



NOVA
NOVA SCHOOL OF
SCIENCE & TECHNOLOGY

DEPARTAMENTO DE
ENGENHARIA MECÂNICA E INDUSTRIAL

ANTÓNIO LEAL GUERREIRO CARNEIRO
Licenciado em Ciências da Engenharia Mecânica

OTIMIZAÇÃO DE TOPOLOGIA DE ESTRUTURAS NÃO LINEARES

MESTRADO INTEGRADO EM ENGENHARIA MECÂNICA
Universidade NOVA de Lisboa
setembro, 2022



OTIMIZAÇÃO DE TOPOLOGIA DE ESTRUTURAS NÃO LINEARES

ANTÓNIO LEAL GUERREIRO CARNEIRO

Licenciado em Ciências da Engenharia Mecânica

Orientador: Prof. Doutor João Mário Burguete Botelho Cardoso
Professor Auxiliar, Universidade NOVA de Lisboa

Otimização de Topologia de Estruturas Não Lineares

Copyright © António Leal Guerreiro Carneiro, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade NOVA de Lisboa.

A Faculdade de Ciências e Tecnologia e a Universidade NOVA de Lisboa têm o direito, perpétuo e sem limites geográficos, de arquivar e publicar esta dissertação através de exemplares impressos reproduzidos em papel ou de forma digital, ou por qualquer outro meio conhecido ou que venha a ser inventado, e de a divulgar através de repositórios científicos e de admitir a sua cópia e distribuição com objetivos educacionais ou de investigação, não comerciais, desde que seja dado crédito ao autor e editor.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente gostava de agradecer ao meu orientador, Professor João Cardoso por me dar a oportunidade de continuar aquele que é um pouco do seu trabalho e por confiar em mim para abordar este tema. O apoio, empenho, total disponibilidade, esclarecimentos e conselhos do Professor foram essenciais para a conclusão com sucesso desta dissertação assim como do prévio percurso académico.

Gostava também de agradecer à grande instituição que é a FCT NOVA e a todos os departamentos, especialmente ao DEMI, e professores com os quais tive o privilégio de me cruzar e que possibilitaram o meu desenvolvimento.

Aos meus pais, o meu mais sincero obrigado, pelo tempo investido, pela confiança na minha pessoa, pelos conselhos e pela constante preocupação com o meu futuro. Agradeço por serem os principais responsáveis das minhas conquistas e da minha motivação assim como os meus maiores exemplos de sucesso!

Ao meu irmão pelos momentos de descontração e alegria e por me acompanhar sempre em todas as minhas etapas, motivando-me sempre a perseguir os meus sonhos sem medos.

Aos meus avós por acreditarem nas minhas capacidades e por me motivarem a nunca desistir nos momentos difíceis.

Por fim gostava de agradecer a todos os meus amigos, quer de infância, quer aqueles que, felizmente, conheci na faculdade. Foram essenciais para que estes 5 anos tenham sido repletos de alegrias e de momentos que não esquecerei. Um agradecimento especial à Maria Albuquerque, ao Ricardo Reis e ao Dinis Seia que para além de amigos se tornaram numa segunda família que acompanhou todo o meu percurso académico.

Obrigado a todos!

“Once you stop learning you start dying.” (Einstein).

RESUMO

A presente dissertação surge no seguimento do trabalho realizado por Ana Silva em dissertação de mestrado [1] na qual validou o programa PROAES_NL, tendo-lhe adicionado o cálculo de sensibilidades não lineares.

O principal objetivo consiste na criação de uma metodologia que realize a otimização de topologia de treliças usando o conceito de *Ground Structure* e considerando a possibilidade de encurvadura.

Esta temática é muito interessante, uma vez que o desenvolvimento desta metodologia com sucesso permite aproximar a fase de otimização da fase de fabrico.

É crucial ter em consideração, durante o projeto, o fenómeno da encurvadura pois o mesmo leva a grandes deslocamentos transversais e à perda de rigidez da estrutura.

Recorreu-se à análise não linear pelo método corrotacional e à imposição de imperfeições, locais e globais, de forma a não ser necessário a imposição de constrangimentos de encurvadura. Implementou-se com sucesso no programa, através da metodologia criada, a possibilidade de maximizar a força aplicada, tendo como constrangimento um valor máximo para o deslocamento num determinado nó da estrutura, definido pelo utilizador aquando do projeto.

Aplicou-se o método de Newton Raphson para controlar o valor das forças aplicadas e o *Method of Moving Asymptotes*, ou MMA, para a otimização estrutural.

Replicaram-se os exemplos apresentados no artigo tido como base da autoria de Madah e Amir [2] de acordo com a metodologia criada, e os resultados obtidos foram posteriormente comparados com os obtidos através do software de elementos finitos ANSYS, tendo-se verificado um erro pequeno entre ambos e consequentemente validado a presente metodologia.

Palavas chave: Encurvadura, Imperfeições, Otimização Topológica, Treliças, Força, Deslocamento, Constrangimento, Newton-Raphson, MMA, ANSYS

ABSTRACT

The present dissertation follows the work carried out by Ana Silva in her master's thesis [1] in which she validated the PROAES_NL program, having added the calculation of non-linear sensitivities.

The main objective consists in the creation of a methodology that successfully performs the topology optimization of trusses using the concept of *Ground Structure* and considering the possibility of buckling.

This topic is very interesting since the successful development of this methodology allows the optimization phase to get closer to the manufacturing one.

It is crucial to consider buckling phenomenon, during the project, as it leads to large transversal displacements and loss of stiffness in the structure.

Non-linear analysis using the corotational method and the imposition of local and global imperfections was used to avoid the need to impose buckling constraints. Through the created methodology, the possibility of maximizing the applied force was successfully implemented in the program, having as constraint a maximum value for displacement at a certain point of the structure, defined by the user during the project.

Newton Raphson's method was used to control the value of the forces applied and the Method of Moving Asymptotes, or MMA, used for structural optimization.

The examples presented in the article authored by Madah and Amir [2] were replicated according to the methodology created, and the results obtained were later compared with those obtained using the finite element software ANSYS, having verified a small relative error between both. Consequently, the present methodology was validated.

Keywords: Buckling, Imperfections, Topology Optimization, Trusses, Force, Displacement, Constraint, Newton-Raphson, MMA, ANSYS

ÍNDICE

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Motivação	1
1.2	Enquadramento	2
1.3	Objetivos	2
1.4	Estrutura da Dissertação	3
2	REVISÃO DE LITERATURA	5
2.1	Otimização Estrutural.....	5
2.1.1	Otimização Dimensional	6
2.1.2	Otimização de Forma.....	6
2.1.3	Otimização de Topologia	7
2.2	Formulação do Problema	8
2.3	Análise Não Linear.....	9
2.4	Método Corrotacional.....	11
2.5	Método dos Elementos Finitos	11
2.5.1	Elemento Barra.....	12
2.5.2	Elemento Viga.....	13
2.6	Método de Newton-Raphson.....	14
2.7	Ground Structure.....	15
2.8	Estabilidade	16

2.8.1	Estabilidade Local.....	18
2.8.2	Estabilidade Global	18
3	METODOLOGIA	19
3.1	PROAES.....	20
3.2	Deslocamento Máximo	21
3.3	Método de Newton-Raphson com Arco Cilíndrico.....	21
3.4	Performance de Força	23
3.5	Otimização com Método das Assintotas Móveis.....	23
3.6	Modelação da Estrutura	26
4	RESULTADOS.....	33
4.1	Sem Imperfeições (Caso A)	33
4.1.1	Comparação de resultados com ANSYS	35
4.2	Com imperfeições (Caso B)	38
4.2.1	Comparação de resultados com ANSYS	41
4.3	Otimização Topológica.....	42
4.3.1	Caso A.....	42
4.3.2	Caso B.....	44
4.4	Alterações ao ficheiro.....	45
4.4.1	Caso C	46
4.4.2	Comparação de resultados com ANSYS	48
4.4.3	Otimização Topológica (Caso C).....	50
4.5	Convergência	53
4.6	Forças	54
4.6.1	Layout 1	56
5	CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES.....	57

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1 - Estrutura da Dissertação.....	3
Figura 2 - Processo iterativo de otimização estrutural (retirado de [3])	5
Figura 3 - Exemplo de Otimização Dimensional (retirado de [10]).....	6
Figura 4 - Exemplo de Otimização de Forma (retirado de [10])	6
Figura 5 - Exemplo de Otimização de Topologia (retirado de [10]).....	7
Figura 6 - Otimização de Topologia (<i>TopOpt</i>)	8
Figura 7 - Ponte da Arrábida	8
Figura 8 - Pilar Submetido a uma Força de Compressão com Excentricidade. a) Configuração Indeformada. b) Configuração Deformada. c) Gráfico P vs δ . (Retirado de [16]).....	10
Figura 9 - Elemento Barra 2D.....	13
Figura 10 - Elemento Viga 2D.....	14
Figura 11 - Ilustração Gráfica do Método de Newton-Raphson (retirado de [23]).....	15
Figura 12 - Ground Structure. a) Nível de Conectividade 1. b) Nível de Conectividade 2. c) Conectividade Total.....	16
Figura 13 - Coluna Carregada por uma Força P e o respetivo Gráfico Força vs Deslocamento (retirado de [26]).....	17
Figura 14 - Carregamento e Encurvadura de Vigas com Diferentes Condições Fronteira (adaptado de [27])	17
Figura 15 - Instabilidade Local (adaptado de [28])	18
Figura 16 - Instabilidade Global (adaptado de [28]).....	18
Figura 17 - Implementação do Deslocamento Máximo em Código.....	21
Figura 18 - Ilustração do Método de Newton-Raphson com Arco Cilíndrico.....	22
Figura 19 - Implementação do Código com Controlo de Deslocamento.....	22
Figura 20 - Implementação da Performance Força	23
Figura 21 - Exemplo de Valores de Inicialização	24
Figura 22 - Código Responsável pela Imposição dos Limites de Otimização	25

Figura 23 - Minimização da Força Necessária.....	25
Figura 24 - Cálculo e Normalização do Gradiente da Força	25
Figura 25 - Cálculo do constrangimento de volume	26
Figura 26 - Cálculo e Normalização do Gradiente de Volume	26
Figura 27 - Estrutura em Estudo (retirado de [2]). a) Domínio Inicial. b) Ground Structure da Estrutura. c) Imperfeições Locais. d) Imperfeições Globais	26
Figura 28 - Imperfeições Locais (retirado de [2])	27
Figura 29 - Imperfeições Globais (retirado de [2])	27
Figura 30 - Modelação da Estrutura com Numeração dos Nós.....	28
Figura 31 - Modelação da Estrutura com Numeração dos Elementos.....	29
Figura 32 - Modelação da Estrutura com Numeração das Barras	29
Figura 33 - Otimizações Resultantes das Combinações de Imperfeições (retirado de [2])	30
Figura 34 - Treliça 11 Barras sem Imperfeições.....	31
Figura 35 - Treliça 11 Barras com Imperfeições.....	31
Figura 36 - Opções de Análise no ANSYS.....	36
Figura 37 - Força Necessária para atingir o deslocamento do caso A segundo o <i>OCTAVE</i>	38
Figura 38 - Força Necessária para atingir o deslocamento do caso A segundo o <i>ANSYS</i>	38
Figura 39 - Estrutura sem Imperfeições Deformada	38
Figura 40 - Força necessária para atingir o deslocamento do caso B segundo o <i>OCTAVE</i>	42
Figura 41 - Força necessária para atingir o deslocamento do caso B segundo o <i>ANSYS</i>	42
Figura 42 - Estrutura com Imperfeições Deformada	42
Figura 43 - Gráfico Objetivo vs Iteração (caso A)	43
Figura 44 - Resultados da Otimização (caso A).....	43
Figura 45 - Estrutura Otimizada (caso A)	44
Figura 46 - Gráfico Objetivo vs Iteração (caso B)	44
Figura 47 - Resultados da Otimização (caso B)	44
Figura 48 - Estrutura Otimizada (caso B).....	45
Figura 49 - Estrutura com o Dobro das Imperfeições Iniciais	45
Figura 50 - Estrutura com o Triplo das Imperfeições Iniciais.....	46
Figura 51 - Estrutura com o quádruplo das Imperfeições Iniciais.....	46
Figura 52 - Força necessária para atingir o deslocamento do caso C segundo o <i>OCTAVE</i>	50
Figura 53 - Força necessária para atingir o deslocamento do caso C segundo o <i>ANSYS</i>	50
Figura 54 - Gráfico Objetivo vs Iteração.....	50
Figura 55 - Resultados da Otimização.....	51
Figura 56 - Estrutura Otimizada.....	51
Figura 57 - Gráfico Objetivo vs Iteração (caso C).....	52

Figura 58 - Resultados da Otimização (caso C).....	52
Figura 59 - Estrutura Otimizada (caso C).....	52
Figura 60 - Estrutura Otimizada (caso C).....	53
Figura 61 - Gráfico Deslocamento Máximo vs Fator de Imperfeição ($\delta = -1e-2$)	53
Figura 62 - Força Necessária vs Fator de Imperfeição ($\delta = -1e-6$)	54
Figura 63 - Força Necessária vs Fator de Imperfeição ($\delta = -1e-4$)	55
Figura 64 - Força Necessária vs Fator de Imperfeição ($\delta = -1e-2$)	55
Figura 65 - Gráfico Força vs Deslocamento	56
Figura 66 - Gráfico Força vs Deslocamento (retirado de [2])	56

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 1 - Combinações de Imperfeições	30
Tabela 2 - Deslocamentos e rotações obtidas pelo <i>OCTAVE</i> para o caso A.....	34
Tabela 3 - Deslocamentos e rotações obtidos pelo <i>ANSYS</i> para o caso A.....	35
Tabela 4 - Comparação de resultados entre os dois softwares para o caso A.....	37
Tabela 5 - Deslocamentos e rotações obtidas pelo <i>OCTAVE</i> para o caso B.	39
Tabela 6 - Deslocamentos e rotações obtidas pelo <i>ANSYS</i> para o caso B.....	40
Tabela 7 - Comparação de resultados entre os dois softwares para o caso B.	41
Tabela 8 - Deslocamentos e rotações obtidas pelo <i>OCTAVE</i> para o caso C.....	47
Tabela 9 - Deslocamentos e rotações obtidas pelo <i>ANSYS</i> para o caso C	48
Tabela 10 - Comparação de resultados entre softwares para o caso C	49
Tabela 11 - Estudo de convergência.....	53
Tabela 12 - Estudo da força necessária para atingir determinado deslocamento consoante o fator de imperfeição	54

SIGLAS E SÍMBOLOS

DEMI	Departamento de Engenharia Mecânica e Industrial
DTU	<i>Danmarks Tekniske Universitet</i>
FCT	Faculdade de Ciências e Tecnologia
MMA	Método das Assíntotas Móveis
PROAES	Programa de Análise Estrutural
SIMP	<i>Solid Isotropic Material Penalization</i>
$h_j(x)$	Constrangimento de Igualdade
P_{cr}	Força Crítica
$g_j(x)$	Função Constrangimento
u^{def}	Deslocamento da Deformação
u^{rig}	Deslocamento da Rotação do Corpo Rígido
u^{tot}	Deslocamento total
x_i^{max}	Limite Superior da Variável de Projeto
x_i^{min}	Limite Inferior da Variável de Projeto
Δ	Pequena Perturbação
A	Área
E	Módulo de Young
I	Segundo Momento de Área
K	Matriz de Rigidez Global
L	Comprimento
W	Deslocamento Perpendicular ao Eixo
f	Carga Constante Aplicada
$f(x)$	Função Objetivo
u	Vetor Deslocamento
x X_i	Variável de Projeto
α	Ângulo entre Referencial Local e Global
θ	Rotação
λ	Fator de Carga para o Método de Newton Raphson
ϑ	Fator de Carga

INTRODUÇÃO

1.1 Motivação

A otimização é uma parte intrínseca do projeto em engenharia. Otimizar significa procurar obter as condições mais favoráveis ou o melhor rendimento possível de algo em estudo, podendo utilizar-se variadas técnicas para esse propósito. Mesmo na antiguidade, projetar significava escolher uma solução razoavelmente ótima. Contudo, contrariamente à atualidade, não existiam metodologias e algoritmos específicos para a otimização. Com o avanço da tecnologia, os métodos criados têm vindo a ser alterados e aprimorados facilitando o seu uso pelo utilizador [3].

A otimização estrutural consiste na procura da estrutura que, de forma mais eficiente, permite realizar a função desejada. Pretende-se determinar variáveis de projeto que possibilitem a minimização ou maximização de uma função objetivo definida, sem que, certos constrangimentos impostos sejam violados.

Este tema foi inclusive estudado por Galileo Galilei no século XVI [4], tendo posteriormente sofrido um grande desenvolvimento proveniente do aparecimento dos computadores, dos métodos numéricos de programação matemática e de métodos numéricos de análise de estruturas, dos quais se destaca o Método dos Elementos Finitos (MEF) que se baseia na discretização da estrutura em elementos finitos, compondo uma malha [3].

No Departamento de Engenharia Mecânica e Industrial (DEMI), tem vindo a ser desenvolvido, um programa da autoria do Professor João Cardoso denominado PROAES (PRograma de Análise EStructural).

A presente dissertação pretende dar um contributo no desenvolvimento do programa mencionado e conseqüentemente nas matérias de otimização estrutural.

1.2 Enquadramento

O estudo da otimização topológica usando o conceito de *Ground Structure*, tem diversos artigos publicados na literatura, no entanto, muito raramente consideram a possibilidade de instabilidade ou encurvadura, que representa uma parte crucial no projeto e estudo de qualquer estrutura.

Hazem Madah e Oded Amir [2] propuseram uma metodologia que, através do método corrotacional, ao impor um deslocamento máximo e aplicando diversas imperfeições iniciais à estrutura, não requer a imposição de constrangimentos de encurvadura. Esta será a metodologia em estudo durante a presente dissertação. Recorrer-se-á ao *software* PROAES, que tem vindo a ser desenvolvido e conta com o contributo de vários alunos orientados pelo Professor João Cardoso, nomeadamente de Ana Silva [1], Tiago Batista [5], Marco Correia [6] e João Marmeleiro [7]. O *software* constituirá assim um ponto de partida na dissertação, uma vez que será o programa onde se implementará a metodologia a estudar.

A otimização topológica e a análise não linear foram abordados por Ana Silva [1] em tese de mestrado (2019), utilizando o *software* anteriormente mencionado, contudo, os resultados obtidos, recorrendo à análise não linear, não foram considerados ideais quando comparados com outros exemplos anteriormente publicados.

1.3 Objetivos

O objetivo principal da presente dissertação consiste no desenvolvimento de uma metodologia a implementar no programa PROAES, usando o conceito de *Ground Structure* e que considere a possibilidade de encurvadura. Com base na metodologia apresentada por Madah e Amir pretende-se também avaliar e validar a mesma através da realização de exemplos que, posteriormente, serão comparados com os resultados proveniente da utilização de outros *softwares*. Efetuar-se-ão alterações ao código do programa até que os resultados se considerem satisfatórios e conseqüentemente a metodologia considerada adequada.

1.4 Estrutura da Dissertação

A estrutura da dissertação apresenta-se dividida em cinco principais capítulos. O primeiro e presente capítulo procura introduzir o tema, o que incentivou o estudo do mesmo e quais os objetivos a atingir. No seguinte capítulo são apresentadas metodologias, assim como vários conceitos cruciais para o melhor entendimento do que será tratado no decorrer da dissertação e em capítulos mais avançados. No terceiro capítulo, procura-se apresentar a metodologia utilizada na obtenção dos resultados e alguns conceitos mais específicos para a compreensão do método utilizado. No quarto capítulo, discute-se a otimização de topologia da estrutura alvo e são apresentados diferentes resultados, desde áreas a forças. Por fim, no quinto capítulo, é feito um balanço do trabalho realizado e feitas sugestões para a continuação do desenvolvimento desta temática.

A figura 1 ilustra a estrutura seguida.



