



Tiago Filipe Lopes Durão

Licenciado em Ciências de Engenharia Civil

Desenvolvimento de um modelo variacional de fratura através de um refinamento adaptativo de malha

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em
Engenharia Civil

Orientador: Mário Jorge Vicente da Silva, Professor Auxiliar
Universidade Nova de Lisboa

Júri:

Presidente: Prof. Doutor Nuno Manuel da Costa Guerra
Arguente: Prof. Doutor João Gomes Rocha de Almeida
Vogal: Prof. Doutor Mário Jorge Vicente da Silva



FACULDADE DE
CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Novembro, 2015

Desenvolvimento de um modelo variacional de fratura através de um refinamento adaptativo de malha

Copyright © Tiago Filipe Lopes Durão, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa

A Faculdade de Ciências e Tecnologia e a Universidade Nova de Lisboa tem o direito, perpétuo e sem limites geográficos, de arquivar e publicar esta dissertação através de exemplares impressos reproduzidos em papel ou de forma digital, ou por qualquer outro meio conhecido ou que venha a ser inventado, e de a divulgar através de repositórios científicos e de admitir a sua cópia e distribuição com objetivos educacionais ou de investigação, não comerciais, desde que seja dado crédito ao autor e editor.

Agradecimentos

Em primeiro lugar quero agradecer profundamente à pessoa que mais contribuiu para a realização deste trabalho, o Professor Mário Vicente da Silva, meu orientador científico. Aqui, expresso o meu sincero obrigado pelo apoio, conhecimento transmitido e enorme paciência demonstrada ao longo da realização desta Dissertação. Acima de tudo agradeço a sua amizade.

Agradeço também ao Engenheiro Nuno Deusdado pela disponibilidade apresentada em ajudar-me a resolver os inúmeros problemas encontrados ao longo do desenvolvimento deste trabalho. A todos os professores do departamento de engenharia civil da FCT-UNL, com quem tive a oportunidade de aprender e de me desenvolver, não só como profissional mas também como pessoa, e com os quais me orgulho de ter trabalhado. Por toda a ajuda e disponibilidade, obrigado ao Professor Armando Antão.

Um obrigado especial à Dr. Maria do Rosário Duarte e à Dr. Ana Roxo pela ajuda nas correções bibliográficas e pelas palavras de conforto e de motivação constantes ao longo das nossas conversas, curtas, mas bastante reconfortantes.

Agradeço aos meus pais, à minha avó e à minha irmã em particular, pelas palavras de incentivo e por todos os concelhos. À Cláudia um obrigado especial pelo apoio e confiança que sempre me transmitiu. À sua enorme paciência e disponibilidade que sempre demonstrou para comigo ao longo deste percurso.

Por último mas não menos importante, aos meus amigos, em especial aos que partilharam, a par dos seus próprios trabalhos, esta experiência comigo. Pelo apoio que me deram em todo o percurso, por todos os momentos de humor, boa disposição e sobretudo pela amizade que sempre demonstraram.

Aqui deixo o meu agradecimento simples, mas sincero.

Resumo

Neste trabalho desenvolve-se, implementa-se e valida-se uma técnica de refinamento adaptativo de malha aplicada a um modelo variacional de fratura, capaz de caracterizar eficazmente o comportamento de propagação de fratura em condições de elasticidade linear. De acordo com a teoria de Griffith, considera-se como princípio variacional base a interpretação do problema de propagação de fenda como um problema de determinação da configuração que minimiza a energia global do sistema mecânico. Recorre-se ao método denominado por *Alternating Direction Method of Multipliers* (ADMM) na nomenclatura anglo-saxónica, como algoritmo de resolução do problema de minimização fundamental. A eficácia computacional do método adaptativo proposto resulta da conjugação de hipóteses simplificativas de análises específicas, relativas à malha de elementos finitos, permitindo reduzir o número de graus de liberdade sem perda de precisão e, simultaneamente, utilizar técnicas e abordagens diferenciadoras. Os exemplos de aplicação mostram que a técnica desenvolvida conduz a resultados semelhantes aos obtidos pelos diferentes autores citados em bibliografia. Contudo, a possibilidade de inovação do método implementado revela que esta não é uma área de investigação que se possa considerar como concluída, havendo ainda que explorar soluções alternativas permitindo ultrapassar as limitações existentes.

Palavras chave:

- Fratura elástica linear
- Teoria de Griffith
- Otimização (programação matemática)
- *Alternating Direction Method of Multipliers*
- Método dos Elementos Finitos
- Refinamento adaptativo de malha

Abstract

In the present work is developed, implemented and validated an adaptive mesh refinement technique applied to a variational model of fracture, capable of effectively characterize the behavior of fracture propagation in linear elasticity conditions. According to Griffith's theory, it is assumed as basis of the variational principle interpretation of crack propagation problem as a problem of determining the configuration that minimizes the overall energy of the mechanical system. For its resolution it is used a method known as *Alternating Direction Method of Multipliers (ADMM)*, as a resolution algorithm of fundamental minimization problem. The computational efficiency of the proposed adaptive method results from the combination of simplifying assumptions of specific analysis on the finite element mesh, to allow reducing the number of degrees of freedom without loss of accuracy and, simultaneously, use of differential techniques and approaches. The application examples reveal that the technique developed leads to similar results to those obtained by different authors cited in the bibliography. However, the possibility of the implemented innovation of the method reveals that this is not an area of research that can be considered as completed, existing the need to explore alternative solutions allowing to overcome existing limitations.

Keywords:

- Linear Elastic Fracture
- Griffith's theory
- Optimization (Mathematical Programming)
- *Alternating Direction Method of Multipliers*
- Finite Element Method
- Adaptive mesh refinement

Lista de abreviaturas, símbolos e operadores

Apresenta-se uma lista de abreviaturas, símbolos e operadores. Qualquer destes elementos não identificado nesta lista encontra-se definido na zona do texto onde é referido pela primeira vez.

Abreviaturas

- ADAL Alternating Direction Augmented Lagrangian
- ADMM Alternating Direction Method of Multipliers
- AR razão de aspeto (aspect ratio)
- MEF Método dos Elementos Finitos
- MUMPS aMUltifrontal Massively Parallel sparse direct Solver
- NGL número de graus de liberdade
- NI_{incr} número total de incrementos
- NI_{iter} número total de iterações
- Tol tolerância
- XFEM eXtended Finite Element Method

Símbolos

- a comprimento de fenda
- a_c comprimento crítico de fenda
- \mathcal{A} matriz de rotação do sistema
- \mathcal{B} matriz identidade
- BN matriz com as derivadas parciais das funções de interpolação
- C_{sp} valor de energia tendo em conta deformação por plasticidade não desprezável
- d deslocamento nodal global
- D matriz elástica no estado plano de tensão

- \mathcal{D}_G energia superficial de fratura
 \vec{e}_{ij} versor unitário
 E módulo de elasticidade
 E vetor do potencial energético local
 E^e energia disponível no elemento crítico
 $E_{\text{elástica}}$ energia elástica no incremento
 f_b forças de superfície
 f_t forças distribuídas na fronteira
 F vetor das forças nodais
 F força de reação nodal
 F_L força de limite de cedência
 g centro de gravidade do elemento
 G energia de propagação de fratura
 G_c energia crítica de propagação de fratura
 h dimensão de malha
 h_{avg} dimensão média da malha original
 h_{med} dimensão média da malha para refinamento h
 h_{min} dimensão mínima da malha
 I matriz identidade
 J joule
 k matriz de rigidez elementar
 k iterações
 K fator de intensidade de tensão
 K matriz de rigidez global
 K^e matriz de rigidez
 l caminho de propagação de fenda
 L comprimento de fronteira
 L função de forma
 L matriz triangular inferior da matriz de rigidez global
 L_{Total} comprimento total de fenda num incremento
 m metro
 N função de forma
 p_e parâmetro de energia elementar

p_h	parâmetro de dimensão malha
q	deslocamento nodal local
q	ponto de procura na malha nova
r	rácio de propagação
r_d	resíduo dual
r_p	resíduo primal
R	matriz de rotação do sistema
R	resultante das tensões inter-elementares
R_e	rácio energético elementar
R_e	matriz local de rotação da fronteira inter-elementar
\mathbb{R}	conjunto dos números reais
S	área de superfície
t	coordenadas do ponto de fronteira
u	vetor dos deslocamentos
u	vetor dos deslocamentos impostos
u	coordenadas do ponto de fronteira
U	energia elástica de deformação
v	coordenadas do ponto de procura
$v_{\text{crítico}}$	definição do valor limite da zona crítica
V	volume do corpo
V_{Total}	volume total do corpo
W	trabalho realizado pelas forças exteriores
x	vetor dos deslocamentos globais
y	variável dual
z	vetor dos deslocamentos locais

Letras Gregas

α	elemento inicial de procura da malha antiga
α	ângulo de aplicação de deslocamento
γ_p	energia de deformação plástica
γ_s	energia de tensão superficial
Γ	fronteira do corpo
Γ_c	região das superfícies de fratura
Γ_e	fronteira inter-elementar

Γ_t	fronteira estática
Γ_μ	fronteira cinemática
ϵ	erro
ϵ^{dual}	erro dual
ϵ^{primal}	erro primal
θ	ângulo de fratura
λ	multiplicador de Lagrange
ν	coeficiente de Poisson
Π	potencial energético
Π_{Total}	potencial energético total
ρ	parâmetro de penalidade
σ	tensão
σ_I	tensão principal máxima
σ_{II}	tensão principal mínima
σ_c	tensão crítica
φ	elemento pertencente ao caminho de procura
ω	elemento encontrado na malha antiga
Ω	domínio do corpo

Operadores Especiais

$()^T$	matriz (vetor) transposta (transposto)
${}^t()$	parcela relativa ao tempo
$(\dot{ })$	derivada parcial em ordem à variável tempo
$ $	módulo de um vetor
$\Delta()$	variação incremental-iterativa
$\partial()$	variação virtual
$()_i$	em ordem a i

Conteúdo

Agradecimentos	i
Resumo	iii
Abstract	v
Lista de abreviaturas, siglas e símbolos	vii
Lista de Figuras	xvii
Lista de Tabelas	xix
1 Introdução	1
1.1 Enquadramento Geral	1
1.2 Motivação	2
1.3 Objetivos	3
1.4 Organização do Documento	4
2 Breve Revisão Sobre Conceitos da Mecânica da Fratura	5
2.1 Introdução	5
2.2 Considerações Gerais	6
2.3 Mecânica da Fratura Elástica Linear	7
2.3.1 Evolução Histórica	8
2.3.2 Critério Energético Proposto por Griffith	10
3 Otimização Matemática Aplicada à Fratura	15
3.1 Introdução	15
3.2 Formulação Variacional	16
3.3 Algoritmo de Programação Matemática	18
4 Formulação Numérica	23
4.1 Introdução	23
4.2 Discretização do Elemento Finito	24
4.3 Problema de Otimização Discreto	26

4.4	Implementação ADMM	27
4.4.1	Aplicação do Algoritmo ADMM à Formulação de Elementos Finitos	28
4.4.1.1	Minimização Global	28
4.4.1.2	Minimização Local	29
4.5	Detalhes de Implementação	30
4.5.1	Numeração dos Graus de Liberdade	31
4.5.2	Solicitações Impostas	31
4.5.3	Processo de “Assemblagem”	31
4.5.4	Construção da Matriz Rotação	32
4.5.5	Fatorização	33
5	Refinamento Adaptativo de Malha	35
5.1	Introdução	35
5.2	Enquadramento Geral	36
5.2.1	Solução Proposta	37
5.3	Modos de Divisão Hierárquica de um Elemento Triangular	39
5.3.1	Filosofia de Implementação	40
5.4	Refinamento de Malha	41
5.4.1	Solução Elástica - ADMM	42
5.4.2	Definição de <i>Zona Crítica</i>	43
5.4.2.1	Elemento Crítico	43
5.4.2.2	Expansão de <i>Zona Crítica</i>	43
5.4.2.3	Energia Disponível em Cada Elemento Crítico	45
5.4.3	Refinamento h	47
5.4.4	Reorientação de Elementos	49
5.4.4.1	Operação de Troca de Arestas	50
5.5	Refinamento Inverso de Malha	51
5.5.1	Gerador de Malha Local - <i>Delaunay</i>	52
5.5.2	Mapeamento - <i>Walking Algorithms</i>	53
5.5.2.1	<i>Visibility Walk</i>	54
5.5.2.2	<i>Straight Walk</i>	55
5.5.2.3	Definição do Elemento de Procura Inicial	55
5.5.2.4	Mapeamento	57
6	Aplicações Numéricas	59
6.1	Introdução	59
6.2	Exemplo 1	60
6.2.1	Análise de Propagação de Fratura sem Aplicação de Refinamento Adaptativo	61
6.2.2	Formulação Numérica com Refinamento Adaptativo	70
6.2.2.1	Definição da <i>Zona Crítica</i>	70

6.2.2.2	Propagação Total de Fenda Considerando Diferentes Aplicações	71
6.2.3	Comparação de Resultados	74
6.3	Exemplo 2	77
6.3.1	Análise de Propagação de Fratura sem Aplicação de Refinamento Adaptativo	78
6.3.2	Formulação Numérica com Refinamento Adaptativo	83
6.4	Exemplo 3	87
6.4.1	Importância da Análise Efetuada	88
6.4.2	Análise do Problema	88
6.4.3	Propagação de Fenda	88
7	Conclusões e Desenvolvimentos Futuros	91
7.1	Conclusões	91
7.2	Desenvolvimentos Futuros	93
	Bibliografia	97

Lista de Figuras

2.1	Modos de fratura	7
2.2	Estados de deformação plástica num corpo com fenda	8
2.3	Placa com extremidades fixas de dimensões infinitas, de espessura unitária, em estado plano de tensão, contendo uma cavidade elíptica central de comprimento $2a$ perpendicular às tensões uniaxiais impostas σ	10
2.4	Balanço energético relativo a uma pequena fissura inserida numa placa com extremidades fixas de dimensões infinitas	11
3.1	Partição do domínio Ω nas sub-regiões complementares de Γ	16
3.2	Deslocamento admissível entre faces fraturadas Γ_c num domínio $\Omega = \{\Omega^\oplus, \Omega^\ominus\}$	17
4.1	Fronteira inter-elementar	25
4.2	Representação física do parâmetro ρ	27
4.3	Ilustração do significado físico dos multiplicadores de Lagrange λ	27
4.4	Organograma do algoritmo de cálculo	30
4.5	Fronteira inter-elementar com os eixos globais e locais representados	32
5.1	Esquema de dependência de malha com imposição de deslocamento u : (a) tipo de malha; (b) orientação incorreta dos elementos (azul a tracejado - propagação perpendicular; vermelho a cheio - propagação ao longo das fronteiras inter-elementares)	36
5.2	Organograma do algoritmo de cálculo com refinamento da malha	37
5.3	Modos de divisão hierárquica de um elemento triangular: (a) modo de 1 divisão; (b) modo de 2 divisões; (c) modo de 3 divisões	39
5.4	Esquema de aplicação dos modos de divisão: (a) malha tipo; (b) introdução de nós proveniente de um dos processos de refinamento; (c) aplicação dos modos de divisão	40
5.5	Organograma do algoritmo de cálculo referente à etapa de refinamento	41
5.6	Esquema representativo de um possível caminho de propagação de fratura: (a) caminho possível (linha a negro); (b) caminho total (linha a vermelho)	44
5.7	Expansão de <i>zona crítica</i> através de um elemento crítico central. Representação de um gradiente de cor cinza ilustrando o aumento da zona de análise	45

5.8	Esquema representativo de refinamento h : (a) representação de um gradiente de cor cinza de acordo com o rácio de propagação; (b) refinamento local do tipo h	48
5.9	Orientação de um elemento triangular: (a) representação das tensões de tração, σ_I , e de compressão, σ_{II} ; (b) definição de orientações existentes . . .	49
5.10	Orientações para o modelo de 2 divisões	50
5.11	Orientação incorreta de elementos: (a) orientação de acordo com convenção adotada (modo 1 Divisão); (b) orientação incorrecta devido à compatibilização de elementos adjacentes (modo de 3 Divisões); (c) orientação do elemento corrigida (mudança de posição da fronteira)	50
5.12	Organograma do algoritmo de cálculo referente à etapa de refinamento inverso	51
5.13	Estratégia de procura (α elemento inicial na malha antiga; v ponto de procura na malha nova; ω elemento encontrado na malha antiga)	53
5.14	Estratégia de procura de <i>visibility walk</i> (α elemento inicial na malha antiga; q ponto de procura na malha nova; ω elemento encontrado na malha antiga)	54
5.15	Estratégia de procura de <i>straight walk</i> (verde claro - inicialização; verde escuro - caminho de procura)	55
5.16	Zona problemáticas de procura (impossibilidade de proseguir o caminho - α elemento inicial na malha antiga; q ponto de procura na malha nova; ω elemento a encontrar na malha antiga): (a) <i>visibility walk</i> ; (b) <i>straight walk</i>	56
5.17	Elementos de procura iniciais α com inexistência de descontinuidades	56
5.18	Representação standardizada de uma árvore binária	57
5.19	Mapeamento de um novo nó q	58
6.1	Geometria e condições de fronteira. Dimensões da viga: $L = 6, b = 0.5$ e tamanho de fenda inicial $a = 1$. Incrementos de deslocamento: u . Propriedades do material: $E = 1.06, \nu = 0.27$ e $Gc = 0.0001$	60
6.2	Discretização da viga retangular fina: (a) M1; (b) M2; (c) M3	61
6.3	Propagação de fenda em malhas estruturadas tendo em consideração diferentes níveis de refinamento. Comparação direta de resultados com os existentes em bibliografia	62
6.4	Curvas de balanço energético: (a) M1; (b) M2; (c) M3	63
6.5	Propagação final de fratura: (a) M1; (b) M2; (c) M3	64
6.6	Discretização da viga retangular fina: (a) M0NE; (b) M1NE; (c) M3NE . .	65
6.7	Propagação final de fratura: (a) M0NE; (b) M1NE; (c) M3NE	66
6.8	Propagação de fenda tendo em consideração diferentes tipologias de malha: (a) malhas não estruturadas com diferentes níveis de refinamento; (b) comparação direta de resultados com obtidos de malhas estruturadas e existentes em bibliografia	67
6.9	Curvas de balanço energético: (a) M1NE; (b) M3NE	68
6.10	Curva Força-Deslocamento referente a cada malha estruturada e não estruturada analisada	69
6.11	<i>Zona crítica</i> inicial $u = 0$	70

6.12	Propagação final de fratura considerando isoladamente, diferentes níveis de refinamento h na malha M0NE: (a) $p_h = 0.1$; (b) $p_h = 0.025$	71
6.13	Aplicação isolada de orientação de elementos	72
6.14	Propagação final de fratura considerando a aplicação conjunta de ambas as estratégias de refinamento na malha M0NE: (a) $p_h = 0.1$; (b) $p_h = 0.025$	73
6.15	Curvas de balanço energético: (a) M0NE_R0.1; (b) M0NE_R0.025	74
6.16	Propagação de fenda ao longo da malha M0NE considerando aplicação isolada e conjunta referente às estratégias de refinamento	75
6.17	Balanço energético: (a) M0NE_RO0.1; (b) M0NE_RO0.025	75
6.18	Comparação final de propagações	76
6.19	Comparação final de curvas Força-Deslocamento	77
6.20	Geometria e condições de fronteira	78
6.21	Discretização da chapa retangular fina: (a) M0NE; (b) M1NE; (c) M2NE; (d) M3NE	79
6.22	Orientação final de fratura tendo em consideração a aplicação de deslocamentos em diferentes ângulos α : (a) 90° ; (b) 45° ; (c) 7° ; (d) 0°	80
6.26	Fratura ocorrida tendo em conta α : (a) 90° ; (b) 45° ; (c) 7° ; (d) 0°	82
6.27	Orientação final de fratura tendo em consideração a aplicação de deslocamentos em diferentes ângulos α : (a) 90° ; (b) 45° ; (c) 7° ; (d) 0°	84
6.28	Propagação além da <i>zona crítica</i> definida: (a) <i>zona crítica</i> ; (b) refinamento e propagação de fenda considerando a <i>zona crítica</i> definida	85
6.29	Propagação de fenda através da aplicação conjunta das estratégias de refinamento sobre a malha M0NE, considerando α : (a) 90° ; (b) 45° ; (c) 7° ; (d) 0°	86
6.30	Chapa fina quadrada: (a) geometria e condições de fronteira; (b) discretização do problema	87
6.31	Definição de duas <i>zonas críticas</i> distintas	89
6.32	Aplicação conjunta das estratégias de refinamento	89
6.33	Propagação de fenda entre entalhes existentes	90

Lista de Tabelas

4.1	Caracterização do elemento finito utilizado	24
4.2	Tabela de conversão de nomenclaturas	28
6.1	Análise da viga retangular fina: características das malhas estruturadas . . .	62
6.2	Análise da viga retangular fina: características das malhas não estruturadas	65
6.3	Erro associado à força de pico de referência	69
6.4	Análise da viga retangular fina: características da malha M0NE tendo em conta diferentes estratégias de refinamento (valores médios tendo em conta o processo incremental)	74
6.5	Análise da chapa retangular fina: características das malhas	78
6.6	Análise da chapa quadrada fina: característica da malha	87

Capítulo 1

Introdução

1.1 Enquadramento Geral

Diversas aproximações numéricas, resultantes da aplicação da teoria clássica de Griffith, têm vindo a ser formuladas, verificando-se que a obtenção de estimativas de propagação de fratura de precisão assinalável requerem a utilização de um número elevado de variáveis de decisão, usualmente denominados de graus de liberdade na nomenclatura utilizada na mecânica computacional. Esta necessidade de garantir um número considerável de graus de liberdade traduz-se, num tempo de cálculo elevado e consequentemente na limitação da qualidade dos resultados obtidos devido ao esgotamento dos recursos de cálculo disponíveis num computador comum. Do ponto de vista numérico, tem sido demonstrado que a convergência de soluções através de modelos de elementos finitos requerem necessariamente adaptações de malha, a fim de evitar efeitos de dependência da mesma.

Recentemente, Bourdin *et al.* [1] propuseram uma abordagem energética diferenciadora, que interpreta o problema de propagação de fratura como sendo um problema de determinação da configuração que minimiza a energia global do sistema mecânico, baseando-se na teoria clássica de Griffith [2] como pressuposto base para o seu desenvolvimento. Tirando partido desta abordagem, desenvolve-se na presente Dissertação uma técnica de refinamento adaptativo de malha associada a uma formulação variacional de fratura, que incorpora na sua génese a resolução de um problema de minimização energético. No presente modelo não convencional de elementos finitos, capaz de simular a propagação de uma (ou diversas) fendas, há a necessidade de resolver um problema não linear de otimização matemática, recorrendo-se para tal ao método denominado por *Alternating Direction Method of Multipliers* (ADMM) [3] na

nomenclatura anglo-saxónica. Neste contexto, propõe-se a implementação de duas estratégias de refinamento de malha que visam mitigar os efeitos de dependência decorrentes da aplicação direta da formulação de elementos finitos utilizada.

1.2 Motivação

Durante o desenvolvimento da presente Dissertação, os fatores determinantes para a correta execução da proposta de trabalho basearam-se em duas vertentes motivacionais distintas: a pessoal e a científica.

No aspeto pessoal, o interesse e a vontade de contribuir para o desenvolvimento de novas ferramentas de análise, que agrupassem na sua génese, a programação e utilização de métodos de elementos finitos surgiram da realização da disciplina de Modelos Reduzidos e Computacionais em Engenharia, lecionada pelo Professor Mário Vicente da Silva, orientador científico da presente Dissertação. Embora o gosto e interesse pelas áreas mencionadas, o tema a desenvolver mostrava-se completamente novo. No entanto, a transversalidade do mesmo nas diversas áreas da Engenharia Civil e a possibilidade de contribuir para o desenvolvimento da plataforma *mechpy*¹ foi o bastante para despertar o interesse pelo tema.

No que concerne à vertente científica, tem sido demonstrado que a utilização do MEF como método de resolução de problemas de fratura, requer necessariamente adaptações de malha, a fim de evitar efeitos de dependência da mesma. Várias técnicas têm sido formuladas de modo a colmatar esta problemática (e.g., *h-adaption*, *r-adaption* e *s-optimization*) mas, o fator diferenciador em cada uma delas, perfaz um resultado único e inovador. Assim, o maior desafio prende-se com a necessidade de desenvolver teorias e consequentemente métodos de fratura capazes de dar resposta aos problemas atuais, concebendo modelos suficientemente robustos e generalizados capazes de avaliar situações complexas de fratura, possibilitando desenvolver e implementar técnicas alternativas às ditas convencionais, utilizando para tal abordagens inovadoras, resultando na possibilidade de contribuir de forma assertiva para o desenvolvimento do conhecimento dentro da comunidade científica.

Por último, é de notar que este relativo insucesso dos métodos existentes revela que esta não é uma área de investigação que se possa considerar como concluída, havendo ainda que explorar soluções alternativas permitindo ultrapassar as limitações observadas atualmente.

¹ O *mechpy* é uma biblioteca informática desenvolvida no departamento de Eng. Civil da FCT/UNL, em ambiente *python*, para a implementação e desenvolvimento de formulações não convencionais de elementos finitos.

1.3 Objetivos

O objetivo primordial da presente Dissertação consiste no desenvolvimento, implementação e validação de uma estratégia de refinamento adaptativo de malha associada a um modelo não convencional de elementos finitos, capaz de caracterizar eficazmente o comportamento de propagação de fenda no contexto da Mecânica da Fratura Elástica Linear.

Com este propósito definido, considera-se a realização de três objetivos cruciais para uma correta execução da solução proposta. O primeiro objetivo deste trabalho consiste numa validação inicial da presente formulação variacional recentemente desenvolvida. Em particular, pretende-se que esta seja capaz de contabilizar os seguintes efeitos: (i) entrada da malha de elementos finitos; (ii) preparação do modelo tendo em conta as restrições físicas inerentes ao problema; e (iii) propagação de fratura com dependência da malha tendo em conta a implementação do ADMM. O segundo objetivo consiste em desenvolver, de raiz, uma biblioteca de refinamento adaptativo de malhas em *python*² que permita, através da conjugação de hipóteses simplificativas de análises específicas relativas à malha de elementos finitos, reduzir o número de graus de liberdade sem perda de precisão durante a fase de propagação de fenda e, simultaneamente, utilizar técnicas e abordagens diferenciadoras. Esta biblioteca deverá ser adaptável para futura incorporação de novas funcionalidades, tais como a compatibilização de elementos finitos com topologias diversas e flexibilidade da opção de novas metodologias de análise (e.g., novos modos de divisão hierárquicas), entre outras. Por último, dispendo da referida ferramenta de cálculo totalmente operacional, torna-se imprescindível proceder à análise de exemplos numéricos, validando e comparando os resultados obtidos com os existentes em bibliografia.

Para que objetivo primordial da presente Dissertação seja concretizado com sucesso, o modelo desenvolvido, implementado e validado deverá ser capaz de exibir: (i) robustez - garantia de convergência da solução para situações com características semelhantes aos exemplos desenvolvidos; (ii) versatilidade - capacidade de modelação e estudo de problemas com topologia, carregamentos monotónicos e materiais diversos; e (iii) adaptabilidade - implementação de novas formulações de fratura.

Por último, pretende-se contribuir para o desenvolvimento da plataforma *mechpy* através da inovação da ferramenta e proporcionar a continuidade de futuros trabalhos referentes à temática em questão.

² Linguagem de programação de alto nível (*Very High Level Language* (VHLL)), interpretada e interativa, criada por Guido Van Rossum. Esta é uma linguagem orientada a objetos.

1.4 Organização do Documento

A Dissertação desenvolve-se ao longo de sete Capítulos, o primeiro dos quais é a presente introdução. Seguem-se os Capítulos centrais do documento cujo conteúdo é aqui sumarizado.

Capítulo 2 Procede-se a uma definição breve dos conceitos fundamentais da temática em análise. Para tal, são revistos alguns conceitos estabelecidos pela Mecânica da Fratura Elástica Linear, considerados essenciais para estabelecer o enquadramento teórico adequado.

Capítulo 3 Apresenta-se a formulação variacional utilizada. Aqui, expõe-se a utilização da otimização matemática aplicada à mecânica da fratura através da apresentação dos conceitos fundamentais do algoritmo de minimização matemática ADMM.

Capítulo 4 Realiza-se uma descrição da implementação da formulação numérica. Para tal, apresentam-se as estratégias adotadas e a sua importância para a construção lógica de um problema de fratura.

Capítulo 5 Considera-se como sendo o principal Capítulo da Dissertação. Neste, desenvolve-se a técnica de refinamento da malha utilizada como proposta de solução. É feita uma descrição sucinta de todos os conceitos teóricos utilizados e uma abordagem gráfica geral às rotinas desenvolvidas.

Capítulo 6 Valida-se e afere-se a capacidade da formulação numérica e da ferramenta de refinamento proposta. Para tal, apresentam-se neste Capítulo exemplos numéricos da sua aplicação. Os exemplos analisados advêm de problemas tipicamente académicos com contextualização à área da engenharia civil, procurando ilustrar as potencialidades implementadas.

Capítulo 7 Por último, são apresentadas as principais conclusões retiradas deste trabalho, juntamente com algumas sugestões de desenvolvimentos futuros.

Capítulo 2

Breve Revisão Sobre Conceitos da Mecânica da Fratura

2.1 Introdução

No presente Capítulo serão introduzidos os conceitos de mecânica da fratura estritamente necessários ao suporte das matérias tratadas nos Capítulos subsequentes. A literatura sobre mecânica da fratura é bastante extensa e complexa. Textos completos sobre esta temática podem ser consultados em [4]–[6]. A maior atenção é dada aos conceitos fundamentais referentes à Mecânica da Fratura Elástica Linear, enfatizando a explicação no critério energético proposto por Griffith. Neste contexto, a evolução histórica e pressupostos necessários para um melhor entendimento da temática são abordados de forma mais extensa.

Apesar da existência de outros critérios introduzidos na mecânica da fratura como formas alternativas de medir a tendência para o crescimento das fendas, generalizada aos casos em que a extensão da região de deformação plástica é importante, estes não serão aqui apresentados pela razão do método desenvolvido nesta Dissertação estar focado na análise linear elástica.

Como enquadramento, referem-se aqui três obras de maior relevância na Mecânica da Fratura Elástica Linear citadas neste Capítulo, tendo como seus autores, Griffith [2], Irwin [7] e Orowan [8]. Destes, destacam-se os dois primeiros como impulsionadores da abordagem apresentada.

2.2 Considerações Gerais

Os critérios de dimensionamento convencionais procuram explicar o conceito de ruptura, baseando os seus pressupostos no comportamento dos materiais, limitando a tensão máxima nas secções ou regiões consideradas críticas dos elementos estruturais ao valor da tensão de segurança. O sucesso da aplicação dos procedimentos tradicionais de dimensionamento depende do uso de um fator de segurança suficientemente alto para evitar falhas provocadas por qualquer aspeto que não tenha sido tomado em consideração no cálculo e, suficientemente baixo para evitar peso excessivo e desnecessário consumo de material e energia. A escolha destes fatores é usualmente um processo empírico, baseado designadamente na experiência acumulada [9, pp. 35-36]. Na prática, porém, encontra-se uma enorme diversidade de situações, caracterizadas por cargas aplicadas brusca ou lentamente cíclicas ou estáticas, por ambientes corrosivos ou não, por diferentes temperaturas de serviço que podem ser constantes ou variáveis e, ainda pelos processos de fabricação utilizados, que podem determinar alterações das propriedades dos materiais bem como o aparecimento de tensões residuais [4, pp. 10-13].

De acordo com Broek [6, pp. 24-48], à parte dos processos químicos envolvidos na degradação dos materiais, a ocorrência de fraturação nas estruturas através de processos físicos variados, pode verificar-se: (i) na ausência de deformação plástica; (ii) na presença de deformação plástica; ou (iii) de modo combinado. Segundo o mesmo autor, quando ocorre fissuração a tensões abaixo da tensão limite do material sem que exista deformação plástica na vizinhança da fenda, este promove o aparecimento de fratura frágil. As fendas propagam-se muito rapidamente, e são tão instáveis que a propagação da fratura ocorre sem gradual aumento da tensão imposta. Por outro lado, a existência de fratura proveniente de materiais com comportamento dúctil ocorre na presença de uma elevada deformação plástica na vizinhança da fenda. Estes casos são geralmente caracterizados por uma progressão lenta e controlada da fissura. Esta fratura é estável e não progride a menos que haja um aumento da tensão aplicada.

A existência de materiais com características diferenciadas faz com que os critérios convencionais de dimensionamento não sejam suficientemente robustos para explicar o aparecimento e desenvolvimento de fraturas em estruturas sujeitas a tensões de trabalho nominais abaixo da tensão de cedência do material. Projetos de crescente sofisticação e razões de economia criaram a necessidade de melhorar a compreensão do comportamento dos materiais nas condições de serviço e, em particular dos problemas de fratura [4, pp. 1-3]. Na disciplina da mecânica da fratura, o estudo da existência de fendas, traduz-se numa análise de propagação de fissuras ao longo de um determinado corpo. Este inclui na sua constituição, diversos defeitos e características próprias que o definem enquanto

elemento de análise. Segundo Kanninen e Popelar [5, pp. 138-139], a fratura a propagar-se, poderá fazê-lo de três modos distintos: (i) modo I - abertura perpendicular ao plano de fissura devido a tracções impostas; (ii) modo II - deslizamento no plano entre as faces da fissura na direção do seu comprimento devido à ocorrência de forças de corte; e (iii) modo III - deslizamento fora do plano entre as faces da fissura na direção normal ao comprimento da fissura, (ver Figura 2.1). A deformação causada pela ocorrência de fratura no corpo, pode ser originada através de uma sobreposição destes três modos básicos identificados. Contudo, o modo I é, em regra, o mais crítico e aquele que ocorre com maior frequência na prática.

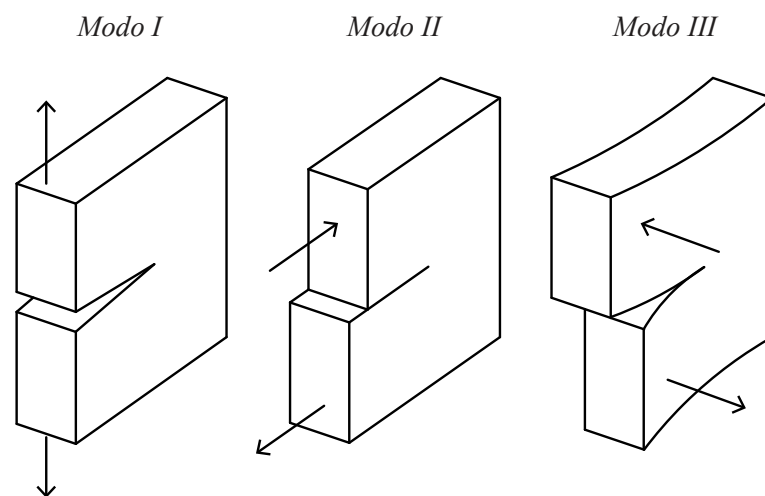


Figura 2.1: Modos de fratura (adaptado de Kanninen e Popelar [5, pp. 138-139])

No entanto, de forma a compreender o fenómeno físico de propagação é necessário desenvolver critérios que permitam avaliar quando as falhas por desenvolvimento de fratura irão ocorrer em estruturas fissuradas devido às solicitações mecânicas impostas.

