



**Catarina Gonçalves de Jesus**

Licenciada em Ciências da Engenharia Civil

## **Efeito da Pormenorização das Armaduras na Resistência ao Punçoamento de Lajes Fungiformes**

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em  
Engenharia Civil – Perfil de Estruturas

Orientador:

Doutor António Manuel Pinho Ramos, Professor Auxiliar,  
Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa

Co-orientador:

Doutor Rui Pedro César Marreiros, Professor Auxiliar,  
Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa

Júri:

Presidente: Prof. Doutor Mário Vicente da Silva  
Arguente: Prof. Doutora Carla Alexandra da Cruz Marchão  
Vogais: Prof. Doutor António Manuel Pinho Ramos



FACULDADE DE  
CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

**Junho, 2016**



### **Efeito da Pormenorização das Armaduras na Resistência ao Punçoamento**

Copyright © Catarina Gonçalves de Jesus, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa.

A Faculdade de Ciências e Tecnologia e a Universidade Nova de Lisboa têm o direito, perpétuo e sem limites geográficos, de arquivar e publicar esta dissertação através de exemplares impressos reproduzidos em papel ou de forma digital, ou por qualquer outro meio conhecido ou que venha a ser inventado, e de a divulgar através de repositórios científicos e de admitir a sua cópia e distribuição com objetivos educacionais ou de investigação, não comerciais, desde que seja dado crédito ao autor e editor.



*Às minhas princesas,*

*Beatriz e Margarida*







## **AGRADECIMENTOS**

Primeiramente, agradeço aos meus orientadores Professor António Pinho Ramos e Professor Rui Marreiros, pelo acompanhamento, disponibilidade e conhecimentos transmitidos ao longo da realização deste trabalho.

Ao Departamento de Engenharia Civil da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa pelas instalações e utensílios colocados à minha disposição.

Um obrigado aos técnicos de laboratório, José Gaspar e Jorge Silvério, por toda a disponibilidade e ajuda na realização de todo o trabalho experimental. Um agradecimento particular, ao Jorge Silvério, pela especial atenção e compreensão no decorrer dos trabalhos.

Agradeço igualmente ao Engenheiro Nuno Dinarte Gouveia pela atenção, disponibilidade, ajuda laboratorial, partilha de conhecimentos e amizade demonstrada ao longo dos últimos meses.

Ao João Ventura, Filipa Velez e Patrícia Oliveira pela vossa amizade, força e ajuda na execução dos modelos experimentais. A todos os outros amigos, que de alguma forma me apoiaram e incentivaram na realização deste trabalho.

Ao António Santos por toda a ajuda, atenção, carinho, paciência, compreensão e incentivo ao longo destes meses.

Um agradecimento especial ao meu irmão, pela ajuda no transporte de material e no corte dos modelos de laje.

Por fim, a toda a minha família, em especial aos meus pais, por tudo o que têm feito por mim, pelo carinho, incentivo e confiança transmitidos.



## RESUMO

O presente trabalho consiste num estudo experimental desenvolvido com o objetivo de analisar o efeito da pormenorização da armadura longitudinal na resistência ao punçoamento, em lajes fungiformes.

Para o efeito foram elaborados e ensaiados dois modelos de laje fungiforme, em que um disponha de armadura longitudinal concentrada junto à ligação laje-pilar e outro uma distribuição uniforme. Assim, apresentavam diferente percentagem de armadura longitudinal na vizinhança do pilar. Os modelos A e B possuíam 0,78% e 1,15% de percentagem de armadura longitudinal concentrada na proximidade do pilar, respetivamente.

Os resultados obtidos demonstraram um aumento na capacidade de carga face à concentração da armadura, assim como, na capacidade de deformação, em comparação com o modelo de referência A.

A evolução da carga vertical aplicada nos modelos, a deformação dos mesmos, assim como a extensão da armadura longitudinal são analisadas. Os valores das cargas experimentais de rotura obtidos são comparados com a norma NP EN 1992-1, com o Model Code 2010 e com o ACI 318-11.

Sabe-se que o problema do punçoamento e a utilização de armadura longitudinal concentrada têm vindo a ser estudados. Ao longo dos anos foram produzidos e ensaiados diversos modelos de laje com diferentes características. Como tal, os valores de carga de rotura destes modelos foram igualmente comparados com os valores previstos através da norma NP EN 1992-1, do Model Code 2010 e do ACI 318, em função da resistência à compressão do betão, da percentagem de armadura concentrada na proximidade do pilar e da altura útil dos modelos.



## **ABSTRACT**

This work consists of an experimental study in order to analyze the effect of longitudinal reinforcement detailing on punching shear resistance, in flat slabs.

For this purpose, two models of flat slabs were prepared, wherein one had available concentrated longitudinal reinforcement by the bonding slab-column and another uniform distribution. Thus, they had different reinforcement ratios for longitudinal reinforcement in the vicinity of the column. The models A and B had 0.78% and 1.15% reinforcement ratios, respectively.

The results showed an increase in load capacity due to the reinforcement concentration in model B, as well as, an increase in deformability as compared to the reference model A.

The evolution of the vertical load and deformation on the models, as well as the extent of longitudinal reinforcement are analyzed. The values of the experimental loads of rupture obtained are compared with the NP EN 1992-1, with the Model Code 2010 and with the ACI 318-11.

It is known that the punching shear problem and the use of concentrated longitudinal reinforcement have been studied. Over the years, many slabs have been built and tested with different characteristics. As such, the experimental failure loads of these models were also compared to the values predicted by the NP EN 1992-1, the Model 2010 and Code ACI 318, depending on the compression strength of the concrete, the percentage of concentrated reinforcement used and the effective depth models.



## **PALAVRAS CHAVE**

Punçoamento

Lajes fungiformes

Pormenorização das armaduras

Análise experimental

Previsões de normas e regulamentos

## **KEY WORDS**

Punching

Flat slabs

Reinforcement detailing

Experimental analysis

Forecasts of standards and regulations



## SIMBOLOGIA

### Letras minúsculas Latinas

$b$	largura da laje
$b_q$	distância entre a face da coluna e o ponto de aplicação de carga
$b_{q1}$	distância entre a face da coluna e o ponto de aplicação de carga mais próximo da mesma
$b_{q2}$	distância entre a face da coluna e o ponto de aplicação de carga mais afastado da mesma
$b_s$	largura da banda utilizada para o cálculo do momento médio atuante
$b_t$	largura média da zona tracionada da secção
$b_x$	dimensão do contorno crítico segundo a direção x
$b_y$	dimensão do contorno crítico segundo a direção y
$c$	dimensão da área carregada
$c_1$	dimensão da área carregada paralela ao vão considerado, segundo Regan (1986)
$c_2$	dimensão da área carregada perpendicular ao vão considerado, segundo Regan (1986)
$d$	altura útil da laje
$d_0$	diâmetro do contorno crítico
$d_c$	diâmetro da coluna
$d_g$	máxima dimensão do agregado
$d_v$	altura útil da laje a partir da superfície de suporte
$e$	excentricidade em relação a $V_{Ed}$
$e_{u,i}$	excentricidade das forças de corte resultantes em relação ao centróide do perímetro do controlo de referência em cada direção $i$
$f_{ck}$	tensão característica de rotura à compressão do betão em provetes cilíndricos
$f_{ctk}$	tensão característica de rotura à tração do betão
$f_{syd}$	valor de cálculo da tensão de cedência do aço
$h$	espessura da laje

$k$	fator de escala ou de correção
$k_x$	fator de iteração no modelo de Kinnunen e Nylander (1960)
$k_\psi$	parâmetro dependente da rotação utilizado no Model Code 2010
$m_{Ed}$	momento médio atuante por unidade de comprimento na largura da banda
$m_R$	momento radial por unidade de largura
$m_{R,average}$	momento
$m_{Rd}$	momento médio resistente por unidade de comprimento na largura da banda
$r_f$	raio da área circular dentro da casca cônica
$r_q$	distância entre a linha de momentos nulos e o centro da laje
$r_s$	distância entre a linha de momentos nulos e o eixo do pilar
$r_{s,x}$	distância entre a linha de momentos nulos e o eixo na direção x
$r_{s,y}$	distância entre a linha de momentos nulos e o eixo na direção y
$r_u$	raio da área da casca cônica na superfície superior da laje
$u$	perímetro do contorno de referência
$v_2$	tensão de corte junto à face da área carregada segundo Elstner e Hognestad (1956)
$v_{min}$	valor de cálculo da resistência mínima ao punçoamento
$v_{Sd}$	valor de cálculo do esforço resistente de punçoamento por unidade de comprimento do contorno crítico de punçoamento
$x$	profundidade da zona de betão comprimido segundo Hallgren 1996

### **Letras maiúsculas latinas**

$A_c$	área de betão/ área transversal da laje
$A_s$	área da secção da armadura
$B$	largura da laje
$C$	relação entre o momento fletor de rotura da laje e a correspondente força no pilar
$G_{Fo}$	energia de rotura em relação à dimensão do agregado segundo Hallgren (1996)
$K_{SC}$	fator de forma que depende das características da área carregada

$N_{Ed}$	esforço axial atuante
$P_{shear}$	resistência ao corte segundo Elstner e Hognestad (1956)
$P_{flex}$	resistência à flexão da laje calculada de acordo com a teoria da linha de cedência segundo Elstner e Hognestad (1956)
$V_{flex}$	resistência à flexão de uma laje calculada de acordo com a teoria da linha de cedência
$V_{Rd}$	valor de cálculo do esforço resistente de punçoamento
$V_{Rd,c}$	valor de cálculo da resistência ao punçoamento sem armadura específica
$V_{Rd,máx}$	valor de cálculo da resistência máxima ao punçoamento
$V_{rd,s}$	valor de cálculo da resistência ao punçoamento com armadura específica
$V_{Ed}$	força de punçoamento atuante
$V_u$	valor de cálculo da carga de rotura segundo Moe (1961)
$V_{u,c}$	valor de cálculo da carga de rotura por influência do betão utilizado
$V_{u,s}$	valor de cálculo da carga de rotura por influência do aço utilizado

### **Letras minúsculas gregas**

$\alpha$	inclinação da casca cónica
$\beta$	razão entre a maior e a menor dimensão da área carregada
$\gamma_c$	coeficiente de segurança do betão
$\varepsilon_{ctu}$	tensão tangencial de rotura segundo Hallgren (1996)
$\eta$	coeficiente cujo valor é dado por $1,6 - d$
$\lambda$	fator que relaciona a resistência à tração e compressão do betão
$\xi_s$	fator de profundidade
$\rho$	percentagem de armadura longitudinal
$\rho_{ly}$	percentagem geométrica de armadura de flexão da laje segundo y
$\rho_{lz}$	percentagem geométrica de armadura de flexão da laje segundo z
$\sigma_{cp}$	tensão normal de compressão no betão
$\sigma_{cy}$	tensão normal de compressão no betão na direção y

$\sigma_{cz}$	tensão normal de compressão no betão na direção z
$\sigma_{cu}$	tensão de rotura no betão
$\tau_1$	tensão que depende da classe de betão
$\psi$	rotação da laje à volta da região de apoio fora da zona crítica de fendilhação

### **Abreviaturas ou Siglas**

ACI	American Concrete Institute
CEB	Comité Euro-International du Béton
FIP	Fédération Internationale de la Précontrainte
REBAP	Regulamento de Estruturas de Betão Armado Pré-Esforçado

# ÍNDICE DE MATÉRIAS

<b>Capítulo 1 – Introdução</b> .....	1
1.1. Generalidades.....	1
1.2. Objetivos.....	2
1.3. Conteúdo e organização da dissertação.....	2
<b>Capítulo 2 – Estado do Conhecimento</b> .....	5
2.1. Introdução.....	5
2.2. Mecanismo de rotura ao punçoamento.....	6
2.3. Regulamentos e normas.....	6
2.3.1. NP EN 1992-1.....	6
2.3.1.1. Cálculo do valor da resistência ao punçoamento.....	7
2.3.2. CEB FIP Model Code 2010.....	9
2.3.2.1. Cálculo do valor da resistência ao punçoamento.....	10
2.3.3. ACI 308-11.....	18
2.4. Ensaaios experimentais.....	19
2.4.1. Introdução.....	19
2.4.2. Elstner e Hognestad - 1956 .....	19
2.4.3. Kinnunen e Nylander - 1960 .....	21
2.4.4. Moe - 1961 .....	23
2.4.5. Roll et al - 1971 .....	26
2.4.6. Ladner - 1973 .....	29
2.4.7. Swamy e Ali - 1982.....	31
2.4.8. Regan - 1986 .....	32
2.4.9. Lunt - 1988 .....	34
2.4.10. Alexander e Simmonds - 1992 .....	37
2.4.11. Hallgren e Bjerke - 1996 .....	42
2.4.12. Ghannoum - 1998 .....	43
2.4.13. McHarg et al - 2000 .....	46
2.4.14. Widiyanto et al - 2009 .....	48

<b>Capítulo 3 – Programa Experimental</b> .....	51
3.1. Introdução.....	51
3.2. Descrição dos modelos.....	52
3.3. Caracterização dos materiais.....	58
3.3.1. Betão.....	58
3.3.2. Aço de armadura ordinária.....	63
3.4. Instrumentação dos ensaios.....	64
3.5. Execução dos ensaios dos modelos de laje.....	69
3.5.1. Modelo A.....	70
3.5.2. Modelo B.....	71
<b>Capítulo 4 – Análise dos Resultados</b> .....	73
4.1. Introdução.....	73
4.2. Apresentação dos Resultados.....	74
4.2.1. Deslocamentos verticais.....	74
4.2.1.1. Modelo A.....	74
4.2.1.2. Modelo B.....	76
4.2.1.3. Observações finais.....	78
4.2.2. Extensões na armadura longitudinal superior.....	79
4.2.2.1. Modelo A.....	81
4.2.2.2. Modelo B.....	83
4.2.2.3. Observações finais.....	84
4.2.3. Excentricidade da carga e cargas de rotura experimentais.....	85
4.2.3.1. Modelo A.....	86
4.2.3.2. Modelo B.....	87
4.2.3.3. Observações finais.....	89
4.2.4. Geometria da superfície de rotura.....	90
4.3. Complemento ao estado do conhecimento.....	92
4.3.1. Introdução.....	92
4.3.2. Comparação entre os ensaios experimentais e as previsões segundo a norma NP EN 1992-1, o Model Code 2010 e ACI 318-11.....	93

4.3.2.1. NP EN-1992-1.....	93
4.3.2.2. CEB-FIP Model Code 2010.....	95
4.3.2.3. ACI 318-11.....	99
4.3.3. Observações finais.....	102
<b>Capítulo 5 - Conclusões.....</b>	<b>103</b>
5.1. Introdução.....	103
5.2. Efeito da pormenorização da armadura longitudinal.....	103
5.2.1. Deslocamentos verticais.....	104
5.2.2. Extensões na armadura longitudinal superior.....	104
5.2.3. Geometria da superfície de rotura.....	104
5.2.4. Cargas de rotura experimentais e previstas pelas normas e regulamentos.....	104
5.3. Recomendações para trabalhos futuros.....	105
Referências Bibliográficas.....	107
Anexos.....	113



## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2.1 - Primeiros perímetros de controlo segundo a NP EN 1992-1 [51].....	7
Figura 2.2 - Perímetro do contorno de referência segundo o Model Code 2010 [51].....	9
Figura 2.3 - Alturas úteis a utilizar de acordo com o Model Code 2010 [13].....	9
Figura 2.4 – Padrão das linhas de rotura de um modelo circular [adaptado de 16].....	144
Figura 2.5 – Padrão das linhas de rotura de um modelo quadrado estaticamente determinado (adaptado de [16]).....	14
Figura 2.6 – Padrão das linhas de rotura de um modelo quadrado estaticamente indeterminado (adaptado de [16]).....	15
Figura 2.7 – Padrão das linhas de rotura de um modelo e coluna quadrados, simplesmente apoiado nos bordos (adaptado de [16]).....	15
Figura 2.8 – Padrão das linhas de rotura de um modelo quadrado e coluna circular, simplesmente apoiado nos bordos (adaptado de [16]).....	16
Figura 2.9 - Perímetro do contorno de referência estipulado pelo ACI 318-11 [51].....	18
Figura 2.10 - Resistência ao corte de lajes de betão armado, Elstner e Hognestad [35].....	21
Figura 2.11 - Modelo de Kinnunen e Nylander [14].....	22
Figura 2.12 - Ensaio realizado por Moe [39].....	24
Figura 2.13 - Fendas inclinadas observadas por Moe [39].....	24
Figura 2.14 - Comparação entre os ensaios de Elstner-Hognestad e Moe [35].....	26
Figura 2.15 - Detalhes dos modelos de laje de Roll et al [53].....	27
Figura 2.16 - Disposição da armadura longitudinal e das aberturas utilizadas nas séries A e B [53].....	28
Figura 2.17 - Disposição da armadura longitudinal e das aberturas utilizadas na série H [53].....	28
Figura 2.18 - Modelo de laje dimensionado por Ladner [34].....	29
Figura 2.19 - Modelo de ensaio adotado por Ladner [34].....	30
Figura 2.20 - Características do protótipo e do modelo de acordo com Ladner [34].....	30
Figura 2.21 - Modo de rotura do modelo ensaiado por Swamy e Ali [56].....	31
Figura 2.22 - Influência da percentagem de armadura de flexão na resistência ao punçoamento[49] e relação carga-deformação segundo Regan [50].....	32

Figura 2.23 - Disposição das armadura longitudinalis nos modelos de Regan [50].....	33
Figura 2.24 - Plano da armadura longitudinal superior de um dos modelos de laje de Lunt [36]...	35
Figura 2.25 - Plano do modelo de laje e respetivos pontos de aplicação da carga [36].....	35
Figura 2.26 - Principais características do modelo de laje [36].....	36
Figura 2.27 - Disposição geral do ensaio experimental de Lunt [36].....	36
Figura 2.28 - Vista superior de uma amostra após rotura [36].....	37
Figura 2.29 - Fragmento de laje restante segundo cada face do pilar [36].....	37
Figura 2.30 - Modelo de escoras e tirantes [35].....	39
Figura 2.31 - Escora de compressão curva [adaptado de 6].....	39
Figura 2.32 - Disposição das faixas radiais segundo Alexander e Simmonds [14].....	40
Figura 2.33 - Resultados experimentais segundo Alexander e Simmonds em relação ao ACI [35].....	40
Figura 2.34 - Geometria dos modelos ensaiados por Alexander e Simmonds [7].....	41
Figura 2.35 - Configuração geral dos ensaios de Alexander e Simonds [7].....	41
Figura 2.36 - Disposição da armadura longitudinal para os dois modelos em estudo[7].....	42
Figura 2.37 - Modelo de laje analisado por Ghannoum [18].....	44
Figura 2.38 - Distribuição da armadura longitudinal superior adotada por Ghannoum [18].....	45
Figura 2.39 - Distribuição da armadura longitudinal inferior adotada por Ghannoum [18].....	45
Figura 2.40 - Protótipo do modelo de laje segundo McHarg et al [37].....	46
Figura 2.41 - Distribuição da armadura longitudinal e do modelo reforçado com fibras nas diferentes séries [38].....	47
Figura 2.42 - Comparação dos modelos com ou sem armadura concentrada quanto à sua deformação [38].....	47
Figura 2.43 - Disposição das armaduras longitudinalis dos modelos de laje ensaiados por Widiyanto et al [59].....	48
Figura 2.44 - Configuração dos ensaios dos modelos de laje de Widiyanto et al [59].....	49
Figura 2.45 - Evolução da extensão nas armadura longitudinalis em ambos os modelos de Widiyanto et al [59].....	49
Figura 3.1 - Geometria octogonal dos modelos de laje.....	52
Figura 3.2 - Disposição da armadura longitudinal dos modelos de laje.....	53
Figura 3.3 – Distribuição dos momentos na laje de acordo com o REBAP e a NP EN 1992.....	54

Figura 3.4 – Disposição das armaduras longitudinais na cofragem do modelo de laje A.....	55
Figura 3.5 – Localização em planta das células de carga.....	56
Figura 3.6 – Localização em corte das células de carga; Corte A-A'.....	56
Figura 3.7 – Aspeto geral dos elementos utilizados para a montagem do modelo de laje.....	57
Figura 3.8 – Macaco hidráulico.....	57
Figura 3.9 – Unidade de controlo de pressão hidráulica.....	57
Figura 3.10 – Posicionamento geral dos defletómetros elétricos.....	58
Figura 3.11 – Provetes cúbicos e cilíndricos.....	59
Figura 3.12 – Amostra dos agregados utilizados no fabrico do betão.....	60
Figura 3.13 – Betoneira de eixo vertical do modelo Mammunt.....	61
Figura 3.14 – Vibradores utilizados na betonagem.....	61
Figura 3.15 – Ensaio à compressão dos provetes cúbicos e cilíndricos.....	62
Figura 3.16 – Ensaio à tração por compressão diametral dos provetes cilíndricos.....	62
Figura 3.17 – Ensaio do módulo de elasticidade dos provetes cilíndricos.....	63
Figura 3.18 – Disposição em planta dos defletómetros sobre a superfície superior do modelo de laje.....	65
Figura 3.19 – Disposição em planta dos defletómetros na superfície inferior do modelo de laje.....	66
Figura 3.20 – Localização dos defletómetros, Corte A-A'.....	66
Figura 3.21 – Localização dos defletómetros, Corte B-B'.....	67
Figura 3.22 – Disposição dos extensómetros elétricos na armadura longitudinal do modelo de laje A.....	68
Figura 3.23 – Disposição dos extensómetros elétricos na armadura longitudinal do modelo de laje B.....	68
Figura 3.24 – Unidades de aquisição de dados, Modelo data Logger HBM Spider 8.....	69
Figura 3.25 – Vistas da rotura por punçamento do Modelo A.....	70
Figura 3.26 - Vistas da rotura por punçamento do Modelo B.....	71
Figura 4.1 – Evolução dos deslocamentos verticais com a carga aplicada no modelo A.....	75
Figura 4.2 – Deformadas no modelo A segundo a direção de maior altura útil.....	75
Figura 4.3 – Deformadas no modelo A segundo a direção de menor altura útil.....	76
Figura 4.4 - Evolução dos deslocamentos verticais com a carga aplicada no modelo B.....	77

Figura 4.5 - Deformadas no modelo B segundo a direção de maior altura útil.....	77
Figura 4.6 – Deformadas no modelo B segundo a direção de menor altura útil.....	78
Figura 4.7 – Evolução dos deslocamentos verticais relativos (D8-D11) com a carga vertical em ambos os modelos.....	79
Figura 4.8 – Disposição dos extensómetros na armadura longitudinal superior no modelo A.....	80
Figura 4.9 – Disposição dos extensómetros na armadura longitudinal superior no modelo B.....	80
Figura 4.10 – Evolução das extensões da armadura longitudinal no modelo A.....	81
Figura 4.11 – Desenvolvimento transversal das extensões no modelo A.....	82
Figura 4.12 – Evolução das extensões da armadura longitudinal no modelo B.....	83
Figura 4.13 – Desenvolvimento transversal das extensões no modelo B.....	84
Figura 4.14 – Disposição das células de carga em ambos os modelos.....	86
Figura 4.15 – Evolução da carga em cada célula de carga em função da carga vertical total no modelo A.....	86
Figura 4.16 - Evolução da carga em cada célula de carga no modelo A.....	87
Figura 4.17 - Evolução da carga em cada célula de carga em função da carga vertical total no modelo B.....	88
Figura 4.18 - Evolução da carga em cada célula de carga no modelo B.....	88
Figura 4.19 – Relação entre a carga experimental e a raiz cúbica da resistência à compressão do betão.....	90
Figura 4.20 – Esquema da geometria em planta e em corte da superfície de rotura.....	91
Figura 4.21 – Superfície de rotura do modelo de laje A, corte B-B'.....	91
Figura 4.22 - Superfície de rotura do modelo de laje B, corte B-B'.....	91
Figura 4.23 – Relação entre a carga experimental e a prevista segundo a norma NP EN 1992-1, em função da resistência à compressão do betão.....	93
Figura 4.24 - Relação entre a carga experimental e a prevista segundo a norma NP EN 1992-1, em função da percentagem de armadura longitudinal.....	94
Figura 4.25 - Relação entre a carga experimental e a prevista segundo a norma NP EN 1992-1, em função da altura útil dos modelos.....	94
Figura 4.26 - Relação entre a carga experimental e a prevista segundo o Model Code, em função da resistência à compressão do betão, considerando todos os autores.....	96
Figura 4.27 - Relação entre a carga experimental e a prevista segundo o Model Code, em função da percentagem de armadura longitudinal, considerando todos os autores.....	96

Figura 4.28 - Relação entre a carga experimental e a prevista segundo o Model Code, em função da altura útil dos modelos, considerando todos os autores.....	97
Figura 4.29 - Relação entre a carga experimental e a prevista segundo o Model Code, em função da resistência à compressão do betão.....	97
Figura 4.30 - Relação entre a carga experimental e a prevista segundo o Model Code, em função da percentagem de armadura longitudinal.....	98
Figura 4.31 - Relação entre a carga experimental e a prevista segundo o Model Code, em função da altura útil dos modelos.....	98
Figura 4.32 - Relação entre a carga experimental e a prevista segundo o ACI 318, em função da resistência à compressão do betão.....	100
Figura 4.33 - Relação entre a carga experimental e a prevista segundo o ACI 318, em função da percentagem de armadura longitudinal.....	100
Figura 4.34 - Relação entre a carga experimental e a prevista segundo o ACI 318, em função da altura útil dos modelos.....	101



## LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 – Composição do betão utilizado.....	59
Tabela 3.2 – Caracterização do betão dos modelos de laje.....	63
Tabela 3.3 – Caracterização do aço e das armaduras longitudinais.....	64
Tabela 3.4 – Valores obtidos para as cargas de rotura.....	69
Tabela 4.1 – Extensões médias nos varões da armadura longitudinal.....	85
Tabela 4.2 – Excentricidades na direção x e y nos modelos.....	89
Tabela 4.3 – Efeito da excentricidade das cargas no cálculo da capacidade de carga ao punçoamento.....	90
Tabela 4.4 – Inclinações da superfície de rotura.....	92
Tabela 4.5 – Valores estatísticos obtidos relativamente à NP EN 1992-1.....	95
Tabela 4.6 – Valores estatísticos obtidos relativamente ao Model Code 2010.....	99
Tabela 4.7 – Valores estatísticos obtidos relativamente ao ACI 318-11.....	101
Tabela A.1 – Cálculo da resistência ao punçoamento segundo a norma NP EN 1992-1.....	113
Tabela A.2 – Cálculo da resistência ao punçoamento segundo o Model Code 2010.....	117
Tabela A.3 – Cálculo da resistência ao punçoamento segundo o ACI 318.....	121



# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1. GENERALIDADES

Nas últimas décadas, a utilização de lajes fungiformes na construção tem sido bastante frequente, devido à sua simplicidade de construção, economia e rapidez de execução. Tal deve-se ao facto de o processo de cofragem ser simples e rápido, reduzindo assim os custos de mão-de-obra e o tempo de construção. Para além disso, este tipo de lajes facilita o processo de instalação elétrica e de tubagens, podendo estas ter espessuras mais reduzidas, aumentando assim o pé direito dos edifícios. Estas mais-valias, impulsionam a utilização de lajes fungiformes em parques de estacionamento, hotéis, edifícios habitacionais, escritórios, hospitais, espaços comerciais, entre outros. Estas lajes são contínuas e apoiam-se diretamente em pilares, originando elevados valores de tensões de corte, devido ao reduzido perímetro para transmissão de carga vertical. O problema agrava-se se o pilar se encontrar nos cantos ou bordos da laje ou se existirem aberturas localizadas junto ao pilar. Portanto, as lajes fungiformes têm um complexo comportamento à flexão e ao corte, estando suscetíveis à ação do punçoamento.

Consequentemente, o problema da rotura por punçoamento em lajes de betão armado sujeitas a cargas concentradas tem sido considerado com maior relevância, por isso, muita pesquisa teórica e experimental, tem sido conduzida na análise e no dimensionamento ao punçoamento.

O punçoamento é um tipo de rotura característico de lajes sujeitas a forças aplicadas em pequenas áreas. Trata-se de um mecanismo de colapso local, associado a uma rotura frágil. Em lajes fungiformes, as roturas por punçoamento normalmente desenvolvem-se em torno de áreas de suporte, como pilares e paredes.

Para melhorar a capacidade resistente ao punçoamento, existem diversas técnicas possíveis, como por exemplo, aumentar a altura útil da laje, aumentar a secção do pilar, utilizar capitéis, utilizar betão com fibras, colocar armaduras transversais, aumentar a percentagem de armadura junto à ligação laje-pilar, entre outros.

Relativamente ao aumento da percentagem de armadura disposta na vizinhança do pilar, têm sido realizados diversos ensaios experimentais com diferentes métodos de aplicação de carga e diferentes condições de fronteira.

Quanto à normalização e regulamentação existentes para previsão da capacidade resistente ao punçoamento, salientam-se algumas diferenças na abordagem quanto à percentagem e disposição da armadura longitudinal.

## **1.2. OBJETIVOS**

O presente trabalho tem como objetivo estudar o efeito da pormenorização das armaduras longitudinais na resistência ao punçoamento. Pretende-se analisar o comportamento de lajes com diferentes percentagens de armadura junto à ligação laje-pilar, face à aplicação de uma carga concentrada. Esta análise, tem como fim, verificar de que modo se obtém uma maior capacidade resistente ao punçoamento, alterando a distribuição de armadura longitudinal, aperfeiçoando-se assim, o comportamento para estados limites últimos. Para além disso, pretende-se estudar qual o efeito da pormenorização das armaduras longitudinais, quanto à deformação e fendilhação das lajes.

Por outro lado, pretende-se averiguar e comparar quais as previsões efetuadas pelas diversas normas e regulamentos, de modo a verificar, qual o que melhor estima o valor da capacidade resistente ao punçoamento.

## **1.3. CONTEÚDO E ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO**

Em seguida é apresentado o conteúdo e a organização desta dissertação, constituída por cinco capítulos, incluindo este capítulo introdutório.

São igualmente apresentadas em anexo as tabelas necessárias à elaboração da comparação entre as normas e regulamentos apresentados, quanto à relação entre os valores obtidos experimentalmente e a carga prevista.

No Capítulo 2 é apresentado o estado do conhecimento no que diz respeito ao efeito da pormenorização da armadura longitudinal na resistência ao punçoamento. Inicialmente são apresentadas as metodologias de cálculo da resistência ao punçoamento segundo várias normas e regulamentos, como o Regulamento de Estruturas de Betão Armado e Pré-Esforçado, a norma NP EN 1992-1, o CEB-FIP Model Code 2010 e o ACI 308-11. Sucintamente, são descritos diversos trabalhos experimentais realizados por determinados investigadores, que pretendiam verificar qual a influência da pormenorização da armadura longitudinal na resistência ao punçoamento.

No Capítulo 3 são enumeradas as etapas realizadas durante o procedimento experimental. É dada a conhecer a descrição dos modelos, as características dos materiais utilizados, assim como, os instrumentos necessários para a elaboração, ensaio e monitorização dos mesmos.

No Capítulo 4 são apresentados e analisados os resultados obtidos experimentalmente, designadamente quanto aos deslocamentos verticais, às extensões nas armaduras longitudinais e às cargas verticais aplicadas. Com base nestes dados, é analisado o efeito da pormenorização da armadura longitudinal na resistência ao punçoamento. Seguidamente, estes resultados são comparados com os previstos pela norma NP EN 1992-1, pelo CEB-FIP Model Code 2010 e pelo ACI 318-11. Neste capítulo são igualmente apresentadas as conclusões quanto à relação carga experimental e carga prevista, pelas mesmas normas e regulamentos, mas tendo em consideração os ensaios experimentais realizados desde 1956, com armadura longitudinal distribuída não uniformemente, e diferentes valores de resistência à compressão do betão, percentagem de armadura longitudinal e altura útil.

Por fim, no Capítulo 5 são apresentadas as principais conclusões obtidas neste trabalho de investigação, assim como, são sugeridos trabalhos futuros relacionados com este tema.



## **Capítulo 2**

### **Estado Do Conhecimento**

#### **2.1. INTRODUÇÃO**

Desde os primórdios da investigação na área do betão estrutural, realizada através de trabalhos teóricos e experimentais, que o fenómeno da rotura por punçoamento tem vindo a ser estudado. [57].

A resistência ao punçoamento em lajes fungiformes sem armadura transversal depende de diversos fatores, que vários autores têm investigado até ao momento, como, a percentagem e disposição de armadura longitudinal, a localização e dimensão do pilar, a espessura da laje, a resistência do betão e a existência de aberturas nos modelos. Este problema tem vindo a ser tratado também por diferentes regulamentos e normas.

Seguidamente detalha-se o mecanismo de rotura por punçoamento, os regulamentos e normas que abordam este tema, assim como diversos trabalhos onde foram realizados ensaios experimentais para o estudo da resistência ao punçoamento em lajes fungiformes.

## **2.2. MECANISMO DE ROTURA AO PUNÇOAMENTO**

A rotura por punçoamento pode ocorrer quando existem cargas concentradas em elementos que apresentam reduzida dimensão segundo a sua direção de aplicação (espessura), como por exemplo, lajes e sapatas flexíveis.

Tal mecanismo pode ser observado em lajes fungiformes, junto à ligação laje-pilar, onde a transferência de forças e momentos podem provocar elevadas tensões que podem originar a rotura.

É um mecanismo de rotura frágil, isto é, com pouca ductilidade, que colapsa repentinamente. No entanto, apesar de se tratar de uma rotura local, em alguns casos particulares, esta pode tornar-se global, visto que uma estrutura ao perder um elemento de apoio, vai redistribuir a carga para os elementos adjacentes, que podem não resistir a esse incremento, conduzindo ao colapso total da estrutura.

Este fenómeno pode ser descrito através de diversas fases, para o caso de uma ligação laje-pilar. Inicialmente, o betão e o aço, têm um comportamento elástico linear. Seguidamente, começam a surgir fendas de flexão tangenciais ao perímetro do pilar. Em segundo lugar, aparecem fendas radiais. Posteriormente, deixam de existir novas fendas de flexão, mas as existentes tendem a alcançar uma maior abertura, formando-se a seguir fendas de corte. Por fim, a fenda de corte separa a laje em duas partes, formando-se um elemento tronco-cónico à volta do pilar [52].

## **2.3. REGULAMENTOS E NORMAS**

Numa laje sem armadura específica, perante a ação de uma carga concentrada, a resistência ao punçoamento dependerá de diversos fatores como, por exemplo, da geometria da laje e do pilar, da percentagem e disposição da armadura longitudinal e da resistência à compressão do betão.

Seguidamente, será apresentado um conjunto de regulamentos e normas que tratam o problema do punçoamento. No entanto, apenas a norma NP EN 1992-1, o Model Code 2010 e o ACI 318-11 serão utilizados em termos de comparação no desenvolvimento deste trabalho.

### **2.3.1. NP EN 1992-1**

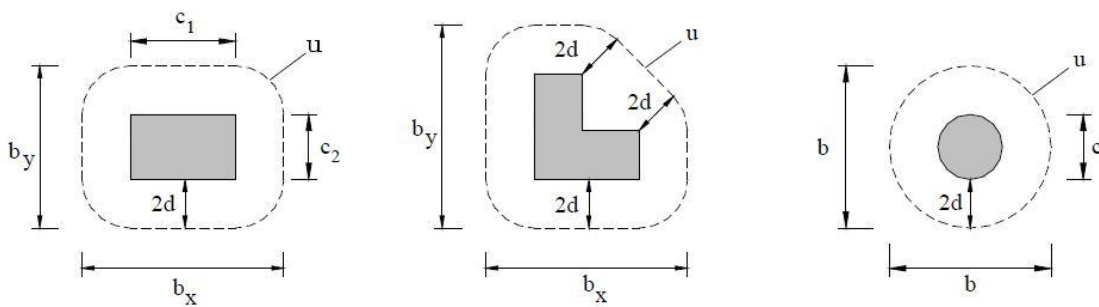
Segundo a norma NP EN 1992-1 [27], referente ao projeto de estruturas de betão, a resistência ao punçoamento deve ser verificada junto à face do pilar e no primeiro perímetro de contorno,  $u_1$ ,

cuja distância é de  $2d$  da área carregada. O seu traçado deve corresponder a um comprimento que seja o mínimo, como indica a Figura 2.1.

A altura útil da laje, através desta norma, é expressa da seguinte forma:

$$d = \frac{(d_y + d_z)}{2} \tag{2.1}$$

em que  $d_y$  e  $d_z$  são as alturas úteis da armadura em duas direções ortogonais.



**Figura 2.1** - Primeiros perímetros de controlo segundo a NP EN 1992-1 [51]

### 2.3.1.1. Cálculo do valor da resistência ao punçoamento

Quanto à resistência ao punçoamento devem ser realizadas duas verificações.

No perímetro do pilar, ou no perímetro da área carregada, a tensão de punçoamento,  $v_{Ed}$ , não deve exceder o seu valor máximo,  $v_{Rd,máx}$ .

$$v_{Ed} \leq v_{Rd,máx} \tag{2.2}$$

Com

$$v_{Rd,máx} = 0,5 v f_{cd} \tag{2.3}$$

onde

$$v = 0,6 \left[ 1 - \frac{f_{ck}}{250} \right] \text{ com } f_{ck} \text{ em MPa}$$

e  $f_{cd}$  é o valor de cálculo da tensão de rotura do betão à compressão.

Não é necessário colocar armaduras de punçoamento caso

$$v_{Ed} \leq v_{Rd,c} \quad (2.4)$$

O valor de cálculo da resistência ao punçoamento [MPa], para uma laje sem armaduras específicas,  $v_{Rd,c}$ , é dado pela seguinte expressão:

$$v_{Rd,c} = C_{Rd,c} k (100\rho_1 f_{ck})^{1/3} + k_1 \sigma_{cp} \geq (v_{min} + k_1 \sigma_{cp}) \quad (2.5)$$

onde

$$C_{Rd,c} = \frac{0,18}{\gamma_c}$$

$$k = 1 + \sqrt{\frac{200}{d}} \leq 2,0 \text{ com } d \text{ em mm}$$

$$\rho = \sqrt{\rho_{ly} \rho_{lz}} \leq 0,02$$

em que

$\rho$  é a percentagem de armadura longitudinal e  $\rho_{ly}$  e  $\rho_{lz}$  correspondem às armaduras de tração aderentes nas direções y e z, calculadas como valor médio de cálculo numa distância de  $3d$  a partir do pilar e para cada um dos lados do mesmo

$f_{ck}$  é a tensão característica de rotura à compressão do betão em provetes cilíndricos [MPa]

$k_1$  é uma constante cujo valor recomendado é 0,1

$$\sigma_{cp} = \frac{(\sigma_{cy} + \sigma_{cz})}{2}$$

e,

$\sigma_{cp}$  é a tensão normal no betão, em MPa, cujo valor é positivo para compressão

$$\sigma_{cy} = \frac{N_{Ed,y}}{A_{cy}} \text{ e } \sigma_{cz} = \frac{N_{Ed,z}}{A_{cz}}$$

sendo

$N_{Ed}$  o esforço axial atuante

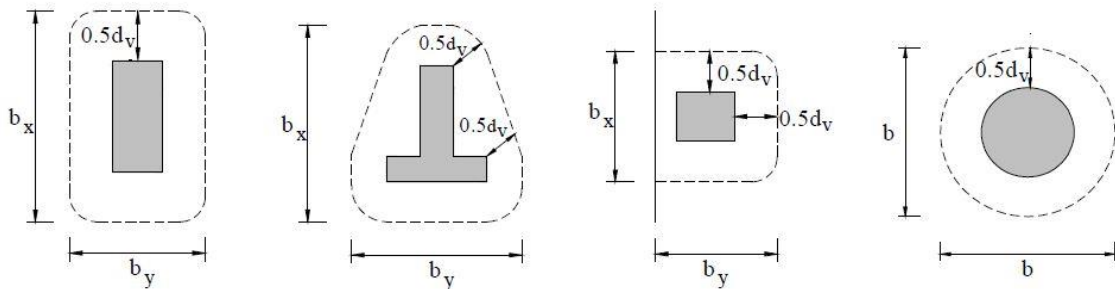
$A_c$  a área de betão associada ao esforço  $N_{Ed}$  considerado.

O valor de cálculo da resistência mínima ao punçoamento,  $v_{min}$ , obtém-se de acordo com a seguinte expressão:

$$v_{min} = 0,035 k^{3/2} f_{ck}^{1/2} \tag{2.6}$$

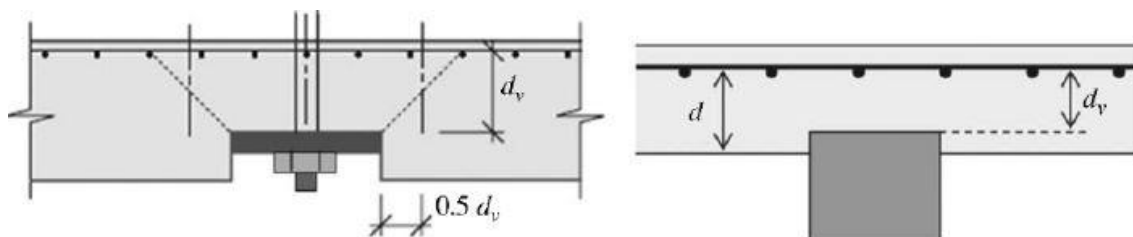
**2.3.2. CEB-FIP Model Code 2010**

O Model Code 2010 [13] define o perímetro do controlo de referência, segundo uma linha fechada que dista  $0,5d_v$  da área de suporte. É um linha circundante à área carregada, determinada de modo a minimizar o seu comprimento, como indica a Figura 2.2.



