



GESTÃO ÓPTIMA DE RECURSOS  
NATURAIS NÃO RENOVÁVEIS

M. Rodrigues da Costa

Working Paper nº 14 /A

Universidade Nova de Lisboa  
Faculdade de Economia  
Campo Grande, 185  
1 700 LISBOA

Março, 1984

## GESTÃO ÓPTIMA DE RECURSOS NATURAIS NÃO RENOVÁVEIS (\*)

M. Rodrigues da Costa

### Resumo

No presente documento faz-se um resumo, ainda que incompleto e desenvolvendo apenas modelos simples com indicação de possíveis extensões, da literatura relativa à gestão óptima de recursos naturais não renováveis.

Esta gestão, traduzida na trajectória óptima de quantidades e/ou preços, é caracterizada para os casos em que o recurso constitui um bem de consumo ou um factor de produção, numa economia fechada e numa economia aberta. É também caracterizada a trajectória óptima relativa à actividade de prospecção — que permite conhecer melhor as reservas disponíveis e/ou os custos de extração — e à actividade de investigação de substitutos.

---

(\*) Este documento foi elaborado no âmbito do curso de "Optimização e Análise Económica II" ministrado no 1º semestre do ano lectivo 1982/83 e fazendo parte do Programa de Mestrado (Doutoramento) desta Faculdade

## 1 - INTRODUÇÃO

A literatura existente sobre a utilização racional (óptima) de recursos naturais renováveis é já bastante extensa traduzindo o interesse e a importância do tema e as inúmeras questões envolvidas.

Torna-se assim difícil a elaboração de um resumo dessa literatura que seja suficientemente exaustivo mas não muito extenso.

Assim, no presente trabalho abordaremos apenas algumas questões, conscientes de que as não abordadas são tanto ou mais importantes do que aquelas.

No capítulo 2 consideraremos uma economia (sem produção) que possui um recurso não renovável em quantidade limitada e que constitui um bem de consumo de pois de extraído. Determinaremos a taxa óptima de extracção deste recurso. No capítulo 3 admitiremos ser possível conhecer melhor a reserva de recurso e os custos de extracção através duma actividade de prospecção, determinando conjuntamente as trajectórias óptimas de extracção (consumo) e prospecção.

Sendo grande parte dos recursos naturais não renováveis utilizados como factores de produção e não como bens de consumo, consideraremos no capítulo 4 uma economia com produção. Neste contexto tem sido afirmado que a existência de recursos naturais não renováveis em quantidade limitada constitui um limite ao crescimento da economia e até da própria população. Mostraremos que esse limite poderá não existir em face do progresso tecnológico, da possibilidade de substituição dos recursos naturais por outros factores de produção e de rendimentos de escala.

No capítulo 5 permitiremos que a economia detentora de um recurso natural não renovável possa ter trocas com o resto do mundo. Mostraremos que essa possibi

lidade de troca permite separar, total ou parcialmente, as trajectórias de consumo e de extracção do recurso. Em certas circunstâncias, a trajectória de depleção óptima é, inclusivamente, independente da taxa de desconto e dos parâmetros característicos da função de utilidade social.

Mas, a escassez crescente de um recurso não renovável, traduzido numa subida de preço induz, naturalmente, a procura de substitutos que, ainda que mais caros, sejam abundantes. No capítulo 6 abordaremos esta questão, ainda que de forma bastante incompleta.

## 2 - ECONOMIA SEM PRODUÇÃO

2.1- Consideremos uma economia dispondo de um recurso natural não renovável em quantidade finita  $S_0$ . Admitamos que este recurso contribui para uma função de utilidade social como fluxo, isto é, que a geração de utilidade social só é possível com uma redução da quantidade de recurso disponível.

Seja  $q_t$  o consumo do recurso no instante  $t$  e  $U(q_t)$  a utilidade social associada a este consumo. Admitamos que a função  $U(.)$  é monotonamente crescente, estritamente côncava e duplamente diferenciável.

Sendo  $\delta$  a taxa de desconto, o problema do decisor será determinar a trajetória de consumo que maximize o fluxo actualizado de  $U(.)$  estando condicionado pela quantidade finita  $S_0$  de recurso. Admitindo um horizonte temporal infinito, vem (1):

$$\max \int_0^{\infty} e^{-\delta t} U(q_t) dt$$

s.a.

$$\dot{S} = -q$$

$$S_0 > 0, \text{ dado}$$

$$S, q \geq 0$$

A Lagrangeana deste problema é:

$$H = e^{-\delta t} U(q) - \lambda q + \mu S$$

conduzindo às seguintes condições necessárias (e suficientes dada a concavidade da Hamiltoneana):

$$U'(q) e^{-\delta t} = \lambda \quad \text{se } q > 0 \quad \dots (2.1)$$

$$\leq \lambda \quad \text{se } q = 0 \quad \dots (2.2)$$

$$\dot{\lambda} = 0 \quad \dots (2.3)$$

$$\mu S = 0 \quad \dots (2.4)$$

Admitindo que:

$$\lim_{q \rightarrow 0} U'(q) = \infty \quad \dots (2.5)$$

o consumo será estritamente positivo, anulando-se assintoticamente. O stock será esgotado progressivamente, anulando-se assintoticamente.

A equação (2.1) traduz a arbitragem entre o presente e o futuro, indicando que a trajectória de consumo óptima deverá ser tal que a utilidade marginal actualizada é igual em todos os instantes.

Esta afectação socialmente óptima será garantida, em certas condições, por um mercado competitivo. Neste caso, sendo  $p$  o preço de recurso, virá:

$$\begin{aligned} p &= U'(q) = \lambda e^{\delta t} \\ \dot{p}/p &= \delta \end{aligned} \quad \dots (2.6)$$

O preço do recurso crescerá exponencialmente a uma taxa igual à taxa de desconto. Sendo esta igual à taxa de rentabilidade da economia, a equação (2.6) diz-nos que um stock de recurso ainda não utilizado proporciona ao seu proprietário uma rentabilidade idêntica à que obteria se este vendesse o stock de recurso e investisse noutro activo. É o resultado fundamental de Hotelling (1931).

As equações (2.1) e (2.3) indicam que o consumo decrescerá ao longo do tempo, com um consumo inicial determinado de acordo com o stock inicial  $S_0$ .

Diferenciando a equação:

$$\int_0^{\infty} q \, dt = S_0 \quad \dots (2.7)$$

e tendo em atenção (2.1), pode constatar-se que:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial S_0} < 0 \quad \dots (2.8)$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \delta} < 0 \quad \dots (2.9)$$

Assim, a uma taxa de desconto mais baixa corresponderá uma política mais conservacionista com um preço inicial mais elevado e um consumo inicial mais baixo. O preço crescerá a uma taxa menor enquanto que o consumo decrescerá também a uma taxa menor:

$$\frac{\dot{q}}{q} = - \frac{\delta}{\eta(q)} \quad \dots (2.10)$$

$$\eta(q) = - q U''(q) / U'(q)$$

A uma reserva inicial mais elevada corresponderá uma política menos conservacionista, resultado que está de acordo com a intuição.

