



ANA FRANCISCA SEIXAS FERNANDES

Licenciada em Matemática Aplicada

RELATÓRIO DE ESTÁGIO – AS TAREFAS MATEMÁTICAS NA APRENDIZAGEM DAS SUCESSÕES

MESTRADO EM ENSINO DE MATEMÁTICA NO 3.º CICLO DO ENSINO
BÁSICO E NO ENSINO SECUNDÁRIO

Universidade NOVA de Lisboa
Setembro, 2025

RELATÓRIO DE ESTÁGIO – AS TAREFAS MATEMÁTICAS NA APRENDIZAGEM DAS SUCESSÕES

ANA FRANCISCA SEIXAS FERNANDES

Licenciada em Matemática Aplicada

Orientador: Doutor António Manuel Dias Domingos,
Professor Auxiliar da NOVA FCT

Júri:

Presidente: Doutora Alexandra Sofia da Cunha Rodrigues,
Professora Auxiliar Convidada da NOVA FCT

Arguentes: Doutora Circe Mary Silva da Silva Dynnikov,
Professora aposentada Adjunta IV da Universidade Federal do
Espírito Santo

Orientador: Doutor António Manuel Dias Domingos,
Professor Auxiliar da NOVA FCT

Vogal: Licenciada Sandra Martins,
Professora no Agrupamento de Escolas de Alvalade

Relatório de estágio – As tarefas matemáticas na aprendizagem das sucessões

Copyright © Ana Francisca Seixas Fernandes, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade NOVA de Lisboa.

A Faculdade de Ciências e Tecnologia e a Universidade NOVA de Lisboa têm o direito, perpétuo e sem limites geográficos, de arquivar e publicar esta dissertação através de exemplares impressos reproduzidos em papel ou de forma digital, ou por qualquer outro meio conhecido ou que venha a ser inventado, e de a divulgar através de repositórios científicos e de admitir a sua cópia e distribuição com objetivos educacionais ou de investigação, não comerciais, desde que seja dado crédito ao autor e editor.

AGRADECIMENTOS

A conclusão desta dissertação representa não só o término de um ciclo académico, como também reflete o apoio e o contributo de todos aqueles que, direta ou indiretamente, me acompanharam ao longo deste percurso.

Ao professor António Domingos, pela orientação rigorosa, pela disponibilidade e pela partilha generosa do seu conhecimento e experiência. O seu apoio foi determinante para a concretização desta investigação.

À professora Alexandra Rodrigues, pelos valiosos conselhos que tanto me ajudaram no início do meu percurso enquanto professora. A influência que teve na minha formação foi tal que ambiciono, no futuro, poder marcar os meus alunos com a mesma intensidade com que marcou o meu percurso.

À professora Sandra, que foi inalcançável durante este percurso, pela disponibilidade, pelos ensinamentos e pela partilha de experiências. A autonomia que me deu e a confiança que depositou no meu trabalho contribuíram para o meu crescimento pessoal e profissional.

Aos meus primeiros alunos, por me terem acolhido tão bem na vossa sala de aula e por terem tornado esta experiência verdadeiramente especial e marcante.

À Ana, à Carolina e à Inês, pela amizade construída ao longo dos últimos dois anos e por terem tornado este percurso uma experiência repleta de momentos de partilha, risos e aprendizagens. Em especial, à Carolina, pelo companheirismo ao longo do estágio, que tornou este desafio mais leve e enriquecedor.

Aos meus pais, pelo apoio incondicional, por acreditarem sempre em mim e por me permitirem ser livre para escolher o meu caminho. Serão sempre o meu maior exemplo de dedicação, perseverança e trabalho.

À minha família, por ser sempre o meu porto seguro.

A todos, o meu sincero obrigada!

“Em Matemática, a arte de colocar uma questão deve ser mais valorizada do que a arte de a resolver.” (George Cantor).

RESUMO

A presente dissertação encontra-se organizada em duas partes. Na primeira descreve-se o trabalho desenvolvido no âmbito da prática de ensino supervisionada durante o ano letivo 2024/25. Esta parte é composta por três capítulos. Os dois primeiros incidem sobre a prática letiva e não letiva em que a professora estagiária participou. No último capítulo, apresenta-se uma reflexão crítica sobre a experiência do estágio pedagógico.

Por sua vez, a segunda parte assenta no projeto de investigação e encontra-se dividida em cinco capítulos. O primeiro apresenta o enquadramento do estudo, enquanto o segundo diz respeito ao referencial teórico que o sustenta. No terceiro capítulo descreve-se a metodologia adotada, seguida da análise dos dados recolhidos. Por fim, no quinto capítulo, reúnem-se as principais conclusões do estudo.

O trabalho de investigação visou analisar de que forma os alunos do 11.º ano mobilizam os seus conhecimentos sobre sucessões na resolução de tarefas matemáticas. Com base neste propósito, procurou-se responder às seguintes questões de investigação:

1. Como se caracteriza a compreensão do conceito de sucessão?
2. Como acontece o processo de reificação do conceito de sucessão?

A investigação seguiu uma metodologia qualitativa, assente na análise de quatro estudos de caso individuais. A recolha de dados foi realizada através da observação participante e não participante, de entrevistas semiestruturadas e da recolha e análise das produções escritas dos alunos participantes.

No que concerne às conclusões, foi possível identificar distintos modos de compreensão do conceito de sucessão, destacando-se a compreensão instrumental, patente na aplicação mecânica de fórmulas e procedimentos memorizados. Ainda assim, alguns alunos evidenciaram progressos no sentido de uma compreensão relacional. Relativamente ao processo de reificação, verificou-se que a conceção do conceito permanece maioritariamente no plano operacional, correspondente à fase de interiorização, embora se tenham verificado indícios de transição para o estágio de condensação. Contudo, em nenhum dos casos se observou uma reificação plena do conceito de sucessão.

Palavras chave: Estágio pedagógico, Sucessões, Compreensão, Teoria da reificação.

ABSTRACT

This dissertation is organized into two parts. The first part describes the work carried out within the scope of supervised teaching practice during the 2024/25 academic year. It consists of three chapters: the first two focus on the teaching and non-teaching activities in which the trainee teacher was involved, while the final chapter presents a critical reflection on the teaching practical experience.

The second part centers on the research project and is divided into five chapters. The first chapter outlines the study's framework, and the second discusses the supporting theoretical foundations. The third chapter details the adopted methodology, followed by an analysis of the collected data. The fifth and final chapter presents the main conclusions of the study.

The research aimed to analyze how 11th grade students apply their knowledge of sequences when solving mathematical tasks. To this end, the following research questions were addressed:

1. How is the understanding of the concept of sequence characterized?
2. How does the process of reifying the concept of sequence occur?

A qualitative methodology was employed, based on the analysis of four individual case studies. Data collection involved participant and non-participant observation, semi-structured interviews, and the analysis of student work and classroom tasks.

The findings suggest that different types of instrumental understanding were present, particularly in the mechanical application of memorized formulas and procedures (Herscovics & Bergeron, 1984; Skemp, 1976). Nevertheless, some students demonstrated progress toward relational understanding (Skemp, 1976). Regarding the reification process, the concept of sequence largely remained at the operational level, corresponding to the stage of interiorization. Although some indicators of the condensation stage were observed (Sfard, 1991), in none of the cases was full reification of the concept achieved.

Keywords: Teaching practicum, Sequences, Mathematical understanding, Reification theory.

ÍNDICE

PARTE 1 – RELATÓRIO DE ESTÁGIO	1
1. INTRODUÇÃO	3
2. PRÁTICA DE ENSINO SUPERVISIONADA	5
2.1. Planos de aula	5
2.2. Prática pedagógica no 11.º ano	5
2.2.1. Planificações anual e de temas	6
2.2.2. Aulas lecionadas	6
2.2.2.1. Aulas de 7 de outubro	7
2.2.2.2. Aulas de 8 de outubro	8
2.2.2.3. Aulas de 14 de outubro	10
2.2.2.4. Aulas de 4 de novembro	12
2.2.2.5. Aulas de 25 de novembro	14
2.2.2.6. Aulas de 26 de novembro	16
2.2.2.7. Aulas de 2 de dezembro	17
2.2.2.8. Aulas de 17 de março	19
2.2.3. Trabalho de projeto	21
2.2.4. Avaliação	22
2.3. Prática pedagógica no 9.º ano	23
2.3.1. Aulas lecionadas	23
2.3.1.1. Aulas de 23 de outubro	23

2.3.1.2.	Aulas de 8 de janeiro	26
2.4.	Prática pedagógica noutras turmas.....	27
3.	PRÁTICA NÃO LETIVA	29
3.1.	Reuniões assistidas.....	29
3.1.1.	Reuniões de estágio.....	29
3.1.2.	Reuniões de grupo e departamento	29
3.1.3.	Reuniões de conselho de turma	29
3.1.4.	Outras Reuniões	30
3.2.	Formações assistidas	30
3.3.	Dia Internacional da Matemática.....	30
3.4.	Visitas de estudo	31
4.	REFLEXÃO SOBRE O ESTÁGIO PEDAGÓGICO	33
	PARTE 2 – PROJETO DE INVESTIGAÇÃO	37
1.	INTRODUÇÃO	39
1.1.	Motivação e pertinência do estudo.....	39
1.2.	Objetivo e questões de investigação	40
2.	REVISÃO DE LITERATURA	41
2.1.	Aprendizagem da Álgebra	41
2.2.	Tarefas Matemáticas	42
2.3.	Compreensão dos conceitos matemáticos.....	44
2.4.	Teoria da reificação	47
3.	METODOLOGIA.....	51
3.1.	Investigação qualitativa	51
3.2.	Estudo de caso	52
3.3.	Instrumentos de recolha de dados	54
3.3.1.	Observação.....	54

3.3.2.	Entrevista.....	55
3.3.3.	Análise documental.....	56
3.4.	Procedimentos metodológicos adotados.....	57
3.4.1.	Escolha dos participantes.....	57
3.4.2.	Sessões de trabalho.....	57
3.4.3.	Tarefas.....	58
3.4.3.1.	Tarefa 1.....	58
3.4.3.2.	Tarefa 2.....	60
4.	ANÁLISE DE DADOS.....	61
4.1.	Estudo de caso: Bernardo.....	63
4.1.1.	Tarefa 1.....	64
4.1.2.	Tarefa 2.....	69
4.1.3.	Considerações Finais.....	75
4.2.	Estudo de caso: Tomé.....	76
4.2.1.	Tarefa 1.....	76
4.2.2.	Tarefa 2.....	80
4.2.3.	Considerações Finais.....	85
4.3.	Estudo de caso: Vasco.....	86
4.3.1.	Tarefa 1.....	86
4.3.2.	Tarefa 2.....	92
4.3.3.	Considerações Finais.....	97
4.4.	Estudo de caso: Sofia.....	99
4.4.1.	Tarefa 1.....	99
4.4.2.	Tarefa 2.....	103
4.4.3.	Considerações Finais.....	106
5.	CONCLUSÕES.....	109
	REFERÊNCIAS.....	115

ANEXOS	121
Anexo 1: Planificação anual por temas.....	123
Anexo 2: Planificação de tema – Sucessões	125
Anexo 3: Plano de aula 11.º ano	127
Anexo 4: <i>PowerPoint</i> “Medidas de amplitude em radianos”	131
Anexo 5: Tarefa “Redução ao 1.º Quadrante”	135
Anexo 6: <i>PowerPoint</i> “Redução ao 1.º Quadrante”	139
Anexo 7: Ficha de Exercícios “Redução ao 1.º Quadrante”	141
Anexo 8: Tarefa “Declive e inclinação de uma reta no plano”	143
Anexo 9: Ficha de trabalho “Produto escalar de vetores”	145
Anexo 10: Ficha de trabalho “Limites finitos”	149
Anexo 11: Guião do Canteiro em Espiral	153
Anexo 12: Poster científico do Canteiro em Espiral.....	155
Anexo 13: Construção do Canteiro em Espiral.....	157
Anexo 14: Teste de avaliação sumativa – 11.º ano	159
Anexo 15: Ficha de Revisões – Geometria Analítica 10.º ano.....	163
Anexo 16: Ficha de Trabalho – Trigonometria e Geometria Analítica.....	165
Anexo 17: Ficha de Trabalho – Estatística	169
Anexo 18: Ficha de Trabalho – Sucessões.....	175
Anexo 19: Ficha de Trabalho – Limites de Funções.....	183
Anexo 20: Ficha de Trabalho – Funções Racionais	185
Anexo 21: Feedback disponibilizado via <i>Teams</i>	187
Anexo 22: Reflexão sobre tarefa no <i>Teams</i>	189
Anexo 23: Plano de aula 9.º ano	191
Anexo 24: Poema no âmbito do Dia Internacional da Matemática	199
Anexo 25: Competição Internacional de Matemática <i>Náboj</i>	201

Anexo 26: Autorização de participação na visita de estudo	203
Anexo 27: Autorização de participação no projeto de investigação	205
Anexo 28: Tarefa 1	207
Anexo 29: Tarefa 1 – guião entrevista.....	209
Anexo 30: Tarefa 2	211
Anexo 31: Tarefa 2 – guião entrevista.....	213

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1 – Relação entre diferentes tipos de tarefas	44
Figura 2 – Resolução da questão 1.1.....	64
Figura 3 – Resolução da questão 1.2.....	65
Figura 4 – Resolução da questão 1.3.....	66
Figura 5 – Resolução da questão 1.4.....	68
Figura 6 – Resolução da questão 2.1.....	70
Figura 7 – Resolução da questão 2.2.....	73
Figura 8 – Resolução da questão 1.1.....	76
Figura 9 – Resolução da questão 1.3.....	78
Figura 10 – Resolução da questão 1.4.....	79
Figura 11 – Resolução da questão 2.1.....	80
Figura 12 – Resolução da questão 2.2.....	84
Figura 13 – Resolução da questão 1.1.....	87
Figura 14 – Resolução da questão 1.3.....	89
Figura 15 – Resolução da questão 1.4.....	91
Figura 16 – Resolução da questão 2.1.....	93
Figura 17 – Resolução da questão 2.2.....	94
Figura 18 – Resolução da questão 1.1.....	100
Figura 19 – Resolução da questão 1.2.....	101
Figura 20 – Resolução da questão 1.3.....	102
Figura 21 – Resolução da questão 1.4.....	102
Figura 22 – Resolução da questão 2.1.....	104
Figura 23 – Resolução da questão 2.2.....	105

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 1 – Resumo das aulas de 7 de outubro – 11.º ano	7
Tabela 2 – Resumo das aulas de 8 de outubro – 11.º ano	8
Tabela 3 – Resumo das aulas de 14 de outubro – 11.º ano.....	10
Tabela 4 – Resumo das aulas de 4 de novembro – 11.º ano.....	12
Tabela 5 – Resumo das aulas de 25 de novembro – 11.º ano	14
Tabela 6 – Resumo das aulas de 26 de novembro – 11.º ano	16
Tabela 7 – Resumo das aulas de 2 de dezembro – 11.º ano	17
Tabela 8 – Resumo das aulas de 17 de março – 11.º ano.....	19
Tabela 9 – Resumo das aulas de 23 de outubro – 9.º ano	24
Tabela 10 – Resumo das aulas de 8 de janeiro – 9.º ano	26

PARTE 1 – RELATÓRIO DE ESTÁGIO

1. INTRODUÇÃO

O presente relatório de estágio foi redigido com o objetivo de descrever e analisar o trabalho desenvolvido pela professora estagiária com as turmas do 9.º, 11.º e 12.º anos de escolaridade, no decorrer do ano letivo 2024/25, no âmbito da unidade curricular Estágio Pedagógico, que integra o plano de estudos do segundo ano do Mestrado em Ensino de Matemática do 3.º ciclo no Ensino Básico e no Secundário, da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa.

Nesta parte, encontra-se uma descrição detalhada da prática de ensino supervisionada, nomeadamente a caracterização das turmas e a descrição de algumas das aulas lecionadas pela professora estagiária. Adicionalmente, são também enumeradas as atividades extracurriculares em que participou e que integram a prática não letiva.

Por fim, apresenta-se uma reflexão sobre o estágio pedagógico e o impacto desta experiência na construção da identidade profissional e no desenvolvimento pessoal da professora estagiária, autora desta publicação.

2. PRÁTICA DE ENSINO SUPERVISIONADA

No presente capítulo procede-se à descrição da prática pedagógica supervisionada desenvolvida pela professora estagiária, com particular destaque para a caracterização das turmas acompanhadas e para os planos das aulas lecionadas.

No decorrer do estágio pedagógico, a professora estagiária acompanhou turmas do 9.º, 11.º e 12.º anos de escolaridade. A professora estagiária assistiu a metade das aulas do 9.º ano (turma secundária) e à totalidade das aulas do 11.º ano (turma principal), na qual foi implementado o projeto de investigação. Adicionalmente, a professora estagiária acompanhou outra turma do 11.º ano e ainda uma turma do 12.º ano.

2.1. Planos de aula

O agendamento e os temas das aulas lecionadas pela professora estagiária foram sempre definidos em conjunto pelo núcleo de estágio, constituído pela professora cooperante titular das turmas de 11.º e 12.º ano e pelas duas professoras estagiárias. Após cada reunião, a professora estagiária elaborou uma planificação da aula a lecionar. Posteriormente, a planificação era analisada e refletida em núcleo de estágio, realizando-se as alterações necessárias, até que esta se encontrasse plenamente alinhada com os objetivos de aprendizagem e as características de cada turma. Em cada plano de aula eram descritos os conteúdos a abordar, a sequência dos momentos da aula, as respetivas estratégias de ensino a adotar e antecipavam-se possíveis dificuldades que os alunos pudessem manifestar.

No final de cada aula lecionada, o núcleo de estágio reunia-se novamente para refletir sobre os pontos positivos e os aspetos a melhorar. Sempre que presente, o professor supervisor da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa participou também nestes momentos.

Por último, a professora estagiária redigia uma reflexão escrita, presente no subcapítulo correspondente à aula lecionada.

2.2. Prática pedagógica no 11.º ano

A turma do 11.º ano do curso de científico-humanístico de ciências e tecnologias era constituída por 21 alunos, dos quais 12 eram do sexo masculino e 9 do sexo feminino, com uma média de idades de 16 anos.

O grupo era bastante heterogéneo e, apesar de manter uma atitude globalmente serena, demonstrava pouco espírito de equipa e entreajuda entre os seus elementos. Tratava-se, de facto, de uma turma notoriamente fragmentada, com pouca predisposição para o trabalho colaborativo no grande grupo. Esta realidade foi consequência da reestruturação na composição das turmas que ocorreu na transição do 10.º para o 11.º ano.

Relativamente ao nível de aproveitamento global da turma, existia um grupo de alunos bastante interessado e participativo, mas apenas um número muito reduzido conseguia alcançar classificações elevadas de forma consistente. Mesmo entre estes alunos, era frequente observar-se alguma insegurança em momentos de avaliação sumativa, o que contribuía para que os resultados nem sempre correspondessem ao potencial demonstrado. Grande parte dos alunos da turma apresentava dificuldades na articulação e mobilização de conhecimentos, na interpretação de enunciados e na aplicação de conteúdos previamente trabalhados. Estas lacunas tornavam-se particularmente evidentes nos momentos de introdução de novos temas, pelo que era necessário fazer sempre uma revisão dos pré-requisitos do 3.º ciclo associados.

2.2.1. Planificações anual e de temas

No início do ano letivo, o núcleo de estágio concebeu uma planificação anual por conteúdos, referente ao 11.º ano (Anexo 1), em conformidade com o documento das *Aprendizagens Essenciais* de Matemática A para este nível de escolaridade (MEC, 2018).

Ao longo do ano letivo, foram igualmente elaborados, pelo núcleo de estágio, planificações de temas, dirigidos a cada uma das unidades programáticas do 11.º ano, também com base nas *Aprendizagens Essenciais* de Matemática A (MEC, 2018). A título exemplificativo, apresenta-se no Anexo 2 uma dessas planificações de tema.

2.2.2. Aulas lecionadas

No decorrer do ano letivo, a professora estagiária lecionou um total de 20 aulas de 50 minutos. Todas as aulas foram realizadas na presença da professora cooperante, que era simultaneamente a docente titular da turma, e da colega estagiária. Note-se que todas as aulas lecionadas se encontram agrupadas em blocos duplos, perfazendo um total de 100 minutos. De forma ilustrativa, encontra-se no Anexo 3 um plano de aula completo do 11.º ano, referente às aulas do dia 17 de março.

2.2.2.1. Aulas de 7 de outubro

As aulas de 7 de outubro centraram-se na introdução do conceito de radiano. Segue-se um resumo da planificação das aulas, organizado na **Tabela 1**.

Tabela 1

Resumo das aulas de 7 de outubro – 11.º ano

Tema e Tópico: Trigonometria – Medidas de amplitudes em radianos
Sumário: Definição de radiano. Medidas de amplitudes em radianos. Conversão de graus em radianos. Resolução dos exercícios do <i>PowerPoint</i> "Medidas de Amplitudes em Radianos".
Recursos: Papel, lápis, caneta e borracha; Manual "Novo Ípsilon 11" – Parte 1; Computador com internet e projetor; <i>PowerPoint</i> "Medidas de Amplitudes em Radianos" (Anexo 4).
Objetivos específicos: Converter medidas angulares entre graus e radianos; Aplicar a definição de radiano na resolução de problemas; Interpretar e comunicar resultados matemáticos relacionados com ângulos em diferentes unidades; Analisar criticamente diferentes estratégias para a conversão e resolução de problemas com ângulos.
Ações a desenvolver com os alunos: (i) Projetar o <i>PowerPoint</i> "Medidas de Amplitudes em Radianos"; (ii) Introduzir o conceito de radiano, recorrendo aos exemplos e exercícios de aplicação do <i>PowerPoint</i> ; (iii) Deduzir, em grupo turma, a amplitude, em radianos, dos ângulos giro, raso e reto; (iv) Explicar a conversão de graus para radianos e vice-versa; (v) Construir a tabela trigonométrica com a conversão dos ângulos de 30°, 45° e 60° em radianos; (vi) Representar na circunferência trigonométrica os ângulos notáveis; (vii) Resolver os exercícios 96, 98, 99, 106, 112 e 115 das pág. 59 a 63 do manual.

Após a conclusão da primeira aula lecionada, procedeu-se à análise e reflexão sobre o seu desenvolvimento. Um dos principais aspetos identificados foi a existência de alguns momentos "mortos". Estes períodos de inatividade afetam negativamente a dinâmica da aula, pois os alunos tendem a dispersar a atenção e a perder o foco. É, assim, essencial que o tempo seja utilizado de forma eficiente, procurando manter sempre o envolvimento dos alunos.

Sugeriu-se também que, após a exposição teórica e antes de se iniciar a resolução dos exercícios, se tivesse realizado uma breve sistematização dos conteúdos abordados. Reconhece-se que a inclusão deste momento teria sido bastante pertinente, dado que, nas aulas observadas até ao momento, se constatou que os alunos em questão valorizam bastante estes momentos em que organizam as ideias sobre os novos conceitos antes de os aplicarem.

Além disto, teria sido vantajoso incentivar ainda mais os alunos a participarem ativamente, convidando-os, por exemplo, a irem ao quadro resolver os exemplos propostos e a exporem as suas ideias. Ainda assim, considera-se que se conseguiu aproveitar as intervenções e as sugestões que foram surgindo de forma espontânea, integrando-as na explicação do conteúdo programado. No seguimento desta ideia, importa destacar que foi de forma consciente que a professora estagiária tentou variar ao máximo os alunos que resolveram os exercícios no quadro. Inclusive, sempre que foi demonstrado algum tipo de resistência ou insegurança por parte dos mesmos, procurou-se incentivá-los para que superassem essas barreiras, promovendo um ambiente de confiança e inclusão na sala de aula.

Relativamente ao não cumprimento da totalidade do plano, a professora cooperante sublinhou que a estimativa do tempo é uma competência que se aprimora com a experiência e que o plano de aula é um documento flexível que pode e deve ser ajustado conforme o ritmo e as necessidades dos alunos. A docente reforçou também a importância de se estar preparado para responder rapidamente às questões inesperadas dos alunos.

De modo geral, o balanço da aula foi bastante positivo, especialmente tendo em consideração que se tratou da primeira aula lecionada a esta turma. A professora cooperante sublinhou que o facto de se ter conseguido criar uma boa dinâmica com a turma foi fundamental para que a aula decorresse de forma pacífica e fluída.

2.2.2.2. Aulas de 8 de outubro

Nas aulas de 8 de outubro prosseguiu-se com o estudo do conceito de radiano e introduziu-se a redução ao 1.º quadrante, através da realização de uma tarefa exploratória (Anexo 5). Segue-se um resumo da planificação das aulas, organizado na **Tabela 2**.

Tabela 2

Resumo das aulas de 8 de outubro – 11.º ano

Tema e Tópico: Trigonometria – Medidas de amplitudes em radianos; Redução ao 1.º Quadrante
Sumário: Sistematização dos conteúdos abordados na aula anterior. Realização da tarefa “Redução ao 1.º Quadrante” no <i>GeoGebra</i> . Resolução da ficha de exercícios “Redução ao 1.º Quadrante”.
Recursos: Papel, lápis, caneta e borracha; Computador com internet e projetor; Kits tecnológicos (1 por grupo); <i>PowerPoint</i> “Medidas de Amplitudes em Radianos” (Anexo 4); Tarefa “Redução ao 1.º

Quadrante" (Anexo 5); *PowerPoint* "Redução ao 1.º Quadrante" (Anexo 6); Recurso do *GeoGebra* "Redução ao 1.º Quadrante"; Ficha de Exercícios "Redução ao 1.º Quadrante" (Anexo 7).

Objetivos específicos: Melhorar a capacidade de investigação e descoberta autónoma; Utilizar as fórmulas trigonométricas da redução ao 1.º quadrante.

Ações a desenvolver com os alunos: (i) Sistematizar os conteúdos abordados na aula anterior, através da construção da tabela trigonométrica com a conversão dos ângulos de 30°, 45° e 60° em radianos e da representação na circunferência trigonométrica dos ângulos notáveis; (ii) Projetar a tarefa "Redução ao 1.º Quadrante" e explicar a sua estrutura; (iii) Realizar, em grupos de 2 ou 3 alunos, a tarefa "Redução ao 1.º Quadrante"; (iv) Promover a análise e discussão, em grupo turma, das conclusões obtidas na tarefa; (v) Sistematizar, no *PowerPoint* "Redução ao 1.º Quadrante", as conclusões referentes à redução ao 1.º quadrante; (vi) Resolver a ficha de exercícios "Redução ao 1.º Quadrante".

Conforme sugerido pela professora cooperante no final da primeira aula lecionada, a presente aula teve início com a sistematização, no quadro, dos principais conteúdos abordados na aula anterior. O foco foi identificar os ângulos notáveis na circunferência trigonométrica e construir, em grupo turma, uma tabela com os valores das razões trigonométricas desses ângulos, agora expressos em radianos. Os alunos colaboraram ativamente, demonstrando bastante apreço por estes momentos de consolidação. Contudo, o ritmo desta parte inicial da aula revelou-se um pouco lento, com alguns tempos "mortos" devido ao tempo que os alunos demoraram a realizar os registos nos respetivos cadernos. Apesar de reconhecer a importância dos registos individuais, a professora estagiária tem consciência que a ocorrência constante destes tempos "mortos" condiciona o ritmo das aulas, pelo que considera fundamental procurar estratégias para reduzir estes períodos.

Relativamente à tarefa, foi necessário fazer alguns ajustes na constituição dos grupos, para otimizar o número de kits tecnológicos disponíveis e a garantir a produtividade de todos os grupos. Importa ressaltar que estes ajustes foram realizados pela professora estagiária com a colaboração da professora cooperante logo no início da aula, para evitar momentos de maior agitação a meio da aula que, inclusive, pudessem perturbar o normal funcionamento de outras aulas. Reconhece-se que, antes do início da resolução da tarefa, teria sido vantajoso projetar a apliqueta do *GeoGebra* e exemplificar como deviam mover o ponto P , realçando que as coordenadas dos pontos deviam ser expressas em função do ângulo α , cuja amplitude era desconhecida. Partiu-se do pressuposto que estes detalhes seriam intuitivos, mas a experiência

em sala de aula demonstrou o contrário, pelo que uma explicação mais clara e detalhada teria contribuído para que a tarefa fosse executada com maior fluidez.

Observou-se também que os alunos não estão familiarizados com este tipo de tarefas que os colocam como participantes ativos na construção do seu próprio conhecimento. Neste sentido, durante a sua realização, foi necessário um acompanhamento mais individualizado, pelo que a presença das três docentes (professora cooperante e professoras estagiárias) foi fundamental neste momento da aula.

À semelhança da aula anterior, não foi possível cumprir completamente o plano de aula. Esta situação evidencia uma das principais dificuldades sentidas pela professora estagiária até ao momento, a estimativa mais realista do tempo necessário para cada momento da aula.

2.2.2.3. Aulas de 14 de outubro

As aulas de 14 de outubro centraram-se na redução ao 1.º quadrante. Segue-se um resumo da planificação das aulas, organizado na **Tabela 3**.

Tabela 3

Resumo das aulas de 14 de outubro – 11.º ano

Tema e Tópico: Trigonometria – Redução ao 1.º Quadrante
Sumário: Sistematização das conclusões relativas à tarefa “Redução ao 1.º Quadrante” realizada no <i>GeoGebra</i> . Resolução da ficha de exercícios “Redução ao 1.º Quadrante”.
Recursos: Papel, lápis, caneta e borracha; Computador com internet e projetor; Tarefa “Redução ao 1.º Quadrante” (Anexo 5); <i>PowerPoint</i> “Redução ao 1.º Quadrante” (Anexo 6); Recurso do <i>GeoGebra</i> “Redução ao 1.º Quadrante”; Ficha de Exercícios “Redução ao 1.º Quadrante” (Anexo 7).
Objetivos específicos: Utilizar as fórmulas trigonométricas da redução ao 1.º quadrante.
Ações a desenvolver com os alunos: (i) Promover a análise e discussão, em grupo turma, das conclusões obtidas na tarefa; (ii) Sistematizar, no <i>PowerPoint</i> “Redução ao 1.º Quadrante”, as conclusões referentes à redução ao 1.º quadrante; (iii) Resolver a ficha de exercícios “Redução ao 1.º Quadrante”.

No início da aula a professora estagiária começou por observar as conclusões registadas pelos grupos na tarefa “Redução ao 1.º Quadrante”. Este procedimento permitiu-lhe corroborar as principais dificuldades que havia identificado, na aula anterior, durante a sua realização.

Posto isto, a professora estagiária recorreu novamente ao *GeoGebra*, revisitando, em grupo turma, cada uma das situações exploradas. A utilização deste recurso revelou-se particularmente útil, uma vez que, na sala em questão, a imagem é projetada diretamente no quadro, o que permitiu fazer anotações sobre a própria aplicação do *GeoGebra*. A professora cooperante enalteceu a estratégia da professora estagiária para se desmarcar da metodologia adotada pela colega estagiária que optou por recorrer ao *PowerPoint* "Redução ao 1.º Quadrante" para sistematizar as conclusões. O *PowerPoint* foi, posteriormente, disponibilizado à turma via *Teams*, como material de apoio. Ainda sobre as conclusões da tarefa, constatou-se que, por terem sido registadas apenas na ficha de trabalho e não no caderno da disciplina como é habitual, alguns alunos não as reconheceram como parte integrante da matéria.

Perante sinais de agitação durante as explicações, sugeriu-se que uma estratégia eficaz poderá ser solicitar aos alunos que expliquem aos colegas o procedimento adotado, sobretudo porque os que tendem a ficar mais inquietos são aqueles que consideram já ter compreendido o conteúdo e, por isso, desvalorizam a atenção nesses momentos.

Na reunião de núcleo de estágio, destacou-se também a opção pedagógica de, antes de entregar a ficha de exercícios, exemplificar no quadro a simplificação de uma expressão com a aplicação direta das fórmulas trigonométricas da redução ao 1.º quadrante. Esta decisão foi tomada na sequência do que se observou na aula da colega estagiária, na qual a distribuição imediata da ficha de trabalho provocou alguma agitação entre os alunos, dificultando que retomassem a atenção necessária para acompanhar a explicação. Neste sentido, a professora estagiária reconhece a importância de ter assistido às aulas lecionadas pela colega estagiária. Apesar de alguns recursos, como a tarefa e a ficha de exercícios alusivas à redução ao 1.º quadrante, terem sido construídos em conjunto, as diferentes metodologias adotadas por cada professora, assim como as próprias características dos alunos, originaram dinâmicas de aula distintas. Esta experiência reforçou a importância de o docente adaptar continuamente as suas estratégias de ensino às necessidades e características específicas dos alunos.

Durante a resolução dos exercícios, procurou-se variar nos alunos selecionados para ir ao quadro, conduzindo à participação de alguns que, até então, nunca o tinham feito.

Por último, sublinha-se que as dificuldades antecipadas aquando do planeamento do bloco de aulas se confirmaram, o que realça a importância da flexibilidade na gestão da aula e da capacidade de responder às necessidades que emergem em tempo real.

2.2.2.4. Aulas de 4 de novembro

Nas aulas de 4 de novembro iniciou-se o estudo da Geometria Analítica do 11.º ano, estabelecendo-se uma conexão direta com os conceitos de Trigonometria abordados anteriormente. Segue-se um resumo da planificação das aulas, organizado na **Tabela 4**.

Tabela 4

Resumo das aulas de 4 de novembro – 11.º ano

Tema e Tópico: Geometria Analítica – Declive e inclinação de uma reta no plano
Sumário: Declive e inclinação de uma reta no plano. Resolução dos exercícios da página 127 do manual.
Recursos: Papel, lápis, caneta e borracha; Manual “Novo Ípsilon 11” – Parte 1; Computador com internet e projetor; Recurso do <i>GeoGebra</i> “Declive e Inclinação de uma reta no plano”.
Objetivos específicos: Reconhecer a relação entre a inclinação de uma reta no plano com o respetivo declive.
Ações a desenvolver com os alunos: (i) Projetar a aplicqueta do <i>GeoGebra</i> e promover a análise e discussão, em grupo turma, da relação entre a inclinação de uma reta no plano e o respetivo declive, nos casos em que a reta passa e não passa na origem; (ii) Sistematizar as conclusões obtidas; (iii) Resolver os exercícios 2.6, 2.7., 2.9., 2.10., 2.11., 4., 5., 6., 7. e 8. da pag. 127 do manual.

Dada a proximidade do teste de avaliação sumativa, verificou-se que os alunos tinham bastantes dúvidas relativamente aos conteúdos lecionados até ao momento. Consequentemente, grande parte da aula foi dedicada ao seu esclarecimento, exigindo, por parte da professora estagiária, um ajuste do plano previamente estabelecido. Assim, restou aproximadamente meia hora da aula para abordar o declive e inclinação de uma reta no plano.

Apesar das circunstâncias imprevistas, o núcleo de estágio considerou que este momento da aula decorreu de forma bastante positiva. A professora cooperante elogiou o facto de a professora estagiária ter conseguido implementar um ritmo adequado durante a exploração dos vários casos no *GeoGebra*, sublinhando a importância de um professor em sala de aula ser capaz de ajustar o ritmo de ensino consoante as necessidades e dinâmica da turma.

Os alunos demonstram-se bastante recetivos à introdução do novo tema, compreendendo a aplicação direta da trigonometria no estudo da geometria. Rapidamente chegaram às conclusões pretendidas e, à medida que estas iam sendo alcançadas, a professora estagiária optou por as sistematizar de imediato no quadro, uma vez que antecipou que o

tempo restante não fosse suficiente para explorar todos os casos. Assim, mesmo que nem todos os casos fossem explorados, os alunos já tinham os registos dos conteúdos abordados.

O recurso desenvolvido no *GeoGebra* revelou-se bastante útil, facilitando a interpretação visual e a exploração intuitiva dos vários casos apresentados. Dada a receptividade dos alunos, foi-lhes solicitado que, em casa, explorassem autonomamente os casos particulares das retas horizontais e verticais não explorados em aula. Para esse efeito, informou-se que o recurso do *GeoGebra* seria disponibilizado na plataforma *Teams*.

Este tipo de abordagem revela um elevado potencial para fomentar a autonomia dos alunos. Todavia, reconhece-se que a turma em questão não está familiarizada com práticas regulares de trabalho e estudo autónomo. Consciente desta realidade, a professora estagiária refletiu sobre a melhor forma de promover o envolvimento dos alunos e decidiu disponibilizar o recurso do *GeoGebra* acompanhado por orientações mais detalhadas, com o intuito de os apoiar na exploração dos casos particulares e na formulação das conclusões pretendidas. Para esse efeito, adicionou-se no início da tarefa uma breve síntese dos conteúdos abordados em sala de aula, de modo a facilitar a continuidade do estudo (Anexo 8).

Apesar do esforço, por parte da professora estagiária, em adaptar o recurso do *GeoGebra*, incluindo orientações claras para facilitar a compreensão e promover o estudo autónomo, a adesão dos alunos não correspondeu às expectativas. Embora na aula seguinte grande parte dos alunos tenha conseguido enunciar as conclusões pretendidas, poucos foram os que recorreram ao recurso disponibilizado e, mesmo entre estes, foram evidentes algumas dificuldades na sua utilização. Por exemplo, na apliqueta estavam marcados os pontos *A* e *B*, de coordenadas não fixas, e era-lhes pedido que traçassem a reta de equação $y = 5$. O que alguns alunos fizeram foi deslocar o ponto *B* de modo que a sua ordenada fosse 5, não alterando o valor da abcissa e mantendo o ponto *A* com coordenadas (0,0). Obviamente que a reta obtida não correspondia à reta de equação $y = 5$, pois ao fixarem a abcissa do ponto *B*, não consideraram a necessidade de ajustar a posição do ponto *A*. Note-se que a utilização do *GeoGebra* neste contexto permitiu à professora estagiária acompanhar o progresso individual dos alunos fora da sala de aula, revelando-se uma ferramenta de avaliação formativa.

Este desafio evidenciou a importância de, mesmo adaptando as abordagens pedagógicas, estar atento ao ritmo e preparação dos alunos para diferentes métodos de ensino. Deste modo, a professora estagiária reconheceu que a introdução gradual do estudo autónomo, particularmente quando envolve a utilização de novas tecnologias, deve ser

acompanhada de estratégias de apoio contínuo e esclarecimento de dúvidas, para que os alunos possam retirar o maior proveito possível dos recursos disponibilizados.

2.2.2.5. Aulas de 25 de novembro

As aulas de 25 de novembro marcaram a introdução do produto escalar de vetores. Tratou-se de um conjunto de três blocos de aulas consecutivos, apoiados na ficha de trabalho concebida para esse fim (Anexo 9). Segue-se, na **Tabela 5**, um resumo da respetiva planificação.

Tabela 5

Resumo das aulas de 25 de novembro – 11.º ano

Tema e Tópico: Geometria Analítica – Produto escalar de vetores
Sumário: Revisão de conceitos relacionados com o cálculo vetorial. Noção de produto escalar e ângulo de dois vetores. Resolução dos exercícios das páginas 131 e 135 do manual.
Recursos: Papel, lápis, caneta e borracha; Manual “Novo Ípsilon 11” – Parte 1; Computador com internet e projetor; Recurso do <i>GeoGebra</i> “Produto escalar de vetores”; Ficha de trabalho “Produto escalar de vetores” (Anexo 9).
Objetivos específicos: Rever conceitos relacionados com o cálculo vetorial; Reconhecer e aplicar a noção de produto escalar; Reconhecer e determinar o ângulo de dois vetores; Melhorar a capacidade de investigação e descoberta autónoma.
Ações a desenvolver com os alunos: (i) Distribuir a ficha de trabalho e explicar a sua estrutura; (ii) Resolver, em grupo turma, os exercícios de revisão da Parte I da ficha de trabalho e, simultaneamente, sistematizar alguns conceitos relacionados com o cálculo vetorial; (iii) Projetar a apliqueta do <i>GeoGebra</i> e promover a análise e discussão, em grupo turma, das noções de produto escalar e de ângulo de dois vetores; (iv) Sistematizar, na Parte II da ficha de trabalho, os conteúdos referentes à noção de produto escalar e de ângulo de dois vetores; (v) Promover uma discussão sobre a relação entre o produto escalar e o ângulo de dois vetores, partindo do conceito de trabalho de uma força; (vi) Sistematizar, na ficha de trabalho, as conclusões obtidas; (vii) Resolver os exercícios 12.1., 12.2., 12.3. e 12.4. da pag. 131 e os exercícios 18, 19 e 20 da pag. 135 do manual.

Para este bloco de aulas, preparou-se uma ficha de trabalho (Anexo 9) composta por duas partes, estruturada de modo a acompanhar os diferentes momentos da aula e a facilitar a organização dos alunos. A parte I visava relembrar conceitos do cálculo vetorial estudados

em anos anteriores, essenciais para o conceito de produto escalar de vetores. A parte II incluía espaços destinados ao registo dos conteúdos abordados, bem como uma secção de carácter mais exploratório, que desafiava os alunos a relacionar o conceito de trabalho de uma força, estudado nas aulas de Físico-Química, com a definição de produto escalar. Esta metodologia procurou responder às dificuldades dos alunos previamente identificadas, ao nível da organização do estudo autónomo, bem como à desvalorização face às fichas de trabalho.

À medida que a professora estagiária começou a referir alguns conceitos relacionados com o cálculo vetorial, constatou-se que os alunos já não tinham presente muitos desses conteúdos, o que exigiu uma recuperação mais prolongada do que o previsto. Consequentemente, a primeira parte da aula, dedicada à revisão desses conceitos, acabou por se estender durante sensivelmente uma hora, condicionando o cumprimento integral do plano delineado. Ainda assim, o núcleo de estágio considerou que a abordagem adotada foi fundamental, pois permitiu consolidar os pré-requisitos necessários para a compreensão dos novos conceitos. Acresce que, do ponto de vista da professora estagiária, torna-se difícil prosseguir com os conteúdos programáticos quando os alunos não dominam os conhecimentos prévios, sobretudo tendo em conta que naturalmente o nível de exigência e complexidade dos conteúdos tende a aumentar. O equilíbrio entre recuperar os conceitos essenciais e lecionar os novos conteúdos é uma competência exigente que se acredita que se aprimora com a prática profissional.

Devido a uma avaria inesperada do projetor, que até então funcionava normalmente, foi impossível utilizar o recurso do *GeoGebra* construído, pelo que a professora estagiária optou por representar no quadro os dois casos: vetores com o mesmo sentido e vetores com sentidos contrários. Neste sentido, a professora estagiária compreendeu que a capacidade de adaptação perante constrangimentos inesperados é uma competência essencial no exercício da prática letiva, garantido que o desenvolvimento da aula não fica comprometido. Apesar do constrangimento, considera-se que as representações no quadro foram eficazes e permitiram aos alunos compreender com clareza a noção geométrica de produto escalar.

De modo geral, a aula decorreu num ambiente tranquilo, ainda que se tenham registado momentos pontuais de desorganização na participação dos alunos. A aula terminou com a atribuição do T.P.C., o exercício 12 da página 131, com o objetivo de reforçar os conteúdos lecionados, considerando que a próxima aula era no dia seguinte.

2.2.2.6. Aulas de 26 de novembro

Nas aulas de 26 de novembro prosseguiu-se com o estudo do produto escalar de vetores, iniciado na aula anterior. Segue-se um resumo da planificação das aulas, organizado na **Tabela 6**.

Tabela 6

Resumo das aulas de 26 de novembro – 11.º ano

Tema e Tópico: Geometria Analítica – Produto escalar de vetores
Sumário: Correção do T.P.C. Noção de produto escalar e ângulo de dois vetores – continuação. Resolução dos exercícios da página 135 do manual.
Recursos: Papel, lápis, caneta e borracha; Manual “Novo Ípsilon 11” – Parte 1; Computador com internet e projetor; Recurso do <i>GeoGebra</i> “Produto escalar de vetores”; Ficha de trabalho (Anexo 9).
Objetivos específicos: Reconhecer e aplicar a noção de produto escalar; Reconhecer e determinar o ângulo de dois vetores; Estabelecer a relação entre produto escalar e ângulo de dois vetores; Melhorar a capacidade de investigação e descoberta autónoma.
Ações a desenvolver com os alunos: (i) Corrigir o T.P.C.; (ii) Projetar a apliqueta do <i>GeoGebra</i> e introduzir a noção de ângulo de dois vetores; (iii) Sistematizar, na Parte II da ficha de trabalho, as conclusões referentes à noção de ângulo de dois vetores; (iv) Promover uma discussão sobre a relação entre o produto escalar e o ângulo de dois vetores, partindo do conceito de trabalho de uma força; (v) Sistematizar, na 3ª página ficha de trabalho, as conclusões obtidas; (v) Resolver os exercícios 18, 19 e 20 da pag. 135 do manual; (vi) Atribuir T.P.C.

Dado que na aula anterior não foi possível cumprir na íntegra os conteúdos planeados, as aulas subsequentes retomaram o trabalho a partir do ponto em que se havia ficado.

A correção do exercício proposto para T.P.C. permitiu visitar e consolidar a noção geométrica de produto escalar de vetores introduzida na aula anterior. Apesar da metodologia de envolver os alunos na explicação do raciocínio aos colegas não ser uma prática habitual, revelou-se bastante eficaz, promovendo o pensamento crítico e a colaboração entre pares. Este momento levou a professora estagiária a refletir sobre a importância de diversificar as estratégias pedagógicas, como forma de melhor atender às necessidades específicas dos alunos e enriquecer o processo de ensino e aprendizagem.

Antes de prosseguir com a introdução do ângulo de dois vetores, a professora estagiária assegurou que todos os alunos dispunham da ficha de trabalho distribuída na aula anterior e que haviam realizado todos os registos, dado que a ficha foi concebida precisamente com o intuito de orientar o estudo dos alunos.

Na reunião de núcleo de estágio, após a aula lecionada, foi consensual a percepção de que os alunos compreenderam adequadamente o conceito de ângulo de dois vetores. No entanto, surgiram algumas dúvidas relativas à notação utilizada para representar a amplitude deste ângulo, o que exigiu um esclarecimento mais profundo durante a aula.

Importa referir que o recurso construído no *GeoGebra*, revelou-se particularmente útil para representar e explorar as diferentes situações, oferecendo uma visualização clara de como o ângulo entre vetores varia consoante a direção e o sentido destes.

Por fim, face à insegurança de alguns alunos relativamente à escolha da definição de produto escalar a utilizar, a professora estagiária considerou necessário realizar uma sistematização dos conteúdos abordados até ao momento. Este momento teve como objetivo estruturar o conhecimento, esclarecer dúvidas e assegurar a correta compreensão e aplicação dos conceitos por parte dos alunos. Consequentemente, não foi possível concretizar, em sala de aula, a resolução dos exercícios planeados. Dado que a aula seguinte decorreria após uma semana, os exercícios foram atribuídos como T.P.C., garantindo aos alunos tempo suficiente para consolidar e aplicar os conhecimentos adquiridos.

2.2.2.7. Aulas de 2 de dezembro

A aulas de 2 de dezembro centraram-se no estudo da variação do sinal e das propriedades do produto escalar de vetores. Segue-se um resumo da planificação das aulas, organizado na **Tabela 7**.

Tabela 7

Resumo das aulas de 2 de dezembro – 11.º ano

Tema e Tópico: Geometria Analítica – Produto escalar de vetores
Sumário: Correção do T.P.C. Sinal e propriedades do produto escalar de vetores. Resolução dos exercícios da página 139 do manual.
Recursos: Papel, lápis, caneta e borracha; Manual “Novo Ípsilon 11” – Parte 1; Computador com internet e projetor; Ficha de trabalho “Produto escalar de vetores” (Anexo 9).

Objetivos específicos: Analisar o sinal do produto escalar; Aplicar as propriedades do produto escalar.

Ações a desenvolver com os alunos: (i) Corrigir o T.P.C.; (ii) Promover uma discussão, em grupo turma, para explorar a variação do sinal do produto escalar; (iii) Sistematizar, na 4ª página ficha de trabalho, as conclusões obtidas; (iv) Enunciar as propriedades do produto escalar e registá-las na ficha de trabalho; (v) Resolver os exercícios 24, 25 e 26 da página 139 do manual.

A aula decorreu de acordo com o plano previamente delineado, existindo lugar para os alunos se revelarem participantes ativos na construção do próprio conhecimento. Durante o estudo da variação do sinal do produto escalar de vetores, os alunos participaram de forma ativa na discussão coletiva, alcançando com relativa facilidade as conclusões pretendidas. A perceção da professora estagiária foi que os alunos assimilaram de forma sólida a relação entre o sinal do produto escalar e o sinal do cosseno do ângulo formado pelos vetores.

No caso específico em que o produto escalar de vetores é nulo, a professora estagiária considerou oportuno introduzir de imediato a noção de perpendicularidade entre vetores, estabelecendo a sua relação com o produto escalar. A introdução deste novo conteúdo permitiu reforçar o conceito lógico de equivalência. Este momento ocorreu de forma natural e constituiu uma ponte para as aprendizagens a desenvolver nas aulas subsequentes.

Relativamente aos exercícios, observou-se uma evolução positiva na dinâmica da turma. Os alunos demonstraram mais confiança e entusiasmo na sua resolução no quadro, constituindo, tal atitude, um indicador significativo de melhoria da sua relação com a disciplina.

Por fim, na reunião de núcleo de estágio, refletiu-se sobre a sequência das três aulas dedicadas ao produto escalar de vetores. No que concerne à ficha de trabalho concebida (Anexo 9), reconheceu-se que, inicialmente, os alunos demonstraram algumas dificuldades em acompanhar a sua organização e realizar os respetivos registos, o que levou a professora estagiária a ajustar a sua metodologia após a primeira aula. Nas aulas seguintes, projetou a ficha de trabalho e realizou os registos simultaneamente com os alunos, o que facilitou o acompanhamento e organização da informação por parte dos mesmos.

Em suma, considera-se que os objetivos de aprendizagem foram alcançados e que se conseguiu recuperar o interesse e a segurança dos alunos em relação à disciplina, especialmente após as dificuldades significativas demonstradas no tema da trigonometria.

2.2.2.8. Aulas de 17 de março

A aulas de 17 de março centraram-se no estudo do limite da família de sucessões (u_n) de termo geral $u_n = \frac{an+b}{cn+d}$ e nas regras operatórias com limites finitos. Segue-se um resumo da planificação das aulas, organizado na **Tabela 8**.

Tabela 8

Resumo das aulas de 17 de março – 11.º ano

Tema e Tópico: Sucessões – Limites de sucessões
Sumário: Limite da sucessão de termo geral $u_n = \frac{an+b}{cn+d}$. Operações com limites finitos. Resolução dos exercícios da ficha de trabalho "Limites finitos".
Recursos: Papel, lápis, caneta e borracha; Manual "Novo Ípsilon 11" – Parte 2; Computador com internet e projetor; Kits tecnológicos (1 por grupo); Ficha de trabalho "Limites finitos" (Anexo 10); Recurso do <i>GeoGebra</i> "Limite da sucessão $u_n = \frac{an+b}{cn+d}$ ".
Objetivos específicos: Determinar o limite da família de sucessões (u_n) de termo geral $u_n = \frac{an+b}{cn+d}$; Reconhecer e aplicar as regras operatórias com limites finitos; Melhorar a capacidade de investigação e descoberta autónoma.
Ações a desenvolver com os alunos: (i) Distribuir a ficha de trabalho e explicar a sua estrutura; (ii) Projetar a tarefa e promover a análise e discussão, em grupo turma, das conclusões obtidas na sua resolução; (iii) Generalizar e sistematizar as conclusões obtidas; (iv) Resolver o exercício 2 da ficha de trabalho; (v) Preencher, na ficha de trabalho, as propriedades das operações com limites finitos. Paralelamente, aplicar a operação estudada aos exemplos: $u_n = \frac{4n}{1-2n}$; $v_n = 3 - \frac{1}{n^2}$; (vi) Resolver o exercício 3 da ficha de trabalho; (vii) Sistematizar os conteúdos referentes ao cálculo dos limites abordados até ao momento.