2.3 Mecânica da Fratura Elástica Linear

Como nota prévia, refere-se que as subsecções pertencentes à presente secção, têm como bibliografia base as obras de Gdoutos [4, pp. 79-117], Kanninen e Popelar [5, pp. 3-46] e Broek [6, pp. 3-24]. Sempre que necessário, serão ainda citadas outras referencias de relevância para a temática em questão.

Na Mecânica da Fratura Elástica Linear, os problemas são analisados através de modelos que consideram que os corpos se deformam linearmente de acordo com a Lei de Hooke até ao momento da fratura (ver Figura 2.2). Para além deste comportamento dito perfeitamente frágil, existem também na verdade outros fenómenos físicos e geométricos

não lineares em todas as estruturas. Contudo, num número significativo de casos, estes efeitos estão restringidos a uma pequena zona, normalmente negligenciada face à área que esta ocupa relativamente ao tamanho de fratura existente. Quando tal não sucede, os parâmetros definidos aqui, não são aplicáveis e torna-se necessário procurar novos critérios que caracterizem a sua propagação.

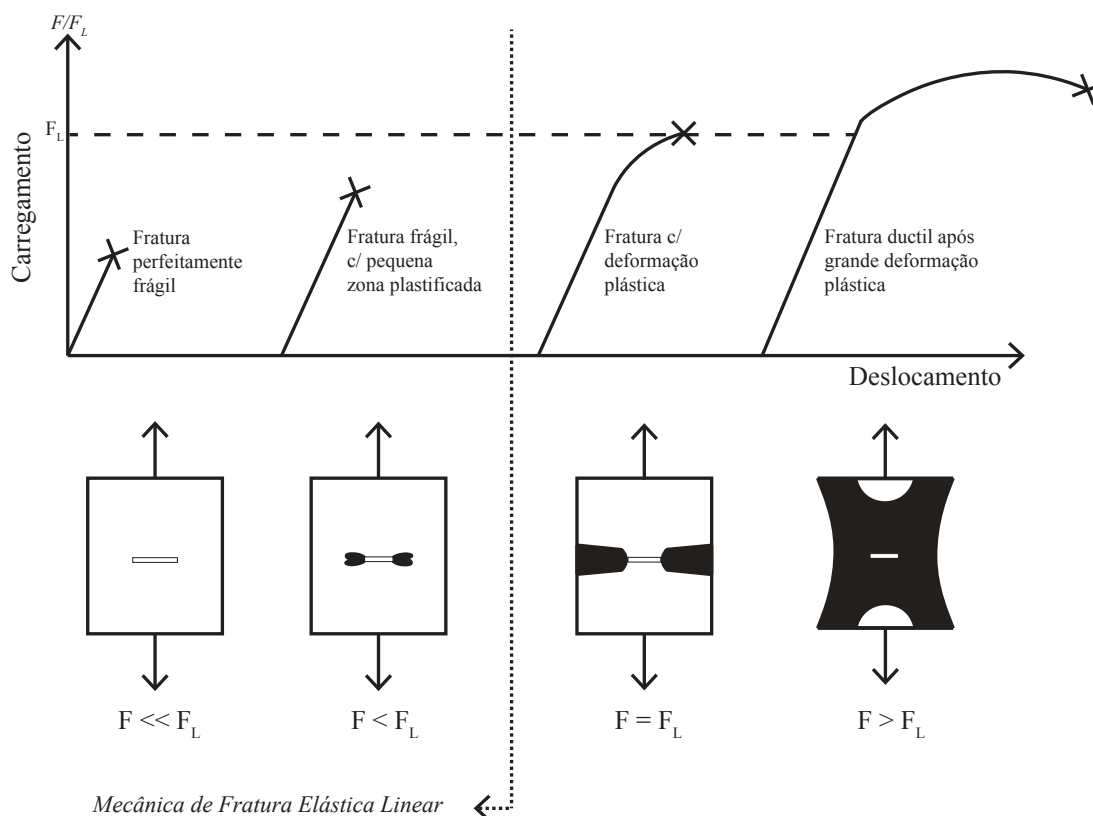


Figura 2.2: Estados de deformação plástica num corpo com fenda

2.3.1 Evolução Histórica

O primeiro registo do indício da dependência da resistência de um corpo com a existência de defeitos remonta ao tempo de Leonardo da Vinci, nos finais do século XV, o qual realizou experiências de tração em cabos de ferro de igual diâmetro, tendo concluindo que a resistência variava na proporção inversa do comprimento dos cabos. Até ao século XIX, o comportamento dos materiais face a solicitações impostas, traduzia-se num conhecimento totalmente empírico, com cariz bastante rudimentar.

A produção em massa de materiais durante o período da Revolução Industrial (séc. XVIII - XIX) foi a grande alavanca para um maior conhecimento nesta área. No entanto, a dependência de escala introduzida por Leonardo da Vinci foi incompreendida até ao início

do século XX, onde Inglis [10] demonstrou que a introdução de uma cavidade elíptica numa placa de comprimento infinito solicitada por tensões uniaxiais, alteraria o estado de tensão ao redor do defeito introduzido, concluindo que as tensões geradas pela sua introdução seriam de tal forma elevadas que a placa deixaria de apresentar as mesmas características de resistência iniciais.

Contudo, as teorias modernas referentes ao fenómeno de fratura iniciam-se por volta de 1920 com Griffith, baseando o seu trabalho experimental a problemas de fratura em materiais com comportamento perfeitamente frágil, o vidro. Este autor desenvolveu o trabalho realizado por Inglis, propondo um novo critério energético designado por energia crítica de propagação de fratura, G_c . No entanto, os pressupostos de Griffith não tinham em linha de conta possíveis deformações plásticas na ponta da fenda, considerando sobretudo uma análise atómica proveniente da libertação de energia superficial do material aquando da ocorrência de fratura.

Durante o período da Segunda Grande Guerra (1939-1945) e após a ocorrência de desastres com importância assinalável, novos investigadores prosseguiram o trabalho protagonizado por Griffith. Orowan, sugeriu que a energia libertada na propagação de uma fissura era consumida não só como energia de tensão superficial mas também e sobretudo na deformação plástica associada ao processo de fratura.

Durante a década de 50, Irwin utilizou os pressupostos de Griffith e de Orowan, centrando a sua análise na energia de deformação armazenada e na energia de superfície proveniente do trabalho realizado numa zona de deformação plástica. Deste estudo, resultou uma modificação de extrema importância, onde o conceito de plasticidade foi introduzido no conceito inicial de energia crítica de propagação de fratura.

Irwin [11] destacou-se também pela introdução de um parâmetro local à extremidade da fenda, o fator de intensidade de tensão, K , e pelo estabelecimento de uma relação quantitativa entre este fator e a energia de propagação de fratura. Para a resolução deste problema no âmbito da elasticidade, dispôs na altura em que realizou o seu trabalho, das soluções deduzidas por Westergaard [12]. Estas soluções, baseavam-se numa técnica analítica de tratamento do problema na determinação de tensões e deformações em corpos fissurados.

Deste estudo, resultou um avanço significativo na análise de propagação de fratura, onde Irwin demonstrou que a abordagem energética era equivalente a uma abordagem de intensidade de tensão local, segundo a qual a fratura ocorreria quando o valor da concentração de tensões na ponta da fenda atingia um valor crítico. Esta demonstração de equivalência de G e K forneceu a base para o desenvolvimento da Mecânica da Fratura Elástica Linear [13].

2.3.2 Critério Energético Proposto por Griffith

A resistência de um material à tração deve ser explicada, teoricamente, por forças ao nível atômico. Porém, devido a defeitos vários, a resistência prática é consideravelmente menor do que a estimativa teórica [2].

Griffith, focando o seu trabalho na resolução desta dicotomia, demonstrou que a ideia de que a discrepância entre os valores teóricos e reais da resistência à ruptura se deveria explicar pela presença de fissuras, porventura muito pequenas, no material. A ideia principal da teoria proposta, centrava-se no conceito de que ocorreria propagação de fratura devido à existência da libertação de energia face à resistência existente do material constituinte do corpo. Utilizando a solução do campo de tensões de Inglis [10] para uma placa contendo uma cavidade elíptica central (ver Figura 2.3), Griffith estava apto a formular uma aproximação energética, onde a energia elástica, U , armazenada no sistema seria,

$$U = \frac{\sigma^2}{2E}(V_{\text{Total}} - 2\pi a^2) \quad (2.1)$$

onde V_{Total} tenderia para infinito tendo em consideração as dimensões da placa e $2\pi a^2$ representaria o volume de fenda introduzida.

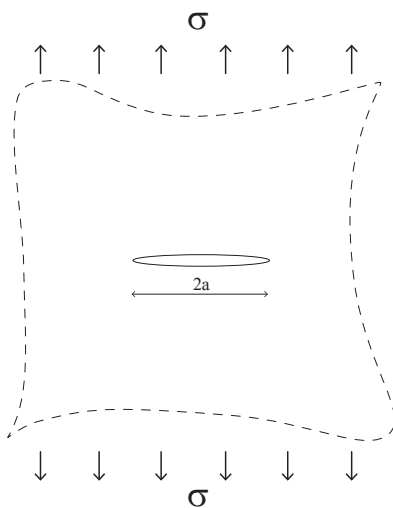


Figura 2.3: Placa com extremidades fixas de dimensões infinitas, de espessura unitária, em estado plano de tensão, contendo uma cavidade elíptica central de comprimento $2a$ perpendicular às tensões uniaxiais impostas σ

Além da alteração das tensões elásticas provenientes da introdução da fissura na placa, Griffith através das suas experiências com fibras de vidro, afirmou, que para materiais com comportamento idealmente frágil, a introdução deste defeito geraria uma quantidade de

energia superficial,

$$\mathcal{D}_G = 2(2a)\gamma_s = 4\gamma_s a \quad (2.2)$$

onde o factor 2 representaria a criação de duas superfícies de fratura de comprimento igual à da fenda (no caso $2a$) e γ_s a energia de tensão superficial proveniente de considerações ao nível atómico. Griffith, considerando que a criação de novas superfícies advinha de processos termodinâmicos irreversíveis em condições específicas¹ de análise a corpos deformáveis devido a alterações energéticas ao longo do tempo, e considerando que todas as alterações que diziam respeito a este referiam-se à propagação da fenda, afirmou que a fratura ocorreria caso o balanço energético fosse favorável,

$$\dot{\Pi}_{\text{Total}} = \dot{U} - \dot{W} + \dot{\mathcal{D}}_G \equiv \frac{\partial U}{\partial a} - \frac{\partial W}{\partial a} + \frac{\partial \mathcal{D}_G}{\partial a} > 0 \quad (2.3)$$

onde W corresponderia ao trabalho realizado pelas cargas aplicadas. Para tal, existiria uma diminuição da energia potencial ($U + W$), proveniente da libertação da energia elástica e do trabalho realizado pelas cargas aplicadas ao elemento, e um aumento da energia de superfície, resultado da ocorrência da propagação de fenda (ver Figura 2.4). No caso de uma placa com extremidades fixas, a carga externa não realiza trabalho e assim a energia necessária para a propagação teria de resultar de uma libertação de energia elástica. Deste modo, a energia elástica armazenada na placa com existência de fissura diminuiria, com igual valor ao volume de tensão libertada pelo material fraturado.

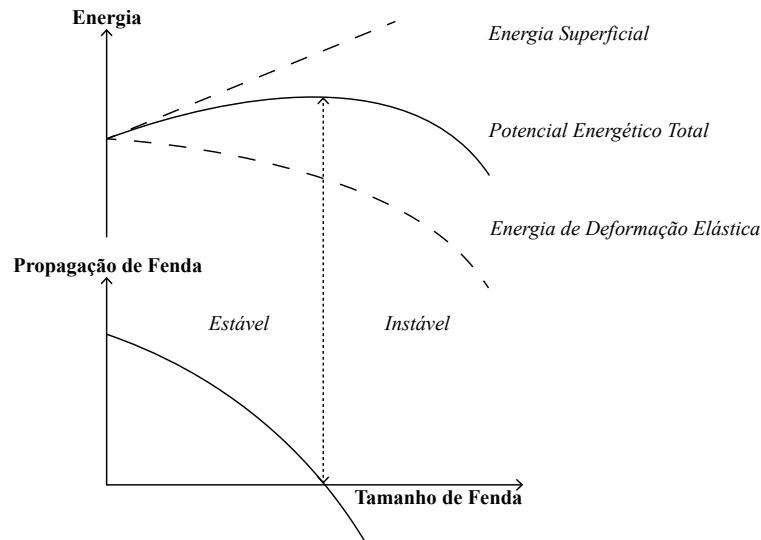


Figura 2.4: Balanço energético relativo a uma pequena fissura inserida numa placa com extremidades fixas de dimensões infinitas (adaptado de Janssen *et al.* [14, pp. 11])

¹ (i) condições estáticas; (ii) deformações puramente elásticas; (iii) sistema adiabático sem qualquer fonte de calor interno; (iv) forças exteriores conservativas (gravíticas, elásticas), resultando num decréscimo do trabalho exterior realizado

Assim, Griffith postulou um novo critério de fratura energético, onde definiu o conceito de energia crítica de propagação de fratura, G_c [J/m^2], para materiais com comportamento frágil em condições elásticas, onde, para que não ocorresse propagação de fratura, o valor do potencial energético teria de ser inferior ao estipulado por G_c :

$$-\frac{\partial \Pi}{\partial a} \leq G_c = 2\gamma_s \quad (2.4)$$

Caso a energia elástica libertada fosse igual à energia crítica de propagação, seria calculado o valor do comprimento crítico de fenda, a_c , para uma determinada tensão aplicada, ou valor crítico de tensão, σ_c , para cada valor de comprimento de fenda ocorrido:

$$-\frac{\partial \Pi}{\partial a} = G_c \Rightarrow \begin{cases} a_c = \frac{G_c E}{\pi \sigma^2} \\ \sigma_c = \sqrt{\frac{G_c E}{\pi a}} \end{cases} \quad (2.5)$$

Fisicamente, a equação (2.4) pode ser interpretada da seguinte forma: (i) à esquerda da equação representa-se a energia total disponível para que exista propagação de fenda, onde o sinal negativo representa o decréscimo do potencial energético; e (ii) à direita da equação, o factor 2 representa a criação de duas novas superfícies devido à ocorrência de fratura com uma tensão energética superficial γ_s . No entanto, observa-se que esta análise se associa a materiais frágeis, com comportamento puramente elástico. Segundo Soboyejo [15, pp. 365-395], tipicamente, existe uma pequena zona inelástica na ponta da fratura, onde dependendo do material, podem ocorrer processos irreversíveis, nomeadamente: (i) deformação plástica (metais); (ii) micro-fraturas (cerâmicos); (iii) descolagem de fibras (compositos); ou (iv) formação de uma superfície fissurada (polímeros). Para materiais mais dúcteis do que o vidro, o valor de G_c deve ser associado a uma constante, C_{sp} , sendo esta $\gg 2\gamma_s$. Orowan sugeriu que a energia libertada na propagação de uma fissura era consumida não só como energia de tensão superficial mas também e sobretudo na deformação plástica associada ao processo de energia:

$$C_{sp} = 2\gamma_s + \gamma_p \quad (2.6)$$

Contudo, Orowan e Irwin esclareceram que, desde que os métodos da elasticidade linear pudessem ser utilizados (e portanto a extensão da zona deformada plasticamente fosse muito menor do que a extensão da fenda), a resistência à fratura seria dominada pelo parâmetro da tensão energética superficial. Assim, a condição crítica de fratura resultante do balanço energético seria,

$$G_c = 2\gamma_s \quad (2.7)$$

onde G_c seria a energia de propagação crítica considerando agora comportamentos inelásticos na ponta da fratura. Esta energia de propagação, seria uma propriedade intrínseca do material, medindo a sua capacidade de resistir à propagação de fendas. Deste modo, além da definição do corolário (2.4) para materiais com comportamento perfeitamente frágil, o critério da fratura de Griffith continuava válido para materiais com características de plasticidade não desprezável, onde a energia crítica de propagação de fratura incluiria na sua gênese a energia dissipada dessa zona inelástica presente na ponta da fenda. Assim, a ideia central da teoria de Griffith permanecia válida para a generalidade de problemas de fratura.

Capítulo 3

Otimização Matemática Aplicada à Fratura

3.1 Introdução

A teoria clássica de Griffith referente à fratura frágil tem sido referenciada ao longo dos últimos anos através da utilização de modelos numéricos designados por *free discontinuity* (generalizados à teoria de Griffith; ver, e.g., [1], [16]–[18]). O termo referido, foi introduzido por Giorgi e Ambrosio [19] que postulam que a solução pode conter descontinuidades e, em adição, a localização das mesmas ao longo dos diversos incrementos de carga é desconhecida *a priori*.

A abordagem proposta por Bourdin *et al.* [1], a qual serviu de inspiração para o desenvolvimento da formulação variacional utilizada no presente trabalho, interpreta o problema de propagação de fenda como um problema de determinação da configuração que minimiza a energia global do sistema mecânico. Para a sua aplicação a problemas de fratura, é necessário garantir restrições físicas no modelo de propagação de modo a satisfazer a irreversibilidade do fenómeno. A abordagem mais comum, passa pela minimização sucessiva e independente dos diversos incrementos de carga, que geram ou não propagação de fenda. Durante o incremento, garantem-se restrições físicas de irreversibilidade até ao limite de incrementos estipulados.

Este tipo de formulações variacionais, leva invariavelmente à necessidade de resolver um problema de programação matemática. Para tal, neste trabalho, recorre-se ao método denominado por *Alternating Direction Method of Multipliers* (ADMM) [3] na nomenclatura anglo-saxónica, como algoritmo de resolução do problema de minimização fundamental.

Este método numérico permite resolver problemas de otimização não-lineares convexos através da aplicação de um algoritmo iterativo bastante expedito e eficiente. O método descrito, decompõe o problema original em dois sub-problemas, resolvendo-os através de minimizações sucessivas e alternadas.

3.2 Formulação Variacional

Nesta secção descreve-se, com o detalhe necessário, a formulação utilizada neste trabalho. De acordo com Vicente da Silva [20], considera-se um corpo Ω de domínio convexo, constituído por um material frágil elástico linear, delimitado por uma fronteira Γ , composta por três sub-regiões complementares, Γ_μ , Γ_t e Γ_c ,

$$\Gamma = \Gamma_\mu \cup \Gamma_t \cup \Gamma_c \quad (3.1a)$$

$$\Gamma_\mu \cap \Gamma_t = \Gamma_t \cap \Gamma_c = \Gamma_\mu \cap \Gamma_c = \emptyset \quad (3.1b)$$

onde Γ_μ é a região da fronteira onde são impostas restrições ao deslocamento do corpo, denominada por fronteira cinemática, Γ_t é a região da fronteira onde se conhecem as forças exteriores aplicadas, denominada por fronteira estática, e Γ_c é a região representativa das superfícies de fratura existentes (ver Figura 3.1).

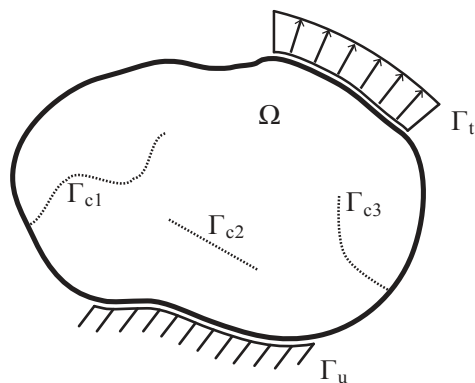


Figura 3.1: Partição do domínio Ω nas sub-regiões complementares de Γ

Como nota inicial, considera-se que daqui em diante, a utilização de uma nomenclatura particular em relação à variável tempo (e.g., $\Gamma_c(t) = {}^t\Gamma_c$). Segundo Vicente da Silva [20], a propagação de uma fratura corresponde a uma determinada fissura inicial incrementada por uma variação na superfície,

$${}^{t+\Delta t}\Gamma_c = {}^t\Gamma_c + \Delta\Gamma_c \quad (3.2)$$

onde esta propagação de fenda corresponde a um processo físico irreversível,

$${}^t\Gamma_c \subseteq {}^{t+\Delta t}\Gamma_c \quad (3.3)$$

sendo o domínio ao longo do tempo, ${}^t\Omega$, representado pela exclusão da sub-região representativa das superfícies fraturadas:

$${}^t\Omega = \Omega \setminus {}^t\Gamma_c \quad (3.4)$$

A ocorrência de propagação de fenda pressupõe a existência inicial de contacto unilateral entre faces, definindo-se como restrição física implícita a não interpenetração de elementos vizinhos aquando da propagação de fratura,

$$[[u]] \cdot n > 0 \quad (3.5)$$

onde $[[u]]$ corresponde aos deslocamentos relativos (n, t) entre faces sendo n a normal exterior à superfície fraturada conforme ilustrado na Figura 3.2. A ocorrência desta fissura deve-se à dissipação de energia ao longo da superfície da mesma, proporcional à área de fraturação ocorrida, originada por forças exteriores ao corpo que impulsionam o seu aumento.

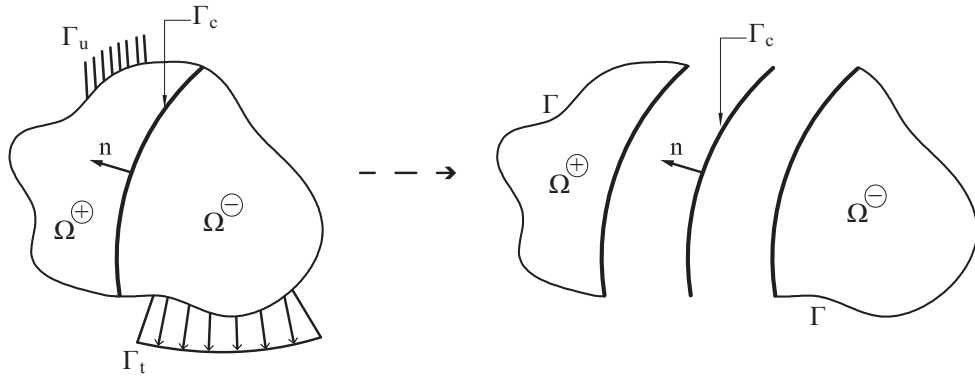


Figura 3.2: Deslocamento admissível entre faces fraturadas Γ_c num domínio $\Omega = \{\Omega^+, \Omega^-\}$

A ocorrência de uma nova superfície fraturada e de acordo com Pandolfi e Ortiz [21], resulta da combinação de três fatores fundamentais, que combinados, geram ou não, aumento de fenda: (i) energia elástica libertada pela ocorrência de fratura; (ii) energia específica de fratura, que penaliza proporcionalmente a área de fratura ocorrida; e (iii) condições e restrições físicas inerentes ao processo de fratura, nomeadamente a irreversibilidade do fenómeno após solicitações impostas, dependência de caminho fraturado originado pela continuidade do processo e histerese.

Segundo Bourdin *et al.* [1] a propagação de fenda pode ser aproximada a um problema de minimização, tendo como pressuposto base o critério energético de Griffith. Estes autores consideram que se a energia libertada exceder a energia crítica proveniente de todos os caminhos possíveis críticos a analisar, a fratura ocorrerá pelo caminho que irá minimizar o potencial energético total do sistema,

$$\text{minimização } {}^t\Pi_{Total}(u, \Gamma_c) = {}^tU(u, \Gamma_c) - {}^tW(u, \Gamma_c) + \int_0^t \mathcal{D}_G({}^\tau|\dot{\Gamma}_c|) d\tau \quad (3.6)$$

em que,

$${}^tU = \frac{1}{2} \int_{\Omega \setminus \Gamma_c} ({}^tu)^T k ({}^tu) dV \quad (3.7)$$

$${}^tW = \int_{\Omega} ({}^tf_b)^T u dV + \int_{\Gamma_\sigma} ({}^tf_t)^T u dS \quad (3.8)$$

onde u representa os deslocamentos, k a matriz de rigidez elementar, f_b as forças de superfície por unidade de volume e f_t as forças de tração por unidade de superfície. O último termo da equação (3.6) representa a energia de propagação de fenda absorvida durante a ocorrência de fratura, \mathcal{D}_G , definido como sendo,

$$\mathcal{D}_G = \begin{cases} G_c |\dot{\Gamma}_c|, & |\dot{\Gamma}_c| \geq 0 \\ \infty, & |\dot{\Gamma}_c| < 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

onde $|\dot{\Gamma}_c|$ é a variação da área de fratura (comprimento no caso bidimensional) ao longo do tempo. Sem a presença deste último termo, o problema resume-se simplesmente ao princípio da estacionaridade da energia potencial ($U+W$), recuperando assim um problema típico de valor de fronteira elástico linear.

3.3 Algoritmo de Programação Matemática

De forma a resolver o problema de minimização descrito na secção anterior, propõe-se a utilização do ADMM. O conceito de ADMM foi desenvolvido inicialmente por Glowinski e Marroco [22] e Gabay e Mercier [23] em meados dos anos 70.

Embora existam algumas referências implícitas em [24], o termo ADMM foi cunhado no final da década de 80, inícios da década de 90 (generalizados ao conceito do ADMM; ver e.g., [25]–[27]). O método descrito também é por vezes designado por *Alternating Direction Augmented Lagrangian* (ADAL) ou método de divisão de *Bregman* [28].

De acordo com Boyd *et al.* [3], o algoritmo de programação matemática ADMM, consiste na resolução sucessiva do problema de minimização, utilizando alternada e independentemente as variáveis de decisão relativas ao problema em questão. A estratégia delineada por esta ferramenta de cálculo permite que a não-linearidade do problema possa ser tratada de forma simples e direta. O método apresentado visa combinar as vantagens de um problema de minimização dual com o método Lagrangeano aumentado, apresentando uma taxa de convergência competitiva face a métodos alternativos, especialmente com tolerâncias não muito apertadas. Este algoritmo apresenta ainda uma robustez assinalável sendo a sua convergência praticamente garantida.

O método descrito, está apto a resolver problemas que possam ser escritos na forma,

$$\text{minimização } f(x) + g(z) \quad (3.10a)$$

$$\text{sujeito a: } \mathcal{A}x + \mathcal{B}z \quad (3.10b)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ e $z \in \mathbb{R}^m$ são variáveis de decisão. Aqui, $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$ e $\mathcal{B} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$ são matrizes lineares de transformação. Na função objetivo (3.10a), f e g são funções de valor limite, significando que fora do seu domínio, o valor a retornar será ∞ , e.g.:

$$f(x) = \begin{cases} f_{\mathbb{R}}(x), & x \in \text{dom } f_{\mathbb{R}} \\ \infty, & x \notin \text{dom } f_{\mathbb{R}} \end{cases} \quad (3.11)$$

Em adição, estas funções devem apresentar características adicionais, nomeadamente serem fechadas e convexas [3]. À parte destas imposições, não são impostas mais restrições relativamente ao problema em estudo, permitindo assim analisar uma vasta gama de problemas.

Após a construção da função objetivo (3.10a), define-se a função Langrangena aumentada para o problema a minimizar. Através do uso de multiplicadores de Lagrange, y , a restrição linear (3.10b) é inserida na função objetivo (3.10a). Adicionalmente, é acrescentado um termo de penalidade quadrático, controlado pelo denominado parâmetro de penalidade ρ , um escalar positivo ($\rho \in \mathbb{R}^+$), com o objetivo de reforçar a restrição inicial imposta (3.10b):

$$L_{\rho}(x, z, y) = f(x) + g(z) + y^T(\mathcal{A}x + \mathcal{B}z) + \frac{\rho}{2}\|\mathcal{A}x + \mathcal{B}z\|^2 \quad (3.12)$$

O algoritmo 1 apresenta as linhas gerais do processo de solução do ADMM. O cerne deste algoritmo de programação matemática consiste fundamentalmente nos passos 4, 5 e 7, onde a função Lagrangeana é sucessiva e independentemente minimizada utilizando para tal as variáveis de decisão, x e z , da função objetivo (3.10a). É de salientar que em cada fase de minimização, apenas uma variável de decisão é utilizada, enquanto as restantes permanecem inalteradas. Durante o decorrer do processo, a variável dual, y , é

consequentemente atualizada com base no resíduo primal, r_p . De forma a melhorar a eficiência do algoritmo, o valor do parâmetro de penalidade pode ser modificado no decorrer do processo de convergência. Contudo, não existe na literatura uma estratégia precisa e inequívoca de como proceder à atualização deste parâmetro. Tais resultados podem ser consultados em [3] de forma a obter um maior detalhe acerca do algoritmo de programação matemático ADMM.

Algoritmo 1 Esquema de solução ADMM

- 1: Arbitrar $z^0 \in R^m$ e $y^0 \in R^l$ ▷ Fase de inicialização
 - 2: $k \leftarrow 0$
 - 3: **repetir**
 - 4: $x^{k+1} \leftarrow \underset{x}{\operatorname{argmin}} L_\rho(x, z^k, y^k)$ ▷ Minimização segundo variável de decisão x
 - 5: $z^{k+1} \leftarrow \underset{z}{\operatorname{argmin}} L_\rho(x^{k+1}, z, y^k)$ ▷ Minimização segundo variável de decisão z
 - 6: $r_p^{k+1} \leftarrow \mathcal{A}x^{k+1} + \mathcal{B}z^{k+1}$ ▷ Validade do valor residual primal
 - 7: $y^{k+1} \leftarrow y^k + \rho r_p^{k+1}$ ▷ Atualização da variável dual
 - 8: $r_d^{k+1} \leftarrow \rho \mathcal{A}^T \mathcal{B}(z^{k+1} - z^k)$ ▷ Validade do valor residual dual
 - 9: Atualizar o parâmetro de penalidade ρ ▷ Etapa opcional
 - 10: $k \leftarrow k + 1$
 - 11: **até** $\|r_p^k\| < \epsilon^{primal}$ e $\|r_d^k\| < \epsilon^{dual}$ ▷ Critério de paragem
-

O algoritmo 1 passa pela obtenção a cada iteração, k , de uma boa aproximação à minimização da função Lagrangeana (associada ao valor corrente dos multiplicadores, y^k). A tarefa de obter o exato minimizador do Lagrangeano, para cada iteração k , não é trivial e exige um custo computacional significativo. Alternativamente, opta-se por obter uma boa estimativa do minimizador do Lagrangeano, realizando sucessivas minimizações da função objetivo em relação a cada variável de decisão.

O objetivo primordial da utilização do algoritmo de programação matemática ADMM, no estudo de um modelo de fratura, passa pela decomposição do problema de otimização geral em dois subproblemas. O primeiro, considera o cálculo dos deslocamentos globais devido à ocorrência de fratura. Para tal, minimiza a função objetivo em função da variável de decisão, x , e resolve a equação linear obtida. O segundo, relaciona esses deslocamentos e procura obter o potencial mínimo que minimize a solução de propagação de fenda. Estes dois subproblemas podem ser designados por problemas de minimização global e local da função objetivo que definem o problema. O detalhe necessário para executar estas duas fases de minimização será apresentado no Capítulo 4.

Como nota final, tecem-se algumas considerações sobre parâmetros considerados de relevância no algoritmo 1:

1. A fase de inicialização (passo 1) não pretende ter um papel restritivo no desenvolvimento do processo iterativo, considerando-se assim a correspondente arbitrariedade aos vetores identificados. Contudo, considera-se como bom princípio, a inicialização a zeros dos vetores referenciados;
2. O valor inicial do parâmetro de penalidade, ρ , apresenta um papel importante no ritmo de convergência do método iterativo ADMM. O seu valor não deve ser muito elevado nem muito reduzido, de modo a obter uma convergência adequada. Caso este seja elevado, pode originar uma evolução muito rápida no processo de convergência, convergindo para um valor menos preciso do que aquele que o método é capaz de produzir, uma vez que o problema fica mal condicionado. Caso este seja muito reduzido, pode provocar um processo inverso, onde a evolução do processo iterativo torna-se demasiado lenta, levando a um decréscimo significativo da taxa de convergência. Salienta-se que este fator reforça as condições de compatibilidade do problema;
3. Os valores das tolerâncias de erro primal, ϵ^{primal} , e dual, ϵ^{dual} , a adotar devem satisfazer as necessidades da solução matemática a analisar. Caso os valores adotados sejam muito reduzidos, o número de iterações, k , terá que ser suficientemente elevado para garantir a convergência desejada. No entanto, apesar de obter um resultado matemático com um nível de precisão superior, o tempo de cálculo aumenta significativamente. De modo a simplificar o processo de convergência, considera-se a mesma tolerância a adotar em ambos os casos, $\epsilon^{primal} = \epsilon^{dual} = \epsilon$.

Para que haja uma solução matemática conveniente para o problema, é necessário conjugar convenientemente os parâmetros referidos. Para tal, os valores a adotar devem ter em linha de conta experiências numéricas realizadas dentro do âmbito da propagação de fratura.

Capítulo 4

Formulação Numérica

4.1 Introdução

No processo de modelação numérica de um problema físico, várias etapas são desenvolvidas. O processo inicia-se pela formulação de um modelo matemático capaz de descrever o problema físico real. Posteriormente, recorre-se à obtenção de um método numérico que permita construir uma solução, usualmente aproximada, para o problema. Este é traduzido por um algoritmo que não é mais do que um completo e não ambíguo conjunto de passos que conduzem à solução do problema. Esta fase constitui o cerne da análise numérica.


No presente Capítulo, a formulação variacional de fratura apresentada no Capítulo 3 é discretizada através de uma formulação não convencional de Elementos Finitos. Daí, resulta um problema não-linear de otimização que será resolvido através da aplicação do ADMM. Neste método, a garantia de que a solução obtida converge para a solução exata e que o grau de precisão da solução aproximada não se traduz na existência de erros numéricos provenientes do método, concebe de forma efetiva a base para a correta resolução do problema. Assim, na secção 4.2 discutem-se os detalhes decorrentes da aplicação do método numérico, descrevendo as hipóteses simplificativas assumidas e modos de compatibilização entre elementos finitos utilizados. A discretização da formulação variacional é discutida na secção 4.3 através da obtenção da função objetivo que rege o problema de fratura. Na secção 4.4 traduz-se o problema não-linear de otimização através da implementação do algoritmo de programação matemática ADMM. Por fim, na secção 4.5 realiza-se uma breve descrição dos passos fundamentais na preparação do modelo numérico de fratura a analisar.

4.2 Discretização do Elemento Finito

De acordo com a nomenclatura introduzida por Pian [29], [30], a presente formulação de elementos finitos é designada como sendo uma formulação híbrida. Esta, ao contrário do que acontece com o Método dos Elementos Finitos (MEF) convencional, aproxima campos tanto no domínio como na fronteira, não sendo *a priori* garantida a compatibilidade entre elementos. De facto, esta condição de compatibilidade é introduzida através de uma aproximação adicional do campo de deslocamentos relativos, sendo esta aproximação independente das restantes. Assim, a compatibilidade exigida entre elementos é garantida através da introdução de condições de restrição adicionais no princípio variacional. A utilização deste campo nas fronteiras inter-elementares permite introduzir descontinuidades no campo de deslocamentos, possibilitando assim o surgimento e propagação de fendas no modelo numérico.

Relativamente ao campo de deslocamentos no domínio dos elementos finitos, este é linear e resulta da utilização do elemento triangular de 3-nós convencional [31]. Apesar da sua reduzida utilização no meio científico devido à existência de elementos capazes de obter melhores soluções, e.g., elemento triangular de 6-nós convencional, a simplificação existente durante os processos de análise (ver Tabela 4.1), determina a sua utilização numa fase inicial de projeto.

