



Maria Helena Guerra Gomes Silva

Licenciatura em Matemática Aplicada

**Tarefas com Recurso à Calculadora Gráfica
no Ensino Secundário do 10.º ao 12.º ano
de escolaridade**

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em

Mestrado em Ensino da Matemática

Orientador: Professor Doutor José Manuel Leonardo de
Matos, FCT/UNL

Júri:

Presidente: Prof. Doutora Maria Helena Coutinho Gomes de Almeida Santos

Arguente: Prof. Doutora Maria Cristina Araújo de Oliveira

Vogal: Prof. Doutor José Manuel Leonardo de Matos

UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA

Mestrado em Ensino da Matemática



Tarefas com Recurso à Calculadora Gráfica

no Ensino Secundário

do 10º ao 12º ano de escolaridade

Maria Helena Guerra Gomes Silva

Dissertação apresentada na Faculdade de Ciências e Tecnologias da Universidade Nova de Lisboa
para obtenção do grau de Mestre em Ensino da Matemática, sob a orientação do Professor Doutor
José Manuel Matos.

Apresento a dissertação intitulada “Tarefas com Recurso à calculadora Gráfica no Ensino Secundário do 10.º ao 12.º ano de escolaridade” e escrita por mim, Maria Helena Guerra Gomes Silva, com o seguinte termo “Copyright”: “A Faculdade de Ciências e Tecnologias e a Universidade Nova de Lisboa têm o direito, perpétuo e sem limites geográficos, de arquivar e publicar esta dissertação através de exemplares impressos reproduzidos em papel ou de forma digital, ou por qualquer outro meio conhecido ou que venha a ser inventado, e de a divulgar através de repositórios científicos e de admitir a sua cópia e distribuição com objetivos educacionais ou de investigação, não comerciais, desde que seja dado crédito ao autor e editor”.

Dedicatória

Ao meu marido e à minha filha

Agradecimentos

Ao Professor Doutor José Manuel Matos pela forma como me orientou, pelas suas críticas, sugestões e ensinamentos, pelas palavras de incentivo e sobretudo pela sua disponibilidade.

Agradeço à colega e amiga Lourdes Ventura, por ser a responsável por me inscrever no mestrado e pela preciosa ajuda durante esta tarefa.

Ao meu marido e filha pela compreensão nos momentos em que não pude estar presente.

À minha amiga Maria dos Anjos, pelo incentivo, apoio e carinho em todos os momentos.

À amiga Ana Rosa, pelas traduções e pela sua incansável disponibilidade.

Resumo

Este estudo tem por base um modelo da hipótese teórica de que o estudo de funções, privilegiando uma abordagem com recurso à calculadora gráfica, pode elevar a sua compreensão pelos alunos.

Assim, o objetivo principal deste estudo é a construção e compilação de tarefas que visam recorrer às potencialidades da calculadora gráfica no estudo das funções que integram o atual currículo do Ensino Secundário.

Todas as tarefas foram delineadas para serem levadas a cabo com ajuda da calculadora gráfica, por se considerar que esta ferramenta pode ajudar a criar um ambiente de aula propício a uma forma diferente de construir conceitos.

As tarefas propostas abordam o tema funções segundo diferentes pontos de vista – gráfico, numérico e algébrico – e com diferentes graus da complexidade, desde as algébricas inteiras, passando pelas fracionárias e acabando nas transcendentais – exponenciais e logarítmicas ou trigonométricas. E abordam também temas transversais – comunicação Matemática, aplicações de modelação Matemática; Lógica e raciocínio matemático, resolução de problemas, atividades de exploração e tecnologias e matemática.

Palavras-chave: **Tarefas Matemáticas, Competências, Calculadora Gráfica, Ensino da Matemática, Conceito de Função.**

Abstract

This study is based on a theoretical and hypothetical model that supports the use of the graphic calculator as an approach to the study of functions, increasing their understanding by students.

In the design and compilation of the tasks presented, I sought to fulfil the fundamental contents of the curriculum, taking into account the recommendations of the authors of the Mathematics Curriculum.

All tasks were outlined to be carried out with the aid of a graphic calculator, believing that this tool can help create a classroom environment, scaffolding a different way of building concepts.

The tasks proposed address the theme functions according to different points of view - graphic, numeric and algebraic - and with different degrees of complexity, ranging from algebraic integer, through the fractional and ending at the transcendent - exponential and logarithmic and trigonometric. And also address cross-cutting themes - communication in Mathematics, Mathematical modeling applications; logic and mathematical reasoning, problem solving, research activities and technology and mathematics.

Keywords: **Mathematical Tasks, Skills, Graphic Calculator, Teaching Maths, Function Concept**

ÍNDICE GERAL

Resumo	- 5 -
Abstract	- 6 -
ÍNDICE GERAL	- 7 -
ÍNDICE DE TABELAS	- 9 -
ÍNDICE DE FIGURAS	- 9 -
Capítulo 1 - Introdução.....	- 10 -
1. Nós os professores	- 10 -
2. Os jovens nossos alunos.....	- 10 -
3. As minhas motivações.....	- 12 -
4. Problema em estudo.....	- 14 -
5. Pertinência do estudo.....	- 15 -
Capítulo 2 – Revisão de literatura	- 19 -
Introdução	- 19 -
1.Tarefa e atividade	- 19 -
2. Competência e competências	- 21 -
3. O raciocínio matemático na aprendizagem do conceito de função	- 23 -
4. A calculadora gráfica no estudo das funções	- 27 -
5. Representação e visualização	- 31 -
5.1. Representação.....	- 31 -
5.2. Visualização	- 34 -
6. Comunicação	- 35 -
7. Exercícios.....	- 35 -
8. Problemas	- 37 -
9. Investigação	- 40 -
10. Modelação.....	- 42 -
Capítulo 3 – Tarefas.....	- 45 -
Introdução	- 45 -

1.Tipo de tarefas	45 -
1.1. Tarefa exercício	48 -
1.2. Tarefa problema.....	49 -
1.3. Tarefa projeto	49 -
1.4. Tarefa de exploração	50 -
1.5. Tarefa investigação.....	51 -
1.6. Tarefa modelação.....	52 -
2.O professor e a escolha de tarefas.....	53 -
2.1.Seleção	53 -
2.2.Duração e contexto	53 -
2.3.Discussão da tarefa.....	54 -
2.4.Tarefas sobre funções e utilização da calculadora	55 -
Capítulo 4 – Metodologia	58 -
Introdução	58 -
1. Fundamentação metodológica	58 -
2. Plano metodológico	60 -
3. Os critérios de seleção das tarefas para este estudo	61 -
4. Referenciação	62 -
5. Itens do índice de tarefas	65 -
6. Análise de conteúdo das tarefas.....	66 -
7. Apresentação gráfica das tarefas neste estudo	71 -
Capítulo 5 – Conclusões	74
1.Conclusões e resultados da investigação.....	74
2.Sugestões para trabalhos futuros.....	76
Referências	78
ANEXO I	83
Grelha de seleção de tarefas.....	84
ANEXO II	85
Índice de tarefas.....	86

ÍNDICE DE TABELAS

TABELA 4.1 -SIGLAS	- 66 -
TABELA 4.2 – NÍVEL DE DIFICULDADE DA UTILIZAÇÃO DA CALCULADORA GRÁFICA NO DESENVOLVIMENTO DAS TAREFAS	- 67 -
TABELA 4.3 – DURAÇÃO DAS TAREFAS	- 68 -
TABELA 4.4 – TIPO DE TAREFAS	- 69 -
TABELA 4.5 – CLASSIFICAÇÃO DAS TAREFAS RELATIVAMENTE AOS CONTEÚDOS	- 70 -

ÍNDICE DE FIGURAS

FIGURA 2.1 DOIS TIPOS GENÉRICOS DE CONEXÕES.....	- 43 -
FIGURA 2.2 CONEXÕES DE MODELAÇÃO	- 43 -
FIGURA 3.1TIPOS DE TAREFAS	- 47 -
FIGURA 3.2 RELAÇÃO ENTRE DIFERENTES TIPOS DE TAREFA	- 48 -
FIGURA 3.3 NÍVEIS DE DIFICULDADE SEGUNDO CARVALHO, 2006	- 56 -
FIGURA 4. 1CABEÇALHO DAS TAREFAS	- 72 -

Capítulo 1 - Introdução

1. Nós os professores

Será que um professor é um investigador?... Será antes um ator?... Ou o que pretenderá ser, quando se apresenta pela primeira vez, entre quatro paredes, com dezenas de olhares cravados na sua pessoa?

Olhamos os nossos alunos e, refletindo sobre os anos que nos precederam nestas lides profissionais, paramos para pensar: porque é que transmitimos desta forma o nosso conhecimento? – O que é que chega ao outro lado, ou o que é que nunca chega e que fica no silêncio das paredes por descobrir? – O que é que tem mais interesse para aqueles com quem interagimos todos os anos? Interessa verdadeiramente aprender ou, através de nós e em contacto connosco, descobrir muitas outras formas de pensar nas coisas e sobre as coisas? Ou não lhes interessa nada disto e estamos sempre aquém das suas pretensões e ansiedades?

O que nos fica neste momento inicial de interrogações é uma vontade de alcançarmos mais terreno nestas areias movediças em que nos movimentamos, uma vontade em tornar mais palpável esta cumplicidade de ensinarmos a aprender ou de aprendermos a ensinar, e ficarmos, assim, mais ganhadores, pois quantos anos precisaremos mais para aprendermos a conhecermo-nos?

“Não o sabemos agora. ... Imprimimos a nossa marca sobre as vidas que, por nós, passam, definitivamente, embora desconhecendo sempre a verdadeira fundura do sinal que deixamos.” (Malik, 1988, p. 124).

2. Os jovens nossos alunos

As questões colocadas anteriormente, conduzir-nos-ão forçosamente a situarmo-nos perante o público a que todos os dias nos dirigimos, e para quem nos dirigimos, formulando questões, raciocinando, pois como diz Sampaio D. (1996, p.15) “Considero que estamos num momento importante. Já não se pode continuar a ensinar sem pensar na pessoa do aluno, já não se pode estudar sem pensar no futuro e já não se pode fingir mais que nada temos que ver com a escola”. De

quem são então estes olhares que se ocupam de nós minuciosamente no primeiro dia de aulas para depois, nos tempos mais próximos, nos surpreenderem, ou porque ficam presos num misto de procura e de descoberta, ou porque se afastam de nós e, às vezes, também dos outros, com uma indiferença gelada e perturbante... O que caracteriza a geração de hoje que se afasta tanto das gerações anteriores? Se olharmos para os anos da nossa infância e adolescência, e voltarmos à nossa escola, reparamos que o que se mantém são as paredes, o edifício, porque tudo o mais que habitava deu lugar a um outro mundo. Mas será mesmo importante parar para observar diferenças? Não será mais construtivo partir dos jovens que temos, tal qual são, com a sua ânsia de autonomia, a sua vivência limitada cada vez mais ao imediato, a sua apetência pelo desafio e, aceitando as suas características e as suas diversidades, dar-lhes a conhecer que o que está fora da escola e que eles tanto absorvem, poderá prolongar-se para dentro dela, criando da simultaneidade de vivências e de culturas uma aprendizagem mais rica, mais crítica, e mais próxima da vida?

Na viagem de regresso à escola, Sampaio D. (1996, p. 20) retrata este público das escolas Portuguesas, com o qual vamos trabalhar, da seguinte forma: “vejo rapazes e raparigas abraçados ou beijando-se sem complexos. Ninguém usa pasta e há alunos que nem caneta têm (...) dossiers descuidados, onde alternam nomes ou pedaços de canções. Fumam-se cigarros à vontade (...) e às vezes passa-se um charro num local recatado. Ninguém sabe o nome do professor e a escola é só boa para conviver, já que as aulas são uma seca e os exames um risco a que não se pode fugir”.

Outros autores aprofundam a sua visão pela paisagem ilimitada da escola e concluem que “os jovens integram na sua cultura áreas muito variadas (arte, informática, desporto, ciência), mas de entre todas sobressai, sem dúvida a música. Os adolescentes de hoje, mais que qualquer outra geração, relativizam o livro... Resolvem facilmente problemas colocados por situações de interatividade e, perante um instrumento que desconhecem, procedem ao contrário dos adultos: primeiro experimentam todos os comandos, depois se têm dúvidas, leem o livro de instruções. Por isso os alunos têm competências que os professores não dominam, o que obriga estes a um esforço

para acompanhar a evolução das novas tecnologias. Os estudantes das nossas escolas transitam entre a televisão e a internet em viagens sem objetivos, tornando estas abordagens culturais superficiais e inconsequentes” (Santos, 1996, p. 4).

E é aqui que tem início o princípio das coisas, é destes jovens assim retratados por estes autores e por tantos outros poetas, psicólogos, pedagogos, psiquiatras, pintores, músicos, jornalistas, professores e pais, que parte todo o nosso trabalho de há uns anos a esta parte... e que continuará sempre... preenchendo as nossas preocupações, a nossa vontade de evoluirmos por nós, por eles e com eles...

3. As minhas motivações

As motivações pessoais para o tema desta investigação são o resultado da atividade profissional: professora de Matemática numa escola secundária em Portugal, promovendo, sempre que possível, o processo de ensino e de aprendizagem desta disciplina recorrendo a tecnologias gráficas.

O tema “Funções” assume uma importância primordial no programa de Matemática. Ao longo dos anos de ensino, principalmente ao nível do secundário, apercebi-me que os alunos revelam algumas dificuldades neste tema, nomeadamente na interpretação dos seus gráficos, na sua relação com a expressão algébrica, na determinação e análise de pontos relevantes e na resolução de problemas em contexto real.

Desde cedo comecei a utilizar a calculadora gráfica na abordagem do tema “Funções” e observei a satisfação, encanto e entusiasmo manifestado pelos alunos no desenvolvimento das tarefas propostas. Porém, com o decorrer dos anos, comecei a aperceber-me que os alunos apresentavam algumas dificuldades em determinados aspetos, nomeadamente, na definição da janela de visualização, na introdução da expressão algébrica que define a função e qual o menu a utilizar em cada situação.

Uma das lacunas que os alunos, de uma maneira geral, apresentam é estabelecer conexões adequadas entre o estudo algébrico e o correspondente estudo gráfico. Muitos alunos apresentam dificuldade na leitura e interpretação de dados apresentados graficamente e na transposição para o papel do que visualizam no ecrã da calculadora.

A minha experiência em aula, no que respeita a tarefas com recurso a calculadora gráfica, diz-me que, na sua maioria, alunos do 10º ano, manifestam grandes dificuldades em identificar a zona do gráfico que estão a observar perante uma imagem incompleta fornecida por uma determinada janela de visualização. Por exemplo, os alunos podem interpretar como sendo duas retas verticais uma representação de uma função quadrática por não estabelecerem as conexões entre a representação analítica e a correspondente representação gráfica. Muitas destas situações podem ser contornadas com o recurso a um zoom quase automático proporcionado pela tecnologia sem obrigar a uma reflexão por parte do aluno. Mais complicada se torna a situação quando é imprescindível decidir qual a janela mais adequada para a resolução de uma questão. Por vezes, os alunos deparam-se com um ecrã da calculadora sem qualquer traçado gráfico e atribuem esse facto à expressão analítica da função em vez de pensarem na janela de visualização.

Assim, senti necessidade de elaborar e compilar algumas tarefas que necessitem do recurso à calculadora gráfica por acreditar que o seu desenvolvimento é uma mais-valia no processo de ensino e aprendizagem, proporcionando aos alunos competências matemáticas de diversos graus de complexidade.

Nas Normas para o Currículo e Avaliação em Matemática Escolar refere-se que: “O ensino deve ser altamente exploratório e baseado em experiências numéricas e geométricas que capitalizem o uso da calculadora e do computador.” (NCTM, 1991, p. 215)

Os autores dos programas de Matemática de 1997 partilham destas mesmas preocupações quando referem: “A utilização obrigatória da tecnologia que, além de ferramenta, é fonte de atividade, de investigação e de aprendizagem, pretende preparar os alunos para uma sociedade em

que os meios informáticos terão um papel considerável na resolução de problemas de índole científica” (DES, 1997, p. 8).

As orientações dos programas de matemática não mencionam utilizações específicas da calculadora. No entanto, é obrigatório o seu uso no ensino secundário. Segundo Carvalho (2006, p. 160), “pode-se verificar que praticamente todos os manuais, exceto os manuais F e H, fazem uma maior ou menor utilização da calculadora. Verificando-se a tendência observada no subcapítulo anterior de se ter manuais que utilizam a calculadora, outros que utilizam pouco e outros que utilizam muito pouco ou mesmo nada”.

Estas considerações levam-nos a afirmar que, no panorama da atual Reforma do Sistema Educativo, é pertinente uma investigação sobre diversas tarefas com recurso a calculadora gráfica que ajudem os alunos na construção dos conceitos matemáticos.

4. Problema em estudo

No programa de Matemática A que entrou em vigor para o 10º ano, no ano letivo de 2003/2004, a dimensão gráfica, as tarefas de investigação e a resolução de problemas assumem um papel acrescido relativamente ao anterior programa. É aí referido que a dimensão gráfica só é atingida quando os estudantes trabalham com uma grande quantidade e variedade de gráficos com apoio à tecnologia adequada (calculadoras gráficas e computadores) (DES, 2001). Esta dimensão gráfica poderá ser atingida se os alunos tirarem o melhor partido dos recursos, que não se esgotam no manual adotado, na calculadora gráfica ou nos computadores, mas que passam também por um conjunto de tarefas propostas pelo professor e de diferentes formas de organização do trabalho.

A inexistência de um conjunto de recursos sistematizados e à disposição dos professores face a esta imposição do ministério é um problema que os professores de matemática enfrentam e procuram resolver com trabalho acrescido, alguma pesquisa e adaptação dos recursos existentes. Todavia, urge uma sistematização refletida e direcionada de tarefas disponível para os vários níveis do ensino secundário.

O objetivo principal deste estudo é a construção, compilação e adaptação de tarefas que visam recorrer às potencialidades da calculadora gráfica no estudo das funções que integram o atual currículo do Ensino Secundário. Foram levantadas as seguintes questões que serviram de referencial a esta investigação:

Que tipo de tarefas deverão ser privilegiadas para desenvolver nos alunos competências com recurso a tecnologias gráficas? Como estruturar essas tarefas? Que conteúdos programáticos devem ser abordados?

Para responder a estas questões levantam-se outras de operacionalização do estudo a levar a cabo. Qual o ano de escolaridade? Qual o nível de uso da calculadora gráfica? Qual o tipo de tarefa? Que itens devem constar em cada tarefa? Como se devem organizar esses itens? Que tipo de funções se deve explorar? Qual a sequência a adotar?

Fica assim equacionada a problemática deste estudo que, segundo Quivy (2003, p. 90) “...equivale a formular os principais pontos de referência teóricos da sua investigação: a sua pergunta que estrutura finalmente o trabalho, os conceitos fundamentais e as ideias gerais que inspirarão a análise.”

5. Pertinência do estudo

No programa de Matemática A do Ensino Secundário (DES, 2001, p.3), destinado a alunos que frequentem o sistema de ensino português do 10º ao 12º ano de escolaridade, são apresentadas como finalidades da disciplina:

- Desenvolver a capacidade de usar a Matemática como instrumento de interpretação e intervenção no real.
- Desenvolver as capacidades de formular e resolver problemas, de comunicar, assim como a memória, o rigor, o espírito crítico e a criatividade.

- Promover o aprofundamento de uma cultura científica, técnica e humanística que constitua suporte cognitivo e metodológico tanto para o prosseguimento de estudos como para a inserção na vida ativa.
- Contribuir para uma atitude positiva face à Ciência.
- Promover a realização pessoal mediante o desenvolvimento de atitudes de autonomia e solidariedade.
- Contribuir para o desenvolvimento da existência de uma consciência crítica e interventiva em áreas como o ambiente, a saúde e a economia entre outras, formando para uma cidadania ativa e participativa.

Este programa (DES, 2001, p. 10) recomenda que o aluno seja agente da sua própria aprendizagem, e propõe uma metodologia em que:

- Os conceitos são construídos a partir da experiência de cada um e de situações concretas.
- Os conceitos são abordados sob diferentes pontos de vista e progressivos níveis de rigor e formalização.
- Se estabelece maior ligação da Matemática com a vida real, com a tecnologia e com as questões abordadas noutras disciplinas, ajudando a enquadrar o conhecimento numa perspetiva histórico-cultural.

Este programa de Matemática A para o Ensino Secundário recomenda que as atividades propostas a cada estudante e a grupos de estudantes contemplem a modelação matemática, o trabalho experimental e o estudo de situações reais sobre as quais se coloquem questões significativas e se fomente a resolução de problemas não rotineiros. O programa, ao longo dos três anos, aborda os seguintes temas: números e geometria, incluindo vetores e trigonometria; funções reais e análise infinitesimal, estatística e probabilidades.

Ao longo deste trabalho vamos-nos debruçar sobre os temas trigonometria, funções e estatística, por se tratar de conteúdos deste ciclo que muito podem beneficiar do recurso a tecnologia gráfica. Muitas das tarefas propostas abordam o tema funções segundo diferentes pontos de vista – gráfico, numérico e algébrico – e com diferentes graus de complexidade, desde as algébricas inteiras (que são tratadas no 10º ano), passando pelas fracionárias e acabando nas transcendentais – exponenciais e logarítmicas ou trigonométricas que incorporam o currículo do 12º ano.