**Figura 2.2** - Perímetro do contorno de referência segundo o Model Code 2010 [51]

A altura útil da laje,  $d$ , e a altura útil da laje a partir da superfície de suporte da mesma,  $d_v$ , podem ser visualizadas na Figura 2.3.



**Figura 2.3** - Alturas úteis a utilizar de acordo com o Model Code 2010 [13]

2.3.2.1. Cálculo do valor da resistência ao punçoamento

A resistência ao punçoamento é calculada de acordo com a seguinte expressão:

$$V_{Rd} = V_{Rd,c} + V_{Rd,s} \quad (2.7)$$

onde

$V_{Rd,c}$  corresponde ao valor de cálculo da resistência ao punçoamento sem armadura específica

$V_{Rd,s}$  corresponde ao valor de cálculo da resistência ao punçoamento com armadura específica.

O valor de cálculo da resistência ao punçoamento sem armadura específica,  $V_{Rd,c}$ , é obtido do seguinte modo:

$$V_{Rd,c} = k_{\psi} \frac{\sqrt{f_{ck}}}{\gamma_c} u d_v \quad (2.8)$$

em que

$f_{ck}$  corresponde à tensão característica de rotura à compressão do betão em provetes cilíndricos (em MPa)

$\gamma_c$  é o coeficiente de segurança do betão com o valor de 1,5

$u$  é o perímetro do contorno de referência

$d_v$  a altura útil da laje a partir da superfície de suporte.

O parâmetro  $k_{\psi}$  depende das deformações/rotações da laje, sendo obtido por:

$$k_{\psi} = \frac{1}{1,5 + 0,9 k_{dg} \psi d} \leq 0,6 \quad (2.9)$$

Onde  $\psi$  é a rotação da laje à volta da região de apoio fora da zona crítica de fendilhação.

A resistência ao punçoamento é influenciada pela máxima dimensão do agregado utilizado,  $d_g$ , pelo que, para betões com máxima dimensão do agregado inferior a 16mm, o valor de  $k_{dg}$  deve ser calculado do seguinte modo

$$k_{dg} = \frac{32}{16+d_g} \quad (2.10)$$

onde  $d_g$  é utilizado em mm.

No caso de betões com máxima dimensão do agregado igual ou superior a 16mm,  $k_{dg}$  toma o valor de 1.

As rotações podem ser calculadas por diversos níveis de aproximação:

#### Nível I de Aproximação

O nível de aproximação I é utilizado para lajes fungiformes dimensionadas de acordo com uma análise elástica sem significativa redistribuição de forças internas. Deve ser utilizado essencialmente para o pré-dimensionamento das lajes.

$$\psi = 1,5 \frac{r_s f_{syd}}{d E_s} \quad (2.11)$$

onde  $r_s$  corresponde à distância entre a linha de momentos nulos e o eixo do pilar.

Este valor pode ser aproximado a  $0,22L_x$  ou  $0,22L_y$  para a direção x e y, respetivamente, para lajes fungiformes regulares em que a razão entre os vãos é entre 0,5 e 2,0.

#### Nível II de Aproximação

Este nível de aproximação é utilizado em casos onde, na fase de dimensionamento, é considerada uma redistribuição de esforços significativa.

$$\psi = 1,5 \frac{r_s f_{syd}}{d E_s} \left( \frac{m_{Ed}}{m_{Rd}} \right)^{1,5} \quad (2.12)$$

onde

$m_{Ed}$  é o momento médio de cálculo atuante por unidade de comprimento na largura da banda  $b_s$

$m_{Rd}$  é o momento médio de cálculo resistente por unidade de comprimento na largura da banda  $b_s$ .

As rotações devem ser calculadas nas duas direções principais de disposição da armadura.

O momento médio de cálculo atuante pode ser aproximado para cada direção e tipo de suporte como:

- para pilares interiores (armadura superior em cada direção):

$$m_{Ed} = V_{Ed} \left( \frac{1}{8} + \frac{|e_{u,i}|}{2 b_s} \right) \quad (2.13)$$

- para pilares de bordo

Quando os cálculos são feitos considerando a armadura de tração paralela ao bordo

$$m_{Ed} = V_{Ed} \left( \frac{1}{8} + \frac{|e_{u,i}|}{2 b_s} \right) \geq \frac{V_{Ed}}{4} \quad (2.14)$$

Quando os cálculos são feitos considerando a armadura de tração perpendicular ao bordo

$$m_{Ed} = V_{Ed} \left( \frac{1}{8} + \frac{|e_{u,i}|}{b_s} \right) \quad (2.15)$$

- para pilares de canto (armadura de tração em cada direção)

$$m_{Ed} = V_{Ed} \left( \frac{1}{8} + \frac{|e_{u,i}|}{b_s} \right) \geq \frac{V_{Ed}}{2} \quad (2.16)$$

A largura da banda a considerar para o cálculo de  $m_{Ed}$  é

$$b_s = 1,5\sqrt{r_{s,x} r_{s,y}} \leq L_{min} \quad (2.17)$$

onde

$b_s$  é a largura da banda utilizada para o cálculo do momento médio atuante

$e_{u,i}$  é a excentricidade da forças de corte resultantes em relação ao centróide do perímetro do controlo de referência em cada direção  $i$

$V_{Ed}$  é a força de punçoamento atuante.

O mesmo valor de  $r_s$  do nível I de aproximação pode ser adotado.

O valor da rotação  $\psi$  pode ainda ser obtido através de um processo iterativo, pela seguinte expressão:

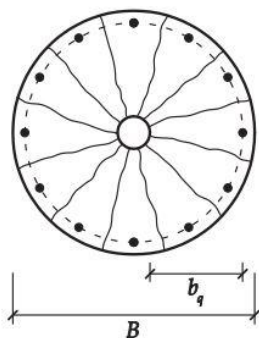
$$V = V_{flex} \left( \frac{\psi}{1,5 \cdot \frac{r_s f_y}{d E_s}} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (2.18)$$

onde  $V_{flex}$  é a resistência à flexão de uma laje calculada através da teoria das linhas de rotura.

A resistência à flexão de uma laje é calculada em função do tipo de modelo de laje em estudo. Em seguida são apresentados os tipos mais comuns de modelos de ensaio ao punçoamento e respetivo modelo de linhas de rotura.

Para modelos circulares suportados por colunas circulares, e com iguais deslocamentos aplicados ao longo do bordo do modelo, representado na Figura 2.4, a resistência à flexão de uma laje calcula-se através da equação 2.19.

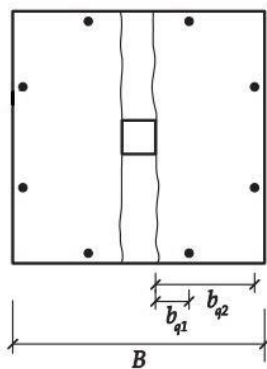
$$V_{flex} = 2\pi \frac{B}{2b_q} m_{R,average} \quad (2.19)$$



**Figura 2.4** – Padrão das linhas de rotura de um modelo circular (adaptado de [16])

No caso de modelos de laje quadrados ou octogonais com iguais cargas aplicadas junto ao bordo do modelo, como se observa na Figura 2.5, a resistência à flexão pode ser obtida a partir da seguinte expressão:

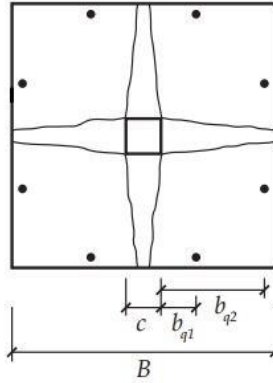
$$V_{flex} = 8 \frac{B}{2(b_{q1} + b_{q2})} m_{R,weak} \quad (2.20)$$



**Figura 2.5** – Padrão das linhas de rotura de um modelo quadrado estaticamente determinado (adaptado de [16])

Perante modelos de lajes quadrados com iguais deslocamentos junto ao bordo e com linhas de rotura em ambos os sentidos, como o representado na Figura 2.6, a resistência à flexão determina-se, aproximadamente, do seguinte modo:

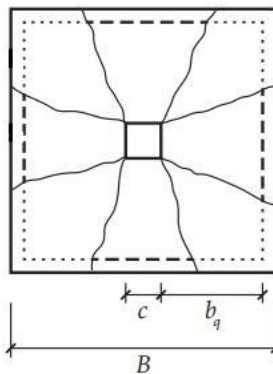
$$V_{flex} \approx 8 \frac{B}{2(b_{q1}+b_{q2})} m_{R,average} \quad (2.21)$$



**Figura 2.6** – Padrão das linhas de rotura de um modelo quadrado estaticamente indeterminado (adaptado de [16])

Quando o modelo é quadrado, a carga quadrada é aplicada no centro do modelo, e encontra-se apoiado nos bordos mas com os cantos livres, como demonstra a Figura 2.7, a resistência à flexão do mesmo calcula-se através da equação 2.22.

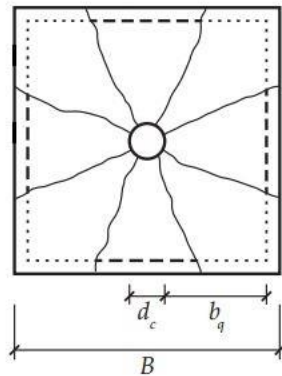
$$V_{flex} = \frac{8}{b_q} \left[ \frac{(\sqrt{2}-1)^2}{2} b_c + (\sqrt{2}-1)B \right] m_{R,average} \quad (2.22)$$



**Figura 2.7** – Padrão das linhas de rotura de um modelo e coluna quadrados, simplesmente apoiado nos bordos (adaptado de [16])

Por fim, no caso de o modelo ser quadrado mas com uma aplicação de carga centrada circular, e apoiado nos bordos e livre nos cantos, ilustrado na Figura 2.8, a resistência à flexão é obtida aproximadamente pela seguinte expressão:

$$V_{flex} \approx \frac{8}{b_q} \left[ \frac{(\sqrt{2}-1)^2}{4} d_c + (\sqrt{2} - 1)B \right] m_{R,average} \quad (2.23)$$



**Figura 2.8** – Padrão das linhas de rotura de um modelo quadrado e coluna circular, simplesmente apoiado nos bordos (adaptado de [16])

Nas presentes fórmulas tem-se que,

$B$  é a largura da laje

$b_q$  é a distância entre a face da coluna e a linha de momentos nulos

$b_{q1}$  é a distância entre a face da coluna e o ponto da linha de momentos nulos mais próximo da mesma

$b_{q2}$  é a distância entre a face da coluna e o ponto da linha de momentos nulos mais afastado da mesma

$c$  é a dimensão da coluna

$d_c$  é o diâmetro da coluna

$m_{R,average}$  é o momento resistente médio

$m_{R,weak}$  é o menor momento resistente.

Estes momentos são calculados do seguinte modo:

$$m_{R,average} = \rho_{average} \cdot f_y \cdot d_{average}^2 \cdot \left(1 - \frac{\rho_{average} \cdot f_y}{2 f_{cp}}\right) \quad (2.24)$$

$$m_{R,weak} = \rho_{weak} \cdot f_y \cdot d_{weak}^2 \cdot \left(1 - \frac{\rho_{weak} \cdot f_y}{2 f_{cp}}\right) \quad (2.25)$$

em que,

$\rho_{average}$  é a percentagem média da armadura de toda a laje

$\rho_{weak}$  é a percentagem segundo a direção com menor armadura

$d_{average}$  é a altura útil média da laje

$d_{weak}$  é a altura útil segundo a direção com menor percentagem de armadura

$f_{syd}$  é o valor de cálculo da tensão de cedência do aço

$$f_{cp} = \eta_{fc} \cdot f_{ck}$$

$$\text{onde } \eta_{fc} = \left(\frac{30}{f_{ck}}\right)^{1/3} \leq 1$$

com  $f_{ck}$  igual à tensão característica de rotura à compressão do betão.

### Nível III de aproximação

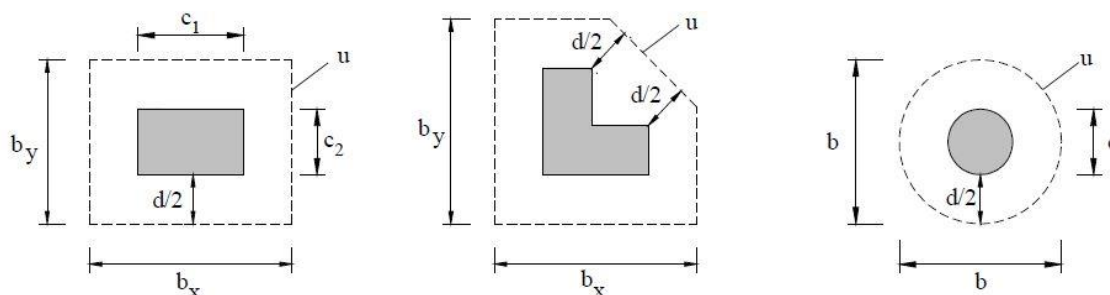
O coeficiente 1,5 nas equações 2.17 e 2.18 é substituído por 1,2 se  $r_s$  e  $m_{Ed}$  forem calculados utilizando um modelo elástico-linear.

### Nível IV de aproximação

A rotação pode ser calculada com base numa análise não linear da estrutura contabilizando a fendilhação, os efeitos tensão-deformação, a cedência da armadura e outros efeitos não lineares importantes.

### 2.3.3. ACI 318-11

O ACI 318 [4] prevê, para lajes fungiformes, um perímetro de controlo de referência não inferior a uma distância  $d/2$  do pilar ou da área carregada, tal como representado na Figura 2.9.



**Figura 2.9** - Perímetro do contorno de referência estipulado pelo ACI 318-11 [51]

Para lajes não pré-esforçadas, o valor de cálculo da resistência ao punçoamento deve ser o menor dos seguintes valores:

$$V_{Rd} = 0,17 \left(1 + \frac{2}{\beta}\right) \lambda \sqrt{f_{ck}} u d \quad (2.26)$$

$$V_{Rd} = 0,083 \left(\frac{\alpha_s d}{u} + 2\right) \lambda \sqrt{f_{ck}} u d \quad (2.27)$$

$$V_{Rd} = 0,33 \lambda \sqrt{f_{ck}} u d \quad (2.28)$$

em que

$\alpha_s$  toma o valor de 40 caso se trate de um pilar interior, 30 se o pilar for de bordo e 20 para um pilar de canto.

$\beta$  é a razão entre a maior e a menor dimensão da área carregada

$\lambda$  é um fator que relaciona a resistência à tração e compressão do betão através da seguinte expressão:

$$\lambda = \frac{f_{ctk}}{0,56 \sqrt{f_{ck}}}$$

$f_{ctk}$  é a tensão característica de rotura à tração do betão

$f_{ck}$  é a tensão característica de rotura à compressão do betão em provetes cilíndricos limitada a 70 MPa

$u$  o perímetro do contorno de referência

$d$  a altura útil da laje.

## 2.4. ENSAIOS EXPERIMENTAIS

### 2.4.1. Introdução

Sabe-se que, ao longo dos anos, foram construídos diversos modelos de laje com diferentes características, com o intuito de estudar o problema do punçoamento.

Seguidamente, serão apresentados vários trabalhos de investigação, realizados por diferentes autores desde 1956, que envolveram modelos experimentais e analíticos, fazendo variar a percentagem de armadura longitudinal dos mesmos, entre outras características.

O estudo destes trabalhos permitiu elaborar uma análise comparativa entre normas e regulamentos, quanto à resistência à compressão do betão utilizado, à altura útil dos modelos e à percentagem de armadura longitudinal.

### 2.4.2. Elstner e Hognestad - 1956

O efeito da armadura à flexão na capacidade de resistir ao punçoamento foi claramente demonstrado pelos modelos de Elstner e Hognestad [17]. De acordo com os resultados obtidos, foi possível demonstrar que a armadura de flexão introduzida é um parâmetro que influencia a resistência ao punçoamento de lajes.

Os modelos de lajes estudados encontravam-se simplesmente apoiados nos bordos com os cantos livres. Os modelos foram sujeitos a um aumento monotónico de carga, sendo esta aplicada no centro da laje.

Elstner e Hognestad testaram 38 lajes com o objetivo de avaliar a influência de diversas variáveis. Destes modelos de laje, 24 foram construídos sem armadura específica de punçoamento, quadrados em planta, com 1830 x 1830 mm<sup>2</sup> e espessura de 152 mm. As principais variáveis neste estudo foram a resistência do betão e a percentagem e distribuição de armadura longitudinal. Estas vari-

áveis foram divididas em séries, sendo que uma delas é a referente à utilização de armadura distribuída não uniformemente pelos modelos de laje. Nesta série estão incluídas duas lajes, associadas a pilares quadrados com 254 mm e 356 mm [5]. As características dos materiais utilizados foram similares. Com este estudo verificaram que, a concentração de armadura de flexão na zona central da laje, não induz a nenhum aumento da resistência ao punçoamento, aumentando apenas a rigidez na resposta carga-deformação da laje. Concluíram que a tensão no aço na vizinhança do pilar foi inferior às dos modelos com armadura distribuída uniformemente.

Os autores usaram as tensões de corte calculadas a partir da face do pilar ou da zona carregada e utilizaram as seguintes expressões com base em análises estatísticas:

$$\frac{v_2}{f_{ck}} = \frac{2,296}{f_{ck}} + \frac{0,046}{\varphi_0} \text{ para unidades SI} \quad (2.29)$$

em que

$v_2$  é a tensão de corte junto à face do pilar ou à área carregada

$f_{ck}$  é a tensão característica de rotura à compressão do betão em provetes cilíndricos

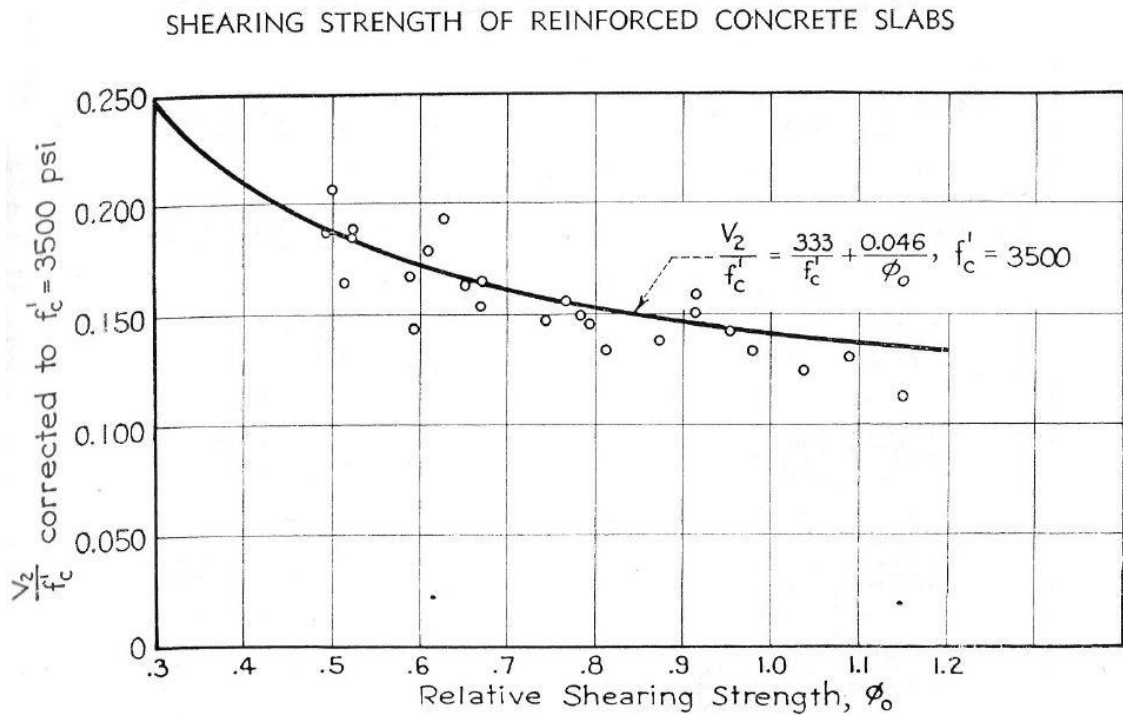
$$\varphi_0 = \frac{P_{shear}}{P_{flex}}$$

$P_{shear}$  a resistência ao corte

$P_{flex}$  a resistência à flexão da laje calculada de acordo com a teoria da linha de rotura sem contabilizar a rotura por corte.

Para um modelo de laje com dois bordos apoiados relataram que  $P_{flex}$  é inferior em comparação com um modelo com quatro bordos apoiados, o que induz a um aumento do valor de  $\varphi_0$  e a uma diminuição da carga máxima estimada.

A Figura 2.10 apresenta a relação entre a força de corte relativa e a relação entre a tensão de corte e a resistência à compressão do betão, de acordo com o desenvolvido pelos autores.



**Figura 2.10** - Resistência ao corte de lajes de betão armado, Elstner e Hognestad [35]

#### 2.4.3. Kinnunen e Nylander - 1960

O modelo de Kinnunen e Nylander [31], desenvolvido na Royal Technical University, Suécia, foi o primeiro modelo desenvolvido com o intuito de analisar a resistência ao punçoamento de uma laje. É baseado em 61 testes realizados em lajes circulares, centralmente suportadas por pilares circulares. Estes testes consistiram na análise das fendas de corte, das deformações dos modelos e da extensão do aço.

Os autores consideraram a rotura por punçoamento um sistema estrutural que consiste num cone truncado central, limitado pela fenda de corte e separado por fendas radiais, como indicado na Figura 2.11.

Após o ensaio das diversas lajes, Kinnunen e Nylander propuseram um modelo analítico cujo cálculo considera a influência do corte e da flexão simultaneamente. Neste modelo, a carga de rotura é determinada através do equilíbrio entre esforços internos e cargas/forças externas, e foi implementado do “regulamento sueco de betão” [8].

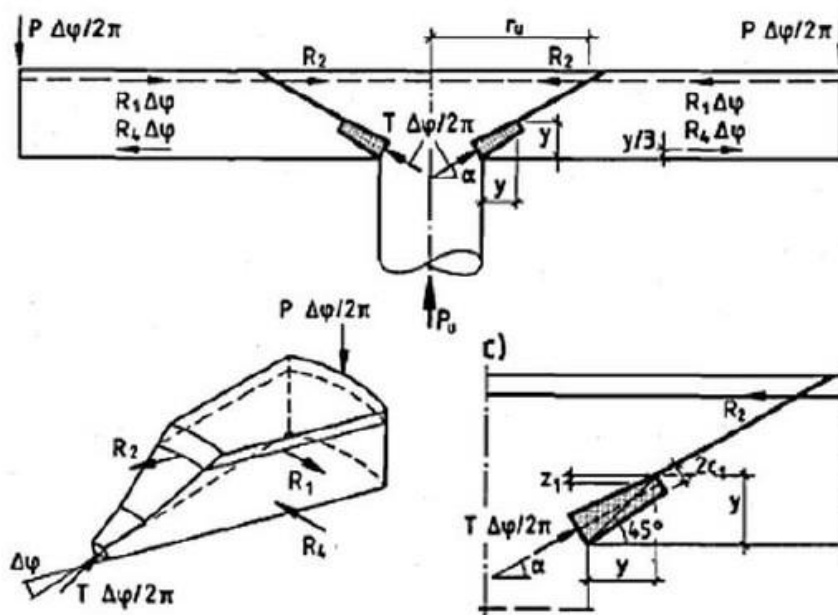


Figura 2.11 - Modelo de Kinnunen e Nylander [14]

Este modelo mostra que a carga de rotura de uma laje sujeita ao punçoamento depende da resistência à compressão do betão, da dimensão do pilar, da espessura e da armadura de flexão da laje. Os autores não utilizaram armadura específica de punçoamento.

No que respeita à armadura de flexão, dos modelos de laje estudados, seis não possuíam armadura específica de punçoamento e apresentavam uma distribuição não uniforme de armadura longitudinal. Possuíam 1840 mm de diâmetro e 120 mm de altura útil fazendo-se variar a resistência à compressão do betão entre 26 e 33 MPa e a percentagem de armadura longitudinal entre 0,79% e 1,49% [5].

Os autores propuseram duas equações 2.30 e 2.31 que preveem a carga de rotura em lajes sem armadura específica de punçoamento, que devem ser consideradas iguais através de um fator iterativo,  $k_x$ . A carga de rotura tendo em conta a influência do betão,  $V_{u,c}$  é determinada através da seguinte expressão:

$$V_{u,c} = k\pi\eta d^2 k_x \frac{1 + \frac{2k_x}{c}}{1 + \frac{k_x}{c}} \frac{\sigma_{cu}}{d} f(\alpha) \quad (2.30)$$

em que

$c$  a dimensão da área carregada

$d$  a altura útil da laje

$k$  é um fator de correção considerado igual a 1,1

$k_x$  fator de iteração relativo à profundidade da fenda inclinada

$\sigma_{cu}$  tensões de rotura do betão à compressão

$\alpha$  a inclinação da fenda da casca cónica

$$f(\alpha) = \frac{\tan\alpha(1-\tan\alpha)}{1+\tan^2\alpha}$$

A equação 2.31 depende da tensão de cedência do aço  $f_{yd}$  e da percentagem de armadura  $\rho$  utilizada, assim como das dimensões da laje.

$$V_{u,s} = k 4 \pi \rho f_{syd} d r_f \left[ 1 + \ln \left( \frac{\delta d}{2r_u} \right) \right] \frac{1 - \frac{k_x}{3}}{\delta - \frac{c}{d}} \quad (2.31)$$

com  $\delta = \frac{b}{d}$

sendo

$r_f$  o raio da área circular dentro da casca cónica

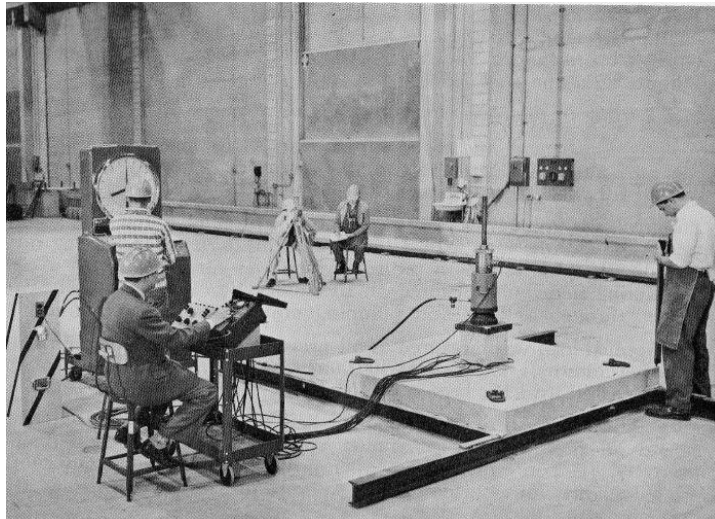
$r_u$  o raio da casca cónica na superfície superior da laje.

O conhecimento desta matéria rapidamente resultou no desenvolvimento de novos modelos sobre a ação do punçoamento.

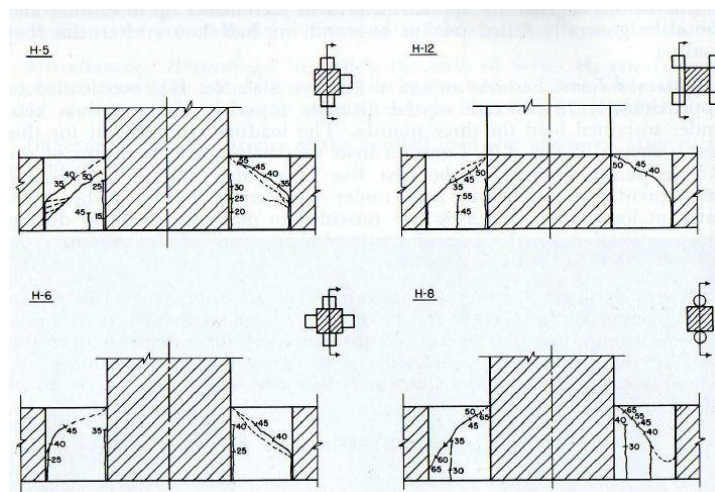
#### 2.4.4. Moe - 1961

Moe [39] analisou, em 1961, lajes quadradas de 1830 mm de lado e com 152 mm de espessura. Alguns dos modelos estudados possuíam aberturas na vizinhança dos pilares e outros disponham de armadura específica de punçoamento. Moe fez também variar a resistência do betão, a dimensão do pilar, assim como, a concentração de armadura de flexão na área de punçoamento.

Na Figura 2.12 é possível observar a configuração dos ensaios realizados por Moe.



**Figura 2.12** – Modelo de ensaio realizado por Moe [39]



**Figura 2.13** - Fendas inclinadas observadas nos modelos de Moe [39]

Das lajes estudadas, apenas 8 se tratavam de lajes interiores, sem armadura específica e carregadas concêntricamente.

O autor concluiu que a concentração de armadura não aumenta a resistência ao punçoamento de uma laje, tendo ocorrido, na verdade, uma ligeira redução na resistência com o aumento da concentração da armadura. Verificou que, esta concentração, induz um aumento na rigidez da laje e no nível de carga a que ocorre a cedência das armaduras. Observou igualmente que as primeiras fendas surgem junto à ligação laje-pilar. A Figura 2.13 apresenta as fendas inclinadas visualizadas nos modelos de Moe.

O perímetro de contorno de referência foi determinado através de análises estatísticas dos resultados experimentais, como sendo de  $d/2$  desde a face da área carregada [35].

Determinou ainda que a resistência ao punçoamento é aproximadamente proporcional à raiz quadrada da tensão de rotura à compressão do betão, proposição utilizada até hoje pelo ACI [1], e que depende da relação entre a largura do pilar e a altura útil da laje. Para  $\frac{c}{d} \geq 3$  as tensões limite devem ser reduzidas para  $2,5 \sqrt{f_{ck}}$ . [29].

Em seguida, desenvolveu um critério de rotura que garantisse uma rotura dúctil ao invés da usual rotura frágil ao punçoamento.

Moe propôs a seguinte expressão para a determinação da resistência ao corte [14]:

$$V_u = \frac{1,246 \left(1 - 0,059 \frac{c}{d}\right) u d \sqrt{f_{ck}}}{1 + \frac{0,436}{V_{flex}} u d \sqrt{f_{ck}}} \quad (2.32)$$

onde

$c$  é a dimensão da área carregada

$u$  é o perímetro de contorno de referência não inferior a  $d/2$  desde o bordo da área carregada

$d$  é a altura útil da laje

$f_{ck}$  a tensão de rotura à compressão do betão

$V_{flex}$  é a força de corte para a qual se dá a rotura por flexão

$$V_{flex} = C \rho \frac{f_{yd}}{f_{ck}} \left(1 - 0,59 \frac{f_{syd}}{f_{ck}}\right) d^2 f_{ck} \quad (2.33)$$

sendo

$C$  a relação entre o momento fletor de rotura da laje e a correspondente força no pilar  $V_{flex}$ .

$f_{syd}$  a tensão de cedência de cálculo do aço.

O ACI-Standard 318 do ano de 1963 [1] foi baseado nos resultados da pesquisa de Moe.

A Figura 2.14 apresenta uma comparação entre os ensaios realizados por Elstner-Hognestad [17] e Moe [39].

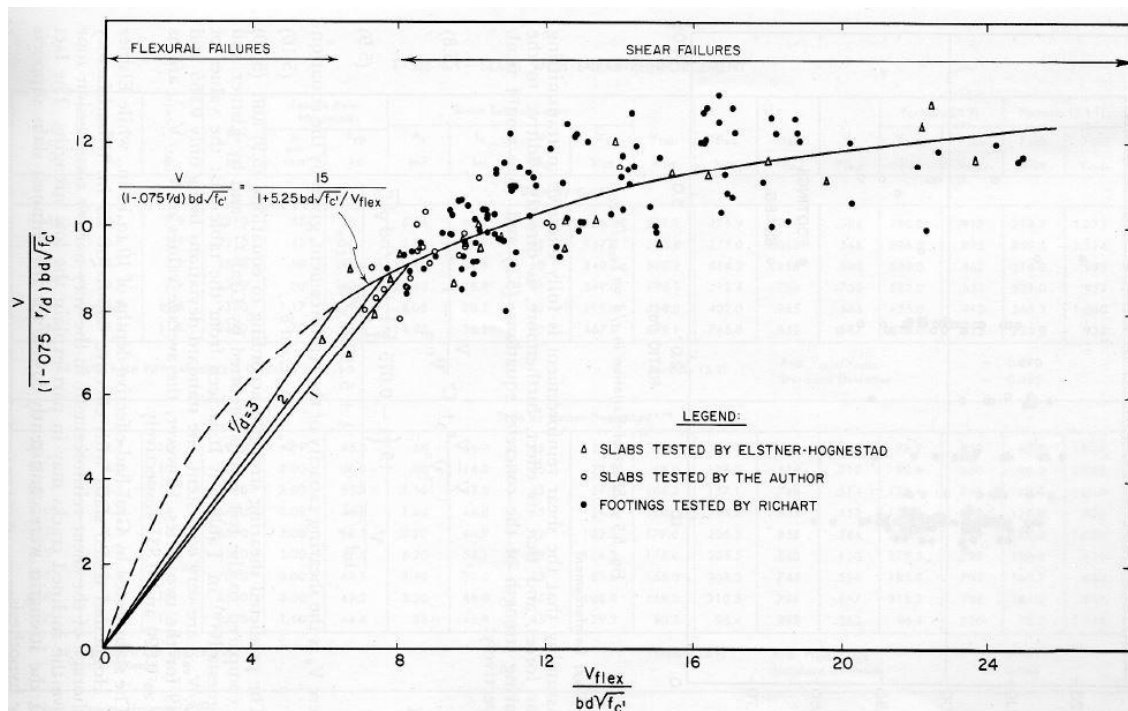
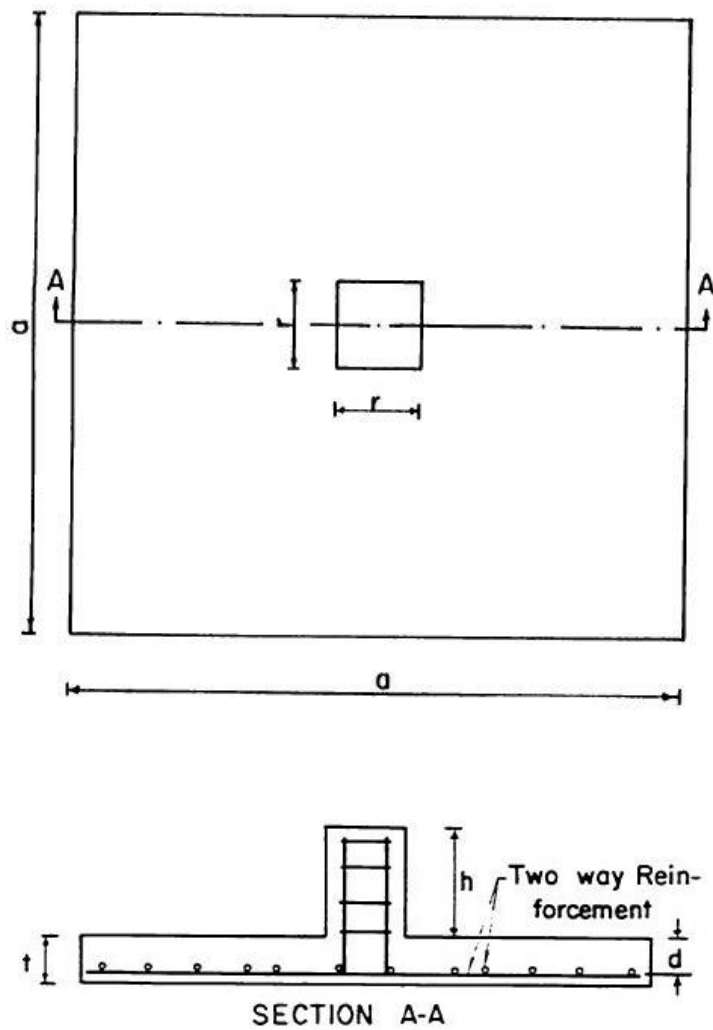


Figura 2.14 – Comparação entre os ensaios de Elstner-Hognestad e Moe [35]

#### 2.4.5. Roll et al - 1971

Roll et al [53] investigaram a resistência ao punçoamento de lajes com aberturas. Para o efeito, e tendo em conta os estudos efetuados até à data da investigação desenvolvida pelos autores, 1971, optaram por executar 158 modelos de laje com  $737 \times 737$  mm e com 61 mm de espessura.



**Figura 2.15** – Detalhes dos modelos de laje de Roll et al [53]

Estes modelos foram divididos em séries. Na série A foi utilizada armadura nas duas direções com varões de 6,4 mm de diâmetro com uma altura útil de 45,72 mm, resultando numa percentagem geométrica de armadura de 1,15%. Nesta série fez-se variar a geometria das aberturas quanto à sua forma, tamanho, número, localização e orientação. A série B foi elaborada com o objetivo de aumentar a resistência à flexão dos modelos. Para tal, foram utilizados varões de 9,5 mm, aumentando assim a percentagem geométrica de armadura em comparação com a série A. Por fim, a série H foi introduzida com o intuito de verificar a influência de 4 aberturas, como indicado na Figura 2.17.

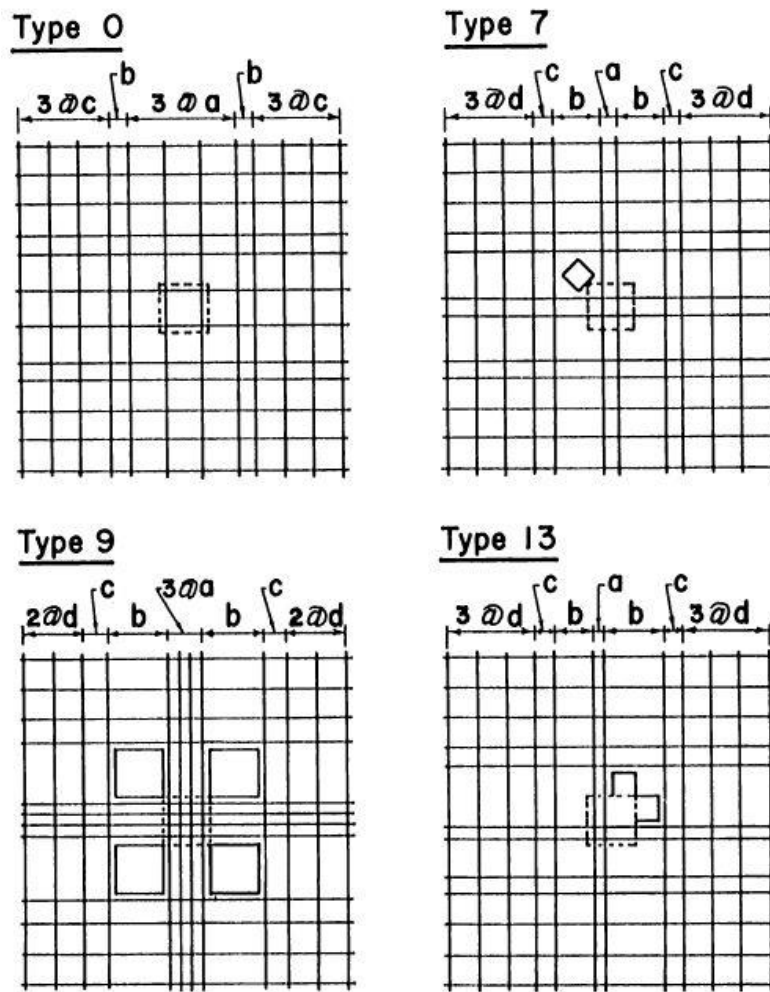


Figura 2.16 – Disposição da armadura longitudinal e das aberturas utilizadas nas séries A e B [53]

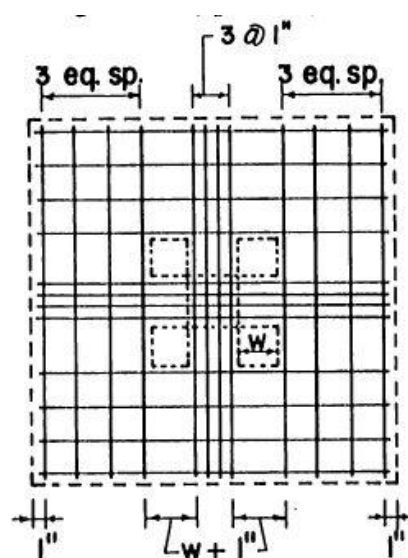


Figura 2.17 - Disposição da armadura longitudinal e das aberturas utilizadas na série H [53]

Verifica-se que a presença de aberturas requeria uma variação da disposição da armadura longitudinal. Os varões foram colocados de modo a que a distância mínima entre o centro do varão e o bordo da abertura, ou do pilar, fosse pelo menos de 1,27 cm.