Para estas aulas, a professora estagiária construiu uma ficha de trabalho composta por três partes: "Limite da sucessão $u_n = \frac{an+b}{cn+d}$ ", "Operações com limites finitos" e "Exercícios de aplicação". Esta estrutura tinha como objetivo acompanhar os diferentes momentos da aula e apoiar os alunos na organização do seu estudo. A primeira parte era composta por uma tarefa na qual os alunos, com o auxílio do *GeoGebra*, analisaram como a variação dos parâmetros a, b, c e d afeta o comportamento do limite da sucessão $u_n = \frac{an+b}{cn+d}$. Esta parte incluía também um espaço destinado à generalização das conclusões obtidas, culminando num exercício de aplicação direta dos diferentes casos observados. Na segunda parte, o foco eram as operações

com limites finitos, incluindo um espaço para o registo das propriedades operatórias e a sua aplicação a exemplos concretos. Por fim, a terceira parte era composta por quatro exercícios que exigiam a aplicação dos conceitos trabalhados ao longo das últimas aulas.

As aulas decorreram conforme o planeado, sendo possível cumprir todos os momentos estabelecidos, com a participação ativa dos alunos. Desta forma, foram cumpridos os objetivos estipulados e os alunos conseguiram desenvolver as competências pretendidas.

Na reunião do núcleo de estágio, foi unânime a opinião que os alunos compreenderam bem os diferentes casos associados ao cálculo do limite da sucessão $u_n = \frac{an+b}{cn+d}$. Sublinhou-se que o recurso do *GeoGebra* foi extremamente útil na exploração das várias situações, pois permitiu aos alunos observar de forma clara como a variação dos parâmetros afeta o comportamento do limite da sucessão, garantindo uma compreensão mais visual do conceito.

No entanto, foram evidentes algumas dificuldades relativamente às propriedades operatórias com limites finitos, uma vez que exigem um maior grau de abstração. Face a isto, sugeriu-se uma pequena alteração na estrutura da ficha de trabalho, propondo-se que os exemplos fossem trabalhados primeiro e só depois se proceder à respetiva generalização.

As professoras presentes na aula sublinharam que existiu uma evolução significativa face às aulas lecionadas anteriormente, sendo notório uma melhor marcação dos diferentes momentos da aula. Este facto permitiu uma condução mais fluída da aula, garantindo uma transição natural entre as tarefas e evitando períodos de inatividades.

Durante este bloco de aulas, a professora estagiária sentiu-se menos ansiosa e mais confiante na gestão e condução das mesmas. Considera-se que isto se deve, em grande parte, à relação de confiança estabelecida entre a professora e os alunos, o que contribuiu para o sucesso das aulas. Na reunião de núcleo de estágio, esta dimensão relacional foi igualmente destacada como crucial para uma gestão eficaz do comportamento e para o envolvimento ativo dos alunos, mesmo diante de conteúdos mais desafiantes como o conceito de limite.

Neste sentido, elogiou-se a observação incluída no plano de aula que destaca a necessidade de, no momento de atribuir o T.P.C., considerar o ritmo da turma e as circunstâncias externas como o teste de Físico-Química que os alunos tinham no dia seguinte.

2.2.3. Trabalho de projeto

No âmbito do Domínio de Autonomia Curricular (DAC) e em articulação com a disciplina de Biologia, foi desenvolvido com a turma principal do 11.º ano o trabalho de projeto que culminou na construção de um canteiro em espiral.

Para concretizar esta proposta, a turma foi dividida em cinco grupos de trabalho, ficando cada um responsável por planear a construção de um canteiro em espiral, aplicando os conhecimentos matemáticos adquiridos previamente sobre progressões aritméticas e geométricas. No planeamento do projeto, os alunos foram ainda desafiados a integrar princípios de sustentabilidade, a considerar as necessidades específicas das plantas e a recorrer, de forma crítica e responsável, a aplicações de inteligência artificial.

Com o intuito de orientar o desenvolvimento do projeto, foi disponibilizado aos alunos um guião elaborado pelo núcleo de estágio, concebido para estruturar as diferentes fases de trabalho, desde a pesquisa inicial até à construção, e estabelecer os principais objetivos a atingir em cada etapa. Este documento pode ser consultado no Anexo 11.

Durante a fase de planeamento do canteiro em espiral, reservaram-se momentos de trabalho em sala de aula, dedicados ao acompanhamento e apoio contínuo por parte das professoras. Posteriormente, ainda em contexto de sala de aula, cada grupo apresentou o seu projeto e o respetivo poster científico (Anexo 12). Na apresentação, os alunos explicaram, entre outros aspetos, a(s) progressão(ões) matemática(s) escolhida(s), a estrutura e o tamanho do canteiro, incluindo o número de voltas da espiral e a largura de cada volta, a organização do espaço e das plantas e a estimativa dos recursos necessários, como, por exemplo, o número de tijolos. Cada grupo construiu ainda um protótipo tridimensional do respetivo canteiro, que foi impresso numa impressora 3D, disponível na sala LED da escola.

Concluídas as apresentações, procedeu-se à votação do canteiro representativo da turma. O projeto vencedor foi construído na horta da escola, durante uma aula de Matemática A, integrada no programa dos “Dia D” do agrupamento (Anexo 13). Esta iniciativa do agrupamento visa promover momentos de partilha de aprendizagens, incentivando a criatividade, a inovação e o bem-estar, sob o lema “Crescer e inovar, com bem-estar!”.

O desenvolvimento deste trabalho de projeto encontra-se em consonância com o documento das *Aprendizagens Essenciais* de Matemática A do 11.º ano, que recomenda o aprofundamento do estudo das sucessões através da elaboração de um trabalho de projeto.

2.2.4. Avaliação

No decurso do ano letivo, a professora estagiária esteve envolvida em diversos momentos do processo de avaliação dos alunos, colaborando ativamente, tanto na construção de instrumentos de avaliação, como na implementação de estratégias de avaliação formativa e sumativa. A correção e classificação de todos os instrumentos de avaliação formativa e sumativa foram igualmente da responsabilidade da professora estagiária.

A professora estagiária participou na elaboração de todos os minitests e testes de avaliação sumativa aplicados à turma principal acompanhada, assim como na definição dos critérios de classificação de cada um desses instrumentos. Para efeitos ilustrativos, apresenta-se no Anexo 14 um teste de avaliação sumativa.

Em articulação com o núcleo de estágio, a professora estagiária construiu um conjunto de fichas de trabalho destinadas a consolidar os conteúdos trabalhados e a preparar os alunos para os instrumentos de avaliação sumativa. Estas fichas incidiram sobre diversos tópicos, nomeadamente, trigonometria, geometria analítica, estatística, sucessões, limites de funções e funções racionais (Anexos 12 a 17). Algumas das fichas de trabalho foram disponibilizadas em formato papel, para resolução em contexto de sala de aula, enquanto outras foram atribuídas como tarefas através do canal da disciplina, no *Teams*, a plataforma oficial de comunicação entre professores e alunos da escola. No caso das tarefas propostas via *Teams*, estipulou-se um prazo de submissão das resoluções, após o qual a professora estagiária procedeu à correção e devolveu feedback individualizado a todos os alunos, recorrendo às potencialidades da plataforma para esse fim. Um exemplo de feedback disponibilizado encontra-se no Anexo 21. Adicionalmente, os alunos podiam refletir sobre a tarefa realizada, através da escolha de um *emoji* e de um sentimento associado. No Anexo 22 encontra-se um exemplo dessas reflexões, com as respostas de alguns alunos a uma tarefa específica. Esta prática fomentou momentos de autorreflexão e desenvolvimento do sentido crítico dos alunos, permitindo-lhes ter consciência das suas dificuldades e reconhecer os seus progressos.

Através do canal da disciplina no *Teams*, a professora estagiária disponibilizou, ainda, as resoluções completas de todas as fichas de trabalho e elementos de avaliação sumativa.

Durante o ano letivo, a professora cooperante e a professora estagiária procuraram implementar outras estratégias de avaliação formativa. O feedback oral foi uma prática recorrente durante as aulas e incluía sugestões de melhoria, orientações para trabalho

autônomo e valorização das conquistas dos alunos. Inclusive, em determinadas situações, eram os próprios alunos que procuravam este feedback e orientações por parte das professoras.

2.3. Prática pedagógica no 9.º ano

A turma do 9.º ano era composta por 20 alunos, igualmente distribuídos entre o sexo feminino e masculino, com uma média de idades de 14 anos.

No que respeita ao desempenho escolar, a turma apresentava lacunas bastante profundas nas aprendizagens, refletindo-se num aproveitamento global fraco. Apenas três ou quatro alunos conseguiam obter sucesso na disciplina de Matemática, enquanto os restantes enfrentavam dificuldades significativas no acompanhamento dos conteúdos lecionados. De modo geral, os alunos revelavam pouca autonomia e fracos hábitos de trabalho, tanto dentro, como fora da sala de aula, sendo frequente não levarem o material necessário para a realização das atividades propostas nas aulas. Acresce que existia um grupo de alunos particularmente desmotivado, cuja atitude perante a disciplina era marcada pelo desinteresse e por uma postura de desistência relativamente à própria aprendizagem.

A par disto, enfrentaram-se diversos desafios relacionados com o comportamento em sala de aula, com alunos frequentemente irrequietos, dando lugar para a existência de conversas paralelas e com pouco envolvimento nas tarefas propostas. De forma transversal, observava-se escassa valorização da escola por parte dos alunos, que, na sua maioria, evidenciavam poucas aspirações académicas ou objetivos pessoais relacionados com o sucesso escolar.

2.3.1. Aulas lecionadas

Ao longo do ano letivo, a professora estagiária lecionou um total de 6 aulas de 50 minutos. Todas estas aulas foram realizadas na presença da professora cooperante, da professora titular da turma e da colega estagiária. Note-se que todas as aulas lecionadas se encontram agrupadas em blocos duplos, perfazendo 100 minutos.

2.3.1.1. Aulas de 23 de outubro

Nas aulas de 23 de outubro introduziu-se as inequações do 1.º grau com uma incógnita. Segue-se um resumo da planificação das aulas, organizado na **Tabela 9**.

Tabela 9

Resumo das aulas de 23 de outubro – 9.º ano

Tema e Tópico: Álgebra – Inequações do 1.º grau com uma incógnita
Sumário: Situação de equilíbrio e desequilíbrio numa balança de pratos. Inequações do 1.º grau com uma incógnita. Resolução dos exercícios da página 39 do manual. Realização do <i>Kahoot</i> "Inequações em ação".
Recursos: Papel, lápis, caneta e borracha; Manual "Prisma 9" – Volume 1; Computador com internet e projetor; Balança de pratos e pesos; Telemóvel; <i>Kahoot</i> "Inequações em ação".
Objetivos específicos: Reconhecer inequações do 1.º grau com uma incógnita; Traduzir situações em contextos matemáticos e não matemáticos por meio de uma inequação do 1.º grau com uma incógnita; Resolver inequações do 1.º grau com uma incógnita e apresentar o respetivo conjunto-solução.
Ações a desenvolver com os alunos: (i) Explicar o funcionamento da balança de pratos; (ii) Representar uma situação de equilíbrio na balança de pratos e escrever a equação que descreva a situação. Com base neste exemplo, relembrar os conceitos: incógnita, termos e membros de uma equação; (iii) Representar uma situação de desequilíbrio na balança de pratos e escrever a inequação que descreva a situação. Com base no exemplo, introduzir o conceito de inequação e de solução de uma inequação; (iv) Resolver, em grupo a turma, a inequação: $-3x - 9 > 15$. Com base no exemplo, referir os princípios de equivalência e introduzir o conceito de conjunto-solução de uma inequação (representar na reta real e na forma de intervalo de números reais); (v) Resolver os exercícios 11.2, 11.4, 11.6 e 11.8 da pag. 39 do manual; (vi) Realizar, em grupos, o <i>Kahoot</i> "Inequações em ação".

Devido a restrições de horário, a professora estagiária não teve oportunidade de acompanhar todas as aulas desta turma desde o início do ano letivo, o que condicionou, numa fase inicial, o conhecimento das dinâmicas da turma e das características individuais dos alunos. Por este motivo, o núcleo de estágio decidiu que a primeira aula lecionada seria conduzida pelas duas professoras estagiárias, em regime de coadjuvação. Desta forma, cada uma ficou responsável por momentos distintos da aula, alternando entre si as responsabilidades e garantindo uma abordagem colaborativa durante a prática letiva.

Importa referir que a estratégia adotada na turma do 9.º ano acompanhada pela colega estagiária foi semelhante, pelo que foram alternados os momentos lecionados por cada professora estagiária, assegurando que, no final das duas aulas observadas, ambas tivessem tido a oportunidade de lecionar todos os momentos planeados.

Face ao feedback recebido, por parte da professora cooperante e da professora titular da turma, em relação à aula lecionada na outra turma do 9.º ano, ajustou-se o desenvolvimento da aula, procurando responder às características específicas dos alunos desta turma.

Durante a aula, os alunos demonstraram bastante interesse na ilustração prática das situações de equilíbrio e desequilíbrio, proporcionada pela utilização da balança de pratos. A manipulação dos pesos revelou-se uma estratégia eficaz para facilitar a compreensão da transição entre as duas situações. Simultaneamente, de forma a estabelecer um paralelismo entre a vertente prática e a componente teórica, procedeu-se à sistematização dos conceitos no quadro, incentivando-se a participação ativa dos alunos no decorrer deste momento.

A balança de pratos utilizada, um modelo antigo pertencente ao material dos laboratórios de Físico-Química da escola, despertou curiosidade nos alunos e conferiu um carácter diferenciador à aula. O recurso a materiais menos usais foi destacado positivamente pela professora cooperante e pela professora titular da turma, que sublinharam a importância de diversificar as metodologias no contexto de sala de aula.

No que respeita à introdução da resolução de inequações, a inequação $-3x - 9 > 15$ foi resolvida em grupo turma e optou-se por mencionar apenas oralmente os princípios de equivalência, uma vez que estes já haviam sido abordados de forma detalhada no 7.º ano, no âmbito da resolução de equações. Esta opção pedagógica permitiu o envolvimento de um número significativo de alunos, tornando este momento da aula mais dinâmico e acessível.

De seguida, procedeu-se à resolução do exercício 11. No entanto, a professora estagiária decidiu não seguir integralmente as alíneas inicialmente previstas no plano de aula, por considerar, no momento, que algumas poderiam revelar-se excessivamente complexas para o grupo de alunos em questão. Assim, optou por começar pelas questões mais simples e ir aumentando gradualmente o grau de dificuldade. Durante esta fase da aula, vários alunos resolveram inequações em simultâneo no quadro e, apesar dessa dinâmica ser propícia a alguma agitação, o momento foi gerido de forma organizada e eficaz. A professora estagiária optou também por envolver ativamente os alunos no processo de aprendizagem, convidando-os a apresentar as suas resoluções no quadro e a partilhar os respetivos raciocínios com os colegas. Os alunos demonstraram-se bastante receptivos a esta abordagem.

Durante a realização do *Kahoot*, a turma esteve naturalmente mais agitada, uma vez que este tipo de atividade é propício a tal comportamento.

Por fim, importa mencionar que no decorrer da aula foi feito, por parte das professoras estagiárias, um esforço consciente para estimular ao máximo a participação e envolvimento

dos alunos. Procurou-se estabelecer um ritmo de aula em que não houvesse lugar para a existência de conversas paralelas, que são bastante frequentes na turma em questão. Ainda assim, reconhece-se a importância de nas aulas futuras continuar a incentivar a participação de determinados alunos que, em muitos momentos, permanecem inativos.

2.3.1.2. Aulas de 8 de janeiro

Nas aulas de 8 de janeiro introduziu-se o caso notável da multiplicação diferença de quadrados. Segue-se um resumo da planificação das aulas, organizado na **Tabela 10**. O plano completo da aula encontra-se no Anexo 23.

Tabela 10

Resumo das aulas de 8 de janeiro – 9.º ano

Tema e Tópico: Álgebra – Casos notáveis da multiplicação
Sumário: Casos notáveis da multiplicação: diferença de quadrados. Resolução dos exercícios das páginas 130 e 131 do manual.
Recursos: Manual “Prisma 9” – Volume 1; Papel, lápis, caneta e borracha; Computador com internet e projetor; Telemóvel; Tarefa “Caso Notável: Diferença de Quadrados” (Anexo 23); Quadrados de papel coloridos e tesouras; PowerPoint “Caso Notável: Diferença de Quadrados” (Anexo 23); Desafio: “O Ano Novo em Matemática!”
Objetivos específicos: Aplicar a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição de monómios; Generalizar o caso notável da multiplicação de binómios: diferença de quadrados; Aplicar o caso notável da multiplicação de binómios: diferença de quadrados.
Ações a desenvolver com os alunos: (i) Distribuir a tarefa e explicar a sua estrutura; (ii) Realizar, em grupos de 2 ou 3 alunos, a tarefa; (iii) Projetar o PowerPoint e promover, em grupo turma, a análise e discussão das conclusões obtidas na resolução da tarefa; (iv) Generalizar o caso notável; (v) Sistematizar alguns conceitos relacionados com o caso notável; (vi) Transformar, em grupo turma, a expressão algébrica $(x - 4)(x + 4)$ num polinómio reduzido; (vii) Resolver os exercícios: 2, pag. 130; 1.4, 1.6, 1.8 e 5, pag. 131; (viii) Atribuir T.P.C.; (ix) Resolver o desafio “O Ano Novo em Matemática!”.

Perante as dificuldades de aprendizagem e o reduzido envolvimento habitual por parte dos alunos nas tarefas propostas, considera-se que o bloco de aulas foi planeado de forma adequada. A professora estagiária procurou adaptar recursos e estratégias para promover a participação ativa dos alunos e facilitar a compreensão do caso notável.

A tarefa realizada revelou-se eficaz, ao criar um ambiente colaborativo, propício ao envolvimento dos alunos, inclusive daqueles que habitualmente se mostram menos participativos. A utilização de materiais manipuláveis, bem como a escolha de valores numéricos concretos em vez da generalização imediata, contribuíram para uma melhor apropriação do conteúdo, permitindo aos alunos visualizar concretamente o raciocínio matemático subjacente. No entanto, identificou-se algum desfasamento entre a componente prática da tarefa e o momento de generalização do caso notável, aspeto que mereceu reflexão por parte da professora estagiária.

Face à agitação de alguns alunos da turma, a professora estagiária recorreu a uma estratégia que, em aulas anteriores, se revelou eficaz: chamar os alunos mais irrequietos ao quadro para resolverem os exercícios propostos e explicarem o respetivo raciocínio aos colegas. Contudo, nesta aula, a estratégia não teve o efeito desejado, pois alguns alunos adotaram uma postura exibicionista, desviando o foco do trabalho e tentando comprometer o ambiente de aprendizagem. Ainda assim, as professoras presentes destacaram que, apesar dos desafios comportamentais da turma, a professora estagiária manteve uma postura serena e profissional, revelando controlo da situação na gestão dos diferentes momentos da aula.

2.4. Prática pedagógica noutras turmas

Ainda que com menor frequência nas aulas, a professora estagiária acompanhou também outras duas turmas da professora cooperante, do 11.º e 12.º anos, ambas do curso científico-humanístico de ciências socioeconómicas. A presença da professora estagiária foi particularmente regular nas aulas da turma do 11.º ano, sobretudo nas de carácter prático.

A turma do 11.º ano era composta por 24 alunos, dos quais 18 eram do sexo masculino e 6 do sexo feminino. O aproveitamento global da turma era fraco, sendo que mais de metade dos alunos transitou do 10.º ano com classificação negativa. Uma parte significativa dos alunos da turma apresentava profundas fragilidades ao nível dos pré-requisitos, o que comprometia a aquisição e mobilização dos conteúdos programáticos de Matemática A do 11.º ano.

Perante este cenário e na sequência da reunião intercalar do 1.º semestre, a professora cooperante implementou um conjunto de medidas, entre as quais se incluiu a presença mais frequente das duas professoras estagiárias nas aulas de carácter prático, como forma de reforçar o acompanhamento individualizado dos alunos. Durante estas aulas, a dinâmica da turma era bastante positiva, marcada pelo trabalho colaborativo e espírito de entajuda.

Considera-se que esta medida contribuiu para um ambiente mais propício à aprendizagem, que se refletiu numa mudança da postura dos alunos quer em aula, quer face à disciplina de Matemática. Além disto, do 1.º para o 2.º semestre registou-se uma melhoria significativa dos resultados, tendo 8 dos 19 alunos que apresentavam classificação negativa no 1.º semestre conseguido recuperar e obter classificação positiva.

A turma do 12.º ano era constituída por 15 alunos, dos quais 7 eram do sexo masculino e 8 do sexo feminino. Embora tenha estado presente num menor número de aulas, a professora estagiária manteve-se em permanente contacto com a professora cooperante que fazia questão de partilhar a sua experiência com este grupo. Constatou-se que, apesar de se tratar de uma turma do 12.º ano, a atitude dos alunos perante a disciplina, nomeadamente no início do ano letivo, revelava pouco estudo e trabalho autónomo, aquém do que seria expectável face às exigências da disciplina de Matemática A.

Apesar da presença menos regular nas aulas destas turmas, a experiência revelou-se particularmente significativa, uma vez que permitiu reconhecer a diversidade e a complexidade dos contextos educativos, reforçando a importância de uma prática docente flexível e diferenciada. O contraste entre a turma do 11.º ano, onde a implementação de medidas pedagógicas ajustadas e atempadas se refletiu positivamente no desempenho e envolvimento dos alunos e a turma do 12.º ano, onde se evidenciou a necessidade de fomentar hábitos de estudo autónomo e consistente, consolidou a consciência de que cada grupo exige respostas pedagógicas específicas.

3. PRÁTICA NÃO LETIVA

Neste capítulo são descritas as atividades não letivas realizadas em que a professora estagiária participou, nomeadamente as reuniões e formações assistidas e as visitas de estudo acompanhadas.

3.1. Reuniões assistidas

3.1.1. Reuniões de estágio

As reuniões de núcleo de estágio contaram sempre com a presença das duas professoras estagiárias e da professora cooperante titular das turmas do 11.º e 12.º ano. Durante estas reuniões, definiram-se as aulas a serem lecionadas pelas professoras estagiárias, estabeleceram-se propostas de momentos de avaliação e os respetivos critérios e planearam-se as atividades letivas e não letivas. Além disso, estas reuniões revelaram-se um espaço de partilha e debate de estratégias pedagógicas a adotar em contexto de sala de aula.

3.1.2. Reuniões de grupo e departamento

A professora estagiária participou nas reuniões do grupo disciplinar 500 e do departamento de Matemática (grupos 230 e 500). A presença nestas reuniões permitiu um contacto direto com a natureza das informações transmitidas aos docentes, nomeadamente as provenientes do Conselho Pedagógico. Estas sessões constituíram também uma oportunidade para discutir e definir os critérios de avaliação do grupo disciplinar, realizar balanços semestrais sobre o ponto de situação das turmas, partilhar práticas pedagógicas entre os docentes e escolher os manuais escolares do 11.º ano a adotar no próximo ano letivo.

3.1.3. Reuniões de conselho de turma

A professora estagiária esteve presente em todas as reuniões de conselho de turma, da turma principal acompanhada ao longo do ano letivo, nas quais se discutiram situações relativas a alguns alunos, se tomaram decisões face a eventuais problemas da turma e se formalizaram as classificações finais de todas as disciplinas.

Adicionalmente, a professora estagiária participou nas reuniões de conselho de turma da outra turma do 11.º ano, na qual a professora cooperante desempenhava a função de secretária. Esta presença permitiu-lhe compreender melhor o papel desempenhado pelo

diretor de turma e pelo secretário, bem como familiarizar-se com o processo de redação das atas, tendo, inclusive, contribuído na sua elaboração.

3.1.4. Outras Reuniões

No dia 2 de setembro, a professora estagiária esteve presente na reunião aberta do Conselho Geral do agrupamento da escola, onde houve lugar à cerimónia de tomada de posse da nova diretora do agrupamento.

Ainda durante o período pré-letivo, realizou-se, no dia 9 de setembro, a Reunião Geral de Docentes, na qual a professora estagiária também participou.

3.2. Formações assistidas

No dia 11 de dezembro, a professora estagiária assistiu a uma sessão formativa online dedicada à utilização do INOVAR. Esta formação teve como objetivo capacitar os docentes para o domínio das funcionalidades específicas da plataforma utilizada pelo agrupamento. Dos tópicos abordados, destaca-se o lançamento das avaliações de final de 1.º semestre, a elaboração e consulta de atas e a recuperação de faltas dos cursos profissionais.

Esta sessão formativa revelou-se particularmente relevante para a professora estagiária, uma vez que permitiu uma maior familiarização com as ferramentas disponíveis no INOVAR, nomeadamente no que diz respeito aos seus benefícios para os docentes no processo de avaliação dos alunos. Além disto, como permite automatizar e organizar diversas tarefas, o uso do INOVAR possibilita que os professores dediquem mais tempo a atividades pedagógicas e ao acompanhamento individual dos seus alunos.

No decorrer do mês de maio, a professora estagiária esteve presente nas apresentações de manuais escolares de diversas editoras e ainda na formação “Aprender Matemática com tecnologia” organizada pela Raiz Editora.

3.3. Dia Internacional da Matemática

Para a celebração do Dia Internacional da Matemática, assinalado a 14 de março, o Departamento de Matemática organizou um conjunto de atividades adaptadas aos diferentes níveis de escolaridade. No caso das turmas do 11.º ano, a participação concretizou-se com a escrita de poemas relacionados com a disciplina. A professora estagiária esteve envolvida na organização desta atividade com as turmas acompanhadas, incentivando os alunos na criação

dos poemas que foram, posteriormente, afixados por toda a escola. No Anexo 24, encontra-se o poema escrito por um aluno.

Ainda integrada nas comemorações do Dia Internacional da Matemática, destaca-se a participação de cinco alunos do 11.º ano da escola na competição internacional de Matemática *Náboj* (Anexo 25). Trata-se de uma competição de carácter dinâmico e colaborativo, na qual equipas constituídas por quatro ou cinco alunos enfrentam desafios matemáticos de dificuldade crescente, abrangendo áreas como geometria, teoria dos números, combinatória e álgebra. A professora estagiária acompanhou a equipa da escola no evento que decorreu no dia 14 de março, no *Técnico Innovation Center*, em Lisboa, reunindo equipas de alunos do 3.º ciclo e do ensino secundário. A participação nesta iniciativa revelou-se uma oportunidade enriquecedora para os alunos, permitindo-lhes desenvolver competências matemáticas e de trabalho colaborativo, num ambiente estimulante e competitivo. O carácter internacional da competição conferiu um entusiasmo acrescido à equipa da escola, uma vez que os problemas foram resolvidos simultaneamente por equipas de diversos países europeus, com os resultados atualizados em tempo real, num *leaderboard* global.

3.4. Visitas de estudo

No âmbito da disciplina de Português, a professora estagiária acompanhou a turma principal do 11.º ano em duas visitas de estudo. A primeira visita de estudo decorreu no dia 4 de dezembro e teve como destino a Igreja de São Roque, em Lisboa. A segunda visita de estudo realizou-se no dia 11 de dezembro, com a ida ao Museu do Aljube. Em ambas as ocasiões, os professores envolvidos acompanharam os alunos durante todo o percurso, desde a saída da escola até aos respetivos locais a visitar.

Numa outra ocasião, a professora estagiária, em conjunto com a colega de estágio e a professora cooperante, participou na organização da ida de duas turmas do 11.º ano, incluindo a turma principal acompanhada, ao Dia Aberto da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, realizado no dia 7 de maio. Durante esta iniciativa, os alunos tiveram a oportunidade de conhecer a ampla oferta de licenciaturas, explorar áreas do seu interesse e compreender, na prática, o impacto dos diferentes cursos no quotidiano. Para a professora estagiária, a participação na organização desta visita de estudo revelou-se particularmente enriquecedora, uma vez que lhe proporcionou um contacto direto com os procedimentos burocráticos inerentes à organização de uma visita de estudo (Anexo 26).

4. REFLEXÃO SOBRE O ESTÁGIO PEDAGÓGICO

O estágio pedagógico constituiu uma etapa crucial na formação inicial da professora estagiária, permitindo-lhe colocar em prática na sala de aula os conhecimentos adquiridos durante a formação académica. A integração na escola foi pautada por um ambiente acolhedor e colaborativo, tendo sido muito bem recebida por parte do corpo docente e das assistentes operacionais, o que contribuiu para um ambiente de trabalho propício ao desenvolvimento profissional.

Ao longo da prática letiva, reconheceu-se que uma planificação pormenorizada de cada aula constitui um elemento imprescindível para garantir o seu bom funcionamento. Através de uma preparação cuidada, foi possível antecipar dificuldades, prevenir imprevistos e garantir uma maior intencionalidade pedagógica. No entanto, foi igualmente perceptível que o plano de aula deve ser encarado como um instrumento flexível e dinâmico, passível de ser ajustado em função das especificidades do grupo turma e das necessidades que emergem em tempo real.

Relativamente ao desempenho da professora estagiária, foi notória a sua evolução ao longo do ano letivo. A comunicação tornou-se mais clara, os episódios de dispersão diminuíram significativamente e a gestão do tempo e das tarefas revelou-se progressivamente mais eficiente e alinhada com os objetivos de aprendizagem. Esta melhoria refletiu não só o seu amadurecimento profissional, como também a sua capacidade de refletir criticamente sobre as práticas adotadas, adaptando-as de forma consciente às necessidades dos alunos.

A professora estagiária teve o privilégio de acompanhar turmas de três níveis de ensino. No ensino básico, uma turma do 9.º ano e no ensino secundário, duas turmas do 11.º ano e uma turma do 12.º ano. Esta diversidade constituiu uma oportunidade única de contacto com diferentes perfis de alunos e práticas letivas ajustadas aos discentes.

Desde as primeiras aulas da turma principal acompanhada do 11.º ano, a professora cooperante incentivou a professora estagiária a circular pela sala de aula e a interagir diretamente com os alunos. Ao longo do ano letivo, estabeleceu-se uma relação de confiança mútua com o grupo, essencial para a criação de um ambiente propício à aprendizagem.

Por sua vez, o acompanhamento regular da outra turma do 11.º ano revelou-se igualmente significativo, pois permitiu constatar como a implementação atempada de medidas pedagógicas ajustadas às especificidades dos alunos pode ter um impacto transformador. Perante fragilidades profundas ao nível dos pré-requisitos do 3.º ciclo e dificuldades claras na aquisição e mobilização dos conteúdos, a adoção de estratégias adequadas originou uma

melhoria substancial na relação dos alunos com a disciplina e nos resultados obtidos. Não obstante, o facto de se tratar igualmente de uma turma do 11.º ano, as diferenças entre os dois grupos eram significativas. Foi, assim, perceptível que a existência de várias turmas do mesmo nível não garante, por si só, uma prática docente mais simples ou uniforme, desmitificando-se, a percepção de homogeneidade frequentemente associada a este cenário. Importa salientar que as turmas em questão foram muito recetivas à presença da professora estagiária, valorizando o seu contributo no processo de ensino e aprendizagem.

Em relação à turma do 12.º ano destaca-se a oportunidade de observar a gestão equilibrada da professora cooperante nos conteúdos lecionados, ajustando-se à diversidade de perfis, nomeadamente entre os alunos que se iam ou não propor ao exame nacional.

O contacto com a turma do 9.º ano foi um choque de realidade para a professora estagiária, dada a elevada incidência de alunos desinteressados, pouco assíduos e episódios frequentes de indisciplina. Face a este contexto, tornou-se evidente que o exercício da docência exige, além do domínio científico, uma elevada capacidade de adaptação, tomada de decisões eficazes e criatividade na implementação de estratégias diversificadas. Nas aulas que lecionou, a professora estagiária procurou contrariar o desinteresse manifestado por alguns alunos, através da implementação de metodologias de ensino que promovessem o seu envolvimento. Ainda que exigente, a experiência vivida com esta turma foi profundamente enriquecedora, proporcionando à professora estagiária uma visão realista e amadurecida das múltiplas dimensões que compõe o quotidiano escolar. Com efeito, verificou-se que, ao nível do 3.º ciclo, a docência exige um cuidado redobrado na transmissão dos conteúdos, de modo a garantir que os conceitos são, efetivamente, compreendidos pelos alunos. A articulação entre o acompanhamento das várias turmas permitiu à professora estagiária refletir criticamente sobre as diferenças significativas entre o ensino básico e o ensino secundário.

Por outro lado, no que concerne à avaliação dos alunos, a professora estagiária contactou com a complexidade inerente à elaboração dos instrumentos de avaliação, tendo participado ativamente na sua construção. O seu envolvimento permitiu-lhe compreender a importância de uma planificação criteriosa, que incluía decisões claras sobre o que se pretende avaliar, bem como a atribuição ponderada de cotações, de modo a assegurar justiça, coerência e alinhamento com os objetivos de aprendizagem.

O facto de o estágio pedagógico ter decorrido numa escola que adota o modelo de avaliação por áreas de competência, constituiu uma oportunidade particularmente enriquecedora. No caso da disciplina de Matemática, os alunos são avaliados de acordo com

quatro domínios: Conhecimentos e Procedimentos (CP), Raciocínio Matemático (RM), Resolução de Problemas (RP) e Comunicação Matemática (CM). Em cada elemento de avaliação sumativa, existe uma distribuição igualitária entre estes quatro domínios. Consequentemente, é atribuída uma classificação distinta para cada um dos domínios, em vez de uma nota global de 0 a 20 valores ou de 0 a 100%. Esta realidade fez com que a professora estagiária contactasse diretamente com um modelo de avaliação atual, centrado nas competências dos alunos. Ainda que este modelo tenha sido implementado no agrupamento de escolas no ano letivo 2022/23 e esteja alinhado com as orientações nacionais, a sua implementação continua a suscitar resistência por parte de alguns docentes da escola. Essa resistência, frequentemente motivada pelo receio da mudança e pela dificuldade de abandonar práticas de avaliação enraizadas, conduz à procura de soluções que se aproximem o mais possível do modelo de avaliação tradicional, como, por exemplo, a atribuição de um único domínio a cada questão de um teste de avaliação sumativa. Note-se que os elementos de avaliação concebidos pelo núcleo de estágio não se enquadram neste caso, conforme se pode verificar no Anexo 14. Perante este cenário, a professora estagiária refletiu criticamente e concluiu que a transição para modelos de avaliação centrados no desenvolvimento de competências exige, não só formação contínua por parte dos docentes, como também cultura colaborativa que promova a partilha de práticas e reflexão pedagógica.

Em suma, o estágio pedagógico contribuiu, substancialmente, para o crescimento pessoal e profissional da professora estagiária. Seguramente que um dos aspetos que mais enriqueceu esta experiência foi o trabalho colaborativo desenvolvido no seio do núcleo de estágio. A observação sistemática das aulas lecionadas pela professora cooperante e pela colega estagiária fomentou a partilha de estratégias de ensino, gestão em sala de aula e abordagem dos conteúdos matemáticos. Além disso, as professoras estagiárias colaboraram ativamente na conceção e preparação de recursos didáticos, ainda que, posteriormente, cada aula tenha seguido dinâmicas próprias, ajustadas ao estilo pessoal de cada uma.

Desde o início do ano letivo que a professora cooperante concedeu bastante autonomia à professora estagiária. Esta confiança traduziu-se na possibilidade de experimentar diferentes abordagens pedagógicas e de refletir criticamente sobre a sua prática, fatores estes que contribuíram significativamente para o processo de construção da sua identidade profissional.

PARTE 2 – PROJETO DE INVESTIGAÇÃO

1. INTRODUÇÃO

A presente investigação encontra-se organizada em cinco capítulos. O primeiro capítulo apresenta a motivação e pertinência do estudo realizado, bem como o objetivo e as questões de investigação que se pretendem responder. O segundo capítulo é dedicado à revisão de literatura, começando por se discutir a aprendizagem da álgebra e o papel das tarefas no processo de ensino e aprendizagem da Matemática. De seguida, o foco recai sobre a compreensão dos conceitos matemáticos e, por fim, apresenta-se um subcapítulo relativo à teoria da reificação. No terceiro capítulo, contextualiza-se a metodologia adotada, com destaque para a investigação qualitativa, o estudo de caso, os instrumentos de recolha de dados e os procedimentos metodológicos adotados na investigação. No quarto capítulo, expõem-se os estudos de caso e a respetiva análise dos dados. O quinto e último capítulo é reservado às conclusões do estudo efetuado.

1.1. Motivação e pertinência do estudo

A implementação de tarefas que contemplam o tema das sucessões foi a principal motivação para este estudo. Segundo o *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2017), um ensino eficaz da Matemática é aquele que promove o envolvimento dos alunos na resolução e discussão de tarefas, contribuindo, assim, para o desenvolvimento do raciocínio matemático e da resolução de problemas. Agregado a este fator, a possibilidade de investigar como os alunos do ensino secundário constroem e mobilizam os seus conhecimentos sobre este tema foi um fator determinante para a concretização da presente investigação.

Apesar das orientações curriculares e dos avanços na investigação em didática da matemática, é ainda visível uma permanência de práticas letivas ancoradas na reprodução de procedimentos, muitas vezes desprovidos de sentido conceptual (Ribeiro et al., 2024). Esta conceção não é apenas teórica, decorre também da experiência pessoal da investigadora enquanto aluna e futura professora, ao constatar que se continua, por vezes, a ensinar da mesma forma como se aprendeu, mesmo que se reconheçam, à posteriori, as fragilidades deste tipo de ensino. Como referem Ribeiro et al. (2024), é necessário questionar as verdades que se cristalizaram no ensino da matemática e romper com rotinas pedagógicas que privilegiam o resultado em detrimento da compreensão conceptual ao longo do processo de ensino e aprendizagem. Foi precisamente este confronto entre o que se ensina, como se ensina

e o que os alunos efetivamente compreendem e como compreendem que impulsionou a realização do estudo.

Independentemente das alterações curriculares previstas, este estudo mantém-se atual e pertinente, uma vez que as sucessões integram tanto o documento das *Aprendizagens Essenciais* de Matemática A atualmente em vigor no 11.º ano, como o programa homologado em 2023, que será implementado a partir do próximo ano letivo (MEC, 2018; Silva et al., 2023).

1.2. Objetivo e questões de investigação

Com vista a analisar de que forma os alunos mobilizam os seus conhecimentos sobre sucessões na resolução de tarefas, o trabalho de investigação foi orientado pelas seguintes questões de investigação:

1. Como se caracteriza a compreensão do conceito de sucessão?
2. Como acontece o processo de reificação do conceito de sucessão?

Uma vez definido o objetivo da presente investigação e clarificada a sua pertinência no âmbito do ensino e aprendizagem da Matemática, no capítulo seguinte procede-se ao enquadramento teórico que a sustenta.

2. REVISÃO DE LITERATURA

Neste capítulo apresenta-se o referencial teórico que sustenta o estudo levado a cabo com alunos de uma turma do 11.º ano do curso científico-humanístico de ciências e tecnologias, no ano letivo 2024/25. Com esta investigação pretende-se analisar de que forma os alunos mobilizam os seus conhecimentos sobre sucessões na resolução de tarefas. O enquadramento teórico encontra-se, assim, organizado em quatro subcapítulos: aprendizagem da álgebra, tarefas matemáticas, compreensão dos conceitos matemáticos e teoria da reificação.

2.1. Aprendizagem da Álgebra

A Álgebra é um ramo da Matemática que, segundo Ponte (2017), assenta na noção de variável como uma entidade abstrata que se pode representar de forma simbólica ou não simbólica e na noção de estrutura que envolve relações, operações e propriedades. O mesmo autor acrescenta que este campo da Matemática permite formular generalizações sobre estruturas matemáticas, através do uso de variáveis.

Enquadrado no domínio da Álgebra, o conceito de função é considerado um dos mais importantes de toda a Matemática, assumindo um lugar proeminente nos programas do ensino secundário (Ponte, 1990; 2017). A aprendizagem de funções estimula o desenvolvimento do pensamento algébrico que, por sua vez, promove a interpretação da matemática e estimula os alunos a estabelecer generalizações e conexões entre diferentes conceitos (Windsor, 2010). Segundo este autor, o desenvolvimento do pensamento algébrico ocorre de forma gradual, passando por três estádios. Os alunos começam por recorrer à linguagem natural para descrever generalidades e relações, posteriormente, utilizam diagramas e símbolos matemáticos para abreviar essas ideias e, por fim, sintetizam essas ideias através de expressões matemáticas e equações, tabelas e gráficos (Windsor, 2010).

Ponte (2017) defende que o pensamento algébrico pode e deve iniciar-se desde os primeiros anos de escolaridade, numa fase conhecida como “early algebra”, na qual ainda não se recorre à linguagem simbólica. Segundo este autor, nesta fase é fundamental a articulação entre as representações visuais, numérica e em linguagem natural, sendo o trabalho com sequências um dos aspetos centrais. Numa etapa mais avançada, ganha particular relevância

a relação entre as representações algébrica e gráfica, bem como a sua articulação com a linguagem natural (Ponte, 2017).

O currículo de Matemática em Portugal encontra-se alinhado com esta perspetiva de desenvolvimento progressivo do pensamento algébrico. Apesar do conceito de sucessão ser formalmente introduzido apenas no 11.º ano do ensino secundário, é esboçado ao longo do percurso escolar. Desde o primeiro ciclo do ensino básico, os alunos começam a ser confrontados com situações que envolvem a identificação de regularidades em sequências, num contexto predominantemente empírico (Canavarro et al., 2021a). Conforme progredem para o segundo e terceiro ciclo, começam a contactar com a lei de formação de uma sequência ou sucessão, ainda que esta última não seja designada formalmente como tal (Canavarro et al., 2021b; 2021c).

Uma sucessão corresponde a uma função cujo domínio é o conjunto dos números naturais e o conjunto de chegada é o conjunto dos números reais. De acordo com as *Aprendizagens Essenciais* de Matemática A do 11.º ano, em vigor à data desta investigação, os alunos devem ser capazes de resolver problemas que envolvam sucessões monótonas, limitadas e definidas por recorrência, progressões aritméticas e geométricas, bem como apropriar-se da noção de limite de uma sucessão (MEC, 2018). Na versão mais recente deste documento, os tópicos sucessões e progressões aritméticas e geométricas, inseridos no tema Matemática discreta, são abordados separadamente (Silva et al., 2023). No tópico sucessões, os autores estabelecem como objetivos de aprendizagem a identificação e a análise de regularidades em exemplos numéricos e pictóricos, bem como a identificação e a análise de formas de gerar sucessões, quer através de termos gerais, quer por recorrência. Relativamente às progressões aritméticas e geométricas, pretende-se que os alunos sejam capazes de as reconhecer e de as definir a partir do primeiro termo e da respetiva razão.

As tarefas propostas no âmbito desta investigação foram desenhadas de acordo com estes objetivos curriculares.

2.2. Tarefas Matemáticas

As tarefas constituem um elemento central no processo de ensino e aprendizagem da Matemática (Duarte et al., 2024), uma vez que proporcionam diversas atividades aos alunos (Ponte, 2014; 2020). Apesar dos termos atividade e tarefa serem frequentemente utilizados como sinónimos, na teoria educacional distinguem-se conceptualmente (Ponte, 2014; 2020).

Segundo Swan (2014), uma tarefa é qualquer coisa que o professor coloca aos seus alunos para fazer, enquanto o termo atividade refere-se às ações concretas realizadas pelos alunos na resolução de uma tarefa (Christiansen & Walther, 1986). Ou seja, a tarefa consiste no que é proposto pelo professor ao aluno e a atividade representa o que o aluno efetivamente faz para obter a resposta (Ponte, 2020). Assim, o que os alunos de facto aprendem resulta, maioritariamente, da atividade que desenvolvem e da reflexão sobre esse processo (Christiansen & Walther, 1986).

De acordo com o NCTM (2017), as tarefas propostas aos alunos devem motivá-los para a aprendizagem e envolvê-los na resolução de problemas, ajudando-os a construir novos conhecimentos. Neste sentido, as tarefas matemáticas propostas em sala de aula devem ser concebidas como oportunidades de aprendizagem, permitindo que os alunos compreendam os conceitos matemáticos abordados (Martins, 2016). Contudo, nem todas as tarefas possuem o mesmo potencial para promover a aprendizagem (Rodrigues & Moura, 2023), uma vez que influenciam não só o conteúdo aprendido pelos alunos, como também a forma como o aprendem (Gomes et al., 2022). De acordo com o NCTM (2017), a investigação em educação matemática tem demonstrado que a aprendizagem se revela mais significativa em aulas que envolvem tarefas que mobilizam o pensamento e o raciocínio de nível elevado, comparativamente com aquelas em que se recorre a tarefas mais procedimentais.

Posto isto, uma das decisões mais relevantes que o professor realiza regularmente consiste na seleção das tarefas a propor em sala de aula, na medida que estas constituem o ponto de partida das experiências de aprendizagem dos alunos (Gafanhoto & Canavarro, 2012). Nas *Aprendizagens Essenciais* de Matemática A, para o ensino secundário, homologadas em janeiro de 2023, estabelecem-se critérios que caracterizam uma tarefa matemática como promissora:

[...] ser interessante e desafiante, envolver matemática relevante, criar oportunidades para aplicar e ampliar conhecimentos, permitir diferentes estratégias, tornar possível monitorizar a compreensão dos alunos e apoiar o seu progresso (Silva et al., 2023, p.6).

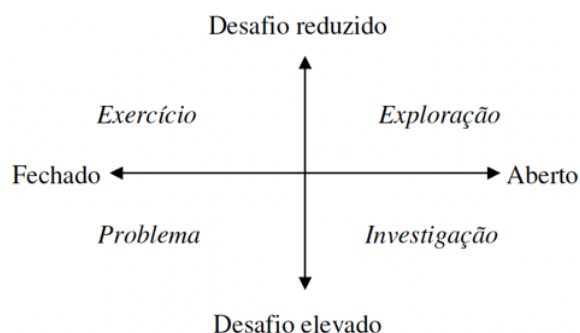
Portanto, é evidente a relevância das tarefas no contexto da diferenciação pedagógica, pelo que a sua elaboração e seleção devem atender às características e necessidades

específicas dos alunos, constituindo um elemento fundamental na planificação das práticas educativas do professor (Silva et al., 2023).

Ponte (2005) defende que é a partir das tarefas matemáticas que o aluno se deve sentir envolvido em atividades matemáticas ricas e produtivas. Com efeito, as tarefas possuem diferentes estruturas, consoante o seu grau de desafio e abertura. No que concerne ao grau de desafio matemático, o autor defende que este está relacionado com a perceção da dificuldade de uma questão, variando entre reduzido e elevado. Relativamente ao grau de abertura, o autor considera que uma tarefa fechada é aquela em que se especifica de forma clara no enunciado o que é dado e o que é pedido, enquanto uma tarefa aberta envolve um grau de ambiguidade maior, seja em relação ao que é dado, ao que é pedido ou em ambos os aspetos. Cruzando estas duas dimensões, Ponte (2005) propõe que as tarefas sejam classificadas conforme o propósito que com elas se pretende alcançar (**Figura 1**).

Figura 1

Relação entre diferentes tipos de tarefas



Nota. Ponte (2005, p. 17).

Portanto, as tarefas matemáticas configuram-se como elementos estruturantes no processo de ensino e aprendizagem da Matemática. A sua relevância transcende o conteúdo que permitem trabalhar, abrangendo igualmente o modo como potenciam o envolvimento dos alunos e potenciam o desenvolvimento do seu raciocínio. Por conseguinte, a elaboração e seleção criteriosa das tarefas, revelam-se aspetos fundamentais para garantir experiências de aprendizagem ricas e significativas, alinhadas com os objetivos educativos definidos.

2.3. Compreensão dos conceitos matemáticos

Um conceito pode ser entendido como uma “cápsula de pensamento que envolve milhares de experiências distintas e que está pronta para integrar mais uns milhares” (Sapir,

1970). Esta natureza dinâmica dos conceitos é enfatizada por Swan (2017), ao descrevê-los como orgânicos, resultado da tentativa do indivíduo de dar sentido ao mundo que o rodeia, num processo contínuo de evolução e adaptação.

O termo compreensão é bastante complexo, refletindo a diversidade de perspectivas que têm emergido ao longo do tempo. Gravemeijer (1997), enfatiza a importância de privilegiar o processo de fazer matemática, em que os alunos possuam uma compreensão profunda da sua matemática e sejam capazes de explicar e justificar os seus procedimentos. Por outro lado, Sierpinska (1994), distingue claramente a compreensão do conhecimento, sustentando que a compreensão é uma atividade cognitiva que ocorre ao longo do tempo e que se concretiza através de atos de compreensão. Os atos de compreensão são as experiências mentais rápidas que permitem ao indivíduo mobilizar ideias e conceitos. Assim, no contexto do conhecimento, a compreensão será um recurso para o conhecimento.

Skemp (1976) considera que existem dois modos de compreensão dos conceitos matemáticos: compreensão instrumental e compreensão relacional. O primeiro diz respeito à capacidade de adquirir e aplicar regras ou métodos na resolução de problemas, privilegiando-se o "saber como", sem necessariamente se compreender o "porquê". Segundo o autor, este tipo de compreensão consiste na aprendizagem de vários planos que orientam o aluno, passo a passo, desde os dados iniciais até obter as respostas às questões, sem que tenha consciência da relação entre as etapas e o objetivo final (Skemp, 1976). Apesar das críticas que apresenta a esta abordagem, o autor reconhece-lhe algumas vantagens, nomeadamente, a facilidade de compreensão de forma instrumental, o alcance rápido e visível dos resultados e a possibilidade de obter resposta corretas mais rapidamente e de forma confiável (Skemp, 1976).

Por sua vez, a compreensão relacional assenta na construção de uma estrutura conceptual que permite ao aluno produzir múltiplos "planos para chegar de qualquer ponto de partida, dentro do seu esquema, até qualquer ponto de chegada" (Skemp, 1976). Por outras palavras, baseia-se em princípios que possuem uma aplicação mais geral, em que o aluno está consciente do "como" e do "porquê" dos métodos, possibilitando a sua adaptação para novos problemas e a construção das relações necessárias para atribuir significado (Skemp, 1976). Entre as vantagens desta abordagem, o autor destaca a sua maior adaptabilidade a novas tarefas, pois o facto de o aluno compreender não apenas o funcionamento de um determinado método, mas também as razões que o sustentam, permite-lhe estabelecer ligações entre o método e os problemas e adaptá-lo a novas situações. Já a compreensão instrumental exige a memorização dos tipos de problemas em que determinado procedimento é aplicável, bem

como a aprendizagem de um método diferente para cada nova classe de problemas. Embora inicialmente possa exigir um maior esforço cognitivo, os conceitos compreendidos de forma relacional tendem a ser mais duradouros, pelo que o tempo investido em aprender de forma relacional pode acabar por ser inferior. Outra vantagem está relacionada com o facto de os esquemas construídos de forma relacional serem orgânicos, facilitando a articulação com outras áreas do conhecimento.

Partindo do pressuposto que o desenvolvimento da compreensão de um conceito implica a construção de estruturas de conhecimento ricas e integradas, que favorecem uma aprendizagem verdadeiramente significativa, tal como é defendido pelas orientações curriculares (NCTM, 2017), o ensino deve priorizar a compreensão relacional dos conceitos (Gutiérrez-Fallas & Henriques, 2017; Skemp, 1976).

