na introdução e reforço dos conceitos de variável, funções e equações na resolução de problemas algébricos típicos. Os alunos aprenderam inicialmente a escrever na FC uma sequência de números naturais; relacionaram os termos de uma sequência do tipo $afim$ (inclui a linear e a constante) com as posições desses mesmos termos, introduzindo as fórmulas ou expressões que representavam essa relação; relacionavam também as diferentes representações de qualquer problema que envolvia funções e equações, fazendo uma análise paralela das mesmas (tabela, gráfico e expressões algébricas).

A familiarização com o ambiente de FC com estes alunos foi realizada de modo semelhante à que Dettori fez na sua investigação. Desde o 7.º ano do ensino básico, a professora estimulou a utilização do endereço da célula ao invés de um número no processo de escrita das fórmulas (ou expressões algébricas) com vista a desenvolver, nos alunos, o conceito de variável algébrica e de facilitar a compreensão e a produção das representações simbólicas de quantidades numéricas. Como diz Dettori (1994), as formas das fórmulas introduzidas mostram a capacidade de os alunos generalizarem a aritmética que lhes é mais familiar. A dependência e relação das representações tabelar e gráfica, foi outra prática a que estes alunos também se foram compreendendo e dando significado. Após a resolução dos problemas com recurso a esta ferramenta, também era exigido aos alunos o relato de todas as suas estratégias e conclusões, que eram discutidas, posteriormente, com o grupo turma.

A partir da proposta de resolução de problemas (*word problems*) com recurso à FC, os alunos foram ensinados a fazer uma aproximação algébrica a esta ferramenta, uma vez que envolve o trabalho do desconhecido para o conhecido. O desconhecido é representado por uma célula (que se pode designar por solução algébrica) e as outras relações matemáticas são expressas em função deste desconhecido (a variável). Quando o problema é expresso em linguagem simbólica da FC, os alunos fazem variar o desconhecido quer copiando para baixo as regras quer alterando o número na célula que o representa (uma aproximação algébrica com papel e lápis seria parte da resolução de uma equação). As fórmulas evidenciam os processos de resolução dos alunos. No entanto, a partir do momento em que a fórmula é introduzida na FC, um número é automaticamente calculado e é produzida uma tabela de valores numéricos (embora se possa utilizar a função da ferramenta para tornar visível as fórmulas que geram esses valores).

O trabalho que a investigadora realizou com os alunos desde que introduziu a FC no processo ensino aprendizagem teve sempre em grande consideração ajudar os alunos a fazer ligações

entre a FC e a sintaxe algébrica tradicional. De entre as tarefas desenvolvidas envolveram sequências numéricas e geométricas (de acordo com as sugestões do NCTM (2007)) e funções (introduzir uma regra e replicá-la; definir simbolicamente uma lei geral), expressões algébricas equivalentes, equações, inequações e *word problems* (Rojano, 1996).

Intervenção didática

A intervenção didática deste estudo foi realizada em temas do Programa de Matemática de 1991, em vigor, pelo último ano letivo, nesta escola que são descritos neste ponto. Além destes, também é feita uma referência à metodologia utilizada e uma análise das tarefas utilizadas para o desenvolvimento dos temas e, conseqüentemente, dos objetivos e competências.

Tema

Neste estudo pretende-se aferir as mais-valias da utilização da folha de cálculo, em ambiente de sala de aula, na forma como os alunos rentabilizam as potencialidades da FC na resolução de problemas e o tipo de estratégia utilizada quando recorrem a esta ferramenta.

Foram trabalhadas as equações de 2.º grau referenciadas no Programa de Matemática de 1991 na resolução de problemas.

Organização do trabalho

A intervenção didática consistiu na aplicação de três tarefas, durante quatro aulas de Matemática e de uma entrevista prévia a estas aulas, segundo a seguinte calendarização:

TAREFA	CONTEXTO	DURAÇÃO	DATA
Sequências geométricas <i>(adaptado de problemas de testes intermédios, de exames nacionais e de formações)</i>	Entrevista com os elementos do grupo, antes da aplicação das tarefas seguintes	90 min.	22-03-2012
A vedação do terreno <i>(adaptado de exercícios de manuais)</i>	Sala de aula - resolução do problema	90 min.	26-04-2012
	Sala de aula - apresentação e discussão de estratégias	90 min.	27-04-2012
Quadrados inscritos em quadrados <i>(adaptado de exercícios de manuais)</i>	Sala de aula - resolução do problema	90 min.	16-05-2012
	Sala de aula - conclusão da tarefa	90'	17-05-2012

Tabela 3- 1: Tarefas, contexto de aplicação e calendarização

As aulas de intervenção didática decorreram numa sala equipada com computadores, um para cada grupo de trabalho, e também na sala habitual da disciplina de Matemática que coincidia com o seu Laboratório. Os alunos realizaram as tarefas e o relatório do trabalho desenvolvido nas datas referidas e, nas aulas conseqüentes, apresentaram esse mesmo trabalho, com o intuito de proporcionar a partilha de estratégias. A partir destas, a professora institucionalizava os conceitos e conteúdos envolvidos mediante os objetivos do programa para esta unidade didática.

Nas aulas da intervenção didática foi seguida sempre a mesma dinâmica de aula. Na estruturação de cada uma delas identificam-se três momentos distintos: (1) apresentação da tarefa a realizar e distribuição do guião da mesma por aluno; (2) realização da tarefa pelos alunos, agrupados; (3) discussão, em grande grupo, dos resultados obtidos em função dos conteúdos abordados na tarefa e dos objetivos gerais e específicos a atingir com a mesma - que pôde ter-se iniciado na mesma ou na aula consecutiva. Na resolução das tarefas, os alunos utilizaram sempre a FC com facilidade pelo contacto que já tinham de tarefas e em anos anteriores com a professora titular da turma. Os momentos da resolução das tarefas com o questionamento da investigadora tornaram-se imprescindíveis para esta compreender os processos utilizados pelos alunos na resolução dos problemas, que inclui a forma como estabeleceram a relação entre a aritmética e a álgebra; as competências algébricas que foram realçadas quando os resolviam recorrendo à folha de cálculo e a fase em que recorriam à mesma; e, permitiu analisar a forma como a sintaxe da ferramenta influenciou a compreensão das representações convencionais da matemática. Para estudar estes aspetos, também foram relevantes os relatórios realizados pelos alunos que incluem as diferentes representações obtidas com a FC digitalmente, as apresentações orais das mesmas, os vídeos registados (das janelas utilizadas pelos alunos durante a realização das tarefas e das aulas propriamente ditas). No início de cada uma das aulas, a investigadora verificava se todos os computadores tinham os *softwares* necessários para a realização das tarefas operacionais e preparava-os de modo a fazer os registos de todas as ações dos participantes. No final, todos os ficheiros dos grupos foram guardados em suporte digital para serem alvo de análise, bem como os seus registos escritos.

Em algumas destas aulas observadas, a investigadora e a professora titular da turma teve o apoio da docente Cátia Salvador, deixando-a livre para a observação e registo da informação dos alunos participantes.

Tarefas

As tarefas propostas podem ser classificadas, quanto à sua natureza, como tarefas de modelação. Na seleção destas, a investigadora procurou diversificá-las quanto às estratégias que envolviam, à sua complexidade, à tipologia dos recursos necessários para as desenvolverem e aos conteúdos que envolviam, proporcionando assim diferentes experiências de aprendizagem. Distinguem-se pelos objetivos gerais e específicos e pelas competências a desenvolver pelos alunos inclusos no Currículo Nacional do Ensino Básico. No domínio temático, considerado transversal, que se

designa por Álgebra e Funções, são apontados cinco aspetos que todos os alunos devem desenvolver, tais como:

“A predisposição para procurar padrões e regularidades e para formular generalizações em situações diversas, nomeadamente em contextos numéricos e geométricos;

A aptidão para analisar as relações numéricas de uma situação, explicitá-las em linguagem corrente e representá-las através de diferentes processos, incluindo o uso de símbolos;

A aptidão para interpretar e construir tabelas de valores, gráficos, regras verbais e outros processos que traduzam relações entre variáveis, assim como para passar de umas formas de representação para outras;

A aptidão para concretizar em casos particulares relações entre variáveis e fórmulas para procurar soluções de equações simples;

A sensibilidade para entender e usar as noções de correspondência e de transformação em situações concretas diversas.” (ME-DEB, 2001, p. 66)

Relativamente ao ciclo em que esta turma se inseria de entre os diversos tipos de experiências devem ser considerados aspetos transversais da aprendizagem da matemática que são a comunicação matemática, a prática compreensiva de procedimentos e a exploração de conexões, considerando as competências específicas que passavam por:

“(i) reconhecimento do significado de fórmulas no contexto de situações concretas e a aptidão para usá-las na resolução de problemas; (ii) a aptidão para usar equações como meio de representar situações problemáticas e para resolver equações, assim como para realizar procedimentos algébricos simples; (iii) a compreensão dos conceitos de função e das facetas que pode apresentar, como correspondência entre conjuntos e como relação entre variáveis; (iv) a aptidão para representar relações funcionais de vários modos e passar de uns tipos de representação para outros, usando regras verbais, gráficos e expressões algébricas e recorrendo, nomeadamente, à tecnologia gráfica; (v) a sensibilidade para entender o uso de funções como modelos matemáticos de situações do mundo real.” (ME-DEB, 2001, p. 67)

Para o alcance destas, o currículo ainda prevê a existência de oportunidades de utilizar recursos de natureza diversa, nos quais se incluem a utilização das tecnologias e, referindo a folha de cálculo, na resolução de problemas, nas atividades de investigação e em projetos.

Assim, os objetivos gerais das tarefas propostas eram: ler e interpretar representações simbólicas, pictóricas, tabelas e gráficos, e apresentar adequadamente informação em qualquer uma destas formas de representação; traduzir informação apresentada numa forma de representação para outra, em particular traduzir para termos matemáticos informação apresentada em linguagem natural; elaborar e usar representações para registar, organizar e comunicar ideias matemáticas; usar representações para modelar, interpretar e analisar situações matemáticas e não matemáticas. Quanto aos objetivos específicos passavam por: representar na forma algébrica, tabelar e gráfica funções quadráticas como modelos das situações em estudo; analisar uma função a partir das suas representações; relacionar as representações algébrica e gráfica das funções estudadas.

A tarefa 1 (Anexo 1) era composta por problemas que envolviam sequências e com esta pretendia-se compreender a forma como os alunos realizavam a generalizações das mesmas, independentemente da ferramenta que utilizassem. Foi a única que não aconteceu em contexto de aula e envolvia apenas os participantes deste estudo.

As tarefas 2 e 3 solicitavam ao aluno a produção de um relatório do trabalho desenvolvido explicando todos os passos, estratégias e procedimentos utilizados, ilustrados com esquemas e imagens das tabelas e gráficos realizados na FC.

A tarefa 2 **“A vedação do terreno”** (Anexo 2) era apenas composta por duas questões com as quais se pretendia que o aluno indicasse as dimensões de um terreno em determinadas condições, obrigando o aluno a escrever a expressão algébrica que modelava o problema e a fazer a interpretação do mesmo a partir da representação tabelar e gráfica. Na aula subsequente, após a apresentação de alguns relatórios, escolhidos criteriosamente pela professora, esta formalizou a noção de parábola como uma representação gráfica de funções quadráticas; a noção de equações de 2.º grau e, como uma forma diferente de resolver o problema sem recorrer à FC, introduziu a fórmula resolvente de equações de 2.º grau a uma incógnita baseada nas estratégias dos alunos e resultados desta tarefa.

A tarefa 3 **“Quadrados inscritos em quadrados”** (Anexo 3) era composta por três questões iniciais cujo intuito era enquadrar o discente no problema e fazê-lo compreender os limites do mesmo (localização de pontos no plano, domínio do problema e cálculo do comprimento do lado do quadrado que também era lado de um triângulo retângulo, obrigando os alunos a aplicarem o Teorema de Pitágoras). A quarta questão orientava o aluno para a utilização da FC na qual tinha de construir uma tabela que relacionasse as variáveis em questão. A quinta pergunta foi colocada no sentido de levar o aluno a fazer uma síntese do raciocínio efetuado na anterior na forma de expressão algébrica. Na sexta pergunta pretendia-se que o aluno fizesse a representação gráfica na FC com o intuito de o ajudar a responder às questões subsequentes. Neste momento, o aluno já estava perante todas as representações de uma função e só tinha de as interrelacionar e interpretar. Assim, nas questões sete, oito e nove, pretendia-se que os discentes indicassem os extremos da função, pontos que verificavam as condições indicadas e escrevesse as respetivas equações. Nesta tarefa ainda foi apresentada um “Para ir mais além” no sentido de os alunos mais adiantados e competentes matematicamente pensarem e resolverem. A resolução desta tarefa foi concretizada em duas aulas consecutivas porque os alunos não o conseguiram fazer numa só, pela extensão da tarefa e dificuldades que sentiram em resolver o problema e em realizar o relatório.

A seleção das tarefas foi cuidada e criteriosa. Foram escolhidas de forma a analisar o “estado” do pensamento algébrico dos alunos e a forma como a FC influencia a resolução dos problemas e, conseqüentemente, o desenvolvimento desse pensamento.

Dados

Fontes e métodos de recolha de dados

Quando Bogdan e Biklen (1994) se referem ao termo *dados* referem-se aos materiais em bruto que os investigadores recolhem; são os elementos que constituem a base da análise que incluem materiais que os investigadores registam (transcrições de entrevistas, notas referentes às observações dos participantes, vídeos, relatórios realizados pelos sujeitos, entre outros). Os dados incluem também os elementos necessários para pensar de forma adequada e profunda acerca dos aspetos da vida que se pretende explorar.

Após cada observação, entrevista ou qualquer outra sessão de investigação, a investigadora escreveu o que aconteceu, fazendo uma descrição dos acontecimentos, atividades e conversas ocorridas para que nenhum dos pormenores possa escapar. Este relato escrito daquilo que o investigador ouve, vê, experiencia e pensa no decurso da recolha e a consequente reflexão sobre os dados do estudo, são as notas de campo. Estas devem ser detalhadas, precisas e extensivas para que o resultado do estudo seja bem sucedido.

Segundo Stake, para se efetuar uma recolha de dados significativa é, por vezes, necessário delinear um plano cujas partes essenciais são a “definição do caso, lista de perguntas de investigação, identificação dos ajudantes, fontes de dados, distribuição do tempo, despesas, relatório pretendido” (Stake, 2009, p.67).

Durante a presente investigação foi delineado um plano de recolha de dados constituído por todas as partes consideradas essenciais por Stake (2009), excetuando as despesas, que neste estudo não foram significativas. Quanto às restantes partes do plano de recolha de dados, todas elas foram contempladas no início da investigação e reformuladas ao longo da mesma, essencialmente as perguntas de investigação e a distribuição do tempo.

O investigador deve desenvolver métodos e técnicas que permitam uma recolha de dados válidos e que, posteriormente, o permitam compreender e retratar o caso. Existem técnicas comuns entre os investigadores de estudos de casos, realçando-se neste ponto as utilizadas ao longo desta investigação: observação participante e a análise documental.

A observação participante permite tomar diretamente conhecimento da perspetiva dos participantes, no seu contexto real e deste modo compreender e analisar com pormenor os processos, as dinâmicas e as perspetivas dos intervenientes. “Durante a observação, o investigador do estudo de caso qualitativo mantém um bom registo dos acontecimentos para providenciar uma descrição relativamente incontestável para análise posterior e para o relatório final” (Stake, 2009, p.78).

Nesta investigação, as observações decorreram durante a intervenção didática. Em cada uma das aulas da intervenção, a investigadora fez um registo livre dos acontecimentos sem que houvesse lugar a formulários de observação. Estes registos permitiram que fosse elaborada uma descrição

pormenorizada do caso e encontrar momentos que revelaram a complexidade única do caso em estudo.

A análise de documentos foi a outra técnica utilizada neste estudo. Os documentos analisados foram as produções dos alunos, os relatórios das tarefas, os ficheiros da FC correspondentes à resolução de cada uma das tarefas, os vídeos dos ecrãs abertos por cada grupo e os vídeos dos momentos e das aulas que foram alvo da intervenção didática (inclui-se as correspondentes à realização das tarefas e à discussão das estratégias utilizadas). Aquando cada intervenção didática e, sendo parte do plano de recolha de dados, a investigadora elaborou um “relatório” de modo que apresentasse toda a informação pertinente para a descrição e compreensão do caso.

Os relatórios referidos foram essenciais para conduzir as observações e os documentos a recolher, mas também indispensáveis no reajustamento da intervenção.

O papel da investigadora e a sua relação com os alunos

A investigadora é docente da turma que constitui o caso e já conhece uma grande parte dos elementos da mesma porque já tinha lecionado os 7.º e 8.º anos a mais de metade dos alunos nos anos transatos e o 7.º ano a uma minoria (alunos que ficaram retidos no 9.º ano). Ela conhece bem as dificuldades da maioria dos alunos e as suas capacidades, tendo alguma afinidade com a turma; são alunos cooperantes e aceitam bem as orientações que lhes dá, tentando cumprir com a sua palavra; estão à vontade para colocar as suas dúvidas ou conversarem com a professora de qualquer assunto; reconhecem na professora alguém que está para os auxiliar.

Pelo facto de o estudo se realizar numa turma da qual a investigadora é docente, poder-se-ia ter corrido o risco de os alunos não expressarem abertamente o seu raciocínio. No entanto, no sentido de prevenir alguma situação destas, a investigadora conversou com os alunos participantes de modo que não se sentissem intimidados por ser a professora-investigadora a avaliá-los no final de cada período.

Em relação aos participantes, foi solicitada autorização aos seus encarregados de educação e foi dada a garantia do anonimato e proteção da sua identidade ao longo de todo o estudo, caso isso seja do seu interesse.

A análise de dados

A análise dos dados está relacionada com a recolha de dados. É um processo essencialmente descritivo e interpretativo, baseando-se nas questões de investigação, na revisão de literatura realizada e nos dados recolhidos.

À medida que as tarefas e/ou entrevistas foram sendo realizadas, a investigadora fez a transcrição dos registos áudio e vídeo, estabelecendo relações entre estas, as notas escritas, os relatórios e os ficheiros criados pelos grupos. Deste modo, a investigadora estava perante a análise dos

relatórios das intervenções didáticas que a ajudou a efetuar reajustamentos, a consolidar ideias, a avaliar expectativas e a validar as interpretações sobre o estudo que estava a realizar.

Posteriormente, após a recolha de todas as informações, a investigadora fez uma análise mais aprofundada dos dados baseada nos aspetos do pensamento algébrico, na revisão de literatura e na primeira análise.

Após as fases anteriores, foi realizada uma análise de todos os dados recolhidos de todos os grupos segundo as categorias definidas e, posteriormente, uma análise cruzada com o intuito de descortinar as semelhanças e as diferenças que levaram às conclusões deste estudo. As características nesta análise cruzada dizem respeito à identificação das estratégias comuns de cada grupo de modo a compreender o seu raciocínio matemático na especificidade do pensamento algébrico e de que modo a FC evidencia esses atributos.

Capítulo IV

Análise de dados

Neste capítulo apresenta-se o estudo de caso dos participantes neste trabalho, realçando-se as competências e as especificidades do pensamento algébrico evidenciados no desempenho discente em cada uma das tarefas realizadas com a folha de cálculo. A investigadora optou por primeiro apresentar os resultados por tarefa para facilitar uma descrição e análise mais aprofundadas.

Nas três tarefas definidas estavam envolvidas: (i) sequências e regularidades com problemas envolvendo a determinação do termo seguinte a um dado termo e ampliar a sequência, conhecida a sua lei de formação, e do termo geral de uma sequência; (ii) função e função quadrática e todas as características possíveis de observar nas mesmas a partir das suas diferentes representações (linguagem natural, icónica, expressão algébrica, tabelar e gráfica) e sua inter-relação, equações de 2.º grau a uma incógnita; (iii) problemas (*word problems*) que pressupunham representar a variável através de uma célula, exprimir o problema em termos desta incógnita e fazer variar a variável para encontrar uma solução.

Todos os participantes realizaram a tarefa 1 fora do contexto de sala de aula, em jeito de entrevista, no sentido de a investigadora poder apresentar as competências, estratégias e dificuldades que caracterizava cada grupo antes de os colocar perante as tarefas que recorriam obrigatoriamente à folha de cálculo.

Nos diálogos estabelecidos e transcritos nesta investigação, foi designada a intervenção da investigadora com um P e a dos alunos com um A, independentemente do grupo a que pertença.

A Folha de Cálculo na evidência do pensamento algébrico da turma

Tarefa 1 - Sequências geométricas

Esta tarefa tem grandes potencialidades para a exploração do pensamento algébrico, em particular na sua vertente de pensamento funcional. Envolve a exploração de padrões, que tem vindo a ser estudada, também em Portugal (Vale, et al., 2006). Ela ilustra as potencialidades dos padrões e alguns aspetos sensíveis da sua utilização com vista ao desenvolvimento do

pensamento algébrico, pela sua estrutura, que conduz à generalização, e por aspetos valorizados na resolução e discussão.

A investigadora começou por indicar que a tarefa podia ser resolvida recorrendo a qualquer tipo de material (lápiz de cor, canetas, calculadora, folha de cálculo...) e ao seu “gosto” independentemente da sua avaliação na disciplina de matemática, referindo que era para ser realizada na “desportiva”, como uma tentativa de colocar os entrevistados à vontade. A professora dá a indicação de que podiam pensar alto e individualmente, numa primeira fase, sendo a segunda, a partilha desses raciocínios e estratégias.

Problema 1

As respostas às questões deste primeiro problema tinham como base a sequência de figuras ilustrada na figura em baixo.

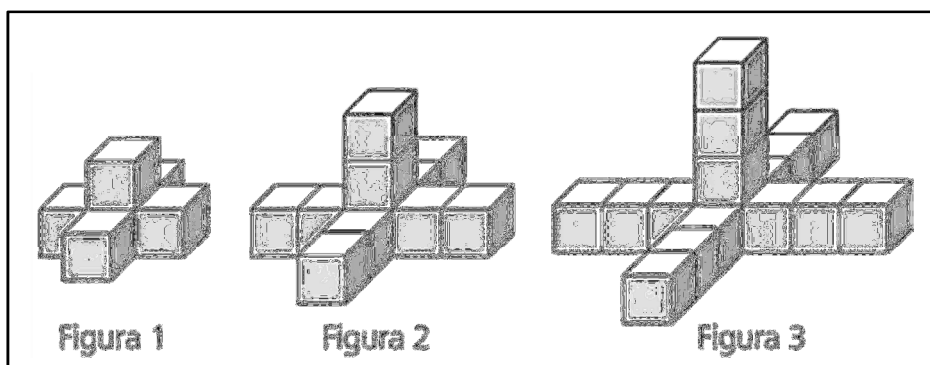


Figura 4- 1: Sequência de figuras do problema 1, da primeira tarefa

Os participantes empenham-se utilizando apenas lápis, papel e calculadora para efetuar os cálculos, durante 15 minutos, aproximadamente. Após este período de tempo, a professora questiona cada aluno sobre a forma como resolveram a primeira questão do problema 1 da tarefa.

Esta primeira questão “*Quantos cubos tem a figura 6?*” pretendia orientar os alunos para a definição de uma estratégia de forma a dar continuidade à sequência de figuras, ou seja, ajudá-los a definir a lei dessa mesma sequência.

Os alunos do primeiro grupo, numa tentativa de resposta a esta primeira questão, iniciam a sua estratégia com a construção de uma tabela na qual começam por estabelecer uma relação entre o total de cubos da figura anterior com a seguinte, adicionando 5 unidades ao termo anterior. Esta estratégia pode ser definida como *estratégia por recorrência*.