2.2- Considerando uma economia competitiva, admitamos que a extracção do recurso tem um custo médio constante  $c$ . O problema do proprietário do stock  $S_0$  será:

$$\max \int_0^{\infty} e^{-\delta t} [pq - cq] dt$$

s.a.

$$\dot{S} = -q$$

$$S_0 > 0, \text{ dado}$$

$$S, q \geq 0$$

Continuando a admitir que a utilidade social marginal tende para infinito quando o consumo tende para zero, o consumo será estritamente positivo anulando-se assintoticamente. Quanto ao preço, virá:

$$p = c + \lambda e^{\delta t} \quad \dots (2.11)$$

Isto é, o preço do recurso não extraído,  $\lambda e^{\delta t}$ , continuará, como no caso com custos de extracção nulos, a crescer exponencialmente a uma taxa  $\delta$ . Já o preço do recurso extraído crescerá a uma taxa variável menor que  $\delta$ :

$$\frac{\dot{p}}{p} = \delta - \frac{\delta c}{p} \quad \dots (2.12)$$

As equações (2.11) e (2.12) mostram que se o stock inicial  $S_0$  for elevado (conduzindo a um valor de  $\lambda$  baixo) o preço do recurso extraído será praticamente igual ao custo marginal de extracção nos primeiros tempos. O recurso comportar-se-á como um produto convencional cujo custo de produção é  $C$ . Com o decorrer do tempo a escassez do recurso far-se-á sentir mais acentuadamente e o custo da produção (extracção) deixará de dominar no preço do recurso extraído. A parcela relativa à renda ("royalty") passará a dominar, aproximando a taxa de crescimento do preço da taxa de desconto (em Dasgupta e Heal (1979) poderá ser encontrada uma análise mais rigorosa para o caso de uma procura iso-elástica).

- 2.3- Se o recurso for propriedade dum monopolista, não será o preço do recurso extraído menos o custo marginal de extracção que crescerá a uma taxa  $\delta$  mas a diferença entre a receita marginal e o custo marginal de extracção.

Em Stiglitz (1976) é comparada a taxa de extracção em mercado competitivo com a do monopolista maximizador do lucro, concluindo-se que é igual se a elasticidade da procura em relação ao preço for constante e os custos de extracção nulos. Nos outros casos o monopolista poderá ser mais conservacionista (Stiglitz (1976)) mas situações há que pode ser menos (Lewis, Matthews, Burness (1979)).

- 2.4- Continuando ainda a considerar uma economia sem produção em que o recurso extraído constitui um bem de consumo, o modelo apresentado pode ser generalizado. Assim, no capítulo 3 consideraremos a possibilidade de aumentar as reservas (ou reduzir a incerteza) através duma actividade de prospecção.

Recentemente os modelos apresentados têm incorporado incerteza. Assim, Loury (1978) e Gilbert (1979) consideram a reserva disponível como uma variável aleatória, enquanto que Weinstein e Zeckhauser (1975) e Pindyck (1981) consideram a procura futura do recurso aleatória. Deshmukh e Pliska (1983) consideram aleatoriedade simultaneamente no lado da oferta e da procura, formulando o problema como um processo de acumulação de Markov, e ilustrando com exemplos interessantes.

No capítulo 6 consideraremos o aparecimento de um substituto, analisando a transição de uma economia com um recurso não renovável para uma economia



com um recurso (substituto) renovável.

Finalmente, é de referir o trabalho de Hartwick (1978) onde é considerada a exploração ótima de um conjunto de depósitos com custos de extracção diferentes. Uma análise resumida pode também ser encontrada em Dasgupta e Heal (1979) (cap.6, secção 4).

### 3 - CONSUMO E PROSPECÇÃO

3.1- Consideremos uma economia competitiva com um recurso natural não renovável. Admitamos que através de uma actividade de prospecção é possível aumentar a reserva conhecida do recurso.

Seguindo o modelo apresentado por Pindyck (1978), admitamos que o decisor controla o esforço de prospecção,  $\omega$ , e o recurso extraído,  $q$ . Em resposta ao esforço de prospecção a reserva conhecida,  $R$ , sofre um acréscimo  $\dot{x} = f(\omega, x)$ , dependente desse esforço e do valor acumulado,  $x$ , dos sucessivos acréscimos. Admitamos que  $f_\omega > 0$  e  $f_{\omega\omega} < 0$ , isto é, que o resultado da prospecção embora crescente com o esforço vai-se tornando menos rentável. Consideremos que o custo de prospecção,  $C_2(\cdot)$ , apresenta  $C_2'(\omega) > 0$  e  $C_2''(\omega) \geq 0$ . Admitamos, ainda, que o custo marginal da prospecção  $C_2'(\cdot)/f_\omega$  cresce com  $\omega$ .

No que se refere ao custo médio de extracção, consideremo-lo dependente da reserva conhecida:  $C_1(R)$ . Admitamos que  $C_1'(R) < 0$  e que  $C_1(R) \rightarrow \infty$  quando  $R \rightarrow 0$ .

O problema do produtor é, então:

$$\max \int_0^\infty \left[ qp - C_1(R) q - C_2(\omega) \right] e^{-\delta t} dt$$

s.a.

$$\dot{R} = \dot{x} - q \quad \dots (3.1)$$

$$\dot{x} = f(\omega, x) \quad \dots (3.2)$$

$$R, q, \omega, x > 0$$

A Hamiltoneana deste problema é:

$$H = qp e^{-\delta t} - C_1(R) q e^{-\delta t} - C_2(\omega) e^{-\delta t} + \\ + \lambda_1 \left[ f(\omega, x) - q \right] + \lambda_2 f(\omega, x)$$

conduzindo às seguintes condições necessárias (e suficientes dada a concavidade da Hamiltoniana) para a política ótima:

$$p e^{-\delta t} - C_1(R) e^{-\delta t} - \lambda_1 = 0 \quad \text{se } q > 0 \quad \dots (3.3)$$

$$\leq 0 \quad \text{se } q = 0 \quad \dots (3.4)$$

$$C_2'(\omega) e^{-\delta t} - (\lambda_1 + \lambda_2) f_\omega = 0 \quad \text{se } \omega > 0 \quad \dots (3.5)$$

$$\leq 0 \quad \text{se } \omega = 0 \quad \dots (3.6)$$

$$\dot{\lambda}_1 = C_1'(R) q e^{-\delta t} \quad \dots (3.7)$$

$$\dot{\lambda}_2 = -(\lambda_1 + \lambda_2) f_x \quad \dots (3.8)$$

Derivando (3.3) em ordem ao tempo e substituindo (3.1) e (3.7) vem:

$$\frac{\dot{p}}{p} = \delta - \frac{\delta C_1(R)}{p} + \frac{C_1'(R) f(\omega, x)}{p} \quad \dots (3.9)$$

Comparando esta equação com (2.12) constata-se que o preço decresce mais lentamente do que no caso em que não há prospecção (2). Se  $C_1'(R) = 0$  a taxa de variação do preço não é alterada pela prospecção mas o nível de preço continua a sê-lo.