Figura 1 - Estrutura da Dissertação

REVISÃO DE LITERATURA

2.1 Otimização Estrutural

A otimização estrutural, como brevemente descrito no capítulo introdutório, consiste na procura da estrutura mais eficiente, e capaz de respeitar os critérios de serviço, por meio de iterações consecutivas. Existem diferentes objetivos que podem ser relevantes, como a minimização dos deslocamentos, obtendo a estrutura mais rígida possível, ou a minimização do peso, obtendo a estrutura mais leve. Seria ideal conjugar ambas as formulações e obter simultaneamente a estrutura mais leve e rígida, no entanto, tal é impossível uma vez que estas formulações entram em conflito, o que torna necessário a imposição de constrangimentos que são comumente: deslocamentos, tensões e volume. Gallagher e Gellatty [8][9] em 1964 procuraram desenvolver uma abordagem automatizada para o projeto de estruturas tendo como objetivo a minimização da massa, sendo estes estudos, em duas partes, os primeiros esforços para a aplicação de técnicas de programação a esta temática. Na figura 2, é apresentado um diagrama que representa o processo iterativo de otimização estrutural.

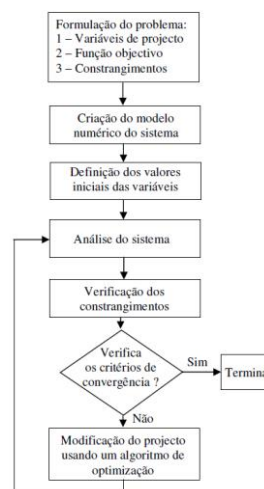


Figura 2 - Processo iterativo de otimização estrutural (retirado de [3])

A otimização estrutural contribui para a sistematização da atividade de projeto e possui três principais categorias, sendo elas: Dimensional, de Forma e de Topologia.

2.1.1 Otimização Dimensional

Inicialmente, o foco do estudo da otimização encontrava-se associado à otimização da dimensão das estruturas. Neste tipo de problema, as variáveis de projeto são as dimensões das secções transversais dos elementos constituintes da estrutura, que podem ser do tipo discreto, assumindo dimensões normalizadas no mercado das quais são exemplo a lista de perfis HEB, ou contínuo, variando entre um limite superior e um limite inferior estabelecido. Ao longo do processo de otimização dimensional, mantém-se inalterada a topologia e forma da estrutura.

No caso de compósitos, pode também ser variável o número de lâminas, a espessura das placas, ou a orientação das fibras.

Na figura 3 é possível observar um exemplo de otimização dimensional aplicada a uma estrutura.

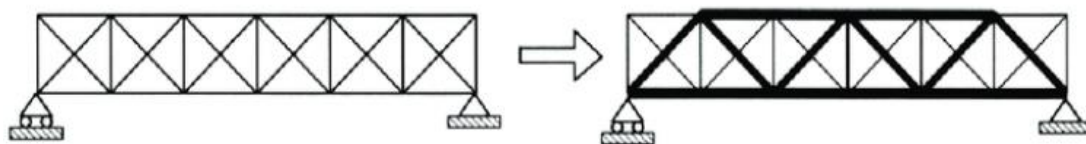


Figura 3 - Exemplo de Otimização Dimensional (retirado de [10])

2.1.2 Otimização de Forma

A otimização de forma veio a ser estudada um pouco mais tarde, e otimiza uma estrutura com topologia já definida, isto é, a topologia irá manter-se durante o processo. As variáveis de projeto são contínuas e correspondem às coordenadas de posição dos pontos, linhas ou superfícies que definem a fronteira, exterior ou interior, da estrutura. A finalidade passa por encontrar a forma que melhor satisfaz a função objetivo. De salientar que caso a topologia definida inicialmente não seja ótima, então a otimização de forma obtida também não o será, chamando-se assim, uma estrutura sub-ótima. A figura 4 representa a aplicação de otimização de forma.

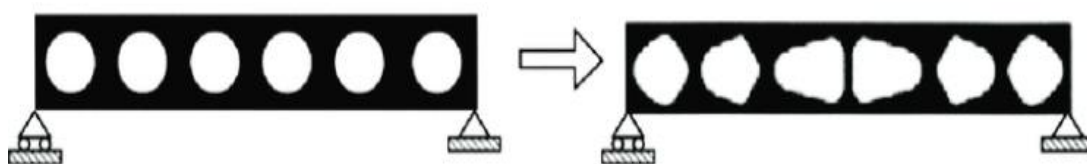


Figura 4 - Exemplo de Otimização de Forma (retirado de [10])

2.1.3 Otimização de Topologia

A otimização de topologia, através de várias iterações e da otimização do número de nós e barras, tem como principal objetivo definir de que forma deve ser alocado material no domínio de projeto, para obter a melhor performance, ou em outros termos, o melhor desempenho estrutural.

Tipicamente, a otimização topológica pode ser vista como um procedimento que distribui racionalmente o material disponível numa área ou volume fixos através da remoção gradual de pequenas porções de material com nível baixo de tensão que não está a ser usado eficientemente na transmissão dos esforços internos. É comum ter como objetivo minimizar o rácio de peso sobre rigidez mecânica. Alguns dos principais pontos fortes da otimização topológica são a criação de estruturas leves, a poupança de material, de energia e a redução do número de protótipos a realizar [11].

Por norma, os problemas desta categoria de otimização são discretos, existindo ou não material no domínio considerado, ainda assim, podem ser resolvidos de acordo com métodos com variáveis contínuas.

Pode dividir-se os métodos em duas famílias, uma que otimiza topologias no domínio contínuo e outra específica para estruturas do tipo treliça.

No primeiro caso, trata-se a densidade em cada ponto como uma variável contínua, no segundo, as variáveis são a área da secção transversal de cada barra. Caso as barras apresentem um valor inferior ao considerado relevante, não serão apresentadas na solução obtida graficamente.

São conhecidas várias abordagens para este tipo de otimização, sendo exemplos o "*Soft-Kill Method*", o "*Hard-Kill Method*", o *SIMP* e o *Ground Structure*, este último específico para estruturas reticuladas e que será utilizado no decorrer da dissertação, e abordado em maior detalhe num outro sub-capítulo.

Na figura 5 observa-se um exemplo da aplicação de otimização de topologia.

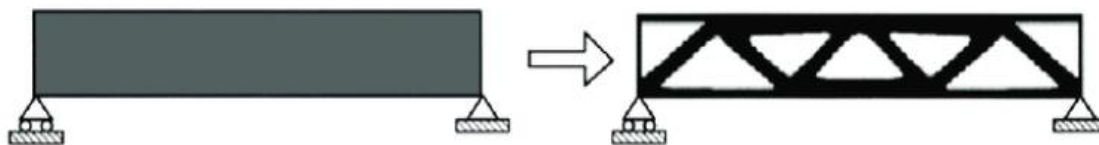


Figura 5 - Exemplo de Otimização de Topologia (retirado de [10])

Na figura 6 encontra-se um exemplo do uso da otimização topológica e do avanço da tecnologia nesta matéria. Através da aplicação, *TopOpt* [12] desenvolvida pela *Danmarks Tekniske Universitet* (DTU) é possível resolver o problema de "*minimum compliance*" de uma estrutura, de forma rápida e visualmente apelativa em 2D.

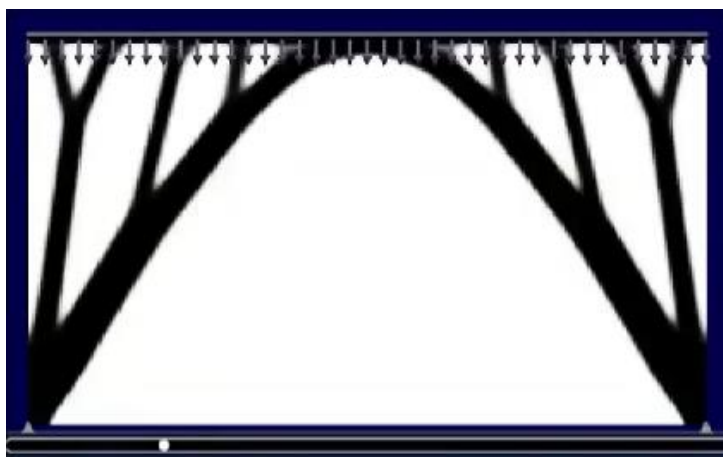


Figura 6 - Otimização de Topologia (*TopOpt*)

A configuração obtida pelo uso da aplicação é muito semelhante à observada em estruturas já implementadas por variados locais como é exemplo a Ponte da Arrábida, no Porto, ilustrada na figura 7.



Figura 7 - Ponte da Arrábida

2.2 Formulação do Problema

O engenheiro Lucien André Schmit Jr. [13], após estudar várias formulações, propôs uma da sua autoria, composta por uma função objetivo, um conjunto de constrangimentos que limitam o domínio das variáveis de projeto e um algoritmo capaz de resolver o problema. Esta formulação continua a ser usada atualmente.

As variáveis de projeto devem, tanto quanto possível, ser independentes umas das outras. Os constrangimentos correspondem às limitações impostas no problema e a função objetivo, tal como o nome indica, consiste no critério que permite analisar a otimalidade da solução.

A forma standard de um problema de otimização encontra-se ilustrada na equação 1. No caso em questão, procura-se minimizar a função $f(x)$.

$$\begin{aligned}
 \min_x \quad & f(x) \\
 \text{Sujeito a} \quad & g_j(x) \leq 0 \quad ; j = 1, \dots, m \\
 & h_k(x) = 0 \quad ; k = 1, \dots, p \\
 & x_i^{\min} \leq x_i \leq x_i^{\max} \quad ; i = 1, \dots, n
 \end{aligned} \tag{1}$$

Com f representando a função objetivo, g_j e h_k os constrangimentos de desigualdade e de igualdade, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ o vetor das n variáveis de projeto e x_i^{\min} e x_i^{\max} os limites inferiores e superiores de x , respetivamente.

Existem algumas observações referentes à formulação standard de um problema de otimização. São algumas delas:

- As funções objetivo e os constrangimentos dependem apenas das variáveis de projeto;
- O número de constrangimentos de igualdade deve ser menor ou igual ao número de variáveis de projeto, i.e., $p \leq n$;
- Se $p > n \Rightarrow$ o sistema de equações é indeterminado;
- Se $p < n \Rightarrow$ a solução ótima para o problema é possível;
- Se $p = n \Rightarrow$ não existe otimização a fazer porque o valor ótimo é solução dos constrangimentos de igualdade;
- Não existe restrição no número de constrangimentos de desigualdade;
- Se f , g e h são funções lineares diz-se que estamos perante um *problema de programação linear*;
- Se f , g ou h são funções não lineares diz-se que estamos perante um *problema de programação não linear* [3].

A presente dissertação irá ter um maior foco no estudo de estruturas com comportamento não linear, que ocorre quando a estrutura sofre grandes deslocamentos. Outro tipo de estruturas com comportamento não linear ocorre quando a estrutura plastifica total ou parcialmente ou existe contacto entre duas ou mais superfícies.

2.3 Análise Não Linear

A análise linear de estruturas assenta num conjunto de hipóteses que se traduzem por relações lineares entre as diversas grandezas em jogo. Assumem-se materiais elástico lineares e a hipótese de pequenos deslocamentos. A análise linear permite obter uma aproxima-

ção do comportamento real das estruturas e do seu modo de funcionamento, no entanto, existem situações para as quais os resultados obtidos por este tipo de análise diferem muito da realidade, o que torna necessário recorrer à utilização de uma análise não linear [14].

Quando uma estrutura apresenta relações tensão-extensão não lineares de materiais no domínio plástico e no domínio elástico, ou sofre grandes deslocamentos, diz-se que exibe comportamento não linear, o que leva à existência de uma dependência da matriz de rigidez com o deslocamento, dada pela equação:

$$[K(u)]\{u\} = \{f\} \quad (2)$$

Onde $[K(u)]$ expressa a dependência, anteriormente referida, da matriz rigidez com o vetor de deslocamento, $\{u\}$ [15] [16].

Para uma compreensão facilitada entre as diferentes análises abordadas, apresenta-se a figura 8, na qual um pilar de comprimento l é submetido à ação de uma força vertical, P , que atua com uma excentricidade, e , em relação ao seu eixo. Em b) observa-se a configuração deformada da coluna, com um deslocamento dado por δ e em c) um gráfico com a relação entre a carga e o deslocamento para as diferentes análises consideradas, de onde se observa uma influência significativa da não linearidade geométrica para valores de carga elevados.

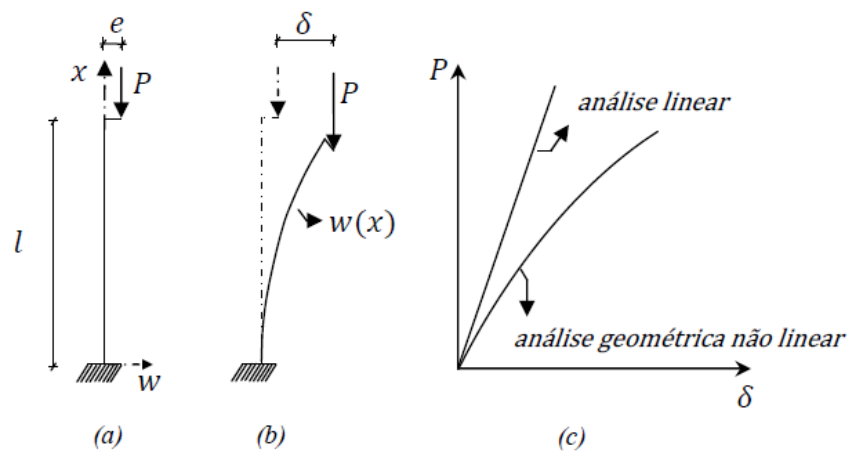


Figura 8 - Pilar Submetido a uma Força de Compressão com Excentricidade. a) Configuração Indeformada. b) Configuração Deformada. c) Gráfico P vs δ . (Retirado de [17])

Em artigos como [18] e [19] está presente o efeito da análise não linear nas estruturas, sendo nestes casos considerados métodos de otimização baseados na densidade. A aplicação da não linearidade agregada ao método de *Ground Structure* é um tema ainda pouco desenvolvido atualmente.

2.4 Método Corrotacional

O método corrotacional, apresentado inicialmente por Rankin e Brogan [20] baseia-se no pressuposto que as vigas constituintes da estrutura em estudo apresentam uma esbelteza elevada e suportam grandes deslocamentos, não ultrapassando o limite elástico do material. Tal pressuposto permite usar relações cinemáticas envolvendo deformações e deslocamentos lineares. Segundo [20] qualquer campo de deslocamentos pode ser decomposto em três componentes diferentes, são elas: translação de corpo rígido, rotação de corpo rígido e deformação. É utilizado um sistema de coordenadas global e local. A forma como estas grandezas se relacionam, na existência de rotação do corpo rígido, é dada por:

$$u^{tot} = u^{def} + u^{rig} \quad (3)$$

Sendo u^{tot} o deslocamento total dado pela soma do deslocamento proveniente da deformação, u^{def} , com o deslocamento devido à rotação do corpo rígido, u^{rig} .

Esta metodologia é usada em programas como o ANSYS na análise de estruturas constituídas por vigas nas quais se verifique grandes rotações. A vantagem do método corrotacional resulta de permitir, por meio de transformações de coordenadas, usar programas de análise linear de estruturas para realizar análises não lineares, através da adição de uma transformação de coordenadas suplementar [14][20].

2.5 Método dos Elementos Finitos

A designação do método atualmente conhecido como Método dos Elementos Finitos foi primeiramente introduzida em 1960 por Ray Clough [21].

Antes da implementação deste método, a análise dos meios contínuos era efetuada por meio de resolução direta de sistemas de equações de derivadas parciais, o que resultava num processo de complexidade muito elevada.

O MEF representa assim um método mais geral e poderoso, sendo capaz de resolver problemas concretos de engenharia envolvendo geometrias ou condições fronteiras complexas, é por isso utilizado em diversas áreas de estudo como a estrutural, térmica e hidráulica.

Baseado no cálculo variacional, o Método dos Elementos Finitos, procura obter a função que leva a que um funcional atinja um valor extremo, máximo ou mínimo.

Inicialmente neste método era comum a utilização de elementos finitos triangulares e tetraédricos, mais tarde passou a dar-se preferência aos elementos quadriláteros ou hexaedros [21].

O MEF pode ser dividido em três principais fases, sendo elas: o Pré-Processamento, a Solução e o Pós-Processamento.

Na fase de Pré-Processamento dá-se a divisão do domínio do problema em subdomínios, chamados elementos finitos. De seguida procede-se à derivação da função interpoladora ou de forma, que pode ser de diferentes graus consoante a complexidade do objeto de estudo.

A resolução de equações diferenciais segundo o método dos elementos finitos é traduzida pela seguinte equação:

$$[K]\{u\} = \{f\} \quad (4)$$

Sendo K a matriz de rigidez, em coordenadas globais, u o deslocamento sofrido e f uma carga constante aplicada.

A resolução da equação (4) implica, no caso de estruturas com comportamento não linear, a utilização de um método iterativo, sendo muito utilizado o Método de Newton-Raphson, abordado num capítulo posterior.

A fase da Solução consiste no processo de resolução da equação apresentada durante a fase anterior.

A última fase é responsável por interpretar os resultados obtidos da resolução da equação [1] [22].

2.5.1 Elemento Barra

O elemento finito barra 2D é o elemento mais simples, apresenta apenas dois graus de liberdade por nó, o deslocamento em X e em Y . No caso de se considerar o elemento barra 3D, tem-se adicionalmente, o deslocamento segundo a coordenada Z .

A matriz de rigidez deste elemento, quer para 2D quer para 3D é dada por:

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ \frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \quad (5)$$

Com E representando o Módulo de Young, A a área da secção transversal do elemento e L o seu comprimento.

Para a barra 2D é necessário recorrer a uma matriz de transformação de coordenadas globais para locais. Essa matriz é dada por:

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \end{bmatrix} \quad (6)$$

A variável α corresponde ao ângulo entre o referencial local e global, x e X , respetivamente.

Na figura 9 encontra-se representado um elemento finito de barra 2D e os respetivos nós (1 e 2). Uma vez que elementos possuem referenciais distintos, foi necessário obter o ângulo de rotação (α) do local (a verde) para o global (a vermelho).

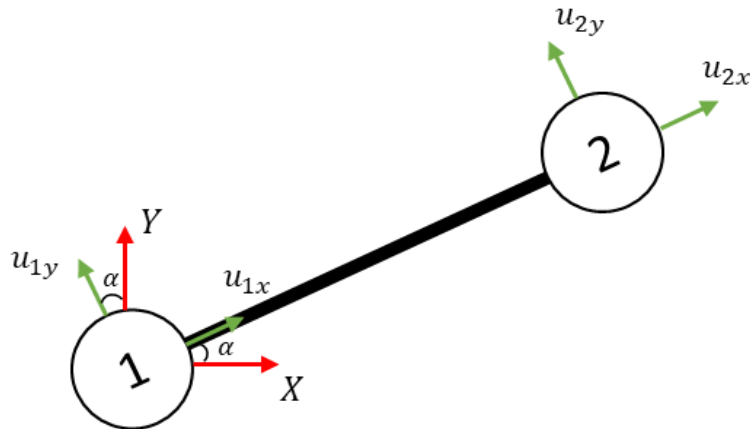


Figura 9 - Elemento Barra 2D

2.5.2 Elemento Viga

O elemento viga 2D apresenta 3 graus de liberdade por nó. Em adição aos deslocamentos em X e em Y , apresenta a rotação θ .

Nos elementos viga existem graus de liberdade associados a esforços de flexão, que são independentes dos graus de liberdade associados à tração/compressão e a matriz rigidez resultante é dada por:

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (7)$$

Sendo I o segundo momento de ordem da secção transversal. As restantes variáveis mantêm a correspondência anteriormente estabelecida para o elemento barra.

A matriz de transformação de coordenadas para este elemento é dada por:

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

No caso de se considerar uma viga 3D, cada nó apresenta 6 graus de liberdade, nomeadamente, os deslocamentos segundo X , Y e Z , assim como as rotações em torno dos mesmos eixos resultando numa matriz de rigidez 12×12 .

O elemento viga 2D está representado na figura 10. Salienta-se a adição da rotação em comparação com a figura anterior relativa ao elemento barra.