P: Como pensaste? Como chegaste ao n.º de cubos da figura 6?

A: Fui contar os cubos todos da figura 1 e contei 6, fui à figura 2 e contei 11, na figura 3 e deu-me 16 e pronto, fui sempre fazendo assim.

P: Como chegaste ao termo da figura 6, foste contando 1 a 1, figura a figura?

A: Fui vendo se havia...

P: ... uma regularidade?

A: Sim, uma regularidade entre o total de cubos, de figura para figura.

P: E o que descobriste?

A: Adicionávamos sempre mais 5...

P: Ao quê?

A: Ao total... termo anterior.

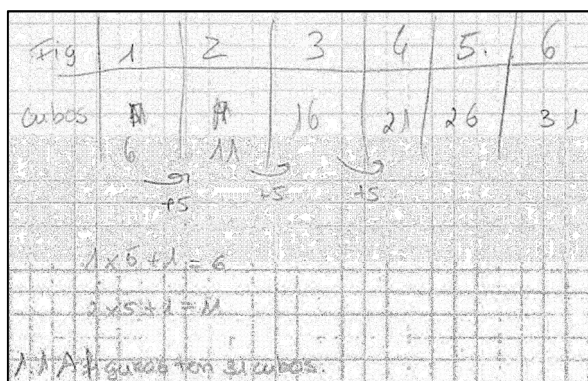


Fig	1	2	3	4	5	6
Cubos	6	11	16	21	26	31

$1 \times 5 + 1 = 6$
 $2 \times 5 + 1 = 11$

1.ª figura tem 6 cubos.

Figura 4- 2: Representação tabelar do grupo 1 (Problema 1 - Tarefa 1)

No entanto, com o objetivo de os alunos explorarem outras relações entre os dados numéricos da tabela e/ou das figuras, a investigadora questionou-se sobre o número de cubos da figura 100.

P: Como chegaste ao termo da figura 6? Foi também sempre sequencialmente! Foste ao 4.º termo e ao 5.º termo. E o número de cubos da figura 100. Como fazias para encontrar o total de cubos?

A: Andava para trás e resolvia uma equação.

As igualdades apresentadas em baixo (Fig, 4- 3), evidenciam que os alunos já tinham desenvolvido outra estratégia que lhes permitiu indicar o número de cubos em função do número das figuras.

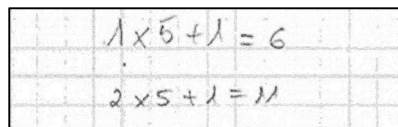

$$1 \times 5 + 1 = 6$$
$$2 \times 5 + 1 = 11$$

Figura 4- 3: Relação numérica entre o número de cubos e o número da figura do grupo 1 (Problema 1 - Tarefa 1)

No entanto, quando os alunos respondem que resolviam uma equação, é revelador que não interpretaram corretamente a questão colocada pela professora. Com esta estratégia dariam resposta ao número da figura com 100 cubos e que explicam corretamente. O facto de os alunos decidirem escrever uma equação para responder a esta pergunta, demonstra que já eram conhecedores da lei geral da sequência apresentada.

P: Como?

A: Supostamente, o termo geral é $5n$ (hesitou) $+1$ e $5n+1=100$ e depois resolve-se?

P: Como chegaste ao $5n$?

A: Adicionávamos sempre $+5$...

P: O que representa o 5 ? Da figura 1 para a figura 2 aumenta 5. O que representa este valor?

A: O declive.

P: E como chegaste ao $+1$?

A: Relacionei... Fiz $1 \times 5 + 1$ e deu o total.

P: Funciona para o 2.º termo?

A: Sim.

Com o intuito de se conhecer a estratégia do grupo 2, os alunos que o formam são questionados sobre o número de cubos da 6.ª figura.

A: Vi que cada figura para cada figura era mais 5. Depois os 6 da primeira figura mais cinco vezes o número da figura, dava o 6. [Ou seja, $5 \times 1 + 1 = 6$]

P: Como, explica outra vez que eu não percebi!

A: Era o 6 da primeira figura. Mais os 5 que era o que ia dando sempre...

P: Era o que se ia acrescentando?

A: Sim... vezes o 6 que era o número da figura.

P: E dava certo? Essa maneira de pensar dava certo para as outras todas?

Porque tu fizeste 6 que é a figura 1 mais 5 deu 11.

A: Pois se eu fizesse vezes 2, para a figura 2 já não dava.

P: Então está aí algum erro! Em quê?

fig. 1 = 6 cubos
fig. 2 = 11 cubos
fig. 3 = 16
 $5 \times 2 = 10 + 1 = 11$
 $6 + 5 \times 6 = 36$

Figura 4- 4: Estratégia de cálculo do total de cubos da sequência da figura 6, do grupo 2 (Problema 1 - Tarefa 1)

Os alunos, um pouco atrapalhados e inseguros, sentiram dificuldades em definir a regra desta sequência. No entanto, a estratégia relatada para determinar o 1.º termo estava, numa primeira observação, correta [$5 \times 1 + 1$] mas, como consideraram a lei da sequência como a soma do produto de 5 pelo número da figura com o número da figura [$5n + n$], responderam que o 6.º termo seria $6 + 5 \times 6 = 36$ como está ilustrado na figura 4- 4. Mediante esta perceção e com o intuito de os fazer refletir sobre a regra, a investigadora questionou-os sobre a veracidade desta lei para outras figuras da sequência. Os alunos tinham consciência de que esta não se confirmava para o 2.º termo, pelo que se desviaram desta primeira estratégia, estabelecendo uma relação numérica entre os termos da sequência (2.º termo: $6 + 5 = 11$ e 3.º termo: $11 + 5 = 16$).

Informando os alunos de que estavam a cometer um erro no seu raciocínio e deparando-se com as dificuldades em identificá-lo sozinhos, a investigadora leu em voz alta o que escreveram para que em conjunto o reconhecessem.

P: A figura 1 tem 6 cubos mais 5, dá 11. Mas depois tens aqui uma coisa diferente do que estavas a dizer: tu adicionaste 5 também a este (ao total de cubos da figura 2) e deu os 16 na figura 3. E esta maneira que pensaste ($5 \times 2 = 10 + 1 = 11$) é igual à que tens aqui (em $6 + 5 \times 6 = 36$)? [A aluna pensa]

P: Não tem sentido o que fizeste... fazes 5×6 e depois adicionas 6, porquê? Por ser o número da figura? E nas figuras anteriores dava para fazer a mesma coisa?

A: Não dava...

P: Então vê se consegues encontrar uma forma!

A: Se fosse, não contava com o que estava no meio: $5 \times 2 = 10$, $10 + 1 = 11$. Aqui $5 \times 6 = 30$, mais 1, 31. Este aqui [aponta para o termo da figura 3 que escreveu] é 31.

P: Este é 31? Estás a fazer para a figura 6!

Quando temos uma ideia temos que verificar se se confirma para aquelas que já estão fixas.

Os alunos do grupo 3 fazem uma observação da composição geométrica de cada figura, identificando relações entre o número de cubos e o número da figura revelando facilidade na comunicação da sua estratégia.

P: Como fizeste? Pensaste da mesma maneira?

A: Sim, mais ou menos. Primeiro contei os cubos todos e depois tentei arranjar, ver se encontrava alguma relação com o n.º da fig. e o n.º de cubos, e havia. Os visíveis e juntos são sempre o n.º da figura [aponta com o lápis para os cubos a que se refere, em cada figura]. Mas também há um cubo que está escondido. Estive a tentar ver um “monte” de relações que afinal não iam dar a lado nenhum.

P: Ou se calhar vão! Diz-me lá...

A: Comecei a usar esta fórmula, mas usei mal porque fiz vezes 4 pois esqueci-me que havia este bloco [aponta para a coluna de blocos na vertical em cada figura]. Depois é que cheguei ao 5. Por acaso 5 vezes estes blocos, o n.º da figura, mas há sempre um escondido, então ia ser 5 vezes os blocos mais o que está escondido, $5n + 1$.

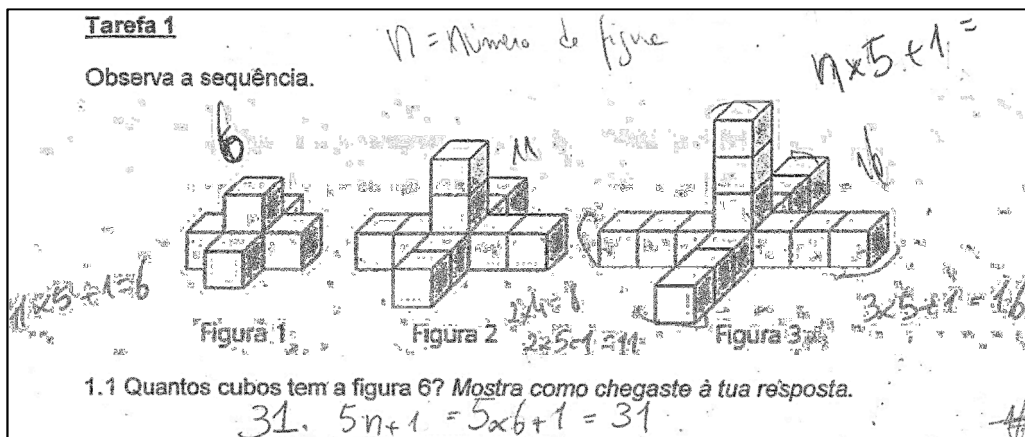


Figura 4- 5: Estratégia do grupo 3 para determinar o total de cubos da figura 6 da sequência (Problema 1 - Tarefa 1)

Deste confronto de ideias, a investigadora identificou as duas estratégias diferentes seguidas pelos três grupos. O grupo 1 seguiu uma estratégia por recorrência baseada na identificação das relações numéricas. O grupo 3 procurou uma relação estrutural com vista à generalização, dando provas da sua capacidade de observar mais que, simplesmente, as relações numéricas dos padrões - analisou o número de cubos, a forma como estavam dispostos e o modo como aumentavam de figura para figura. Consequentemente, este último grupo não revelou dificuldades em calcular o termo da figura 100. O grupo 2 não conseguiu encontrar uma solução correta para o problema, uma vez que revelou dificuldades no estabelecimento das relações entre as variáveis, ou seja, não encontrando uma regra que gerisse o padrão.

Com a segunda questão “*Haverá alguma figura com 100 cubos?*”, está subjacente a confirmação da estratégia utilizada anteriormente. Na procura de uma solução para este problema, os grupos 1 e 3 optaram pela mesma estratégia, mas usando metodologias diferentes.

O grupo 1, pensando na equação $5n+1=100$, efetuou as operações inversas equivalentes à aplicação dos princípios de equivalência de resolução de equações. A não atribuição de significado no contexto do problema ao seu resultado [19,8], levou os alunos a calcularem os termos da sequência mais próximos deste valor e a concluírem sobre a existência de uma figura com 100 cubos, por comparação.

A: Tentei andar para trás. Deduzi que havia uma figura com 100 cubos e depois fiz a expressão $5n+1$, andei para trás. Fiz $100-1$ e deu 99 e, depois 99 dividi por 5 e deu 19,8. Fui ver se multiplicava 5×20 , por ser mais próximo de 19,8. Multipliquei $5 \times 20 = 100$ e adicionei 1, pelo que obtive 101. Já não dava. Ainda fui verificar se dava 5×19 e não deu. Deu 95 e mais 1 dava 96, já não dava. Já não existia.

1.2. $5 \times 20 + 1 = 101$
 $100 - 1 = \frac{99}{5} = 19,8$
 $5 \times 19 + 1 = 96$

Figura 4- 6: Verificação da existência (ou não) de uma figura com 100 cubos do grupo 1 (Problema 1 - Tarefa 1)

Em jeito de alerta e obtendo o consentimento do grupo, a investigadora sintetizou que se em duas figuras consecutivas com 96 e 101 cubos, não poderia existir alguma com 100 cubos. Ainda explicou que quando calcularam o valor de 19,8 que corresponderia ao número de uma figura da sequência, caso fosse natural; não sendo, o problema seria impossível.

Saliente-se que apesar da estratégia de resolução estar correta (figura 4-6), a sua expressão escrita evidencia dificuldades de compreensão no significado dos símbolos, em particular, o do sinal de igual. Na aritmética, este é habitualmente usado para exprimir o resultado da operação indicada antes dele, enquanto que na álgebra é visto como uma relação entre duas expressões. A figura 4-6 ilustra bem que o aluno escreve a sequência de passos, tal e qual como pensa, sem se preocupar com o significado dos símbolos que expressa.

O grupo 3 mostrou um desempenho mais assertivo no cálculo algébrico, resolvendo a equação formalmente.

1.2. Não. $5n + 1 = 100$
 $\Rightarrow 5n = 100 - 1$
 $\Rightarrow 5n = 99$
 $\Rightarrow n = \frac{99}{5}$
 1.3. $n \times 5 + 1$, sendo n o número da figura.

Figura 4- 7: Uso de uma equação, pelo grupo 3, para verificar a existência (ou não) de uma figura com 100 cubos (Problema 1 - Tarefa 1)

O desempenho do grupo 2 é revelador de lacunas no que se refere à identificação de situações de proporcionalidade direta (ou não) e à utilização do conceito “regra de três simples”. Parece que as dificuldades apresentadas nas questões anteriores não estão esclarecidas e que passam pela lei de formação da sequência que é um modelo de funções afim, não lineares nem constantes, no conjunto dos números naturais.

A: Eu fiz uma regra de três simples.

P: Porquê?

A: Primeiro fiz aquela dos 100 e depois fui confirmar com figura 3. Se na fig. 2 é 11 então na fig. 3 será $32/2=16$. Dava certo! Fiz para 100 e não deu!

P: Fizeste como a 2.^a figura está para 11 e depois a 3.^a figura está para x . Então $33/2$, deu 16? Não deu exato! [aluna usa a calculadora para tentar definir uma estratégia, mas em vão]

1	—	6	9	—	11
1x	—	100	3	—	x

$100 = 6 = 16,666$

$33 = 2 = 16$

R: Não.

Figura 4- 8: Uso errado da “regra de três simples”, pelo grupo 2, para verificar a existência (ou não) de uma figura com 100 cubos (Problema 1 - Tarefa 1)

P: Deu? Não deu, pois não? Achas que esta sequência representa uma situação de proporcionalidade direta?

A: Eu pensava que sim! Porque era sempre “+5”.

P: Quantos cubos tem a 1.^a figura? Se começasse no 5, será que era uma situação de proporcionalidade direta?

A: Sim, porque era sempre “+5”.

P: Começava no 5: o zero era zero, a fig.1 era 5, a 2 era 10, a 3 era 15 e assim sucessivamente. Tinhas toda a razão. Tinhas uma situação de proporcionalidade direta e a expressão já seria $5n$. [aluna sorri compreendendo o que tinha feito]

Como esta sequência não representa uma situação de proporcionalidade direta, não faz sentido a tua estratégia, pois a regra de três simples só é aplicável em situações deste tipo.

Após o confronto e debate entre todos das diferentes estratégias, a última pergunta surge para observar o desempenho dos alunos na representação simbólica das relações encontradas nas questões anteriores. Facilmente escrevem o termo geral, que já fora também utilizado por um grupo nas respostas precedentes. A figura em baixo ilustra a capacidade de escrita do termo geral da sequência.

1, 3, $5n + 1$

Figura 4- 9: Escrita do termo geral da sequência pelo grupo 1 (Problema 1 - Tarefa 1)

Síntese

Do primeiro problema da tarefa 1, registam-se estratégias algébricas e não-algébricas, na definição de Rojano (1996). Inclusas nestas pode-se considerar as que levaram a soluções corretas ou não e cuja resolução estava ou não completa. Assim, a investigadora observou que os grupos 1 e 3 adotaram uma estratégia algébrica, embora no grupo 1 só tenha sido desenvolvida posteriormente. Numa primeira fase, este último grupo identificou uma relação numérica no padrão, baseada na aritmética - estratégia por recorrência e, só depois estabeleceu a relação

funcional entre as variáveis. O grupo 2 manifestou muitas dificuldades na identificação da regra do padrão, não completando a resolução do problema e desenvolvendo uma estratégia confusa e muito pouco estruturada.

Problema 2

Este segundo problema do teste intermédio de 8.º ano de 29-02-2012 era modelado por uma função quadrática no conjunto dos números naturais cuja sequência era a ilustrada na figura em baixo. Foi um problema que incluía o conjunto de itens de uma ficha de avaliação desta turma realizada antes desta entrevista.

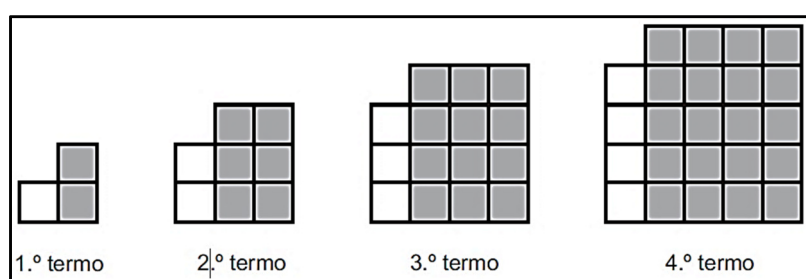


Figura 4- 10: Sequência geométrica (Problema 2 - Tarefa 1)

Numa primeira fase, a investigadora distribuiu as cópias das resoluções de cada aluno e deu-lhes um espaço de tempo no sentido de poderem recordar o padrão, o pretendido nas suas questões e as estratégias utilizadas. A exposição destas teve lugar numa segunda fase.

A primeira questão “Quantos azulejos brancos tem o 2011.º termo da sequência?” tinha como propósito motivar os alunos a procurarem uma regra que relacionasse o número da figura com o número de azulejos brancos.

Os alunos do primeiro grupo, tal como os outros, facilmente identificaram que o número de azulejos brancos era igual ao número da figura.

P: Como pensaste para saber quantos azulejos brancos tinha a figura 2011?

A: Vi que o n.º de azulejos brancos era igual ao n.º da figura.

Contudo, com vista a estimular os alunos a olharem para o todo da figura, a investigadora questionou-os sobre o total de azulejos da figura 11 que correspondia à segunda questão deste problema “Qual é o número total de azulejos do 11.º termo da sequência?”. Os alunos começaram por adotar a mesma estratégia seguida no problema 1 desta mesma tarefa, procurando relações numéricas mas sem sucesso. Este facto levou-os a definir outras estratégias e a fazer outras representações do problema, sendo a procura de uma relação funcional entre as variáveis, uma das estratégias adotadas e a tabela, a representação escolhida em primeiro lugar.

P: Quantos azulejos tem o 11.º termo?

A: Tentei fazer usando uma tabela.

P: Qual foi o problema? Queres mostrar como pensaste?

Fig.	1	2	3	4
TOTAL	3	8	15	24
	$2 \times 1 + 1 = 3$	$2 \times 2 + 1 = 5$	$2 \times 3 + 1 = 7$	

Figura 4- 11: Representação tabelar do grupo 1 (Problema 2 - Tarefa 1)

A: Primeiro coloquei a hipótese de a expressão ser $2n+1$, mas não deu.

P: Porquê? Explica como fizeste!

A: Fui tentando. Pus $2n...$

P: Antes de chegares ao termo geral, não sei se olhaste da mesma maneira que tinhas visto a sequência anterior. Relacionaste os números?

A: Sim... mas não consegui!

P: Relacionaste 3 com o 8? Dava quanto? O que relacionaste?

[A professora aponta para a resolução da aluna e ajuda-a a entender a relação.]

A: Dava "+5".

P: Do 8 para o 15?

A: Dava "+7".

P: E daí desististe, não foi? Não arranjaste aí uma regularidade tão linear, não foi?

A: Foi.

P: E partiste depois para onde?

A: Tentei arranjar outras "coisas" e parti para o desenho, mas também não correu bem.

b) Qual é o número total de azulejos do 11.º termo da sequência?
Mostra como chegaste à tua resposta.

$11 + 121 = 132$ quadrados

R: O 11.º termo da sequência vai ter 132 azulejos. X 121 quadrados

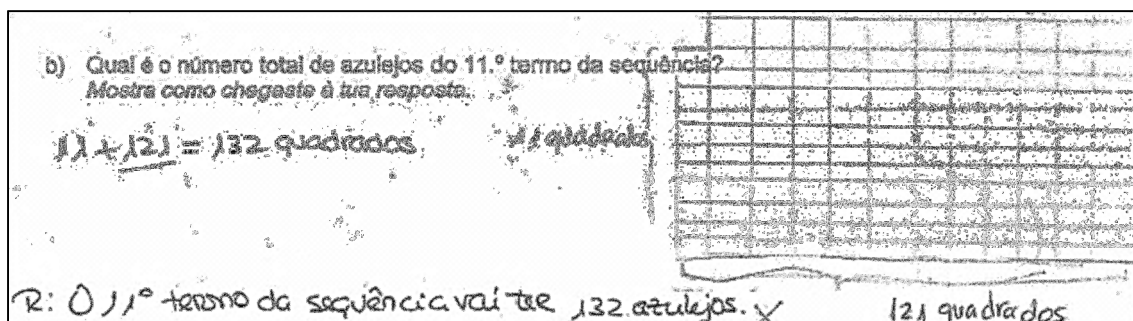


Figura 4- 12: Esquema do grupo 1 para solucionar o problema 2 (Tarefa 1)

A primeira estratégia adotada, durante a realização da ficha de avaliação, mostra que o grupo compreendeu que quando se estabelece apenas uma relação numérica baseada na aritmética na tentativa de generalizar um problema, torna a tarefa quase, se não mesmo, impossível. No entanto, não sendo uma sequência modelada por uma função afim, o grupo revelou dificuldades na identificação da regularidade. Tentou um esquema que lhe permitia obter uma resposta correta (figura 4-12) mas, que devido a um erro de contagem, foi em vão. Esta situação, indica claramente que o grupo ainda não tinha generalizado a situação em estudo.

Perante este diálogo, a investigadora propõe uma nova análise da sequência. Depois desta, a aluna reconheceu que o número de azulejos brancos era igual à posição da figura e que o número de colunas cinzas também era igual a essa posição. No entanto, teve dificuldade em reconhecer que o número de linhas cinzas também era igual à posição. A investigadora teve necessidade de levar os alunos a contabilizar essas linhas. Só deste modo, é que o grupo verificou que esse número era também o da posição, mais um, passando a escrever junto da figura os valores correspondentes nas quatro primeiras figuras. Assim, concluiu que o número de quadrados cinzas era 11×12 , na figura 11, sendo o total de azulejos da figura $11 \times 12 + 11$.

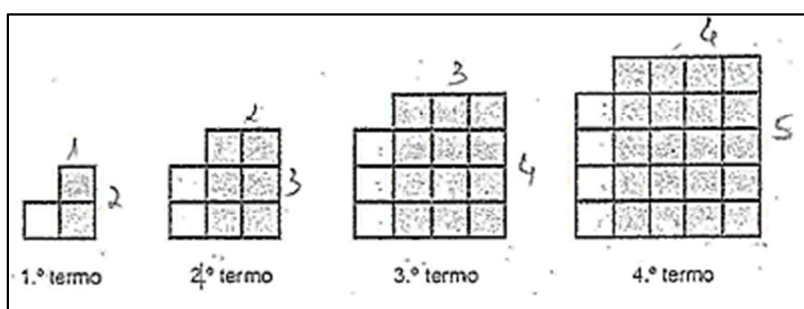


Figura 4- 13: Segunda estratégia do grupo 1 (Problema 2 - Tarefa 1)

Numa primeira análise, o grupo 2 também definiu uma estratégia recursiva mas em vão, seguida de uma observação da composição geométrica de cada figura da sequência em relação com a posição da figura. Os alunos tomaram como ponto de partida o facto de o número de azulejos brancos ser o mesmo que o de cinzas, debruçando-se na zona cinza e identificando um retângulo. Consequentemente, contabilizou 11 colunas e 12 linhas cinzas, fazendo 11×12 . Logo concluiu que o total de azulejos da figura 11 era $11 \times 12 + 11$. Ainda sob a visão de outra composição nas figuras, dá outra explicação, observando um quadrado de 11×11 e somando à área deste o dobro do número da figura (os restantes cinzas eram o dobro dos brancos), ou seja, $11 \times 11 + 2 \times 11$. Dependendo da forma como se observam as figuras de uma sequência, assim é feita a generalização e, nestas duas, está claramente evidente este facto. Nesta situação, os alunos obtiveram expressões diferentes mas equivalentes.