Contudo, a implementação desta abordagem pode enfrentar algumas barreiras, originando desencontros entre as expectativas dos professores e as dos alunos (Skemp, 1976). Um dos cenários possíveis ocorre quando alunos que procuram compreender instrumentalmente são ensinados por professores que desejam que eles aprendam relacionalmente (Skemp, 1976). Neste caso, embora cause menos problemas imediatos para os alunos, o professor pode sentir-se frustrado pela desvalorização do seu trabalho de planificação. Skemp (1976) explica que tal ocorre porque os alunos tendem a agarrar-se a regras que lhes permitam obter as respostas, ignorando princípios mais gerais. Esta dependência por regras específicas, em detrimento de uma compreensão abrangente, é apontada pelo autor como uma das fragilidades da compreensão instrumental.

Pelo contrário, pode ocorrer que alunos que procuram compreender relacionalmente enfrentem um ensino que se limita a uma abordagem instrumental (Skemp, 1976). Segundo Skemp (1976), este desencontro pode ser ainda mais prejudicial, uma vez que os alunos que desejam uma compreensão mais profunda se sentem frustrados e desmotivados pela ausência de oportunidades para explorar os “porquês” dos conceitos. Neste sentido, o autor enfatiza que o professor deve ser capaz de ponderar entre a compreensão instrumental e relacional em função das vantagens de cada tipo de compreensão e das características de cada situação de ensino e aprendizagem (Skemp, 1976). Embora ambas as formas de compreensão apresentem vantagens e possam ser úteis em contextos distintos, para Skemp (1976) apenas “a compreensão relacional pode ser considerada adequada para o professor”. No entanto, importa reconhecer que tal ideal nem sempre se concretiza na prática pedagógica, o que, na sua opinião, poderá ser fruto de fatores como a pressão dos programas extensos, a preparação

dos alunos para avaliações externas como os exames nacionais e a resistência de alguns professores à reestruturação dos seus esquemas de ensino (Skemp, 1976).

Domingos (2003) argumenta que a abordagem de Skemp, que apresenta a compreensão matemática em polos opostos, não reflete muitas das situações de aprendizagem com que os alunos se deparam. Herscovics e Bergeron (1984) ao reconhecerem algumas das principais características presentes na constituição dos objetos matemáticos, desde os mais elementares até aos mais avançados, ampliam a visão de Skemp. Estes autores propõe um modelo composto por quatro modos de compreensão: intuitiva, de procedimentos, abstração matemática e formalização. A compreensão intuitiva consiste num conhecimento matemático informal baseado em pré-conceitos, percepções visuais ou ações não quantificadas, enquanto a compreensão de procedimentos refere-se à aquisição de procedimentos matemáticos que os alunos podem relacionar com o seu conhecimento intuitivo e aplicar de forma adequada. A abstração matemática pode ser entendida no sentido usual como o afastamento de uma representação ou de um procedimento específico ou no sentido matemático como a construção de invariantes, a reversibilidade e composição de transformações e operações matemáticas ou a generalização. Por sua vez, a formalização envolve interpretações usuais da axiomática e a demonstração matemática formal, podendo incluir também a definição formal de uma noção matemática ou o uso do simbolismo matemático para expressar conceitos previamente abstratos ou compreendidos por procedimentos.

2.4. Teoria da reificação

De acordo com Domingos (2003), interpretar um conceito implica reconhecer essa entidade como algo dotado de um determinado potencial, que se manifesta através de uma sequência de ações. Esta perspetiva remete para a teoria da reificação, segundo a qual os conceitos matemáticos podem ser concebidos estruturalmente, como objetos ou, operacionalmente, como processos (Sfard, 1991; Sfard & Linchevski, 1994).

Para Sfard (1991), a conceção estrutural refere-se à capacidade de ver uma entidade matemática como um objeto, algo que existe como uma estrutura estática e que pode ser facilmente reconhecida e manipulada, sem a necessidade de detalhar. Por outro lado, a conceção operacional foca-se nos processos, algoritmos e sequência de ações necessários para construção de um conceito (Sfard, 1991).

Embora à primeira vista as concepções possam parecer incompatíveis, Sfard (1991) argumenta que são complementares, na medida que representam diferentes formas de compreender a mesma situação sendo, por isso, necessárias e dependentes uma da outra para uma compreensão profunda da Matemática. Neste enquadramento, Domingos (2003) enfatiza que a proposta de Sfard (1991) distingue-se da de Skemp (1976) pela sua natureza ontológico-psicológica combinada e pela ênfase na complementaridade entre as duas perspetivas. Assim, as vantagens da abordagem de Sfard (1991) residem, por um lado, no facto de se centrar simultaneamente na natureza das entidades matemáticas (dimensão ontológico) e na forma como são percebidas pelo sujeito (dimensão psicológica) e, por outro lado, prevalece a complementaridade das duas perspetivas (Domingos, 2003). Sfard (1991) acrescenta ainda que a abordagem operacional tende a ser o ponto de partida para a aquisição de novas noções matemáticas, pelo que prefere falar em dualidade em vez de dicotomia, como sugere Skemp (1976) quando se refere às concepções estrutural e operacional.

A autora descreve que a transição do modo operacional para a compreensão de conceitos como objetos abstratos é um processo longo e complexo, que se desenvolve em três frases: interiorização, condensação e reificação. Embora os processos de aprendizagem variem de indivíduo para indivíduo, estas três etapas são comuns no desenvolvimento dos conceitos matemáticos (Sfard, 1991).

No estágio de interiorização, o indivíduo familiariza-se com os processos que irão, eventualmente, originar um novo conceito. Nesta fase, começa a trabalhar com operações e a manipular objetos matemáticos de nível inferior, tornando-se proficiente na realização dos processos, que servirão como alicerces para a compreensão mais abstrata do conceito em questão (Domingos, 2003; 2006; Martins & Domingos, 2019).

Para Sfard (1991), a fase de condensação constitui o momento crucial no processo de construção do conceito, pois diz respeito ao momento em que o indivíduo compreende as sequências dos processos como um todo, sem precisar de se focar em detalhes (Domingos, 2003; 2006; Martins & Domingos, 2019).

A terceira e última fase, de reificação, verifica-se quando o aluno consegue conceber uma nova entidade matemática como um objeto completo e autónomo, desvinculando-se dos processos que a originaram (Sfard, 1991). Assim, enquanto os dois estádios anteriores são mudanças graduais e quantitativas, a reificação é um salto instantâneo que permite ao aluno tratar o conceito como uma estrutura estática (Domingos, 2003; 2006). Sfard (1991) sublinha que a partir do momento que se encontra reificado, o conceito pode servir de base à formação

de conceitos de nível superior, permitindo ao aluno iniciar um novo ciclo de aprendizagem, passando novamente pela fase de interiorização e avançando até a reificação dessa nova entidade. Pela forma como o modelo é apresentado, deve ser entendido como uma hierarquia, onde cada estágio depende do anterior para que possa ser alcançado (Domingos, 2003).

No caso específico do conceito de função, Sfard (1991) resume a sua apreensão num processo inicialmente operacional, através do cálculo do valor de uma função para um determinado valor de x , que evolui para uma conceção estrutural, na qual a função é percebida como um objeto matemático para um valor generalizado de x . Inicialmente, na fase de interiorização, o aluno começa por compreender o conceito de variável e desenvolve a capacidade de utilizar a expressão analítica da função para determinar o valor da variável dependente, para um determinado valor da variável independente (Martins & Domingos, 2019). Posteriormente, na fase de condensação, o aluno passa a analisar a função através da sua expressão analítica, sem ter a necessidade de especificar valores. Nesta etapa, torna-se capaz de investigar funções, esboçar os respetivos gráficos e realizar operações como a composição de funções e determinar a respetiva função inversa. Por fim, na fase de reificação, observa-se a interiorização de conceitos mais avançados, em que o aluno concebe a função como um objeto matemático independente, sendo capaz, por exemplo, de resolver equações em que a variável desconhecida é uma função (Domingos, 2003; 2006).

Este processo composto por estas três fases, corrobora a perspetiva de Ponte (1990) que, após a introdução do conceito de função, o seu aprofundamento deve ser progressivo e ir aumentando gradualmente a complexidade das funções trabalhadas.

Sfard (1992) manifesta uma grande preocupação relacionada com o ensino e a forma como os conceitos matemáticos são abordados. Isto porque, ao analisar manuais escolares, a autora constata que a estratégia predominante é estrutural, ou seja, os conceitos são frequentemente introduzidos como objetos acabados, prontos para serem utilizados. Embora esta abordagem possa parecer natural para os professores, pode revelar-se uma fonte significativa de dificuldades para os alunos (Domingos, 2003). Segundo Sfard (1992), em parte, estes problemas surgem, porque os alunos nem sempre têm a capacidade de criar por si próprios os objetos abstratos, constituindo este facto uma lacuna entre o ensino e a aprendizagem.

3. METODOLOGIA

O presente capítulo está organizado em quatro subcapítulos. Nos três primeiros encontra-se a sustentação teórica do tipo de metodologia adotado no trabalho de investigação, abordando-se a investigação qualitativa, o estudo de caso e as técnicas de recolha de dados. Ao longo destes subcapítulos, além do enquadramento teórico, explicita-se de que forma cada uma das opções metodológicas foi concretamente aplicada no âmbito do estudo, por se considerarem as mais adequadas a alcançar o objetivo definido e a responder às questões de investigação inicialmente formuladas.

No último subcapítulo descrevem-se os procedimentos metodológicos adotados, com especial ênfase na escolha dos participantes, nas sessões de trabalho realizadas e na descrição das tarefas propostas que constituíram o objeto central de recolha de dados.

3.1. Investigação qualitativa

A investigação qualitativa exige que as situações quotidianas sejam observadas em tempo real (Vilelas 2020), pelo que é utilizada quando se pretende descrever o que é observado num determinado ambiente em que o investigador, por vezes, apresenta e gera novas hipóteses (Johnson & Christensen, 2014). Amado (2017) corrobora esta perspetiva, referindo que a metodologia de natureza qualitativa assenta numa uma visão holística da realidade que se pretende investigar, procurando compreender essa realidade através de processos inferenciais e indutivos, isto é, através da formulação de hipóteses durante e após a análise dos dados.

Bogdan e Biklen (1994) enumeram cinco características deste tipo de metodologia, não necessariamente presentes em todos os estudos qualitativos:

- i. Os dados são recolhidos no ambiente natural em que ocorre a investigação, sendo o investigador o instrumento principal da recolha;
- ii. É uma investigação descritiva. Os dados recolhidos referem-se aos processos de aprendizagem dos alunos, pelo que são recolhidos na forma de imagens ou palavras;
- iii. O investigador preocupa-se mais com o processo do que propriamente com os resultados ou produtos obtidos;

- iv. Os dados recolhidos são analisados de forma indutiva. O objetivo do investigador não é confirmar hipóteses construídas previamente, pelo que à medida que os dados são recolhidos e analisados, retira as suas conclusões;
- v. O significado é extremamente importante. O investigador preocupa-se em compreender as perspetivas e opiniões dos participantes no estudo.

No âmbito da investigação qualitativa, Amado (2017) destaca um conjunto de princípios éticos que devem ser salvaguardados ao longo do processo de investigação. Entre eles, salienta-se o respeito pelos participantes enquanto fonte de dados, o que implica garantir o seu anonimato e prevenir qualquer utilização indevida das informações recolhidas. Acresce a importância da fidelidade e o rigor no registo das situações observadas e na transcrição dos discursos dos participantes, de modo a assegurar uma representação fidedigna da realidade estudada. O autor sublinha ainda a disponibilidade para coautorias, bem como a valorização da utilidade social do conhecimento produzido. Por fim, destaca-se a exigência de uma postura crítica por parte do investigador face a situações que possam comprometer valores universalmente reconhecidos.

Creswell e Poth (2018) acrescentam que, como os participantes na presente metodologia são menores de idade, é imprescindível obter o consentimento dos pais ou tutores legais, bem como a aprovação da escola ou instituição onde a investigação tem lugar. Os autores sublinham ainda a importância de garantir que os alunos compreendam o propósito da investigação, assegurando que participam de forma voluntária e consciente no estudo.

Neste enquadramento, a metodologia de natureza qualitativa adotada assenta num paradigma construtivista-interpretativo, uma vez que o foco da investigação é compreender a aprendizagem dos alunos envolvidos, reconhecendo que existem múltiplas realidades (Guba & Lincoln, 1985).

3.2. Estudo de caso

O estudo de caso é reconhecido como um dos métodos mais utilizados na investigação qualitativa (Aires, 2015; Bogdan & Biklen, 1994; Johnson & Christensen, 2014), sendo particularmente relevante na investigação em Educação Matemática (Ponte, 2006). Este método é descrito por Ponte (2006) como um design de investigação, cujo objetivo consiste

em compreender com profundidade o “como” e os “porquês” de uma entidade bem definida, inserida num contexto real e específico (Ponte, 2006; Yin, 2010).

Segundo Ponte (2006), o estudo de caso apresenta diversas características de uma investigação de natureza empírica, uma vez que se baseia no trabalho de campo ou na análise documental. O seu carácter é descritivo, procurando recolher uma descrição factual, literal, sistemática e o mais completa possível do objeto de estudo. No entanto, pode assumir também um carácter analítico, interrogando a situação investigada com outras já conhecidas e com teorias existentes. Além disto, não é uma investigação experimental, dado que o investigador não pretende alterar ou manipular a realidade observada, mas sim compreendê-la tal como ela se apresenta.

Stake (1995) distingue três tipos de estudos de caso: estudo de caso intrínseco, estudo de caso instrumental e estudo de caso coletivo. O primeiro é utilizado quando o objetivo do investigador é compreender profundamente as particularidades e complexidades de uma situação específica, colocando o foco diretamente no caso em si, sem intenção de generalizar os resultados para outras situações ou contextos (Stake, 2009; Yazan, 2015). Já o estudo de caso instrumental é levado a cabo quando se pretende compreender um fenómeno mais geral, utilizando o caso como um meio para generalizar as descobertas. Por sua vez, o estudo de caso coletivo, também conhecido como estudo de caso múltiplo, recorre à análise de vários casos individuais para obter uma imagem mais completa.

Cohen et al. (2007), destacam como pontos fortes dos estudos de caso a utilização de linguagem clara e não técnica, permitindo que os resultados sejam compreendidos por um público diversificado, incluindo não especialista; a capacidade de captar características únicas que poderiam ser negligenciadas em estudos de maior escala; a possibilidade de oferecer insights aplicáveis à interpretação de casos semelhantes e a flexibilidade para incorporar imprevistos e variáveis não controladas. No entanto, os autores alertam para a dificuldade em generalizar os resultados, reforçando que estes podem ser seletivos, tendenciosos e subjetivos, uma vez que estão sujeitos à parcialidade e às perspetivas pessoais do investigador.

Na perspetiva de Yin (2003), existem determinados requisitos que caracterizam o perfil de um bom investigador de estudo de caso, tais como, ser capaz de formular boas perguntas e interpretar adequadamente as respostas, ser bom ouvinte e não se deixar condicionar por ideologias ou preconceitos, adaptar-se e ser flexível a novas situações, possuir um domínio sólido das questões em estudo e manter a imparcialidade, evitando que noções pré-

concebidas, incluindo as que possam derivar de quadros teóricos analisados previamente, comprometam a objetividade da investigação.

O estudo de caso não tem por base amostras estatísticas (Stake, 2009). No entanto, é essencial determinar os participantes cujas contribuições serão fundamentais para compreender a situação em estudo (Flick, 2005; Yin, 2010), para que, de seguida, se proceda à recolha de dados que, posteriormente, serão alvo de uma análise detalhada (Bogdan & Biklen, 1994; Johnson & Christensen, 2014; Ponte, 2006).

No caso concreto desta investigação e, tendo em consideração as questões de investigação e o quadro teórico que lhe está subjacente, procedeu-se à realização de um estudo de caso coletivo, através da análise de quatro casos individuais. Os alunos participantes no estudo pertencem à turma do 11.º ano do curso científico-humanístico de ciências e tecnologias acompanhada durante o estágio pedagógico.

3.3. Instrumentos de recolha de dados

As técnicas de recolha de dados devem ser estabelecidas de acordo com o problema de investigação e os respetivos objetivos, exigindo um planeamento cuidado por parte do investigador, de modo a evitar a acumulação excessiva de dados, que poderia resultar num gasto de tempo desnecessário durante a análise (Rodrigues et al., 2021).

Na presente investigação, a recolha de dados foi efetuada por meio da observação participante e não participante, de entrevistas semiestruturadas e da recolha e análise das produções escritas dos alunos participantes durante a implementação das tarefas ao longo das sessões de trabalho.

3.3.1. Observação

A observação consiste na recolha sistemática de informações, por meio do contacto direto com situações específicas (Aires, 2015) e visa descrever, interpretar e intervir na realidade em questão (Carmo & Ferreira, 2008). Segundo Afonso (2014), esta técnica de recolha de dados é particularmente relevante e fidedigna, uma vez que permite obter informações não influenciadas pelas opiniões e perspetivas dos participantes.

Cohen et al. (2007) tipifica as técnicas de observação de acordo com o envolvimento do observador no campo do objeto de estudo: observação participante e observação não participante. Na observação participante, os investigadores envolvem-se nas atividades que se

propõem a observar, ao ponto de muitas vezes, se tornarem parte do próprio grupo que estão a estudar. É este envolvimento próximo que Bogdan e Biklen (1994) sublinham como uma das principais vantagens desta abordagem, permitindo ao investigador inserir-se no quotidiano das pessoas que estuda, ganhar a sua confiança e registar, de forma natural e detalhada, tudo o que ouve e observa. Por outro lado, na observação não participante, os investigadores não interagem com o objeto de estudo, evitando qualquer envolvimento direto nas atividades do grupo observado (Carmo & Ferreira, 2008).

No caso concreto desta investigação, durante as sessões de trabalho, a investigadora adotou predominantemente uma abordagem de observação não participante, com o intuito de compreender com profundidade os processos de raciocínio adotados pelos alunos na resolução de cada tarefa. O recurso à observação participante revelou-se essencial quando surgiram questões específicas que impediam os alunos de prosseguir na resolução das mesmas. Note-se que esta abordagem se encontra em consonância com o defendido por Bogdan e Biklen (1994), que o tipo de observação adotado numa investigação pode variar durante o processo. Isto porque, em determinados momentos, pode ser mais benéfico que o investigador adote uma postura de observador não participante e noutros a sua intervenção pode ser necessária, recorrendo à técnica de observação participante.

3.3.2. Entrevista

A entrevista é um dos instrumentos de recolha de informação empírica usualmente utilizados em investigação educacional (Carmo & Ferreira, 2008). Segundo Minayo e Costa (2018), trata-se de uma conversa entre duas ou mais pessoas, conduzida pelo entrevistador, com o intuito de recolher informações relevantes sobre o objeto de investigação. As entrevistas podem ser utilizadas como a principal estratégia para recolher dados ou em conjunto com outras técnicas, como, por exemplo, a observação participante (Bogdan & Biklen, 1994).

Vários autores (e.g. Aires, 2015; Amado, 2017; Bogdan & Biklen, 1994; Minayo & Costa, 2018), classificam as entrevistas de acordo com a sua estrutura: entrevista estruturada, não estruturada e semiestruturada. As entrevistas estruturadas baseiam-se em perguntas previamente definidas com categorias de respostas limitadas, sobre um determinado tema que o investigador, normalmente, já detém algum conhecimento prévio. Por outro lado, nas entrevistas não estruturadas, as perguntas surgem espontaneamente durante a interação entre o investigador e o entrevistado, exigindo da parte do primeiro bastante competência e sensibilidade para conduzir a conversa de forma eficaz. Por último, nas entrevistas

semiestruturadas, o investigador recorre a um guião, previamente elaborado, com as questões essenciais organizadas de forma lógica. Durante a interação, o entrevistado dispõe bastante liberdade nas suas respostas. A bibliografia destaca este tipo de entrevista como um dos principais instrumentos utilizados em pesquisas de natureza qualitativa (Amado, 2017).

No âmbito do presente estudo, as entrevistas realizadas tiveram como principal objetivo compreender o raciocínio desenvolvido pelos participantes na resolução das tarefas propostas. Durante as sessões de trabalho foram conduzidas entrevistas semiestruturadas, com o propósito de orientar uma conversa guiada por algumas questões principais, mas sem restringir a liberdade do entrevistado para partilhar informações não diretamente solicitadas. Em cada sessão de trabalho, a investigadora apoiou-se em guiões previamente elaborados, que podem ser consultados nos Anexos 29 e 31.

3.3.3. Análise documental

A análise documental pode revelar-se numa técnica valiosa na abordagem de dados qualitativos, sendo frequentemente utilizada como complemento às informações obtidas através de outras técnicas de recolha de informação (Ludke & Andre, 1986). Estes autores sublinham que a estabilidade e a riqueza da informação recolhida conferem maior credibilidade aos resultados obtidos, uma vez que os documentos persistem ao longo do tempo e podem ser consultados várias vezes e utilizados como base para outros estudos. Afonso (2014) acrescenta que a fidelidade que caracteriza a análise documental, garante que não existem interferências externas, como ocorre nas entrevistas ou na observação, onde as alterações comportamentais do entrevistado ou do contexto podem adulterar os resultados da investigação.

Vários autores (e.g. Aires, 2015; Amado, 2017; Bogdan & Biklen, 1997; Yin, 2003) categorizam estes documentos como não pessoais/oficiais (internos e externos) ou pessoais (internos e externos). Os documentos oficiais proporcionam informações relevantes sobre as organizações, como a sua estrutura, funcionamento e formas de comunicação (Aires, 2015). Por outro lado, os documentos pessoais distinguem-se pela estreita relação com o seu autor (Amado, 2017), uma vez que as narrativas produzidas pelos sujeitos descrevem as suas próprias ações, experiências e crenças (Aires, 2015; Yin, 2003).

Para a análise documental da presente investigação, foram consideradas todas as produções escritas dos alunos durante a resolução de cada tarefa.

3.4. Procedimentos metodológicos adotados

A recolha de dados nesta investigação foi realizada exclusivamente pela investigadora, em contexto escolar, através da implementação de duas tarefas aplicadas durante sessões de trabalho, em horário extra letivo. Como referido em epígrafe, as técnicas de recolha de dados utilizadas incluíram a observação participante e não participante, a realização de entrevistas semiestruturadas e a recolha e análise das produções escritas dos alunos participantes.

3.4.1. Escolha dos participantes

O presente estudo teve como população alvo uma turma do 11.º ano do científico-humanístico de ciências e tecnologias, acompanhada durante o ano letivo 2024/25, no âmbito do estágio pedagógico.

A escolha dos quatro participantes foi orientada por critérios que garantissem a heterogeneidade do grupo, sendo essencialmente baseada no aproveitamento dos alunos na disciplina e no nível de envolvimento demonstrado durante as aulas de matemática. A diversidade no desempenho escolar permitiu analisar como alunos com diferentes níveis de domínio dos conceitos mobilizam os seus conhecimentos sobre sucessões na resolução das tarefas propostas. O nível de envolvimento nas aulas foi igualmente considerado, uma vez que podia influenciar a predisposição para resolver as tarefas propostas.

A participação dos alunos que integraram o estudo foi devidamente autorizada pelos respetivos encarregados de educação (Anexo 27) e pela direção do agrupamento de escolas, garantindo os princípios éticos mencionados por Creswell e Poth (2018).

3.4.2. Sessões de trabalho

Cada aluno participou numa sessão de trabalho, perfazendo um total de quatro sessões no decorrer da investigação. Na primeira parte da sessão foi implementada a Tarefa 1 e, na segunda parte, a Tarefa 2, que podem ser consultadas nos Anexos 28 e 30, respetivamente. Uma vez que as tarefas tinham por base a mesma construção geométrica, optou-se por aplicá-las na mesma sessão de trabalho, com o intuito de promover a continuidade do raciocínio dos alunos e possibilitar o estabelecimento de paralelismos. Esta decisão visou também proporcionar à investigadora a oportunidade de observar eventuais semelhanças ou diferenças na abordagem às duas tarefas e garantir que, no intervalo temporal entre a sua realização, não ocorria qualquer estudo adicional que pudesse influenciar os resultados.

Durante a resolução das tarefas, a investigadora conduziu entrevistas semiestruturadas com o intuito de compreender o raciocínio dos alunos em cada etapa (Bogdan & Biklen, 1994).

Todas as sessões decorreram integralmente em horário extra letivo, previamente acordado com os alunos participantes e tiveram lugar numa sala de aula da escola. As sessões de trabalho realizaram-se no dia 3 de abril, com a duração aproximada de 60 minutos cada. No início de cada sessão de trabalho, foram transmitidas algumas informações aos alunos relativamente à realização das tarefas, reforçando o compromisso com o seu anonimato no estudo (Amado, 2017).

3.4.3. Tarefas

A recolha de dados teve como objeto central a realização de duas tarefas por parte dos quatro alunos participantes no estudo. As tarefas têm por base a mesma construção geométrica, a divisão sucessiva de um triângulo equilátero, e foram desenhadas com o propósito de analisar de que forma os alunos mobilizam os seus conhecimentos sobre sucessões. Na Tarefa 1, a atenção é dirigida para a sucessão que representa o número total de triângulos obtidos em cada fase, tendo por base uma progressão aritmética. Por sua vez, na Tarefa 2, a sucessão em estudo diz respeito à área dos triângulos obtidos, remetendo para uma progressão geométrica.

Através da análise das resoluções dos alunos, pretende-se responder às questões de investigação inicialmente colocadas:

1. Como se caracteriza a compreensão do conceito de sucessão?
2. Como acontece o processo de reificação do conceito de sucessão?

3.4.3.1. Tarefa 1

A primeira tarefa, disponível no Anexo 28, foi concebida com o objetivo de, por um lado, analisar como os alunos participantes no estudo mobilizam a compreensão do conceito de sucessão e, por outro lado, compreender de que forma se manifesta o processo de reificação desse mesmo conceito.

À luz da distinção proposta por Skemp (1976), esta tarefa permite verificar se os alunos mobilizam uma compreensão relacional, ou se, pelo contrário, operam segundo uma compreensão instrumental, limitando-se a aplicar mecanicamente fórmulas e procedimentos memorizados, sem necessariamente compreenderem os princípios subjacentes à sua

utilização. Neste sentido, as questões da tarefa foram formuladas para aceder a diferentes modos de compreensão, segundo o modelo teórico de Herscovics e Bergeron (1984).

Considerando a perspectiva de Sfard (1991), a aprendizagem de conceitos matemáticos desenvolve-se num processo composto por três fases, interiorização, condensação e reificação, que descrevem a transição de uma compreensão de natureza processual para uma conceção estrutural dos conceitos. Neste sentido, a Tarefa 1 foi estruturada de forma a acompanhar essas três etapas, permitindo identificar em que estágio de reificação se encontram os alunos participantes no estudo.

A primeira alínea tem como objetivo observar o contacto inicial dos alunos com a estrutura da sucessão e se identificam o padrão que sustenta a sua construção. A forma como resolvem esta questão pode revelar-se particularmente elucidativa da compreensão intuitiva que detêm do conceito de sucessão (Herscovics & Bergeron, 1984). Assim, num primeiro momento, será possível analisar em que medida os alunos dependem da observação e manipulação de termos concretos da sucessão para identificar a regularidade subjacente, um traço característico da fase de interiorização (Sfard, 1991), a qual constitui a base para a compreensão mais abstrata do conceito (Domingos, 2003; 2006; Martins & Domingos, 2019).

A segunda e terceira questão requerem a dedução da expressão geral e da soma dos oito primeiros termos da sucessão, pelo que se pretende verificar se os alunos evoluem para a compreensão de procedimentos (Herscovics & Bergeron, 1984), patente na capacidade de aplicar as expressões associadas à progressão aritmética. Simultaneamente, estas alíneas permitem aferir se essa compreensão se restringe a um nível instrumental, caracterizado pela aplicação de fórmulas memorizadas, ou se, pelo contrário, se configura numa compreensão relacional, em que os alunos para além de reproduzirem procedimentos, compreendem a lógica subjacente à sua estrutura e a relação com a situação em estudo (Skemp, 1976).

Do ponto de vista do processo de reificação, estas questões permitem averiguar a capacidade dos alunos de abandonarem a análise termo a termo da sucessão e condensarem a regularidade identificada numa expressão algébrica. Para Sfard (1991), a menor dependência por casos particulares poderá indiciar que a conceção do conceito ultrapassa o mero plano operacional, aproximando-se de uma perspetiva estrutural da sucessão, o que se reflete na transição do estágio de interiorização para a fase de condensação do conceito (Sfard, 1991).

Na última alínea, os alunos são confrontados com a análise do comportamento da soma à medida que o número de fases aumenta, permitindo observar se são capazes de formular hipóteses sobre o comportamento assintótico da sucessão e de as justificar. Esta

questão constitui uma oportunidade para que possam emergir formas mais abstratas de pensamento, nomeadamente a compreensão por abstração matemática, associada à construção de invariantes ou à generalização de padrões (Herscovics & Bergeron, 1984). Além disso, poderá manifestar-se uma compreensão ao nível da formalização (Herscovics & Bergeron, 1984), traduzida na apropriação de definições e simbolismos matemáticos.

A forma como os alunos formulam e justificam as suas conjeturas sobre o comportamento da soma dos termos da progressão à medida que o número de fases aumenta permite, do ponto de vista de Sfard (1991), situá-las em diferentes estádios do processo de reificação do conceito de sucessão. Com efeito, será a natureza das estratégias mobilizadas e a profundidade das justificações apresentadas que irão permitir aferir se os alunos permanecem ainda na fase de interiorização, fortemente dependente de casos particulares, se já operam no estádio de condensação em que tratam a sucessão como um todo, ou se o conceito se encontra plenamente reificado (Sfard, 1991).

3.4.3.2. Tarefa 2

A Tarefa 2, apresentada no Anexo 30, assenta na mesma construção da tarefa anterior, embora, neste caso, a sucessão considerada diga respeito às áreas dos triângulos obtidos em cada fase de construção, tomando como unidade de medida a área do triângulo inicial.

Esta tarefa foi delineada com o propósito de aprofundar a análise da compreensão do conceito de sucessão, nomeadamente no contexto de uma progressão geométrica. À semelhança da tarefa anterior, a análise foi orientada pelos quadros teóricos de Skemp (1976), no que respeita à distinção entre compreensão relacional e instrumental e de Herscovics e Bergeron (1984), que propõe uma tipologia de quatro modos de compreensão: intuitiva, de procedimentos, abstração matemática e formalização. Paralelamente, será possível caracterizar a conceção do conceito de sucessão por parte dos alunos participantes no estudo e identificar em que fase do processo de reificação se situam, de acordo com a teoria de Sfard (1991).

A principal diferença em relação à tarefa anterior reside no maior grau de abertura das questões propostas, que direcionam de forma menos explícita o raciocínio dos alunos. De acordo com Ponte (2005), esta característica permite classificá-la, quanto à sua estrutura, como uma tarefa aberta, dada a maior ambiguidade principalmente quanto ao que é fornecido.

O facto de iniciar imediatamente com a dedução da expressão geral e prosseguir com a análise da soma dos n primeiros termos da sucessão, permite avaliar se os alunos acedem

diretamente aos estádios mais avançados do processo de reificação do conceito e, com isso, possuem uma conceção menos operacional e mais estrutural da sucessão (Sfard, 1991).

Neste sentido, a primeira alínea relacionada com a dedução da expressão geral da sucessão, assume particular importância na análise de como os alunos compreendem a regularidade subjacente à construção da sucessão. A resolução desta questão permite observar se os alunos conseguem estabelecer uma relação entre os termos da sucessão e se associam essa relação ao conceito de progressão geométrica. A forma como constroem o termo geral da sucessão permite aferir se manifestam compreensão intuitiva do conceito de progressão geométrica, eventualmente ancorada em pré-conceitos sobre progressões desta natureza (Herscovics & Bergeron, 1984). Paralelamente, é possível verificar se demonstram uma compreensão de procedimentos (Herscovics & Bergeron, 1984), traduzida na aplicação das expressões associadas às progressões geométricas. É, ainda, possível averiguar em que medida essa compreensão de procedimentos é de natureza instrumental ou relacional (Skemp, 1976), consoante a capacidade dos alunos de relacionar o procedimento adotado com a construção geométrica em estudo.

O facto de os alunos sentirem a necessidade de trabalhar com termos específicos para compreender a regularidade subjacente, pode indicar que permanecem na fase de interiorização, cuja conceção que detém do conceito é operacional (Sfard, 1991). Pelo contrário, a capacidade de identificar a relação entre as áreas dos triângulos e escrever o termo geral da sucessão, sem ter a necessidade de recorrer a termos isolados, pode sinalizar a fase de condensação, em que o processo já é compreendido como um todo integrado (Sfard, 1991).

A segunda questão da tarefa contempla a dedução do termo geral e o estudo da soma dos n primeiros termos de uma sucessão, permitindo avaliar se os alunos compreendem e conseguem formular hipóteses sobre o seu comportamento. A análise das respostas a esta alínea pode revelar indícios de uma compreensão ao nível da abstração matemática, através da generalização de padrões e da construção de invariantes como, por exemplo, a razão constante entre termos sucessivos (Herscovics & Bergeron, 1984). Por sua vez, o recurso a noções e simbolismos matemáticos, poderá evidenciar uma compreensão ao nível da formalização (Herscovics & Bergeron, 1984), refletindo níveis mais avançados de pensamento matemático.

4. ANÁLISE DE DADOS

No presente capítulo procede-se à descrição e análise dos dados recolhidos a partir da resolução das tarefas por parte dos alunos participantes na investigação desenvolvida. Os quatro alunos pertencem à turma de 11.º ano do curso científico-humanístico de ciências e tecnologias, acompanhada no âmbito do estágio pedagógico ao longo do ano letivo 2024/25.

De modo a preservar o anonimato dos alunos participantes (Amado, 2017), foram atribuídos nomes fictícios: Bernardo, Tomé, Vasco e Sofia. Nos excertos transcritos das entrevistas, a investigadora é identificada pela letra “I” e o aluno é identificado pela inicial do respetivo nome fictício, por exemplo, “B” para Bernardo.

A fim de proporcionar um enquadramento mais rigoroso dos procedimentos do estudo e das verbalizações dos alunos, apresenta-se, de seguida, uma descrição sintética do processo de ensino do tema sucessões. A dinâmica das aulas desenvolveu-se segundo uma metodologia de ensino com momentos de carácter expositivo, conduzidos pela professora titular da turma, seguidos de trabalho autónomo, por parte dos alunos, na resolução de tarefas de consolidação. As resoluções foram posteriormente discutidas em grupo turma, aproveitando-se estes momentos de discussão coletiva para formalizar as propriedades e as definições dos conceitos, recorrendo a uma linguagem acessível e adaptada aos alunos em questão.

O tema teve início com o estudo das sucessões de números reais, nomeadamente a monotonia, as sucessões limitadas e as sucessões definidas por recorrência. Em particular, os conteúdos referentes às progressões aritméticas e geométricas foram lecionados ao longo de duas aulas consecutivas, nas quais a professora titular da turma optou por abordar simultaneamente as duas progressões. Com efeito, procedeu à divisão do quadro e apresentou paralelamente a respetiva definição, expressão geral, fórmula da soma dos n primeiros termos, bem como um exemplo ilustrativo. A aula seguinte foi dedicada à resolução de exercícios de aplicação direta de ambas as progressões, incentivando-se a participação dos alunos nas tarefas propostas. Por fim, abordou-se a noção e o cálculo de limites de sucessões, incluindo os limites infinitos e o levantamento de indeterminações.

4.1. Estudo de caso: Bernardo

O Bernardo é um aluno dedicado e trabalhador que realiza todas as tarefas propostas sem dificuldades significativas, destacando-se face ao grupo turma. Relativamente ao método

de trabalho, é um aluno que acompanha os conteúdos estudados em aula regularmente, embora intensifique o estudo nos períodos que antecedem os momentos de avaliação sumativa. Este hábito faz com que nem sempre consiga esclarecer as suas dúvidas tão antecipadamente como desejável. No ano letivo anterior e no 1.º semestre do 11.º ano de escolaridade obteve a classificação de dezanove valores.

4.1.1. Tarefa 1

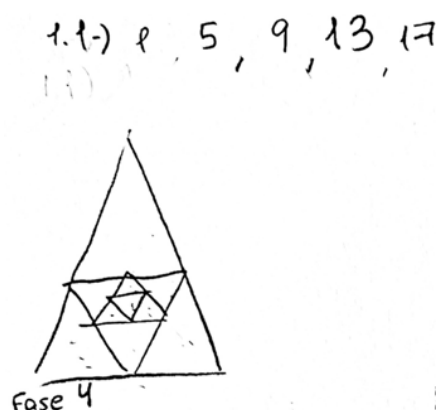
A Tarefa 1 tem como objeto de estudo a sucessão (u_n) , que corresponde ao número de triângulos obtidos nas sucessivas fases de um processo de construção. Considera-se um triângulo equilátero inicial e, em cada nova fase, constrói-se um novo triângulo equilátero cujos vértices são os pontos médios dos lados do triângulo anterior. No enunciado, os alunos encontram a figura que ilustra a aplicação deste processo nas três primeiras fases de construção (Anexo 28).

Questão 1.1. – Determinar os cinco primeiros termos da sucessão.

Para determinar os cinco primeiros termos da sucessão (u_n) , o Bernardo começou por contar o número de triângulos das três primeiras fases e desenhar a figura correspondente à quarta fase (**Figura 2**).

Figura 2

Resolução da questão 1.1.



Nota. Fonte Própria.

De acordo com Herscovics e Bergeron (1984), o contacto inicial do aluno com a sucessão, revela que detém uma compreensão intuitiva do conceito de sucessão, sustentada na perceção visual da regularidade observada. Esta abordagem é característica do estágio de

interiorização do modelo definido por Sfard (1991), no qual o aluno manipulou objetos matemáticos de nível inferior, as representações pictóricas, que serviram de base para identificar o padrão subjacente à sucessão.

A partir da regularidade observada que “de uma fase para a seguinte, são sempre acrescentados 4 triângulos” e do conhecimento informal que detém da sucessão, recorreu a um procedimento algébrico que lhe permitiu formular, com alguma facilidade, a expressão geral da sucessão $u_n = -3 + 4n$. Relativamente à quinta figura, dispensou o seu desenho:

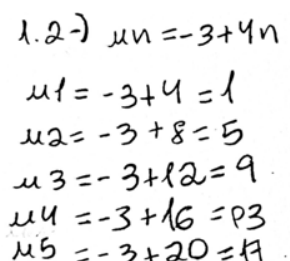
B: Já nem preciso de desenhar a quinta figura, pois basta substituir o n por 5 para determinar o quinto termo. E está certo, porque $13 + 4 = 17$.

Questão 1.2. – Determinar a expressão geral da sucessão.

Com base na regularidade observada entre os termos da sucessão, o Bernardo avançou imediatamente para a dedução da expressão geral $u_n = -3 + 4n$. Na **Figura 3**, é visível que confirmou a validade da expressão para os cinco primeiros termos da sucessão.

Figura 3

Resolução da questão 1.2.


$$\begin{aligned} 1.2) \quad u_n &= -3 + 4n \\ u_1 &= -3 + 4 = 1 \\ u_2 &= -3 + 8 = 5 \\ u_3 &= -3 + 12 = 9 \\ u_4 &= -3 + 16 = 13 \\ u_5 &= -3 + 20 = 17 \end{aligned}$$

Nota. Fonte Própria.

I: Como chegaste tão rapidamente ao termo geral da sucessão (u_n)?

B: Comecei por pensar no primeiro termo. Como tem de dar de 1, não podia ser só $4n$, pois o resultado ia ser 4. Logo, procurei o valor que ao subtrair a 4 desse 1. E esse valor é 3.

A dedução do termo geral da sucessão evidencia, numa primeira instância, uma compreensão de procedimentos, uma vez que o Bernardo reconheceu que a regularidade entre os termos se traduz num acréscimo constante de quatro triângulos e ajustou a expressão para que coincidisse com o primeiro termo da sucessão (Herscovics & Bergeron, 1984). Apesar

de seguir uma sequência de ações, a sua estratégia denota capacidade para estabelecer uma relação entre a regularidade observada e a estrutura algébrica da expressão construída, o que constitui um indício de compreensão relacional da sucessão, segundo Skemp (1976).

Deste modo, a sua conceção do conceito ultrapassa o mero plano operacional, aproximando-se de uma perspetiva estrutural da sucessão, uma vez que o aluno deixa de se centrar na análise termo a termo e é capaz de traduzir a regularidade observada através de uma expressão geral, característica da fase de condensação do conceito (Sfard, 1991).

Questão 1.3. – Calcular o número total de triângulos das oito primeiras fases.

Na alínea 1.3., o Bernardo aplicou diretamente a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética para determinar o número total de triângulos das oito primeiras fases (**Figura 4**). Este procedimento revela uma abordagem predominantemente operacional, centrada na aplicação mecânica de um algoritmo previamente aprendido, o que denota uma compreensão de procedimentos de natureza instrumental (Herscovics & Bergeron, 1984; Sfard, 1991; Skemp, 1976).

Figura 4

Resolução da questão 1.3.

$$1.3-) S_n = \left(\frac{u_1 + u_n}{2} \right) \times n = \left(\frac{1 + 29}{2} \right) \times 8 = 15 \times 8 = \underline{120}$$

$$u_8 = -3 + 4 \times 8$$

$$u_8 = -3 + 32 = 29$$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= -3 + 4n + 4 - (-3 + 4n) \\ &= 4n + 1 - (-3 + 4n) \\ &= 4n + 1 + 3 - 4n = 4 \end{aligned}$$

$4 \in \mathbb{N}$, logo u_n é uma sucessão aritmética

Nota. Fonte Própria.

Quando questionado sobre a estrutura da fórmula utilizada, o aluno reconheceu não compreender a sua origem, afirmando: "só decorei as fórmulas que demos nas aulas". Esta resposta reforça a ideia de uma compreensão instrumental do conceito de sucessão e indica que o conhecimento mobilizado se enquadra ainda na fase de interiorização do processo de reificação apresentado por Sfard (1991), na medida que o aluno se limita a calcular o valor da soma dos n primeiros termos da progressão aritmética para um determinado valor de n , neste caso, 8. Relativamente à natureza da progressão, o Bernardo manifestou alguma incerteza quanto à sua classificação:

I: O que te leva a afirmar que se trata de uma progressão aritmética?

B: Não tenho bem a certeza, é o que me parece. Mas posso provar através do cálculo da razão que se determina fazendo $u_{n+1} - u_n$. Se der um número real, então é aritmética.

I: Por que é que se determina a diferença entre dois termos consecutivos para provar que a sucessão é uma progressão aritmética?

B: Porque assim provamos que a diferença entre dois termos quaisquer seguidos é sempre a mesma.

A justificação do Bernardo a propósito da razão que o levou a considerar tratar-se de uma progressão aritmética, assenta na reprodução de um método assimilado, sinalizando uma compreensão de procedimentos da progressão aritmética (Herscovics & Bergeron, 1984). No entanto, apesar do carácter essencialmente operacional da demonstração realizada, o aluno revela compreender a lógica subjacente ao cálculo da diferença entre dois termos consecutivos da sucessão, o que denota momentos pontuais de compreensão relacional, avançando, assim, para o estágio de condensação do processo de reificação (Sfard, 1991; Skemp, 1976). Este indício de transição para uma conceção mais estrutural é reforçado pela interpretação contextualizada do valor da razão da progressão aritmética em estudo:

I: No contexto do problema o que significa a razão ser 4?

B: É o número de triângulos que se adiciona de uma fase para a outra.

Por fim, é possível identificar um episódio de compreensão por formalização, uma vez que o aluno recorreu ao simbolismo matemático para representar uma propriedade das progressões aritméticas (Herscovics & Bergeron, 1984). O uso do formalismo matemático decorreu de um conhecimento de procedimentos previamente adquirido e assimilado, conforme Herscovics e Bergeron (1984) descrevem no modelo que apresentam.

Questão 1.4. – Analisar o comportamento da soma total dos triângulos à medida que o número de fases aumenta.

Na questão 1.4., o Bernardo procurou compreender o comportamento da soma dos termos da sucessão através da comparação dos valores S_8 e S_9 (**Figura 5**). A dependência por casos particulares para concluir que à medida que o número de fases aumenta, o número total

de triângulos também aumenta, revela, numa primeira instância, uma compreensão intuitiva do comportamento da soma dos termos da progressão (Herscovics & Bergeron, 1984). Neste sentido, o aluno permanece na fase de interiorização do processo de reificação, uma etapa marcada por uma abordagem predominantemente operacional (Sfard, 1991).

Figura 5

Resolução da questão 1.4.

$$1.4-) S_9 = \left(\frac{u_1 + u_9}{2} \right) \times 9 = \left(\frac{1 + 33}{2} \right) \times 9 = 153$$

S₉ > S₈, logo à medida que o n.º de fases aumenta maior será a soma total dos triângulos.

Nota. Fonte Própria.

A propósito da validade da generalização do comportamento da sucessão para qualquer ordem n , o aluno respondeu:

I: E o facto de $S_9 > S_8$, permite-nos generalizar o comportamento de S_n para todo o número natural n ?

B: Sim, neste caso sim.

I: Por que é que neste caso sim?

B: Porque se nós em vez de pensarmos na sucessão $u_n = -3 + 4n$, pensarmos na função $f(x) = 4x - 3$, é uma reta de declive positivo, logo está sempre a crescer. Ou seja, o termo seguinte vai ser sempre superior ao anterior. Logo, a soma também vai crescer.

I: E vai crescer até quanto?

B: $+\infty$, porque n vai para $+\infty$ também.

Ao estabelecer um paralelismo entre a expressão da sucessão $u_n = 4n - 3$ e a função afim $f(x) = 4x - 3$, baseando-se no facto de esta representar uma reta de declive positivo para justificar o crescimento dos termos da sucessão e, por consequência, da sua soma, o Bernardo revela capacidade de investigar o comportamento da progressão sem se focar na análise termo a termo. Dado que já é capaz de conceber o processo como um todo coeso e não apenas como uma sequência de procedimentos isolados, dispensando a necessidade de se focar em detalhes, indicia um avanço significativo do seu raciocínio para a fase de

condensação (Sfard, 1991). Ao mobilizar este raciocínio, demonstra capacidade de generalização, uma das componentes da compreensão por abstração matemática (Herscovics & Bergeron, 1984). É de notar que o aluno revelou consciência crítica ao reconhecer as limitações da generalização efetuada, referindo que não é extensível a “sucessões em que os termos oscilam entre positivos e negativos” como, por exemplo, $(-1)^n$. Se n for ímpar, é -1 . Se n for par, é 1 .”.

Do mesmo modo, o facto de articular diferentes conceitos matemáticos e utilizar a representação algébrica para estabelecer uma ligação significativa entre a sucessão e a respetiva função, evidencia uma compreensão por formalização (Herscovics & Bergeron, 1984).

Além de manifestar diferentes níveis de compreensão do modelo proposto por Herscovics e Bergeron (1984), o raciocínio do Bernardo na resolução desta alínea também constitui um indício de compreensão relacional (Skemp, 1976), uma vez que o aluno não se limita à aplicação de procedimentos memorizados, mas procura justificar o comportamento da sucessão com base nos elementos da função associada.

No final da tarefa, a investigadora procurou promover um momento de reflexão sobre a perceção do Bernardo da sucessão como uma progressão aritmética:

I: Se nenhuma alínea da tarefa pedisse para calcular a soma dos termos da sucessão, associavas a sucessão a uma progressão aritmética?

B: Não, resolvia como se fosse só uma sucessão, como fiz no 1.1. e 1.2..

O facto de o próprio aluno ter reconhecido que a identificação da sucessão como sendo uma progressão aritmética não resultou da análise da estrutura da sucessão, mas sim do próprio enunciado da questão, revela uma compreensão instrumental assente no reconhecimento de questões típicas sobre progressões (Skemp, 1976). Isto reforça a ideia de que, apesar de aplicar corretamente os procedimentos envolvidos, a sua compreensão relacional da sucessão apresenta algumas limitações (Herscovics & Bergeron, 1984; Skemp, 1976).

4.1.2. Tarefa 2

Na Tarefa 2, a sucessão em estudo é (a_n) , que representa a área dos triângulos obtidos em cada fase, ao unir os pontos médios dos lados do triângulo anterior (Anexo 30). Este

processo de construção coincide com o da Tarefa 1, pelo que os alunos dispõem igualmente da figura que ilustra a aplicação do processo nas três primeiras fases de construção.

Questão 2.1. – Determinar a expressão geral da sucessão.

O Bernardo começou por atribuir um valor arbitrário aos lados do triângulo equilátero inicial. Com base nesse valor, aplicou o Teorema de Pitágoras para determinar a altura do triângulo e, em seguida, calcular a respetiva área, que corresponde ao primeiro termo da sucessão. Na fase 2, reconheceu que os quatro triângulos construídos eram equiláteros, cujo comprimento do lado era igual a metade do anterior. Calculou novamente a altura e determinou a área de cada um desses triângulos (**Figura 6**). Na fase 3 repetiu o procedimento e começou a formular uma conjectura sobre a regularidade da sucessão:

B: Acho que já estou a descobrir o padrão. O denominador é sempre o quádruplo do anterior.

Figura 6

Resolução da questão 2.1.

Tarefa 2

$c = \sqrt{3}$

$4 = 1 + c^2$

$P = \left(\frac{1}{2}\right)^2 c^2$

$c = \frac{\sqrt{3}}{2} = h$

1° figura

$A = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

2° figura

$A = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$

3° figura

$0,25 = 0,25^2 + c^2$

$c = \frac{\sqrt{3}}{4}$

$A = 0,5 \times \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{16}$

$a_n = a_1 \times r^{n-1}$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{4}$

$a_n = \sqrt{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

$a_1 = \sqrt{3} \times 1 = \sqrt{3} \checkmark$

$a_2 = \sqrt{3} \times \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4} \checkmark$

$a_3 = \sqrt{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{16} \checkmark$

Nota. Fonte Própria.

O facto de o Bernardo considerar que o lado do triângulo inicial admitia duas unidades de comprimento, permitiu-lhe determinar a área dos triângulos das três primeiras fases e identificar visualmente o padrão da sucessão. Esta estratégia enquadra-se na compreensão

intuitiva do conceito de sucessão (Herscovics & Bergeron, 1984) e evidencia uma concepção predominantemente operacional, uma vez que o aluno depende da manipulação de valores concretos para reconhecer a regularidade subjacente, característica típica da fase de interiorização descrita por Sfard (1991).

Com base na regularidade observada, identificou tratar-se de uma progressão geométrica e, à semelhança do que fez na Tarefa 1, procurou validar a sua classificação através do cálculo do quociente entre dois termos consecutivos.

I: Por que é que a sucessão (a_n) é uma progressão geométrica?

B: É o que me parece, mas eu posso provar através do cálculo da razão que é $\frac{a_{n+1}}{a_n}$.

I: Por que é que se calcula o quociente entre dois termos consecutivos para provar que a sucessão é uma progressão geométrica?

B: Para provar que a relação entre dois termos quaisquer seguidos é sempre igual.

Embora a estratégia adotada seja semelhante à utilizada na tarefa anterior, importa destacar que, neste caso, o aluno restringiu o cálculo ao quociente entre o segundo e o primeiro termo da sucessão (**Figura 6**), procedimento este que, por si só, não é suficiente para justificar a natureza geométrica da sucessão. Quando questionado sobre essa limitação, respondeu:

I: Calcular o quociente entre dois termos específicos da sucessão é suficiente para provar que (a_n) é uma progressão geométrica para todo o número natural n ?