A equação (3.9) pode ser escrita:

$$p - C_1(R) = \frac{1}{\delta} \left[ \dot{p} - C_1'(R) f(\omega, x) \right] \quad \dots (3.10)$$

Esta equação diz-nos que, numa política ótima, o lucro marginal resultante da extracção e venda do recurso (preço menos custo marginal de extracção) deve ser igual ao lucro marginal actualizado associado à manutenção do recurso (valorização do preço mais redução do custo marginal de extracção).

Substituindo (3.3) em (3.5), vem:

$$\lambda_2 = \frac{C_2'(\omega)}{f_\omega} e^{-\delta t} - \left[ p - C_1(R) \right] e^{-\delta t} \quad \dots (3.11)$$

Esta equação diz-nos que o custo sombra associado à reserva descoberta (como resultado da prospecção) deve ser igual ao custo marginal de descoberta menos o lucro marginal respectivo (preço menos custo marginal de extracção).

Derivando (3.11) em ordem ao tempo e substituindo  $\dot{\lambda}_2$  pela expressão que resulta de (3.8), (3.10) e (3.11), vem :

$$\dot{\omega} = \frac{C_2'(\omega) \left[ (f_{\omega x}/f_{\omega}) \cdot f - f_x + \delta \right] + C_1'(R) q f_{\omega}}{C_2''(\omega) - C_2'(\omega) \frac{f_{\omega\omega}}{f_{\omega}}} \quad \dots (3.12)$$

Das equações (3.9) e (3.12) é possível concluir que no caso de  $C_2'(0)/f_{\omega}(0)$  ser nulo, a extracção e a prospecção anulam-se no mesmo instante. Já se  $C_2'(0)/f_{\omega}(0) = \phi > 0$ , a prospecção anular-se-á antes da extracção.

Em Pindyck (1978) são analisadas as trajectórias óptimas correspondentes a diversas situações. Tem interesse referir que poderão ocorrer situações em que o preço do recurso cresce, como nos modelos anteriores, mas também poderão ocorrer casos em que o preço decresce inicialmente e depois volta a crescer (trajectória em U). Tem também interesse referir que no caso de  $f_x = 0$ , isto é, no caso da produtividade da prospecção não decrescer com os resultados, ser possível um estado estacionário de longo prazo com  $\dot{x} = q$ .

3.2- No já citado trabalho de Pindyck (1978) é também analisado o caso dum monopolista, obtendo-se:

$$\dot{RM} = \delta \cdot RM - \delta C_1(R) + C_1'(R) f(\omega, x) \quad \dots (3.13)$$

onde:

$$RM = p + p'(q) q \quad \dots (3.14)$$

é a receita marginal.

Tal como no caso do equilíbrio competitivo, se os custos de extracção forem independentes do valor da reserva conhecida ( $C_1=0$ ), obtêm-se um resultado análogo ao obtido por Hotelling (1931) – receita marginal menos custo marginal de extracção crescendo exponencialmente a uma taxa igual à taxa de desconto.

- 3.3- O modelo apresentado é susceptível de generalizações. Assim, em Pindyck (1980) é considerada uma aleatoriedade no processo de descoberta. O processo estocástico adoptado é um processo de Ito:

$$\dot{x} = f(\omega, x, \theta) \quad \dots (3.15)$$

$$d\theta = \sigma(\theta) dz = \sigma(\theta) \epsilon(t) \sqrt{dt} \quad \dots (3.16)$$

Esta aleatoriedade não influencia o valor esperado da taxa de variação do preço mas altera a trajectória esperada do preço aumentando-a (reduzindo-a) se a produtividade física marginal da prospecção for uma função convexa (côncava) do parâmetro  $\theta$ . Não altera essa trajectória se for uma função linear.

No que se refere à dinâmica esperada do esforço de prospecção, também não é alterada se a função de descoberta for linear no parâmetro  $\theta$ . Reduzirá (aumentará) o valor esperado da taxa de variação do esforço de prospecção e reduzirá (aumentará) o nível inicial desse esforço se a produtividade física marginal da prospecção for uma função convexa (côncava) do parâmetro  $\theta$ .

Deshmukhe e Pliska (1980) consideram também como estocástico o resultado do esforço de prospecção. Consideram, no entanto, um processo estocástico diferente. Designadamente, consideram um processo de Markov. O esforço de exploração óptimo é não crescente com o nível de recurso e a contribuição marginal do recurso (preço sombra) cresce, em valor esperado, à taxa social de desconto.

- 3.4- Mas, a actividade de prospecção poderá ser destinada não (ou não só) a aumentar a reserva conhecida mas a conhecer melhor o valor dessa reserva redu-

zindo a incerteza. Em Pindyck (1980) é considerada esta alternativa.

A actividade de prospecção poderá também ser exercida para obter informação sobre custos de extracção.

#### 4 - ECONOMIA COM PRODUÇÃO

4.1- Grande parte dos recursos naturais não renováveis não são bens de consumo mas factores de produção pelo que tem interesse analisar uma economia com produção.

Tem sido afirmado que a existência de recursos naturais em quantidade limitada constitui um limite para o crescimento da economia e até da própria população. Recordemos, por exemplo, as discussões no tempo de Malthus em que o recurso em causa era a terra e as discussões recentes a propósito da escassez do petróleo.

Nas secções seguintes mostraremos que as limitações impostas por esses recursos naturais poderão ser compensadas pelo progresso tecnológico, pela substituição dos recursos naturais por outros factores de produção e por rendimentos de escala.

4.2- Consideremos o modelo apresentado por Garg e Sweeney (1978) que segue de perto o apresentado por Stiglitz (1974a). Assim, seja uma economia (fechada) descrita por uma função de produção de Cobb-Douglas em que os factores de produção são o capital  $K$ , o trabalho  $L$  e o recurso natural não renovável  $R$ . Admitamos que essa função apresenta um progresso tecnológico neutro com uma taxa  $\tau$ :

$$Y = A e^{+\tau t} K^\alpha R^\beta L^{1-\alpha-\beta} \quad \dots (4.1)$$

O produto  $Y$  poderá ser consumido ou investido e o capital sofre uma depreciação:

$$Y = C + \dot{K} + \mu K \quad \dots (4.2)$$

onde  $C$  é o consumo e  $\mu$  a taxa de depreciação do capital.