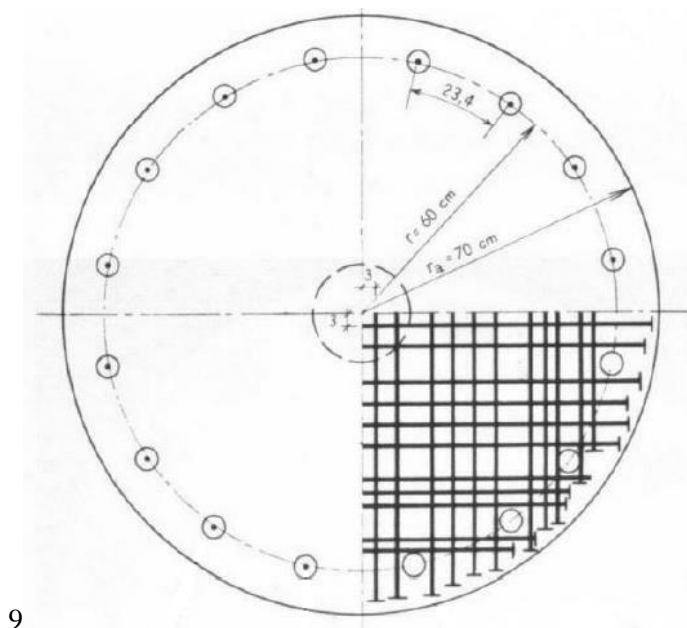
Os modelos encontravam-se simplesmente apoiados nos bordos e livres nos cantos.

Os autores não retiraram conclusões quanto à influência da diferente disposição da armadura. No entanto, quanto ao modo de rotura, verificaram que cinco dos nove modelos romperam por corte. Os restantes, desenvolveram fendas de flexão opostas à fenda de corte. Nestes casos, o autor presumiu que a resistência ao corte foi superior à tensão máxima atingida nos ensaios.

#### 2.4.6. Ladner - 1973

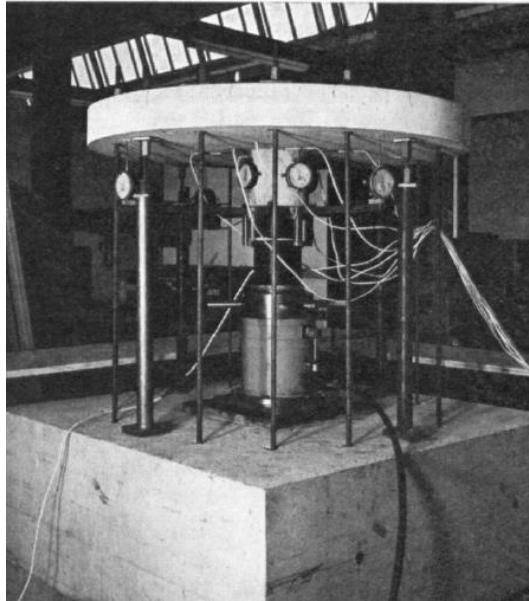
Ladner [34], em 1973, investigou a influência da dimensão dos modelos na resistência ao punção, procurando relacionar um modelo experimental com um modelo analítico.

Foi elaborado um modelo circular, como indicado na Figura 2.18, com 1200 mm de diâmetro e 127 mm de espessura, com uma disposição de armadura não uniforme.



**Figura 2.18** – Modelo de laje dimensionado por Ladner [34]

O modelo encontrava-se sujeito a uma carga circular concêntrica e a iguais deslocamentos ao longo do seu bordo. O pilar utilizado tinha 226 mm de diâmetro. Na Figura 2.19 pode observar-se o modelo de ensaio.



**Figura 2.19** – Modelo de ensaio adotado por Ladner [34]

O autor comparou o modelo M com o protótipo P, cujas características encontram-se descritas na Figura 2.20.

O autor analisou a abertura de fendas e a deformação do modelo, as extensões da armadura longitudinal utilizada e a evolução da carga vertical aplicada.

Prototyp $P^1$	Modell $M^1$
2,65 m	1,20 m
28 cm	12,7 cm
24 cm	10,9 cm
50 cm	22,6 cm
54 $\Phi$ 20 = 169,64 cm <sup>2</sup>	44 $\Phi$ 10 = 34,54 cm <sup>2</sup>
1,32%	1,31%
5550 kp/cm <sup>2</sup>	5510 kp/cm <sup>2</sup>
73,2 kp/cm <sup>2</sup>	72,2 kp/cm <sup>2</sup>
356 kp/cm <sup>2</sup>	404 kp/cm <sup>2</sup>
59 kp/cm <sup>2</sup>	54 kp/cm <sup>2</sup>

**Figura 2.20** – Características do protótipo e do modelo de acordo com Ladner [34]

#### 2.4.7. Swamy e Ali - 1982

Os autores Swamy e Ali [56] produziram modelos quadrados de lajes com  $1800 \times 1800 \text{ mm}^2$  em planta e 125 mm de espessura com uma altura útil de 100 mm.

Na sua investigação, os autores testaram 19 modelos fazendo variar a percentagem de armadura longitudinal, a armadura transversal e a utilização localizada de fibras de carbono.

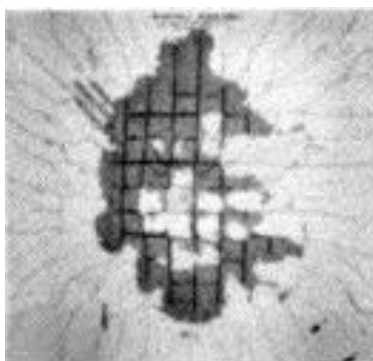
Os modelos foram ensaiados com os bordos simplesmente apoiados e os cantos livres, sendo carregados centralmente por um pilar com  $150 \times 150 \text{ mm}^2$ . Foram apenas utilizados varões de 8 mm e 10 mm de diâmetro na execução dos modelos.

Durante os ensaios, os autores registaram a deformação e rotação dos modelos, a carga vertical aplicada e a extensão no aço. Os deslocamentos verticais e horizontais nos cantos dos modelos foram também monitorizados.

Na Figura 2.21 denota-se a superfície de rotura do modelo ensaiados pelos autores com armadura longitudinal concentrada e sem fibras de carbono.

Quanto à concentração da armadura longitudinal junto à ligação laje-pilar, os autores concluem, tendo em conta a utilização de fibras de carbono no modelo, que o modelo pode atingir a mesma carga de rotura mas com 43% menos de armadura.

Com a concentração de armadura longitudinal, a primeira fenda no modelo ocorreu para uma carga superior em comparação com os modelos com armadura distribuída uniformemente. Esta concentração foi igualmente eficaz na redução da deformação do modelo, sucedendo-se um aumento na rigidez.



**Figura 2.21** – Modo de rotura do modelo ensaiado por Swamy e Ali [56]

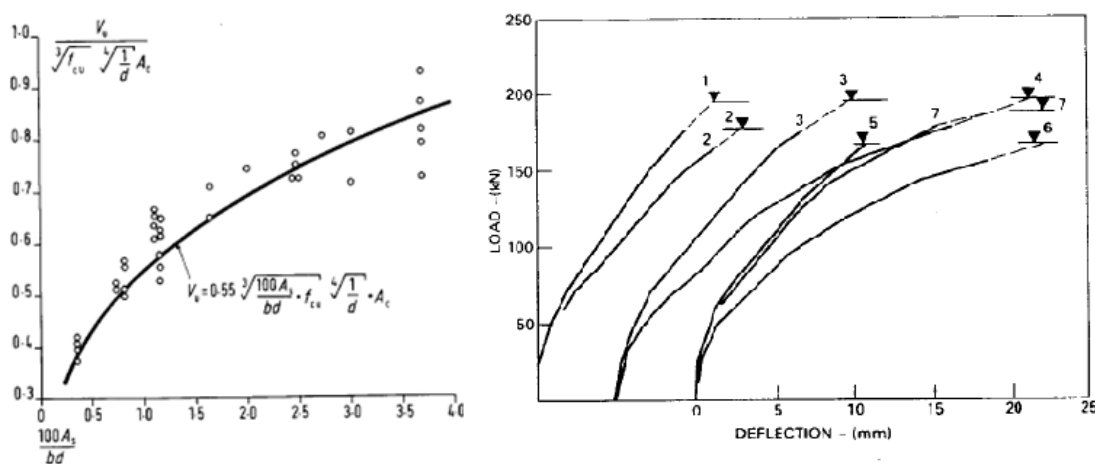
### 2.4.8. Regan - 1986

Regan [50] analisou 28 modelos de laje que se encontravam simplesmente apoiados ao longo dos quatro bordos num vão de 1830 mm e com os cantos livres, sujeitos a uma carga concentrada no centro da laje. Estes modelos foram divididos em diversos grupos, fazendo variar determinados parâmetros tais como: a quantidade e a disposição de armadura de flexão, a dimensão dos modelos de laje, a dimensão da área carregada e a razão entre o vão e a espessura da laje (esbelteza).

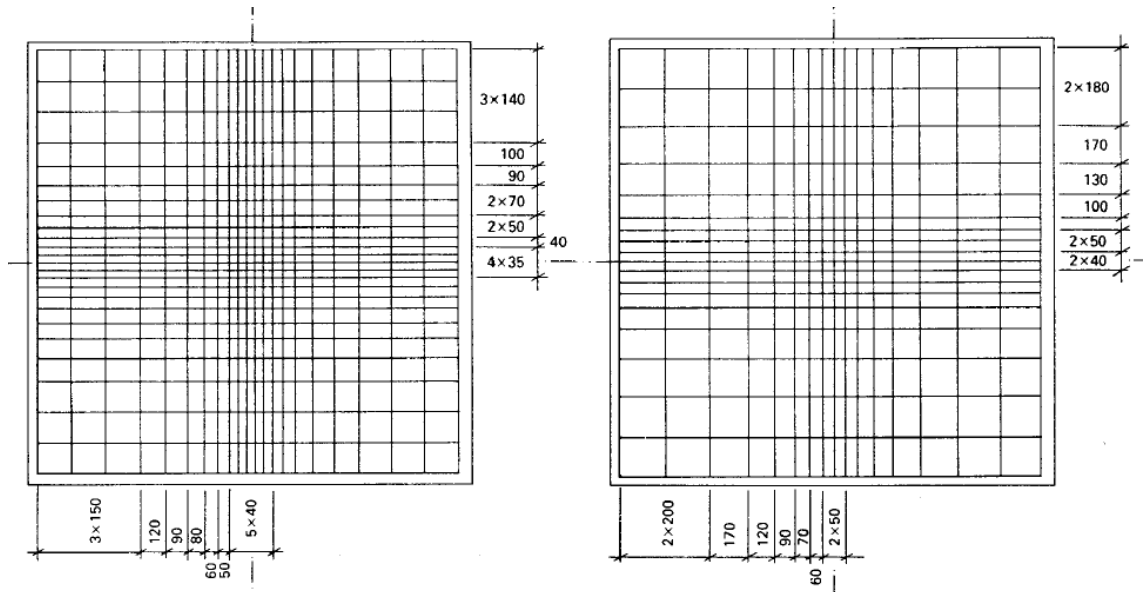
Relativamente ao grupo referente à quantidade e disposição da armadura longitudinal, em 1986, foram analisadas 7 lajes com  $2000 \times 2000 \text{ mm}^2$  e com 100 mm de espessura. O pilar utilizado apresentava geometria quadrada com 200 mm de lado. Os seis primeiros modelos foram divididos em três pares. Em cada par, um modelo apresentava armadura uniformemente distribuída, enquanto o outro apresentava o mesmo número de barras, mas dispostas de acordo com a distribuição elástica de momentos. Os pares diferiam quanto à quantidade de armadura longitudinal. A sétima laje era semelhante às restantes, no entanto, a armadura longitudinal inferior passava através do pilar. Na Figura 2.23 é possível observar as duas disposições da armadura adotadas por Regan para os seus modelos.

Regan verificou que a resposta carga-deformação é geralmente menos rígida em lajes com armadura longitudinal distribuída uniformemente. Isto deve-se ao facto de as lajes com armaduras uniformes cederem mais cedo do que as pormenorizadas segundo a distribuição elástica de momentos.

A Figura 2.22 apresenta a influência da percentagem de armadura de flexão na resistência ao punçoamento segundo Regan e a relação carga-deformação obtida nas diferentes lajes.



**Figura 2.22** - Influência da percentagem de armadura de flexão na resistência ao punçoamento [49] e relação carga-deformação segundo Regan [50]



**Figura 2.23** – Disposição das armaduras longitudinais nos modelos de Regan [50]

O autor comparou o ACI 318-71 [2] com o British Code BS 8110 [9], verificando que o segundo, utilizando as tensões de corte mais baixas e considerando o perímetro de controle maior, tem em conta o efeito de ferrolho, a concentração de tensões nos cantos e a geometria da ligação laje-pilar. Concluiu igualmente que o BS 8110 prevê com maior eficácia a influência da posição do pilar na resistência ao punçoamento [47].

Através dos resultados experimentais, Regan recomendou que o perímetro de controle deve ser considerado igual a  $3d$  a partir da face da área carregada, de modo a ser considerada a contribuição das armaduras de flexão na resistência ao punçoamento [54].

O autor explicou que ao aumentar a percentagem de armadura de flexão, aumenta igualmente a zona comprimida, existindo uma redução no que respeita à fendilhação da ligação laje-pilar, sendo este um aspeto benéfico desde que facilite a formação de mecanismos de transferência de forças através dos agregados [50].

Posteriormente, Regan sugeriu que a resistência ao punçoamento é proporcional à raiz cúbica da percentagem de armadura de flexão utilizada.

Para pilares interiores e cargas concêntricas aplicadas, Regan propôs a seguinte expressão para a resistência ao punçoamento [48]:

$$V_{rd} = K_a K_{SC} \xi_s^3 \sqrt{\frac{100 A_s}{b d}} f_{ck} A_c \quad (2.34)$$

$$K_{SC} = 1,15 \sqrt{\frac{4\pi c_1 c_2}{(c_1 + c_2)^2}} \quad (2.35)$$

$$A_c = 2,69d (\Sigma c + 7,85d) \quad (2.36)$$

em que,

$K_a$  é igual a 0,13 para betão normal e 0,103 para betão leve

$$\xi_s = \sqrt[4]{\frac{300}{d}} \text{ com } d \text{ em mm.}$$

$\frac{100 A_s}{b d}$  é a percentagem média de armadura de flexão em x e y na banda considerada a  $3d$  da área carregada.

$\xi_s$  fator de profundidade

$b$  largura da laje

$c_1$  dimensão da área carregada paralela ao vão considerado

$c_2$  dimensão da área carregada perpendicular ao vão considerado

$d$  altura útil da laje

$f_{ck}$  tensão de resistência à compressão do betão

$A_c$  área de betão

$A_s$  área de armadura

$K_{SC}$  fator de forma que depende das características da área carregada.

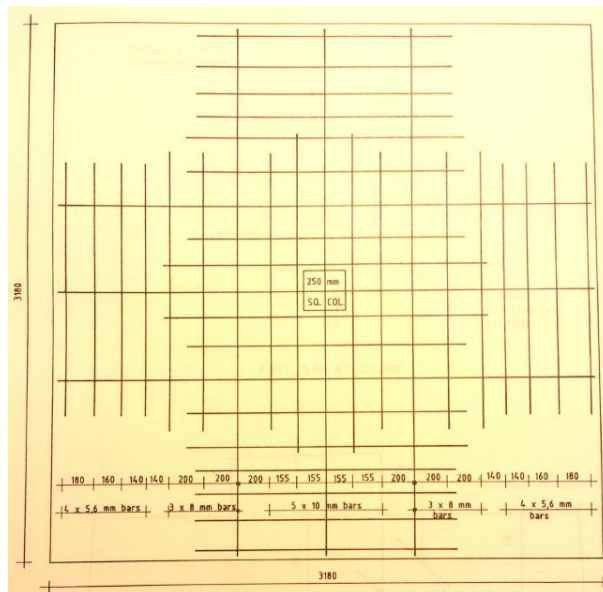
#### 2.4.9. Lunt - 1988

Em 1988, Lunt [36] iniciou a sua investigação no âmbito da sua tese de doutoramento, com o intuito de analisar a ligação laje-pilar de uma laje fungiforme carregada simetricamente, examinando os mecanismos de rotura perante a ausência de armadura transversal.

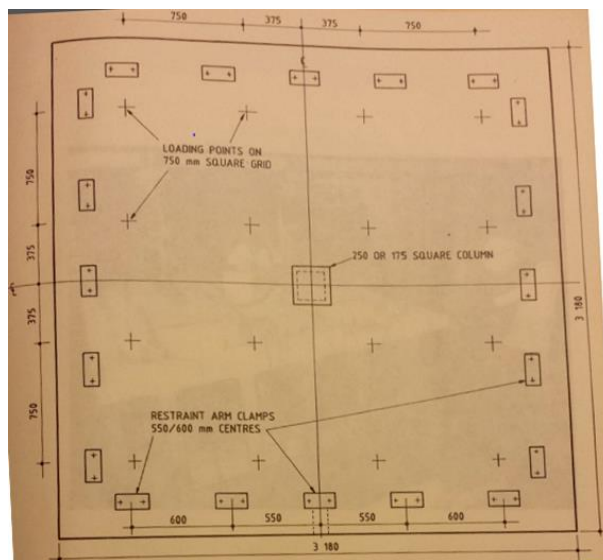
Para tal, o autor manteve constante a resistência à compressão do betão de aproximadamente 30 MPa, fazendo variar a percentagem de armadura longitudinal utilizada. Foram analisados 16 modelos de laje com  $3180 \times 3180 \text{ mm}^2$  em planta e com 130 mm de espessura, à exceção de um modelo que possuía espessura igual a 165 mm. Em todos os casos os pilares apresentavam geometria quadrada, com 250 mm e 175 mm de lado para 14 modelos de laje e 2 modelos de laje, respetivamente.

Para a elaboração da malha superior foram utilizados varões de 8 mm e 10 mm de diâmetro, distribuídos com espaçamentos desiguais como mostra a Figura 2.24. As malhas inferiores de todos os modelos foram compostas por varões de 5,6 mm de diâmetro. De modo a garantir a altura útil da laje o autor utilizou cadeiras de arame com 4 mm de diâmetro. O recobrimento inferior (mínimo 12 mm) foi garantido com recurso a espaçadores de plástico.

A Figura 2.25 mostra a disposição dos pontos de aplicação de carga.



**Figura 2.24** - Plano da armadura longitudinal superior de um dos modelos de laje de Lunt [36]



**Figura 2.25** - Plano do modelo de laje e respectivos pontos de aplicação da carga [36]

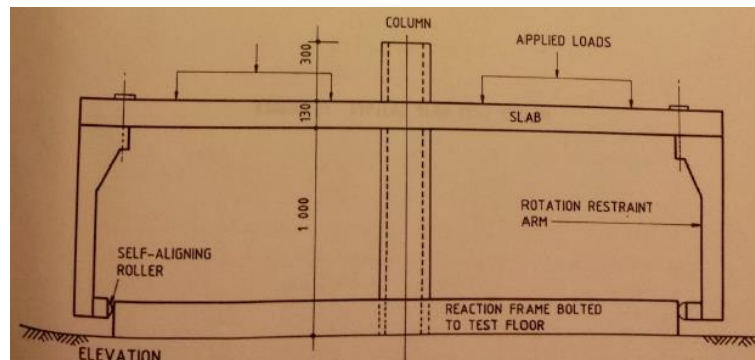
Para execução dos ensaios experimentais, os modelos encontravam-se apoiados a meio vão sobre o pilar e nos quatro cantos por meio de ganchos suspensos a partir da laje de reação do laboratório. O autor restringiu a rotação dos bordos, permitindo o deslocamento vertical nos mesmos, como se observa nas Figuras 2.26 e 2.27.

## EFEITO DA PORMENORIZAÇÃO DAS ARMADURAS

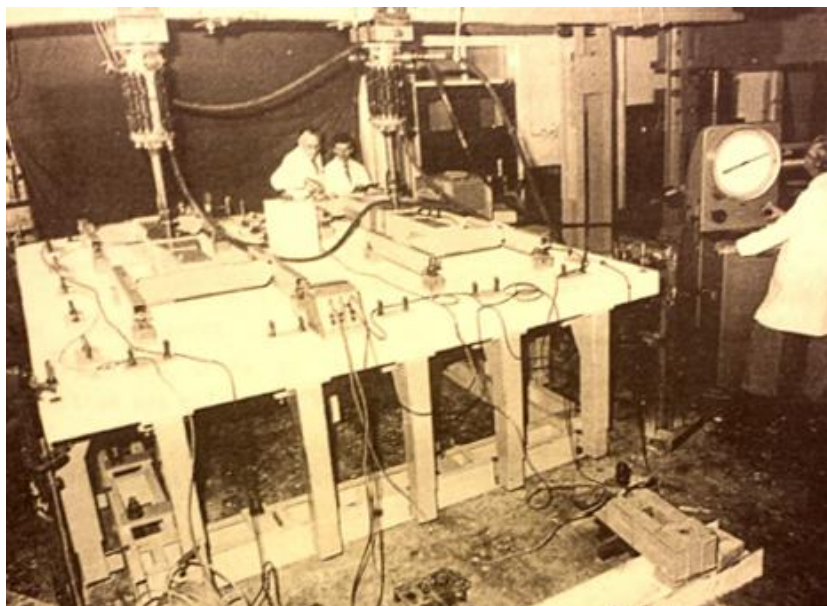
### NA RESISTÊNCIA AO PUNÇAMENTO DE LAJES FUNGIFORMES

A primeira fase de carregamento correspondeu à remoção dos ganchos em suspensão levando a que a laje suporta-se o seu peso próprio, assim como o peso do equipamento e dos braços de contenção colocados nos bordos.

Em geral, as cargas foram aplicadas com incrementos de 10 kN (por célula de carga) tendo cada fase a duração de aproximadamente 5 a 15 minutos. A duração total de cada teste foi entre 3 a 5 horas.



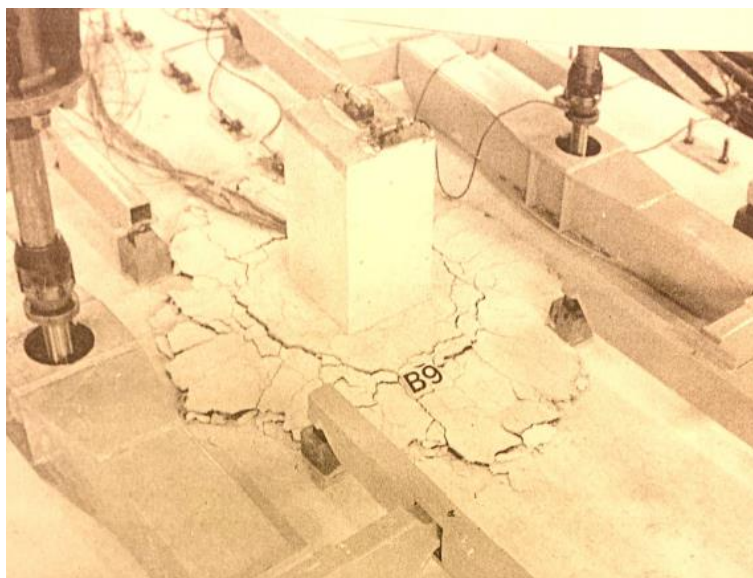
**Figura 2.26** - Principais características do modelo de laje [36]



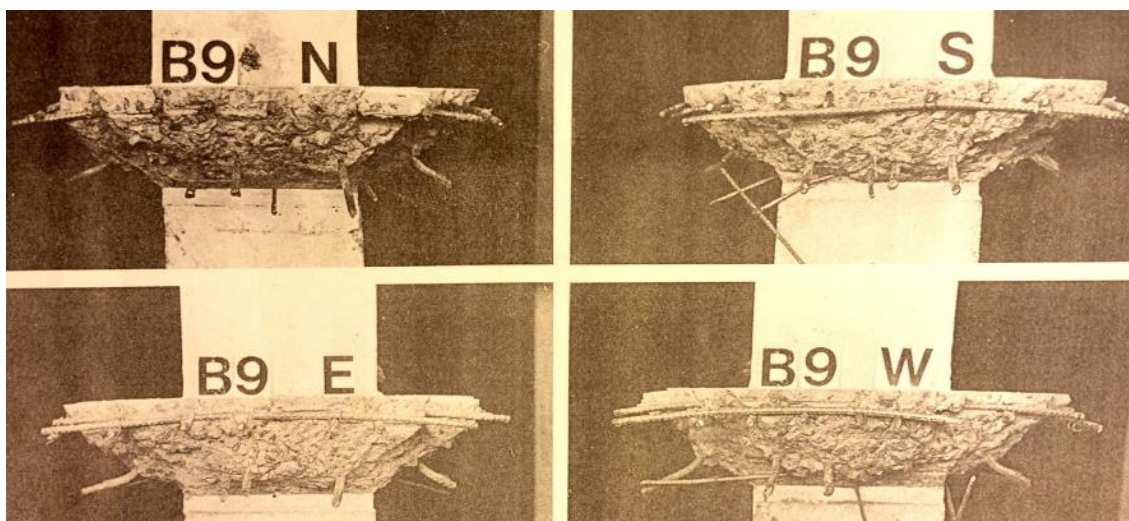
**Figura 2.27** - Disposição geral do ensaio experimental de Lunt [36]

O autor concluiu que todos os modelos tiveram uma rotura repentina, nada semelhante a uma rotura dúctil. Para as lajes com mais de 0,5% de armadura longitudinal, uma rotura por punçamento pode ser antecipada ao invés das lajes com valores de percentagem de armadura inferior, onde foram expectáveis roturas características de flexão.

As Figuras 2.28 e 2.29 apresentam vistas gerais das lajes após rotura.



**Figura 2.28** - Vista superior de um modelo de laje após rotura [36]



**Figura 2.29** – Pormenor dos cones de punção para alguns dos modelos de laje ensaiados por Lunt [36]

#### 2.4.10. Alexander e Simmonds - 1992

Alexander e Simmonds [7] apontaram diversas críticas quanto à teoria da tensão de corte, que assume que a carga vertical aplicada num elemento é suportada pelas tensões de corte na zona crítica, sendo esta uma zona orientada verticalmente a uma determinada distância da área carregada.

As tensões de corte criam uma diagonal principal de tensões à tração e compressão que podem ser consideradas como um campo de tensões diagonal que, pode ser impedido pelas fendas diagonais que “aparecem” para um estado de carga relativamente baixo. A área de betão disponível para participar neste campo de tensões fica assim reduzida à região sem fendas na zona de compressão da área carregada. Para além disto, a maioria das secções críticas apresentam-se a uma determinada distância da área carregada, baseando-se na profundidade da armadura e não na espessura da zona comprimida. Outra crítica a este modelo é o facto de, por vezes, não contabilizar a presença de armadura de flexão nem a sua distribuição. Existem três razões para este facto: a armadura da laje é discreta podendo atravessar a superfície de rotura ou não; a armadura é geralmente distribuída irregularmente, sendo difícil fazer transições “suaves” entre espaçamentos; através dos momentos e forças de dimensionamento, não é clara a localização de um varão em particular [6].

Por fim, os autores criticaram esta teoria no que diz respeito à forma da secção crítica, devendo esta ser uma variável do modelo.

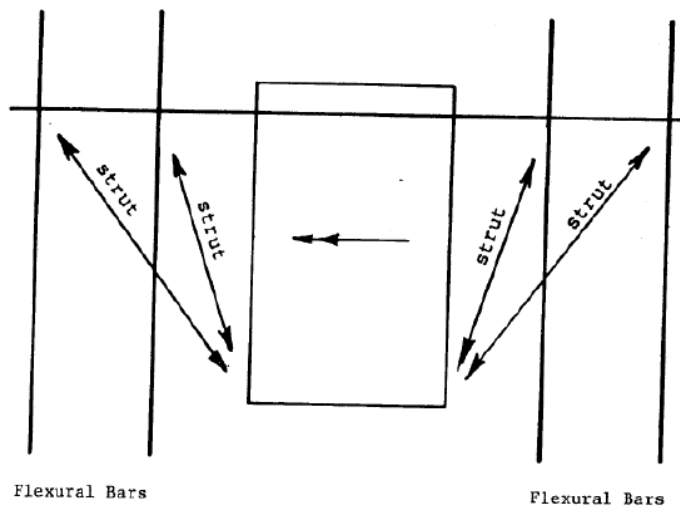
Apesar destas críticas, a teoria da tensões de corte continua a ser usada comumente nas provisões de alguns códigos, visto que permite um simples cálculo de dimensionamento relativamente ao corte, mas não explica o problema relativo ao punçoamento, sendo impreciso no cálculo da carga de rotura de estruturas existentes [35].

Em 1988, Alexander e Simmonds observaram que, apesar do CSA Standards [15] ter em consideração a influência da percentagem de armadura de flexão na resistência ao punçoamento de uma laje, apenas o detalhava indiretamente através de alguns requisitos [18].

Assim, Alexander e Simmonds desenvolveram, em 1992, o modelo de “escoras e tirantes” para lajes fungiformes. A ligação laje-pilar era descrita como uma conexão de tirantes de aço com escoras de betão. Neste modelo estas escoras são lineares com uma inclinação  $\alpha$ .

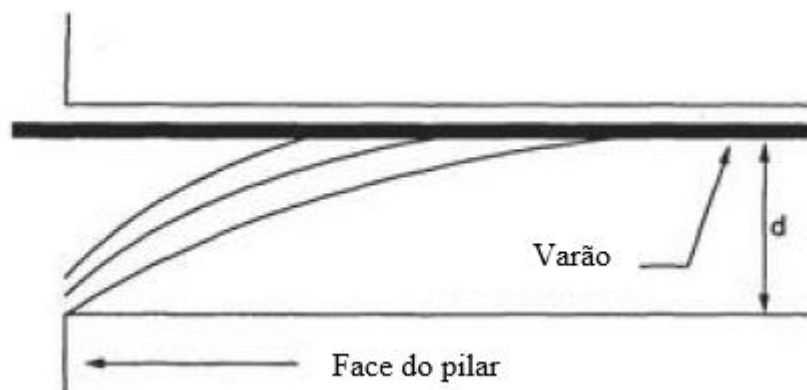
O modelo de escoras e tirantes desenvolvido pelos autores consistiu em dois tipos de escoras: no plano (paralelas à laje) ou fora do plano (com um ângulo  $\alpha$  em relação ao plano da laje).

A Figura 2.30 apresenta, em planta, num plano paralelo ao do modelo, quatro suportes de fixação. Cada é equilibrado por dois varões mutuamente perpendiculares: um através da zona carregada e o outro a uma certa distância da zona carregada.



**Figura 2.30** – Modelo de escoras e tirantes [35]

Deste modo, os autores desenvolveram um método que contivesse as características do modelo de escoras e tirantes mas que fosse de encontro às medições de tensão realizadas experimentalmente [6]. Neste modelo são consideradas escoras inclinadas, como indicado na Figura 2.31, que formam um arco radial, combinadas com a existência de tensões de corte numa secção crítica.



**Figura 2.31** - Escora de compressão curva [adaptado de 6]

Com este modelo foi possível estimar a resistência ao punçoamento. Este trabalho foi realizado com base em resultados experimentais desenvolvidos pelos autores depois do desenvolvimento do modelo de escoras e tirantes.

Os testes demonstraram que os arcos encontram-se localizados em 4 faixas radiais formadas desde o pilar paralelamente à armadura. A geometria do arco é definida pela interação entre o arco e os quadrantes da laje, como indicado na Figura 2.32.

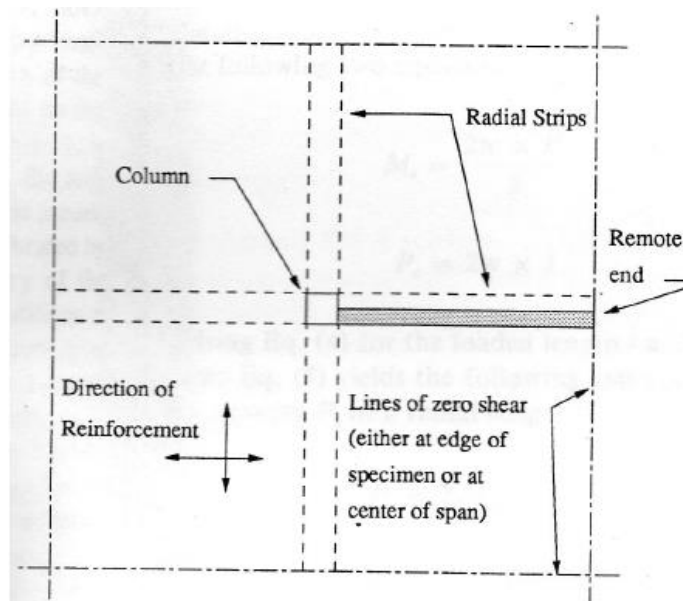


Figura 2.32 - Disposição das faixas radiais segundo Alexander e Simmonds [14]

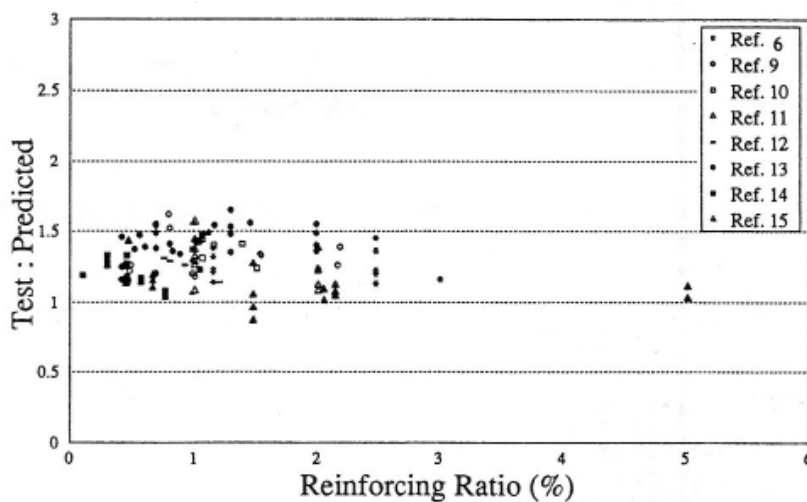


Figura 2.33 - Resultados experimentais segundo Alexander e Simmonds em relação ao ACI [35]

A Figura 2.33 apresenta uma comparação entre os resultados previstos pelo ACI [3] para a carga de rotura com 115 resultados experimentais.

Assim, os autores verificaram ao combinar a ação da curvatura radial com o conceito de tensão de corte crítica, que para uma rotura frágil por punçoamento a resistência da armadura é vista como um fator significativo que limita a ação de corte.

Experimentalmente analisaram duas lajes com armadura longitudinal concentrada junto à área carregada. Estes modelos apresentavam em planta, uma geometria quadrada com

2750 × 2750 mm<sup>2</sup> e 155 mm de espessura [5]. As Figuras 2.34 e 2.35 indicam a geometria e a configuração do ensaio, respetivamente.

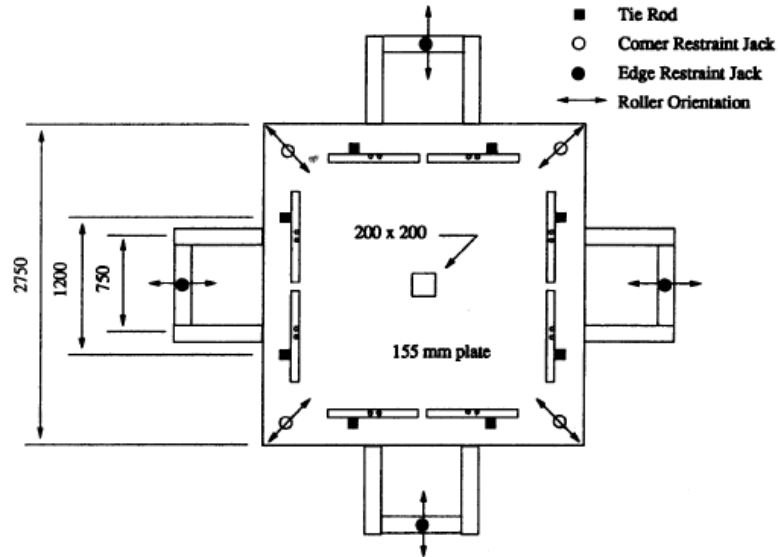


Figura 2.34 – Geometria dos modelos ensaiados por Alexander e Simmonds [7]

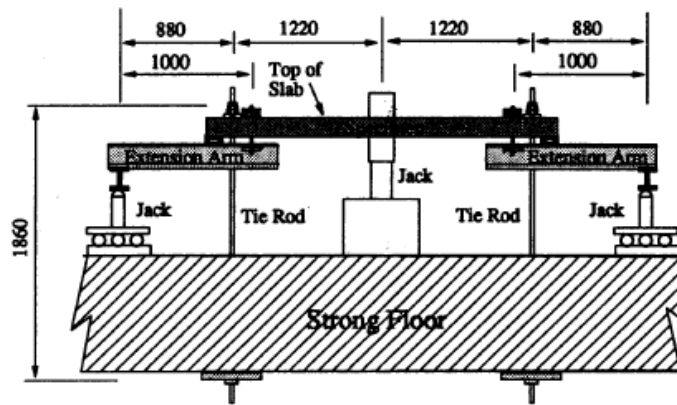


Figura 2.35 – Configuração geral dos ensaios de Alexander e Simmonds [7]

Concluíram que, aumentando a percentagem de armadura de flexão que passa junto à área carregada, conduz-se a roturas por insuficiente amarração que não se conseguem distinguir externamente das roturas por punçoamento, visto que a primeira também apresenta a forma clássica de um cone. Deste modo, os autores acreditavam que alguns investigadores como Moe [39], Elstner e Hognestad [17] determinaram erradamente o modo de rotura em muitos dos seus testes, não sendo possível assim observar a melhoria da resistência ao punçoamento em lajes com armadura longitudinal concentrada.

Os autores observaram que, diminuindo o espaçamento entre os varões da armadura de flexão, a ductilidade do elemento estrutural diminuía igualmente. Na Figura 2.36 observa-se a disposição de armadura adotada pelos autores.

No entanto, concluíram igualmente que deve existir um limite para a quantidade de armadura de flexão que se coloca junto à vizinhança do pilar, visto que, em testes anteriores, verificaram que para altas percentagens de armadura, a rotura por vezes não ocorria por corte, mas sim por falta de amarração [7].

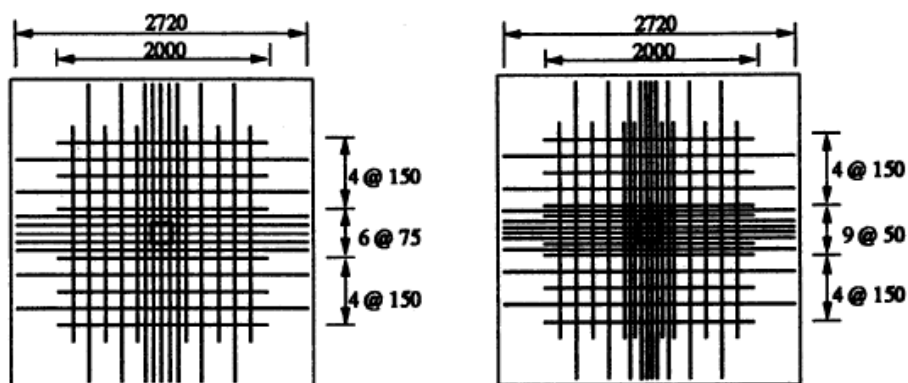


Figura 2.36 – Disposição da armadura longitudinal para os dois modelos em estudo [7]

#### 2.4.11. Hallgren e Bjerke - 1996

Hallgren e Bjerke [21] demonstraram que um significativo aumento da resistência ao punçoamento pode ser obtido utilizando betão de alta resistência. No entanto, a resistência ao punçoamento não é proporcional à resistência à compressão ou à tração do betão.

Estas conclusões foram obtidas por Hallgren através da modificação do modelo de Kinnunen e Nylander [31]. O critério de rotura deriva de um modelo mecânico de rotura simples, que reflete tanto a fragilidade do betão como a influência da espessura do modelo.

Em 1996, Hallgren [21] desenvolveu um modelo baseado nos mecanismos de rotura que incorpora a dimensão dos agregados utilizados, utilizando a seguinte expressão:

$$\varepsilon_{cTu} = \frac{3,6 G_{F0}}{1,4 x} \quad (2.37)$$

em que

$\varepsilon_{cTu}$  é a tensão tangencial de rotura

$G_{Fo}$  é a energia de fratura igual a 0.025, 0.030, 0.038 para agregados com 8 mm, 16 mm, 32 mm de diâmetro, respetivamente

$x$  é a profundidade da zona de betão comprimida.

Através da tensão tangencial de rotura é possível calcular a distribuição de tensões na zona crítica. Em seguida as forças são encontradas e calcula-se a força máxima de punçoamento.

A equação 2.37 pode ser melhorada incluindo informação sobre as propriedades do betão [35].