B: Pois... Eu sei que nós nas aulas não costumamos fazer assim, mas para isso precisava de ter o termo geral e eu ainda não tenho a certeza se é este.

Este aspeto revela uma compreensão de procedimentos, na medida que o Bernardo reconhece o procedimento utilizado para provar a natureza de uma progressão geométrica (Herscovics & Bergeron, 1984). Contudo, a aplicação que faz do mesmo não é totalmente adequada, o que remete para uma concepção predominantemente operacional do conceito de sucessão (Sfard, 1991) e para uma apropriação instrumental incompleta (Skemp, 1976).

No entanto, articula o procedimento que procurou replicar com a estrutura de uma progressão geométrica e estabelece uma relação coerente entre a redução da base e da altura dos triângulos e a consequente diminuição da área:

I: No contexto do problema o que significa a razão ser $\frac{1}{4}$?

B: No cálculo da área eu vi que tanto a altura como a base diminuem para metade. Logo, faz sentido ser $\frac{1}{4}$, pois como a área é uma multiplicação da base pela altura, diminui 4 vezes.

Esta interpretação contextualizada do valor da razão revela momentos pontuais de compreensão relacional, segundo Skemp (1976), e indícios de transição para a fase de condensação, no sentido descrito por Sfard (1991), uma vez que começa a conceber a sucessão como um todo, mobilizando uma compreensão significativa da regularidade envolvida.

Por fim, recorreu diretamente à fórmula do termo geral de uma progressão geométrica e confirmou a validade da expressão encontrada através do cálculo dos três primeiros termos da sucessão (**Figura 6**).

Questão 2.2. – Determinar a expressão da soma dos n primeiros termos da sucessão e analisar o seu comportamento à medida que o número de fases aumenta.

A abordagem adotada na parte final da alínea 2.1. e no início da 2.2. é idêntica, uma vez que o aluno se limita a aplicar as fórmulas do termo geral e da soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica, respetivamente, sem compreender os motivos pelos quais as fórmulas assumem determinada estrutura. Esta atitude reflete-se numa apropriação instrumental das fórmulas, sem qualquer compreensão das razões que justificam a sua estrutura. Com efeito, denota uma compreensão de procedimentos de carácter fortemente instrumental (Herscovics & Bergeron, 1984; Skemp, 1976), enquadrando-se na fase de interiorização, caracterizada pela sua natureza operacional (Sfard, 1991).

De forma a analisar o comportamento da soma dos n primeiros termos da sucessão, o Bernardo começou por calcular o valor da soma para diferentes valores de n (**Figura 7**) e, com base nos valores obtidos, constatou:

B: A soma está a aumentar, mas cada vez menos e parece que se está a aproximar de um valor 2 vírgula qualquer coisa... Por isso, posso calcular o limite.

I: O cálculo do limite vai-te permitir concluir o quê?

B: Qual é o valor ao certo que a soma se está a aproximar.

A conjectura que formulou sobre o comportamento da soma dos termos, resulta da sua percepção visual, uma característica da compreensão intuitiva (Herscovics & Bergeron, 1984). Além disto, o facto de ser sustentada na análise de casos particulares evidencia uma conceção operacional, situando-se na fase de interiorização do processo de reificação (Sfard, 1991).

O momento que se segue marca uma evolução significativa no raciocínio do Bernardo, na medida que começa a operar sobre a expressão da soma dos termos como um objeto matemático, mobilizando conceitos mais avançados, como a noção de limite (**Figura 7**). O recurso à notação e simbolismo matemático para analisar e interpretar o comportamento da soma dos termos da progressão, revela indícios de compreensão por formalização (Herscovics & Bergeron, 1984) e denota uma conceção de natureza mais estrutural do conceito, sugerindo a transição para o estágio de condensação do processo de reificação (Sfard, 1991).

Figura 7

Resolução da questão 2.2.

$$\begin{aligned} 2.2-) S_n &= 1 \times \frac{1 - \pi^n}{1 - \pi} \\ &= \sqrt{3} \times \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \left(\frac{1}{4}\right)} \right) = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n}{\frac{3}{4}} \end{aligned}$$

- quando $n=1 \Rightarrow \sqrt{3} \approx 1,73$
- quando $n=2 \Rightarrow \frac{5\sqrt{3}}{4} \approx 2,16$
- quando $n=3 \Rightarrow \frac{21\sqrt{3}}{8} \approx 2,27$
- quando $n=4 \Rightarrow \frac{16}{3} \approx 5,33$
- quando $n=5 \Rightarrow 2,31$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3} - \sqrt{3} \left(\frac{1}{4}\right)^n}{\frac{3}{4}} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$$
$$= \frac{\sqrt{3} - \sqrt{3} \times 0}{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3} - 0}{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

ou: quanto maior for o n , maior será o valor de S_n , a tender para $\frac{4\sqrt{3}}{3}$, mas nunca atingindo este valor, só aproximando-se.

Nota. Fonte Própria.

Ainda que o cálculo do limite se baseie numa compreensão de procedimentos, assente na aplicação de regras algébricas, a progressão para a fase de condensação torna-se particularmente evidente na interpretação que aluno faz do valor do limite:

I: No contexto do problema, o que significa o valor do limite que calculaste?

B: Significa que a soma dos triângulos se aproxima desse valor, mas apesar de ser cada vez mais próximo, nunca o atinge.

A sua atitude demonstra não só consciência do comportamento da soma dos termos da progressão, bem como intenção de atribuir significado ao resultado obtido no contexto do problema. Tal atitude revela indícios de compreensão relacional que transcende o plano exclusivamente operacional, já que o Bernardo não se limita à mera execução de algoritmos para determinar o valor do limite (Herscovics & Bergeron, 1984; Sfard, 1991; Skemp, 1976).

Note-se que apesar de ter atribuído um valor arbitrário ao comprimento do lado do triângulo inicial, o aluno reconhece que o valor da razão é consequência da construção geométrica da progressão e que, por isso, se mantém inalterada independentemente do comprimento do lado do triângulo inicial. Esta constatação alinha-se com a construção de invariantes, uma das características do nível de abstração matemática do modelo proposto por Herscovics e Bergeron (1984). Simultaneamente, observa-se uma compreensão relacional, uma vez que o Bernardo compreende o sentido do procedimento, permitindo-lhe generalizar e adaptar a estratégia de resolução a novas situações (Skemp, 1976). A clareza do seu raciocínio revela uma compreensão mais abstrata e estruturada da progressão geométrica, na medida que a encara como um objeto matemático passível de ser manipulado (Sfard, 1991).

Por último, a propósito do motivo pelo qual não recorreu à função que modela a sucessão $a_n = \sqrt{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$, para formular uma conjectura sobre o comportamento da soma dos termos da progressão geométrica, tal como havia feito na tarefa anterior, o Bernardo referiu não conhecer o comportamento da função $f(x) = \sqrt{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{x-1}$ e, por isso, não saber se podia generalizar. Esta justificação é de carácter instrumental, uma vez que, o aluno revela uma atitude cautelosa perante a aplicação deste procedimento em contextos diferentes, mostrando consciência do “como” e do “porquê” da sua aplicação (Herscovics & Bergeron, 1984; Skemp, 1976).

4.1.3. Considerações Finais

Como se caracteriza a compreensão do conceito de sucessão?

A compreensão do conceito de sucessão por parte do Bernardo oscila entre os planos instrumental e relacional (Skemp, 1976), com momentos pontuais de formalização e abstração matemática (Herscovics & Bergeron, 1984). Contudo, a análise das suas resoluções, nomeadamente quando aplica as fórmulas associadas às progressões, revela que, em muitos momentos, essa compreensão permanece ancorada a procedimentos, numa abordagem predominantemente instrumental, uma vez que a utilização das fórmulas decorre da sua memorização e posterior aplicação, sem evidência de uma compreensão significativa dos princípios que fundamentam a sua estrutura (Herscovics & Bergeron, 1984; Skemp, 1976).

No entanto, constata-se que o aluno é capaz de articular os métodos utilizados para justificar a natureza da progressão com a estrutura da mesma, ainda que de forma informal e, por vezes, incompleta. Esta observação constitui um indício do modo de compreensão relacional proposto por Skemp (1976). Para além disso, destaca-se a sua capacidade de interpretar os resultados à luz do contexto das tarefas propostas.

Como acontece o processo de reificação do conceito de sucessão?

Embora se identifiquem indícios claros de progressão para a fase de condensação, nomeadamente através da generalização do comportamento da soma dos termos da progressão aritmética da Tarefa 1, com base na representação gráfica da função afim associada à sucessão, bem como através da mobilização do conceito de limite para analisar o comportamento da soma dos termos da progressão geométrica da Tarefa 2, não se pode considerar que o conceito de sucessão se encontre plenamente reificado (Sfard, 1991). Com efeito, o aluno continua a depender de processos operacionais para validar a natureza da sucessão, como se verifica na necessidade de calcular a diferença entre dois termos consecutivos para identificar uma progressão aritmética (Tarefa 1) ou o quociente entre dois termos consecutivos para justificar a presença de uma progressão geométrica (Tarefa 2).

É oportuno salientar que, no final da Tarefa 1, o aluno admitiu que a classificação da sucessão como progressão aritmética não decorreu da análise da estrutura da sucessão, mas foi influenciada diretamente pela formulação do enunciado. Esta afirmação revela que o conceito de sucessão não é totalmente concebido de forma estrutural como um objeto matemático autónomo e independente, indicando, assim, que o estágio de reificação ainda não se encontra plenamente alcançado (Sfard, 1991).

4.2. Estudo de caso: Tomé

O Tomé é um aluno extremamente dedicado e trabalhador. Contudo, as suas intervenções na sala de aula refletem que já contactou e trabalhou com os tópicos que estão a ser lecionados. É um aluno com uma postura marcada pela ansiedade e nervosismo que se intensifica nas aulas que antecedem os momentos de avaliação sumativa e no decorrer dos próprios momentos. No ano letivo anterior, obteve a classificação de vinte valores e, no 1.º semestre do 11.º ano de escolaridade, obteve a classificação de dezoito valores.

4.2.1. Tarefa 1

Recorde-se a sucessão (u_n) que representa o número de triângulos formados em cada fase de construção, cujos vértices são definidos pelos pontos médios dos lados do triângulo construído na fase anterior (Anexo 28).

Questão 1.1. – Determinar os cinco primeiros termos da sucessão.

Após a leitura do enunciado da tarefa, o Tomé iniciou espontaneamente a dedução do termo geral da sucessão (u_n) . Para tal, contou o número de triângulos das três primeiras fases da construção, o que lhe permitiu identificar a regularidade presente na sucessão e representá-la através do esquema da **Figura 8**.

Figura 8

Resolução da questão 1.1.

Handwritten work showing the derivation of the general term u_n and the first five terms of the sequence (u_n) .

Derivation of the general term:

$$\begin{aligned} \Delta \Delta \\ u_n &= u_1 + (n-1) \times 4 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow u_n &= 1 + (n-1) \times 4 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow u_n &= 4n - 3 \end{aligned}$$

Diagram illustrating the construction of triangles:

1 triangle (1) → 5 triangles (5) → 9 triangles (9)

Verification of the first five terms:

$$\begin{aligned} u_1 &= 4 - 3 = 1 \\ u_2 &= 8 - 3 = 5 \\ u_3 &= 12 - 3 = 9 \\ u_4 &= 16 - 3 = 13 \\ u_5 &= 20 - 3 = 17 \end{aligned}$$

Nota. Fonte Própria.

O raciocínio desenvolvido denota uma compreensão intuitiva do conceito de sucessão, conforme descrito por Herscovics e Bergeron (1984), alicerçada na percepção visual da regularidade observada. A partir desta observação, concluiu prontamente tratar-se de uma progressão aritmética, apoiando-se no pré-conceito que detém da mesma:

T: Quando eu vejo uma progressão eu tento identificar se é aritmética pelo facto de ser sempre o mesmo valor que está a aumentar ou a diminuir entre os termos.

À luz do modelo teórico do processo de reificação proposto por Sfard (1991), este momento insere-se na fase de interiorização, uma vez que o aluno operou sobre objetos matemáticos de nível inferir, as representações pictóricas, para identificar o padrão subjacente à sucessão e, por conseguinte, reconhecer a sua natureza.

Posteriormente, o Tomé recorreu à fórmula do termo geral de uma progressão aritmética e procedeu à verificação dos três primeiros termos, substituindo a variável n pelas respetivas ordens. Como os três primeiros termos obtidos coincidiam com o número de triângulos presentes nas figuras, validou a expressão encontrada. De seguida, determinou o quarto e quinto termo por substituição direta no termo geral (**Figura 8**). Esta etapa da resolução configura-se numa compreensão predominantemente procedimental, baseada na aplicação correta, mas mecanizada, da fórmula do termo geral (Herscovics & Bergeron, 1984).

Questão 1.2. – Determinar a expressão geral da sucessão.

Relativamente ao termo geral da sucessão determinado na alínea anterior, quando confrontado com sua estrutura e, em particular, com o facto do número quatro surgir a multiplicar, demonstrou-se, de certa forma, surpreendido e com dificuldade em justificar esse aspeto.

I: No contexto do problema o que significa a razão ser 4?

T: À fase anterior somam-se 4 triângulos para se obter a fase seguinte.

I: Mas se observarmos o termo geral que obtiveste, o número 4 está a multiplicar e não a somar. Por que é que isto acontece?

T: Eu acho que tem a ver com o n , porque se formos substituindo vai fazendo sentido, mas não sei, nunca tinha pensado nisso...

Este episódio revela uma transição incipiente para o modo de compreensão relacional, uma vez que o aluno demonstra saber como utilizar a fórmula do termo geral de uma progressão aritmética, mas não manifesta uma compreensão significativa dos motivos que sustentam a sua estrutura (Skemp, 1976). À luz da distinção proposta por Sfard (1991), o facto de se apropriar da fórmula como um processo e não como um objeto, configura-se numa conceção operacional do conceito de sucessão, própria das fases iniciais do processo de reificação, em que o aluno se torna proficiente na aplicação de algoritmos.

Questão 1.3. – Calcular o número total de triângulos das oito primeiras fases.

Para determinar o número total de triângulos das oito primeiras fases, o Tomé recorreu à fórmula da soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética (**Figura 9**). Quando questionado sobre a sua utilização, justificou que “esta fórmula me permite calcular o somatório de todos os termos, ao invés de ir calcular todos os termos e depois somar”, demonstrando familiaridade com o procedimento.

Figura 9

Resolução da questão 1.3.

$$1.3. \quad S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \times n \Rightarrow S_8 = \frac{1 + 29}{2} \times 8 \Rightarrow S_8 = 15 \times 8 \Rightarrow \\ \Rightarrow S_8 = 120$$

Nota. Fonte Própria.

Tal como na questão anterior, a sua abordagem pautou-se por uma compreensão de procedimentos de natureza estritamente instrumental, na medida que domina a aplicação da fórmula da soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética, mas não demonstra compreender de forma relacional os elementos envolvidos (Herscovics & Bergeron, 1984; Skemp, 1976). Do ponto de vista de Sfard (1991), a manipulação da fórmula traduz-se numa conceção operacional, não existindo qualquer indício de reificação do conceito como um objeto matemático dotado de significado.

Questão 1.4. – Analisar o comportamento da soma total dos triângulos à medida que o número de fases aumenta.

Relativamente ao comportamento da soma total de triângulos à medida que o número de fases aumenta, o Tomé afirmou:

T: Vai aumentado, porque à medida que o número de fases aumenta, o número de triângulos em cada fase também aumenta. Por exemplo, $S_9 > S_8$.

A observação inicial do Tomé revela uma compreensão intuitiva do comportamento da sucessão, sustentada na manipulação de dois valores concretos da soma (Herscovics & Bergeron, 1984). Deste modo, o seu raciocínio sugere que se situa no estágio de interiorização do modelo de reificação, etapa marcada pelo domínio operacional dos conceitos (Sfard, 1991).

No que concerne à validade da sua análise para todo o conjunto dos números naturais, o Tomé procurou demonstrar que $S_{n+1} > S_n$ (**Figura 10**), sendo clara a sua intenção de generalização para qualquer ordem n da sucessão, um traço característico da compreensão por abstração matemática (Herscovics & Bergeron, 1984). O modo como manipula a expressão algébrica como um todo, sugere um avanço do seu raciocínio para a fase de condensação do modelo teórico do processo de reificação definido por Sfard (1991).

Figura 10

Resolução da questão 1.4.

1.4.

O valor da soma total dos triângulos vai aumentando à medida que o número de fases aumenta, isto é, que a ordem vai aumentando o termo também vai aumentando, ou seja, o número de triângulos vai aumentando.

$$S_{n+1} > S_n \Leftrightarrow \frac{n+1 + n+1}{2} \times n+1 > \frac{n+1 + n}{2} \times n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 + 4n + 4 - 3}{2} \times n+1 > \frac{1 + 4n - 3}{2} \times n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(4n+2) \times (n+1)}{2} > \frac{(4n-2) \times n}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4n^2 + 4n + 2n + 2 > 4n^2 - 2n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6n + 2n > -2 \Leftrightarrow 8n > -2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n > -\frac{1}{4}$$

Como $n \in \mathbb{N}$, então n é sempre superior a $-\frac{1}{4}$.

Nota. Fonte Própria.

No entanto, a justificação final que apresenta “É verdadeiro, porque qualquer número natural é maior que $-\frac{1}{4}$. Logo, está provado.”, evidencia que o uso do simbolismo matemático decorre de forma desvinculada do significado contextual dos termos da sucessão. Tal facto, denota uma compreensão de procedimentos que se reflete numa utilização instrumental do formalismo algébrico (Herscovics & Bergeron, 1984; Skemp, 1976). Assim, embora se reconheça um progresso na compreensão estrutural do conceito, este ainda não se encontra plenamente reificado (Sfard, 1991).

4.2.2. Tarefa 2

A sucessão (a_n) traduz a área dos triângulos construídos em cada fase, a partir da união dos pontos médios dos lados do triângulo obtido na fase anterior (Anexo 30).

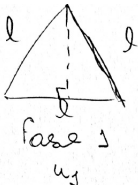
Questão 2.1. – Determinar a expressão geral da sucessão.

Na Tarefa 2, o Tomé optou por designar pela variável l a medida do lado do triângulo inicial e, através do Teorema de Pitágoras, determinou a altura do triângulo em função de l e, de seguida, a respetiva área, que corresponde ao primeiro termo da sucessão (**Figura 11**).

Figura 11

Resolução da questão 2.1.

2.1.



$$A_1 = \frac{l \times \frac{\sqrt{3}l}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}l^2}{4} \text{ u.a.}$$

$$h: l^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + h^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow l^2 = \frac{l^2}{4} + h^2 \Leftrightarrow h^2 = l^2 - \frac{l^2}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h^2 = \frac{3l^2}{4} \Leftrightarrow h = \sqrt{\frac{3l^2}{4}}, h > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h = \frac{\sqrt{3}l}{2} \text{ u.}$$

$$u_1 = \frac{\sqrt{3}l^2}{4}$$

$$u_m = u_1 \times 2^{m-1} \Leftrightarrow u_m = \frac{\sqrt{3}l^2}{4} \times \frac{1}{4}^{m-1}$$

Nota. Fonte Própria.

À luz do modelo teórico do processo de reificação delineado por Sfard (1991), esta estratégia insere-se na fase de interiorização, uma vez que o aluno teve a necessidade de determinar o primeiro termo da sucessão para, posteriormente, substituir na fórmula do termo geral de uma progressão geométrica.

De seguida, observou que as áreas dos triângulos das fases subsequentes correspondiam a um quarto da área do triângulo da fase anterior. Analogamente à Tarefa 1, a formulação da expressão geral da sucessão decorreu da percepção visual da regularidade observada e, por conseguinte, a classificação da natureza da progressão de razão $\frac{1}{4}$ foi sustentada pelo seu conhecimento prévio informal, em que associa as progressões geométricas a variações não constantes entre os termos (Herscovics & Bergeron, 1984).

I: Por que é que a sucessão (a_n) é uma progressão geométrica?

T: Porque a área não vai diminuir sempre da mesma maneira, mas sim sempre a partir de uma razão de $\frac{1}{4}$... A área vai ser sempre mais pequena que a anterior.

Munido desta constatação, o Tomé mobilizou uma compreensão de procedimentos de carácter instrumental, limitando-se a substituir os valores do primeiro termo e da razão na fórmula do termo geral de uma progressão geométrica (**Figura 11**). Sfard (1991) caracteriza esta abordagem como puramente operacional, na qual o conceito é manipulado como uma sequência de ações, sem que adquira o estatuto de objeto matemático dotado de significado próprio.

Na sequência deste raciocínio, o Tomé associou a diminuição da área dos triângulos à ideia de fração, o que originou algumas dificuldades na justificação do valor da razão. A dada altura, afirmou:

T: Sim [o facto de a área diminuir], faz com que a razão seja sempre uma fração.

I: Então como $\frac{5}{4}$ é uma fração, podia ser a razão desta progressão geométrica?

T: Não, porque eu parto de um triângulo e obtenho 4 [de uma fase para a seguinte]. Mas acho que não é esse o motivo...

A certo ponto, associou o facto de a razão ser inferior a 1 ao comportamento decrescente dos termos da progressão:

T: [...] Ah já sei... $\frac{5}{4}$ não pode ser porque é maior que 1 e é $\frac{1}{4}$ porque é menor que 1 e as áreas vão diminuindo.

Neste momento, tornou-se evidente que o Tomé não domina plenamente o conceito de razão de progressões geométricas, nem compreende com clareza o motivo pelo qual, neste caso, a razão assume o valor $\frac{1}{4}$. O facto de associar a razão ser inferior a 1 ao comportamento decrescente dos termos da progressão, pode indicar uma tentativa de generalização, na medida que procura formular um princípio com aplicação mais geral e passível de adaptação a novos problemas, tentando uma aproximação à compreensão relacional (Skemp, 1976). No entanto, tal associação parece emergir sobretudo de uma observação intuitiva, que funciona como um pré-conceito e não de uma compreensão fundamentada sobre o comportamento das progressões geométricas (Herscovics & Bergeron, 1984).

Do ponto de vista da teoria da reificação de Sfard (1991), este episódio enquadra-se na fase de interiorização, uma vez que a razão não é compreendida como um objeto matemático com identidade própria que determina o comportamento da progressão, mas antes como um resultado empírico baseado em experiências concretas e ações repetidas.

Note-se que este aspeto reforça a ideia de que o aluno opera num nível operacional, coerente com uma compreensão instrumental e de procedimentos, dominada pela aplicação de algoritmos em detrimento da compreensão conceptual (Herscovics & Bergeron, 1984; Sfard, 1991; Skemp, 1976).

Questão 2.2. – Determinar a expressão da soma dos n primeiros termos da sucessão e analisar o seu comportamento à medida que o número de fases aumenta.

Na resolução da alínea 2.2., é possível identificar a presença de três dos quatro modos de compreensão propostos por Herscovics e Bergeron (1984). O Tomé começou por substituir na fórmula da soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica, o valor do primeiro termo e da razão e simplificar a expressão (**Figura 12**), o que se reflete numa compreensão de procedimentos. A abstração matemática manifesta-se quando o aluno, antes mesmo de realizar o cálculo do limite, reflete que como l é uma constante, a variável n irá dominar o comportamento do limite:

T: Só que continuo a ter a incógnita do lado. Ah, mas num limite isso não interessa.

I: Não interessa porquê?

T: Porque o lado não vai ser nunca infinito, vai ser sempre um valor. Logo, independentemente do valor, o n como é infinito vai ganhar sempre.

Este momento evidencia uma construção de invariantes, ainda que esse raciocínio não seja necessário para a resolução do limite em causa. Segundo Sfard (1991), o facto de o aluno procurar compreender o papel de cada variável na expressão, reflete-se na transição para a fase de condensação do processo de reificação do conceito, na medida que analisa o comportamento da soma dos termos da progressão através da estrutura da sua expressão analítica, sem necessidade de recorrer a valores concretos. Este raciocínio acrescenta uma dimensão estrutural à abordagem do Tomé, permitindo-lhe conceber o conceito de forma simultaneamente operacional e estrutural, a dualidade que Sfard (1991) aponta como fundamental para a compreensão plena de um conceito matemático.

Por fim, existem indícios de compreensão por formalização dado que o aluno recorreu à notação e simbolismo matemático para analisar e interpretar o comportamento da soma dos termos da sucessão, através do cálculo do respetivo limite. Apesar do cálculo do limite assentar numa compreensão de procedimentos (Herscovics & Bergeron, 1984), ao concluir que “a soma tende para um valor em função de l ”, o Tomé demonstra capacidade em articular o formalismo algébrico com o significado geométrico no contexto do problema, o que traduz uma apropriação mais profunda dos conceitos envolvidos. Nestes momentos, torna-se notória uma aproximação à compreensão relacional de Skemp (1976), dado que o aluno não se limita à manipulação algébrica das regras operatórias de limites.

Terminou a resolução da questão, concluindo que a sucessão é convergente e que a soma dos termos da sucessão tende para um valor em função de l (**Figura 12**).

Figura 12

Resolução da questão 2.2.

$$\begin{aligned}
 2.2. \quad S_N &= a_1 \times \frac{1-a^{N+1}}{1-a} = \frac{\sqrt{3}l^0}{4} \times \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{N+1}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}l^0}{4} \times \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{N+1}}{\frac{3}{4}} = \\
 &= \frac{\sqrt{3}l^0}{3} \times \left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{N+1}\right) \\
 \lim(S_N) &= \lim\left(\frac{\sqrt{3}l^0}{3} \times \left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{N+1}\right)\right) = \lim\left(\frac{\sqrt{3}}{3}l^0\right) \times \lim\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{N+1}\right) \\
 &= \frac{\sqrt{3}l^0}{3} \times (1-0) = \frac{\sqrt{3}l^0}{3}
 \end{aligned}$$

Se lembrarmos muito quanto quisemos, a soma vai convergir para $\frac{\sqrt{3}l^0}{3}$.

Nota. Fonte Própria.

A decisão do Tomé de representar o lado do triângulo inicial pela variável l , em vez de lhe atribuir um valor arbitrário, mostra também uma intenção de generalização. Esta abordagem revela indícios de compreensão por abstração matemática, dado que manipulou as expressões do termo geral e da soma dos termos, independentemente do comprimento do lado do triângulo inicial (Herscovics & Bergeron, 1984).

I: Por que é que optaste por designar por l o comprimento do lado do triângulo inicial e não considerar um valor, por exemplo, 3?

T: Porque assim, ao trabalhar com l , consigo ter o caso geral. Por exemplo, se me dissessem agora que o lado era 3, era só substituir. Assim, funciona para qualquer número.

O comentário final do Tomé revela um pormenor particularmente significativo para a análise da sua compreensão. Embora ao longo da resolução tenha recorrido à variável l para formular conjecturas, esta intervenção torna evidente que a encara essencialmente como um valor a substituir. Tal evidência permite inferir que as expressões gerais formuladas são compreendidas pelo aluno como meros instrumentos de cálculo que lhe permitem determinar qualquer termo da sucessão ou a soma de um número arbitrário de termos.

Neste enquadramento, ainda que se reconheçam indícios da fase de condensação, a forma como o aluno manipula o objeto matemático indica que o processo de reificação não se encontra plenamente consolidado (Sfard, 1991). De acordo com esta autora, a reificação do conceito implica a capacidade de o perceber como uma entidade matemática autónoma, dotada de estrutura e significado.

4.2.3. Considerações Finais

Como se caracteriza a compreensão do conceito de sucessão?

A forma como o Tomé resolveu as tarefas propostas denota uma abordagem bastante metódica, estruturada em etapas claramente definidas. O aluno começa por identificar a regularidade presente na sucessão, seguindo-se a classificação da sua natureza com base nos conhecimentos prévios e informais que detém sobre progressões. Uma vez determinado o primeiro termo e a razão, procede à formulação do termo geral da sucessão, apoiando-se nas fórmulas previamente memorizadas. Esta sequência de ações demonstra compreensão de procedimentos, centrada na reprodução de algoritmos conhecidos (Herscovics & Bergeron, 1984).

O carácter instrumental do seu raciocínio torna-se particularmente evidente na forma como utiliza e manipula as fórmulas relativas ao termo geral e à soma dos n primeiros termos de cada progressão, pautando-se pelo saber como fazer, mas frequentemente desprovidos de uma compreensão dos fundamentos subjacentes (Skemp, 1976). Ainda assim, na Tarefa 1, o aluno é capaz de atribuir significado ao valor da razão no contexto do problema, associando-o ao acréscimo constante de quatro triângulos entre fases consecutivas. Contudo, esta capacidade não se verifica com a mesma clareza na análise da Tarefa 2. Nesta tarefa, observa-se, por um lado, uma maior autonomia na manipulação simbólica, bem como uma intenção de generalização patente na decisão de representar o comprimento do lado do triângulo inicial pela variável l . Ao libertar-se da necessidade de recorrer a valores numéricos específicos, o Tomé aproxima-se de uma compreensão mais abstrata do conceito (Herscovics & Bergeron, 1984). No entanto, esta generalização permanece fortemente enraizada a uma lógica instrumental, pois a variável l é concebida sobretudo como um valor suscetível de ser substituído para efeitos de cálculo (Herscovics & Bergeron, 1984; Skemp, 1976).

Como acontece o processo de reificação do conceito de sucessão?

A análise das resoluções do Tomé revela que o aluno possui uma compreensão ainda fortemente ancorada na conceção operacional do conceito de sucessão (Sfard, 1991). No entanto, em determinados momentos é possível identificar indícios de progresso no modelo de reificação apresentado por Sfard (1991), em particular na transição do estágio de interiorização para a fase de condensação.

Neste âmbito, destaca-se a abordagem à Tarefa 2, na qual o aluno introduziu a variável l para representar o comprimento do lado do triângulo inicial. Esta estratégia permitiu-lhe operar com a expressão geral da sucessão e da respetiva soma dos termos e formular conjecturas válidas para qualquer valor de l , o que constitui um indício claro de progresso em direção à condensação do conceito (Sfard, 1991).

Importa sublinhar que, segundo esta autora, o desenvolvimento da compreensão estrutural emerge progressivamente a partir de uma conceção operacional, num processo longo e complexo que envolve as três fases do processo de reificação. Neste sentido, a decisão do Tomé de introduzir a variável l , embora continue a ser entendida sobretudo como um valor a substituir e permaneça, assim, ancorada a uma lógica operacional, é crucial para que o aluno possa estruturar o seu raciocínio.

4.3. Estudo de caso: Vasco

O Vasco é um aluno com elevada capacidade de raciocínio matemático. Durante as aulas, realiza as tarefas propostas sem grandes dificuldades e está sempre predisposto a participar e a voluntariar-se para qualquer iniciativa. Contudo, em momentos de avaliação sumativa tende a dispersar um pouco, ficando aquém dos resultados desejados. É um aluno bastante sintético na apresentação das suas resoluções, embora a sua comunicação matemática tenha melhorado notoriamente desde o início do ano letivo. No ano letivo anterior, obteve a classificação de dezasseis valores e, no 1.º semestre do 11.º ano de escolaridade, obteve a classificação de quinze valores.

4.3.1. Tarefa 1

Seja (u_n) a sucessão que indica o número de triângulos obtidos em cada fase do processo de construção, cujos vértices são os pontos médios dos lados do triângulo construído na fase anterior (Anexo 28).

Questão 1.1. – Determinar os cinco primeiros termos da sucessão.

O Vasco começou por contar o número de triângulos das três primeiras fases e construir o termo geral da sucessão (**Figura 13**).

Figura 13

Resolução da questão 1.1.

1.1

$u_1 = 1 \quad u_2 = 5 \quad u_3 = 9 \quad u_4 = 13 \quad u_5 = 17$ O primeiro termo tem 1 triângulo

$u_n = 4n - 3$

$u_1 = 4 \times 1 - 3 = 1 \quad u_2 = 4 \times 2 - 3 = 5 \quad u_3 = 4 \times 3 - 3 = 9 \quad u_4 = 4 \times 4 - 3 = 13$

$u_5 = 4 \times 5 - 3 = 17$

Nota. Fonte Própria.

A formulação da expressão $u_n = 4n - 3$ baseou-se, primeiramente, na perceção visual da regularidade da sucessão, que constitui um dos aspetos da compreensão intuitiva, conforme o modelo apresentado por Herscovics e Bergeron (1984). Segundo Sfard (1991), este comportamento é característico do estágio de interiorização do processo de reificação, no qual o aluno se apoiou nas representações pictóricas para identificar o padrão presente na construção. Posteriormente, procurou traduzir a regularidade observada por meio de uma expressão algébrica, ajustando a expressão $u_n = 4n$, o que, por sua vez, denota uma compreensão de procedimentos (Herscovics & Bergeron, 1984).

V: Vai de 4 em 4, logo tem de ser $4n$. Como $4 \times 1 = 4$ e o primeiro termo é 1, tenho de subtrair 3. Então é $4n - 3$.

O aluno procedeu à verificação da expressão geral da sucessão, confirmando que os valores obtidos coincidiam com o número de triângulos das três primeiras fases. De seguida, por substituição direta no termo geral, calculou o quarto e quinto termo da sucessão (**Figura 13**).

Questão 1.2. – Determinar a expressão geral da sucessão.

Relativamente à estrutura do termo geral da sucessão determinado pelo Vasco na alínea anterior (**Figura 13**), desencadeou-se o seguinte diálogo:

I: Afirmaste que de uma fase para a seguinte estás sempre a somar 4 triângulos. Mas se observarmos o termo geral que obtiveste, o 4 está a multiplicar e não a somar. Por que é que afirmaste logo que era $4n$?

V: Porque como a constante que está a aumentar é 4, comecei por fazer $4n$ e depois ajustei para que desse o primeiro termo certo.

I: E em nenhum momento pensaste que se de uma fase para a seguinte está sempre a somar 4 triângulos, devia ser $n + 4$?

V: Não, porque não dava. Porque a constante que está a ser somada nós multiplicamos pela incógnita que é a ordem do termo.

A justificação do Vasco relativamente à estrutura da expressão que formulou revela que interiorizou uma regra associada ao termo geral de sucessões com variações constantes entre termos consecutivos (isto é, progressões aritméticas, ainda que ele não as identifique como tal). Embora a dedução do termo geral assente na aplicação de um procedimento, a explicação dada denota compreensão relacional do conceito, uma vez que demonstra consciência do funcionamento e da aplicabilidade do método, bem como da ligação entre a estrutura algébrica da expressão e a regularidade presente na construção (Skemp, 1976).

Do ponto de vista de Sfard (1991), a abordagem do aluno demonstra que se encontra na fase de condensação do conceito, uma vez que encara a sucessão como um todo, sem necessitar de analisar detalhadamente cada etapa do seu processo de construção. Por conseguinte, a sua conceção do conceito não se limita ao plano operacional, estendendo-se também à conceção estrutural (Sfard, 1991).

Questão 1.3. – Calcular o número total de triângulos das oito primeiras fases.

No início da alínea 1.3., o Vasco optou por determinar os termos de ordem 6, 7 e 8 e, posteriormente, calcular a soma dos oito primeiros termos da sucessão (**Figura 14**).

Figura 14

Resolução da questão 1.3.

$$\begin{aligned}
 & u_1 = 1 \quad u_2 = 5 \quad u_3 = 9 \quad u_4 = 13 \quad u_5 = 17 \quad u_6 = 4 \times 6 - 3 = 21 \quad u_7 = 4 \times 7 - 3 = 25 \\
 & u_8 = 4 \times 8 - 3 = 29 \quad T_8 = 1 + 5 + 9 + 13 + 17 + 21 + 25 + 29 = 120 \quad T_8 = 120 \\
 & S_n = u_1 \times \frac{1 - n}{1 - r} \quad S_n = \frac{1 - n}{1 - r} \quad \text{Pg } \frac{u_{n-1}}{u_n} = r \quad r = \frac{4n + 1}{4n - 3} \quad u_{n+1} = 4(n+1) - 3 = 4n + 1 \\
 & \text{? } \Delta \quad r = \frac{u_{n+1} - u_n}{u_n} \quad S_n = \frac{u_1 + u_n}{2} \times n \quad \text{Ri é uma progressão aritmética.} \\
 & r = \frac{4n + 1 - (4n - 3)}{4n - 3} = \frac{4}{4n - 3} \quad S_8 = \frac{1 + 29}{2} \times 8 = 120
 \end{aligned}$$

Nota. Fonte Própria.

Quando questionado pela investigadora sobre o motivo de recorrer à substituição no termo geral em vez de adicionar 4 ao termo anterior, reconheceu que "é o hábito de determinar os termos através da substituição da respetiva ordem no termo geral". Demonstra, assim, que opera ao nível da compreensão de procedimentos, apoiado pelo domínio instrumental do conceito e pelo recurso a um método eficaz que o conduz à resolução da questão (Herscovics & Bergeron, 1984; Skemp, 1976). Neste momento, situa-se na fase de interiorização do processo de reificação, mostrando-se proficiente na execução de procedimentos algébricos (Sfard, 1991).

A propósito da possibilidade de determinar a soma de um elevado número de fases, o aluno reconheceu a fragilidade do procedimento adotado, afirmando que, nessa eventualidade, teria de recorrer às expressões da soma dos n primeiros termos de uma progressão. No entanto, admitiu não saber distinguir em que contexto aplica cada progressão, pelo que, para identificar a sua natureza, calcula a diferença e o quociente entre dois termos consecutivos para "ver em qual delas a razão dá um número". Esta estratégia evidencia uma compreensão de procedimentos, uma vez que reproduz as técnicas aprendidas para identificar o tipo de progressão em estudo (Herscovics & Bergeron, 1984). No entanto, revela não compreender o fundamento dos métodos que aplica, o que significa que se restringe à aplicação dos procedimentos memorizados, sem qualquer conexão com a estrutura da progressão. Skemp (1976) classifica tal abordagem como estritamente instrumental.

Por este motivo, não se considera que o Vasco manifeste uma compreensão por formalização, pois, embora utilize o simbolismo matemático para expressar uma propriedade das progressões aritméticas, as suas intervenções demonstram que desconhece o seu

significado (Herscovics & Bergeron, 1984). O facto de não compreender a lógica inerente ao cálculo da diferença entre dois termos consecutivos da sucessão, denota uma compreensão ancorada numa conceção puramente operacional do processo e que não atingiu o estágio de condensação do processo de reificação proposto por Sfard (1991).

Posto isto, para determinar a natureza da progressão, o Vasco começou por averiguar se se tratava de uma progressão geométrica, baseando-se somente na sua intuição, sem conseguir justificar tal suposição. Após calcular o quociente entre dois termos consecutivos e constatar que o resultado obtido “depende de n ”, descartou essa possibilidade e foi verificar se a sucessão era uma progressão aritmética, concluindo:

V: A razão é 4. Deu um número. Então é uma progressão aritmética porque o resultado não depende de n e na progressão geométrica dependia.

I: No contexto do problema o que significa a razão ser 4?

V: É a constante que somamos de uma fase para a outra. Faz sentido, pois para calcular a razão, subtraímos um termo pelo anterior e o que somamos de um para o outro é 4.

Após depreender que se tratava de uma progressão aritmética, o Vasco associou o valor da razão à diferença constante entre os termos consecutivos, revelando um progresso na articulação entre o procedimento adotado e o comportamento da sucessão. Ainda que, de forma informal e não totalmente consolidada, este comentário demonstra indícios de compreensão relacional do conceito, na medida que começa a atribuir significado ao método que aplica (Skemp, 1976). Abandona, assim, o nível estritamente operacional e encontram-se reunidas as condições para o início da condensação do conceito (Sfard, 1991).

A resolução da questão 1.3. terminou com a aplicação direta da fórmula da soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética, para confirmar que o resultado coincidia com o obtido anteriormente (**Figura 14**). Este comportamento baseado na aplicação de fórmulas memorizadas denota, uma vez mais, compreensão de procedimentos de carácter instrumental, já que o próprio aluno admitiu desconhecer o fundamento da expressão utilizada (Herscovics & Bergeron, 1984; Skemp, 1976). À luz da teoria da reificação, este episódio enquadra-se na conceção operacional, centrada na execução de algoritmos sem compreensão estrutural do conceito (Sfard, 1991).

Questão 1.4. – Analisar o comportamento da soma total dos triângulos à medida que o número de fases aumenta.

Finalmente, na questão 1.4., o Vasco começou por calcular a soma dos dois primeiros termos da sucessão e assim sucessivamente até à soma dos cinco primeiros termos (**Figura 15**). Com base na observação de exemplos concretos, afirmou que a soma dos triângulos da sucessão “está sempre a aumentar até $+\infty$ ”. Este comentário, revela uma compreensão intuitiva do conceito e indica que o aluno ainda opera segundo uma lógica de ações sucessivas, característica da fase de interiorização do processo de reificação (Herscovics e Bergeron, 1984; Sfard, 1991).

I: Existe alguma forma de provar essa afirmação?

V: Sim. Como n está sempre a aumentar, posso calcular o limite de S_n para ver o que acontece à soma quando n vai para $+\infty$. Se me der $+\infty$, é porque está sempre a aumentar.

Figura 15

Resolução da questão 1.4.

1.4

$$u_1 + u_2 = 6$$

$$u_1 + u_2 + u_3 = 15$$

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 28$$

$$\begin{array}{r} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \\ \hline \quad \quad \quad + u_5 = 45 \end{array}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1 + 4n - 3}{2} \times n = \frac{n + 4n^2 - 3n}{2} = \frac{-2n + 4n^2}{2}$$

$$= 4n + 2n^2 = 2n^2 = \underline{\underline{+\infty}}$$

Nota. Fonte Própria.

O facto de o Vasco mobilizar o conceito de limite para justificar o comportamento da soma dos termos da progressão aritmética demonstra indícios de compreensão por formalização (Herscovics & Bergeron, 1984). A aplicação da noção de limite, ainda que assente em procedimentos de cálculo conhecidos, denota que reconhece o papel de determinados conceitos matemáticos na explicação de fenómenos mais gerais que, posteriormente, podem ser adaptados a novos contextos. Este aspeto manifesta a compreensão relacional defendida

por Skemp (1976), na medida que o aluno não se limita a replicar um procedimento adquirido, mas revela compreender o motivo subjacente à sua utilização.

Do ponto de vista da teoria da reificação, a fluidez com que o aluno invoca a noção de limite para analisar o comportamento da soma dos termos da sucessão, sugere um avanço significativo para uma conceção mais estrutural do conceito (Sfard, 1991). Apesar de inicialmente ter recorrido a casos particulares, nesta fase revela a capacidade de conceber a soma como um todo e de operar sobre a sua expressão, formulando conjecturas sobre o seu comportamento. Esta evolução reflete-se na condensação do conceito (Sfard, 1991).

Na **Figura 15** observa-se que o aluno procedeu ao cálculo do limite e o resultado obtido correspondeu à conjectura que formulou sobre o comportamento de S_n .

4.3.2. Tarefa 2

Recorde-se que, na Tarefa 2, a sucessão em estudo é (a_n) que corresponde à área dos triângulos obtidos em cada fase, cujos vértices são os pontos médios dos lados do triângulo construído na fase anterior (Anexo 30).

Questão 2.1. – Determinar a expressão geral da sucessão.

O Vasco começou por observar que da primeira para a segunda fase, “o triângulo inicial é dividido em 4 triângulos equiláteros”, pelo que a área do primeiro triângulo corresponde à “soma das áreas dos quatro triângulos construídos na fase 2”. Com base nesta observação, constatou que a área de cada triângulo da segunda fase correspondia a $\frac{1}{4}$ da área do triângulo inicial, e que o mesmo raciocínio se aplicava da segunda para a terceira fase. Relativamente à terceira fase, o aluno referiu:

V: Cada triângulo que se tinha formado na fase 2, é novamente dividido em 4. Como se tinham formado 4 triângulos, então na fase 3 o triângulo inicial está dividido em $4 \times 4 = 16$ triângulos equiláteros.

Portanto, à semelhança do que aconteceu na tarefa anterior, o Vasco revelou, conforme os modos de compreensão descritos por Herscovics e Bergeron (1984), uma compreensão intuitiva, baseada na perceção visual do padrão subjacente à sucessão, o que o levou a afirmar:

V: A razão é $\frac{1}{4}$ [...] porque a área do triângulo de cada fase é sempre $\frac{1}{4}$ da área do triângulo anterior, pois, de uma fase para a outra, cada triângulo é dividido em 4 triângulos.

Para determinar o termo geral da sucessão (a_n) , o Vasco começou por propor a expressão $a_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n$, mas verificou que os dois primeiros termos não coincidiam. Ainda ponderou oralmente a expressão $a_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n + \frac{3}{4}$, tentando ajustar o valor do primeiro termo, mas rapidamente rejeitou essa hipótese ao verificar que apenas resultava para o termo de ordem um. Com base nos cálculos realizados, o aluno percebeu que os valores obtidos com a expressão $a_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n$ estavam "um termo à frente" do que pretendia. Assim, equacionou a possibilidade de "atrasar um termo", propondo a expressão $a_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$, que confirmou estar correta para os três primeiros termos da sucessão (**Figura 16**). Acrescentou ainda que "se a segunda figura fosse a fase 1, nesse caso a expressão geral seria $a_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n$ ".

Figura 16

Resolução da questão 2.1.

2.1 Fase 1 $\rightarrow 1 \Delta$ $A \Delta_1 = 2$ vezes das áreas dos triângulos na fase 2

Fase 2 $\rightarrow 4 \Delta$ $1 \rightarrow \frac{1}{4} \rightarrow \frac{1}{16}$

$\pi = \frac{1}{4}$ $a_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n$ $a_1 = \frac{1}{4}$ a_{n+1}

$a_2 = \frac{1}{16}$

$a_1 = \frac{1}{4} \times$

$a_1 = 1 \checkmark$ $\left(\frac{1}{4}\right)^0 = 1$

$a_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

$a_1 = \left(\frac{1}{4}\right)^{1-1} = \left(\frac{1}{4}\right)^0 = 1$ $a_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

$a_2 = \left(\frac{1}{4}\right)^{2-1} = \frac{1}{4}$

$a_3 = \left(\frac{1}{4}\right)^{3-1} = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$

Nota. Fonte Própria.

Do ponto de vista da compreensão do conceito, este episódio reflete uma compreensão de procedimentos, uma vez que o aluno partiu de $a_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n$ e, depois de alguns ajustes, obteve

uma expressão coerente com os primeiros termos da sucessão (Herscovics & Bergeron, 1984). Apesar deste processo ser baseado em tentativas e verificações, o raciocínio do aluno indicia compreensão relacional do conceito, na medida que assentou num processo lógico e fundamentado, consciente do porquê do procedimento e da ligação entre a estrutura algébrica e a construção geométrica da sucessão (Skemp, 1976).

Para Sfard (1991), este episódio indica que o Vasco se encontra na fase de condensação do conceito, pois demonstra já ser capaz de pensar sobre a sucessão como um todo, sem precisar de se focar em cada fase de construção. Neste sentido, o aluno começa a conceber o conceito de forma operacional e estrutural, conceções que, segundo a autora, são necessárias e dependentes no processo de reificação.

Questão 2.2. – Determinar a expressão da soma dos n primeiros termos da sucessão e analisar o seu comportamento à medida que o número de fases aumenta.

Na alínea 2.2., o Vasco começou por confirmar se a sucessão em estudo era uma progressão geométrica, recorrendo ao quociente entre dois termos consecutivos (**Figura 17**).

Figura 17

Resolução da questão 2.2.

2.2

P.G $r = \frac{u_{n+1}}{u_n}$

$r = \frac{1}{4}$

$a_{n+1} = \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1-1}$ $a_{n+1} = \left(\frac{1}{4}\right)^n$

$r = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^n}{\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-(n-1)} = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-n+1} = \left(\frac{1}{4}\right)^1$

R: É uma progressão geométrica

$S_n = a_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$ $S_n = 1 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{4}}$ $\Rightarrow S_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3} - \frac{4}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$

$S_n = \frac{4}{3} - \frac{4}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$

$\left(\frac{1}{4}\right)^1 = \frac{1}{4}$ $\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$ $\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$

$\frac{1}{4} > \frac{1}{16} > \frac{1}{64}$

$\lim S_n = \frac{4}{3} - \frac{4}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{4}{3} - \frac{4}{3} \times 0 = \frac{4}{3}$

Se aumentas n , o valor da soma vai tender para $\frac{4}{3}$. Não o atinge nunca,

Nota. Fonte Própria.

Ao contrário da Tarefa 1, em que começou por verificar se se tratava de uma progressão geométrica apenas por intuição e sem grande justificação aparente, neste caso o aluno começou por testar se a sucessão era uma progressão geométrica por considerar que a sua construção em nada se assemelha à progressão aritmética com que trabalhou anteriormente.

I: Por que é que começaste por verificar se (a_n) era uma progressão geométrica?

V: Porque a sucessão anterior era uma progressão aritmética, em que se somavam sempre 4 triângulos de uma fase para a seguinte. Aqui o que acontece é que de uma fase para a outra o triângulo é dividido em 4 triângulos. Como a construção não é parecida, não podem ser ambas progressões aritméticas.

A explicação apresentada revela uma evolução na capacidade do aluno de estabelecer relações entre a construção geométrica das figuras e o tipo de progressão correspondente, o que denota uma aproximação, ainda que incipiente, à compreensão relacional (Skemp, 1976).

Após confirmar tratar-se de uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{4}$, o Vasco aplicou a respetiva fórmula da soma dos n primeiros termos (**Figura 17**), o que evidencia uma compreensão de procedimentos de carácter instrumental, centrada na aplicação mecânica da fórmula previamente memorizada, sem explicação da razão subjacente à sua estrutura (Herscovics & Bergeron, 1984; Skemp, 1976). Esta apropriação operacional da fórmula enquadra-se na fase de interiorização descrita por Sfard (1991).

Ao refletir sobre o comportamento da soma dos termos à medida que o número de fases aumenta, o Vasco manifestou diferentes níveis de compreensão, visíveis no seguinte diálogo:

V: Se eu aumentar n , o valor da soma vai diminuir.

I: Porquê?

V: Porque $\left(\frac{1}{4}\right)^1 = \frac{1}{4}$; $\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$; $\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$ e $\frac{1}{4} > \frac{1}{16} > \frac{1}{64}$. Logo, como a fração $\frac{1}{4}$ está elevada a n , quanto maior é o n , menor é o seu valor.

I: E o valor da soma vai diminuir até quanto?

V: Até $-\infty$... Não, $-\infty$ não, porque como é uma sucessão de áreas, os termos são sempre positivos, logo a soma também é sempre positiva. Então, a soma tende para 0.

Inicialmente, o facto de associar o ato “diminuir” ao conceito de $-\infty$, revela uma compreensão intuitiva baseada numa ação não quantificada (Herscovics & Bergeron, 1984). Imediatamente, reformulou o seu raciocínio ao reconhecer que a soma não pode assumir valores negativos, dado que os termos da sucessão correspondem a áreas de triângulos.

Ainda assim, a sua previsão estava incorreta, pois acabou por confundir o comportamento dos termos da progressão com o da respetiva soma. Este erro demonstra que a sua abordagem é meramente instrumental, pois, apesar de aplicar corretamente a fórmula e fazer inferências com base na diminuição dos termos, não compreende a estrutura conceptual por detrás do comportamento da soma dos termos da progressão (Skemp, 1976).

Analogamente à tarefa anterior, também nesta questão mobilizou o conceito de limite para justificar o comportamento da soma dos termos da progressão à medida que o número de fases aumenta. Ainda que tendo por base regras de cálculo de limites, a forma como interpretou o valor obtido revela que compreende a noção de convergência, o que sugere que o seu raciocínio já não se resume à mera aplicação de procedimentos (Herscovics & Bergeron, 1984). Assim, é novamente possível sinalizar-se uma compreensão por formalização de carácter relacional (Herscovics & Bergeron, 198; Skemp, 1976).