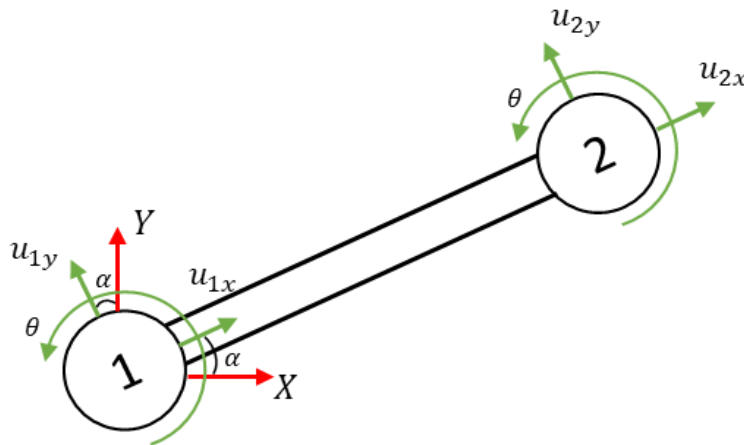


Figura 10 - Elemento Viga 2D

2.6 Método de Newton-Raphson

O método de Newton-Raphson foi desenvolvido por Isaac Newton e Joseph Raphson [23]. Tem como objetivo estimar as raízes de uma função, e possibilita também a determinação de mínimos ou máximos, quando usado para otimização.

Este método iterativo é capaz de resolver a equação (2) através da minimização do resíduo, Δf , definido por:

$$\Delta f = f - [K](u)u \quad (9)$$

O processo iterativo de Newton-Raphson pode ser descrito nos seguintes passos:

Realiza-se a primeira iteração na qual se considera $u_0 = 0$ e se avalia a matriz rigidez, K , para a posição indeformada.

Obtém-se o primeiro incremento nos deslocamentos, Δu_1 , e atualizam-se os deslocamentos, $u_1 = \Delta u_1$. Seguidamente determinam-se as forças exteriores aplicadas, que equilibram as forças internas, obtendo-se f_1 . A diferença entre as forças aplicadas f e as forças aplicadas f_1 consiste no primeiro resíduo, Δf_1 , que é calculado pela equação:

$$\Delta f_1 = f - [K](u_1)u_1 \quad (10)$$

Para a segunda iteração resolve-se o sistema de equações lineares:

$$K(u_1)\Delta u_2 = \Delta f_1 \quad (11)$$

E atualizam-se os deslocamentos novamente, agora com $u_2 = u_1 + \Delta u_2$.

Uma ilustração gráfica do Método de Newton-Raphson, anteriormente descrito, pode ser observada na figura 11.

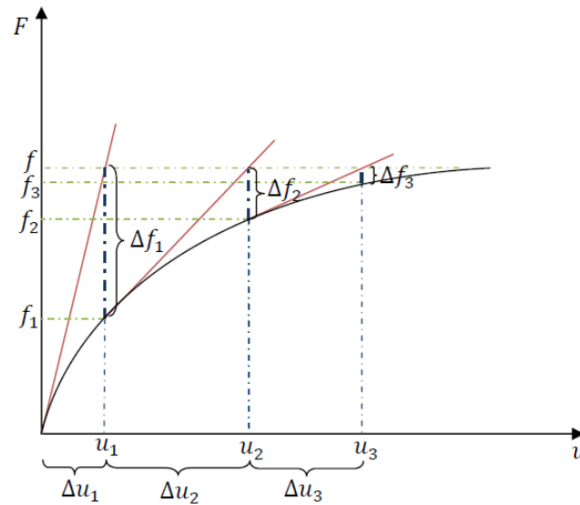


Figura 11 - Ilustração Gráfica do Método de Newton-Raphson (retirado de [24])

O processo pode ser repetido sucessivamente até que o resíduo, Δf_n , corresponda às necessidades do utilizador. Realizam-se n iterações utilizando o último deslocamento obtido, u_n , dado por:

$$u_{n+1} = u_n + \Delta u_{n+1} \quad (12)$$

2.7 Ground Structure

A metodologia denominada *Ground Structure* foi inicialmente proposta por Dorn et al. em 1964 [25] e é específica para estruturas reticuladas, como as treliças.

Neste método o domínio do problema é discretizado num conjunto de nós, conectados por barras de elementos finitos, formando uma malha que dá o nome ao método. No artigo [26] introduz-se a classificação de uma *Ground Structure* segundo o seu nível de conectividades, afirma-se que o primeiro nível gera barras entre nós vizinhos, o segundo entre vizinhos de vizinhos e o nível máximo de conectividade ocorre quando todos os nós estão conectados por barras. Uma representação deste conceito é apresentada na figura 12.

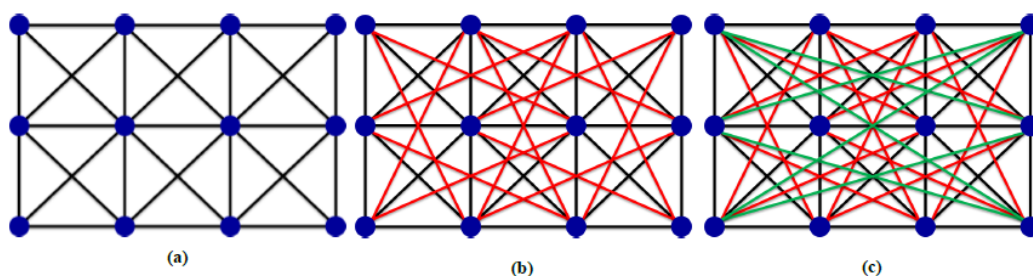


Figura 12 - Ground Structure. a) Nível de Conectividade 1. b) Nível de Conectividade 2. c) Conectividade Total

De seguida, um algoritmo procura estabelecer as ligações ótimas de barras para um determinado carregamento e condições de apoio estabelecidas.

A solução obtida pelo algoritmo segundo este método é altamente dependente da malha definida e das condições inicialmente impostas, uma vez que não permite a movimentação de nós ou barras, e apenas a remoção de material. Tal condição torna aconselhável a criação de uma malha densa, porém, conseqüentemente resulta uma maior exigência computacional.

2.8 Estabilidade

Os conceitos de equilíbrio e resistência são essenciais na correta análise de uma estrutura. No entanto, é também crucial assegurar que esse equilíbrio é estável, ou seja, garantir que a estrutura tende a recuperar o seu equilíbrio após sofrer uma perturbação.

Membros de uma estrutura sujeitos a esforços de compressão podem sofrer o fenómeno denominado de “*buckling*” ou “*encurvadura*”, o mesmo ocorre de forma não proporcional, e resulta num estado de perda de rigidez axial acompanhado de grandes deslocamentos transversais indesejados, podendo dar-se o colapso imediato e completo da estrutura. Este fenómeno pode ocorrer antes do limite à compressão, P_{cr} , ser atingido e impede a estrutura de suportar os esforços para os quais foi projetada inicialmente tornando o projeto inviável. Na figura 13 é possível observar um exemplo deste fenómeno. À esquerda está presente uma barra de comprimento L na qual é aplicada uma força axial vertical P , o deslocamento perpendicular ao eixo é representado por w , e a curvatura resultante da aplicação de uma força crítica, P_{cr} , na barra é representada a linha tracejada. À direita, o gráfico Força vs Deslocamento no qual se observa que para cargas inferiores à crítica, o equilíbrio é estável e não se verifica a presença de deslocamentos transversais. Após se atingir P_{cr} existe um grande aumento no deslocamento, sendo imprevisível a sua direção, e o equilíbrio torna-se instável [27].

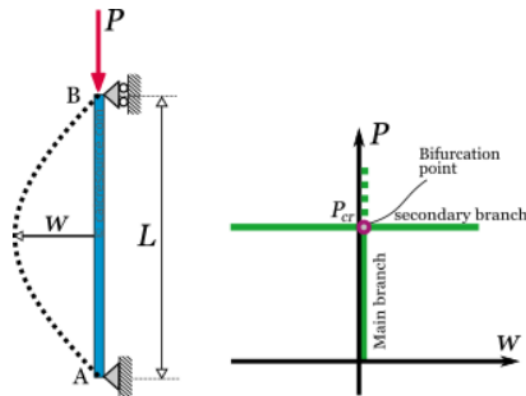


Figura 13 - Coluna Carregada por uma Força P e o respetivo Gráfico Força vs Deslocamento (retirado de [27])

O cálculo da carga crítica de encurvadura de uma viga depende das condições de fronteira existentes como se pode notar na figura 14.

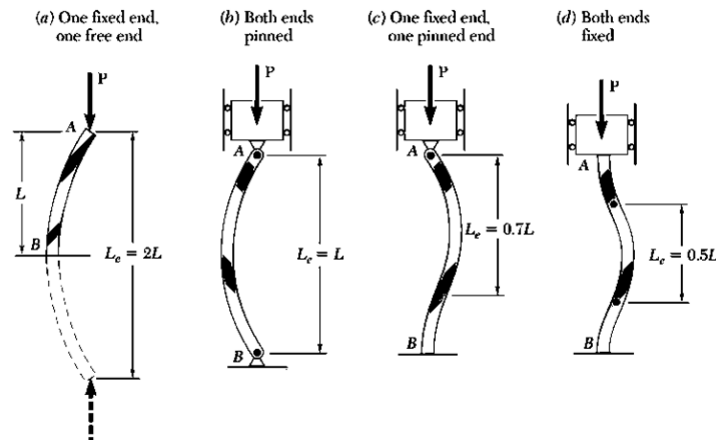


Figura 14 - Carregamento e Encurvadura de Vigas com Diferentes Condições de Fronteira (adaptado de [28])

Tipicamente, a área de secção transversal dos membros constitui a variável de projeto aquando da otimização. Uma vez que a encurvadura se relaciona com a forma da secção transversal, esta informação é muito pertinente no seu cálculo. A carga crítica pode ser calculada pela equação (13), sendo E o módulo de Young, I o segundo momento de área e L o comprimento equivalente de encurvadura como mostrado na figura anterior. Seguiu-se a sugestão do artigo [2], na qual o momento de inércia da secção transversal pode ser expresso em função da área usando a relação $I = \alpha A^2$ sendo que, para o caso em estudo, com barras de secção transversal circular $\alpha = 1/4\pi$.

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (13)$$

Podem destacar-se dois tipos de instabilidade, nomeadamente a local e global.

2.8.1 Estabilidade Local

A instabilidade local ocorre, por exemplo, quando uma parte da aba de uma viga em I instabiliza, sob efeito das tensões de compressão, como se mostra na figura 15. Pode também acontecer que uma barra da estrutura instabilize por ultrapassar a carga crítica indicada pela equação (13). A ocorrência de instabilidade local pode não conduzir obrigatoriamente à instabilidade de toda a estrutura.

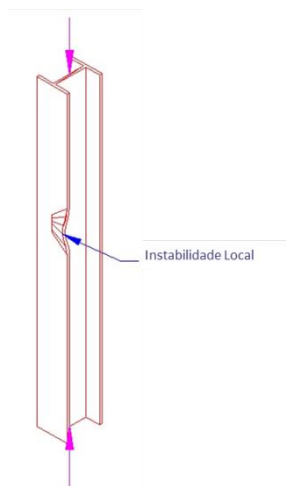


Figura 15 - Instabilidade Local (adaptado de [29])

2.8.2 Estabilidade Global

A instabilidade global caracteriza-se pela presença de instabilidade ao longo de toda a estrutura. Deste fenómeno resulta uma redução muito elevada da rigidez e o colapso de toda a estrutura. Na figura 16 observa-se uma representação deste tipo de instabilidade.



Figura 16 - Instabilidade Global (adaptado de [29])

METODOLOGIA

A presente dissertação pretende continuar o trabalho já desenvolvido anteriormente por Ana Silva [1] que estudou a utilização da análise não linear na otimização de topologia de treliças, segundo a metodologia de *Ground Structure* no programa PROAES_NL.

Considerou-se pertinente estudar, analisar e validar a metodologia aplicada e proposta por Madah e Amir, na qual são introduzidas imperfeições geométricas locais e globais na treliça inicial de forma a não ser necessário impor constrangimentos de encurvadura local, mas apenas considerar a estabilidade global.

Pretende-se obter a estrutura com maior rigidez ou por outras palavras, aquela que seja mais resistente à instabilidade. Os autores referem duas formulações distintas, MaxF e MinV. A primeira, MaxF, é utilizada quando se realiza uma análise na qual é imposto um valor, constante e controlado pelo utilizador, para o deslocamento. A estrutura mais rígida proveniente desta formulação corresponde à maximização da capacidade de carga, se aplicada num ponto singular, ou seja, tem como objetivo maximizar a força aplicada na estrutura, sem que seja ultrapassado o deslocamento definido previamente como limite. Pode observar-se a correspondente formulação standard na equação 14.

$$\begin{aligned}
 \min_x \quad & f = -\vartheta \\
 \text{Sujeito a} \quad & g_j = \sum_{i=1}^N x_i l_i \leq V^*, \\
 & x_i^{\min} \leq x_i \leq x_i^{\max} \quad i = 1, \dots, N \\
 \text{com:} \quad & \mathbf{R}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \vartheta) = \vartheta \hat{\mathbf{f}}_{ext} - \hat{\mathbf{f}}_{int}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = 0
 \end{aligned} \tag{14}$$

Sendo x_i a variável de projeto, correspondente à área da secção transversal da barra, l_i o comprimento de cada barra, V^* o volume disponível, N o número de barras existentes e ϑ o fator de carga, neste caso apresentado como negativo, e consequentemente realiza-se a mi-

nimização. Esta alteração resulta como consequência do algoritmo utilizado para a otimização, no caso, o MMA. Nesta formulação, parte-se de uma estrutura bastante flexível e cumprindo com o constrangimento de volume procura-se alterar as áreas das várias barras de forma que a estrutura resultante convirja para a mais rígida.

A segunda formulação, MinV, surge como o reverso da anterior. Pretende-se minimizar o volume da estrutura dada um constrangimento de força que deve ser superior a um valor definido como mínimo necessário. A sua forma standard pode ser visualizada na equação 15.

$$\begin{aligned}
 \min_x \quad & f = \sum_{i=1}^N x_i l_i \leq V^*, \\
 \text{Sujeito a} \quad & g = \vartheta \geq \vartheta^* \\
 & x_i^{\min} \leq x_i \leq x_i^{\max} \quad i = 1, \dots, N \\
 \text{com:} \quad & \mathbf{R}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \vartheta) = \vartheta \hat{\mathbf{f}}_{ext} - \hat{\mathbf{f}}_{int}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = 0
 \end{aligned} \tag{15}$$

As variáveis correspondem às descritas anteriormente e ϑ^* representa o fator de carga mínimo necessário. Nesta formulação, o ponto de partida consiste numa estrutura de volume elevado que, mantendo a rigidez necessária para suportar o fator de carga presente como constrangimento, será progressivamente diminuído até que não seja possível obter um valor inferior de volume sem violar o constrangimento.

3.1 PROAES

O PROAES consiste num programa, desenvolvido no DEMI da FCT NOVA, em linguagem *MATLAB*, que pode também ser utilizado em ambiente *Octave*. Possui diferentes capacidades, das quais são exemplo:

- Análise de modelos estruturais pelo método dos elementos finitos;
- Cálculo de derivadas de algumas medidas de desempenho estrutural (performances) em relação a variáveis de projeto;
- Análise de fiabilidade de modelos estruturais pelo método FORM;
- Otimização de estruturas, considerando constrangimentos associados a medidas de desempenho estrutural e/ou medidas de fiabilidade.

A otimização de estruturas consiste na capacidade do programa que será abordada de forma mais aprofundada. É capaz de calcular as respostas das estruturas e alterar os parâmetros que condicionam o problema [30].

3.2 Deslocamento Máximo

De forma a ir de encontro com a formulação MaxF sugerida pelo artigo, foi necessário proceder à alteração do programa, e modificá-lo para que, estabelecendo um deslocamento máximo num grau de liberdade da estrutura, o mesmo devolvesse a força necessária para o atingir e os deslocamentos resultantes dessa mesma força aplicada. Recorreu-se ao método de Newton-Raphson com comprimento de arco cilíndrico para este efeito.

Foi criada uma variável, denominada "max_desloc", um vetor com três entradas que deve ser definido pelo utilizador aquando do início do estudo. Na primeira entrada do vetor deve ser introduzido o número do nó no qual se pretende impor o deslocamento, na segunda entrada é necessário especificar o grau de liberdade, com 1 correspondente a x , 2 a y e 6 a θ . Por fim, a terceira entrada recebe o valor definido como limite para o deslocamento.

A figura 17 mostra um exemplo em código retirado do PROAES_NL.

```
50 max_desloc= zeros(3,1);
51 max_desloc(1)= 25;      % número do nó
52 max_desloc(2)= 2;      % número do gdl (1=x, 2=y, 6=teta)
53 max_desloc(3)= -1e-2;  % valor limite para o deslocamento
```

Figura 17 - Implementação do Deslocamento Máximo em Código

3.3 Método de Newton-Raphson com Arco Cilíndrico

De forma a não ultrapassar o limite definido para o deslocamento, recorreu-se ao método de Newton-Raphson com Arco Cilíndrico, capaz de controlar o valor das forças aplicadas na estrutura através do parâmetro λ designado fator de carga para o método de Newton Raphson, que varia entre 0 e 1. Esta alteração no método permite seguir a curva força-deslocamento mesmo que a derivada desta seja negativa, como nos casos de *snapthrough*.

A função de equilíbrio passa assim a ser dada pela seguinte equação:

$$[K(u)]\{u\} = \lambda\{f\} \quad (16)$$

O fator de carga introduzido é dependente de outra variável, o comprimento de arco, ΔL , e responsável pela amplitude do deslocamento incremental.

Este método é um processo incremental e iterativo, onde ocorrem incrementos no fator de carga, ou 'passos', aos quais se seguem iterações na procura de convergência, controladas por ΔL . O processo descrito encontra-se ilustrado na figura 18, sendo visível os incrementos no fator de carga.

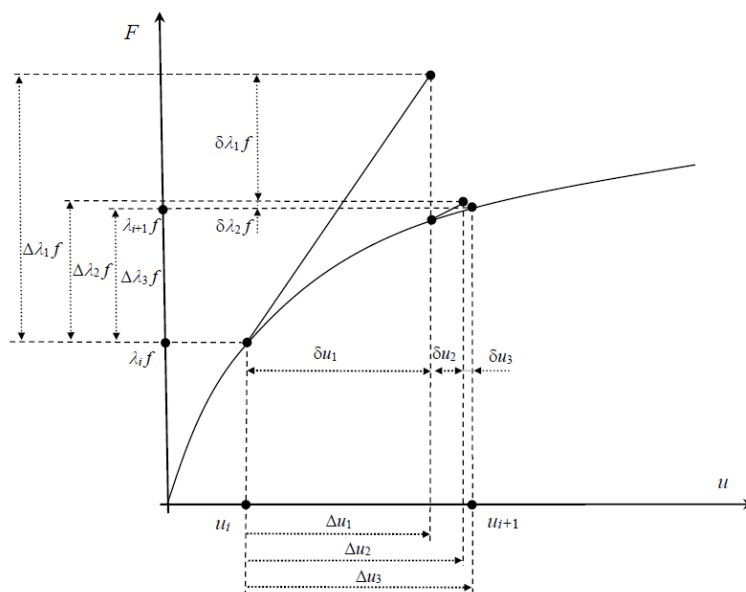


Figura 18 - Ilustração do Método de Newton-Raphson com Arco Cilíndrico

O propósito deste método consiste assim na obtenção da convergência para λ_{i+1} e u_{i+1} . O processo é descrito em maior detalhe na dissertação de Ana Silva, estando já implementado uma versão do mesmo no PPrograma de Análise EStructural.

Assim, e de forma a interromper o método de Newton-Raphson com Arco Cilíndrico, procurou-se controlar o deslocamento através da variável "delta_L". Inicialmente elaborou-se em código um modo de interromper o método de Newton-Raphson, mas revelou-se demasiado brusco, não atingindo a convergência nem os resultados desejados.

Melhorou-se o código implementado com o objetivo de controlar a variável na primeira iteração que não do primeiro passo, e definiu-se que, caso "delta_L" somado ao valor absoluto do deslocamento do nó e grau de liberdade em questão fosse superior ao valor absoluto do valor limite para o deslocamento, "UMAX", então "delta_L" seria atualizado, passando a valer "UMAX" subtraído do valor absoluto do deslocamento do nó e grau de liberdade considerados. Caso tal não aconteça e "delta_L" seja inferior à tolerância inicialmente definida, então o método de Newton-Raphson deve ser interrompido com o comando "converge=1". As linhas de código que permitem realizar o descrito anteriormente estão representadas em linguagem MATLAB na figura 19.

```

713 if delta_L + abs(ug(max_desloc(2),max_desloc(1))) > UMAX
714     delta_L = UMAX - abs(ug(max_desloc(2),max_desloc(1)));
715 end
716 if delta_L < tolerancia
717     converge= 1;
718 end

```

Figura 19 - Implementação do Código com Controlo de Deslocamento

3.4 Performance de Força

De forma a obter a força necessária para atingir o deslocamento máximo imposto teve de alterar-se no PROAES_NL as performances com o objetivo de incluir um quarto caso adicional.