Hallgren e Bjerke consideraram lajes circulares suportadas por um pilar ao centro e carregada externamente com uma carga distribuída uniformemente ao longo da circunferência da laje.

Os autores analisaram sete lajes sem armadura específica de punçoamento, com 2540 mm de diâmetro e 239 mm de espessura, fazendo variar numa delas a disposição da armadura longitudinal [5].

#### **2.4.12. Ghannoum - 1998**

Carla Ghannoum [18] analisou 6 lajes com geometria em planta de  $2300 \times 2300 \text{ mm}^2$  com 150 mm de espessura. O objetivo do seu estudo foi investigar o comportamento de lajes face ao punçoamento. Assim, os protótipos foram dimensionados com pilares relativamente pequenos e com cargas elevadas para produzir tensões elevadas em torno do pilar.

Os modelos de laje possuíam armadura nas duas direções e o pilar utilizado  $225 \times 225 \text{ mm}^2$  em planta e 300 mm de comprimento tanto acima como abaixo do protótipo. O pilar foi analisado monoliticamente com a laje. Na Figura 2.37 observa-se o modelo de laje analisado por Ghannoum.

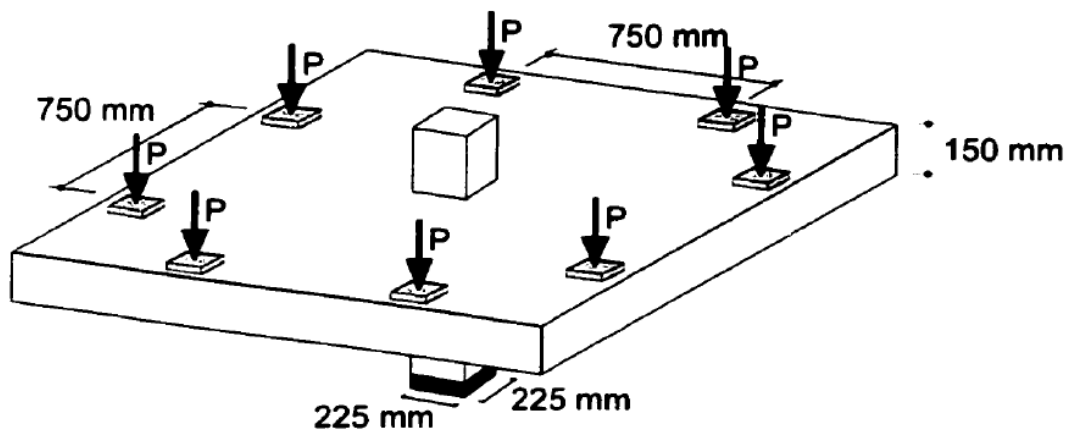


Figura 2.37 - Modelo de laje analisado por Ghannoum [18]

Os modelos foram dimensionados com o intuito de investigar qual o efeito da resistência do betão, assim como da percentagem de armadura, no comportamento de lajes de betão de alta resistência face ao punçoamento.

As armaduras foram distribuídas uniformemente pela laje, assim como foram construídos 3 modelos em que a armadura encontrava-se concentrada na vizinhança do pilar.

As 6 lajes foram divididas em três séries em que, em cada uma existia uma laje com armadura distribuída uniformemente e em banda, fazendo-se apenas variar de série para série a resistência à compressão do betão de, respetivamente, 37,2 MPa, 57,1 MPa e 67,1 MPa. Nas Figura 2.38 e 2.39 observa-se a distribuição das armaduras adotadas por Ghannoum nos seus modelos de laje.

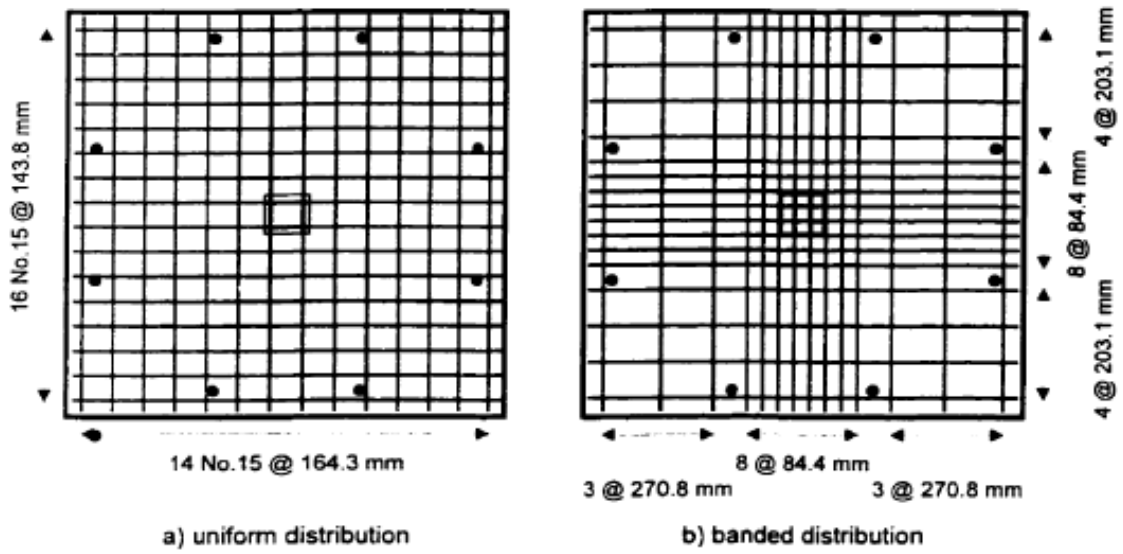


Figura 2.38 – Distribuição da armadura longitudinal superior adotada por Ghannoum [18]

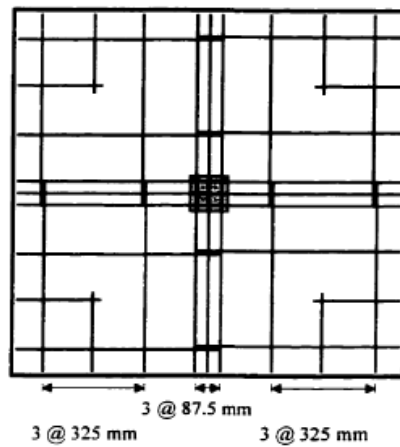


Figura 2.39 – Distribuição da armadura longitudinal inferior adotada por Ghannoum [18]

Com a análise dos resultados obtidos, Ghannoum concluiu que com a concentração de armadura junto ao pilar obtém-se uma resistência ao punçamento e uma rigidez pós-fendilhação superior, assim como, uma distribuição mais uniforme das extensões na armadura de flexão e uma menor abertura de fendas.

Devido à concentração de armaduras, o aumento da resistência ao punçamento foi de 5%, 23% e 9% para a série 1, 2 e 3, respectivamente.

### 2.4.13. McHarg et al - 2000

Em 2000, McHarg et al [38] estudaram o efeito da concentração da armadura longitudinal, assim como, o efeito da colocação de betão reforçado com fibras junto à ligação laje-pilar. Para tal, analisaram 6 modelos de laje, de modo a averiguarem qual a consequência destas concentrações na resistência ao punçoamento, na fendilhação e rigidez dos modelos.

Assim, os autores elaboraram um protótipo de um modelo de laje, como indica a Figura 2.40, com  $2300 \times 2300 \text{ mm}^2$  com 150 mm de espessura e 25 mm de recobrimento, tanto superior como inferior. A coluna adotada foi quadrada com 225 mm.

Os seis modelos de laje foram divididos em 3 séries: a primeira sem betão reforçado com fibras, a segunda com betão com fibras junto à ligação laje-pilar e a terceira com betão com fibras somente na superfície superior do modelo (40 mm), sendo denominadas respetivamente por N, FS e FC.

A distribuição das armaduras longitudinais e do betão reforçado com fibras nas diferentes séries, encontra-se ilustrada na Figura 2.41.

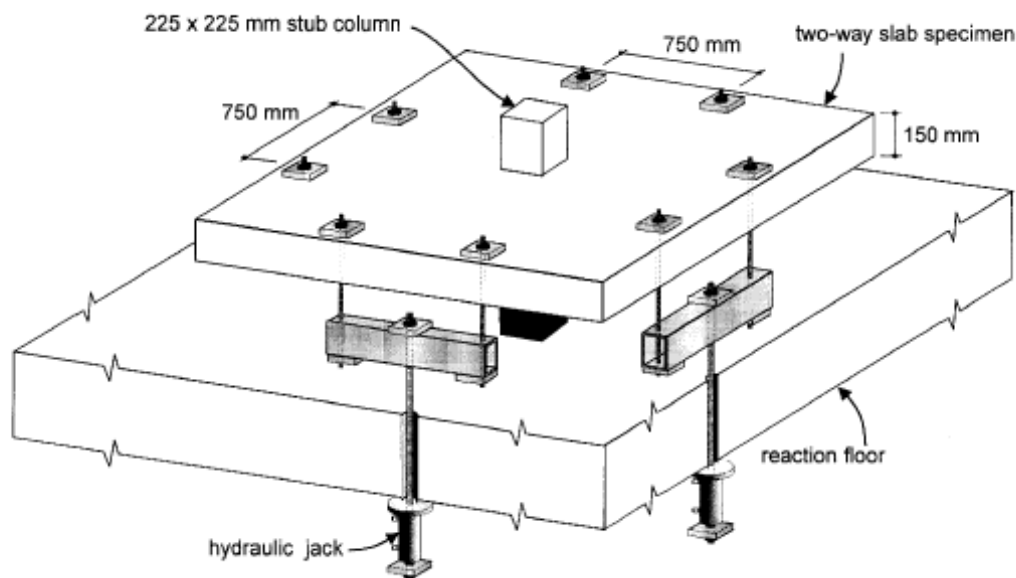


Figura 2.40 – Protótipo do modelo de laje segundo McHarg et al [38]

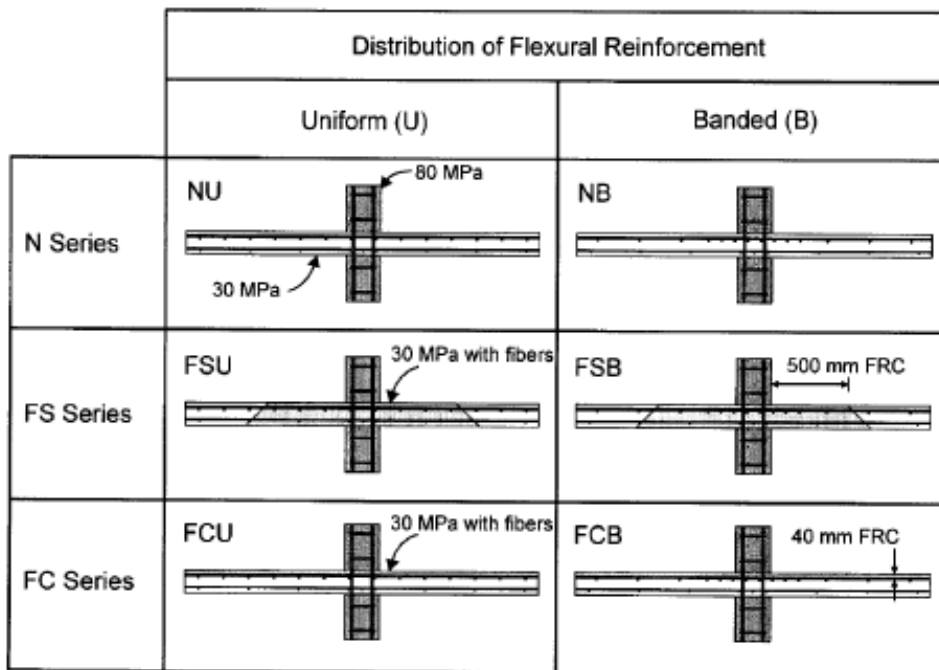


Figura 2.41 – Distribuição da armadura longitudinal e do betão reforçado com fibras nas diferentes séries [38]

A Figura 2.42 compara a carga aplicada com a deformação dos modelos. Denote-se que no modelo com armadura concentrada as primeiras fissuras aparecem junto aos bordos do modelo onde a percentagem de armadura é inferior, enquanto no modelo com armadura distribuída uniformemente as primeiras fendas surgem junto à coluna.

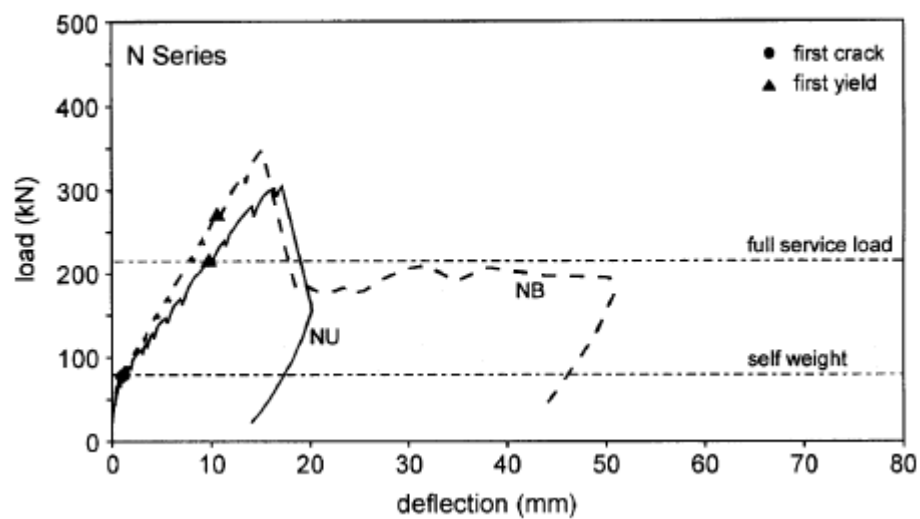


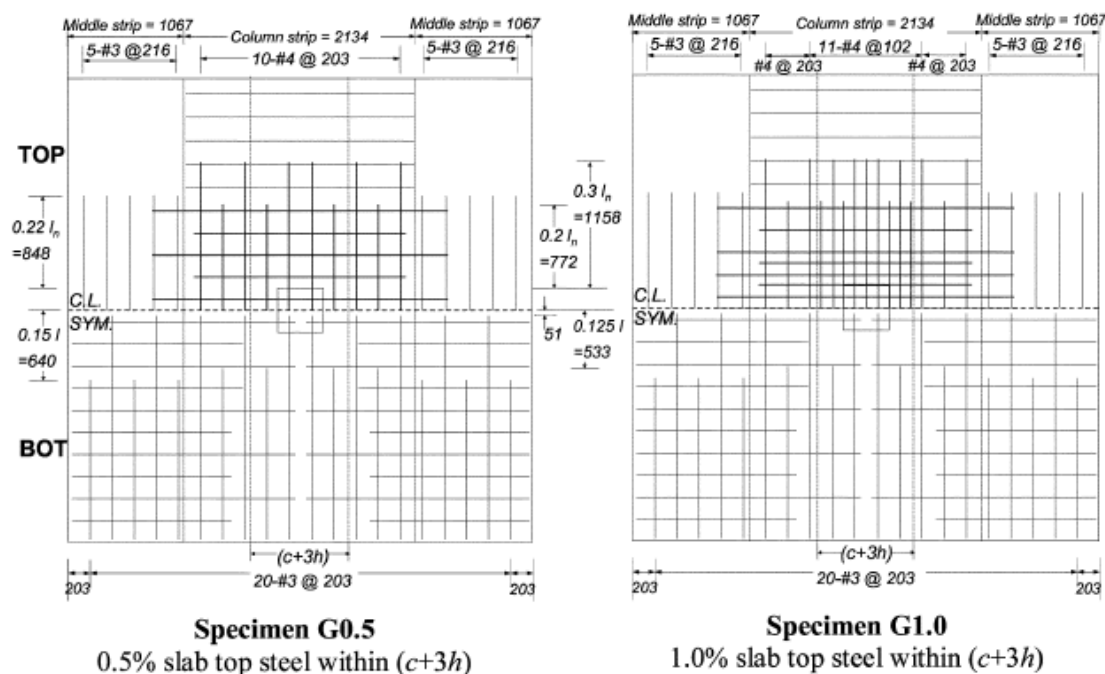
Figura 2.42 – Comparação dos modelos com e sem armadura concentrada quanto à sua deformação [38]

O modelo com armadura uniformemente distribuída exibiu maiores deformações aquando o aparecimento das primeiras fendas, devido à menor percentagem de armadura junto à região com momentos fletores mais elevados. Os autores verificaram que, com a concentração da armadura junto à ligação laje-pilar, o aumento da carga até à primeira fendilhação correspondeu a 25%, em comparação com o modelo com armadura uniformemente distribuída.

Os autores concluíram que a distribuição concentrada de armadura resulta numa maior resistência ao punçamento, maior rigidez pós fendilhação, uma distribuição mais uniforme das tensões da armadura superior e fendas menores em todos os níveis de carga, em comparação com o modelo de laje com armadura uniformemente distribuída.

#### 2.4.14. Widiyanto et al - 2009

Para avaliar a resistência ao punçamento de lajes armadas nas duas direções, Widiyanto et al [59], em 2009, testaram dois modelos quadrados de laje, G0.5 e G1.0, indicados na Figura 2.43. Os modelos construídos apresentavam  $4267 \times 4267 \text{ mm}^2$  em planta e 150 mm de espessura. A aplicação de carga foi efetuada através de uma coluna com  $406 \times 406 \text{ mm}^2$ . O modelo de laje G0.5 apresentava 0,5% de percentagem de armadura junto à ligação laje-pilar e 0,25% nas restantes zonas. O modelo de laje G1.0 dispunha de 1% de percentagem de armadura na zona central.



**Figura 2.43** – Disposição das armaduras longitudinais dos modelos de laje ensaiados por Widiyanto et al [59]

Os modelos foram testados através de ensaios monotônicos, por aplicação de cargas verticais concêntricas. A Figura 2.44 apresenta a configuração dos ensaios dos modelos de laje desenvolvidos pelos autores.

A Figura 2.45 mostra a evolução das extensões das armaduras longitudinais em função da distância desde o centro da coluna, para ambos os modelos. Através da elaboração desta comparação, os autores concluíram que, para um dado valor de carga, a extensão num varão diminui à medida que a percentagem de armadura longitudinal aumenta, resultando numa melhoria na fendilhação dos modelos.

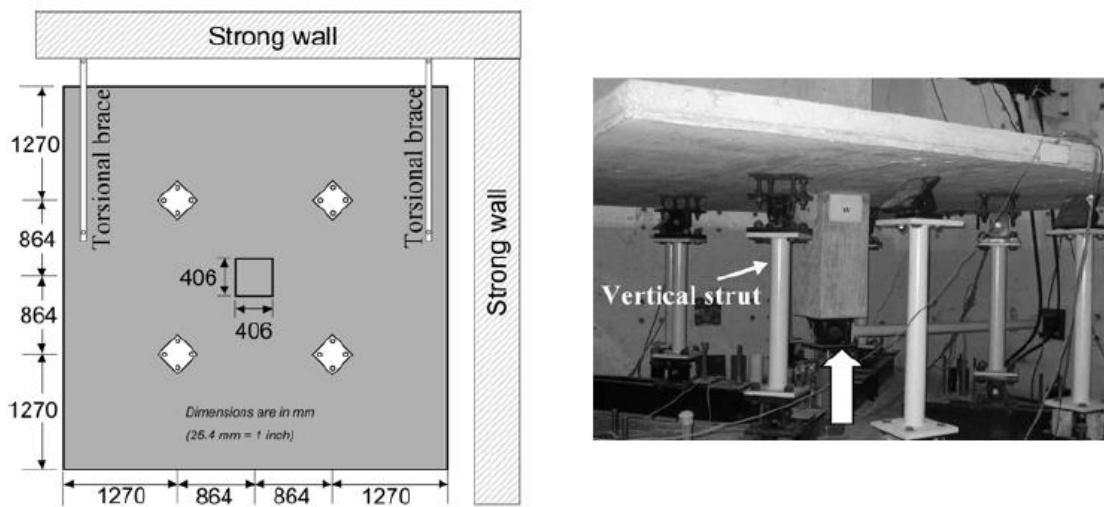


Figura 2.44 – Configuração dos ensaios dos modelos de laje de Widiyanto et al [59]

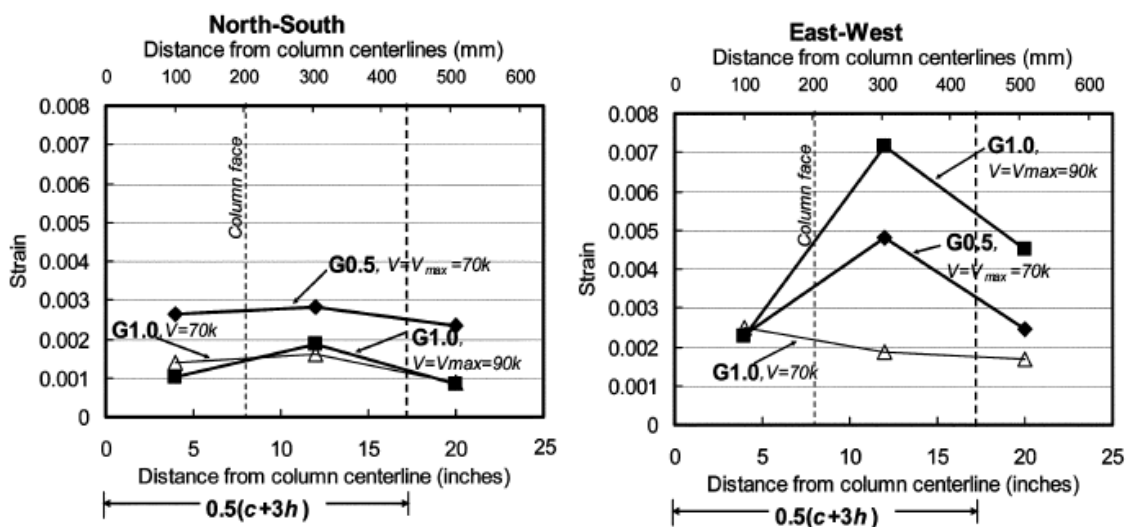


Figura 2.45 – Evolução da extensão nas armaduras longitudinais em ambos os modelos de Widiyanto et al [59]



## Capítulo 3

### Programa Experimental

#### 3.1. INTRODUÇÃO

O presente capítulo tem como objetivo apresentar e descrever os modelos de lajes utilizados para o estudo da influência da pormenorização das armaduras na resistência ao punçoamento. Para o efeito é descrito o processo construtivo dos modelos, assim como, as suas características geométricas. Apresenta-se igualmente a caracterização dos materiais utilizados e a instrumentação necessária tanto para a execução dos modelos, como para os ensaios laboratoriais.

Para este estudo foram ensaiados dois modelos de laje fungiforme maciça, que pretendem simular a área da laje junto ao pilar, limitada pelas linhas de momento nulo. Os modelos têm geometria octogonal em planta e 150 mm de espessura. Foram produzidos e ensaiados no Laboratório de Estruturas do Departamento de Engenharia Civil da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa.

Ambos os modelos foram submetidos a um carregamento no centro, na superfície inferior, através de uma placa de aço quadrada com 250 mm de lado e 50 mm de espessura.

O betão utilizado é caracterizado de acordo com a NP EN 206-1 [26] como um betão de classe de resistência à compressão de C50/60, uma classe de consistência S4 e uma máxima dimensão do agregado de 21 mm.

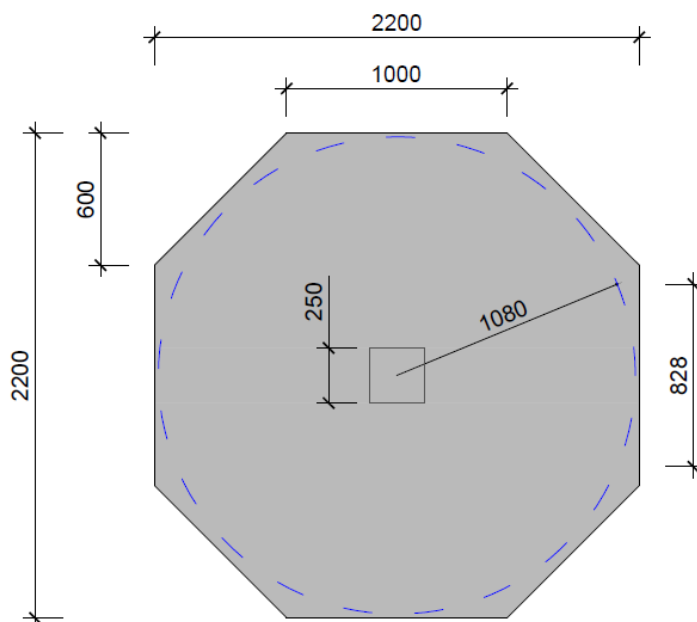
A principal diferença entre os modelos é a disposição da armadura longitudinal superior como será explicado em 3.2.

A análise de fatores como, os deslocamentos da laje, a carga de rotura ao punçoamento e a extensão das armaduras de flexão, permite compreender a influência das diferentes disposições utilizadas no comportamento de uma laje fungiforme.

### 3.2. DESCRIÇÃO DOS MODELOS

Os modelos elaborados pretendem simular a zona junto ao pilar, limitada pelas linhas de momento nulo. Foram ensaiados dois modelos de laje com diferentes disposições de armadura.

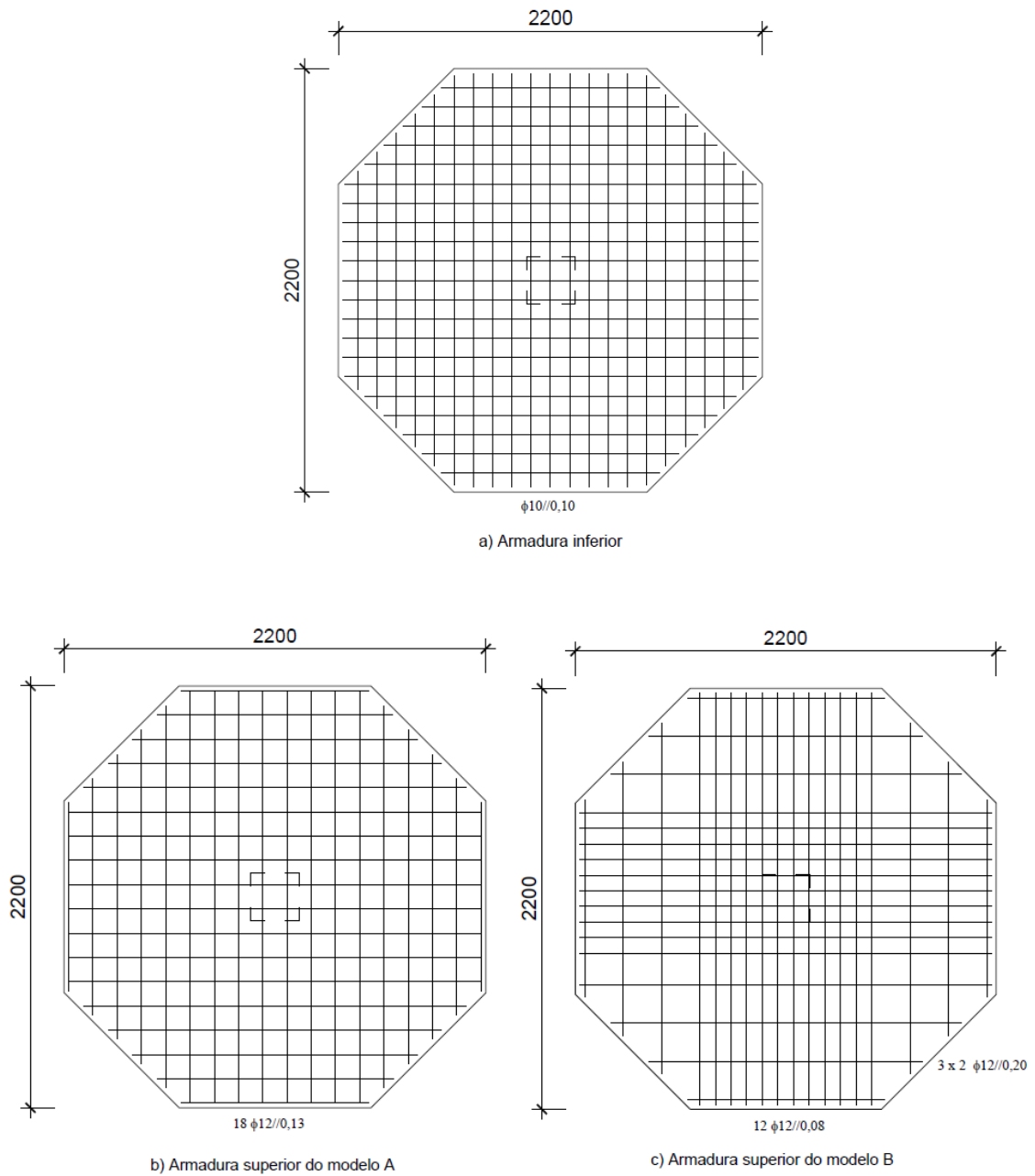
Os modelos ensaiados possuem geometria octogonal em planta com 150 mm de espessura. A Figura 3.1 apresenta a geometria dos modelos de laje.



**Figura 3.1-** Geometria octogonal dos modelos de laje (desenho sem escala e dimensões em mm)

O dimensionamento da armadura longitudinal superior foi realizado com o intuito de obter a rotura dos modelos por punçoamento. Esta armadura é constituída por 18 varões de 12 mm de diâmetro em cada direção. No entanto, os modelos em estudo apresentam diferentes disposições quanto à armadura longitudinal superior. O modelo de referência, designado por modelo A, possui uma disposição aproximada de  $\phi 12//0,13$  m, o que corresponde a uma percentagem de armadura de 0,783 %. O modelo designado de modelo B, possui uma disposição de  $\phi 12//0,08$  m na zona central, junto ao pilar, correspondendo a uma percentagem de armadura de 1,149 % e  $\phi 12//0,20$  m na zona lateral do modelo, o que corresponde a uma percentagem de armadura de 0,479 %.

A disposição da armadura longitudinal de ambos os modelos encontra-se esquematizada na Figura 3.2.

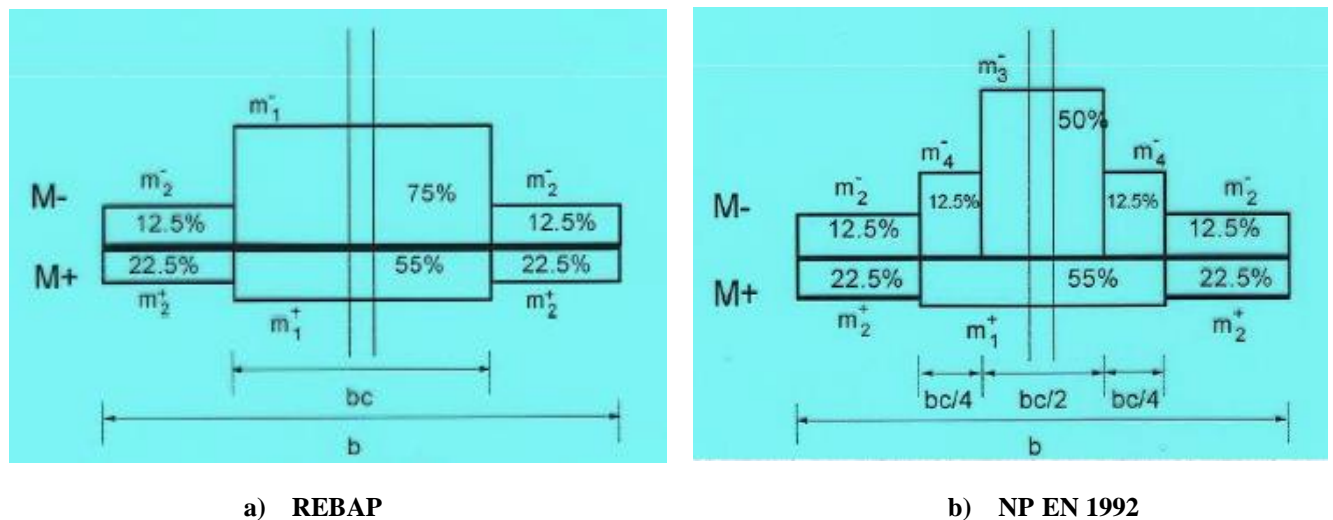


**Figura 3.2-** Disposição da armadura longitudinal dos modelos de laje (desenho sem escala e dimensões em mm)

A armadura longitudinal inferior é constituída por 22 varões de 10 mm de diâmetro em cada direção, o que corresponde aproximadamente a uma malha de  $\phi 10//0,10$ m.

A disposição da armadura longitudinal superior foi calculada através do método dos pórticos equivalentes. Para o modelo de laje A a armadura longitudinal foi adotada de acordo com o Regulamento de Estruturas de Betão Armado Pré-Esforçado [46] e para o modelo de laje B de acordo com a norma NP EN 1992 [27], como indicado na Figura 3.3.

O recobrimento, tanto da armadura superior, como inferior, foi de 20 mm.



**Figura 3.3** – Distribuição dos momentos na laje de acordo com o REBAP e a NP EN 1992.

Com o intuito de analisar as variações da extensão no aço, foram colocados na armadura longitudinal superior extensómetros eléctricos.

No decorrer da elaboração dos modelos realizou-se um levantamento altimétrico das armaduras longitudinais superiores com recurso a um paquímetro digital, de modo a determinar a altura útil média. No caso do modelo de laje A, obteve-se uma altura útil média de 117,8 mm, e no modelo de laje B, 118 mm.

A Figura 3.4 apresenta a disposição das armaduras na cofragem.



**Figura 3.4-** Disposição das armaduras longitudinais na cofragem do modelo de laje A

A laje encontrava-se apoiada ao centro e impedida de deslocar verticalmente em 8 pontos através de 4 vigas de distribuição que, por sua vez, estavam ligadas à laje de reação através de 4 cordões de pré-esforço.

Em cada um dos oito pontos de apoio, foi colocada uma placa com  $150 \times 150 \times 20 \text{ mm}^3$  com recurso a uma camada de gesso, sobre a qual se colocava a célula de carga e a respetiva chapa e cabeça de ancoragem, tendo sempre em conta o nivelamento dos elementos envolvidos de modo a obter uma distribuição de tensões uniforme. As Figuras 3.5 e 3.6 apresentam a localização das células de carga em planta e corte, respetivamente.

Pelo interior de cada chapa e célula de carga foi instalado um cordão de aço de alta resistência com diâmetro nominal de 15,7 mm. Este foi fixo com uma placa metálica de  $100 \times 100 \times 20 \text{ mm}^3$  e um sistema de ancoragem constituído por um cilindro e uma cunha. Fixaram-se estes cordões sob as vigas de distribuição, como se verifica na Figura 3.7. Este sistema garantia as condições de fronteira cinemáticas e estáticas, permitindo rotações livres nos bordos do modelo de laje, simulando assim a linha de momentos nulos.

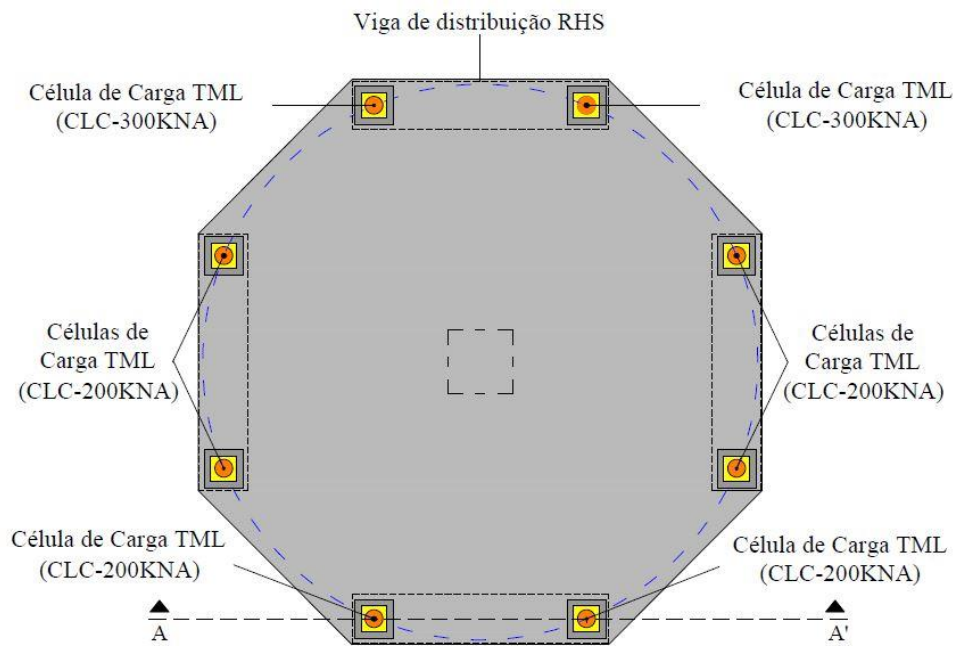


Figura 3.5 - Localização em planta das células de carga (desenho sem escala)

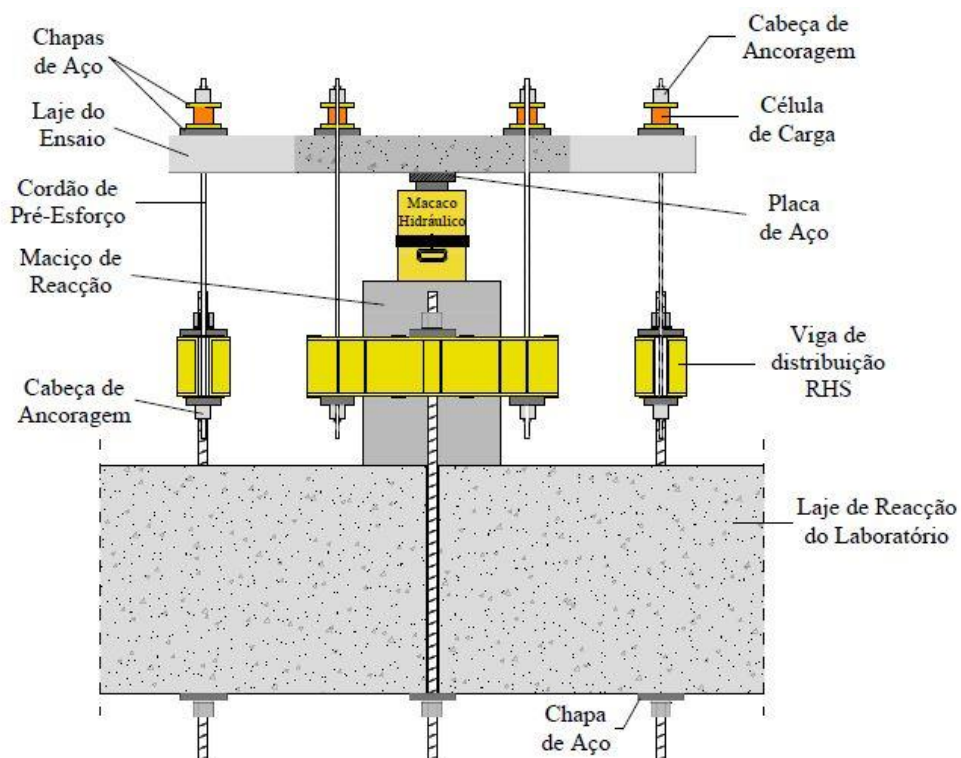


Figura 3.6 - Localização em corte das células de carga; Corte A-A' (desenho sem escala)



**Figura 3.7-** Aspeto geral dos elementos utilizados para a montagem do modelo de laje

Com o auxílio de um macaco hidráulico ENERPAC RRH 1006, com 990 kN de capacidade máxima e 152,4 mm de curso máximo (Figura 3.8), a carga foi aplicada na superfície inferior do modelo de laje. Consequentemente, para controlar a velocidade e pressão de aplicação da mesma recorreu-se a uma unidade de controlo de pressão hidráulica WALTER+BAI AG tipo NSPA 700/DIG 200 (Figura 3.9).



**Figura 3.8 -** Macaco hidráulico



**Figura 3.9 -** Unidade de controlo de pressão hidráulica

Foram utilizados defletômetros elétricos segundo as duas direções da laje com o intuito de obter a deformação da mesma (Figura 3.10).



**Figura 3.10-** Posicionamento geral dos defletômetros elétricos

### **3.3. CARACTERIZAÇÃO DOS MATERIAIS**

Para a análise dos resultados dos ensaios dos modelos de laje, foi necessário conhecer as características mecânicas dos materiais utilizados. Assim, realizaram-se ensaios de compressão simples, tração por compressão diametral e módulo de elasticidade do betão, e ensaios à tração do aço utilizado nas armaduras longitudinais.

#### **3.3.1. Betão**

Para a determinação das características mecânicas do betão de cada modelo de laje foram moldados provetes cúbicos de  $150 \times 150 \times 150 \text{ mm}^3$  e provetes cilíndricos de  $\phi 150 \times 300 \text{ mm}$  (Figura 3.11). Estes provetes foram moldados no mesmo dia que os respetivos modelos de laje. Face à capacidade da betoneira, existiu a necessidade de betonar os modelos de laje em 4 fases. Assim, foram moldados para cada modelo de laje seis cilindros e seis cubos com o betão das segunda e terceira betonagens. No ato da betonagem, foi este o betão que se encontrou maioritariamente junto à zona central da laje, que corresponde à principal área em estudo.