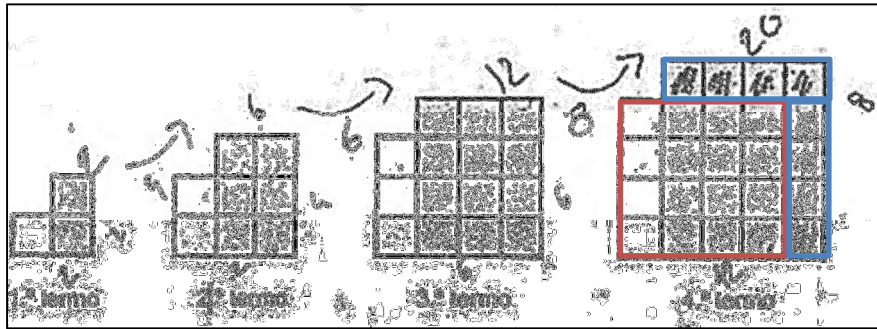


Figura 4- 14: Ilustração da última estratégia seguida pelo grupo 2 (Problema 2 - Tarefa 1)

b) Qual é o número total de azulejos do 11.º termo da sequência?
Mostra como chegaste à tua resposta.

$11 \times 2 = 22$
 $22 + 11 = 33$
 $11 \times 10 = 110$
 $110 + 33 = 143$

Azulejos brancos = 11
 Azulejos pretos à volta = $22 (11 \times 2)$
 Azulejos ao centro (pretos) $110 (11 \times 10)$
 11.º termo e 10.º termo exteriores

R: No total o 11.º termo vai ter 143 azulejos - ✓

Figura 4- 15: Última estratégia seguida pelo grupo 2 (Problema 2 - Tarefa 1)

O grupo 3, não fugindo à regra, numa primeira observação também seguiu a mesma estratégia dos outros dois grupos. Perante a inexistência de uma regularidade entre os termos, alterou a sua forma de pensar.

A: Eu fui, como sempre, relacionar o número do termo seguinte com o do anterior. O primeiro é 3, o segundo é 8, o terceiro é 15, o quarto é 24 e por aí fora...

P: O que fizeste foi 1×3 ?

A: Porque primeiro vi o total que havia e depois tentei relacionar com o número do termo com o do seguinte pois primeiro tentei relacionar os números dos termos [os anteriores e os seguintes] e vi que não dava nada.

P: E porquê?

A: Porque entre eles não há uma relação que tenha encontrado.

P: Uma relação igual?

A: Sim. De proporcionalidade direta...

P: Ou não...

A: Sim!

P: A sequência trabalhada anteriormente não representava proporcionalidade direta. Queres dizer uma relação mais evidente...!

A: Eu reparei 1 para 3 é 1×3 , 2 para 8 é 2×4 , 3 para 15 é 3×5 , 4 para dar 24 é 4×6 . Os números dos termos são 1, 2, 3, 4 [refere-se ao número de cada figura] e faz-se o número do termo mais um número que era mais dois acima do termo [exemplifica como tinha registado e conclui que o termo n.º 11 é 11×13 , a mesma coisa que as figuras anteriores].

P: Não usaste a mesma estratégia que utilizaste no outro [problema 1 desta tarefa]. Foi diferente. Relacionaste os números dos termos.

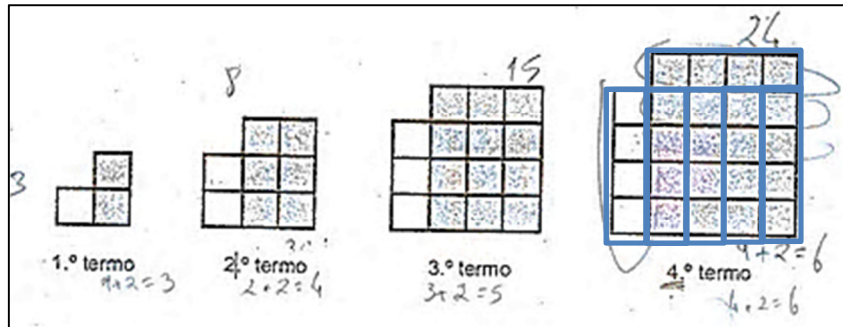


Figura 4- 16: Ilustração da estratégia do grupo 3 (Problema 2 - Tarefa 1)

Primeiro os alunos apenas estabeleceram uma relação funcional entre a posição da figura e o respetivo termo. Nesta entrevista, após uma breve análise e com o intuito de dar sentido à sua estratégia, os alunos observaram cada figura e verificaram que a podiam decompor em partes, sendo cada uma composta pelo número de quadrados correspondentes ao número da figura. Por exemplo, a figura 1 é decomposta em 3 partes em que cada uma tem 1 quadrado; a figura 2, é decomposta em 4 partes em que cada uma tem 2 quadrados; a figura 3, é decomposta em 5 partes em que cada uma tem 3 quadrados; e, assim sucessivamente. Por isso, concluiu que a 11.^a figura teria 13 partes com 11 azulejos cada uma, ou seja, 11x13.

b) Qual é o número total de azulejos do 11.^o termo da sequência?
Mostra como chegaste à tua resposta.

$1 \times 3 = 3$
 $2 \times 4 = 8$
 $3 \times 5 = 15$
 $4 \times 6 = 24$
 $11 \times 13 = 143$

R: Terá 143 azulejos.

Figura 4- 17: Estratégia do grupo 3 (Problema 2 - Tarefa 1)

Síntese

Neste segundo problema da tarefa 1, sobressaíram raciocínios mais estruturados, complexos, abstratos e diferentes entre os grupos, evidenciando a riqueza deste problema no desenvolvimento do pensamento algébrico.

Se tivesse sido solicitada a escrita das expressões algébricas equivalentes aos raciocínios descritos, ir-se-iam obter expressões diferentes mas equivalentes. Teria sido uma oportunidade de explorar as equivalências de expressões algébricas e igualdade das representações tabelar e gráfica dos dados do problema.

Tarefa 2 - Uma vedação do terreno

Esta é outra tarefa que revelou ter fortes potencialidades na evidência do pensamento algébrico.

A utilização da folha de cálculo permitiu observar aspetos deste tipo de pensamento na utilização das múltiplas representações.

O problema foi adaptado do manual de 10.º ano, da Porto Editora, “Funções I - Matemática A”, da Maria Augusta Neves e Luís Guerreiro cujo objetivo era investigar sobre as dimensões de um terreno retangular mediante as condições dadas.

Com 50 metros de rede pretende-se fazer uma vedação de um terreno retangular.

Um dos lados do retângulo não precisa de rede, pois o terreno a vedar está encostado a um muro, como se mostra na figura.

Quais deverão ser as dimensões do terreno de modo que a sua área seja de 300 m^2 ? E se se desejar um terreno com a área máxima?

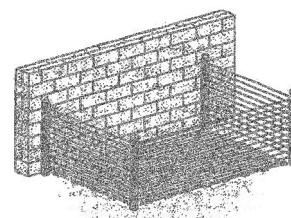


Figura 4- 18: Problema da tarefa 2

Uma vez que o modelo deste problema é a função quadrática e que, como diz Kaput (1999), a álgebra deve ser introduzida como uma ferramenta com significado e compreensão, a investigadora quis observar o desempenho algébrico dos alunos com a folha de cálculo na resolução do problema, analisando o processo de apresentação das diferentes representações e a relação que estabeleceram entre as mesmas na procura de uma resposta. A partir da discussão das estratégias dos alunos, a professora introduziu uma ferramenta algébrica de manipulação simbólica e de transformação de expressões - a fórmula resolvente de equações de 2.º grau a uma incógnita, cuja capacidade de aplicação está contemplada no Currículo e desenvolvimento curricular em Matemática e no Programa de Matemática de 3.º ciclo de 1991.

Esta tarefa ocupou dois blocos de 90 minutos: no primeiro, os alunos resolveram a tarefa que incluía a elaboração de um relatório e no segundo, apresentaram as suas estratégias e conclusões que foram discutidas no grupo turma. Os alunos fizeram a sua apresentação após a investigadora ter feito uma análise prévia dos seus relatórios e tendo em conta o nível de desempenho algébrico dos participantes observado no bloco anterior.

No primeiro bloco, a aula decorreu numa sala equipada com computadores, em forma de U, que não era a habitual, embora os alunos já tivessem tido experiências de realização de tarefas nesta, desde o início do ano letivo. Os alunos estavam organizados em grupos de dois alunos com um computador para cada grupo. Após a entrada na sala de aula, procedeu-se à escrita do sumário, à distribuição da tarefa e à leitura do enunciado no grupo turma, certificando-se que os alunos compreenderam as condições do problema. A professora ainda lembrou que deveriam apresentar todas as estratégias utilizadas, mesmo não sendo as mais corretas ou mais eficientes para resolver o problema e que poderiam recorrer a esquemas que considerassem úteis. Os

alunos trabalharam autonomamente com o apoio da professora da turma e de outra docente, que se disponibilizou a colaborar com a investigadora, para esta poder observar os grupos envolvidos no estudo com mais pormenor.

No final da aula, os alunos tiveram que enviar os dois ficheiros criados (de Excel e Word) para o correio eletrónico da investigadora e professora da turma.

Nesta tarefa é utilizado o termo “perímetro” para fazer referência ao comprimento de rede utilizado para vedar o terreno retangular.

Esta primeira questão “Quais deverão ser as dimensões do terreno de modo que a sua área seja de 300 m²?”, refere-se a um caso particular da situação apresentada e, com ela, pretendia-se ajudar os alunos a tomarem consciência das condições do problema e das relações existentes entre as variáveis implicadas. Com vista à generalização, a investigadora solicitou aos alunos a procura de várias soluções para esta questão, caso fosse possível.

Qualquer um dos grupos lhe deu resposta sem qualquer dificuldade, como referem:

Na primeira pergunta não tivemos dificuldades de maior, nem em chegar aos resultados nem em descrevê-los.

Figura 4- 19: Excerto da descrição das dificuldades sentidas pelo grupo 1 (Tarefa 2)

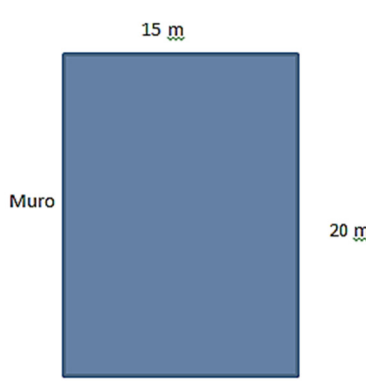
Tal como solicitado, descrevem o processo de resolução da primeira questão da tarefa:

1º Começamos por desenhar um rectângulo;

2º Atribuimos medidas aos 3 lados, visto que um lado do rectângulo era um muro;

3º A esses 3 lados atribuimos medidas mas com algumas regras:

- A soma de todos os lados não podia exceder os 50 metros;
- A sua multiplicação do comprimento e largura tinha de ser 300;



Perímetro = 15m+15m+20m = 50 m

Área = 20m * 15m = 300 m²

Figura 4- 20: Excerto do relatório iniciado pelo grupo 1 (Tarefa 2)

Objetivo do Problema: Descobrir quais deverão ser as dimensões do terreno de modo que a sua área seja de 300m².

Sabendo que o terreno é um retângulo que se pretendia vedar com 50 metros de rede, mas um dos seus lados está encostado a um muro, logo não precisa de ser vedado.

1º Passo: Começamos por desenhar um retângulo e atribuir-lhe medidas por tentativas, sempre respeitando as condições de que o seu perímetro fosse 50 metros e a sua área 300m²;

2º Passo: Conseguimos que as medidas correspondessem ao que era pedido, sendo:

Perímetro: <u>lado</u> + lado + lado	Área: <u>lado</u> x comprimento
= 15 + 15 + 20	= 15 x 20
= 50 metros	= 300 metros ²

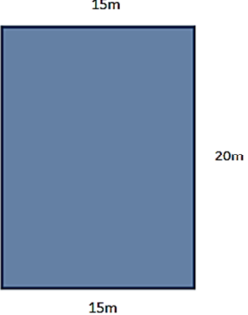


Figura 4- 21: Excerto do relatório reformulado pelo grupo 1 (tarefa 2)

Mediante apenas uma solução e pretendendo verificar a possibilidade da existência de mais alguma, os alunos recorrem à folha de cálculo para organizar uma tabela de valores, cujo processo é, durante a aula, descrito do seguinte modo:

- 4º Depois fomos procurar mais valores na folha de cálculo;
- 5º Atribuimos ao comprimento a variável "x" e à largura a variável "y";
- 6º Sabemos que $X + 2Y = 50$ metros e que $XY = 300$ metros;

Figura 4- 22: Descrição dos passos do grupo 1 para resolver a tarefa 2 (elaborado na aula)

3º Passo: Depois fomos á folha de cálculo procurar mais valores que respeitasse aquelas condições, colocando diversos valores ao acaso.

Concluimos que o comprimento tinha que ser sempre superior a 20 e a largura inferior a 15, daí que subtraímos 0,5 á largura e adicionámos 1 ao comprimento.

Figura 4- 23: Descrição do 3.º passo do relatório reformulado, do grupo 1, após a aula (tarefa 2)

Numa primeira fase, os alunos utilizam esta ferramenta tecnológica do mesmo modo que poderiam estar a trabalhar apenas com papel e lápis. Identificam as colunas e tentam completá-la utilizando a calculadora para determinar os valores das dimensões do terreno.

Na sequência de figuras (capturadas através do *software Camtasia Studio7*), é possível compreender as dificuldades que os alunos deste grupo se depararam e que se prendem com aspetos do pensamento funcional.

A figura abaixo é elucidativa de uma tentativa de preenchimento da tabela em que os alunos escrevem apenas a fórmula da área do terreno retangular (que identificam como "Total"), introduzindo primeiro os endereços das células do cabeçalho, não obtendo, conseqüentemente, qualquer valor numérico. Apercebendo-se do erro, de imediato, alteram esses endereços.

	A	B	C
1	Comprimento	Largura	Total
2	20	15	-A1*B1
3			

	A	B	C
1	Comprimento	Largura	Total
2	20	15	#VALOR!
3			

	A	B	C
1	Comprimento	Largura	Total
2	20	15	-A2*B2
3			

Figura 4- 24: Organização inicial da tabela de dados na folha de cálculo do grupo 1 (Tarefa 2)

Aleatoriamente, os alunos escolhem vários valores para o comprimento e tentam calcular a respetiva largura com a calculadora, obtendo os valores da área para cada caso particular. Estendem a fórmula às restantes linhas da coluna C, fazendo o processo de cópia de fórmulas.

Os alunos não compreendem como podem estabelecer uma relação entre as quatro dimensões, demorando algum tempo a consegui-lo.

	A	B	C
1	Comprimento	Largura	Total
2	20	15	300
3	24	12	288
4	24	12,5	300
5	25	12	

	A	B	C
1	Comprimento	Largura	Total
2	20	15	300
3	24	12	288
4	24	13	312
5	25	13	325
6	2	150	300
7	32		

Figura 4- 25: Preenchimento da tabela estruturada pelo grupo 1 (Tarefa 2)

Ao observarem as colunas desta tabela, tomam consciência de que não estão a considerar a condição relativa ao comprimento da rede disponível, apagam o que produziram e refazem a tabela, escrevendo uma nova fórmula na coluna "Total" na célula C2, " $=A2+B2$ ". Ainda assim, e como seria de esperar, voltaram a não obter o pretendido que era o comprimento de rede 50.

	A	B	C
1	Comprimento	Largura	Total
2	25	12,5	=A2+B2

Figura 4- 26: Reformulação da tabela já construída pelo grupo 1 (Tarefa 2)

Na compreensão das suas falhas, decidem duplicar a largura. Esta escrita, além de não ter uma estrutura matemática a suportá-la, é feita não respeitando a sintaxe do *software* e, por isso, a folha de cálculo não lhe devolve qualquer valor.

	A	B	C
1	Comprimento	Largura	Total
2	25	12,5*2	#VALOR!

Figura 4- 27: Nova Reformulação da tabela já construída pelo grupo 1 (Tarefa 2)

Mediante as suas dificuldades, a investigadora decide discutir com o grupo casos particulares do problema com o objetivo de os auxiliar na procura de regularidades entre eles e estimular o trabalho de generalização. O grupo define uma nova estratégia - insere uma nova coluna na tabela designada por “Largura”, de modo a conseguir observar os três lados da cerca e já conseguem que a folha de cálculo lhe devolva a soma das três medidas.

	A	B	C	D
1	Comprimento	Largura	Largura	Total
2	25	12,5	12,5	=A2+B2+C2

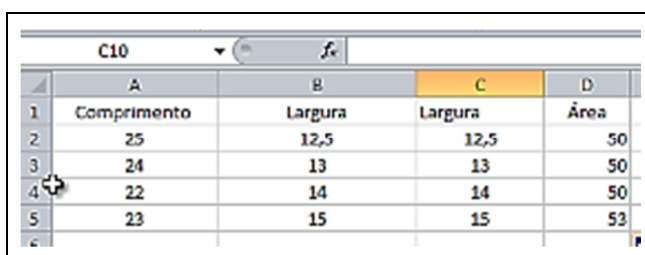
Figura 4- 28: Outra reformulação da tabela já construída pelo grupo 1 (Tarefa 2)

Alteram o cabeçalho da última coluna para “Área”, em vez de “Perímetro”. Continuam a lançar valores que verificam apenas a condição de o perímetro ser 50 metros, alterando os valores sempre que não verificam. Os alunos não foram capazes de relacionar as variáveis entre si.

	A	B	C	D
1	Comprimento	Largura	Largura	Área
2	25	12,5	12,5	50
3	24	13	13	50
4	26	14	14	54

Figura 4- 29: Outra Reformulação da tabela já construída pelo grupo 1 (Tarefa 2)

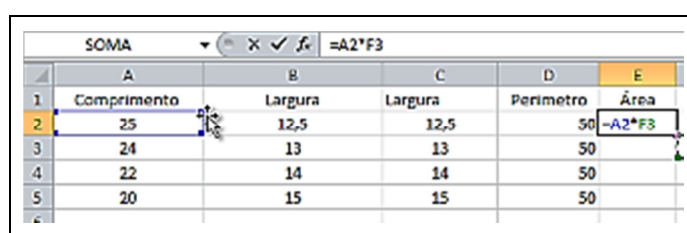
Alunos alteraram a célula A4 de modo a que o perímetro desse 50.



	A	B	C	D
1	Comprimento	Largura	Largura	Área
2	25	12,5	12,5	50
3	24	13	13	50
4	22	14	14	50
5	23	15	15	53

Figura 4- 30: Outra Reformulação da tabela já construída pelo grupo 1 (Tarefa 2)

Alunos aperceberam-se que o cabeçalho da coluna D estava incorreto, alterando-o e definiram a coluna E para a “Área”.



	A	B	C	D	E
1	Comprimento	Largura	Largura	Perímetro	Área
2	25	12,5	12,5	50	=A2*F3
3	24	13	13	50	
4	22	14	14	50	
5	20	15	15	50	

Figura 4- 31: Outra reformulação da tabela já construída pelo grupo 1 (Tarefa 2)

Alunos definem as dimensões considerando apenas o perímetro como 50 metros e aproximando esses valores, manualmente, da área pretendida (300) - como evidência deste facto, observe-se a linha 6 na sequência de imagens.

The figure consists of five screenshots of a spreadsheet, each showing a different row of data. The columns are labeled A (Comprimento), B (Largura), C (Largura), D (Perímetro), and E (Área). The rows are numbered 1 to 6. Red circles highlight specific rows in each screenshot, indicating different cases or solutions.

Row	A (Comprimento)	B (Largura)	C (Largura)	D (Perímetro)	E (Área)
1	25	12,5	12,5	50	312,5
2	24	13	13	50	312
3	22	14	14	50	308
4	20	15	15	50	300
5	20	8	8	46	240
6	24	8	8	50	272
7	20	10	10	40	200
8	26	11	11	48	286
9	28	11	11	50	308

Figura 4- 32: Casos particulares do problema definidos pelo grupo 1 (Tarefa 2)

Após esta sequência de tentativas, os aprendizes começam a ter mais clarificado algumas relações entre o conjunto de valores.

SOMA					
	A	B	C	D	E
1	Comprimento	Largura	Largura	Perimetro	Área
2	25	12,5	12,5	50	312,5
3	24	13	13	50	312
4	22	14	14	50	308
5	20	15	15	50	300
6	=A5+1	11	11	50	308

SOMA					
	A	B	C	D	E
1	Comprimento	Largura	Largura	Perimetro	Área
2	25	12,5	12,5	50	312,5
3	24	13	13	50	312
4	22	14	14	50	308
5	20	15	15	50	300
6	21	=B5-1	11	43	231

A6					
	A	B	C	D	E
1	Comprimento	Largura	Largura	Perimetro	Área
2	25	12,5	12,5	50	312,5
3	24	13	13	50	312
4	22	14	14	50	308
5	20	15	15	50	300
6	21	14	14	49	294

A5					
	A	B	C	D	E
1	Comprimento	Largura	Largura	Perimetro	Área
2	25	12,5	12,5	50	312,5
3	24	13	13	50	312
4	22	14	14	50	308
5	20	15	15	50	300
6	21	14	14	49	294
7	22	13	13	48	
8	23	12	12	47	
9	24	11	11	46	
10	25	10	10	45	

D15					
	A	B	C	D	E
1	Comprimento	Largura	Largura	Perimetro	Área
2	25	12,5	12,5	50	312,5
3	24	13	13	50	312
4	22	14	14	50	308
5	22	16	16	54	352
6	23	15	15	53	345
7	24	14	14	52	
8	25	13	13	51	
9	26	12	12	50	
10	27	11	11	49	

D17					
	A	B	C	D	E
1	Comprimento	Largura	Largura	Perimetro	Área
2	25	12,5	12,5	50	312,5
3	24	13	13	50	312
4	22	14	14	50	308
5	22	16	16	54	352
6	23	15	15	53	345
7	24	14	14	52	336
8	25	13	13	51	325
9	26	12	12	50	312
10	27	11	11	49	297

Figura 4- 33: Outra Reformulação da tabela já construída pelo grupo 1 (Tarefa 2)

Consequentemente, definem fórmulas utilizando uma estratégia recursiva para as três primeiras colunas da sua tabela, embora só a partir da linha 6 (Figura 4- 34).

	A	B	C	D	E
1	Comprimento	Largura	Largura	Perimetro	Área
2	25	12,5	12,5	=A2+B2+C2	=A2*B2
3	24	13	13	=A3+B3+C3	=A3*B3
4	22	14	14	=A4+B4+C4	=A4*B4
5	22	16	16	=A5+B5+C5	=A5*B5
6	=A5+1	=B5-1	=C5-1	=A6+B6+C6	=A6*B6
7	=A6+1	=B6-1	=C6-1	=A7+B7+C7	=A7*B7
8	=A7+1	=B7-1	=C7-1	=A8+B8+C8	=A8*B8
9	=A8+1	=B8-1	=C8-1	=A9+B9+C9	=A9*B9
10	=A9+1	=B9-1	=C9-1	=A10+B10+C10	=A10*B10

Figura 4- 34: Estrutura da tabela obtida pelo grupo 1 após várias tentativas (Tarefa 2)

Os alunos demoraram a compreender a relação entre o “perímetro”, a largura e o comprimento do terreno e, por isso, não conseguiram atingir a generalização do problema nesta aula. Os alunos pareciam estar “bloqueados” e ansiosos pelo trabalho que ainda faltava realizar, não se conseguindo libertar de modo que o seu raciocínio fluísse.