As tarefas propostas abordam também temas transversais que integram a revisão de literatura deste estudo: Comunicação Matemática, Aplicações e Modelação Matemática, Lógica e Raciocínio Matemático, Resolução de Problemas, Atividades investigativas e Tecnologias e Matemática e que estão no programa.

Porque considero importante o desenvolvimento da comunicação, uma grande parte das tarefas do meu estudo dá ênfase a essa competência matemática. Em algumas das tarefas é solicitado ao aluno a justificação de processos de resolução, o encadear de raciocínios e a confirmação de conjecturas. Assim, ao lado do desenvolvimento da comunicação matemática, o aluno desenvolve a lógica e o raciocínio. Na minha opinião, o professor deve levar o aluno a verbalizar os raciocínios e discutir processos de resolução, confrontando-os com os raciocínios dos seus colegas. O aluno deve ser capaz de argumentar com lógica e recorrer, sempre que tal for aconselhável, à linguagem simbólica. Em algumas das tarefas é solicitada a elaboração de um relatório. Cada aluno deve receber do professor estímulo e oportunidade para falar, escrever, ler e ouvir nas aulas, de modo a organizar, consolidar e ampliar o seu conhecimento matemático.

Outro ponto forte do conjunto de tarefas propostas é a resolução de problemas porque acredito que este deve constituir um objetivo central nas práticas dos professores, já que se trata de um método fundamental e é considerado no programa não só como indicação metodológica mas também como tema. A resolução de problemas cria um ambiente propício à aprendizagem,

proporcionando aos alunos a capacidade de raciocinar matematicamente e de usar a Matemática em situações diversas. Algumas das tarefas que classifico de problema, além de constituírem uma motivação para a aprendizagem, privilegiam a comunicação oral e escrita. Muitas dessas tarefas apelam à interdisciplinaridade com as disciplinas de Física, de Economia e de Geometria Descritiva, meio privilegiado para desenvolver o espírito de pesquisa.

Destaco também as tarefas que podem contribuir para o desenvolvimento do pensamento científico, levando o aluno a intuir, conjecturar, experimentar, provar, avaliar e ainda para reforçar atitudes de autonomia e de cooperação. Assim, na proposta das tarefas apresentadas neste estudo tive em conta as finalidades e as metodologias descritas anteriormente. As tarefas classificadas de exploração constituem um modo privilegiado de reforçar uma abordagem do método científico.

As tarefas de modelação apresentadas deverão ser realizadas na aula, já que algumas delas exigem a utilização de sensores de recolha de dados acoplados a calculadoras gráficas ou computadores, inexistentes em casa dos alunos. Em algumas delas, os alunos vão identificar “modelos matemáticos que permitam a sua interpretação”. Não pretendemos com estas tarefas substituir o cálculo de papel e lápis pelo cálculo com apoio à tecnologia, mas sim complementar adequadamente os diferentes processos de cálculo, sem esquecer o cálculo mental, que consideramos da maior importância.

Como limitações a este estudo apresentamos o facto de não ter sido feita uma experimentação em contexto letivo, sistematizado de todas as tarefas.

Capítulo 2 – Revisão de literatura

Introdução

Para realizar este estudo necessitei de aprofundar alguns conceitos de modo a clarificar a sua utilização ao longo do texto produzido. Assim surgem os subtemas: tarefa e atividade, competência e competências, raciocínio matemático e funções, calculadora gráfica e funções, representação e visualização, comunicação, exercícios, problemas, investigação, exploração e modelação.

1. Tarefa e atividade

Assistimos muitas vezes a discussões sobre estratégias e metodologias para a aula de matemática, em que os conceitos de tarefa e de atividade são utilizados indistintamente. Mas, na realidade, estes termos não significam exatamente o mesmo. Ponte (1995, p. 36) estabelece a seguinte distinção: “A atividade, que pode ser física ou mental, diz respeito essencialmente ao aluno, referindo-se àquilo que ele faz num determinado contexto. A tarefa representa apenas o objectivo de cada uma das ações em que a atividade se desdobra e é algo basicamente exterior ao aluno (embora possa ser decidido por ele). Na verdade, as tarefas são muitas vezes propostas pelo professor. Mas, uma vez propostas, têm de ser interpretadas pelo aluno e podem dar origem a atividades muito diversas (ou nenhuma atividade) ”.

Podemos considerar a tarefa como o trabalho pensado, criado e proposto pelo professor, tendo em vista a promoção da aprendizagem, ou seja, tarefa é o meio para desenvolver a atividade do aluno. Penso que um objetivo do professor seja, então, o de propor tarefas que incentivem os alunos a envolver-se numa verdadeira e rica atividade de aprendizagem. As tarefas distinguem-se pelo modo como são apresentadas aos alunos, como estes as trabalham e como servem de base à discussão e construção de novo conhecimento. Especialmente importante é que as tarefas sejam inter-relacionadas, apresentadas em sequências coerentes (cadeias de tarefas), de modo a proporcionarem um percurso de trabalho propício à aprendizagem. Quando propomos uma tarefa,

temos em conta um determinado objetivo que o aluno deve atingir, desenvolvendo várias atividades para atingir esse fim. Nos Princípios e Normas para Matemática Escolar são indicadas as seguintes características e tarefas matemáticas de qualidade:

- Apela à inteligência dos alunos;
- Desenvolvem a compreensão e aptidão matemática;
- Estimulam os alunos a estabelecer conexões e a desenvolver um enquadramento coerente para as ideias matemáticas;
- Apela à formulação e resolução de problemas e ao raciocínio matemático;
- Promovem a comunicação sobre Matemática;
- Mostram a Matemática como uma atividade humana permanente;
- Têm em atenção diferentes experiências e predisposições dos alunos;
- Promovem o desenvolvimento das predisposições de todos os alunos para fazer matemática.

(NCTM, 1994, p. 27)

As Normas Profissionais (NCTM, 1994) recomendam que o professor diversifique, na medida do possível, as tarefas a propor aos alunos.

Ponte (2005) refere que a diversidade das tarefas é necessária, porque cada um dos tipos de tarefa desempenha um papel importante para alcançar certos objetivos curriculares. As tarefas de natureza mais fechada por exemplo algum tipo de exercícios são importantes para o desenvolvimento do raciocínio matemático nos alunos, uma vez que este raciocínio se baseia numa relação estreita e rigorosa entre dados e resultados. Por outro lado, as tarefas do tipo exercícios possibilitam a todos os alunos um elevado grau de sucesso, contribuindo para o desenvolvimento da

sua autoconfiança. Em sua opinião, as tarefas de natureza mais desafiante (investigações e problemas) são indispensáveis para que os alunos tenham uma efetiva experiência matemática.

2. Competência e competências

O vocábulo “competência” faz parte do nosso léxico, quer no âmbito das questões de investigação educacional, quer no próprio senso comum – mas não existe uma definição consensual acerca do conceito de competência. Habitualmente é utilizada para designar uma pessoa qualificada para realizar alguma coisa. Competente é o indivíduo capaz de mobilizar e pôr em ação um sistema em que intervêm diversos recursos, quer sejam operações de raciocínio; conhecimentos; ativações da memória; juízos e avaliações; capacidades relacionais; esquemas comportamentais. Nestes termos, a competência não é um estado, é um processo. O exercício de uma competência é determinado pela própria mobilização dos recursos e não apenas a existência dos recursos a mobilizar, por exemplo: conhecimentos; operações; capacidades.

Com a evolução da sociedade, vão sendo colocados à escola novos desafios e novas exigências. Enquanto no passado, no que diz respeito ao processo de ensino e aprendizagem da matemática, se privilegiava a aquisição de conhecimentos e a capacidade de os reproduzir de forma correta e rápida, hoje, reconhece-se como indispensável ser-se capaz de operar em contextos complexos, dinâmicos e integrados. É neste contexto que, em Portugal, em 2001, se pode encontrar expresso em documentos curriculares oficiais o termo de “competência”. Como pode ler-se no Decreto-Lei nº6/2001, (p. 259) que estabelece a reorganização curricular no ensino básico, o currículo nacional entendido como “o conjunto de aprendizagens e competências, integrando os conhecimentos, as capacidades e as atitudes e os valores a desenvolver pelos alunos ao longo do ensino básico”. Mas o termo “competência” é usado, quer nos documentos para o Ensino Básico, quer para o Ensino Secundário. Perrenoud (1996), citado por Serrazina e Oliveira (2005) define competência como conjunto dos recursos que mobilizamos para agir. O conhecimento científico e o conhecimento do senso comum, fazem parte desses recursos, não os esgotando.

Segundo Roldão (2004, p. 20), “existe competência (ou competências) quando, perante uma situação, se é capaz de mobilizar adequadamente diversos conhecimentos prévios, seleccioná-los e integrá-los adequadamente perante aquela situação (ou problema, ou questão, ou objeto cognitivo ou estético, etc.)”.

Competência poderá ser então a capacidade de seleccionar, mobilizar e integrar os diferentes tipos de conhecimentos aquando do desenvolvimento de uma tarefa. Trata-se de um processo construído, que normalmente não se perde. Valoriza-se, deste modo, o envolvimento dos alunos em diversas experiências de aprendizagem, tais como em atividades de investigação e em atividades de trabalho de projeto.

Segundo Leonor Santos (2003), nos normativos curriculares portugueses podem ser identificadas algumas características associadas ao conceito de competência:

- Ação – associada a um ato de agir; Situação com um certo nível de complexidade – associada à decisão, de forma consciente, dos recursos que se devem disponibilizar perante uma situação não rotineira;
- Integração – perspectiva holística da atividade intelectual, estando presentes, conhecimentos, capacidades e atitudes.

Perrenoud (1999), ao procurar clarificar o conceito de competência, fala de “invenção bem temperada”, querendo com isto dizer que quando estamos face a uma situação nova o que procuramos fazer em primeiro lugar é estabelecer uma analogia com outra situação que já conhecemos no passado. Em seguida, mobilizamos recursos idênticos ao que fizemos anteriormente. Mas apenas isso não chega. Se a situação é nova, ela tem algo diferente da anterior. É então que devemos introduzir um certo nível de criatividade, de forma a sermos capazes de responder à situação no que ela tem de singular e de distinto quando comparada com todas as anteriores por nós conhecidas.

As competências podem ser desenvolvidas ao longo de todo um ciclo, ou mesmo ao longo de vários ciclos. Definem o que o aluno será capaz de fazer com os saberes construídos. Trata-se de um processo continuado, com diversos níveis ou graus de desenvolvimento, já que a competência pressupõe o agir em situação, mobilizando, nessa ação, de forma equilibrada e integrada, conhecimentos, capacidades, procedimentos e atitudes.

3. O raciocínio matemático na aprendizagem do conceito de função

O conceito de função é um dos mais importantes da matemática, constituindo uma poderosa ferramenta para representar e interpretar situações, tanto da realidade como da própria matemática que envolvam relações entre variáveis. Caraça (1951, p. 112) refere que “uma das tarefas mais importantes no trabalho de investigação da Natureza é a procura de regularidades dos fenómenos naturais” e indica que o conceito de função surge como o instrumento próprio para o estudo das leis quantitativas que dão significado à realidade. No entanto, este é um conceito no qual os alunos revelam dificuldades, quer na sua compreensão abstrata, quer na sua aplicação à resolução de problemas.

Para analisar o raciocínio matemático envolvido na aprendizagem do conceito de função, torna-se necessário compreender o processo de desenvolvimento desse conceito. Vários autores se têm debruçado sobre esse processo e construído teorias sobre o desenvolvimento de conceitos matemáticos em geral (Gray e Tall, 1994; Sfard, 1991, Slavit, 1997). Essas teorias assentam no pressuposto da dualidade processo-objeto inerente aos conceitos matemáticos e sugerem que a dificuldade dos alunos na compreensão do conceito de função pode resultar desta natureza dual. Nesta perspetiva, uma função pode ser entendida de duas formas: como conceito matemático, operacionalmente, como um processo, e estruturalmente, como um objeto (Sfard, 1991).

O conceito de função pode ser entendido como um processo computacional ou um método para obter um valor a partir de outro valor dado. Do ponto de vista estrutural, o conceito de função é associado a um conjunto de pares ordenados e envolve o trabalho com representações gráficas,

acompanhadas pela correspondência simbólica de certos parâmetros. Estes dois modos diferentes de entender o conceito de função, complementam-se.

Segundo Sfard (1991), na gênese da maioria dos conceitos matemáticos é possível encontrar estas duas formas de pensamento matemático: uma concepção operacional (na qual as noções são concebidas como um produto de certos processos ou são identificadas com os próprios processos) e uma concepção estrutural. A partir desta dualidade processo-objeto, a autora propõe um modelo de desenvolvimento conceitual, que designa por Teoria da Reificação, segundo o qual, em primeiro lugar, emerge a concepção operacional e esta, por meio da interiorização dos processos, evolui para uma concepção estrutural. Assim, o conceito de função é adquirido inicialmente de forma operacional e só mais tarde assume a sua forma estrutural, encarando uma função como um objeto matemático. Esta evolução é lenta e dá-se em três fases contínuas: interiorização, condensação e reificação. Cada uma destas fases não pode ser alcançada sem que a anterior tenha sido ultrapassada.

No que respeita ao conceito de função, o aluno encontra-se na fase de interiorização quando aprende a noção de variável e adquire a “capacidade de usar uma fórmula para encontrar valores da variável dependente” (Sfard, 1991, p. 19) a partir de manipulações algébricas. Nesta fase, os processos são realizados em objetos matemáticos elementares e familiares. Estes processos vão-se tornando cada vez mais acessíveis para o aluno, à medida que ele vai desenvolvendo as suas destrezas, até ser capaz de pensar sobre o que aconteceria sem ter de os efetuar. Segundo esta teoria, “o processo foi interiorizado quando puder ser realizado através de representações mentais, e quando para poder ser considerado, analisado e comparado, não precisar de ser efetuado no momento” (Sfard, p. 18).

Na fase de condensação, os processos anteriores sofrem um processo de compressão (*squeezing*), dando origem a entidades autónomas e facilmente manipuláveis. Nesta fase, o aluno desenvolve a capacidade de pensar sobre um dado processo como um todo, em termos de *input-output*, sem necessidade de atender ao que media estes dois estados. Este “é o ponto em que se dá

o nascimento ‘oficial’ de um novo conceito” (Sfard, p. 19). Nesta fase, considera-se que há evolução quando se verifica que o aluno é capaz de combinar facilmente um processo com outros processos já conhecidos, estabelecer comparações, generalizar e alternar entre diferentes representações de um conceito. No caso das funções, quanto mais o aluno for capaz de trabalhar com uma função como um todo, mais avançado está no processo de condensação, sendo capaz de “investigar funções, desenhar os seus gráficos, combinar pares de funções (por exemplo, por composição), até encontrar a função inversa de uma dada função” (Sfard, p. 19).

A reificação acontece quando o aluno consegue ver a nova entidade matemática como um objeto completo e autónomo com significado próprio. Assim, o conceito de função é reificado pelo aluno quando este consegue compreender as diversas representações que uma função pode assumir (passando facilmente de uma representação a outra), quando é capaz de resolver equações funcionais (onde as ‘incógnitas’ são funções), quando revela “capacidade de falar acerca de propriedades gerais de diferentes processos realizados com funções (tais como composição ou inversão) e pelo derradeiro reconhecimento de que os cálculos algébricos não são uma característica necessária dos conjuntos de pares ordenados que definem funções” (Sfard, p. 20). Esta última fase ocorre de uma forma instantânea (não gradual), e pode ser definida “como sendo uma mudança ontológica – uma súbita capacidade de ver algo familiar numa perspetiva totalmente nova” (Sfard, p.19).

Uma alternativa para a reificação do conceito de função é proposta por Slavit (1997), não como uma nova teoria, mas como uma nova interpretação das teorias existentes. Este autor defende que uma função pode ser descrita pelas suas propriedades locais e globais, uma vez que o estudo das propriedades é fundamental para caracterizar famílias de funções. Propõe assim uma visão de função orientada pelas propriedades, que é baseada em aspetos visuais de crescimento funcional, sugerindo que os alunos compreendem o conceito de função transformando as suas experiências em compreensões de propriedades específicas.

Segundo Slavit (1997), os alunos podem compreender as funções como entidades que possuem, ou não, certas propriedades (como zeros, simetrias, assíntotas e outros tipos de comportamentos). Por exemplo, os alunos podem dizer o que são funções lineares descrevendo todas as propriedades que estas funções possuem. Quando um aluno, através de várias experiências, se familiariza com certas propriedades das funções, pode ver uma função como um objeto (mesmo fora do contexto dos exemplos de funções estudados) com ou sem essas propriedades. À medida que os alunos vão conhecendo novas famílias de funções, conhecem também novas propriedades, as quais serão generalizadas de modo a desenvolver uma visão mais geral de função.

Na perspectiva de Slavit, uma função quadrática, por exemplo, seria vista como uma função contínua, com um único extremo, no máximo dois zeros e um eixo de simetria. Os estudantes adquirem esta visão observando propriedades de vários exemplos de funções quadráticas e não quadráticas. Quando estudam outras funções (por exemplo, polinomiais de grau superior a dois, exponenciais e logarítmicas, trigonométricas, irracionais e módulo), aumentam as propriedades funcionais conhecidas, o que fortalece a compreensão global das funções. Slavit (1997) realizou um estudo que indica que alguns alunos do ensino secundário reificaram determinados tipos de funções usando noções orientadas pelas propriedades.

Os modelos de desenvolvimento concetual de Sfard e de Slavit sugerem que para que os alunos aprendam de forma significativa os conceitos matemáticos, nomeadamente o conceito de função, é necessário que os vejam como objetos abstratos, deixando de os confundir com a sua representação. Desta forma, para alcançarem uma plena compreensão deste conceito, os alunos precisam de desenvolver um trabalho gradual e intenso, com os vários processos inerentes à aprendizagem do conceito. Assim, podem beneficiar de experiências informais antes da manipulação algébrica formal, explorando diversas situações funcionais em contexto e resolvendo vários tipos de problemas.

4. A calculadora gráfica no estudo das funções

O programa de Matemática do Ensino Secundário de 2002 sugere, como metodologia, a utilização da calculadora gráfica “A utilização obrigatória da tecnologia que, além de ferramenta, é fonte de atividade, de investigação e de aprendizagem, pretende também preparar os estudantes para uma sociedade em que os meios informáticos terão um papel considerável na resolução de problemas de índole científica.” (DES. 2001, p. 10).

Refere ainda que:

“É considerado indispensável o uso de:

- Calculadoras gráficas (para trabalho regular na sala de aula ou para demonstrações com todos os estudantes, usando uma calculadora com “*view-screen*”);
- Uma sala de computadores com “*software*” adequado para trabalho tão regular quanto possível;
- Um computador ligado a um “*data-show*” ou projetor de vídeo (para demonstrações, simulações ou trabalho na sala de aula com todos os alunos ao mesmo tempo).” (DES.2002, p. 15).

A calculadora gráfica, como meio de pesquisa e não apenas como simples instrumento de cálculo, tem um papel importante na exploração das tarefas propostas. No passado, os recursos utilizados no ensino e aprendizagem da Matemática eram essencialmente o quadro, o lápis, a borracha e o papel. Atualmente, existem outros recursos que, em situações específicas, se tornam imprescindíveis na sala de aula – designadamente as calculadoras. Assim, a Matemática passou a ser ensinada de forma mais experimental e recorrendo cada vez mais à visualização.

As calculadoras gráficas, usadas de uma forma adequada e eficaz, podem modificar aquilo que os alunos aprendem, a forma como aprendem e como são ensinados.

O programa de Matemática A indica que as calculadoras gráficas permitem a “condução de experiências matemáticas, elaboração e análise de conjecturas; investigação e exploração de várias ligações entre diferentes representações para uma situação problemática” (Ministério da Educação, 2001, p.16).

Quando a tecnologia é bem utilizada, o aluno aprende Matemática de forma mais significativa. Isto só é possível se o professor tiver consciência das limitações da tecnologia e um conhecimento sólido das razões que estão por detrás de determinados resultados que podem ser enganadores. É necessário ajudar os alunos a desenvolverem um espírito crítico de forma a detetarem esse tipo de informação. Os alunos devem ter oportunidade de compreender que aquilo que a calculadora apresenta no ecrã pode ser uma visão distorcida da realidade. Segundo Rocha (2001, p. 22) “Compreender o que é o gráfico de uma função e saber interpretar a informação que este nos disponibiliza, efetuando uma leitura adequada da respetiva escala, é muito diferente de perceber que o gráfico de qualquer função, por mais curvo que seja, pode ser visualizado como uma reta, desde que limitemos a nossa observação a uma zona adequadamente escolhida”.

A calculadora gráfica faz com que o foco das tarefas com gráficos seja transferido da construção recorrendo a papel e lápis para a interpretação desses mesmos gráficos. Entendemos por interpretação de um gráfico a capacidade de colocar na forma verbal a informação dada na forma gráfica – é descrever por palavras, a relação entre duas variáveis. Acreditamos que o recurso à visualização gráfica pode melhorar o processo de ensino e de aprendizagem da Matemática por permitir a criação de representações mentais ricas dos conceitos. Por exemplo, no desenvolvimento das tarefas sobre famílias de funções, os alunos poderão estabelecer conjecturas e observarem mudanças que ocorrem na representação gráfica quando se alteram os diferentes parâmetros.