Foi necessário alterar as performances do PROAES_NL com o objetivo de, para além das 3 performances já implementadas (volume, deslocamentos e tensão), incluir uma performance para a carga aplicada, como ilustrado na figura 20.

```

1188
1189
1190
1191
1192
1193
1194
1195
1196
1197
1198
1199

```

```

case 4
switch performances(3,i)
case 1
fprintf( fout, ' %5d | Carga Aplicada X do No %5d |\n',...
i, performances(2,i)) ;
case 2
fprintf( fout, ' %5d | Carga Aplicada Y do No %5d |\n',...
i, performances(2,i)) ;
case 3
fprintf( fout, ' %5d | Carga Aplicada Z do No %5d |\n',...
i, performances(2,i)) ;
end

```

Figura 20 - Implementação da Performance Força

3.5 Otimização com Método das Assintotas Móveis

Idealmente, o método utilizado para a otimização de estruturas deve ser de fácil implementação, flexível e capaz de interpretar diferentes tipos de constrangimentos. Estando perante análises não lineares, optou-se por utilizar o *Method of Moving Asymptotes* (MMA) introduzido em 1987 por Krister Svanberg. Em cada iteração é criado um subproblema controlado pelas assintotas móveis, que contribuem para a estabilização do processo de convergência [11][31].

A formulação base de um problema de otimização segundo o MMA é a apresentada de seguida.

$$\begin{aligned}
 \min \quad & f_0(x) + a_0 z + \sum_{i=1}^m (c_i y_i + \frac{1}{2} d_i y_i^2) \\
 \text{Sujeito a} \quad & f_i(x) - a_i z - y_i \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\
 & x_j^{\min} \leq x_j \leq x_j^{\max} \quad j = 1, \dots, N \\
 & y_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \\
 & z \geq 0.
 \end{aligned} \tag{17}$$

Com $f(x)$ correspondendo à função objetivo, $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ às variáveis de projeto e $y = (y_1, \dots, y_m)^T$ e z correspondendo às variáveis de otimização artificiais.

x_j^{\min} e x_j^{\max} são números reais, também chamados de limite inferior e superior, que satisfazem a condição $x_j^{\min} < x_j^{\max}$ [32].

a_0 e a_i são números reais que satisfazem a condição $a_0 > 0$ e $a_i > 0$.

c_i e d_i são números reais que satisfazem a condição $c_i > 0$, $d_i > 0$ e $c_i + d_i > 0$.

O subproblema deste método inicia-se sendo os valores de x^k, y^k e z^k presentes na equação 17 escolhidos. De seguida, é gerado um subproblema aproximado onde se substituem as funções $f_i(x)$ por funções convexas $\tilde{f}_i^{(k)}(x)$. As aproximações realizadas têm, principalmente, em consideração o gradiente do ponto de iteração atual, mas também as iterações prévias.

O subproblema é resolvido passando a solução a ser o próximo ponto de iteração, gerando um novo subproblema [32].

O processo é interrompido quando atingido um nível de convergência definido como suficiente ou quando atingido o número máximo de iterações.

Para que seja possível realizar análise em *OCTAVE* utilizando o MMA recorreu-se à *TOOLBOX* de otimização criada por Daniel Paciência [33]. O processo de interação entre o programa e a ferramenta mencionada apresenta vários ficheiros, são eles o ficheiro de inicialização, de input, de output, a função objetivo, a função de constrangimento, e os ficheiros *opt2ef* e *ef2opt*.

Cabe ao utilizador a criação do ficheiro de inicialização, de input, assim como das funções objetivo e de constrangimento.

Na inicialização é necessário estipular o número de variáveis e de constrangimentos e definir o número máximo de iterações a realizar pelo programa assim como o valor do "move limit" a implementar. Um exemplo destes valores é apresentado na figura 21.

```
35 % Número de variáveis
36 n = 11;
37 % Número de constrangimentos
38 m = 1;
39 % Número máximo de iterações
40 maxite= 600;
41 % Valor inicial das variáveis
42 xval = 1e-3*ones(n,1);
43 % Move Limit
44 MOVE= 0.00001 * ones(n,1);
45 xmin = xval - MOVE;
46 xmax = xval + MOVE;
```

Figura 21 - Exemplo de Valores de Inicialização

Posteriormente são definidos os parâmetros internos do MMA e obtidos os valores iniciais da função objetivo e de constrangimento, chamando o PROAES. Por fim é iniciado um ciclo responsável pela otimização, que termina caso seja atingida a tolerância pretendida ou

o número máximo de iterações. O ciclo calcula para cada iteração, o valor da função objetivo e de constrangimento sendo restringido pelo limite superior e inferior definidos na figura 22 como exemplo.

```
138 | for i=1:n
139 |     if xmin(i) < 1e-4
140 |         xmin(i) = 1e-4;
141 |     endif
142 |     if xmax(i) > 1e-2
143 |         xmax(i) = 1e-2;
144 |     endif
145 | end
```

Figura 22 - Código Responsável pela Imposição dos Limites de Otimização

No presente estudo, a função de objetivo é responsável por calcular a mínima força necessária para atingir o deslocamento máximo imposto. A função escreve no ficheiro ef2opt e lê o ficheiro opt2ef, e uma vez que, no exemplo considerado, a força é aplicada verticalmente de cima para baixo (negativa) foi necessário somar um valor durante a otimização para que o valor do objetivo permanecesse positivo. É também calculado o gradiente (gradf) e normalizado, como mostram as figuras seguintes.

```
83 | F25= data(2);
84 | objetivoivar= 0.0001 + F25;
```

Figura 23 - Minimização da Força Necessária

```
90 | gradf(ivar)= ( objetivoivar - objetivo ) / DELTA;
```

Figura 24 - Cálculo e Normalização do Gradiente da Força

A função de constrangimento é responsável por calcular os constrangimentos de volume, sendo o seu código muito semelhante à função objetivo. Define-se o volume máximo (VOL_MAXIMO) a considerar e é também calculado o gradiente (gradc) e normalizado.

```
54 | c = volume/VOL_MAXIMO - 1;
```

Figura 25 - Cálculo do constrangimento de volume

```
93 | civar = volume/VOL_MAXIMO - 1;
94 | gradc(ivar) = ( civar - c ) / DELTA;
```

Figura 26 - Cálculo e Normalização do Gradiente de Volume

No ficheiro input são definidos todos os nós, elementos e as suas ligações, materiais, secções, apoios e forças.

No opt2ef dá-se a indicação da análise pretendida, podendo optar-se pelo cálculo das performances, sensibilidades ou ambas. É definido o número de variáveis e os seus valores, o número de performances e a sua identificação.

O ficheiro de output contém um resumo dos dados do problema seguidos dos resultados da análise efetuada e o ficheiro ef2opt as performances e sensibilidades pedidas no opt2ef.

3.6 Modelação da Estrutura

Procurou-se reproduzir, de forma adaptada, o problema apresentado em [2] na qual foram introduzidas na estrutura quer imperfeições geométricas locais, quer globais para favorecer o fenómeno de encurvadura.

A estrutura alvo de estudo no artigo é apresentada na figura 27. Em (a) é ilustrado o domínio inicial de 4.0 m de comprimento e 2.0 m de largura. Em (b) observa-se a *Ground Structure* utilizada, composta por 13 barras, sendo 2 sobrepostas, que não foram consideradas no decorrer do estudo. Em (c) foram impostas à *Ground Structure* anteriormente definida, imperfeições geométricas locais, já em (d) apenas foram impostas imperfeições geométricas globais.

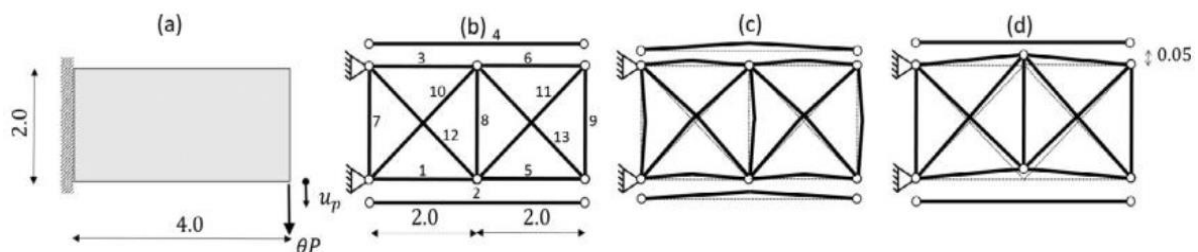


Figura 27 - Estrutura em Estudo (retirado de [2]). a) Domínio Inicial. b) *Ground Structure* da Estrutura. c) Imperfeições Locais. d) Imperfeições Globais

As imperfeições locais, ou empenos, são aplicados através de um pequeno deslocamento imposto nos nós que interligam os 2 elementos que formam cada barra, os restantes nós mantêm-se fixos. A figura 28 permite uma melhor visualização das imperfeições locais.

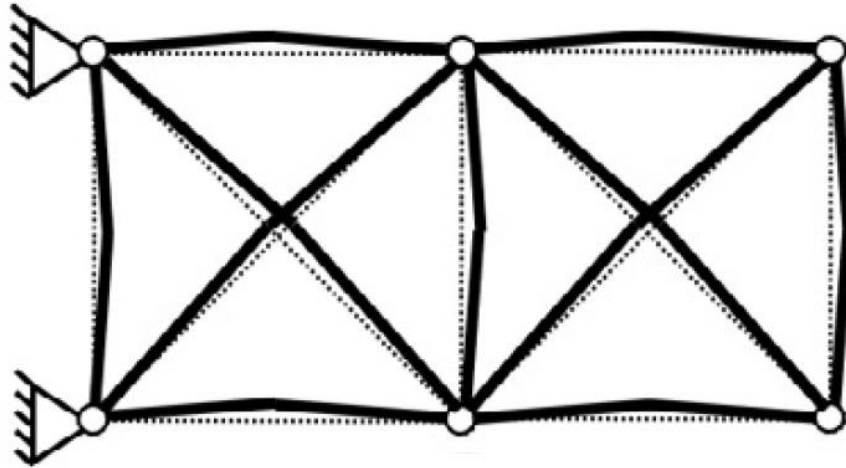


Figura 28 - Imperfeições Locais (retirado de [2])

As imperfeições globais são aplicadas através de um deslocamento nos nós, anteriormente fixos. Pode, de seguida na figura 29, observar-se com melhor clareza o efeito deste tipo de imperfeições.

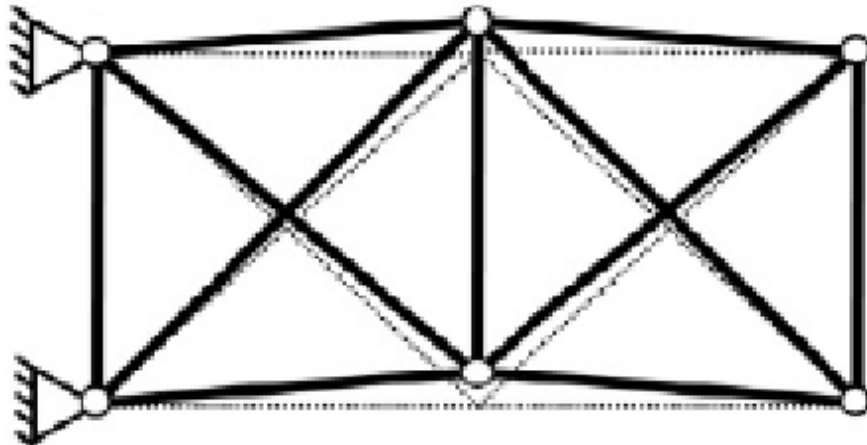


Figura 29 - Imperfeições Globais (retirado de [2])

Recorreu-se ao programa já implementado "gera_nós.m" da autoria de Bernardo Abrantes [34] para de uma forma mais expedita obter as posições deslocadas dos nós da estrutura. Este programa, requer que sejam definidos dois valores, referentes à magnitude quer das imperfeições locais quer globais. É possível observar a numeração dos vários nós na figura 30.

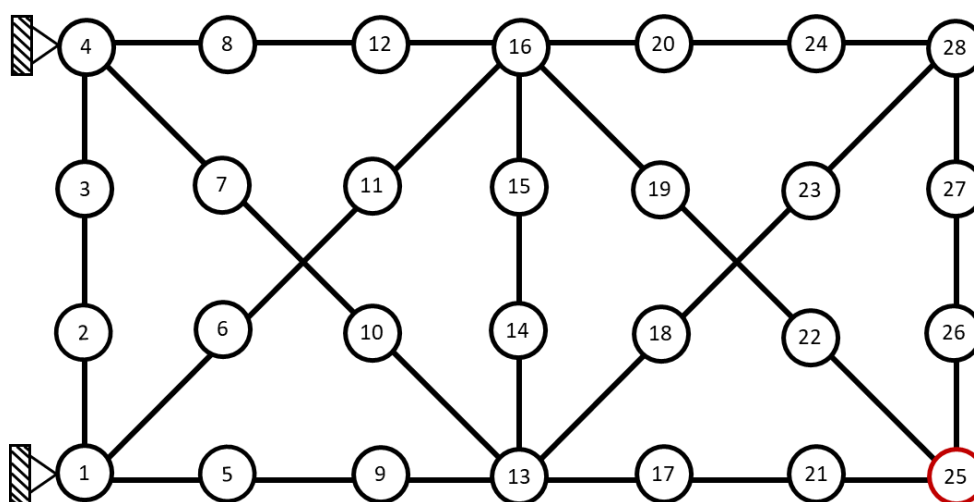


Figura 30 - Modelação da Estrutura com Numeração dos Nós

As imperfeições globais são aplicadas nos nós intermédios da estrutura que conectam 6 elementos, atingindo o valor definido nomeadamente nos nós 13 e 16. As imperfeições locais são aplicadas aos nós intermédios das barras da estrutura.

Para permitir a aplicação dos empenos e a deslocação da posição inicial dos nós, é vantajoso que cada barra da estrutura seja modelada por vários elementos, tendo-se optado por uma sequência de três vigas colineares. A figura 31 ilustra a modelação da estrutura e a numeração dos 33 elementos necessários.

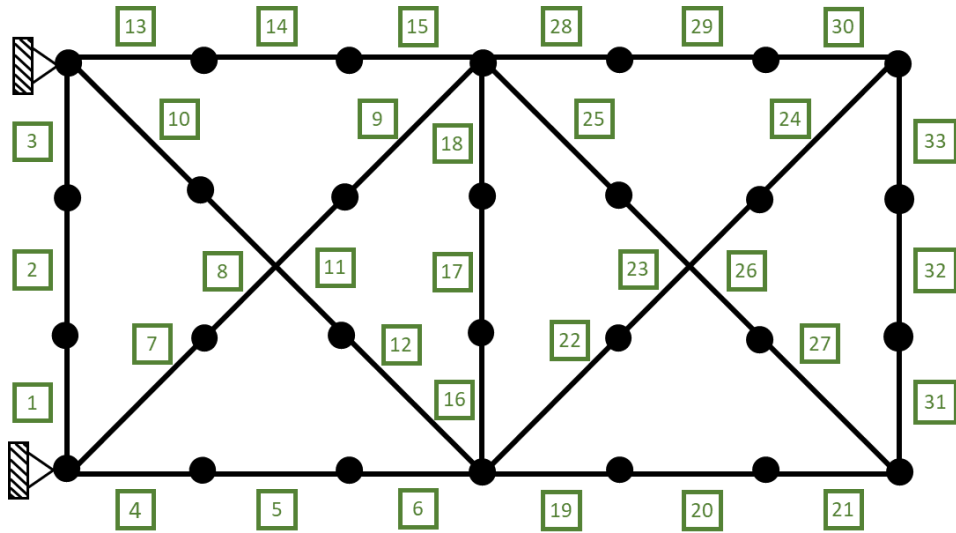


Figura 31 - Modelação da Estrutura com Numeração dos Elementos

Ainda assim, uma vez que cada barra tem apenas uma área e não três, existem apenas 11 diferentes variáveis e, portanto, 11 barras que foram numeradas de acordo com a figura 32.

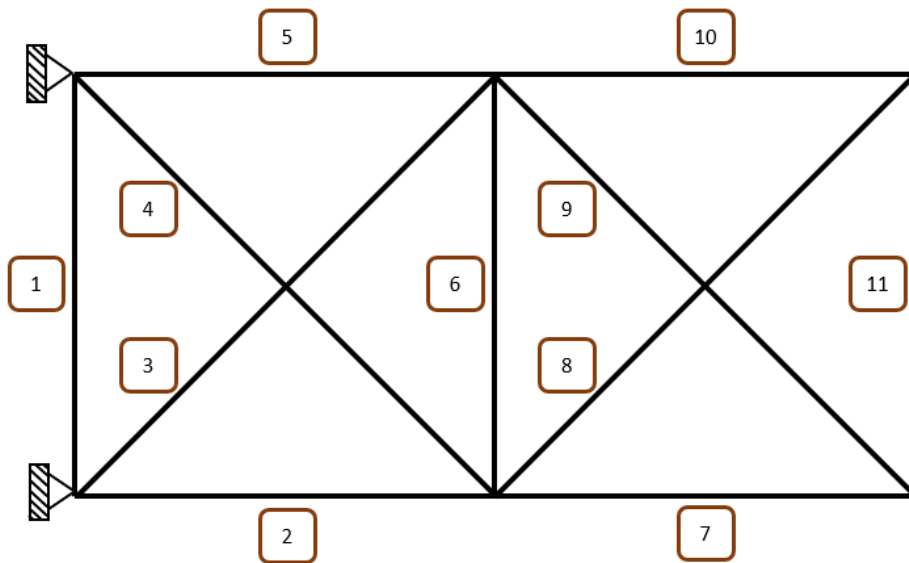


Figura 32 - Modelação da Estrutura com Numeração das Barras

Os autores do artigo tido como base realizaram 6 diferentes combinações nas quais consideraram a presença/ausência de imperfeições locais e globais e analisaram o efeito na solução. Nas combinações de 1 a 4 foi imposto um deslocamento de $-10^{-6} m$, já nas duas últimas, o deslocamento imposto foi aumentado para $-10^{-2} m$. Ambos os valores de deslocamento imposto são aplicados na vertical no nó 25, destacado a vermelho na figura 30. Na tabela 1 apresentam-se as várias combinações utilizadas.

Tabela 1 - Combinações de Imperfeições

Combinação	Imperfeição Local	Imperfeição Global	δ
1	Não	Não	10^{-6}
2	Sim	Não	10^{-6}
3	Não	Sim	10^{-6}
4	Sim	Sim	10^{-6}
5	Sim	Não	10^{-2}
6	Sim	Sim	10^{-2}

As soluções ótimas, obtidas pelos autores, resultantes da otimização com as diferentes combinações, estão ilustradas na figura 33.

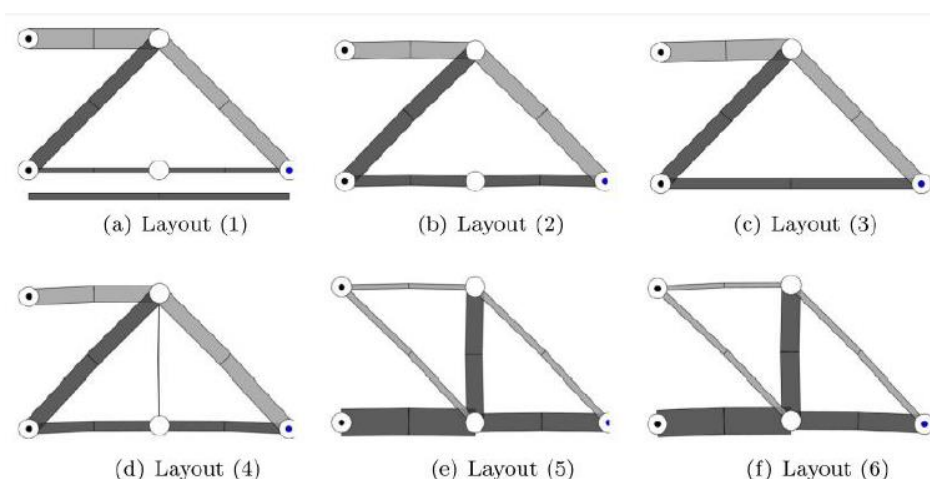


Figura 33 - Otimizações Resultantes das Combinações de Imperfeições (retirado de [2])

No âmbito da presente dissertação, para um deslocamento de $-10^{-6} m$ optou-se por dar ênfase às combinações 1 e 4, respetivamente sem imperfeições (caso A) e com ambas as imperfeições aplicadas (caso B)

Para o deslocamento de $-10^{-2} m$ a ênfase na presente dissertação assenta na combinação 6, com ambas as imperfeições aplicadas embora com algumas alterações face ao apresentado no artigo (caso C).