Na segunda pergunta é que tivemos dificuldades. Não sabíamos como chegar á área máxima, bloqueámos. Não conseguíamos relacionar os valores, as variáveis e o que a professora pretendia que nós fizéssemos.

Depois lá utilizámos a folha de cálculo e introduzimos vários valores para ver se conseguíamos obter resposta. Até que achamos ter alcançado o objetivo e em responder á questão proposta.

Figura 4- 35: Excerto da exposição das dificuldades sentidas pelo grupo 1 (Tarefa 2)

No entanto, a professora propôs a realização do trabalho fora da sala de aula exigindo a explicação de todas as estratégias e procedimentos utilizados. Assim, a tabela obtida e as conclusões que explicitaram estão ilustradas na figura 4- 36.

Comprimento	Largura	Largura	Perímetro	Área
12	19	19	50	228
13	18,5	18,5	50	240,5
14	18	18	50	252
15	17,5	17,5	50	262,5
16	17	17	50	272
17	16,5	16,5	50	280,5
18	16	16	50	288
19	15,5	15,5	50	294,5
20	15	15	50	300
21	14,5	14,5	50	304,5
22	14	14	50	308
23	13,5	13,5	50	310,5
24	13	13	50	312
25	12,5	12,5	50	312,5
26	12	12	50	312
27	11,5	11,5	50	310,5
28	11	11	50	308
29	10,5	10,5	50	304,5
30	10	10	50	300
31	9,5	9,5	50	294,5
32	9	9	50	288
33	8,5	8,5	50	280,5
34	8	8	50	272
35	7,5	7,5	50	262,5
36	7	7	50	252
37	6,5	6,5	50	240,5
38	6	6	50	228
39	5,5	5,5	50	214,5
40	5	5	50	200
41	4,5	4,5	50	184,5
42	4	4	50	168

Comprimento	Largura	Largura	Perímetro	Área
12	19	19	=A2+B2+C2	=A2*B2
=A2+1	=B2-0,5	=C2-0,5	=A3+B3+C3	=A3*B3
=A3+1	=B3-0,5	=C3-0,5	=A4+B4+C4	=A4*B4
=A4+1	=B4-0,5	=C4-0,5	=A5+B5+C5	=A5*B5
=A5+1	=B5-0,5	=C5-0,5	=A6+B6+C6	=A6*B6
=A6+1	=B6-0,5	=C6-0,5	=A7+B7+C7	=A7*B7
=A7+1	=B7-0,5	=C7-0,5	=A8+B8+C8	=A8*B8
=A8+1	=B8-0,5	=C8-0,5	=A9+B9+C9	=A9*B9
=A9+1	=B9-0,5	=C9-0,5	=A10+B10+C10	=A10*B10
=A10+1	=B10-0,5	=C10-0,5	=A11+B11+C11	=A11*B11
=A11+1	=B11-0,5	=C11-0,5	=A12+B12+C12	=A12*B12
=A12+1	=B12-0,5	=C12-0,5	=A13+B13+C13	=A13*B13
=A13+1	=B13-0,5	=C13-0,5	=A14+B14+C14	=A14*B14
=A14+1	=B14-0,5	=C14-0,5	=A15+B15+C15	=A15*B15
=A15+1	=B15-0,5	=C15-0,5	=A16+B16+C16	=A16*B16
=A16+1	=B16-0,5	=C16-0,5	=A17+B17+C17	=A17*B17
=A17+1	=B17-0,5	=C17-0,5	=A18+B18+C18	=A18*B18
=A18+1	=B18-0,5	=C18-0,5	=A19+B19+C19	=A19*B19
=A19+1	=B19-0,5	=C19-0,5	=A20+B20+C20	=A20*B20
=A20+1	=B20-0,5	=C20-0,5	=A21+B21+C21	=A21*B21
=A21+1	=B21-0,5	=C21-0,5	=A22+B22+C22	=A22*B22
=A22+1	=B22-0,5	=C22-0,5	=A23+B23+C23	=A23*B23
=A23+1	=B23-0,5	=C23-0,5	=A24+B24+C24	=A24*B24
=A24+1	=B24-0,5	=C24-0,5	=A25+B25+C25	=A25*B25
=A25+1	=B25-0,5	=C25-0,5	=A26+B26+C26	=A26*B26
=A26+1	=B26-0,5	=C26-0,5	=A27+B27+C27	=A27*B27
=A27+1	=B27-0,5	=C27-0,5	=A28+B28+C28	=A28*B28
=A28+1	=B28-0,5	=C28-0,5	=A29+B29+C29	=A29*B29
=A29+1	=B29-0,5	=C29-0,5	=A30+B30+C30	=A30*B30
=A30+1	=B30-0,5	=C30-0,5	=A31+B31+C31	=A31*B31
=A31+1	=B31-0,5	=C31-0,5	=A32+B32+C32	=A32*B32

Figura 4- 36: Tabela final obtida pelo grupo 1 (Tarefa 2)

Analisando a estrutura da tabela, é notável que a estratégia utilizada continuou a ser recursiva para as três primeiras colunas.

Os alunos definiram um caso particular, que verifica apenas o facto de o perímetro ser 50, na primeira linha da tabela. Na primeira coluna optaram por escrever uma sequência de números naturais e nas outras duas, definiram um incremento de “-0,5” porque a partir das suas tentativas tinham observado que diminuindo a largura e aumentando o comprimento, o perímetro mantinha-se sempre 50. Por este motivo e, erradamente (pois a constante é 300), escrevem:

Concluímos que o comprimento tinha que ser sempre superior a 20 e a largura inferior a 15, daí que subtraímos 0,5 á largura e adicionámos 1 ao comprimento.

Figura 4- 37: Parágrafo das conclusões do grupo 1 (Tarefa 2)

Uma vez encontradas várias combinações das dimensões do terreno cuja soma perfazia 50 e identificando uma regularidade e simetria de valores na tabela (assinalada com cores diferentes), permitiu que os alunos afirmassem, com toda a certeza, a existência de apenas duas dessas combinações que eram solução do problema. Por isso, escreveram:

4º Passo: Analisando a tabela descobrimos que havia só mais uma alternativa:

$\text{Perímetro} = \text{lado} + \text{lado} + \text{comprimento}$ $= 30 + 10 + 10$ $= 50 \text{ m}$	$\text{Área} = \text{lado} \times \text{comprimento}$ $= 10 \times 30$ $= 300 \text{ m}^2$
---	--

Figura 4- 38: Segunda solução do grupo 1 à primeira questão do problema (Tarefa 2)

Ainda assim, não satisfeitos apenas com a representação tabelar da situação, constroem o gráfico correspondente (apesar de os seus eixos não estarem definidos) e concluem:

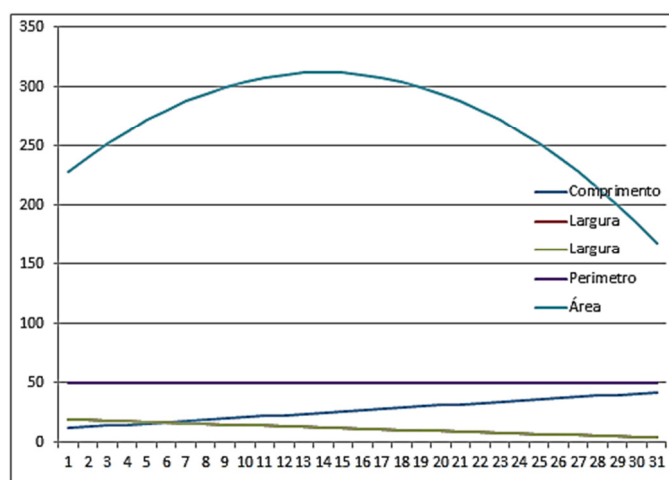


Figura 4- 39: Representação gráfica do problema elaborado pelo grupo 1 (Tarefa 2)

Através do gráfico chegamos exatamente às mesmas conclusões, havendo duas respostas para a mesma pergunta. Observamos que o perímetro mantém-se constante, a largura aumenta tal como o comprimento e a área tem um ligeiro aumento e logo a seguir diminui.

Resposta: O terreno terá de ter 20 metros de comprimento e 15 metros de largura ou então 30 metros de comprimento e 10 metros de largura.

Figura 4- 40: Análise e interpretação do gráfico pelo grupo 1 (Tarefa 2)

Na fase de interpretação, os alunos do grupo 2 solicitaram a professora para clarificar a sua dúvida concetual, pois estavam confusos com as noções de área e de perímetro. Após esclarecidos, iniciaram o seu trabalho exprimindo-se através de uma representação icónica da cerca, possível mediante as condições apresentadas e que julgaram ser única. Nesse esquema, têm o cuidado de escrever nos lados os comprimentos de cada um e, apesar de não escreverem, consideraram em primeiro lugar o facto de o perímetro ser 50 e só posteriormente é que verificaram a área do terreno.

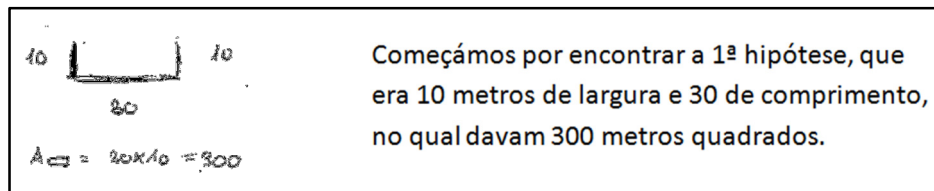


Figura 4- 41: 1.º Excerto do relatório realizado pelo grupo 2 (Tarefa 2)

Na tentativa de corresponder ao solicitado pela professora em relação à possibilidade de mais soluções, o grupo 2 passou a desenhar mais representações da cerca, explicando o seu raciocínio.

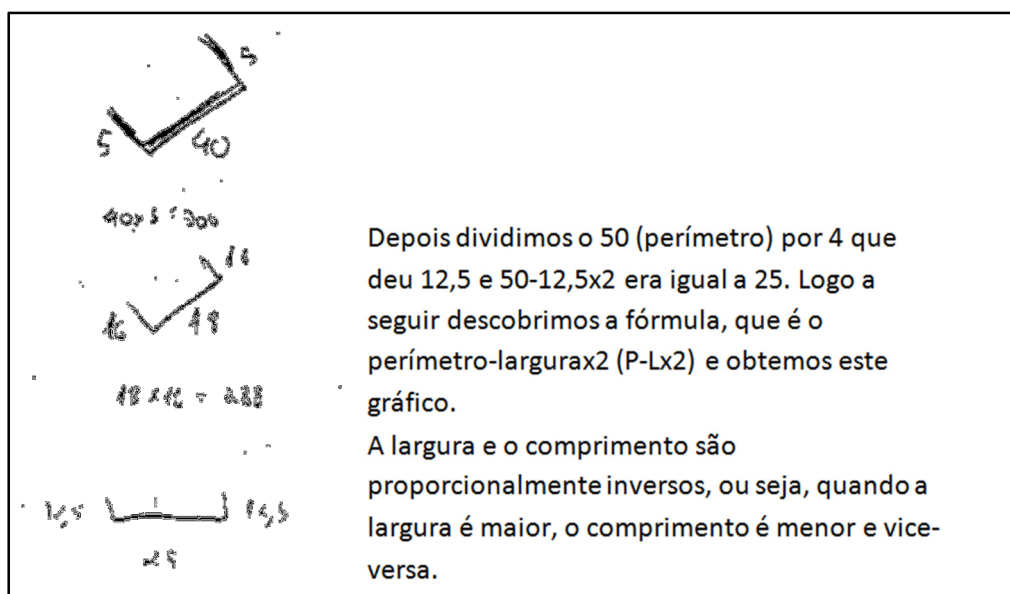


Figura 4- 42: 2.º Excerto do relatório realizado pelo grupo 2 (Tarefa 2)

Pelo que se observa na imagem da figura acima, entende-se que os alunos encontraram as dimensões da cerca por tentativa-erro, uma vez que elas apenas respeitavam uma das condições. No entanto, foi a partir destes casos particulares que os alunos estabeleceram uma relação entre as dimensões da cerca (largura e comprimento no “retângulo” e comprimento total, o qual designaram por perímetro). Usando esta generalização, procuraram mais casos particulares da situação.

Ainda referente à primeira pergunta da tarefa, os alunos do grupo 3, também começam por apresentar diferentes hipóteses para as dimensões do terreno apresentadas sob a forma de esquemas que registam numa tabela da folha de cálculo com três colunas: a do comprimento, a da largura e a da área.

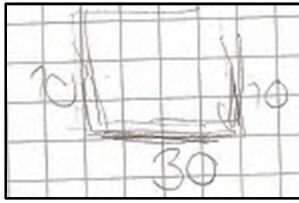


Figura 4- 43: Exemplo de um esquema realizado pelo grupo 3 (Tarefa 2)

1º Queríamos descobrir o comprimento do lado do muro que teria que ser igual ao comprimento do lado paralelo. Pensámos em dividir os 50 metros pelos 3 lados da rede: $10 + 10 + 30 = 50$.

2º No entanto descobrimos que há mais possibilidades de dividir os 50 metros pelos 3 lados, por exemplo: $15 + 15 + 20 = 50$.

3º Então como existem demasiadas possibilidades, desistimos dessa ideia.

4º Resolvemos recorrer aos nossos conhecimentos matemáticos. Se $x =$ ao lado mais pequeno do rectângulo, e $y =$ ao lado maior do rectângulo, então $X \times Y = 300$.

5º Descobrimos que há várias maneiras de resolver esta equação. Se $X = 10$ e $Y = 30$, $X \times Y = 300$; Se $X = 15$ e $Y = 20$, $X \times Y = 300$.

6º Recorremos à folha de cálculo para descobrir mais possíveis valores e, na coluna do X escrevemos $=A2+1$; e na coluna do Y escrevemos $=B2-2$

Figura 4- 44: Descrição do processo pelo grupo 3 na procura da generalização (Tarefa 2)

	A	B	C
1	comprimento	largura	área
2	1	48	48
3	2	46	92
4	3	44	132
5	4	42	168
6	5	40	200
7	6	38	228
8	7	36	252
9	8	34	272
10	9	32	288
11	10	30	300
12	11	28	308
13	12	26	312
14	13	24	312
15	14	22	308
16	15	20	300
17	16	18	288
18	17	16	272
19	18	14	252
20	19	12	228

	A	B	C
1	comprimento	largura	área
2	1	48	=A2*B2
3	=A2+1	=B2-2	=A3*B3
4	=A3+1	=B3-2	=A4*B4
5	=A4+1	=B4-2	=A5*B5
6	=A5+1	=B5-2	=A6*B6
7	=A6+1	=B6-2	=A7*B7
8	=A7+1	=B7-2	=A8*B8
9	=A8+1	=B8-2	=A9*B9
10	=A9+1	=B9-2	=A10*B10
11	=A10+1	=B10-2	=A11*B11
12	=A11+1	=B11-2	=A12*B12
13	=A12+1	=B12-2	=A13*B13
14	=A13+1	=B13-2	=A14*B14
15	=A14+1	=B14-2	=A15*B15
16	=A15+1	=B15-2	=A16*B16
17	=A16+1	=B16-2	=A17*B17
18	=A17+1	=B17-2	=A18*B18
19	=A18+1	=B18-2	=A19*B19
20	=A19+1	=B19-2	=A20*B20

Figura 4- 45: 1.ª tabela construída pelo grupo 3 (Tarefa 2)

A tabela da esquerda da figura acima, construída pelo grupo 3, mostra apenas os valores obtidos; a da direita representa a mesma tabela, mas mostra as relações encontradas através das fórmulas

introduzidas. Esta última foi obtida pela investigadora usando a função da folha de cálculo “Mostrar fórmulas” para que se apresentasse, neste estudo, uma evidência do processo utilizado.

Da observação das tabelas, ressaltam três situações distintas relacionadas com as relações que estabelecem quer entre a sequência de valores da cada variável (correspondente a cada coluna) quer entre os valores das variáveis (correspondente à covariação).

A primeira é relativa ao facto de os alunos considerarem a variável comprimento no domínio do conjunto dos números naturais, o que os levou a escrever, na primeira coluna, a sequência deste tipo de números cujo incremento é um. Após esta percepção, generalizam esta variação escrevendo na célula A3 a fórmula “A2+1”, replicando ao longo da coluna, puxando para baixo a alça desta célula pelo canto inferior direito. Este procedimento é utilizado por todos os grupos ao longo desta investigação.

A segunda situação foi consequência da observação dos resultados da largura obtidos manualmente e recorrendo à calculadora (sem recurso à folha de cálculo). Observaram apenas a sequência de valores que deveriam aparecer na segunda coluna e utilizando uma estratégia recursiva concluem que é decrescente com incremento de “-2”. Eles dizem “À medida que vão aumentando o comprimento, a largura diminui duas unidades”. Apesar de nesta afirmação se referirem ao comprimento não estabelecem uma dependência entre as variáveis envolvidas. Por isso, escrevem na célula B2 o número 48 e só em B3 inserem a fórmula que expressa a sua conjectura “=B2-2”.

A terceira situação prende-se com o conhecimento da noção de área e da fórmula de cálculo desta medida de qualquer retângulo. Em C2, escrevem “=A2*B2”, para que a folha de cálculo pudesse devolver o produto do comprimento pela largura em cada caso particular ao longo da tabela.

Apesar de não se verificar uma forma de pensamento funcional na segunda situação, mediante uma tabela com valores corretos que correspondiam ao facto de o comprimento da rede disponível para vedar o terreno ser 50, bastou-lhes analisar a terceira coluna para encontrar as dimensões cuja área era 300, como solicitado. Claro, que sem dificuldades deram resposta à primeira questão.

Síntese

Comparando o trabalho desenvolvido pelos três grupos, a investigadora verificou que os grupos 2 e 3 tiveram maior facilidade em iniciar a resolução do problema, em definir as estratégias e procedimentos a utilizar e em concluir.

O grupo 3 destacou-se pelas estratégias que utilizou e pela forma como comunicou; o grupo 2 evidenciou-se também na definição das estratégias mas revelou dificuldades na comunicação; o grupo 1 sentiu muitas dificuldades na interpretação e na definição de estratégias de resolução, estando presos a procedimentos aritméticos e por não terem conseguido elevar o seu raciocínio tentando observar a estrutura que suportava a generalização deste problema.

O trabalho dos grupos 2 e 3 evidenciou mais claramente aspetos do pensamento algébrico, elevando a vertente “pensamento funcional”.

Após esta descrição dos processos destes grupos de alunos na interpretação e resolução da primeira pergunta deste problema, outra questão se levantava: “E se se desejasse um terreno com a área máxima?” (quais eram as suas dimensões?).

A decisão do grupo 1, passou por observar as representações tabelar e gráfica do problema:

1º Passo: Para descobriremos as dimensões do terreno com a área máxima respeitando a condição de 50 metros observámos a tabela e o gráfico que construímos na folha de cálculo.

Figura 4- 46: 1.º passo do grupo 1 para determinar a área máxima do terreno

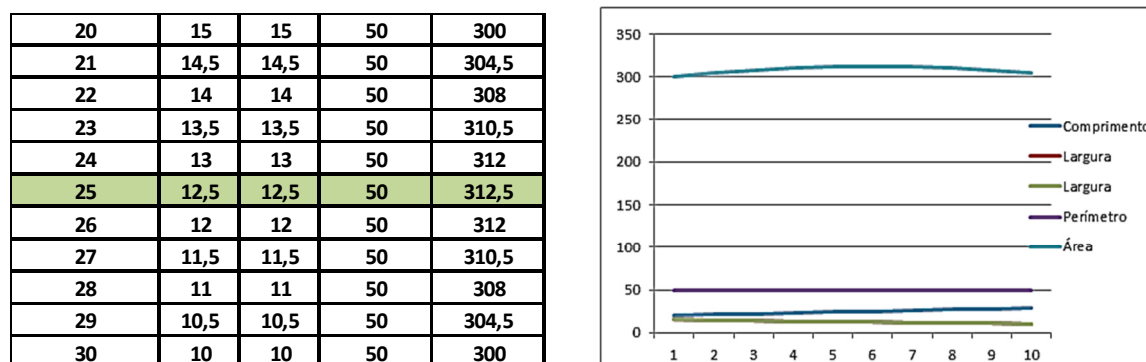


Figura 4- 47: Representações tabelar e gráfica do problema pelo grupo 1

Da última tabela construída, os alunos focaram-se entre os 20 e os 30 metros de comprimento, realçando a combinação que ressaltava a área máxima. Quanto ao gráfico, revela algumas ambiguidades, como é exemplo o eixo das abcissas para o qual não está definida a variável que representa. No entanto, os alunos analisam e concluem:

Também observando o gráfico da tabela conseguimos concluir que o perímetro mantém-se constante, o comprimento vai aumentando, a largura vai diminuindo e a área começa a aumentar atingindo o seu valor máximo (312,5 m²) e depois diminui.

Figura 4- 48: Análise e interpretação das representações tabelar e gráfica pelo grupo 1

Mediante mais uma dúvida sobre o conceito, o grupo dois solicita a professora a fim de clarificar a expressão “área máxima”. Após o esclarecimento e a olhar para a folha de cálculo, os alunos iniciaram a estruturação de uma tabela com as variáveis com que trabalhavam. Construíram uma tabela de três colunas, designando-as por x , y e $total$. Com o intuito de não perderem o sentido destas letras, a investigadora questionou-os sobre o seu significado e propôs que escrevessem no

cabeçalho da tabela as designações consideradas. Os alunos responderam que x representava o comprimento, y a largura e o total, a área.

Iniciaram o preenchimento da tabela com os valores que já tinham encontrado na folha de rascunho (figura 4- 49).

Observando o último dos seus exemplos, a investigadora sem compreender o processo pediu que a esclarecessem sobre a forma como tinham calculado o valor do comprimento.

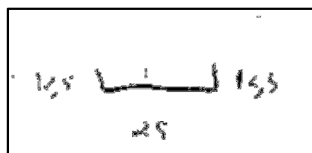


Figura 4- 49: Representação de uma combinação possível do problema apresentada pelo grupo 2 (Tarefa 2)

Certos do seu trabalho e usando a calculadora, mostraram “ $50:4=12,5$ ”, cujo quociente consideraram a largura do terreno; fizeram “ $50-12,5-12,5=25$ ” e afirmam que 25 é o comprimento desse mesmo terreno de largura 12,5. Repare-se que nesta estratégia está implícito que os alunos imaginam esse terreno como sendo de forma quadrada (por isso, dividem o comprimento da rede por quatro), mas como este tem um muro num dos lados, ao comprimento total da rede subtraem a rede utilizada nos lados opostos onde não há muro.

Da análise do conjunto dos casos particulares, os alunos partem para a generalização, registrando que “*comprimento = perímetro – largura \times 2*”. Simplificando esta fórmula, em vez de palavras utilizaram letras, o que lhes permitiu observar que estas podem ter significados diferentes (P representava uma constante e c e l , variáveis). Entusiasmados com a sua descoberta, procederam à confirmação, com papel e lápis, da primeira tentativa para descobrir as dimensões do terreno.