Segundo Carvalho (2006), os alunos têm dificuldade em interpretar a informação dada através de uma representação gráfica. Interpretar adequadamente um gráfico que, parecendo ser uma representação global de uma função não o é (por exemplo, o gráfico de um polinómio do terceiro

grau pode ser visualizado como se tratasse de uma parábola), não levanta problemas a alunos habituados a refletir e a enquadrar as diferentes informações recolhidas, pelas múltiplas representações. No entanto, para os alunos que abordam as questões de forma um pouco automática, sem ter a preocupação de refletir sobre elas, a situação já se torna mais complexa.

Muitas das tarefas que necessitam recorrer à calculadora gráfica têm como objetivo o envolvimento ativo dos alunos na formulação de conjecturas, na investigação e exploração de ideias que os leve a discutir e pôr em questão a sua própria maneira de pensar e também a dos outros, a validação de resultados e a construção de argumentos convincentes (NCTM, 1991). Essas tarefas têm, de uma maneira geral, um caráter investigativo e exploratório.

Segundo Carvalho (2006), as tarefas a desenvolver com recurso à calculadora gráfica podem originar momentos ricos de reflexão que ajudem a construção de conceitos em detrimento da resolução de exercícios rotineiros. Assistimos, muitas vezes, a uma utilização da calculadora muito redutora reproduzindo apenas técnicas já adquiridas – a perspectiva de uma Matemática mecanicista e desligada da compreensão dos conceitos. Podemos mesmo afirmar que, por vezes, quer alunos quer professores atribuem à calculadora gráfica um papel secundário o que, certamente, vai ter consequência no processo de ensino e aprendizagem.

É muito importante o modo como se investiga na sala de aula e o lugar que é atribuído à tecnologia gráfica. De uma maneira geral, os alunos que mais questionam, que estabelecem mais conjecturas, que revelam mais espírito crítico, têm mais facilidade em explorar, relacionar e integrar a informação disponibilizada pela calculadora.

Como refere Gómez “As calculadoras podem contribuir para desenvolver a compreensão dos alunos através de um processo melhorado de ensino/aprendizagem. Contudo, este não é um efeito imediato. Isto é, não é apenas pela simples introdução das calculadoras gráficas na sala de aula que se obtém efeitos positivos do seu uso” (citado em Semião, 2007, p. 28).

Como já foi sublinhado, uma das grandes dificuldades com que os alunos se deparam quando utilizam a calculadora gráfica é a escolha de uma janela de visualização. Por isso, este aspeto não pode deixar de merecer uma atenção especial. É importante que os alunos se apercebam do efeito que a mudança da janela de visualização pode ter no aspeto do gráfico e, em particular, de como essa mudança o pode “deformar”. É necessário procurar a janela de visualização que proporcione uma “leitura” e análise das características principais de uma função. Por isso, os alunos devem ser incentivados a alterar a janela de visualização de modo a facilitar não apenas uma visão mais completa da função, mas permitir uma leitura mais pormenorizada de aspetos relevantes da função em estudo.

O professor deve dar alguma atenção à escolha das primeiras tarefas a propor com recurso à calculadora e às conceções erróneas que os alunos podem desenvolver. Propostas de trabalho bastante diversificadas darão, provavelmente, origem a uma variedade de atuações, contribuindo assim para uma melhor compreensão do funcionamento da calculadora gráfica. Certamente não deixarão de surgir situações que obriguem a considerar, por exemplo, uma grande discrepância entre os valores representados nos dois eixos coordenados ou então valores muito grandes ou, pelo contrário, muito pequenos. Estas situações contribuirão para alcançar uma maior flexibilidade na utilização da calculadora, à medida que os alunos se apercebem que, consoante as circunstâncias, algumas estratégias são mais eficazes do que outras. Tal como refere Semião (2007, p. 29) “Usando as tecnologias, os alunos podem raciocinar acerca dos assuntos mais gerais, como mudança de parâmetros, e podem criar modelos e resolver problemas que outrora eram inacessíveis. Assim, os alunos podem focar-se na tomada de decisões, na reflexão, no raciocínio, na resolução de problemas e nas atividades de investigação ao nível da geometria, estatística, álgebra, cálculo, ...”

A compreensão do funcionamento da calculadora envolve muitos conhecimentos matemáticos e permite ainda o aprofundamento de muitos outros. Desprezar a forma como a tecnologia é utilizada, é quase como desprezar o processo e valorizar apenas o resultado alcançado. Não auxiliar

os alunos a evoluir para utilizações mais eficientes, é negar-lhes a possibilidade de aprofundar os seus conhecimentos matemáticos.

5. Representação e visualização

5.1. Representação

Os documentos da reforma do ensino da matemática nos EUA (NCTM, 1991) preocupam-se com as representações como uma forma de ensinar uma Matemática compreensiva.

Na Norma 4 sobre Conexões Matemáticas para os anos 9-12 encontramos: “Nos anos de escolaridade 9-12 o currículo de matemática deve incluir o estudo das conexões e das interações entre os vários temas matemáticos e as suas aplicações, de modo que todos os alunos: Reconheçam representações equivalentes do mesmo conceito; Relacionem procedimentos representados de uma determinada forma com procedimentos em representações equivalentes.”

Esta norma realça a importância das conexões entre os temas matemáticos e entre a Matemática e as outras disciplinas. São indicadas, como importantes, dois tipos genéricos de conexões: (1) conexões de modelação entre situações problemáticas que surgem no mundo real ou noutras disciplinas e as representações matemáticas; e (2) conexões entre duas representações matemáticas equivalentes e entre os correspondentes processos em cada uma.

“Os alunos que são capazes de aplicar diferentes representações da mesma situação problemática ou do mesmo conceito matemático e de traduzir umas nas outras, disporão de um conjunto de instrumentos flexível e poderoso. Ao mesmo tempo, o seu apreço pela consistência e beleza da matemática será mais aprofundado” (NCTM,1991, p. 175).

De acordo com esta proposta de ensino devem ser exploradas com os alunos as relações entre as diferentes representações do mesmo conceito, sem esquecer que as conexões entre a Análise e a Geometria são das mais importantes. As calculadoras gráficas permitem que os alunos resolvam graficamente muitos problemas que, tradicionalmente, eram resolvidos usando apenas técnicas

algébricas. O estudo dos gráficos proporcionado por estas tecnologias muda as competências de manipulação algébrica para estabelecer conexões entre as representações algébrica e geométrica.

As múltiplas representações construídas pelos alunos, no que diz respeito ao tema funções podem enriquecer a sua compreensão. Uma função pode ter múltiplas representações: uma descrição verbal, uma tabela de valores, uma expressão algébrica e um gráfico. Uma descrição verbal utiliza a linguagem comum para nos dar uma visão descritiva do conceito. A tabela dá-nos uma visão quantitativa, facilmente interpretável do ponto vista de uma correspondência – identificação de pares de valores – mas, na maior parte dos casos, parcial e insuficiente, uma vez que a partir dela dificilmente podemos extrair as características gerais da função. As representações algébricas e gráfica de uma função podem proporcionar uma visão mais global da função.

As múltiplas representações de funções, usadas refletidamente, podem reduzir ambiguidades que podem ser originadas face a uma única representação. O conceito de função deve ser desenvolvido apresentando as suas múltiplas representações de modo a proporcionar uma rica compreensão desse conceito. Como refere Domingos, (1994, p. 210) “A utilização de múltiplas representações vem desenvolver nos alunos a capacidade de as interligar, conseguindo distinguir a mesma função em representações diferentes, e a facilidade em criar imagens mentais que permitem utilizar as características das funções em campos para além daqueles em que foram aprendidas”.

Segundo Ferrini-Mundi e Lauter “Alguns estudos têm mostrado que, embora possuindo o conhecimento de que uma função pode ter múltiplas representações, os alunos estabelecem fracas conexões entre essas representações – Por exemplo, traçar o gráfico de uma função a partir da sua representação analítica é, geralmente, fácil para os alunos. Mas, a partir da representação gráfica de uma função obter uma fórmula que a defina tem-se manifestado uma tarefa difícil. Muitas vezes as representações analíticas e gráficas são vistas, pelos alunos como independentes e podem mesmo usar métodos contraditórios de raciocínio em cada um dos cenários. Os alunos devem ser

encorajados a trabalhar em ambos os cenários e a transferir ideias facilmente entre eles.” (citados em Fernandes, 1997, p. 47)

As calculadoras gráficas, usadas de forma apropriada, podem ter um impacto positivo nas traduções entre as múltiplas representações das funções.

Citando NCTM (1998), o programa de Matemática deve dar ênfase às representações para promover a compreensão da Matemática de modo a que todos os alunos:

- criem e usem representações para organizar, registrar e comunicar ideias matemáticas;
- desenvolvam um reportório de representações matemáticas que possam ser usadas de modo flexível e apropriado na resolução de tarefas concretas;
- usem representações para modelar e interpretar fenómenos físicos, sociais e matemáticos.

(NCTM, 1998, p. 94),

Os Princípios e Normas para Matemática Escolar incluem normas que remetem para as representações e acentuam a importância da utilização de múltiplas representações na aprendizagem da Matemática. “Os gráficos transmitem certos tipos de informação visual, enquanto as expressões simbólicas poderão ser mais facilmente manipuladas, analisadas e transformadas”. (NCTM, 2007, p. 42)

A compreensão de um objeto matemático como uma função requer uma diversidade de representações semióticas. É a diversidade das representações que dá significado a um objeto matemático, desde que cada representação diferente descreva diferentes aspetos do objeto (Duval, 2002). É fundamental que os alunos trabalhem com diversas representações de funções de modo a poderem ultrapassar as várias dificuldades, pois as diferentes representações complementam-se e, no seu conjunto, contribuem para uma plena compreensão – reificação – do conceito de função.

Para se conhecer o comportamento global de uma função é necessário obter representações gráficas adequadas, utilizando as potencialidades da calculadora gráfica.

5.2. Visualização

A visualização matemática é referida por Cunningham e Zimmermann (citado em Domingos, 1994) como sendo a capacidade dos alunos de desenhar um diagrama apropriado (mentalmente, com papel e lápis ou com base no computador) para representar um conceito matemático ou problema e usá-lo para alcançar compreensão. A visualização matemática é, assim, um processo de formar imagens e utilizá-las eficazmente na descoberta e compreensão matemáticas. Na Matemática em geral, e nas funções em particular, o raciocínio visual parece ter um papel importante, chegando mesmo a serem aceites como prova, argumentos visuais.

Segundo Tall (citado em Fernandes, 1997, p. 54) “É possível usar o poder complementar da visualização para dar uma percepção global de alguns conceitos matemáticos. Para ter sucesso em Matemática, é desejável ter representações mentais ricas dos conceitos. Os alunos que trabalham com poucas imagens mentais não estão realmente a aprender Matemática. O seu cálculo consiste numa vasta série de algoritmos e num complicado sistema de regras que lhes diz que procedimento usar e quando. A visualização pode ajudar a criar representações mentais ricas de conceitos, concretamente dos que dizem respeito às funções e aos seus gráficos.”

Muitas vezes os alunos não fazem a ligação do pensamento visual com o pensamento analítico. Este comportamento reflete, por vezes, o ensino que lhe é ministrado, onde há uma subvalorização do raciocínio visual. Há razões que podem explicar porque é que os professores não utilizam argumentos visuais. “De uma maneira geral, o argumento analítico é pequeno, simples e elegante, dá resultado sem grandes complicações. É fácil de aprender para o aluno, fácil de aplicar em exercícios. É também fácil de ensinar. Corresponde àquilo que os alunos esperam de uma prova matemática e, em princípio, não conduz a grandes discussões” (Eisenberg, citado em Fernandes, 1997, p. 56).

6. Comunicação

A Matemática é uma disciplina com uma linguagem própria, que deve ser compreendida pelos alunos. É esta linguagem que os alunos mais temem, porque, a maioria das vezes, ela é usada de forma desarticulada. A comunicação na aula de Matemática permite aos alunos interagir entre si e com o professor, expondo, esclarecendo e partilhando ideias. Quando um aluno comunica as suas ideias aos outros está a interiorizar de forma completa o que está a explicitar. Segundo Ponte e Serrazina (2000, p. 59): “A comunicação é um processo matemático transversal a todos os outros. Por seu intermédio, as ideias matemáticas são partilhadas num determinado grupo e, ao mesmo tempo, são modificadas, consolidadas e aprofundadas por cada indivíduo. Além disso, a comunicação permite-nos entender o nosso conhecimento matemático, considerando e interagindo com as ideias dos outros”.

De acordo com o NCTM (1998) a comunicação assume nas aulas de Matemática um papel primordial. Pode ler-se: “O programa de Matemática deve usar a comunicação para promover a compreensão da Matemática, de modo a que todos os alunos:

- organizem e consolidem o seu pensamento matemático para comunicar com os outros;
- expressem as suas ideias matemáticas de modo coerente e clara para os colegas, os professores e outras pessoas;
- alarguem o seu conhecimento matemático, considerando o pensamento e as estratégias dos outros;
- usem a linguagem matemática como meio de expressão matemática”. (NCTM, 1998, p. 98)

7. Exercícios

Segundo Ponte (2005) exercícios podem ser consideradas tarefas mais rotineiras nas quais pouco mais se faz do que repetir procedimentos. São tarefas geralmente curtas, de natureza fechada, mais focalizadas num conceito. São, muitas vezes, propostas pelo professor em momentos

distintos da aula e podem ser realizadas individualmente ou em pares. No estudo de Boavida (1993, p. 255), os professores consideram, de uma forma unânime, os exercícios como uma tarefa “mais ou menos rotineira, de aplicação direta de conceitos, regras e procedimentos anteriormente ensinados” que visa, essencialmente ajudar os alunos a compreender e consolidar conceitos e ideias matemáticas, bem como ganhar alguma destreza de cálculo. No entanto, os exercícios repetitivos podem criar uma aparente ilusão de segurança. O facto de um aluno resolver, com sucesso, alguns exercícios pode não significar que os conceitos envolvidos estejam ou fiquem compreendidos. Assim, este tipo de tarefa pode ficar muito aquém do desenvolvimento de capacidades matemáticas significativas.

Nos programas atuais de Matemática é feita alguma reserva ao papel dos exercícios, alertando para os perigos da mecanização e do aprofundamento por repetição. Durante longos anos, esta foi a prática dominante na aula de Matemática – atividade centrada na repetição de processos originando o desenvolvimento de competências de nível pouco elevado. Neste momento, existe uma forte conotação negativa ligada à resolução de exercícios. Contudo, o exercício pode ser encarado no seu significado “ato de exercer” ou de se “exercitar”, e ser considerado como uma das vertentes necessárias à aprendizagem. Há momentos em que os alunos precisam treinar, mas precisam também, e sobretudo, explorar exemplos e contra exemplos, estabelecer conexões adequadas, visualizar, raciocinar e generalizar.

Segundo Ponte (2005, p. 14), “os exercícios servem para o aluno pôr em prática os conhecimentos já anteriormente adquiridos. Servem essencialmente um propósito de consolidação de conhecimentos. No entanto, para a maioria dos alunos, fazer exercícios em série não é uma atividade muito interessante. Reduzir o ensino da Matemática à resolução de exercícios comporta grandes riscos de empobrecimento nos desafios propostos e de desmotivação dos alunos. Os exercícios têm, por isso, um lugar próprio no ensino da Matemática, mas, como sublinha Silva (1964),

mais importante do que fazer muitos exercícios será fazer exercícios cuidadosamente escolhidos, que testem a compreensão dos conceitos fundamentais por parte dos alunos.”

Segundo Pires (2001), os exercícios são caracterizados como tarefas de um maior grau de rotina, de formulação explícita e de um menor grau de dificuldade e de exigência cognitiva, nos quais os objetivos estão bem definidos, permitindo pouca exploração e investigação. Para esta autora, o principal objetivo da resolução de exercícios deve ser compreensão, por parte dos alunos, das ideias matemáticas e a sua análise segundo várias perspectivas, proporcionando-lhes a aquisição de diversas ferramentas matemáticas. Nesta perspectiva, considera fundamental a diversificação dos exercícios no sentido destes abarcarem situações de aprendizagem diferenciadas e de promoverem conexões entre os diferentes conteúdos, tornando-se assim mais do que simples tarefas de rotina.

8. Problemas

Segundo Ponte (2000, p. 52): “A resolução de problemas constitui um processo de elevado nível de complexidade, que envolve os processos mais simples de representar e relacionar”.

O problema pode ser caracterizado como uma tarefa, cujo método de resolução não é conhecido antecipadamente. É necessário descobrir o caminho adequado para chegar à meta e, essa descoberta, envolve as dificuldades naturais associadas àquilo que não é rotineiro e desenvolve, com frequência, novos conhecimentos matemáticos. Pólya (citado em Pires, 2001, p. 62) põe a tónica na falta de um caminho óbvio para atingir o objetivo: “Se obter comida não é usualmente um problema na vida moderna, estar sozinho sem dinheiro numa cidade e querer obter comida pode ser um problema, dado que nenhuma ação óbvia ocorre de imediato para atingir o objetivo desejado.

Para resolver um problema o aluno tem que apelar ao conhecimento relevante e procedimental e não apenas a conhecimentos operatórios. A resolução de um problema pode proporcionar aos alunos o consolidar e ampliar os seus conhecimentos e pode estimular a aprendizagem matemática. Nesta linha, no documento *Renovação do Currículo de Matemática*, a APM (1988) considera que um problema deve ativar sempre a curiosidade do aluno a quem é

proposto e a sua resolução deve implicar a procura ou imaginação de uma estratégia apropriada e não apenas a aplicação de uma fórmula ou de processos rotineiros. Neste contexto, O *Currículo Nacional do Ensino Básico* (ME, 2001) apresenta os problemas como situações não rotineiras e cuja resolução pode ser concretizada através de várias estratégias e métodos de resolução, constituindo assim, um desafio para os alunos.

O professor tem um papel fulcral neste processo – se orienta demasiado não estimula a autonomia dos alunos, não proporciona estratégias e métodos próprios, não desenvolve o espírito investigativo (e aquilo que era um problema pode transformar-se num exercício rotineiro); se deixa o campo todo em aberto pode correr o risco do desânimo e da desistência por parte dos seus alunos. Cabe ao professor encontrar o equilíbrio gerador do entusiasmo que conduza a uma verdadeira e rica aprendizagem. Neste contexto o professor desempenha um papel chave, para o melhor e para o pior, como evidencia Pólya, (citado em Pires, 2001, p. 63) “Se o professor preenche o tempo que lhe é concebido a exercitar os seus alunos em operações rotineiras aniquila o interesse e tolhe o desenvolvimento intelectual dos estudantes, desperdiçando, dessa maneira, a sua oportunidade. Mas se ele desafia a curiosidade dos alunos, apresentando-lhes problemas compatíveis com os conhecimentos destes e auxiliando-os por meio de indagações estimulantes, poderá incutir-lhes o gosto pelo raciocínio independente e proporcionar-lhes meios para alcançar este objetivo.”

A publicação *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* (NCTM, 2007, p. 57) faz referência à resolução de problemas como parte integrante de toda a aprendizagem da matemática. Nesta perspetiva, sugere que o professor proporcione aos alunos diversas oportunidades para “ formular, discutir e resolver problemas complexos que requeiram um esforço significativo”, pois este processo matemático permite uma relação mais direta com a Matemática e com tudo o que ela envolve, contribuindo para a progressiva aprendizagem dos alunos.

Para ensinar a resolver problemas, o professor deve dar ênfase a esta temática, relacionando-a com todas as outras exploradas nas suas aulas.

Para resolverem um problema os alunos devem, em primeiro lugar, refletir sobre o que vão fazer, ou seja, devem estabelecer o seu programa de ação. O NCTM (2007) refere que os programas de ensino do pré-escolar ao 12º ano deverão habilitar todos os alunos para:

- Construir novos conhecimentos matemáticos através da resolução de problemas;
- Resolver problemas que surgem em matemática e outros contextos;
- Aplicar e adaptar uma diversidade de estratégias adequadas para resolver problemas;
- Analisar e refletir sobre o processo de resolução matemática de problemas.

Para Pólya (1978), “resolver problemas é uma atividade fundamental. De facto, a maior parte do nosso pensamento consciente relaciona-se com problemas” (Pólya, 1978, pág.139). Ele também afirma que, “resolver problemas é uma habilidade prática, como nadar, esquiar ou tocar piano: você pode aprendê-la por meio de imitação e prática. [...] se você quer aprender a nadar você tem de ir à água e se você quer se tornar um bom “resolvedor de problemas”, tem que resolver problemas.” (Pólya, 1978, p. 65)

Em Portugal, no documento *Renovação do Currículo de Matemática* (APM, 1988, p. 44), propõe-se a resolução de problemas como aspeto central do ensino e aprendizagem da Matemática, em todos os níveis escolares, referindo-se à “resolução de problemas num sentido amplo em que se considera essencial o trabalho à volta de situações problemáticas variadas e envolvendo processos e atividades como experimentar, conjecturar, matematizar, provar, generalizar, discutir e comunicar”. Ainda no programa do Ensino Básico para o terceiro ciclo refere que o “desenvolvimento da capacidade de resolver problemas é um eixo organizador do ensino da Matemática, visando dotar o aluno de um recurso que o ajude a resolver situações de natureza diversa e a enfrentar com confiança situações novas” (ME, 1991, p. 194)

9. Investigação

No atual currículo é proposto aos alunos portugueses o desenvolvimento da capacidade de investigar em Matemática, devendo esta competência ser desenvolvida ao longo da escolaridade básica. De acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2003, p. 13), “investigar é descobrir relações entre objetos matemáticos conhecidos ou desconhecidos, procurando identificar as respetivas propriedades.” Para estes autores, uma investigação matemática desenvolve-se usualmente em torno de um ou mais problemas, havendo assim uma relação estreita entre problemas e investigações.