Os provetes cúbicos produzidos foram todos ensaiados à compressão. Três dos provetes cilíndricos, produzidos para cada modelo, foram primeiramente ensaiados para o cálculo do módulo de elasticidade e, em seguida, à compressão diametral. Os restantes provetes cilíndricos foram ensaiados à compressão.

O betão foi produzido no Laboratório de Estruturas do Departamento de Engenharia Civil da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa.



**Figura 3.11** - Provetes cúbicos e cilíndricos

A composição do betão utilizado foi a mesma em todas as misturas. Na Tabela 3.1. apresentam-se as quantidades necessárias de cada material para a elaboração dos modelos.

**Tabela 3.1** - Composição do betão utilizado

<b>Modelo</b>	<b>Cimento</b> [kg/m <sup>3</sup> ]	<b>Areia 0/2</b> [kg/m <sup>3</sup> ]	<b>Areia 2/4</b> [kg/m <sup>3</sup> ]	<b>Brita 12,5</b> [kg/m <sup>3</sup> ]	<b>Brita 22</b> [kg/m <sup>3</sup> ]	<b>Água</b> [kg/m <sup>3</sup> ]	<b>Plastificante</b> [kg/m <sup>3</sup> ]
<b>A e B</b>	430	375	445	455	440	158	5,2

O cimento utilizado nas misturas foi o Cimento Portland de calcário CEM II/B-L 32,5 N produzido pela Secil, que segundo a norma NP EN 197-1 [28], é um cimento Portland composto (CEM II), com uma percentagem de clínquer (B) e de calcário (L) adicionados entre 65-79% e 21-35%, respetivamente, com uma resistência mínima à compressão aos 28 dias de 32,5 MPa.

As areias 0/2 e 2/4 foram adquiridas na empresa Soarvamil, Sociedade De Areias De Vale De Milhaços Lda e as britas 12,5 e 22 na empresa Henrique Borges e Arenga, Lda. O plastificante utilizado é da marca Sika ViscoCrete 3008. A relação água/cimento é de 0,37.



a) Brita 22



b) Brita 12,5



c) Areia 0/2



d) Areia 2/4

**Figura 3.12** – Amostra dos agregados utilizados no fabrico do betão

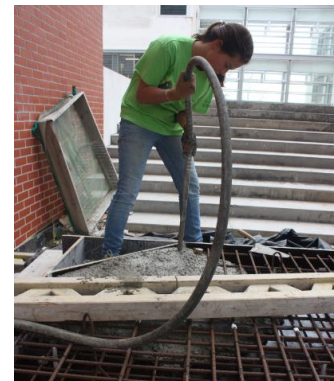
O betão foi realizado numa betoneira de eixo vertical do modelo Mammut, com uma capacidade máxima de 180 litros, apresentada na Figura 3.13. A vibração do betão foi efetuada com recurso a um vibrador elétrico portátil com agulha, representado na Figura 3.14.



**Figura 3.13** - Betoneira de eixo vertical do modelo Mammut



a) Vibrador utilizado na betonagem dos provetes



b) Vibração do betão do modelo de laje

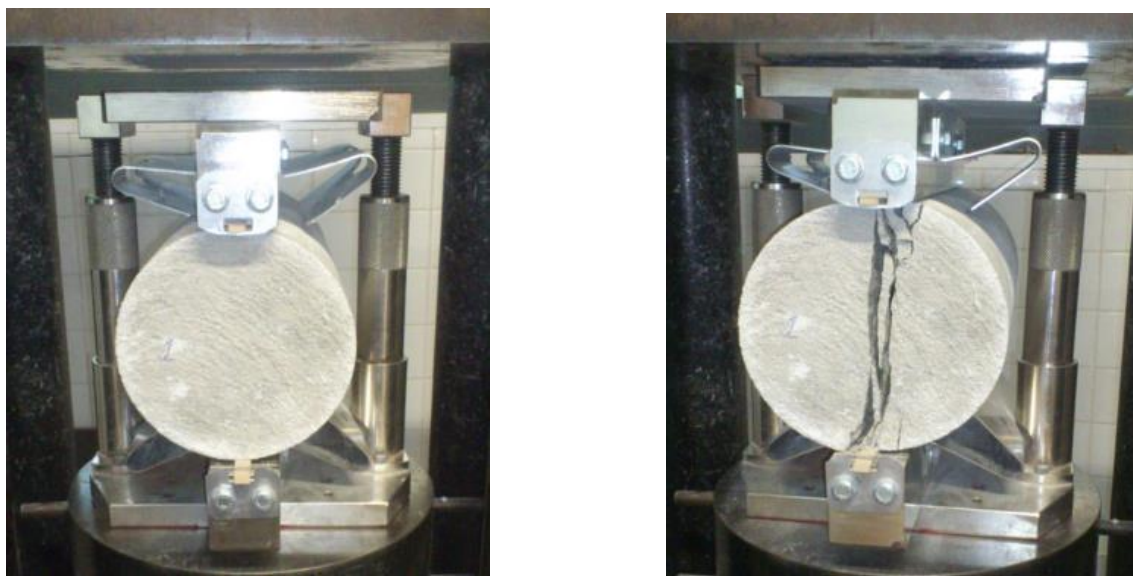
**Figura 3.14** - Vibradores utilizados na betonagem

A resistência à compressão foi obtida através de ensaios à compressão de provetes cúbicos com 150 mm de lado e cilíndricos com 150 mm de diâmetro e 300 mm de altura (Figura 3.15), segundo a norma NP EN 12390-3 [23]. Para o efeito, os provetes cilíndricos tiveram os topos retificados. Os provetes foram ensaiados no dia do ensaio do modelo de laje respetivo. Foi utilizada uma prensa FORM-TEST do tipo BETA2-3000E com uma capacidade máxima de 3000 kN.



**Figura 3.15** - Ensaio à compressão dos provetes cúbicos e cilíndricos

A resistência à tração foi obtida através de ensaios à compressão diametral de provetes cilíndricos com 150 mm de diâmetro e 300 mm de comprimento, segundo a norma NP EN 12390-6 [24]. Os provetes foram ensaiados no dia do ensaio do modelo de laje respetivo. Foi utilizada a mesma prensa do ensaio aos cubos.



**Figura 3.16** - Ensaio à tração por compressão diametral dos provetes cilíndricos

A determinação do módulo de elasticidade em compressão dos provetes cilíndricos foi realizada de acordo com a especificação do Laboratório Nacional de Engenharia Civil 397 [33]. Para o

efeito foi utilizada uma prensa FORM-TEST do tipo BETA2-3000E com uma capacidade máxima de 3000 kN, uma unidade de aquisição de dados, modelo Data Logger HBM Spider 8 e dois defletómetros representados na Figura 3.17. Na Tabela 3.2 estão apresentadas as características do betão utilizado.



Figura 3.17 - Ensaio do módulo de elasticidade dos provetes cilíndricos

Tabela 3.2- Caracterização do betão dos modelos de laje

Modelo/Pro- vete	$f_{cm,cubos}^{(1)}$ [MPa]	$f_{cm}^{(2)}$ [MPa]	Desvio Padrão	$f_{ctm,sp}^{(3)}$ [MPa]	Desvio Padrão	E [GPa]	Desvio Padrão
A	—	61,7	2,04	6,3	0,75	44,5	2,02
B	68,8	66,5	2,30	5,9	0,02	39,4	1,45

<sup>(1)</sup> Valor médio da tensão de rotura do betão à compressão em cubos ( $150 \times 150 \times 150 \text{ mm}^3$ )

<sup>(2)</sup> Valor médio da tensão de rotura do betão à compressão em cilindros ( $\phi 150 \text{ mm} \times 300 \text{ mm}$ )

<sup>(3)</sup> Valor médio da tensão de rotura do betão à tração por compressão diametral em cilindros ( $\phi 150 \text{ mm} \times 300 \text{ mm}$ ).

### 3.3.2. Aço de armadura ordinária

Para a caracterização mecânica da armadura longitudinal utilizada no fabrico dos modelos de laje, foram realizados ensaios de tração a três provetes por cada diâmetro de varão. Os ensaios foram realizados de acordo com a norma NP EN 10002-1 [25]. Na Tabela 3.3 são apresentados os resultados dos ensaios.

**Tabela 3.3** - Caracterização do aço das armaduras longitudinais

<b>Diâmetro Varão</b> [mm]	<b>Tipo</b>	$f_y^{(1)}$ [MPa]	$f_t^{(2)}$ [MPa]
<b>Ø10</b>	NR	536	622
<b>Ø12</b>	NR	531	630

<sup>(1)</sup> tensão de cedência média do aço à tração

<sup>(2)</sup> tensão de rotura média do aço à tração

### 3.4. INSTRUMENTAÇÃO DOS ENSAIOS

Nos ensaios experimentais realizados, foi controlada a carga aplicada, a deformação do modelo e as extensões das armaduras longitudinais, com o objetivo de realizar uma análise do modelo o mais precisa e conclusiva possível.

A carga vertical aplicada no modelo foi monitorizada através de células de carga colocadas em oito pontos. Foram utilizadas 6 células de carga do tipo CLC-200KNA da TML e duas células de carga do tipo CLC-300KNA da TML, como se encontra ilustrado nas Figuras 3.10 e 3.5.

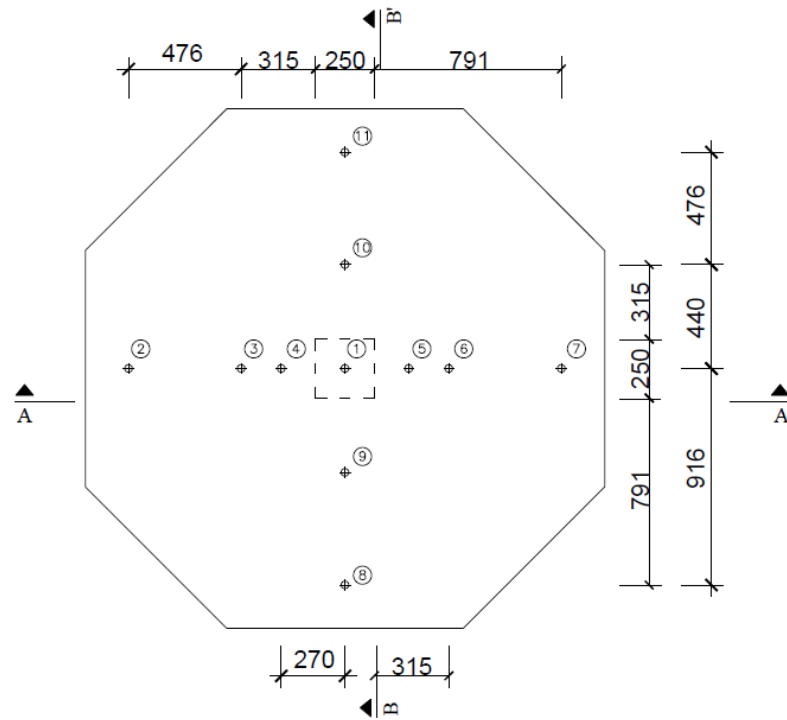
Para medir os deslocamentos verticais foram colocados doze defletómetros do tipo CDP-100 da TML (sete na superfície superior do modelo e cinco na inferior) e quatro defletómetros elétricos do tipo CDP-50 da TML na superfície superior do modelo de laje, como se observa na Figura 3.10. Os medidores de deformação localizados na superfície superior dos modelos foram fixos a um pórtico metálico exterior com recurso a bases magnéticas e braçadeiras.

Dado que a superfície do modelo de laje apresenta alguma irregularidade, de modo a garantir uma medição rigorosa dos deslocamentos, os êmbolos dos defletómetros elétricos foram colocados sob pequenas placas quadradas de acrílico.

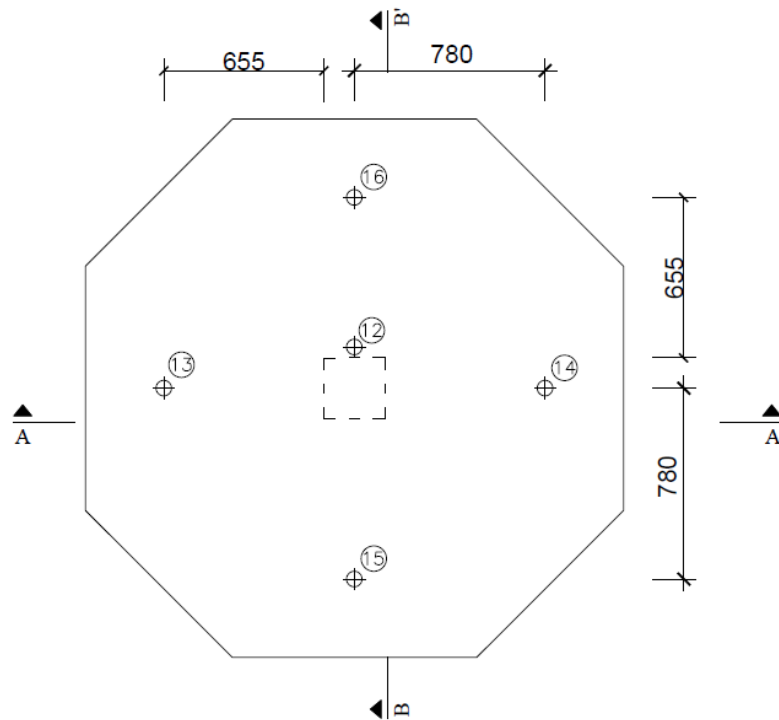
Os defletómetros 2 a 7 ficaram posicionados segundo a direção de maior altura útil da armadura superior enquanto os defletómetros 8 a 11 foram colocados na direção perpendicular à anterior, que corresponde à direção de menor altura útil da armadura superior.

O defletómetro D1 mediu o deslocamento no centro do modelo de laje, enquanto os defletómetros D2, D7, D8 e D11 foram colocados a  $6,7d$  da face do pilar. Os defletómetros D3, D6, D9 e D10 foram posicionados a  $2,7d$  da face do pilar e o D4 e D5 a  $1,25d$  de modo a observar se existem descontinuidades junto à superfície de rotura. Esta disposição foi adotada de modo a que os defletómetros D3, D4, D5 e D6 abrangessem a formação do cone de punçoamento. A disposição dos defletómetros colocados na superfície superior dos modelos, em planta e em corte, pode ser observada nas Figuras 3.18 e 3.20, respetivamente.

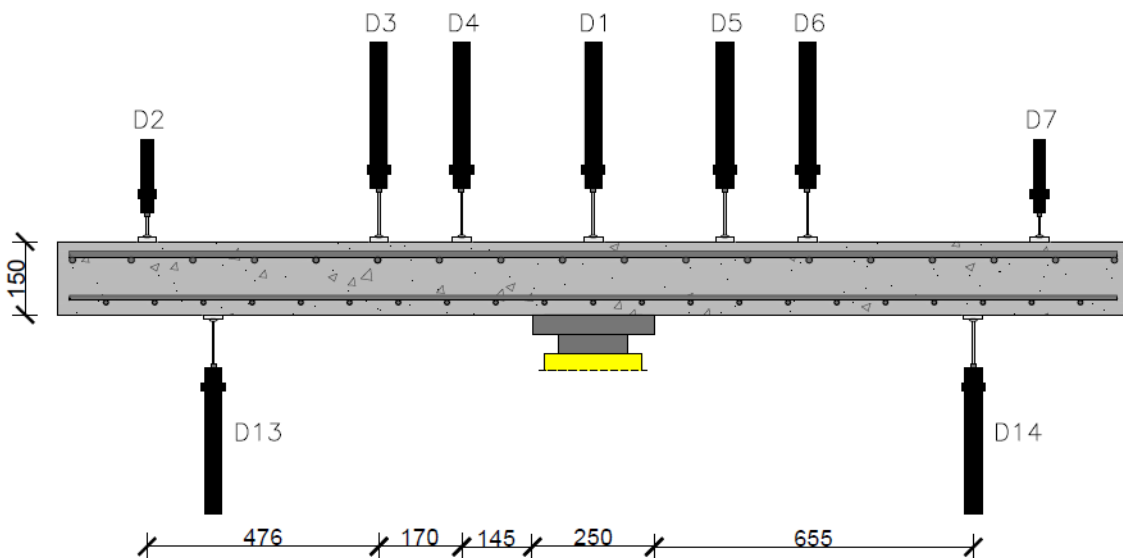
Na superfície inferior os defletómetros D13 a D16 foram colocados a  $5,6d$  da superfície do pilar. Foi igualmente posicionado um defletómetros junto à face do pilar, D12. A disposição dos defletómetros colocados na superfície inferior dos modelos, em planta e em corte, pode ser observada nas Figuras 3.19 e 3.21, respetivamente.



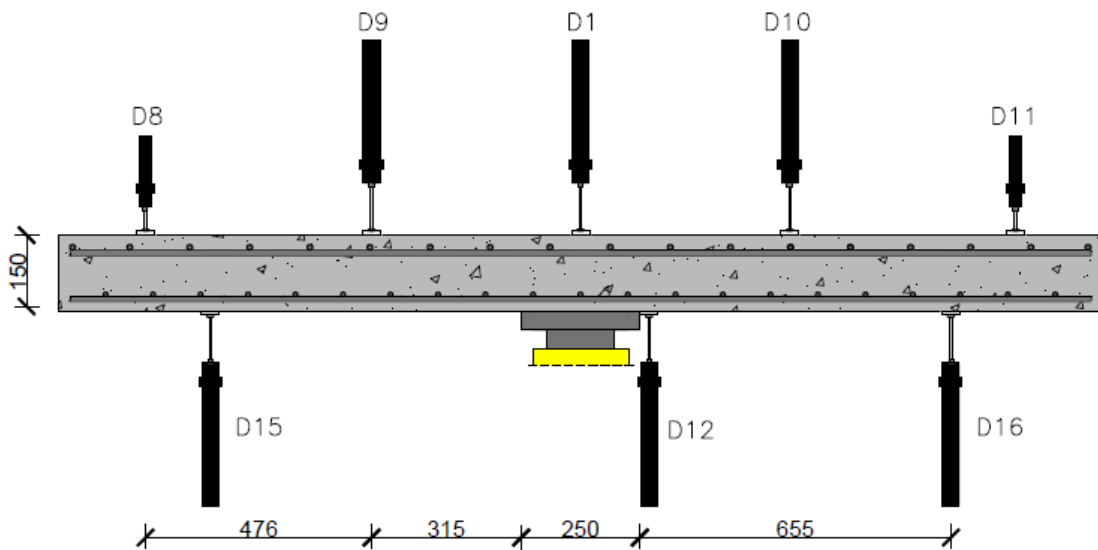
**Figura 3.18** - Disposição em planta dos defletómetros sobre a superfície superior do modelo de laje (desenho sem escala e dimensões em mm)



**Figura 3.19** – Disposição em planta dos defletômetros na superfície inferior do modelo de laje (desenho sem escala e dimensões em mm)



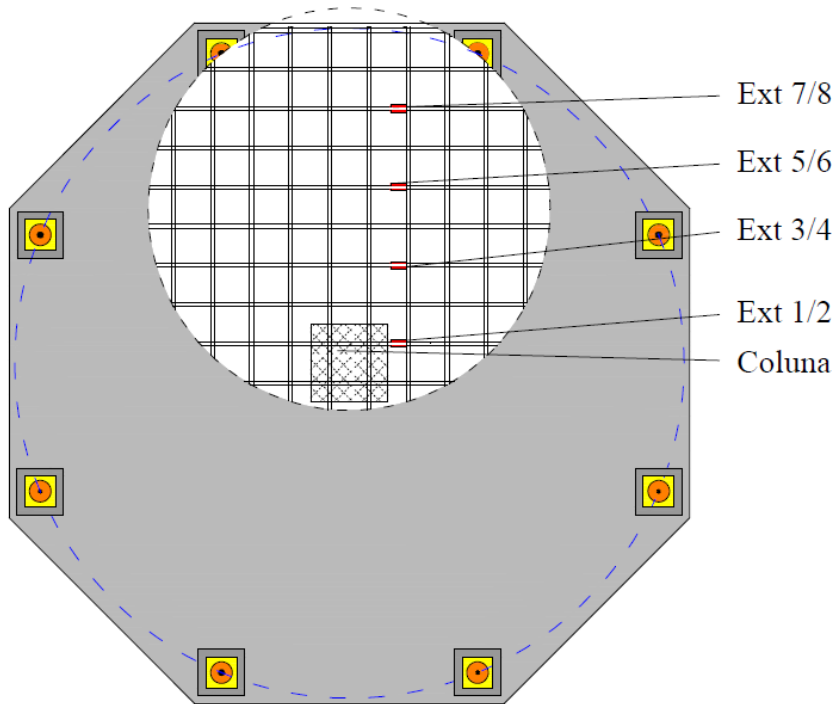
**Figura 3.20** - Localização dos defletômetros, Corte A-A' (desenho sem escala e dimensões em mm)



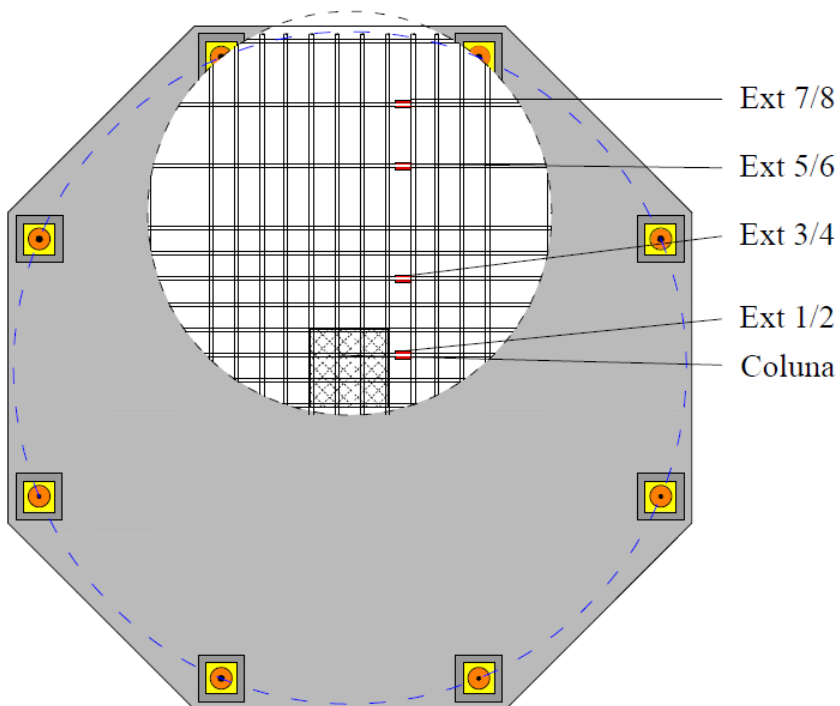
**Figura 3.21** - Localização dos defletómetros, Corte B-B' (desenho sem escala e dimensões em mm)

Tal como referido na secção 3.2, antes da betonagem dos modelos de laje foram colados extensómetros eléctricos na armadura longitudinal superior. Estes foram do tipo FLA-5-11-3L da TML. Primeiramente, o varão é lixado e limpo. Sobre esta zona cola-se o extensómetro que, em seguida, e para garantir a sua protecção mecânica, é revestido com uma camada de silicone. Por fim, efectuou-se uma verificação da resistência dos mesmos, de modo a garantir a sua correcta calibração, que deverá apresentar  $120,4 \pm 0,5 \Omega$ . Foram colados dois extensómetros em posições diametralmente opostas, segundo a direcção de maior altura útil

No modelo de laje A, os pares de extensómetros foram colocados com uma distância de aproximadamente 250 mm (Figura 3.22). No modelo de laje B, tendo em conta a não uniformidade na disposição da armadura longitudinal, os extensómetros foram colocados o mais próximo possível da posição adotada no modelo de laje A, como se pode observar na Figura 3.23.



**Figura 3.22** - Disposição dos extensômetros elétricos na armadura longitudinal do modelo de laje A (desenho sem escala)



**Figura 3.23** - Disposição dos extensômetros elétricos na armadura longitudinal do modelo de laje B (desenho sem escala)

As células de carga, os defletómetros e extensómetros elétricos foram ligados a unidades de aquisição de dados, modelo Data Logger HBM Spider 8, apresentadas na Figura 3.24.



**Figura 3.24** - Unidades de aquisição de dados, modelo Data Logger HBM Spider 8

### 3.5. EXECUÇÃO DOS ENSAIOS DOS MODELOS DE LAJE

Os ensaios foram realizados aos 28 dias de idade do respetivo modelo. O carregamento monotónico foi aplicado a uma velocidade de 285 N/s. Até instantes depois de atingir a rotura do modelo, e com um intervalo de um segundo, foram realizadas as leituras da carga aplicada, da deformação da laje e das extensões da armadura.

Na Tabela 3.4 encontram-se as cargas de rotura,  $V_{exp}$ , para os respetivos modelos.

**Tabela 3.4** - Valores obtidos para as cargas de rotura

<b>Modelo</b>	<b>A</b>	<b>B</b>
$V_{exp}^{(1)}$ [kN]	368,5	385,5

<sup>(1)</sup> Carga de rotura experimental

Uma análise detalhada destes resultados será apresentada no Capítulo 4.

### 3.5.1. Modelo A

O modelo A apresenta uma distribuição uniforme de armadura longitudinal. Este modelo serviu de comparação com o modelo B permitindo avaliar o acréscimo de capacidade resistente do mesmo, perante uma distribuição de armadura não uniforme. Na Figura 3.25 apresentam-se vistas da rotura por punçoamento do modelo de laje A.

Para o modelo de laje A verificou-se uma rotura por punçoamento para uma carga de 368,5 kN.



**Figura 3.25** – Vistas da rotura por punçoamento do modelo A

### 3.5.2. Modelo B

O modelo de laje B foi sujeito à mesma metodologia de ensaio do modelo anterior. Este modelo apresentava uma distribuição de armadura não uniforme, atingindo a rotura por punção para um valor de 385,5 kN. Na Figura 3.26 apresentam-se vistas da rotura por punção do modelo de laje B.



**Figura 3.26** – Vistas da rotura por punção do modelo B

EFEITO DA PORMENORIZAÇÃO DAS ARMADURAS  
NA RESISTÊNCIA AO PUNÇOAMENTO DE LAJES FUNGIFORMES

## **Capítulo 4**

### **Análise dos Resultados**

#### **4.1. INTRODUÇÃO**

No presente capítulo são analisados os resultados obtidos dos ensaios experimentais realizados aos modelos de laje, descritos no Capítulo 3. É feita a análise dos deslocamentos verticais observados, das extensões na armadura longitudinal superior e das cargas de rotura, assim como, da geometria das superfícies de rotura dos modelos.

É apresentado um complemento ao estado do conhecimento relativamente à rotura por punçoa-mento de lajes fungiformes com diferentes disposições de armadura longitudinal. Para tal, ana-lisa-se a relação carga experimental com carga prevista pelos diversos regulamentos, nomeada-mente, a NP EN 1992-1 [27], o Model Code 2010 [13] e o ACI 318-11 [4], tendo em consideração a resistência à compressão do betão, a percentagem de armadura longitudinal utilizada e a altura útil dos modelos.

## **4.2. APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS**

### **4.2.1. Deslocamentos verticais**

Como mencionado na secção 3.4 foram utilizados 16 defletómetros elétricos para analisar os deslocamentos relativos nos modelos de lajes. Estes deslocamentos são medidos relativamente ao deslocamento no centro do modelo, D1.

Em relação a esta análise, foram elaborados gráficos que relacionam os deslocamentos em função da carga vertical. Esta relação pode ser observada nas Figuras 4.1 e 4.4. Para tal, os valores utilizados nos deslocamentos correspondem às médias entre D2 e D7, D3 e D6 e D4 e D5, em relação a D1, segundo a direção x, direção com superior altura útil e D8 e D11 e D9 e D10, segundo a direção y, direção com menor altura útil.

Para uma melhor perceção da deformada dos modelos de laje, foram igualmente elaborados gráficos que apresentam a deformada para diferentes patamares de carga, aplicada até atingirem a rotura, apresentados nas Figuras 4.2, 4.3, 4.5 e 4.6.

As cargas apresentadas incluem o peso próprio do modelo, assim como, todos os elementos colocados sobre ele.

Por observação dos gráficos verifica-se que, inicialmente, estes são praticamente lineares, o que corresponde a um comportamento elástico até ao aparecimento das primeiras fendas tangenciais ao pilar. Esta fase é evidenciada pela diminuição da rigidez do elemento. Por fim, as fendas existentes tendem a aumentar a sua abertura e a rigidez da estrutura tende a ser aproximadamente constante.

#### **4.2.1.1. Modelo A**

A Figura 4.1 apresenta a evolução dos deslocamentos verticais com a carga vertical aplicada no modelo de laje A. Verifica-se que as primeiras fendas ocorrem para um valor de carga vertical de sensivelmente 125 kN. Para o valor de 250 kN observa-se um acréscimo dos deslocamentos mais acentuado. A partir deste valor, a rigidez do modelo é aproximadamente constante, ocorrendo o aumento da abertura das fendas já existentes.

O deslocamento máximo observado é de 25,19 mm segundo a direção de menor altura útil, a uma distância de 916 mm do centro do modelo.

As Figuras 4.2 e 4.3 indicam as deformadas segundo os perfis transversais do modelo.

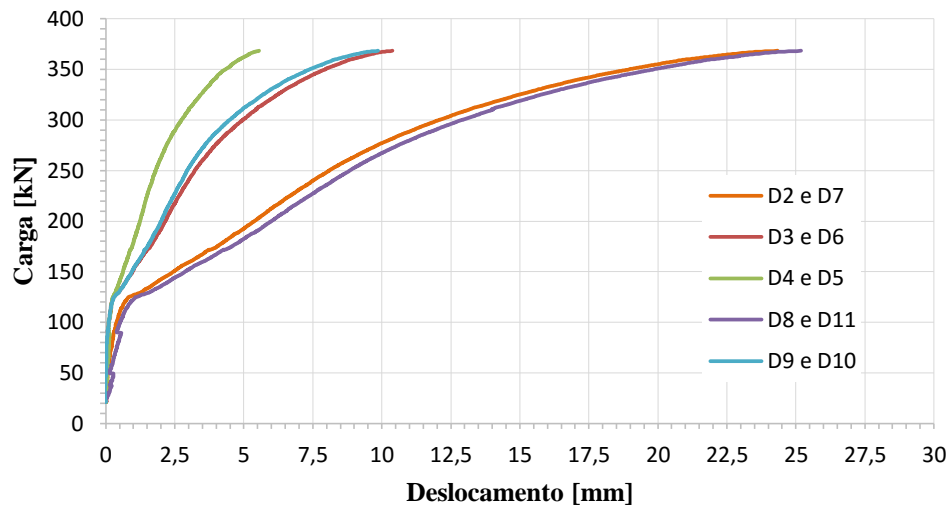


Figura 4.1 - Evolução dos deslocamentos verticais com a carga aplicada no modelo A

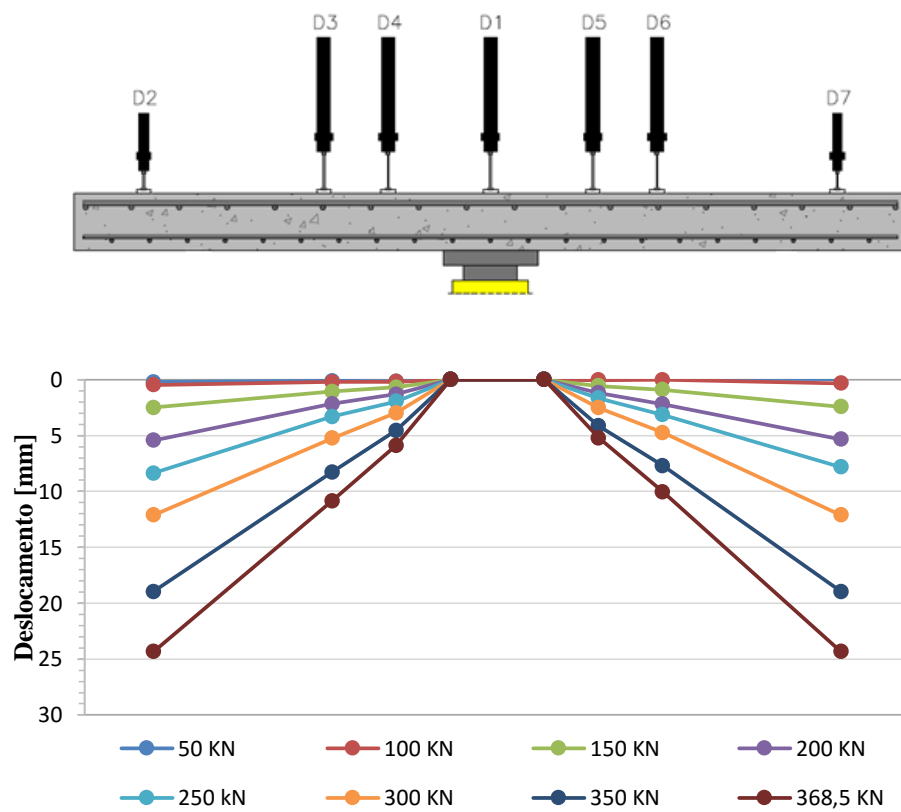


Figura 4.2 – Deformadas no modelo A segundo a direção de maior altura útil

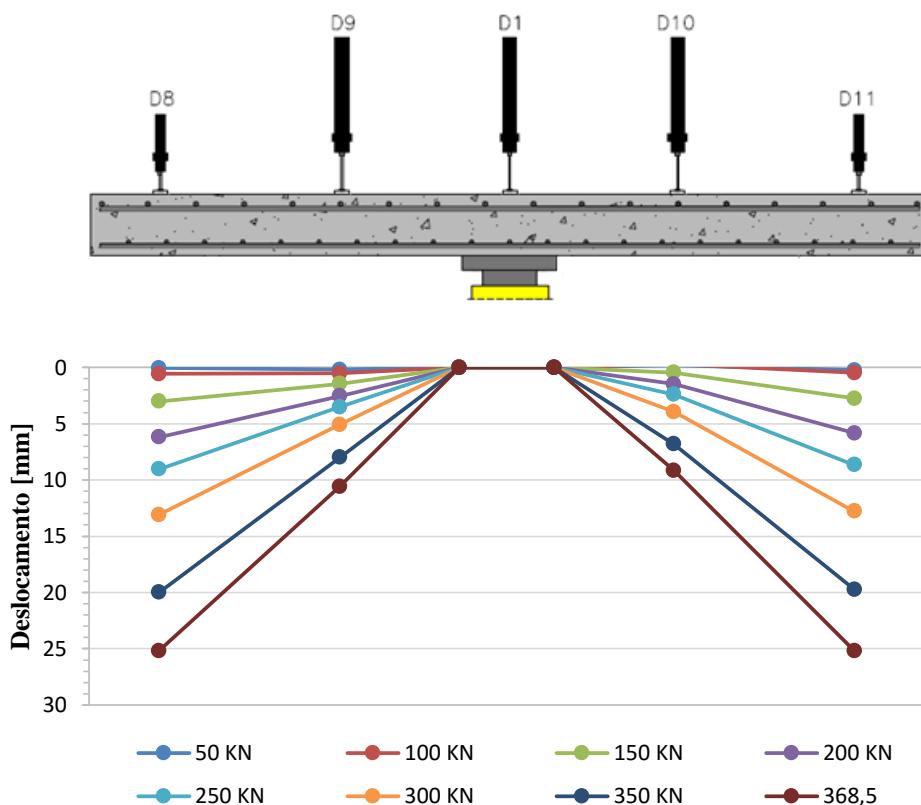


Figura 4.3 - Deformadas no modelo A segundo a direção de menor altura útil

#### 4.2.1.2. Modelo B

A Figura 4.4. apresenta a evolução dos deslocamentos verticais com a carga vertical aplicada no modelo de laje B. Verifica-se que as primeiras fendas ocorrem para um valor de carga vertical de sensivelmente 125 kN. Para o valor de 250 kN observa-se um acréscimo dos deslocamentos mais acentuado. A partir deste valor, a rigidez do modelo é aproximadamente constante, ocorrendo o aumento da abertura das fendas já existentes.

O deslocamento máximo observado é de 17,01 mm segundo a direção de menor altura útil, a uma distância de 916 mm do centro do modelo.

As Figuras 4.5 e 4.6 indicam as deformadas segundo os perfis transversais do modelo.

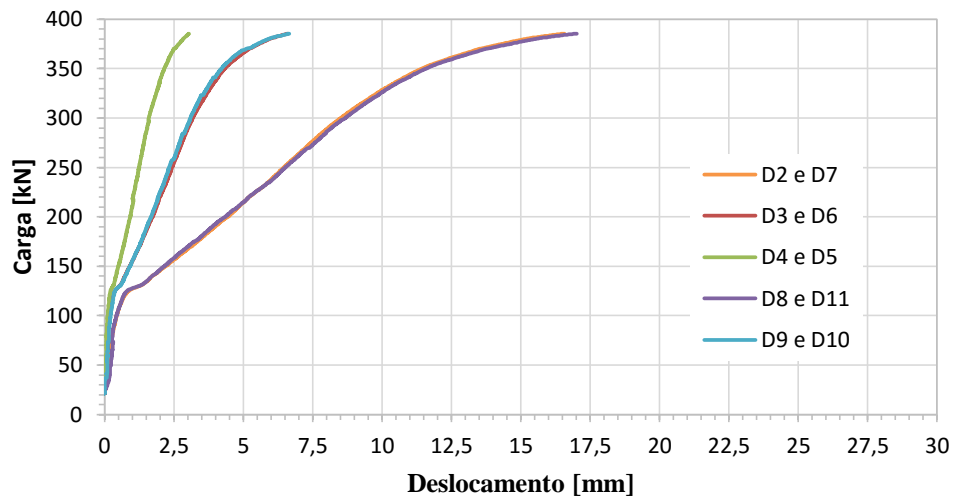


Figura 4.4 - Evolução dos deslocamentos verticais com a carga aplicada no modelo B

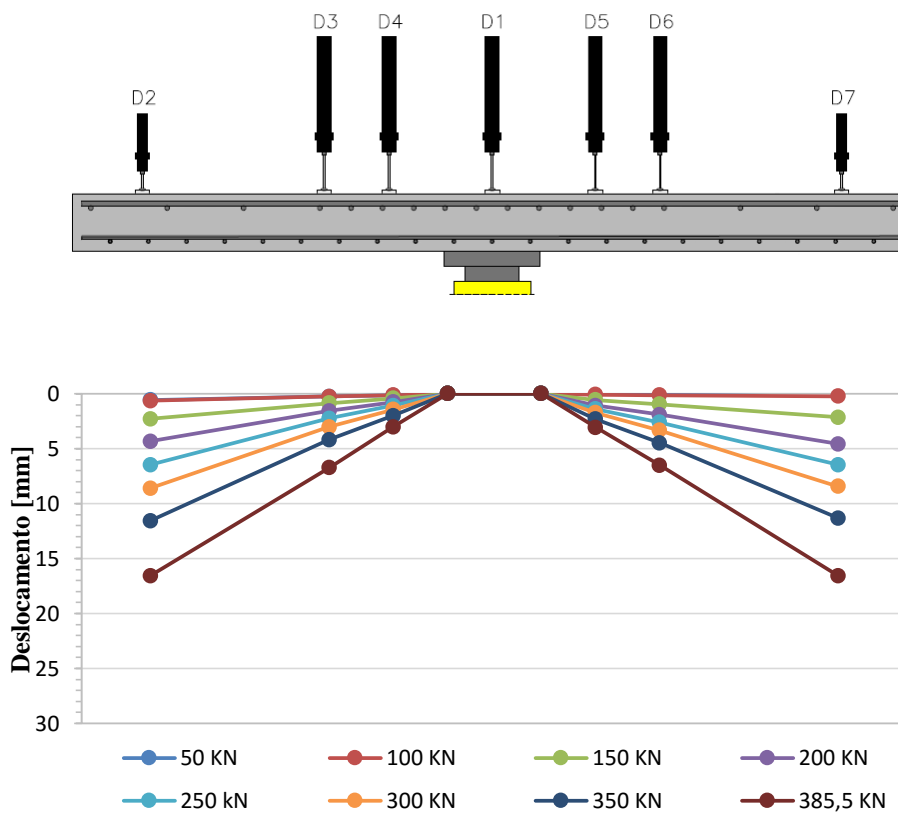


Figura 4.5 - Deformadas no modelo B segundo a direção de maior altura útil

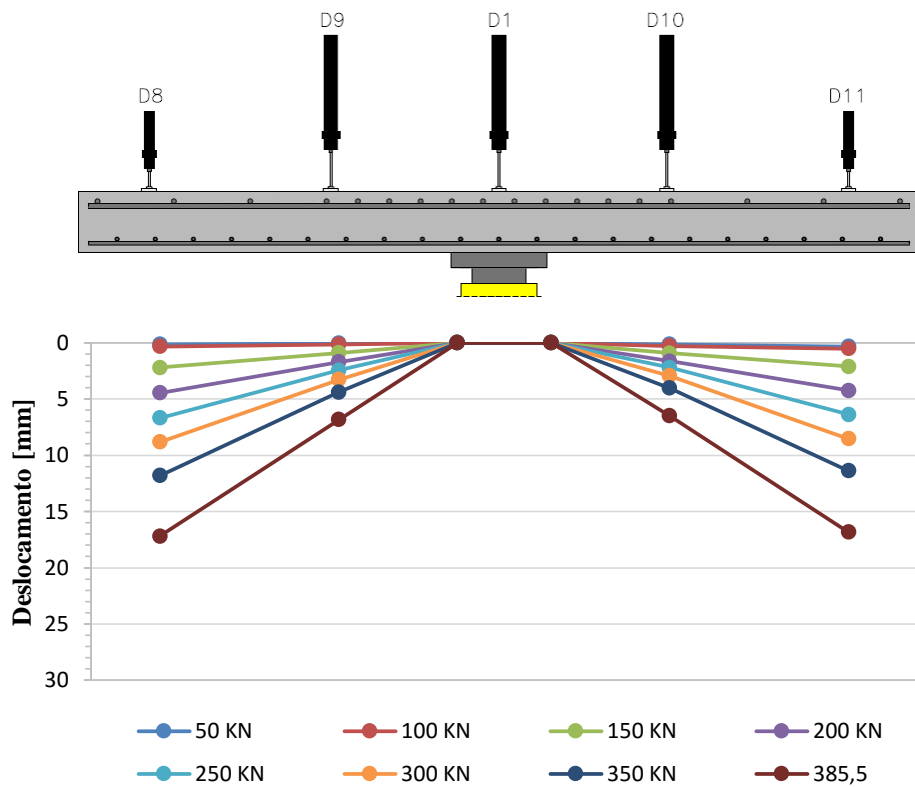
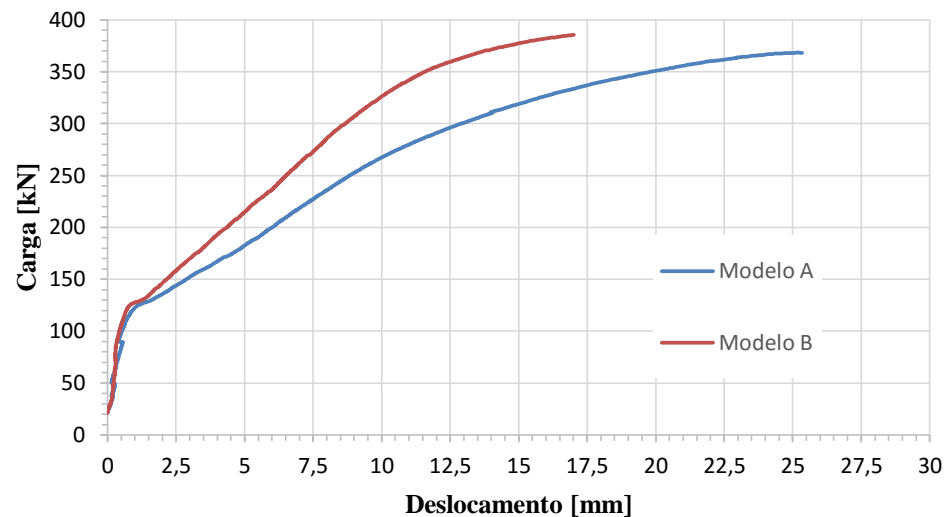


Figura 4.6 - Deformadas no modelo B segundo a direção de menor altura útil

#### 4.2.1.3. Observações finais

Como era expectável, as maiores deformações são observadas sendo a direção de menor altura útil. Assim, a Figura 4.7 apresenta a evolução dos deslocamentos relativos segundo a direção de menor altura útil (D8-D11) em relação à carga vertical aplicada, para o modelo A e B.