Figura 4- 50: Escrita da equação pelo grupo 2 (Tarefa 2)

Na primeira coluna da folha de cálculo (Figura 4- 51) escreveram uma sequência de números naturais (com a escrita da fórmula “ $=A2+5$ ”, na célula A3), na segunda, substituíram os seus valores já introduzidos manualmente, pela relação descoberta e, na terceira, introduziram a fórmula da área do retângulo “ $=A2*B2$ ”. Claramente, este grupo realça uma das vertentes do

pensamento algébrico - o pensamento funcional. Assim que copiam as fórmulas para as linhas seguintes da tabela, observam que nas segunda e terceira colunas (correspondentes ao comprimento e à área, respetivamente), a folha de cálculo lhes devolve valores negativos (a partir da linha 7).

	A	B	C
1	Largura	Comprimento	Área
2	1	48	48
3	6	38	228
4	11	28	308
5	16	18	288
6	21	8	168
7	26	-2	-52
8	31	-12	-372
9	36	-22	-792
10	41	-32	-1312
11	46	-42	-1932

	A	B	C
1	Largura	Comprimento	Área
2	1	=50-A2*2	=A2*B2
3	=A2+5	=50-A3*2	=A3*B3
4	=A3+5	=50-A4*2	=A4*B4
5	=A4+5	=50-A5*2	=A5*B5
6	=A5+5	=50-A6*2	=A6*B6
7	=A6+5	=50-A7*2	=A7*B7
8	=A7+5	=50-A8*2	=A8*B8
9	=A8+5	=50-A9*2	=A9*B9
10	=A9+5	=50-A10*2	=A10*B10
11	=A10+5	=50-A11*2	=A11*B11

Figura 4- 51: Excerto da tabela obtida pelo grupo 2 após escrita da relação entre dimensões do terreno e perímetro (Tarefa 2)

Perante esta nova situação, os alunos ficam perplexos e procuram razões que justificam este facto, lembrando-se de que tinham uma condição imposta “a rede disponível para a vedação era apenas de 50 metros”. Uma vez que os valores negativos estavam fora do âmbito deste problema, os alunos continuam a explorar os casos particulares possíveis (agora devolvidos pelas relações funcionais impostas em cada coluna), tendendo a não dar mais importância às linhas com valores negativos, chegando a eliminá-las.

- E também quando continuámos a tabela e verificámos que os valores começavam a ficar negativos porque depois de 25 a soma das larguras dá mais de 50 e o comprimento tem de ser negativo para subtrair o excesso e dar 50 outra vez.

Figura 4- 52: Justificação da devolução de valores negativos na tabela dada pelo grupo 2 (Tarefa 2)

Assim sendo, depararam-se com um número reduzido de casos, o que os levou a diminuir o incremento da primeira coluna de 5 para 1, estendendo todas as colunas da sua tabela até à linha 26. Depois de analisarem a tabela, evidenciando algumas das suas características: (i) existência de uma simetria na terceira coluna (a da área), em relação às linhas correspondentes à área 312 metros quadrados; (ii) existência de um valor máximo para a largura de 25 metros; (iii) existência de duas linhas cujas áreas eram o mesmo valor (312).

	A	B	C
1	Largura	Comprimento	Área
2	1	48	48
3	2	46	92
4	3	44	132
5	4	42	168
6	5	40	200
7	6	38	228
8	7	36	252
9	8	34	272
10	9	32	288
11	10	30	300
12	11	28	308
13	12	26	312
14	13	24	312
15	14	22	308
16	15	20	300
17	16	18	288
18	17	16	272
19	18	14	252
20	19	12	228
21	20	10	200
22	21	8	168
23	22	6	132
24	23	4	92
25	24	2	48
26	25	0	0

Figura 4- 53: Tabela obtida pelo grupo 2 (Tarefa 2)

Relativamente à última característica mencionada, os alunos tendem a considerar que esse será o valor máximo da área e é neste ponto que a professora os interpelou, incentivando-os a fazerem prova de que não existe mais nenhum maior em relação àquele que consideraram. Os alunos, após uma breve reflexão e silêncio, decidiram voltar a diminuir o incremento da primeira coluna, de 1 para 0,5. Logo observaram que afinal ainda existia: era o 312,5, para a largura de 12,5 e o comprimento de 25.

Perante as suas descobertas e evolução e elevação dos seus raciocínios evidenciados durante esta aula, demonstraram ficar espantados e, em simultâneo, agradados e felizes, pois tudo o que alcançam de novo, no domínio da matemática, é uma vitória, tendo em conta a sua baixa autoestima e confiança.

Mas, não satisfeitos somente com as respostas da representação tabelar, quiseram inserir o gráfico que expressa a relação entre o comprimento e a área deste terreno. Houve um problema de sintaxe a tabela era composta por três colunas e os alunos apenas podiam considerar duas delas. A professora ajudou a ultrapassar esta situação, ensinando-os a esconder a coluna não pretendida. Quando conseguiram inserir a representação gráfica, mostraram-se espantados com a parábola e referiram estar “esquisito”, franzindo o sobrolho. Na tentativa de tornar a imagem gráfica mais agradável e com o intuito de incentivar os alunos a continuar, a professora ajudou a formatar o ícone dos pontos (estava muito grande e desproporcional).

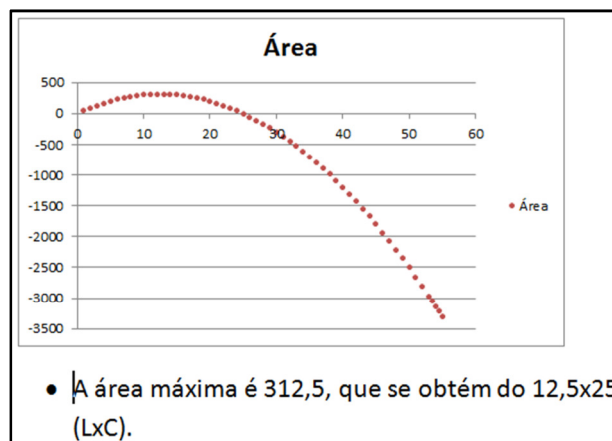


Figura 4- 54: Gráfico obtido pelo grupo 2 (tarefa 2)

Os alunos, “arregaçaram as mangas” e começaram a elaborar o relatório das suas produções, tal como solicitado, revelando dificuldades na exposição das justificações de situações matemáticas.

À semelhança do grupo dois, também o grupo três construiu uma tabela cuja primeira coluna tinha uma sequência de números naturais consecutivos e a terceira (correspondente à área), dois valores, também seguidos, com o mesmo valor 312 (Fig.4- 45). A abordagem a esta situação pela professora foi feita do mesmo modo que no grupo dois, mas obteve reações diferentes por parte dos alunos. Estes questionaram a professora sobre a hipótese de ser possível as dimensões serem expressas com números decimais, esquecendo-se que estavam perante um problema real. Após o esclarecimento, alteraram o incremento da primeira coluna de 1 para 0,5 e replicaram a nova fórmula às restantes linhas da tabela (Fig. 4 -55).

	A	B	C		A	B	C
1	comprimento	largura	área	1	comprimento	largura	área
2	1	48	48	2	1	48	=A2*B2
3	1,5	46	69	3	=A2+0,5	=B2-2	=A3*B3
4	2	44	88	4	=A3+0,5	=B3-2	=A4*B4
5	2,5	42	105	5	=A4+0,5	=B4-2	=A5*B5
6	3	40	120	6	=A5+0,5	=B5-2	=A6*B6
7	3,5	38	133	7	=A6+0,5	=B6-2	=A7*B7
8	4	36	144	8	=A7+0,5	=B7-2	=A8*B8
9	4,5	34	153	9	=A8+0,5	=B8-2	=A9*B9
10	5	32	160	10	=A9+0,5	=B9-2	=A10*B10
11	5,5	30	165	11	=A10+0,5	=B10-2	=A11*B11

Figura 4- 55: Tabela obtida pelo grupo 3 (tarefa 2)

Mas, ao contrário do que aconteceu no grupo dois, os valores da segunda coluna (correspondente à largura) não ficaram atualizados, uma vez que não havia uma dependência desta em relação à primeira. Logo que se aperceberam da situação e após a análise da mesma, procuraram regularidades nos seus casos particulares de modo a definirem a largura em função do

comprimento, rabiscaram algumas condições e expressões no seu caderno, escreveram “=50-A2*2” na célula B2 e replicaram a fórmula às restantes linhas dessa coluna.

7º Tivemos que descobrir uma fórmula para relacionar o x com o y, para que ao mudar o valor de x, o y mudasse também para que o seu produto desse sempre 50. Então fica =50-A2*2.

Figura 4- 56: Descrição do 7.º passo do grupo 3 na resolução do problema (tarefa 2)

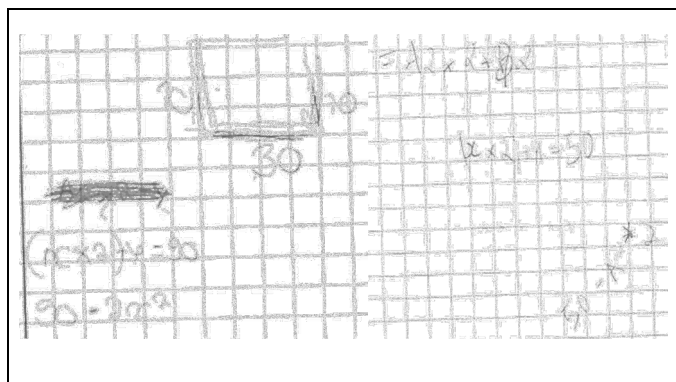


Figura 4- 57: Rabiscos do grupo 3 (tarefa 2)

Obviamente que a tabela foi igual à do grupo dois revelando a área máxima de 312,5 metros quadrados.

8º Descobrimos que os comprimentos têm que ser $x=10$ e $y=30$ ou $x=15$ e $y=20$. E a área máxima conseguida com os 50 metros de rede é 312,5.

Figura 4- 58: Conclusões do grupo 3 (tarefa 2)

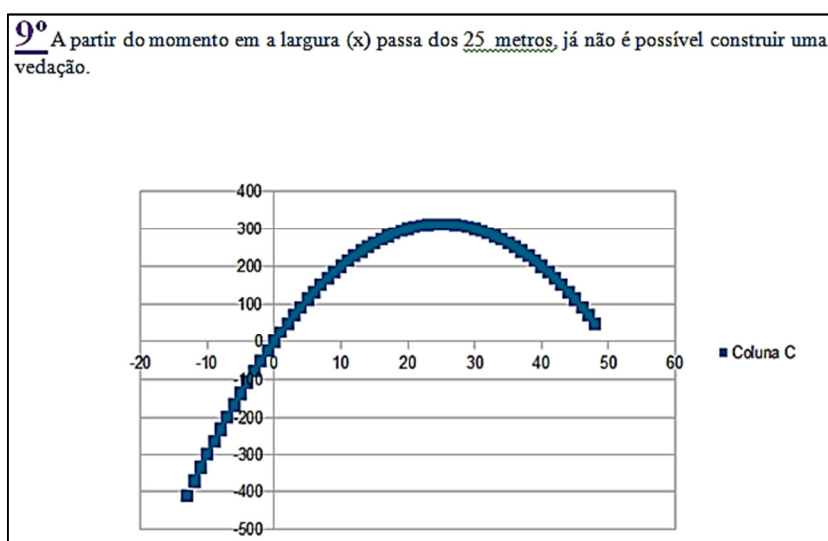


Figura 4- 59: Gráfico da área do terreno em função da largura construído pelo grupo 3 (tarefa 2)

Os alunos deste grupo, ao utilizarem a FC na resolução deste problema puderam fazer as tentativas que consideraram necessárias sem o julgamento de outros. Na construção inicial da tabela, primeira representação convencional da matemática escolhida para os auxiliar, não tinha uma estrutura funcional entre colunas. Esta só foi encontrada a partir da análise dos casos particulares do problema apoiada em diagramas representativos da situação a resolver. A partir da descoberta, os alunos utilizaram a expressão algébrica da situação, mascarada pela fórmula da FC, a segunda representação convencional da matemática. Consequentemente, constroem o gráfico da tabela. Da observação deste, escrevem que a partir dos 25 metros não é possível construir a vedação, situação que não é verdadeira. A partir deste comprimento, as hipóteses do problema são iguais às obtidas até 25 metros. Embora não tenha influenciado a resposta ao solicitado, o grupo nada referiu sobre o facto de haver pontos representados no 3.º quadrante, cujas coordenadas estão associados a dimensões negativas.

Tarefa 3 - Quadrados inscritos em quadrados

Esta tarefa foi inspirada num exercício resolvido do manual de 10.º ano, da Areal Editores, “Infinito 10” (volume 2) de Ana Jorge, Conceição Alves, Graziela Fonseca e Judite Barbedo cujo objetivo era investigar sobre as relações existentes entre o deslocamento de um ponto do lado do quadrado e a área de outro inscrito no mesmo quadrado.

A figura abaixo é uma impressão da *applet* construída pela investigadora em *GeoGebra*, disponibilizada aos alunos na disciplina de Matemática de 9.º ano da plataforma *Moodle*, sendo um suporte dinâmico e visual ao estabelecimento das relações pretendidas.

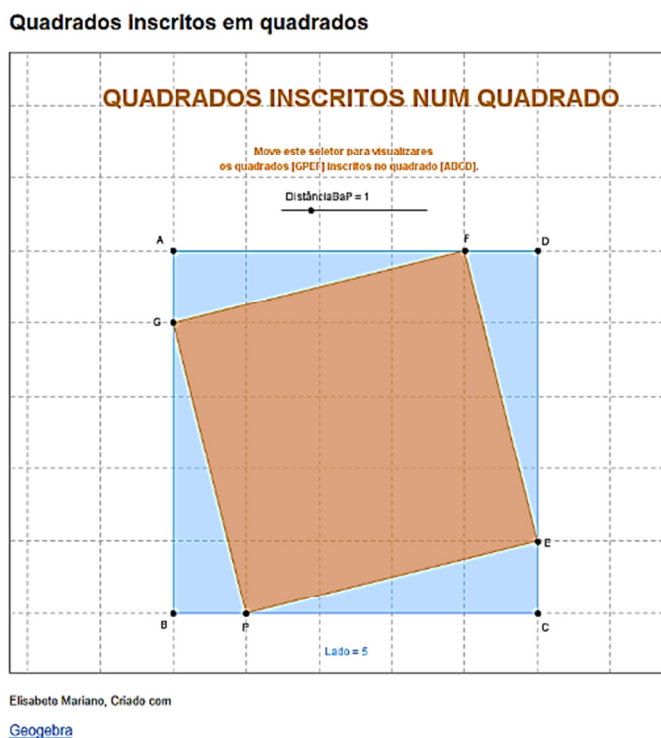


Figura 4- 60: *Applet* de apoio à tarefa 3 construído pela investigadora

Esta tarefa ocupou dois blocos de 90 minutos. No primeiro, após terem acedido à *applet* e preparado os ficheiros de *Word* e *Excel*, houve um momento de adaptação e exploração desta pequena aplicação, seguida da resposta às seis primeiras questões colocadas (Anexo 3). O segundo bloco foi ocupado a resolver as três últimas questões da tarefa (da sete à nove) e a concluir o relatório solicitado.

Em ambos os blocos, à semelhança do primeiro bloco da tarefa 2, as aulas decorreram numa sala equipada com computadores, em forma de U, em que os alunos também estiveram organizados em grupos de dois alunos com um computador para cada grupo. Após a entrada na sala de aula, procedeu-se à escrita do sumário, à distribuição da tarefa, à leitura do enunciado no grupo turma e ao acesso à *applet* de apoio ao problema. Os alunos trabalharam autonomamente apenas com o apoio da professora/ investigadora da turma. A interpretação do problema foi realizada em cada grupo pelas suas especificidades, sendo solicitado o auxílio da professora quando, principalmente, os alunos se deparavam com dificuldades em estabelecer relações. Este facto verificou-se com muita frequência na quarta questão da tarefa, na qual estava o cerne do pensamento algébrico, uma vez que apelava à capacidade de organizar os dados do problema e de identificação das regularidades existentes com vista à generalização.

Apesar de a tarefa contemplar duas questões que envolviam uma generalização mais ampla do problema (“*Para ir mais além*”) e que foram colocadas com o intuito de desafiar o raciocínio dos alunos com maior ritmo de resolução e de desempenho, não foram resolvidas por nenhum dos discentes da turma.

Tal como na tarefa 2, todos os alunos enviaram os dois ficheiros criados para o correio eletrónico da investigadora e professora da turma.

Exploração inicial da *applet* “Quadrados inscritos em quadrados”

Na primeira fase de exploração da *applet*, observaram-se atitudes diferentes entre os três grupos.

Todos os grupos moveram o seletor da distância de B a P e, pausadamente, analisaram o que acontecia ao quadrado inscrito [GPEF] com o intuito de procurar relações, apesar de o grupo 2 não ter logo identificado o ponto P na *applet*. Por este facto solicitou a ajuda da professora a fim de a questionar sobre o que tinham de mover.

Contextualização do problema

Com o intuito de localizar os alunos no plano e de os ajudar na contextualização do problema, estas primeiras questões parecem ser fundamentais.

A primeira pretendia que os alunos identificassem as coordenadas dos vértices do quadrado em função do deslocamento do seu vértice P. A segunda, tinha como finalidade, alertar para o domínio do problema, útil nas questões seguintes.

Tal como se identifica na tarefa (Anexo 3), na pergunta 1, a professora indicou que tinham de considerar o ponto B como sendo a origem do referencial e identificar as coordenadas dos vértices do quadrado [GPEF] em função do deslocamento do ponto P, considerando que o lado do quadrado [ABCD] tinha 5 unidades de comprimento.

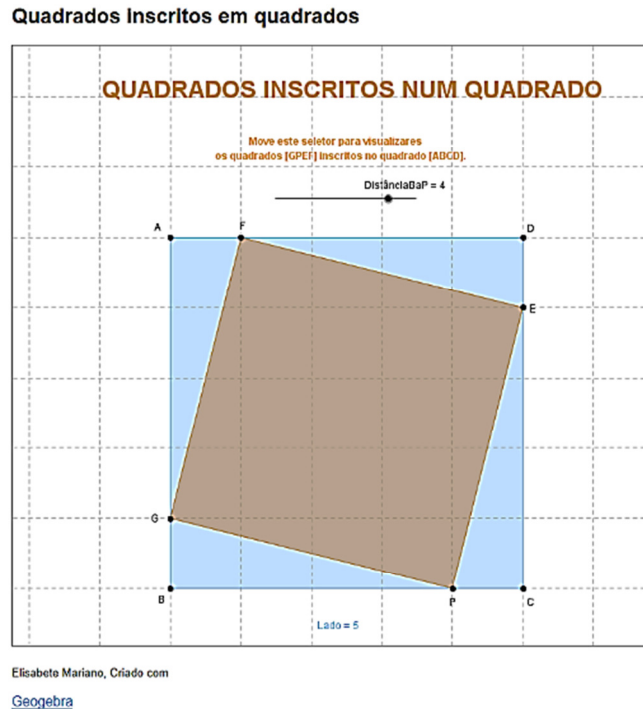


Figura 4- 61: Manipulação da *applet* quando a distância de B a P era 4 unidades

Os grupos 1 e 3 manifestaram dúvidas referentes à indicação das coordenadas dos pontos em função das condições dadas.

O primeiro grupo, numa primeira fase, indica apenas as coordenadas do ponto P para as duas situações (P é deslocado 1 unidade e 4 unidades) mas, incorretamente. Recorrendo à *applet*, os alunos identificaram as coordenadas dos restantes pontos mas mantiveram as coordenadas de alguns incorretas (as de P na alínea a) e as de P, F e G na alínea b)), que posteriormente, alteraram, mas continuando algumas delas erradas.

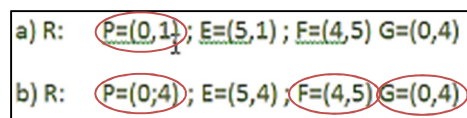


Figura 4- 62: Coordenadas dos pontos, quando P é deslocado 1 e 4 unidades, respetivamente, pelo grupo 1

O grupo 3, apresentou a mesma dúvida que o grupo 1 e prosseguiu na resposta a esta questão com facilidade, embora incompleta, movendo o seletor para os valores pretendidos.

1 → Na 1ª questão da ficha usámos o applet “quadrados inscritos em quadrados”. Ao verificarmos que o lado do quadrado [ABCD]=5, considerámos o ponto B o ponto de origem de um referencial e ao movermos o quadrado [GPEF] descobrimos que a resposta de a) (1;0) e b) (4;0).

Figura 4- 63: Resposta do grupo 3 à primeira questão (tarefa 3)

O grupo 2 não sentiu dificuldades e apresentaram a sua resposta ilustrada com a *applet*, apesar de se verificarem algumas incorreções no que respeita às coordenadas de alguns pontos (as de E na alínea a) e as de E na alínea b)).

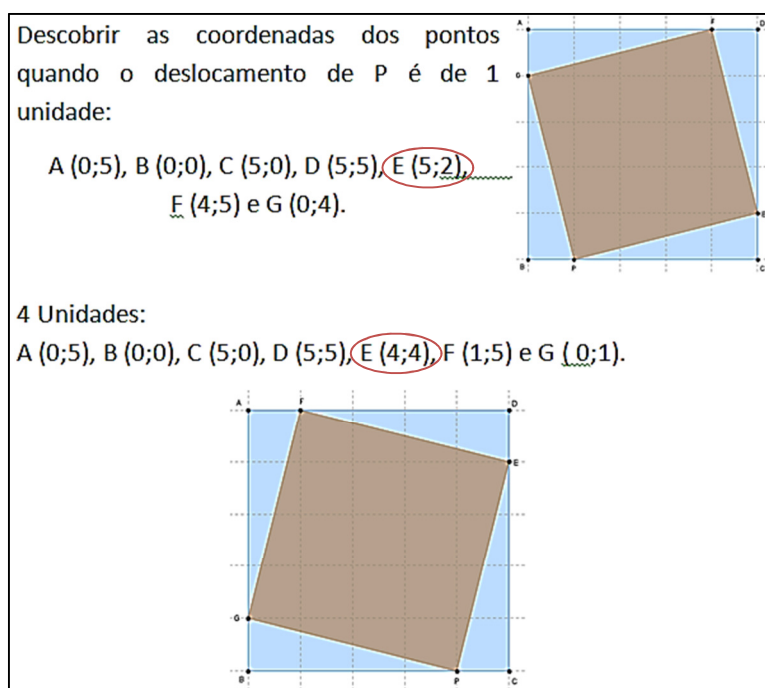


Figura 4- 64: Resposta completa do grupo 2 à primeira questão (tarefa 3)

Nesta primeira questão, o embaraço revelado por estes alunos prende-se com alguma dificuldade de abstração mas, essencialmente, com alguma distração e reduzida concentração no arranque da resolução da tarefa.

Na pergunta dois, os alunos não revelaram dificuldades pelo que tinha sido exigido na questão um. No entanto, o grupo 2 chamou a professora para se certificar da sua resposta. Um destes alunos explicou muito claramente a razão pela qual o limite máximo do domínio é 5 - “é o comprimento do lado do quadrado” - e ilustrou a situação como mostra a figura 4- 65.