Mais uma vez, a forma como o Vasco mobiliza a noção de limite para interpretar o comportamento da soma dos termos da sucessão, demonstra um progresso significativo no sentido de uma conceção cada vez mais estrutural do conceito (Sfard, 1991). Torna-se notório que começa a encarar a sucessão como um objeto matemático único, sobre o qual formula conjeturas sobre as suas propriedades e, em particular, sobre o comportamento da soma dos seus termos. Estes indícios permitem situar o aluno na fase de condensação da teoria da reificação de Sfard (1991).

Finda a resolução das duas tarefas, a investigadora procurou promover uma reflexão sobre as situações exploradas, colocando em contraste a progressão aritmética trabalhada na Tarefa 1 com a progressão geométrica da Tarefa 2.

I: Na Tarefa 1 verificaste que a sucessão (u_n) era uma progressão aritmética e na Tarefa 2 que (a_n) era uma progressão geométrica. No início desta sessão de trabalho não sabias distinguir os casos em que se aplica cada uma das progressões. Depois de realizares estas duas tarefas, consegues estabelecer alguma relação?

V: Sim, a progressão aritmética aplico para somas e subtrações e a progressão geométrica para multiplicações e divisões.

I: E esse facto tem alguma relação com os métodos utilizados para justificar o tipo de progressão?

V: Ah sim... Nas progressões aritméticas estamos a verificar que a diferença entre dois termos seguidos é sempre a mesma e nas geométricas que a razão entre dois termos seguidos é sempre igual.

A afirmação do Vasco "a progressão aritmética aplico para somas e subtrações e a progressão geométrica para multiplicações e divisões", denota a construção de um pré-conceito, traduzido numa compreensão intuitiva sobre a natureza das progressões (Herscovics & Bergeron, 1984). Esta intervenção assume particular relevância dado que no início da sessão de trabalho, o aluno não era capaz de identificar a natureza de cada progressão sem replicar os procedimentos utilizados para esse fim.

Além disto, o facto de começar a articular os métodos memorizados com a estrutura subjacente a cada progressão, revela uma clara evolução na compreensão do conceito de progressão. A capacidade de reconhecer não apenas a eficácia, mas também o "como" e o "porquê" dos procedimentos, constitui um indício de transição para a compreensão relacional definida por Skemp (1976).

Assim, torna-se visível a evolução do Vasco em conceber as progressões como entidades estruturadas, reconhecendo regularidades e relações implícitas, sem depender sistematicamente da execução dos algoritmos para identificar a sua natureza. Neste sentido, à luz da teoria da reificação, o aluno demonstra uma reorganização do seu raciocínio, situando-se na fase de condensação (Sfard, 1991).

4.3.3. Considerações Finais

Como se caracteriza a compreensão do conceito de sucessão?

A análise das duas tarefas revela uma abordagem bastante coerente por parte do Vasco. O aluno iniciou a resolução a partir da observação das representações pictóricas presentes no enunciado e, através de perceções visuais, identificou a regularidade inerente a cada sucessão, começando por operar sob o modo de compreensão intuitiva do modelo de Herscovics e Bergeron (1984). Com base nas regularidades identificadas, construiu expressões algébricas que, desde a primeira formulação, se aproximaram significativamente do termo

geral da sucessão, sofrendo apenas pequenos ajustes. Nesta fase, encontra-se ao nível da compreensão de procedimentos (Herscovics & Bergeron, 1984). Este facto demonstra que o aluno tem facilidade em traduzir algebricamente a regularidade da construção, evidenciando traços de compreensão relacional, na medida que manifesta consciência da ligação entre a estrutura algébrica da expressão e a regularidade presente na sucessão (Skemp, 1976).

Contudo, quando confrontado com a necessidade de identificar a natureza das progressões, a compreensão que detém dos conceitos revela fragilidades. Embora domine os procedimentos que permitem essa caracterização, não os relaciona com a lógica subjacente à construção de cada progressão, o que Skemp (1976) caracteriza como compreensão instrumental, centrada na aplicação de regras, sem a devida compreensão do seu fundamento. Ainda assim, a forma como interpreta e contextualiza o valor da razão de cada sucessão revela que começa a atribuir significado ao procedimento aplicado, o que constitui sinais de evolução para uma compreensão mais relacional (Skemp, 1976). Este progresso toma-se particularmente evidente no momento posterior à realização das duas tarefas, quando o aluno começa a estabelecer relações entre a estrutura das progressões e a sua natureza, articulando os métodos memorizados com a estrutura subjacente a cada progressão.

Deste modo, concluiu-se que a compreensão do Vasco sobre o conceito de sucessão evoluiu ao longo da resolução das tarefas, evidenciando-se uma progressiva articulação entre os procedimentos replicados e a estrutura subjacente às sucessões. Não obstante, importa salientar que a aplicação das fórmulas da soma dos n primeiros termos de cada progressão permanece num registo predominantemente instrumental (Skemp, 1976).

Como acontece o processo de reificação do conceito de sucessão?

A reificação do conceito de sucessão por parte do Vasco situa-se predominantemente na fase de condensação do processo (Sfard, 1991). Embora revele domínio operacional e sinais de compreensão estrutural em diversos momentos, o conceito ainda não é plenamente concebido como um objeto matemático autónomo (Sfard, 1991).

O posicionamento na fase de condensação é desde logo visível quando, após a analisar os primeiros termos de cada sucessão, o aluno centra-se na regularidade observada e começa a construir as expressões algébricas. No caso da Tarefa 1, embora determine os três primeiros termos da sucessão através da contagem dos triângulos de cada fase, utiliza-os apenas como ponto de partida para identificar a regularidade subjacente, passando de imediato a manipular a sucessão como um todo. Na Tarefa 2, mesmo sem dispor de forma explícita dos termos da

sucessão, o aluno não procura determiná-los. Em vez disso, compreende a relação entre os termos e considera-a suficiente para construir o termo geral da sucessão. Esta capacidade de operar sobre a sucessão a partir da sua estrutura relacional e não depender de termos concretos, denota uma conceção estrutural do conceito (Sfard, 1991).

A fase de interiorização manifesta-se sobretudo nos momentos em que o aluno recorre à fórmula da soma dos n primeiros termos de cada progressão, sendo necessário, para tal, identificar a natureza da progressão em estudo. Diante dessa necessidade, evidencia uma conceção operacional, alicerçada na aplicação de procedimentos previamente memorizados para comparar termos consecutivos, sem uma compreensão plena da lógica subjacente (Sfard, 1991). Ainda assim, no desenrolar das tarefas, observa-se uma evolução significativa, na medida que começa a estabelecer relações coerentes entre os procedimentos aplicados e a estrutura inerente às progressões, aproximando-se progressivamente de uma abordagem mais estrutural (Sfard, 1991).

4.4. Estudo de caso: Sofia

A Sofia é uma aluna extrovertida, organizada e proativa, assumindo frequentemente uma postura de liderança da turma. No entanto, durante as aulas de matemática, mantém-se reservada e pouco participativa. O seu ritmo de trabalho é bastante lento e enfrenta dificuldades tanto na aquisição como na mobilização de conhecimentos. No ano letivo anterior, obteve a classificação de onze valores e, no 1.º semestre do 11.º ano de escolaridade, obteve a classificação de dez valores.

4.4.1. Tarefa 1

Retomemos a sucessão (u_n) que representa o número de triângulos obtidos em cada fase, a partir da união dos pontos médios dos lados do triângulo construído na fase anterior (Anexo 28).

Questão 1.1. – Determinar os cinco primeiros termos da sucessão.

A Sofia revelou algumas dificuldades em interpretar o enunciado da tarefa. Iniciou a resolução com uma abordagem eminentemente operacional, centrada na contagem direta do número de triângulos presentes nas figuras do enunciado para determinar os três primeiros termos da sucessão (Sfard, 1991). Relativamente ao quarto e quinto termo, a aluna sentiu

necessidade de construir as respectivas figuras (**Figura 18**) e proceder novamente à contagem dos triângulos, como revela o comentário:

S: Acho que vou ter de desenhar, porque não estou a ver mais nenhuma maneira.

Figura 18

Resolução da questão 1.1.

1.1)



$$R: u_1 = 1 \quad u_2 = 5 \quad u_3 = 9 \quad u_4 = 13 \quad u_5 = 17$$

Nota. Fonte Própria.

A estratégia da Sofia denota uma compreensão da sucessão ainda fortemente ancorada na perceção visual, uma das componentes da compreensão intuitiva, segundo Herscovics e Bergeron (1984). Neste momento, a sucessão não é concebida como um objeto matemático estruturado, mas antes como uma sequência de ações concretas, comportamento característico da fase de interiorização descrita por Sfard (1991), na qual o sujeito ainda lida com processos e operações específicas, sem uma visão global do conceito.

Questão 1.2. – Determinar a expressão geral da sucessão.

Embora tenha conseguido observar que os termos da sucessão “vão de 4 em 4”, a Sofia revelou algumas dificuldades em encontrar o termo geral. Quando questionada pela investigadora se a construção das figuras a fazia lembrar algum conteúdo trabalhado nas aulas, respondeu negativamente. Contudo, reconheceu a necessidade de determinar uma expressão geral da sucessão para evitar ter de continuar a construir as figuras nas questões seguintes.

Deste modo, a aluna optou por experimentar diferentes expressões, testando-as através do cálculo do terceiro termo. Face à constatação inicial, começou por testar a expressão $u_n = n + 4$, uma vez que sabia que “o número 4 vai ter de lá estar”. De seguida, tentou a

expressão $u_n = (n - 1) + 4$, com a ideia de que “tem de ser o termo anterior mais 4”. Neste momento da resolução, confundiu os conceitos termo e ordem de uma sucessão.

Após descartar a expressão anterior, experimentou $u_n = (n - 1) \times 4$, porque “não estava a dar ao somar 4”, tentando ajustar o termo geral para a operação da multiplicação. Embora esta expressão também não tenha correspondido ao valor esperado para o terceiro termo, a aluna percebeu que faltava adicionar uma unidade para que o terceiro termo fosse 9, chegando assim a $u_n = (n - 1) \times 4 + 1$. Esta expressão revelou-se correta para o terceiro e quarto termo, assumindo, assim, que tinha determinado o termo geral da sucessão. Na **Figura 19** é possível observar todas as tentativas realizadas.

Figura 19

Resolução da questão 1.2.

$$\begin{aligned}
 1.2) \quad u_3 &= n + 4 = 3 + 4 = 7 \\
 u_3 &= (n-1) + 4 = (3-1) + 4 = 6 \\
 u_3 &= (n-1) \times 4 = 8 \\
 u_3 &= (n-1) \times 4 + 1 = 9 \\
 u_4 &= (n-1) \times 4 + 1 = 13 \\
 u_n &= (n-1) \times 4 + 1
 \end{aligned}$$

Nota. Fonte Própria.

A análise da resolução da Sofia permite perceber que a construção do termo geral da sucessão resultou de um processo de compreensão de procedimentos, apoiado no conhecimento intuitivo da regularidade dos termos da sucessão (Herscovics & Bergeron, 1984). A sua abordagem foi puramente instrumental, assente em tentativas e substituições numéricas, sem uma compreensão clara da estrutura das expressões propostas (Skemp, 1976).

A dificuldade de transpor a regularidade identificada na primeira alínea da tarefa para formular a expressão geral da sucessão, evidencia que a aluna ainda não interiorizou plenamente a estrutura da sucessão como um objeto matemático. A confusão conceptual entre os conceitos termo e ordem de uma sucessão acabou por fragilizar a solidez da sua compreensão de procedimentos e reforça a ideia de que ainda não se apropriou estruturalmente do conceito de sucessão, permanecendo, assim, no estágio inicial da teoria da reificação (Herscovics & Bergeron, 1984; Sfard, 1991).

Questão 1.3. – Calcular o número total de triângulos das oito primeiras fases.

Na alínea 1.3., a Sofia limitou-se a determinar o oitavo termo da sucessão (**Figura 20**), revelando, uma vez mais, dificuldades ao nível de noções relacionadas com o conceito de sucessão. Com efeito, não compreendeu que o número total de triângulos das oito primeiras fases correspondia à soma dos oito primeiros termos da sucessão.

Figura 20

Resolução da questão 1.3.

$$1.3) u_8 = (8-1) \times 4 + 1 = 29$$

R: Ao fim das 8 primeiras fases eram 29 triângulos.

Nota. Fonte Própria.

Ao afirmar “agora já é mais fácil porque é só substituir e determinar u_8 ”, a aluna demonstra uma apropriação instrumental da expressão geral, associada à compreensão de procedimentos (Herscovics & Bergeron, 1984; Skemp, 1976). Este comportamento enquadra-se na fase de interiorização, na qual, segundo Sfard (1991), o sujeito revela-se proficiente na realização de processos, neste caso, a substituição de valores na expressão algébrica.

Questão 1.4. – Analisar o comportamento da soma total dos triângulos à medida que o número de fases aumenta.

Analogamente, na questão 1.4., a aluna restringiu a sua análise à variação entre termos consecutivos (**Figura 21**), referindo:

S: Adiciona-se 4 triângulos à fase anterior.

I: Sim, isso é o que acontece de uma fase para a seguinte. E o que acontece à soma do número de triângulos de uma fase para a seguinte?

S: Exato, de uma fase para a outra somam-se 4 triângulos.

Figura 21

Resolução da questão 1.4.

1.4) De uma fase para a outra adiciona-se 4 triângulos.

Nota. Fonte Própria.

Esta observação traduz uma análise limitada da diferença de triângulos entre fases consecutivas, sem uma percepção global do comportamento da soma total dos triângulos à medida que o número de fases aumenta. O facto de a Sofia não formular qualquer conjectura sobre o comportamento da soma dos termos, reforça a ideia de que não desenvolveu uma compreensão condensada do conceito de sucessão, continuando a encarar a sucessão como uma sequência de ações elementares e não como um objeto matemático passível de ser manipulado (Sfard, 1991).

Ao insistir na ideia de que “de uma fase para a outra somam-se 4 triângulos”, demonstra dificuldades em conceber a sucessão como um todo, o que remete para uma compreensão por abstração matemática incipiente (Herscovics & Bergeron, 1984). À luz da perspectiva de Skemp (1976), a sua compreensão permanece num nível instrumental, baseada na aplicação de regras locais, em detrimento de uma compreensão relacional que permita articular diferentes elementos da sucessão.

4.4.2. Tarefa 2

Seja (a_n) a sucessão das áreas dos triângulos que se obtém em cada fase ao unir os pontos médios dos lados do triângulo anterior (Anexo 30).

Questão 2.1. – Determinar a expressão geral da sucessão.

Após o esclarecimento inicial por parte da investigadora relativamente à sucessão (a_n) , a Sofia revelou uma compreensão intuitiva da sucessão, baseada na percepção visual do padrão geométrico subjacente (Herscovics & Bergeron, 1984). A aluna percebeu que a área de cada triângulo construído na segunda fase é “ $\frac{1}{4}$ da área do triângulo grande”, porque “os triângulos são iguais e, por isso, têm a mesma área”. Reconheceu também que esta regularidade se mantém da segunda para a terceira fase.

Com base nesta observação, procurou definir a regularidade observada por meio de uma expressão algébrica, partindo da ideia de que “é o triângulo anterior dividido em 4”. No entanto, a expressão proposta $a_n = \frac{n-1}{4}$ mostra que a confusão entre os conceitos termo e ordem de uma sucessão esteve novamente patente, comprometendo a construção do termo geral da sucessão. O erro na formulação da expressão geral ilustra a natureza operacional e não estrutural do seu raciocínio, permanecendo na fase de interiorização do processo de reificação, em que ainda não concebe a sucessão como um todo estruturado (Sfard, 1991).

Face à dificuldade de deduzir o termo geral da sucessão, a Sofia decidiu atribuir um valor concreto à área do triângulo inicial e, a partir dele, determinou a área de cada triângulo construído nas duas fases seguintes (**Figura 22**). Esta estratégia evidencia a tentativa da aluna de ultrapassar a abstração inerente ao problema, através da atribuição de um valor concreto para a área do triângulo inicial, revelando, assim, uma compreensão de procedimentos, conforme descrita por Herscovics e Bergeron (1984).

Do ponto de vista da teoria da reificação de Sfard (1991), este episódio enquadra-se no estágio de interiorização, no qual o sujeito possui uma apreensão operacional do conceito e tem a necessidade de se apoiar em valores específicos.

S: O problema é que não há valores, mas posso inventar uma área. Por exemplo, se a área do triângulo inicial for 3m^2 , a área de cada triângulo construído na segunda fase é $\frac{3}{4}$ e da terceira fase é $\frac{3}{4}$ a dividir por 4.

I: De que forma ter valores te ajudou? Agora que já tens valores, é mais fácil determinar a expressão geral da sucessão?

S: Continuo na mesma, acho que não ajudou em nada porque não sei como representar que é a área do triângulo da fase anterior a dividir por 4.

No entanto, a própria aluna reconheceu que a estratégia adotada não a ajudou a deduzir o termo geral da sucessão, o que realça a dificuldade em transitar da manipulação de valores concretos para a dedução algébrica, um aspeto central na passagem do estágio de interiorização para a fase de condensação (Sfard, 1991).

Figura 22

Resolução da questão 2.1.

$$2.1) u_n = \frac{n-1}{4}$$

$$u_3 = \frac{3-1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Fase 1} = 3\text{ m}^2 \quad \text{Fase 2} = \frac{3}{4}\text{ m}^2 \quad \text{Fase 3} = \frac{\frac{3}{4}}{4} = \frac{3}{16}$$

Nota. Fonte Própria.

Face à dificuldade demonstrada pela Sofia em determinar a expressão geral da sucessão e de forma a garantir que a parte restante da tarefa não ficava condicionada, a investigadora forneceu-lhe o respetivo termo geral.

I: A expressão do termo geral da sucessão (a_n) faz-te lembrar algum conteúdo trabalhado nas aulas?

S: Nem por isso e jamais conseguiria chegar a esta expressão... Não me sai da cabeça que $\frac{n-1}{4}$ não funcione.

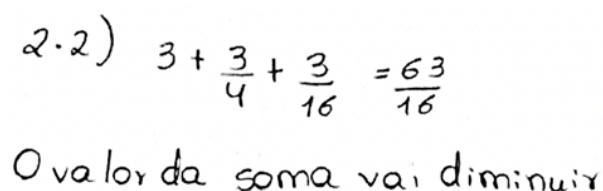
A dificuldade em compreender por que motivo o termo geral da sucessão é $a_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$, aliada à persistência na expressão $a_n = \frac{n-1}{4}$, indica que a aluna não foi capaz de condensar o processo de construção dos termos, nem de estabelecer uma ligação significativa entre a regularidade identificada e a estrutura algébrica da sucessão, o que sugere ausência de compreensão relacional (Sfard, 1991; Skemp, 1976).

Questão 2.2. – Determinar a expressão da soma dos n primeiros termos da sucessão e analisar o seu comportamento à medida que o número de fases aumenta.

Ao deparar-se com o termo “soma” no enunciado, a Sofia associou de imediato à operação de adição, procedendo à soma dos três primeiros termos da sucessão (**Figura 23**). O facto de associar a palavra “soma” à operação aritmética adição, revela uma compreensão intuitiva, baseada numa ação não quantificada (Herscovics & Bergeron, 1984).

Figura 23

Resolução da questão 2.2.


$$2.2) \quad 3 + \frac{3}{4} + \frac{3}{16} = \frac{63}{16}$$

O valor da soma vai diminuir

Nota. Fonte Própria.

Note-se que, apesar da investigadora lhe ter fornecido o termo geral da sucessão, a aluna recorreu apenas aos três primeiros termos determinados anteriormente, após ter

considerado 3m^2 como a área do triângulo inicial (**Figura 22**). Perante estes valores, refletiu sobre o comportamento da sucessão e da respetiva soma dos termos:

S: $\frac{3}{4}$ é menor do que 3, logo a área vai diminuindo e, por isso, (a_n) vai decrescer.

Portanto, o valor da soma também vai diminuir.

I: E vai diminuir infinitamente ou vai diminuir até atingir um determinado valor?

S: Acho que vai diminuir sempre, mas não sei se é até um valor ou se é até $+\infty$ ou $-\infty$.

Através dos três primeiros termos da sucessão, a Sofia reconheceu que a sucessão é decrescente. Contudo, não compreendeu que, apesar dos termos diminuírem, o valor da soma dos termos vai aumentando, ainda que com acréscimos cada vez menores. Esta dificuldade é resultado de uma compreensão ainda operacional, centrada na execução de operações concretas, como a soma dos três primeiros termos, sem compreender a sucessão como um todo estruturado, permanecendo, assim, na fase de interiorização do conceito (Sfard, 1991).

Consequentemente, foi incapaz de interpretar o significado de uma soma infinita de termos decrescentes, revelando incerteza conceptual ao afirmar “não sei se é até um valor ou se é até $+\infty$ ou $-\infty$ ”. Tais dificuldades evidenciam a ausência de compreensão relacional (Skemp, 1976) e de compreensão por formalização (Herscovics & Bergeron, 1984), dado que não conseguiu estabelecer conexões entre os termos decrescentes e o comportamento da soma dos termos da sucessão, nem recorreu a conceitos matemáticos para justificar ou analisar esse comportamento.

A ambiguidade expressa na possibilidade de a soma dos termos da sucessão tender para $-\infty$, apesar destes corresponderem a áreas e, por isso, serem sempre valores não negativos, denota uma certa incompatibilidade conceptual. Este facto sugere que a aluna não mobiliza conscientemente os conceitos de convergência e limite, o que indica que ainda não reificou o conceito de sucessão como um objeto matemático independente (Sfard, 1991). Permanece, assim, ancorada a uma compreensão processual e fragmentada, centrada na manipulação de termos concretos.

4.4.3. Considerações Finais

Como se caracteriza a compreensão do conceito de sucessão?

A abordagem da Sofia foi semelhante nas duas tarefas, oscilando entre a compreensão intuitiva e a compreensão de procedimentos, segundo o modelo de Herscovics e Bergeron (1984).

Numa fase inicial, a aluna manifestou uma compreensão intuitiva da sucessão ao interpretar as figuras do enunciado e analisar os primeiros termos, conseguindo assim identificar a regularidade presente, apoiada em percepções visuais (Herscovics & Bergeron, 1984). Posteriormente, tentou traduzir cada regularidade observada por meio de uma expressão geral, revelando uma compreensão de procedimentos, sustentada em tentativas e substituições numéricas. Ainda que na Tarefa 1 esta estratégia a tenha conduzido ao termo geral da sucessão, o mesmo já não se verificou na Tarefa 2, em que, mesmo depois de lhe ser fornecida a expressão, não conseguiu articular a sua estrutura com o padrão identificado. A dificuldade em traduzir algebricamente as regularidades observadas, revela, segundo Skemp (1976), ausência de compreensão relacional, pois não conseguiu estabelecer conexões significativas entre os termos da sucessão e a sua estrutura algébrica (Skemp, 1976).

Como acontece o processo de reificação do conceito de sucessão?

A análise das resoluções da Sofia permite concluir que o processo de reificação do conceito de sucessão não se encontra consolidado (Sfard, 1991). Segundo esta autora, a dependência visual pelas representações pictóricas evidencia que a aluna permanece na fase de interiorização, uma vez que ainda percebe a sucessão como uma sequência de ações e não como um objeto matemático independente que pode ser manipulado e analisado. A natureza operacional e fragmentada da sua abordagem ficou patente, por exemplo, na dificuldade em compreender a expressão algébrica fornecida pela investigadora na Tarefa 2, revelando incapacidade de articular a sua estrutura com a regularidade observada.

Na Tarefa 1, a ausência explícita da palavra “soma” pode ter contribuído para a dificuldade de interpretar o enunciado da questão, sendo claras as fragilidades da Sofia em mobilizar de forma autónoma os conhecimentos previamente adquiridos. Um aspeto particularmente revelador é o facto de, em momento algum das tarefas, a aluna ter articulado a estrutura de construção das sucessões com os conceitos de progressão aritmética e geométrica, o que denota uma compreensão ainda bastante ancorada em procedimentos isolados, sem evidência de compreensão estrutural (Sfard, 1991).

5. CONCLUSÕES

A presente investigação visou analisar de que forma os alunos do 11.º ano mobilizam os seus conhecimentos sobre sucessões na resolução de tarefas.

Para atingir o objetivo inicial, implementaram-se duas tarefas que, apesar de assentarem na mesma construção geométrica, um triângulo equilátero dividido sucessivamente, apresentavam graus de abertura distintos. O enunciado da Tarefa 1 e a formulação das respetivas questões eram mais orientados, ainda que, em nenhum momento, se mencionasse diretamente o conceito de progressão aritmética. Em contraste, o carácter do enunciado da Tarefa 2 era mais aberto, permitindo diferentes interpretações e estratégias de resolução. Conforme defende Ponte (2005), tarefas com maior grau de abertura tendem a suscitar abordagens mais diversificadas por parte dos alunos, o que se confirmou, nomeadamente, na dedução do termo geral da sucessão da segunda tarefa. A diversidade de estratégias observadas, encontra-se em consonância com as orientações estabelecidas nas mais recentes *Aprendizagens Essenciais* de Matemática A, para o ensino secundário, que caracterizam uma tarefa promissora como aquela que, entre outros aspetos, permite diferentes estratégias de resolução (Silva et al., 2023).

Vários autores (e.g., Gafanhoto & Canavarro, 2012; Silva et al., 2023) salientam que a seleção criteriosa das tarefas matemáticas constituiu uma dimensão fundamental da ação pedagógica, dado o papel central que assumem no processo de ensino e aprendizagem. A evolução da compreensão do Vasco ao longo das tarefas propostas corrobora a relevância das tarefas matemáticas enquanto catalisadoras do desenvolvimento do pensamento matemático, sendo evidente o seu potencial para transformar a forma como os alunos se apropriam dos conceitos. Com efeito, o aluno passou de uma aplicação mecânica de procedimentos desprovidos de significado, para uma abordagem progressivamente mais estruturada e fundamentada, demonstrando uma reorganização significativa do seu raciocínio.

A metodologia adotada neste projeto de investigação enquadra-se numa abordagem de natureza qualitativa, centrada na análise de um estudo de caso coletivo, composto por quatro casos individuais. A recolha de dados teve por base a observação participante e não participante, entrevistas semiestruturadas e a recolha e análise das produções escritas dos alunos participantes durante a implementação das tarefas nas sessões de trabalho, previamente acordadas com cada aluno em horário extra letivo. Procurou-se, assim, responder às seguintes questões de investigação:

1. Como se caracteriza a compreensão do conceito de sucessão?
2. Como acontece o processo de reificação do conceito de sucessão?

Para caracterizar o tipo de compreensão que os alunos manifestam relativamente ao conceito de sucessão, recorreu-se à dicotomia defendida por Skemp (1976), que distingue a compreensão instrumental da compreensão relacional, bem como ao modelo de Herscovics e Bergeron (1984), que amplia esta visão ao propor quatro modos de compreensão: intuitiva, de procedimentos, abstração matemática e formalização.

Paralelamente, recorreu-se à teoria da reificação de Sfard (1991), que clarifica como os conceitos matemáticos podem ser concebidos, operacionalmente como processos ou estruturalmente como objetos. Apesar das diferenças entre as duas conceções, a autora considera que são complementares, preferindo, por isso, falar em dualidade em vez de dicotomia. As fases da interiorização, condensação e reificação revelam um percurso evolutivo em que os objetos e processos se vão agregando em unidades cada vez mais compactas até que se formem novos objetos matemáticos.

Como se caracteriza a compreensão do conceito de sucessão?

A análise das resoluções dos alunos permitiu identificar os diferentes modos de compreensão dos conceitos matemáticos definidos por Skemp (1976) e, mais tarde, ampliados por Herscovics e Bergeron (1984). A observação das tarefas, nomeadamente nos momentos em que os alunos recorrem às fórmulas associadas às progressões aritmética e geométrica e aos procedimentos para justificar a sua natureza, revela que, em muitos casos, a compreensão permanece ancorada em procedimentos previamente memorizados e aplicados de forma mecânica (Herscovics & Bergeron, 1984; Skemp, 1976). Verifica-se, assim, a prevalência da compreensão de natureza instrumental, centrada na execução de algoritmos e aplicação de regras, sem que se evidencie uma compreensão significativa dos princípios subjacentes aos métodos utilizados (Skemp, 1976). Não obstante, em determinadas situações, alguns alunos evidenciam progressos no sentido de uma compreensão relacional do conceito de sucessão, ao articularem os procedimentos usados com o seu fundamento (Skemp, 1976).

Num primeiro momento, observou-se que todos os alunos iniciaram a resolução das tarefas revelando compreensão intuitiva do conceito de sucessão, ancorada na perceção visual da regularidade inerente a cada construção, que constituiu o ponto de partida para a formulação do termo geral da sucessão (Herscovics & Bergeron, 1984).

A forma como procederam à dedução do termo geral de cada sucessão evidenciou uma compreensão de procedimentos, embora com abordagens distintas, que se refletem em diferentes níveis de compreensão do conceito, nos termos propostos por Skemp (1976). Por um lado, alunos como o Vasco, a Sofia e o Bernardo na Tarefa 1, deduziram as expressões algébricas a partir das regularidades estruturais subjacentes a cada construção, sem recurso prévio às fórmulas do termo geral das progressões. O Vasco, em particular, construiu expressões que, desde a primeira formulação, se aproximaram significativamente do termo geral correto, evidenciando uma compreensão de procedimentos, acompanhada de indícios de compreensão relacional, patente na perceção da relação entre a regularidade identificada e a expressão algébrica que a representa (Herscovics & Bergeron, 1984; Skemp, 1976). A Sofia, por sua vez, apoiou-se na análise dos primeiros termos e em sucessivas tentativas e substituições numéricas, que a conduziram à expressão correta na Tarefa 1. Contudo, na Tarefa 2, mesmo após lhe ter sido fornecido o termo geral, não conseguiu estabelecer uma correspondência entre a estrutura algébrica e o padrão observado nos termos da sucessão. Esta limitação reflete-se numa compreensão de procedimentos de natureza instrumental, desprovida de compreensão relacional (Herscovics & Bergeron, 1984; Skemp, 1976).

Por outro lado, o Tomé começou por identificar a natureza da progressão, com base nos conhecimentos prévios que detém sobre cada progressão. Posteriormente, recorreu à fórmula do termo geral para obter a respetiva expressão algébrica. A compreensão instrumental tornou-se particularmente evidente em situações como esta, em que os alunos aplicaram diretamente as fórmulas do termo geral e da soma dos termos da progressão. Nestes momentos, a compreensão permaneceu centrada na aplicação mecânica de algoritmos memorizados, carecida de análise significativa da estrutura subjacente às fórmulas aplicadas (Skemp, 1976).

Relativamente à classificação da natureza de cada progressão, embora tanto o Bernardo como o Vasco tenham recorrido aos procedimentos aprendidos, observou-se uma diferença significativa à luz da distinção proposta por Skemp (1976). Por um lado, o Bernardo mostrou compreender a lógica subjacente aos métodos utilizados, característico da compreensão relacional (Skemp, 1976). Já o Vasco, numa fase inicial, limitou-se a reproduzir os métodos memorizados, desprovidos de qualquer significado, o que se traduz numa compreensão de natureza instrumental (Skemp, 1976).

O modo de compreensão por formalização definido no modelo proposto por Herscovics e Bergeron (1984) manifestou-se em episódios pontuais, nos quais alguns alunos

revelaram a capacidade de operar sobre expressões algébricas como entidades matemáticas dotadas de significado. Tal foi particularmente visível quando mobilizaram a noção de limite para estudar o comportamento da soma dos termos, recorrendo à notação e ao simbolismo matemático, não apenas como instrumento de cálculo, mas também como meio para justificar as suas conjecturas, o que denota uma compreensão mais relacional do conceito (Skemp, 1976).

Por sua vez, a compreensão por abstração matemática foi a menos evidente, apesar de se terem identificado alguns episódios representativos deste modo de compreensão. Um exemplo ocorreu quando o Tomé optou por representar o lado do triângulo inicial pela variável l , em vez de lhe atribuir um valor arbitrário, como o Bernardo e a Sofia fizeram. Com esta escolha, pretendia generalizar e manipular a expressão do termo geral da sucessão e da respetiva soma dos termos, independentemente do comprimento do lado do triângulo inicial. Também o Bernardo demonstrou este modo de compreensão ao estabelecer um paralelismo entre a expressão da sucessão $u_n = 4n - 3$ e a função afim $f(x) = 4x - 3$, utilizando o facto de esta representar uma reta de declive positivo para justificar o crescimento dos termos da sucessão e, conseqüentemente, da sua soma.

Como acontece o processo de reificação do conceito de sucessão?

A análise dos dados permite concluir que a conceção do conceito de sucessão, por parte dos alunos, se mantém maioritariamente no plano operacional, o que se reflete na predominância da fase inicial do processo de reificação, a interiorização (Sfard, 1991). Ainda assim, foi possível identificar momentos significativos em que alguns alunos evidenciam uma conceção mais estrutural da sucessão, reveladores de progressos para a fase de condensação (Sfard 1991). No entanto, em nenhum dos estudos de caso se pode afirmar que o conceito de sucessão se encontra plenamente reificado (Sfard, 1991).

O estágio de interiorização corresponde à fase inicial do processo de reificação, na qual o conceito é concebido de forma operacional, através da manipulação de objetos matemáticos de nível inferior, como as representações pictóricas ou os termos concretos da sucessão (Sfard, 1991). Um exemplo claro desta fase emergiu na abordagem inicial dos alunos às tarefas propostas. Na Tarefa 1, todos começaram por contar os triângulos das figuras do enunciado para determinar os três primeiros termos da sucessão. Analogamente, na Tarefa 2, à exceção do Vasco, atribuíram um valor arbitrário ao lado e à área do triângulo inicial, para determinar os termos iniciais da sucessão. De igual forma, para analisar o comportamento da soma dos termos da progressão aritmética, tanto o Bernardo como o Tomé recorreram à comparação

das somas S_8 e S_9 para inferir que à medida que o número de fases aumenta, o número total de triângulos também aumenta. Estas estratégias evidenciam uma forte dependência na manipulação de casos particulares, sendo o reflexo de uma abordagem predominantemente operacional, característica da fase inicial do processo de reificação (Sfard, 1991).

Outro indicador da fase de interiorização é a aplicação direta das fórmulas do termo geral e da soma dos n primeiros termos de cada progressão, sem compreensão da estrutura subjacente. Alguns alunos mostraram-se proficientes na aplicação destes algoritmos, o que se traduz numa conceção operacional do conceito de sucessão (Sfard, 1991).

Relativamente às progressões, o modo como o Bernardo e o Vasco identificaram e justificaram a sua natureza permite localizá-los nos estados iniciais do processo de reificação de Sfard (1991). No caso do Bernardo, apesar do carácter essencialmente operacional dos procedimentos reproduzidos para identificar a natureza da progressão, o aluno revela compreender a lógica subjacente aos processos aplicados, o que denota uma apropriação estrutural do conceito e um progresso para o estágio de condensação (Sfard, 1991). Pelo contrário, o Vasco inicialmente demonstra não compreender a lógica dos procedimentos utilizados, sinal de que permanece no estágio de interiorização, ainda ancorado a uma conceção puramente operacional do conceito (Sfard, 1991). Contudo, no decorrer das tarefas, começa a articular progressivamente os métodos memorizados e a estrutura subjacente a cada progressão. Por conseguinte, verifica-se que o conceito começa a ser condensado, manifestando uma conceção gradualmente mais estrutural (Sfard, 1991).

A ausência de qualquer conjectura por parte da Sofia relativamente ao comportamento da soma dos termos das sucessões reforça a ideia de que não desenvolveu uma compreensão condensada do conceito de sucessão, permanecendo com uma conceção operacional, centrada na execução de ações elementares, em detrimento da perceção da sucessão como um objeto matemático manipulável (Sfard, 1991). Tal limitação torna-se particularmente evidente na dificuldade demonstrada pela aluna em transitar da manipulação de termos concretos para a dedução algébrica, um aspeto central na passagem do estágio de interiorização para o de condensação (Sfard, 1991).

Alunos como o Bernardo e o Vasco ao traduzirem algebricamente as regularidades observadas, sem recorrerem a fórmulas previamente memorizadas, demonstraram que a sua conceção do conceito ultrapassa o plano meramente operacional, aproximando-se de uma conceção estrutural da sucessão, característica da fase de condensação do conceito (Sfard, 1991). Este progresso é também visível quando o Bernardo estabelece um paralelismo entre a

sucessão $u_n = 4n - 3$ e a função afim $f(x) = 4x - 3$, utilizando o declive positivo da reta para justificar o crescimento dos termos da sucessão. O aluno revela, assim, capacidade de investigar o comportamento da progressão sem se focar na análise termo a termo.

A forma como os alunos, à exceção da Sofia, mobilizam a noção de limite para analisar o comportamento da soma dos termos da sucessão, revela um avanço significativo para uma conceção mais estrutural do conceito (Sfard, 1991). Ainda que, inicialmente, alguns tenham recorrido a casos particulares, é notório que passam a conceber a soma dos termos como um todo, sobre o qual formulam conjecturas fundamentadas, o que constitui um indicador da transição para o estágio de condensação do conceito (Sfard, 1991).

Por fim, a análise das resoluções dos alunos evidencia que as conceções operacional e estrutural do conceito de sucessão não são mutuamente exclusivas, mas antes complementares, como defendido por Sfard (1991). Um exemplo particularmente elucidativo é a dedução da expressão geral da sucessão da Tarefa 1 por parte do Vasco, em que o aluno recorre a uma regra conhecida, associada à variação constante entre termos consecutivos. Ainda que se trate de um procedimento, o facto de ser acompanhado de uma explicação que demonstra que o aluno compreende o funcionamento do método, na ótica de Skemp (1976), permite classificar a compreensão como relacional. A conceção do Vasco integra, portanto, simultaneamente a execução de procedimentos e a compreensão da relação entre a regularidade observada e a estrutura algébrica da expressão obtida, refletindo a dualidade conceptual proposta por Sfard (1991), segundo a qual uma compreensão matemática profunda resulta da articulação das conceções operacional e estrutural.

Em termos de limitações do estudo, destaca-se, o número reduzido de estudos de caso considerados. Apesar de na seleção dos quatro alunos participantes se ter procurado garantir alguma diversidade, uma amostra mais alargada poderia proporcionar uma análise mais abrangente da compreensão do conceito de sucessão. Acresce que o intervalo temporal em que se desenvolveu a investigação foi relativamente curto, o que impossibilita acompanhar a evolução das conceções dos alunos após a realização das tarefas. Neste sentido, investigações futuras de carácter longitudinal poderão contribuir para compreender de que forma o processo de reificação do conceito se consolida, se aprofunda ou, eventualmente, se dissipa ao longo do tempo.

REFERÊNCIAS

- Afonso, N. (2014). *Investigação naturalista em educação – Um guia prático e crítico*. Fundação Manuel Leão.
- Aires, L. (2015). *Paradigma qualitativo e práticas de investigação educacional*. Universidade Aberta.
- Amado, J. (2017). *Manual de investigação qualitativa em educação*. Universidade de Coimbra.
- Andrade, C., Pereira, J. C., & Pimenta, P. (2025). *Matemática 360 11.º – Volume 2 Matemática A 11.º Ano | Ensino Secundário*. Raíz Editora.
- Bogdan, R., & Biklen, S. K. (1994). *Investigação qualitativa em educação – uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto Editora.
- Canavarro, A., Mestre, C., Gomes, D., Santos, E., Santos, L., Brunheira, L., Vicente, M., Gouveia, M., Correia, P., Marques, P. & Espadeiro, R. (2021a). *Aprendizagens essenciais. Articulação com o perfil dos alunos. 1.º ano. 1.º ciclo do Ensino Básico. Matemática*. DGE. https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/1_ciclo/ae_mat_1.o_ano.pdf
- Canavarro, A., Mestre, C., Gomes, D., Santos, E., Santos, L., Brunheira, L., Vicente, M., Gouveia, M., Correia, P., Marques, P. & Espadeiro, R. (2021b). *Aprendizagens essenciais. Articulação com o perfil dos alunos. 5.º ano. 2.º ciclo do Ensino Básico. Matemática*. DGE. https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/2_ciclo/ae_mat_5.o_ano.pdf
- Canavarro, A., Mestre, C., Gomes, D., Santos, E., Santos, L., Brunheira, L., Vicente, M., Gouveia, M., Correia, P., Marques, P. & Espadeiro, R. (2021c). *Aprendizagens essenciais. Articulação com o perfil dos alunos. 7.º ano. 3.º ciclo do Ensino Básico. Matemática*. DGE. https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/3_ciclo/ae_mat_7.o_ano.pdf
- Carmo, H., & Ferreira, M. M. (2008). *Metodologia da investigação – Guia para auto-aprendizagem*. Universidade Aberta.
- Christiansen, B., & Walther, G. (1986). Task and activity. In B. Christiansen, A. G. Howson, & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 243-307). Dordrecht: Reidel.

Creswell, J. W., & Poth, C. N. (2018). *Qualitative inquiry and research design: choosing among five approaches* (4a). Sage Publications.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2007). *Research methods in education*. Routledge.

Domingos, A. M. D. (2003) *Compreensão de conceitos matemáticos avançados – A matemática no ensino superior* [Dissertação de doutoramento, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa]. Repositório da Universidade Nova. <http://hdl.handle.net/10362/78>

Domingos, A. (2006). Teorias cognitivas e aprendizagem dos conceitos matemáticos avançados. In *Actas do XVII Seminário de Investigação em Matemática*. Lisboa: APM.

Duarte, N., Ponte, J. P., & Pinto, H. (2024). A seleção e adaptação de tarefas matemáticas para promover a aprendizagem da matemática. *Educação em Matemática*, 171, 7-9.

Flick, U. (2005). *Métodos qualitativos na investigação científica*. Monitor.

Gafanhoto, A. P., & Canavarro, A. P. (2012). A adaptação das tarefas matemáticas: como promover o uso de múltiplas representações. In A. P. Canavarro, L. Santos, A. M. Boavida, H. Oliveira, L. Menezes & S. Carreira (Eds.), *Atas do Encontro de Investigação em Educação Matemática – Práticas de ensino da Matemática* (pp. 121-134). Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática. <http://hdl.handle.net/10174/8311>

Gomes, A., Gonçalves, C. V., & Ferreira, D. (2022). Tarefas ricas na formação de professores, em geometria. In *Atas do XXXII Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 154-157). Lisboa: APM.

Gravemeijer, K. (1997). Instructional design for reform in mathematical education. In M. Beishuizen, K. P. E. Gravemeijer, & E. C. D. M van Lieshout (Eds.), *The role of contexts and models in the development of mathematical strategies and procedures* (pp. 13-34). Utrecht: CD-β Series on Research in Education, Freudenthal Institute.

Guba, E.G., & Lincoln, Y.S. (1995). *Naturalistic inquiry*. Sage Publications.

Gutiérrez-Fallas, L. F., & Henriques, A. (2017). A compreensão de alunos de 12.º ano dos conceitos de limite e continuidade de uma função. *Quadrante*, 26(1), 25–49. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22945>

Herscovics, N., & Bergeron, J. C. (1984). A constructivist vs formalist approach in the teaching of mathematics. In B. Southwell, R. Perry, & K. Owens (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference of PME* (pp. 190-196. Sydney: University of Sydney.

Johnson, R. B., & Christensen, L. (2014). *Educational research quantitative, qualitative, and mixed approaches*. Sage Publications.

Ludke, M., & André, M. (1986). *Pesquisa em educação: abordagens qualitativas*. EPU.

Martins, A. S. R. (2016). *Tarefas matemáticas: exploração de diferentes tipos de tarefas para o ensino de matemática no 1.º e 2.º Ciclo do Ensino Básico* [Dissertação de mestrado, Instituto de Educação da Universidade do Minho]. Repositório da Universidade do Minho. <https://hdl.handle.net/1822/45192>

Martins, H., & Domingos, A. (2019). Utilização de cálculo algébrico simbólico (CAS) em contexto de ensino e aprendizagem com alunos do 12.º ano. In N. Amado, A. P. Canavarro, & S. Carreira (Eds.), *Atas Encontro de Investigação em Educação Matemática: EIEM 2019 – Conexões matemáticas* (pp. 217-233). Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática. <http://hdl.handle.net/10362/96309>

MEC (2017). *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória*. Ministério da Educação.

MEC (2018). *Aprendizagens essenciais. Articulação com o perfil dos alunos. 11.º ano. Ensino secundário. Matemática A*. Ministério da Educação.

Minayo, M. C. S., & Costa, A. P. (2018). Fundamentos teóricos das técnicas de investigação qualitativa. *Revista Lusófona de Educação*, 40(40), 139-153. <https://doi.org/10.24140/issn.1645-7250.rle40.01>

Monteiro, M. A. P. (2021). *Compreensão e mobilização das operações combinatórias na resolução e formulação de problemas* [Dissertação de mestrado, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto].

NCTM (2017). *Princípios para a ação – Assegurar a todos o sucesso em Matemática*. Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (1990). O conceito de função no currículo de Matemática. *Educação em Matemática*, 15, 3-9.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp.11-34). Lisboa: APM. <http://hdl.handle.net/10451/3008>

- Ponte, J. P. (2006). Estudos de caso em educação matemática. *Bolema*, 25, 105-132. <http://hdl.handle.net/10451/3007>
- Ponte, J. P. (2014). Tarefas no Ensino e na aprendizagem da matemática. In J. P. da Ponte (Org.), *Práticas profissionais dos professores de matemática* (pp. 13-27). Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.
- Ponte, J. P. (2017). A aprendizagem da Álgebra: resultados de estudos portugueses. *Educação em Matemática*, 144-145, 27-32. <https://em.apm.pt/index.php/em/article/view/2451/2495>
- Ponte, J. P. (2020). A didática da matemática e o trabalho do professor. *Revista Brasileira de Ensino de Ciências e Matemática*, 3(3), 809-826. <https://doi.org/10.5335/rbecm.v3i3.11831>
- Ribeiro, M., Graff, B., & Silva, C. (2024). Fake News no ensino da matemática! Temos sim, e necessitamos combater e erradicar. *Educação em Matemática*, 171, 26-30.
- Rodrigues, A. S., & Moura, E. (2023). O potencial da História da Matemática para o desenvolvimento do processo criativo. *Quadrante*, 32(1), 99-119. <https://doi.org/10.48489/quadrante.29968>
- Rodrigues, F. F., Oliveira, G. S., & Santos, J. A. (2021). As pesquisas qualitativas e quantitativas na educação. *Prisma*, 2(1), 154-174. <https://revistaprisma.emnuvens.com.br/prisma/article/view/49>
- Sapir, E. (Ed.). (1970). *Language and Concepts*. London: University paperbacks, Methuen.
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.
- Sfard, A. (1992). Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification – The case of function. In G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function* (pp. 59-84). Mathematical Association of America.
- Sfard, A., & Linchevski, L. (1994). The gains and pitfalls of reification – The case of algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 26, 191-228.
- Sierpinska, A. (1994). *Understanding in mathematics*. Londres: Flamer Press.
- Silva, J. C., Rodrigues, A., Domingos, A., Albuquerque, C., Cruchinho, C., Martins, H., Almiro, J., Gabriel, L., Martins, M. E., Santos, M. T., Filipe, N., Correia, P., Espadeiro, R., & Carreira, S. (2023). *Aprendizagens Essenciais de Matemática A – 11.º ano*. DGE.

https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/mat_a_11_vf.pdf

Stake, R. E. (1995). *The art of case study research*. Sage Publications.

Stake, R. E. (2009). *A arte da investigação com estudos de caso*. (2a ed). Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Skemp, R. (1978). Relational understanding and instrumental understanding. *The Arithmetic Teacher*, 26(3), 9-15.

Skemp, R. (2016a). Compreensão relacional e compreensão instrumental (*). *Educação em Matemática*, 136, 44-48. <https://em.apm.pt/index.php/em/article/view/2344/2947>

Skemp, R. (2016b). Compreensão relacional e compreensão instrumental (*). *Educação em Matemática*, 137, 24-28. <https://em.apm.pt/index.php/em/issue/view/139/192>

Swan, M. (2014). Designing tasks and lessons that develop conceptual understanding, strategic competence and critical awareness. In *Investigação em Educação Matemática 2014 – Tarefas Matemáticas*. (pp. 15-31). Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática.

Swan, M. (2017). Conceber tarefas e aulas que desenvolvam a compreensão concetual, a competência estratégica e a consciência crítica. *Educação em Matemática*, 144-145, 67-72. <https://em.apm.pt/index.php/em/article/view/2461/2505>

Vilelas, J. (2020). *Investigação – o processo de construção do conhecimento*. (3a ed). Edições Sílabo.

Windsor, W. (2010). Algebraic Thinking: A Problem Solving Approach. *Mathematics Education Research Group of Australasia*.

Yazan, B. (2015). Three Approaches to Case Study Methods in Education: Yin, Merriam and Stake. *The Qualitative Report*, 20(2), 134-152. <https://doi.org/10.46743/2160-3715/2015.2102>

Yin, R. K. (2003). *Case study research: designs and methods*. Sage Publications.

Yin, R. K. (2010). *Estudo de caso: planejamento e métodos*. (2a ed). Porto Alegre: Bookman.

ANEXOS

Anexo 1: Planificação anual por temas



11.º Ano - MATEMÁTICA A Ano Letivo 2024/2025

Planificação anual por temas			
Semestre (S)	Temas	Unidades	N.º de tempos (50 min.)
1.º SEMESTRE	Trigonometria	Trigonometria: ângulos retos, ângulos obtusos e resolução de triângulos	3
		Ângulos orientados, ângulos generalizados e rotações	9
		Razões trigonométricas de ângulos generalizados	12
		Funções trigonométricas	16
	Geometria Analítica	Declive e inclinação de uma reta no plano	10
		Produto escalar de vetores	12
		Equações de planos no espaço	9
	Apresentação, Avaliação (formativa, sumativa), Atividades suplementares, Autorregulação Autoavaliação		9
TOTAL			80
2.º SEMESTRE	Estatística (*)	Características amostrais	10
		Progressões aritméticas e geométricas	9
	Sucessões	Limites de sucessões	6
		Limite segundo Heine de funções reais de variável real	9
	Funções Reais de Variável Real	Continuidade de funções	9
		Assíntotas ao gráfico de uma função	12
		Derivadas de funções reais de variável real e aplicações	12
	Avaliação (formativa, sumativa), Atividades suplementares, Autorregulação, Autoavaliação		8
TOTAL			75

(*) A unidade “Amostras bivariadas e coeficiente de correlação” será lecionada no 12.º ano (ano letivo 2025/26)

Atividades suplementares: atividades de pesquisa/ investigação (individual ou em grupo); atividades de revisão, recuperação, consolidação ou ampliação de conhecimentos; atividades de articulação curricular; avaliação formativa (fichas de autoavaliação, questões aula; etc.); avaliação sumativa (questões aula, mini testes, testes, etc.)