Tabela 4.1: Caracterização do elemento finito utilizado

Elemento	Deslocamento	Deformação
	Linear	Constante
3-nós		

Assim, na presente formulação e contrariamente ao que acontece no MEF, cada nó é único e pertence a um determinado elemento, existindo por isso múltiplos nós com coordenadas iguais, pertencendo no entanto a elementos distintos.

Conforme mencionado anteriormente, nas fronteiras inter-elementares introduz-se uma aproximação adicional para o campo de deslocamentos relativos, $[[u]]$. Neste caso, assume-se também que este campo é linear. Assim, as aproximações adotadas poderão ser escritas do seguinte modo,

$$u = \{u_x, u_y\}^T = \sum N_i d_i^e \quad (4.1a)$$

$$[[u]] = \{[[u]]_n, [[u]]_t\}^T = \sum L_i q_i \quad (4.1b)$$

onde o índice i representa o nó e o índice e o elemento finito, as matrizes N e L representam as funções de forma nodais, conforme indicado em [32, pp. 87-89], e os vetores d e q associam o valor de cada deslocamento nodal. É de salientar que as funções de forma utilizadas, no domínio dos elementos, consideram uma aproximação linear do campo de deslocamento no domínio dos elementos finitos, devido à utilização de elementos triangulares convencionais de 3-nós. Mais, as funções L_i são também funções lineares, contudo, estas aproximações são expressas no referencial local (n, t) , normal e tangencial, da interface (ver Figura 4.1). A compatibilidade entre estas duas aproximações, (4.1a) e (4.1b), pode ser escrita para um nó i , através da condição seguinte,

$$q_i = \begin{bmatrix} n_x & n_y \\ n_y & -n_x \end{bmatrix} (d_i^\oplus - d_i^\ominus) \quad \text{em } \Gamma_e \quad (4.2)$$

onde os símbolos \oplus e \ominus associam a fronteira partilhada, Γ_e , por dois elementos considerados, podendo a sua ordem ser escolhida de forma arbitrária (ver Figura 4.1). Associada a cada fronteira inter-elementar, o vector normal é definido, com base da direção exterior ao elemento com sinal \ominus , sendo esta a convenção a seguir. A transformação de eixos principais (x, y) em eixos locais (n, t) torna o problema fisicamente compreensível em termos de deslocamentos relativos existentes.

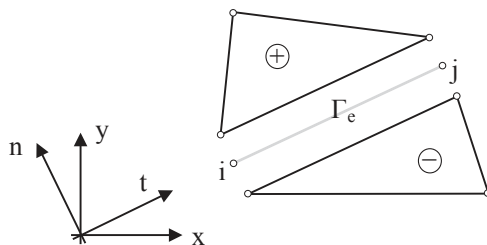


Figura 4.1: Fronteira inter-elementar (adaptado de [20])

No entanto, a possibilidade de ocorrência de deslocamentos relativos inter-elementares, levanta um problema de compatibilização, uma vez que passa a ser possível a interpenetração entre elementos adjacentes. Deste modo, caso o deslocamento relativo ocorra e provoque esta situação, a formulação deverá impossibilitar este fenómeno. Para tal, estabelece-se a seguinte condição,

$$\Delta q_n + n^T ({}^t d_i^\oplus - {}^t d_i^\ominus) \geq 0 \quad (4.3)$$

garantindo que o deslocamento relativo total, no instante de tempo t , na direção normal à superfície inter-elementar não é negativo, impossibilitando assim a sobreposição de elementos adjacentes.

4.3 Problema de Otimização Discreto

Assume-se que a solução de propagação de fratura é conhecida no instante de tempo t . Para o incremento subsequente $t + \Delta t$, a solução final para o campo de deslocamento d resulta da soma de incrementos Δd provocados pela imposição de solicitações ao longo do tempo, resultando:

$${}^{t+\Delta t}d = {}^t d + \Delta d \quad (4.4)$$

Atendendo à equação (3.6), o princípio variacional que rege o problema de propagação da fratura, de acordo com a teoria de Griffith, pode ser escrito na seguinte forma discreta,

$$\text{minimização } {}^{t+\Delta t}\Pi_{Total} = {}^{t+\Delta t}U({}^{t+\Delta t}d) - {}^{t+\Delta t}W({}^{t+\Delta t}d) + \mathcal{D}_G(\Delta q) \quad (4.5)$$

em que:

$${}^{t+\Delta t}U = \frac{1}{2}({}^t d)^T K {}^t d + \frac{1}{2}(\Delta d)^T K (\Delta d) + ({}^t d)^T K (\Delta d) \quad (4.6)$$

$${}^{t+\Delta t}W = ({}^{t+\Delta t}F)^T {}^t d + ({}^{t+\Delta t}F)^T \Delta d \quad (4.7)$$

Tendo em consideração a equação (4.2) a parcela de dissipação de energia, \mathcal{D}_G , devido à propagação da fratura pode ser escrita em função de Δq . Por último, é ainda necessário não esquecer da condição de não sobreposição (4.3).

Combinando as equações (4.5), (4.6) e (4.7) e introduzindo condições de compatibilidade (4.2) e (4.3) físicas inerentes a um problema de fratura no princípio variacional, resulta o problema de otimização que governa a presente formulação não convencional de elementos finitos:

$$\text{minimização } \frac{1}{2}(\Delta d)^T K (\Delta d) + ({}^t d)^T K (\Delta d) - ({}^{t+\Delta t}F)^T \Delta d + \mathcal{D}_G(\Delta q) \quad (4.8a)$$

sujeito a: (todas as fronteiras inter-elementares)

$$\Delta q = \begin{bmatrix} n_x & n_y \\ n_y & -n_x \end{bmatrix} (\Delta d_i^\oplus - \Delta d_i^\ominus) \quad (4.8b)$$

$$\Delta q_n + n^T ({}^t d_i^\oplus - {}^t d_i^\ominus) \geq 0 \quad (4.8c)$$

É de salientar que na função objetivo (4.8a) os termos não dependentes de Δd ou Δq puderam ser eliminados. Esta simplificação advém do facto destes termos serem constantes, i.e, não dependerem das variáveis de decisão, e consequentemente não afetarem a solução dita ótima.

4.4 Implementação ADMM

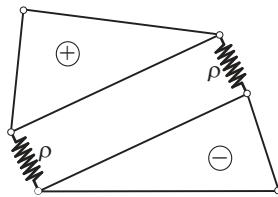
Introduzindo as restrições (4.8b) e (4.8c) e dando ênfase a esta última, o funcional Lagrangeano aumentado de (4.8a) é definido em relação às variáveis discretas do problema do seguinte modo,

$$\underset{\Delta d, \Delta q}{\text{Min}} \underset{\lambda}{\text{Max}} \quad \mathcal{L} = f(\Delta d) + g(\Delta q) + \sum_{n=1}^{N_B} \sum_{n=1}^2 \lambda_i^T (\Delta q_i - R \Delta d_i) + \frac{\rho}{2} \|\Delta q_i - R \Delta d_i\|^2 \quad (4.9a)$$

sujeito a: (todas as fronteiras inter-elementares)

$$\Delta q_n + n^T [{}^t d_i^\oplus - {}^t d_i^\ominus] \geq 0 \quad (4.9b)$$

onde, N_B representa o número de fronteiras, λ o multiplicador Lagrangeano, R a matriz de rotação do sistema e ρ o parâmetro de penalidade. Do ponto de vista físico, o parâmetro ρ pretende ilustrar uma interface equivalente inter-elementar (ver Figura 4.2) respetivamente às forças nodais existentes. Salienta-se que dependendo do valor inicial adotado, assim será o favorecimento inicial em termos de velocidade de convergência do método, conforme (4.10).



$$\begin{cases} \rho \rightarrow \infty, & (\text{solução contínua}) \\ \rho \rightarrow 0, & (\text{solução descontínua}) \end{cases} \quad (4.10)$$

Figura 4.2: Representação física do parâmetro ρ

Na mecânica computacional, λ além de representar a imposição da restrição linear na função objetivo, em regra, representa também uma grandeza física. Este, dependendo da formulação implementada, associa-se a um determinado comportamento. Aqui, os multiplicadores de Lagrange representam as forças existentes entre fronteiras inter-elementares (ver Figura 4.3). Efetivamente, o seu valor traduz de forma genérica a força de reação nodal F_i necessário para garantir contacto, $R = F_1 + F_2$, entre elementos adjacentes.

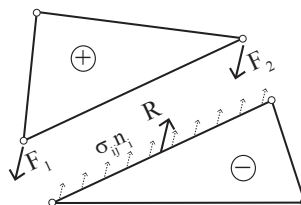


Figura 4.3: Ilustração do significado físico dos multiplicadores de Lagrange λ

A resolução deste problema é efetuada através do algoritmo do ADMM, apresentado no Capítulo 3. De forma a uniformizar a nomenclatura utilizada, apresenta-se na Tabela 4.2 a conversão para o algoritmo 1.

Tabela 4.2: Tabela de conversão de nomenclaturas

ADMM	Em [20]
x	Δd
z	Δq
y	λ
\mathcal{A}	R
\mathcal{B}	I
$f_{\mathbb{R}}(x)$	$\frac{1}{2}(\Delta d)^T K(\Delta d) + ({}^t d)^T K(\Delta d) - ({}^{t+\Delta t} F)^T \Delta d$
$g_{\mathbb{R}}(z)$	$\int_t \mathcal{D}_G(\Delta q) \partial t$

4.4.1 Aplicação do Algoritmo ADMM à Formulação de Elementos Finitos

Posteriormente à obtenção do funcional Lagrangeano aumentado (4.9a), otimizam-se as variáveis de decisão primais, Δd e Δq , do problema. Para tal, é necessário minimizar cada uma, de forma independente e sucessiva. Seguidamente, serão detalhados os passos 4 e 5 do algoritmo 1, designados por minimização global e local, respetivamente.

4.4.1.1 Minimização Global

O passo de minimização global, corresponde a uma minimização em relação ao campo de deslocamentos, que envolve simultaneamente a contribuição de todos os elementos finitos que definem o domínio. O problema de otimização envolvido, pode ser expresso como sendo,

$$\text{Min}_{\Delta d} \quad \frac{1}{2}(\Delta d)^T K(\Delta d) + ({}^t d)^T K(\Delta d) - ({}^{t+\Delta t} F)^T \Delta d - \lambda^T R \Delta d - \rho(R \Delta d)^T \Delta q \quad (4.11)$$

onde a função objetivo resulta da manipulação algébrica de (4.9a) em ordem a manter, exclusivamente, termos afetos à variável de decisão corrente, Δd . Assim, esta otimização tem como objetivo a procura do ponto estacionário que minimize a função Lagrangiana

aumentada em relação a esta variável de decisão:

$$({}^t d + \Delta d)^T K - {}^{t+\Delta t} F - R^T(\lambda + \rho \Delta q) = 0 \quad (4.12)$$

Esta equação conduz a um sistema linear de equações. A matriz deste sistema tem propriedades análogas à matriz do sistema governativo do MEF. É simétrica, positiva definida e bastante esparsa.

4.4.1.2 Minimização Local

O problema de minimização presente é denominado de minimização local porque corresponde a uma minimização em relação ao potencial energético local, que é restrito a cada fronteira inter-elementar. Esta fase é realizada fronteira a fronteira inter-elementar de modo independente, sendo o problema de otimização envolvido,

$$\text{Min}_{\Delta q} \quad \mathcal{D}_G(\Delta q) + \lambda^T \Delta q + \frac{\rho}{2} \Delta q^T \Delta q - \rho(R\Delta d)^T \Delta q \quad (4.13a)$$

sujeito a: (todas as fronteiras inter-elementares)

$$\Delta q_n + n^T [{}^t d_i^{\oplus} - {}^t d_i^{\ominus}] \geq 0 \quad (4.13b)$$

onde a função objetivo resulta da manipulação algébrica de (4.9a) em ordem a manter, exclusivamente, termos afetos à variável de decisão corrente, Δq . Sendo a energia de dissipação, \mathcal{D}_G , uma função definida por ramos (3.9), esta pode ser escrita da seguinte forma,

$$\mathcal{D}_G = \begin{cases} 0, & \Delta q = 0 \\ \rho G_c L, & \Delta q \neq 0 \end{cases} \quad (4.14)$$

onde L representa o comprimento da fronteira em questão. A solução do problema (4.13) é obtida através do seguinte procedimento:

1. Obter a solução ótima de (4.13a) considerando que a abertura de fenda ocorre necessariamente. Assim o termo da energia de dissipação é uma constante e a solução é dada por:

$$\Delta q = \frac{\lambda^T}{\rho} + (R\Delta d)^T \quad (4.15)$$

2. Projetar a solução anterior (4.15) no espaço das soluções admissíveis. Para tal, e de acordo com (4.13b), basta igualar a zero todas as componentes dos deslocamentos relativos normais, caso estas sejam negativas.

3. Para concluir, verificar se para a solução obtida o valor da função objetivo é não positiva. Caso não seja, a solução ótima corresponde à solução nula.

$$\Delta q = 0 \quad (4.16)$$

Note-se que esta última solução corresponde à não abertura da fenda. Por último, refere-se que esta verificação pode ser expressa para uma determinada fronteira e de comprimento L do seguinte modo,

$$\begin{cases} \Pi_e \leq G_c L \Rightarrow \Delta q_e = 0 \\ \Pi_e > G_c L \Rightarrow \Delta q_e \neq 0 \end{cases} \quad (4.17)$$

com,

$$\Pi_e = \left\| \left[\lambda_e - \rho \left(\frac{\Delta q_e}{2} - R_e \Delta d \right) \right]^T \Delta q_e \right\|^2 \quad (4.18)$$

4.5 Detalhes de Implementação

De forma a implementar o algoritmo de programação matemática ADMM, define-se aqui um organograma que traduza de forma genérica a realização de uma análise computacional de um problema de propagação de fenda (ver Figura 4.4). Este centra-se em três etapas principais: (i) entrada de dados; (ii) pré-processamento; e (iii) processo incremental.

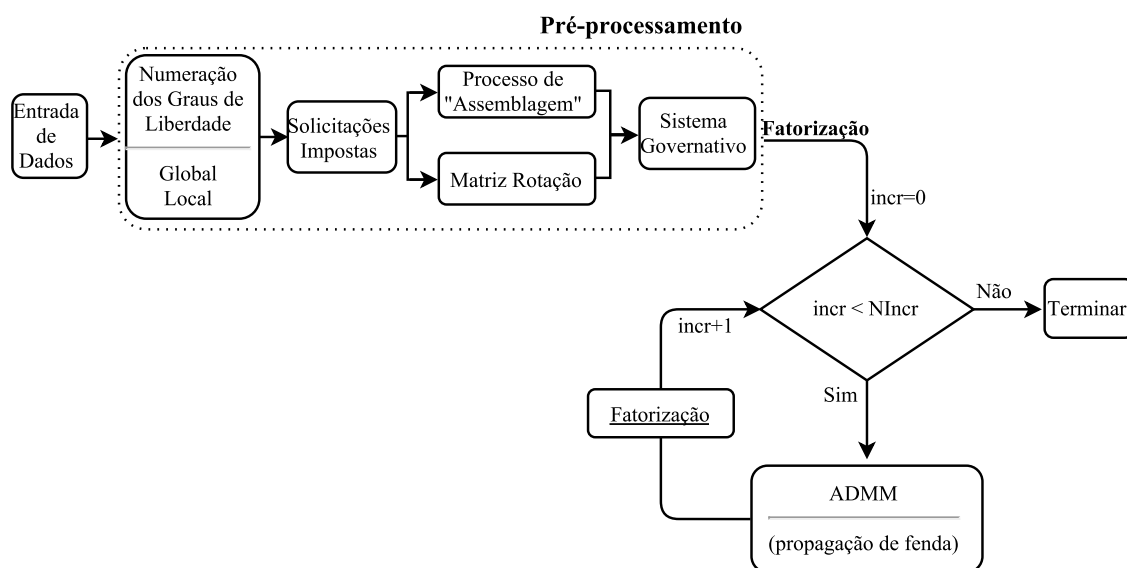


Figura 4.4: Organograma do algoritmo de cálculo

A etapa de entrada de dados traduz-se pela definição da malha de elementos finitos do exemplo numérico, procedendo-se à sua construção através de um gerador de malhas convencional, e.g., o gerador de malhas *gmsk* [33]. Ainda nesta fase, definem-se as características de fronteira, materiais constituintes, solicitações impostas e parâmetros base de análise: (i) N_{Incr} ; (ii) N_{Iter} ; e (iii) Tol . Posteriormente, procede-se à etapa de *pré-processamento*. Aqui, as matrizes de rigidez elementares e de rotação do sistema são definidas. Por fim, procede-se ainda à montagem do sistema governativo da minimização global. Segue-se o processo incremental de deslocamentos. Estes vão sendo impostos até ao limite de incrementos estipulado, N_{incr} , onde a solução vai sendo aproximada à solução exata através da aplicação do algoritmo 1, tendo em conta os parâmetros N_{Iter} e Tol definidos. As soluções obtidas em cada incremento são visualizadas através da utilização do *software open-source Paraview* [34]. Por último, a solução de propagação final de fratura é obtida. Seguidamente, descrevem-se de forma sucinta, os passos de maior relevância constituintes do organograma do algoritmo de cálculo ilustrado na Figura 4.4.

4.5.1 Numeração dos Graus de Liberdade

A formulação numérica baseia-se em duas análises complementares: (i) análise global do elemento; e (ii) análise local da fronteira inter-elementar constituinte. Como tal, consideram-se duas numerações dos graus de liberdade distintas, identificando-se como global e local respetivamente.

4.5.2 Solicitações Impostas

Na análise realizada consideram-se dois tipos de solicitações nodais: (i) variáveis; e (ii) permanentes. Ambas, são aplicados na fase indeformada do corpo (o princípio dos pequenos deslocamentos é assumido). Daqui resulta um vetor de deslocamentos nodais F , com $F \in \mathbb{R}^n$ onde n representa o número de graus de liberdade globais em estudo.

4.5.3 Processo de “Assemblagem”

A constituição da matriz de rigidez global do sistema deriva de um processo de “assemblagem” de todas as matrizes de rigidez, K^e , dos diversos elementos constituintes do domínio,

$$K^e = \int_{\Delta} B N D B N^T d\Delta \quad (4.19)$$

onde BN é a matriz com as derivadas parciais das funções de interpolação em ordem às coordenadas globais e D a matriz elástica associada a um estado plano de tensão, contendo as características do material em análise, sendo este caracterizado pelo seu módulo de elasticidade, E , e coeficiente de Poisson, ν . Num processo de “assemblagem” tradicional, existe uma sobreposição direta de efeitos aquando da redundância de nós com coordenadas iguais. Esta construção matricial de procura e sobreposição de efeitos ao longo dos diversos elementos constituintes do domínio, exhibe um gasto computacional assinalável e conseqüentemente moroso. De modo a otimizar o processo de assemblagem descrito, recorre-se à introdução individualizada e separada das matrizes de rigidez na matriz de rigidez global do sistema:

$$K^e \subseteq K \quad (4.20)$$

Através da introdução do fator de penalidade ρ na matriz de rigidez global, considera-se o efeito de sobreposição de nós de acordo com as fronteiras inter-elementares existentes. Salienta-se o facto do sinal negativo de ρ . Esta diferenciação deve-se à rigidez de ligação existentes entre nós de dois elementos distintos,

$$K_{ii} + \rho \wedge K_{ij} - \rho \quad \text{com } ij \in \Gamma_e \quad (4.21)$$

onde i e j representam os índices dos nós associados aos diversos elementos. Daqui resulta uma matriz de rigidez global K simétrica definida positiva bastante esparsa de dimensão $\{n \times n\}$ onde n representa o número de graus de liberdade globais em estudo.

4.5.4 Construção da Matriz Rotação

A matriz R representa a matriz de rotação do sistema, transformando os eixos locais (n, t) nos eixos globais (x, y) . Esta tem de dimensão $\{m \times n\}$ onde m representa os graus de liberdade locais e n os graus de liberdade globais. Considere-se a Figura 4.5.

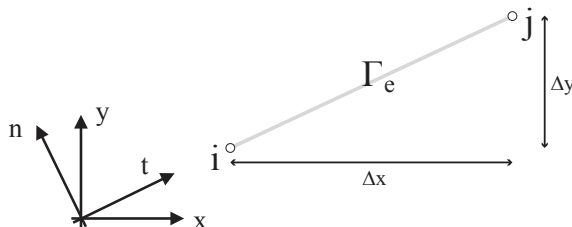


Figura 4.5: Fronteira inter-elementar com os eixos globais e locais representados

A partir do cálculo da normal exterior à fronteira inter-elementar Γ_e ,

$$n = \begin{bmatrix} n_x & n_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} & \frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

obtém-se a relação entre eixos globais e locais,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = R_e \begin{bmatrix} n \\ t \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

onde R_e representa a matriz local de rotação da fronteira inter-elementar, Γ_e , dada por:

$$R_e = \begin{bmatrix} n_x & n_y \\ n_y & -n_x \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

O espalhamento das contribuições das matrizes locais de rotação na matriz global de rotação, R , faz-se de acordo com as numerações global e local definidas. Salienta-se que graus de liberdade que partilhem o mesmo nó, trocam de sinal aquando da sua introdução da matriz. A sua escolha é feita de forma arbitrária.

4.5.5 Fatorização

De acordo com a equação (4.12), a inversa da matriz de rigidez global é executada para obtenção do vetor dos deslocamentos globais, Δd . No entanto, o processo de inversão de matrizes pressupõe a utilização de recursos computacionais bastante assinalável, não sendo eficiente ao ponto de se considerar uma alternativa viável na resolução do problema. Seja K uma matriz simétrica e definida positiva (valores da diagonal principal maiores que zero) torna-se possível decompor a matriz K por um produto de duas outras matrizes (L e L^T), em que a matriz L corresponde à matriz triangular inferior e L^T à matriz triangular superior da matriz K respetivamente. Este processo de decomposição de matrizes designa-se por fatorização de *Cholesky* [35, pp. 421-425]:

$$K = LL^T \quad (4.25)$$

Através da relação de (4.25) obtém-se a matriz L considerando as relações existentes em [35, pp. 421-425]. Assim, a equação (4.12) pode ser reescrita na forma,

$$({}^t d + \Delta d)^T LL^T - {}^{t+\Delta t} F - R^T(\lambda + \rho \Delta q) = 0 \quad (4.26)$$

onde, para a sua resolução (obtenção dos deslocamentos globais Δd), recorre-se à utilização do software *MUMPS - aMULTifrontal Massively Parallel sparse direct Solver* [36], [37].

Salienta-se o facto que, decorrente da utilização do algoritmo de programação matemático ADMM, em cada passo de incremento, este avalia todo o caminho de propagação até ao incremento atual, i.e, caso ocorra uma determinada propagação de fratura num determinado incremento, esta propagação será sempre avaliada até ao término do processo incremental. Esta análise constante de incrementos anteriores, levanta um problema grave em termos de velocidade de convergência do método implementado. Como solução, após propagação de fratura num determinado incremento, reconstrói-se a matriz governativa do sistema tendo em consideração a propagação de fenda ocorrida.

Capítulo 5

Refinamento Adaptativo de Malha

5.1 Introdução

Diversos modelos numéricos, baseados na teoria clássica de Griffith, têm sido formulados, recorrendo quer a aproximações contínuas (ditas fracas) [38] quer aproximações descontínuas (ditas fortes) [21], [39], [40] nas suas modelações da fratura. Do ponto de vista numérico, tem sido demonstrado que a obtenção de soluções válidas de modelos *free discontinuity* requerem necessariamente adaptações de malha, a fim de evitar efeitos de dependência da mesma [41].

Neste contexto, propõe-se acoplar à formulação não convencional de elementos finitos de fratura, descrito no Capítulo anterior, uma estratégia de refinamento adaptativo de malha especialmente concebido para esta formulação. Assim, na secção 5.2, realiza-se um breve enquadramento da problemática relacionada com a dependência de malha, descrevendo por fim a solução proposta. Aqui, apresenta-se um organograma de cálculo geral contendo as etapas de refinamento implementadas. Na secção 5.3 descrevem-se com detalhe suficiente os modos de divisão hierárquica concebidos para elementos triangulares de 3-nós, utilizados na presente formulação. Por fim, nas secções 5.4 e 5.5 realiza-se uma explicação abrangente dos processos de refinamento adaptativos desenvolvidos. É ainda de notar, o acompanhamento recorrente de organogramas de cálculo referentes às etapas de refinamento, facilitando o acompanhamento do leitor ao longo da temática descrita.

5.2 Enquadramento Geral

A construção de uma malha de elementos finitos, pressupõe a definição de um determinado grau de refinamento, i.e, definir o tamanho dos elementos que constituem a malha. Caso este seja considerável, o esforço computacional necessário para a realização de cálculo pode comprometer o desempenho da formulação utilizada. Pelo contrário, caso o grau de refinamento seja excessivamente grosseiro, a qualidade da solução obtida poderá ficar comprometida. De acordo com os pressupostos do modelo, introduzidos no Capítulo 4, a propagação de fratura a ocorrer, desenvolver-se-á obrigatoriamente ao longo das fronteiras inter-elementares constituintes dos elementos. Por sua vez, além das restrições físicas próprias de um problema de fratura, a propagação da fenda está intrinsecamente ligada ao grau de refinamento que caracteriza a malha de elementos finitos. Considere-se um caminho de fratura de dimensão l , e um incremento de fenda Δa . Uma das seguintes situações poderá ocorrer: (i) $l = \Delta a$ (situação ideal); (ii) $l > \Delta a$ (não ocorre propagação total); e (iii) $l < \Delta a$ (propagação para além do caminho). Caso l seja inferior ou superior à dimensão de incremento de fratura Δa , ocorrerão erros grosseiros na análise efetuada. Esta afirmação advém da existência de fronteiras com dimensões *incompatíveis* com o problema. Caso ocorra alguma destas situações, o modelo numérico entra em conflito direto com o princípio de propagação. No entanto, e de um modo geral, o grau de refinamento por si só, não se apresenta como solução final para o problema de dependência de malha conforme se ilustra na Figura 5.1.



Figura 5.1: Esquema de dependência de malha com imposição de deslocamento u : (a) tipo de malha; (b) orientação incorreta dos elementos (azul a tracejado - propagação perpendicular; vermelho a cheio - propagação ao longo das fronteiras inter-elementares)

A orientação dos elementos, face à possível ocorrência de fenda (esta a propagar-se irá fazê-lo, em regra, na direção normal à direção das trações) deve ser tal que o potencial energético existente num determinado incremento seja despendido na propagação total de fratura e não na transposição de fronteiras inter-elementares com orientações incompatíveis com a convenção de propagação. Caso tal fenómeno ocorra, o sistema irá necessitar de mais energia do que seria necessário na realidade.

5.2.1 Solução Proposta

O método proposto pretende solucionar os dois problemas identificados através da implementação de duas etapas de refinamento, tendo cada uma características próprias de análise do problema que possibilitam que a propagação da fratura siga uma trajetória coerente face à direção das trações impostas sem comprometer de forma assertiva o desempenho computacional. Para tal, propõe-se a modificação do organograma de cálculo original (ver Figura 4.4) através da inclusão de duas etapas distintas denominadas de: (i) refinamento; e (ii) refinamento inverso, da malha. Aqui, define-se um organograma do algoritmo de cálculo com refinamento da malha (ver Figura 5.2) com base na formulação numérica apresentada no Capítulo 4.

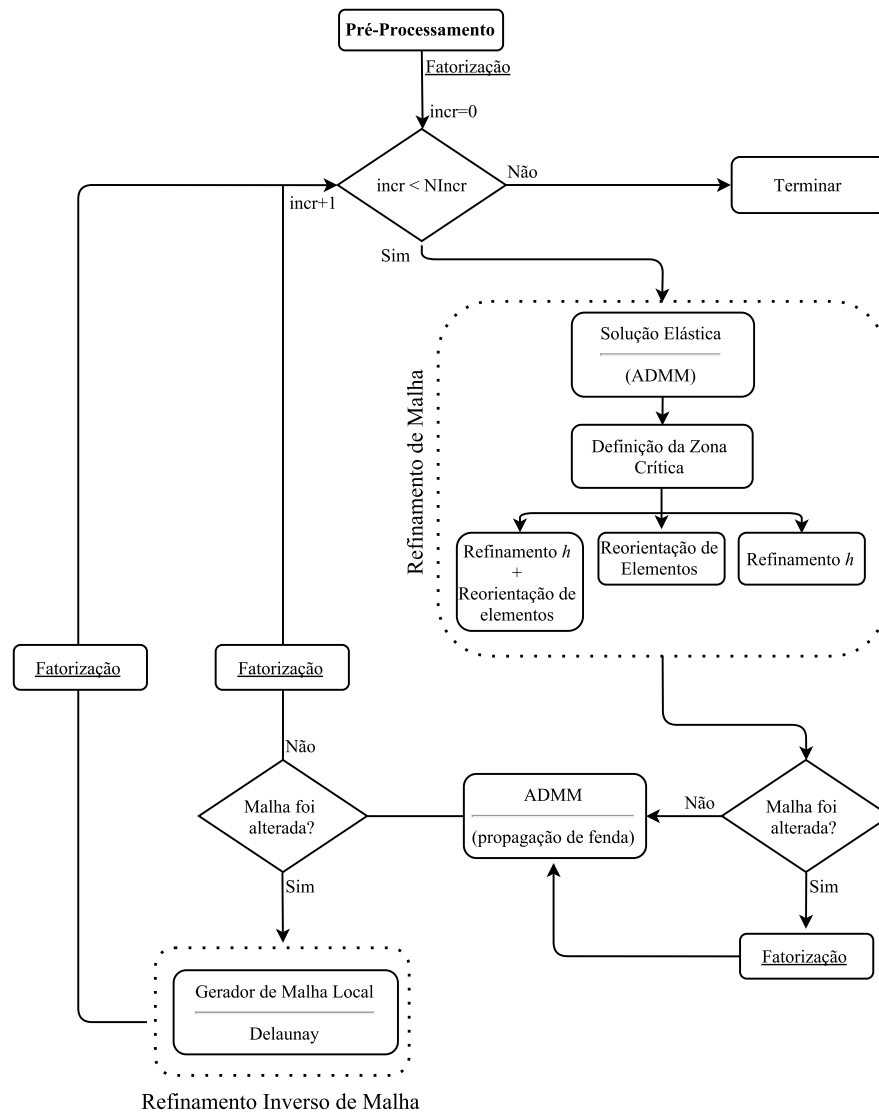


Figura 5.2: Organograma do algoritmo de cálculo com refinamento da malha

O método proposto pretende melhorar de forma assertiva o caminho de possível propagação de fratura através de um refinamento adaptativo da malha. Para tal, define-se numa primeira instância uma zona local de análise, designada por *zona crítica*. Esta é definida através de uma solução puramente elástica de deslocamentos, obtidos da aplicação do ADMM. Note-se que este conceito de utilizar uma solução puramente elástica para avaliar a tendência para propagação de uma fenda não é inovador no contexto da Mecânica da Fratura Elástica. Efetivamente, pode-se considerar que este princípio já tido sido introduzido nos trabalhos de Irwin [7]

Sobre a *zona crítica*, realiza-se o refinamento adaptativo proposto, aplicando o refinamento h e/ou reorientando os elementos finitos da mesma. Ambas as estratégias de refinamento são aplicadas tendo em consideração a biblioteca de divisão de elementos triangulares de 3-nós desenvolvida. Nesta, definem-se três modos de divisão hierárquica (1 divisão, 2 divisões e 3 divisões), possibilitando que os diversos elementos triangulares constituintes da zona local definida possam ser subdivididos com base num determinado critério.

Numa segunda fase e conseqüente propagação, ou não, de fenda através da aplicação do ADMM (numa segunda fase), procede-se ao refinamento inverso. Aqui, propõe-se a utilização de um gerador de malhas triangulares *Delaunay* [42], [43] com o intuito de colmatar eventuais deficiências, quer em relação ao tamanho quer em relação à distorção dos elementos, provenientes da aplicação das estratégias de refinamento iniciais (refinamento h e reorientação de elementos) e melhorar a eficiência do algoritmo desenvolvido através da diminuição do número de graus de liberdade implicitamente criados na primeira etapa de refinamento.

Como nota final, apresentam-se algumas características de duas fases consideradas de relevância no organograma do algoritmo de cálculo com refinamento da malha:

1. Refere-se a utilização do algoritmo de programação matemática em duas situações distintas: (i) solução puramente elástica; e (ii) propagação de fenda. No primeiro caso, a análise efetuada impossibilita a ocorrência de fenda. Nesta, o objetivo primordial passa pela obtenção do potencial energético local associado a cada fronteira inter-elementar, definindo-se posteriormente a *zona crítica* a analisar. O detalhe sobre esta solução é apresentado na secção 5.4.1. Numa fase posterior, realiza-se novamente o ADMM, com o objetivo de analisar a propagação, de fratura. Esta fase concerne o processo incremental base ilustrado no organograma original (ver Figura 4.4);
2. Sempre que a malha de elementos finitos sofre alteração, ocorre o processo de fatorização (ver secção 4.5.5). Este apesar de melhorar a eficiência da formulação, é utilizado nas duas etapas de refinamento, levando a que o processo seja

computacionalmente exigente. No entanto, a diminuição dos graus de liberdade proveniente da aplicação do gerador de malhas triangulares *Delaunay* favorece a sua repetida utilização. Esta fase implica necessariamente um processo de nova montagem da matriz governativa de minimização global.

5.3 Modos de Divisão Hierárquica de um Elemento Triangular

Processos de refinamento de malhas de elementos finitos têm sido um tema de interesse no meio da comunidade científica. Como resultado, diversas abordagens têm sido propostas, apresentando cada uma, particularidades que as definem enquanto alternativa à resolução do problema. Destas, destacam-se aqui as abordagens ditas *hierárquicas*. Considera-se que a inclusão de processos *hierárquicos* durante a fase de refinamento, melhoram consideravelmente o propósito geral de análise, traduzindo-se num processo individual, flexível e extensível. Estes baseiam-se numa filosofia hierárquica *Pai* para *Filho(s)*, onde os novos elementos (aqui denominados de elementos *Filhos*) herdam todas as características do seu antecessor, o elemento *Pai*. Esta dependência de características entre elementos, torna possível a determinação do elemento antecessor ao elemento criado. Tendo por base a filosofia descrita, desenvolvem-se aqui três modos de divisão de elementos triangulares de 3-nós: (i) modo de 1 divisão; (ii) modo de 2 divisões; e (iii) modo de 3 divisões (ver Figura 5.3). O modo de 1 divisão resulta da bissecção de apenas um lado do triângulo, o modo 2 divisões da bissecção de dois lados do triângulo e finalmente o modo de 3 divisões à bissecção de todos os lados do triângulo. Sempre que ocorre uma estratégia de refinamento (refinamento h e/ou reorientação de elementos), os modos de divisão hierárquica são executados com base no número de divisões a serem realizadas por elemento analisado.