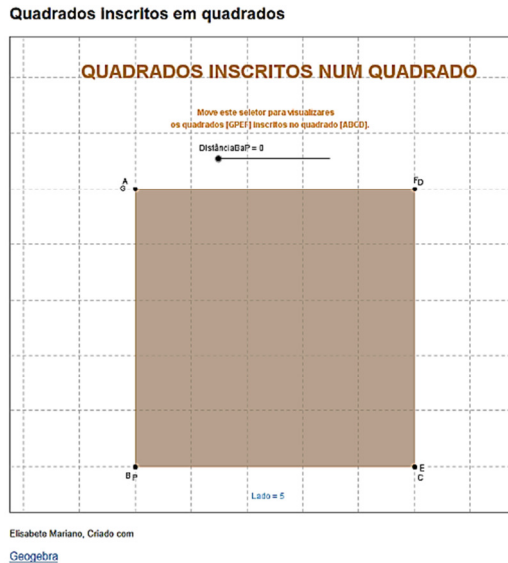


Figura 4- 65: Visualização geométrica do limite máximo do domínio do problema pelo grupo 2 (tarefa 3)

2. Varia entre 0 e 5, porque o lado do quadrado [ABCD] tem de comprimento 5 unidades.

Figura 4- 66: Indicação do domínio do problema pelos grupos 2 e 3 (tarefa 3)

R:O valor varia entre 0 e 5 ou seja: $[0,5]$...

Figura 4- 67: Indicação do domínio do problema pelo grupo 1 (tarefa 3)

Todos os grupos relacionaram a variação do deslocamento de P com o comprimento do lado do quadrado, tendo o grupo 1 necessidade de recorrer à representação visual geométrica como forma de confirmação da sua resposta. Também se evidencia que os grupos 2 e 3 se expressaram em linguagem natural e o grupo 1 usou a simbologia matemática de intervalos de números reais para se referirem ao domínio do problema.

Generalização do problema

A partir da terceira questão da tarefa, pretende-se orientar os alunos para a generalização do problema - estabelecer uma relação entre a distância de B a P e a área de qualquer quadrado inscrito no quadrado [ABCD].

A pergunta três apontava para um caso particular - a área do quadrado inscrito no quadrado [ABCD] quando a distância de B a P era 1 unidade - no qual os alunos tiveram de recorrer a ferramentas matemáticas já apresentadas anteriormente (Teorema de Pitágoras, resolução de

equações incompletas do 2.º grau a uma incógnita e operações com números reais), sem as quais seria impossível resolver o problema.

O grupo 2 revelou algumas dificuldades na visualização de um dos triângulos retângulos, que foram ultrapassadas com a manipulação da *applet*. Os alunos identificaram as relações existentes entre os lados do triângulo e do quadrado e a área deste último, o que os levou a aplicar o Teorema de Pitágoras para calcularem a medida do lado do quadrado inscrito no quadrado [ABCD]. Na resolução da equação obtida, denotaram-se obstáculos relacionados com as operações com os números reais.

Os grupos 1 e 3, não evidenciaram dificuldades. No entanto, é de salientar que os grupos 1 e 2 não se aperceberam de que o quadrado da hipotenusa era a área do quadrado [GPEF], como o grupo 3.

Se o deslocamento de P for de 1 unidade, qual é o valor exacto da área do quadrado [GPEF]?
 Mostra como chegaste à tua resposta.

$C1^2, C2^2 = h^2$ $1+16 = h^2$ $h = \pm\sqrt{17}$
 $C5^2 = \sqrt{17}^2$ $A_D = L \times L$
 $A_D = \sqrt{17} \times \sqrt{17}$
 $A_D = 17$

Utilizamos o Teorema de Pitágoras para descobrir o lado do quadrado;
 Fomos calcular a área do quadrado e chegamos á conclusão que o valor é 17.

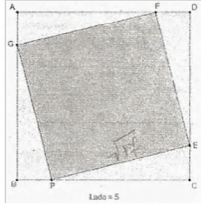
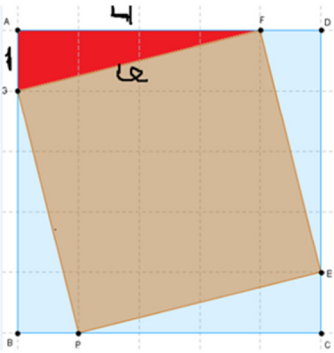


Figura 4- 68: Resposta à 3.ª questão pelo grupo 1 (tarefa 3)



$4^2 + 1^2 = x^2 \Leftrightarrow 16 + 1 = x^2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{17}$

A área exacta do quadrado [GPEF] vai ser 17 porque $\sqrt{17^2}$ é igual a 17.

$4^2 + 1^2 = (x^2)$ $\sqrt{17} \times \sqrt{17} = (\sqrt{17})^2 = 17$
 $16 + 1 = (x^2)$
 $x = \sqrt{17}$

Figura 4- 69: Resolução da questão 3 pelo grupo 2 (tarefa 3)

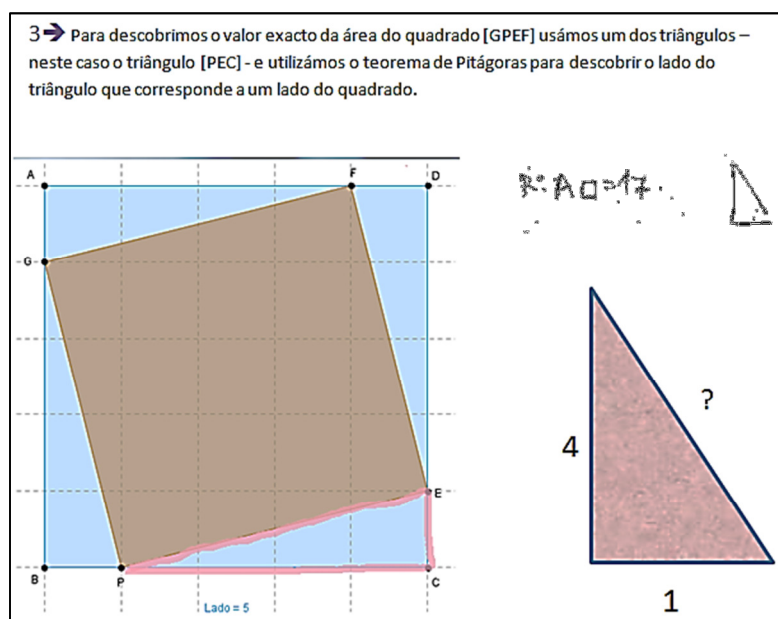


Figura 4- 70: Estratégia e conclusão do grupo 3 (tarefa 3)

Com o objetivo de motivar a obtenção de dados da distância de B a P e da área do quadrado [GPEF], a quarta questão propõe a organização desses dados numa tabela de duas colunas, com um incremento de 0,5 para a primeira variável, abrindo a possibilidade de os alunos acrescentarem mais, caso considerassem necessário.

A estratégia do grupo 1 passou por construir uma tabela com mais de duas colunas na qual se observa o que já na tarefa 2 foi relatado, que se prende com o pensamento funcional. Os alunos continuam a revelar dificuldades em encontrar relações entre as variáveis, demorando algum tempo até à sua descoberta. Na sequência de imagens da figura 4- 71 (leia-se de cima para baixo e da esquerda para a direita), pode-se observar uma segunda tentativa de construção da tabela, na qual já se denota alguma preocupação com a covariação, mas sem sucesso, pois os alunos ainda não tinham visto as regularidades da situação em estudo.

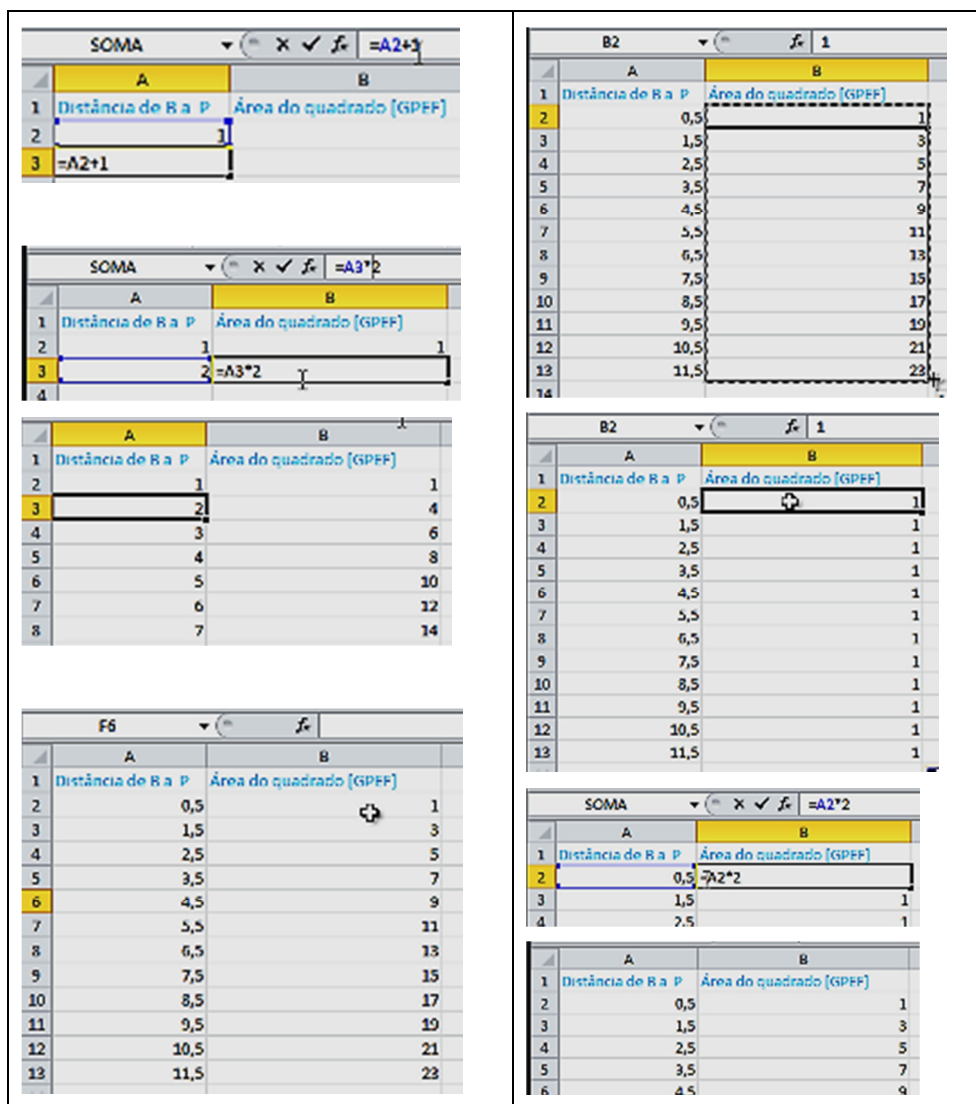


Figura 4- 71: 2.ª tentativa de construção da tabela pelo grupo 1 (tarefa 3)

Sem terem ainda completa noção do trabalho realizado até então, recorreram à *applet* para compararem os valores *P* da última tabela com a imagem geométrica. Escolhem a distância de *B* a *P* de 3,5 unidades e observam que não há correspondência de uma representação para a outra. Deste modo, refletiram sobre a situação e constroem mais tabelas, obtendo as que estão ilustradas na figura abaixo.



Figura 4- 72: 3.ª tentativa de construção da tabela pelo grupo 1 (tarefa 3)

Na primeira imagem da FC desta figura, apoiado na *applet*, tentaram preencher a tabela colocando os valores das distâncias de B a P e de B a G (catetos do triângulo retângulo [GBP]), manualmente (sem usarem fórmulas), e na coluna C (distância de G a P correspondente à hipotenusa do triângulo retângulo [GBP]) escreveram uma fórmula que nada se relaciona com a equação do Teorema de Pitágoras. Em vez de escreverem a soma do quadrado dos catetos, registraram a soma do dobro dos catetos. Não criticando o valor obtido, tentam definir uma relação entre os valores de cada variável: na 1.^a, escrevem uma sequência de números com incremento 0,5 como solicitado; na 2.^a, optam pela estratégia recursiva, ao termo anterior subtraem 0,5 e na 3.^a, fazem a replicação da fórmula de C2.

Uma vez que os dados da tabela continuavam a não corresponder aos do problema, analisam e identificam o seu erro, alterando-o (Figura 4- 73). Ao não estabelecerem uma relação entre a medida de hipotenusa e a área do quadrado construído sobre a mesma, acrescentam duas colunas à tabela (Raiz quadrada da distância de G a P e a área do quadrado). Assim, com a tabela de dados completa, no domínio do problema e com os dados correspondentes ao contexto do mesmo, o grupo facilmente observou a simetria existente nesta representação, tal como a expressão algébrica que permite calcular a área do quadrado [GPEF] em função de *d*.

	A	B	C	D	E
1	Distância de B a P	Distância de B a G	Distância de G a P	Raiz	Área
2	0	5	25	5	25
3	0,5	4,5	20,5	4,527693	20,5
4	1	4	17	4,123106	17
5	1,5	3,5	14,5	3,807887	14,5
6	2	3	13	3,605551	13
7	2,5	2,5	12,5	3,535534	12,5
8	3	2	13	3,605551	13
9	3,5	1,5	14,5	3,807887	14,5
10	4	1	17	4,123106	17
11	4,5	0,5	20,5	4,527693	20,5
12	5	0	25	5	25

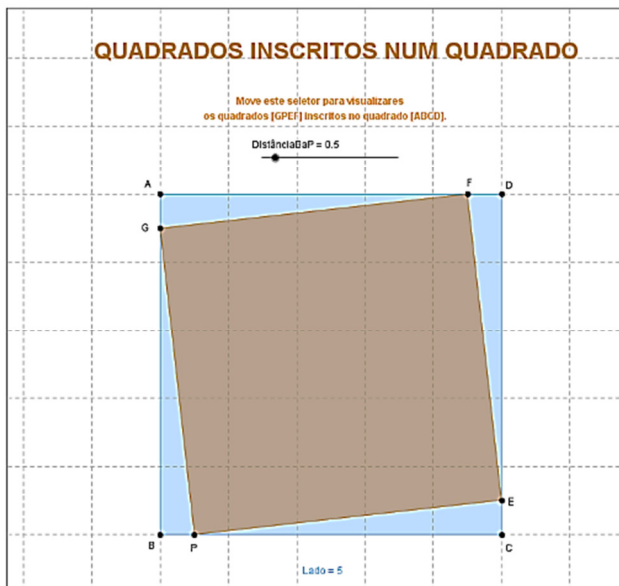
	A	B	C	D	E
1	Distância de B a P	Distância de B a G	Distância de G a P	Raiz	Área
2	0	=5-A2	=A2^2+B2^2	=RAIZQ(C2)	=D2^2
3	=A2+0,5	=5-A3	=A3^2+B3^2	=RAIZQ(C3)	=D3^2
4	=A3+0,5	=5-A4	=A4^2+B4^2	=RAIZQ(C4)	=D4^2
5	=A4+0,5	=5-A5	=A5^2+B5^2	=RAIZQ(C5)	=D5^2
6	=A5+0,5	=5-A6	=A6^2+B6^2	=RAIZQ(C6)	=D6^2
7	=A6+0,5	=5-A7	=A7^2+B7^2	=RAIZQ(C7)	=D7^2
8	=A7+0,5	=5-A8	=A8^2+B8^2	=RAIZQ(C8)	=D8^2
9	=A8+0,5	=5-A9	=A9^2+B9^2	=RAIZQ(C9)	=D9^2
10	=A9+0,5	=5-A10	=A10^2+B10^2	=RAIZQ(C10)	=D10^2
11	=A10+0,5	=5-A11	=A11^2+B11^2	=RAIZQ(C11)	=D11^2
12	=A11+0,5	=5-A12	=A12^2+B12^2	=RAIZQ(C12)	=D12^2

Figura 4- 73: Última tabela obtida pelo grupo 1 (tarefa 3)

b) Observa a coluna da "Área do Quadrado". O que observas?
 Quando a distância de B a P é 2,5 os valores inferiores e superiores da
 simetria, existe uma relação.

Figura 4- 74: Descrição da simetria da tabela pelo grupo 1 (tarefa 3)

Sem que tivesse sido solicitado, o grupo 2 aplicou o Teorema de Pitágoras a outro caso particular, identificou a regularidade por comparação ao caso da questão três e por observação das relações entre os segmentos de reta da figura na *applet* (Fig.4- 75) definiu a variável x como a distância de B a P, indicou esta decisão (Fig.4- 76) e escreveu no seu relatório “A distância de B a P pode ser calculada através da fórmula $A=(5-x)^2 + x^2$ ” (Grupo 2). A partir daqui, facilmente obteve a tabela pretendida.



Elisabete Mariano, Criado com [GeoGebra](#)

Figura 4- 75: Observação, pelo grupo 2, da imagem quando a distância de B a P é 0,5 (tarefa 3)

Assim que se certificam de que a sua conjectura estava correta, os alunos deste grupo entusiasmaram-se, construíram uma tabela (com quatro colunas) e observaram que esta era caracterizada por aspetos semelhantes à tabela da tarefa 2, como é o caso dos valores negativos e da existência de uma simetria.

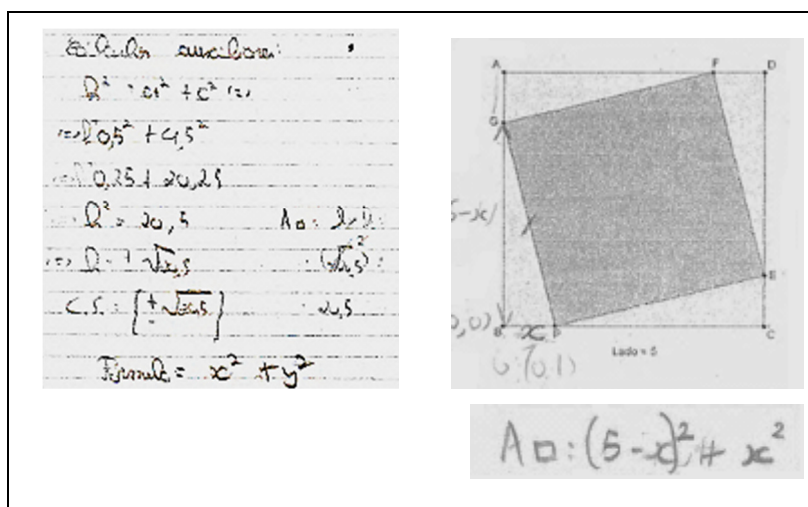


Figura 4- 76: Início da estratégia do grupo 2, na resolução da 4.ª questão (tarefa 3)

1.º) Iniciar a construção da tabela:

	A	B	C
1	dist. B a P	A do quadrado[GPEF]	
2	0,5		
3	=A2+0,5		

2.º) Replicar da fórmula de A3 na coluna A até à linha 30, acrescentar as colunas C e D (correspondentes aos comprimentos dos lados EC e PC) e esconder a coluna B:

	A	C	D
1	dist. B a P	EC	PC
2	0,5		
3	1		
4	1,5		
5	2		
6	2,5		
7	3		
8	3,5		
9	4		
10	4,5		

3.º) Escrever a fórmula em C2 de modo que a coluna C seja igual à coluna A, porque os comprimentos dos lados EC e BP são iguais:

	A	C	D	E
1	dist. B a P	EC	PC	
2	0,5	=A2		
3	1			
4	1,5			

4.º) Escrever a fórmula resultante da observação da relação funcional entre as colunas C e D (o comprimento de PC é a diferença entre o comprimento de lado do quadrado [ABCD] e o de [EC]):

	A	C	D	E
1	dist. B a P	EC	PC	
2	0,5	0,5	=5-C2	
3	1			
4	1,5			

5.º) Replicação das fórmulas escritas na linha 2, até à linha 31:

	A	C	D
1	dist. B a P	EC	PC
2	0,5	0,5	4,5
3	1	1	4
4	1,5	1,5	3,5
5	2	2	3
6	2,5	2,5	2,5

6.º) Mostrar a coluna B da tabela, escrever a fórmula que corresponde ao membro da equação do Teorema de Pitágoras que relaciona os catetos para obter a área do quadrado [GPEF]:

	A	B	C	D
1	dist. B a P	A do quadrado[GPEF]	EC	PC
2	0,5	=C2^2+D2^2	0,5	4,5
3	1		1	4
4	1,5		1,5	3,5

7.º) Replicar a fórmula de B2 pela coluna B, até à linha 31:

	A	B	C	D
1	dist. B a P	A do quadrado[GPEF]	EC	PC
2	0,5	20,5	0,5	4,5
3	1	17	1	4
4	1,5	14,5	1,5	3,5
5	2	13	2	3
6	2,5	12,5	2,5	2,5

8.º) Observar e assinalar a área máxima do quadrado [GPEF]:

	A	B	C	D
1	dist. B a P	A do quadrado[GPEF]	EC	PC
2	0,5	20,5	0,5	4,5
3	1	17	1	4
4	1,5	14,5	1,5	3,5
5	2	13	2	3
6	2,5	12,5	2,5	2,5
7	3	13	3	2
8	3,5	14,5	3,5	1,5
9	4	17	4	1
10	4,5	20,5	4,5	0,5
11	5	25	5	0
12	5,5	30,5	5,5	-0,5

Figura 4- 77: Passos da estratégia do grupo 2, na resolução da 4.ª questão (tarefa 3), cujas imagens foram captadas com o software Camtasia Studio7

A partir da tabela obtida (8.º passo da figura 4- 77), os alunos concluíram e escreveram “ A área maior é 25, porque a partir daí um dos lados começa a ficar negativo.” (Grupo 3), registrando a expressão algébrica que representa a área do quadrado [GPEF] em função de d (Fig. 4- 78).

$$A = (5-d)^2 + d^2$$

Figura 4- 78: Fórmula obtida pelo do grupo 2 para calcular a área do quadrado [GPEF], em função de d (tarefa 3)

O desempenho dos alunos do grupo 3 passou pela construção de uma tabela de duas colunas na FC, em que os valores da coluna A faziam parte de uma sequência de incremento 0,5 cujo primeiro termo era 0,5. No entanto, depararam-se com um erro de sintaxe (em vez de escreverem uma vírgula colocaram um ponto) cuja indicação obtiveram com a função “Ajuda” do *software*.

Daqui em diante, na observação do vídeo constituído por imagens do computador captadas com o *Camtasia Studio7* e com a câmara de vídeo digital, a investigadora verificou que o grupo demorou muito tempo até escreverem a fórmula de cálculo da área do quadrado [GPEF] na tabela pelas dificuldades com que se depararam. Neste espaço de tempo, foram muitas as vezes que recorreram à *applet* a simular diferentes situações, obtendo casos diferentes. Mas, apesar das tentativas ainda não tinham conseguido encontrar as regularidades e pediram ajuda à professora que lhes propôs a realização do mesmo procedimento utilizado na 3.ª questão para outros casos.

Handwritten calculations showing specific cases for the area problem:

- 1 = $4^2 + 1^2 = \sqrt{17}^2 = 17$
- 1,5 = $3,5^2 + 1,5^2 = \sqrt{14,5}^2 = 14,5$
- 2 = $3^2 + 2^2 = \sqrt{13}^2 = 13$
- 2,5 = $2,5^2 + 2,5^2 = \sqrt{12,5}^2 = 12,5$
- 3 = $2^2 + 3^2 = \sqrt{13}^2 = 13$
- 3,5 = $1,5^2 + 3,5^2 = \sqrt{14,5}^2 = 14,5$
- 4 = $1^2 + 4^2 = \sqrt{17}^2 = 17$
- 4,5 = $0,5^2 + 4,5^2 = \sqrt{20,5}^2 = 20,5$

Additional calculations on the right side of the page:

- $0,5 = 4,5^2 + 0,5^2 = \sqrt{20,5}^2 = 20,5$
- $0 = 5 \times 5 = 25 = 0$
- $5 = 5 \times 5 = 25$

Figura 4- 79: Casos particulares do problema obtidos pelo grupo 3 (tarefa 3)

4 → Para chegarmos a uma expressão algébrica que permitisse calcular a área do quadrado [GPEF] efetuamos os seguintes cálculos.