Áreas de competências do perfil do aluno (ACPA): A - Línguas e textos; B - Informação e comunicação; C - Raciocínio e resolução de problemas; D - Pensamento crítico e pensamento criativo; E - Relacionamento interpessoal; F - Desenvolvimento pessoal e autonomia; G - Bem-estar, saúde e ambiente; H - Sensibilidade estética e artística; I - Saber científico, técnico e tecnológico; J - Consciência e domínio do corpo

Anexo 2: Planificação de tema – Sucessões



11.º Ano - MATEMÁTICA A
Ano Letivo 2024/2025

Planificação do Tema: Sucessões						
Domínio/Tema	Conteúdos		Tempos Letivos	Aprendizagens Essenciais: competências, capacidades e atitudes	Descritores do Perfil do Aluno	Instrumentos de Avaliação
Sucessões	Sucessões de números reais	- Cálculo de termos, termo geral, ordem dos termos de uma sucessão e representação de sucessões; - Monotonia de uma sucessão de números reais; - Sucessão limitada; - Sucessões definidas por recorrência; - Termo geral de progressões aritméticas e geométricas; - Soma de um número finito de termos de progressões aritméticas e geométricas.	9	Resolver problemas envolvendo sucessões monótonas, sucessões limitadas, sucessões definidas por recorrência, progressões aritméticas e progressões geométricas (termo geral e soma de n termos consecutivos).	Conhecedor/ Sabedor/ Culto/ Informado (A, B, G, I, J) Criativo (A, C, D) Crítico/Analítico (A, B, C, D, G) Sistematizador/ organizador (A, B, C, I, J) Questionador (A, F, G, I, J) Comunicador (A, B, D, E, H)	Testes e minitestes Trabalho de grupo Apresentação oral
	Limites de sucessões	- Conceito de limite de uma sucessão; - Sucessões convergentes e limitadas; - Propriedades dos limites de sucessões; - Limites infinitos. Indeterminações; - Levantamento de indeterminações.	6	Conhecer o conceito de limite de uma sucessão (casos de convergência e de limites infinitos); Relacionar a convergência com a monotonia e a limitação.	Participativo/ colaborador (B, C, D, E, F) Responsável/ autónomo (C, D, E, F, G, I, J)	Poster Científico Projeto de turma
TOTAL			15			

Documentos Orientadores: Aprendizagens Essenciais (AE) e Perfil do aluno à saída da escolaridade obrigatória (PASEO)

Anexo 3: Plano de aula 11.º ano

Plano da 17ª e 18ª Aula dada de Matemática A – 11.º CT2

Professora estagiária Francisca Fernandes

17 de março de 2025

TEMA: SUCESSÕES – LIMITES DE SUCESSÕES	
Sumário: Limite da sucessão de termo geral $u_n = \frac{an+b}{cn+d}$. Operações com limites finitos. Resolução de exercícios de aplicação da ficha de trabalho “Limites finitos”.	
Recursos do Professor: • Quadro e canetas • Computador com internet e projetor • Recurso do GeoGebra “Limite da sucessão $u_n = \frac{an+b}{cn+d}$”: https://www.geogebra.org/classroom/sg67w7ex • Ficha de trabalho “Limites finitos” (Anexo A)	Recursos do Aluno: • Papel, lápis, caneta e borracha • Manual “Novo Ípsilon 11” – Parte 2 • Kits tecnológicos (1 por grupo)
Objetivos de Aprendizagem dos Alunos	
Objetivos Gerais: • Desenvolver o raciocínio e o pensamento matemático. • Promover o espírito de equipa e o trabalho em grupo. • Fortalecer a comunicação matemática. • Desenvolver a capacidade de espírito crítico e de discussão de ideias e estratégias utilizadas.	Objetivos Específicos: • Determinar o limite da família de sucessões (u_n) de termo geral $u_n = \frac{an+b}{cn+d}$. • Reconhecer e aplicar as regras operatórias com limites finitos. • Melhorar a capacidade de investigação e descoberta autónoma.
Ações a desenvolver com os Alunos: • Distribuir um exemplar da ficha de trabalho (Anexo A) a cada aluno e explicar brevemente a sua estrutura. • Projetar a tarefa e promover a análise e discussão, em grupo turma, das conclusões obtidas na sua resolução, incentivando a identificação de padrões e condições que influenciam o comportamento do limite da sucessão em estudo. • Generalizar e sistematizar as conclusões obtidas. • Resolver o exercício 2 da ficha de trabalho. • Projetar a segunda parte da ficha de trabalho “Operações com limites finitos” e, em conjunto com a turma, preencher as propriedades das operações com limites finitos dadas duas sucessões convergentes. Paralelamente, aplicar a	

operação estudada a dois exemplos de sucessões concretos: $u_n = \frac{4n}{1-2n}$; $v_n = 3 - \frac{1}{n^2}$.

- Resolver o exercício 3 da ficha de trabalho.
- Realizar uma breve sistematização dos conteúdos referentes ao cálculo de limites abordados até ao momento.

Desenvolvimento da aula/Estratégias:

Para a presente aula, preparou-se uma ficha de trabalho (Anexo A) composta por três partes: “Limite da sucessão $u_n = \frac{an+b}{cn+d}$ ”, “Operações com limites finitos” e “Exercícios de aplicação”. Esta estrutura tem como objetivo acompanhar os diferentes momentos da aula e facilitar a organização dos alunos. Na primeira parte, encontra-se uma tarefa na qual os alunos, com o auxílio da tecnologia, mais especificamente o recurso do *GeoGebra* “Limite da sucessão $u_n = \frac{an+b}{cn+d}$ ” preparado previamente, devem observar como a variação dos parâmetros a, b, c e d afeta o comportamento do limite da sucessão $u_n = \frac{an+b}{cn+d}$, com a, b, c e $d \in \mathbb{R}$, $cn + d \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Esta parte inclui ainda um espaço destinado à generalização das conclusões obtidas, culminando num exercício de aplicação direta dos diferentes casos observados. A segunda parte diz respeito às operações com limites finitos, incluindo um espaço para o registo das propriedades operatórias, que são simultaneamente aplicadas a dois exemplos concretos de sucessões convergentes contemplados na ficha. De seguida, o exercício 3 requer a aplicação direta das regras operatórias estabelecidas. Por fim, na terceira parte encontra-se a compilação de quatro exercícios que integram os conceitos abordados ao longo da aula, de modo a consolidar os conhecimentos adquiridos.

No primeiro momento da aula, a professora irá distribuir um exemplar da ficha de trabalho a cada aluno e explicar brevemente a sua estrutura. Os alunos terão 20 minutos para resolver a tarefa, em grupo, com o auxílio da tecnologia. Durante este momento, a professora deverá circular pela sala de aula para acompanhar o progresso dos alunos, esclarecer eventuais dúvidas e garantir que todos os alunos estão envolvidos na execução da tarefa.

Posto isto, segue-se, em grupo turma, uma discussão sobre os diferentes comportamentos do limite da sucessão em função dos valores numéricos utilizados. Esta partilha das conclusões observadas servirá de base para generalizar os resultados, que os alunos deverão sistematizar na ficha de trabalho, no espaço destinado para esse fim. A professora deverá orientar o debate para que os alunos identifiquem as diferentes possibilidades para o limite da sucessão e reconheçam padrões e condições que influenciam o seu comportamento.

O segundo momento da aula será dedicado à resolução do exercício 2 da ficha de trabalho que consiste na aplicação direta das conclusões resultantes da realização da tarefa. Durante este momento, a professora irá circular pela sala de aula de modo a supervisionar o trabalho dos alunos e a fornecer apoio individualizado aos que precisem. Simultaneamente, as alíneas serão resolvidas no quadro pelos alunos.

O terceiro momento da aula será dedicado ao estudo das operações com limites de sucessões finitos. Para tal, a professora deverá projetar a segunda parte da ficha de trabalho e, em conjunto com a turma, preencher as propriedades das operações com limites de sucessões convergentes. Paralelamente, serão trabalhados dois exemplos concretos de sucessões: $u_n = \frac{4n}{1-2n}$; $v_n = 3 - \frac{1}{n^2}$, para as quais se realizará a operação correspondente, de modo a estabelecer a conexão direta entre a teoria e a prática. Durante este momento, a professora deverá incentivar a contribuição e participação ativa dos alunos.

Por fim, procede-se à resolução do exercício 3 da ficha de trabalho que consiste na aplicação direta das operações com limites finitos. Durante este momento, a professora deverá circular pela sala de aula de modo a supervisionar o trabalho dos alunos e a fornecer apoio individualizado aos que precisem. Simultaneamente, as alíneas serão resolvidas no quadro pelos alunos.

A aula termina com uma breve sistematização dos conteúdos referentes ao cálculo de limites abordados até ao momento e com a atribuição do T.P.C. O T.P.C. será ajustado ao ritmo da turma e tendo em consideração que a próxima aula de matemática ocorrerá no dia seguinte, juntamente com o teste de avaliação da disciplina de Físico-Química.

Observações/Aprendizagem complementar (Cumprimento do plano/alterações ao plano, metodologias a adotar, casos particulares...)

1. Durante a resolução dos exercícios, sempre que necessário, a professora deverá dar um apoio mais individualizado, observando as dificuldades dos alunos na aplicação dos conteúdos previamente trabalhados e na compreensão dos conceitos abordados.
2. Durante os momentos de trabalho autónomo, caso seja necessário, a professora interromperá a aula para destacar pormenores importantes ou esclarecer dúvidas específicas.
3. Caso o ritmo da aula seja mais acelerado do que o previsto, o plano B consiste em dar continuidade à resolução dos exercícios propostos na terceira parte da ficha de trabalho.
4. A tarefa inicial da ficha de trabalho resulta da adaptação da "Tarefa 13" constante no Manual "Novo Espaço 11" – Parte 2".
5. O recurso do *GeoGebra* "Limite da sucessão $u_n = \frac{an+b}{cn+d}$ " foi desenvolvido em colaboração com a colega do núcleo de estágio Carolina Almeida.

Antevisão - Possíveis dificuldades dos alunos:

1. Dificuldade em identificar os limites das sucessões a partir da sua representação gráfica fornecida pelo GeoGebra.
2. Dificuldade em observar como a variação dos parâmetros a, b, c e d afeta o comportamento do limite da sucessão $u_n = \frac{an+b}{cn+d}$, com a, b, c e $d \in \mathbb{R}$, $cn + d \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$.
3. Dificuldade em identificar e aplicar corretamente as regras de operações com potências.

Avaliação:

A avaliação dos alunos será baseada em apontamentos referentes aos seguintes aspetos:

- Aplicação de conhecimentos matemáticos adquiridos anteriormente;
- Participação na resolução e discussão da tarefa;
- Colaboração com a professora e com os colegas no estabelecimento das propriedades operatórias com limites finitos;
- Colaboração com a professora e com os colegas na resolução dos exercícios;
- Uso da terminologia e simbologia adequada;
- Participação dos alunos na aula;
- Comportamento na sala de aula.

Balanço:

Para estas aulas, a professora estagiária construiu uma ficha de trabalho composta por três partes: "Limite da sucessão $u_n = \frac{an+b}{cn+d}$ ", "Operações com limites finitos" e "Exercícios de aplicação". Esta estrutura tinha como objetivo acompanhar os diferentes momentos da aula e facilitar a organização dos alunos. A primeira parte era composta por uma tarefa na qual os alunos, com o auxílio do *GeoGebra*, analisaram como a variação dos parâmetros a, b, c e d afeta o comportamento do limite da sucessão $u_n = \frac{an+b}{cn+d}$. Esta parte incluía também um espaço destinado à generalização das conclusões obtidas, culminando num exercício de aplicação direta dos diferentes casos observados. Na segunda parte, o foco eram as operações com limites finitos, incluindo um espaço para o registo das propriedades operatórias e a sua aplicação a exemplos concretos. Por fim, a terceira parte era composta por quatro exercícios que exigiam a aplicação dos conceitos trabalhados ao longo das últimas aulas.

As aulas decorreram conforme o planeado, sendo possível cumprir todos os momentos estabelecidos, com a participação ativa dos alunos. Desta forma, foram cumpridos os objetivos estipulados e os alunos conseguiram desenvolver as competências pretendidas.

Na reunião do núcleo de estágio, foi unânime a opinião que os alunos compreenderam bem os diferentes casos associados

ao cálculo do limite da sucessão $u_n = \frac{an+b}{cn+d}$. Sublinhou-se que o recurso do *GeoGebra* foi extremamente útil na exploração das várias situações, pois permitiu aos alunos observar de forma clara como a variação dos parâmetros afeta o comportamento do limite da sucessão, garantindo uma compreensão mais visual do conceito.

No entanto, foram evidentes algumas dificuldades relativamente às propriedades operatórias com limites finitos, uma vez que exigem um maior grau de abstração. Face a isto, sugeriu-se uma pequena alteração na estrutura da ficha de trabalho, propondo-se que os exemplos fossem trabalhados primeiro e só depois se proceder à respetiva generalização.

As professoras presentes na aula sublinharam que existiu uma evolução significativa face às aulas lecionadas anteriormente, sendo notório uma melhor marcação dos diferentes momentos da aula. Este facto permitiu uma condução mais fluida da aula, garantindo uma transição natural entre as tarefas e evitando períodos de inatividades.

Durante este bloco de aulas, a professora estagiária sentiu-se menos ansiosa e mais confiante na gestão e condução das mesmas. Considera-se que isto se deve, em grande parte, à relação de confiança estabelecida entre a professora e os alunos, o que contribuiu para o sucesso das aulas. Na reunião de núcleo de estágio, esta dimensão relacional foi igualmente destacada como crucial para uma gestão eficaz do comportamento e para o envolvimento ativo dos alunos, mesmo diante de conteúdos mais desafiantes como o conceito de limite.

Neste sentido, elogiou-se a observação incluída no plano de aula que destaca a necessidade de, no momento de atribuir o T.P.C., considerar o ritmo da turma e as circunstâncias externas como o teste de Físico-Química que os alunos tinham no dia seguinte.

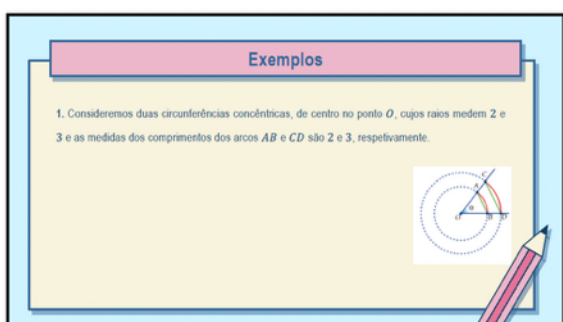
Anexo 4: PowerPoint "Medidas de amplitude em radianos"



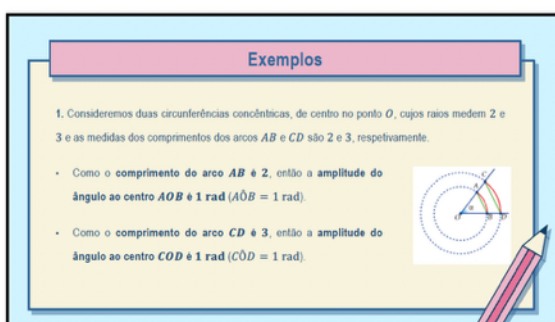
1



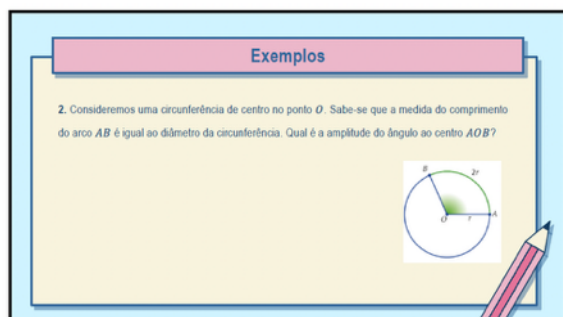
2



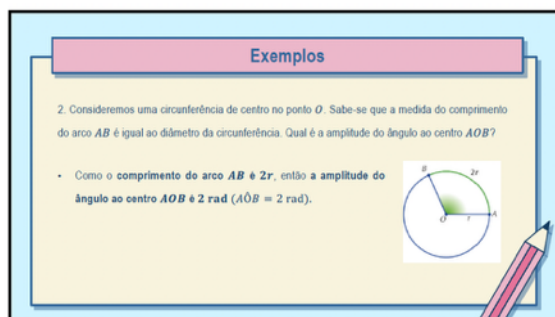
3



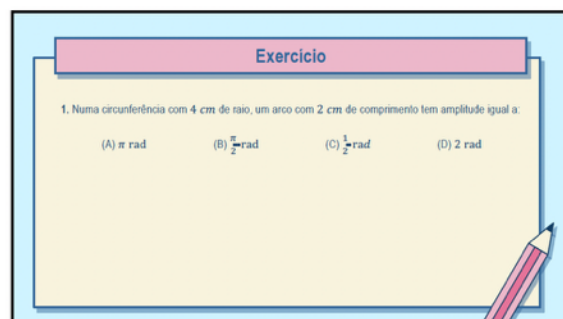
4



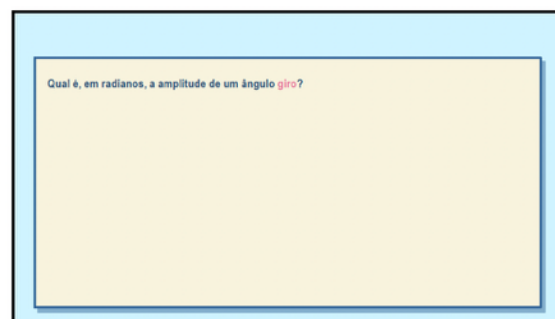
5



6



7

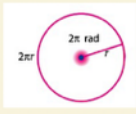


8

Qual é, em radianos, a amplitude de um ângulo **giro**?

- Comprimento da circunferência de raio r : $2\pi r$

Logo, um ângulo giro tem 2π radianos de amplitude.



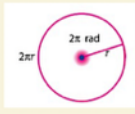
9

Qual é, em radianos, a amplitude de um ângulo **giro**?

- Comprimento da circunferência de raio r : $2\pi r$

Logo, um ângulo giro tem 2π radianos de amplitude.

Qual é, em radianos, a amplitude de um ângulo **raso**?



10

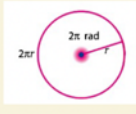
Qual é, em radianos, a amplitude de um ângulo **giro**?

- Comprimento da circunferência de raio r : $2\pi r$

Logo, um ângulo giro tem 2π radianos de amplitude.

Qual é, em radianos, a amplitude de um ângulo **raso**?

Se um ângulo giro tem 2π radianos de amplitude, então um ângulo raso tem π radianos de amplitude.



11

Qual é, em radianos, a amplitude de um ângulo **giro**?

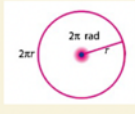
- Comprimento da circunferência de raio r : $2\pi r$

Logo, um ângulo giro tem 2π radianos de amplitude.

Qual é, em radianos, a amplitude de um ângulo **raso**?

Se um ângulo giro tem 2π radianos de amplitude, então um ângulo raso tem π radianos de amplitude.

Qual é, em radianos, a amplitude de um ângulo **reto**?



12

Qual é, em radianos, a amplitude de um ângulo **giro**?

- Comprimento da circunferência de raio r : $2\pi r$

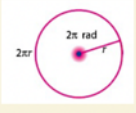
Logo, um ângulo giro tem 2π radianos de amplitude.

Qual é, em radianos, a amplitude de um ângulo **raso**?

Se um ângulo giro tem 2π radianos de amplitude, então um ângulo raso tem π radianos de amplitude.

Qual é, em radianos, a amplitude de um ângulo **reto**?

Se um ângulo raso tem π radianos de amplitude, então um ângulo reto tem $\frac{\pi}{2}$ radianos de amplitude.



13

Conversão de graus para radianos (ou vice-versa)

Para converter radianos em graus ou graus em radianos, podemos usar uma regra de três simples, partindo da correspondência:

$$180^\circ = \pi \text{ rad}$$


14

Conversão de graus para radianos (ou vice-versa)

Para converter radianos em graus ou graus em radianos, podemos usar uma regra de três simples, partindo da correspondência:

$$180^\circ = \pi \text{ rad}$$

Exemplo: Conversão de 30° para radianos

$$\frac{180^\circ}{30^\circ} = \frac{\pi \text{ rad}}{x} \Rightarrow x = \frac{30 \times \pi}{180} = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

Portanto, $30^\circ = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$



15

Exercícios

2. Converta em radianos:

a) 330° b) 450° c) -288°

Exercícios do manual: 91.1, 91.3, 91.6

3. Converta em graus:

a) $\frac{5\pi}{6} \text{ rad}$ b) $-\frac{6\pi}{25} \text{ rad}$

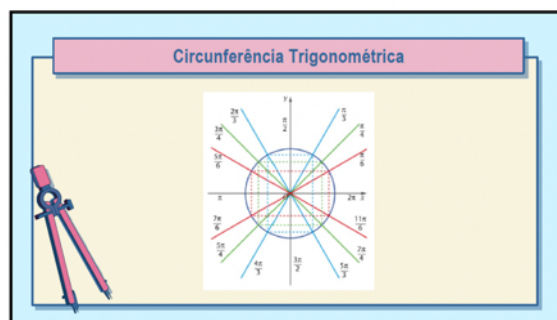
Exercícios do manual: 90.2, 90.3, 90.4, 90.6



16

Tabela Trigonométrica			
α	30°	45°	60°
$\sin \alpha$			
$\cos \alpha$			
$\tan \alpha$			

17



18

Anexo 5: Tarefa "Redução ao 1.º Quadrante"

MATEMÁTICA A 11.º ANO

Nome: _____ Turma: _____ Data: ____/____/____

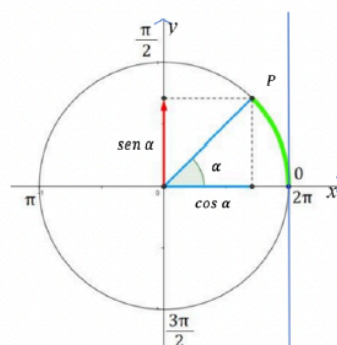
TEMA: Redução ao 1º Quadrante

Acede a www.geogebra.org/classroom e digita o código **UTBF 7F5J**. Em alternativa, acede através do QR Code disponível. Insere o nome de todos os elementos do grupo.



1. Desloca o ponto P ao longo da circunferência trigonométrica, de modo a que o ângulo α pertença ao 1º Quadrante. Escreve as coordenadas do ponto P em função de α .

2. Selecciona a opção "ângulo $-\alpha$ ".
 - a) Indica as coordenadas do ponto P_1 em função de α .
 - b) Na figura ao lado, representa o ponto P_1 e o ângulo $-\alpha$.
 - c) Observando as coordenadas dos pontos P e P_1 , completa as seguintes igualdades:
 - $\sin(-\alpha) = \underline{\hspace{2cm}}$
 - $\cos(-\alpha) = \underline{\hspace{2cm}}$
 - $\tan(-\alpha) = \underline{\hspace{2cm}}$



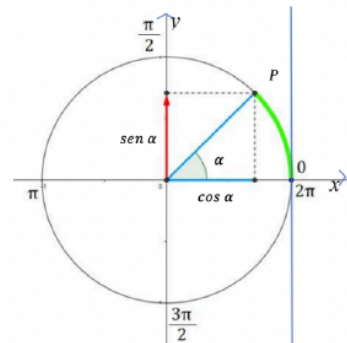
3. Selecciona a opção “ângulo $\pi - \alpha$ ”.

a) Indica as coordenadas do ponto P_2 em função de α .

b) Na figura ao lado, representa o ponto P_2 e o ângulo $\pi - \alpha$.

c) Observando as coordenadas dos pontos P e P_2 , completa as seguintes igualdades:

- $\text{sen}(\pi - \alpha) = \underline{\hspace{2cm}}$
- $\text{cos}(\pi - \alpha) = \underline{\hspace{2cm}}$
- $\text{tan}(\pi - \alpha) = \underline{\hspace{2cm}}$



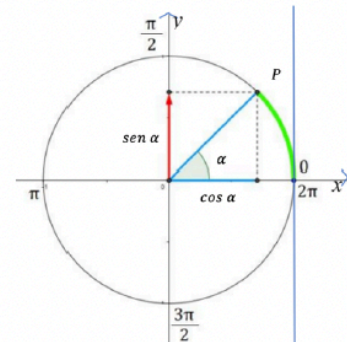
4. Selecciona a opção “ângulo $\pi + \alpha$ ”.

a) Indica as coordenadas do ponto P_3 em função de α .

b) Na figura ao lado, representa o ponto P_3 e o ângulo $\pi + \alpha$.

c) Observando as coordenadas dos pontos P e P_3 , completa as seguintes igualdades:

- $\text{sen}(\pi + \alpha) = \underline{\hspace{2cm}}$
- $\text{cos}(\pi + \alpha) = \underline{\hspace{2cm}}$
- $\text{tan}(\pi + \alpha) = \underline{\hspace{2cm}}$



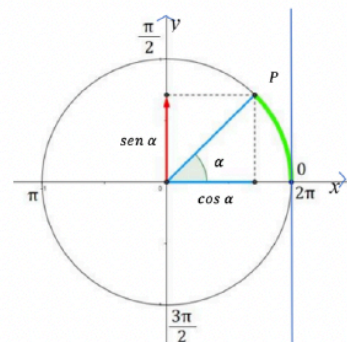
5. Selecciona a opção “ângulo $\frac{\pi}{2} - \alpha$ ”.

a) Indica as coordenadas do ponto P_4 em função de α .

b) Na figura ao lado, representa o ponto P_4 e o ângulo $\frac{\pi}{2} - \alpha$.

c) Observando as coordenadas dos pontos P e P_4 , completa as seguintes igualdades:

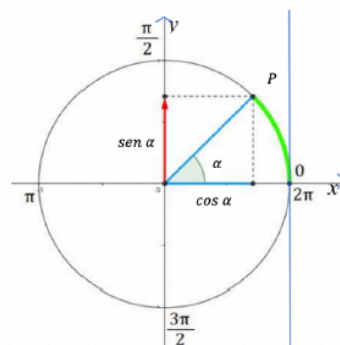
- $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \underline{\hspace{2cm}}$
- $\text{cos}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \underline{\hspace{2cm}}$
- $\text{tan}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \underline{\hspace{2cm}}$



6. Selecciona a opção "ângulo $\frac{\pi}{2} + \alpha$ ".

- Indica as coordenadas do ponto P_5 em função de α .
- Na figura ao lado, representa o ponto P_5 e o ângulo $\frac{\pi}{2} + \alpha$.
- Observando as coordenadas dos pontos P e P_5 , completa as seguintes igualdades:

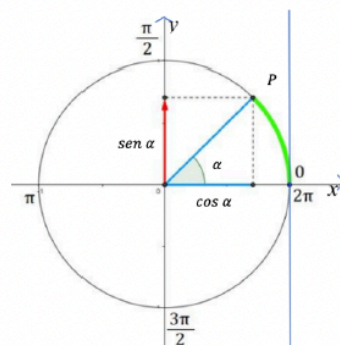
- $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \underline{\hspace{2cm}}$
- $\text{cos}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \underline{\hspace{2cm}}$
- $\text{tan}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \underline{\hspace{2cm}}$



7. Selecciona a opção "ângulo $\frac{3\pi}{2} - \alpha$ ".

- Indica as coordenadas do ponto P_6 em função de α .
- Na figura ao lado, representa o ponto P_6 e o ângulo $\frac{3\pi}{2} - \alpha$.
- Observando as coordenadas dos pontos P e P_6 , completa as seguintes igualdades:

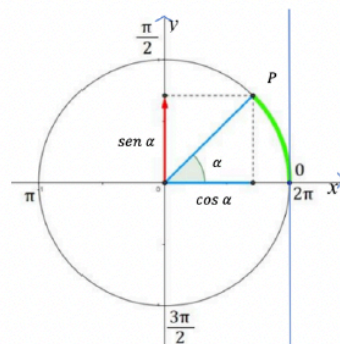
- $\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \underline{\hspace{2cm}}$
- $\text{cos}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \underline{\hspace{2cm}}$
- $\text{tan}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \underline{\hspace{2cm}}$



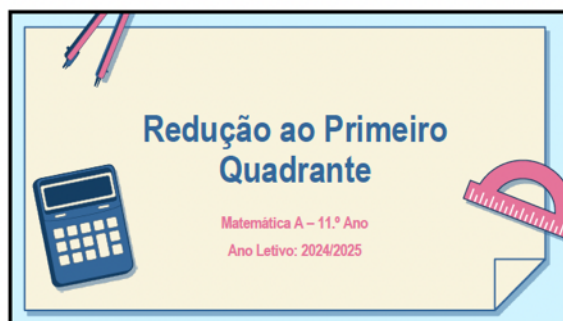
8. Selecciona a opção "ângulo $\frac{3\pi}{2} + \alpha$ ".

- Indica as coordenadas do ponto P_7 em função de α .
- Na figura ao lado, representa o ponto P_7 e o ângulo $\frac{3\pi}{2} + \alpha$.
- Observando as coordenadas dos pontos P e P_7 , completa as seguintes igualdades:

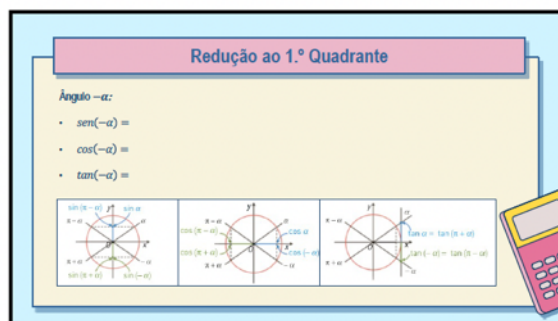
- $\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \underline{\hspace{2cm}}$
- $\text{cos}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \underline{\hspace{2cm}}$
- $\text{tan}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \underline{\hspace{2cm}}$



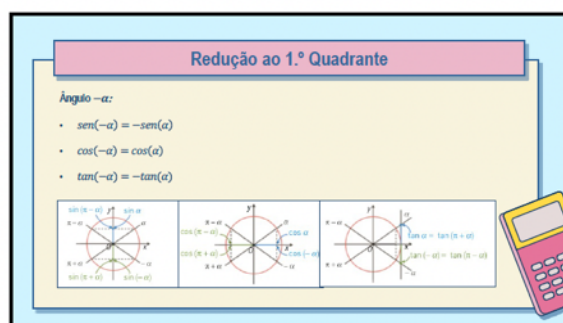
Anexo 6: PowerPoint "Redução ao 1.º Quadrante"



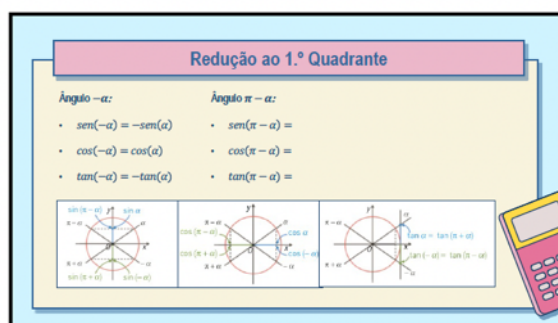
1



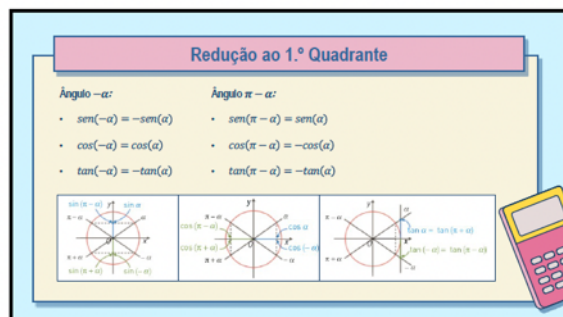
2



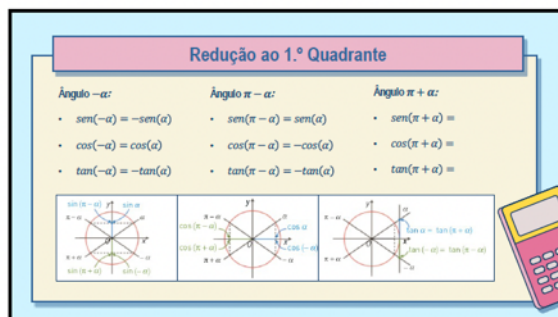
3



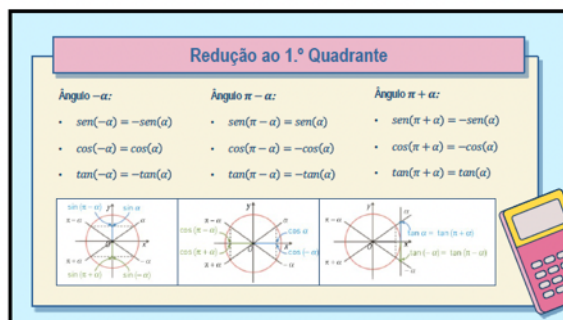
4



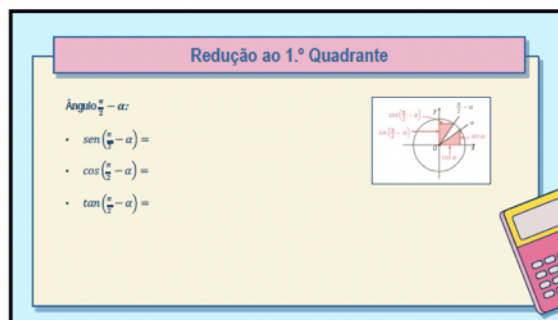
5



6



7

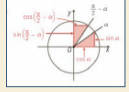


8

Redução ao 1.º Quadrante

Ângulo $\frac{\pi}{2} - \alpha$:

- $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos(\alpha)$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{sen}(\alpha)$
- $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{\tan(\alpha)}$




9

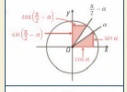
Redução ao 1.º Quadrante

Ângulo $\frac{\pi}{2} - \alpha$:

- $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos(\alpha)$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{sen}(\alpha)$
- $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{\tan(\alpha)}$

Ângulo $\frac{\pi}{2} + \alpha$:

- $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) =$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) =$
- $\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) =$




10

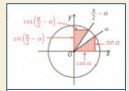
Redução ao 1.º Quadrante

Ângulo $\frac{\pi}{2} - \alpha$:

- $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos(\alpha)$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{sen}(\alpha)$
- $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{\tan(\alpha)}$

Ângulo $\frac{\pi}{2} + \alpha$:

- $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos(\alpha)$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{sen}(\alpha)$
- $\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\frac{1}{\tan(\alpha)}$

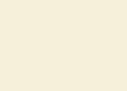



11

Redução ao 1.º Quadrante

Ângulo $\frac{3\pi}{2} - \alpha$:

- $\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) =$
- $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) =$
- $\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) =$

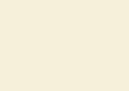



12

Redução ao 1.º Quadrante

Ângulo $\frac{3\pi}{2} - \alpha$:

- $\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos(\alpha)$
- $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\operatorname{sen}(\alpha)$
- $\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{\tan(\alpha)}$




13

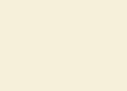
Redução ao 1.º Quadrante

Ângulo $\frac{3\pi}{2} - \alpha$:

- $\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos(\alpha)$
- $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\operatorname{sen}(\alpha)$
- $\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{\tan(\alpha)}$

Ângulo $\frac{3\pi}{2} + \alpha$:

- $\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) =$
- $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) =$
- $\tan\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) =$




14

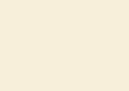
Redução ao 1.º Quadrante

Ângulo $\frac{3\pi}{2} - \alpha$:

- $\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos(\alpha)$
- $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\operatorname{sen}(\alpha)$
- $\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{\tan(\alpha)}$

Ângulo $\frac{3\pi}{2} + \alpha$:

- $\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos(\alpha)$
- $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \operatorname{sen}(\alpha)$
- $\tan\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\frac{1}{\tan(\alpha)}$




15

Anexo 7: Ficha de Exercícios “Redução ao 1.º Quadrante”

MATEMÁTICA A 11.º ANO

Nome: _____ Turma: _____ Data: ____/____/____

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. Simplifica as seguintes expressões, aplicando a redução ao 1.º quadrante.

1.1. $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - 2\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

1.2. $\sin(\pi - \alpha) - 2\cos\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$

1.3. $\cos(-\alpha + 4\pi) - \cos(\pi + \alpha)$

1.4. $\tan(\alpha - 3\pi) \times \sin^2\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$

1.5. $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) + \cos\left(\frac{7\pi}{2} + \alpha\right) + \tan(\alpha - \pi)$

1.6. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \tan(\alpha + \pi) + 3\sin\left(\alpha - \frac{7\pi}{2}\right) - \tan(-\pi - \alpha)$

1.7. $\cos\left(-\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin(-\alpha) + \cos(-\alpha)\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \tan(\pi - \alpha)\cos(\pi + \alpha)$

2. Simplifica as seguintes expressões, aplicando a redução ao 1.º quadrante.

2.1. $\cos(180^\circ - \alpha) - \sin(270^\circ + \alpha) - \sin(90^\circ - \alpha)$

2.2. $\sin(\pi - \alpha) - \sin(\pi + \alpha) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

2.3. $\sin(\alpha - 3\pi) - \frac{1}{2}\cos(-\alpha) + 2\sin(\pi + \alpha) - \cos(9\pi + \alpha)$

2.4. $\sin(-\alpha)\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) + \sin^2(\pi + \alpha) - \tan(\alpha - \pi)$

2.5. $\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\tan(\pi + \alpha)}{\sin(-\alpha)}$

2.6. $\frac{\sin(\pi + \alpha)\cos(-\alpha)}{\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)(1 + \tan^2(\alpha))}$

3. Calcula o valor exato de cada uma das seguintes expressões.

3.1. $\sin\left(\frac{13\pi}{3}\right) + \cos(5\pi) - \tan(-7\pi) + \cos\left(-\frac{23\pi}{4}\right)$

3.2. $\sin^2\left(-\frac{7\pi}{4}\right) + \cos^2\left(-\frac{7\pi}{4}\right)$

3.3. $\sin\left(\frac{19\pi}{3}\right) + \cos(-3\pi) - \tan\left(\frac{13\pi}{4}\right) + \cos\left(-\frac{11\pi}{6}\right)$

3.4. $\tan\left(\frac{13\pi}{4}\right) + \cos(6\pi) - \sin\left(-\frac{7\pi}{2}\right) + \cos\left(-\frac{17\pi}{4}\right)$

4. Sabe-se que $\sin\left(-\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) = \frac{1}{3}$ e que $\alpha \in]0, \pi[$. Determina o valor da expressão $\tan(\pi + \alpha) - \cos(\alpha - 3\pi)$.
5. Sabe-se que $\cos(\pi + \theta) = \frac{3}{7}$ e que $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$. Determina o valor da expressão $\tan(\pi + \theta) + \cos\left(\frac{5\pi}{2} + \theta\right) - \sin(\theta - \pi)$.
6. Sabe-se que $\cos(x - 3\pi) = -\frac{1}{12}$ e que $x \in 4^{\text{º}} Q$. Determina o valor exato da expressão $\tan(-x) + \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 2\cos^2(x)$.
7. Sabe-se que $\tan(3\pi + x) = \frac{1}{5}$ e que $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Determina $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$.

Anexo 8: Tarefa “Declive e inclinação de uma reta no plano”

Declive e inclinação de uma reta no plano

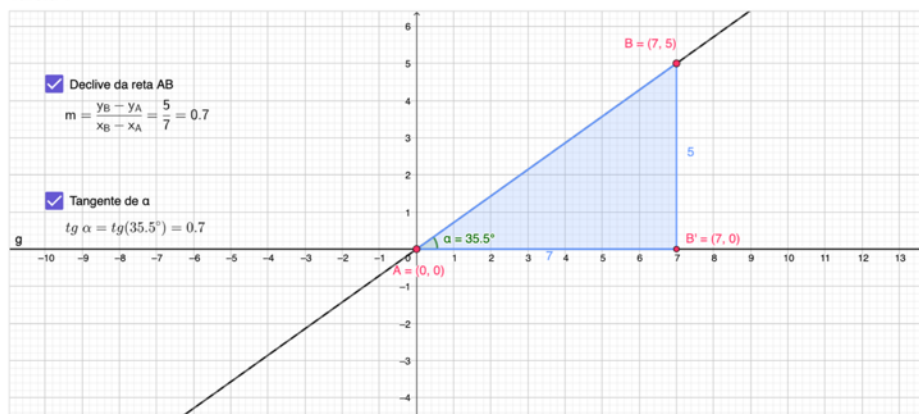
Boa tarde! No seguimento da matéria “Declive e inclinação de uma reta no plano” que vimos na aula de hoje, devem:

1. Aceder ao link www.geogebra.org/classroom/tgubmz4n
2. Escolher a opção “Entrar sem fazer login”
3. Escrever o vosso nome
4. Realizar as tarefas propostas

Sugestão: podem utilizar este recurso do GeoGebra para vos ajudar na resolução dos exercícios do manual.

Qualquer dúvida, perguntem. Bom trabalho!

Tarefa 1



Na aula explorámos a relação que existe entre o declive e a inclinação de **retas oblíquas**.

- Se a **reta AB** **passa pela origem**, então $m_{AB} = \tan(\alpha)$, em que α é a inclinação da reta **AB**.

Definimos a **inclinação da reta AB** como a amplitude ângulo convexo formado pelo semieixo positivo Ox e a semirreta **AB**.

Tarefa 2

Logo, entre que valores varia a **inclinação da reta AB**?

Assinale sua resposta aqui

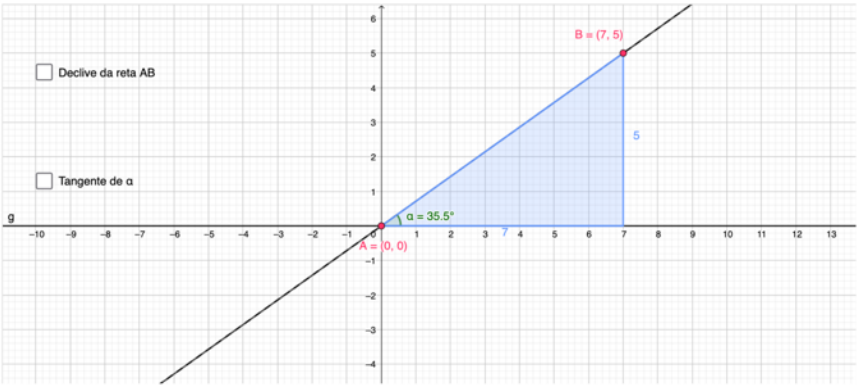
- A ☐ 0° e 90°
- B ☐ 90° e 180°
- C ☐ 0° e 180°
- D ☐ 0° e 360°

- Se a **reta AB não passa pela origem**, então $m_{AB} = \tan(\alpha)$, em que α é a inclinação da reta AB , que coincide com a inclinação da única reta paralela a AB que passa em O .

Vamos agora explorar as **retas horizontais**. Será que a relação se mantém?

1.1. Traça a reta $AB : y = 5$.

Tarefa 3



Tarefa 4

1.2. Qual é o declive da reta AB ?

Tarefa 5

1.3. Qual é, em graus, a inclinação da reta AB ?

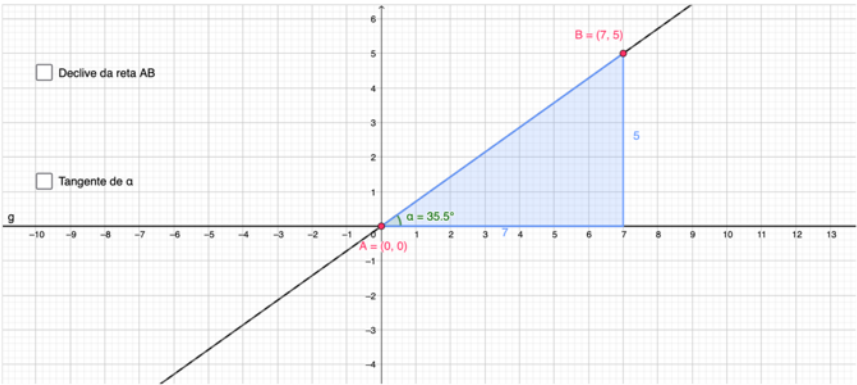
Tarefa 6

1.4. Qual é a relação que existe entre o declive da reta AB e a tangente da sua inclinação?

Só nos falta explorar as **retas verticais**.

2.1. Traça a reta $AB : x = -2$.

Tarefa 7



Tarefa 8

2.2. Qual é, em graus, a inclinação da reta AB ?

Tarefa 9

2.3. O que sabemos sobre a tangente do ângulo correspondente à inclinação da reta AB ?

Tarefa 10

2.4. O que se pode concluir sobre o declive da reta AB ?

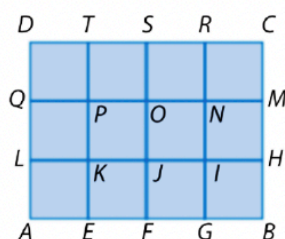
Anexo 9: Ficha de trabalho "Produto escalar de vetores"

MATEMÁTICA A 11.º ANO

Nome: _____ Turma: _____ Data: ____/____/____

PARTE I: Revisões

1. Na figura, $[ABCD]$ é um retângulo decomposto em 12 quadrados, geometricamente iguais, de lado 1.



- 1.1. Completa as seguintes igualdades:

a) $B + \overrightarrow{BD} = \underline{\hspace{2cm}}$ d) $\overrightarrow{MJ} - 2\overrightarrow{SN} = \underline{\hspace{2cm}}$
 b) $\underline{\hspace{2cm}} - \overrightarrow{TM} = L$ e) $\overrightarrow{FQ} + \underline{\hspace{2cm}} = \vec{0}$
 c) $\overrightarrow{LJ} + \overrightarrow{MR} = \underline{\hspace{2cm}}$

- 1.2. Determina:

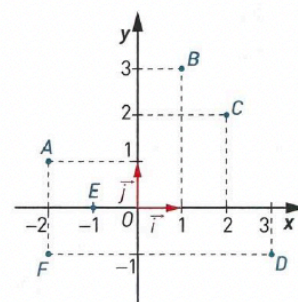
a) $\| -5\overrightarrow{ET} \|$
 b) $\| \frac{1}{2}\overrightarrow{AF} + 3\overrightarrow{PS} \|$

2. No referencial o. n. $(O, \vec{i}, \vec{j})$ da figura, encontram-se representados alguns pontos.

- 2.1. Indica as coordenadas dos vetores:

a) $\overrightarrow{BF}$
 b) $2(B - D) - \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$

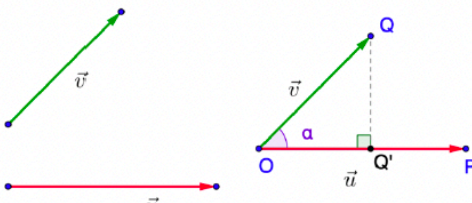
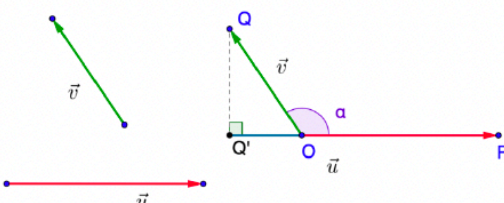
- 2.2. Calcula $\| \overrightarrow{AD} - 2\overrightarrow{OC} \|$.



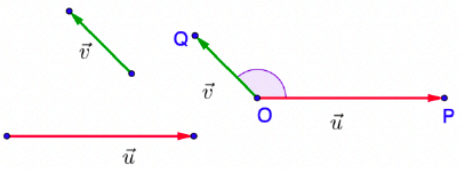
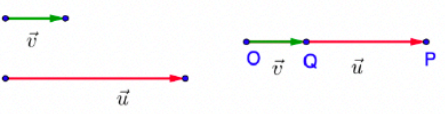
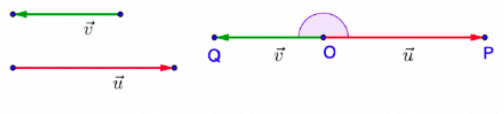
- 2.3. Determina as coordenadas do ponto P , sabendo que $\| \overrightarrow{AP} \| = 4$ e P pertence ao eixo das abcissas.

PARTE II: Produto Escalar

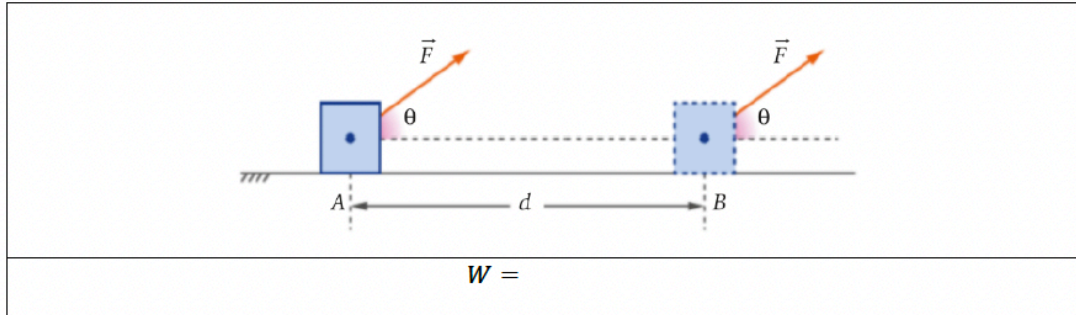
- Produto escalar

$\overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{OQ'}$ têm o mesmo sentido	$\overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{OQ'}$ têm sentidos contrários
	
$\vec{u} \cdot \vec{v} =$	$\vec{u} \cdot \vec{v} =$

- Ângulo de dois vetores

	O ângulo de dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é
A amplitude deste ângulo representa-se por:	
Se os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares e têm o mesmo sentido,	Se os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares e têm sentidos contrários,
	

1. Em Física já trabalhaste com a noção de produto escalar para definir o trabalho de uma força. Como se calcula o trabalho (W) realizado pela força $\vec{F}$, num deslocamento $\vec{d}$?



2. Então o trabalho de uma força pode ser definido pelo produto escalar:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} =$$

3. A partir da expressão usada para determinar o trabalho realizado por uma força num certo deslocamento, generaliza-a para vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, não nulos.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} =$$

4. Como é que explicas o facto de termos inicialmente definido o produto escalar de uma forma e agora teres obtido uma nova expressão? Tenta relacionar as duas expressões, justificando a sua equivalência.

Dica: Não te esqueças do que trabalhamos na aulas de Trigonometria!

- Relação entre produto escalar e ângulo de dois vetores

$\vec{u} \cdot \vec{v} =$

- Sinal do produto escalar

$\vec{u} \cdot \vec{v} > 0 \Leftrightarrow$	$\Leftrightarrow$
$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow$	$\Leftrightarrow$
$\vec{u} \cdot \vec{v} < 0 \Leftrightarrow$	$\Leftrightarrow$

- Propriedades

$\vec{u} \cdot \vec{u} =$
Propriedade comutativa: $\vec{u} \cdot \vec{v} =$
Propriedade associativa mista: $(\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} =$
Propriedade distributiva: $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} =$

Anexo 10: Ficha de trabalho “Limites finitos”

MATEMÁTICA A – 11.º ANO

Nome: _____ Turma: CT2 Data: ____/____/____

$$\text{Limite da sucessão } u_n = \frac{an+b}{cn+d}$$

Acede a <https://www.geogebra.org/classroom> e digita o código **SG67 W7EX**. Insere o nome de todos os elementos do grupo.