**Figura 4.7** – Evolução dos deslocamentos verticais relativos (D8-D11) com a carga vertical em ambos os modelos

Por observação da Figura 4.7 denota-se que a fase inicial para ambos os modelos é linear até atingir uma carga de aproximadamente 125 kN, quando aparecem as primeiras fendas.

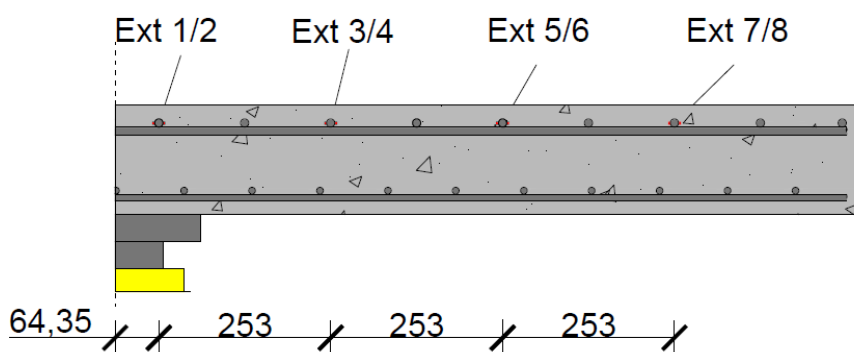
Verifica-se que o modelo de laje B apresenta maior rigidez após fendilhação em comparação com o modelo de laje A, menor capacidade de deformação e menor área abaixo da linha carga-deslocamento, o que pode indicar menor ductilidade. Um mesmo valor de deslocamento é atingido para um valor de carga aplicada superior.

Conclui-se, em relação à evolução dos deslocamentos obtidos durante os ensaios que, o modelo com armadura distribuída não uniformemente, não permitiu alcançar maiores deformações na rotura, em relação ao modelo A.

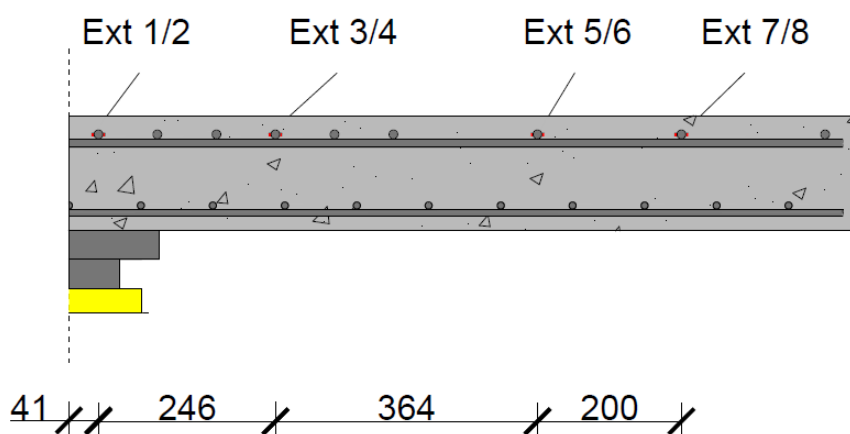
#### 4.2.2. Extensões na armadura longitudinal superior

Em seguida, são analisadas as extensões na armadura longitudinal superior dos modelos ensaiados. Os oito extensómetros foram colocados em quatro varões da armadura longitudinal superior, segundo a direção de maior altura útil.

O afastamento entre os extensómetros foi de 253 mm no modelo A como se observa na Figura 4.8. No entanto, face à disposição não uniforme da armadura longitudinal no modelo B, não existe um afastamento exato entre extensómetros, como se verifica na Figura 4.9. Os extensómetros no modelo B foram então dispostos de modo a que a comparação de extensões entre modelos fosse o mais correta e próxima possível.



**Figura 4.8** – Disposição dos extensômetros na armadura longitudinal superior no modelo A



**Figura 4.9** - Disposição dos extensômetros na armadura longitudinal superior no modelo B

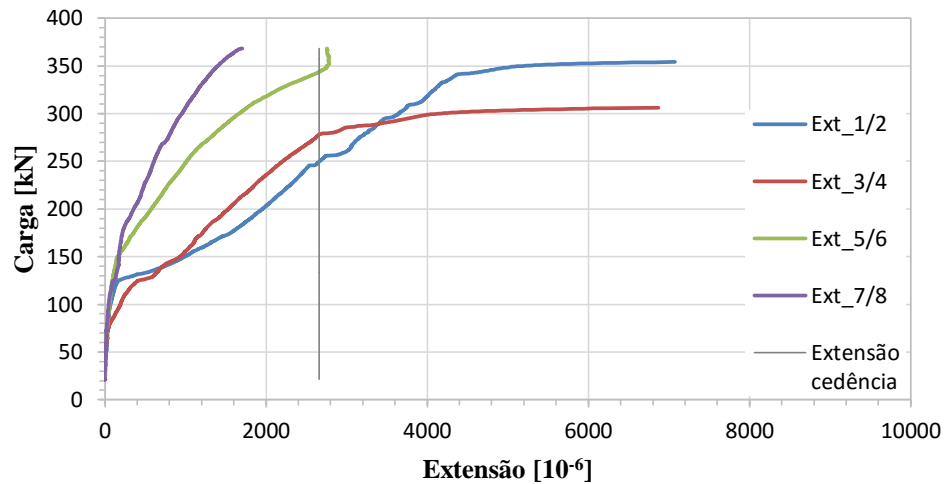
Para ambos os modelos foram elaborados gráficos que analisam a evolução das extensões em função da carga vertical aplicada (Figuras 4.10 e 4.12). É igualmente analisada, em função de diferentes níveis de carga, a distribuição transversal de extensões (Figuras 4.11 e 4.13). Os valores das extensões apresentados correspondem à média das extensões lidas no par de extensômetros de cada varão.

Considerando um módulo de elasticidade de 200 GPa, e de acordo com o valor obtido para a tensão de cedência dos varões utilizados na armadura longitudinal superior, apresentado na Tabela 3.3 admitiu-se uma extensão de cedência para o aço utilizado de 2,66 %. Este valor é assinalado nas Figuras 4.10 e 4.12 por uma linha vertical.

#### 4.2.2.1. Modelo A

Como referido na secção 4.2.2. e observado na Figura 4.8, no modelo A, os extensómetros foram colocados em varões da armadura longitudinal afastados de 253 mm entre si.

Na Figura 4.10. é apresentada a evolução das extensões da armadura longitudinal do modelo A em relação à carga vertical.



**Figura 4.10** - Evolução das extensões da armadura longitudinal no modelo A

Por observação da Figura 4.10. denota-se que, com o crescer da carga vertical aplicada, a extensão aumenta. Observa-se a existência, inicialmente, de um comportamento linear até à ocorrência das primeiras fendas onde o modelo sofre uma perda de rigidez. Tal é justificável pela diminuição de inclinação do gráfico extensão-carga. O valor da carga em que se verifica este fenómeno está de acordo com os obtidos no ponto anterior.

Verifica-se que o par de extensómetros Ext 3/4 é o primeiro a registar o início da fendilhação do modelo, no entanto, é o par de extensómetros Ext 1/2 que atinge primeiramente a extensão de cedência para um valor de 250 kN. Os pares de extensómetros Ext 3/4 e Ext 5/6 atingiram a extensão de cedência para um patamar de 280 kN e 344 kN, respetivamente.

A Figura 4.11 permite analisar em corte transversal a evolução das extensões no modelo A.

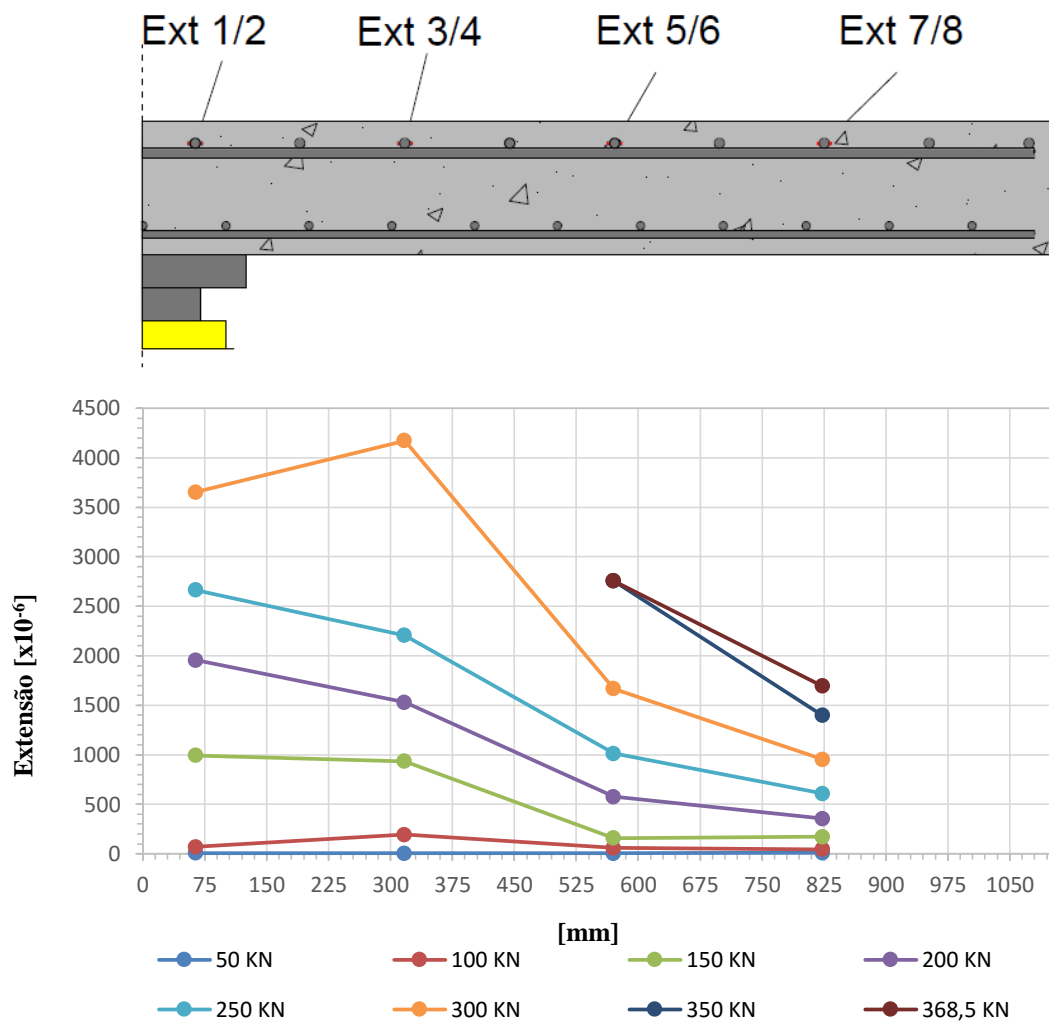


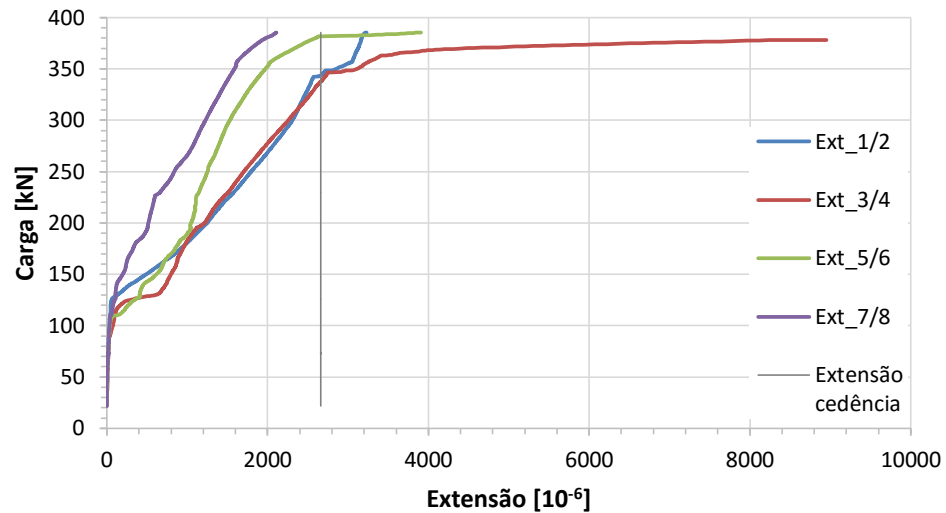
Figura 4.11 – Desenvolvimento transversal das extensões no modelo A

Quanto à análise da evolução transversal das extensões no modelo A, com base na Figura 4.11, conclui-se que as extensões junto ao pilar são superiores, visto que é esta a zona de maiores momentos fletores.

Devido ao rápido incremento dos valores das extensões nos varões dos pares Ext1/2 e Ext3/4, provocado pela fendilhação do modelo, deixaram de existir leituras das extensões antes da rotura do elemento.

#### 4.2.2.2. Modelo B

A Figura 4.12 relaciona a evolução das extensões na armadura longitudinal do modelo B com a carga vertical aplicada.



**Figura 4.12** - Evolução das extensões da armadura longitudinal no modelo B

Tal como se constatou no modelo A, verifica-se a existência de um comportamento aproximadamente linear até ao par de extensómetros Ext 3/4 ser o primeiro a registar o início da fendilhação do modelo. Verifica-se novamente que o valor registado para o início da fendilhação está de acordo com o observado na análise dos deslocamentos verticais. Constata-se que os três varões instrumentados mais próximos do centro do modelo atingem a extensão de cedência, com o valor de 344 kN para o par Ext 1/2, 337 kN para o par Ext 3/4 e 382 kN para o par Ext 5/6.

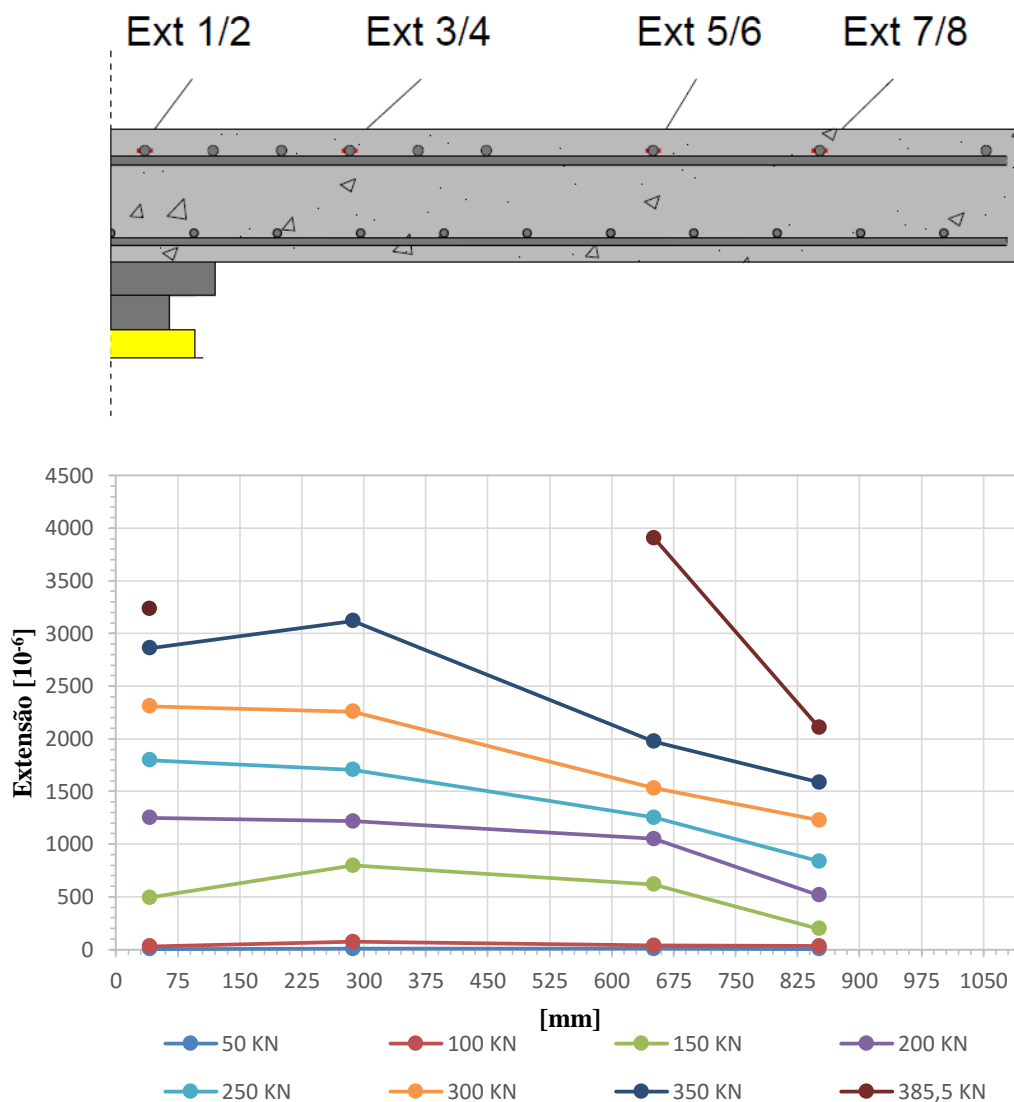


Figura 4.13 – Desenvolvimento transversal das extensões no modelo B

Através da análise da Figura 4.13, denota-se que os valores das extensões vão aumentando com a proximidade do varão ao pilar. No entanto, e em comparação com o modelo A, presencia-se a inexistência de valores de extensão apenas no varão instrumentado com o par Ext 3/4, devido ao incremento das extensões, ligeiramente antes da rotura por punçoamento.

#### 4.2.2.3. Observações finais

Tal como observado em ambos os modelos de laje, assinala-se a presença de um comportamento aproximadamente linear entre a extensão e a carga vertical aplicada até ao início da fendilhação.

Para uma melhor compreensão das diferenças entre os modelos quanto às extensões, foi elaborada a Tabela 4.1. Esta apresenta as extensões médias obtidas nos varões da armadura longitudinal superior de cada modelo, para diferentes patamares de carga aplicada. As extensões apresentadas na Tabela 4.1. foram obtidas através da média das extensões inferiores à extensão de cedência 2,66‰.

**Tabela 4.1** - Extensões médias nos varões da armadura longitudinal

<b>Carga [kN]</b>	<b>175<sup>(1)</sup></b>	<b>225<sup>(1)</sup></b>	<b>275<sup>(2)</sup></b>	<b>325<sup>(3)</sup></b>	<b>375<sup>(4)</sup></b>
<b>Modelo A</b>	0,8	1,4	1,6	1,6	-
<b>Modelo B</b>	0,8	1,2	1,5	1,6	2,2

<sup>(1)</sup> extensões médias registadas nos quatro pares de extensómetros (Ext 1/2, Ext 3/4, Ext 5/6 e Ext 7/8)

<sup>(2)</sup> extensões médias registadas em três pares de extensómetros (Ext 3/4, Ext 5/6 e Ext 7/8)

<sup>(3)</sup> extensões médias registadas em dois pares de extensómetros (Ext 5/6 e Ext 7/8)

<sup>(4)</sup> extensão registada no par de extensómetros Ext 7/8

Através da análise da Tabela 4.1, verifica-se que ocorreu um decréscimo das extensões médias das armaduras no modelo B em relação ao modelo A. Isto significa que, com o aumento da percentagem de armadura na zona central do modelo de laje, sucede-se uma redução das extensões médias das armaduras.

#### **4.2.3. Excentricidade da carga e cargas de rotura experimentais**

Pretende-se analisar a existência de excentricidades da carga em ambos os modelos de laje ensaiados. Na Figura 4.14 observa-se a disposição das oito células de carga utilizadas nos ensaios dos modelos.

Através dos dados recolhidos nos ensaios, foi possível elaborar gráficos que relacionam a carga em cada célula de carga com a evolução da carga vertical total aplicada.

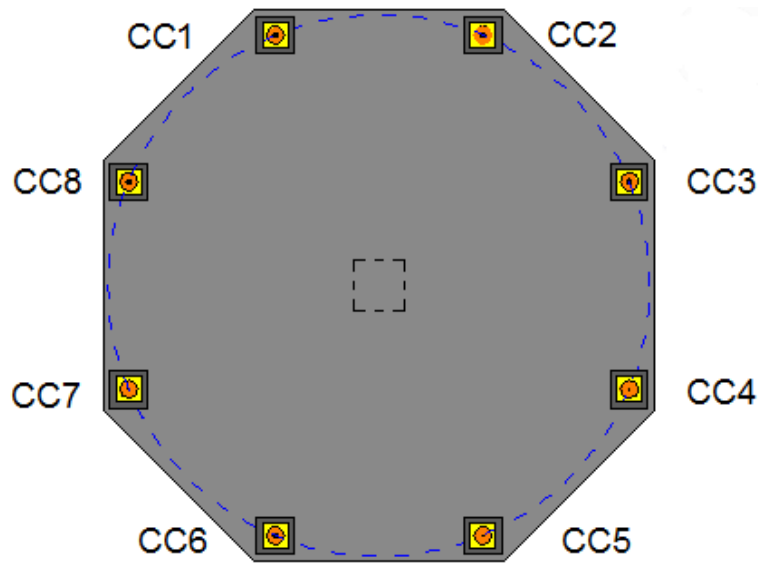


Figura 4.14 – Disposição das células de carga em ambos os modelos

#### 4.2.3.1. Modelo A

Na Figura 4.15 observa-se a evolução de cada célula de carga com a carga vertical aplicada no modelo A. Consequentemente, na Figura 4.16, é possível analisar as excentricidades segundo a direção de maior altura útil, CC3/CC8 e CC4/CC7, e menor altura útil, CC1/CC6 e CC2/CC5.

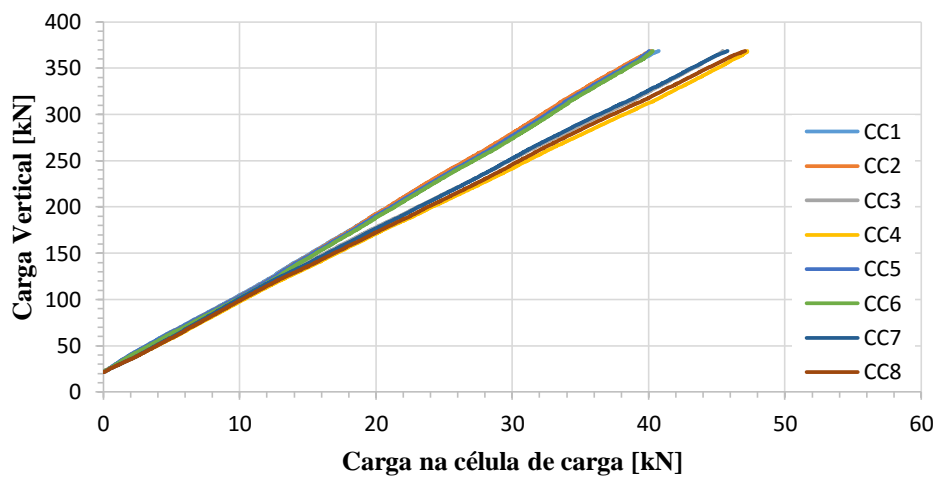
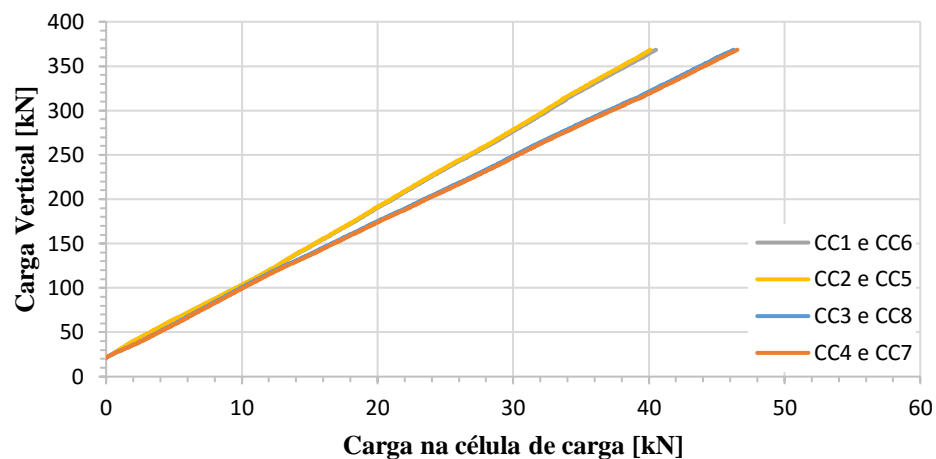


Figura 4.15 – Evolução da carga em cada célula de carga em função da carga vertical total no modelo A



**Figura 4.16** – Evolução da carga nas células de carga no modelo A

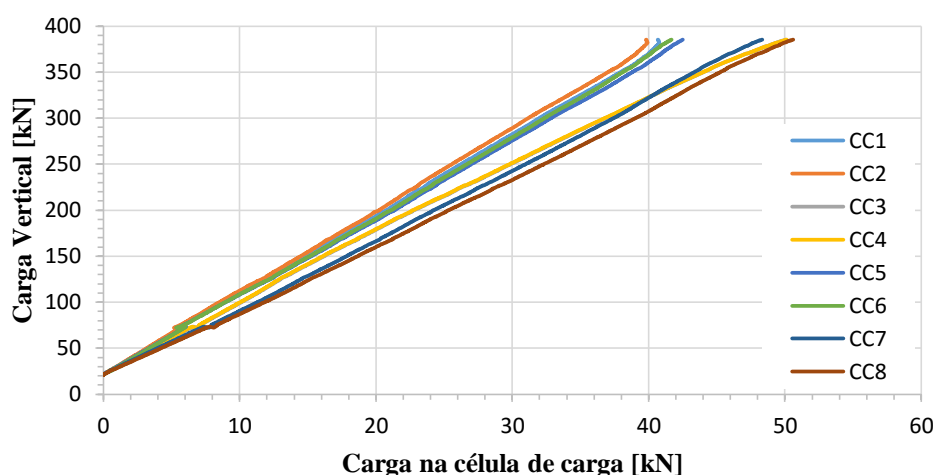
Neste modelo verifica-se que a evolução da carga nas células de carga é linear. Através da Figura 4.15 observa-se que as células de carga CC1, CC2, CC5 e CC6 apresentam o mesmo valor de carga na rotura. As células de carga CC3, CC4, CC7 e CC8 diferem em cerca de 6 kN com as anteriores.

Segundo a direção de maior altura útil a excentricidade da carga máxima é de 1,06 mm, e segundo a de menor altura útil é de 1,45 mm.

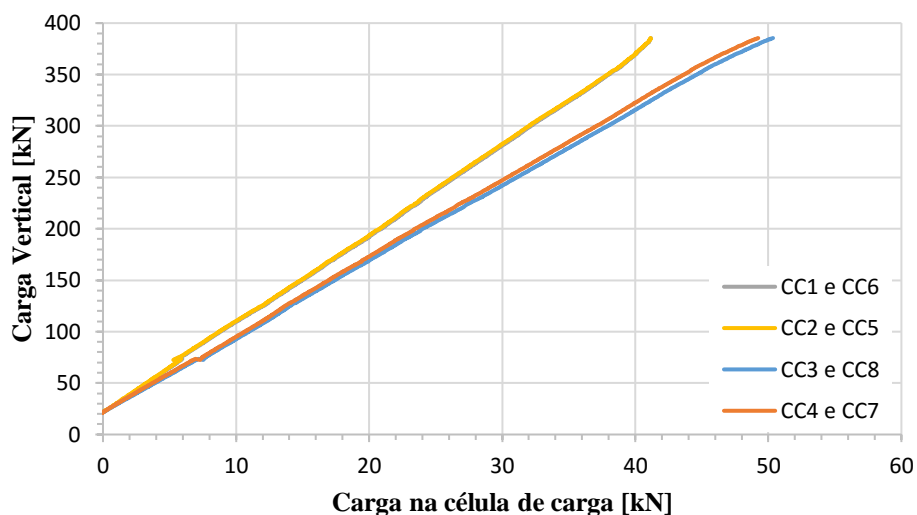
É igualmente observável que até aos 125 kN de carga vertical total, não existe qualquer tipo de excentricidade em nenhuma direção ortogonal, pelo que os momentos originados nas duas direções são praticamente nulos.

#### 4.2.3.2. Modelo B

Na Figura 4.17 observa-se a evolução de cada célula de carga com a carga vertical aplicada no modelo B. Consequentemente, na Figura 4.18, é possível analisar as excentricidades segundo a direção de maior altura útil, CC3/CC8 e CC4/CC7, e menor altura útil, CC1/CC6 e CC2/CC5.



**Figura 4.17** - Evolução da carga em cada célula de carga em função da carga vertical total no modelo B



**Figura 4.18**- Evolução da carga nas células de carga no modelo B

Por observação da Figura 4.17 verifica-se que existe uma evolução linear da carga nas células de carga. As células de carga CC1 e CC2 apresentam uma carga na rotura de aproximadamente 41 kN e as células CC5 e CC6 de praticamente 43 kN. As restantes cargas apresentam valores superiores de aproximadamente 8 kN. Assim, originam-se excentricidades de 7,26 mm e 3,14 mm, segundo a direção de maior e menor altura útil, respetivamente.

É igualmente observável que até aos 50 kN de carga vertical total, não existe qualquer tipo de excentricidade em nenhuma direção ortogonal, pelo que os momentos originados nas duas direções são praticamente nulos.

### 4.2.3.3. Observações finais

Na Tabela 4.2 encontram-se as excentricidades na capacidade de carga máxima de cada modelo, assim como, a carga experimental de rotura,  $V_{exp}$ . Considere-se a direção x, a de maior altura útil, e a direção y, a de menor altura útil.

**Tabela 4.2** – Excentricidades na direção x e y nos modelos

Modelos	$V_{exp}$ [kN]	Excentricidade na direção x [mm]	Excentricidade na direção y [mm]
A	368,5	1,06	1,45
B	385,5	7,26	3,14

Por observação da Tabela 4.2 verifica-se que as excentricidades são baixas, sendo as mesmas mais elevadas no modelo B que no modelo A. Estas excentricidades foram obtidas através da expressão 4.1.

$$e = \frac{\Sigma M_i}{\Sigma V} \quad (4.1)$$

em que

$\Sigma M_i$  é o somatório de momentos segundo a direção x e y

$\Sigma V$  é a carga vertical total aplicada no modelo.

Estas excentricidades têm influência no valor da carga de rotura experimental. Como tal, e recorrendo à NP EN 1992-1-1 [27], é necessário calcular um fator,  $\beta$ , que tem em consideração o efeito da excentricidade da força de punçoamento, através da equação 4.2.

$$\beta = 1 + 1,8 \sqrt{\left(\frac{e_x}{b_y}\right)^2 + \left(\frac{e_y}{b_x}\right)^2} \quad (4.2)$$

onde

$e_x$  é a excentricidade segundo x

$e_y$  é a excentricidade segundo y

$b_x$  é a dimensão do perímetro de controlo segundo x

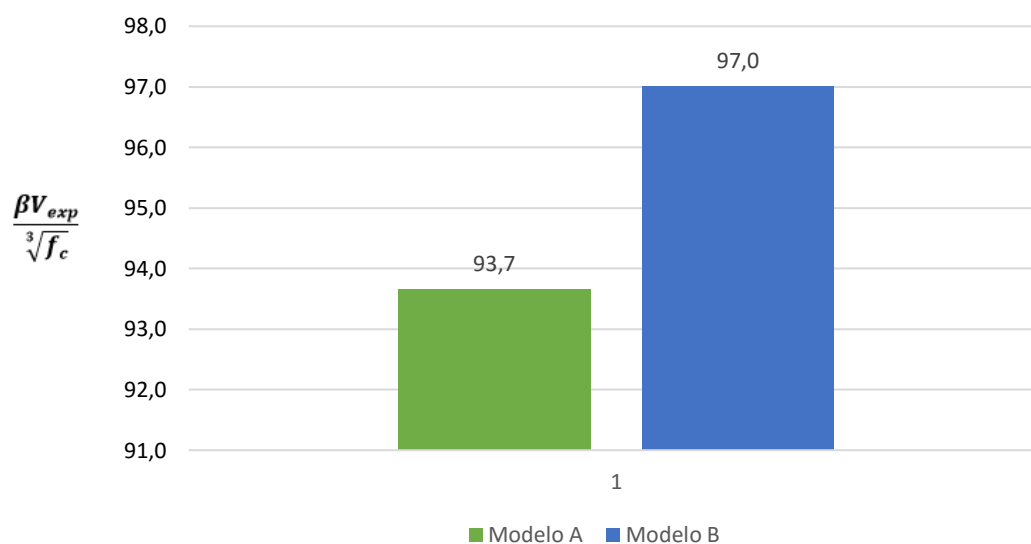
$b_y$  é a dimensão do perímetro de controlo segundo y

Com efeito, e nas secções seguintes, serão utilizados os valores de  $\beta V_{exp}$ , como ilustrado na Tabela 4.3.

No sentido de tornar independente da resistência do betão dividiu-se a carga experimental de rotura obtida,  $\beta V_{exp}$ , pela raiz cúbica da resistência à compressão do betão, cujos valores encontram-se representados na Figura 4.19.

**Tabela 4.3** – Efeito da excentricidade das cargas no cálculo da capacidade de carga ao punçoamento

Modelo	$V_{exp}$ [kN]	$\beta$	$\beta V_{exp}$ [kN]	$\frac{\beta V_{exp}}{\sqrt[3]{f_c}}$
A	368,5	1,004	370,1	93,7
B	385,5	1,019	393,1	97,0



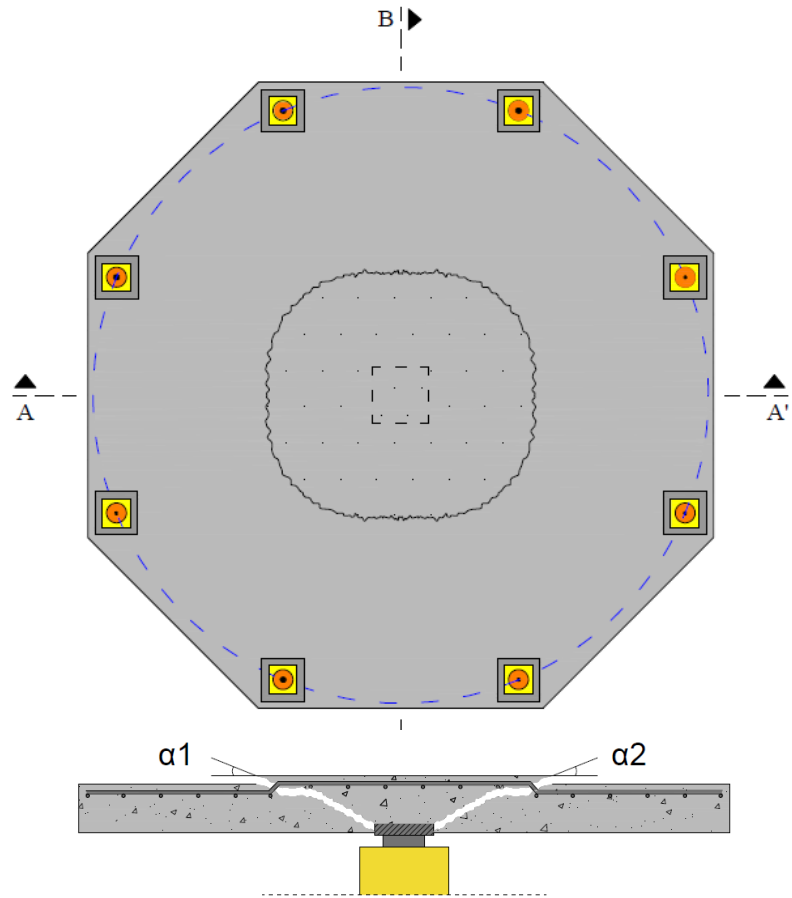
**Figura 4.19** – Relação entre a carga experimental e a raiz cúbica da resistência à compressão do betão

Analisando os resultados, do modelo A para o modelo B verificou-se um aumento na capacidade de carga de 6,2%. No entanto, e devido à diferença quanto à resistência à compressão do betão utilizado de 61,7 MPa e 66,5 MPa do modelo A e B, respetivamente, apenas 3,6% deste aumento se deve à influência da pormenorização da armadura junto à ligação laje-pilar.

#### 4.2.4. Geometria da superfície de rotura

Para efeitos de análise da superfície de rotura por punçoamento, os modelos foram cortados transversalmente segundo a linha média (B-B’).

A Figura 4.20 apresenta o esquema da superfície de rotura do modelo, em planta e em corte.



**Figura 4.20** – Esquema da geometria em planta e em corte da superfície de rotura (desenhos sem escala)



**Figura 4.21** – Superfície de rotura do modelo de laje A, corte B-B'



**Figura 4.22** - Superfície de rotura do modelo de laje B, corte B-B'

**Tabela 4.4** – Inclinações da superfície de rotura

<b>Modelo</b>	<b><math>\alpha 1</math> (°)</b>	<b><math>\alpha 2</math> (°)</b>	<b>Valor médio (°)</b>
<b>A</b>	30	16	23
<b>B</b>	24	26	25

As Figuras 4.21 e 4.22 mostram a superfície de rotura do modelo de laje A e B, respetivamente.

Na Tabela 4.4 observam-se as inclinações da superfície de rotura para ambos os modelos.

Por análise desta tabela, observa-se que o valor médio da inclinação da superfície de rotura foi da mesma ordem de grandeza nos dois modelos.