O stock inicial do recurso é conhecido e não consideraremos a hipótese de adições ao stock através da actividade de prospecção. Assim, em qualquer instante:

$$\dot{S} = -R \quad \dots (4.3)$$

Admitamos que o factor de produção trabalho cresce exponencialmente a uma taxa  $n$ :

$$\dot{L}/L = n \quad \dots (4.4)$$

Exprimamos todas as variáveis em valores per capita. Assim, das equações (4.1), (4.2) e (4.4) vem:

$$\dot{k} = A e^{\tau t} k^{\alpha} r^{\beta} - (\mu + n) k - c \quad \dots (4.5)$$

Das equações (4.3) e (4.4) vem:

$$\dot{s} = - (r + ns) \quad \dots (4.6)$$

Sendo  $\delta$  a taxa de desconto, seja  $W$  a função de bem-estar a maximizar:

$$W = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} L u(c) dt \quad \dots (4.7)$$

Tendo em atenção que o factor de produção trabalho cresce exponencialmente e admitindo um valor inicial  $L_0 = 1$ , vem:

$$W = \int_0^{\infty} e^{-(\delta-n)t} u(c) dt \quad \dots (4.8)$$

Admitamos que a função de utilidade  $u(c)$  apresenta uma elasticidade consumo da utilidade marginal,  $\sigma$ , constante, isto é:

$$u(c) = \frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma} \quad \dots (4.9)$$

A trajectória óptima desta economia será a resultante da maximização de  $W$  sujeita às equações de estado (4.5) e (4.6), às condições iniciais  $k(0)$  e  $s(0)$  e às condições de não negatividade de  $c$ ,  $r$ ,  $k$ ,  $s$ .

Trata-se de um problema de controlo óptimo com variáveis de controlo  $c$ ,  $r$  e de estado  $k$ ,  $s$ . A Hamiltoneana corrente é:



$$H = u(c) + \lambda_k \left[ y - c - (\mu + n) k \right] - \lambda_s (r + ns) \quad \dots (4.10)$$

As condições necessárias de 1ª ordem são:

$$\begin{aligned} u'(c) - \lambda_k &= 0 & \text{se } c > 0 \\ &\leq 0 & \text{se } c = 0 \end{aligned} \quad \dots (4.11)$$

$$\begin{aligned} \lambda_k \frac{\partial y}{\partial r} - \lambda_s &= 0 & \text{se } r > 0 \\ &\leq 0 & \text{se } r = 0 \end{aligned} \quad \dots (4.12)$$

$$\dot{\lambda}_k = \lambda_k \left[ (\mu + \delta) - \frac{\partial y}{\partial k} \right] \quad \dots (4.13)$$

$$\dot{\lambda}_s = \delta \lambda_s \quad \text{ou} \quad \lambda_s(t) = \lambda_s(0) e^{\delta t} \quad \dots (4.14)$$

Estas condições são suficientes se, para além das concavidades de  $u$  e de  $y$  já impostas, se verificar:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left( -\frac{K}{Y} \right) R = \lim_{t \rightarrow \infty} S = 0 \quad \dots (4.15)$$

Por outro lado, porque  $\lim y_k = \infty$  quando  $r \rightarrow 0$  e porque  $\lim u'(c) = \infty$  quando  $c \rightarrow 0$ , o consumo será estritamente positivo o mesmo acontecendo ao fluxo de recurso utilizado.

Derivando (4.12) em ordem ao tempo e substituindo (4.12), (4.13) e (4.14) vem:

$$\frac{\dot{y}r}{yr} = y_k - \mu \quad \dots (4.16)$$

Esta equação é a condição de eficiência convencional, indicando que a trajetória ótima deverá apresentar taxas de rentabilidade do recurso em stock e do capital iguais (se  $c, r > 0$ ).

A equação (4.11) indica que ao longo da trajectória óptima o preço sombra da acumulação de capital é simplesmente igual à utilidade marginal de consumo acrescido por trabalhador.

A equação (4.14) indica que o preço sombra da manutenção do stock de recurso deve crescer exponencialmente a uma taxa igual à taxa de desconto  $\delta$ .

4.3- Das equações (4.5), (4.6), (4.11) a (4.14) é possível concluir:

$$\frac{\dot{k}}{k} = A e^{-\tau t} k^{\alpha-1} r^{\beta} - (\mu + n) - \frac{c}{k} \quad \dots (4.17)$$

$$\frac{\dot{s}}{s} = - \left( \frac{r}{s} + n \right) \quad \dots (4.18)$$

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\sigma} \left[ \alpha A e^{-\tau t} k^{\alpha-1} r^{\beta} - (\mu + \delta) \right] \quad \dots (4.19)$$

$$\frac{\dot{r}}{r} = \frac{1}{1-\beta} \left[ \alpha \frac{\dot{k}}{k} - \sigma \frac{\dot{c}}{c} + \tau - \delta \right] \quad \dots (4.20)$$

Este sistema de equações admite uma solução com as variáveis  $k$ ,  $s$ ,  $c$ ,  $r$  crescendo exponencialmente. A taxa de crescimento das variáveis  $k$ ,  $c$  deverá ser igual:

$$\gamma_k = \gamma_c = \gamma_y = \frac{-\delta\beta + \tau}{1 - \alpha - \beta + \sigma\beta} \quad \dots (4.21)$$

Da equação (4.21) pode concluir-se que esta economia, ainda que dispondo dum recurso natural não renovável em quantidade finita e essencial à produção, pode sustentar um crescimento contínuo do consumo per capita desde que a taxa de progresso tecnológico seja superior ao produto da taxa de desconto pelo "share" do capital.

Da equação (4.18) conclui-se que neste estado estacionário o quociente entre o fluxo de recurso consumido na produção e o stock de recurso se mantém constante e igual a  $-\gamma_s - n$ .

Das equações (4.1), (4.16), (4.20) e (4.21) obtém-se:

$$\gamma_k - \mu = \delta + \sigma \gamma_k \quad \dots (4.23)$$

Mostrando que neste estado estacionário a taxa de rentabilidade (do capital e do recurso em stock) é maior (menor) que a taxa de desconto se a economia estiver em expansão (declínio).

4.4 - As taxas de crescimento (no estado estacionário) são tanto maiores quanto maior for a taxa de progresso tecnológico, o que está de acordo com a intuição económica. Por outro lado, são tanto menores quanto maior for a taxa de desconto.

No que se refere à influência da elasticidade consumo da utilidade marginal,  $\sigma$ , nas taxas de crescimento, constata-se que um valor maior de  $\sigma$  decresce (se positivas) estas taxas.