1. Considera a família de sucessões (u_n) de termo geral:

$$u_n = \frac{an+b}{cn+d}, \text{ com } a, b, c \text{ e } d \text{ números reais tais que } \forall n \in \mathbb{N}, cn + d \neq 0.$$

Para cada alínea, **move os seletores a, b, c e d** , para identificares quais destes parâmetros influenciam (e como influenciam) o limite da sucessão. **Preenche os espaços em branco.**

• **Caso 1: $a = c = 0$**

1.1.1. Se $a = 0$; $b = 3$; $c = 0$ e $d = 5$, então $\lim \left(\frac{an+b}{cn+d} \right) =$ _____

• **Caso 2: $c \neq 0$**

1.2.1. Se $a = 4$; $b = -2$; $c = 3$ e $d = 1$, então $\lim \left(\frac{an+b}{cn+d} \right) =$ _____

1.2.2. Se $a = 1$; $b = 1$; $c = -2$ e $d = 3$, então $\lim \left(\frac{an+b}{cn+d} \right) =$ _____

• **Caso 3: $c = 0$ e $\frac{a}{d} > 0$**

1.3.1. Se $a = 4$; $b = 1$; $c = 0$ e $d = 2$, então $\lim \left(\frac{an+b}{cn+d} \right) =$ _____

1.3.2. Se $a = -1$; $b = 1$; $c = 0$ e $d = -3$, então $\lim \left(\frac{an+b}{cn+d} \right) =$ _____

• **Caso 4: $c = 0$ e $\frac{a}{d} < 0$**

1.4.1. Se $a = 5$; $b = 2$; $c = 0$ e $d = -2$, então $\lim \left(\frac{an+b}{cn+d} \right) =$ _____

1.4.2. Se $a = -1$; $b = 1$; $c = 0$ e $d = 3$, então $\lim \left(\frac{an+b}{cn+d} \right) =$ _____

Sistematizando:

Dada a sucessão $u_n = \frac{an+b}{cn+d}$, a, b, c e d números reais tais que $\forall n \in \mathbb{N}, cn + d \neq 0$, tem-se:

• Se $a = c = 0$, $\lim \left(\frac{an+b}{cn+d} \right) =$ _____

• Se $c \neq 0$, $\lim \left(\frac{an+b}{cn+d} \right) =$ _____

• Se $c = 0$ e $\frac{a}{d} > 0$, $\lim \left(\frac{an+b}{cn+d} \right) =$ _____

• Se $c = 0$ e $\frac{a}{d} < 0$, $\lim \left(\frac{an+b}{cn+d} \right) =$ _____

2. Determina:

2.1. $\lim \left(\frac{6n}{3n+1} \right)$

2.2. $\lim \left(\frac{3n-2}{4} \right)$

2.3. $\lim \left(\frac{-5n+3}{2n} \right)$

2.4. $\lim \left(\frac{2}{4n+1} \right)$

2.5. $\lim \left(\frac{-n}{3n-2} \right)$

2.6. $\lim \left(\frac{2-n}{3} \right)$

2.7. $\lim \left(\frac{n-5}{1-2n} \right)$

2.8. $\lim \left(\frac{-3}{1+4n} \right)$

2.9. $\lim \left(\frac{\pi n-1}{2n+3} \right)$

Operações com limites finitos

Dadas duas sucessões (u_n) e (v_n) convergentes, com $\lim u_n = l_1$ e $\lim v_n = l_2$, $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$, tem-se:

ex.: $u_n = \frac{4n}{1-2n}$; $v_n = 3 - \frac{1}{n^2}$

• $\lim(u_n + v_n) = \underline{\hspace{2cm}}$

ex.:

• $\lim(u_n - v_n) = \underline{\hspace{2cm}}$

ex.:

• $\lim(u_n \times v_n) = \underline{\hspace{2cm}}$

ex.:

• $\lim(a u_n) = \underline{\hspace{2cm}}$

ex.:

• $\lim \left(\frac{u_n}{v_n} \right) = \underline{\hspace{2cm}}$

ex.:

• $\lim \left(\frac{1}{u_n} \right) = \underline{\hspace{2cm}}$

ex.:

• $\lim(u_n)^r = \underline{\hspace{2cm}}$

ex.:

3. Sejam (a_n) , (b_n) e (c_n) as sucessões definidas por $a_n = \frac{-n+5}{9n+4}$, $b_n = 3$ e $c_n = \frac{1}{n^7}$. Determina:

a) $\lim(a_n + b_n)$

c) $\lim\left(\frac{1}{a_n}\right)$

e) $\lim(a_n)^2$

b) $\lim(b_n \times c_n)$

d) $\lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$

f) $\lim \sqrt[5]{b_n}$

Exercícios de Aplicação

4. Considera as sucessões (a_n) e (b_n) definidas por:

$$a_n = \begin{cases} 5, & n \leq 10 \\ \frac{6n+1}{2n}, & n > 10 \end{cases} \quad b_n = -4 \times \frac{1+n}{2n}$$

Calcula $\lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$.

5. Sejam (u_n) e (v_n) duas sucessões convergentes das quais se sabe que (u_n) não tem termos nulos, $\lim(u_n) = -1$ e $\lim(v_n) = 3$. Calcula $\lim \frac{2v_n - 5u_n}{(u_n)^2}$.

6. Considera as sucessões $u_n = \sqrt[3]{\frac{4+8n}{-n}}$ e $v_n = \left(\frac{4n}{2+n}\right)^{-\frac{1}{4}}$. Mostra que $\lim\left(\frac{u_n}{v_n}\right) = -2\sqrt{2}$.

7. Considera as sucessões (a_n) e (b_n) tais que $\lim a_n = k + 1$, sendo k um número real e $b_n = \left(\frac{n+1}{16n} - n^{-4}\right)^{\frac{1}{4}}$. Sabendo que $\lim(a_n) \times \lim(b_n) = -\frac{1}{2}$, determina o valor de k .

Anexo 11: Guião do Canteiro em Espiral

MATEMÁTICA A 11.º ANO

E se com a Matemática pudesses construir um canteiro na tua escola?

O objetivo é que este canteiro seja o ambiente perfeito para diferentes plantas crescerem, respeitando as suas necessidades de luz, água e solo. Mais do que um jardim bonito, queremos um espaço sustentável, onde as plantas se possam desenvolver de forma equilibrada e sem desperdício de recursos. E para isso, vamos colocar em ação também os teus conhecimentos de Biologia.

Antes de colocares as mãos na terra, precisas de recorrer à Matemática para desenhar e construir um canteiro em espiral e, para isso, precisas de aplicar os conceitos de progressões aritméticas e geométricas. Está na hora de seres o matemático por trás desta obra!

Instruções:

- Grupos de 4 elementos;
- Enviar primeira versão do trabalho até 17 de março;
- Enviar versão final do trabalho até 5 de abril;

Nota: Os trabalhos devem ser submetidos no Teams, apenas por um elemento de cada grupo.

Etapa 1: Pesquisa

- **Objetivo:** Explorar recursos sobre canteiros espirais, progressões aritméticas e geométricas para te inspirares na criação do teu canteiro.
- **Sugestões de recursos:**
 - Vídeo: [Construção de Espiral de Aromáticas](#)
 - Imagem: [Construção de canteiro em espiral](#)
 - Página web: [Horta em espiral aprenda como fazer esse canteiro sustentável para o seu jardim](#)

Etapa 2: Planeamento do canteiro em espiral

- **Objetivo:** Aplicar os conhecimentos sobre progressões aritméticas e geométricas para planear o canteiro espiral.
- Qual das duas progressões vais usar para o canteiro?
- Qual a estrutura e tamanho do canteiro? Quantas voltas terá a espiral? Qual a largura de cada volta?
- Como vais organizar o espaço para garantir que as plantas tenham espaço suficiente para crescer?
- Quais os recursos necessários? (número de tijolos, etc)

Etapa 3: Elaboração da apresentação

- **Objetivo:** Elaborar a apresentação do canteiro espiral, explicando o processo de planeamento e as escolhas feitas.
- Como a progressão foi definida e qual foi a lógica por trás da escolha?
- Inclui um esboço, modelo digital ou protótipos 3D do canteiro espiral que criaste.

Sugestão: Utiliza ferramentas de IA (DALL·E 3, MidJourney, Tinkercad, Runway ML, Luma AI, Artbreeder, etc)

- Como o projeto pode ser sustentável, minimizando desperdícios e aproveitando ao máximo os recursos naturais?

Etapa 4: Apresentação oral em aula

- Cada grupo terá **10 minutos** para apresentar. O tempo deve ser dividido de forma eficiente entre os membros do grupo, garantindo que **todos** participem ativamente.
- Apresentação do trabalho em aula dia 7 de abril.

Sugestão: Utiliza ferramentas de IA (Canva, Prezi, Genially, etc)

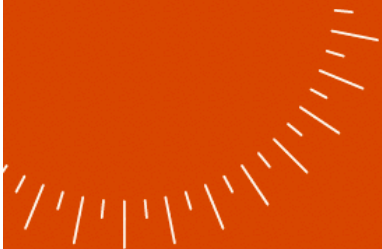
Etapa 5: Elaboração de um Poster Científico

- **Objetivo:** Elaborar um poster científico para apresentar no "Dia D".
- Página web: [Recomendações para elaborar um poster científico](#)

Etapa 6: Eleição do canteiro vencedor

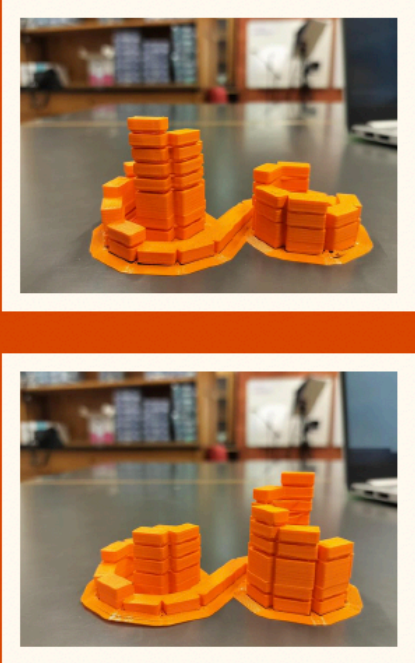
- **Objetivo:** Eleger o canteiro que a turma vai construir.
- Cada aluno deve votar apenas uma vez num grupo.
- **Na votação**, deves ter em conta os seguintes aspetos:
 - **Viabilidade de Construção:** O projeto é possível de ser construído com os materiais e o tempo que temos?
 - **Uso da Matemática:** Existe uma aplicação correta das progressões aritméticas e/ou geométricas?
 - **Sustentabilidade:** O projeto ajuda a economizar recursos, como água e espaço? É sustentável?
 - **Criatividade:** O projeto é original e inovador?

Anexo 12: Poster científico do Canteiro em Espiral



CANTEIRO TRABALHO DAC - MAT





(Imagem gerada por suporte de IA)



Total de tijolos: 79

2 Progressões Aritméticas

1º Espiral

- Termo geral: $2n+1$ Razão: 2 (conjunto das duas colunas)

2º Espiral

- Termo geral: $n+1$ Razão: 1 (cada coluna)

Canteiro em espiral

Progressões aritmética

Altura:

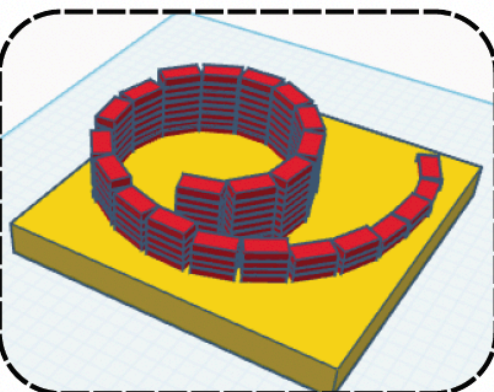
$$\bullet \text{ } u_n = n, 1 \leq n \leq 8$$

Comprimento da curva:

$$\bullet \text{ } u_n = 25 - 2n, 1 \leq n \leq 8$$

Número de tijolos

$$S_8 = \frac{u_1 + u_8}{2} \times 8 = 128 \text{ tijolos}$$



Materiais:

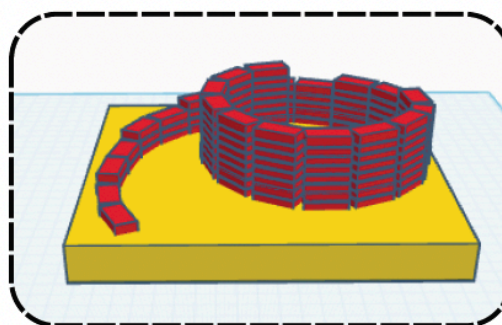
- 7 sacos de 45 litros
- 128 tijolos

Flores para os insetos:

- Calendola
- Capuchinha
- Manjeriço
- Mini Margaridas
- Alfazemas

Estrutura

- Estrutura: em espiral circular;
- Altura: 80 cm
- Diâmetro do centro: 80 cm
- Voltas: 1
- Largura volta: 80 cm
- Organização do espaço: Umas a seguir às outras.



Anexo 13: Construção do Canteiro em Espiral



Anexo 14: Teste de avaliação sumativa – 11.º ano

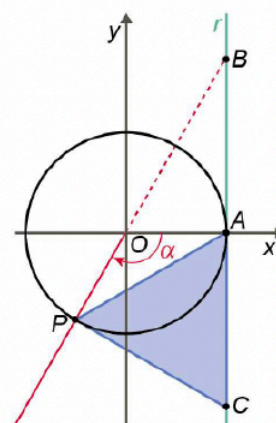
11.º ANO – MATEMÁTICA A									
3.º TESTE									
Nome: _____	Avaliação do desempenho por áreas de competência <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; margin-top: 10px;"> <thead> <tr style="background-color: #d3d3d3;"> <th style="width: 25%;">CP</th> <th style="width: 25%;">RP</th> <th style="width: 25%;">RM</th> <th style="width: 25%;">CM</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="height: 40px;"></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table> CP: conhecimentos e procedimentos RP: resolução de problemas RM: raciocínio matemático CM: comunicação matemática	CP	RP	RM	CM				
CP	RP	RM	CM						
Turma: _____	A professora: _____								
Data: _____									

Atenção: Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exato**. Na resposta a cada uma das questões, apresente todos os cálculos que efetuar e todas as justificações necessárias.

1. Na figura está representada, num referencial o. n. Oxy , a circunferência de centro na origem e raio 3. Sabe-se que:

- P é um ponto móvel que pertence à circunferência;
- a reta r é tangente à circunferência no ponto $A(3,0)$;
- o ponto B é o ponto de interseção da reta OP com a reta r ;
- o ponto C é tal que A é o ponto médio de $[BC]$.

Para cada posição do ponto P , seja α a amplitude do ângulo orientado, de sentido negativo, com lado origem o semieixo positivo Ox e lado extremidade a semirreta $\vec{OP}$, com $\alpha \in]-\pi, -\frac{\pi}{2}[$.



- 1.1. Mostre que a área do triângulo $[APC]$ é dada, em função de α , pela expressão:

$$A(\alpha) = \frac{9}{2} (\tan(\alpha) - \sec(\alpha))$$

- 1.2. Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, determine o valor de α , em radianos, arredondado às centésimas, para o qual a medida da área do triângulo $[APC]$ é igual a metade do perímetro da circunferência. Na sua resolução deve apresentar:

- uma equação que traduza o problema;
- num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões), visualizado(s) na calculadora, que permite(m) resolver a equação, incluindo a janela de visualização;
- a resposta com o arredondamento indicado.

2. Seja $x \in]0, 2\pi[$ tal que $\cos(\pi + \alpha) > 0$ e $\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) > 0$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- (A) $\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) > 0$ (B) $\sin(\pi + \alpha) < 0$ (C) $\tan(\pi + \alpha) > 0$ (D) $\tan(\pi + \alpha) < 0$

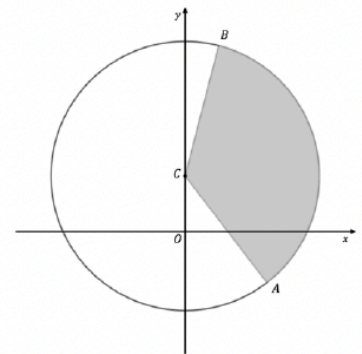
3. Na figura está representada, num referencial o. n. Oxy , a circunferência de centro C e equação $x^2 + (y - 2)^2 = 25$. Sabe-se que A e B são dois pontos da circunferência e que a área da região sombreada é $\frac{25\pi}{3}$.

3.1. Qual é o valor do produto escalar $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$?

- (A) $-\frac{25}{2}$ (B) $\frac{25}{2}$ (C) $\frac{125}{2}$ (D) $-\frac{125}{2}$

3.2. Seja r a reta tangente à circunferência no ponto A de coordenadas $(3, -2)$.

Determine, em graus, arredondado às décimas, a inclinação da reta r .



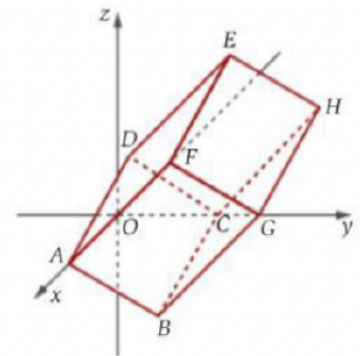
4. Na figura está representado, num referencial o. n. $Oxyz$, o paralelepípedo $[ABCDEFGH]$. Sabe-se que:

- o ponto C pertence ao eixo Oy ;
- o ponto D tem coordenadas $(1, 1, 3)$;
- uma equação do plano ADE é $x - 4y + 3z = 6$.

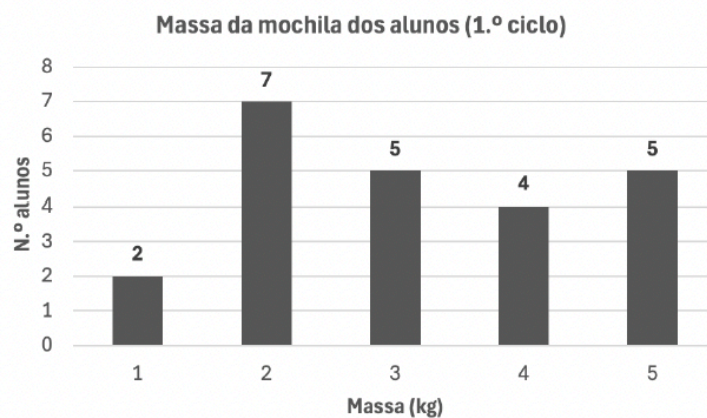
4.1. Mostre que as coordenadas do ponto C são $(0, 5, 0)$.

4.2. Determine uma equação cartesiana do plano BGH .

4.3. Determine, recorrendo ao produto escalar, a equação do plano medidor do segmento de reta $[CD]$.



5. A Organização Mundial da Saúde recomenda que as crianças e jovens em idade escolar (6 aos 18 anos) carreguem mochilas com menos de 10% da massa do seu corpo. No gráfico de barras estão representados os dados relativos à massa, em quilogramas, transportada na mochila por uma amostra de alunos do 1.º Ciclo.



Determine o valor do percentil 75 e interprete o resultado no contexto do problema.

6. Registaram-se as temperaturas máximas diárias, em graus Celsius, em Lisboa durante 13 dias consecutivos do mês de julho do ano transato.

24	22	23	33	40	37	35	33	34	35	34	33	33
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

Qual das afirmações é verdadeira?

- (A) A amplitude dos dados registados é igual a 9°C .
 (B) A amplitude interquartil é igual a $6,5^{\circ}\text{C}$.
 (C) A diferença entre a amplitude e a amplitude interquartil é igual a 3°C .
 (D) 50% das temperaturas são inferiores a 33°C .

7. Seja a um número real. Considere a sucessão (v_n) definida por:

$$\begin{cases} v_1 = a \\ v_{n+1} = -3v_n + 5n, \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Sabe-se que o terceiro termo da sucessão (v_n) é 31. Qual é o valor de a ?

- (A) 46 (B) $\frac{46}{9}$ (C) 16 (D) $-\frac{16}{3}$

8. Considere a sucessão (u_n) definida por:

$$u_n = \frac{1 - 2n}{2n + 3}$$

- 8.1. Averigue se $-\frac{29}{33}$ é termo da sucessão (u_n) e, em caso afirmativo, indique a respetiva ordem.

- 8.2. Estude a monotonia da sucessão (u_n) .

- 8.3. Mostre que a sucessão (u_n) é limitada.

9. Relativamente à sucessão (a_n) de termo geral $a_n = \frac{(-1)^n n}{n+1}$ qual das afirmações é verdadeira?

- (A) A sucessão (a_n) é monótona e limitada.
 (B) A sucessão (a_n) é monótona não limitada.
 (C) A sucessão (a_n) não é monótona, mas é limitada.
 (D) A sucessão (a_n) não é monótona nem limitada.

FIM

Questão	1.1.	1.2.	2.	3.1.	3.2.	4.1.	4.2.	4.3.	5.	6.	7.	8.1.	8.2.	8.3.	9.
Área de Competência	RP+RM	RP+CM	CM	CP	CP+RM	RP+CM	RM+CM	CP+CM	CP+CM	RM	RP	RP+CM	CP+CM	RM+CM	CP

Anexo 15: Ficha de Revisões – Geometria Analítica 10.º ano

11.º ANO - MATEMÁTICA A FICHA REVISÃO SOBRE GEOMETRIA ANALÍTICA 10º ANO

1. Considere, num plano munido de um referencial ortonormado, os pontos $A(-3, 2)$, $B(4, -2)$ e $C(-2, 5)$.

1.1. Escreva uma condição cartesiana que defina:

- a) a reta perpendicular ao eixo Ox que passa pelo ponto B ;
- b) o conjunto de pontos do plano que estão à mesma distância de A e de C ;
- c) o conjunto de pontos do plano que distam do ponto C quatro ou menos unidades.

1.2. Determine uma equação da circunferência de diâmetro $[AB]$.

2. Num plano munido de um referencial ortonormado, considere os pontos $A(1, 2)$, $B(-3, -1)$ e $C\left(\frac{5}{2}, 0\right)$.

2.1. Determine o valor exato do perímetro do triângulo $[ABC]$.

2.2. Admita que $[ABCD]$ é um paralelogramo.

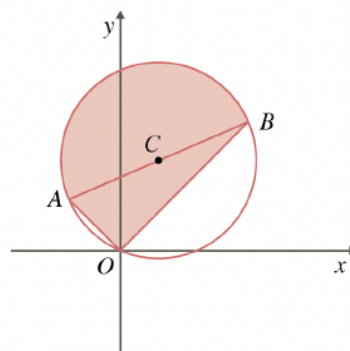
Determine as coordenadas do ponto D , sabendo que pertence ao primeiro quadrante.

2.3. Determine a equação reduzida da mediatriz do segmento de reta $[AB]$.

3. Na figura está representada, num referencial ortonormado Oxy , a circunferência de centro C .

Sabe-se que:

- a circunferência passa pela origem do referencial;
- $[AB]$ é um diâmetro da circunferência;
- $A(-2, 2)$ e $B(5, 5)$.



3.1. Escreva a equação reduzida da circunferência.

3.2. Determine a área do triângulo $[OAB]$, começando por justificar que este triângulo é retângulo em O .

3.3. Defina, por meio de uma condição, a região sombreada da figura.

4. Num referencial ortonormado Oxy , considere os pontos $A(-3, 2)$ e $B(-1, 4)$ e os vetores $\vec{u}(-2, 4)$ e $\vec{v}(4, -3)$.

4.1. Determine as coordenadas do ponto P tal que $\overrightarrow{BA} - \vec{u} = P + 2\vec{v}$.

4.2. Determine as coordenadas do vetor $\vec{w}$, colinear com $\vec{u}$ e de sentido contrário ao de $\vec{u}$, com norma $4\sqrt{5}$.

4.3. Determine $\|2\vec{u} + \vec{v}\|$.

5. Na figura está representado, num referencial ortonormado $Oxyz$, o paralelogramo $[PQRS]$.

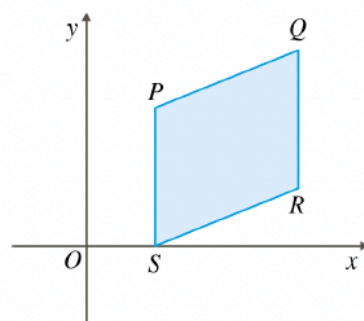
Sabe-se que:

■ $\overrightarrow{RS}(-4, -3)$

■ $P(2, 4)$

5.1. Determine as coordenadas do ponto Q .

5.2. Determine a equação reduzida da reta PQ .



6. Na figura está representado o cubo $[ABCDEFGH]$.

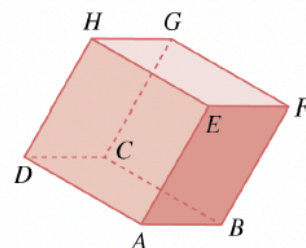
Sabe-se que, fixado um referencial ortonormado $Oxyz$:

■ $\overrightarrow{AF}(-4, 0, 4)$

■ $G(-2, -2, 4)$

6.1. Determine uma equação da superfície esférica de centro no ponto G e que passa por D .

6.2. Escreva uma equação da reta t que passa por G e é paralela ao eixo Ox .



7. Fixado um referencial ortonormado no espaço, considere os seguintes pontos:

$$A(-2, 1, 4), B(0, -3, -1) \text{ e } C(1, 5, -2)$$

7.1. Determine um sistema de equações paramétricas da reta AB .

7.2. Determine uma equação vetorial da reta t paralela à reta BC e que passa pelo ponto A .

Bom trabalho!!

Anexo 16: Ficha de Trabalho – Trigonometria e Geometria Analítica

11.º ANO - MATEMÁTICA A FICHA DE TRIGONOMETRIA E GEOMETRIA ANALÍTICA

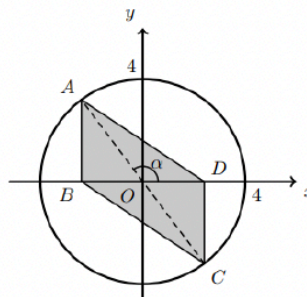
Trigonometria

1. Na figura ao lado, estão representados, em referencial o.n. Oxy , o quadrilátero $[ABCD]$ e a circunferência de centro em O e raio 4.

Sabe-se que:

- o segmento de reta $[AC]$ é um diâmetro da circunferência;
- α é a inclinação, em radianos, da reta AC ($\alpha \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$);
- o ponto B pertence ao semieixo negativo Ox , e o ponto D pertence ao semieixo positivo Ox ;
- as retas AB e CD são paralelas ao eixo Oy .

Mostre que a área do quadrilátero $[ABCD]$ é dada pela expressão $-32 \sin \alpha \cos \alpha$.



Exame – 2024, Ép. especial (adaptado)

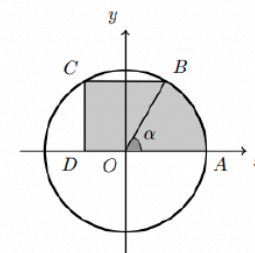
2. Na figura ao lado, estão representadas, em referencial o.n. Oxy , a circunferência de centro em O e raio 2 e uma região sombreada composta pelo trapézio $[OBCD]$, retângulo em C e em D , e pelo sector circular correspondente ao ângulo orientado AOB , de amplitude α , em radianos, com $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$, e raio $\overline{OA}$.

Sabe-se que:

- o ponto A pertence à circunferência e ao semieixo positivo Ox ;
- os pontos B e C pertencem à circunferência, sendo C o simétrico de B , em relação ao eixo Oy .

Mostre que a área da região sombreada é dada, em função de α , pela expressão

$$2\alpha + 6 \sin \alpha \cos \alpha$$



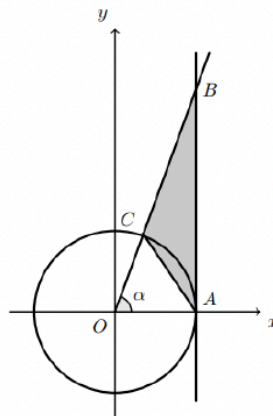
Exame – 2024, 1.ª Fase (adaptado)

3. Na figura ao lado, estão representados, em referencial o.n. Oxy , a circunferência trigonométrica, o triângulo $[ABC]$ e a reta de equação $x = 1$.

Sabe-se que:

- o ponto A tem coordenadas $(1,0)$;
- o ponto B pertence à reta de equação $x = 1$;
- C é o ponto de intersecção da semirreta $\overrightarrow{OB}$ com a circunferência trigonométrica;
- $\angle AOB = \alpha$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ e $\cos \alpha = \frac{1}{3}$.

Determine a área do triângulo $[ABC]$.



Exame – 2023, Ép. especial

4. Sabe-se que $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{5}$ e que $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$

Determine, sem recorrer à calculadora, o valor de $\tan(\pi - \alpha) + 2 \cos\left(-\frac{7\pi}{2} + \alpha\right)$

Apresente o resultado na forma $\frac{a\sqrt{b}}{c}$, $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$ e $c \in \mathbb{N}$

Exame – 2021, 2.ª Fase

5. Qual é a solução da equação $2 \cos x + 1 = 0$ no intervalo $[-\pi, 0]$?

- (A) $-\frac{5\pi}{6}$ (B) $-\frac{2\pi}{3}$ (C) $-\frac{\pi}{3}$ (D) $-\frac{2\pi}{6}$

Exame – 2019, 1.ª Fase

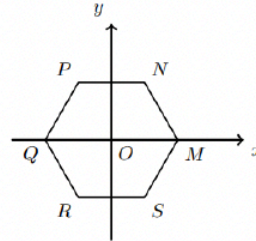
Geometria Analítica

6. Na figura ao lado, está representado, num referencial o.n. xOy , um hexágono regular $[MNPQRS]$ centrado na origem.

Sabe-se que o vértice M tem coordenadas $(1,0)$, e que o vértice N pertence ao primeiro quadrante.

Qual é a equação reduzida da reta MN ?

- (A) $y = -\sqrt{3}x + \sqrt{3}$ (B) $y = -\sqrt{3}x + \sqrt{6}$
(C) $y = -x + 2$ (D) $y = -x + 1$



Exame – 2020, Ép. especial

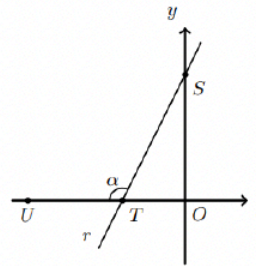
7. Na figura ao lado, estão representados, num referencial o.n. xOy , os pontos S , T e U e a reta r de equação $y = 2x + 4$

Sabe-se que:

- os pontos S e T são, respetivamente, os pontos de intersecção da reta r com os eixos Oy e Ox
- o ponto U pertence ao eixo Ox e tem abscissa inferior à do ponto T

Qual dos valores seguintes é o valor, aproximado às centésimas, da amplitude, em radianos, do ângulo STU ?

- (A) 4,25 (B) 2,68 (C) 2,03 (D) 1,82



Exame – 2020, 1.ª Fase

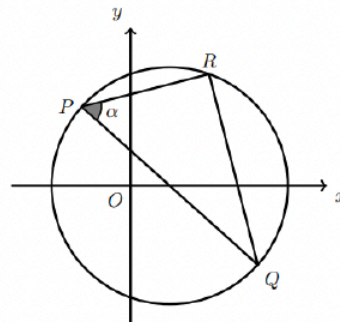
8. Na figura ao lado, estão representados, em referencial o.n. Oxy , a circunferência de equação $(x-1)^2 + y^2 = 9$ e o triângulo $[PQR]$, inscrito na circunferência.

Seja α a amplitude, em radianos, do ângulo QPR .

Sabe-se que:

- $[PQ]$ é um diâmetro da circunferência;
- $\vec{QR} \cdot \vec{QP} = 27$.

Determine o valor de α .



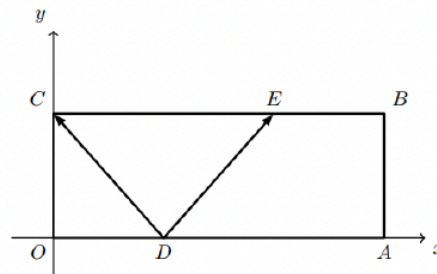
Exame – 2024, 2.ª Fase

9. Na figura seguinte, está representado, em referencial o.n. Oxy , o retângulo $[OABC]$.

Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao semieixo positivo Ox ;
- o ponto C pertence ao semieixo positivo Oy ;
- o ponto D pertence ao segmento de reta $[OA]$;
- o ponto E pertence ao segmento de reta $[CB]$;
- $\vec{EB} = \vec{OD} = \frac{\vec{OA}}{3}$;
- $\vec{OC} = \frac{\vec{OA}}{4}$;
- $\vec{DC} \cdot \vec{DE} = -7$.

Determine $\vec{OA}$.



Exame – 2023, 2.ª Fase

11.º ANO - MATEMÁTICA A
FICHA DE TRIGONOMETRIA E GEOMETRIA ANALÍTICA

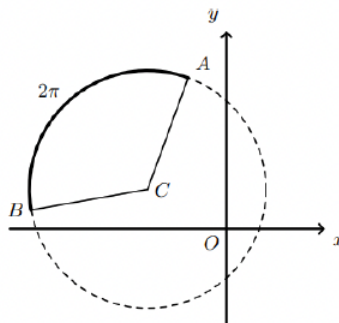
10. Na figura ao lado, está representada, em referencial o.n. Oxy , a circunferência de equação $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$.

O ponto C é o centro da circunferência.

A e B são dois pontos da circunferência.

O arco de circunferência AB tem comprimento 2π .

Determine o valor do produto escalar $\vec{CA} \cdot \vec{CB}$.



Exame – 2022, 1.ª Fase

11. Considere, num referencial o.n. xOy , dois pontos distintos, R e S

Seja A o conjunto dos pontos P desse plano que verificam a condição $\vec{PR} \cdot \vec{PS} = 0$ ($\vec{PR} \cdot \vec{PS}$ designa o produto escalar de $\vec{PR}$ por $\vec{PS}$).

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- (A) O conjunto A é a mediatriz do segmento de reta $[RS]$
(B) O conjunto A é o segmento de reta $[RS]$
(C) O conjunto A é o triângulo $[ROS]$
(D) O conjunto A é a circunferência de diâmetro $[RS]$

Exame – 2017, Ép. especial

12. Considere, num referencial o.n. xOy , a circunferência centrada na origem do referencial e que passa no ponto $A(2,1)$

Seja r a reta tangente à circunferência no ponto A

Qual é a ordenada na origem da reta r ?

- (A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7

Exame – 2018, 2.ª Fase

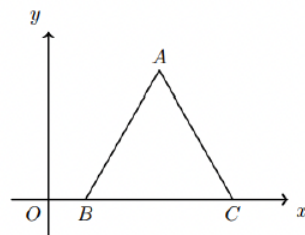
13. Na figura seguinte, está representado, num referencial o.n. xOy , um triângulo equilátero $[ABC]$

Sabe-se que:

- o ponto A tem ordenada positiva;
- os pontos B e C pertencem ao eixo Ox
- o ponto B tem abcissa 1 e o ponto C tem abcissa maior do que 1

Qual é a equação reduzida da reta AB ?

- (A) $y = \sqrt{2}x - \sqrt{2}$ (B) $y = \sqrt{2}x + \sqrt{2}$
(C) $y = \sqrt{3}x + \sqrt{3}$ (D) $y = \sqrt{3}x - \sqrt{3}$



Exame – 2015, 1.ª Fase

14. Num referencial o.n. xOy , considere a circunferência definida por $x^2 + y^2 = 5$

A reta r é tangente à circunferência no ponto de coordenadas $(1,2)$

Qual é o declive da reta r ?

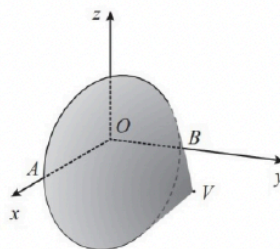
- (A) -2 (B) $-\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 2

Teste Intermédio 11.º ano – 09.02.2012

15. Na figura ao lado, está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, um cone reto de vértice V .

Sabe-se que:

- a base do cone intersecta o semieixo positivo Ox no ponto A e o semieixo positivo Oy no ponto B ;
- o segmento de reta $[AB]$ é um diâmetro da base do cone;
- a base do cone está contida no plano definido pela equação $x + 2y - 8 = 0$;
- a abscissa do ponto V tem menos uma unidade do que a sua ordenada.



- 15.1. Qual das seguintes equações define um plano paralelo ao plano que contém a base do cone e que passa no ponto de coordenadas $(1, -3, 5)$?

- (A) $-2x + y + 5 = 0$ (B) $x + 2y - 10 = 0$
(C) $x + 2y + 5 = 0$ (D) $x - 3y + 5 = 0$

- 15.2. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Determine as coordenadas do ponto V .

16. Na figura ao lado, está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, o prisma reto $[ABCDEFGH]$, de bases $[ABCD]$ e $[EFGH]$.

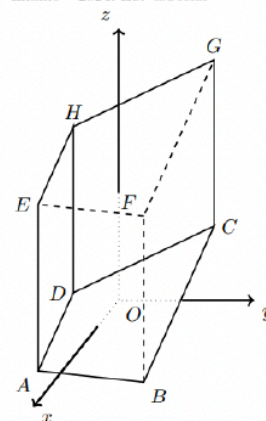
Sabe-se que:

- as bases do prisma são trapézios retângulos;
- o ponto A tem coordenadas $(4, -4, -3)$, e o ponto B tem a ordenada igual ao dobro da abscissa;
- uma equação da reta BC é $(x, y, z) = (3, 5, 1) + k(2, 3, 6)$, $k \in \mathbb{R}$.

Qual das equações seguintes é uma equação do plano ABF ?

- (A) $2x + 3y + 6z + 22 = 0$ (B) $2x + 3y + 6z - 20 = 0$
(C) $3x - 2y - 20 = 0$ (D) $3x - 2y - 22 = 0$

Exame - 2024, Ép. especial

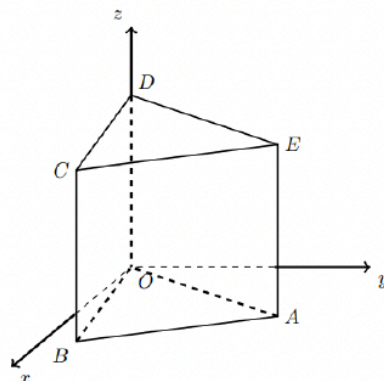


Exame - 2024, 1.ª Fase

17. Na figura ao lado, está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, o prisma triangular reto $[ABCDE]$, de bases $[OAB]$ e $[CDE]$.

Sabe-se que:

- as coordenadas do ponto A são $(2\sqrt{3}, 6, 0)$;
- o ponto B pertence ao plano medidor do segmento de reta $[OA]$;
- a reta AB é definida pela equação vetorial $(x, y, z) = (0, 16, 0) + k(\sqrt{3}, -5, 0)$, $k \in \mathbb{R}$;
- o ponto D pertence ao eixo Oz e tem cota 5.



- 17.1. Qual das seguintes equações define o plano que passa no ponto A e é perpendicular ao eixo Ox ?

- (A) $z = 0$ (B) $y = 6$ (C) $x = 2\sqrt{3}$ (D) $x + y + z = 0$

- 17.2. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Determine o volume do prisma $[ABCDE]$.

Exame - 2023, Ép. especial

Anexo 17: Ficha de Trabalho – Estatística

11.º ANO - MATEMÁTICA A FICHA DE TRABALHO

JANEIRO 2025

TEMA – Estatística Dados Univariados

1. No âmbito de um estudo realizado, com o objetivo de caracterizar o consumo de peixe por camadas mais jovens, foi feito um estudo aos alunos do 2.º Ciclo de uma determinada escola do país. Desta forma, inquiriram-se 80 crianças acerca do número de dias, por semana, em que habitualmente consomem peixe.

Os resultados obtidos encontram-se na tabela.

Número de dias	Número de alunos
0	6
1	20
2	15
3	12
4	9
5	8
6	6
7	4

- 1.1 Identifique a variável estatística em estudo e classifique-a.

- 1.2 Construa a respetiva tabela de frequências absolutas acumuladas, relativas e relativas acumuladas.

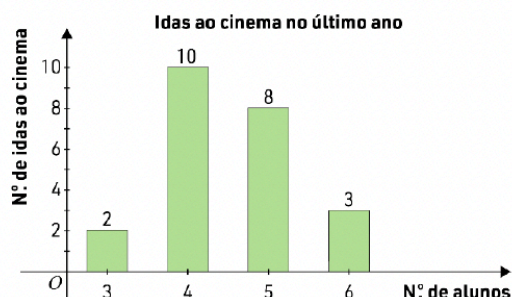
- 1.3 Quantos alunos comem peixe, pelo menos, 2 vezes por semana?

- 1.4 Que percentagem de alunos come peixe, no máximo, 1 vez por semana?

2. Uma turma do 12.º ano de uma certa escola é constituída por vinte e três alunos.

Foi-lhes perguntado o número de vezes que foram ao cinema no último ano.

As respostas obtidas encontram-se representadas no gráfico de barras.



- 2.1 Indique a variável estatística em estudo e classifique-a.

- 2.2 Construa a respetiva tabela de frequências absolutas, absolutas acumuladas, relativas e relativas acumuladas.

Nota: Nas aproximações utilize duas casas decimais.

3. Uma determinada equipa da Faculdade de Motricidade Humana efetuou um estudo acerca do número de minutos que, em média e por semana, os seus estudantes dedicavam à prática de atividade física.

Foram inquiridos 500 alunos e os dados recolhidos encontram-se na seguinte tabela.

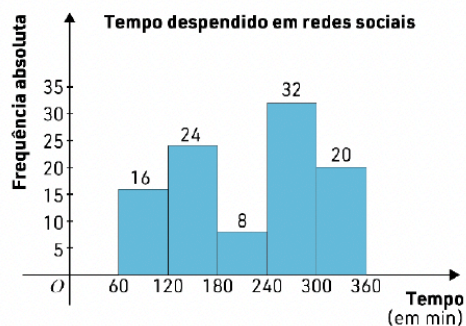
Tempo dedicado à prática de atividade física

Tempo (em minutos)	Número de estudantes	Frequência relativa	Frequência relativa acumulada
[0; 60[	20		
[60; 120[	120		
[120; 180[	80		
[180; 240[	120		
[240; 300[	90		
[300; 360[	60		
[360; 420[	10		

Complete a tabela.

4. Relativamente a 100 alunos de uma escola secundária, foi realizado um estudo acerca do tempo, em minutos, despendido por estes em redes sociais, numa semana.

Os resultados encontram-se representados no histograma.



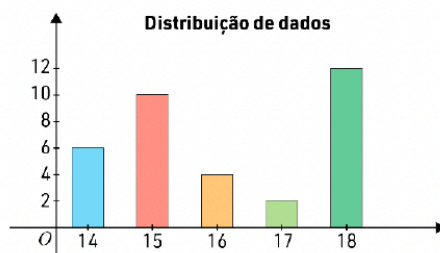
- 4.1 Construa a respetiva tabela de frequências absolutas e relativas.
- 4.2 De entre os inquiridos, quantos alunos despendem menos de 3 horas por semana em redes sociais?
- 4.3 Que percentagem destes alunos despende, pelo menos, 4 horas por semana em redes sociais?

5. Considere o seguinte conjunto de dados.

21	16	22	21	16	14	24	26	18	15	14	22	16	24	17	17	20
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

- 5.1 Determine a média, a moda e a mediana deste conjunto de dados.
- 5.2 Duplique o valor de cada um dos dados iniciais e calcule a média dos dados obtidos. Que relação existe com a média obtida na alínea anterior?
- 5.3 Adicione 3 a cada um dos dados iniciais e calcule a média dos dados obtidos. Que relação existe com a média obtida na alínea anterior?
- 5.4 Suponha que ao conjunto de dados inicial é adicionado mais um dado: 100
Determine a média, a moda e a mediana deste novo conjunto de dados e compare com os resultados obtidos na alínea 1.1. Que conclusões é possível retirar?

6. Considere a seguinte representação gráfica de um conjunto de dados.



Determine a moda, a média, aproximada às décimas, e a mediana deste conjunto de dados.

7. Considere o conjunto de dados, relativo às idades dos espetadores de um concerto.

Idades	30	44	48	49	53	55	56	57	65
Número de espetadores	20	5	3	6	12	14	16	8	4

- 7.1 Construa a respetiva tabela de frequências relativas e relativas acumuladas. Apresente os valores com aproximação às milésimas.
- 7.2 Indique a moda do conjunto de dados apresentado.
- 7.3 Indique a mediana do conjunto de dados apresentado.
- 7.4 Determine a idade média dos espetadores da amostra. Apresente o resultado obtido aproximado às décimas.

8. Após efetuarem o exame de Matemática A, perguntou-se aos alunos de uma escola secundária quantas provas-modelo de Matemática A resolveram, como forma de se prepararem para o exame realizado.

As respostas obtidas encontram-se registadas na tabela.

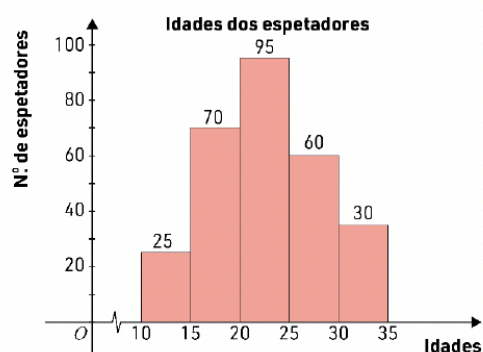
Número de provas	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Número de alunos	13	15	14	20	18	10	25	15	10

8.1 Determine o número médio de provas realizadas por estes alunos.

8.2 Calcule todos os desvios dos dados em relação à média.

8.3 Calcule a soma de todos os desvios dos dados em relação à média.

9. O histograma representa a distribuição de idades dos 280 espetadores, na estreia de um novo filme de ação.



9.1 Construa a respetiva tabela de frequências absolutas, relativas e relativas acumuladas.

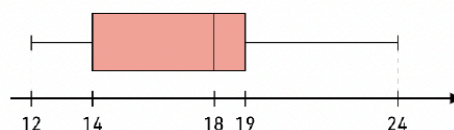
Apresente as frequências relativas e relativas acumuladas com aproximação às centésimas.

9.2 Indique, caso exista, a classe modal.

9.3 Determine a classe mediana.

9.4 Calcule um valor aproximado para a média das idades dos espetadores da estreia do filme.

10. O diagrama de extremos e quartis da figura representa um certo conjunto de dados.



Relativamente ao conjunto de dados:

10.1 indique o valor mínimo e o valor máximo;

10.2 indique o 1.º, o 2.º e o 3.º quartis;

10.3 determine a amplitude;

10.4 determine a amplitude interquartil.

11. Os dados seguintes referem-se ao número de filhos de cada um dos 24 funcionários de uma empresa.

0	3	2	3	4	2	1	2	1	2	0	1
2	4	3	1	0	2	0	3	2	2	2	3

11.1 Determine os percentis 50, 25 e 75.

11.2 Determine a amplitude e a amplitude interquartil deste conjunto de dados.

12. Considere o seguinte conjunto de dados, relativo às idades de uma amostra constituída por jovens que participaram num evento solidário.

Idades	14	15	16	17	18	19	20
Número de jovens	32	25	24	40	28	20	12

12.1 Determine a idade média dos jovens da amostra.

Apresente o resultado com uma casa decimal.

12.2 Determine o percentil 75 e refira o seu significado no contexto da situação apresentada.

12.3 Construa o diagrama de extremos e quartis.

13. Os dados seguintes referem-se à classificação obtida por 12 alunos de uma escola secundária, no final do período, à disciplina de Matemática A.

17	16	16	17	18	19	12	20	14	15	15	19
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

- 13.1 Determine os percentis 50, 25 e 75.
- 13.2 Determine a amplitude e a amplitude interquartil deste conjunto de dados.
- 13.3 Construa o diagrama de extremos e quartis correspondente a esta distribuição.
- 13.4 Calcule a média desta amostra.
- 13.5 Determine a variância deste conjunto de dados, com aproximação às décimas.
- 13.6 Determine o desvio-padrão deste conjunto de dados, com aproximação às décimas.

14. Efetuou-se um estudo acerca das temperaturas médias, em °C, que se fizeram sentir às 12 horas, em três cidades da zona Norte, durante o mês de setembro.

Na tabela seguinte encontra-se uma amostra, para cada uma das cidades, em 10 dias consecutivos, dos dados obtidos.

Temperaturas (°C)										
Cidade A	14	16	13	17	15	17	16	16	12	16
Cidade B	18	16	20	19	19	15	17	16	18	18
Cidade C	14	14	15	13	13	16	12	13	16	15

- 14.1 Para cada uma das amostras, determine:

- a) a média, a moda e a mediana;
- b) o Q_1 , o Q_2 e o Q_3 .

- 14.2 Para cada uma das amostras, determine:

- a) a soma dos quadrados dos desvios em relação à média;
- b) a variância;
- c) o desvio-padrão.

Anexo 18: Ficha de Trabalho – Sucessões

11.º ANO - MATEMÁTICA A FICHA DE TRABALHO - SUCESSÕES

Limites de Sucessões:

1. Calcule o limite da sucessão (u_n) , sendo esta definida por:

1. $u_n = \frac{6-3n}{1+n}$

2. $u_n = \frac{4n+8}{3n-1}$

3. $u_n = \frac{-3n+2}{8}$

4. $u_n = \frac{4n-1}{-2n}$

5. $u_n = \frac{3}{n+1}$

6. $u_n = -8n+3$

7. $u_n = -7+2n$

8. $u_n = \frac{1+3n}{2}$

2. Relativamente a duas sucessões (u_n) e (v_n) , sabe-se que $\lim u_n = -\infty$ e $\lim v_n = 4$.

1. Escreva o termo geral de uma sucessão que possa representar:

a) (u_n)

b) (v_n)

2. Calcule os seguintes limites:

a) $\lim \left(\frac{3}{n} + v_n \right)$

b) $\lim \left(\frac{u_n}{2} \right)$

3. Considere as sucessões $u_n = \sqrt[3]{\frac{4+8n}{-n}}$ e $v_n = \left(\frac{4n}{2+n} \right)^{-\frac{1}{4}}$.

Prove que $\lim \left(\frac{u_n}{v_n} \right) = -2\sqrt{2}$.

4. Estuda, em cada caso, a sucessão (u_n) quanto à monotonia, sendo:

1. $u_n = \frac{3n-2}{n+1}$

2. $u_n = 3 - \frac{5}{n+2}$

3. $u_n = \frac{(-1)^n}{2n+3}$

4. $u_n = \frac{3n}{2n-1}$

5. Considera a sucessão (u_n) de termo geral $u_n = \frac{3n-1}{n+2}$.

1. Mostra que:
 - a) a sucessão é crescente;
 - b) a sucessão é limitada.

2. Calcula $\lim u_n$.

6. Considera as sucessões (u_n) , (v_n) e (w_n) tais que:

$$u_n = 2n^2 + 3n, \quad v_n = \frac{n}{n^3 + 2} \quad \text{e} \quad w_n = \frac{1-2n}{n+4}$$

Calcula:

1. $\lim (v_n + w_n)$
2. $\lim (u_n v_n)$
3. $\lim (u_n w_n)$

7. Calcule o limite de cada uma das sucessões.

1. $a_n = \frac{5-2n}{8n+3}$

2. $b_n = \frac{3-n}{\sqrt{2n+4}}$

3. $c_n = \frac{6+3n}{12n+12}$

4. $d_n = \frac{1-3n}{2}$

5. $e_n = \frac{6+n}{-3}$

6. $f_n = \frac{7}{6n-3}$

8. Considere as sucessões (a_n) , (b_n) , (c_n) e (d_n) definidas por:

$$a_n = \frac{2n}{n+5}, \quad b_n = \left(\frac{n+2}{2n}\right)^4, \quad c_n = \frac{2n}{n+5} - \frac{n}{n+1}, \quad d_n = -2 + n^{-2}$$

Calcule.