Distância	Fórmula para descobrir a área	Área
0	5×5	25
0.5	$4.5^2 + 0.5^2$	20.5
1	$4^2 + 1^2$	17
1.5	$3.5^2 + 1.5^2$	14.5
2	$3^2 + 2^2$	13
2.5	$2.5^2 + 2.5^2$	12.5
3	$2^2 + 3^2$	13
3.5	$1.5^2 + 3.5^2$	14.5
4	$1^2 + 4^2$	17
4.5	$0.5^2 + 4.5^2$	20.5
5	5×5	25

Figura 4- 80: Organização tabular dos casos particulares escritos no caderno (excerto do relatório do grupo 3 referente à tarefa 3)

Na procura de um padrão entre os casos particulares, os alunos começaram por escrever no seu caderno a fórmula “ $=5-A^2+A^2$ ”. Apesar de a professora compreender o que tentavam expressar e identificando a ausência dos parênteses, instigou-os a escrever a fórmula na sua tabela da folha de cálculo para verificarem a sua conjectura. Os alunos sentiam-se contentes porque consideravam que a sua conjectura estava correta, pelo que quando a inserem na tabela, demonstram um sentimento de desilusão. Alunos e professora, em conjunto, exploram os diferentes casos e fazem a comparação com a fórmula já escrita, indicando de imediato a falha já reconhecida pela docente, anteriormente. O grupo procede à emenda no seu caderno e na folha de cálculo, replicam-na às outras linhas da tabela e observa-se o seu contentamento na visualização dos resultados esperados, à exceção do último que não coincidia. O grupo voltou a comparar o caso particular em ambos os suportes, encontrando o erro no seu caderno.

1.º) Escrever a fórmula em B2 para obter a área do quadrado [GPEF], após a coluna A já estar preenchida:

	A	B	C
1	Distância de B a P		Área do quadrado [GPEF]
2	0,5	$= (5-A2)^2 + A2^2$	

2.º) Replicar da fórmula de B2 na coluna A até à linha 11:

	A	B	C
1	Distância de B a P		Área do quadrado [GPEF]
2	0,5	20,5	
3	1	17	
4	1,5	14,5	
5	2	13	
6	2,5	12,5	
7	3	13	
8	3,5	14,5	
9	4	17	
10	4,5	20,5	
11	5	25	

3.º) Iniciar a coluna A em zero, em vez de 0,5 e acrescentar à tabela a linha 12, correspondente ao comprimento máximo do lado do quadrado [ABCD]:

	A	B
1	Distância de B a P	Área do quadrado [GPEF]
2	0	
3	$= A2+0,5$	20,5
4	1	17
5	1,5	14,5
6	2	13
7	2,5	12,5
8	3	13
9	3,5	14,5
10	4	17
11	4,5	20,5
12	5	25

4.º) Obter a tabela final completa:

	A	B
1	Distância de B a P	Área do quadrado [GPEF]
2	0	25
3	0,5	20,5
4	1	17
5	1,5	14,5
6	2	13
7	2,5	12,5
8	3	13
9	3,5	14,5
10	4	17
11	4,5	20,5
12	5	25

Figura 4- 81: Passos da estratégia do grupo 3, na resolução da 4.ª questão (tarefa 3), cujas imagens foram captadas com o *software Camtasia Studio7*

Na presença da sua tabela, comentam “Quando chegamos ao valor 2,5 de distância, os valores repetem-se como se tivessem um espelho.” (Grupo 3)

Perante o raciocínio efetuado pelo grupo, é claro que não revelaram dificuldades na escrita de expressão algébrica solicitada.

A criação das tabelas por cada grupo estimulou os alunos a definirem claramente as variáveis do problema e a estabelecerem relações entre elas, evidenciando-se as características do pensamento funcional. Partindo das suas estratégias, mesmo que incorretas, elas foram o ponto de partida dos alunos para aprenderem a sistematizar e a generalizar os métodos de resolução do problema, o que tornou o processo um pouco mais moroso. Este aspeto foi uma das motivações de Rojano (1996) quando desenvolveu alguns dos seus projetos no campo da álgebra. Com a abordagem algébrica realizada pela professora na resolução de problemas, estes alunos demonstraram alguma capacidade de construir significados para os símbolos algébricos, aliado à álgebra sintática e manipulativa, desafiando o seu conhecimento já adquirido. Com o recurso à FC, foi criado um ambiente de trabalho agradável e estimulante, em que os alunos puderam fazer as tentativas que consideraram necessárias para alcançar o seu objetivo, sem qualquer julgamento.

Inicialmente, os alunos utilizaram a FC para expressar as suas ideias mais imaturas e para verificar a veracidade das suas estratégias e, progressivamente, tomaram consciência da relação interdependente das variáveis, sentindo a necessidade de definirem uma variável independente.

A intervenção da professora nesta forma de ensinar álgebra centrada no aluno em ambiente de FC foi muito relevante na orientação deste e na abstração da estrutura comum dos casos particulares em direção à generalização e modelação do problema.

Representação gráfica do problema

Na representação tabelar do problema, só os grupos 1 e 3 limitaram a distância de B a P de 0 a 5, inclusive, enquanto o grupo 2 a considerou entre 0,5 e 15, obtendo, conseqüentemente gráficos semelhantes, mas diferentes.

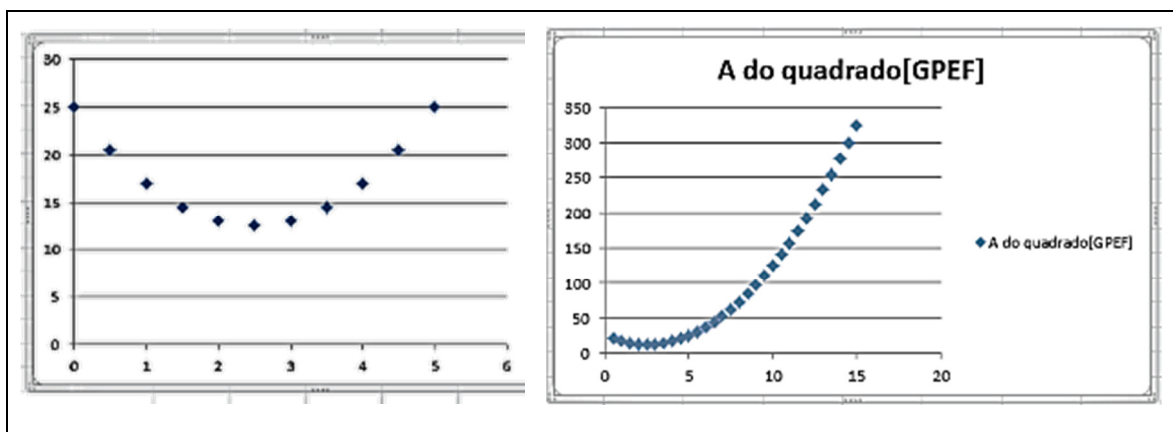


Figura 4- 82: Gráficos obtidos pelos grupos 1 e 3 (à esquerda) e pelo grupo 2 (à direita)

Uma vez que as colunas da tabela a serem utilizadas para a construção do gráfico estavam separadas, o grupo 1 sentiu dificuldades em construir o seu gráfico solicitando a ajuda da professora. Assim que o conseguem, facilmente identificam o modelo “Observamos que o gráfico é uma parábola ao contrário.” (Grupo 1). Por comparação com o gráfico obtido na tarefa anterior, cuja concavidade se encontrava voltada para baixo, os alunos referem que a parábola está “ao contrário”.

Interpretação do problema a partir das representações

A questão sete da tarefa apelava à identificação dos extremos da função que modelava o problema que foi resolvida com facilidade por todos os alunos. Todos os grupos apenas recorreram à tabela para responder ao solicitado fazendo sobressair diferentes regiões, colorindo-as com cores diversas.

Só os grupos 1 e 3 associaram estes extremos com duas situações verificadas na manipulação da *applet*.

Área máxima do quadrado é 25 , com o deslocamento para 0 ;

Distância de B a P	Distância de B a G	Distância de G a P	Raiz	Área
0	5	25	5	25

Área mínima do quadrado é 12,5 , com o deslocamento para 2,5 ;

Distância de B a P	Distância de B a G	Distância de G a P	Raiz	Área
2,5	2,5	12,5	3,535534	12,5

Portanto para que a área do quadrado seja máxima o deslocamento tem de ser 0 e para que a área do quadrado seja mínima tem de ser 2,5.

Figura 4- 83: Extremos da função observados pelo grupo 1 (excerto do seu relatório)

	A	B
1	Distância de B a P	Área do quadrado [GPEF]
2	0	25
3	0,5	20,5
4	1	17
5	1,5	14,5
6	2	13
7	2,5	12,5
8	3	13
9	3,5	14,5
10	4	17
11	4,5	20,5
12	5	25

6 → Para termos a área mínima do quadrado o deslocamento de P=2.5; para termos a área máxima do quadrado o deslocamento de P= 0 ou 5.

Figura 4- 84: Tabela do grupo 3 e extremos da função observados (excerto do seu relatório)

O grupo 2 pintou a verde as linhas que apresentam soluções possíveis do problema, marcaram a amarelo a fronteira das soluções impossíveis e as restantes, a vermelho. Depois, limitou-se a observar os valores pretendidos na tabela e a dar resposta à pergunta colocada.

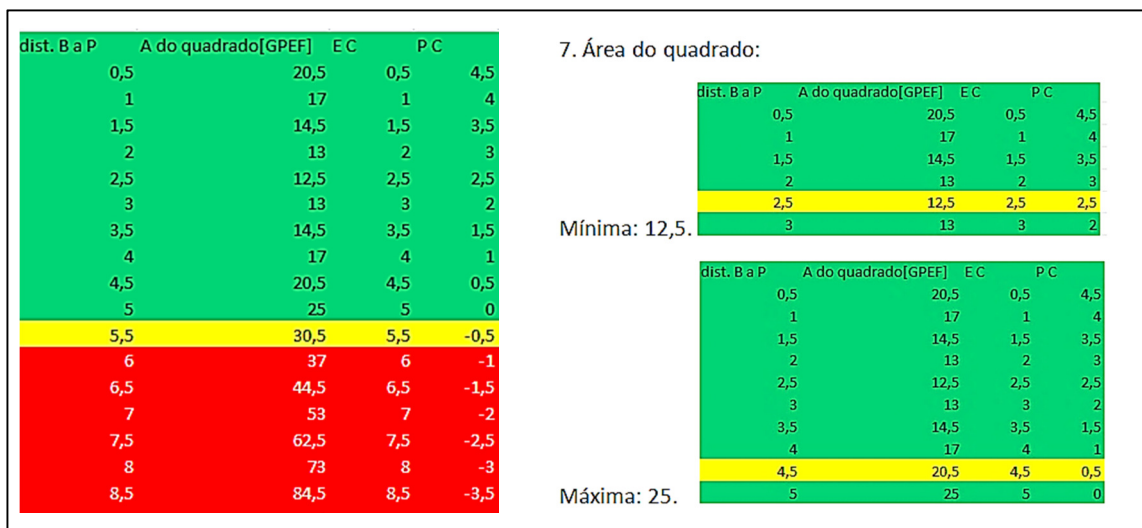


Figura 4- 85: Tabela do grupo 2 e extremos da função observados (excerto do seu relatório)

A representação tabelar foi uma importante representação matemática na resolução do problema: é a partir da sua análise que concluem sobre as possibilidades extremas do problema, recorrendo à cor para as fazer sobressair. A aprendizagem tornou-se significativa uma vez que os alunos compreenderam estas situações contextualizadas pela relação que estabeleceram com a representação geométrica de cada uma.

Visto que os alunos já conheciam todas as ferramentas matemáticas de resolução de uma equação de 2.º grau a uma incógnita (as representações tabelar e gráfica e a fórmula resolvente), esta questão (“Existe alguma distância de B a P cuja área do quadrado [GPEF] seja 14,8? E 22.18?”) teve o intuito de observar qual seria a escolha e a estratégia utilizada que permitiria dar resposta ao desafio proposto.

Apenas os grupos 1 e 2 recorreram à representação tabelar. O grupo 1 fez as iterações necessárias até encontrar os valores perguntados.

0	5	25	5	25
0,1	4,9	24,02	4,90102	24,02
0,2	4,8	23,08	4,804165	23,08
0,3	4,7	22,18	4,709565	22,18
0,4	4,6	21,32	4,617359	21,32
0,5	4,5	20,5	4,527693	20,5
0,6	4,4	19,72	4,440721	19,72
0,7	4,3	18,98	4,356604	18,98
0,8	4,2	18,28	4,275512	18,28
0,9	4,1	17,62	4,197618	17,62
1	4	17	4,123106	17
1,1	3,9	16,42	4,05216	16,42
1,2	3,8	15,88	3,984972	15,88
1,3	3,7	15,38	3,921734	15,38
1,4	3,6	14,92	3,862642	14,92
1,5	3,5	14,5	3,807887	14,5
1,6	3,4	14,12	3,757659	14,12
1,7	3,3	13,78	3,712142	13,78
1,8	3,2	13,48	3,671512	13,48
1,9	3,1	13,22	3,635932	13,22
2	3	13	3,605551	13
2,1	2,9	12,82	3,580503	12,82
2,2	2,8	12,68	3,560899	12,68
2,3	2,7	12,58	3,54683	12,58
2,4	2,6	12,52	3,538361	12,52
2,5	2,5	12,5	3,535534	12,5
2,6	2,4	12,52	3,538361	12,52
2,7	2,3	12,58	3,54683	12,58
2,8	2,2	12,68	3,560899	12,68
2,9	2,1	12,82	3,580503	12,82
3	2	13	3,605551	13
3,1	1,9	13,22	3,635932	13,22
3,2	1,8	13,48	3,671512	13,48
3,3	1,7	13,78	3,712142	13,78
3,4	1,6	14,12	3,757659	14,12
3,5	1,5	14,5	3,807887	14,5
3,6	1,4	14,92	3,862642	14,92
3,7	1,3	15,38	3,921734	15,38
3,8	1,2	15,88	3,984972	15,88
3,9	1,1	16,42	4,05216	16,42
4	1	17	4,123106	17
4,1	0,9	17,62	4,197618	17,62
4,2	0,8	18,28	4,275512	18,28
4,3	0,7	18,98	4,356604	18,98
4,4	0,6	19,72	4,440721	19,72
4,5	0,5	20,5	4,527693	20,5
4,6	0,4	21,32	4,617359	21,32
4,7	0,3	22,18	4,709565	22,18
4,8	0,2	23,08	4,804165	23,08
4,9	0,1	24,02	4,90102	24,02
5	0	25	5	25

Figura 4- 86: Tabela de valores após algumas iterações (excerto do relatório do grupo 1)

Sim, observando a tabela verificamos que existe.

Distância de B a P	Distância de B a G	Distância de G a P	Raiz	Área
1,5	3,5	14,5	3,807887	14,5
3,5	1,5	14,5	3,807887	14,5
0,3	4,7	22,18	4,709565	22,18
4,7	0,3	22,18	4,709565	22,18

Mudando o incremento de 0,5 para 0,1 conseguimos verificar que existia os valores 14,5 e 22,18.

Figura 4- 87: Tabela com os valores da área de 14,5 e 22,18 evidenciados pelo grupo 1 (excerto do seu relatório)

O grupo 2, observando o conjunto de valores da última tabela obtida, foi modificando a entrada da célula A2 (primeira linha numérica da tabela na primeira coluna da Fig.4- 88), até encontrar os valores pretendidos.

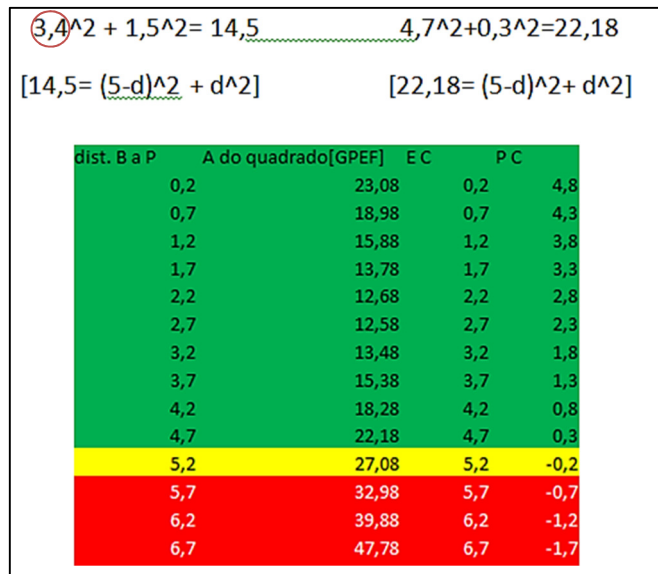


Figura 4- 88: Representações do grupo 2, dos dois cenários questionados (tarefa 3)

O grupo 3 utilizou o gráfico, determinando os objetos que tinham imagem 14,5 e, uma equação que resolveu. Após a resolução da equação, teve a preocupação de ver se coincidiam com a situação gráfica.

7 → Através do gráfico vimos que a distância de B a P tem que ser 1.5 e 3.5 para obtermos a área de 14.5. Para descobriremos se é possível o quadrado [GPEF] ter 22.18 de área recorremos a seguinte equação:

$$22.18 = (5-d)^2 + d^2$$

Através da equação verificámos que o deslocamento de P teria de ser 4.7 ou 0.3. De seguida, através do gráfico, verificámos que o resultado estava correcto.

The handwritten work shows the following steps:

- $22,18 = (5-d)^2 + d^2$
- $22,18 = 25 - 10d + d^2 + d^2$
- $22,18 = 25 - 10d + 2d^2$
- $10d - 2d^2 = 25 - 22,18$
- $10d - 2d^2 = 2,82$
- $10d - 2d^2 - 2,82 = 0$
- $5d - d^2 - 1,41 = 0$
- $d = 16 \pm \sqrt{16^2 - 4 \cdot (-1,41)}$
- $d = 16 \pm \sqrt{256 - 5,64}$
- $d = 16 \pm \sqrt{250,36}$
- $d = 16 \pm 15,82$
- $d = 31,82$ (crossed out)
- $d = 0,18$ (crossed out)
- $d = 4,7$ (circled in red)
- $d = 0,3$

Figura 4- 89: Estratégia do grupo 3 para determinar os casos de a área ser 14,5 e 22,18 (excerto do seu relatório)

Da análise das respostas dos três grupos, verifica-se que não usaram as mesmas estratégias.

Dois dos grupos usaram as suas tabelas como ponto de partida: um fazendo iterações sucessivas na primeira coluna e o outro variando o primeiro valor até encontrarem as áreas pretendidas, métodos possíveis pelas características dinâmicas das tabelas da FC.

O outro grupo valeu-se da representação gráfica e da fórmula resolvente. Para a primeira situação apenas necessitou de interpretar o gráfico, mas para a segunda, recorreu à fórmula resolvente na resolução da equação de 2.º grau escrita pelos alunos deste grupo, estabelecendo uma conexão com o gráfico na confrontação dos resultados obtidos.

Na solicitação da questão 9, estava evidente um rematar da questão 8, caso ainda não tivesse sido feito.

$$(5 - d)^2 + d^2 = 14,5 \quad Cs=\{1.5|3.5\}$$

Resolvendo esta equação obtemos 2 soluções que correspondem às distâncias de B a P e B a G quando a área do quadrado é 14,5.

$$(5 - d)^2 + d^2 = 22,18 \quad Cs=\{0.3|4.7\}$$

Resolvendo esta equação obtemos 2 soluções que correspondem às distâncias de B a P e B a G quando a área do quadrado é 22,18.

Figura 4- 90: Representação simbólica das condições da questão 8 (grupo 1)

Sem dificuldades, todos os grupos escrevem as equações de 2.º grau que ajudam a responder ao perguntado na questão 8.

Nas conclusões desta tarefa, a investigadora regista o sentimento e opinião de cada grupo.

Ao longo deste trabalho deparamos com vários obstáculos tais como chegar à fórmula da área do quadrado e resolver as equações de 2º grau.

Mas que conseguimos superar através do Excel que nos ajudou muito, porque depois de inserirmos as fórmulas corretas conseguimos obter vários resultados e conclusões.

Achamos que este trabalho ajudou-nos a desenvolver o raciocínio matemático, útil para a resolução de problemas.

Figura 4- 91: Conclusões do relatório do grupo 1

Sentimos dificuldades em descobrir a fórmula que determinava a área do quadrado inscrito, o mais fácil foi as coordenadas.

Figura 4- 92: Excerto das conclusões do relatório do grupo 2

Gostamos de realizar este trabalho e achamos que estas aulas são benéficas. Conseguimos trabalhar bem juntas e chegar à resolução dos problemas postos pela professora.

Figura 4- 93: Excerto das conclusões do relatório do grupo 3

Para o alunos, este tipo de ensino centrado neles é benéfico na evolução do seu raciocínio matemático e, conseqüentemente, do pensamento algébrico e na capacidade de resolver problemas. Da análise do trabalho desenvolvido, o maior obstáculo ainda continua a ser o caminho da generalização, mas superável com a partilha e orientação do professor. A FC foi vista pelos alunos como um recurso na validação dos seus raciocínios e auxílio na resposta ao solicitado sobre o problema.

Capítulo V

Conclusões

Este capítulo sintetiza todo o trabalho de investigação desenvolvido, dando ênfase às características dos alunos na resolução de problemas com a folha de cálculo, procurando ajudar na compreensão do conhecimento do estágio do pensamento algébrico dos alunos e da forma como a folha de cálculo influencia o desenvolvimento dessa capacidade.

Durante este trabalho, a investigadora destacou aspetos de cada um dos grupos relacionados com: (i) as estratégias utilizadas na resolução de problemas com recurso à folha de cálculo; (ii) as representações usadas nesses processos para dar resposta às questões desses problemas; (iii) a forma de utilização da folha de cálculo no desenvolvimento da capacidade transversal “resolução de problemas” do programa de matemática (Ponte, et al., 2007). Esta exposição não teve o objetivo de fazer comparações dos grupos ou induzir generalizações, mas sim, problematizar e contribuir para uma melhor compreensão sobre o objeto de estudo.

O capítulo está organizado em duas secções. Na primeira, a investigadora apresenta as conclusões deste estudo e na terceira, deixa algumas reflexões finais sobre o estudo.

Conclusões do estudo

Nesta secção, apresentam-se as conclusões do estudo, que seguem uma organização de acordo com as questões orientadoras da investigação: (1) Quais os processos de resolução de problemas na dimensão aritmética-algébrica com a folha de cálculo?; (2) De que modo a folha de cálculo influencia a compreensão das representações convencionais da matemática?; (3) Quais os aspetos do pensamento algébrico realçados pelos alunos quando resolvem problemas algébricos em ambiente de folha de cálculo?.

Questão 1: Quais os processos de resolução de problemas na dimensão aritmética-algébrica com a folha de cálculo?

Na fase de arranque para a resolução dos problemas, uma das maiores dificuldades observadas prendia-se com a interpretação do seu enunciado que foram sendo esclarecidas pela professora no desenrolar das tarefas. Constatou-se que na realização destas, os alunos utilizaram lápis e papel e a folha de cálculo e, algumas vezes, a calculadora. Esta conjugação de ferramentas

prendia-se com a necessidade de estruturação da estratégia e solução do problema. Assim, os alunos começaram por utilizar lápis e papel ou a *applet* disponibilizada pela investigadora, fazendo os esquemas necessários à compreensão do problema. O recurso alternativo da calculadora, esquecendo-se de que a folha de cálculo também é uma ferramenta de cálculo, foi verificado em situações nas quais os alunos ainda não tinham identificado a variável (independente). Nestas situações, recorriam à folha de cálculo adotando estratégias de tentativa-erro. Quando a apropriação da variável independente e a interdependência das restantes já tinha sido concretizada, os alunos recorreram à FC construindo tabelas que traduziam a relação de dependência entre variáveis ou entre os dados da variável em si. Neste tipo de representação estava escondida a expressão algébrica que descrevia a relação mas, usando a linguagem da FC. Esta ajudou os alunos a passarem da dimensão aritmética para a algébrica, usando a linguagem simbólica da matemática. É este ato de generalizar que evidencia as estratégias algébricas adotadas pelos alunos.