Seguidamente pode observar-se a ilustração da modelação das estruturas para ambos os casos, sem e com as imperfeições iniciais impostas. Recorreu-se ao programa 'grafico_topologia_optima_PROAES1' para a obtenção das mesmas. De salientar que as imperfeições locais iniciais eram de 0.01 m e as imperfeições globais de 0.05 m, o que não é muito expressivo visualmente.

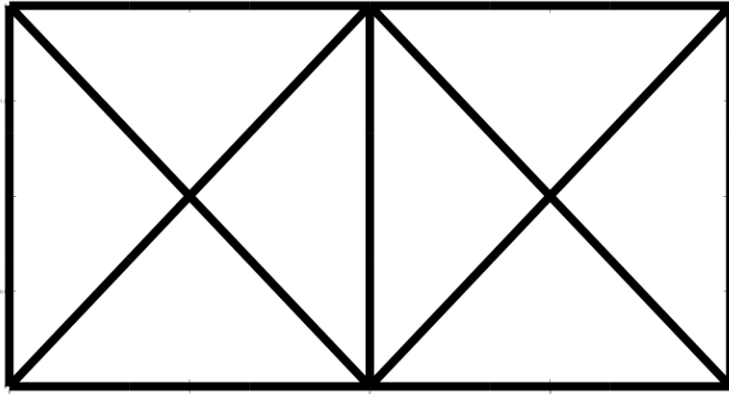


Figura 34 - Treliça 11 Barras sem Imperfeições

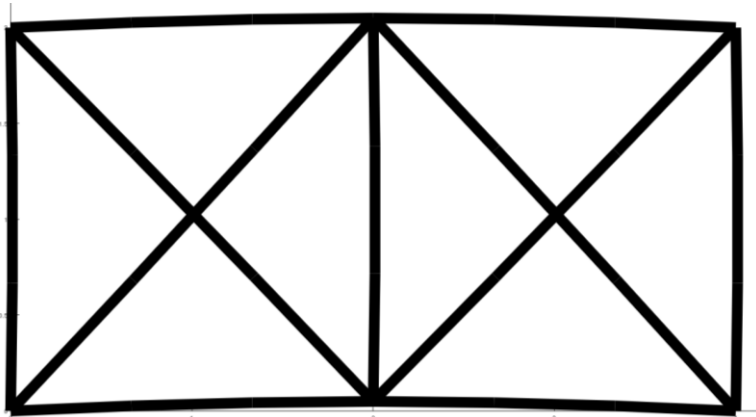


Figura 35 - Treliça 11 Barras com Imperfeições

4

RESULTADOS

Para a obtenção de resultados tendo em conta a metodologia proposta pelo artigo base, realizaram-se várias otimizações, tendo-se procurado verificar alterações nas áreas das barras e nas forças obtidas quando a estrutura é sujeita a diferentes deslocamentos máximos. Foi também averiguada a importância do grau de imperfeições quer na força necessária para atingir o deslocamento definido, quer na convergência. Para isso, criaram-se 3 novos ficheiros de dados nos quais se multiplicaram as imperfeições iniciais por fatores de 2, 3 e 4, resultando em imperfeições locais e globais com amplitude máxima respetivamente de 0.02 *m* e 0.1 *m* no primeiro caso, 0.03 *m* e 0.15 *m* no segundo caso, e 0.04 *m* e 0.2 *m* no último caso.

4.1 Sem Imperfeições (Caso A)

Após a correta definição dos vários parâmetros necessários ao correto funcionamento do PROAES_NL, executou-se a análise para a treliça sem imperfeições e obteve-se, como esperado, um ficheiro de resultados. Foi construída uma tabela, apresentada de seguida, na qual são exibidos os valores do deslocamento em *x* e *y*, assim como das rotações em *z*. Foi salientado, a negrito, o valor dos deslocamentos e rotações no nó 25 (nó inferior direito da estrutura) que corresponde ao valor definido como máximo.

Tabela 2 - Deslocamentos e rotações obtidas pelo *OCTAVE* para o caso A.

Nó	Dx	Dy	Rotz
1	0	0	-6.8213x10 ⁻⁸
2	9.9649x10 ⁻⁹	9.1224x10 ⁻¹⁷	2.3055x10 ⁻⁸
3	-1.0379x10 ⁻⁸	2.4163x10 ⁻¹⁷	2.2738x10 ⁻⁸
4	0	0	-6.9164x10 ⁻⁷
5	-6.1848x10 ⁻⁸	-7.8731x10 ⁻⁸	-1.6198x10 ⁻⁷
6	2.8473x10 ⁻⁸	-8.7723x10 ⁻⁸	-1.0819x10 ⁻⁷
7	-2.7731x10 ⁻⁸	-8.5565x10 ⁻⁸	-1.0402x10 ⁻⁷
8	6.2349x10 ⁻⁸	-8.1629x10 ⁻⁸	-1.6667x10 ⁻⁷
9	-1.2369x10 ⁻⁷	-2.0715x10 ⁻⁷	-2.1673x10 ⁻⁷
10	-8.5217x10 ⁻⁸	-2.0089x10 ⁻⁷	-1.5849x10 ⁻⁷
11	8.7892x10 ⁻⁸	-2.0639x10 ⁻⁷	-1.6117x10 ⁻⁷
12	1.2469x10 ⁻⁷	-2.1310x10 ⁻⁷	-2.1938x10 ⁻⁷
13	-1.8554x10 ⁻⁷	-3.5904x10 ⁻⁷	-2.3243x10 ⁻⁷
14	-5.3758x10 ⁻⁸	-3.6096x10 ⁻⁷	-1.7262x10 ⁻⁷
15	5.7526x10 ⁻⁸	-3.6288x10 ⁻⁷	-1.7092x10 ⁻⁷
16	1.8705x10 ⁻⁷	-3.6479x10 ⁻⁷	-2.2733x10 ⁻⁷
17	-2.0841x10 ⁻⁷	-5.4986x10 ⁻⁷	-3.2777x10 ⁻⁷
18	-5.1486x10 ⁻⁸	-5.4549x10 ⁻⁷	-2.4781x10 ⁻⁷
19	5.6665x10 ⁻⁸	-5.5985x10 ⁻⁷	-2.5939x10 ⁻⁷
20	2.0558x10 ⁻⁷	-5.4270x10 ⁻⁷	-2.9653x10 ⁻⁷
21	-2.3128x10 ⁻⁷	-7.7973x10 ⁻⁷	-3.4967x10 ⁻⁷
22	-9.2267x10 ⁻⁸	-7.7345x10 ⁻⁷	-2.8304x10 ⁻⁷
23	9.1839x10 ⁻⁸	-7.4122x10 ⁻⁷	-2.6034x10 ⁻⁷
24	2.2411x10 ⁻⁷	-7.4789x10 ⁻⁷	-3.1081x10 ⁻⁷
25	-2.5412x10⁻⁷	-1.0000x10⁻⁶	-2.9811x10⁻⁷
26	-7.7049x10 ⁻⁸	-9.8147x10 ⁻⁷	-2.4114x10 ⁻⁷
27	7.7955x10 ⁻⁸	-9.6294x10 ⁻⁷	-2.3182x10 ⁻⁷
28	2.4264x10 ⁻⁷	-9.4441x10 ⁻⁷	-2.7017x10 ⁻⁷

De maneira a comprovar o bom funcionamento do programa e dos resultados obtidos, recorreu-se ao software de elementos finitos *ANSYS*. Os resultados alcançados por este programa, podem ser consultados na tabela abaixo. Os deslocamentos no nó 25 são novamente realçados para uma visualização mais facilitada.

Tabela 3 - Deslocamentos e rotações obtidos pelo ANSYS para o caso A.

Nó	Dx	Dy	Rotz
1	0	0	-6.8057x10 ⁻⁸
2	9.8705x10 ⁻⁹	0.57203x10 ⁻¹⁷	2.3163x10 ⁻⁸
3	-1.0507x10 ⁻⁸	-0.61473x10 ⁻¹⁷	2.2686x10 ⁻⁸
4	0	0	-6.9488x10 ⁻⁷
5	-6.1848x10 ⁻⁸	-7.8823x10 ⁻⁸	-1.6190x10 ⁻⁷
6	2.8374x10 ⁻⁸	-8.7629x10 ⁻⁸	-1.0812x10 ⁻⁷
7	-2.7845x10 ⁻⁸	-8.5679x10 ⁻⁸	-1.0408x10 ⁻⁷
8	6.2349x10 ⁻⁸	-8.1472x10 ⁻⁸	-1.6738x10 ⁻⁷
9	-1.2370x10 ⁻⁷	-2.0719x10 ⁻⁷	-2.1668x10 ⁻⁷
10	-8.5314x10 ⁻⁸	-2.0098x10 ⁻⁷	-1.5836x10 ⁻⁷
11	8.7819x10 ⁻⁸	-2.0632x10 ⁻⁷	-1.6127x10 ⁻⁷
12	1.2470x10 ⁻⁷	-2.1312x10 ⁻⁷	-2.2000x10 ⁻⁷
13	-1.8554x10 ⁻⁷	-3.5904x10 ⁻⁷	-2.3237x10 ⁻⁷
14	-5.3795x10 ⁻⁸	-3.6096x10 ⁻⁷	-1.7257x10 ⁻⁷
15	5.7476x10 ⁻⁸	-3.6288x10 ⁻⁷	-1.7094x10 ⁻⁷
16	1.8705x10 ⁻⁷	-3.6480x10 ⁻⁷	-2.2746x10 ⁻⁷
17	-2.0841x10 ⁻⁷	-5.4990x10 ⁻⁷	-3.2793x10 ⁻⁷
18	-5.1516x10 ⁻⁸	-5.4547x10 ⁻⁷	-2.4728x10 ⁻⁷
19	5.6617x10 ⁻⁸	-5.5990x10 ⁻⁷	-2.5942x10 ⁻⁷
20	2.0558x10 ⁻⁷	-5.4245x10 ⁻⁷	-2.9639x10 ⁻⁷
21	-2.3128x10 ⁻⁷	-7.7991x10 ⁻⁷	-3.4985x10 ⁻⁷
22	-9.2314x10 ⁻⁸	-7.7349x10 ⁻⁷	-2.8298x10 ⁻⁷
23	9.1851x10 ⁻⁸	-7.4123x10 ⁻⁷	-2.6039x10 ⁻⁷
24	2.2411x10 ⁻⁷	-7.4782x10 ⁻⁷	-3.1059x10 ⁻⁷
25	-2.5415x10⁻⁷	-1.0000x10⁻⁶	-2.9814x10⁻⁷
26	-7.7027x10 ⁻⁸	-9.8147x10 ⁻⁷	-2.4117x10 ⁻⁷
27	7.7987x10 ⁻⁸	-9.6294x10 ⁻⁷	-2.3181x10 ⁻⁷
28	2.4264x10 ⁻⁷	-9.4441x10 ⁻⁷	-2.7007x10 ⁻⁷

4.1.1 Comparação de resultados com ANSYS

Com o objetivo de validar os resultados obtidos pelo PROAES_NL utilizou-se o programa PROAES_2_ANSYS, que compila a informação presente no ficheiro .inp num ficheiro do tipo .ans para que possa ser reproduzido no software ANSYS. Neste software foi necessá-

rio recorrer à análise para grandes deslocamentos, como ilustrado na figura 36 e à aplicação do desejado deslocamento no nó 25.

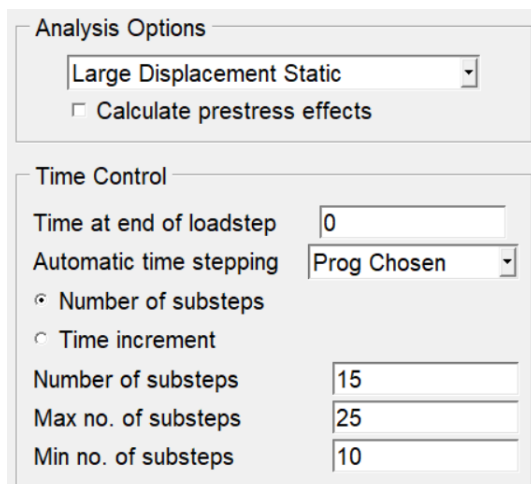


Figura 36 - Opções de Análise no ANSYS

Criou-se uma tabela de forma a serem mais facilmente observáveis os valores obtidos pelos dois softwares assim como o erro relativo, salientado na tabela num tom de laranja. O erro relativo foi calculado pela seguinte equação:

$$Erro\ relativo\ percentual = \left| \frac{PROAES_NL - ANSYS}{ANSYS} \right| * 100 \quad (18)$$

A tabela com os resultados é apresentada na seguinte página.

Tabela 4 - Comparação de resultados entre os dois softwares para o caso A.

SEM IMPERFEIÇÕES								
DX			DY			ROTZ		
OCTAVE	ANSYS	ERRO	OCTAVE	ANSYS	ERRO	OCTAVE	ANSYS	ERRO
0	0	-	0	0	-	-6,82E-08	-6,81E-08	0,23
9,96E-09	9,87E-09	0,96	9,12E-17	5,72E-17	59,47	2,31E-08	2,32E-08	0,47
-1,04E-08	-1,05E-08	1,22	2,42E-17	-6,15E-17	139,31	2,27E-08	2,27E-08	0,23
0	0	-	0	0	-	-6,92E-07	-6,95E-07	0,47
-6,18E-08	-6,18E-08	0,00	-7,87E-08	-7,88E-08	0,12	-1,62E-07	-1,62E-07	0,05
2,85E-08	2,84E-08	0,35	-8,77E-08	-8,76E-08	0,11	-1,08E-07	-1,08E-07	0,06
-2,77E-08	-2,78E-08	0,41	-8,56E-08	-8,57E-08	0,13	-1,04E-07	-1,04E-07	0,06
6,23E-08	6,23E-08	0,00	-8,16E-08	-8,15E-08	0,19	-1,67E-07	-1,67E-07	0,42
-1,24E-07	-1,24E-07	0,01	-2,07E-07	-2,07E-07	0,02	-2,17E-07	-2,17E-07	0,02
-8,52E-08	-8,53E-08	0,11	-2,01E-07	-2,01E-07	0,04	-1,58E-07	-1,58E-07	0,08
8,79E-08	8,78E-08	0,08	-2,06E-07	-2,06E-07	0,03	-1,61E-07	-1,61E-07	0,06
1,25E-07	1,25E-07	0,01	-2,13E-07	-2,13E-07	0,01	-2,19E-07	-2,20E-07	0,28
-1,86E-07	-1,86E-07	0,00	-3,59E-07	-3,59E-07	0,00	-2,32E-07	-2,32E-07	0,03
-5,38E-08	-5,38E-08	0,07	-3,61E-07	-3,61E-07	0,00	-1,73E-07	-1,73E-07	0,03
5,75E-08	5,75E-08	0,09	-3,63E-07	-3,63E-07	0,00	-1,71E-07	-1,71E-07	0,01
1,87E-07	1,87E-07	0,00	-3,65E-07	-3,65E-07	0,00	-2,27E-07	-2,27E-07	0,06
-2,08E-07	-2,08E-07	0,00	-5,50E-07	-5,50E-07	0,01	-3,28E-07	-3,28E-07	0,05
-5,15E-08	-5,15E-08	0,06	-5,45E-07	-5,45E-07	0,00	-2,48E-07	-2,47E-07	0,21
5,67E-08	5,66E-08	0,08	-5,60E-07	-5,60E-07	0,01	-2,59E-07	-2,59E-07	0,01
2,06E-07	2,06E-07	0,00	-5,43E-07	-5,42E-07	0,05	-2,97E-07	-2,96E-07	0,05
-2,31E-07	-2,31E-07	0,00	-7,80E-07	-7,80E-07	0,02	-3,50E-07	-3,50E-07	0,05
-9,23E-08	-9,23E-08	0,05	-7,73E-07	-7,73E-07	0,01	-2,83E-07	-2,83E-07	0,02
9,18E-08	9,19E-08	0,01	-7,41E-07	-7,41E-07	0,00	-2,60E-07	-2,60E-07	0,02
2,24E-07	2,24E-07	0,00	-7,48E-07	-7,48E-07	0,01	-3,11E-07	-3,11E-07	0,07
-2,54E-07	-2,54E-07	0,01	-1,00E-06	-1,00E-06	0,00	-2,98E-07	-2,98E-07	0,01
-7,70E-08	-7,70E-08	0,03	-9,81E-07	-9,81E-07	0,00	-2,41E-07	-2,41E-07	0,01
7,80E-08	7,80E-08	0,04	-9,63E-07	-9,63E-07	0,00	-2,32E-07	-2,32E-07	0,00
2,43E-07	2,43E-07	0,00	-9,44E-07	-9,44E-07	0,00	-2,70E-07	-2,70E-07	0,04

A força necessária para atingir o deslocamento máximo definido foi também obtida com recurso a ambos os softwares. A figura 37 mostra o resultado obtido através da utilização do programa *OCTAVE*, nomeadamente recorrendo ao *ef2opt*.

ef2opt	
1	1
2	1
3	2, -6.210683613307e-05

Figura 37 - Força Necessária para atingir o deslocamento do caso A segundo o *OCTAVE*

Utilizando o software de elementos finitos, *ANSYS*, a força resultante no nó 25 é ilustrada na figura 38.

NODE	FX	FY	HZ
1	0.12421E-003	0.31428E-004	
4	-0.12421E-003	0.30677E-004	
25		-0.62106E-004	

Figura 38 - Força Necessária para atingir o deslocamento do caso A segundo o *ANSYS*

Pode observar-se uma aproximação muito boa e conseqüentemente comprova-se o bom funcionamento do *PROAES_NL* quer no cálculo dos deslocamentos e rotações, quer para a força necessária para o presente caso.

A utilização do *ANSYS* permitiu ainda a obtenção da estrutura deformada que pode ser observada na figura 39.

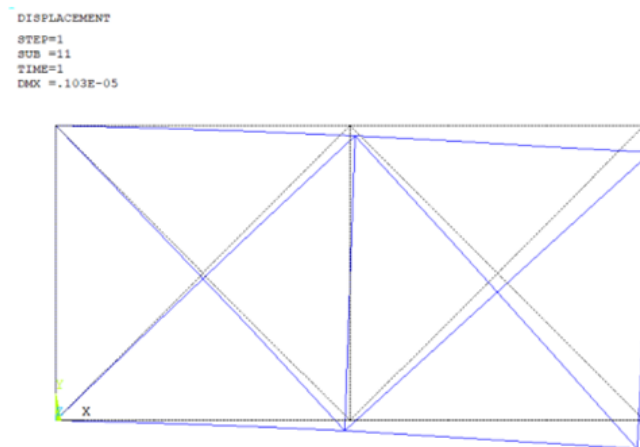


Figura 39 - Estrutura sem Imperfeições Deformada

4.2 Com imperfeições (Caso B)

O processo de comparação realizado foi feito para o caso da estrutura com as imperfeições iniciais aplicadas sendo os resultados da comparação novamente satisfatórios. Os mesmos podem ser consultados nas tabelas abaixo.

Tabela 5 - Deslocamentos e rotações obtidas pelo *OCTAVE* para o caso B.