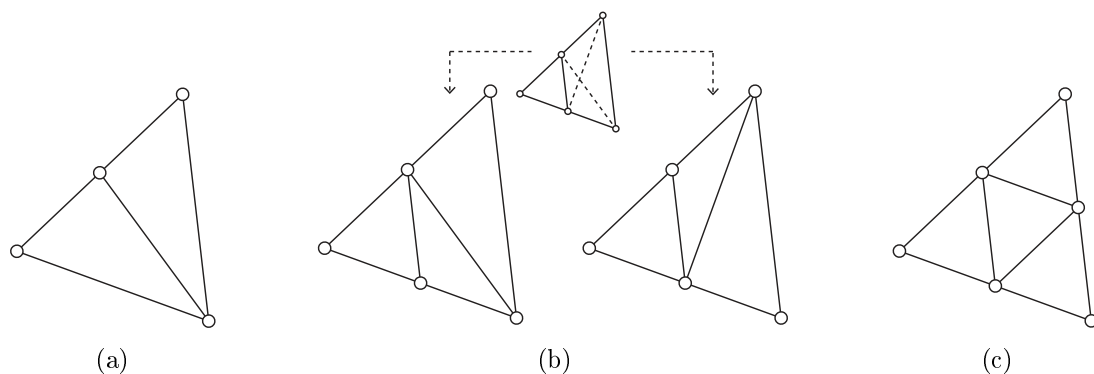


Figura 5.3: Modos de divisão hierárquica de um elemento triangular: (a) modo de 1 divisão; (b) modo de 2 divisões; (c) modo de 3 divisões

5.3.1 Filosofia de Implementação

A definição dos modos é feita através da inclusão de novos nós nas fronteiras selecionadas a dividir. Sempre que é criado um novo nó, quer pela estratégia de refinamento h quer pela reorientação de elementos, este é colocado no centro da fronteira, dividindo-a de forma simétrica. Por cada nó novo adicionado, é criada uma nova fronteira com as mesmas características que a sua antecessora (a filosofia hierárquica mantém-se). A Figura 5.4 ilustra um processo de refinamento típico, tendo em consideração o número de novos nós existentes por elemento analisado.

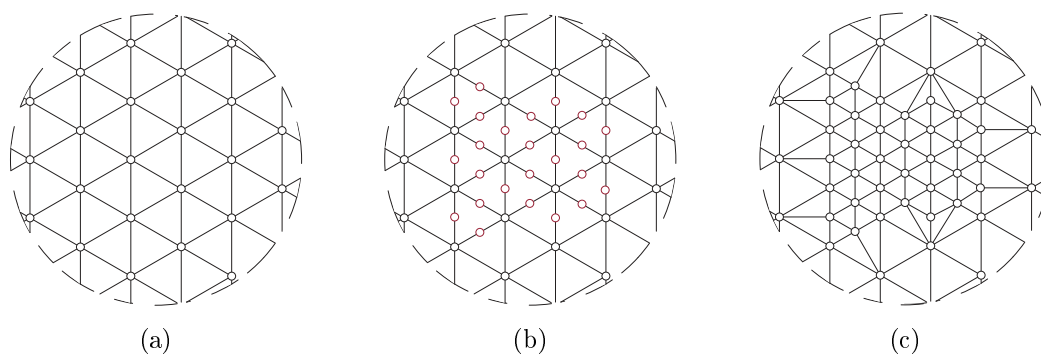


Figura 5.4: Esquema de aplicação dos modos de divisão: (a) malha tipo; (b) introdução de nós proveniente de um dos processos de refinamento; (c) aplicação dos modos de divisão

O modo de 1 divisão é aplicado quando existe apenas uma fronteira dividida. A partir deste, ocorre a ligação entre a fronteira dividida e o nó oposto a esta. O modo de 2 divisões é um modo *misto*. Neste, além da ligação entre fronteira dividida e nó oposto é efetuada também a ligação entre fronteiras divididas. É ainda de notar que, conforme representado na Figura 5.3, o modo de 2 divisões pode ser executado de forma distinta. A escolha de como é realizada a divisão, deve-se à direção das tensões principais no elemento. O detalhe necessário para um melhor entendimento desta solução será apresentado na secção 5.4.4. Por fim, o modo de 3 divisões é realizado através da ligação entre todas as fronteiras divididas existentes no elemento. É de salientar que a introdução de nós provenientes da aplicação dos processos de refinamento carece de informação face às restrições físicas e deslocamentos impostos durante o processo incremental. De forma a garantir uma continuidade coerente no processo, quer em termos de geometria quer em termos de deslocamentos garante-se aqui que:

1. o deslocamento do novo nó corresponde a uma média dos deslocamentos ocorridos em ambos os nós que compõem a fronteira onde este foi inserido;
2. a compatibilidade física deve ser garantida de acordo com as condições físicas a que os nós pertencentes à fronteira estão sujeitos.

5.4 Refinamento de Malha

Conforme explicado anteriormente, a etapa de refinamento divide-se em três fases principais. Cada uma destas fases pretende executar tarefas individualizadas de análise que melhorem a morfologia da malha face à propagação de fratura ao longo do seu domínio. A base da análise desenvolvida centra-se sobretudo na definição da *zona crítica*, sendo esta, uma zona local, limitada por elementos a analisar durante o processo incremental de deslocamentos impostos. Sobre esta, procede-se de forma isolada ou conjunta a: (i) um refinamento recursivo (refinamento h), até que a dimensão da malha em estudo durante um determinado passo incremental satisfaça determinada restrição imposta; e (ii) reorienta-se cada elemento pertencente à zona limitada, favorecendo a propagação linear de fratura. A escolha isolada ou conjunta das estratégias de refinamento é definida pelo utilizador. O organograma proposto (ver Figura 5.5), será detalhado durante as próximas subsecções da presente secção.

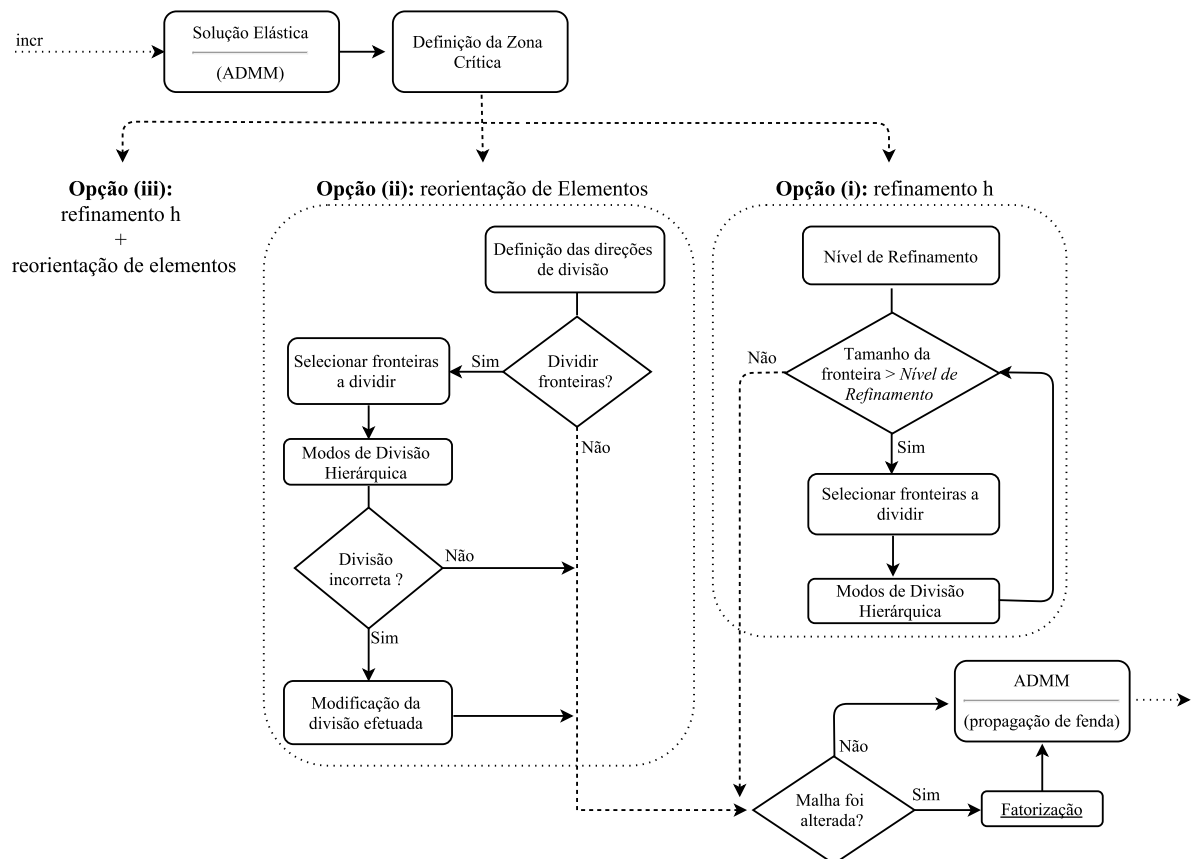


Figura 5.5: Organograma do algoritmo de cálculo referente à etapa de refinamento

5.4.1 Solução Elástica - ADMM

Numa solução elástica (convencional), o uso da equação fundamental do MEF,

$$K\Delta d = F \quad (5.1)$$

seria suficiente para obtenção dos deslocamentos, Δd , existentes. Através destes, seria possível o cálculo das tensões existentes e consequentemente das deformações a que os elementos estariam sujeitos para futura análise. Assim sendo, torna-se pertinente justificar a utilização de um processo iterativo, o ADMM, computacionalmente mais dispendioso para a obtenção desta solução.

Efetivamente, esta opção teve em conta não só o propósito do cálculo direto dos deslocamentos ocorridos mas também e sobretudo a sua utilidade na definição de zonas potencialmente propícias à propagação de fratura. Aqui, além da obtenção dos deslocamentos globais e locais (ver secção 4.4) define-se também a zona local de análise, designada de *zona crítica*. A sua delimitação considera o cálculo do potencial energético local presente ao longo de todas as fronteiras inter-elementares constituintes do domínio. Este é obtido através de uma análise puramente elástica, sem possibilidade de ocorrência de fratura, associando-se a cada fronteira inter-elementar o seu respetivo potencial energético local, conforme algoritmo 2.

Algoritmo 2 Esquema de associação do potencial energético a cada fronteira inter-elementar

- 1: $\Delta q \leftarrow \frac{\lambda^T}{\rho} + (R\Delta d)^T$ ▷ Deslocamentos locais
 - 2: **para cada** fronteira i
 - 3: **se** $\Delta q_n^i < 0$ **então** ▷ Verificar sobreposição
 - 4: $\Delta q_n^i \leftarrow 0$ ▷ Anular sobreposição
 - 5: $E \leftarrow \left[\lambda - \rho \left(\frac{\Delta q}{2} - R\Delta d \right) \right]^T \Delta q$ ▷ Potencial energético local
 - 6: **para cada** fronteira i
 - 7: $\Pi_i \leftarrow E_i^T E_i$ ▷ Associação do potencial energético local
-

De acordo com o algoritmo 2, a não sobreposição de elementos é garantida através dos passos 2, 3 e 4. A associação do potencial energético local é realizado para cada fronteira inter-elementar através do passo 6 e 7. No final do processo, todas as fronteiras inter-elementares são caracterizadas tendo em consideração o seu potencial energético antes de qualquer análise de propagação de fratura. Através deste, será justificada a inclusão, ou não, dos elementos que a compõe dentro da *zona crítica*.

5.4.2 Definição de *Zona Crítica*

Define-se *zona crítica* como sendo a possível zona de evolução de fratura, que ocorrerá caso o balanço energético seja favorável à propagação de uma fenda, possibilitando uma análise centrada face ao domínio total considerado. Esta é composta por elementos que, de forma justificada, permitem a propagação de fratura através das suas fronteiras inter-elementares. A estes elementos, dá-se a designação de críticos.

5.4.2.1 Elemento Crítico

Elemento constituinte da *zona crítica*. Após a definição do potencial energético local (algoritmo 2), associa-se ao elemento, o rácio energético, R_e , que o caracteriza. Considera-se que este é representado pelo maior valor de entre os três rácios associados às três fronteiras inter-elementares que o compõem,

$$R_e = \max \left\{ \frac{\Pi_1}{\mathcal{D}_{G_1}}, \frac{\Pi_2}{\mathcal{D}_{G_2}}, \frac{\Pi_3}{\mathcal{D}_{G_3}} \right\} \quad (5.2)$$

onde Π_i e \mathcal{D}_{G_i} (com $i = 1, 2$ e 3) correspondem aos valores do potencial energético local e da energia de propagação de fratura na fronteira inter-elementar i que constitui o elemento. Através deste, caracteriza-se o seu estado como crítico ou não crítico, conforme este seja superior ou inferior ao valor de $v_{\text{crítico}}$:

$$\begin{aligned} R_e &\geq v_{\text{crítico}}, && \text{crítico} \\ R_e &< v_{\text{crítico}}, && \text{não crítico} \end{aligned} \quad (5.3)$$

O valor de $v_{\text{crítico}}$ é definido de forma a controlar a dimensão da *zona crítica* de dano inicial,

$$v_{\text{crítico}} = \min \{1; \max \{0.5; R_{\text{max}}\}\} \quad (5.4)$$

onde R_{max} representa o maior de todos os rácios energéticos elementares. Em (5.4) o valor 0.5 resulta do coseno do ângulo de 60° . Admitindo-se, deste modo, que face às interfaces originais a direção de crescimento da fenda poderá sofrer um desvio de um ângulo com metade da amplitude mencionada.

5.4.2.2 Expansão de *Zona Crítica*

Decorrente da restrição imposta em (5.3), a *zona crítica* inicialmente definida pode ser constituída por elementos em número reduzido. Efetivamente, o critério apresentado identifica, em regra, apenas elementos na ponta da fenda (zona local de tensões elevadas).

No entanto existe a possibilidade da existência de potencial energético local suficientemente elevado que permita a propagação de fratura para fora da zona de análise. Caso este fenómeno aconteça, perde-se o controlo da propagação de fenda. Assim, resulta a necessidade de expandir a *zona crítica*, com critério definido, de forma a colmatar as situações identificadas.

O problema é facilmente identificado quando a dimensão, L , das diversas fronteiras inter-elementares dos elementos críticos que geram um determinado caminho de propagação, é menor que a dimensão total, L_{Total} , de propagação de energia de fratura:

$$L_{\text{Total}} = \sum \frac{\Pi}{G_c} \gg \sum L \quad (5.5)$$

Considere-se a Figura 5.6. Aqui, um caminho de fratura é representado pelas fronteiras inter-elementares a negro (ver Figura 5.6a), sendo este um caminho de fratura possível de entre os nove elementos críticos existentes (elementos de cor cinza). No entanto, o comprimento total proveniente da divisão entre valor de potencial energético local e a tensão superficial do material que caracteriza cada elemento (ver Figura 5.6b) é superior ao tamanho definido pelo caminho possível de propagação. Desta forma, as fronteiras constituintes dos elementos críticos analisados não apresentam tamanho suficiente para que apenas seja possível analisar os elementos críticos constituintes da zona definida. Assim, torna-se imperativo aumentar a região de modo a conter elementos afetos à propagação da fenda além dos elementos críticos já constituintes da zona.

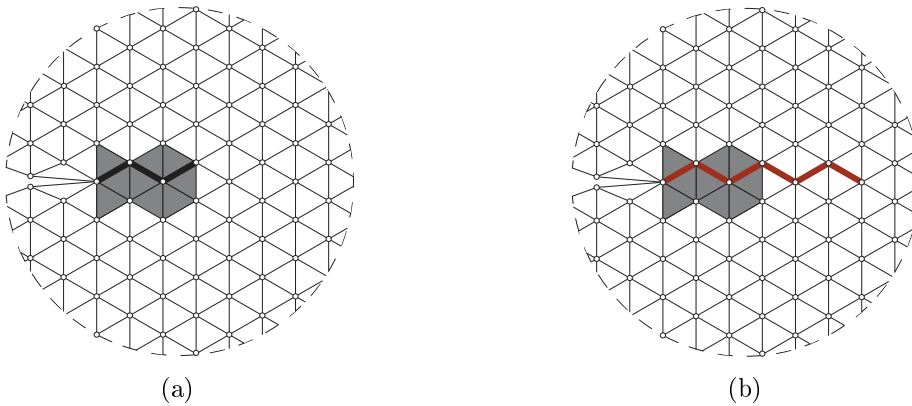


Figura 5.6: Esquema representativo de um possível caminho de propagação de fratura: (a) caminho possível (linha a negro); (b) caminho total (linha a vermelho)

De modo a tentar garantir uma zona de análise que considere o caminho de propagação de fratura total, define-se um rácio de propagação,

$$\begin{cases} r = 1, & \text{caminho completo} \\ r = 0, & \text{início do caminho} \end{cases} \quad (5.6)$$

onde r representa o quociente entre a soma das energias de propagação de fratura e a energia disponível no elemento crítico corrente,

$$r = \frac{\sum(g_j - g_i)(G_c^j + G_c^i)/2}{E^e} \quad (5.7)$$

onde os índices i e j representam os elementos adjacentes a analisar, g o centro de gravidade de cada um, G_c a tensão superficial do material que os caracteriza e E^e a energia disponível associada ao elemento crítico naquele instante. É de notar, que à medida que se propaga o caminho através da adição de novos elementos, maior será a energia de propagação de fratura. Enquanto o valor de r for menor que 1, novos elementos são adicionados à *zona crítica* inicial, de acordo com critério definido em (5.6). Desta forma, a *zona crítica* final resulta da análise de todos os caminhos possíveis que se iniciem de um determinado elemento crítico, conforme se ilustra na Figura 5.7.

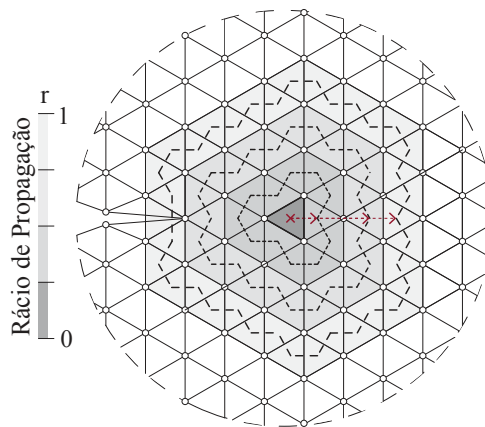


Figura 5.7: Expansão de *zona crítica* através de um elemento crítico central. Representação de um gradiente de cor cinza ilustrando o aumento da zona de análise

A análise descrita pretende assim obter de forma expedita e aproximada uma zona suficientemente abrangente, de modo a analisar uma área capaz de conter todos os caminhos de propagação de fratura durante cada incremento de deslocamento realizado.

5.4.2.3 Energia Disponível em Cada Elemento Crítico

O conceito de energia disponível em cada elemento crítico requer alguma ponderação na forma como se obtém o seu valor. O processo de análise pretende que a *zona crítica* resultante desta abordagem seja abrangente mas não totalmente conservadora. De forma a garantir uma análise cuidada face aos resultados obtidos durante a fase de aplicação numérica, estudaram-se as seguintes abordagens: (1) energia elástica durante o passo de incremento; (2) potencial energético local máximo por elemento; (3) potencial energético

local total por elemento de acordo com o parâmetro $v_{\text{crítico}}$; e (4) energia elástica referente apenas aos elementos críticos existentes. Salienta-se que o conceito utilizado nas quatro abordagens energéticas pretendeu representar um balanço energético seguindo um princípio análogo da formulação variacional utilizada:

1. A primeira abordagem energética pretende que todos os elementos críticos tenham a mesma energia disponível para ocorrência de propagação de fenda. Esta resulta da obtenção da energia elástica durante o passo de incremento de deslocamentos impostos. É de esperar que esta abordagem represente uma estimativa exageradamente conservadora, visto disponibilizar toda a energia elástica para ocorrência de possível propagação de fratura, sendo expectável a obtenção de uma zona muito abrangente:

$$E_{\text{elástica}} = \frac{1}{2} \langle \Delta d, K \Delta d^T \rangle \quad (5.8)$$

2. A segunda abordagem energética pretende que a energia disponível por elemento crítico traduza o valor mais elevado do potencial energético local das fronteiras inter-elementares que compõem o elemento. Aqui, o nível de conservadorismo é consideravelmente inferior às restantes abordagens energéticas, sendo expectável um conjunto de zonas com menor abrangência de elementos:

$$E^e = \max\{\Pi_i\} \quad \text{com } i = 1, 2 \text{ e } 3 \quad (5.9)$$

3. A terceira abordagem energética corresponde à variação de energia consoante o número de fronteiras inter-elementares que satisfaçam $v_{\text{crítico}}$. O valor da energia é obtido através da soma do potencial energético local das fronteiras inter-elementares que compõem o elemento de acordo com a restrição imposta:

$$E^e = \sum \Pi_i, \Pi_i / \mathcal{D}_{G_i} \geq v_{\text{crítico}} \quad \text{com } i = 1, 2 \text{ e } 3 \quad (5.10)$$

4. A quarta e última abordagem energética associa exclusivamente a cada elemento crítico a sua a energia elástica, proveniente do cálculo do ponto 1. Esta corresponde aproximadamente à mesma ordem de grandeza da terceira abordagem energética.

Após a análise de todas as abordagens descritas, verificou-se que o resultado obtido não satisfazia a zona local pretendida. Por um lado, a 1ª abordagem mostrou-se muito conservadora, não centrando o estudo exclusivamente numa zona local de análise. Em contrapartida, as abordagens 2 e 3, mostraram uma grande dependência de malha, devido ao cálculo do potencial energético local de cada fronteira inter-elementar. Esta

dependência traduzia-se numa diminuição de zonas de acordo com o tamanho de malha utilizado. Por último, a 4ª abordagem não acrescentou nenhuma alteração significativa. É de notar que de entre as quatro abordagens descritas, a 3ª e 4ª, apresentavam-se como sendo as mais equilibradas. No entanto, nenhuma abordagem proposta evidenciava garantias de abrangência total da zona de propagação de fenda. Note-se que as conclusões descritas não serão ilustradas no Capítulo de exemplos (Cap. 6) da presente Dissertação.

De modo a minimizar o efeito de dependência de malha, propõe-se, na fase de *entrada de dados*, a introdução de um parâmetro energético, p_e , sendo este definido pelo utilizador. De um modo geral, este deve representar o número de fronteiras possíveis a fraturar, sendo o seu valor estimado com base na energia crítica de propagação de fratura:

$$E^e = p_e = G_c \times n^o \text{ de fronteiras a fraturar} \quad (5.11)$$

Note-se que esta solução não garante que a zona obtida abranja totalmente o caminho de propagação de fratura, uma vez que este não é conhecido *a priori*. No entanto, considera-se a sua utilização em todos os exemplos numéricos ilustrados no Capítulo 6.

5.4.3 Refinamento h

De modo a melhorar a qualidade de refinamento da malha, procede-se a um refinamento inicial do tipo h . Neste sentido, pretende-se que os elementos constituintes da *zona crítica*, sejam de tamanho igual ou superior a uma determinada dimensão,

$$h_{\min} = p_h \quad (5.12)$$

onde p_h é definido pelo utilizador (na fase de *entrada de dados*) como sendo um parâmetro de dimensão mínima de malha. Caso este valor seja omitido *a priori*,

$$h_{\min} = 0.5h_{\text{avg}} \quad (5.13)$$

sendo h_{avg} o valor representativo da dimensão média da malha inicial. À medida que os elementos se afastam dos elementos críticos, o refinamento vai sendo menor, seguindo a seguinte trajetória de evolução,

$$h = h_{\min} + (h_{\text{avg}} - h_{\min})r \quad (5.14)$$

onde r representa o rácio de propagação definido anteriormente em (5.7). Note-se que quando $r = 0$, o tamanho de malha toma o valor mínimo adotado, afetando todos os

elementos críticos existentes. Caso $r = 1$, significa que o caminho de propagação terminou e o refinamento toma o valor médio da malha inicial. O valor de h calculado é associado a cada nó constituinte das fronteiras dos diversos elementos pertencentes à *zona crítica*. O processo de refinamento h ocorre, sempre que $3/4$ do tamanho L da fronteira constituinte de um determinado elemento pertencente à *zona crítica* seja superior ao nível de refinamento médio h_{med} associado aos nós que a compõem:

$$\frac{3}{4}L > h_{\text{med}} \quad (5.15)$$

O valor de L é afetado pela constante devido à necessidade de garantir que a fronteira analisada é dividida, quando a dimensão da sua metade é superior ao tamanho de divisão proposta (colocação de um novo nó no centro da mesma). Caso contrário, podem ocorrer divisões indesejadas. Sempre que a condição (5.15) se verifique a fronteira analisada é selecionada para futura divisão, iniciando-se um processo recursivo até ao término do mesmo. Após a seleção de todas as fronteiras, ocorre o processo de divisão através da utilização dos modos de divisão hierárquicas (ver secção 5.3). Durante a fase de divisão, o valor de h pertencente ao novo nó criado será igual à média do valor de h dos nós que compõem a fronteira onde este foi inserido. O processo repete-se até que todas as fronteiras constituintes dos diversos elementos pertencentes à *zona crítica* sejam de tamanho inferior ou igual ao grau de refinamento associado a cada um dos seus nós. A Figura 5.8 pretende ilustrar de forma esquemática um refinamento tipo. Para tal, considera um elemento crítico dos nove existentes no exemplo ilustrado anteriormente (ver Figura 5.7) refinando com critério definido por (5.14) tendo em conta o grau de refinamento a adotar dependendo da fronteira analisada. Salienta-se que o processo implica a análise de todos os elementos críticos existentes.

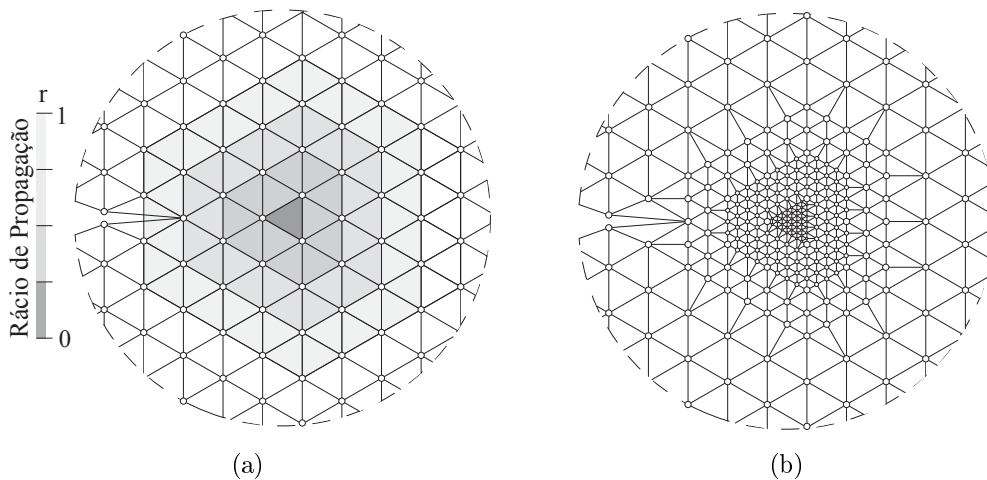


Figura 5.8: Esquema representativo de refinamento h : (a) representação de um gradiente de cor cinza de acordo com o rácio de propagação; (b) refinamento local do tipo h

5.4.4 Reorientação de Elementos

Na ocorrência de fratura, esta propagar-se-á, preferencialmente, segundo a orientação normal à direção associada à componente principal de tensão de tração. Partindo deste pressuposto, pretende-se que a orientação das fronteiras inter-elementares constituintes dos elementos pertencentes à *zona crítica* estejam de acordo com este princípio. Assim sendo, e considerando σ_I e σ_{II} como tensões de tração e compressão, respetivamente (obtidas através da análise elástica (estado plano de tensão) num elemento triangular de 3-nós com deformações constantes ao longo do seu domínio), definem-se as direções das fronteiras e das possíveis divisões a adotar (ver Figura 5.9), totalizando nove possibilidades. Destas, a direção mais perpendicular a σ_I será a orientação selecionada.

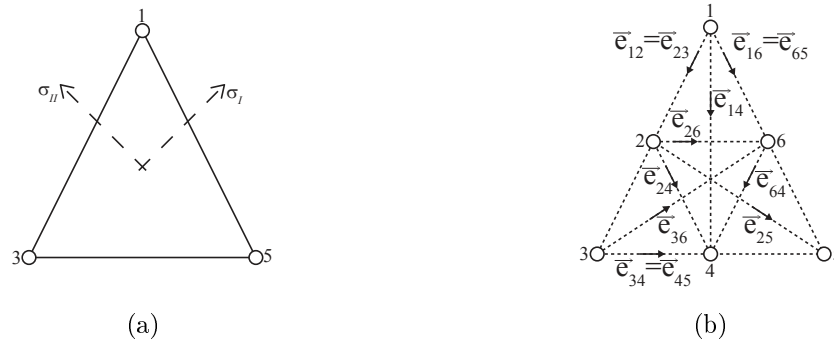


Figura 5.9: Orientação de um elemento triangular: (a) representação das tensões de tração, σ_I , e de compressão, σ_{II} ; (b) definição de orientações existentes

Para tal, através da aplicação do produto interno, entre as possibilidades de orientação, \vec{e}_{ij} , e a tensão máxima de tração, σ_I , obtém-se a orientação mais perpendicular:

$$(\vec{\sigma}_I)^T \vec{e}_{ij} \approx 1 \quad (5.16)$$

Desta forma seleciona(am)-se a(as) fronteira(as) de cada elemento a dividir. Note-se que caso a direção selecionada seja uma fronteira já existente e não uma possível divisão a efetuar, esta não será dividida, significando que uma das três fronteiras do elemento está alinhada com a direção preferencial para a ocorrência de propagação de fratura.

Conforme indicado na secção 5.3, o modo de 2 divisões (ver Figura 5.3) é obtido de duas formas distintas. A sua construção é realizada tendo novamente em consideração o estado de tensões a que o elemento está sujeito, realizando-se o mesmo procedimento (5.16), mas considerando apenas duas orientações alternativas, conforme ilustrado na Figura 5.10. A divisão do elemento é sempre realizada inicialmente entre fronteiras divididas. Posteriormente, realiza-se o produto interno entre as duas hipóteses de orientação existentes, nunca ocorrendo a possibilidade de conflito entre direções selecionadas.

Salienta-se, por último, que este modo de divisão é utilizado igualmente no refinamento h , seguindo os mesmos pressupostos descritos aqui.

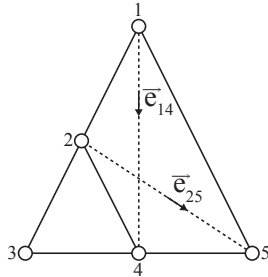


Figura 5.10: Orientações para o modelo de 2 divisões

5.4.4.1 Operação de Troca de Arestas

O sistema de divisão de elementos desenvolvido baseia-se na colocação de nós *a priori* nas fronteiras a dividir. Tendo em consideração o número de nós existentes no elemento, assim será a sua divisão de acordo com os modos de divisão hierárquica. No entanto, esta estratégia de divisão possibilita que o elemento possa conter novos nós que não representem a sua orientação de divisão, i.e, devido à necessidade de compatibilização entre elementos adjacentes, o elemento analisado irá conter mais nós que o previsto. Esta compatibilização traduz-se numa possível incongruência de orientações, levando que a divisão do elemento efetuada não contenha nenhuma aresta com a orientação pretendida, de acordo com a análise do estado plano de tensões. De modo a corrigir esta situação, a fronteira que impossibilita essa mesma orientação é trocada de posição (ver Figura 5.11). Desta forma, a compatibilidade entre elementos adjacentes é realizada sem que exista comprometimento na orientação dos elementos anteriormente analisados. É de notar a existência de um novo modo de divisão (ver Figura 5.11c), não sendo este, no entanto, passível de ser opção sem que exista possibilidade de comprometimento de orientações.

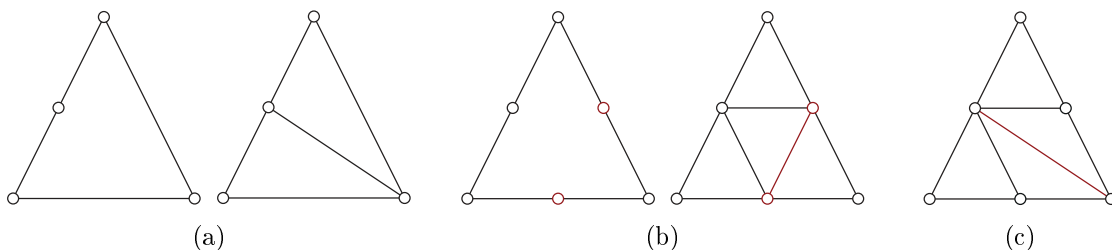


Figura 5.11: Orientação incorreta de elementos: (a) orientação de acordo com convenção adotada (modo 1 Divisão); (b) orientação incorrecta devido à compatibilização de elementos adjacentes (modo de 3 Divisões); (c) orientação do elemento corrigida (mudança de posição da fronteira)

5.5 Refinamento Inverso de Malha

Conforme explicado no início do presente Capítulo, a estratégia de refinamento inverso, pretende por um lado mitigar eventuais assimetrias na malha após a primeira etapa de refinamento (refinamento h e/ou reorientação dos elementos) bem como melhorar o desempenho do algoritmo desenvolvido através da diminuição assinalável do número de graus de liberdade existentes na zona em análise. Para tal, recorre-se à implementação de um gerador de malhas triangulares de *Delaunay* [42], [43] com o objetivo de obter uma malha consideravelmente mais simétrica e regular que a anterior, considerando-se a delimitação de um domínio específico de análise, através da identificação de: (i) fronteiras; (ii) vértices; e (iii) zonas de relevância. No entanto, e tendo em consideração os pressupostos de utilização do gerador de malhas triangulares de *Delaunay*, a reconstrução de elementos pressupõe uma compatibilidade entre malhas, de forma a garantir que a análise de propagação de fratura durante o processo incremental não é comprometida. É de notar ainda, que ao contrário do que acontece com a primeira etapa de refinamento, onde o novo nó é mapeado tendo em consideração a informação disponível na fronteira onde este é inserido, aqui o processo não é realizado de forma direta. Devido ao desconhecimento do local de inserção do novo nó face à malha antiga (onde são conhecidos os deslocamentos ocorridos), o processo de compatibilização é realizado procedendo-se ao mapeamento através da utilização das técnicas designadas de *Walking Algorithms* na nomenclatura anglo-saxónica. O organograma proposto que identifica os processos descritos (ver Figura 5.12), será detalhado durante as próximas subsecções da presente secção.