1. $\lim (a_n \times \sqrt[4]{b_n})$

2. $\lim (c_n - d_n)$

3. $\lim (3a_n - c_n)$

4. $\lim \frac{d_n}{\sqrt{2} a_n}$

5. $\lim \frac{d_n - b_n}{a_n \times c_n}$

6. $\lim \frac{\sqrt{b_n} - \sqrt[3]{c_n}}{\frac{1}{d}}$

9. Calcula o limite das sucessões cujo termo geral é:

1. $u_n = \frac{3n-5}{2n+1}$

2. $u_n = \frac{n^2-2n}{2n^2+3}$

3. $u_n = \frac{3n-2}{n^2+n}$

4. $u_n = \frac{4n^3+n^2-3n}{2n^3+n-1}$

5. $u_n = \sqrt{\frac{2n-1}{8n+3}}$

6. $u_n = \frac{\sqrt{n^2+2}}{3n-1}$

7. $u_n = \frac{n-2}{\sqrt{4n^2+1}}$

8. $u_n = \frac{\sqrt{2n+3}-\sqrt{n}}{n+3}$

9. $u_n = \frac{\sqrt{n^2+3n}-3n}{3n+1}$

10. Calcule o limite das sucessões cujo termo geral se indica, identificando o tipo de indeterminação encontrada.

1. $u_n = \frac{n+4}{3n-1}$

2. $u_n = \frac{n^3-2n}{n+4}$

3. $u_n = \frac{2n-3}{1-n^2}$

4. $u_n = \sqrt{2n+3}-\sqrt{n}$

5. $u_n = \sqrt{n^2+1}-n$

6. $u_n = \frac{n + \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{n+1}$

11. Considere a progressão geométrica (u_n) de razão $\frac{1}{2}$ e cujo primeiro termo é 3.

1. Determine uma expressão do termo geral da progressão geométrica.
2. Para $p \in \mathbb{N}$, determine uma expressão algébrica S_p , para a soma dos p primeiros termos desta sucessão.
3. Determine $\lim S_n$ e interprete o valor obtido.

12. Calcula:

1. $\lim (5^n - 3^n)$

2. $\lim \frac{2^n + 3^{n+1}}{2^{n+1} + 3^n}$

3. $\lim \left[\left(\frac{1}{\pi} \right)^n \times (3^n + 1) \right]$

4. $\lim \frac{2^{2n+1} - 3^n}{4^n}$

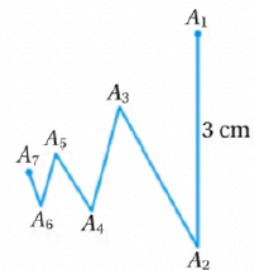
- 13.** Considera a progressão geométrica (u_n) definida por:

$$\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{2} \end{cases}$$

1. Determina o termo geral da progressão geométrica.
2. Seja S_n a soma dos n primeiros termos.
Calcula $\lim S_n$.

- 14.** Na linha poligonal da figura o primeiro segmento $[A_1A_2]$ mede 3 cm e cada um dos segmentos seguintes mede $\frac{2}{3}$ da medida do segmento anterior.

1. Determine a soma das medidas dos comprimentos dos segmentos desenhados na figura.
Apresente o resultado em centímetros.



2. Admita que os segmentos são desenhados indefinidamente.
Qual será a medida do comprimento da linha obtida quando o número de segmentos tende para $+\infty$?

- 15.** Calcule o limite das sucessões cujo termo geral se indica.

1. $u_n = \frac{5n^2 - 2}{3n + 10n^2}$

2. $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2n^2}{n+2}$

3. $u_n = \frac{\sqrt{n} + \sqrt[3]{n}}{1 - 2\sqrt{n}}$

4. $u_n = \frac{2n + n^2}{\sqrt[3]{n+n}}$

5. $u_n = \frac{\sqrt{2n^2 + 1}}{n}$

6. $u_n = \frac{-1 + n^2}{\sqrt{n+n}}$

- 16.** Considere as sucessões (u_n) e (v_n) definidas por:

$$u_n = n^2 + 3 \quad \text{e} \quad v_n = \begin{cases} 3 & \text{se } n \leq 2 \\ \frac{4 - 4n^3}{n} & \text{se } n > 2 \end{cases}$$

Calcule:

1. $v_2 \times (u_2)^2$

2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$

3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{v_n}{u_n} \right)$

17. Calcule $\lim(a_n + b_n)$, sendo $a_n = \frac{\sqrt{4n^2 + 9}}{n}$ e $b_n = 2^{n+3} - 5^n$.

18. Determine, se existirem, os limites das seguintes sucessões:

1. $u_n = n^2 - 3n^2$

2. $u_n = -1 + 10^3 n^4 - 10^2 n^5$

3. $u_n = 3(-1)^n \times \frac{5n}{n^2 + 3}$

4. $u_n = \frac{-6n - 3 + n^3}{4n^2 - n}$

5. $u_n = \sin(n\pi)$

6. $\sqrt[n]{4} + \sqrt{n^2 + 3n} - n$

7. $u_n = \sqrt[3]{\frac{27n^3 - n^2}{1 - n^3}}$

8. $u_n = 2^{\frac{1}{n}} + 3^n$

9. $u_n = \sqrt{3n^2 + n} - \sqrt{3}n$

10. $u_n = \frac{\sqrt{n^2 + n} - 4n}{6n - 1}$

19. Calcule o limite das sucessões cujo termo geral se indica, identificando o tipo de indeterminação encontrada.

1. $u_n = n^6 - 3n^4 + 2n^2 + n - 3$

2. $u_n = \sqrt{n^3 - n} + 2$

3. $u_n = \frac{3n^2 + 2n - 1}{n + 4}$

4. $u_n = \frac{-n^3 + n^2}{5 - 2n + n^3 - n^2}$

5. $u_n = \frac{3n^3 - n + 8}{2n - n^4 + 3}$

6. $u_n = \frac{2n^2}{n^2 + 1} - \frac{n^2}{n^2 - 1}$

7. $u_n = \sqrt{\frac{3 - 2n + 27n^2}{1 + 9n^2}}$

8. $u_n = \sqrt{\frac{n^4 + n^3 + n + 1}{4n^4 + n^2}}$

9. $u_n = \frac{2^n + 5^n}{5^n + 1 + 6^n}$

10. $u_n = \frac{4^{n+1} - 2^n + 1}{4^n + 3^n + 2}$

11. $u_n = \sqrt{n^2 + 3n + 2} - \sqrt{n^2 + 1}$

12. $u_n = \frac{1 + n^3}{\sqrt{n^6 + 1}}$

13. $u_n = \frac{3}{n^2 - 1} \times (n + 4n^2)$

14. $u_n = 4^{n+2} - 6^n$

15. $u_n = \frac{8^n + 4^{n+1}}{5^{n+2}}$

16. $u_n = \frac{n + 3}{\sqrt{2n^2 + 1} + 4n}$

17. $u_n = \frac{\sqrt{n^2 + 3}}{1 - 2n}$

18. $u_n = \frac{n + \sin^2(n)}{n^2 + 1}$

19. $u_n = \frac{n^2 + \sin n}{5n^2 + \cos n}$

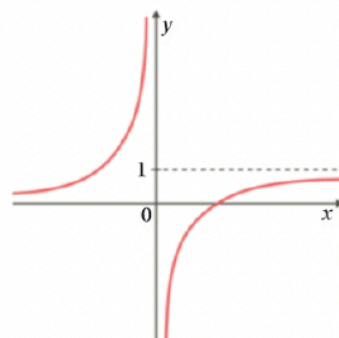
20. $u_n = 2\sqrt{n^2 + 1} - 3n$

Limites de Funções segundo Heine:

20. Na figura está representado o gráfico de uma função g de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e que tem como assíntotas as retas de equações $y = 1$, $y = 0$ e $x = 0$.

Escreva o termo geral de uma sucessão (u_n) :

- que seja convergente e tal que $g(u_n)$ também seja convergente;
- que seja convergente e tal que $g(u_n)$ seja divergente;
- que seja divergente e tal que $g(u_n)$ seja convergente.



11.º ANO - MATEMÁTICA A
FICHA DE TRABALHO - SUCESSÕES

- 21.** Na figura está representado parte do gráfico de uma função f de domínio $\mathbb{R} \setminus \{-4\}$.
As retas de equações $y = -1$, $y = 0$ e $x = -4$ são assíntotas ao gráfico de f .

Indique o valor dos limites seguintes.

1. $\lim_{x \rightarrow -4} f(x)$

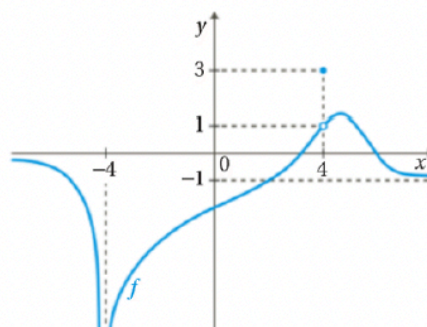
2. $\lim f(u_n)$, sendo $u_n = -4 - \frac{1}{n}$

3. $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$

4. $\lim f(v_n)$, sendo $v_n = 5^n$

5. $\lim f(w_n)$, sendo $w_n = \frac{1-4n}{n}$

6. $\lim f(t_n)$, sendo $t_n = 3 - n$



- 22.** O gráfico ao lado representa uma função f de domínio $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$.
Sabe-se que as retas de equações $y = 0$, $y = 1$, $x = 0$ e $x = -3$ são as assíntotas ao gráfico de f .

1. Indique o valor dos seguintes limites:

a) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

c) $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x)$

d) $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x)$

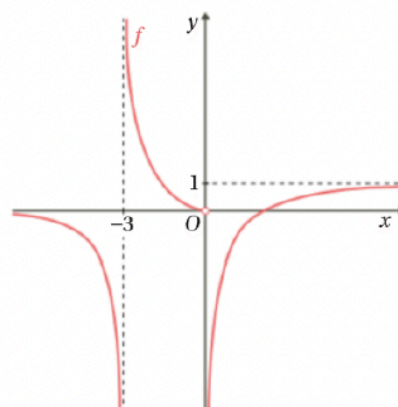
e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2. Escreva o termo geral de uma sucessão (u_n) que seja:

a) convergente e tal que $f(u_n)$ seja divergente;

b) divergente e tal que $f(u_n)$ seja convergente.



- 23.** No referencial ortogonal Oxy está representada a função f definida por $f(x) = \frac{2x-3}{x-1}$.

Sejam (u_n) , (v_n) , (w_n) e (s_n) tais que:

$$u_n = n^2 + n; v_n = 1 + \frac{1}{2n}; w_n = \frac{1-n^3}{n^2} \text{ e } s_n = \frac{2n-5}{2n}$$

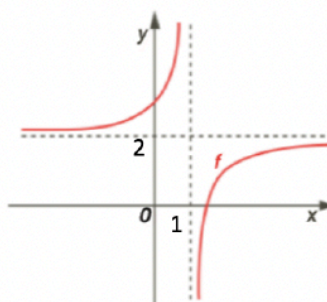
Determina:

1. $\lim f(u_n)$

3. $\lim f(w_n)$

2. $\lim f(v_n)$

4. $\lim f(s_n)$

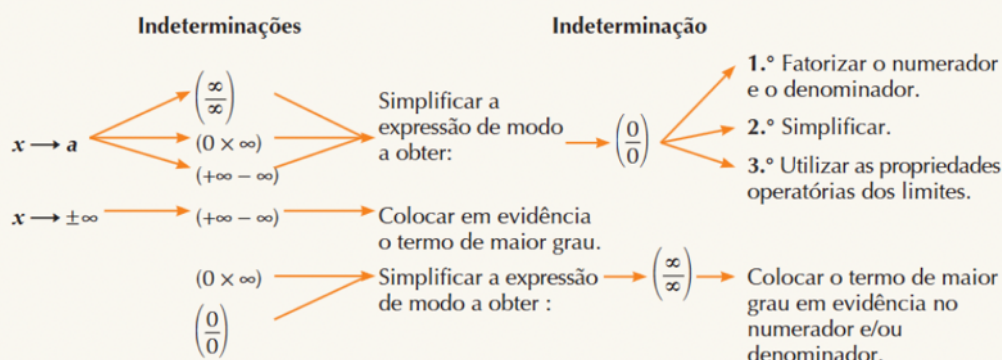


Anexo 19: Ficha de Trabalho – Limites de Funções

11.º ANO - MATEMÁTICA A FICHA DE TRABALHO - LIMITES DE FUNÇÕES

Indeterminações

- Envolvendo funções racionais



- Envolvendo funções irracionais

Estratégias comuns:

- Multiplicar o numerador e o denominador pela expressão conjugada do binómio onde se encontra a expressão irracional.
- Multiplicar o numerador e o denominador pela própria raiz envolvida.
- Colocar em evidência um fator de modo a obter um produto.

Exercícios:

1. Seja f a função de domínio $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ definida por $f(x) = 1 + \frac{1}{x+1}$. Recorrendo à definição de limite segundo Heine, prova que:

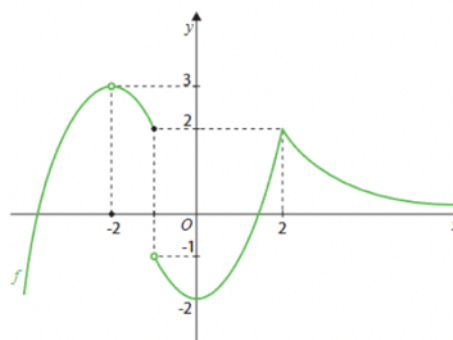
1. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{3}{2}$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

3. $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$

2. Na figura está representada parte do gráfico da função f . Determina:

1. $\lim f(a_n)$, sendo $a_n = \frac{2n+1}{n+2}$.
2. $\lim f(b_n)$, sendo $b_n = \frac{-n+1}{n+2}$.
3. $\lim f(c_n)$, sendo $c_n = \frac{-n-2}{n+1}$.
4. $\lim f(d_n)$, sendo $d_n = \frac{-2n+1}{n+2}$.
5. $\lim f(u_n)$, sendo $u_n = \frac{-n^2+1}{n+2}$.
6. $\lim f(v_n)$, sendo $v_n = \frac{n^2+1}{n+2}$.



3. Calcula os seguintes limites, começando por identificar, caso exista, o tipo de indeterminação.

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + x^2 + 2)$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1}$

3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 3x}{2(x-1)(x+1)}$

4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{x^2 - 4x + 3}$

5. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x} - x \right)$

6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x+2}}{\frac{2}{3x+1}}$

7. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 + 2x}{x+1} \times \frac{1}{3x} \right)$

8. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x-2|}{x^2 - 4}$

9. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 4}{|x-2|}$

10. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1})$

11. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{2x}$

12. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+3}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 2}}$

4. Calcula os seguintes limites, começando por identificar, caso exista, o tipo de indeterminação.

1. $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 2x + 1)$

2. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1}$

3. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + 2x + 1}{x}$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 2x^2 + x}{x}$

5. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x^2 - 1}$

6. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^4 - 1}$

7. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x} - 2}$

8. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x}$

9. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}$

10. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x-x}}{x^3 - x^2}$

11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x^2 + 1}}$

12. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{\sqrt{x-1} - \sqrt{x^2 - 1}}$

5. Seja f a função representada graficamente na figura. Determina os seguintes limites.

1. $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$

2. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

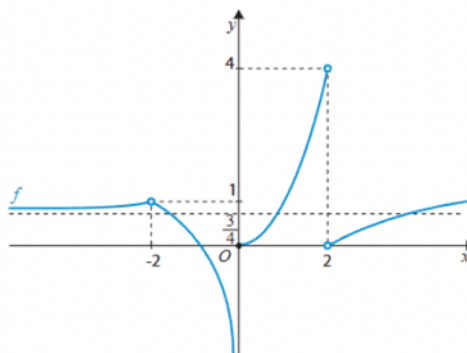
3. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$

4. $\lim_{x \rightarrow 2^+} [f(x)]^2$

5. $\lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt{f(x)}$

6. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$

7. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$



6. Para cada valor de k , a expressão seguinte define uma função de domínio $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x-2} + k & \text{se } x < 1 \\ 3 & \text{se } x = 1 \\ \frac{2x+1}{x} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Determina o valor de k , para o qual existe $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

Bom Trabalho!!

Anexo 20: Ficha de Trabalho – Funções Racionais

11.º ANO - MATEMÁTICA A FICHA DE TRABALHO - FUNÇÕES RACIONAIS

Funções racionais

Uma **função racional** é uma função real de variável real dada por uma expressão da forma $\frac{P(x)}{Q(x)}$, onde P e Q são polinómios.

Equações fracionárias

Em geral, para resolver analiticamente uma equação fracionária, seguem-se os seguintes passos:

1. Reduzir a equação fracionária à forma $\frac{A(x)}{B(x)} = 0$.
2. Escrever $\frac{A(x)}{B(x)} = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0 \wedge B(x) \neq 0$.
3. Resolver a condição obtida.
4. Apresentar o conjunto-solução.

Inequações fracionárias

Em geral, para resolver analiticamente uma inequação fracionária, seguem-se os seguintes passos:

1. Reduzir a inequação fracionária à forma $\frac{A(x)}{B(x)} > (\text{ou } \geq \text{ou } < \text{ou } \leq) 0$.
2. Estudar o sinal da fração $\frac{A(x)}{B(x)}$, recorrendo, por exemplo, a um quadro de sinais.
3. Apresentar sob a forma de condição os valores de x que satisfazem a inequação $\frac{A(x)}{B(x)} > (\text{ou } \geq \text{ou } < \text{ou } \leq) 0$.
4. Apresentar o conjunto-solução.

Exercícios:

- 1 Determina o domínio e os zeros e estuda o sinal de cada uma das funções cuja expressão analítica se indica abaixo.

1.1. $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1}$

1.2. $h(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 5x + 6}$

1.3. $i(x) = \frac{1}{(x-2)^2} - \frac{5}{x^2 - 4}$

1.4. $k(x) = \frac{x^3 - 1}{x + 1} + \frac{1}{x} - \frac{x^3 + 1}{x - 1}$

- 2 Resolve as seguintes equações.

2.1. $x + 3 = \frac{3}{x - 1}$

2.2. $\frac{x - 2}{2} + \frac{x + 1}{2 - x} = \frac{1}{4}$

2.3. $\frac{3}{x} - \frac{2}{x - 2} = -1$

2.4. $\frac{2}{x^2 + 2x} - \frac{1}{x} = \frac{x}{x + 2}$

2.5. $\frac{x}{x + 5} - \frac{x}{x - 2} = \frac{3}{x^2 + 3x - 10}$

2.6. $\frac{3}{x - 1} - \frac{10}{x^2 + 3x - 4} = \frac{x}{x + 4}$

- 3 Resolve as seguintes inequações.

3.1. $\frac{-2}{x^2 - 4} \leq 0$

3.2. $\frac{x - 1}{-2x + 1} \geq 0$

3.3. $\frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 - 5x + 6} \leq 0$

3.4. $\frac{x + 1}{2x + 1} < \frac{1}{x} + 2$

3.5. $\frac{3}{x} - \frac{2}{x - 2} \leq -1$

3.6. $1 - \frac{1}{x + 1} \geq \frac{4}{x^2 + x}$

Bom Trabalho!!

Anexo 21: Feedback disponibilizado via *Teams*

Refletir sondagem



Ambição

[Ver tendência](#)

Feedback

B *I* U

A tua resolução revela que dominas os conceitos fundamentais de Geometria Analítica do 10.º ano. A tua comunicação matemática escrita está muito melhor, **parabéns pelo teu esforço!**

No 1.1. b) deves rever os cálculos intermédios e no 3.3. a equação reduzida da reta AO.

Deves voltar a pensar no 6.2. para que eu o volte a analisar.

Continua a trabalhar!

Anexo 22: Reflexão sobre tarefa no *Teams*



Anexo 23: Plano de aula 9.º ano

Plano das 5ª e 6ª Aula dada de Matemática – 9.º 5

Professora estagiária Francisca Fernandes

08 de janeiro de 2025

TEMA: CASOS NOTÁVEIS DA MULTIPLICAÇÃO – DIFERENÇA DE QUADRADOS	
Sumário: Casos notáveis da multiplicação: diferença de quadrados. Resolução dos exercícios das páginas 130 e 131 do manual.	
Recursos do Professor: - Manual “Prisma 9” – Volume 1 - Computador com internet e projetor - Quadro e canetas - Tarefa “Caso Notável: Diferença de Quadrados” (Anexo A) - Quadrados de papel coloridos e tesouras - PowerPoint “Caso Notável: Diferença de Quadrados” (Anexo B) - Desafio: “O Ano Novo em Matemática!”: https://www.menti.com/altfksym37np	Recursos do Aluno: - Manual “Prisma 9” – Volume 1 - Papel, lápis, caneta e borracha - Telemóvel
Objetivos de Aprendizagem dos Alunos	
Objetivos Gerais: - Desenvolver o raciocínio e o pensamento matemático. - Fortalecer a comunicação matemática. - Desenvolver a capacidade de espírito crítico e de discussão de ideias.	Objetivos Específicos: - Aplicar a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição de monómios. - Generalizar o caso notável da multiplicação de binómios: diferença de quadrados. - Aplicar o caso notável da multiplicação de binómios: diferença de quadrados.
Ações a desenvolver com os Alunos: - Distribuir um exemplar da tarefa “Caso Notável: Diferença de Quadrados” a cada aluno e explicar brevemente a sua estrutura. - Realizar, em grupos de 2 ou 3 alunos, a tarefa “Caso Notável: Diferença de Quadrados”. - Projetar o PowerPoint “Diferença de quadrados” e promover a análise e discussão, em grupo turma, das conclusões obtidas na resolução da tarefa. - Generalizar o caso notável da diferença de quadrados. - Sistematizar alguns conceitos relacionados com a diferença de quadrados. - Transformar, em grupo turma, a expressão algébrica $(x - 4)(x + 4)$ num polinómio reduzido. - Resolver os exercícios: 2 da página 130; 1.4, 1.6, 1.8 e 5 da página 131 do manual. - Atribuir o T.P.C.: exercícios 1.4, 1.5 e 1.6 da página 144 do manual. - Resolver o desafio “O Ano Novo em Matemática”.	

Desenvolvimento da aula/Estratégias:

Para a presente aula, construiu-se a tarefa “Caso Notável: Diferença de Quadrados” com o objetivo de envolver os alunos ativamente no seu processo de aprendizagem. A tarefa foi estruturada de acordo com as características da turma, procurando que os alunos explorem o caso notável através de uma abordagem prática e colaborativa. Para tal, prepararam-se dois quadrados (vermelho e azul) que acompanham a tarefa e cujas medidas do lado variam de acordo com a fila (1,2 ou 3) em que os alunos se encontram. Este pormenor foi pensado para atender às especificidades dos alunos, pois acredita-se que a concretização com valores numéricos é mais acessível às suas características de aprendizagem.

A par disto, preparou-se o PowerPoint “Caso Notável: Diferença de Quadrados” de apoio à aula. Este PowerPoint possui um slide que acompanha a estrutura da tarefa, encontrando-se dividido em duas partes (quadrado vermelho e quadrado azul), tal como o enunciado. Neste slide encontra-se uma tabela para cada fila de alunos preencher com os resultados obtidos durante a tarefa. Esta estrutura foi pensada com o objetivo de facilitar a organização e o registo dos valores obtidos pelos alunos, facilitando a posterior análise e discussão das conclusões.

Pretende-se que, no final da tarefa, os alunos concluam que, independentemente dos valores das medidas dos lados dos quadrados, obtém-se a relação da diferença de quadrados.

No primeiro momento da aula, a professora irá distribuir um exemplar da tarefa “Caso Notável: Diferença de Quadrados” a cada aluno e explicar brevemente a sua estrutura. Os alunos terão 15 minutos para resolverem a tarefa em grupo. Para a realização desta tarefa, serão também entregues dois quadrados de papel (um vermelho e um azul) a cada grupo de alunos. Durante este momento, a professora deverá circular pela sala de aula para acompanhar o progresso dos alunos, esclarecer eventuais dúvidas e garantir que todos os alunos estão envolvidos na execução da tarefa.

Posto isto, um aluno de cada fila irá ao quadro preencher a respetiva tabela com os valores obtidos pelo seu grupo. Desta forma, todos os alunos conseguem ver os valores com que os colegas trabalharam e comparar os resultados obtidos. Segue-se, em grupo turma, uma discussão das conclusões observadas.

O segundo momento da aula será dedicado à generalização do caso notável diferença de quadrados. Partindo da tarefa resolvida, admite-se que se possui um quadrado de lado a , ao qual foi retirado um quadrado de lado b . À semelhança do que foi realizado na tarefa, o hexágono obtido será decomposto em dois retângulos que, reorganizados, formam um novo retângulo. Com esta reorganização, será possível concluir que a área da figura inicial ($a^2 - b^2$) é igual à área do retângulo reorganizado $((a + b)(a - b))$. Esta explicação será acompanhada por um slide do PowerPoint “Diferença de quadrados”, com figuras representativas de cada etapa, desde o recorte inicial do quadrado menor, passando pela decomposição da figura em dois retângulos, até à reorganização dos mesmos para formar o novo retângulo. A visualização das imagens ajudará os alunos a compreenderem o raciocínio subjacente.

Posto isto, segue-se uma breve sistematização no quadro, que os alunos deverão registar nos respetivos cadernos. Aproveita-se este momento para demonstrar a igualdade do caso notável, recorrendo às propriedades da multiplicação e da adição de polinómios. A título exemplificativo, em conjunto com a turma, transforma-se a expressão algébrica $(x - 4)(x + 4)$ num polinómio reduzido, procurando que os alunos identifiquem os monómios a e b .

No momento seguinte da aula, resolvem-se os exercícios 2 da página 130 e 1.4, 1.6, 1.8 e 5 da página 131 do manual escolar, de aplicação direta do caso notável trabalhado na presente aula. Paralelamente, os exercícios serão resolvidos no quadro pelos alunos. Durante este momento, a professora deverá circular pela sala de aula de modo a supervisionar o trabalho dos alunos e a fornecer apoio individualizado aos que precisem.

No último momento da aula, os alunos serão desafiados a resolver o desafio “O Ano Novo em Matemática!”. Para tal, deverão aceder ao enunciado através do QR Code disponibilizado pela professora. O desafio consiste nos alunos aplicarem o caso notável da diferença de quadrados para calcular o valor de $2025^2 - 2024^2$.

Antes disso, atribuir-se-á o T.P.C.: alíneas 1.4, 1.5 e 1.6 do exercício 1 da página 144 do manual escolar.

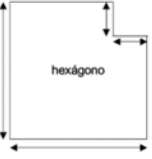
Observações/Aprendizagem complementar (Cumprimento do plano/alterações ao plano, metodologias a adotar, casos particulares...) 1. O sumário encontra-se escrito de forma semelhante ao modelo utilizado pela professora titular da turma, mencionando o tópico e a matéria que será abordada, conforme indicado no manual escolar. Optou-se por manter o formato a que os alunos estão habituados. 2. Os grupos serão compostos por 2 ou 3 alunos, consoante a sua disposição na sala de aula. A constituição dos grupos estará sujeita às alterações que a professora considere necessárias. 3. Todas as figuras incluídas no PowerPoint foram construídas de forma rigorosa, com o auxílio do GeoGebra. 4. Durante a resolução dos exercícios, sempre que necessário, a professora deverá dar um apoio mais individualizado, observando as dificuldades dos alunos na aplicação dos conteúdos previamente trabalhados e na compreensão dos conceitos abordados. 5. Se, eventualmente, não for possível aceder ao PowerPoint através do computador disponível na sala de aula, a professora irá recorrer ao seu computador pessoal, garantindo que nenhuma parte da aula fica comprometida.
Antevisão - Possíveis dificuldades dos alunos: 1 Dificuldade em generalizar o caso notável da multiplicação de binómios diferença de quadrados, utilizando os monómios a e b, em vez de valores numéricos. 2 Dificuldade em trabalhar com expressões algébricas que envolvem raízes quadradas.
Avaliação: A avaliação dos alunos será baseada em apontamentos referentes aos seguintes aspetos: • Aplicação de conhecimentos matemáticos adquiridos anteriormente; • Participação na resolução e discussão da tarefa “Caso Notável: Diferença de Quadrados”; • Colaboração com a professora e com os colegas na resolução dos exercícios; • Uso da terminologia e simbologia adequada; • Participação na aula; • Comportamento na sala de aula.
Balanço: Perante as dificuldades de aprendizagem e o reduzido envolvimento habitual por parte dos alunos nas tarefas propostas, considera-se que o bloco de aulas foi planeado de forma adequada. A professora estagiária procurou adaptar recursos e estratégias para promover a participação ativa dos alunos e facilitar a compreensão do caso notável. A tarefa realizada revelou-se eficaz, ao criar um ambiente colaborativo, propício ao envolvimento dos alunos, inclusive daqueles que habitualmente se mostram menos participativos. A utilização de materiais manipuláveis, bem como a escolha de valores numéricos concretos em vez da generalização imediata, contribuíram para uma melhor apropriação do conteúdo, permitindo aos alunos visualizar concretamente o raciocínio matemático subjacente. No entanto, identificou-se algum desfasamento entre a componente prática da tarefa e o momento de generalização do caso notável, aspeto que mereceu reflexão por parte da professora estagiária. Face à agitação de alguns alunos da turma, a professora estagiária recorreu a uma estratégia que, em aulas anteriores, se revelou eficaz: chamar os alunos mais irrequietos ao quadro para resolverem os exercícios propostos e explicarem o respetivo raciocínio aos colegas. Contudo, nesta aula, a estratégia não teve o efeito desejado, pois alguns alunos adotaram uma postura exibicionista, desviando o foco do trabalho e tentando comprometer o ambiente de aprendizagem. Ainda assim, as professoras presentes destacaram que, apesar dos desafios comportamentais da turma, a professora estagiária manteve uma postura serena e profissional, revelando controlo da situação na gestão dos diferentes momentos da aula.

Anexo A: Tarefa “Caso Notável: Diferença de Quadrados”

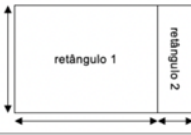
Caso Notável: Diferença de Quadrados

Quadrado VERMELHO	Quadrado AZUL																								
Considera o quadrado vermelho de lado 12 cm (quadrado 1). - Calcula a área do quadrado 1. - Recorta pelo tracejado o quadrado de lado 5 cm (quadrado 2). - Calcula a área do quadrado 2. - Calcula a área do hexágono obtido.  5. Preenche a tabela: <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th>figura</th> <th>lado (cm)</th> <th>área (cm²)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>quadrado 1</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>quadrado 2</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>hexágono</td> <td>.....</td> <td></td> </tr> </tbody> </table>	figura	lado (cm)	área (cm ²)	quadrado 1			quadrado 2			hexágono			Considera o quadrado azul de lado 12 cm (quadrado A). - Recorta pelo tracejado o quadrado de lado 5 cm (quadrado B). - Decompõe o hexágono obtido em dois retângulos, recortando pelo tracejado. - Determina o comprimento e a largura de cada retângulo.  9. Reorganiza os retângulos para obteres um retângulo maior (retângulo 3). 10. Preenche a tabela: <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th>figura</th> <th>comprimento (cm)</th> <th>largura (cm)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>retângulo 1</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>retângulo 2</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>retângulo 3</td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table> 11. Calcula a área do retângulo 3. 	figura	comprimento (cm)	largura (cm)	retângulo 1			retângulo 2			retângulo 3		
figura	lado (cm)	área (cm ²)																							
quadrado 1																									
quadrado 2																									
hexágono																									
figura	comprimento (cm)	largura (cm)																							
retângulo 1																									
retângulo 2																									
retângulo 3																									
12. O que podes concluir da área do hexágono e da área do retângulo 3?																									

Caso Notável: Diferença de Quadrados

Quadrado VERMELHO	Quadrado AZUL																								
Considera o quadrado vermelho de lado 10 cm (quadrado 1). - Calcula a área do quadrado 1. - Recorta pelo tracejado o quadrado de lado 6 cm (quadrado 2). - Calcula a área do quadrado 2. - Calcula a área do hexágono obtido.  5. Preenche a tabela: <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th>figura</th> <th>lado (cm)</th> <th>área (cm²)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>quadrado 1</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>quadrado 2</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>hexágono</td> <td>.....</td> <td></td> </tr> </tbody> </table>	figura	lado (cm)	área (cm ²)	quadrado 1			quadrado 2			hexágono			Considera o quadrado azul de lado 10 cm (quadrado A). - Recorta pelo tracejado o quadrado de lado 6 cm (quadrado B). - Decompõe o hexágono obtido em dois retângulos, recortando pelo tracejado. - Determina o comprimento e a largura de cada retângulo.  9. Reorganiza os retângulos para obteres um retângulo maior (retângulo 3). 10. Preenche a tabela: <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th>figura</th> <th>comprimento (cm)</th> <th>largura (cm)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>retângulo 1</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>retângulo 2</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>retângulo 3</td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table> 11. Calcula a área do retângulo 3. 	figura	comprimento (cm)	largura (cm)	retângulo 1			retângulo 2			retângulo 3		
figura	lado (cm)	área (cm ²)																							
quadrado 1																									
quadrado 2																									
hexágono																									
figura	comprimento (cm)	largura (cm)																							
retângulo 1																									
retângulo 2																									
retângulo 3																									
12. O que podes concluir da área do hexágono e da área do retângulo 3?																									

Caso Notável: Diferença de Quadrados

Quadrado VERMELHO	Quadrado AZUL																								
Considera o quadrado vermelho de lado 8 cm (quadrado 1). - Calcula a área do quadrado 1. - Recorta pelo tracejado o quadrado de lado 3 cm (quadrado 2). - Calcula a área do quadrado 2. - Calcula a área do hexágono obtido.	Considera o quadrado azul de lado 8 cm (quadrado A). - Recorta pelo tracejado o quadrado de lado 3 cm (quadrado B). - Decompõe o hexágono obtido em dois retângulos, recortando pelo tracejado. - Determina o comprimento e a largura de cada retângulo.																								
																									
5. Preenche a tabela: <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th>figura</th> <th>lado (cm)</th> <th>área (cm²)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>quadrado 1</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>quadrado 2</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>hexágono</td> <td>-----</td> <td></td> </tr> </tbody> </table>	figura	lado (cm)	área (cm ²)	quadrado 1			quadrado 2			hexágono	-----		9. Reorganiza os retângulos para obteres um retângulo maior (retângulo 3). 10. Preenche a tabela: <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th>figura</th> <th>comprimento (cm)</th> <th>largura (cm)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>retângulo 1</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>retângulo 2</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>retângulo 3</td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table>	figura	comprimento (cm)	largura (cm)	retângulo 1			retângulo 2			retângulo 3		
figura	lado (cm)	área (cm ²)																							
quadrado 1																									
quadrado 2																									
hexágono	-----																								
figura	comprimento (cm)	largura (cm)																							
retângulo 1																									
retângulo 2																									
retângulo 3																									
	11. Calcula a área do retângulo 3. 																								
12. O que podes concluir da área do hexágono e da área do retângulo 3?																									

Anexo B: PowerPoint “Caso Notável: Diferença de Quadrados”

Caso Notável: Diferença de Quadrados

Contexto: MATEMÁTICA

Considere o quadrado representado na foto 1 (lado 5 cm) (questão 1).

1. Calcule a área do quadrado 1.

2. Recorte pelo retângulo representado na foto 2 (lado 3 cm) (questão 2).

3. Calcule a área do quadrado 2.

4. Calcule a área do hexágono obtido.

Figura 1

Figura 1

Figura	lado (cm)	área (cm ²)
quadrado 1		
quadrado 2		
hexágono		

5. Apresente a tabela.

Figura 2

Figura 2

Figura	comprimento (cm)	largura (cm)
retângulo 1		
retângulo 2		
retângulo 3		

6. Recorte o retângulo.

7. Recolha o retângulo para obter um retângulo maior (retângulo 3).

8. Apresente a tabela.

Figura 3

Figura 3

Figura	comprimento (cm)	largura (cm)
retângulo 1		
retângulo 2		
retângulo 3		

9. Calcule a área do retângulo 3.

10. O que pode concluir da área do hexágono e da área do retângulo 3?

1

Figura 1

Figura 1

Figura	comprimento (cm)	largura (cm)
retângulo 1		
retângulo 2		
retângulo 3		

Figura 2

Figura 2

Figura	comprimento (cm)	largura (cm)
retângulo 1		
retângulo 2		
retângulo 3		

Figura 3

Figura 3

Figura	comprimento (cm)	largura (cm)
retângulo 1		
retângulo 2		
retângulo 3		

área retângulo 3 (cm²)

Figura 1	Figura 2	Figura 3

2

Figura 1

Figura 1

Figura	comprimento (cm)	largura (cm)
retângulo 1		
retângulo 2		
retângulo 3		

Figura 2

Figura 2

Figura	comprimento (cm)	largura (cm)
retângulo 1		
retângulo 2		
retângulo 3		

Figura 3

Figura 3

Figura	comprimento (cm)	largura (cm)
retângulo 1		
retângulo 2		
retângulo 3		

área retângulo 3 (cm²)

Figura 1	Figura 2	Figura 3

3

Figura 1

Figura 1

Figura	comprimento (cm)	largura (cm)
retângulo 1		
retângulo 2		
retângulo 3		

Figura 2

Figura 2

Figura	comprimento (cm)	largura (cm)
retângulo 1		
retângulo 2		
retângulo 3		

Figura 3

Figura 3

Figura	comprimento (cm)	largura (cm)
retângulo 1		
retângulo 2		
retângulo 3		

área retângulo 3 (cm²)

Figura 1	Figura 2	Figura 3

4

Figura 1

Figura 1

Figura	comprimento (cm)	largura (cm)
retângulo 1		
retângulo 2		
retângulo 3		

Figura 2

Figura 2

Figura	comprimento (cm)	largura (cm)
retângulo 1		
retângulo 2		
retângulo 3		

Figura 3

Figura 3

Figura	comprimento (cm)	largura (cm)
retângulo 1		
retângulo 2		
retângulo 3		

área retângulo 3 (cm²)

Figura 1	Figura 2	Figura 3

5

Figura 1

Figura 1

Figura	comprimento (cm)	largura (cm)
retângulo 1		
retângulo 2		
retângulo 3		

Figura 2

Figura 2

Figura	comprimento (cm)	largura (cm)
retângulo 1		
retângulo 2		
retângulo 3		

Figura 3

Figura 3

Figura	comprimento (cm)	largura (cm)
retângulo 1		
retângulo 2		
retângulo 3		

área retângulo 3 (cm²)

Figura 1	Figura 2	Figura 3

6

Figura 1

Figura 1

Figura	comprimento (cm)	largura (cm)
retângulo 1		
retângulo 2		
retângulo 3		

Figura 2

Figura 2

Figura	comprimento (cm)	largura (cm)
retângulo 1		
retângulo 2		
retângulo 3		

Figura 3

Figura 3

Figura	comprimento (cm)	largura (cm)
retângulo 1		
retângulo 2		
retângulo 3		

área retângulo 3 (cm²)

Figura 1	Figura 2	Figura 3

7

Figura 1

Figura 1

Figura	comprimento (cm)	largura (cm)
retângulo 1		
retângulo 2		
retângulo 3		

Figura 2

Figura 2

Figura	comprimento (cm)	largura (cm)
retângulo 1		
retângulo 2		
retângulo 3		

Figura 3

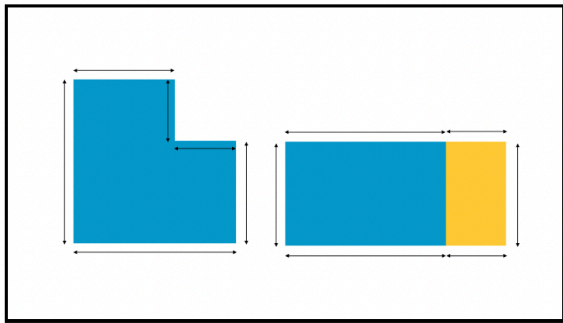
Figura 3

Figura	comprimento (cm)	largura (cm)
retângulo 1		
retângulo 2		
retângulo 3		

área retângulo 3 (cm²)

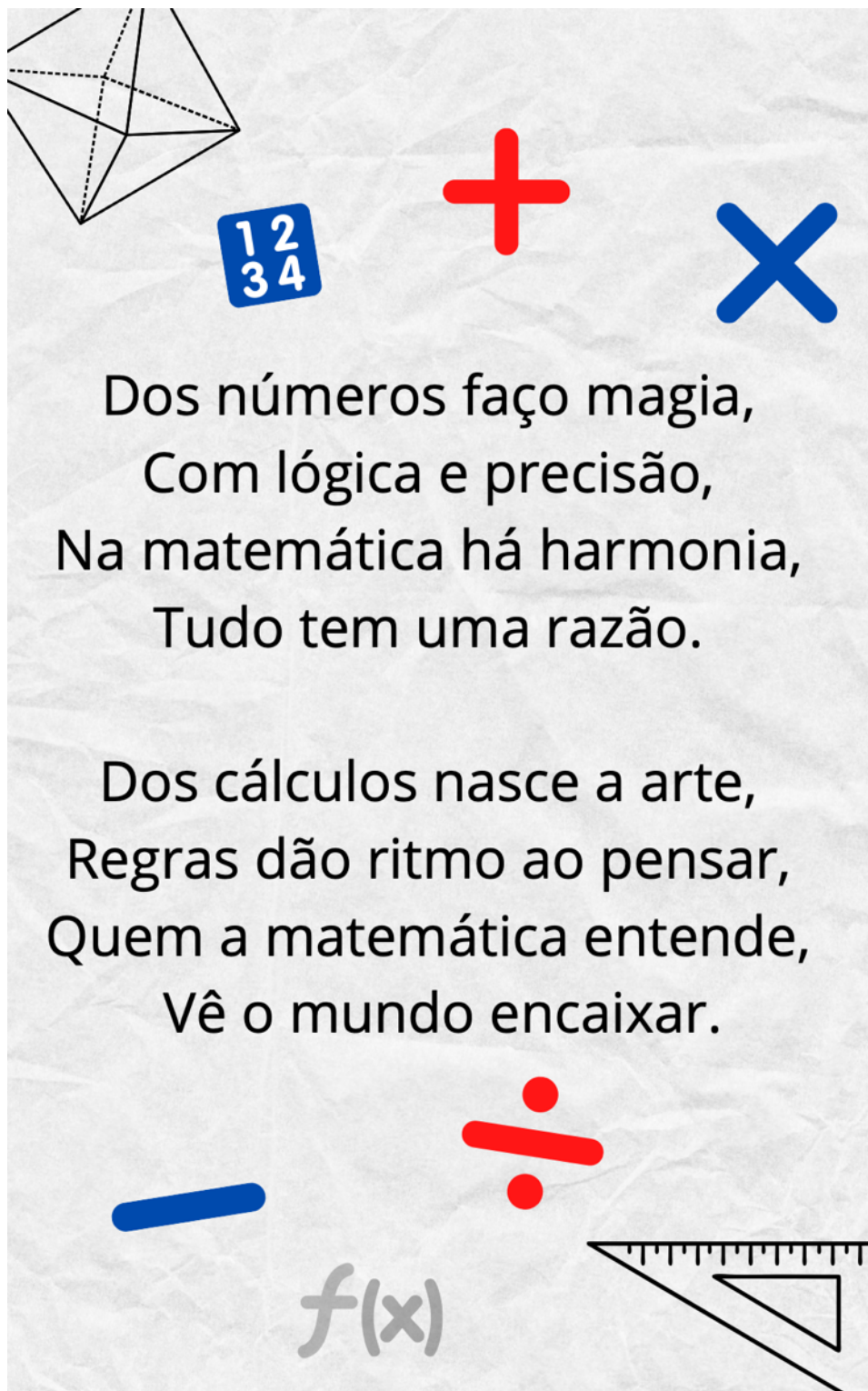
Figura 1	Figura 2	Figura 3

8



9

Anexo 24: Poema no âmbito do Dia Internacional da Matemática



Anexo 25: Competição Internacional de Matemática *Náboj*



Anexo 26: Autorização de participação na visita de estudo

AUTORIZAÇÃO - DIA ABERTO FACULDADE DE CIÊNCIAS

Eu, _____, Encarregado de Educação do(a) aluno(a) _____, n.º _____, da turma 11.º_____, autorizo o meu educando a participar na visita de estudo “Dia Aberto da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa” a realizar-se no dia 7 de maio de 2025, no período da tarde.

____/____/____

(Encarregado de Educação)

Anexo 27: Autorização de participação no projeto de investigação

AUTORIZAÇÃO DE PARTICIPAÇÃO NO PROJETO DE INVESTIGAÇÃO

Eu, _____, Encarregado de Educação do(a) aluno(a) _____, n.º _____, da turma 11.º_____, tomei conhecimento da realização do projeto de investigação no âmbito do Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Secundário da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa e autorizo a participação do meu educando no referido projeto.

Autorizo a recolha de informação áudio e o seu uso para efeitos de investigação, salvaguardando o respetivo anonimato do meu educando, aquando da realização de entrevistas e tarefas no âmbito deste projeto de investigação.

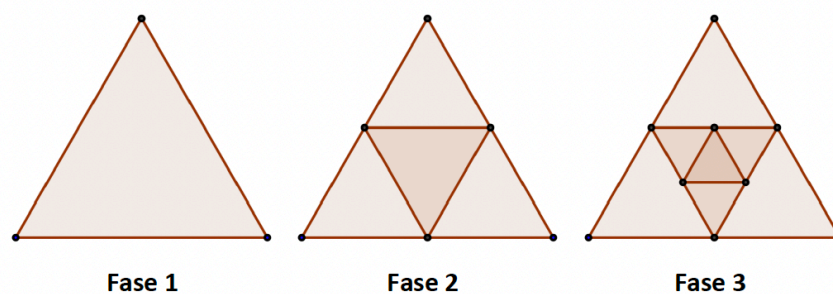
____/____/____

(Encarregado de Educação)

Anexo 28: Tarefa 1

Tarefa 1 – Construção de triângulos equiláteros

Dado um triângulo equilátero, constrói-se a partir dele um novo triângulo equilátero, cujos vértices são os pontos médios dos lados do triângulo anterior. A figura ilustra a aplicação deste processo em três fases sucessivas, a partir de um triângulo inicial (fase 1).



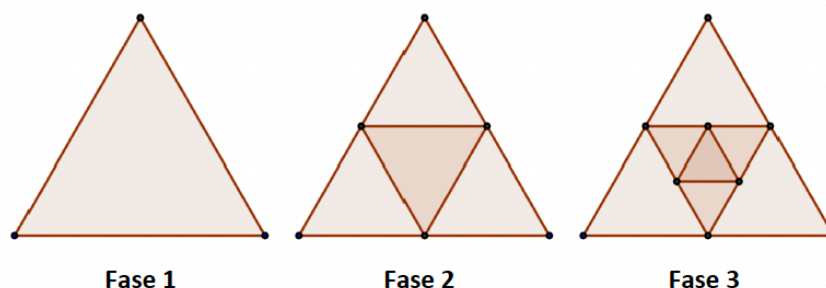
1. Seja (u_n) a sucessão do número de triângulos obtidos nas sucessivas fases.
 - 1.1. Determina os cinco primeiros termos de (u_n) .
 - 1.2. Determina a expressão geral de (u_n) .
 - 1.3. Calcula o número total de triângulos das oito primeiras fases.
 - 1.4. O que acontece ao valor da soma total dos triângulos à medida que o número de fases aumenta?

Anexo 29: Tarefa 1 – guião entrevista

Guião entrevista:

Tarefa 1 – Construção de triângulos equiláteros

Dado um triângulo equilátero, constrói-se a partir dele um novo triângulo equilátero, cujos vértices são os pontos médios dos lados do triângulo anterior. A figura ilustra a aplicação deste processo em três fases sucessivas, a partir de um triângulo inicial (fase 1).



1. Seja (u_n) a sucessão do número de triângulos obtidos nas sucessivas fases.

1.1. Determina os cinco primeiros termos de (u_n) .

- Como estás a contar o número de triângulos em cada fase?
- Como determinaste os cinco primeiros termos da sucessão?
- Observas algum padrão? Se sim, descreve-o.

1.2. Determina a expressão geral de (u_n) .

- Como chegaste à expressão geral da sucessão?
- O que significa, em termos da construção, a expressão que encontraste?
- Por que é que a sucessão (u_n) é uma progressão aritmética?
- Por que é que o termo geral de uma progressão aritmética é dado pela expressão $u_n = u_1 + (n - 1)r$?
- No contexto do problema o que significa a razão ser 4?

1.3. Calcula o número total de triângulos das oito primeiras fases.

- Como estás a calcular o número total de triângulos nas oito primeiras fases?

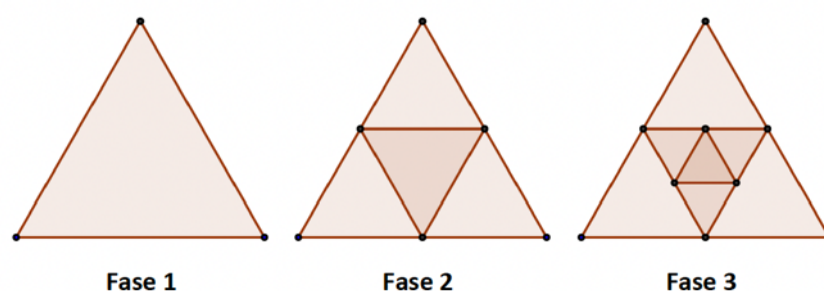
1.4. O que acontece ao valor da soma total dos triângulos à medida que o número de fases aumenta?

- Como chegaste à expressão da soma?
- Por que é que a soma dos n primeiros termos uma progressão aritmética é dada pela expressão $S_n = \frac{u_1 + u_n}{2} \times r$?
- Consegues prever o que acontece se aumentarmos indefinidamente o número de fases?
- No contexto do problema, o que significa o valor do limite que calculaste?

Anexo 30: Tarefa 2

Tarefa 2 – Área de triângulos equiláteros

Dado um triângulo equilátero, constrói-se a partir dele um novo triângulo equilátero, cujos vértices são os pontos médios dos lados do triângulo anterior. A figura ilustra a aplicação deste processo em três fases sucessivas, a partir de um triângulo inicial (fase 1).



2. Seja (a_n) a sucessão das áreas dos triângulos que se obtém em cada fase ao unir os pontos médios dos lados do triângulo anterior.

Considera, para unidade de medida de área, a área do triângulo inicial.

- 2.1. Determina a expressão geral de (a_n) .
- 2.2. Escreve uma expressão para a soma dos n primeiros termos da sucessão (a_n) .

Se aumentarmos n tanto quanto queiramos, o que acontece ao valor da soma?

Anexo 31: Tarefa 2 – guião entrevista

Guião entrevista:

Tarefa 2 – Área de triângulos equiláteros

2. Seja (a_n) a sucessão das áreas do triângulo que se obtém em cada fase ao unir os pontos médios dos lados do triângulo anterior.

Considera, para unidade de medida de área, a área do triângulo inicial.

2.1. Determina a expressão geral de (a_n) .

- Como estás a calcular a área dos triângulos em cada fase?
- Observas algum padrão? Se sim, descreve-o.
- Como chegaste à expressão geral da sucessão?
- O que significa, em termos da construção, a expressão que encontraste?
- Por que é que a sucessão (a_n) é uma progressão geométrica?
- Por que é que o termo geral de uma progressão geométrica é dado pela expressão $u_n = u_1 r^{n-1}$?
- No contexto do problema o que significa a razão ser $\frac{1}{4}$?

2.2. Escreve uma expressão para a soma dos n primeiros termos da sucessão (a_n) .

Se aumentarmos n tanto quanto queiramos, o que acontece ao valor da soma?

- Como chegaste à expressão da soma?
- Por que é que a soma dos n primeiros termos uma progressão aritmética é dada pela expressão $S_n = u_1 \times \frac{r^n - 1}{r - 1}$?
- Consegues prever o que acontece se aumentarmos indefinidamente o número de fases?
- No contexto do problema, o que significa o valor do limite que calculaste?
- Como explicarias a um colega porque é que a soma se aproxima de um valor fixo?



⟨2025⟩

ANA FRANCISCA FERNANDES

RELATÓRIO DE ESTÁGIO –
AS TAREFAS MATEMÁTICAS NA APRENDIZAGEM DAS SUCESSÕES