Nó	Dx	Dy	Rotz
1	0	0	9.5291x10 ⁻⁷
2	-4.7560x10 ⁻⁷	1.7402x10 ⁻⁹	4.9112x10 ⁻⁷
3	-6.0291x10 ⁻⁷	-3.6518x10 ⁻⁹	-2.0467x10 ⁻⁷
4	0	0	-1.8122x10 ⁻⁶
5	-9.5172x10 ⁻⁸	1.0551x10 ⁻⁶	1.6039x10 ⁻⁶
6	2.1681x10 ⁻⁷	-2.6799x10 ⁻⁷	-9.0757x10 ⁻⁷
7	-7.6123x10 ⁻⁷	-8.4167x10 ⁻⁷	-3.7862x10 ⁻⁷
8	1.1187x10 ⁻⁷	-1.4507x10 ⁻⁶	-1.5285x10 ⁻⁶
9	-1.4351x10 ⁻⁷	8.7183x10 ⁻⁷	-1.6565x10 ⁻⁶
10	-4.7476x10 ⁻⁷	-5.9631x10 ⁻⁷	9.1836x10 ⁻⁷
11	5.4256x10 ⁻⁷	-6.3832x10 ⁻⁷	6.4670x10 ⁻⁸
12	1.6512x10 ⁻⁷	-1.4289x10 ⁻⁶	1.4814x10 ⁻⁶
13	-1.8418x10 ⁻⁷	-3.5047x10 ⁻⁷	-8.5151x10 ⁻⁷
14	2.7766x10 ⁻⁷	-3.6021x10 ⁻⁷	-4.7484x10 ⁻⁷
15	4.0909x10 ⁻⁷	-3.6302x10 ⁻⁷	8.1020x10 ⁻⁸
16	2.0828x10 ⁻⁷	-3.6884x10 ⁻⁷	4.6314x10 ⁻⁷
17	-2.0497x10 ⁻⁷	-5.1444x10 ⁻⁷	-5.6516x10 ⁻⁸
18	4.6743x10 ⁻⁷	-1.0750x10 ⁻⁶	-7.9701x10 ⁻⁷
19	-1.8275x10 ⁻⁷	-8.1195x10 ⁻⁷	-9.7428x10 ⁻⁷
20	2.2219x10 ⁻⁷	-6.0463x10 ⁻⁷	-7.1644x10 ⁻⁷
21	-2.2908x10 ⁻⁷	-7.1181x10 ⁻⁷	-5.5138x10 ⁻⁷
22	-5.0024x10 ⁻⁷	-1.1768x10 ⁻⁶	8.2418x10 ⁻⁸
23	5.5794x10 ⁻⁷	-1.2134x10 ⁻⁶	4.0811x10 ⁻⁷
24	2.2991x10 ⁻⁷	-9.4689x10 ⁻⁷	-1.9609x10 ⁻⁷
25	-2.5979x10⁻⁷	-1.0000x10⁻⁶	7.1545x10⁻⁸
26	-3.8089x10 ⁻⁷	-9.8182x10 ⁻⁷	1.1762x10 ⁻⁸
27	-1.2947x10 ⁻⁷	-9.6545x10 ⁻⁷	-7.0402x10 ⁻⁷
28	2.4634x10 ⁻⁷	-9.4345x10 ⁻⁷	-1.9338x10 ⁻⁸

Tabela 6 - Deslocamentos e rotações obtidas pelo ANSYS para o caso B.

Nó	Dx	Dy	Rotz
1	0	0	9.5316x10 ⁻⁷
2	-0.4758x10 ⁻⁷	1.7407x10 ⁻⁹	4.9129x10 ⁻⁷
3	-6.0311x10 ⁻⁷	-3.6530x10 ⁻⁹	-2.0471x10 ⁻⁷
4	0	0	-1.8129x10 ⁻⁶
5	-0.9518x10 ⁻⁸	1.0553x10 ⁻⁶	1.1602x10 ⁻⁶
6	2.1678x10 ⁻⁷	-2.6795x10 ⁻⁷	-9.0726x10 ⁻⁷
7	-7.6152x10 ⁻⁷	-8.4198x10 ⁻⁷	-3.7868x10 ⁻⁷
8	1.1189x10 ⁻⁷	-1.4510x10 ⁻⁶	-1.5283x10 ⁻⁶
9	1.4351x10 ⁻⁷	-8.7166x10 ⁻⁷	-1.6567x10 ⁻⁶
10	-4.7488x10 ⁻⁷	-5.9645x10 ⁻⁷	9.1866x10 ⁻⁷
11	5.4223x10 ⁻⁷	-6.3798x10 ⁻⁷	6.4673x10 ⁻⁸
12	1.6513x10 ⁻⁷	-1.4288x10 ⁻⁶	1.4818x10 ⁻⁶
13	-1.8417x10 ⁻⁷	-3.5047x10 ⁻⁷	-8.5129x10 ⁻⁷
14	2.7752x10 ⁻⁷	-3.6021x10 ⁻⁷	-4.7466x10 ⁻⁷
15	4.0891x10 ⁻⁷	-3.6301x10 ⁻⁷	8.0928x10 ⁻⁸
16	2.0829x10 ⁻⁷	-3.6883x10 ⁻⁷	4.6265x10 ⁻⁷
17	-2.0497x10 ⁻⁷	-5.1435x10 ⁻⁷	-5.6309x10 ⁻⁸
18	4.6739x10 ⁻⁷	-1.0750x10 ⁻⁶	-7.9700x10 ⁻⁷
19	-1.8300x10 ⁻⁷	-8.1220x10 ⁻⁷	-9.7406x10 ⁻⁷
20	2.2219.x10 ⁻⁷	-6.0476x10 ⁻⁷	-7.1654x10 ⁻⁷
21	-2.2907x10 ⁻⁷	-7.1158x10 ⁻⁷	-5.5142x10 ⁻⁷
22	-5.0007x10 ⁻⁷	-1.1766x10 ⁻⁶	8.2749x10 ⁻⁸
23	5.5786x10 ⁻⁷	-1.2133x10 ⁻⁶	4.0801x10 ⁻⁷
24	2.2992x10 ⁻⁷	-9.4705x10 ⁻⁷	-1.9596x10 ⁻⁷
25	-2.5980x10⁻⁷	-1.0000x10⁻⁶	7.1113x10⁻⁸
26	-3.8075x10 ⁻⁷	-9.8182x10 ⁻⁷	1.1707x10 ⁻⁸
27	-1.2936x10 ⁻⁷	-9.6546x10 ⁻⁷	-7.0389x10 ⁻⁷
28	2.4635x10 ⁻⁷	-9.4345x10 ⁻⁷	-1.9225x10 ⁻⁸

4.2.1 Comparação de resultados com ANSYS

Tabela 7 - Comparação de resultados entre os dois softwares para o caso B.

COM IMPERFEIÇÕES								
DX			DY			ROTZ		
OCTAVE	ANSYS	ERRO	OCTAVE	ANSYS	ERRO	OCTAVE	ANSYS	ERRO
0	0	-	0	0	-	9,53E-07	9,53E-07	0,03
-4,76E-07	-4,76E-07	0,04	1,74E-09	1,74E-09	0,03	4,91E-07	4,91E-07	0,03
-6,03E-07	-6,03E-07	0,03	-3,65E-09	-3,65E-09	0,03	-2,05E-07	-2,05E-07	0,02
0	0	-	0	0	-	-1,81E-06	-1,81E-06	0,04
-9,52E-08	-9,52E-08	0,01	1,06E-06	1,06E-06	0,02	1,16E-06	1,16E-06	0,02
2,17E-07	2,17E-07	0,01	-2,68E-07	-2,68E-07	0,01	-9,08E-07	-9,07E-07	0,03
-7,61E-07	-7,62E-07	0,04	-8,42E-07	-8,42E-07	0,04	-3,79E-07	-3,79E-07	0,02
1,12E-07	1,12E-07	0,02	-1,45E-06	-1,45E-06	0,02	-1,53E-06	-1,53E-06	0,01
-1,44E-07	-1,44E-07	0,00	8,72E-07	8,72E-07	0,02	-1,66E-06	-1,66E-06	0,01
-4,75E-07	-4,75E-07	0,03	-5,96E-07	-5,96E-07	0,02	9,18E-07	9,19E-07	0,03
5,43E-07	5,42E-07	0,06	-6,38E-07	-6,38E-07	0,05	6,47E-08	6,47E-08	0,00
1,65E-07	1,65E-07	0,01	-1,43E-06	-1,43E-06	0,01	1,48E-06	1,48E-06	0,03
-1,84E-07	-1,84E-07	0,01	-3,50E-07	-3,50E-07	0,00	-8,52E-07	-8,51E-07	0,03
2,78E-07	2,78E-07	0,05	-3,60E-07	-3,60E-07	0,00	-4,75E-07	-4,75E-07	0,04
4,09E-07	4,09E-07	0,04	-3,63E-07	-3,63E-07	0,00	8,10E-08	8,09E-08	0,11
2,08E-07	2,08E-07	0,00	-3,69E-07	-3,69E-07	0,00	4,63E-07	4,63E-07	0,11
-2,05E-07	-2,05E-07	0,00	-5,14E-07	-5,14E-07	0,02	-5,65E-08	-5,63E-08	0,37
4,67E-07	4,67E-07	0,01	-1,08E-06	-1,08E-06	0,00	-7,97E-07	-7,97E-07	0,00
-1,83E-07	-1,83E-07	0,14	-8,12E-07	-8,12E-07	0,03	-9,74E-07	-9,74E-07	0,02
2,22E-07	2,22E-07	0,00	-6,05E-07	-6,05E-07	0,02	-7,16E-07	-7,17E-07	0,01
-2,29E-07	-2,29E-07	0,00	-7,12E-07	-7,12E-07	0,03	-5,51E-07	-5,51E-07	0,01
-5,00E-07	-5,00E-07	0,03	-1,18E-06	-1,18E-06	0,02	8,24E-08	8,27E-08	0,40
5,58E-07	5,58E-07	0,01	-1,21E-06	-1,21E-06	0,01	4,08E-07	4,08E-07	0,02
2,30E-07	2,30E-07	0,00	-9,47E-07	-9,47E-07	0,02	-1,96E-07	-1,96E-07	0,07
-2,60E-07	-2,60E-07	0,00	-1,00E-06	-1,00E-06	0,00	7,15E-08	7,11E-08	0,61
-3,81E-07	-3,81E-07	0,04	-9,82E-07	-9,82E-07	0,00	1,18E-08	1,17E-08	0,47
-1,29E-07	-1,29E-07	0,09	-9,65E-07	-9,65E-07	0,00	-7,04E-07	-7,04E-07	0,02
2,46E-07	2,46E-07	0,00	-9,43E-07	-9,43E-07	0,00	-1,93E-08	-1,92E-08	0,59

ef2opt	
1	1
2	1
3	2, -5.341874758888e-05

Figura 40 - Força necessária para atingir o deslocamento do caso B segundo o *OCTAVE*

NODE	FX	FY	HZ
1	0.10684E-003	0.38382E-004	
4	-0.10684E-003	0.15036E-004	
25		-0.53418E-004	

Figura 41 - Força necessária para atingir o deslocamento do caso B segundo o *ANSYS*

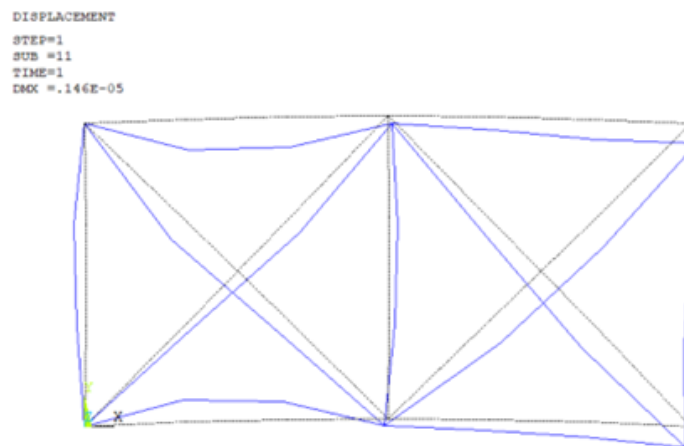


Figura 42 - Estrutura com Imperfeições Deformada

4.3 Otimização Topológica

4.3.1 Caso A

Após a validação do funcionamento do PROAES_NL no cálculo dos deslocamentos, rotações e forças, avançou-se para a realização da otimização topológica da estrutura. Recorrendo ao ficheiro 'inicializacao.m' já abordado anteriormente, definiram-se os parâmetros:

- Move limit = 0.0001
- Máximo de iterações = 500
- Valor inicial das variáveis = $3.95 \times 10^{-4} m^2$
- Força aplicada = $-0.0001 N$
- Limite inferior de área = $2 \times 10^{-5} m^2$
- Limite superior de área = $2 \times 10^{-3} m^2$

O gráfico resultante desta otimização pode ser consultado na figura 43.

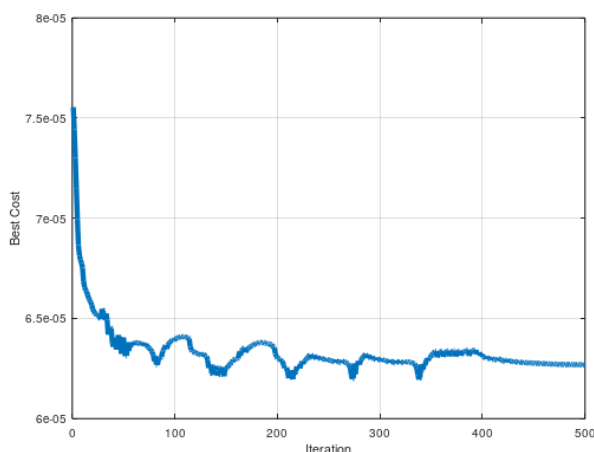


Figura 43 - Gráfico Objetivo vs Iteração (caso A)

De seguida, na figura 44, são apresentados os valores das áreas de cada barra. O objetivo consiste na maximização da força, mas como abordado anteriormente e para que se mantivesse positivo foram feitas alterações, consequentemente, a sua proximidade de zero é considerada satisfatória. O mesmo acontece para o constrangimento de volume, embora este se aproxime de zero vindo do lado negativo. Por fim é apresentado o tempo decorrido para a obtenção do resultado.

```

Iteração nº 500
Objetivo: 6.26875e-05
Constrangimento: -2.039617e-02
Variáveis:
    2.647763e-05
    6.397190e-04
    7.988304e-04
    5.886368e-05
    1.134302e-03
    2.744420e-05
    5.832325e-04
    4.724993e-05
    7.989474e-04
    3.876459e-05
    3.841328e-05
t= 3760.713 s

```

Figura 44 - Resultados da Otimização (caso A)

Por fim, na figura 45, é ilustrada a estrutura considerada ótima pelo programa para resistir aos esforços aplicados. É de salientar as semelhanças obtidas entre esta estrutura e a obtida no layout 1, presente na figura 33, com exceção da barra sobreposta que não foi considerada no presente estudo.

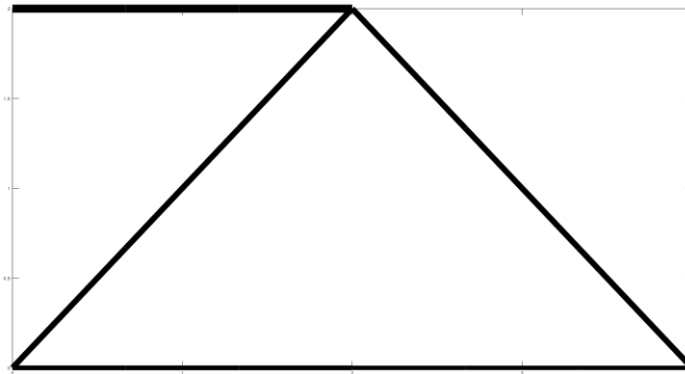


Figura 45 - Estrutura Otimizada (caso A)

4.3.2 Caso B

Com as imperfeições iniciais aplicadas, apenas foi alterado nos parâmetros de inicialização o limite de iterações que passou para 800, uma vez que para o valor definido anteriormente a convergência não era atingida. Desta otimização resultaram as seguintes figuras.

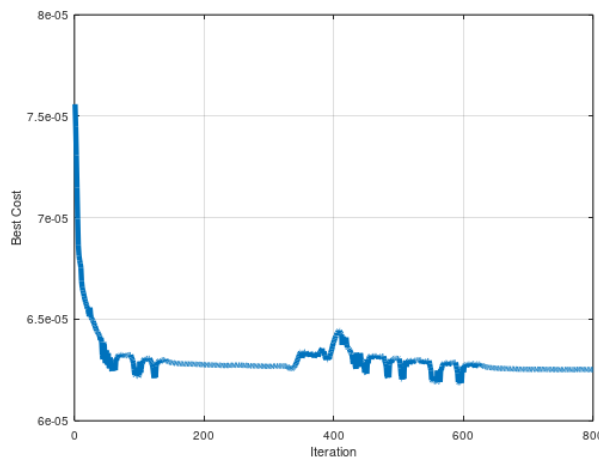


Figura 46 - Gráfico Objetivo vs Iteração (caso B)

```

Iteração n° 800
Objetivo: 6.25186e-05
Constrangimento: -1.881369e-02
Variáveis:
    2.566798e-05
    6.493657e-04
    8.121293e-04
    4.818061e-05
    1.157190e-03
    2.577761e-05
    5.634455e-04
    3.957965e-05
    8.108773e-04
    3.268443e-05
    3.241013e-05
t= 7122.122 s

```

Figura 47 - Resultados da Otimização (caso B)

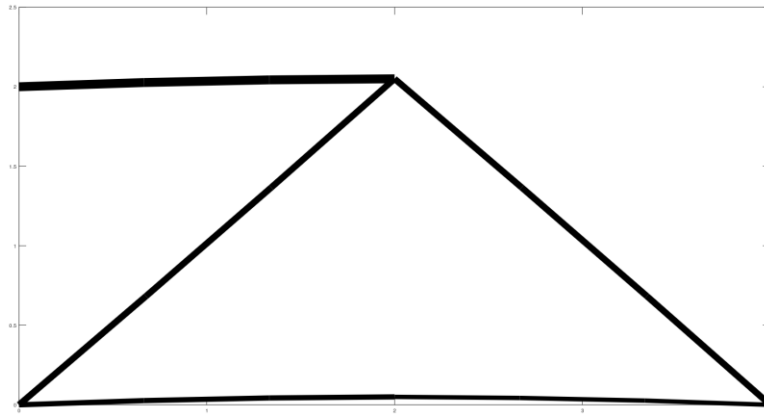


Figura 48 - Estrutura Otimizada (caso B)

4.4 Alterações ao ficheiro

Procurou-se replicar o estudo realizado e apresentado anteriormente, para o deslocamento imposto de $-10^{-2} m$, no entanto, para este caso, e como será comprovado no capítulo 4.3, foi necessária a criação de três novos ficheiros de dados, com o dobro (imperfeições locais de $0.02 m$ e globais de $0.1 m$), triplo (imperfeições locais de $0.03 m$ e globais de $0.15 m$) e o quádruplo (imperfeições locais de $0.04 m$ e globais de $0.2 m$) das imperfeições tidas como iniciais para permitir que fosse atingida a convergência. As estruturas resultantes da aplicação destas imperfeições são ilustradas na figura 49.