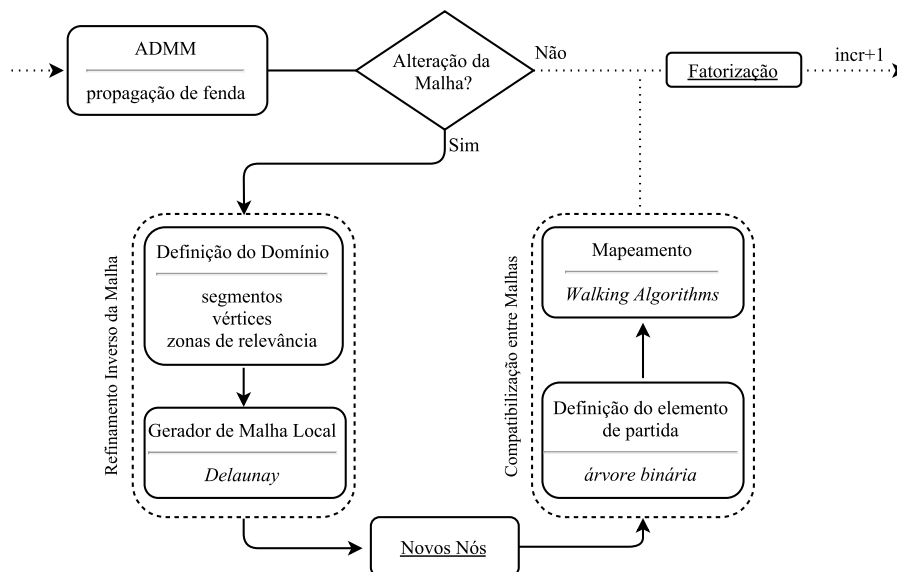


Figura 5.12: Organograma do algoritmo de cálculo referente à etapa de refinamento inverso

5.5.1 Gerador de Malha Local - *Delaunay*

De um modo geral, a qualidade da malha reflete-se no número, na forma e no tamanho dos seus elementos constituintes. A sua obtenção implica necessariamente um esforço computacional assinalável, onde o equilíbrio entre estes três fatores deve ser satisfeito. No entanto, e apesar da tentativa de desenvolver estratégias que maximizem este equilíbrio, a dependência de malha face aos procedimentos implementados leva invariavelmente à deterioração da qualidade da mesma. Durante a primeira etapa de refinamento, ocorre um aumento considerável de graus de liberdade, traduzindo-se em elementos com tamanhos e formas distintas, levando a que o processo contínuo de adaptação morfológica da malha face à propagação de fratura ao longo dos diversos incrementos, provoque uma assimetria severa na malha original. De modo a minimizar os efeitos desta problemática, propõe-se a reconstrução da zona analisada, através do uso de um gerador de malhas triangulares de *Delaunay*. Para a sua utilização, define-se um domínio específico de reconstrução. Este, divide-se em três grupos principais: (i) fora da *zona crítica*; (ii) fronteira da *zona crítica*; e (iii) domínio da *zona crítica*, definindo-se critérios de decisão que possibilitam a escolha de elementos, fronteiras e nós pertencentes ao domínio a considerar:

1. Define-se como fator de decisão geral a eliminação de todos os elementos constituintes da *zona crítica*, à exceção de elementos que façam parte da fronteira de propagação de fratura. Considera-se que qualquer fronteira exterior pertencente à *zona crítica* e/ou inter-elementar que separe materiais diferenciados deve ser preservada.
2. Qualquer elemento que tenha sido dividido devido a fatores de compatibilização fora da *zona crítica*, deve ser analisado consoante o seu factor de forma, denominado razão de aspeto, *AR* (sigla resultante da terminologia inglesa, aspect ratio) [44, pp. 196-199],

$$AR = \frac{1}{8} \frac{|a||b||c|}{(s - |a|)(s - |b|)(s - |c|)} \quad (5.17)$$

onde $s = (|a| + |b| + |c|)/2$ e $|a|$, $|b|$ e $|c|$ correspondem aos comprimentos dos lados do triângulo. Aqui, o factor de decisão, corresponde à comparação do *AR* do elemento com o AR^{max} da malha original. Caso o valor de *AR* do elemento seja menor de AR^{max} , este será eliminado.

O nível de refinamento adotado na reconstrução de malha é definido considerando uma aproximação à área de um triângulo equilátero de lado h_{avg} igual à dimensão original da malha. Todos os elementos assim criados terão de área aproximada:

$$A = \frac{\sqrt{3}}{4} h_{avg}^2 \quad (5.18)$$

5.5.2 Mapeamento - *Walking Algorithms*

Decorrente da utilização do gerador de malhas triangulares de *Delaunay*, os deslocamentos ocorridos na zona analisada durante a propagação da fenda perdem-se devido à substituição da malha antiga pela malha nova. De forma a colmatar esta perda de informação, propõe-se a realização de um mapeamento de deslocamentos entre ambas as malhas, tendo como principal objetivo, localizar a posição do novo nó introduzido face à sua posição na malha substituída, contendo esta os deslocamentos ocorridos até à substituição realizada.

Conforme explicado anteriormente, o processo de mapeamento não é realizado de forma direta, devido ao desconhecimento inicial da posição do novo nó, sendo necessário *a priori*, definir a posição deste. Para tal, utiliza-se uma técnica de procura de elementos, designada de *Walking Algorithms* na nomenclatura anglo-saxónica. O nome advém do modo como o nó de procura é encontrado. A estratégia dos algoritmos provenientes desta técnica baseiam-se fundamentalmente na conectividade de elementos através das suas fronteiras inter-elementares, saltando de elemento em elemento até encontrar o nó desejado (ver Figura 5.13).

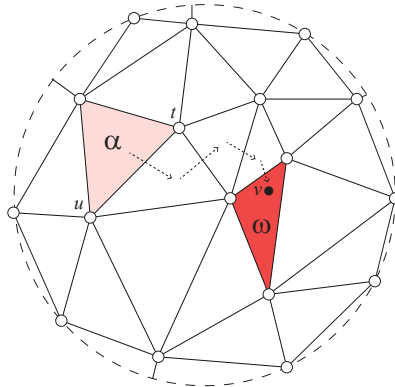


Figura 5.13: Estratégia de procura (α elemento inicial na malha antiga; v ponto de procura na malha nova; ω elemento encontrado na malha antiga)

Segundo Devillers *et al.* [45], a estratégia de procura divide-se em três tipos: (i) *visibility walk*; (ii) *straight walk*; e (iii) *orthogonal walk*. Na presente Dissertação, as técnicas de *visibility walk* e *straight walk* são implementadas. A sua escolha reflete-se na orientação do utilizador. Ambas, utilizam uma metodologia de procura com base na orientação das fronteiras dos elementos (5.19). Esta é definida através do determinante entre as coordenadas dos nós da fronteira (t, u) e do ponto de procura (v):

$$\text{orientação}(t, u, v) = \begin{vmatrix} (u_x - t_x) & (v_x - t_x) \\ (u_y - t_y) & (v_y - t_y) \end{vmatrix} \quad (5.19)$$

5.5.2.1 *Visibility Walk*

A técnica *visibility walk* (ver e.g. [45]–[47]) determina o elemento seguinte, ψ , testando a orientação das suas fronteiras face ao ponto de procura q (ver Figura 5.14).

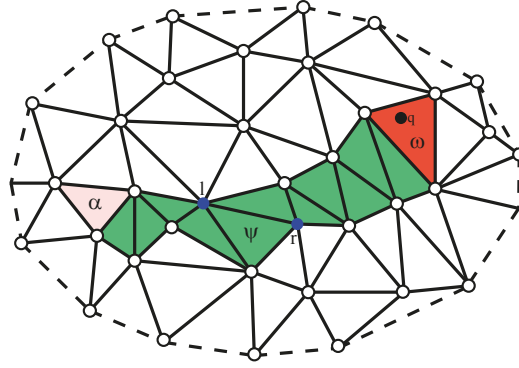


Figura 5.14: Estratégia de procura de *visibility walk* (α elemento inicial na malha antiga; q ponto de procura na malha nova; ω elemento encontrado na malha antiga)

Aqui, o conceito de procura estocástica é introduzido [45], onde a ordem da fronteira pertencente ao elemento não é relevante. Além deste detalhe, ocorre uma verificação de elementos já visitados, designando a técnica de procura como *remembering stochastic walk* [45]. Além dos pressupostos base ilustrados em [45], a filosofia de implementação adotada é representada no algoritmo 3.

Algoritmo 3 Esquema *remembering stochastic walk*

- 1: **Entrada:** α e q ▷ Elemento inicial de partida e ponto a procurar
 - 2: **Saída:** ω ▷ Elemento que contém ponto q
 - 3: elemento $\omega \leftarrow \alpha$ ▷ Fase de Inicialização
 - 4: elemento $\psi \leftarrow \omega$
 - 5: booleano *encontrado* \leftarrow *falso*
 - 6: **repetir**
 - 7: *encontrado* \leftarrow *verdadeiro*
 - 8: **para cada** fronteira $i \in \psi$
 - 9: $l \leftarrow$ nó₁ \in fronteira i ▷ Nós da fronteira em análise
 - 10: $r \leftarrow$ nó₂ \in fronteira i
 - 11: *vizinho* \leftarrow elemento que atravessa fronteira i ▷ Elemento seguinte
 - 12: **se** $\psi \neq$ *vizinho* ▷ Verificar se o elemento já foi visitado
 - 13: **se** orientação(l, r, q) < 0 ▷ Direção Errada
 - 14: $\psi \leftarrow$ *vizinho* ▷ Atualização de elementos
 - 15: $\omega \leftarrow$ *vizinho*
 - 16: *encontrado* \leftarrow *falso*
 - 17: *sair*
 - 18: **até** *encontrado* \leftarrow *verdadeiro*
-

5.5.2.2 *Straight Walk*

A segunda estratégia de procura implementada designa-se por *straight walk* [45]. De um modo geral, esta estratégia define um modo de procura com base na definição de um segmento de reta \vec{pq} , que ligue um determinado ponto de partida ($p \in \alpha$) ao ponto de chegada ($q \in \omega$), conforme representando na Figura 5.15.

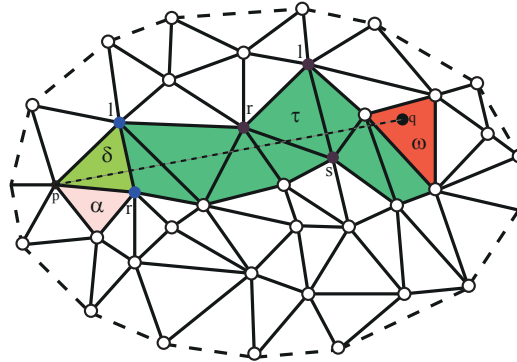


Figura 5.15: Estratégia de procura de *straight walk* (verde claro - inicialização; verde escuro - caminho de procura)

Esta estratégia de procura é composta por dois passos fundamentais: (i) inicialização; e (ii) caminho de procura. No passo de inicialização um dos vértices, p , do elemento de partida, α , é seleccionado e posteriormente é feito uma procura do elemento vizinho, δ , intersectado pelo segmento de reta \vec{pq} . Esta procura é feita com base na posição dos vértices l e r que compõem o elemento. Até ser encontrado, os vértices l e r vão permutando entre si ao longo dos elementos vizinhos de α . Posteriormente ao passo de inicialização, inicia-se o processo de caminho de procura. Cada elemento é seleccionado com base na orientação das suas fronteiras. Sempre que um elemento τ é seleccionado, os vértices l , r e s vão permutando de forma a garantir que o elemento intersecta o segmento \vec{pq} . O caminho de procura termina quando a orientação definida por todas as fronteiras do elemento τ ultrapassa o ponto de chegada q . Assim, o elemento a procurar ω é o ultimo a ser visitado. Propõe-se ao leitor a consulta do algoritmo base proveniente desta estratégia de procura em [45].

5.5.2.3 Definição do Elemento de Procura Inicial

A aplicação de estratégias de procura *Walking Algorithms*, pressupõe a identificação de um elemento de partida para o início de procura. Este, habitualmente, pode ser escolhido de forma arbitrária. O tempo de procura do elemento de chegada pode depender do local onde este se encontra face ao elemento de partida escolhido. No entanto, esta definição, em regra, não compromete a eficiência de procura do algoritmo, mas sim a eficácia de

localização do elemento. No caso da existência de zonas que apresentem descontinuidade no domínio (cavidades, fissuras, etc), as estratégias de procura implementadas não exibem robustez suficiente para avaliar o caminho que evite a passagem por zonas problemáticas de procura (ver Figura 5.16). De facto, as versões dos *Walking Algorithms* encontradas na literatura não garantem a convergência do método para domínios não convexos.

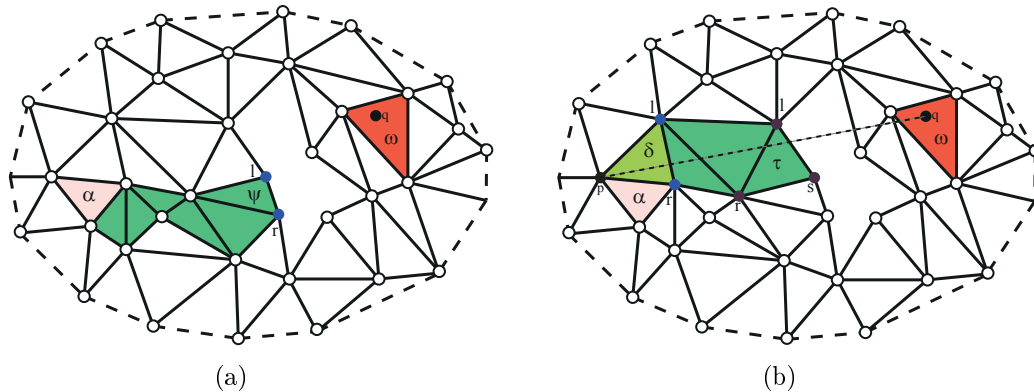


Figura 5.16: Zona problemáticas de procura (impossibilidade de proseguir o caminho - α elemento inicial na malha antiga; q ponto de procura na malha nova; ω elemento a encontrar na malha antiga): (a) *visibility walk*; (b) *straight walk*

Este problema não pode ser considerado despiciente no atual contexto. De modo a colmatar esta limitação, propõe-se uma procura otimizada do elemento de partida. Para tal, define-se um domínio convexo de procura que garanta a inexistência de descontinuidades ao longo do caminho a percorrer entre o elemento de partida α e o elemento de chegada ω (ver Figura 5.17). Qualquer elemento pertencente a este domínio, deve satisfazer a premissa enunciada.

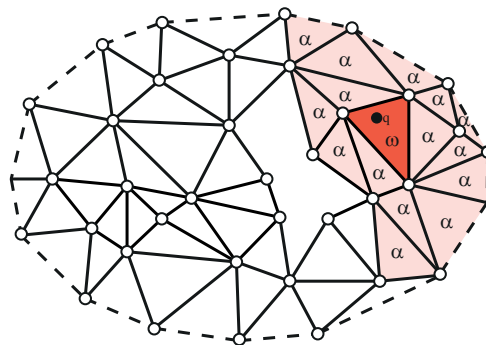


Figura 5.17: Elementos de procura iniciais α com inexistência de descontinuidades

A estratégia adotada passa pela delimitação de zonas problemáticas através da implementação de uma árvore binária construída para o efeito [48, pp. 221-286] (ver Figura 5.18). Esta tradicionalmente, é construída através de pontos, onde cada um contém apontadores à esquerda e à direita. O ponto de partida, designado de *root*, é colocado no topo da árvore. Cada apontador apresenta uma sub-árvore. Caso esta não

apresente correspondência com um dos seus apontadores, significa portanto que o ponto apenas apresenta uma correspondência possível. O processo recursivo de construção termina, quando todas as correspondências são introduzidas na árvore. A implementação deste tipo de estratégia permite obter diversas vantagens, nomeadamente: (i) relacionar a informação de forma estrutural; (ii) representação e construção hierárquica flexível; e (iii) procura e construção de informação de forma eficiente.

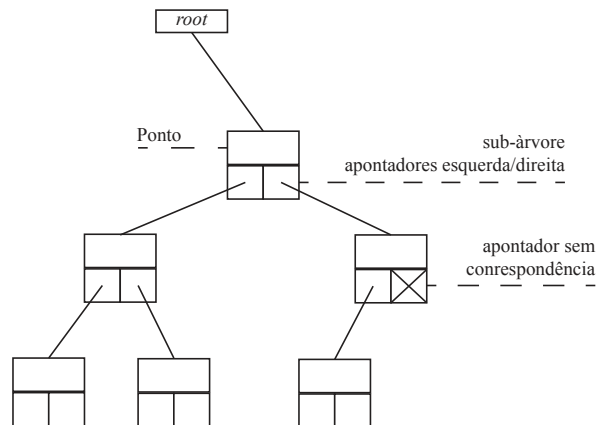


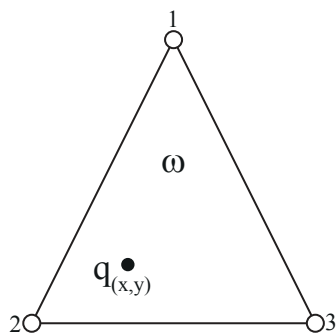
Figura 5.18: Representação estandardizada de uma árvore binária

Tendo em consideração os pressupostos apresentados, define-se aqui uma estrutura hierárquica de fronteiras que delimitem zonas exteriores aos possíveis caminhos a percorrer. A partir da definição desta estrutura, constrói-se uma árvore binária especializada composta por fronteiras que garantam a existência de um domínio convexo. Esta por sua vez, é construída de acordo com a posição da normal exterior que caracteriza cada fronteira. À medida que a árvore vai crescendo, verificam-se as posições dos nós a procurar face à fronteira atual em análise. Quando um dos apontadores da estrutura apresenta mudança de direção, essa fronteira apresenta-se como fronteira de partida, garantindo que os nós que se apresentem de um dos lados desta terão um caminho inexistente de descontinuidades. Desta forma, o elemento de partida será o constituinte da última fronteira antes da mudança de direção. A árvore é concluída quando a última fronteira não apresenta nenhuma correspondência adicional. É de notar, que a ordem de construção segue a numeração de criação das fronteiras existentes, não sendo conhecido *a priori* a árvore estrutural a desenvolver.

5.5.2.4 Mapeamento

Finalizada a procura do elemento pertencente à malha antiga, é possível realizar o mapeamento de deslocamentos (5.20) do nó pertencente à malha nova (ver Figura 5.19).

O processo de mapeamento realizado segue os mesmos pressupostos que a equação (4.1a), associando-se a cada nó do elemento o seu peso, N_i , respetivo face à posição que o novo nó ocupa no elemento encontrado. As funções de forma, N_i , seguem os princípios do MEF, podendo ser consultadas em [32, pp. 87-89].



$$\Delta d_q = \sum_{i=1}^3 N_i(x, y) \Delta d_i^\omega \quad (5.20)$$

Figura 5.19: Mapeamento de um novo nó q

Capítulo 6

Aplicações Numéricas

6.1 Introdução

Neste Capítulo são apresentados três exemplos numéricos demonstrativos das capacidades da formulação numérica implementada com e sem refinamento adaptativo e a subsequente análise crítica dos resultados obtidos. O primeiro problema consiste numa viga fina retangular com inclusão de entalhe numa das suas faces, submetida a deslocamentos pontuais de tração uniaxiais. Aqui, comparam-se as soluções obtidas com as existentes em [21], de forma a analisar e validar os resultados, realizando um conjunto de simulações que possibilitem aferir com maior rigor o desempenho da ferramenta implementada. O segundo caso de análise apresenta-se como sendo uma chapa fina retangular com inclusão de entalhe numa das suas faces, submetida a deslocamentos de tração. Estes, são aplicados em duas das suas faces rígidas. Os resultados aqui obtidos são validados face às soluções existentes em [38]. Ao contrário do primeiro caso de estudo, a exemplificação deste modelo, permite aferir de um modo expedito a sensibilidade da formulação numérica face à imposição de deslocamentos em ângulos diversos. Por último, sugere-se a modelação de um terceiro exemplo. Este consiste igualmente numa chapa fina retangular com inclusão de entalhes em ambas as faces laterais, submetida a deslocamentos de corte nas restantes faces rígidas. Os resultados aqui obtidos validam a capacidade da ferramenta de identificar zonas locais distintas propícias à propagação de fratura. Todos os cálculos foram efetuados num computador de uso pessoal. Este, é constituído por um microprocessador Intel Core i5-2520M; sendo o modelo caracterizado por uma velocidade de relógio de 2.50GHz. A máquina possui ainda uma memória de 8.00Gb. O ambiente utilizado é suportado pelo sistema operativo Linux Ubuntu 14.04.3 LTS, instalado numa máquina virtual

Considera-se que daqui em diante, a utilização de uma nomenclatura particular em relação à estrutura e nível de refinamento da malha de elementos finitos, com $x \in \{0, 1, 2, 3\}$ e $y \in \{0.25, 0.1, 0.05, 0.025\}$, respetivamente. Assim:

Mx	malha estruturada, simétrica, com caminho de propagação pré-estabelecido
MxNE	malha não estruturada, sem caminho de propagação pré-estabelecido
MxNE_O	aplicação isolada da estratégia de orientação de elementos
MxNE_Ry	aplicação isolada da estratégia de refinamento h
MxNE_ROy	aplicação conjunta das estratégias de refinamento

6.2 Exemplo 1

Neste primeiro exemplo considera-se uma viga retangular fina (ver Figura 6.1). Esta é constituída por material elástico, com módulo de Young $E = 1.06$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0.27$. A energia crítica de propagação é $Gc = 0.0001$. Esta, contém a inclusão de um entalhe de $a = 1$, ilustrando a existência de uma fenda inicial. O tamanho da viga é $L = 6$ e $b = 0.5$ de metade de altura. A viga encontra-se tracionada em dois dos seus vértices. De forma garantir a propagação no plano de fratura, considera-se uma pressão exercida em ambas as faces de $\sigma = 0.035$.

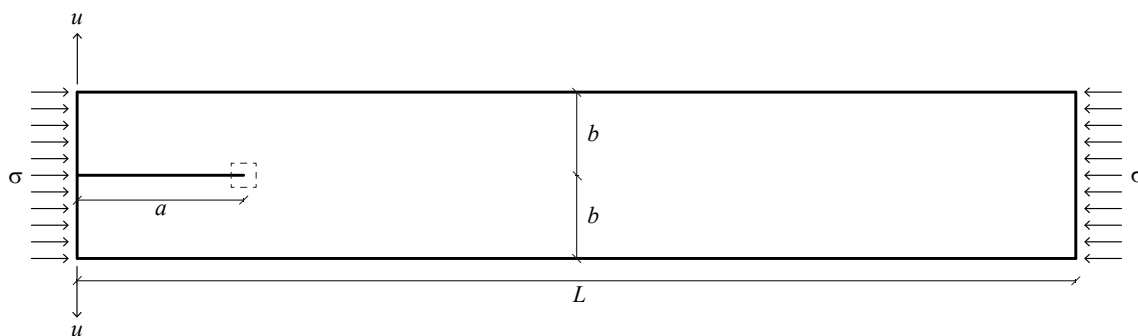


Figura 6.1: Geometria e condições de fronteira. Dimensões da viga: $L = 6, b = 0.5$ e tamanho de fenda inicial $a = 1$. Incrementos de deslocamento: u . Propriedades do material: $E = 1.06, \nu = 0.27$ e $Gc = 0.0001$

O estudo efetuado centra-se na análise do problema: (1) sem aplicação de refinamento adaptativo; e (2) com aplicação de refinamento adaptativo:

1. comparam-se os resultados com os disponíveis em [21]. Para tal, modela-se a viga retangular fina (ver Figura 6.1) através de seis malhas distintas. As primeiras três (de acordo com Pandolfi e Ortiz [21]) apresentam a particularidade de serem malhas estruturadas, simétricas com orientação de caminho de propagação pré-estabelecido, i.e., os elementos apresentam uma orientação de acordo com a propagação expectável

de fratura. As restantes, são malhas não estruturadas, sem orientação de caminho de propagação pré-estabelecido. Através destas, demonstra-se a dependência clara de propagação de fratura tendo em consideração a configuração original de malha;

2. ilustra-se a estratégia implementada de refinamento adaptativo ilustrada na Figura 5.2. Modela-se o exemplo através de uma malha não estruturada, sem orientação de caminho de propagação pré-estabelecido. Analisa-se a eficiência da ferramenta desenvolvida face aos resultados previamente obtidos no ponto 1, salientando-se a aplicabilidade individual e/ou conjunta das etapas de: (i) refinamento h e (ii) reorientação de elementos.

6.2.1 Análise de Propagação de Fratura sem Aplicação de Refinamento Adaptativo

Demonstra-se a eficiência da formulação numérica sem aplicação de refinamento adaptativo. Inicia-se a análise através de três malhas: (i) M1; (ii) M2; e (iii) M3, estruturadas, simétricas (longitudinalmente) com orientação de caminho de propagação pré-estabelecido, constituídas por elementos triangulares de 3-nós ao longo do seu domínio (ver Figura 6.2), apresentando níveis de refinamento distintos (ver Tabela 6.1).

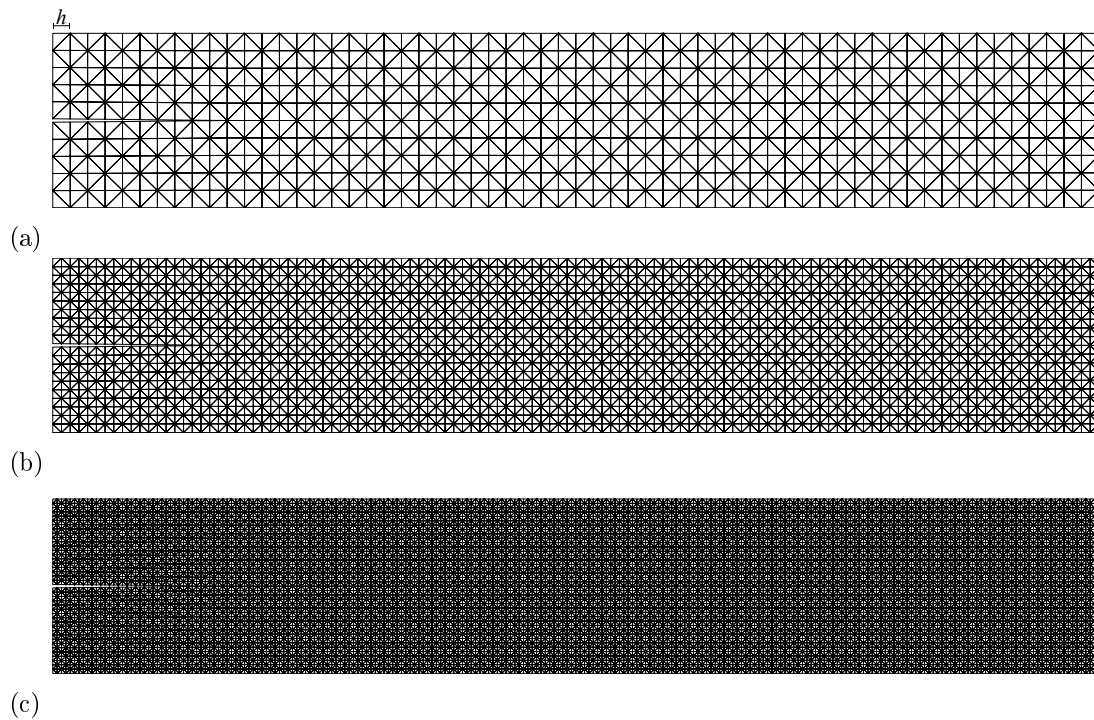


Figura 6.2: Discretização da viga retangular fina: (a) M1; (b) M2; (c) M3

Tabela 6.1: Análise da viga retangular fina: características das malhas estruturadas

Malha	Tipos de Elementos	h	Número de Elementos	NGL	
				Global	Local
M1		0.1	1200	7190	6880
M2	linear	0.05	4800	28794	28160
M3		0.025	19200	115194	113920

A análise efetuada considera um total de dez incrementos de deslocamentos, $N_{Incr}=10$, cada um de valor $u = 0.1$. À medida que o processo incremental evolui, regista-se a propagação de fratura ocorrida. Para efeitos de validação, os resultados aqui obtidos são comparados com os existentes em [21], tendo em consideração a malha de elementos finitos com o nível de refinamento superior. Os autores referenciados, recorrem à estratégia de eliminação de elementos [31, pp. 331] tendo como propósito a propagação de fenda ao longo do domínio considerado, através da imposição de um número elevado (não referenciado) de incrementos de deslocamento. De facto, a curva de comparação é obtida através da aplicação de um método explícito, necessitando invariavelmente de um número substancialmente elevado de passos. Salienta-se ainda, que os resultados obtidos pelos autores citados são referentes a elementos quadráticos (elemento triangular de 6-nós), traduzindo-se expectavelmente em resultados de maior precisão. A Figura 6.3 ilustra a evolução de fenda para as três malhas testadas, tendo em consideração o número de incrementos de deslocamento e as características base do exemplo.

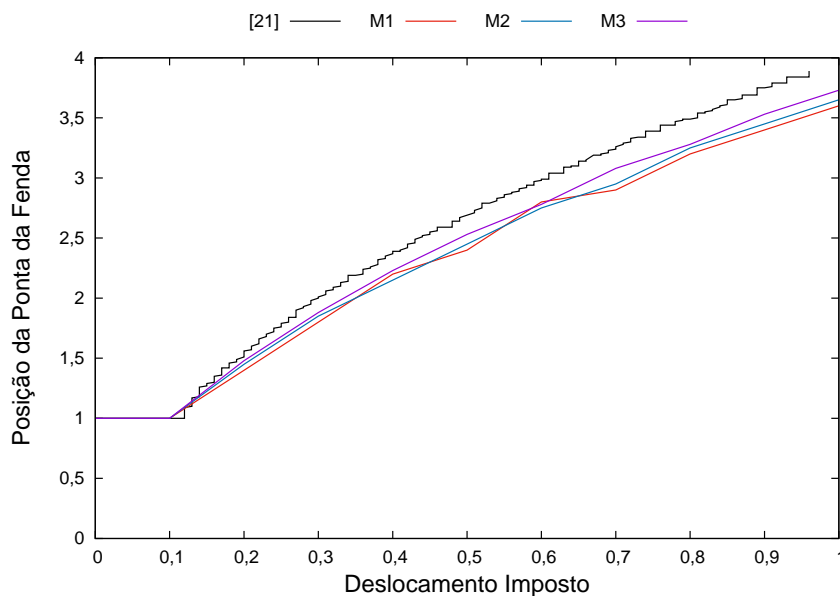


Figura 6.3: Propagação de fenda em malhas estruturadas tendo em consideração diferentes níveis de refinamento. Comparação direta de resultados com os existentes em bibliografia

Os resultados obtidos (ver Figura 6.3), aproximam-se satisfatoriamente dos existentes em [21]. As três curvas de propagação obtidas, seguem a mesma trajetória de evolução, iniciando-se o aparecimento de fenda praticamente no mesmo instante de imposição de deslocamento existente na curva de comparação. Note-se que à medida que o nível de refinamento aumenta, as curvas tendem a seguir um comportamento suave, não existindo praticamente oscilações durante a fase de propagação. Salienta-se o facto dos resultados obtidos neste trabalho corresponderem à discretização do domínio através de elementos triangulares de 3-nós. Ainda, ao contrário do que acontece com a curva de comparação onde existe a necessidade de um número elevado de incrementos, aqui constata-se que, sendo este um método implícito, com um número reduzido de incrementos obtém-se aproximadamente a mesma trajetória de propagação. Ao longo do processo incremental, destaca-se em cada incremento a energia dissipada em relação à energia elástica total disponível, conforme se ilustra na Figura 6.4.

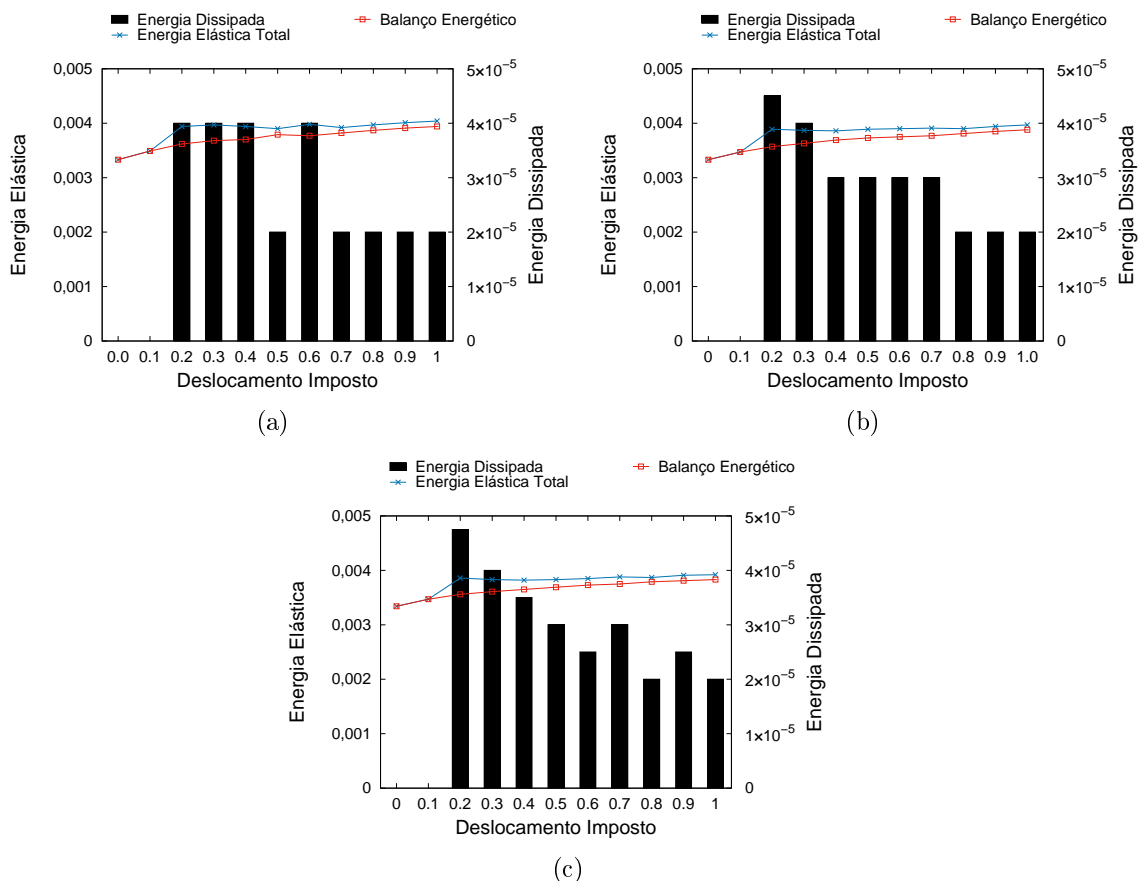


Figura 6.4: Curvas de balanço energético: (a) M1; (b) M2; (c) M3

Note-se, em regra, a tendência decrescente da energia de dissipação existente nas três malhas analisadas. À medida que o nível de refinamento aumenta, constata-se que a energia de dissipação tende a diminuir gradualmente, sem ocorrência de oscilações significativas,

tornando-se evidente a aproximação da curva de energia elástica total à curva de balanço energético. De facto, esta observação pode ser justificada pelo aumento da flexibilidade da malha ao longo do processo incremental, i.e, à medida que os incrementos vão sendo impostos, a malha tende a deformar-se mais devido ao consecutivo aumento de fenda. Por outro lado, sendo este um processo iterativo, a análise entre incrementos pode significar oscilações com maior significado, ocorrendo uma maior ou menor propagação de fenda durante cada passo de incremento.

Tendo por base a informação descrita, ilustra-se na Figura 6.5 a propagação final de fratura em cada malha analisada. Conforme expectável, a trajetória de propagação apresenta-se totalmente perpendicular face à direção dos deslocamentos impostos.