### **4.3. COMPLEMENTO AO ESTADO DO CONHECIMENTO**

#### **4.3.1. Introdução**

Face ao elevado número de ensaios experimentais já realizados em lajes fungiformes, este capítulo surge com o intuito de comparar os valores experimentais obtidos, com as previsões da norma NP EN-1992-1 [27], do Model Code 10 [13] e ACI 318-11 [4].

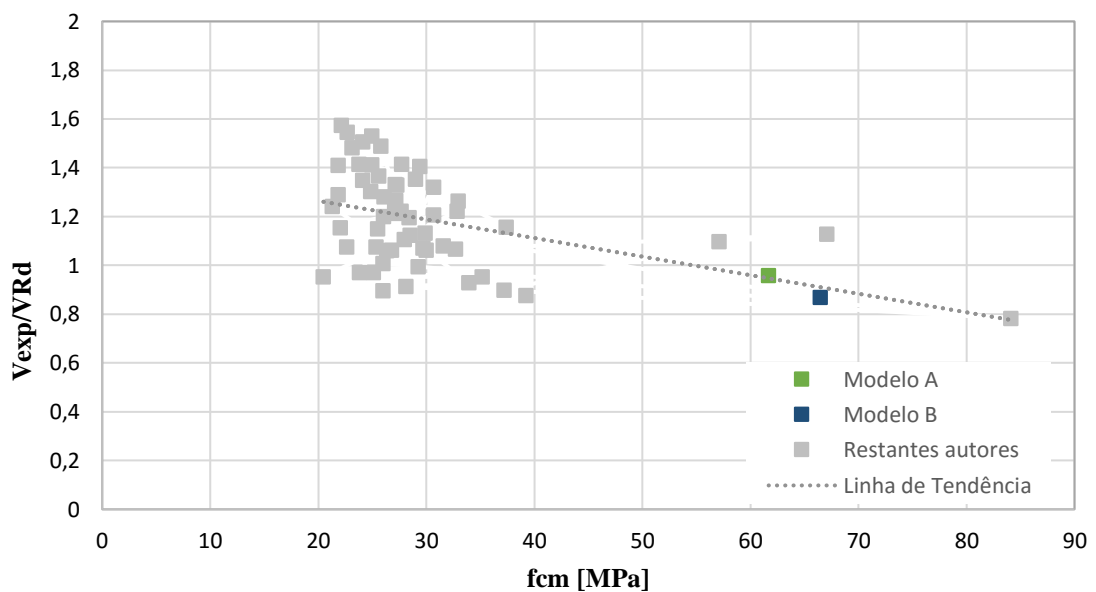
Nas investigações elaboradas são diversas as variáveis em estudo como, por exemplo, a resistência à compressão do betão utilizado, a percentagem de armadura longitudinal, a altura útil dos modelos, a dimensão do pilar, entre outras. No entanto, nesta secção, são apenas confrontados os dados relativos às primeiras três variáveis mencionadas.

Assim, pretende-se identificar quais as normas e regulamentos que otimizam o comportamento das lajes quanto à resistência ao punçoamento. Nestas comparações somente são consideradas lajes com distribuição de armadura longitudinal superior não uniforme.

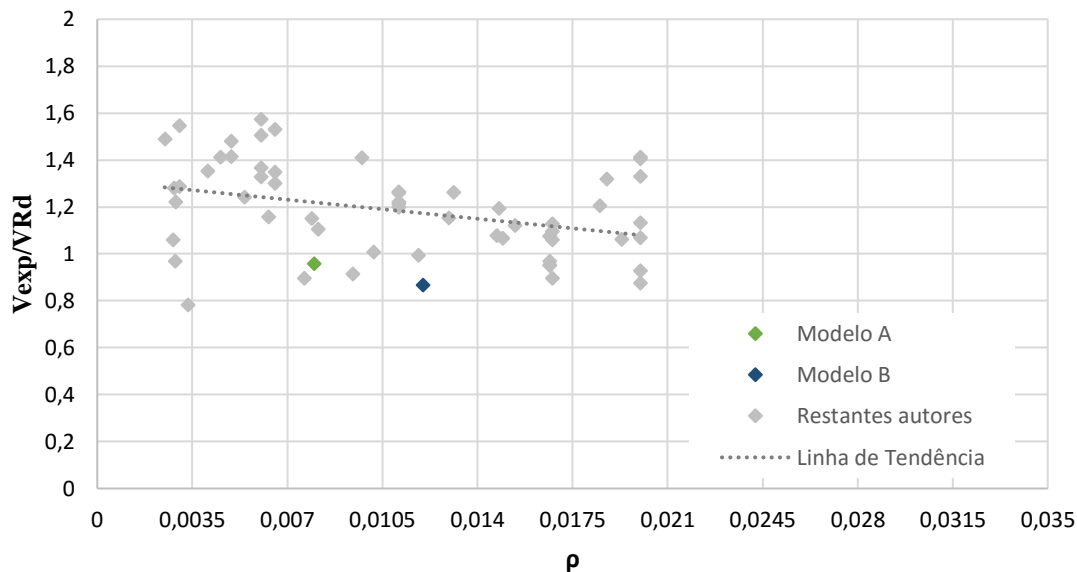
### 4.3.2. Comparação entre os ensaios experimentais e as previsões segundo a norma NP EN 1992-1, o Model Code 2010 e o ACI 318-11

#### 4.3.2.1. NP EN-1992-1

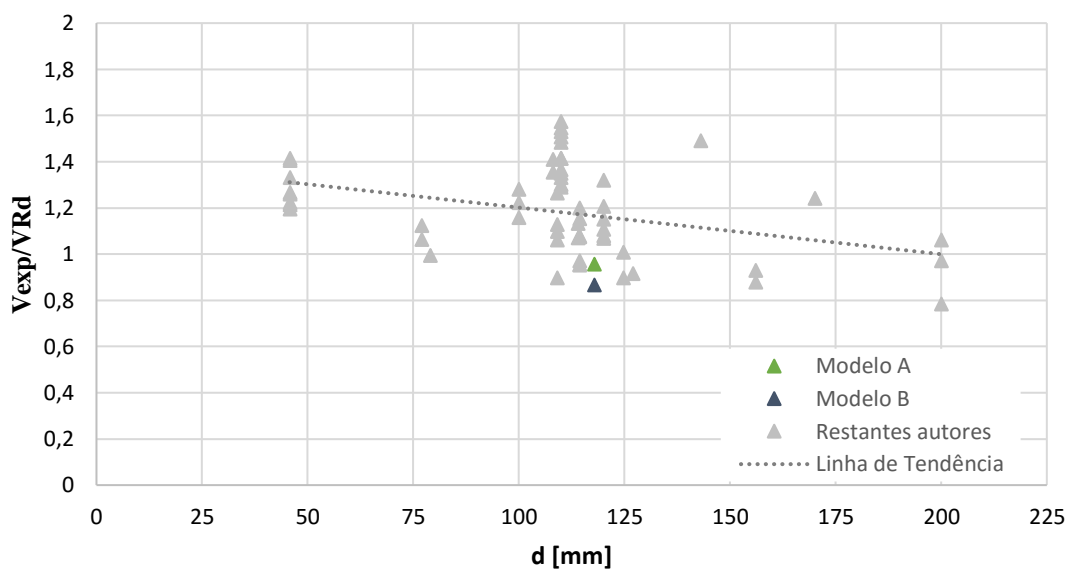
As Figuras 4.23, 4.24 e 4.25 apresentam a relação entre a carga experimental e carga prevista em função da resistência à compressão, percentagem de armadura e altura útil dos modelos, respetivamente. Para a elaboração desta comparação foram utilizados os dados apresentados em anexo, na Tabela A.1. O cálculo da resistência ao punçãoamento segundo a norma NP EN 1992-1 [27] foi realizado com recurso à equação 2.5 apresentada na secção 2.3.1.1.



**Figura 4.23** – Relação entre a carga experimental e a prevista segundo a norma NP EN 1992-1, em função da resistência à compressão do betão



**Figura 4.24** - Relação entre a carga experimental e a prevista segundo a NP EN 1992-1, em função da percentagem de armadura longitudinal



**Figura 4.25** - Relação entre a carga experimental e a prevista segundo a NP EN 1992-1, em função da altura útil dos modelos

Por observação da Figura 4.23, verifica-se que a norma NP EN 1992-1, para betões de alta resistência, encontra-se contra a segurança, pois estima valores superiores aos obtidos experimentalmente.

Quanto à percentagem de armadura utilizada nos modelos e à altura útil dos mesmos, a norma em análise encontra-se maioritariamente a favor da segurança, prevendo uma carga de rotura inferior à experimental, apesar de existir uma tendência de diminuição do conservadorismo, com o aumento da percentagem de armadura longitudinal e da altura útil dos modelos de laje.

A Tabela 4.5 apresenta os valores obtidos para a média, para a covariância e para o percentil de 5%.

**Tabela 4.5** – Valores estatísticos obtidos relativamente à NP EN 1992-1

<b>Média</b>	<b>Covariância</b>	<b>Percentil 5%</b>
1,183	0,038	0,896

Em geral, a norma NP EN 1992-1 prevê uma carga de rotura por punçoamento inferior à carga de rotura experimental, apresentando uma média entre ambas de 1,183. Em 78% dos modelos, o valor da carga experimental foi superior ao previsto por esta norma. Verifica-se que o percentil calculado encontra-se abaixo do valor 1, o que indica que a NP EN 1992-1 está contra a segurança.

#### **4.3.2.2. CEB-FIP Model Code 2010**

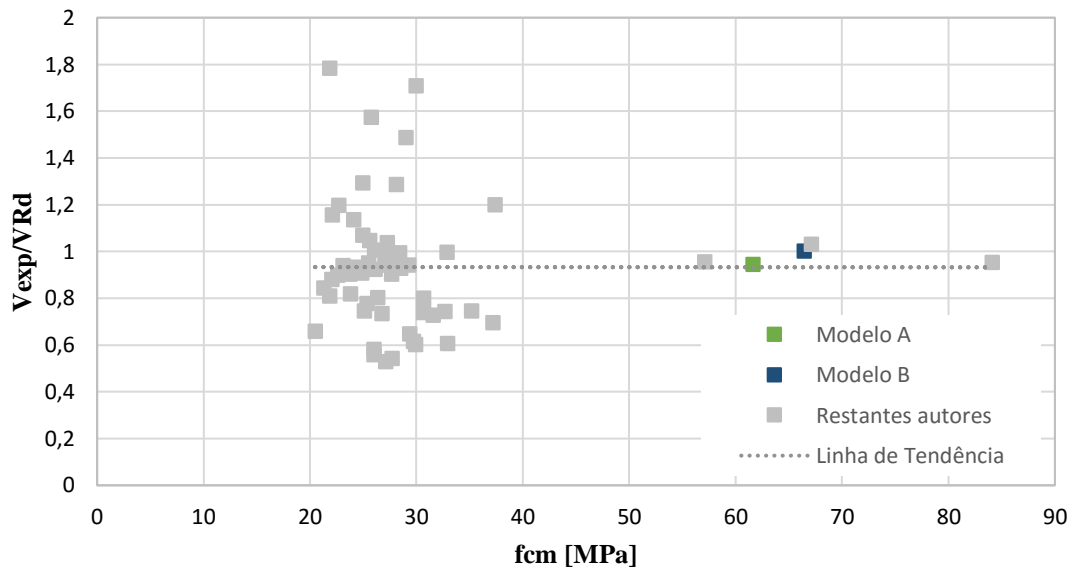
Para o cálculo da resistência ao punçoamento segundo o Model Code 10 [13], foram tidas em consideração as equações 2.8. a 2.25 apresentadas na secção 2.3.2. Foi utilizado o nível de aproximação III.

De acordo com o Model Code e, através das expressões 2.4 e 2.5, verifica-se que a máxima dimensão do agregado utilizado no betão tem influência na resistência ao punçoamento.

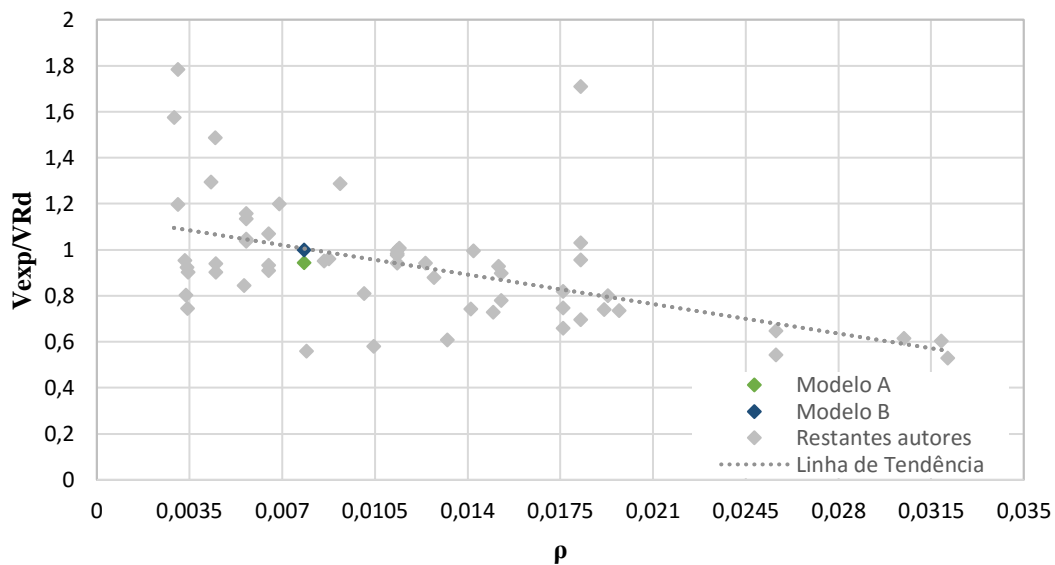
Face à ausência de informação quanto à máxima dimensão do agregado dos modelos experimentais referentes aos autores Lunt [36] e Widiyanto et al [59], numa primeira fase, e para efeitos de comparação entre normas, considerou-se para esta dimensão o valor de 20 mm. É igualmente analisada a resistência ao punçoamento não tendo em consideração estes autores.

Para a realização desta análise foram utilizados os dados apresentados na Tabela A.2 em anexo.

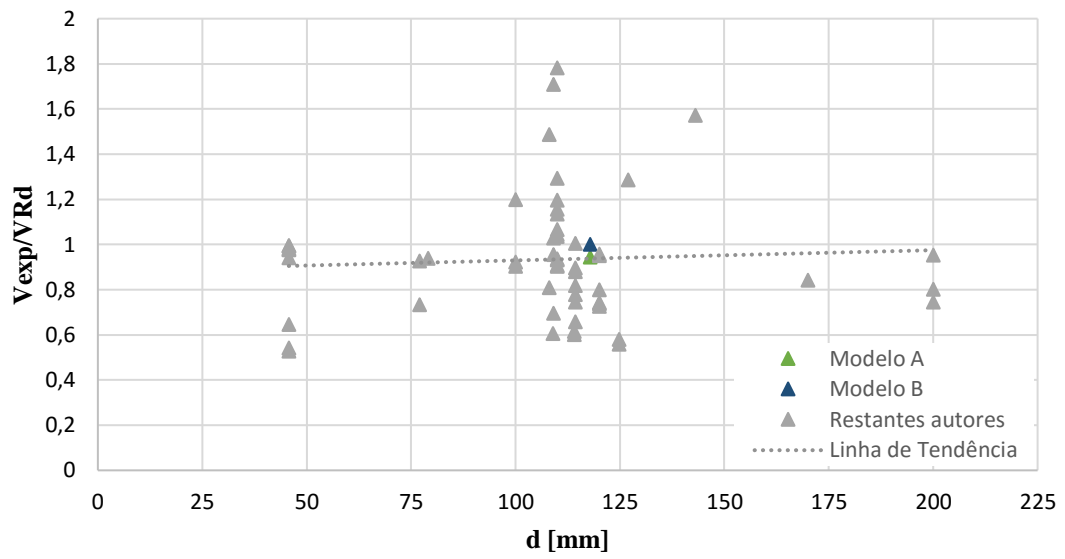
As Figuras 4.26 a 4.28. apresentadas têm em consideração os ensaios de Lunt [36] e Widiyanto et al [59] admitindo como máxima dimensão do agregado 20 mm.



**Figura 4.26** - Relação entre a carga experimental e prevista segundo o Model Code, em função da resistência à compressão do betão, considerando todos os autores

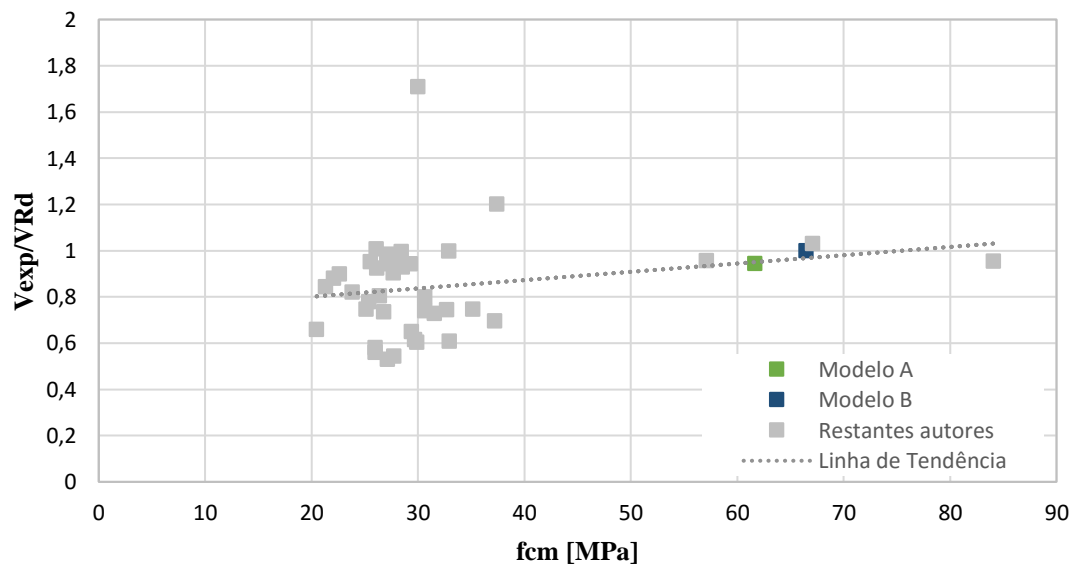


**Figura 4.27** - Relação entre a carga experimental e prevista segundo o Model Code, em função da percentagem de armadura longitudinal, considerando todos os autores

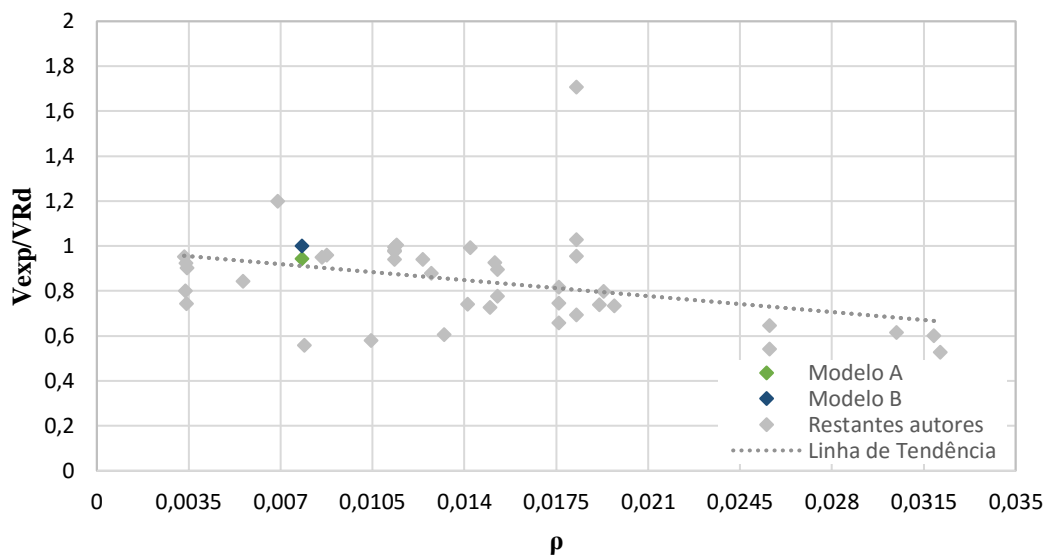


**Figura 4.28** - Relação entre a carga experimental e prevista segundo o Model Code, em função da altura útil dos modelos, considerando todos os autores

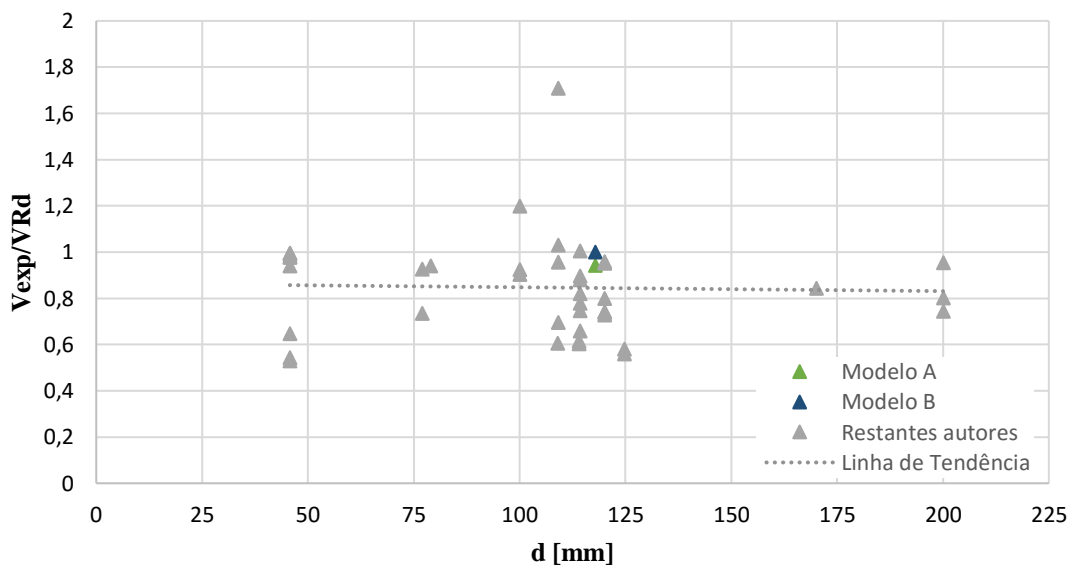
As Figuras 4.29 a 4.31 apresentadas não têm em consideração os ensaios realizados por Lunt [36] e Widiyanto et al [59].



**Figura 4.29** - Relação entre a carga experimental e prevista segundo o Model Code, em função da resistência à compressão do betão



**Figura 4.30** – Relação entre a carga experimental e prevista segundo o Model Code, em função da percentagem de armadura longitudinal



**Figura 4.31** - Relação entre a carga experimental e prevista segundo o Model Code, em função da altura útil dos modelos

Por observação da Figura 4.27, verifica-se que o Model Code 2010, quanto às percentagens de armadura, estima maioritariamente valores superiores aos obtidos experimentalmente, existindo uma tendência para a diminuição deste conservadorismo com o aumento da percentagem de armadura. Quanto à resistência à compressão do betão (Figuras 4.26 e 4.29) e à altura útil dos

mesmos (Figuras 4.28 e 4.31), o Model Code 2010 prevê valores superiores aos obtidos experimentalmente. Em geral, com o aumento do valor da resistência à compressão do betão, este regulamento tende a estimar valores de carga de rotura mais conservadores.

A Tabela 4.6 apresenta os valores obtidos para a média, a covariância e o percentil 5%.

**Tabela 4.6** – Valores estatísticos obtidos relativamente ao Model Code 2010

<b>Média</b>	<b>Covariância</b>	<b>Percentil 5%</b>
0,933	0,071	0,577

Globalmente, este documento prevê uma carga de rotura por punçoamento superior à carga de rotura experimental, apresentando uma média entre ambas de 0,933. Apenas em 26% dos modelos, o Model Code 2010 encontra-se a favor da segurança, isto é, apresentou um valor da carga previsto menor que o experimental. Através da análise o percentil de 5% verifica-se que, por este ser inferior a 1, o Model Code estima valores de carga de rotura superiores aos obtidos experimentalmente.

#### 4.3.2.3. ACI 318-11

As Figuras 4.32, 4.33 e 4.34 apresentam a relação entre a carga experimental e carga prevista em função da resistência à compressão, da percentagem de armadura longitudinal e da altura útil dos modelos, respetivamente. O cálculo da resistência ao punçoamento segundo o ACI 318-11 [4] foi realizado com recurso às equações 2.26 a 2.28 apresentadas na secção 2.3.3. Através destas expressões verifica-se que o ACI 318-11 não tem em consideração a influência da concentração de armadura junto à ligação laje-pilar.

Para a elaboração desta comparação foram utilizados os dados apresentados em anexo, na Tabela A.3.

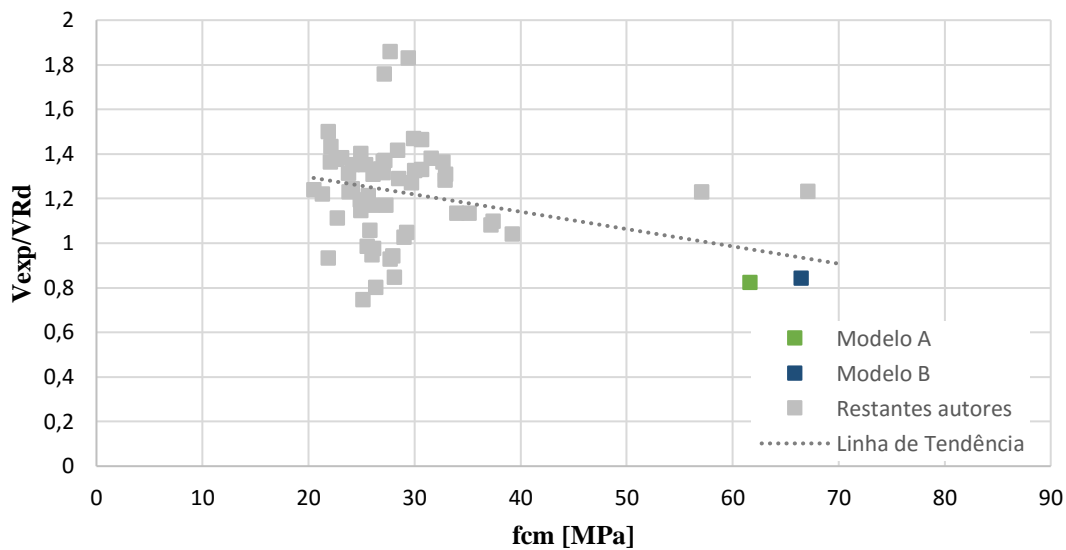


Figura 4.32 - Relação entre a carga experimental e prevista segundo o ACI 318, em função da resistência à compressão do betão

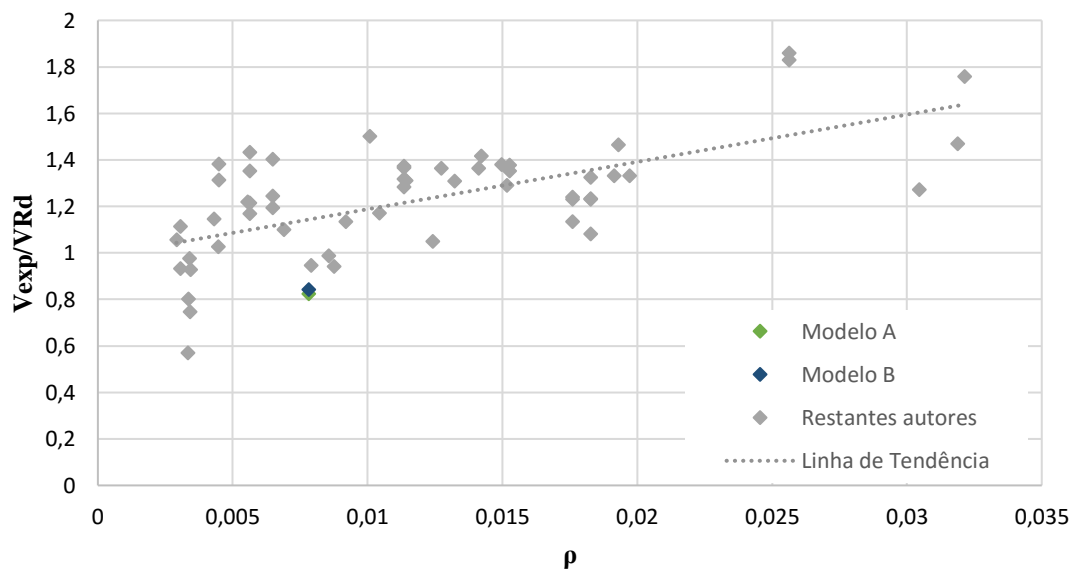
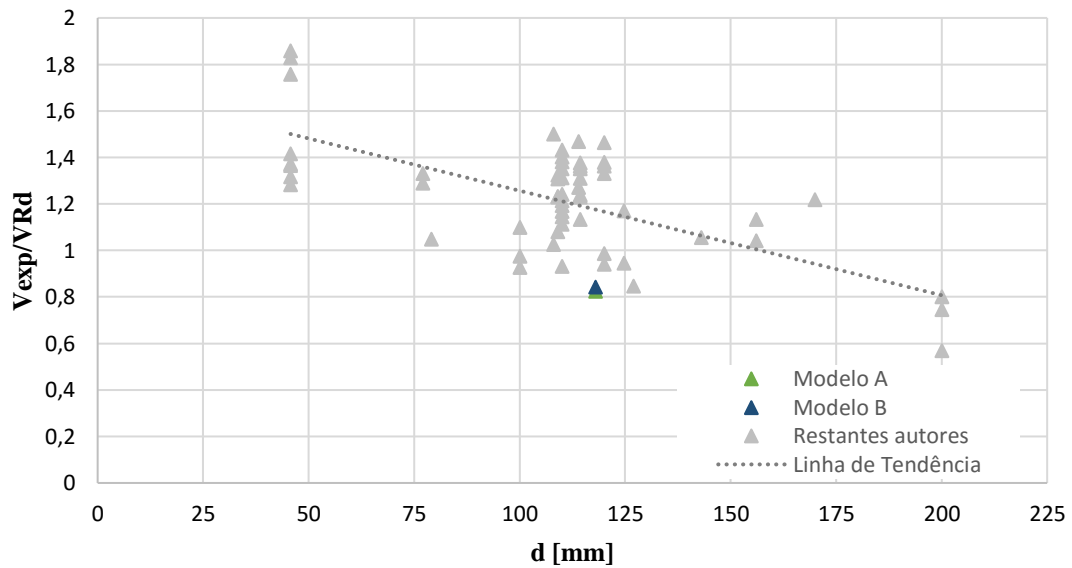


Figura 4.33 - Relação entre a carga experimental e prevista segundo o ACI 318, em função da percentagem de armadura longitudinal



**Figura 4.34** - Relação entre a carga experimental e prevista segundo o ACI 318, em função da altura útil dos modelos

Através da Figura 4.32, e apesar de existirem poucos ensaios com a utilização de betões de alta resistência, verifica-se que a tendência é o ACI 318 prever cargas de rotura contra a segurança.

Na Figura 4.33 constata-se que, quanto à percentagem de armadura, o ACI prevê cargas de rotura maioritariamente do lado da segurança, havendo uma tendência para aumentar o nível de segurança com o aumento da percentagem de armadura.

Por observação da Figura 4.34, verifica-se que para valores de altura útil mais baixos o ACI 318 encontra-se do lado da segurança, apresentando valores de carga de rotura inferiores aos obtidos experimentalmente. Quanto a valores de altura útil mais elevados, verifica-se o oposto.

A Tabela 4.7 apresenta os resultados obtidos para a média, para a covariância e para o percentil de 5%.

**Tabela 4.7** – Valores estatísticos obtidos relativamente ao ACI 318-11

Média	Covariância	Percentil 5%
1,214	0,060	0,821

Em média, o ACI 318-11 prevê uma carga de rotura por punçoamento menor que a obtida experimentalmente, apresentando um valor médio de 1,21. Em aproximadamente 80% dos modelos analisados, o ACI 318-11 estima uma carga de rotura do lado da segurança. No entanto, e tendo em conta que o percentil de 5 % é inferior a 1, conclui-se que o ACI 318-11 estima valores para a carga de rotura contra a segurança.

### **4.3.3. Observações finais**

Comparando as cargas experimentais obtidas ao longo dos diversos ensaios, elaborados nos últimos anos, com as cargas previstas através da norma NP EN 1992-1, pelo Model Code 2010 e pelo ACI 318-11, conclui-se que o Model Code é o que prevê valores de resistência ao punçoamento mais próximos dos obtidos experimentalmente, sendo a média desta relação de 0,933. No entanto, este valor não está do lado da segurança, pois indica que, na maioria dos ensaios, o Model Code estimou valores de carga de rotura superiores aos obtidos experimentalmente.

O contrário confirma-se através do ACI 318 em que, maioritariamente, os valores experimentais foram superiores aos estimados. A relação destes valores foi de 1,214.

Através da norma NP EN 1992-1 obteve-se, como média da relação entre as cargas experimentais e as expectáveis, o valor de 1,183. Assim, conclui-se que esta norma revelou estar do lado da segurança, pois estima maioritariamente valores de resistência ao punçoamento inferiores aos experimentais.

## **Capítulo 5**

### **Conclusões**

#### **5.1. INTRODUÇÃO**

Neste trabalho apresentam-se os ensaios experimentais elaborados com o intuito de analisar o efeito da pormenorização da armadura na resistência ao punçoamento.

O presente capítulo resume os resultados obtidos através dos dois ensaios experimentais, relativamente aos deslocamentos verticais, às extensões das armaduras longitudinais, à geometria da superfície de rotura e às cargas de rotura. É feita ainda a comparação de resultados experimentais com previsões regulamentares.

Por fim, são propostos alguns tópicos para trabalhos futuros relacionados com o tema estudado.

#### **5.2. EFEITO DA PORMENORIZAÇÃO DAS ARMADURAS**

Foram elaborados dois modelos de laje fungiforme. Um dos modelos com armadura distribuída uniformemente, modelo A, e um outro com uma maior percentagem de armadura longitudinal concentrada junto à ligação laje-pilar, modelo B. Em ambos os modelos foram utilizados varões de 12 mm na armadura superior e 10 mm na armadura inferior. O modelo A apresentava 0,783%

de percentagem de armadura e o Modelo B, 1,149% na zona central e 0,479% na zona lateral do modelo.

### **5.2.1. Deslocamentos verticais**

Quanto aos deslocamentos verticais verificou-se que as maiores deformações ocorreram, em ambos os modelos, segundo a direção de menor altura útil.

Verificou-se que o modelo de laje B apresentou maior rigidez em comparação com o modelo de laje A, menor ductilidade e menor capacidade de deformação. No entanto, um mesmo valor de deslocamento é atingido para um valor de carga aplicada superior.

Conclui-se, em relação à evolução dos deslocamentos obtidos durante os ensaios que, o modelo com armadura distribuída não uniformemente, não permitiu alcançar maiores deformações na rotura, em relação ao modelo A.

### **5.2.2. Extensões na armadura longitudinal superior**

Em ambos os modelos de laje assinala-se a presença de um comportamento aproximadamente linear entre a extensão e a carga vertical aplicada até ao aparecimento de fendilhação.

Verificou-se que ocorreu um decréscimo das extensões médias das armaduras do modelo B em relação ao modelo A. Isto significa que, com o aumento da percentagem de armadura na zona central do modelo de laje, sucede-se uma redução das extensões médias das armaduras.

### **5.2.3. Geometria da superfície de rotura**

Quanto à geometria da superfície de rotura, verifica-se que o valor médio da inclinação da superfície de rotura foi da mesma ordem de grandeza em ambos os modelos.

### **5.2.4. Cargas de rotura experimentais e previstas pelas normas e regulamentos**

Quanto às cargas de rotura, verificou-se inicialmente que a excentricidade da força de punçoamento foi reduzida, influenciando a capacidade de carga em 0,4% e 1,9% no modelo A e B, respetivamente, de acordo com a metodologia apresentada pela NP EN 1992-1.

Do modelo A para o modelo B verificou-se um aumento na capacidade de carga de 6,2%. No entanto, e devido à diferença quanto à resistência à compressão do betão utilizado de 61,7 MPa e

66,5 MPa do modelo A e B, respectivamente, apenas 3,6% deste aumento se deve à influência da pormenorização da armadura junto à ligação laje-pilar.

Comparando as cargas experimentais obtidas ao longo dos ensaios elaborados pelos diversos investigadores mencionados neste trabalho, com as normas e regulamentos em estudo, verifica-se que o Model Code prevê valores de resistência ao punçoamento mais próximos dos obtidos experimentalmente. No entanto, na maioria dos ensaios, estes valores não se encontram do lado da segurança. Através deste regulamento, obteve-se uma média da relação carga experimental com carga prevista de 0,933. O oposto verifica-se quanto ao ACI 318-11 e à norma NP EN 1992-1, que estimam maioritariamente valores de resistência ao punçoamento inferiores aos experimentais, apresentando 1,214 e 1,183 de média, respectivamente, estando assim do lado da segurança.

### 5.3. RECOMENDAÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

De acordo com a investigação desenvolvida, seguem-se possíveis trabalhos futuros, que visam aprofundar o tema abordado:

- Alterar a disposição da armadura longitudinal, concentrando mais armadura junto à zona de formação do cone de punçoamento (entre  $1,25$  e  $2,7d$  da face do pilar);
- Variar a resistência à compressão do betão utilizado;
- Estudar a concentração de armadura no caso de pilares de bordo e de canto;
- Desenvolver um estudo numérico que determine eficazmente a influência da concentração de armadura longitudinal.



## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] ACI Committee 318, Commentary on Building Code Requirements for Structural Concrete, ACI 318-63, Publication SP10, American Concrete Institute, Detroit, 1965.
- [2] ACI Committee 318, Building Code Requirements Concrete, (ACI 318-71) and Commentary (ACI 318R-05), American Concrete Institute, Detroit, MI, 1971
- [3] ACI Committee 426, 1974, “The Shear Strength of Reinforced Concrete Members – Slabs,” Proceedings, ASCE, V.100, No. ST8, pp. 1543-1591.
- [4] ACI Committee 318.M-11 Building Code Requirements for Structural Concrete & Commentary, American Concrete Institute, Farmington Hills, 2011.
- [5] ACI 445 Punching Shear Collected Databank
- [6] Alexander, S. D. B., Simmonds, S. H.: “*Bond model for punching strength of slab-column connections*”, 1991.
- [7] Alexander, S. D. B., Simmonds, S. H.: “*Tests of Column-Flat Plate Connections*”, ACI Structural Journal, September/October, 1992.
- [8] Boverkets handbook om betongkonstruktioner, BBK 79, Boverket, Karlskrona, Sweden, 1979.
- [9] British Standards Institution, The structural use of concrete, London, BS 8110, 1995.
- [10] Broms, C. E.: “*Concrete flat slabs and footings. Design method for punching and detailing for ductility*”, KTH Architecture and the Built Environment, Doctoral thesis in Structural Design and Bridges, Stockholm, Sweden, 2005.
- [11] Choi, K. K., Park, H. G.: “*Shear strength of interior slab-column connections*”, Korea Concrete Institute, Proceedings of Fracture Mechanics of Concrete and Concrete Structures, May 2010, pp 23-28.
- [12] Comité Euro-International du Béton: *fib Model Code for Concrete Structures*. 1964.
- [13] Comité Euro-International du Béton: *fib Model Code for Concrete Structures*. 2010.
- [14] Comité Euro-International du Béton: *Punching of Structural concrete slabs*, Technical Report, 2001.
- [15] CSA Technical Committee, Reinforced Concrete Design, A23.3-04, Design of Concrete Structures, Rexdale, Ontario, Canadian Standards Association, 2004.
- [16] Einpaul, J., *Punching Strength of continuous Flat Slabs*, Thèse EPFL n° 6928, Lausanne, 2016, p. 209.