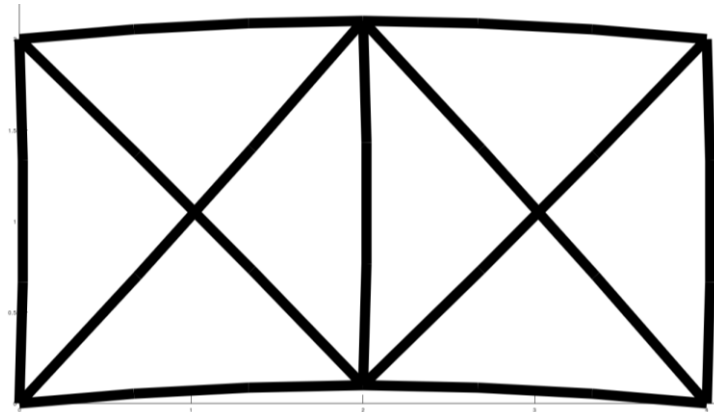


Figura 49 - Estrutura com o Dobro das Imperfeições Iniciais

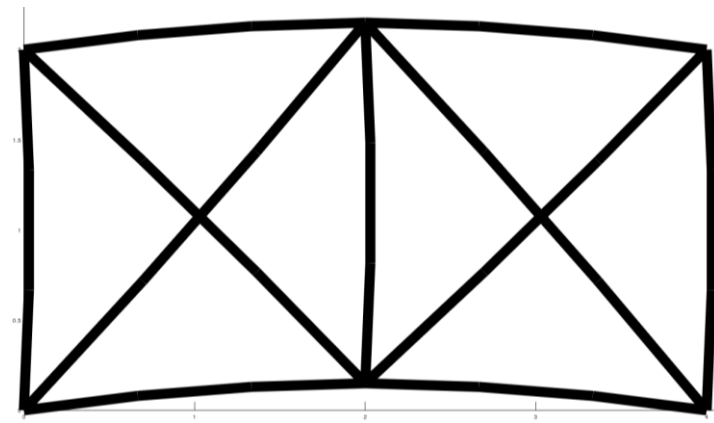


Figura 50 - Estrutura com o Triplo das Imperfeições Iniciais

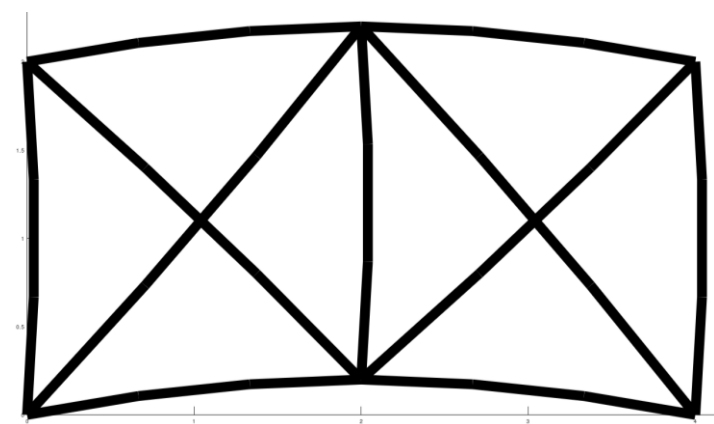


Figura 51 - Estrutura com o quádruplo das Imperfeições Iniciais

Devido a problemas de convergência que se verificaram quer no *OCTAVE* quer no *ANSYS*, não foi possível obter resultados para a estrutura sem imperfeições se considerado um deslocamento máximo imposto de $-10^{-2} m$. Desta forma, serão apenas apresentados os resultados referentes à estrutura que permite uma convergência mais facilitada, ou seja, com o quádruplo das imperfeições iniciais.

4.4.1 Caso C

Foi realizada a análise da estrutura, nomeadamente com imperfeições locais de $0.04 m$ e globais de $0.20 m$, ou seja, quatro vezes superior às imperfeições inicialmente consideradas. Os resultados dos deslocamentos e rotações podem ser observados nas tabelas seguintes.

Tabela 8 - Deslocamentos e rotações obtidas pelo *OCTAVE* para o caso C

Nó	Dx	Dy	Rotz
1	0	0	6.8829x10 ⁻³
2	-9.5365x10 ⁻⁴	3.7939x10 ⁻⁶	-2.6517x10 ⁻⁴
3	-1.7376x10 ⁻³	-4.9289x10 ⁻⁵	1.9869x10 ⁻³
4	0	0	-1.1959x10 ⁻²
5	-2.7279x10 ⁻³	1.5014x10 ⁻²	2.0344x10 ⁻²
6	1.0108x10 ⁻²	-1.0102x10 ⁻²	-1.9093x10 ⁻²
7	-3.7758x10 ⁻³	-4.5303x10 ⁻³	-4.0636x10 ⁻⁴
8	2.1187x10 ⁻³	-1.2903x10 ⁻²	-1.6069x10 ⁻²
9	-2.8456x10 ⁻³	1.4708x10 ⁻²	-2.1911x10 ⁻²
10	-1.6119x10 ⁻³	-2.2227x10 ⁻³	5.2856x10 ⁻³
11	1.4147x10 ⁻²	-1.4005x10 ⁻²	1.0685x10 ⁻²
12	2.4381x10 ⁻³	-1.4313x10 ⁻²	1.1831x10 ⁻²
13	-2.5160x10 ⁻³	-3.2636x10 ⁻³	-1.4933x10 ²
14	5.2780x10 ⁻³	-3.7916x10 ⁻³	-7.2670x10 ⁻³
15	6.5308x10 ⁻³	-3.8073x10 ⁻³	3.2819x10 ³
16	2.1296x10 ⁻³	-4.1005x10 ⁻³	8.3062x10 ⁻³
17	-2.6988x10 ⁻³	-6.1421x10 ⁻³	4.4227x10 ⁻⁴
18	6.6294x10 ⁻³	-1.4338x10 ⁻²	-1.0113x10 ⁻²
19	-2.2191x10 ⁻³	-8.4617x10 ⁻³	-1.0849x10 ⁻²
20	2.1057x10 ⁻³	-5.7817x10 ⁻³	-7.8059x10 ³
21	-2.8683x10 ⁻³	-7.2082x10 ⁻³	-4.6248x10 ³
22	-6.0087x10 ⁻³	-1.2074x10 ⁻²	1.2382x10 ⁻³
23	6.8077x10 ⁻³	-1.4659x10 ⁻²	8.0714x10 ⁻³
24	1.7377x10 ⁻³	-9.7993x10 ⁻³	-2.7035x10 ⁻³
25	-3.3839x10⁻³	-1.0000x10⁻²	6.4916x10⁻⁴
26	-4.4458x10 ⁻³	-9.8905x10 ⁻³	-2.5226x10 ⁻⁴
27	-1.6716x10 ⁻³	-9.8498x10 ⁻³	-7.3409x10 ⁻³
28	1.8158x10 ⁻³	-9.6032x10 ⁻³	1.4350x10 ⁻³

Tabela 9 - Deslocamentos e rotações obtidas pelo ANSYS para o caso C

Nó	Dx	Dy	Rotz
1	0	0	6.9591x10 ⁻³
2	-9.8177x10 ⁻⁴	-8.6334x10 ⁻⁸	-6.0351x10 ⁻⁵
3	-2.0085x10 ⁻³	-6.0259x10 ⁻⁵	2.3105x10 ⁻³
4	0	0	-1.3585x10 ⁻²
5	-2.5595x10 ⁻³	1.4178x10 ⁻²	1.8925x10 ⁻²
6	8.5582x10 ⁻²	-8.5477x10 ⁻³	-1.6928x10 ⁻²
7	-4.4781x10 ⁻³	-5.3524x10 ⁻³	-9.5827x10 ⁻⁴
8	2.3466x10 ⁻³	-1.4374x10 ⁻²	-1.7490x10 ⁻²
9	-2.670x10 ⁻³	1.3713x10 ⁻²	-2.0806x10 ⁻²
10	-2.1940x10 ⁻³	-2.9173x10 ⁻³	6.2305x10 ⁻³
11	1.2532x10 ⁻²	-1.2402x10 ⁻²	8.5715x10 ⁻³
12	2.6412x10 ⁻³	-1.5423x10 ⁻²	1.4162x10 ⁻²
13	-2.3428x10 ⁻³	-3.1839x10 ⁻³	-1.3810x10 ²
14	4.9641x10 ⁻³	-3.6764x10 ⁻³	-6.9605x10 ⁻³
15	6.2816x10 ⁻³	-3.6919x10 ⁻³	2.8353x10 ³
16	2.2858x10 ⁻³	-3.9572x10 ⁻³	7.6707x10 ⁻³
17	-2.5193x10 ⁻³	-5.9269x10 ⁻³	-1.8617x10 ⁻⁵
18	6.4459x10 ⁻³	-1.3831x10 ⁻²	-1.0022x10 ⁻²
19	-3.2468x10 ⁻³	-9.4715x10 ⁻³	-1.2204x10 ⁻²
20	2.2492x10 ⁻³	-6.0944x10 ⁻³	-8.1914x10 ³
21	-2.7303x10 ⁻³	-7.3779x10 ⁻³	-5.0269x10 ³
22	-7.0190x10 ⁻³	-1.3075x10 ⁻²	2.5246x10 ⁻³
23	6.7696x10 ⁻³	-1.4325x10 ⁻²	7.6192x10 ⁻³
24	1.8967x10 ⁻³	-1.0005x10 ⁻²	-2.0989x10 ⁻³
25	-3.2187x10⁻³	-1.0000x10⁻²	1.7465x10⁻³
26	-4.8935x10 ⁻³	-9.8503x10 ⁻³	-2.0877x10 ⁻⁴
27	-1.9855x10 ⁻³	-9.8061x10 ⁻³	-8.1270x10 ⁻³
28	2.0247x10 ⁻³	-9.5250x10 ⁻³	1.1635x10 ⁻³

4.4.2 Comparação de resultados com ANSYS

Os resultados foram novamente comparados com os obtidos através do ANSYS, verificando-se uma disparidade superior entre os valores dos dois *softwares* comparativamente com os casos de análise anteriores. Ainda assim, os seguintes resultados foram considerados satisfatórios na maioria dos casos.

Tabela 10 - Comparação de resultados entre softwares para o caso C

COM IMPERFEIÇÕES								
DX			DY			ROTZ		
OCTAVE	ANSYS	ERRO	OCTAVE	ANSYS	ERRO	OCTAVE	ANSYS	ERRO
0	0	-	0	0	-	6,88E-03	6,96E-03	1,09
-9,54E-04	-9,82E-04	2,86	3,79E-06	-8,63E-08	4494,44	-2,65E-04	-6,04E-05	339,38
-1,74E-03	-2,01E-03	13,49	-4,93E-05	-6,03E-05	18,20	1,99E-03	2,31E-03	14,01
0	0	-	0	0	-	-1,20E-02	-1,36E-02	11,97
-2,73E-03	-2,56E-03	6,58	1,50E-02	1,42E-02	5,90	2,03E-02	1,89E-02	7,50
1,01E-02	8,56E-02	88,19	-1,01E-02	-8,55E-03	18,18	-1,91E-02	-1,69E-02	12,79
-3,78E-03	-4,48E-03	15,68	-4,53E-03	-5,35E-03	15,36	-4,06E-04	-9,58E-04	57,59
2,12E-03	2,35E-03	9,71	-1,29E-02	-1,44E-02	10,23	-1,61E-02	-1,75E-02	8,12
-2,85E-03	-2,67E-03	6,58	1,47E-02	1,37E-02	7,26	-2,19E-02	-2,08E-02	5,31
-1,61E-03	-2,19E-03	26,53	-2,22E-03	-2,92E-03	23,81	5,29E-03	6,23E-03	15,17
1,41E-02	1,25E-02	12,89	-1,40E-02	-1,24E-02	12,93	1,07E-02	8,57E-03	24,66
2,44E-03	2,64E-03	7,69	-1,43E-02	-1,54E-02	7,20	1,18E-02	1,42E-02	16,46
-2,52E-03	-2,34E-03	7,39	-3,26E-03	-3,18E-03	2,50	-1,49E-02	-1,38E-02	8,13
5,28E-03	4,96E-03	6,32	-3,79E-03	-3,68E-03	3,13	-7,27E-03	-6,96E-03	4,40
6,53E-03	6,28E-03	3,97	-3,81E-03	-3,69E-03	3,13	3,28E-03	2,84E-03	15,75
2,13E-03	2,29E-03	6,83	-4,10E-03	-3,96E-03	3,62	8,31E-03	7,67E-03	8,28
-2,70E-03	-2,52E-03	7,12	-6,14E-03	-5,93E-03	3,63	4,42E-04	-1,86E-05	2475,62
6,63E-03	6,45E-03	2,85	-1,43E-02	-1,38E-02	3,67	-1,01E-02	-1,00E-02	0,91
-2,22E-03	-3,25E-03	31,65	-8,46E-03	-9,47E-03	10,66	-1,08E-02	-1,22E-02	11,10
2,11E-03	2,25E-03	6,38	-5,78E-03	-6,09E-03	5,13	-7,81E-03	-8,19E-03	4,71
-2,87E-03	-2,73E-03	5,05	-7,21E-03	-7,38E-03	2,30	-4,62E-03	-5,03E-03	8,00
-6,01E-03	-7,02E-03	14,39	-1,21E-02	-1,31E-02	7,66	1,24E-03	2,52E-03	50,95
6,81E-03	6,77E-03	0,56	-1,47E-02	-1,43E-02	2,33	8,07E-03	7,62E-03	5,94
1,74E-03	1,90E-03	8,38	-9,80E-03	-1,00E-02	2,06	-2,70E-03	-2,10E-03	28,81
-3,38E-03	-3,22E-03	5,13	-1,00E-02	-1,00E-02	0,00	6,49E-04	1,75E-03	62,83
-4,45E-03	-4,89E-03	9,15	-9,89E-03	-9,85E-03	0,41	-2,52E-04	-2,09E-04	20,83
-1,67E-03	-1,99E-03	15,81	-9,85E-03	-9,81E-03	0,45	-7,34E-03	-8,13E-03	9,67
1,82E-03	2,02E-03	10,32	-9,60E-03	-9,53E-03	0,82	1,44E-03	1,16E-03	23,33

ef2opt	
1	1
2	1
3	2, -1.630389335797e-01

Figura 52 - Força necessária para atingir o deslocamento do caso C segundo o *OCTAVE*

NODE	FX	FY	MZ
1	0.34445	0.23484	
4	-0.34510	-0.62645E-001	
25		-0.17267	

Figura 53 - Força necessária para atingir o deslocamento do caso C segundo o *ANSYS*

4.4.3 Otimização Topológica (Caso C)

Procedeu-se de seguida à realização da otimização topológica para as imperfeições referidas, o que se verificou uma tarefa mais exigente devido à dificuldade em atingir a convergência. Inicialmente os parâmetros foram os seguintes:

- Move limit = 0.00001
- Máximo de iterações = 600
- Valor inicial das variáveis = $3.95 \times 10^{-4} m^2$
- Força aplicada = $-0.5 N$
- Limite inferior de área = $2 \times 10^{-4} m^2$
- Limite superior de área = $2 \times 10^{-3} m^2$

Os dados resultantes desta tentativa são apresentados abaixo.

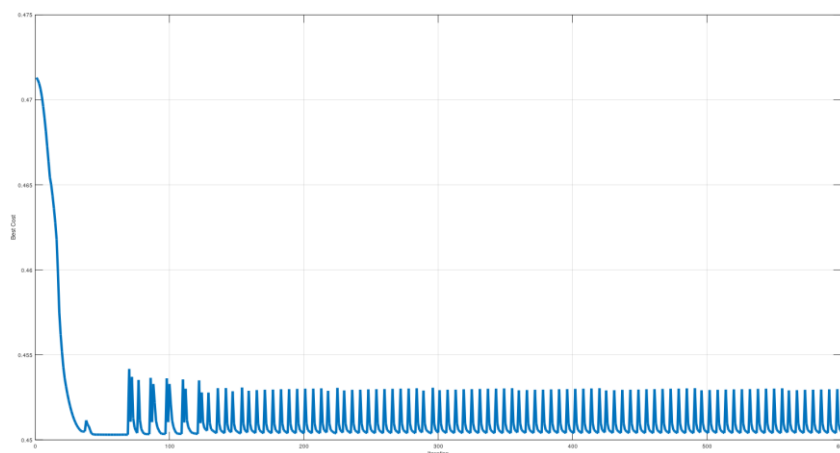


Figura 54 - Gráfico Objetivo vs Iteração

```

Iteração nº 600
Objetivo: 0.45051
Constrangimento: -1.757760e-04
Variáveis:
    2.000008e-04
    7.257292e-04
    7.799775e-04
    2.000006e-04
    5.230909e-04
    2.106816e-04
    4.723815e-04
    3.377995e-04
    3.551783e-04
    2.305473e-04
    2.121202e-04

```

Figura 55 - Resultados da Otimização

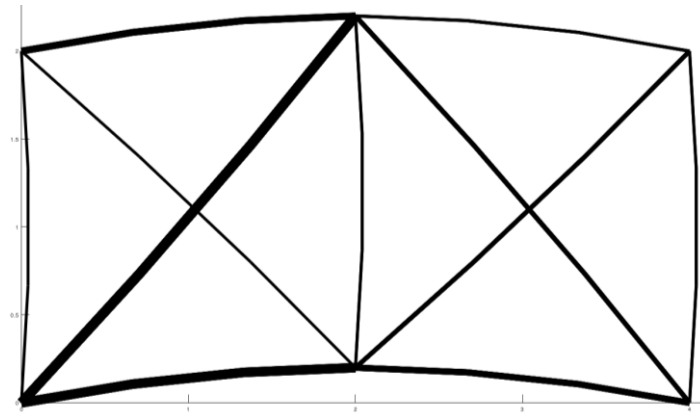


Figura 56 - Estrutura Otimizada

Estes resultados não foram considerados ideais, embora seja de salientar o facto de o algoritmo priorizar o aumento de áreas em barras sujeitas à compressão. Fizeram-se algumas alterações e novas tentativas de otimização com o objetivo de obter uma estrutura mais semelhante ao layout 6, presente no artigo tido como base. Considerou-se também importante aumentar o intervalo entre o limite inferior e superior de 10 para 100. Assim, os parâmetros foram alterados para:

- Move limit = 0.00001
- Máximo de iterações = 600
- Valor inicial das varáveis = $1 \times 10^{-3} m^2$
- Força aplicada = $-0.4 N$
- Limite inferior de área = $1 \times 10^{-4} m^2$
- Limite superior de área = $1 \times 10^{-2} m^2$

De forma a dar um pouco mais de liberdade ao programa foi também aumentado o constrangimento de volume máximo, que passou de $1 \times 10^{-2} m^3$, nas análises anteriores, para $2.55 \times 10^{-2} m^3$. Os resultados provenientes desta formulação foram os seguintes.

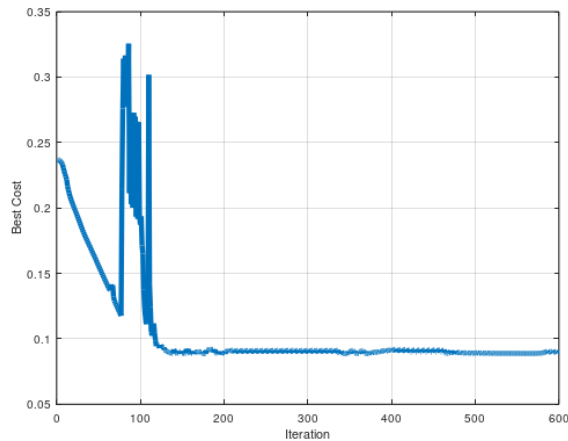


Figura 57 - Gráfico Objetivo vs Iteração (caso C)

```

Iteração n° 600
Objetivo: 0.0899932
Constrangimento: -1.278482e-03
Variáveis:
    1.071895e-04
    1.653521e-03
    2.223015e-03
    1.032114e-04
    2.455549e-03
    7.198334e-04
    1.564729e-03
    1.009404e-04
    1.619742e-03
    1.001194e-04
    1.069127e-04
t= 196386.193 s
  
```

Figura 58 - Resultados da Otimização (caso C)

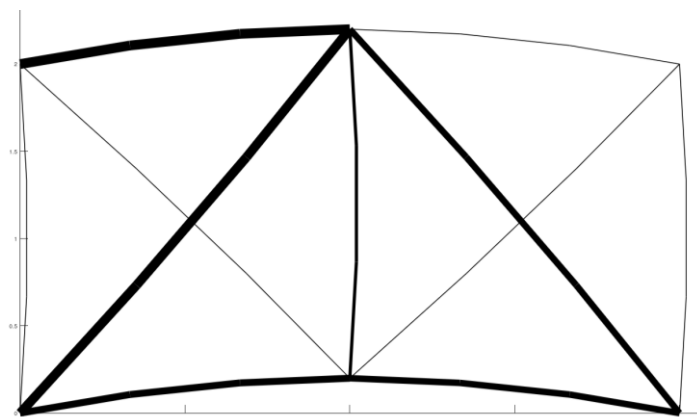


Figura 59 - Estrutura Otimizada (caso C)

Nesta última estrutura é possível observar que a área de várias barras na análise anterior foi transferida para as barras 2, 3, 5, 6, 7 e 9. Recorreu-se novamente à função que devolve a estrutura otimizada, desta vez considerando apenas as barras de área superior a $1.1 \times 10^{-4} m^2$. O resultado obtido é apresentado na figura 60.