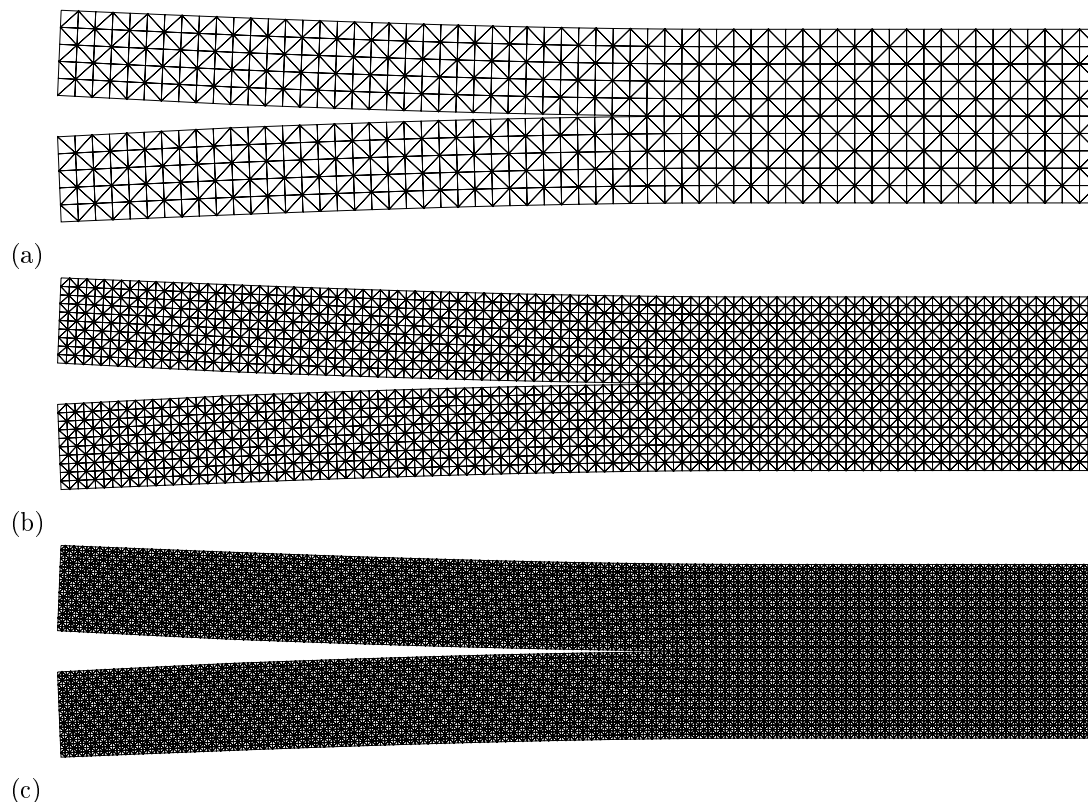


Figura 6.5: Propagação final de fratura: (a) M1; (b) M2; (c) M3

Considerem-se agora três novas malhas: (i) M0NE; (ii) M1NE; e (iii) M3NE, não estruturadas sem orientação de caminho de propagação pré-estabelecido, constituídas por elementos triangulares de 3-nós ao longo do seu domínio (ver Figura 6.6). Das características descritas, destaca-se a não orientação de caminho de propagação. Refere-se ainda, a existência de um aumento de elementos e consequentemente de número de graus de liberdade entre malhas estruturadas (ver Tabela 6.1) e não estruturadas (ver Tabela 6.2) para o mesmo nível de refinamento. Este aumento deve-se em medida à não

estruturaco da malha e conseqüentemente  tentativa de aproximao de todos os elementos ao nível de refinamento estipulado, por parte do gerador de malhas triangulares convencional. No entanto, a comparao de resultados entre malhas continua a considerar-se válida, uma vez, que o aumento de elementos favorece a qualidade dos resultados obtidos.

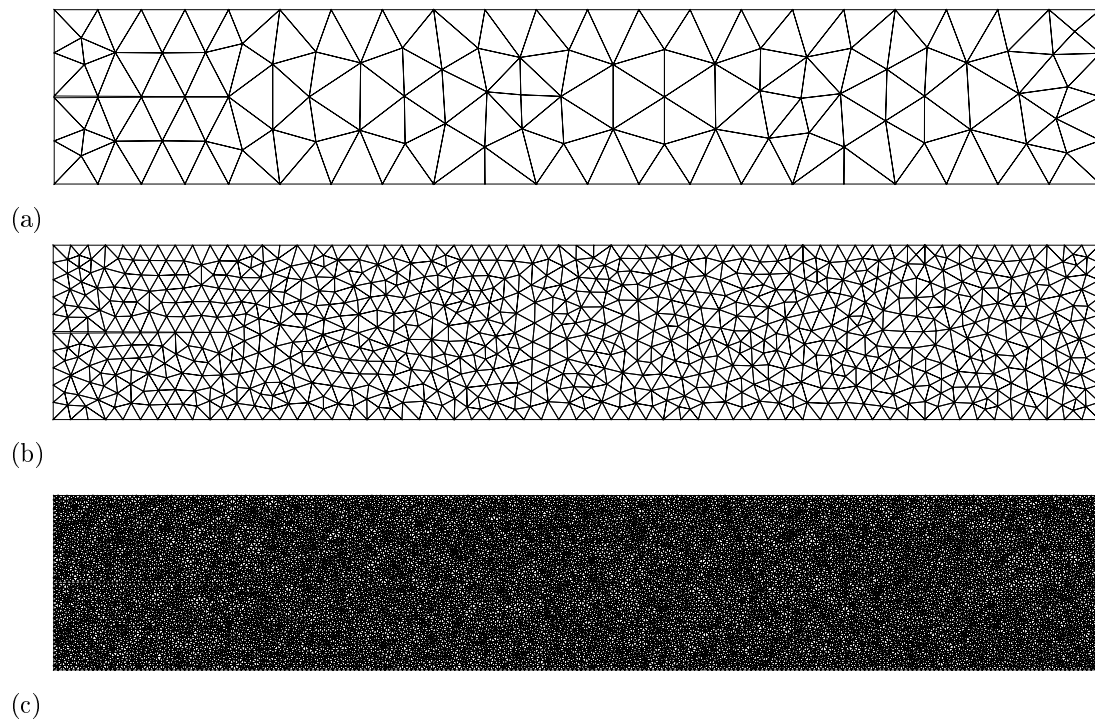


Figura 6.6: Discretizao da viga retangular fina: (a) M0NE; (b) M1NE; (c) M3NE

Tabela 6.2: Análise da viga retangular fina: características das malhas não estruturadas

Malha	Tipos de Elementos	h	Número de Elementos	NGL	
				Global	Local
M0NE		0.25	184	1094	988
M1NE	linear	0.1	1550	9290	8980
M3NE		0.025	25380	152268	151000

Pretende-se agora comparar os resultados aqui obtidos, com os anteriormente apresentados (ver Figura 6.3) tendo em considerao as diferenças implícitas na construo das malhas não estruturadas analisadas, nomeadamente o número e a orientao dos elementos constituintes. Tendo por base a informao descrita, ilustra-se na Figura 6.7 a propagao final de fratura em cada malha analisada.

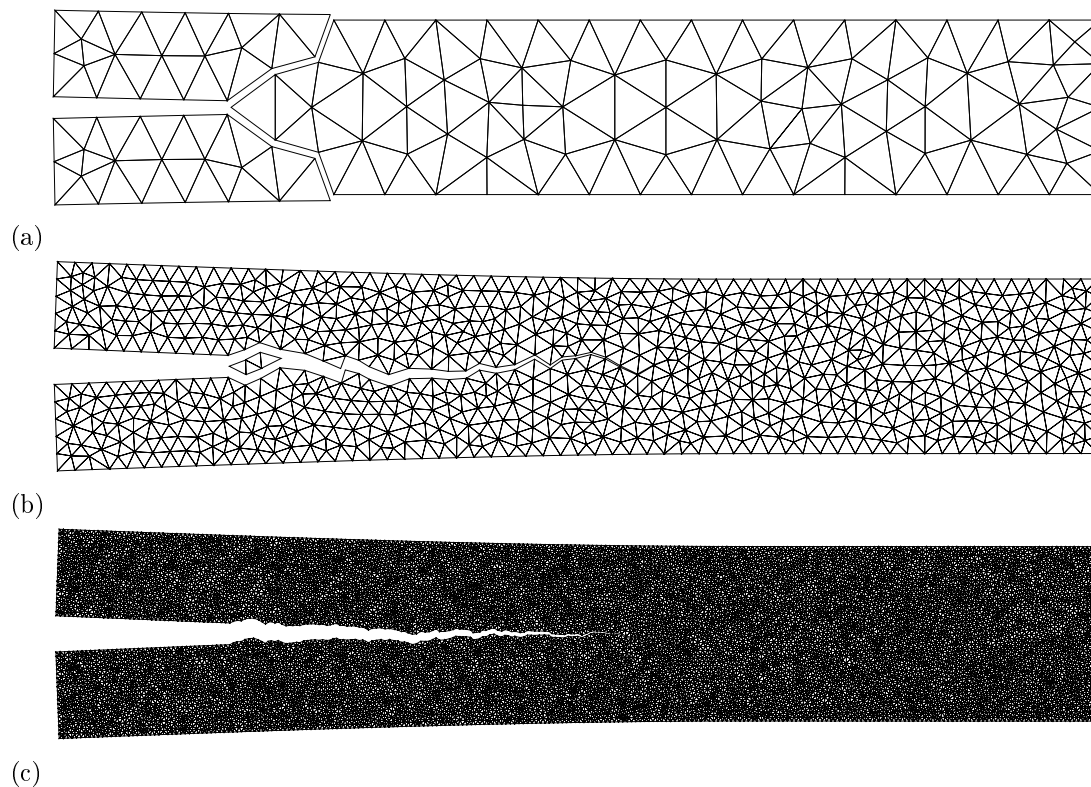
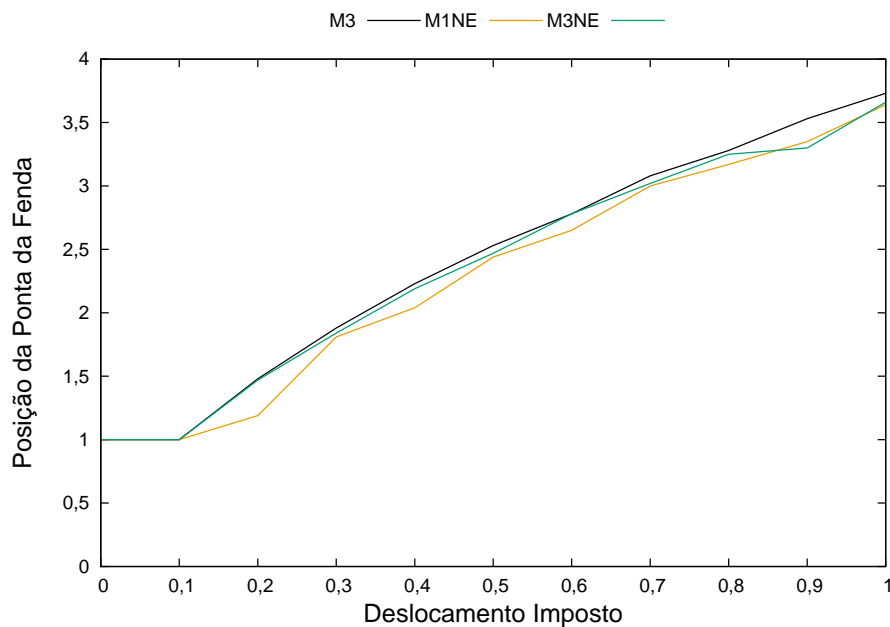


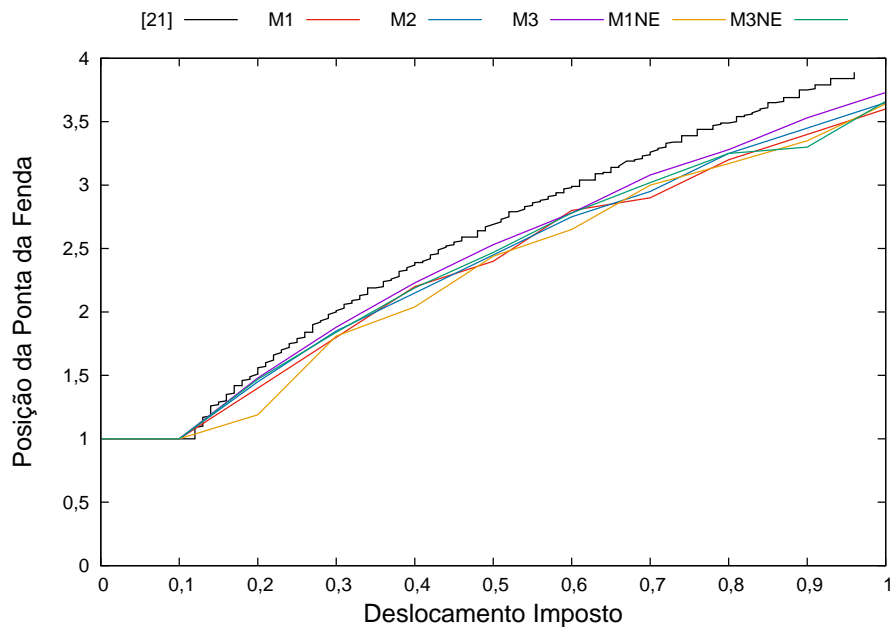
Figura 6.7: Propagação final de fratura: (a) M0NE; (b) M1NE; (c) M3NE

Os resultados não apresentam exatamente o mesmo comportamento de propagação relativamente aos anteriores (ver Figura 6.5). Ao contrário das primeiras três malhas estruturadas com orientações de fratura pré-estabelecidas, onde a trajetória apresenta-se linear, o comportamento aqui obtido, representa em regra, oscilações assinaláveis. Mais, à medida que o nível de refinamento diminui, a divergência de resultados é mais acentuada, ocorrendo até a separação de elementos ao longo do domínio. É de destacar o comportamento de propagação de fenda na malha M0NE. Devido à dimensão e orientação dos seus elementos constituintes, a malha acaba por fraturar totalmente ao terceiro incremento de deslocamento, não chegando a ocorrer uma propagação semelhante às restantes. Salienta-se ainda, a análise de caminhos de propagação distintos nas malhas M0NE e M1NE, provocando a separação ou fratura completa do modelo. Refere-se no entanto, que para níveis de refinamento superiores (ver Figura 6.7c), a trajetória global de propagação de fenda apresenta uma maior linearidade, conforme seria expectável. Deste modo, pode-se concluir que, apesar da existência de oscilações durante a fase de propagação de fenda, as malhas M1NE e M3NE, apresentam, em regra, uma trajetória final de propagação de fratura consistente com os resultados expectáveis. As curvas de propagação obtidas são ilustradas e comparadas na Figura 6.8. Efetivamente, a curva M1NE tende a oscilar ligeiramente face à malha estruturada M3 mais refinada (ver

Figura 6.8a). No entanto, tendo em conta um panorama geral (ver Figura 6.8b), as malhas analisadas tendem a convergir para o mesmo resultado final de propagação de fenda (a curva de propagação da malha M0NE não é representada).



(a)



(b)

Figura 6.8: Propagação de fenda tendo em consideração diferentes tipologias de malha: (a) malhas não estruturadas com diferentes níveis de refinamento; (b) comparação direta de resultados com obtidos de malhas estruturadas e existentes em bibliografia

De facto, estas observações podem ser corroboradas pela oscilação existente nas curvas de balanço energético, destacando-se em cada incremento a energia dissipada em relação à energia elástica total disponível conforme se ilustra na Figura 6.9. Esta constatação de oscilações ao longo dos diversos incrementos de deslocamento, deve-se em grande medida à necessidade de um maior gasto energético na transposição de fronteiras inter-elementares de elementos mal orientados face à real trajetória de propagação de fratura. Efetivamente, esta transposição de elementos *mal orientados* traduz-se numa perda de propagação de fratura num determinado incremento, sendo possivelmente compensada aquando da sua transposição. Tal fenómeno pode ser observado através de aumentos súbitos de energia dissipada. À medida que o nível de refinamento diminui, maiores oscilações tendem a existir ao longo do processo incremental. Em contrapartida, à medida que o nível de refinamento aumenta, mesmo considerando elementos *mal orientados*, a sua transposição não requer um gasto energético assinalável, constatando-se uma tendência clara de decréscimo de energia dissipada, tal como acontecia nas malhas com caminho de fratura pré-estabelecido.

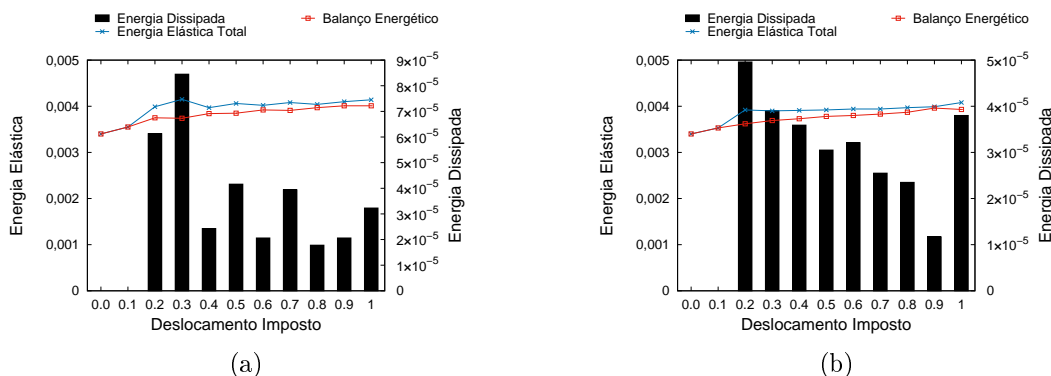


Figura 6.9: Curvas de balanço energético: (a) M1NE; (b) M3NE

Assim, pode-se afirmar que para malhas com níveis de refinamento elevados, mesmo considerando elementos *mal orientados*, existe uma tendência de aproximação aos resultados obtidos das malhas estruturadas. No entanto a ocorrência de oscilações (último incremento ilustrado na Figura 6.9b) pode fazer-se sentir, caso os elementos estejam mal orientados em determinado incremento de deslocamento. Desta forma, verifica-se que caso o refinamento seja baixo e/ou os elementos apresentem uma orientação incorreta, maiores oscilações ao longo do processo irão ser sentidas. Em suma, este fenómeno pode ser observado através da construção de um gráfico Força-Deslocamento (ver Figura 6.10), onde se representa a força máxima atingida ao longo de toda a propagação de fenda, denominada de força de pico. À exceção das análises anteriores onde a malha M0NE foi analisada tendo em conta $u = 0.1$, aqui considera-se necessário representar esta mesma malha com deslocamento $u = 0.05$ como parâmetro de comparação na análise a ser efetuada na secção 6.2.2.

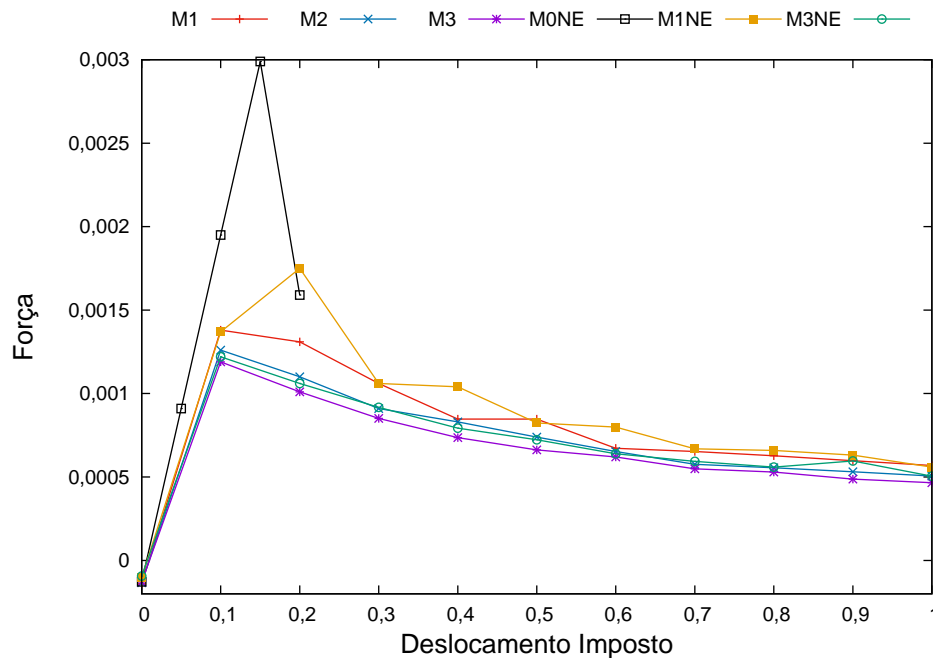


Figura 6.10: Curva Força-Deslocamento referente a cada malha estruturada e não estruturada analisada

Tabela 6.3: Erro associado à força de pico de referência

	M3	M3NE	M2	M1	M1NE	M0NE
Força de Pico $\times 10^{-3}$	1.19	1.22	1.26	1.38	1.75	2.99
Erro %	0.00	1.95	5.42	13.47	32.02	60.08

Observe-se os resultados ilustrados na Tabela 6.3, considerando a força de pico da malha M3 como valor de referência. Para níveis de refinamento consideravelmente elevados (curvas M2, M3 e M3NE), as forças de pico são praticamente as mesmas, significando isto que as curvas de Força-Deslocamento apresentam aproximadamente o mesmo comportamento. No entanto, a diminuição por si só do nível de refinamento (curva M1), mantendo a orientação do caminho de propagação de fratura, altera consideravelmente a força de pico observada, existindo um erro de aproximadamente 13.47%. Aliado a esta diminuição, a não orientação de elementos (curva M1NE e M0NE) traduz-se num erro muito superior, chegando a atingir na malha M0NE um valor de aproximadamente 60.08%.

Do ponto de vista de dimensionamento, esta divergência de valores observada traduz-se num erro bastante considerável. De um modo geral, a diferenciação de malhas tendo em conta apenas o nível de refinamento, assinala uma melhoria significativa nos resultados, conforme se constata pela malha M3NE. A orientação incorreta de elementos apresenta-se como fator importante no afastamento entre curvas. Assim, constata-se que

a conjugação destes dois fatores mencionados, impossibilita a análise do problema. Desta forma, pretende-se que através da aplicação do refinamento adaptativo local à malha M0NE, seja possível obter resultados semelhantes aos das restantes malhas, aproximando as curvas de propagação, sem que exista a necessidade de se considerar um refinamento elevado em todo o domínio da malha.

6.2.2 Formulação Numérica com Refinamento Adaptativo

Conforme referido, pretende-se demonstrar com este primeiro exemplo a eficiência da formulação numérica com a aplicação do refinamento adaptativo. Para tal, considere-se a malha mais grosseira M0NE como malha base. Nesta, propõe-se a seguinte ordem de trabalhos: (1) aplicação isolada de refinamento h ; (2) aplicação isolada de reorientação de elementos; (3) aplicação conjunta. Na secção 6.2.3 comparam-se todos os resultados obtidos tendo em conta as diferentes estratégias adotadas. Note-se que nas análises subsequentes apenas se ilustra o caminho total de propagação de fenda de modo a não sobrecarregar o documento. Por último, salienta-se que nas análises que se seguem, reduziu-se para metade o passo de carga de modo a permitir uma aplicação mais efetiva das técnicas adaptativas de refinamento de malha preconizadas.

6.2.2.1 Definição da Zona Crítica

Todas as aplicações são executadas tendo em conta um determinado parâmetro energético elementar, $p_e = 7 \times 10^{-5}$, sendo este um valor estimado empiricamente. Note-se que o parâmetro identificado pode variar dependendo da abrangência que o utilizador pretende para determinada aplicação. A Figura 6.11 ilustra a primeira *zona crítica* identificada em todas as aplicações. Nesta, constata-se uma definição de zonas específicas de análise, sendo os elementos de cor vermelha indicadores dos elementos críticos inicialmente definidos. A região é expandida até perfazer uma área previsível de possível propagação de fratura. Esta vai evoluindo à medida que os incrementos de deslocamentos vão sendo impostos. Todos os elementos de cor azul escuro não pertencem à zona local de análise.



Figura 6.11: *Zona crítica* inicial $u = 0$

6.2.2.2 Propagação Total de Fenda Considerando Diferentes Aplicações

Seguindo a ordem de trabalhos definida anteriormente, ilustram-se os resultados de propagação de fratura obtidos. Em cada aplicação, ilustram-se as *zonas críticas* referentes a quatro passos de deslocamentos u impostos (0.25; 0.5; 0.75; 1.00) e propagação final de fenda.

1. Aplicação isolada da estratégia de refinamento h . Através desta pretende-se obter o mesmo nível de refinamento existente nas malhas M1NE e M3NE. Para tal, define-se o parâmetro p_h ¹ com os seguintes valores: (i) 0.1; e (ii) 0.025, respetivamente.

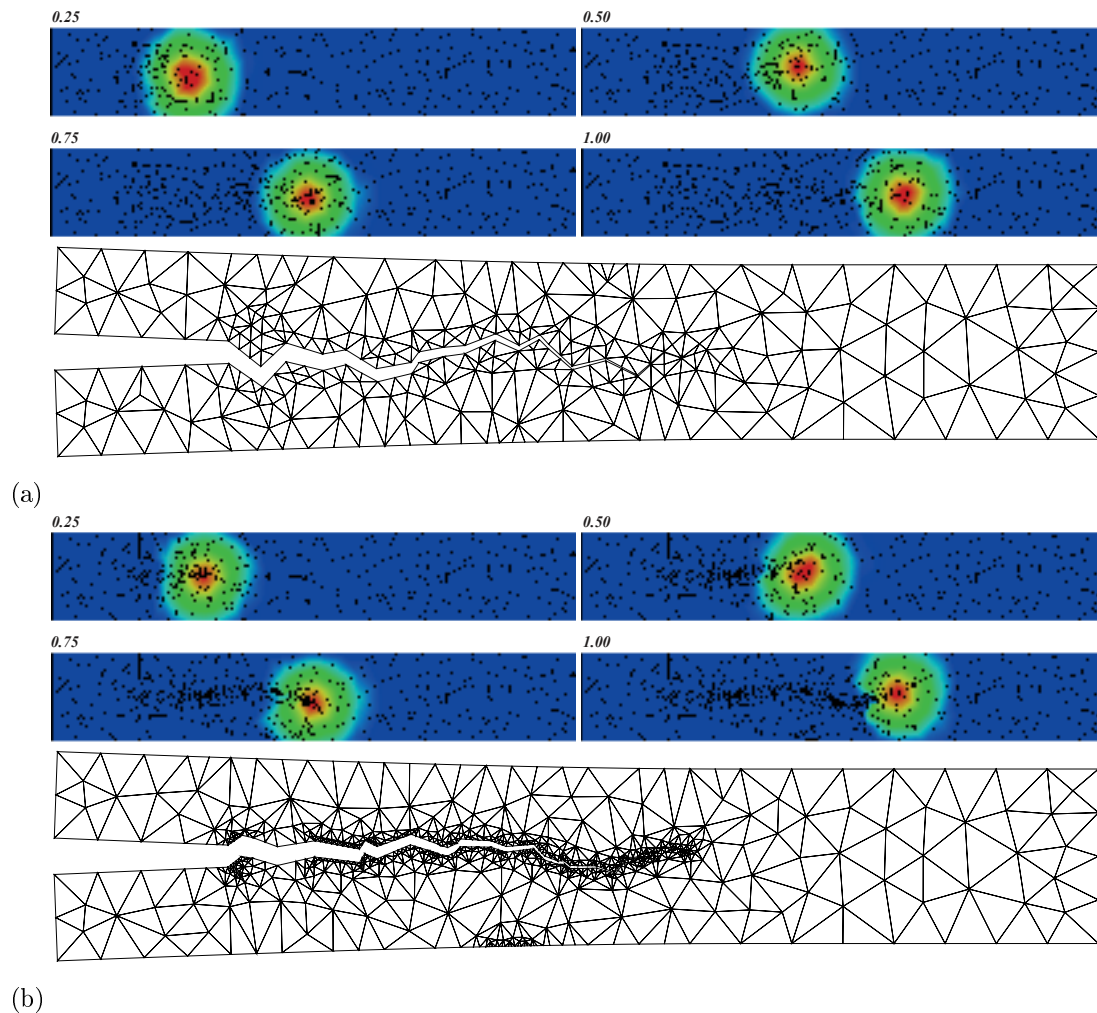


Figura 6.12: Propagação final de fratura considerando isoladamente, diferentes níveis de refinamento h na malha M0NE: (a) $p_h = 0.1$; (b) $p_h = 0.025$

¹ Parâmetro associado ao nível de refinamento definido pelo utilizador (ver secção 5.4.3)

2. Aplicação isolada da estratégia de orientação de elementos. Através desta pretende-se obter um caminho de propagação de fenda de acordo com as tensões de tração existentes. Estas são representadas na Figura 6.13, ilustrando as orientações no incremento onde ocorre a primeira divisão de elementos. Salienta-se o modelo acaba por fraturar totalmente antes do processo incremental terminar. De facto, e apesar da existência de caminho, a fenda não se propaga como seria expectável.

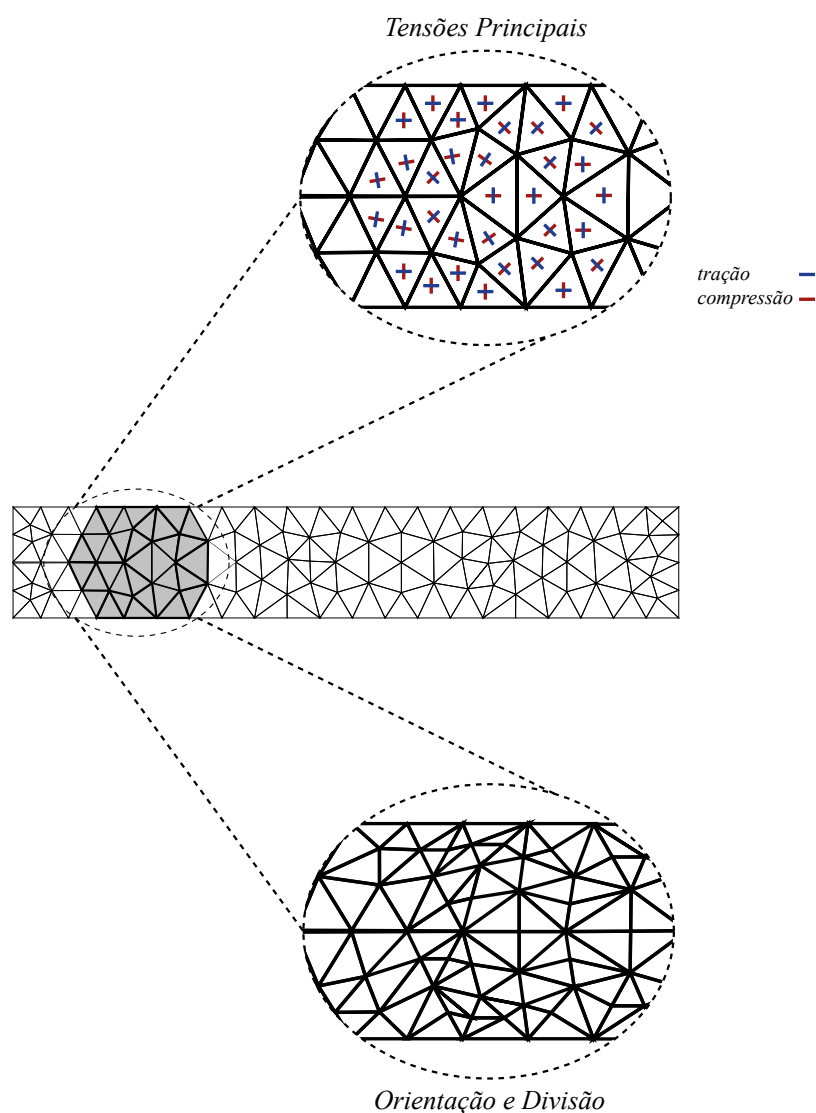


Figura 6.13: Aplicação isolada de orientação de elementos

Desde já refere-se, que devido ao resultado de propagação obtido para M0NE_O, esta aplicação não será analisada com detalhe. No entanto, apresenta-se o seu resultado como fator de comparação.

3. Aplicação conjunta das estratégias de refinamento disponíveis. Através destas, pretende-se melhorar os resultados obtidos no ponto 1 aplicando a orientação de elementos após refinamento h . Assim, a Figura 6.14a representa a propagação de fenda tendo em consideração $p_h = 0.1$ enquanto a Figura 6.14b ilustra a propagação de fratura considerando $p_h = 0.025$.

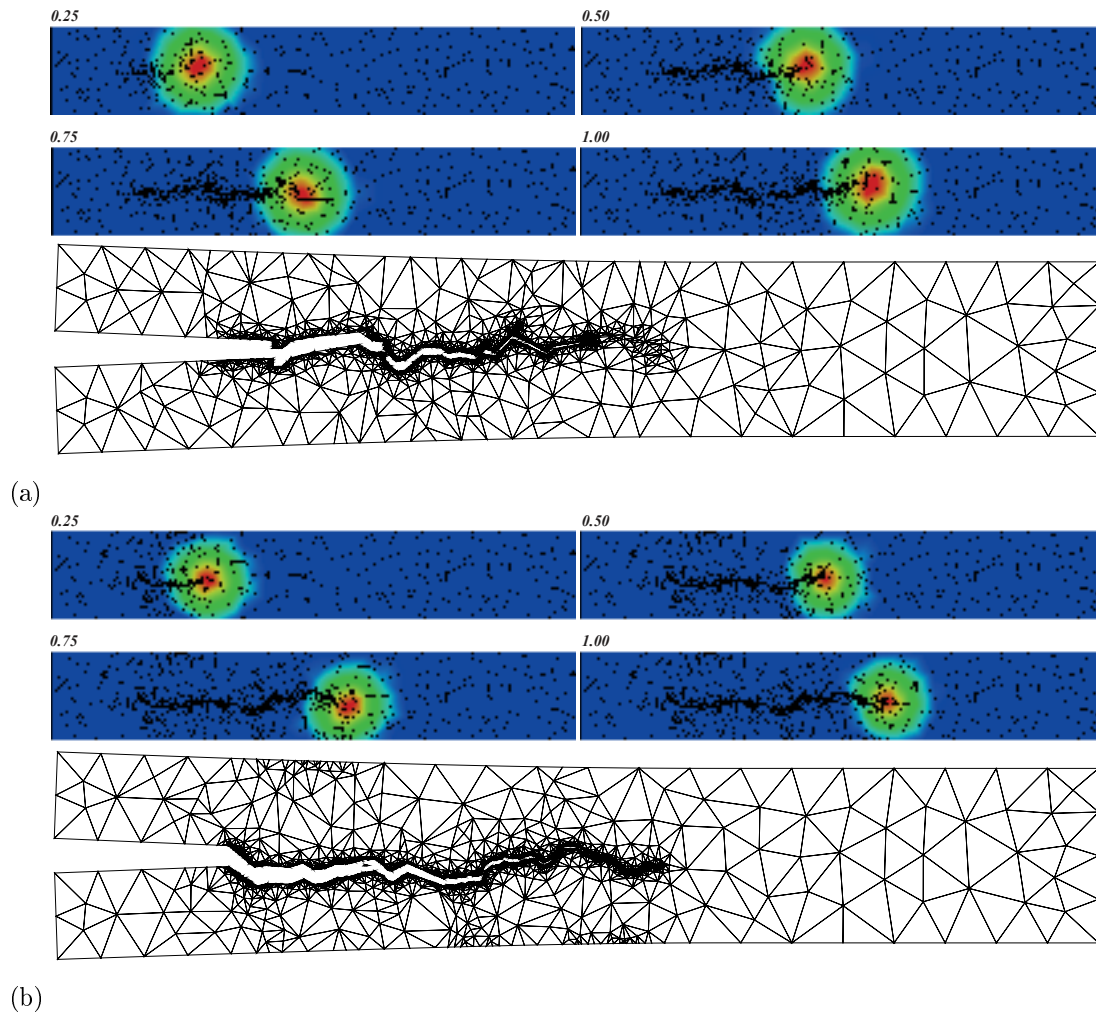


Figura 6.14: Propagação final de fratura considerando a aplicação conjunta de ambas as estratégias de refinamento na malha MONE: (a) $p_h = 0.1$; (b) $p_h = 0.025$

Considerando apenas os dois casos de estudo analisados com sucesso (ponto 1 e 3), constrói-se a Tabela 6.4. Nesta, representa-se o número médio de elementos constituintes e NGL associados, relativamente à malha MONE adaptada. Aqui constata-se que adaptação morfológica da malha, não penaliza em excesso o número de elementos constituintes, face às malhas originais para aquele nível de refinamento adotado (ver Tabela 6.2), verificando-se assim, um compromisso em termos de controlo de NGL.