Questão 2: De que modo a folha de cálculo influencia a compreensão das representações convencionais da matemática?

A partir do trabalho desenvolvido no âmbito desta investigação, pode concluir-se que os alunos na resolução de problemas recorrem à folha de cálculo para representar os seus dados na forma tabelar, nas quais procuram estabelecer relações entre as variáveis envolvidas, ação que dá ênfase aos aspetos do pensamento algébrico, tal como, a generalização. Os alunos, a partir de representações não convencionais da matemática e das regularidades encontradas nos seus dados, utilizam uma representação tabelar na folha de cálculo que os obriga a expressar-se “quase simbolicamente” (não usando letras, mas endereços das células). Com mais ou menos tentativas, demorando mais ou menos tempo, a tendência é conseguirem expressar-se utilizando expressões algébricas em que, muitas das vezes, a letra dá lugar ao endereço da célula, transparecendo a intimidade criada entre a sintaxe da folha de cálculo e a álgebra.

Ainda na procura de diferentes cenários de um dado problema, fazem uso do seu atributo dinâmico e interativo possibilitado pela dependência das variáveis. Com esta ferramenta tecnológica conseguem gerar e manipular grandes quantidades de números e fórmulas, libertar-se de cálculos e manipulações algébricas enfadonhas, melhorando o seu desempenho, dando significado às situações e facilitando a resolução do problema. Com a utilização da folha de cálculo, além de os alunos sentirem uma maior necessidade de explicar o raciocínio seguido (Ponte, et al., 2006), acabam por desenvolver o seu sentido crítico e aumentar a sua atenção sobre os resultados obtidos dos problemas com que se deparam, sejam ou não da matemática. A utilização desta ferramenta tecnológica, tal como de outras, também permite o desenvolvimento do trabalho autónomo dos alunos em sala de aula e realizar experiências longe do julgamento do professor e envolve os alunos na construção do seu conhecimento matemático num ambiente favorável a este. Neste contexto de folha de cálculo, cria-se uma cultura de argumentação e de justificação para compreender os problemas usando a álgebra como ferramenta.

Tal como em experiências orientadas por Canavarro (2009) e Rojano (2006), este estudo permite sublinhar alguns aspetos importantes no que diz respeito às representações usadas: o recurso à tabela permitiu o registo organizado e a exploração sistemática dos casos possíveis e possibilitou dar ênfase à relação entre as variáveis do problema; a utilização das letras permitiu observar que elas podem ter significados diferentes (umas representam constantes e outras são variáveis); o gráfico viabilizou analisar a variação da variável dependente nas últimas tarefas.

Questão 3: Quais os aspetos do pensamento algébrico realçados pelos alunos quando resolvem problemas algébricos em ambiente de folha de cálculo?

O pensamento algébrico é um processo de generalização das ideias matemáticas a partir de casos particulares (Kaput & Blanton, 2005). Observando este conceito de pensamento e observando a análise dos processos dos alunos participantes neste estudo, é evidente que a generalização das situações propostas foi efetivada com o estudo específico de cada caso particular. Os alunos procuraram regularidades ou padrões entre estes, no sentido de visualizarem as estruturas e as relações existentes, trabalho que foi apoiado na ferramenta tecnológica, folha de cálculo, da forma descrita na tentativa de resposta às primeiras questões deste estudo. Como diz Kaput (1999), este procedimento faz sobressair raciocínios e expressões de nível mais elevado. Esta extensão deliberada do raciocínio ou da comunicação para além dos casos particulares, envolve um conjunto de procedimentos que envolve letras (símbolos). Segundo Kieran (2004), este conjunto são atividades de generalização e ferramentas que são utilizadas na representação das relações matemáticas.

De entre os dois aspetos principais do pensamento algébrico, a folha de cálculo ajuda a realçá-los devido à sintaxe de que é dotada: (i) Pensamento representacional - as ideias algébricas foram expressas por estes alunos utilizando diversas representações, desde as convencionais às não convencionais da matemática. Perante sequências geométricas apoiavam-se em relações numéricas ou na própria composição geométrica do problema; perante *word problems*, faziam esquemas ou diagramas representativos das situações que os ajudavam na criação das representações convencionais da matemática na folha de cálculo; (ii) Pensamento simbólico - o recurso aos símbolos são uma forma de representar as ideias gerais obtidas a partir do raciocínio, da atribuição de significados e da compreensão das situações. Ora, com a folha de cálculo, os alunos criaram uma intimidade entre os endereços das células e as variáveis que utilizavam na representação dos problemas, chegando a escrever no seu caderno expressões que, em vez de letras, eram os endereços das células da folha de cálculo. Sem a atribuição de significado aos símbolos, os alunos revelaram mais dificuldades no processo de generalização, como foi notável no desempenho do grupo 1, evidente no problema da tarefa 2.

No trabalho com a folha de cálculo emergiram as vertentes da álgebra. Perante a observância da estrutura das tabelas construídas por cada grupo (na apresentação das fórmulas de cada célula da tabela) emergem as estruturas da aritmética, o que Kaput (2008) designa por aritmética generalizada. As relações e a covariação das variáveis, concretizando-se o estudo das funções

envolvidas são realçadas também nessas tabelas e expressas nas suas respostas às questões colocadas ou emergidas de situações que resultaram do aspeto dinâmico e interativo da folha de cálculo. A aplicação de um conjunto de linguagens de modelação também foi evidenciada na resolução das duas últimas tarefas, cujo modelo matemático subjacente era o quadrático.

A diversidade das representações simbólicas sugerem que a folha de cálculo ajuda os alunos a simbolizar as suas ideias informais de um modo mais formal. A forma como a apresentam, dá indicação da proximidade que fizeram aos objetos do problema: as mais elementares foram utilizadas pelos alunos com mais dificuldades ou ainda ancorados à dimensão aritmética desse mesmo problema. Apesar de tudo, foi evidente a capacidade dos alunos em generalizar e simbolizar a aritmética que lhes era mais familiar.

Considerações finais

As considerações finais apresentadas enquadram-se no âmbito do ensino da matemática e dizem respeito à eficácia da folha de cálculo no desenvolvimento do pensamento algébrico.

Considera-se ser uma mais-valia para os alunos a utilização continuada desta ferramenta tecnológica no desenvolvimento do pensamento algébrico nas aulas de matemática, pois além da envolvência dos alunos na construção do seu conhecimento matemático, da apropriação mais profunda desse conhecimento, podem “desenvolver uma predisposição para usar a matemática em contexto escolar e não escolar, apreciar os aspetos estéticos da matemática, desenvolver uma visão adequada à natureza desta ciência e uma perspetiva positiva sobre o seu papel e utilização.” (Ponte, et al., 2007, p.6). Estes constituem alguns dos objetivos gerais do ensino da matemática contemplados no programa desta disciplina do ensino básico de 2007. Além destas vantagens, os alunos têm à sua disposição uma ferramenta que lhes permite resolver problemas que exigem o saber de conhecimentos matemáticos que ainda não aprenderam, ampliar a sua sabedoria até eles cuja ponte tem que ser criada pelos professores. Isto significa que, como contempla o programa de matemática do ensino básico de 2007, a resolução de problemas tem que ser vista como um meio e não como um fim, apresentando assim esta disciplina como uma área com significado. Contudo, não quer isto dizer que o ensino e aprendizagem fiquem por aqui, pois o equilíbrio entre a compreensão e o conhecimento de factos, procedimentos, manipulações e transformações da matemática tem que ser garantido. A folha de cálculo tem um forte contributo na compreensão da matemática e nas conexões e representações que possibilita. No entanto, apesar de também auxiliar o professor na demonstração de propriedades da álgebra, tem pouco contributo no ensinamento dos procedimentos algébricos, na manipulação simbólica e na resolução de equações, sistemas de equações e inequações, usando expressões algébricas. A investigadora pormenoriza esta forma de representação, pois resolver as condições referidas com ferramentas tecnológicas (como a folha de cálculo ou programas de geometria dinâmica, como o *GeoGebra*) ou outras ferramentas matemáticas convencionais (representação tabelar e gráfica,

por exemplo) ou não, são capacidades que podem sobressair nos alunos mais jovens desde os primeiros anos de escolaridade.

Tal como foi levado a cabo neste estudo, a resolução das tarefas a pares foi adequada por viabilizar a troca de impressões entre si, a partilha de informações e o esclarecimento das dúvidas da área da matemática ou da ferramenta tecnológica que dispunham. Particularmente, na temática tratada nesta investigação, a partilha dos processos de cada elemento do grupo de trabalho contribuiu para a definição de estratégias comuns com traços de cada membro, que os ajudou a alcançar um objetivo único. Primeiro e em particular na resolução de cada problema e, de um modo mais lato, no desenvolvimento do seu pensamento algébrico.

Outro aspeto que será importante evidenciar e que até poderá ser alvo de futuras investigações, relaciona-se com a visão e o à vontade (ou não) que os educadores têm com a folha de cálculo e com a forma como a poderão utilizar nas aulas de matemática. Apesar de ser umas das ferramentas aconselhadas ao longo do programa de matemática do ensino básico de 2007, será que os professores conhecem o seu papel no desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos?

Entre as muitas investigações existentes, a maioria refere-se à utilização da folha de cálculo em crianças de 1.º e 2.º ciclo. Deste modo, qual a contribuição da folha de cálculo no desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos de níveis superiores a estes?

A calculadora, foi uma das primeiras ferramentas tecnológicas que entraram nas salas de aula de matemática e que assim se mantiveram até aos dias de hoje e em todos os níveis de ensino. Deste modo, aqui ficam mais algumas questões que podem ser orientadoras noutras investigações: (i) Poderá a folha de cálculo usufruir deste estatuto?; (ii) Que condições são necessárias para fazer da folha de cálculo um “material” necessário e “natural” da aula de matemática?; (iii) Haverá outras ferramentas tecnológicas com maior potencial no desenvolvimento do pensamento algébrico? Caso haja, quais as diferenças que se podem identificar na sua utilização e de que forma?; (iv) O papel da folha de cálculo no desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos, que tradicionalmente, têm desempenho médio-baixo, quando expostos a estas metodologias apresentam melhores desempenhos no âmbito da Álgebra?.

Como também refere Duarte (2011), “será interessante prosseguir os estudos que aprofundem o papel desta ferramenta no trabalho algébrico, em atividades de sala de aula.” (p.536).

Referências bibliográficas

- Arcavi, A., 1994. Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics* 14, November, pp. 24-35.
- Blanton, M. & Kaput, J., 2005. Characterizing a Classroom Practice that Promotes Algebraic Reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(5), pp. 412-446.
- Bogdan, R. & Biklen, S., 1994. *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.
- Brown, L., 2004. Response 1: The Challenge of Learning Through Transformational Algebraic Activity. In: *The future of the teaching and learning of algebra - The 12th ICMI Study*. Boston: Kluwer Academic Publishers, pp. 35-40.
- Canavarro, A., 2009. O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. *Quadrante* 16(2), pp. 81-118.
- Dettoni, G., Lemut, E. & L.Netchitailova, 1994. Spreadsheet: a tool toward algebra?. pp. 235-249.
- Duarte, J., 2011. *Tecnologias e Pensamento Algébrico: Um estudo sobre o conhecimento profissional dos professores de matemática*. Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.
- Dufour-Janvier, B., Bednarz, N. & Belanger, M., 1987. Pedagogical considerations concerning the problem of representation. In: *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum, pp. 109-122.
- Friendland, A. & Tabach, M., 2001. *Promoting multiple representations in algebra*. Reston, Virginia: NCTM, A.A.Cuoco, pp. 173-185.
- Gafanhoto, A. & Canavarro, A., 2012. *A adaptação das tarefas matemáticas: como promover o uso de múltiplas representações*. Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática, pp. 121-134.
- Goldin, G. A., 1998. Representational Systems, Learning, and Problem Solving in Mathematics. *Journal of Mathematical Behavior*, pp. 17 (2), 137-165.
- Kaput, J., 1999. Teaching and learning a new algebra with understanding. In: E. Fennema & T. Romberg, eds. *Mathematics classrooms that promote understanding*. Mahwah: NJ Lawrence Erlbaum, pp. 133-155.
- Kaput, J., 2008. What is algebra? What is algebraic reasoning?. In: J. Kaput, D. Carraher & M. Blanton, eds. *Algebra in the Early Grades*. New York: Lawrence Erlbaum Associates, pp. 5-17.
- Kieran, C., 2004. The Core of Algebra: Reflections on its Main Activities. In: *The future of the teaching and learning of algebra - The 12th ICMI Study*. Boston: Kluwer Academic Publishers, pp. 21-33.
- Kieran, C., 2007a. Developing algebraic reasoning: The role of sequenced tasks and teacher questions from the primary to the early secondary school levels. *Quadrante*, XVI(1), pp. 5-26.
- Leung, F. K., 2004. Information and communication technology in mathematics education. In: M. Niss, ed. *Proceedings of the Tenth International Congress on Mathematical Education*. Roskilde University, Denmark: IMFUFA, pp. 228-243.

Ministério da Educação, (1991a). *Organização Curricular e Programas (3.º ciclo do ensino básico)*. Vol I. Lisboa: Imprensa Nacional, Casa da Moeda.

Ministério da Educação, (1991b). *Programa de Matemática: Plano de Organização do ensino-aprendizagem (3.º ciclo do ensino básico)*. Vol II. Lisboa: Imprensa Nacional, Casa da Moeda.

NCTM, 2007. *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM.

Nobre, S., Amado, N. & Ponte, J., 2011. Representações na aprendizagem de sistemas de equações. In: M. Martinho, R. Ferreira, I. Vale & J. Ponte, eds. *Ensino e Aprendizagem da Álgebra - Atas do encontro de investigação em educação matemática*. Póvoa do Varzim, pp. 239-259.

Ponte, J., 1994. O estudo de caso na investigação em educação matemática. *Quadrante 3(1)*, pp. 3-18.

Ponte, J., 2006. Números e Álgebra no currículo escolar. In: *Números e Álgebra na aprendizagem da matemática e na formação de professores*. Porto: SEM/SPCE, pp. 5-27.

Ponte, J., Branco, N. & Matos, A., 2009. *Álgebra no ensino básico*. Lisboa: Ministério da Educação / DGIDC.

Ponte, J. & Canavarro, A., 1997. *Matemática e novas tecnologias*. Lisboa: Universidade Aberta.

Ponte, J. P. d. et al., 2006. A Folha de Cálculo e a aprendizagem da Álgebra. In: T. Vale, et al. eds. *Números e Álgebra na aprendizagem da matemática e na formação de professores*. Lisboa: SPCE, pp. 317-333.

Ponte, J. et al., 2007. *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação/DGIDC.

Ponte, J. & Sousa, H., 2010. Uma oportunidade de mudança na Matemática do Ensino Básico. In: *O professor e o programa de Matemática do Ensino*. Lisboa: APM, pp. 11-41.

Rojano, T., 1996. Developing algebraic aspects of problem solving within a spreadsheet environment. *Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands.*, pp. 137-145.

Smith, E., 2008. Representational thinking as a framework for introducing functions in. In: J. Kaput, D. Carraher & M. Blanton, eds. *Algebra in the Early Grades*. New York: Lawrence Erlbaum Associates, pp. 19-56.

Stacey, K. & Chick, H., 2004. Solving the problem with Algebra. In: *The Future of the Teaching and Learning of Algebra - The 12th ICMI Study*. Boston: Kluwer Academic Publishers, pp. 1-20.

Stake, R., 2009. *A arte da investigação com estudos de caso*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

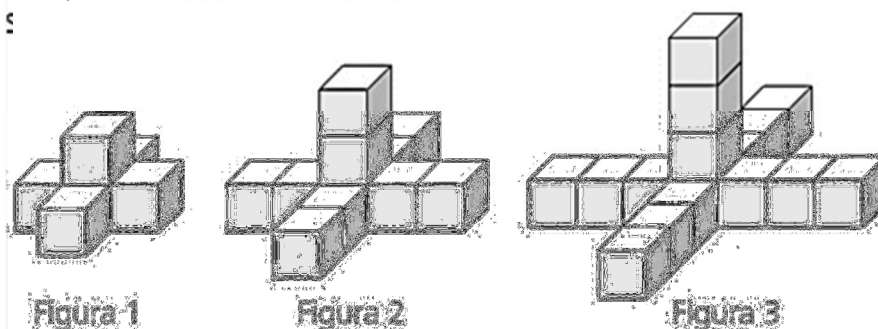
Vale, I., Palhares, P., Cabrita, I. & Borralho, A., 2006. Os Padrões no Ensino e Aprendizagem da Álgebra. In: *Números e Álgebra na aprendizagem da matemática e na formação de professores*. SPCE - SEM, pp. 193 - 211.

Anexos

ANEXO 1

Tarefa 1: Sequências geométricas

1. Observa a sequência.



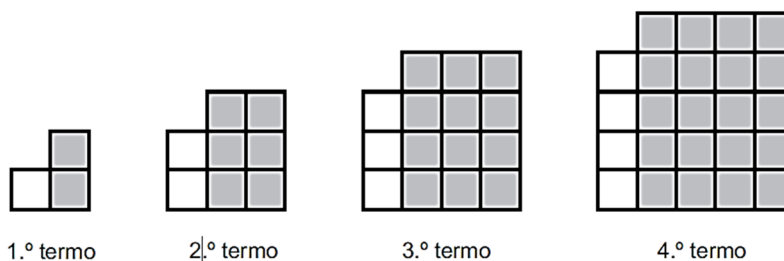
1.1 Quantos cubos tem a figura 6? *Mostra como chegaste à tua resposta.*

1.2 Haverá alguma figura com 100 cubos? *Explica a tua resposta.*

1.3 Escreve um termo geral da sequência numérica associada à sequência pictórica.

2. Na figura estão representados os quatro primeiros termos de uma sequência de conjuntos de azulejos quadrados que segue a lei de formação sugerida na figura.

Os azulejos são todos iguais, sendo uns brancos e outros cinzentos.



a) Quantos azulejos brancos tem o 2012.º termo da sequência?

b) Qual é o número total de azulejos do 9.º termo da sequência?

Mostra como chegaste à tua resposta.

Problema do teste intermédio de 8.º ano de 29-02-2012

ANEXO 2

Tarefa 2: A vedação do terreno

Procede do seguinte modo:

1. Produz um documento em *Word* onde deverás explicar todos os passos, estratégias e procedimentos que utilizares e ilustra-os com esquemas ou imagens das tabelas e gráficos da folha de cálculo.
2. Abre o *Excel* do qual necessitarás.
3. Guarda os dois ficheiros anteriores com o formato do exemplo. (Exemplo: **TarefaT_Ana1_Pedro14**)
4. No final da aula envia os ficheiros produzidos para o e_mail da professora.

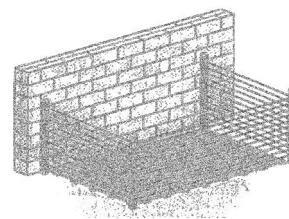
Para a avaliação deste trabalho será tido em conta, (i) o raciocínio matemático, (ii) a capacidade de resolver problemas, (iii) a utilização da linguagem matemática, (iv) a capacidade de apresentar e discutir ideias e (v) o aspeto gráfico e organizacional do documento escrito.

A VEDAÇÃO DO TERRENO

Com 50 metros de rede pretende-se fazer uma vedação de um terreno retangular.

Um dos lados do retângulo não precisa de rede, pois o terreno a vedar está encostado a um muro, como se mostra na figura.

Quais deverão ser as dimensões do terreno de modo que a sua área seja de 300 m^2 ? E se se desejar um terreno com a área máxima?



ANEXO 3

Tarefa 3: Quadrados inscritos em quadrados

Objetivo: investigar sobre as relações existentes entre o deslocamento de um ponto do lado do quadrado e a área de outro inscrito nesse mesmo quadrado.

Procede do seguinte modo:

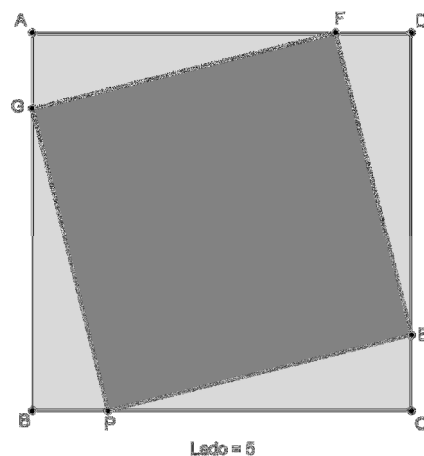
1. Na disciplina “Mat9” da plataforma *Moodle* encontrarás a applet (pequena aplicação) que suportará esta tarefa. Acede à mesma, localiza o ficheiro na secção “Equações” e abre-o.
2. Produz um documento em *Word* onde deverás explicar todos os passos que fores efetuando e ilustrá-los com imagens captadas (figuras da applet, tabelas e gráficos da folha de cálculo).
3. Abre o *Excel* do qual necessitarás.
4. Guarda os dois ficheiros anteriores com o formato do exemplo. (Exemplo: **TarefaQ_Ana1_Pedro14**)
5. No final da aula envia os ficheiros produzidos para o e_mail da professora.

Para a avaliação deste trabalho será tido em conta, (i) o raciocínio matemático, (ii) a capacidade de resolver problemas, (iii) a utilização da linguagem matemática, (iv) a capacidade de apresentar e discutir ideias e (v) o aspeto gráfico e organizacional do documento escrito.

O quadrado [ABCD] tem de lado 5 unidades.

P é colinear com B e C e desloca-se ao longo do lado BC, gerando quadrados inscritos no quadrado [ABCD].

1. Se B for a origem do referencial, quais as coordenadas dos restantes pontos, quando o deslocamento de P for de:
 - a) 1 unidade?
 - b) 4 unidades?



2. Entre que valores varia o deslocamento de P (distância de B a P)?
3. Se o deslocamento de P for de 1 unidade, qual é o **valor exato da área** do quadrado [GPEF]?

Mostra como chegaste à tua resposta.

4. Recorre à folha de cálculo.
 - a) Cria uma tabela onde relaciones a **Distância de B a P** e a **Área do Quadrado [GPEF]**, com um incremento de 0,5 para a distância de B a P.

Nota: A tabela pode ser constituída por mais colunas, caso consideres necessário.

b) Observa a coluna da “**Área do Quadrado**”. O que observas?

5. Seja d , a distância de B a P.

Escreve uma expressão algébrica que permita calcular a área do quadrado [GPEF] inscrito no quadrado [ABCD] em função de d .

6. Desenha o gráfico da função que relaciona a área do quadrado [GPEF] com a distância de B a P.

Ajuda: Selecciona apenas as colunas “**Distância de B a P**” e “**Área do Quadrado**”; insere um gráfico de dispersão.

7. Por observação das representações construídas, qual é o deslocamento de P para que a área do quadrado seja mínima? E máxima?

Explica como chegaste à tua resposta.

8. Existe alguma distância de B a P cuja área do quadrado [GPEF] seja 14,5? E 22,18?

Explica como chegaste à tua resposta.

9. Escreve uma condição que permita resolver as situações da questão anterior.

PARA IR MAIS ALÉM

Considera agora que o quadrado [ABCD] tem x unidades de lado.

a) Qual é a distância de B a P que permite identificar a área máxima do quadrado [GPEF] inscrito no quadrado [ABCD]? E a mínima?

b) Escreve uma expressão algébrica que permita calcular a área de qualquer quadrado inscrito neste quadrado [ABCD].