Segundo o NCTM (1994, p. 27): “As boas propostas de atividades são aquelas que não separam o pensamento matemático dos conceitos matemáticos ou aptidões, que despertam a curiosidade dos alunos e que os convidam a especular e a progredir com as suas intuições”.

Segundo Christianse e Walther, citado em Fonseca (1999, p. 5) uma atividade de investigação envolve habitualmente três fases:

- 1) Introdução da tarefa.
- 2) Desenvolvimento do trabalho.
- 3) Discussão final/reflexão dos resultados.

Ponte (2003) reforça a utilização destas fases referindo que na primeira, “introdução da tarefa”, o professor faz a proposta à turma, oralmente ou por escrito. Segundo o mesmo autor, a primeira fase é de curta duração e o professor deve assegurar-se que todos os alunos compreenderam a proposta de trabalho, ou seja, o que é para fazer.

Na segunda fase que ele denomina de realização da investigação, sugere que os alunos podem desenvolver o seu trabalho individualmente, aos pares, em pequenos grupos ou com toda a turma. O professor perde o papel ativo e são os alunos os principais intervenientes, apesar do professor ajudar na condução da atividade.

Na última fase, à qual atribui a designação de discussão dos resultados, os alunos relatam, partilham e comunicam aos colegas o trabalho realizado e as conclusões que obtiveram, realizam sistematizações e justificam os resultados encontrados. Esta fase tem um papel primordial no trabalho investigativo porque é nela que os alunos desenvolvem a capacidade de comunicar matematicamente e de refletir sobre o seu trabalho.

A respeito do contributo das atividades de investigação e de forma a estabelecer a diferença entre estas e a resolução de problemas Fonseca (1999, p. 4) refere: “Na resolução de problemas tal como é entendida inicialmente, o objetivo é encontrar um caminho para atingir um ponto não inicialmente acessível. É um processo convergente. Numa investigação matemática, o objetivo é explorar todos os caminhos que surgem como interessantes a partir de uma situação. É um processo divergente. Sabe-se qual é o ponto de partida mas não se sabe qual será o ponto de chegada”.

Ao terminar uma aula onde se realizem investigações matemáticas será aconselhável redigir-se um relatório. Este poderá ser executado individualmente ou em grupo e pretende mostrar o trabalho realizado pelos alunos, onde estes sistematizam, por escrito, todos os passos que realizam para chegar à solução e em que reflitam sobre todo o processo vivenciado.

Ponte (2003, p. 111) refere os principais pontos a constar no relatório:

- 1) Tente descrever os passos que seguiu para explorar a tarefa que lhe foi proposta. Procure explicá-los de uma forma clara e organizada. Registe todos os valores com que trabalhou e, nos casos em que tal se mostre adequado, não hesite em apresentar desenhos, tabelas, esquemas ...
- 2) Procure resumir o que aprendeu depois de realizar esse trabalho;
- 3) É também importante organizar um comentário geral em relação a tudo o que fez.

Pode, por exemplo, referir o interesse que a tarefa lhe despertou, quais os aspetos em que teve maior dificuldade e a forma como decorreram o trabalho no grupo.

10. Modelação

O conhecimento da realidade tem um papel importante no processo de ensino e de aprendizagem da Matemática. Assim, ao longo da escolaridade, os alunos devem ser confrontados com tarefas e experiências de modelação.

Segundo (Oliveira, 2009) entende-se por modelação matemática todo o procedimento que tem início num fragmento da realidade e que termina na construção de um modelo matemático dessa realidade. Por conseguinte, a modelação matemática pode ser encarada como “algo a ser explorado”, surge da necessidade do homem compreender os fenómenos que o rodeiam e deve ser utilizada não apenas para justificar o conteúdo que está a ser ensinado, mas sim deve valorizar a razão, o motivo pelo qual o aluno deve aprender matemática e a importância que isto representa na sua formação, como cidadão responsável e participativo na sociedade (Friedman e Jurkiewicz, 2010).

A importância da realização de tarefas de modelação na sala de aula deriva, em primeiro lugar, da própria natureza da aprendizagem que deve ser feita de forma integrada e contextualizada, assumindo grande relevo as conexões Matemática – Realidade e, em segundo lugar, a própria natureza da Matemática como ciência, com a sua componente experimental.

A importância dessas conexões é salientada pelos *Standards*: “Quando os alunos podem interligar ideias matemáticas, a sua compreensão é mais profunda e mais duradoura. Eles podem ver conexões matemáticas no rico intercâmbio entre tópicos matemáticos, em contextos que relacionam matemática com outros assuntos, e nos seus próprios interesses e experiência. Mediante instrução que realça a inter-relação de ideias matemáticas, os alunos não aprendem apenas Matemática, eles também aprendem acerca da utilidade da Matemática”. (NCTM, 2000, p. 64)

O esquema apresentado abaixo (figura 2.1) extraído das *Normas* (NCTM, 1991, p. 175) evidencia dois tipos genéricos de conexões: conexões entre ideias matemáticas e representações de uma mesma ideia (algébrica, gráfica e analítica) e as conexões com a realidade.

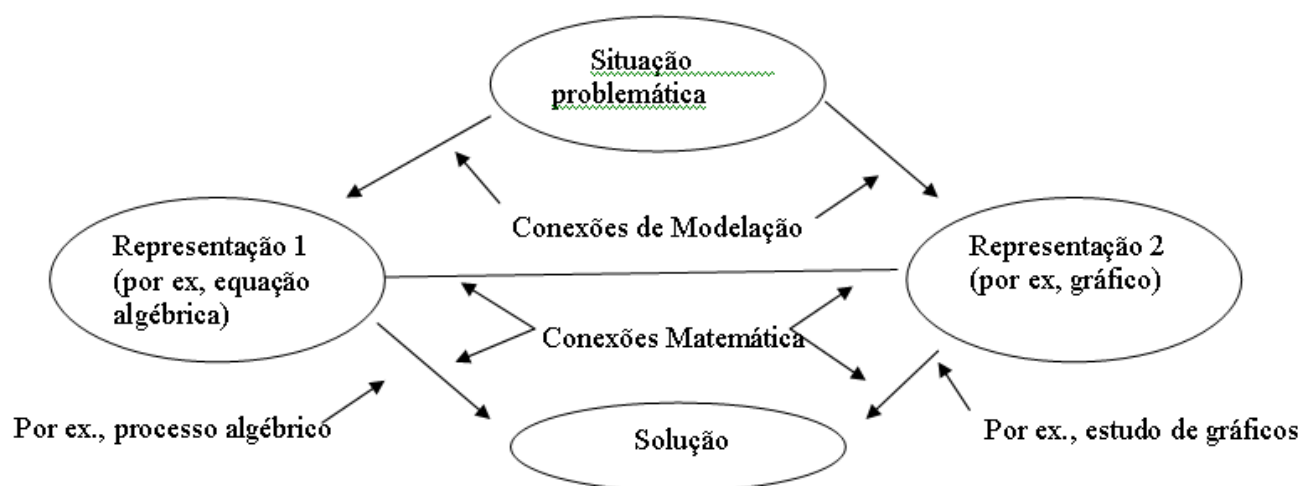


Figura 2.1 Dois tipos genéricos de conexões

À medida que as conexões vão assumindo um papel cada vez mais importante e efetivo no currículo e que o uso da tecnologia facilita conexões mais regulares entre as representações algébricas, gráficas, geométricas e numéricas de uma situação pode pensar-se no esquema acima de outra forma, surge a representação que se apresenta na figura 2.2, como se o tivéssemos comprimido na largura de forma a diminuir a distância entre as várias representações e processos (ver no esquema abaixo). Assim, seria mais evidente e direto o papel da modelação matemática entre a situação problemática e a solução, assumindo as ferramentas matemáticas um importante papel de apoio.

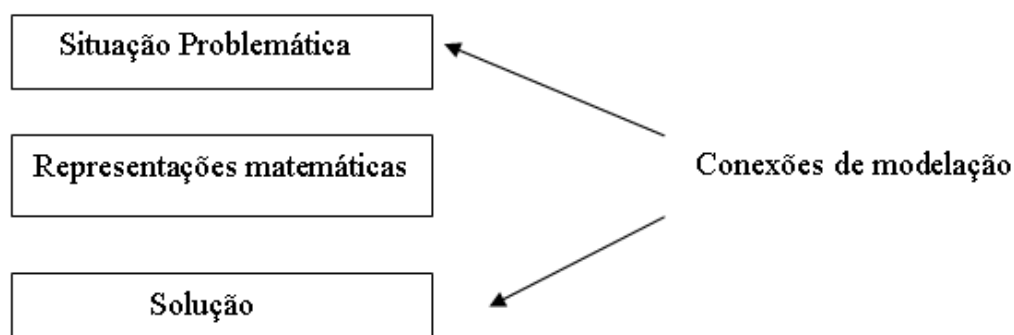


Figura 2.2 Conexões de modelação

As atividades de modelação são pois importantes para o desenvolvimento do pensamento científico, pois o aluno pode experimentar, intuir, conjecturar, testar e avaliar os resultados obtidos e, por isso, devem ser integradas na prática letiva e nos currículos. Permitem ainda a partilha de saberes e responsabilidades. Apesar de serem simplificações da realidade, permitem que os alunos construam o significado das variáveis e das relações de dependência que existem entre essas variáveis. A construção e manipulação de modelos tornam possível o conhecimento de muitas situações e o modo de intervir sobre elas.

Segundo Ponte (2005, p. 19) “As chamadas tarefas de modelação são, no fundo, tarefas que se apresentam num contexto de realidade. Estas tarefas revestem-se, de um modo geral, de natureza problemática e desafiante, constituindo verdadeiros problemas ou investigações, conforme o grau de estruturação do respetivo enunciado.”

Em Matemática também se experimenta e as tarefas de modelação são um campo próprio para isso. O extrato de Ramos (1997, p. 7), que se segue, põe a tónica na natureza experimental da aprendizagem e tem um sentido amplo. Aplica-se, em particular, às situações de modelação. “Um matemático, como um pintor, um poeta ou um músico é um construtor de ideias, formas, cores, palavras e sons. O critério fundamental é a beleza. A capacidade mais determinante é a sensibilidade e a capacidade de observação. Todo o processo criativo passa por uma atitude inicial de observação e experimentação. Não será verdade também na aprendizagem?”.

Capítulo 3 – Tarefas

Introdução

Apresento neste capítulo um conjunto de tarefas organizadas segundo uma tipologia previamente estabelecida. Apresento de seguida os critérios que estiveram subjacentes à seleção das tarefas e ainda os critérios que condicionam a realização das tarefas selecionadas, nomeadamente a duração, contexto, discussão e utilização da calculadora.

1. Tipo de tarefas

O elemento central da renovação do ensino da Matemática deve ser a alteração da natureza das tarefas dominantes na aula, na perspetiva da valorização das atividades de resolução de problemas e de investigações e de situações que envolvam os alunos em processos de pensamento matemático e comunicação (APM, 1998).

Uma primeira questão que se coloca é exatamente conhecer a natureza das tarefas e as suas potencialidades e distinguir um problema de um exercício e uma atividade de investigação de um projeto, tendo em conta alguns fatores. O que é um problema para um aluno poderá ser um exercício rotineiro para outro e o que é um problema hoje poderá não o ser num estágio posterior. Uma tarefa aparentemente rotineira pode transformar-se num processo de investigação e uma tarefa que, à partida, poderia ter características de investigação pode não conduzir a aprendizagem se os alunos não se motivarem para a fazer ou se o próprio professor a descaracterizar dando, por exemplo, indicações a mais. Como não há tarefas à prova de professor nem tarefas classificadas a priori torna-se cada vez mais necessário que os professores as preparem cuidadosamente em função de vários fatores que com elas estão ligados.

A seleção de tarefas por parte do professor está intrinsecamente relacionada com vários fatores: com a formação pedagógica e didática que obteve durante o seu percurso académico, com o

modo como ele interpreta o currículo e com as características dos seus alunos e as suas condições de trabalho.

É necessário que o conjunto de tarefas selecionadas proporcione aos alunos um percurso de aprendizagem coerente que permita a construção dos conceitos fundamentais em cada tema e a compreensão dos procedimentos matemáticos.

O professor deve elaborar vários tipos de tarefas, para que os alunos tenham oportunidade de desenvolver estratégias cognitivas relativamente à:

- Investigação, pesquisa, exploração, construção;
- Argumentação racional;
- Matematização, modelação de situações externas ou internas à matemática;

O professor deve orientar os alunos, para que estes desenvolvam ações sobre tarefas de forma que as atividades desenvolvidas deem origem a aprendizagem com compreensão. Não basta selecionar boas tarefas, é preciso também ter em atenção o modo de as propor e de conduzir a sua realização na sala de aula.

São muitas as relações a ter em conta aquando da preparação das tarefas. O professor deve questionar-se sobre as características dos seus alunos de modo a que estes se envolvam nas atividades propostas e deve refletir na sua avaliação.

O professor não deve esquecer que tem um currículo a cumprir e um contexto educativo que necessita ser tido em conta, com regularidade.

A natureza das tarefas dominantes na aula é o elemento central da renovação do ensino da Matemática. Na perspetiva da valorização das atividades de resolução de problemas e de investigação, na minha opinião, devem ser colocadas situações que envolvam os alunos em processos de pensamento matemático e de comunicação.

Uma primeira questão que se coloca é exatamente conhecer a natureza das tarefas e as suas potencialidades e distinguir um problema de um exercício e uma tarefa de investigação de um projeto.

Como já foi referido, esta investigação tem como objetivo primordial a construção e/ou compilação de diferentes tipos de tarefas, conforme apresentado no esquema da figura 3.1:

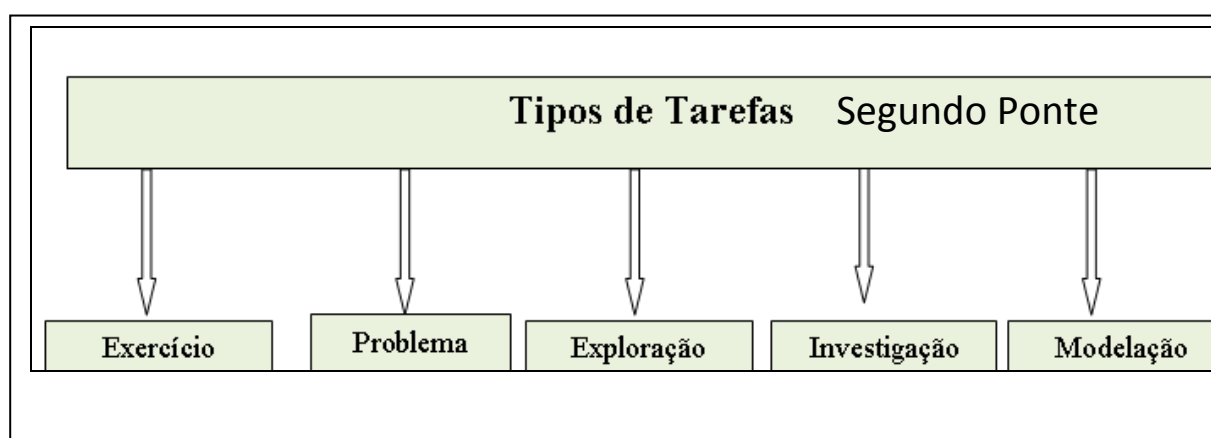


Figura 3.1Tipos de tarefas

No que diz respeito à natureza das tarefas, Ponte (2005, p.18) considera quatro dimensões das tarefas: o grau de desafio matemático, o grau de estrutura, a duração e o contexto. O grau de desafio matemático está associado ao grau de dificuldade da tarefa, segundo o ponto de vista do aluno, e varia entre os polos desafio reduzido e desafio elevado. Em relação ao grau de estrutura, as tarefas podem ser classificadas em tarefas fechadas ou tarefas abertas. Assim, uma “tarefa fechada é aquela onde é claramente dito o que é dado e o que é pedido e uma tarefa aberta é a que comporta um grau de indeterminação significativo no que é dado, no que é pedido, ou em ambas as coisas.” Ponte (2005, p.18) Ao cruzar estas duas dimensões – grau desafio matemático e grau de estrutura, Ponte (2005) apresenta o seguinte esquema (figura 3.2):

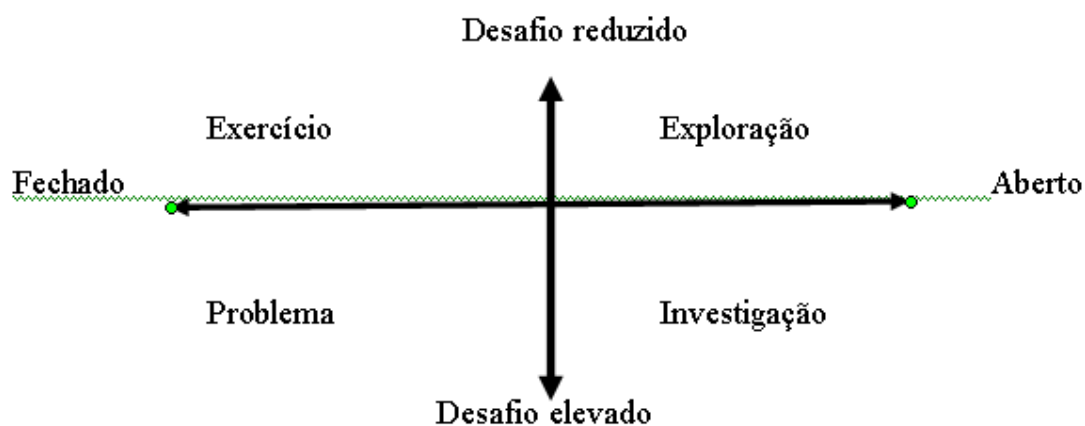


Figura 3.2 Relação entre diferentes tipos de tarefa

Ponte (2005) refere-se aos exercícios como tarefas fechadas e desafio reduzido; aos problemas como tarefas fechadas e desafio elevado; às tarefas de exploração como tarefas abertas e de desafio reduzido; e às tarefas de investigação como tarefas abertas de desafio elevado. Os temas exercícios, problemas, tarefas de exploração e tarefas de investigação, serão desenvolvidos posteriormente.

1.1. Tarefa exercício

Segundo ME, (2001), um exercício é uma tarefa “ geralmente de resolução mecânica e repetitiva, em que apenas se aplica um algoritmo que conduz diretamente à solução” (ME, 2001, p.68).

Segundo Pólya (citado em Delgado. D. 2011, pág. 38), uma tarefa é um exercício se puder ser resolvido através da substituição de dados específicos numa tarefa genérica, anteriormente resolvida ou através do “ seguimento, passo-a-passo, de um exemplo muito batido”.

Um exercício engloba tarefas mais rotineiras em que, de uma maneira geral, se repetem procedimentos. São, de um modo geral, tarefas curtas, de natureza fechada, mais focalizadas num único conceito. Muitas vezes os exercícios são propostos pelo professor em momentos distintos da aula e são realizados individualmente ou a pares.

O principal objetivo dos exercícios é a melhor compreensão das ideias matemáticas e a consolidação dos conhecimentos. No entanto, é de excluir os exercícios repetitivos que produzam uma aparente ilusão de segurança, pois não significa que os conceitos fiquem compreendidos. É de propor situações variadas sobre o mesmo tema.

1.2. Tarefa problema

Pode caracterizar-se um problema como uma tarefa com um objetivo bem definido e com um método de resolução não tipificado. Para resolver um problema é necessário descobrir o caminho da sua resolução. O aluno tem que mobilizar o conhecimento relevante, factual e procedimental e não apenas conhecimentos operatórios. Como afirma Pólya (1978) só se aprende a resolver problemas resolvendo problemas e o aluno tem que aprender a encontrar os seus próprios caminhos.

A importância da resolução de problemas na aula deriva da necessidade do aluno encontrar caminhos próprios e adquirir experiência de trabalho independente, desenvolvendo a sua autonomia. A resolução de problemas tem um contributo a prestar aos alunos no desenvolvimento da capacidade de investigar e de pensar matematicamente. A competência de resolução de problemas pressupõe uma evolução do aluno. Não é um processo linear, tem avanços e recuos, pois os processos são difíceis de consolidar e, devido ao seu carácter efémero, exige um trabalho regular.

1.3. Tarefa projeto

Se o grande desafio da nossa época é formar indivíduos com iniciativa, aptidão e flexibilidade para agir num mundo em mudança, a escola tem que envolver os alunos em situações complexas, mais ou menos prolongadas no tempo, que terão de ser planeadas, desenvolvendo estratégias e ações adequadas, ao mesmo tempo que se tem de introduzir métodos para lidar com a informação e recursos variados.