Tabela 6.4: Análise da viga retangular fina: características da malha MONE tendo em conta diferentes estratégias de refinamento (valores médios tendo em conta o processo incremental)

Malha	Tipos de Elementos	p_h	Número de Elementos (médio)	NGL (médio)	
				Global	Local
MONE_R	linear	0.1	340	2030	1825
		0.025	678	4057	3703
MONE_RO		0.1	1524	9134	8699
		0.025	2885	17301	16549

6.2.3 Comparação de Resultados

Considerando as propagações finais de fratura ilustradas anteriormente, resumiram-se aqui algumas conclusões relevantes. A primeira observação a ser feita, revela-se bastante animadora. À exceção da aplicação isolada da estratégia de orientação de elementos, o aumento local do nível de refinamento, por si só, traduz a possibilidade de análise da malha MONE, onde esta acabava por fraturar totalmente mesmo antes de atingir o número de incrementos total definido. De facto, a aplicação isolada da estratégia de refinamento h revela em ambos os casos ($p_h = 0.1$ e $p_h = 0.025$), uma tendência de propagação de fratura perpendicular à direção dos deslocamentos impostos. Ainda assim, constata-se alguma irregularidade de propagação. Esta é observada pelas oscilações sentidas nas curvas de balanço de energia, conforme se ilustra na Figura 6.15, onde a necessidade de gasto energético em transpor elementos mal orientados é ainda notório. Observa-se ainda a menor dissipação de energia numa fase inicial considerando $p_h = 0.1$ (ver Figura 6.15a), quando comparado com a malha MONE original (ver Figura 6.9a)

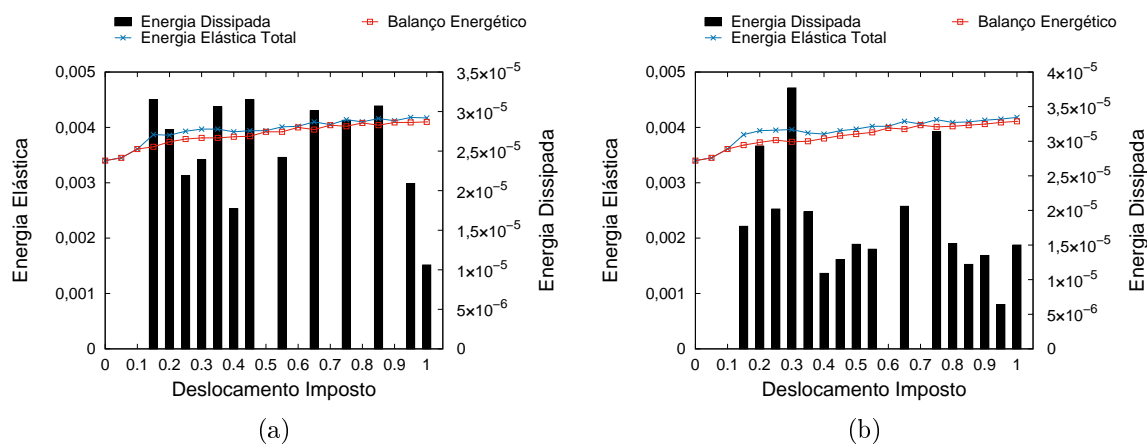


Figura 6.15: Curvas de balanço energético: (a) MONE_R0.1; (b) MONE_R0.025

A aplicação isolada da estratégia de orientação de elementos revela-se insuficiente. Apesar da definição de um caminho perpendicular de fratura proveniente da aplicação da estratégia, a malha acaba por fraturar. Uma possível justificação para a ocorrência deste fenómeno deve-se em certa medida à dimensão ainda considerável dos elementos, motivo pelo qual, a fenda não tende a propagar como seria expectável. No entanto, caso se considere a aplicação conjunta de ambas as estratégias, o resultado final de propagação tende a melhorar satisfatoriamente. Em ambos os casos, verifica-se que a propagação da fenda tende a seguir uma trajetória maioritariamente linear, ocorrendo um melhoramento assinalável na trajetória de propagação devido à adição da estratégia de orientação de elementos.

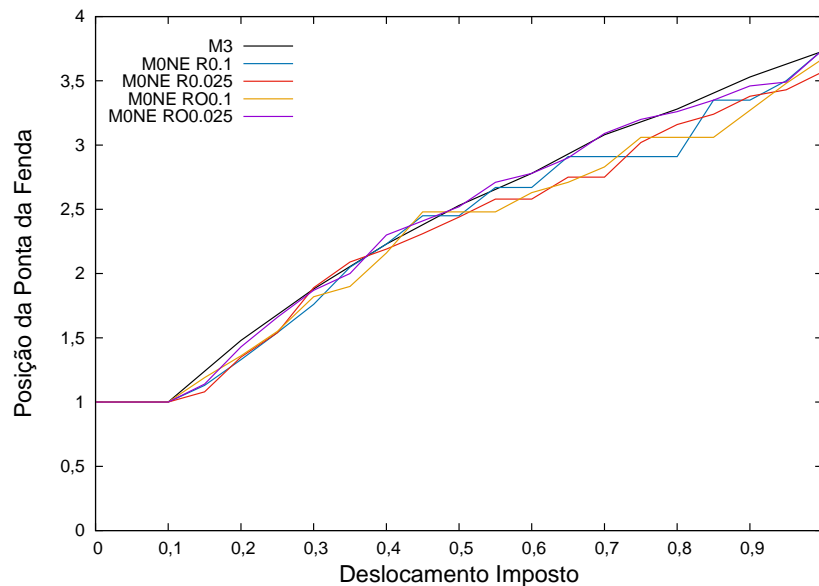


Figura 6.16: Propagação de fenda ao longo da malha MONE considerando aplicação isolada e conjunta referente às estratégias de refinamento

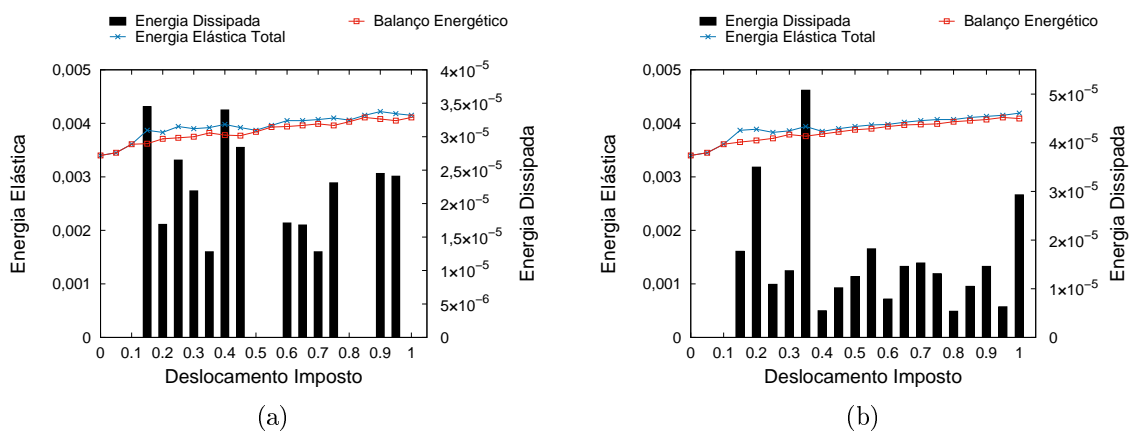


Figura 6.17: Balanço energético: (a) MONE_RO0.1; (b) MONE_RO0.025

Conforme expectável, as curvas de balanço de energia (ver Figura 6.17) tendem progressivamente a linearizar para níveis de refinamento mais elevados, devido à orientação corrigida de elementos. Ainda assim, a curva de refinamento conjunto considerando $p_h = 0.1$ ainda apresenta oscilações assinaláveis. Quando comparados os melhores resultados obtidos (aplicação conjunta das aplicações de refinamento para $p_h = 0.025$) com os das malhas M3, M3NE e [21] (ver Figura 6.18), constata-se que as curvas de propagação (ver Figura 6.18) tendem a apresentar, em regra, o mesmo comportamento, muito embora, exista um ligeiro aumento de oscilações ao longo do processo de fendilhação relativamente à curva de aplicação de conjunta M0NE_RO0.025.

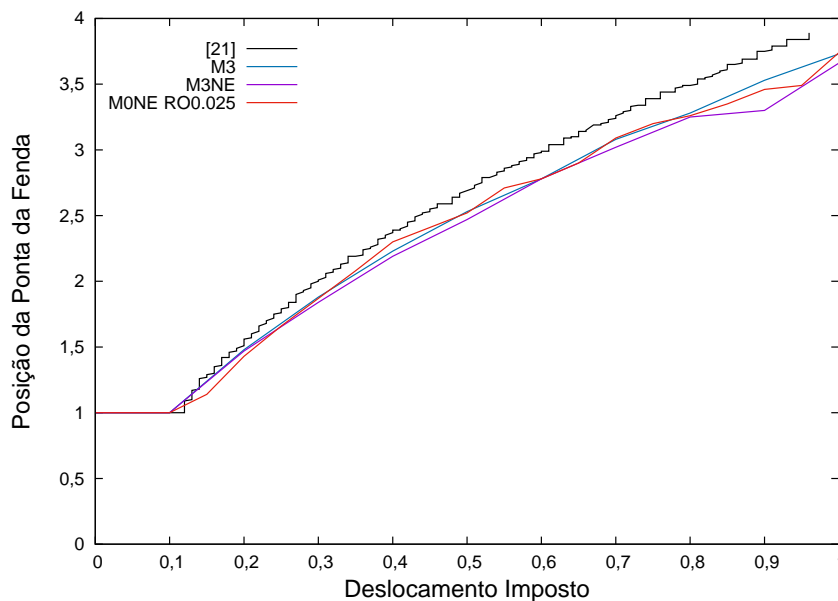


Figura 6.18: Comparação final de propagações

Por último, ilustra-se a curva Força-Deslocamento (ver Figura 6.19) final (relativa à malha M0NE_RO0.025). Através desta observa-se uma redução significativa face à força de pico obtida anteriormente (ver Figura 6.10) traduzindo-se agora num erro, relativamente à força de pico de referência (M3), de aproximadamente 38.80%. De facto, a diminuição assinalável do valor resulta da estratégia delineada para definição de elementos críticos iniciais (ver secção 5.4.2 equação (5.4)).

Em suma, constata-se que os resultados obtidos, podem ser justificados pelas etapas de refinamento adotadas. Nas aplicações analisadas verifica-se ao longo da propagação de fenda, uma perda de qualidade de orientação. De facto, o resíduo de adaptação de malha junto à fenda propagada revela-se um possível problema a resolver. A adaptação constante da malha penaliza em excesso a qualidade inicial da mesma. À medida que a fenda se propaga, as assimetrias vão sendo mais evidentes, provocando invariavelmente uma análise indesejada do problema.

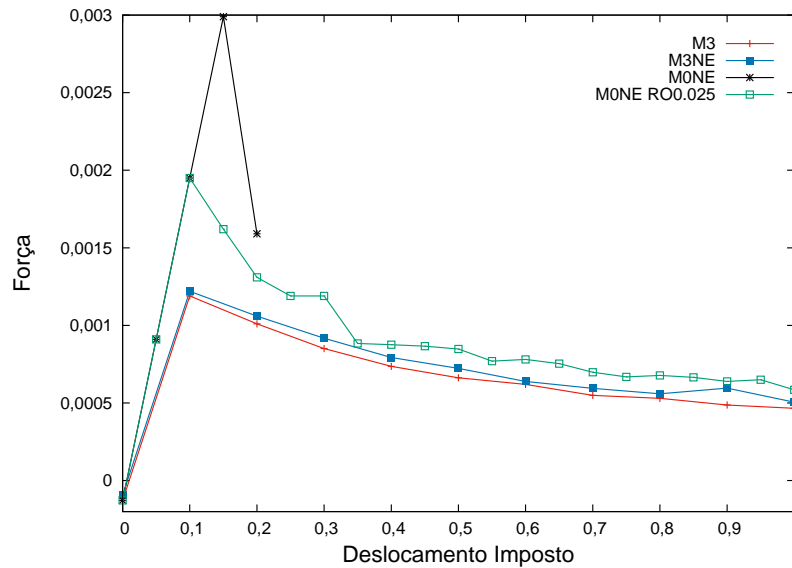


Figura 6.19: Comparação final de curvas Força-Deslocamento

6.3 Exemplo 2

Neste segundo exemplo considera-se uma chapa fina retangular de $L \times 2b$ (ver Figura 6.20). Esta é constituída por material elástico, com módulo de Young $E = 1.0$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0.2$. A energia crítica de propagação é $Gc = 0.01$. Apresenta a inclusão de um entalhe de $a = 1$, ilustrando a existência de uma fenda inicial paralela relativamente a face superior e inferior da chapa. A largura da chapa é $L = 3$ sendo metade da sua altura $b = 1$. Esta contém nos seus topos duas placas rígidas de altura $c = 0.5$, nas quais são impostos os deslocamentos u , cuja orientação é definida pelo ângulo α . Estas placas apresentam grande resistência ($Gc \rightarrow \infty$), inviabilizando o possível aparecimento de fendas junto às zonas de aplicação dos deslocamentos. O estudo efetuado centra-se na análise do problema: (1) sem aplicação de refinamento adaptativo; e (2) com aplicação de refinamento adaptativo:

1. modela-se a chapa retangular fina através de quatro malhas com níveis de refinamento distintos. Estas são malhas não estruturadas sem caminho de propagação pré-estabelecido. Sobre estas, impõem-se deslocamentos em diferentes ângulos α : (i) 90° ; (ii) 45° ; (iii) 7° ; e (iv) 0° , de modo a aferir o comportamento de propagação de fratura;
2. através da malha com o nível de refinamento inferior, analisa-se a eficiência da ferramenta desenvolvida, face aos resultados obtidos no ponto 1.

Note-se, que o fator de maior relevância neste estudo passa pela observação do caminho de propagação de fenda, tendo em conta a orientação dos deslocamentos impostos.

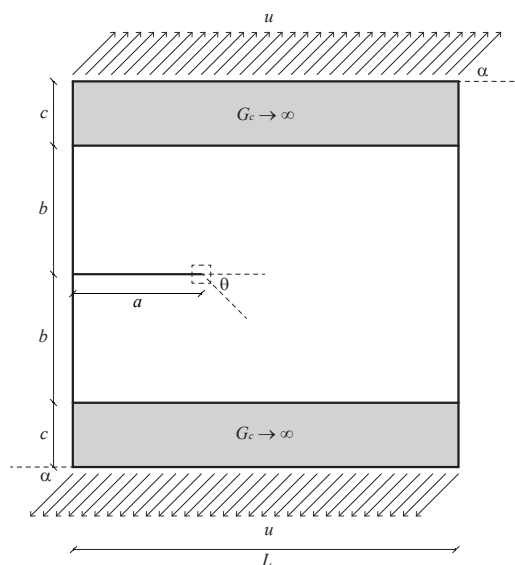


Figura 6.20: Geometria e condições de fronteira

Em ambos os casos de análise, os resultados obtidos são comparados com os existentes em [38]. A análise efetuada considera um passo de incremento de valor $u = 0.025$. Salienta-se que o valor estipulado não corresponde a nenhuma referência em [38], sendo este um passo de deslocamento sugerido. Note-se que o problema em análise mobiliza essencialmente o modo de fratura I, quando $\alpha = 90^\circ$, modo II, quando $\alpha = 0^\circ$, ou uma combinação de ambos, para ângulos α intermédios (ver Figura 2.2).

6.3.1 Análise de Propagação de Fratura sem Aplicação de Refinamento Adaptativo

A análise é realizada através de quatro malhas, constituídas por elementos triangulares de 3-nós: (i) M0NE; (ii) M1NE; (iii) M2NE; e (iv) M3NE. Estas malhas encontram-se representadas na Figura 6.21, estando as suas características (dimensões, número total de elementos e de graus de liberdade) sumarizadas na Tabela 6.5.

Tabela 6.5: Análise da chapa retangular fina: características das malhas

Malha	Tipos de Elementos	h	Número de Elementos	NGL	
				Global	Local
M0NE	linear	0.25	368	2060	2096
M1NE		0.1	2312	13500	13592
M2NE		0.05	9464	56026	56224
M3NE		0.025	37928	226054	226448

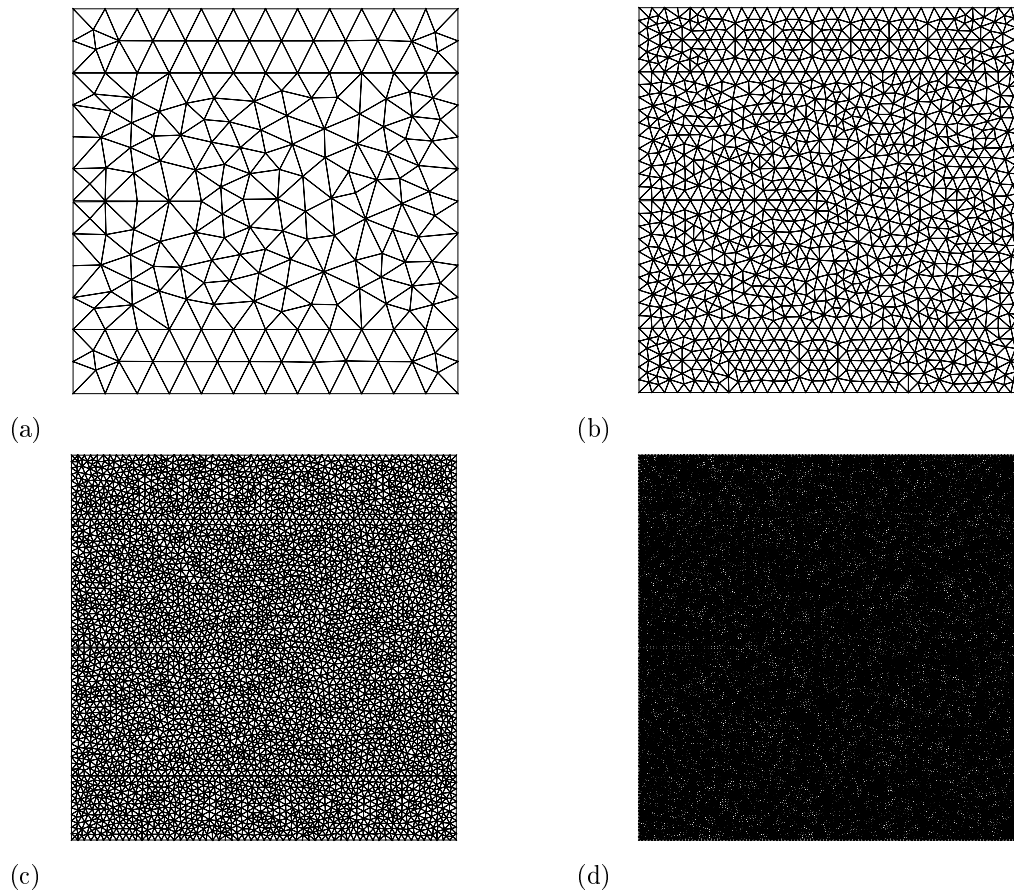


Figura 6.21: Discretização da chapa retangular fina: (a) M0NE; (b) M1NE; (c) M2NE; (d) M3NE

Finalmente, na Figura 6.22 ilustra-se a orientação final de fenda para as quatro malhas testadas, comparando os resultados obtidos com as zonas existentes em [38], analisando-se fundamentalmente o ângulo de propagação da fratura θ . Tendo em consideração as orientações obtidas face à aplicação de diferentes deslocamentos em diferentes ângulos, pode se concluir:

- para $\alpha = 90^\circ$, a fenda propaga-se a partir da fenda já existente ao longo do eixo horizontal (ver Figura 6.22a). Contudo, a trajetória de propagação da fenda resultante da análise M0NE tende afastar-se da zona expectável, observando-se uma clara dependência de malha;
- para $\alpha = 45^\circ$, a fenda propaga-se a partir da fenda já existente, conferindo um determinado intervalo $\theta \in [-15^\circ; -30^\circ]$. Note-se um ligeiro afastamento da zona definida em [38] (ver Figura 6.22b). Neste caso, os resultados de M0NE tendem a comportar-se de forma semelhante aos restantes. No entanto, constata-se que a orientação de elementos nesta malha é favorável a esta trajetória de propagação;

- para $\alpha = 7^\circ$, a fenda propaga-se a partir da fenda já existente, aumentando o valor de θ face ao ponto anterior. Aqui $\theta \in [-45^\circ; -60^\circ]$ (ver Figura 6.22c). Aqui, os resultados de M0NE tendem novamente a divergir;
- para $\alpha = 0^\circ$, a propagação de fenda apresenta uma orientação semelhante a $\theta = 7^\circ$ (ver Figura 6.22d). No entanto em [38] os autores definem duas regiões simétricas. No entanto, é dito que a região superior não ocorre em modelações clássicas de fenda, sendo assumido pelos mesmos autores uma abertura de cariz duvidosa (problemas de inter-penetração de elementos).

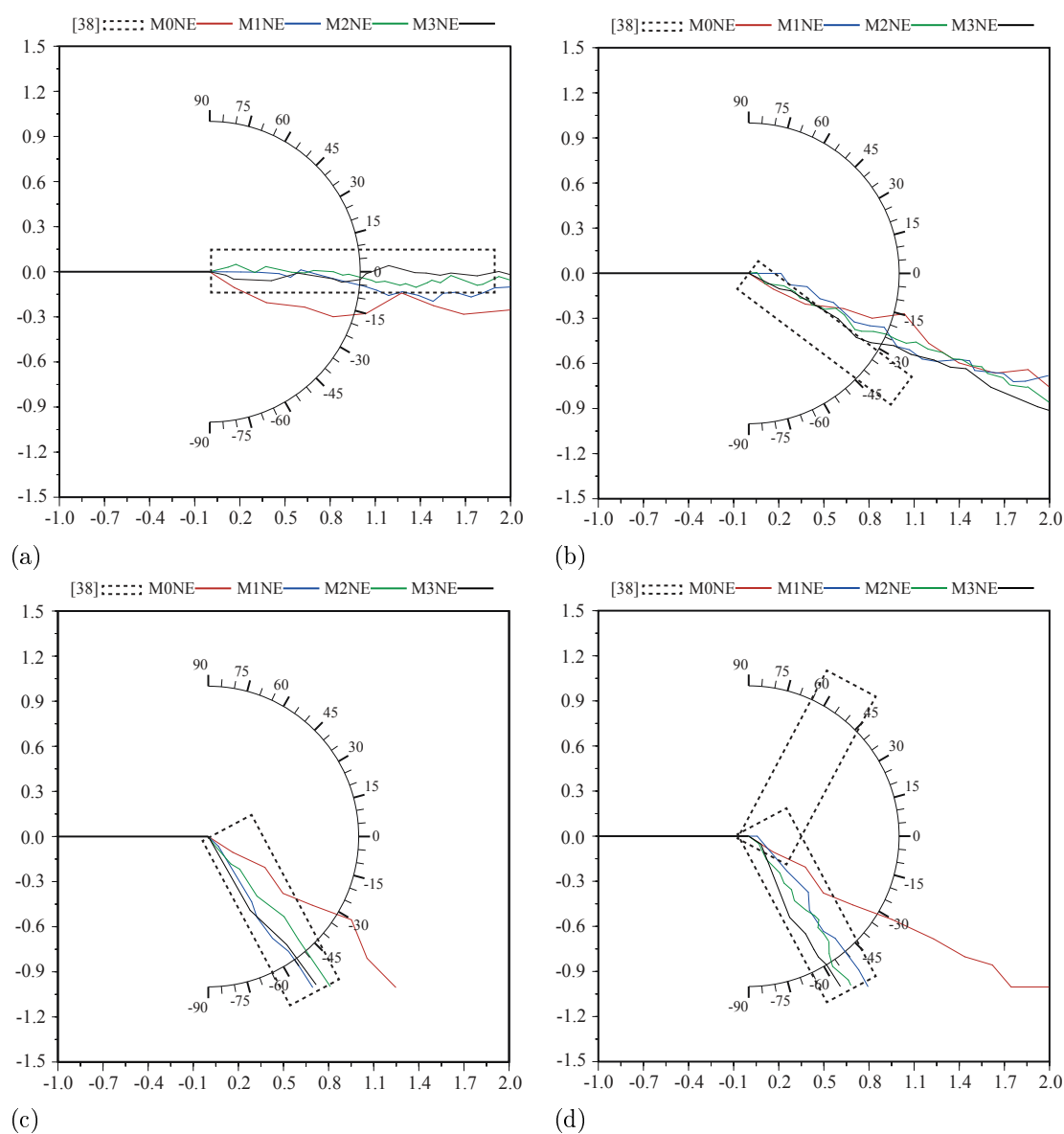
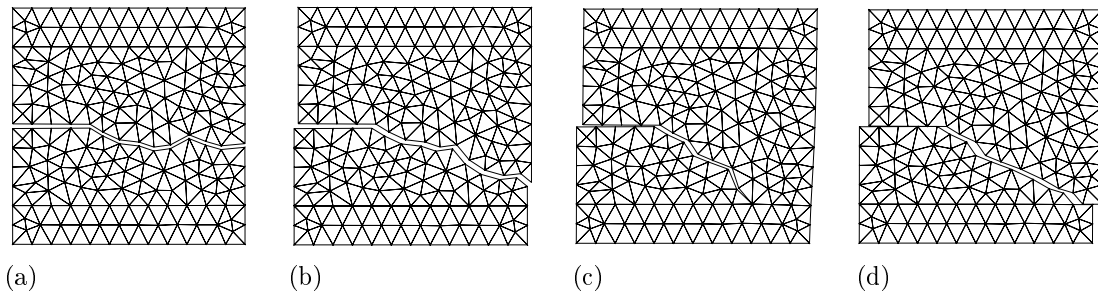


Figura 6.22: Orientação final de fratura tendo em consideração a aplicação de deslocamentos em diferentes ângulos α : (a) 90° ; (b) 45° ; (c) 7° ; (d) 0°

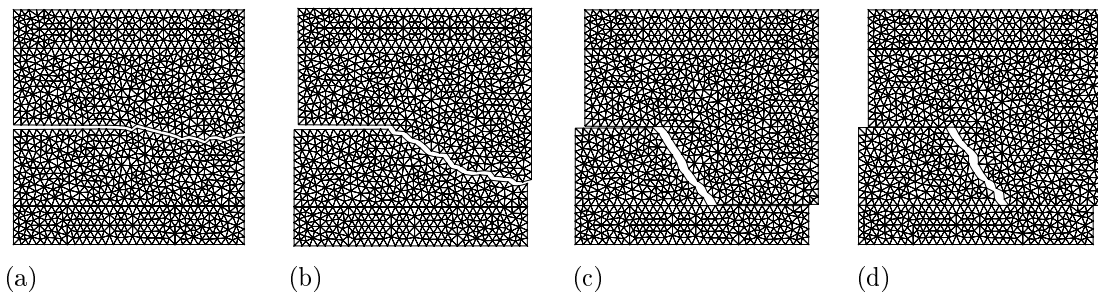
Salienta-se ainda, que a propagação da fenda ocorre de forma súbita, i.e, observa-se um comportamento muito frágil de propagação tendo em conta os diferentes ângulos de deslocamentos impostos.

Em todas as análises realizadas, constata-se que a diminuição do nível de refinamento (malha M0NE) pode comprometer consideravelmente a orientação de fenda desejada. No entanto, caso as orientações dos elementos sejam favoráveis face ao deslocamento imposto, a fenda pode não sofrer oscilações muito significativas, conforme se verifica na Figura 6.22b. Verifica-se ainda que caso o nível de refinamento não seja excessivamente grosseiro, os resultados tendem a convergir, mesmo com algumas oscilações, para a mesma gama de valores de θ .

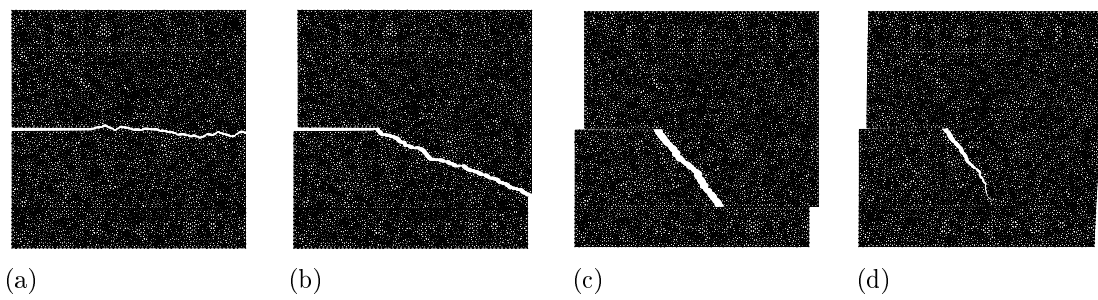
Tendo em consideração as orientações dos deslocamentos impostos e as características base do exemplo, ilustram-se na Figura 6.26 as propagações de fratura obtidas.



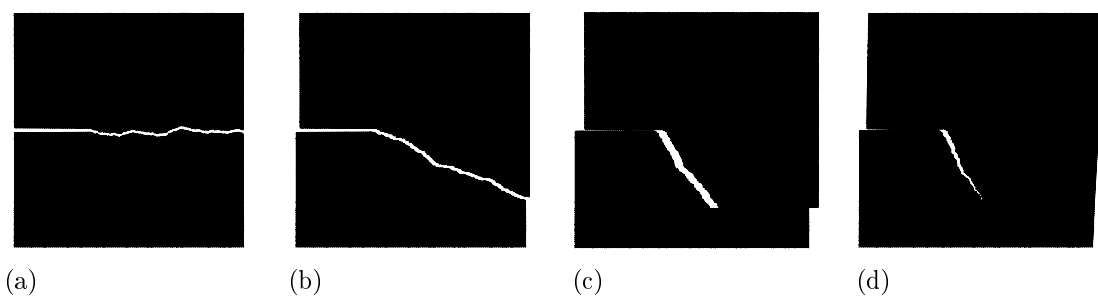
Malha M0NE



Malha M1NE



Malha M2NE



Malha M3NE

Figura 6.26: Fratura ocorrida tendo em conta α : (a) 90° ; (b) 45° ; (c) 7° ; (d) 0°

6.3.2 Formulação Numérica com Refinamento Adaptativo

Pretende-se demonstrar com este segundo exemplo a minimização de dependência de malha face à aplicação das estratégias de refinamento adaptativo. Para tal, considera-se a malha M0NE como malha a analisar. Nesta, aplica-se de forma conjunta as estratégias de refinamento, adotando-se um valor de $p_h = 0.025$, aproximando o nível de refinamento local da malha M0NE ao refinamento definido na malha M3NE. Justifica-se a escolha de aplicação conjunta das estratégias de refinamento, com base nos resultados obtidos no primeiro exemplo analisado.

Todas as análises são executadas tendo em conta o mesmo parâmetro energético elementar, $p_e = 5 \times 10^{-5}$. A Figura 6.27 ilustra a orientação final de fenda considerando os diferentes ângulos de aplicação de deslocamentos. Note-se que os resultados ilustrados comparam as trajetórias de propagação aqui obtidas com as curvas provenientes da malha M0NE sem adaptação e zonas existentes em [38]. Tendo em consideração os resultados finais, pode se concluir:

- para $\alpha = 90^\circ$, a fenda M0NE RO apresenta um comportamento bastante mais horizontal face ao resultado inicialmente obtido na malha M0NE original, aproximando-se satisfatoriamente dos resultados de maior relevância (ver Figura 6.27a). No entanto, verifica-se uma perda de orientação em determinado momento de propagação;
- para $\alpha = 45^\circ$, a fenda M0NE RO ilustra um comportamento similar à curva M3NE, ocorrendo um melhoramento assinalável face à curva original M0NE (ver Figura 6.27b). Ainda assim, o caminho de propagação tende a divergir ligeiramente da zona definida em [38]. Em todo o caso, a fenda tende afastar-se no final do caminho de propagação;
- para $\alpha = 7^\circ$, a fenda M0NE RO enquadra-se na zona definida em [38], ilustrando um comportamento aproximado ao da curva M3NE (ver Figura 6.27c). O resultado obtido é elucidativo da melhoria ocorrida em termos de comportamento de propagação face à curva original M0NE. Observa-se no entanto, um comportamento divergente em certo momento de propagação;
- para $\alpha = 0^\circ$, a fenda M0NE RO apresenta um comportamento bastante aproximado da curva M3NE (ver Figura 6.27d) enquadrando-se dentro da zona definida em [38]. Verifica-se, novamente um comportamento divergente ao longo do caminho de propagação.

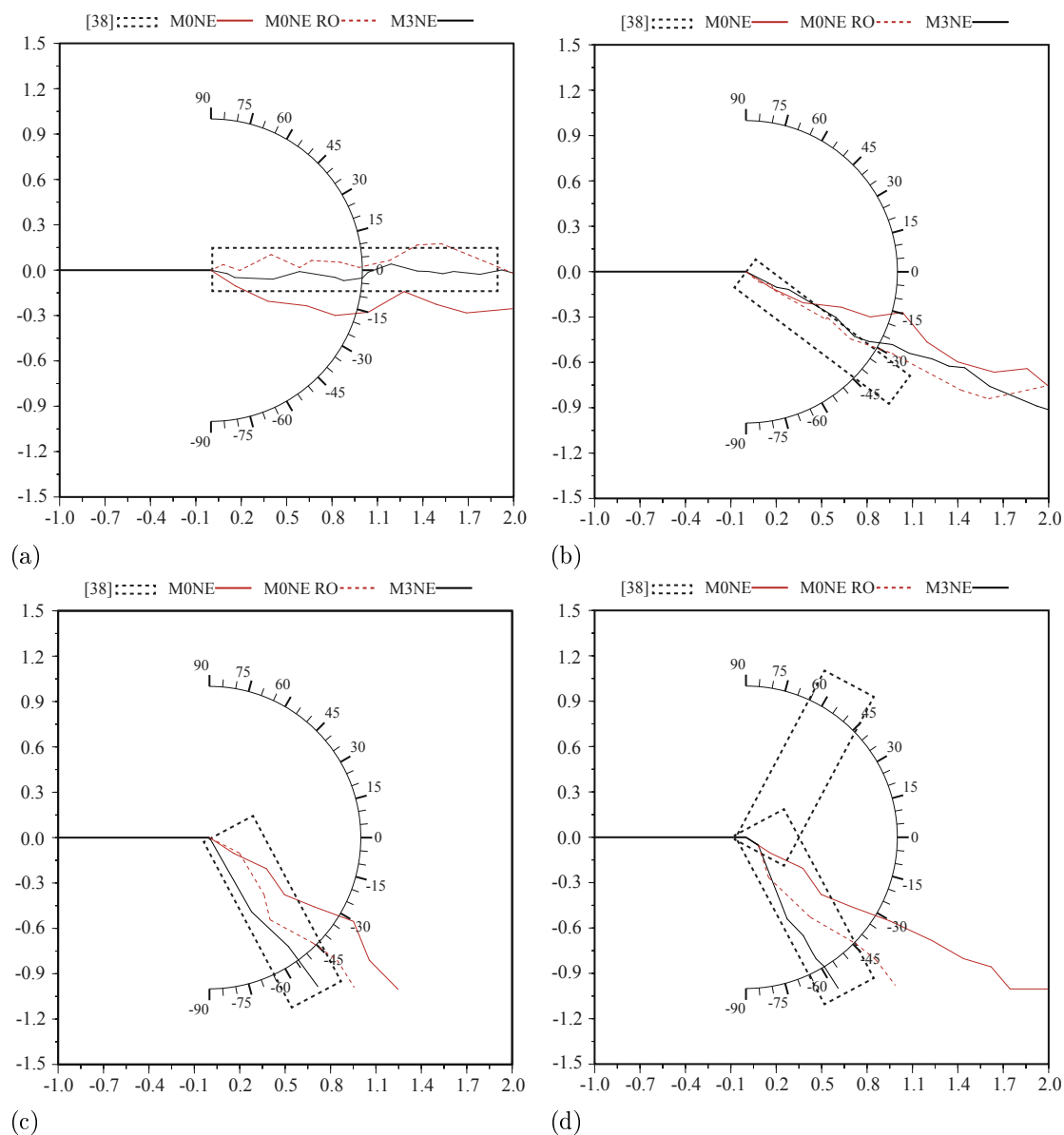


Figura 6.27: Orientação final de fratura tendo em consideração a aplicação de deslocamentos em diferentes ângulos α : (a) 90° ; (b) 45° ; (c) 7° ; (d) 0°

Em todos os casos ilustrados, observa-se uma melhoria significativa relativamente aos resultados obtidos através da aplicação da formulação numérica sem refinamento adaptativo considerando a curva associada à malha M0NE original. No entanto, as curvas M0NE RO, em todos os ângulos analisados, apresentam uma discrepância ao longo do caminho de propagação relativamente às curvas de referência. Conforme referido anteriormente, a propagação de fenda ocorre de forma súbita, levando à fratura completa do modelo. Esta discrepância, pode ser justificada em parte pela dificuldade de definição de zonas críticas locais que consigam abranger todo o caminho de propagação de fenda

em determinado incremento de deslocamento. Note-se no entanto, que a identificação da zona de fratura nunca é posta em causa. A Figura 6.28a ilustra a última *zona crítica* definida considerando $\alpha = 90^\circ$. Na Figura 6.28b observa-se a propagação final de fenda ocorrida após a etapa conjunta de refinamento.