4.5- Como foi referido, se existir um estado estacionário o quociente entre o fluxo do recurso usado na produção e o stock do recurso é constante e igual a  $-(\gamma_s + n)$ , obrigando a que só exista estado estacionário se:  $\gamma_s + n \geq 0$ .

Mas a existência dum estado estacionário não garante que a trajectória ótima convirja para esse estado a partir de quaisquer dotações iniciais de capital e recurso. Garg e Sweeney (1978) demonstram que no modelo considerado essa convergência se verifica. As dotações iniciais não influenciam as taxas de expansão de longo prazo da economia mas têm influência nos níveis de actividade económica.

4.6- O modelo apresentado constitui um caso simples em que não há incerteza, a economia está fechada ao comércio com o resto do mundo, existe um único bem de consumo, a depreciação do capital é proporcional ao capital, os factores de produção são homogêneos, o factor trabalho cresce exponencialmente a uma taxa fixada exogenamente. A função de produção considerada é do tipo Cobb-Douglas, isto é, todos os factores de produção são essenciais e as elasticidades de substituição são unitárias. Foram determinadas a política e as trajectórias óptimas do ponto de vista "utilitariano" tendo sido adoptada uma função de utilidade particular apresentando uma utilidade marginal com uma elasticidade do consumo constante.

A análise pode, pois, ser estendida considerando uma economia aberta, vários sectores de produção, economias de escala, etc. No capítulo seguinte abordaremos o caso da economia aberta.

## 5 - ECONOMIA ABERTA

5.1 - Consideremos uma economia aberta dispondo dum recurso natural não renovável em quantidade finita. Sendo permitido o comércio com o resto do mundo, o recurso natural pode ser usado na produção doméstica ou exportado. As divisas geradas pela exportação poderão ser usadas para importar capital (ou bem de consumo) ou para comprar activos estrangeiros.

Adoptando o modelo de Dasgupta, Eastwood e Heal (1978), consideremos que as possibilidades de produção doméstica são descritas por:

$$Y = F(K, R, t) \quad \dots (5.1)$$

onde  $K$  é o stock de capital doméstico e  $R$  o fluxo de recurso natural usado na produção doméstica. Por não considerarmos explicitamente outros factores de produção, nomeadamente o trabalho, admitiremos que  $F(\dots)$  apresenta rendimentos decrescentes em  $K$  e  $R$ .

Seja  $E$  o fluxo de recurso exportado e  $P(E)$  o respectivo preço (f.o.b. e em moeda nacional). Sendo  $S$  o stock de recurso disponível, vem:

$$\dot{S} = - (R + E) \quad \dots (5.2)$$

O stock inicial,  $S_0$ , é conhecido e não consideraremos a possibilidade de adições em resultado duma actividade de prospecção.

O stock de activos da economia,  $W$ , é constituído pelo stock de capital,  $K$ , e pelo stock  $(W - K)$  de activos estrangeiros com uma taxa de rentabilidade  $r$ . Admitamos que o capital é maleável, isto é, pode ser transformado instantaneamente e sem custos em activos estrangeiros e vice-versa.

Assim:

$$\dot{W} = F(K, R, t) - C + P(E) E + r (W - K) \quad \dots (5.3)$$

Sendo  $\delta$  a taxa de desconto, seja  $WF$  a função de bem-estar social a otimizar:

$$WF = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} U(C) dt \quad \dots (5.4)$$

A função de utilidade  $U(\cdot)$  é estritamente côncava e  $U \rightarrow \infty$  quando  $C \rightarrow 0$ .

A trajectória ótima desta economia será a resultante da maximização de WF sujeita às equações de estado (5.2) e (5.3), às condições iniciais  $S_0, W_0$  e às condições de não negatividade de  $C, R, W, S$ .

Trata-se de um problema de controlo ótimo com variáveis de controlo  $C, E, R, K$  e de estado  $W, S$ . A Hamiltoneana corrente  $\bar{e}$ , pois:

$$H = U(C) + \lambda_W [F(K, R, t) - C + P(E)E + r(W-K)] - \lambda_S (R+E) \quad \dots (5.5)$$

As condições necessárias de primeira ordem são:

$$U'(C) = \lambda_W \quad \dots (5.6)$$

$$\lambda_W \frac{d}{dE} [P(E)E] = \lambda_S \quad \dots (5.7)$$

$$\begin{aligned} \lambda_W F_R &= \lambda_S & \text{se } R > 0 \\ &\leq \lambda_S & \text{se } R = 0 \end{aligned} \quad \dots (5.8)$$

$$\begin{aligned} F_K &= r & \text{se } K > 0 \\ &\leq r & \text{se } K = 0 \end{aligned} \quad \dots (5.9)$$

$$\dot{\lambda}_W = (\delta - r) \lambda_W, \quad \lambda_W = \lambda_{W0} e^{(\delta - r)t} \quad \dots (5.10)$$

$$\dot{\lambda}_S = \delta \lambda_S, \quad \lambda_S = \lambda_{S0} e^{\delta t} \quad \dots (5.11)$$

De referir que se verifica sempre a igualdade em (5.6) porque o consumo é estritamente positivo devido ao comportamento da função de utilidade quando o consumo tende para zero. No que se refere a (5.7) também se verifica sempre a igualdade porque não foram consideradas restrições a  $E$ .

Admitindo que os dois factores de produção  $K$  e  $R$  são essenciais, isto é, que  $F(0, R) = F(K, 0) = 0$ , se um destes factores for estritamente positivo o outro também o é.

Considerando o caso em que  $R$  é estritamente positivo, das equações (5.7) e (5.8) vem:

$$\frac{d}{dE} P(E) E = F_R \quad \dots (5.12)$$

Esta equação traduz uma condição de eficiência estática e indica que ao longo da trajectória ótima, se o fluxo R for estritamente positivo, a produtividade marginal do recurso deve ser igual à receita marginal de exportação.

Considerando K e R estritamente positivos, das equações (5.8), (5.9), (5.10) e (5.11) vem:

$$F_K = \dot{F}_R / F_R = r \quad \dots (5.13)$$

Esta equação traduz uma condição de eficiência dinâmica e indica que ao longo da trajectória ótima, se o stock de capital K e o fluxo de recurso R forem positivos, as taxas de rentabilidade dos três activos da economia - capital doméstico, recurso e activo estrangeiro - são iguais.

Seja  $\sigma$  a elasticidade de consumo da utilidade marginal:

$$\sigma = -U''/CU' \quad \dots (5.14)$$

Das equações (5.6) e (5.10) vem:

$$\dot{C}/C = (\delta - r)/\sigma \quad \dots (5.15)$$

$$\dot{U}'U' = -(r - \delta) \quad \dots (5.16)$$

Esta última equação indica que ao longo duma trajectória ótima, a utilidade marginal deve decair a uma taxa igual à taxa de rentabilidade líquida.