Se pretendemos que os alunos tenham consciência dos problemas do nosso tempo e sensibilidade para trabalhar com os outros, temos que lhes dar oportunidade de investigarem

problemas relacionados com temas atuais e de realizarem trabalhos em grupo de modo a abrir espaços de comunicação.

A tarefa projeto é importante para desenvolver atitudes de pesquisa, de abordagem de situações novas, com interesse, iniciativa e criatividade, ao mesmo tempo que exige responsabilização pelo cumprimento dos prazos e dos guiões e permite partilha de saberes e de responsabilidades. A tarefa tem uma natureza aberta quer no que diz respeito à situação inicial, em que o aluno tem total liberdade de escolha dentro do tema geral, quer no produto final que depende das opções do aluno. A abordagem que o aluno faz da tarefa é, por isso, de natureza investigativa. A tarefa de projeto proporciona a elaboração de trabalhos escritos de forma organizada e da sua posterior apresentação. É ainda uma mais-valia no desenvolvimento do raciocínio e do pensamento científico através do estabelecimento das conexões dos conceitos matemáticos envolvidos.

1.4. Tarefa de exploração

Segundo Ponte 2005, as tarefas de exploração são tarefas abertas e fáceis. Ponte refere ainda que: “Entre as tarefas de exploração e as de investigação a diferença está portanto no grau de desafio. Se o aluno puder começar a trabalhar desde logo, sem muito planeamento, estaremos perante uma tarefa de exploração” (Ponte, 2005, p. 18).

De modo a clarificar este tipo de tarefa, o documento Renovação do Currículo de Matemática menciona que a palavra explorar assume o significado comum da palavra, ou seja, “entrar no terreno desconhecido, recolher dados, detetar diferenças, ser sensível às repetições e às analogias, reconhecer padrões” ou ainda “investigar, procurar encontrar, procurar descobrir” (APM, 1988, p.61). Na minha opinião é importante a implementação deste tipo de tarefas, pois elas favorecem não só a formulação de conjeturas como também a discussão, argumentação e demonstração de possíveis conclusões, sendo estas competências fundamentais para o desenvolvimento do currículo da Matemática.

Segundo Christiansen e Walther (1986, p. 278), este tipo de tarefas: “admitem um processo exploratório o qual é desenvolvido a partir da investigação de casos individuais”; podem promover nos alunos a capacidade de formulação de conjeturas ou de resolução de problemas através do “trabalho em casos individuais e da respetiva recolha de dados”; podem ser propostas tendo em conta diferentes graus de dificuldades; proporcionam, essencialmente, “a coleção de dados e de informação associada à aplicação de competências fundamentais da matemática”; permitem, facilmente, a formulação de outras tarefas análogas. Deste modo, Christiansen e Walther (1989) destacam três aspetos relativos à atividade que este tipo de tarefas pode promover nos alunos:

- 1 – Motivam os alunos e promovem o desenvolvimento de estratégias cognitivas de um nível mais elevado com a exploração de situações;
- 2 – Propiciam o recurso a conteúdos e procedimentos já construídos;
- 3 – Exigem uma adaptação, modificação e desenvolvimento dos conteúdos e procedimentos já construídos no sentido de dar resposta a cada situação.

1.5. Tarefa investigação

As investigações devem merecer um lugar de destaque na atividade matemática dos alunos uma vez que permitem a formulação de conjeturas, a avaliação da sua plausibilidade, a escolha dos argumentos adequados para a sua validação ou rejeição. Permitem, assim, procurar argumentos que validem as conjeturas que resistiram a sucessivos testes e que, por vezes, originaram novas questões de investigação. Este tipo de tarefa traduz o processo de criação matemática inerente ao que significa saber matemática.

A tarefa de investigação obriga a uma atividade pautada pela descoberta, exploração, pesquisa, autonomia, tomada de decisão e espírito crítico. Significa ser capaz de formular boas questões e usar processos e conhecimentos matemáticos que permitam tomar decisões relativamente a essas questões concebendo, testando e redefinindo conjeturas. De facto, as tarefas

de investigação lidam com o essencial da natureza da atividade matemática (formulação e resolução de problemas); permitem uma melhor compreensão da natureza dos processos de fazer matemática (experimental/explorar, identificar padrões, formular e testar conjecturas, generalizar e demonstrar); estimulam o pensamento globalizante (relacionando tópicos da matemática); permitem de forma significativa trabalho diferenciado de alunos com diferentes competências e estilos cognitivos em matemática; facilitam o desenvolvimento integrado de atitudes, capacidades e conhecimentos. Pensamos que as tarefas de investigação podem potenciar o desenvolvimento matemático e pessoal dos alunos e podem contribuir para a concretização dos valores da integração e da diferenciação, decisivos numa escola que se pretende o mais inclusiva possível.

1.6. Tarefa modelação

A Matemática tem um papel importante no conhecimento da realidade mas, para esse papel ser acessível aos alunos, estes têm que realizar ao longo da escolaridade pequenas simulações e experiências de modelação. As tarefas de modelação, apesar de simplificações dessa realidade, permitem que os alunos adquiram o sentido de variável e das relações de dependência entre elas. Por outro lado, potenciam a construção e a manipulação desses modelos e tornam possível o conhecimento das situações reais.

A importância da realização das tarefas de modelação na sala de aula deriva, em primeiro lugar, da própria natureza da aprendizagem que deve ser feita de forma integrada e contextualizada, assumindo as conexões Matemática - Realidade grande relevo e, em segundo lugar, da própria natureza da Matemática como ciência, com a sua componente experimental.

As tarefas de modelação são pois importantes na prática letiva para o desenvolvimento do pensamento científico, pois o aluno pode experimentar, intuir, conjecturar, testar e avaliar os resultados obtidos.

2.O professor e a escolha de tarefas

2.1.Seleção

A seleção das tarefas a propor aos alunos constitui um dos aspetos essenciais do trabalho do professor. Mais do que descobrir uma ou outra tarefa motivante para amenizar uma sequência de aulas mais árida, o professor tem de considerar todo o conjunto de tarefas a propor na unidade, incluindo naturalmente a sua diversidade (em termos de complexidade, nível de desafio e contexto matemático ou extra-matemático), tempo de realização e materiais a utilizar. Os exercícios têm tido um papel privilegiado. Por vezes, o professor nem se apercebe que podem existir outros tipos de tarefas. Atualmente, o professor sente a necessidade de recorrer a diversos tipos de tarefas, pois estas constituem a base para a aprendizagem dos alunos.

Tarefas que pedem aos alunos a execução de um procedimento memorizado, de maneira rotineira, representam um certo tipo de oportunidade para os alunos pensarem; tarefas que exigem que os alunos pensem conceitualmente e que os estimulem a fazer conexões representam um tipo diferente de oportunidade para os alunos pensarem. O efeito cumulativo, de exploração na aula de diferentes tipos de tarefas conduz ao desenvolvimento nos alunos de ideias implícitas sobre a natureza da Matemática – sobre se a Matemática é algo de que eles podem pessoalmente compreender o sentido e quão longa e arduamente devem trabalhar para o conseguir.

2.2.Duração e contexto

A realização de uma tarefa pode requerer poucos minutos ou demorar dias ou semanas. De uma maneira geral, as tarefas de curta duração são as tarefas-exercícios, as de média duração são as tarefas-problemas; as tarefas-projeto e modelação, na sua maioria, são tarefas de longa duração.

Numa tarefa, para além da duração também se deve ter em conta o contexto da mesma. Skovsmose (2000), distingue três tipos de contexto: o contexto realidade, o contexto puramente matemático e outro, de algum modo intermédio, que designa por “semi-realidade

”. Este último é frequente nos problemas e exercícios de Matemática. Se as tarefas são de modelação, estamos perante um contexto de realidade. Estas tarefas são normalmente de natureza problemática e desafiante, constituindo problemas ou investigações, conforme o grau de estruturação do respetivo enunciado.

Quando uma tarefa se refere apenas à Matemática e somente a ela – dizemos que se trata de um contexto puramente matemático. Podemos englobar neste contexto a maioria dos exercícios ou alguns problemas de aplicação de conceitos e ideias matemáticas.

Quando as tarefas não tratam de uma realidade que, “de facto” observamos, mas uma realidade construída pelos autores dos livros didáticos ou pelo próprio professor – dizemos que se trata de tarefas de contexto “semi-realidade”.

Nem sempre é possível classificar radicalmente uma tarefa num contexto, uma vez que os exercícios, os problemas e as investigações podem surgir tanto em contextos de realidade, como de “semi-realidade” ou ainda como de Matemática pura.

2.3. Discussão da tarefa

Hoje em dia dá-se muita importância à realização de tarefas abertas de carácter investigativo, mas as tarefas, por si só, nem sempre conduzem a uma efetiva aprendizagem. É imprescindível que, no final da concretização de cada tarefa, existam momentos de discussão em que os alunos exponham o seu trabalho, apresentem as suas conjecturas e conclusões, e levantem questões pertinentes. Ao longo da discussão, o professor deve aproveitar para procurar clarificar os conceitos e procedimentos utilizados. Os momentos de discussão constituem oportunidades fundamentais para negociação de significados matemáticos e construção de novos conceitos. A principal característica da discussão é a interação entre alunos-alunos e alunos-professor.

A discussão, ao invés da exposição ou do questionamento, em que o professor assume um papel de protagonista central, pressupõe um maior equilíbrio de participação entre o professor e os

alunos. Cabe ao professor o papel de moderador, gerindo a sequência de intervenções e orientando. Como os alunos dispõem de uma grande margem de intervenção, influenciam o desenvolvimento da prática letiva. Neste contexto, o professor tem uma tarefa adicional de gerir uma discussão de forma a que todos os alunos atinjam o objetivo da tarefa.

2.4. Tarefas sobre funções e utilização da calculadora

As novas tecnologias nomeadamente as calculadoras e os computadores, estão presentes no currículo de Matemática em Portugal, constando das orientações metodológicas dos programas desta disciplina desde 1990/91. Presentemente, a calculadora gráfica tem um papel central no ensino secundário. No tema “Funções”, presente ao longo dos três anos do ensino secundário, o programa refere que os alunos devem abordar as diferentes representações de uma função: verbal, numérica, algébrica e gráfica. Nesse programa é dada ênfase à resolução de problemas usando métodos numéricos, gráficos e analíticos, nomeadamente no tema “Funções”. Assim, nesta investigação propusemo-nos elaborar tarefas que envolvam representações gráficas como modo de atingir os objetivos e desenvolver as competências gerais deste programa.

Como já foi referido, este estudo tem por objetivo principal a apresentação de tarefas sobre funções recorrendo à calculadora, por acreditarmos que a sua utilização permite a experimentação, a investigação e a resolução de problemas, dando origem a uma nova dinâmica na sala de aula possibilitando uma abordagem mais investigativa dos conteúdos matemáticos.

A calculadora permite que os alunos:

- Construam os seus próprios exemplos e contraexemplos.
- Formulem as suas hipóteses e que as testem, conferindo, desse modo, ao aluno uma maior autonomia na construção do seu saber.
- Se envolvam com gosto na atividade matemática.

- Estabeleçam a ligação e a integração das múltiplas representações matemáticas, potenciando uma melhor compreensão destas.

A utilização da calculadora pressupõe e viabiliza mudanças importantes nas práticas profissionais dos professores e nas aprendizagens dos alunos. No entanto, a utilização da calculadora gráfica na sala de aula, determinada pelo currículo, não é, por si só, fator de mudança, nem tem efeitos imediatos na melhoria das aprendizagens. É necessário dar-lhe atenção especial e despende mais tempo com ela em sala de aula. Como refere Ponte, (1995) “há que reformular o trinómio Matemática – aluno – professor de modo que: na aprendizagem se contacte com a Matemática mais viva, muito mais próxima do espírito investigativo que caracteriza a atividade dos matemáticos; o aluno passe a desempenhar um papel mais ativo e autónomo, definindo e aprofundando os seus domínios de interesse, e usando com desembaraço uma variedade de ferramentas para o seu estudo; o professor veja reconhecido e valorizado o papel fundamental que só ele pode desempenhar na criação, condução e contínuo aperfeiçoamento de situações de aprendizagens.” (Ponte, 1995, p.7)

A calculadora gráfica não é apenas um meio, cujo tipo de utilização é irrelevante no processo de aprendizagem matemática. É fundamental que os professores prestem atenção ao modo como os alunos a utilizam. Como já foi referido, a calculadora pode ser utilizada de diferentes formas e com perspetivas variadas, com base na investigação realizada por Carvalho (2006). Nesta investigação, as tarefas foram classificadas quanto ao nível de utilização da calculadora, em três níveis: nível elementar, nível intermédio e nível avançado, de acordo com a figura 3.3, apresentada abaixo.

Níveis de uso	Descrição
Nível 1- Elementar	Utilização como calculadora científica
Nível 2- Intermédio	Utilização elementar das funcionalidades gráficas da calculadora
Nível 3 - Avançado	Utilização avançada das funcionalidades gráficas da calculadora

Figura 3.3 Níveis de dificuldade segundo Carvalho, 2006, p. 86

Considera-se como uma utilização da calculadora de nível elementar sempre que a mesma é utilizada apenas como ferramenta de visualização do gráfico/científica de uma determinada função, de nível intermédio quando, para além da visualização do gráfico de uma função, são estudadas algumas das suas características e de nível avançado quando, para além da utilização dos níveis anteriores se recorre a outras potencialidades da tecnologia (análise de tabelas de dados, regressão, modelação, etc...).

Capítulo 4 – Metodologia

Introdução

Neste capítulo, em que se descreve e justifica o plano metodológico, apresentam-se também os critérios de seleção das tarefas incluídas no estudo. Faz-se uma análise dos níveis de uso da calculadora gráfica. Em seguida, faz-se referência à estrutura e descrição das tarefas.

1. Fundamentação metodológica

A resolução deste tipo de tarefas apoiadas pela calculadora gráfica pode tornar-se um tipo de experiência de aprendizagem propícia, nomeadamente, à introdução de novos conceitos, de ideias matemáticas e ao desenvolvimento de processos em que as funções surjam como modelos de situações reais. Segundo Dias, (2005, p. 18) os alunos veem as tecnologias como “ algo em que podem mexer”. Desta forma, sentem que são capazes de fazer coisas, vão ganhando confiança em si próprios, fatores de relevância extrema para o sucesso na disciplina de matemática.

Esta investigação pretende a construção e compilação de vários tipos de tarefas com recurso à calculadora gráfica a desenvolver em aula. Foram levantadas as seguintes questões que serviram de referencial ao estudo:

Que tipo de tarefas deverão ser privilegiadas para desenvolver nos alunos competências com recurso a tecnologias gráficas?

Como estruturar essas tarefas?

Que conteúdos programáticos devem ser abordados?

Para isso, foi feita uma análise cuidadosa dos manuais escolares do ensino secundário em uso e foram construídas e compiladas diferentes tarefas sobre o tema funções desse nível de ensino destinado a alunos do 10º ao 12º ano de escolaridade.

Este estudo pretende ser um estudo documental onde predomina a investigação qualitativa, descritiva. O investigador qualitativo tenta analisar e descrever os dados com todo o pormenor, procurando não distorcer a forma como foram recolhidos. Não tem como preocupação testar hipóteses, mas partir da análise dos dados num processo de baixo para cima a partir de peças discrepantes mas que estão relacionadas umas com as outras. A descrição passa a tomar forma à medida que as partes vão sendo recolhidas e examinadas. A grande vantagem deste tipo de recolha de dados é poder ser feita sem depender da presença de outros elementos, da sua boa vontade ou disponibilidade.

A opção por uma metodologia de natureza qualitativa prende-se com o facto de terem sido analisados manuais escolares do ensino secundário e terem sido construídas e compiladas tarefas sobre o tema funções. Através de uma análise documental procura-se recolher informações identificadas como sendo verdadeiras e existentes nos documentos. Deve ter-se em atenção o contexto em que os documentos existem e são utilizados, bem como o seu significado e forma de elaboração. Os documentos, segundo Bogdan e Biklen (1994, p.176) “são fontes férteis de descrição de como as pessoas que produziram os materiais pensam acerca do seu mundo”. A decisão de optar por manuais escolares, como fonte das tarefas a analisar, deve-se ao facto de os manuais escolares serem uma fonte estável e rica; persistirem ao longo do tempo; poderem ser consultados várias vezes e inclusive poderem servir de base para vários estudos; representando ainda uma fonte natural de informação.

A metodologia de investigação levada a cabo foi orientada numa perspetiva educativa, orientada à mudança e à melhoria da prática educativa. Trata-se de uma investigação a ser aplicada em contexto educativo, de forma a poder proporcionar informação passível de ajudar à tomada de decisão quer a nível político, quer a nível de prática educativa.

2. Plano metodológico

A nível metodológico foram adotadas as estratégias que se encontram esquematizadas na figura 4.1: Tomando como base a teoria analisada, foram estabelecidos os fundamentos teóricos basilares que levaram à construção das dimensões de análise a ter como subjacentes a todo o estudo. Ficou assim definido que se iria construir um conjunto de tarefas classificadas como: exercícios, problemas, exploração, modelação e projeto.

Seguidamente foi necessário definir os critérios de seleção, já que se iria proceder à recolha de tarefas em documentos, manuais e fichas já existentes. Os critérios foram definidos e encontram-se explicitados adiante, em capítulo próprio. Estes critérios de seleção serviram para a construção de um referencial, com categorias de análise, para se poder proceder à análise de conteúdo dos diferentes documentos. Depois de selecionadas as tarefas foi necessário organizar o seu conjunto e cada uma isoladamente de modo a terem uma apresentação uniforme. Assim, foi criado um cabeçalho a ser aplicado em todas as tarefas e foram todas organizadas segundo uma tipologia que contemplava as dimensões de análise, as categorias de análise além de outros critérios a explicitar adiante. Por fim foi feita a revisão da fundamentação teórica de modo a consolidar a visão global do estudo e a poder apresentar os resultados na conclusão, acompanhada do conjunto de Tarefas.

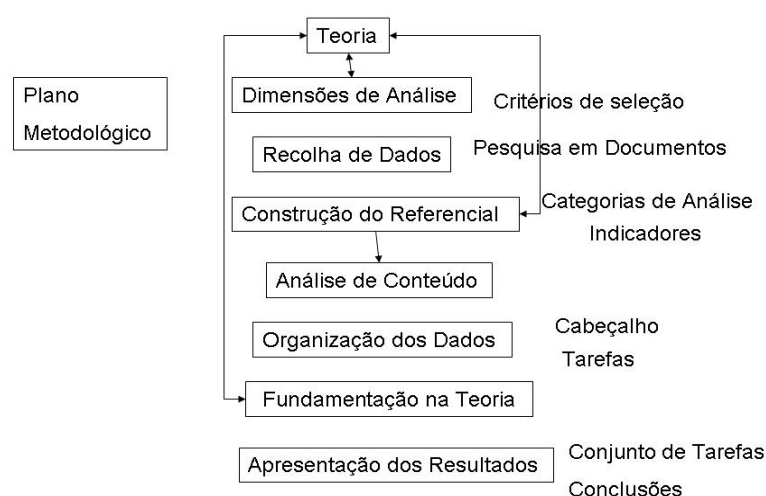


Figura 4.1 – Plano metodológico

3. Os critérios de seleção das tarefas para este estudo

As tarefas que se encontram em anexo, foram construídas após uma pesquisa exaustiva nos manuais escolares e nas brochuras que acompanharam o novo currículo de Matemática do Ensino Secundário. Foram tidos em conta diferentes critérios na seleção das tarefas, nomeadamente: se abordavam o tema funções (lineares, quadráticas, módulo, polinomiais, racionais, trigonométricas, exponenciais e logarítmicas), aplicáveis aos conteúdos programáticos do ensino secundário; se facilitavam, a introdução/consolidação dos conteúdos curriculares; se incentivavam a diversificação de experiências matemáticas; se promoviam a comunicação matemática; se podiam despertar a curiosidade dos alunos no sentido de encontrar uma estratégia apropriada em vez da aplicação rotineira de um processo ou de uma fórmula; se as tarefas propostas estavam adaptadas ao nível etário dos alunos e às suas capacidades; se podiam ser potenciadoras de uma reflexão individual e/ou em pequenos grupos; se podiam originar metodologias pedagógicas diferenciadas; se a estrutura e organização de cada uma das tarefas era propícia a uma exploração em aula; se era possível classificar as tarefas no que respeita ao seu tipo, ao nível de utilização da calculadora gráfica e ao tempo de duração.

Todas as tarefas construídas e/ou compiladas visam recorrer às potencialidades da calculadora gráfica no estudo de alguns temas a explorar ao longo do Ensino Secundário, como uma forma possível de introduzir e/ou aprofundar conceitos. Em algumas das tarefas sugere-se a elaboração de um relatório por se acreditar que, para além de poder ser mais um dos elementos de avaliação, os alunos podem desenvolver a competência da comunicação matemática, um dos temas transversais do currículo do Ensino Secundário.