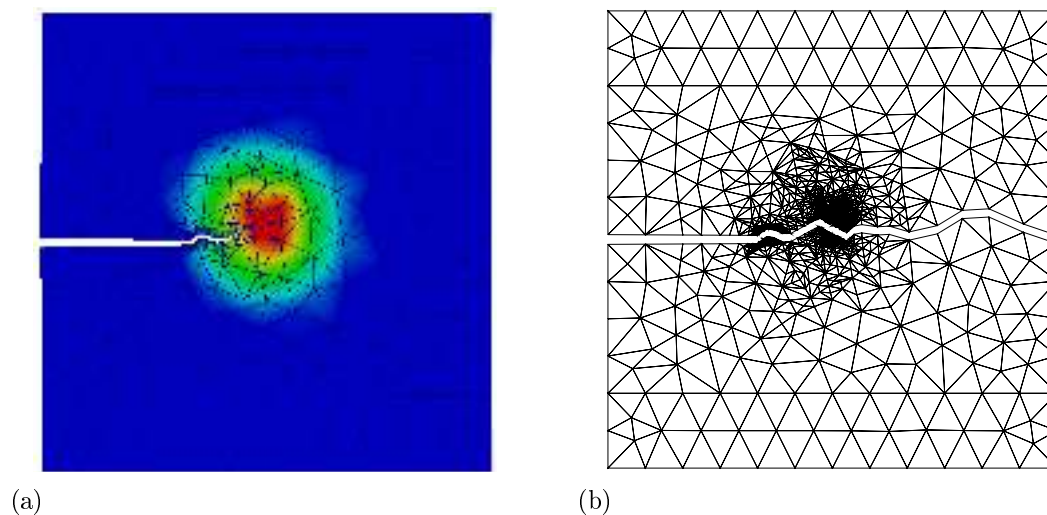


Figura 6.28: Propagação além da *zona crítica* definida: (a) *zona crítica*; (b) refinamento e propagação de fenda considerando a *zona crítica* definida

Através da análise destas duas figuras, constata-se que a propagação de fenda ocorre para além da zona definida, impossibilitando o controlo total sobre a mesma. Sempre que ocorre uma propagação que leve à fratura total do modelo, o estudo do problema através de zona locais pode ficar comprometido. Caso tal fenómeno ocorra, a fenda propagar-se-á de acordo com o nível de refinamento original da malha, aumentando consideravelmente a sua dependência de propagação.

Uma possível solução seria aumentar o valor do parâmetro p_e de modo a expandir a zona local a analisar, na tentativa de abranger a zona de propagação previsível. No entanto, esta expansão considerável de zona local deixaria de fazer sentido em situações onde o aumento significaria uma análise total do domínio do modelo. Tendo em consideração as orientações dos deslocamentos impostos e as características base do exemplo, ilustram-se na Figura 6.29 as propagações finais obtidas.

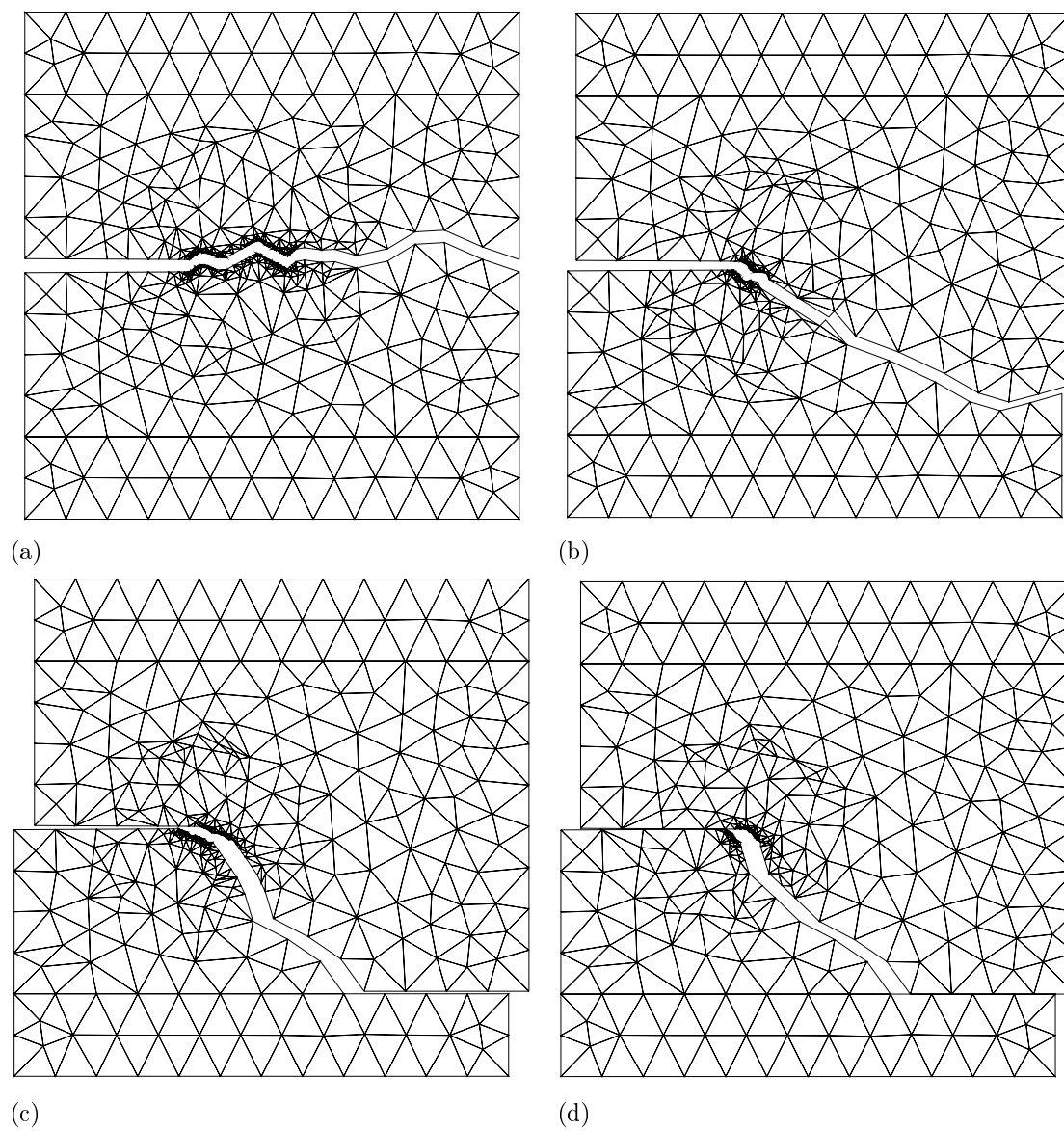


Figura 6.29: Propagação de fenda através da aplicação conjunta das estratégias de refinamento sobre a malha M0NE, considerando α : (a) 90° ; (b) 45° ; (c) 7° ; (d) 0°

6.4 Exemplo 3

Neste terceiro e último exemplo considera-se uma chapa fina quadrada representada na Figura 6.30a. Esta é constituída por material elástico, com módulo de Young $E = 1.0$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0.2$. A energia crítica de propagação é $Gc = 0.0001$. Ao contrário do exemplo 2, a chapa apresenta a inclusão de entalhes em ambas as faces laterais, ilustrando a existência de duas fendas iniciais. Esta chapa encontra-se submetida a deslocamentos horizontais opostos $u = 0.1$ nos topos. As dimensões da chapa são $L = 3$ e $a = 1$. Tal como no exemplo anterior, aqui utilizam-se igualmente duas placas rígidas de altura $b = 0.5$ na base e no topo da chapa. Estas apresentam um $Gc \rightarrow \infty$, inviabilizando o possível aparecimento de fendas junto às zonas de aplicação de deslocamentos.

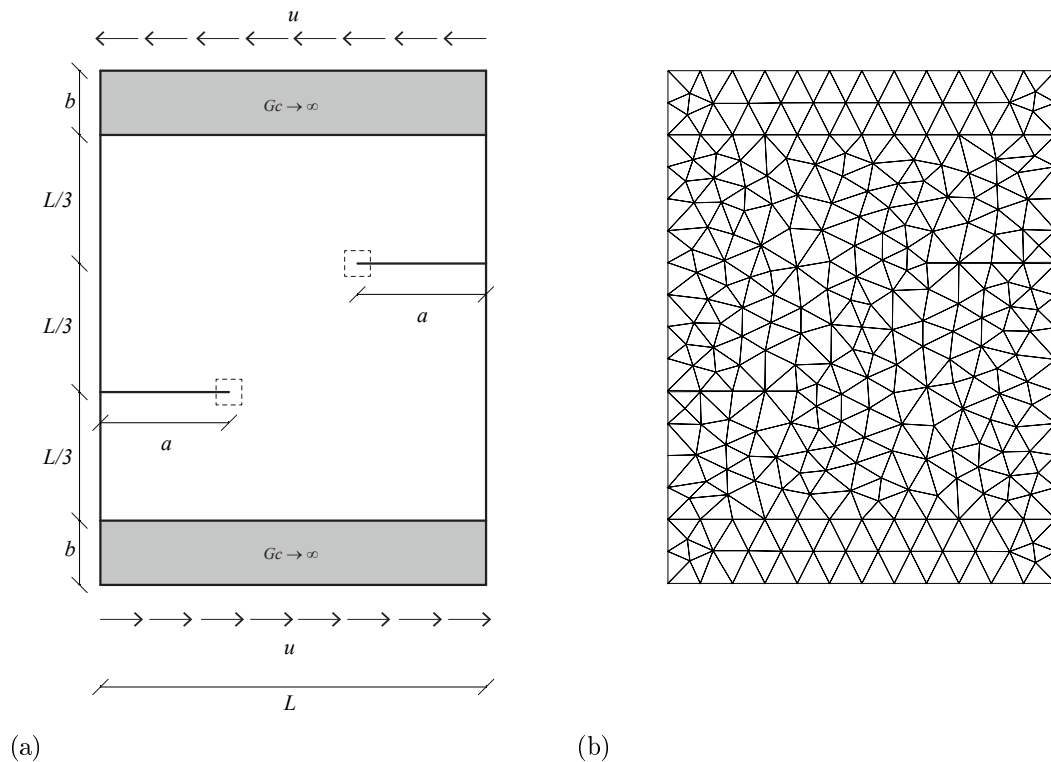


Figura 6.30: Chapa fina quadrada: (a) geometria e condições de fronteira; (b) discretização do problema

Tabela 6.6: Análise da chapa quadrada fina: característica da malha

Malha	Tipos de Elementos	h	Número de Elementos	NGL	
				Global	Local
M0NE	linear	0.25	496	2828	2832

6.4.1 Importância da Análise Efetuada

Realizando um paralelismo entre este exemplo com os anteriormente apresentados, verifica-se uma diferença em termos de análise do problema. Este não apresenta unicamente uma zona elucidativa (dois entalhes) de propagação de fenda.

De facto, os dois exemplos anteriormente analisados, centram o estudo numa determinada zona local definida. As fendas introduzidas em cada modelo, evidenciam um único local de possível propagação de fratura. No entanto, nenhum deles ilustra a capacidade da formulação em identificar zonas distintas de análise, sendo esta preconizada, ou não, por um determinado entalhe. Note-se, que a principal vantagem da análise de refinamento local adaptativo, deve-se em grande medida à capacidade de identificar zonas distintas de propagação de fratura. Assim, através da análise do presente problema, pretende-se demonstrar a capacidade de identificação e de refinamento em zonas diferentes de análise, observando-se à partida a definição de *zonas críticas* distintas.

6.4.2 Análise do Problema

Tendo em conta o objetivo de análise identificado, modela-se a chapa ilustrada na Figura 6.30a através da malha MONE (ver Figura 6.30b e Tabela 6.6). Para tal, recorre-se à aplicação direta e conjunta das estratégias de refinamento implementadas, definindo-se $p_h = 0.1$. Note-se que o nível de refinamento não apresenta nenhuma restrição de análise, sendo este considerado suficiente para o caso.

Uma vez mais, justifica-se a utilização conjunta das estratégias de refinamento pelos resultados anteriormente obtidos em ambos os exemplos analisados. Esta é executada tendo em conta, $p_e = 5 \times 10^{-5}$, sendo este um valor estimado que salvguarde a zona de propagação de fenda entre futuras *zonas críticas*.

Tendo em conta o sentido e direção dos deslocamentos horizontais impostos, é expectável que as fendas existentes no modelo tendam a convergir. No entanto, e tendo em conta a imposição de deslocamentos, a fenda deverá verificar um comportamento bastante frágil, tal como se observou no exemplo anterior.

6.4.3 Propagação de Fenda

Após aplicação das estratégias conjuntas de refinamento adaptativo, ilustram-se aqui os resultados obtidos. Assim sendo, verifica-se:

1. Numa primeira fase, identifica-se claramente, duas *zonas críticas* bem definidas (ver Figura 6.31). Os elementos de cor vermelha apresentam-se como elementos críticos inicialmente identificados, sendo a zona expandida até perfazer uma região suficientemente abrangente (tendo em consideração o parâmetro p_e definido). Note-se que as *zonas críticas* identificadas não se sobrepõem, evidenciando análises independentes do problema;

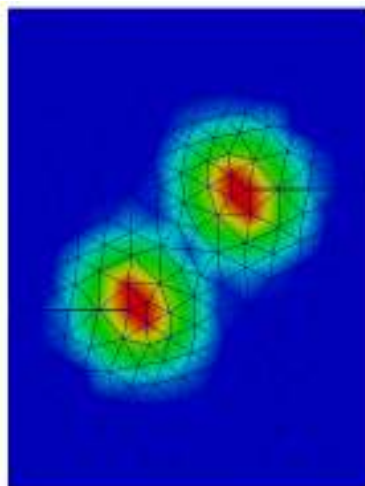


Figura 6.31: Definição de duas *zonas críticas* distintas

2. Após a definição das zonas, ocorre o refinamento conjunto (ver Figura 6.32). Constata-se uma tendência de unificar ambas as zonas, de modo a compreender um determinado caminho entre regiões. Este efeito de convergência, é evidenciado pela introdução da estratégia de orientação de elementos após etapa de refinamento h ;

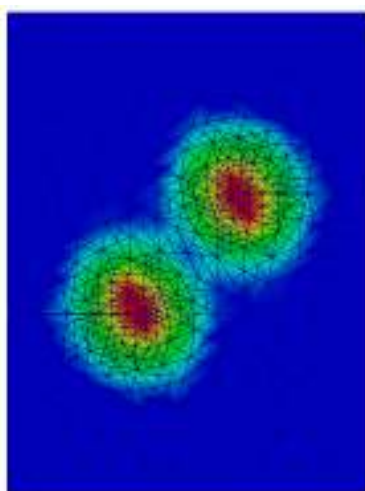


Figura 6.32: Aplicação conjunta das estratégias de refinamento

3. Por último, ocorre a propagação de fenda (ver Figura 6.33)). Tal como expectável, a fenda propaga-se entre entalhes existentes, verificando-se assim uma convergência total. Note-se que a propagação ocorrida é totalmente abrangida pelas *zonas críticas* identificadas junto às fendas iniciais. Refere-se ainda o facto da propagação ocorrer de forma muito frágil.

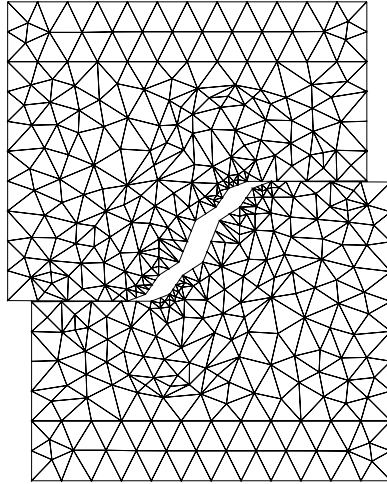


Figura 6.33: Propagação de fenda entre entalhes existentes

Em suma, evidencia-se através de um exemplo simples de análise, a capacidade da formulação em identificar claramente zonas distintas de análise. Através desta observação, é possível afirmar que independentemente do número de regiões propícias à propagação de fenda, estas são sempre identificadas, possibilitado aferir com maior rigor a ocorrência de fraturação ao longo do modelo em estudo.

Capítulo 7

Conclusões e Desenvolvimentos Futuros

7.1 Conclusões

Neste trabalho desenvolveu-se, implementou-se e validou-se uma técnica de refinamento adaptativo de malha aplicada a um modelo variacional de fratura, capaz de caracterizar eficazmente o comportamento de propagação de fratura em condições de elasticidade linear.

Em particular, considerou-se como princípio variacional base a interpretação do problema de propagação de fenda como um problema de minimização energético global do sistema mecânico. Para a sua resolução recorreu-se ao ADMM como algoritmo de resolução do problema de minimização fundamental.

A validação global da formulação implementada dividiu-se em duas etapas distintas: (1) verificação do comportamento tendo em conta aplicação direta da formulação; e (2) desenvolvimento e validação do refinamento adaptativo proposto. Em particular, consideraram-se os seguintes efeitos gerais de análise: (i) imposição de deslocamentos nodais diversos; (ii) energias de propagação diferenciadas; e (iii) zonas locais de análise de fratura distintas, conferindo à formulação adaptabilidade a problemas de fratura generalizados.

A eficácia computacional da formulação variacional implementada resultou da adoção de hipóteses simplificativas permitindo: (i) reduzir o número de incrementos de deslocamentos necessários para atingir resultados precisos; (ii) análise local de propagação de fratura; e (iii) adaptação morfológica constante da malha ao longo do processo incremental definido.

Os exemplos de aplicação apresentados no Capítulo 6, mostraram que a aplicação direta da formulação sem refinamento adaptativo tendo em conta níveis de refinamento elevados, conduz a resultados semelhantes com os existentes em bibliografia. É ainda possível observar que para refinamentos reduzidos ocorre uma ligeira divergência e que a introdução isolada ou conjunta das etapas de refinamento adaptativo resultam em hipóteses de análise distintas, destacando-se, a estratégia conjunta como solução mais equilibrada. No entanto e, considerando a utilização de elementos lineares, os resultados obtidos sobre-estimaram o inicialmente expectável. Salienta-se ainda, a dificuldade existente em conseguir definir *zonas críticas* abrangentes de fratura, sendo esta responsável pelo processo de adaptação de malha constante.

Em particular, os exemplos apresentados permitiram extrair as seguintes conclusões:

- O primeiro exemplo abordou análise global de um problema típico de fratura, através da imposição pontual de deslocamentos numa viga retangular fina com inclusão de um entalhe de tamanho unitário. Mostrou-se que para malhas estruturadas, simétricas e com caminho de propagação pré-estabelecido, os resultados tenderiam a convergir para a curva de comparação aplicando diretamente a formulação numérica sem refinamento adaptativo, destacando-se aqui o número reduzido de incrementos necessários para obtenção de resultados convergentes. De modo a verificar a dependência de malha, analisaram-se três malhas não estruturadas, sem caminho de propagação pré-estabelecido. Através destas, conclui-se que para níveis de refinamento reduzidos e/ou elementos mal orientados com dimensão elevada, a propagação de fratura estaria condicionada, de tal modo, que impossibilitaria a análise do problema. Em contrapartida, a consideração de refinamentos mais elevados tenderia por si só a aproximar as curvas de propagação. Deste modo, pretendeu-se analisar a malha com refinamento mais grosseiro aplicando as estratégias de refinamento adaptativo. Aqui, conclui-se que dependendo do tipo de aplicação (isolada ou conjunta) os resultados tenderiam a divergir ou a convergir, constatando-se que a aplicação conjunta das estratégias desenvolvidas (refinamento h e orientação de elementos) mostrava-se como melhor solução de aproximação. Para além desta constatação, a observação de maior relevância traduziu-se na possibilidade de analisar e obter resultados através de uma malha que à partida mostrava-se incompatível com o problema. No entanto, verificou-se também que a adaptação morfológica constante da malha tenderia progressivamente a deteriorar a qualidade da propagação de fenda ao longo da viga.
- No segundo exemplo estudou-se a precisão da formulação em responder a deslocamentos impostos em ângulos diversos, aplicados a duas placas rígidas colocadas nas extremidades de uma chapa retangular fina com inclusão de um

entalhe de tamanho unitário. Verificou-se que a aplicação direta da formulação sem refinamento adaptativo resultou numa aproximação bastante satisfatória face aos resultados existentes em bibliografia. Ainda assim, os resultados que traduziram melhor aproximação corresponderam às malhas com refinamentos mais elevados. Deste modo, pretendeu-se aplicar a estratégia conjunta de refinamento adaptativo de modo a melhorar os resultados referentes à malha com refinamento mais grosseiro. Ao contrário do primeiro problema, onde a fratura ocorria de forma gradual, aqui a propagação de fenda ocorria de forma bastante frágil. Apesar da aplicação conjunta das estratégias de refinamento, a dificuldade de definir uma *zona crítica*, devido às limitações anteriormente mencionadas, impossibilitaram que a fenda apenas se propagasse dentro da zona local definida. Ainda assim, os resultados obtidos traduziram-se, em regra, a propagações bastante mais aproximadas das curvas de maior relevância.

- O terceiro e último exemplo foi apresentado como sugestão de estudo. Este serviu para validar a capacidade da formulação em identificar zonas distintas propícias de fratura. De facto, o exemplo ilustrado possibilitou verificar a identificação de duas zonas de análise, refinando-as isoladamente através da aplicação conjunta das estratégias de refinamento. Assim, validou-se a sua aplicabilidade em exemplos com fraturas iniciais diversas.

Salienta-se ainda, que a estratégia idealizada de orientação não se apresenta como melhor solução, i.e, a orientação tal como está idealizada, através de divisões de elementos, perfaz um aumento significativo de elementos com AR mal condicionado, provocando uma maior assimetria da malha ao longo do processo incremental. A orientação deve ser realizada sim, visto melhorar significativamente a propagação, mas não, de modo a aumentar o número de NGL ao longo dos incrementos. Deste modo, o processo deverá corresponder a um refinamento e reorientação de elementos através de um processo de realocação de fronteiras inter-elementares. Observa-se ainda, que à exceção do modo de 3 divisões, os restantes modos tendem a fragilizar bastante a tentativa de manter uma simetria considerável da malha ao longo do processo incremental.

7.2 Desenvolvimentos Futuros

O trabalho realizado constitui apenas um passo no sentido do desenvolvimento e implementação de um modelo variacional de fratura para efetuar análises elásticas lineares de propagação de fendas. Em suma, os principais desenvolvimentos futuros são apresentados de seguida.

Em primeiro lugar, a ferramenta desenvolvida, deverá ser melhorada de modo a facilitar os processos de introdução de dados e tratamento de resultados, e.g. através do desenvolvimento de um interface gráfico. A arquitetura do programa deverá também ser revista, com o objetivo de permitir a implementação futura de novas funcionalidades. Em particular, sugerem-se as seguintes atualizações tendo em conta o estado atual:

1. Implementação de topologias diversas de elementos finitos além do elemento finito tradicional de 3-nós, e.g. elemento finito tradicional de 6-nós;
2. Desenvolvimento de novos modos de divisão hierárquica, possibilitando uma maior diversidade de situações de análise;
3. Melhoramento da zona de refinamento junto à fenda.

Relativamente ao desenvolvimento de novas capacidades de análise de propagação de fratura, sugere-se:

1. A remodelação das estratégias de refinamento adaptativo desenvolvidas, através da utilização de conceitos simples e diretos de análise, definindo a seguinte a ordem de trabalhos:
 - (a) Em primeiro lugar, a *zona crítica* local é definida através da obtenção dos deslocamentos provenientes do cálculo da equação fundamental do MEF. O processo iterativo ADMM na fase de propagação elástica deixa de ser efetuado, passando o cálculo do multiplicador Lagrangeano a ser estimado com base nas forças de ligação entre fronteiras inter-elementares. A partir do conhecimento dos deslocamentos e do multiplicador Lagrangeano define-se a zona local de análise.
 - (b) Em segundo lugar, as restantes zonas constituintes do modelo deixam de conter descontinuidades, i.e, ocorre a exclusão de fronteiras inter-elementares deixando se ser possível a propagação fora da *zona crítica*. Esta exclusão de zonas traduz-se numa análise puramente elástica conforme o MEF, permitindo reduzir substancialmente o número de graus de liberdade em análise, prevendo-se portanto uma melhoria significativa do desempenho da formulação.
 - (c) Sobre a *zona crítica* definida, aplica-se o gerador de malhas triangulares *Delaunay* definindo de forma direta o nível de refinamento desejado. Desta forma deixa de ser aplicado o processo recursivo de divisões atual.

-
- (d) Posteriormente, ocorre a orientação de elementos tendo em conta o pressuposto de realocação de fronteiras inter-elementares, deixando de ser necessária a divisão sistemática de elementos.
 - (e) Por último, após a propagação de fenda, aplica-se o refinamento inverso conforme se encontra implementado.
2. Utilização de elementos tipo XFEM na atual formulação. Esta abordagem modeliza as fendas enriquecendo alguns nós da malha de elementos finitos tradicionais com funções descontínuas. É uma ferramenta poderosa na descrição do fenómeno da fratura permitindo poupar esforços computacionais, já que a simulação das fendas é independente da malha, evitando o refinamento sucessivo durante a sua propagação.

Bibliografia

- [1] B. Bourdin, G. A. Francfort e J.-J. Marigo, «The variational approach to fracture», *Journal of Elasticity*, vol. 91, n° 1-3, pp. 5–148, 2008.
- [2] A. A. Griffith, «The phenomena of rupture and flow in solids», *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 221, n° 582-593, pp. 163–198, 1921.
- [3] S. Boyd, N. Parikh, E. Chu, B. Peleato e J. Eckstein, «Distributed optimization and statistical learning via the alternating direction method of multipliers», *Foundations and Trends in Machine Learning*, vol. 3, n° 1, pp. 1–122, 2010.
- [4] E. E. Gdoutos, *Fracture Mechanics - An Introduction*, 2^a. Waterloo: Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2005.
- [5] M. F. Kanninen e C. H. Popelar, *Advanced Fracture Mechanics*, 1^a. Oxford University Press, 1985, vol. 108.
- [6] D. Broek, *Elementary Engineering Fracture Mechanics*, 1^a. New York: Dordrecht: Springer, 1986.
- [7] G. R. Irwin, «Fracture dynamics», *The American Society of Mechanical Engineers*, pp. 147–166, 1948.
- [8] E. Orowan, «Fracture and strength of solids», vol. 12, n° 1, p. 309, 1949.
- [9] R. C. Hibbeler, *Mechanics of Materials*, 5^a. New Jersey: Prentice Hall, 2002.
- [10] C. E. Inglis, «Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp corners», *Transactions of Institute of Naval Architects*, vol. 55, pp. 219–241, 1913.
- [11] G. R. Irwin, «Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate», *The American Society of Mechanical Engineers*, vol. September, pp. 361–364, 1957.
- [12] H. M. Westergaard, «Bearing pressures and cracks», *Journal of Applied Mechanics*, vol. 61, A49–A53, 1939.

- [13] J. Weertman, «Fracture mechanics : a unified view for griffith-irwin-orowan cracks», *Acta Metallurgica*, vol. 26, pp. 1731–1738, 1978.
- [14] M. Janssen, J. Zuidema e R. Wanhill, *Fracture Mechanics*, 2^a. Oxfordshire: CRC Press, 2004.
- [15] W. Soboyejo, *Mechanical Properties of Engineered Materials*, 1^a. New York: Basel: Marcel Dekker, 2002.
- [16] G. D. Maso e R. Toader, «A model for the quasi-static growth of brittle fractures: existence and approximation results», *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, vol. 162, n^o 2, pp. 101–135, 2002.
- [17] A. Chambolle, «A density result in two-dimensional linearized elasticity, and applications», *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, vol. 167, n^o 3, pp. 211–233,
- [18] G. A. Francfort e C. J. Larsen, «Existence and convergence for quasi-static evolution in brittle fracture», *Communications on Pure and Applied Mathematics*, vol. 56, n^o 10, pp. 1465–1500, 2003.
- [19] E. D. Giorgi e L. Ambrosio, «Un nuovo funzionale del calcolo delle variazioni», *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.*, 199–210, 1988.
- [20] M. Vicente da Silva, «Optimization scheme for brittle fracture», *S.n.*, pp. 1–6, 2013.
- [21] A. Pandolfi e M. Ortiz, «An eigenerosion approach to brittle fracture», *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 92, n^o 8, pp. 694–714, 2012.
- [22] R. Glowinski e A. Marroco, «Sur l’approximation, par éléments finis d’ordre un, et la résolution, par pénalisation-dualité d’une classe de problèmes de dirichlet non linéaires», *ESAIM Math. Model. Numer. Anal. - Modélisation Mathématique Anal. Numérique*, vol. 9, n^o R2, pp. 41–76, 1975.
- [23] D. Gabay e B. Mercier, «A dual algorithm for the solution of nonlinear variational problems via finite element approximation», *Computers & Mathematics with Applications*, vol. 2, n^o 1, pp. 17–40, 1976.
- [24] D. Gabay, «Applications of the method of multipliers to variational inequalities», *Studies in Mathematics and Its Applications*, Elsevier, pp. 299–331, 1983.
- [25] J. Eckstein, *The Lions- Mercier splitting algorithm and the alternating direction method are instances of the proximal point algorithm*. 1988.
- [26] J. Eckstein e D. P. Bertsekas, «An alternating direction method for linear programming», *Tech. Rep. Ser. Massachusetts Inst. Technol. Lab. Inf. Decis. Syst.*, pp. 1–44, 1990.

- [27] P. Tseng, «Applications of a splitting algorithm to decomposition in convex programming and variational inequalities», *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 29, pp. 119–138, 1991.
- [28] Z. T. Qin e D. Goldfarb, «Structured sparsity via alternating directions methods», *Journal of Machine Learning Research*, vol. 13, pp. 1435–1468, 2012.
- [29] T. H. Pian, *A historical note about 'hybrid elements'*, 5. 1978, vol. 12, pp. 891–892.
- [30] T. H. Pian, «State-of-the-art development of hybrid / mixed finite element method», *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 21, n° 1-2, pp. 5–20, 1995.
- [31] M. Kuna, *Finite Elements in Fracture Mechanics: Theory — Numerics — Applications*. Berlin, Heidelberg: Springer, 2013, vol. 201.
- [32] O. C. Zienkiewicz e R. L. Taylor, *The Finite Element Method: The Basis*, 5^a. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000.
- [33] C. Geuzaine e J.-J. Remacle, «Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities», *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 79, n° 11, pp. 1309–1331, 2009.
- [34] J. Ahrens, B. Geveci e C. Law, «Paraview: an end user tool for large data visualization», em *The visualization handbook*, vol. 836, C. D. Hansen e C. R. Johnson., Eds. Oxford: Elsevier Butterworth-Heinemann, 2005, pp. 717–731.
- [35] A. Ralston e P. Rabinowitz, *A First Course in Numerical Analysis*, 2^a. Mineola, New York: Dover Publications, Inc., 2001.
- [36] P. R. Amestoy, I. S. Duff, J. Koster e J.-Y. L'Excellent, «A fully asynchronous multifrontal solver using distributed dynamic scheduling», *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, vol. 23, n° 1, pp. 15–41, 2001.
- [37] P. R. Amestoy, A. Guermouche, J.-Y. L'Excellent e S. Pralet, «Hybrid scheduling for the parallel solution of linear systems», *Parallel Computing*, vol. 32, n° 2, pp. 136–156, 2006.
- [38] B. Bourdin, G. A. Francfort e J.-J. Marigo, «Numerical experiments in revisited brittle fracture», *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 48, n° 4, pp. 797–826, 2000.
- [39] M. Angelillo, E. Babilio e A. Fortunato, «A computational approach to quasi-static propagation of brittle fracture», *Springer-Verlag*, vol. 23, pp. 277–288, 2005.
- [40] M. Fraternali F., E. Babilio e A. Fortunato, «Free discontinuity finite element models in two-dimensions for in-plane crack problems», *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, vol. 47, n° 3, pp. 274–282, 2007.

- [41] M. Negri, «The anisotropy introduced by the mesh in the finite element approximation of the mumford-shah functional», *Numerical Functional Analysis and Optimization*, vol. 10, pp. 957–982, 1999.
- [42] J. R. Shewchuk, «Triangle: engineering a 2d quality mesh generator and delaunay triangulator», *Applied Computational Geometry Towards Geometric Engineering*, vol. 1148, pp. 203–222, 1996.
- [43] J. R. Shewchuk, «Delaunay refinement algorithms for triangular mesh generation», *Computational Geometry: Theory and Applications*, vol. 22, n^o 1-3, pp. 21–74, 2002.
- [44] M. Farrashkhalvat e J. Miles, *Basic Structured Grid Generation with an introduction to unstructured grid generation*, 1^a. Oxford: Amsterdam: Butterworth-Heinemann, 2003.
- [45] O. Devillers, S. Pion e M. Teillaud, «Walking in a triangulation», em *Proceedings of the seventeenth annual symposium on Computational geometry - SCG '01*, vol. 13, 2001, pp. 106–114.
- [46] E. P. Mücke, I. Saias e B. Zhu, «Fast randomized point location without preprocessing in two- and three-dimensional delaunay triangulations», *Computational Geometry*, vol. 12, n^o 1-2, pp. 63–83, 1999.
- [47] I. Kolingerová, «A small improvement in the walking algorithm for point location in a triangulation», *Proc. 22nd Eur. Work. Comput. Geom.*, n^o 221, pp. 221–224, 2006.
- [48] P. F. Robert Sedgewick, *An Introduction to the Analysis of Algorithms*, 1^a. New York: Addison-Wesley, 1996.