5.2 - Prosseguindo na análise desta economia, adoptemos formas específicas para as relações funcionais. Assim, consideremos uma função de utilidade  $U(C)$  com uma elasticidade da utilidade marginal,  $\sigma$ , constante:

$$U(C) = \frac{C^{1-\sigma}}{1-\sigma} \quad \dots (5.17)$$

No que se refere à função de produção caracterizemo-la com um progresso tecnológico neutro e elasticidade do produto relativamente aos factores constantes:

$$F(K, R, t) = e^{\gamma t} K^\alpha R^\beta, \quad \alpha + \beta < 1 \quad \dots (5.18)$$

Quanto à procura do recurso pelo resto do mundo, admitamos que apresenta uma elasticidade preço,  $-1/\xi$ , constante:

$$P(E) = (1 + \xi) E^\xi \quad \dots (5.19)$$

Designando por  $\gamma_x$  a taxa de crescimento (exponencial) da variável  $x$ , vem:

$$\gamma_c = (\delta - r) / \sigma \quad \dots (5.20)$$

$$\gamma_{FR} = r \quad \dots (5.21)$$

$$\gamma_e = r / \xi \quad \dots (5.22)$$

$$\gamma_r = [\tau - (1 - \alpha) r] / [1 - \alpha - \beta] \quad \dots (5.23)$$

$$\gamma_K = [\tau - \beta r] / [1 - \alpha - \beta] \quad \dots (5.24)$$

A existência dum stock limitado de recurso e a "impossibilidade" (não admitida matematicamente no modelo mas que parece razoável) de importar sem limites conduz a que  $R > 0$  só se  $\dot{R} < 0$ . De (5.3) vem:

$$R > 0 \rightarrow \dot{R} < 0 \rightarrow \tau < (1 - \alpha) r \quad \dots (5.25)$$

Se  $\tau > (1 - \alpha) r$ , a única trajectória possível é  $K = R = 0$ , parecendo ilógico que uma elevada taxa de progresso tecnológico conduza a um fecho da economia doméstica. Dasgupta, Eastwood e Heal (1978) admitem, que neste caso não haja óptimo.

5.3 - A característica mais saliente dos resultados constantes das equações (5.20) a (5.25) é a independência da extracção do recurso (para produção e exportação) dos parâmetros da função objectivo (taxa de desconto e elasticidade da utilidade marginal). A introdução da possibilidade de troca com o resto do mundo permitiu separar o consumo da extracção do recurso. Por outro lado a taxa de juro dos activos estrangeiros foi fixada exogenamente pelo que as condições de eficiência (5.13) determinam a evolução dos activos domésticos (capital e recurso).

5.4 - O modelo apresentado é generalizado em Dasgupta, Eastwood e Heal (1978) para o caso duma taxa de juro dos activos estrangeiros dependente do stock destes activos - desaparecendo a independência referida acima - e para o caso duma redução brusca e sustentada, em data incerta, da procura externa do recurso.

Aarrestad (1979) considera uma economia aberta dispondo dum stock dum recurso natural não renovável em quantidade limitada não utilizado na produção doméstica e que pode



ser exportado. As divisas resultantes desta exportação poderão ser utilizadas para adquirir activos estrangeiros e/ou financiar a importação de bens de consumo. Não existindo restrições no montante da dívida (ou excedente) externa, Aarrestad constata uma separação total entre a extracção do recurso e o consumo financiado pela exportação.

Harris (1981) considera uma pequena economia aberta com dois sectores e dois factores de produção sendo um destes um recurso não renovável. Constata uma especialização intertemporal da economia.

## 6 - TRANSIÇÃO DE RECURSO NÃO RENOVÁVEL PARA UM SUBSTITUTO RENOVÁVEL

6.1 - Nos capítulos anteriores a economia apresentava progresso tecnológico (neutro e contínuo) e possibilidade de substituição de recurso por capital. Neste capítulo consideraremos o aparecimento dum substituto para o recurso natural. Nomeadamente, estamos interessados em analisar a transição de um recurso com custos de extracção baixos mas em quantidade limitada para um recurso com custos mais elevados mas abundante.

6.2 - Consideremos uma economia dispondo dum recurso não renovável em quantidade finita. So cuja extracção é feita com um custo médio constante  $C_1$ . Admitamos que a tecnologia da economia permite a produção de um substituto a um preço  $C_2$ . Suponhamos ainda que a economia já tem acesso a essa tecnologia, não existindo restrições de capacidade na produção do substituto.

Sendo  $q_1$  e  $q_2$  as quantidades de recurso e do seu substituto consumidas seja  $U(q_1+q_2)$  a utilidade gerada por esse consumo. Sendo  $\delta$  a taxa de desconto, o problema do decisor será definir a trajectória  $q_1$  e  $q_2$  que maximize a soma actualizada das utilidades. Formalmente:

$$\max_{s.a.} \int_0^{\infty} e^{-\delta t} [U(q_1+q_2) - C_1 q_1 - C_2 q_2] dt$$

$$\dot{S} = -q_1$$

$$q_1, q_2, S > 0$$

A Hamiltoneana corrente deste problema de controlo ótimo é, pois:

$$H = U(q_1+q_2) - C_1 q_1 - C_2 q_2 - \lambda_5 q_1 + \alpha S \quad \dots (6.1)$$

As condições necessárias de 1ª ordem são:

$$\begin{aligned} U'(\cdot) - C1 &= \lambda_S & \text{se } q1 > 0 \\ &\leq \lambda_S & \text{se } q1 = 0 \end{aligned} \quad \dots (6.2)$$

$$\begin{aligned} U'(\cdot) - C2 &= 0 & \text{se } q2 > 0 \\ &< 0 & \text{se } q2 = 0 \end{aligned} \quad \dots (6.3)$$

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_S - \delta \lambda_S &= 0 & \text{se } S > 0 \\ &= -\alpha & \text{se } S = 0 \end{aligned} \quad \dots (6.4)$$

Impondo à função de utilidade uma convexidade estrita e  $U'(\cdot) \rightarrow \infty$  quando  $(q1+q2) \rightarrow 0$ , necessariamente  $q1+q2 > 0$ .

Consideremos uma trajectória com uma extracção do recurso até ao seu esgotamento numa primeira fase e utilização posterior do substituto:

1ª fase

$$U' = C1 + \lambda_{S0} e^{-\delta t} \leq C2 \quad \dots (6.5)$$

$$\int_0^T q1 \, dt = S0 \quad \dots (6.6)$$

2ª fase

$$U' = C2 \quad \dots (6.7)$$

Esta trajectória satisfaz as condições necessárias. Como a Hamiltoneana é estritamente côncava nas variáveis de controlo a solução constitui o único ótimo.