Todas as tarefas privilegiam o trabalho em pares ou em pequenos grupos de forma a levar os alunos a cooperar de uma forma sã e efetiva. A troca de ideias nos grupos, pode ajudar a clarificar conceitos, a um confronto com estratégias diferentes e ao desenvolvimento das capacidades de reflexão e de argumentação. Além disso, esta metodologia pode ser o ponto de partida para uma

discussão alargada ao grupo turma de forma a promover uma reflexão sobre a atividade realizada e pode ajudar a consolidar as aprendizagens. Realizar uma investigação e não refletir sobre ela é perder uma das suas grandes potencialidades. O confronto de resultados e processos de resolução pode constituir um enriquecimento da própria atividade e pode ajudar os alunos a compreenderem melhor o significado de uma determinada investigação matemática.

A maioria das tarefas realça a importância das conexões entre temas matemáticos e entre a Matemática e as outras disciplinas.

Nas tarefas apresentadas, foi dado grande relevo às investigações que exploram “famílias de funções”. O estudo da influência dos diferentes parâmetros nas famílias de funções pode ser enfatizado, conduzindo os alunos a uma compreensão dos efeitos desses parâmetros no comportamento gráfico das funções, bem como sublinhar a importância de estudar casos particulares com vista a uma generalização.

Apesar da calculadora gráfica assumir um papel fundamental na exploração das tarefas propostas, as conjecturas formuladas deverão ser confrontadas com a resolução analítica sempre que a natureza da tarefa o aconselhar, enfatizando, desta forma, as conexões entre as diferentes representações de funções.

Entre as diferentes tarefas construídas apenas uma delas foi classificada como de projeto. Trata-se de uma modalidade que ainda é difícil levar a cabo com o atual currículo do Ensino Secundário. O Programa é muito extenso, está submetido a uma avaliação externa que obriga o professor a explorar todos os conteúdos programáticos. Por outro lado, os professores também não se sentem ainda muito seguros no desenvolvimento desse tipo de tarefa de longa duração.

4. Referenciação

Antes de qualquer análise de conteúdo foram definidas as dimensões de análise com base na fundamentação teórica do estudo. Como primeira abordagem foi feita uma leitura flutuante dos

documentos para identificar os dados mais relevantes, de seguida foi feita uma leitura mais precisa que deu lugar à formulação de indicadores, à seleção e codificação das unidades de registo, sua enumeração, classificação e agregação por categorias. As categorias são, portanto, rubricas ou classes que reúnem um grupo de indicadores, mutuamente exclusivas e com apenas um critério de classificação.

Para realizar a análise de conteúdo dos documentos, foi necessário utilizar uma grelha com as dimensões de análise e as suas categorias. Essa grelha foi criada em Word e encontra-se, em anexo, um exemplar dessa grelha. Só foram selecionadas as tarefas com indicadores que correspondessem à totalidade das categorias desejadas. As dimensões e categorias são as seguintes:

Dimensões: Exercícios, resolução de problemas, exploração, modelação e projeto.

Categorias: Os critérios de seleção das tarefas, já apresentados, foram tomados como categorias de análise das tarefas.

Atendemos a determinadas regras que se impõem no decorrer das distintas fases de categorização, sendo elas a exaustividade, a exclusividade, a homogeneidade, a pertinência, a objetividade e a produtividade. A exaustividade indica que cada categoria deve englobar, na totalidade, o conjunto das unidades de sentido que suporta e que o sistema de categorias final deve contemplar todos os parâmetros essenciais para o estudo do documento. A exclusividade refere que uma unidade de registo apenas deve incluir-se numa categoria. A homogeneidade impõe que um sistema de categorias deve pressupor somente um tipo de análise. A pertinência salienta que um sistema de categorias deve ser adequado ao conteúdo a ser analisado e às finalidades do estudo em causa. A objetividade refere que deverá ser evitada a subjetividade na formulação das categorias, de forma a que as mesmas possam vir a ser utilizadas e aplicadas por outros investigadores. Por fim, a produtividade, remete-nos para a necessidade de realizar uma análise fértil, conducente a um novo discurso, igualmente adequado e sensato, de acordo com os dados (Ghiglione e Matalon, 1992, citados por Amado, 2000).

A análise de dados de um estudo atravessa diferentes fases interligadas: “a redução dos dados, a apresentação dos dados, e tirar conclusões e verificação ”(Keeves, 1997, p.299). A redução dos dados faz-se através do resumo ou da codificação, através de palavras chave ou de uma determinada taxionomia. Nos resumos podem ser feitas transcrições de citações relevantes. Na apresentação dos dados pode ser utilizada uma grelha com várias entradas que permita sumariar a informação e permita evidenciar padrões de modo a mais tarde apresentar os resultados. Para tirar conclusões é possível utilizar diversos procedimentos: contar a frequência de unidades de discurso ou de acontecimentos relacionados com determinado tema; identificar padrões ou temas recorrentes; plausibilidade; agrupar; divisão de categorias muito grandes; agrupar de categorias demasiado pequenas; relações de oposição; criar uma cadeia lógica de evidência; criar uma cadeia causal. (Keeves, 1997, p.302).

Neste estudo foram criadas tabelas para classificar e agrupar as tarefas.

Depois da recolha e análise de dados e de escolhidas as tarefas, surge a necessidade de as organizar tentando responder às questões colocadas no início do estudo. Assim, cabe lembrar:

- Qual o ano de escolaridade?
- Qual o nível de uso da calculadora gráfica?
- Qual o tipo de tarefa?
- Que itens devem constar em cada tarefa?
- Como se devem organizar os itens de cada tarefa?
- Quais os tipos de funções?
- Qual a sequência adotada?

Com base nestas questões de operacionalização foram definidos itens a constar em quatro tabelas que permitem organizar as tarefas seleccionadas.

5. Itens do índice de tarefas

As tarefas apresentadas nas tabelas, estão classificadas tendo em conta: o ano letivo mais propício à sua exploração; o nível de dificuldade de utilização da calculadora gráfica; a duração prevista para cada uma das tarefas; o tipo de tarefa e o conteúdo que cada uma se propõe explorar.

São dadas indicações do ano do Ensino Secundário em que cada tarefa deve ser preferencialmente explorada.

No que respeita ao nível de dificuldade de utilização da calculadora gráfica, as tarefas foram catalogadas em três níveis: 1- nível elementar, 2- nível intermédio e 3 - nível avançado.

Para a realização de cada tarefa sugere-se um período de tempo que varia entre os 45 e os 180 minutos.

Para a realização da tarefa do tipo Projeto propõe-se uma duração de cerca de quinze dias. Para a realização da maioria das tarefas é aconselhável a duração de 90 minutos que coincide com um bloco letivo da aula de Matemática A do Ensino Secundário.

Quanto ao conteúdo, os temas abordados contemplam: função afim, função módulo, função quadrática, função polinomial de grau superior a dois, função derivada, função racional, função irracional, função trigonométrica, função exponencial, função logarítmica, estatística, programação linear e Número de Neper.

Para cada um dos temas foi adotada uma sigla de acordo com o descrito na tabela 4.1.

Siglas:	
Significado das siglas utilizadas nos guiões.	
E – Estatística	Fq – Função quadrática
Fa – Função afim	Fr – Função racional
Fd – Função derivada	Fs – Função soma
Fe – Função exponencial	Ft – Função trigonométrica
Fi – Função irracional	If – Igualdade de funções
Fl – Função linear	Nm – Número de Neper
Flg – Função logarítmica	Pl – Programação Linear
Fm – Função módulo	Po – Problema de otimização
Fp – Função polinomial	

Tabela 4.1 -Siglas

6. Análise de conteúdo das tarefas

Na tabela 4.2 apresenta-se a análise das tarefas segundo o nível de dificuldade da utilização da calculadora gráfica. As tarefas foram agrupadas segundo categorias de dificuldade elementar, intermédia e avançada, além de terem sido agrupadas por ano de escolaridade. Assim, foram identificadas seis tarefas de nível elementar, vinte de nível intermédio e vinte e quatro de nível avançado.

Para o 10º ano de escolaridade foram identificadas dezassete tarefas bem como para o 11º ano. Para o 12º ano foram identificadas dezasseis. Deste modo, a distribuição das tarefas propostas pelos três anos letivos revelou-se com bastante uniformidade.

Fazendo uma análise transversal ao tipo de tarefas apresentadas já não é possível referir o mesmo grau de uniformidade no que respeita aos níveis de dificuldade já que, na sua maioria, trata-

se de tarefas com grau de dificuldade intermédia ou avançada em qualquer dos anos de escolaridade.

Nível de dificuldade da calculadora gráfica	1-Elementar	2- Intermédia	3- Avançada
10º Ano	1Fa; 2Fq	3Fq;6Fq; 10Fq;13Fm;29Po;31Fp	4Fq;5Fq; 12Fq;14Fm;15Fr;30Fs;32Fp;44Fa;47E
11º Ano	16Fr;17Fr 38Ft	7Fq;9Fr;18Fr;19Fr;40Fi	8 Fr; 11Fl;21Fd;22Fd;23Fd 24Fd;25Fd;26Pl;27Nn
12º Ano	46Ft	28Fe;33Fe;35Flg;37Fe;45Ft 48If;49Fe;50Ft;51Fd	34Flg;36Fe;39Fe;41Ft;42Ft;43Ft

Tabela 4.2 – Nível de dificuldade da utilização da calculadora gráfica no desenvolvimento das tarefas

Na tabela 4.3 apresenta-se a categorização das tarefas no que diz respeito à sua duração e ao respetivo ano de escolaridade. Assim, foram categorizadas seis tarefas a desenvolver num período máximo de 45 minutos; trinta e seis num período de 90 minutos; seis tarefas num período de 180 minutos e uma tarefa que se pode prolongar por um período de 15 dias.

Para o 10º ano foram selecionadas treze tarefas de 90 minutos, três tarefas de 180 minutos e uma tarefa de 15 dias. Para o 11º ano foram selecionadas duas tarefas de 45 minutos, catorze tarefas de 90 minutos e uma tarefa de 180 minutos. Para o 12º ano foram selecionadas quatro tarefas de 45 minutos, nove tarefas de 90 minutos e duas de 180 minutos.

Fazendo uma análise transversal pode afirmar-se que predominam as tarefas de 90 minutos, existindo maior variabilidade de tempo no que diz respeito às tarefas a desenvolver no 12º ano.

Duração da tarefa	45 min.	90 min.	180 min.	15 dias
10º Ano		1Fa;2Fq;3Fq;4Fq;5Fq;6Fq; 10Fq; 13Fm;15Fr;29Po;32Fp;44Fa;47E	12Fq;14Fm 31Fp	30Fs
11º Ano	38Ft;40Fi	7Fq;8Fr; 9Fr; 11Fl;16Fr;17Fr;18Fr;19Fr 21Fd;22Fd;23Fd;24Fd;25Fd;27Nn	26Pl	
12º Ano	46Ft;48If;49Fe;51Fd	28Fe;34Flg;36Fe;37Fe;39Fe;42Ft;43Ft; 45Ft; 50Ft	33Fe;35Flg	

Tabela 4.3 – Duração das tarefas

Na tabela 4.4 apresenta-se a categorização das tarefas segundo o ano de escolaridade e a tipologia de tarefas do estudo. Assim, as tarefas estão categorizadas segundo exercícios, problema, exploração, modelação e projeto. Treze das tarefas propostas são do tipo exercícios, dezassete do tipo problemas, onze tarefas são de exploração, oito tarefas de modelação e uma da modalidade projeto.

A distribuição por níveis de escolaridade é a seguinte: dezassete das tarefas poderão ser desenvolvidas no 10º ano, dezassete no 11º ano e dezasseis no 12º ano. Existe, assim, uma distribuição equilibrada pelos 3 anos de escolaridade dos diferentes tipos de tarefas.

Tipos de tarefas	Exercícios	Problema	Exploração	Modelação	Projeto
10º Ano	29Po;31Fp	4Fq;5Fq;6Fq; 10Fq;32Fp	1Fa;2Fq;3Fq; 13Fm;14Fm	12Fq;15Fr;44Fa 47E	30Fs
11º Ano	16Fr;17Fr;21Fd;23Fd 24Fd;25Fd;38Ft;40Fi	7Fq8Fr;18Fr;19Fr; 22Fd;26Pi	9Fr;27Nn	11Fi;	
12º Ano	33Fe;35Fg;48If	36Fe;37Fe;39Fe;49Fe 50Ft;51Fd	34Fg;41Ft;45Ft 46Ft	28Fe;42Ft;43Ft	

Tabela 4.4 – Tipo de tarefas

Na tabela 4.5 apresentam-se as tarefas categorizadas segundo o conteúdo e o ano de escolaridade a que se devem aplicar.

No que diz respeito ao conteúdo são referidos os conteúdos programáticos abordados: funções polinomiais, função módulo, derivadas de funções, programação linear, função exponencial, função logarítmica, funções trigonométricas, funções irracionais, estatística. Em relação às funções polinomiais foram selecionadas quinze tarefas, duas sobre função módulo seis sobre derivadas de funções, uma tarefa de programação linear, sete de função exponencial, duas de funções logarítmicas, três de funções trigonométricas, uma tarefa de funções irracionais e uma de estatística.

Fazendo uma análise transversal dos dados pode afirmar-se que existe uma predominância de tarefas sobre funções polinomiais no 10º ano (treze tarefas) enquanto no 11º ano a maioria das tarefas abordam conteúdos relacionados com o tema derivadas de funções (cinco tarefas) e funções racionais (seis tarefas). No 12º ano as tarefas abordam principalmente os temas sobre funções trigonométricas (seis tarefas) e funções exponenciais (cinco tarefas).

Tipos de funções	Pol.	Mód.	Deriv	Rac.	Prog. linear	Exp.	Logar.	Trig.	Irrac.	Estat.
10.º Ano	1Fa;2Fq;3 Fq; 4Fq;5Fq;6 Fq; 10Fq;12Fq;29Po;30 Fs;31Fp;3 2Fp; 44Fa	13Fm; 14Fm		15Fr;						47E
11.º Ano	11Fl;7Fq		21Fd; 22Fd; 23Fd; 24Fd; 25Fd	8Fr; 9Fr; 16Fr;1 7Fr; 18Fr;1 9Fr	26Pl	28Fe; 33Fe		38Ft	40Fi	
12º Ano			51Fd			28Fe; 36Fe; 37Fe; 39Fe; 49Fe	34Flg; 35Flg	41Ft; 42Ft; 43Ft; 45Ft 46Ft; 50Ft		

Tabela 4.5 – Classificação das tarefas relativamente aos conteúdos

7. Apresentação gráfica das tarefas neste estudo

Todas as tarefas apresentadas recorrem à utilização da calculadora gráfica. Algumas das questões podem também ser resolvidas por processos algébricos e, algumas delas, podem recorrer aos dois métodos de resolução (gráfico e algébrico), por se acreditar que os diferentes métodos de resolução são uma mais-valia no processo de ensino e aprendizagem.

O guião de cada uma das tarefas contempla: um cabeçalho, desenvolvimento e orientações ao professor.

No cabeçalho (figura 4.1):

- O número e a sigla;
- O tema;
- O nível de ensino;
- O nível de dificuldade de utilização da calculadora;

Numa primeira linha:

- Tipologia das tarefas;
- O tempo previsto para a implementação da tarefa;
- O título;
- As orientações para o professor;

Tarefa 3Fq	Funções Quadráticas	FUNÇÕES – 10º Ano / Intermédia
Tipologia: exploração		Duração: 90 minutos
Tarefa		
2 - Família de Funções quadráticas		

Figura 4. 1Cabeçalho das Tarefas

Desenvolvimento:

Apresenta-se a tarefa a propor aos alunos.

Orientações ao professor:

Em cada uma das tarefas, são dadas ao professor algumas sugestões que podem ser úteis aquando do seu desenvolvimento. Não existem modelos de trabalho rígidos nem receitas teóricas de funcionamento de sala de aula. Cada par “professor – turma” possui, uma especificidade muito própria. O professor é o gestor do processo de ensino e de aprendizagem decidindo, em cada momento, as opções metodológicas, o ritmo e o estilo de trabalho a desenvolver.

São ainda apresentadas sugestões quanto à organização dos alunos em aula, de acordo com a natureza da tarefa e dos objetivos delineados pelo professor – algumas das atividades podem ser mais propícias a um trabalho individual, outras podem beneficiar do trabalho em pares ou em pequenos grupos.

Para cada tarefa é indicada uma previsão do tempo de duração necessária à sua concretização. Essa sugestão deve ser encarada com alguma flexibilidade, pois o desenvolvimento de cada tarefa depende das características de cada turma. A rigidez de tempo pode ser prejudicial à discussão e à apresentação de raciocínios e de processos de resolução. O professor não deve deixar de verbalizar os raciocínios e discutir processos, só porque excedeu o limite de duração da tarefa prevista.

Na maior parte das tarefas, recomenda-se uma discussão alargada ao grupo turma por se acreditar que esses momentos de discussão são propícios à formulação de novas conjecturas e,

muitas vezes, à sua validação. Os alunos ganham em partilhar com os colegas e com o professor os seus métodos de resolução e a explicitação dos seus raciocínios. A interação com os colegas pode estimular a formulação de novos problemas, de novas ideias e de novas descobertas. Os alunos, ao longo da realização de uma tarefa, deparam-se com formas diferentes de resolução de problemas e, desse modo, a compreensão conceitual, pode ser mais profunda e duradoura. Cabe, contudo, ao professor, de acordo com a realidade de cada turma, encontrar aquela que lhe parece ser a melhor metodologia para a realização de cada uma das tarefas.

Sugere-se ainda que, de vez em quando, o professor solicite aos alunos um relatório final pois a elaboração de um texto escrito pode desenvolver nos alunos um processo de metacognição, ou seja, pode ajudá-los a refletir de forma consciente sobre o que fizeram e porque o fizeram. Além disso, a elaboração de um relatório desenvolve as competências de comunicação e de argumentação.

Na concretização das tarefas propostas, cabe ao professor ser, simultaneamente, dinamizador e regulador do processo de ensino e de aprendizagem, criando situações motivadoras que impliquem os alunos na sua própria aprendizagem e que desenvolvam a criatividade. Assume, neste nível de ensino, importância fundamental o contrato pedagógico a estabelecer com os alunos, na negociação e na definição de consensos para os projetos de trabalho, na participação ativa e responsável, em suma, na gestão do processo de ensino e de aprendizagem.

Capítulo 5 – Conclusões

1. Conclusões e resultados da investigação

Este estudo partiu do pressuposto de que é um problema grave a inexistência de um conjunto de recursos sistematizados e à disposição dos professores, problema agravado pela necessidade de os alunos treinarem o uso da calculadora gráfica na resolução de tarefas.

Foram levantadas as seguintes questões que serviram de referencial a este estudo:

Que tipologia de tarefas permite sistematizar o conjunto de tarefas elaboradas?

Como estruturar cada tarefa?

Que conteúdos programáticos devem ser abordados nas tarefas?

Para estas três questões foram construídas questões de operacionalização de modo a por em prática este estudo. Assim, para a primeira questão equaciona-se a tipologia segundo várias perspetivas:

Qual o ano de escolaridade?

Qual o nível de uso da calculadora gráfica?

Qual o tipo de tarefa?

Para a segunda questão equaciona-se a estrutura de cada tarefa:

Que itens devem constar em cada tarefa?

Como se devem organizar os itens de cada tarefa?

Para a terceira questão abordam-se os conteúdos programáticos segundo:

Quais os tipos de funções?

Qual a sequência adotada?

A resposta a estas questões encontra-se no conjunto de tarefas que foram organizadas segundo uma tipologia refletida e fundamentada na teoria. A metodologia qualitativa, com análise de conteúdo, permitiu a seleção e organização das tarefas segundo dimensões e categorias de análise. A construção de um cabeçalho e de uma estrutura de tarefa, com a tipologia e características de cada documento, foi mais uma etapa metodológica deste estudo. Finalmente a organização sequenciada de todas as tarefas num conjunto estruturado, dá sentido ao estudo.

Refletindo sobre o trabalho realizado, considera-se que esta construção e/ou compilação de tarefas pode ser profícua para os alunos e para a comunidade de professores de Matemática.

As tarefas do tipo exploração e do tipo problema propostas, podem proporcionar aos alunos ricos momentos de reflexão e podem contribuir para o desenvolvimento do seu raciocínio matemático. Algumas das tarefas mais elementares podem contribuir para aumentar a motivação de alunos mais fracos. A diversificação de tarefas propostas para explorar alguns dos conteúdos programáticos pode permitir alargar o leque de estratégias utilizadas pelos alunos na resolução das mesmas e permitir uma melhor compreensão dos conceitos que lhe estão associados. Com a aplicação destas tarefas pretende-se que, no final do Ensino Secundário, os alunos considerem a calculadora gráfica um precioso auxiliar que lhes permita confrontar as várias formas de representação sem ter de recorrer à manipulação algébrica.

A investigação levada a cabo foi enriquecida por uma experiência de vinte anos de ensino mas revelou-se uma mais - valia para a reflexão sobre as práticas. Contribuiu para um aprofundamento dos conhecimentos sobre tarefas a propor aos alunos, sobre outras potencialidades da calculadora gráfica, enriquecendo, deste modo, a minha formação pessoal e profissional. Em particular, este estudo permitiu-me reconhecer a relevância da seleção das

tarefas de exploração e de problemas para o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos.