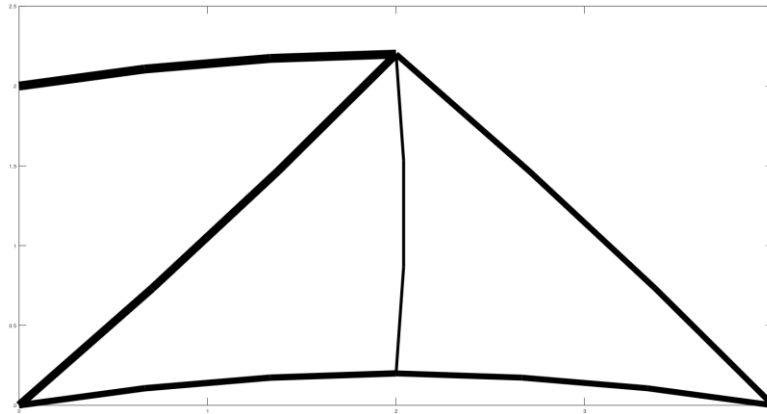


Figura 60 - Estrutura Otimizada (caso C)

4.5 Convergência

Recorreu-se ao aumento proporcional das imperfeições, uma vez que a aplicação destas diminui a necessidade de uma força tão elevada e permite uma convergência mais facilitada. Para comprovar esta afirmação, averiguou-se qual o limite de convergência obtido para cada uma das imperfeições. Os resultados obtidos tendo como base uma força aplicada de $-0.1 N$ são apresentados em forma de tabela e para melhor visualização, em gráfico, abaixo.

Tabela 11 - Estudo de convergência

Deslocamento Máximo	-4.73×10^{-3}	-7.13×10^{-3}	-1.47×10^{-2}	$-2,13 \times 10^{-2}$
Fator de imperfeição	1	2	3	4

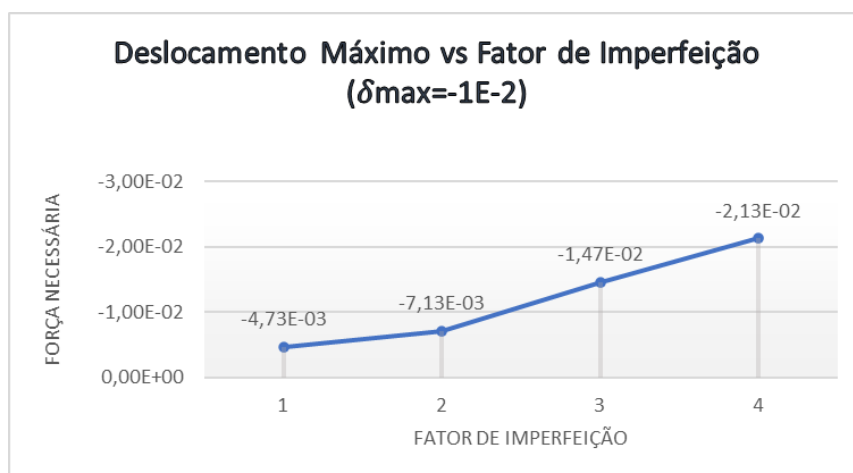


Figura 61 - Gráfico Deslocamento Máximo vs Fator de Imperfeição ($\delta = -1e-2$)

4.6 Forças

Foi também realizado um estudo, utilizando o ambiente *OCTAVE*, com o objetivo de observar o comportamento da força necessária para atingir os vários deslocamentos máximos impostos fazendo variar o grau de imperfeições. Para os deslocamentos de $\delta = -10^{-6} m^2$ e $\delta = -10^{-4} m^2$ a força aplicada foi de $-0.1 N$ no ficheiro input. Para o deslocamento de $\delta = -10^{-2} m$ a força foi aumentada para $-0.5 N$. As tabelas com os dados e os resultados gráficos podem ser consultados de seguida.

Tabela 12 - Estudo da força necessária para atingir determinado deslocamento consoante o fator de imperfeição

Força Necessária (-1E-6)	-5.30×10^{-5}	-3.79×10^{-5}	-2.85×10^{-5}	-2.46×10^{-5}
Força Necessária (-1E-4)	-5.34×10^{-3}	-3.80×10^{-3}	-2.58×10^{-3}	-1.78×10^{-3}
Força Necessária (-1E-2)	-	-2.97×10^{-1}	-2.21×10^{-1}	-1.63×10^{-1}
Fator de Imperfeição	1	2	3	4

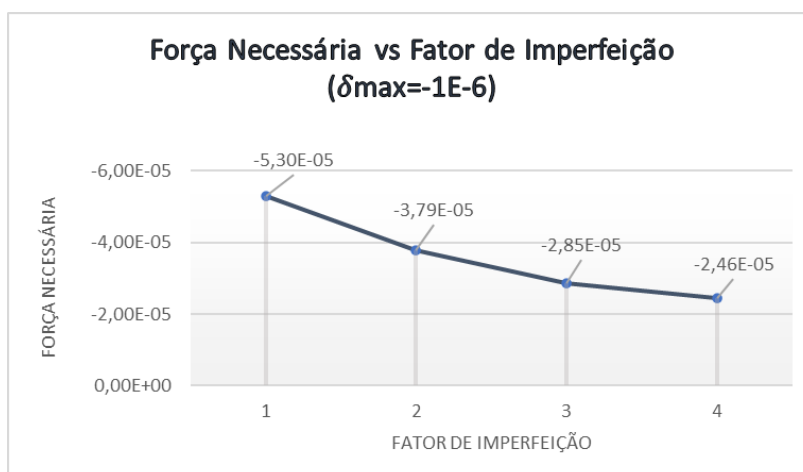


Figura 62 - Força Necessária vs Fator de Imperfeição ($\delta = -1e-6$)

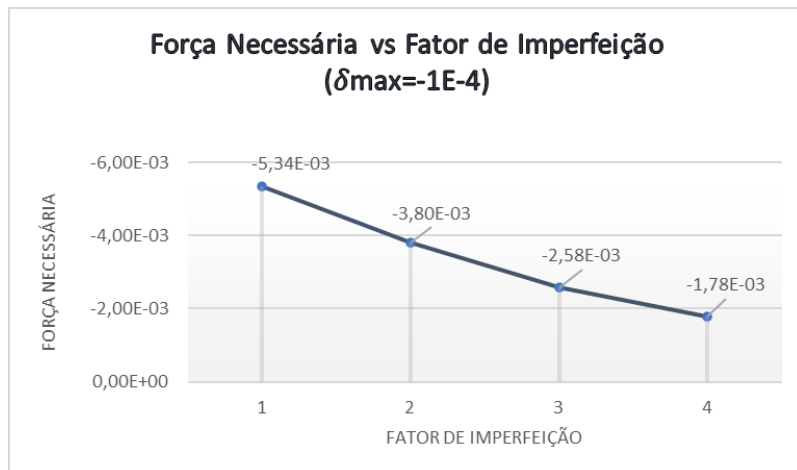


Figura 63 - Força Necessária vs Fator de Imperfeição ($\delta = -1e-4$)

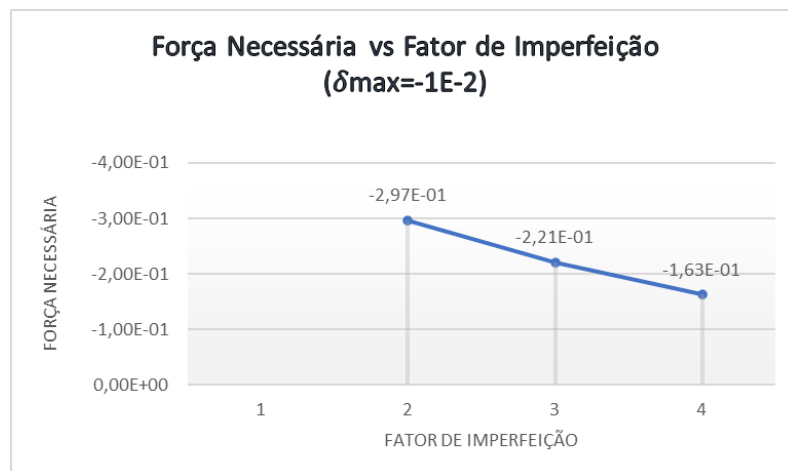


Figura 64 - Força Necessária vs Fator de Imperfeição ($\delta = -1e-2$)

Como esperado, a força necessária para atingir o equilíbrio para os vários deslocamentos máximos impostos diminui com o aumento das imperfeições aplicadas. De realçar a impossibilidade de atingir a convergência para o caso de deslocamento de $\delta = -10^{-2} m$ e apenas com as imperfeições iniciais. Pode também observar-se que a relação entre força e amplitude da imperfeição se aproxima da linearidade.

4.6.1 Layout 1

Por último, e utilizando as áreas obtidas anteriormente para o deslocamento de $\delta = -10^{-6} m$, do qual resultou uma estrutura muito semelhante à presente no artigo, foi estudada a relação entre força aplicada e deslocamento máximo imposto. O gráfico resultante é apresentado na figura 65.

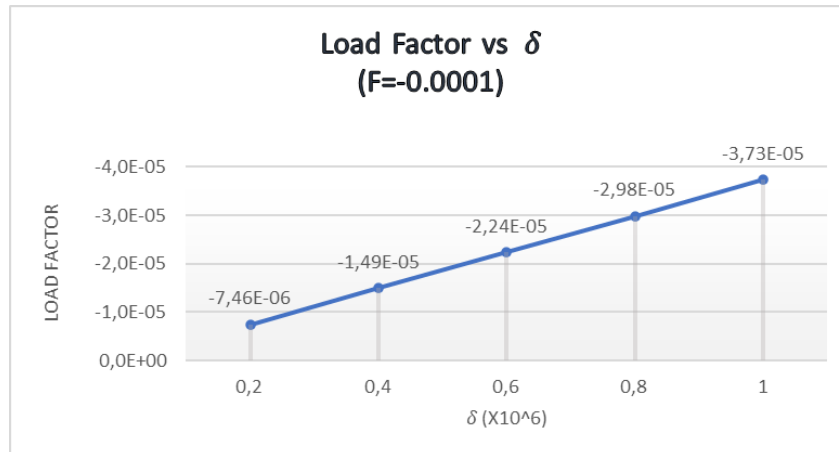


Figura 65 - Gráfico Força vs Deslocamento

Posteriormente foi comparado com os resultados obtidos por Madah e Amir [2] que se encontram na figura 66, mais especificamente na reta 1.

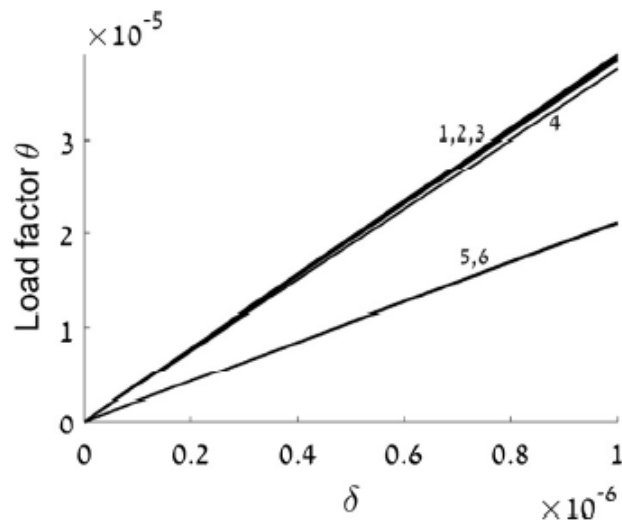


Figura 66 - Gráfico Força vs Deslocamento (retirado de [2])

CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

O principal objetivo desta dissertação consistia na criação de uma metodologia, capaz de realizar otimização de topologia de treliças segundo o conceito de *Ground Structure*, sem que fosse necessária a imposição de constrangimentos de encurvadura e de forma a aproximar a fase de otimização da fase de produção. O PROAES_NL foi o programa desenvolvido ao longo deste documento, com a contribuição de muitos outros programas, métodos e algoritmos. Recorreu-se à linguagem de programação MATLAB, ao programa de elementos finitos ANSYS, ao método de Newton-Raphson com arco cilíndrico, assim como ao método corrotacional e a algoritmos como o MMA, entre outros.

Após a introdução de conceitos e do tema a desenvolver foi apresentada a metodologia que permitiu a obtenção de resultados. A mesma consistiu na introdução de imperfeições locais e globais na estrutura a analisar não sendo necessário os constrangimentos de encurvadura. Permite, após a definição de um deslocamento máximo aplicado num certo nó da treliça em estudo, maximizar a força possível de aplicar na estrutura, sem ultrapassar esse deslocamento imposto. Considerou-se necessário aumentar a proporção das imperfeições para que a convergência fosse mais facilmente atingida, especialmente para deslocamentos impostos mais elevados, tendo sido criados ficheiros com até 4x o valor das imperfeições iniciais.

Realizaram-se vários testes a uma treliça de 11 barras. Procedeu-se à análise dos deslocamentos, rotações e forças, com e sem imperfeições quer para $\delta = -10^{-6} m$ quer para $\delta = -10^{-2} m$. Verificou-se o correto funcionamento do programa uma vez que se aproximava do valor do deslocamento definido sem o ultrapassar e devolvia os resultados provenientes dessa análise. Os mesmos foram comparados com os obtidos recorrendo ao software ANSYS sendo o erro relativo entre os dois muito baixo, validando também a análise segundo a metodologia criada. De referir que, da observação da comparação de resultados se pode concluir que o erro tende a aumentar com o aumento do deslocamento imposto inicialmente.

O resultado da otimização foi também favorável, sendo notório a procura do algoritmo em priorizar o aumento de áreas em barras sujeitas à compressão.

Foi possível concluir que o aumento do grau de imperfeições se relaciona com o limite de convergência da estrutura, ou seja, para obter resultados sendo imposto um deslocamento elevado, pode ser necessário aumentar o grau de imperfeições de forma que a metodologia seja capaz de proceder à análise. Consequentemente, verificou-se que a força necessária para atingir certo deslocamento, diminui com o aumento do grau de imperfeições.

Por último, e procedendo à comparação entre os resultados obtidos e os resultados de Madah e Amir, podem observar-se algumas semelhanças, sendo exemplo o gráfico de força vs deslocamento relativo ao layout 1 presente no artigo.

Pela análise dos resultados obtidos e conclusões retiradas pode afirmar-se globalmente que o objetivo da dissertação foi cumprido e que o PROAES_NL consiste numa ferramenta útil e poderosa.

Como recomendações para estudos futuros considero que seria interessante aplicar esta metodologia a outros exemplos da literatura assim como implementar a formulação MinV.

BIBLIOGRAFIA

- [1] A. Silva, "Topology optimization considering geometrical nonlinear behavior," *Diss. Mestrado. FCT/UNL*, 2019.
- [2] H. Madah and O. Amir, "Truss optimization with buckling considerations using geometrically nonlinear beam modeling," *Comput. Struct.*, vol. 192, pp. 233–247, 2017.
- [3] P. Coelho, "Tópicos avançados em mecânica estrutural," *Apontamentos da Discip. Tópicos Avançados em Mecânica Estrutural, FCT/UNL*, 2017.
- [4] I. Jhon, J. Peláez, A. Felipe, and A. Paz, "State of The Art on Structural Optimization," Dec. 2018.
- [5] T. Baptista, "Análise de fiabilidade de estruturas," *Diss. Mestrado. FCT/UNL*, 2012.
- [6] M. Correia, "Optimização Robusta de Estruturas," *Diss. Mestrado. FCT/UNL*, 2014.
- [7] J. Marmeleiro, "PROAES - Programa de análise de estruturas para aplicação em otimização e análise de fiabilidade," *Diss. Mestrado. FCT/UNL*, 2017.
- [8] R. A. Gellatly and R. H. Gallagher, "A Procedure for Automated Minimum Weight Structural Design: Part I: Theoretical Basis." pp. 216–230, 1965.
- [9] R. A. Gellatly and R. H. Gallagher, "A Procedure for Automated Minimum Weight Structural Design: Part II: Applications." pp. 332–342, 1965.
- [10] A. W. Gebisa and H. G. Lemu, "A case study on topology optimized design for additive manufacturing," *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.*, vol. 276. 2017.
- [11] M. P. Bendsøe and O. Sigmund, *Topology Optimization*, 2nd ed. Springer, 2003.
- [12] N. Aage, (2017), TopOpt, (Version 2.10) [Mobile app.] App Store. <https://apps.apple.com/app/topopt/id507454646>.
- [13] L. A. Schmit, "Structural Design by Systematic Synthesis," *Proceedings, 2nd Conf. Electron. Comput. ASCE*, pp. 105–122, 1960.
- [14] J. Cardoso, "Métodos Computacionais em Engenharia Mecânica," *Apontamentos da Discip. Métodos Comput. em Eng. Mecânica, FCT/UNL*, 2019.
- [15] M. R. Corrêa, "Introdução ao Comportamento Não Linear de Estruturas," *Apostila Resist. dos Mater. II*, 2016.
- [16] M. Filipe and M. Soares, "Formulação corrotacional para análise de vigas com elementos finitos," *Diss. Mestrado. FCT/UNL*, 2010.

- [17] A. C. To and H. Deng, "Linear and nonlinear topology optimization design with projection-based ground structure method (P-GSM)," pp. 2437–2461, 2020.
- [18] T. Buhl, C. B. W. Pedersen, and O. Sigmund, "Stiffness design of geometrically nonlinear structures using topology optimization," *Struct. Multidiscip. Optim.*, vol. 19, no. 2, pp. 93–104, 2000.
- [19] Z. Kang and Y. Luo, "Non-probabilistic reliability-based topology optimization of geometrically nonlinear structures using convex models," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 198, no. 41–44, pp. 3228–3238, 2009.
- [20] C. C. Rankin and F. A. Brogan, "An Element Independent Corotational Procedure for the Treatment of Large Rotations," *J. Press. Vessel Technol.*, vol. 108, no. 2, pp. 165–174, 1986.
- [21] H. L. G. Pina, *O Método Dos Elementos Finitos*. 2003.
- [22] P. Coelho, "Métodos Computacionais em Engenharia Mecânica," *A few notes M.C.E.M classes, FCT/UNL*, 2019.
- [23] V. V. Mehtre and D. K. J Pal, "Review on Newton Raphson Method," *Int. J. Res. Appl. Sci. Eng. Technol.*, vol. 7, no. 11, pp. 669–671, 2019.
- [24] J. Cardoso, "Método do Comprimento de Arco Cilíndrico," *Apontamentos da Discip. Métodos Comput. em Eng. Mecânica, FCT/UNL*.
- [25] T. Hagishita and M. Ohsaki, "Topology optimization of trusses by growing ground structure method," *Struct. Multidiscip. Optim.*, vol. 37, no. 4, pp. 377–393, 2009.
- [26] T. Zhao, "An Implementation of the Ground Structure Method Considering Buckling and Nodal Instabilities," *M.S. thesis, Univ. Illinois*, 2014.
- [27] M. E. Lemonis, "Column buckling calculator." <https://calresource.com/statics-buckling-load.html> (accessed Aug. 22, 2022).
- [28] J. Cardoso, "'Estabilidade de colunas'," *Apontamentos da Discip. Mecânica dos Sólidos 2, FCT/UNL*.
- [29] M. A. Douville and P. Le Grogneq, "Exact analytical solutions for the local and global buckling of sandwich beam-columns under various loadings," *Int. J. Solids Struct.*, vol. 50, no. 16–17, pp. 2597–2609, 2013.
- [30] J. Cardoso, "Manual de Utilização Programa Proaes," *FCT/UNL*, 2009.
- [31] K. Svanberg, "The Method of Moving Asymptotes – A New Method for Structural Optimization," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 24, no. 2, pp. 359–373, 1987.
- [32] K. Svanberg, "Some modelling aspects for the Matlab implementation of MMA," *Optim. Syst. Theory*, pp. 1–5, 2004.
- [33] D. P. Ferreira, "Desenvolvimento de uma Toolbox de Otimização para o PROAES – Programa de Análise Estrutural," *Diss. Mestrado. FCT/UNL*, 2019.
- [34] B. F. A. de A. Abrantes, "Otimização de Topologia de Treliças considerando Encurvadura," *Diss. Mestrado. FCT/UNL*, 2021.



2022

ANTONIO CARNEIRO

OTIMIZAÇÃO DE TOPOLOGIA DE ESTRUTURAS NÃO LINEARES