A economia em causa esgotará o recurso antes de produzir o substituto. O custo de produção deste constitui um limite superior ao preço de mercado do recurso. Uma tecnologia com estas características foi denominada por Nordhaus "backstop technology".

6.3 - Em Dasgupta e Stiglitz (1981) este modelo é estendido considerando que a tecnologia ainda não está disponível só sendo "inventada" numa data  $T^*$ . Sendo conhecida esta data a trajectória ótima apresentará 3 fases: (a) pré-invenção (utilização do recurso), (b) pós-invenção e pré-inovação (tecnologia já disponível mas continuação da utilização do recurso), (c) pro-inovação (recurso esgotado e utilização da nova tecnologia. A fase (b) pode não ocorrer e a economia passar directamente da fase (a) à fase (c) com uma descontinuidade no preço.

Ainda em Dasgupta e Stiglitz (1981) é considerada a hipótese da data da "invenção" ser aleatória. A trajectória ótima apresenta também 3 fases com uma descontinuidade

do preço na data da invenção.

Dasgupta e Heal (1974) consideram também o aparecimento em data incerta dum substituto no contexto duma economia com produção (recurso usado como factor de produção e não como bem de consumo).

Hoel (1978) analisa o caso do aparecimento de um substituto em data certa mas com custo incerto.

6.4 - Farzin (1982) considera que a economia já dispõe da tecnologia que permite produzir o substituto mas admite que o custo de extracção do recurso e o custo de produção do substituto dependem da taxa de rentabilidade (custo) do capital, suposta igual à taxa de desconto. Como no modelo da secção (6.2), a renda do recurso natural crescerá a uma taxa igual à taxa de rentabilidade do capital e o recurso será utilizado até ao seu esgotamento total.

Analisando a influência da variação das variáveis exógenas (taxa de desconto, stock inicial do recurso), Farzin conclui que no que se refere à taxa de desconto uma diminuição desta não conduz, como é vulgarmente aceite, a uma maior conservação do recurso. A influência da variação da taxa de desconto depende das exigências com capital da tecnologia de extracção e da tecnologia de produção do substituto e do tamanho do stock de recurso.

Ainda em Farzin (1982) é feita uma análise da influência de rendimentos de escala na produção do substituto. Verificando-se rendimentos de escala crescentes existirá um intervalo de tempo em que o preço do recurso excederá o custo marginal de produção do substituto não sendo este produzido durante esse intervalo de tempo.

6.5 - Mas, a data de aparecimento do substituto pode ser uma variável controlada pelo esforço dedicado à investigação e desenvolvimento, ainda que incerta.

Dasgupta, Heal e Majumdar (1976) e Dasgupta, Gilbert e Stiglitz (1982) determinam a despesa ótima em I&D. Neste último trabalho a ênfase é na influência da organização industrial na I&D.

## 7 - NOTAS FINAIS

7.1 - Como foi referido na introdução, as questões envolvidas na definição da política ótima de utilização de recursos naturais não renováveis são em grande número impossibilitando a sua análise na totalidade e com o mínimo de profundidade num trabalho não muito longo. Assim, optámos por seleccionar apenas algumas questões cientes

de que deixámos de lado questões bastante importantes.

Tentando colmatar um pouco estas lacunas, referiremos sumariamente mais alguns problemas associados à utilização óptima dos recursos.

7.2 - A exploração dos recursos naturais é influenciada pela estrutura de mercado do lado da oferta, nomeadamente se o recurso apresentar características de propriedade comum (com externalidades de produção ainda que se concedam direitos exclusivos de exploração). A análise teórica desta influência da estrutura de mercado tem sido objecto de esforço considerável - Weinstein e Zeckhauser (1975), Stiglitz (1976), Sweeney (1976), Aivassian e Callen (1979), Lewis, Mathews e Burness (1979), Tullock (1979), Lee (1980), Lewis e Schmalensee (1980), Ulph e Folie (1980), Stiglitz e Dasgupta (1981), etc.

Também como referido, a estrutura de mercado influencia o esforço dedicado à investigação e desenvolvimento - Dasgupta (1981), Dasgupta, Gilbert e Stiglitz (1982).

Intimamente ligada com estas questões encontra-se a definição da regulação óptima - Conrad e Hool (1981), etc.

7.3 - Os recursos considerados nos capítulos anteriores são não duráveis pois só produzem utilidade como fluxo, isto é, desde que uma unidade de recurso tenha sido consumida, gerando utilidade, não poderá produzir mais utilidade.

Mas, há recursos duráveis cuja utilidade é função do stock - ouro, prata, diamantes, outros metais preciosos, etc. A determinação da utilização óptima destes recursos tem sido objecto de análise por vários autores - Stewart (1980), Levhari e Pindyck (1981), etc.

7.4 - Finalmente, uma referência a uma questão que diz respeito não apenas à utilização de recursos naturais não renováveis mas de qualquer recurso por várias gerações.

Trata-se da equidade entre gerações. No presente trabalho, considerámos uma função de utilidade, uma taxa de desconto e maximizámos um integral de utilidades presentes e futuras actualizadas. Com este procedimento obtivemos o rateio óptimo entre gerações. Mas, procedimentos alternativos poderão e têm sido adoptados.

## NOTAS

(1) - Neste documento adoptamos a seguinte notação:

$$\dot{x}_t = dx_t/dt$$

$$f'(x) = df/dx$$

$$g_x(x,y) = \partial g/\partial x$$

Por facilidade e sempre que não cause confusão, retiraremos o subscrito t em variáveis dependentes do tempo.

(2) - Embora a equação (2.12) se reporte ao caso em que o custo médio de extracção é constante, obtém-se uma equação idêntica se o custo depender da reserva.

- Aarrestad, Jostein (1979). "Resource Extraction, Financial Transactions and Consumption in an Open Economy". *Scandinavian Journal of Economics*, pp 552 - 65.
- Aivazian, Varouj A. e Callen, Jeffrey L. (1979). "A Note on the Economics of Exhaustible Resources". *Canadian Journal of Economics*, XII, n 1, pp 83 - 89.
- Conrad, Robert e Hool, Bryce (1981). "Resource Taxation with Heterogeneous Quality and Endogeneous Reserves". *Journal of Public Economics*, 16, pp 17 - 33.
- Dasgupta, Partha (1981). "Resource Pricing and Technological Innovations under Oligopoly: A Theoretical Exploration". *Scandinavian Journal of Economics*, pp 290 - 317.
- Dasgupta, Partha e Eastwood, Robert e Heal, Geoffrey (1978). "Resource Management in a Trading Economy". IMSSS Working Paper n° 65. Também publicado no *Quarterly Journal of Economics*.
- Dasgupta, Partha e Gilbert, Richard J. e Stiglitz, Joseph (1982). "Invention and Innovation under Alternative Market Structures: The Case of Natural Resources". *Review of Economic Studies*, XLIX, pp 567 - 82.
- Dasgupta, Partha e Heal, Geoffrey (1974). "The Optimal Depletion of Exhaustible Resources". *The Review of Economic Studies Symposium on the Economics of Exhaustible Resources*, 41, pp 3 - 29.
- (1979). "Economic Theory and Exhaustible Resources". Cambridge University Press.
- Dasgupta, Partha e Heal, Geoffrey e Majumbar, Muku (1976). "Resource Depletion and Research and Development". SEER Technical Report n. 18. Também publicado em *Frontiers of Quantitative Economics*, Vol.III B, editado por M. Intrilligator. Amsterdam: North Holland Publications.