Para a comunidade de professores de Matemática, este estudo proporciona um leque significativo de tarefas a utilizar em sala de aula já que são anexadas um conjunto significativo de tarefas diversificadas, classificadas e ainda com sugestões e orientações. Estas tarefas podem ser disponibilizadas numa plataforma de acesso a professores e alunos. Deste modo, os professores podem contar com uma base de trabalho e, se necessário, proceder a alterações que considerem pertinentes tendo em conta a especificidade de cada turma.

Este estudo sugere que o professor se deve envolver diretamente na gestão curricular, selecionando, estruturando e organizando tarefas que permitam envolver os alunos em atividades enriquecedoras. Sugere, também, que essas atividades podem ser enriquecidas, quer pelo uso de materiais como a calculadora gráfica, quer pela diversificação das tarefas propostas. A utilização da calculadora permite a confrontação constante das diferentes representações de funções, contribuindo, desse modo, para uma melhor compreensão das funções e das suas propriedades. Os relatórios e as apresentações orais que privilegiei na maioria das tarefas, podem contribuir para o desenvolvimento das competências transversais da comunicação e do raciocínio matemático. As discussões e reflexões proporcionadas por estas tarefas, em grupo turma, podem contribuir para a clarificação do pensamento intuitivo e para a sua formalização e abstração.

A construção e compilação de tarefas de todos os conteúdos sobre funções do Ensino Secundário foi uma das maiores dificuldades com que me deparei ao longo desta investigação.

2.Sugestões para trabalhos futuros

Para futuras investigações, penso que seria interessante e profícuo a elaboração de mais tarefas sobre funções irracionais, funções exponenciais e logarítmicas. Seria ainda enriquecedor a construção de algumas tarefas do tipo Investigação e de Projeto.

Uma investigação que se preocupasse com o contributo dos relatórios deste tipo de tarefas que recorrem a tecnologias gráficas na avaliação das aprendizagens dos alunos poderia ser uma mais valia na educação matemática.

A realização de um estudo com uma análise pormenorizada da aplicação de algumas destas tarefas a alunos de diferentes níveis de desempenho podia ser uma investigação que enriquecia o trabalho agora apresentado.

Referências

- Amado, J., (2000). A técnica de análise de conteúdo, revista de referência, 5 pp. 53-63. Novembro 2000.
- APM, (1988). *A renovação do currículo de Matemática*. Lisboa: APM
- Beato, S. (2011). Relatório de Estágio. Universidade Nova de Lisboa.
- Boavida, A. (1993). *Resolução de problemas em educação matemática: contributo para uma análise epistemológica e educativa das representações pessoais dos professores*.
Dissertação de mestrado, Universidade Nova de Lisboa: Associação de Professores de Matemática.
- Bogdan, R. e Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em Educação: Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.
- Caraça, B. J. (1951). *Conceitos fundamentais da Matemática*. Lisboa: Gradiva.
- Carvalho, C. A. (2006). *A calculadora gráfica na trigonometria do 11º ano. Uma análise de manuais escolares de Matemática*. Tese de Mestrado. Faculdade de Ciências.
- Christiansen, B., & Walther, G. (1986). Task and Activity. In B. Christiansen, A. G. Howson, & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 243-307). Dordrecht: D. Reidel.
- Decreto- Lei nº 6/2001, Diário da República, I Série A, 18 de Janeiro de 2001.
- Delgado, M. (2011). *A articulação entre a Matemática e o Estudo Acompanhado: Conceções e práticas de professores*. Mestrado em Ciências da Educação. Universidade do Minho.
- Des (1997). *Funções: Matemática – Programas 10º, 11º e 12º anos*. Lisboa: Editorial do ministério da Educação
- DES (2001). *Cursos Científico- Humanístico de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socioeconómicas. Matemática A*. Lisboa: Ministério da educação.

- Dias, P. (2005) *Avaliação reguladora no ensino secundário*. Processos usados pelos alunos em investigações matemáticas.
- Domingos, A (1994). *A aprendizagem de funções num ambiente computacional com recurso a diferentes representações*. Tese de Mestrado. Universidade Nova de Lisboa.
- Fernandes, L. (1997). *Processos de Aprendizagem do Conceito de Derivadas em Contexto Computacionais. Uma experiência de Ensino no 12º ano de escolaridade*. Tese de mestrado. Lisboa.
- Fonseca, H. J. Brunheira, L., & Ponte, J. P. (1999). As actividades de investigação, o professor e a aula de Matemática. Actas de ProfMat 99.
- Friedman, C.V.P. e Juurkiewicz, S. (2010). *Modelagem matemática na escola e na formação do professor: uma abordagem abrangente*. Educação e Matemática, 106, 43-47. Lisboa: APM
- Gray, E., & Tall, D.: (1994). 'Duality, ambiguity, and flexibility: A 'proceptual' view of simple arithmetic', *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(2), 116–140.
- Keeves, J., (1997). *Educational Research, Methodology, and Measurement: An International Handbook*, 2nd edition, Australia: Pergamon.
- Malik, L. A. (1988). Os Castradores do Reino. Lisboa: Livros do Horizonte.
- Ministério da Educação (1991). *Programa de Matemática para o 3º ciclo*. Lisboa: Autor.
- Ministério da Educação (2001). *Currículo Nacional do Ensino Básico – Competências Essenciais*. Lisboa: Autor.
- NCTM (1991). *Normas para o currículo e avaliação em matemática escolar*. Lisboa: APM e IIE
- NCTM (1994). *Normas Profissionais para o ensino da Matemática*. Lisboa: APM e IIE
- NCTM (1998). Principles and standards for school mathematics. Reston, Va.: NCTM.

- NCTM. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston: NCTM.
- NCTM. (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.
- Oliveira, I.B.T. (2009). *Aplicações e modelação matemática com recursos à calculadora gráfica e aos sensores, no estudo de funções com alunos do 9º ano de escolaridade*. Dissertação de mestrado, Universidade do Minho, Braga.
- Perrenoud, P. (1999). *Construir as competências desde a escola*. Porto Alegre: ARTMED Editora. (obra original em francês, publicada em 1997)
- Pires, M. (2001). *A diversificação de tarefas em Matemática no Ensino Secundário: um projeto de investigação-acção*. Dissertação de mestrado, Universidade de Lisboa. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.
- Pólya, G. (1978). *A arte de resolver problemas*. Trad. De Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência.
- Ponte, J. P. (1994). O estudo de caso na investigação em Educação Matemática. *Quadrante – Revista Teórica de Investigação*, 3(1), 3-18.
- Ponte, J. & Serrazina, M. (2000). *Didática da Matemática do 1º ciclo*. Lisboa: Universidade aberta.
- Ponte, J. P. Do Tangran ao cálculo das áreas: procurando por em prática os novos programas. IN: MOURÃO, A. P. et al. *Atas do V Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Lisboa: APM, 1995. P. 35-50.
- Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.
- Ponte, J.P.; Brocardo, J ; Oliveira, H. (2003). *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica,. 152p.

Quivy, R.& Campenhoudt, L., (2003). *Manual de investigação em ciências sociais*. 3ª ed. Lisboa:

Gradiva

Ramos, J.S. (1997). Matemática experimental. *Educação e Matemática* 45, 7-10. Lisboa: APM

Rocha, H. (2001) XIII SIEM 2001. *Calculadoras gráficas: Que utilização?* Em I. Lopes e C. Costa (Orgs.), Atas do XII SIEM . Vila Real: APM.

Roldão, M. C. (2004). *Gestão do currículo e avaliação de competências. As questões dos professores*. Lisboa: Editorial Presença.

Santos, Jorge S. (1996). *A Poesia pela musica, Didáctica do ritmo Segundo Santo Efrem*.
Universidade Aberta

Santos, L. (2003) *Educação e Matemática*, nº 74. Lisboa; APM

Sampaio, D. (1996). *Voltei à Escola*. Lisboa: Editorial Caminho.

Semião, M. J. (2007). *A utilização da calculadora gráfica na aula de Matemática: Um estudo com alunos do 12º ano no âmbito das funções* (tese mestrado, universidade de Évora).

Serrazina, L e Oliveira, I (2005). *O Currículo de matemática do ensino básico sob o olhar da Competência matemática*. In O professor e o desenvolvimento Curricular (pp. 35-62).
Lisboa: Grupo de Trabalho de Investigação- APM

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics* 22, 1-36.

Slavit, D. (1997). An alternative route to the reification of function. *Educational Studies in Mathematics*, 33, 259–281.

Skovsmose, O. (2000). *Cenários para investigação Bolema*, 14, 66-91

Silva, C. (2009). *Funções quadráticas no 10º ano, usando a calculadora gráfica*. Dissertação de Mestrado. Universidade de Lisboa.

ANEXO I

Grelha de seleção de tarefas

Manual _____

Autor: _____

Editora: _____

Dimensões Categorias	Exercício	Problema	Exploração	Modelação	Projeto
Aborda funções do secundário					
Diversidade de metodologias					
Atividades práticas					
Reflexão individual e em grupo					
Comunicação matemática					
Adequada ao nível dos alunos					
Utilização da calculadora gráfica					

ANEXO II

Índice de tarefas

1- FAMÍLIA DE FUNÇÕES AFINS	3
2 – FAMÍLIA DE FUNÇÕES QUADRÁTICAS	6
3 – OUTRAS FUNÇÕES QUADRÁTICAS.....	11
4 – QUADROS INSCRITOS NUM QUADRADO – FUNÇÃO QUADRÁTICA	13
5 – VIVEIROS DE PEIXES – FUNÇÃO QUADRÁTICA.....	15
6 – O LANÇAMENTO DE DUAS BOLAS – FUNÇÃO QUADRÁTICA.....	17
7 – LANÇAMENTO DE UMA BOLA – FUNÇÃO QUADRÁTICA	19
8 – SOB PRESSÃO – FUNÇÃO RACIONAL	21
9 – FAMÍLIA DE FUNÇÕES RACIONAIS	24
10 – TEMPERATURA – FUNÇÃO QUADRÁTICA	29
11 – IMITAR O GRÁFICO – FUNÇÃO LINEAR	31
12 – BOLA SALTITANTE – FUNÇÃO QUADRÁTICA.....	33
13 – FAMÍLIA DE FUNÇÕES MÓDULO.....	42
14 – O VOO DOS PATOS – FUNÇÃO MÓDULO.....	44
15 – PILHAS EM SÉRIE – FUNÇÃO RACIONAL	47
16 – ASSÍMPTOTAS DO GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO RACIONAL.....	48
17 – ASSÍMPTOTAS DO GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO RACIONAL.....	57
18 – EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES FRACIONÁRIAS.....	61
19 – FUNÇÕES RACIONAIS.....	63
20 – O JOGADOR DE TÊNIS – FUNÇÃO DERIVADA.....	65
21 – A BOLA NO PLANO INCLINADO – FUNÇÃO DERIVADA	69
22 – GARRAFA DE ÁGUA – FUNÇÃO DERIVADA	71
23 – DERIVADAS. MONOTONIA E EXTREMOS	74
24 – FUNÇÃO DEFINIDA POR RAMOS – FUNÇÃO DERIVADA	78
25 – EXTREMOS E DERIVADA.....	81
26 – CAMISAS DE LUXO – PROGRAMAÇÃO LINEAR	83
27 – NÚMERO DE NEPPER.....	86

28 – ELIM& MINAÇÃ.....	89
29 – OTIMIZAÇÃO.....	91
30 – RELAÇÃO ENTRE AS CARACTERÍSTICAS DA FUNÇÃO SOMA E DAS RESPECTIVAS FUNÇÕES PARCELAS	93
31 – ÀS VOLTAS COM FUNÇÕES POLINOMIAIS.....	95
32 – FUNÇÃO CÚBICA.....	97
33 – FUNÇÃO EXPONENCIAL.....	100
34 – INVERSA DA FUNÇÃO EXPONENCIAL.....	103
35 – FUNÇÃO LOGARÍTMICA.....	109
36 – FUNÇÕES EXPONENCIAIS.....	113
37 – ARREFECIMENTO DO CAFÉ – FUNÇÃO EXPONENCIAL.....	105
38 – ÁREA DE UM TRIÂNGULO – FUNÇÃO TRIGONOMÉTRICA.....	118
39 – CONCENTRAÇÃO “SARATEX” – FUNÇÃO EXPONENCIAL.....	121
40 – TRIÂNGULO INSCRITO – FUNÇÃO IRRACIONAL.....	123
41 – PERÍODO DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS.....	125
42 – SALTAR À CORDA – FUNÇÃO TRIGONOMÉTRICA.....	127
43 – RODA DA FEIRA – FUNÇÃO QUADRÁTICA.....	129
44 – FAMÍLIA DE FUNÇÕES AFINS.....	131
45- FAMÍLIA DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS.....	133
46 – À PROCURA DE SOLUÇÕES – FUNÇÃO TRIGONOMÉTRICA.....	135
47 – O METEORO– ESTATÍSTICA.....	137
48 – IGUALDADE DE FUNÇÕES.....	139
49 – NO CENTRO COMERCIAL – FUNÇÃO EXPONENCIAL.....	141
50 – ÁREA DE UM POLÍGONO – FUNÇÃO TRIGONOMÉTRICA.....	143

Tipologia: exploração

Duração: 90 minutos

Tarefa

1 – Família de Funções afins

Desenvolvimento:

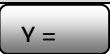
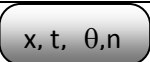
1. Recorrendo à calculadora gráfica, visualize os gráficos da **família de funções reais de variável real do tipo $y = mx$, $m \in \mathbb{R}$** .

Comece por atribuir ao parâmetro **m** diferentes valores positivos.

Por exemplo: $m = 1$; $m = 2$; $m = 0,5$; ...

Esboce os gráficos de cada uma das funções obtidas por concretização do parâmetro **m**. Compare os diferentes gráficos obtidos e registre as suas conclusões.

2. Faça um estudo semelhante ao anterior atribuindo a **m** valores negativos. O que observa?
3. Faça um estudo semelhante ao anterior para a família de funções do tipo **$y = mx + b$** com **$b \in \mathbb{R}$, quando $m = 2$** e, atribuindo ao parâmetro **b**, valores à sua escolha. Registe as suas conclusões.
4. Estude o efeito do parâmetro **m** na família de funções do tipo **$y = mx + b$** , quando **$b = 2$** e, atribuindo diferentes valores a **m**. Registe as suas conclusões.
5. Estudámos famílias de funções do tipo **$y = mx + b$** , com **$m \in \mathbb{R}$** e **$b \in \mathbb{R}$** . Qual o significado dos parâmetros **m** e **b** nesta família de funções?

Instruções para obter a representação gráfica de funções na calculadora	Teclas
Introduzir a expressão analítica que define a função	
Introduzir a variável	
Visualizar o gráfico	
Alterar o retângulo de visualização	

	Window Zoom
Percorrer o gráfico “lendo” as coordenadas de pontos	Trace
Representar diversas funções cujos gráficos são retas paralelas.	$Y = ax + \{b,c,d\}$

Organização:

- Duração: 90 minutos
- Trabalho em grupo – 4 alunos por grupo
- Os alunos devem, em grupo, estudar e sistematizar o comportamento dos gráficos das funções afins.
- No final da tarefa, cada grupo deve apresentar as suas conclusões elaborando um pequeno relatório a ser apresentado ao professor.
- Na aula seguinte, o professor pode convidar um dos grupos a apresentar as conclusões à turma.

Orientações ao professor:

Recorrendo à calculadora gráfica os alunos podem visualizar e reproduzir, numa folha de papel, os gráficos das funções definidas pelas respetivas expressões analíticas.

O professor deve levar os alunos a atribuir aos parâmetros ***m*** e ***b*** valores positivos e valores negativos. Deve interrogá-los, sempre que necessário, quanto ao efeito destes parâmetros nesta família de funções.

Após esta investigação, os alunos devem ter desenvolvido a competência de esboçar rapidamente o gráfico de uma função afim sem recorrer à calculadora

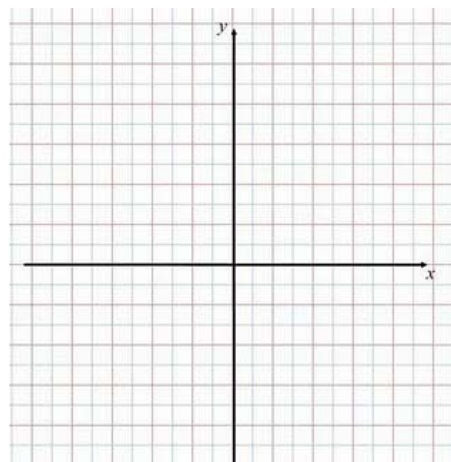
Tipologia: exploração**Duração: 90 minutos****Tarefa****2 – Família de Funções quadráticas****Desenvolvimento:**

1. Utilizando a calculadora gráfica, visualize os gráficos das funções reais de variável real:

$$y = x^2; \quad y = 2x^2; \quad y = 3x^2; \quad y = \frac{1}{2}x^2; \quad y = \frac{1}{3}x^2$$

Represente-as no referencial cartesiano da figura ao lado.

Que conclusões pode tirar ?

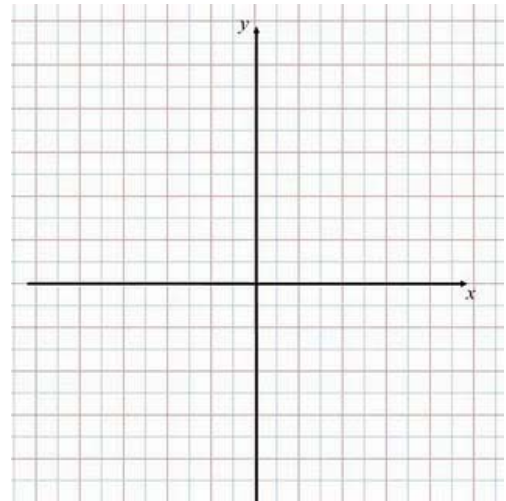
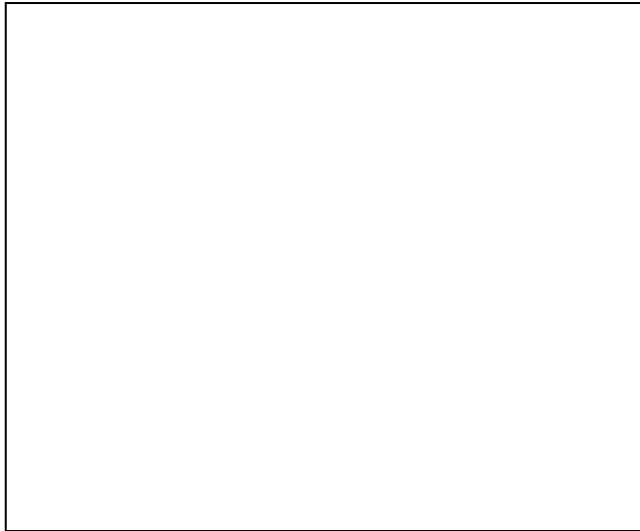


Obtenha agora, pelo mesmo processo, a representação gráfica das seguintes funções reais de variável real:

$$y = x^2; \quad y = -x^2; \quad y = -2x^2; \quad y = -3x^2; \quad y = -\frac{1}{2}x^2; \quad y = -\frac{1}{3}x^2$$

Represente-as no referencial cartesiano da figura ao lado.

Que conclusões pode tirar ?

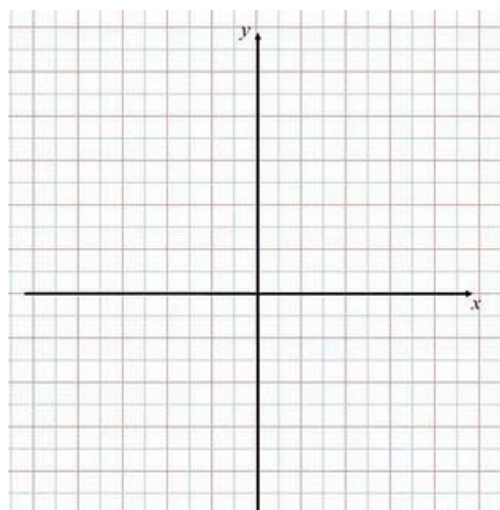


Qual a influência do parâmetro a nos gráficos da família de funções r. v. r do tipo $y = ax^2$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$?

2. Faça um estudo semelhante ao anterior para as funções reais de variável real do tipo $y = (x - h)^2$, $h \in \mathbb{R}$, tomando para h os seguintes valores: $h = 0$; $h = 1$; $h = 3$; $h = -1$; $h = -2$.

Represente-as no referencial cartesiano da figura ao lado.

Que conclusões pode tirar?