- [17] Elstner, R. C., Hognestad, E.: “*Shearing Strength of Reinforced Concrete Slabs*”, Journal of the American Concrete Institute, Proceedings, V. 53, No. 1, February, 1956, pp. 29-58.
- [18] Ghannoum, M.: “*Effect of high-strength concrete in the performance of slab-column specimens*”, Department of Civil Engineering and Applied Mechanics, McGill University, Montréal, Canada, November, 1998.
- [19] Gouveia, N. D.: “*Punçamento em lajes de betão com fibras*”, Faculdade de Ciências e tecnologia, Universidade Nova de Lisboa, Monte de Caparica, Setembro, 2012.
- [20] Guandalini, S., Burdet, O. I., Muttoni, A.: “*Punching Tests of Slabs with Low Reinforcement Ratios*”, ACI Structural Journal, January/February, 2009.
- [21] Hallgren, M., Bjerke, M., “*Non-linear finite element analyses of punching shear failure of column footings*”, Cement & Concrete Composites, V. 24, 2002, No. 6, pp. 491-496.
- [22] Inácio, M., Ramos, A., Lúcio, V., Faria, D.: “*Punching of high strength concrete flat slabs experimental investigation*”, UNIC, Civil Engineering Department, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa, Monte de Caparica,
- [23] Instituto Português da Qualidade: NP EN 12390-3 – Ensaios de Betão Endurecido. Parte 3: Resistência à Compressão de Provetes de Ensaio, 2003.
- [24] Instituto Português da Qualidade: NP EN 12390-6 - Ensaios de Betão Endurecido. Parte 6: Resistência à tracção por compressão de provetes., 2003.
- [25] Instituto Português da Qualidade: NP EN 10002-1 - Materiais metálicos. Ensaio de tracção. Parte 1: Método de ensaio à temperatura ambiente, 2006.
- [26] Instituto Português da Qualidade: NP EN 206-1 - Betão. Parte 1: Especificação, desempenho, produção e conformidade, 2007.
- [27] Instituto Português da Qualidade: "NP EN 1992-1-1 Eurocódigo 2: Projecto de Estruturas de betão - Parte 1-1: Regras gerais e regras para edifícios, 2010.
- [28] Instituto Português da Qualidade: "NP EN 197-1 Métodos de ensaio de cimentos – Parte 1: Determinação das resistências mecânicas, 2012.
- [29] Jau, W. C., White, R. N., Gergely, P.: “*Behaviour of Reinforced Concrete Slabs subjected to combined Punching shear and Biaxial Tension*”, Department of Structural Engineering, Cornell University.
- [30] Kamaraldin, K.: “*Punching Shear and Moment transfer in reinforced concrete flat slabs*”, Polytechnic of Central London, November, 1990.
- [31] Kinnunen, S., Nylander, H.: “*Punching of concrete slabs without shear reinforcement*”, Transactions of the Royal Institute of Technology, No. 158, Stockholm, Sweden, 1960, pp. 112.

- [32] Kinnunen, S., Nylander, H, Tolf, P.: “*Plattjocklekens Inverkan Pa Betongplattors Hallfasthet Vid Genomstansning. Forsok Med Rektangulära Plattor*”, Institutionen for Byggnadsstatik, Kungl Tekniska Hogskolan, Stockholm, 1980.
- [33] Laboratório Nacional de Engenharia Civil - Especificação 397 LNEC: BETÕES: determinação do Módulo de Elasticidade em Compressão.
- [34] Ladner, M.: “*Einfluß der Maßstabgröße bei Durchstanzversuchen*”, Material und Technik, No. 2, 1973.
- [35] Lantsoght, E.: “*Literature review of Punching Shear in Reinforced Concrete Slabs*”, Delft University of Technology, January, 2009.
- [36] Lunt, B. G.: “*Shear Strength of Reinforced concrete Slabs at column supports*”, 1998.
- [37] Menétrey: “*Synthesis of punching failure in reinforced concrete*”, Emch & Berger AG Bern, Gartenstrasse 1, 3001 Bern, Switzerland, Cement & Concrete Composites 24, 2002, pp. 497–507.
- [38] McHarg, P. J., Cook, W. D., Mitchell, D., Yoon, Y. S.: “*Benefits of Concentrated Slab Reinforcement and Steel Fibers on Performance of Slab-Column Connections*”, ACI Structural Journal, March/April, 2000.
- [39] Moe, J.: “*Shearing Strength of Reinforced Concrete slabs and Footings under Concentrated Loads*”, Development Department, Bulletin D 47, PCA.
- [40] Mouro, V. C.: “*Punção em lajes cogumelo – Estudo da retangularidade dos pilares*”, Universidade Federal de Goiás, Escola de Engenharia Civil, Goiânia, 2006.
- [41] Muttoni, A.: “*Punching Shear Strength of Reinforced Concrete Slabs without Transverse Reinforcement*”, ACI Structural Journal, July/August, 2008.
- [42] Muttoni, A., Ruiz, M. F.: “*The levels-of-approximation approach in MC 2010: application to punching shear provisions*”, Ernst & Sohn Verlag für Architektur und technische Wissenschaften GmbH & Co. KG, Berlin Structural Concrete 13 , No. 1, 2012
- [43] Ngo, D. T.: “*Punching shear resistance of high-strength concrete slabs*”, Electronic Journal of Structural Engineering, Department of Civil and Environmental Engineering, The University of Melbourne, Parkville,, Australia, 2001.
- [44] Ospina, C. E., Birkle, G., Widiyanto: “*Databank of Concentric Punching Shear Tests of Two-way Concrete Slabs without Shear Reinforcement at Interior Supports*”, Submitted for publication in ASCE 2012 Structures Congress, Chicago, IL, Manuscript No. 642.
- [45] REBA - Regulamento de estruturas de betão armado. Decreto nº 47 723, de 30 de Maio de 1967. Lisboa: Imprensa Nacional, 1967.
- [46] REBAP: Regulamento de Estruturas de Betão Armado e Pré-Esforçado, Porto, Editora, Porto, 2006.

- [47] Regan, P. E.: *“A comparison of British and ACI 318-71, Treatments of Punching Shear”*, ACI Special Publication 42-37, pp. 881-903, Detroit, 1974.
- [48] Regan, P. E.: *“Behaviour of Reinforced Concrete Flat Slabs”*, Report 89, Construction Industry Research and Information Association (CIRIA), London, February, 1981, pp. 89.
- [49] Regan, P. E., Braestrup, M. W.: *“Punching shear in reinforced Concrete. A state of art”*, Comite Euro international Du Beton, January, 1985.
- [50] Regan, P. E.: *“Symmetric punching of reinforced concrete slabs”*, Magazine of Concrete research, Vol 18, No 136, September, 1986, pp 115-128.
- [51] Rodrigues, J. I. V.: *“Punçamento em Lajes Fungiformes Pré-esforçadas no Model Code 2010”*, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa, Monte de Caparica, Dezembro 2011.
- [52] Rodrigues, M. N. M.: *“Estudo experimental do punçamento centrado em lajes de betão leve”*, Departamento de Engenharia Civil, Instituto Superior de Engenharia de Coimbra, Coimbra, Dezembro, 2013.
- [53] Roll, S., Zaidi, S. T. H., Sabnis, G., Chuang, K.: *“Shear Resistance of Perforated Reinforced Concrete Slabs”*, 1971.
- [54] Sacramento, P. V. P., Ferreira, M. P., Oliveira, D. R. C., Melo, G. S. S. A.: *“Punching Strength of Reinforced Concrete Flat Slabs without Shear reinforcement”*, Ibracon Structures and Materials Journal, Vol. 5, No. 5, October, 2012, pp. 659-691.
- [55] Schaeffers, U.: *“Konstruktion, Bemessung und Sicherheit gegen Durchstanzen von balkenlosen Stahlbetondecken im Bereich der Innenstutzen”*, Verlag für Architektur und technische Wissenschaften, Berlin, 1984.
- [56] Swamy, R. N., Ali, S. A. R.: *“Punching Shear behavior of Reinforced Slab-Column Connections made with steel Fiber Concrete”*, ACI Journal, September/October, 1982.
- [57] Terras, R. D. R.: *“Efeito de Cargas Concentradas em Lajes de Betão Armado sem Armaduras Transversais”*, Instituto Superior técnico, Dezembro, 2013.
- [58] Theodorakopoulos, D. D., Swamy, R. N.: *“Ultimate punching shear strength analysis of slab-column Connections”*, Cement & Concrete Composites 24, 2002, pp. 509–521
- [59] Widiyanto, Bayrak, O., Jirsa, J. O.: *“Two-Way Shear Strength of Slab-Column Connections: Reexamination of ACI 318 Provisions”*, ACI Structural Journal, March/April, 2009.

## **ANEXO**

Cálculo das resistências ao punçoamento segundo as várias normas consideradas



**Tabela A.1** - Cálculo da resistência ao punçoamento segundo a norma NP EN 1992-1

Referência	Ano	$c$ [mm]	$h$ [mm]	$d$ [mm]	$u$ [m]	$\rho_x$	$\rho_y$	$\rho$	$f_{cm}$ [MPa]	$k$	$\tau_{Rd}$ [MPa]	$V_{Exp}$ [kN]	$V_{Rd}$ [kN]	$\frac{V_{Exp}}{V_{Rd}}$
<b>Modelo A</b>	2015	250,0	150,0	118,0	2,48	0,008	0,008	0,008	61,7	2	1,32	370,1	387,0	0,96
<b>Modelo B</b>	2015	250,0	150,0	118,0	2,48	0,012	0,012	0,012	66,5	2	1,55	393,1	454,2	0,87
<b>Elstner &amp; Hognestad</b>	1956	254,0	152,4	114,0	2,45	0,032	0,034	0,020	29,9	2	1,41	444,8	393,0	1,13
<b>Elstner &amp; Hognestad</b>	1956	355,6	152,4	114,0	2,85	0,029	0,031	0,020	29,7	2	1,40	489,3	457,2	1,07
<b>Kinnunen &amp; Nylander</b>	1960	150,0	153,0	120,0	1,98	0,014	0,016	0,015	32,7	2	1,32	333,4	312,5	1,07
<b>Kinnunen &amp; Nylander</b>	1960	150,0	154,0	120,0	1,98	0,014	0,016	0,015	31,6	2	1,29	331,5	307,3	1,08
<b>Kinnunen &amp; Nylander</b>	1960	300,0	151,0	120,0	2,45	0,017	0,020	0,018	30,7	2	1,38	490,3	406,7	1,21
<b>Kinnunen &amp; Nylander</b>	1960	300,0	151,0	120,0	2,45	0,018	0,020	0,019	30,7	2	1,39	539,4	408,6	1,32
<b>Kinnunen &amp; Nylander</b>	1960	300,0	150,0	120,0	2,45	0,006	0,010	0,008	28,0	2	1,02	331,5	299,8	1,11
<b>Kinnunen &amp; Nylander</b>	1960	300,0	153,0	120,0	2,45	0,006	0,010	0,008	25,5	2	0,98	331,5	288,1	1,15
<b>Moe</b>	1961	254,0	152,4	114,3	2,45	0,011	0,011	0,011	26,1	2	1,11	371,4	309,7	1,20
<b>Moe</b>	1961	254,0	152,4	114,3	2,45	0,013	0,013	0,013	22,1	2	1,10	355,9	308,5	1,15
<b>Moe</b>	1961	254,0	152,4	114,3	2,45	0,016	0,017	0,017	22,6	2	1,21	363,6	338,2	1,08
<b>Moe</b>	1961	254,0	152,4	114,3	2,45	0,016	0,017	0,017	25,4	2	1,25	378,1	351,4	1,08
<b>Moe</b>	1961	254,0	152,4	114,3	2,45	0,016	0,017	0,017	23,8	2	1,23	333,6	344,1	0,97
<b>Moe</b>	1961	254,0	152,4	114,3	2,45	0,016	0,017	0,017	35,2	2	1,40	373,7	391,8	0,95
<b>Moe</b>	1961	254,0	152,4	114,3	2,45	0,016	0,017	0,017	20,5	2	1,17	311,4	327,2	0,95
<b>Roll et al</b>	1971	101,6	61,0	45,7	0,98	0,011	0,011	0,011	32,9	2	1,19	65,4	53,5	1,22
<b>Roll et al</b>	1971	101,6	61,0	45,7	0,98	0,011	0,011	0,011	27,1	2	1,12	63,2	50,2	1,26
<b>Roll et al</b>	1971	101,6	61,0	45,7	0,98	0,011	0,011	0,011	27,1	2	1,12	60,9	50,2	1,21
<b>Roll et al</b>	1971	101,6	61,0	45,7	0,98	0,011	0,011	0,011	27,2	2	1,12	63,6	50,3	1,27

Referência	Ano	$c$ [mm]	$h$ [mm]	$d$ [mm]	$u$ [m]	$\rho_x$	$\rho_y$	$\rho$	$f_{cm}$ [MPa]	$k$	$\tau_{Rd}$ [MPa]	$V_{Exp}$ [kN]	$V_{Rd}$ [kN]	$\frac{V_{Exp}}{V_{Rd}}$
<b>Roll et al</b>	1971	101,6	61,0	45,7	0,98	0,024	0,026	0,020	29,4	2	1,40	88,2	62,8	1,41
<b>Roll et al</b>	1971	101,6	61,0	45,7	0,98	0,024	0,026	0,020	27,7	2	1,37	87,0	61,6	1,41
<b>Roll et al</b>	1971	101,6	61,0	45,7	0,98	0,015	0,015	0,015	28,4	2	1,25	67,1	56,1	1,20
<b>Roll et al</b>	1971	101,6	61,0	45,7	0,98	0,032	0,034	0,020	27,1	2	1,36	81,4	61,1	1,33
<b>Ladner</b>	1973	226,0	127,0	109,0	2,08	0,013	0,013	0,013	32,9	2	1,26	361,9	286,4	1,26
<b>Swamy &amp; Ali</b>	1982	150,0	125,0	100,0	1,86	0,006	0,006	0,006	37,4	2	1,03	221,7	191,6	1,16
<b>Schaefers</b>	1984	210,0	200,0	170,0	2,80	0,005	0,005	0,005	21,3	2	0,81	480,0	386,6	1,24
<b>Regan</b>	1986	200,0	100,0	77,0	1,77	0,018	0,020	0,019	26,8	2	1,34	194,0	182,5	1,06
<b>Regan</b>	1986	200,0	100,0	77,0	1,77	0,014	0,017	0,015	28,5	2	1,27	194,0	172,8	1,12
<b>Regan</b>	1986	200,0	100,0	79,0	1,79	0,011	0,012	0,012	29,3	2	1,17	165,0	166,1	0,99
<b>Lunt</b>	1988	250,0	165,0	143,0	2,80	0,002	0,003	0,002	25,8	2	0,67	398,0	267,3	1,49
<b>Lunt</b>	1988	250,0	130,0	108,0	2,36	0,004	0,004	0,004	29,0	2	0,82	282,0	208,5	1,35
<b>Lunt</b>	1988	250,0	135,0	110,0	2,38	0,004	0,005	0,005	24,9	2	0,81	299,0	211,6	1,41
<b>Lunt</b>	1988	250,0	130,0	110,0	2,38	0,006	0,006	0,006	25,6	2	0,90	321,0	235,0	1,37
<b>Lunt</b>	1988	250,0	130,0	110,0	2,38	0,006	0,007	0,007	24,9	2	0,91	311,0	238,9	1,30
<b>Lunt</b>	1988	250,0	130,0	110,0	2,38	0,006	0,006	0,006	27,3	2	0,92	319,0	239,9	1,33
<b>Lunt</b>	1988	250,0	130,0	110,0	2,38	0,006	0,007	0,007	24,1	2	0,90	319,0	236,5	1,35
<b>Lunt</b>	1988	250,0	130,0	110,0	2,38	0,006	0,006	0,006	24,1	2	0,88	347,0	230,3	1,51
<b>Lunt</b>	1988	250,0	130,0	110,0	2,38	0,006	0,006	0,006	22,1	2	0,85	352,2	223,8	1,57
<b>Lunt</b>	1988	250,0	130,0	110,0	2,38	0,006	0,007	0,007	24,9	2	0,91	366,0	239,2	1,53
<b>Lunt</b>	1988	250,0	130,0	110,0	2,38	0,003	0,003	0,003	22,7	2	0,68	277,0	179,1	1,55
<b>Lunt</b>	1988	250,0	130,0	108,0	2,36	0,010	0,010	0,010	21,9	2	1,00	358,0	254,0	1,41
<b>Lunt</b>	1988	250,0	130,0	110,0	2,38	0,003	0,003	0,003	21,9	2	0,68	228,0	176,9	1,29
<b>Lunt</b>	1988	175,0	130,0	110,0	2,08	0,005	0,005	0,005	23,8	2	0,82	265,0	187,3	1,41
<b>Lunt</b>	1988	175,0	130,0	110,0	2,08	0,005	0,005	0,005	23,1	2	0,81	275,0	185,6	1,48

Referência	Ano	$c$ [mm]	$h$ [mm]	$d$ [mm]	$u$ [m]	$\rho_x$	$\rho_y$	$\rho$	$f_{cm}$ [MPa]	$k$	$\tau_{Rd}$ [MPa]	$V_{Exp}$ [kN]	$V_{Rd}$ [kN]	$\frac{V_{Exp}}{V_{Rd}}$
<b>Tolf</b>	1988	125,0	120,0	100,0	1,65	0,003	0,003	0,003	27,7	2	0,72	145,0	118,7	1,22
<b>Tolf</b>	1988	125,0	120,0	100,0	1,65	0,003	0,003	0,003	26,1	2	0,70	148,0	115,6	1,28
<b>Tolf</b>	1988	250,0	240,0	200,0	3,30	0,003	0,003	0,003	26,4	2	0,70	489,0	461,2	1,06
<b>Tolf</b>	1988	250,0	240,0	200,0	3,30	0,003	0,003	0,003	25,1	2	0,69	444,0	458,0	0,97
<b>Alexander &amp; Simmonds</b>	1992	200,0	155,0	124,7	2,37	0,008	0,008	0,008	26,0	2	0,97	258,0	287,6	0,90
<b>Alexander &amp; Simmonds</b>	1992	200,0	155,0	124,7	2,37	0,010	0,010	0,010	26,0	2	1,07	319,0	316,6	1,01
<b>Hallgren</b>	1996	250,0	239,0	200,0	3,30	0,003	0,004	0,003	84,1	2	1,09	565,0	722,0	0,78
<b>Ghannoum</b>	1998	225,0	150,0	109,0	2,27	0,016	0,017	0,017	37,2	2	1,43	317,0	353,4	0,90
<b>Ghannoum</b>	1998	225,0	150,0	109,0	2,27	0,016	0,017	0,017	57,1	2	1,65	447,0	407,6	1,10
<b>Ghannoum</b>	1998	225,0	150,0	109,0	2,27	0,016	0,017	0,017	67,1	2	1,74	485,0	430,2	1,13
<b>McHarg et al</b>	2000	225,0	150,0	109,0	2,27	0,016	0,017	0,017	30,0	2	1,33	349,0	328,9	1,06
<b>Feix &amp; Schustereder</b>	2007	295,9	200,0	156,0	2,89	0,023	0,024	0,020	34,0	2	1,47	615,0	662,3	0,93
<b>Widianto et al</b>	2009	406,4	152,0	127,0	3,22	0,009	0,010	0,009	28,1	2	1,07	401,2	438,8	0,91
<b>Feix et al</b>	2012	300,0	200,0	156,0	2,90	0,019	0,023	0,020	39,2	2	1,54	612,0	697,8	0,88



**Tabela A.2 - Cálculo da resistência ao punçoamento segundo o Model Code 2010**

Referência	Ano	$c$ [mm]	$h$ [mm]	$d_{av}$ [mm]	$B$ [mm]	$\rho_{m,x}$	$\rho_{m,y}$	$\rho_{av}$	$f_{cm}$ [MPa]	$f_{cp}$ [MPa]	$\psi$	$d_g$ [mm]	$m_{av}$ [kNm]	$V_{flex}$ [kN]	$V_{exp}$ [kN]	$V_{Rd}$ [kN]	$\frac{V_{exp}}{V_{Rd}}$
<b>Modelo A</b>	2015	250,0	150,0	118,0	2200	0,008	0,008	0,008	61,7	48,5	0,030	21	54,2	392,7	370,1	392,8	0,94
<b>Modelo B</b>	2015	250,0	150,0	118,0	2200	0,008	0,008	0,008	66,5	51,0	0,032	21	54,3	393,5	393,1	393,5	1,00
<b>Elstner &amp; Hognestad</b>	1956	254,0	152,4	114,3	1829	0,020	0,030	0,025	29,9	29,9	0,020	25	90,3	738,6	444,8	738,6	0,60
<b>Elstner &amp; Hognestad</b>	1956	355,6	152,4	114,3	1829	0,020	0,030	0,025	29,7	29,7	0,022	25	90,2	799,4	489,3	795,7	0,61
<b>Kinnunen &amp; Nylander</b>	1960	150,0	153,0	121,0	1840	0,009	0,011	0,010	32,7	31,8	0,028	32	60,6	449,2	333,4	449,2	0,74
<b>Kinnunen &amp; Nylander</b>	1960	150,0	154,0	122,0	1840	0,009	0,011	0,010	31,6	31,0	0,027	32	61,4	455,1	331,5	455,4	0,73
<b>Kinnunen &amp; Nylander</b>	1960	300,0	151,0	120,0	1840	0,013	0,016	0,014	30,7	30,4	0,023	32	80,8	662,9	490,3	663,7	0,74
<b>Kinnunen &amp; Nylander</b>	1960	300,0	151,0	119,0	1840	0,013	0,016	0,015	30,7	30,4	0,022	32	82,3	675,0	539,4	675,1	0,80
<b>Kinnunen &amp; Nylander</b>	1960	300,0	150,0	120,0	1840	0,005	0,008	0,007	28,0	28,0	0,042	32	42,1	345,4	331,5	345,5	0,96
<b>Kinnunen &amp; Nylander</b>	1960	300,0	153,0	122,0	1840	0,005	0,008	0,007	25,5	25,5	0,039	32	42,5	348,1	331,5	348,4	0,95
<b>Moe</b>	1961	254,0	152,4	114,3	1829	0,011	0,012	0,011	26,1	26,1	0,038	38	45,1	369,4	371,4	369,4	1,01
<b>Moe</b>	1961	254,0	152,4	114,3	1829	0,010	0,011	0,010	22,1	22,1	0,032	38	49,4	404,3	355,9	404,5	0,88
<b>Moe</b>	1961	254,0	152,4	114,3	1829	0,010	0,011	0,010	22,6	22,6	0,032	38	49,5	405,3	363,6	405,3	0,90
<b>Moe</b>	1961	254,0	152,4	114,3	1829	0,010	0,011	0,010	25,4	25,4	0,028	38	59,4	486,0	378,1	486,0	0,78
<b>Moe</b>	1961	254,0	152,4	114,3	1829	0,010	0,011	0,010	23,8	23,8	0,033	38	49,8	407,4	333,6	407,4	0,82
<b>Moe</b>	1961	254,0	152,4	114,3	1829	0,010	0,011	0,010	35,2	33,4	0,032	38	61,0	498,8	373,7	501,0	0,75
<b>Moe</b>	1961	254,0	152,4	114,3	1829	0,010	0,011	0,010	20,5	20,5	0,026	38	57,8	473,1	311,4	473,1	0,66

Referência	Ano	$c$ [mm]	$h$ [mm]	$d_{av}$ [mm]	$B$ [mm]	$\rho_{m,x}$	$\rho_{m,y}$	$\rho_{av}$	$f_{cm}$ [MPa]	$f_{cp}$ [MPa]	$\psi$	$d_g$ [mm]	$m_{av}$ [kNm]	$V_{flex}$ [kN]	$V_{exp}$ [kN]	$V_{Rd}$ [kN]	$\frac{V_{exp}}{V_{Rd}}$
<b>Roll et al</b>	1971	101,6	61,0	45,7	737	0,011	0,012	0,011	32,9	31,9	0,076	10	8,0	65,5	65,4	65,7	1,00
<b>Roll et al</b>	1971	101,6	61,0	45,7	737	0,011	0,012	0,011	27,1	27,1	0,070	10	7,9	64,7	63,2	64,7	0,98
<b>Roll et al</b>	1971	101,6	61,0	45,7	737	0,011	0,012	0,011	27,1	27,1	0,070	10	7,9	64,7	60,9	64,7	0,94
<b>Roll et al</b>	1971	101,6	61,0	45,7	737	0,011	0,012	0,011	27,2	27,2	0,070	10	7,9	64,8	63,6	64,8	0,98
<b>Roll et al</b>	1971	101,6	61,0	45,7	737	0,023	0,028	0,026	29,4	29,4	0,035	10	16,5	136,2	88,2	136,2	0,65
<b>Roll et al</b>	1971	101,6	61,0	45,7	737	0,023	0,028	0,026	27,7	27,7	0,029	10	19,5	160,4	87,0	160,4	0,54
<b>Roll et al</b>	1971	101,6	61,0	45,7	737	0,011	0,012	0,011	28,4	28,4	0,069	10	8,2	67,5	67,1	67,5	0,99
<b>Roll et al</b>	1971	101,6	61,0	45,7	737	0,023	0,028	0,026	27,1	27,1	0,029	10	18,7	153,8	81,4	153,9	0,53
<b>Ladner</b>	1973	226,0	127,0	109,0	1400	0,011	0,012	0,011	32,9	31,9	0,022	32	65,9	594,7	361,9	596,7	0,61
<b>Swamy &amp; Ali</b>	1982	150,0	125,0	100,0	1800	0,005	0,006	0,005	37,4	34,8	0,055	10	23,4	184,4	221,7	184,9	1,20
<b>Schaefers</b>	1984	210,0	200,0	170,0	1960	0,005	0,006	0,006	21,3	21,3	0,025	32	68,0	569,3	480,0	569,6	0,84
<b>Regan</b>	1986	200,0	100,0	77,0	2000	0,011	0,014	0,012	26,8	26,8	0,031	10	31,8	263,8	194,0	264,0	0,73
<b>Regan</b>	1986	200,0	100,0	77,0	2000	0,008	0,010	0,009	28,5	28,5	0,041	10	25,2	209,2	194,0	209,2	0,93
<b>Regan</b>	1986	200,0	100,0	79,0	2000	0,007	0,008	0,008	29,3	29,3	0,050	10	21,1	175,4	165,0	175,5	0,94
<b>Lunt</b>	1988	250,0	165,0	143,0	3180	0,002	0,002	0,002	25,8	25,8	0,070	20	21,0	253,1	398,0	253,0	1,57
<b>Lunt</b>	1988	250,0	130,0	108,0	3180	0,002	0,003	0,003	29,0	29,0	0,084	20	15,8	189,8	282,0	189,7	1,49
<b>Lunt</b>	1988	250,0	135,0	110,0	3180	0,002	0,003	0,003	24,9	24,9	0,064	20	19,2	231,3	299,0	231,2	1,29
<b>Lunt</b>	1988	250,0	130,0	110,0	3180	0,003	0,004	0,003	25,6	25,6	0,049	20	25,5	306,8	321,0	306,7	1,05
<b>Lunt</b>	1988	250,0	130,0	110,0	3180	0,004	0,004	0,004	24,9	24,9	0,043	20	28,5	342,7	311,0	342,6	0,91

Referência	Ano	$c$ [mm]	$h$ [mm]	$d_{av}$ [mm]	$B$ [mm]	$\rho m_x$	$\rho m_y$	$\rho_{av}$	$f_{cm}$ [MPa]	$f_{cp}$ [MPa]	$\psi$	$d_g$ [mm]	$m_{av}$ [kNm]	$V_{flex}$ [kN]	$V_{exp}$ [kN]	$V_{Rd}$ [kN]	$\frac{V_{exp}}{V_{Rd}}$
Lunt	1988	250,0	130,0	110,0	3180	0,003	0,004	0,003	27,3	27,3	0,051	20	25,5	307,7	319,0	307,6	1,04
Lunt	1988	250,0	130,0	110,0	3180	0,004	0,004	0,004	24,1	24,1	0,043	20	28,4	342,2	319,0	342,1	0,93
Lunt	1988	250,0	130,0	110,0	3180	0,003	0,004	0,003	24,1	24,1	0,048	20	25,4	306,0	347,0	305,9	1,13
Lunt	1988	250,0	130,0	110,0	3180	0,003	0,004	0,003	22,1	22,1	0,046	20	25,3	304,7	352,2	304,6	1,16
Lunt	1988	250,0	130,0	110,0	3180	0,004	0,004	0,004	24,9	24,9	0,043	20	28,5	342,8	366,0	342,7	1,07
Lunt	1988	250,0	130,0	110,0	3180	0,002	0,003	0,003	22,7	22,7	0,061	20	19,2	231,7	277,0	231,6	1,20
Lunt	1988	250,0	130,0	108,0	3180	0,006	0,007	0,006	21,9	21,9	0,031	20	36,7	442,2	358,0	442,1	0,81
Lunt	1988	250,0	130,0	110,0	3180	0,002	0,003	0,003	21,9	21,9	0,109	20	10,6	127,9	228,0	127,9	1,78
Lunt	1988	175,0	130,0	110,0	3180	0,003	0,003	0,003	23,8	23,8	0,043	20	24,4	293,6	265,0	293,5	0,90
Lunt	1988	175,0	130,0	110,0	3180	0,003	0,003	0,003	23,1	23,1	0,043	20	24,3	293,2	275,0	293,2	0,94
Tolf	1988	125,0	120,0	98,0	1270	0,003	0,003	0,003	27,7	27,7	0,060	16	21,4	160,6	145,0	160,6	0,90
Tolf	1988	125,0	120,0	99,0	1270	0,003	0,003	0,003	26,1	26,1	0,058	16	21,4	160,2	148,0	160,2	0,92
Tolf	1988	250,0	240,0	200,0	2540	0,003	0,003	0,003	26,4	26,4	0,031	32	81,3	610,0	489,0	609,6	0,80
Tolf	1988	250,0	240,0	197,0	2540	0,003	0,003	0,003	25,1	25,1	0,031	32	79,4	595,8	444,0	596,1	0,74
Alexander & Simmonds	1992	200,0	155,0	124,7	2750	0,004	0,005	0,004	26,0	26,0	0,025	12	28,8	462,4	258,0	462,3	0,56
Alexander & Simmonds	1992	200,0	155,0	124,7	2750	0,005	0,005	0,005	26,0	26,0	0,021	12	34,2	550,7	319,0	550,2	0,58
Hallgren	1996	250,0	239,0	202,0	2540	0,003	0,003	0,003	84,1	59,6	0,057	18	79,9	592,9	565,0	592,9	0,95
Ghannoum	1998	225,0	150,0	109,0	2300	0,010	0,014	0,012	37,2	34,6	0,034	20	59,0	456,3	317,0	456,2	0,69
Ghannoum	1998	225,0	150,0	109,0	2300	0,010	0,014	0,012	57,1	46,1	0,041	20	60,2	467,3	447,0	467,6	0,96
Ghannoum	1998	225,0	150,0	109,0	2300	0,010	0,014	0,012	67,1	51,3	0,036	10	60,6	470,7	485,0	471,0	1,03

Referência	Ano	$c$ [mm]	$h$ [mm]	$d_{av}$ [mm]	$B$ [mm]	$\rho_{m,x}$	$\rho_{m,y}$	$\rho_{av}$	$f_{cm}$ [MPa]	$f_{cp}$ [MPa]	$\psi$	$d_g$ [mm]	$m_{av}$ [kNm]	$V_{flex}$ [kN]	$V_{exp}$ [kN]	$V_{Rd}$ [kN]	$\frac{V_{exp}}{V_{Rd}}$
McHarg et al	2000	225,0	150,0	109,0	2300	0,005	0,006	0,006	30,0	30,0	0,068	20	27,8	204,3	349,0	204,3	1,71
Widianto et al	2009	406,4	152,0	127,0	4267	0,005	0,005	0,005	28,1	28,1	0,068	20	31,6	312,0	401,2	312,0	1,29

**Tabela A.3 - Cálculo da resistência ao punçoamento segundo o ACI 318-11**

Referência	Ano	$c$ [mm]	$h$ [mm]	$b_0$ [mm]	$d$ [mm]	$f_{cm}$ [MPa]	$\lambda$	$\alpha_s$	$V_{c1}$	$V_{c2}$	$V_{c3}$	$V_{exp}$	$V_{Rd}$	$\frac{V_{exp}}{V_{Rd}}$
<b>Modelo A</b>	2015	250,0	150,0	1472,0	118,0	61,7	1	40	695,8	589,6	450,2	370,1	450,2	0,82
<b>Modelo B</b>	2015	250,0	150,0	1472,0	118,0	66,5	1	40	722,4	612,1	467,4	393,1	467,4	0,84
<b>Elstner &amp; Hognestad</b>	1956	254,0	152,4	1472,0	114,0	29,9	1	40	468,0	388,2	302,8	444,8	302,8	1,47
<b>Elstner &amp; Hognestad</b>	1956	355,6	152,4	1878,4	114,0	29,7	1	40	595,2	428,9	385,1	489,3	385,1	1,27
<b>Kinnunen &amp; Nylander</b>	1960	150,0	153,0	1080,0	120,0	32,7	1	40	378,0	396,4	244,6	333,4	244,6	1,36
<b>Kinnunen &amp; Nylander</b>	1960	150,0	154,0	1080,0	120,0	31,6	1	40	371,3	389,4	240,3	331,5	240,3	1,38
<b>Kinnunen &amp; Nylander</b>	1960	300,0	151,0	1680,0	120,0	30,7	1	40	569,3	450,0	368,4	490,3	368,4	1,33
<b>Kinnunen &amp; Nylander</b>	1960	300,0	151,0	1680,0	120,0	30,7	1	40	569,3	450,0	368,4	539,4	368,4	1,46
<b>Kinnunen &amp; Nylander</b>	1960	300,0	150,0	1680,0	120,0	28,0	1	40	543,8	429,8	351,9	331,5	351,9	0,94
<b>Kinnunen &amp; Nylander</b>	1960	300,0	153,0	1680,0	120,0	25,5	1	40	519,5	410,6	336,1	331,5	336,1	0,99
<b>Moe</b>	1961	254,0	152,4	1473,2	114,3	26,1	1	40	438,4	364,1	283,7	371,4	283,7	1,31
<b>Moe</b>	1961	254,0	152,4	1473,2	114,3	22,1	1	40	403,4	335,0	261,0	355,9	261,0	1,36
<b>Moe</b>	1961	254,0	152,4	1473,2	114,3	22,6	1	40	408,4	339,2	264,3	363,6	264,3	1,38
<b>Moe</b>	1961	254,0	152,4	1473,2	114,3	25,4	1	40	432,6	359,3	279,9	378,1	279,9	1,35
<b>Moe</b>	1961	254,0	152,4	1473,2	114,3	23,8	1	40	419,1	348,1	271,2	333,6	271,2	1,23
<b>Moe</b>	1961	254,0	152,4	1473,2	114,3	35,2	1	40	509,2	423,0	329,5	373,7	329,5	1,13
<b>Moe</b>	1961	254,0	152,4	1473,2	114,3	20,5	1	40	388,6	322,8	251,5	311,4	251,5	1,24
<b>Roll et al</b>	1971	101,6	61,0	589,3	45,7	32,9	1	40	78,8	65,4	51,0	65,4	51,0	1,28
<b>Roll et al</b>	1971	101,6	61,0	589,3	45,7	27,1	1	40	71,5	59,4	46,3	63,2	46,3	1,37
<b>Roll et al</b>	1971	101,6	61,0	589,3	45,7	27,1	1	40	71,5	59,4	46,3	60,9	46,3	1,32
<b>Roll et al</b>	1971	101,6	61,0	589,3	45,7	27,2	1	40	71,7	59,5	46,4	63,6	46,4	1,37

Referência	Ano	$c$ [mm]	$h$ [mm]	$b_0$ [mm]	$d$ [mm]	$f_{cm}$ [MPa]	$\lambda$	$\alpha_s$	$V_{c1}$	$V_{c2}$	$V_{c3}$	$V_{exp}$	$V_{Rd}$	$\frac{V_{exp}}{V_{Rd}}$
Roll et al	1971	101,6	61,0	589,3	45,7	29,4	1	40	74,5	61,9	48,2	88,2	48,2	1,83
Roll et al	1971	101,6	61,0	589,3	45,7	27,7	1	40	72,3	60,1	46,8	87,0	46,8	1,86
Roll et al	1971	101,6	61,0	589,3	45,7	28,4	1	40	73,3	60,8	47,4	67,1	47,4	1,42
Roll et al	1971	101,6	61,0	589,3	45,7	27,1	1	40	71,6	59,4	46,3	81,4	46,3	1,76
Ladner	1973	226,0	127,0	1340,0	109,0	32,9	1	40	427,6	365,6	276,7	361,9	276,7	1,31
Swamy & Ali	1982	150,0	125,0	1000,0	100,0	37,4	1	40	311,9	304,6	201,8	221,7	201,8	1,10
Schaefers	1984	210,0	200,0	1520,0	170,0	21,3	1	40	608,2	640,8	393,5	480,0	393,5	1,22
Regan	1986	200,0	100,0	1108,0	77,0	26,8	1	40	225,2	175,1	145,7	194,0	145,7	1,33
Regan	1986	200,0	100,0	1108,0	77,0	28,5	1	40	232,4	180,8	150,4	194,0	150,4	1,29
Regan	1986	200,0	100,0	1116,0	79,0	29,3	1	40	243,3	191,3	157,4	165,0	157,4	1,05
Lunt	1988	250,0	165,0	1572,0	143,0	25,8	1	40	582,1	534,2	376,6	398,0	376,6	1,06
Lunt	1988	250,0	130,0	1432,0	108,0	29,0	1	40	424,9	346,9	274,9	282,0	274,9	1,03
Lunt	1988	250,0	135,0	1440,0	110,0	24,9	1	40	403,5	332,0	261,1	299,0	261,1	1,15
Lunt	1988	250,0	130,0	1440,0	110,0	25,6	1	40	408,8	336,4	264,5	321,0	264,5	1,21
Lunt	1988	250,0	130,0	1440,0	110,0	24,9	1	40	402,8	331,4	260,6	311,0	260,6	1,19
Lunt	1988	250,0	130,0	1440,0	110,0	27,3	1	40	421,9	347,1	273,0	319,0	273,0	1,17
Lunt	1988	250,0	130,0	1440,0	110,0	24,1	1	40	396,7	326,4	256,7	319,0	256,7	1,24
Lunt	1988	250,0	130,0	1440,0	110,0	24,1	1	40	396,7	326,4	256,7	347,0	256,7	1,35
Lunt	1988	250,0	130,0	1440,0	110,0	22,1	1	40	379,9	312,6	245,8	352,2	245,8	1,43
Lunt	1988	250,0	130,0	1440,0	110,0	24,9	1	40	403,5	332,0	261,1	366,0	261,1	1,40
Lunt	1988	250,0	130,0	1440,0	110,0	22,7	1	40	384,9	316,7	249,1	277,0	249,1	1,11
Lunt	1988	250,0	130,0	1432,0	108,0	21,9	1	40	368,9	301,2	238,7	358,0	238,7	1,50
Lunt	1988	250,0	130,0	1440,0	110,0	21,9	1	40	377,8	310,8	244,5	228,0	244,5	0,93
Lunt	1988	175,0	130,0	1140,0	110,0	23,8	1	40	311,9	297,4	201,8	265,0	201,8	1,31
Lunt	1988	175,0	130,0	1140,0	110,0	23,1	1	40	307,5	293,2	199,0	275,0	199,0	1,38

<b>Referência</b>	<b>Ano</b>	<b>c [mm]</b>	<b>h [mm]</b>	<b>b<sub>0</sub>[mm]</b>	<b>d [mm]</b>	<b>f<sub>cm</sub>[MPa]</b>	<b>λ</b>	<b>αs</b>	<b>V<sub>c1</sub></b>	<b>V<sub>c2</sub></b>	<b>V<sub>c3</sub></b>	<b>V<sub>exp</sub></b>	<b>V<sub>Rd</sub></b>	<b><math>\frac{V_{exp}}{V_{Rd}}</math></b>
<b>Tolf</b>	1988	125,0	120,0	900,0	100,0	27,7	1	40	241,5	253,3	156,3	145,0	156,3	0,93
<b>Tolf</b>	1988	125,0	120,0	900,0	100,0	26,1	1	40	234,5	246,0	151,8	148,0	151,8	0,98
<b>Tolf</b>	1988	250,0	240,0	1800,0	200,0	26,4	1	40	942,7	988,7	610,0	489,0	610,0	0,80
<b>Tolf</b>	1988	250,0	240,0	1800,0	200,0	25,1	1	40	920,1	965,0	595,3	444,0	595,3	0,75
<b>Alexander &amp; Simmonds</b>	1992	200,0	155,0	1298,9	124,7	26,0	1	40	421,3	400,4	272,6	258,0	272,6	0,95
<b>Alexander &amp; Simmonds</b>	1992	200,0	155,0	1298,9	124,7	26,0	1	40	421,3	400,4	272,6	319,0	272,6	1,17
<b>Hallgren</b>	1996	250,0	239,0	1800,0	200,0	84,1	1	40	1683,7	1765,9	1089,5	565,0	1089,5	0,52
<b>Ghannoum</b>	1998	225,0	150,0	1336,2	109,0	37,2	1	40	453,2	388,3	293,3	317,0	293,3	1,08
<b>Ghannoum</b>	1998	225,0	150,0	1336,2	109,0	57,1	1	40	561,5	481,1	363,3	447,0	363,3	1,23
<b>Ghannoum</b>	1998	225,0	150,0	1336,2	109,0	67,1	1	40	608,7	521,5	393,9	485,0	393,9	1,23
<b>McHarg et al</b>	2000	225,0	150,0	1336,2	109,0	30,0	1	40	407,0	348,7	263,3	349,0	263,3	1,33
<b>Feix &amp; Schustereder</b>	2007	295,9	200,0	1807,6	156,0	34,0	1	40	838,2	743,7	542,4	615,0	542,4	1,13
<b>Widianto et al</b>	2009	406,4	152,0	2133,6	127,0	28,1	1	40	732,6	522,3	474,0	401,2	474,0	0,85
<b>Feix et al</b>	2012	300,0	200,0	1824,0	156,0	39,2	1	40	908,7	801,7	588,0	612,0	588,0	1,04