- Dasgupta, Partha e Stiglitz, Joseph (1981). "Resource Depletion under Technological Uncertainty". *Econometrica*, Vol. 49, nº 1, pp 85 - 104.
- Deshmukh, Sudhakar e Pliska, Stanley R. (1980). "Optimal Consumption of Nonrenewable Resources under Uncertainty". *Econometrica*, Vol. 48, nº1, pp 177 - 200.
- (1983) "Optimal Consumption of a Nonrenewable Resource with Stochastic Discoveries and a Random Environment". *Review of Economic Studies* L, pp 543 - 54.
- Farzin, Yeganeh Hossein (1982) - "The Effect of Discount Rate and Substitute Technology on Depletion of Exhaustible Resources". *World Bank Staff Working Papers* nº 516.
- Fisher, Anthony C. e Krutilla, John V. (1975). "Resource Conservation, Environmental Preservation, and the Rate of Discount". *The Quarterly Journal of Economics*, 89, pp 358 - 70.
- Garg, Prem e Sweeney, J. (1978). "Optimal Growth with Depletable Resources". *Resources and Energy* 1, pp 43 - 56.
- Gilbert, Richard J. (1979). "Optimal Depletion of an Uncertain Stock". *Review of Economic Studies*, 46, pp 47 - 57.
- Harris, Richard (1981). "Trade and Depletable Resources: The Small Open Economy". *Canadian Journal of Economics*, XIV, nº4, pp 649 - 64.
- Hartwick, John M. (1978). "Exploitation of Many Deposits of an Exhaustible Resource". *Econometrica*, Vol. 46, nº 1, pp 201 - 17.
- Heal, Geoffrey (1976). "The Relationship Between Price and Extraction Cost for a Resource with a Backstop Technology". *SEER Technical Report* nº 15. Também publicado no *Bell Journal of Economics*, Vol 1, nº 2, pp 317 - 78.
- Hoel, Michael (1978b). "Resource Extraction when a Future Substitute has an Uncertain Cost". *The Review of Economic Studies*, October, pp 637 - 44.

- Hotelling, Harold (1931). "The Economics of Exhaustible Resources". The Journal of Political Economy, Vol. 39, nº2, pp 137 - 75.
- Lee, Dwigh R. (1980). "Economics of Depletable Resources and Price Ceiling Induced Bias". Review of Economic Studies, XLVII, pp 999 - 1002.
- Levhari, David e Pindyck, Robert S. (1981). "The Pricing of Durable Exhaustible Resources". The Quarterly Journal of Economics, Vol. XCVI, nº 3, pp 365 - 77.
- Lewis, Tracy R. e Matthews, Steven A. e Burness, H. Stuart (1979). "Monopoly and The Rate of Extraction of Exhaustible Resources: Note". American Economic Review, Vol. 69, nº1, pp 227 - 30.
- Lewis, Tracy R. e Schmalensee, Richard (1980). "On Oligopolistic Markets for Nonrenewable Natural Resources". The Quarterly Journal of Economics, Vol. XCV, nº 4 pp 475 - 91.
- Loury, Glenn C. (1978). "The Optimal Exploitation of an Unknown Reserve". The Review of Economic Studies, October, pp 621 - 36.
- Peterson, Frederick M. e Fisher, Anthony C. (1977). "The Exploitation of Extractive Resources. A Survey". The Economic Journal, 87, pp 681 - 721.
- Pindyck, Robert S. (1978). "The Optimal Exploration and Production of Nonrenewable Resources". Journal of Political Economy, Vol. 86 nº 5, pp 841 - 61.
- (1980). "Uncertainty and Exhaustible Resource Markets". Journal of Political Economy, Vol. 88, nº 6, pp 1203 - 25.
- (1981). "The Optimal Production of an Exhaustible Resource when Price is Exogenous and Stochastic". Scandinavian Journal of Economics, 1981, pp 277 - 88.
- Solow, Robert M. (1974). "The Economics of Resources or the Resources of Economics". American Review, Papers and Proceedings, Richard T. Ely Lecture, pp 1 - 14.



- Stewart, Marion B. (1980). "Monopoly and the Intertemporal Production of a Durable Extractable Resource". *The Quarterly Journal of Economics*, XCIV, nº 1, pp 97 - 111.
- Stiglitz, Joseph (1974a). "Growth with Exhaustible Natural Resources: Efficient and Optimal Growth Paths". *The Review of Economic Studies Symposium*, pp 123 - 37.
- (1974b). "Growth with Exhaustible Natural Resources: The Competitive Economy". *The Review of Economic Studies Symposium*, pp 139 - 52.
- (1976). "Monopoly and the Rate of Extraction of Exhaustible Resources". IMSSS Technical Report nº 169, Stanford University. Também publicado na *American Economic Review*, Vol. 66 nº 4, pp 655 - 61.
- Stiglitz, Joseph E. e Dasgupta, Partha (1981). "Market Structure and Resource Extraction under Uncertainty". *Scandinavian Journal of Economics*, 1981, pp 318 - 33.
- Sweeney, James L. (1976). "Economics of Depletable Resources: Market Forces and Intertemporal Bias". SEER Technical Report nº 6. Também publicado no *Review of Economic Studies*, 44 (1977), pp 125 - 42.
- Tullock, Gordon (1979). "Monopoly and the Rate of Extraction of Exhaustible Resources: Note". *American Economic Review*, Vol. 69, nº 1, pp 231 - 33.
- Ulph, A. M. e Folie, G. M. (1980). "Exhaustible Resources and Cartels: an Intertemporal Nash-Cournot Model". *Canadian Journal of Economics*, XIII, nº 4, pp 645 - 58.
- Weinstein, Milton C. e Zeckhauser Richard J. (1975). "The Optimal Consumption of Depletable Natural Resources". *The Quarterly Journal of Economics*, Vol LXXXIX, pp 371 - 92.