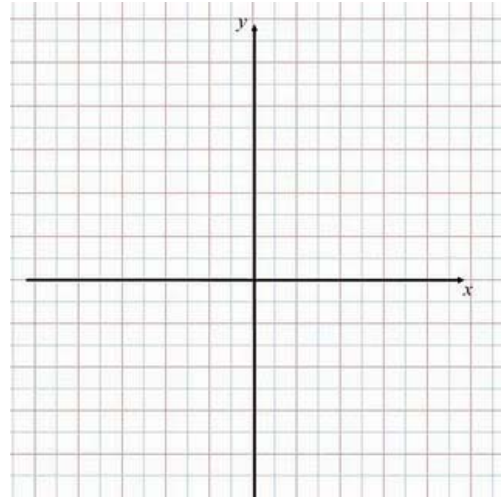
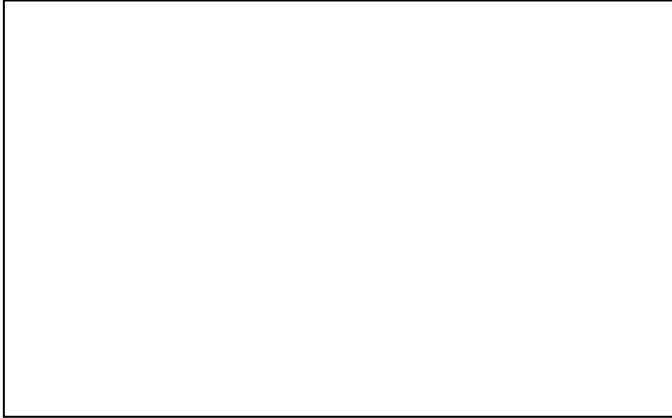


Qual a influência do parâmetro h nos gráficos da família de funções reais de variável real do tipo $y = (x - h)^2$?

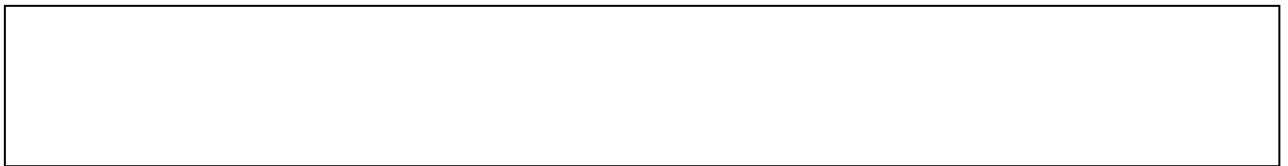


3. Analise o que acontece com os gráficos das funções reais de variável real do tipo $y = x^2 + k$, $k \in \mathbb{R}$, atribuindo a k os seguintes valores: $k = 0$; $k = 1$; $k = 3$; $k = -1$ e $k = -2$.

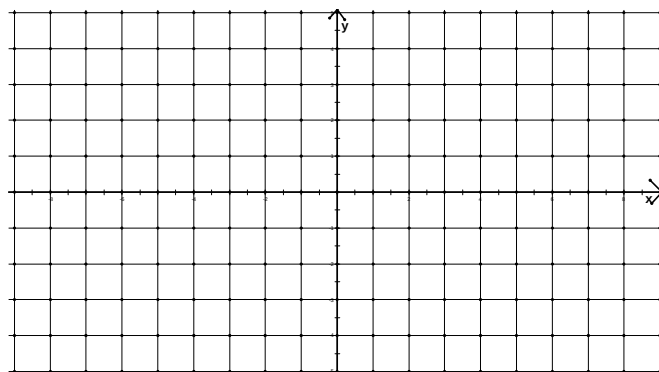
Que conclusões pode tirar?



Qual a influência do parâmetro k nos gráficos da família de funções do tipo $y = x^2 + k$?



4. Como pode obter o gráfico de uma função da família $y = a(x - h)^2 + k$ partir do gráfico da função $y = x^2$?
5. Sem utilizar a calculadora, esboce o gráfico da função real de variável real $y = (x - 3)^2 + 2$



Organização:

- Duração: 90 minutos
- Trabalho em grupo – 4 alunos por grupo
- Os alunos devem, em grupo, estudar e sistematizar o comportamento dos gráficos das funções quadráticas.
- No final da tarefa, cada grupo deve apresentar as suas conclusões elaborando um pequeno relatório a ser apresentado ao professor.
- Na aula seguinte, o professor pode convidar um dos grupos a apresentar as conclusões à turma.

Orientações ao professor:

Esta tarefa pretende estudar os efeitos da mudança de parâmetros nos gráficos de funções quadráticas.

O papel do professor nesta tarefa deverá ser, fundamentalmente, o de apoiar o trabalho de cada grupo, lançando pistas ou procedendo a alguns esclarecimentos que ajudem a ultrapassar obstáculos.

Nestas tarefas os alunos podem apresentar as seguintes dificuldades:

- Introdução correta da expressão analítica que define a função na calculadora
- Esboço do gráfico da função no papel
- Interpretação dos efeitos das alterações dos parâmetros nestas famílias de funções.

Quando se pergunta o que conclui, o professor deve levar o aluno a identificar em cada caso, o eixo de simetria, as coordenadas do vértice da parábola, a existência e o número de zeros, o sentido da concavidade e o contradomínio da função.

Tipologia : exploração

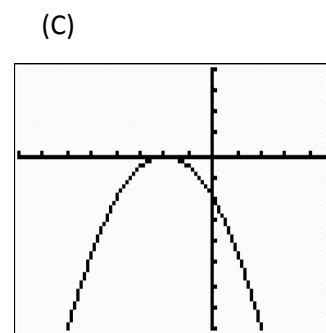
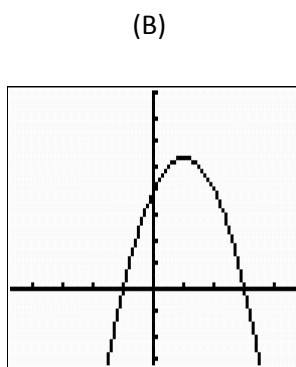
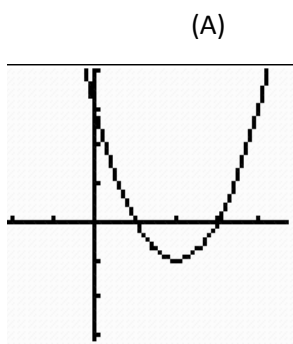
Duração : 90 minutos

Tarefa

3- Outras funções Quadráticas

Desenvolvimento:

1. Represente graficamente as funções reais de variável real definidas por:
 $f(x) = (x - 2)(x + 5)$
 $g(x) = 3(x - 2)(x + 5)$
 $h(x) = -0,5(x - 2)(x + 5)$
Indique os zeros de cada uma das funções. Que pode concluir?
2. Considere a família de funções do tipo $y = a(x - 2)(x + 5)$. Atribua outros valores positivos e negativos a a . Qual a influência do parâmetro a nesta família de funções?
3. Investigue a influência dos parâmetros α e β , na família dos gráficos das funções do tipo $y = (x - \alpha)(x - \beta)$, atribuindo diferentes valores, positivos, negativos e zero a esses parâmetros.
4. O que acontece ao gráfico desta família de funções quando $\alpha = \beta$?
5. Defina, através das suas expressões algébricas, as funções que correspondem aos seguintes gráficos. Verifique as expressões que encontrou com a calculadora gráfica.



6. Defina uma função quadrática que não tenha zeros.

Esboce o gráfico recorrendo à calculadora gráfica e confirme que não tem zeros.

(Adaptada de Silva, C. (2009))

Organização:

- Duração: 90 minutos.
- Trabalho em pares
- No final da aula os alunos devem entregar, por escrito, as respostas obtidas e as conclusões a que chegaram. A discussão geral deve envolver todos os alunos e deve procurar analisar as conclusões a que cada grupo chegou.

Orientações ao professor:

- Estudar os efeitos dos parâmetros a , α e β na família de funções do tipo $y = a(x - \alpha)(x - \beta)$ e analisar as informações imediatas que cada um fornece;
- Traduzir uma função quadrática da representação gráfica para a representação algébrica.
- Recorrendo à calculadora gráfica, os alunos devem estudar os efeitos dos parâmetros a , α e β , quando a função é dada na forma $y = a(x - \alpha)(x - \beta)$, e discutir as informações que cada um deles fornece. Na tradução da representação gráfica para a representação algébrica os alunos podem apresentar várias soluções possíveis. No caso da função quadrática que não tem zeros, os alunos devem concluir que esta não pode ser definida como o produto de polinómios do 1º grau (estes admitem sempre um zero). Uma resposta possível pode ser $y = x^2 + 1$ ou qualquer outro polinómio do 2º grau com $\Delta < 0$.

Tipologia : Problema

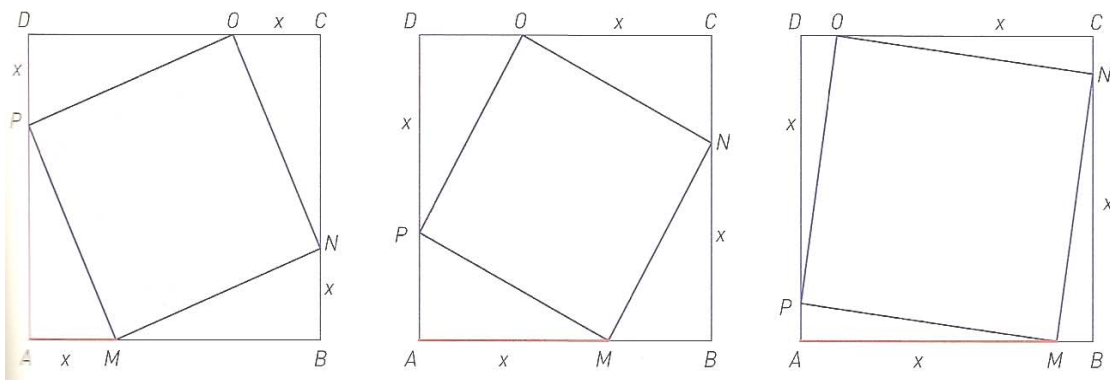
Duração : 90 minutos

Tarefa

4- Quadros inscritos num quadrado – função quadrática

Desenvolvimento:

1. Considere um quadrado de lado 6 cm e um ponto M que parte de A e que se desloca ao longo do lado [AB] e que vai gerando quadrados inscritos no quadrado dado, como sugere a figura.
- 1.1. Entre que valores varia o deslocamento M?
- 1.2. Sem efetuar cálculos, faça um esboço gráfico da função que relaciona a área do quadrado inscrito com o deslocamento do ponto M.
- 1.3. Calcule a área de cada quadrado em função do deslocamento do ponto M. Registe numa tabela os vários valores para o deslocamento e as áreas dos quadrados correspondentes.
- 1.4. Utilize a calculadora para obter uma representação gráfica da função e um modelo analítico que se ajuste à situação apresentada.
- 1.5. Por processos exclusivamente analíticos, determine uma expressão analítica da função que relaciona a área do quadrado inscrito com o deslocamento do ponto e compare-a com a representação obtida pela calculadora.



(Adaptada de Silva, C. (2009))

Organização:

- Duração: 90 minutos
- Trabalho em grupo – 4 alunos por grupo.
- Os alunos devem, em grupo, resolver a tarefa, registar e justificar os resultados e no, final da aula, apresentarem esses resultados para discussão com a turma.

Orientações ao professor:

- Com esta tarefa pretende-se que os alunos:
 - façam o esboço gráfico de uma função que relaciona a área de um quadrado com.....;
 - Utilizem a regressão quadrática da calculadora gráfica;
 - Determinem a expressão algébrica da área do quadrado [MNOP] em função de x.
- Os alunos devem concluir que:
 - a área do quadrado inicial é de 36 cm^2 , quando o valor de x é 0;
 - A área vai diminuindo até atingir o valor 18 cm^2 , quando x vale 3;
 - A área aumenta até atingir novamente 36 cm^2 , quando $x = 6 \text{ cm}$;
 - Não se trata de uma variação linear.
- Os alunos podem utilizar o modo STAT da calculadora para obter, recorrendo à regressão quadrática, a expressão algébrica que define a área em função de x, $A(x) = 2x^2 - 12x + 36$.

Tipologia: Problema**Duração : 90 minutos****Tarefa****5 – Viveiros de peixes – função quadrática**

Num viveiro de peixes de água doce, prevê-se que, t meses após o início do ano de 2010, o número de trutas do tipo A (em centenas) seja dado pela função:

$$A(t) = 0,22t^2 - 10,2t + 250$$

1. Quantas trutas do tipo A existirão nesse viveiro no início de Julho de 2010?
2. No início de um certo mês do ano de 2010, existiam, nesse viveiro, 20 450 trutas do tipo A.

Em que mês é que isso aconteceu?

3. Segundo este modelo, qual será o número mínimo de trutas do tipo A?
Apresente o resultado em centenas de trutas, arredondado às décimas.
4. Sabe-se que, nesse viveiro, o número de trutas do tipo B (também em centenas) é dado pela família de funções do tipo:

$$B(t) = 0,31t^2 - 14t + 300$$

Segundo estes modelos matemáticos, qual dos dois tipos de trutas atingirá um número inferior a 16 mil trutas? E quantos meses (arredondado às décimas) antes do outro?

Apresente os gráficos visualizados e as coordenadas de pontos relevantes. (arredondados às décimas) Ver como aparece esta questão nos exames nacionais

Organização:

- Duração: 90 minutos
- Trabalho individual.

Orientações ao professor:

- Com esta tarefa pretende-se que os alunos:
 - o consigam interpretar um problema em contexto real.
 - o consigam aplicar os conhecimentos da função quadrática.
 - o resolvam cada uma das alíneas analítica e/ou graficamente.
- Na correção do problema o professor deve sublinhar os diferentes tipos de resolução e deve chamar a atenção para as unidades do problema em questão.

Tipologia: Problema

Duração: 45 minutos

Tarefa

6 – O lançamento de duas bolas- função quadrática

O Joaquim lança duas bolas simultaneamente. A altura, em metros, das bolas é dada, em função de t , em segundos, pelas seguintes leis:



Bola 1

$$s_1 = 3t - \frac{t^2}{4} + 2$$

Bola 2

$$s_2 = 8t - t^2 + 2$$

Represente graficamente as funções s_1 e s_2 .

Qual das duas bolas atingiu maior altura? E em que instante?

Em que instante as duas bolas se encontraram à mesma altura?

Determine, com aproximação às décimas, a distância máxima entre as duas bolas durante os primeiros 7 segundos, e diga em que instante tal aconteceu.

Adaptado do Manual FUNÇÕES 1 – 10º Ano, pág. 108, PORTO EDITORA

Organização:

- Duração: 45 minutos
- Trabalho realizado a pares

Orientações ao professor:

Os alunos devem ser capazes de:

- Analisar situações da vida real identificando modelos matemáticos que permitam a sua interpretação e resolução;
- Selecionar estratégias de resolução de problemas;

Aplicar os conhecimentos sobre funções quadráticas na resolução de problemas, em contexto de semi-realidade e recorrendo à calculadora gráfica

Tipologia: Problema

Duração : 90 minutos

Tarefa

7 – Lançamento de uma bola – função quadrática

Desenvolvimento:

1. Uma bola é lançada verticalmente com uma velocidade inicial de 32 m/s.

As funções $h(t) = -4,9 t^2 + 32 t + 2,1$ e $v(t) = -9,8t + 32$ podem ser utilizadas para prever, respetivamente, a altura da bola e a sua velocidade em cada instante.

1.1. Preencha a tabela seguinte

Tempo (s)	0	1	2	3	4	5	6	7
Altura(m)								
Velocidade (m/s)								

1.2. Representa graficamente as duas funções.

1.3. Qual é a altura máxima que a bola atinge?

Em que instante ocorre?

Qual é a velocidade da bola nesse instante?

Que valores toma a velocidade antes desse instante? E depois?

1.4. Qual é o domínio de cada uma das funções? E o contradomínio?

1.5. Qual é a velocidade da bola no momento em que atinge o solo?

1.6. O gráfico da função que relaciona o tempo com a altura da bola é um gráfico simétrico. Assinala o eixo de simetria. Que implicações ou significado tem esta simetria no problema da realidade que está a estudar?

(Adaptado de “ Advance Algebra Trough Data Exploration”)

Organização:

- Duração: 90 minutos
- Trabalho realizado a pares

Orientações ao professor:

- Pretende-se que os alunos:
 - o relacionem os conteúdos estudados sobre a função quadrática com problemas da vida real.
 - o se familiarizem com a calculadora gráfica.
- Com esta situação pode-se levar os alunos a fazer comparações sobre a monotonia da função altura com o sinal da função velocidade e assim aproveitar para referir que a função velocidade é a derivada da função altura.

Tipologia: Problema

Duração : 90 minutos

Tarefa

8 – Sob Pressão – função racional

Desenvolvimento:

Sob Pressão

Quando um gás é contido num recipiente é comprimido e o seu volume e a sua pressão variam. À medida que a força exercida no gás aumenta a pressão aumenta também e o volume diminui.

Mantendo a temperatura constante, foram recolhidos os seguintes valores:

Volume (cm ³)	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
Pressão (Atm.)	9.25	4.63	3.08	2.31	1.85	1.54	1.32	1.16	1.03	0.93

1. Esboce o gráfico desta situação.
2. Qual a variável independente? Qual o eixo usado para a sua representação?
3. Qual a variável dependente? Qual o eixo usado para a sua representação?
4. Introduza nas listas L₁ e L₂ da calculadora os dados da tabela

Procedimentos: carregar na tecla STAT 1. Edit ENTER

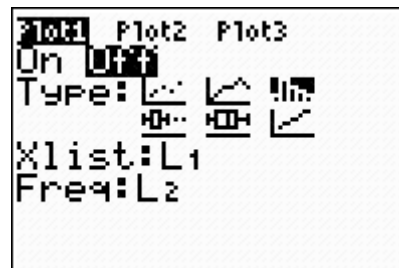
5. Construa o gráfico estatístico desta situação.

Procedimento:

Carregar na tecla 2nd y = STATPLOTS1: Plot1 ... off Enter

Escolher um ZOOM 8: zoomstat

“Ajustar” Window



6. Vai efetuar o produto dos valores do volume pelos correspondentes valores de pressão, colocando-os numa nova lista da calculadora, L₃.

Para isso coloque o cursor em L₃, pressione Enter e escreva L₁ x L₂

seguido de Enter.

(para escrever as listas L₁ e L₂ debes teclar 2nd 1 e 2nd 2)

L1	L2	L3	2
10	1.85		
12	1.54		
14	1.32		
16	1.16		
18	1.03		
20	93		
-----	*****		
L2(11) =			

7. Registe os valores obtidos na lista L₃:

$v \times P$

Comente os resultados obtidos

8. Escolha um valor que melhor represente o produto do volume e pressão e designa-o por k.

K = _____

9. Represente graficamente a função $y = \frac{k}{x}$ usando o menu da c calculadora.

10. Para visualizar o gráfico pressione GRAPH. Que observa?

Organização:

- Duração: 90 minutos
- Trabalho realizado a Pares

Orientações ao professor:

- Esta tarefa tem por objetivo a introdução da proporcionalidade inversa.
- O professor deve chamar a atenção da forma do gráfico e relembrar o aspeto gráfico de uma situação de proporcionalidade direta.

Tipologia: exploração**Duração : 90 minutos****Tarefa****9 – Família de funções racionais****Desenvolvimento:**

1. Utilizando a calculadora, visualize os gráficos das funções do tipo:

$$y = \frac{a}{x}, \text{ com } a \neq 0 \text{ e } x \neq 0$$

Para este estudo, comece por atribuir ao parâmetro a o valor 1 e, seguidamente, os valores 2, 3 e 5.

Indique qual o efeito do parâmetro a nesta família de funções.

Faça um estudo semelhante atribuindo valores negativos ao parâmetro a . Que conclusões pode tirar?

Acerca das funções reais de variável real do tipo $y = \frac{a}{x}$.

1.1. Indique:

- Domínio
- Contradomínio
- Zeros
- Extremos
- Paridade
- Assíntotas
- Tipo de gráfico

1.2. Preencha as seguintes tabelas (estudo de sinal e variação da função):

$a > 0$			
x	$-\infty$	0	$+\infty$
Sinal			

$a > 0$			
x	$-\infty$	0	$+\infty$
Sinal			

2. Estudo das funções de família $y = b + \frac{1}{x}$, com $b \in \mathbb{R}$ e $x \neq 0$

2.1. Obtenha o gráfico da função $y = \frac{1}{x}$

2.2. Introduza a função $y = b + \frac{1}{x}$, atribuindo ao parâmetro b , sucessivamente, os valores

2, 3, 0.5, -2, -3, e -5

Indique qual o efeito do parâmetro b nesta família de funções

3. Estudo das funções do tipo $y = \frac{1}{x + c}$, ($c \in \mathbb{R}$ e $x \neq -c$)

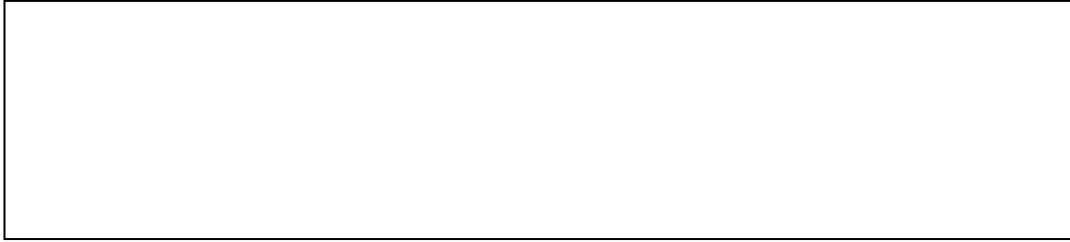
Atribua ao parâmetro c o valor 2

Indique qual o efeito do parâmetro c nesta família de funções

Complete: “ A reta de equação $x = \dots$ é assintota do gráfico da função $y =$

$$\frac{1}{x + 2}.$$

Faça um estudo semelhante usando outros valores para c , uns positivos e outros negativos e tome nota das conclusões a que chegou.



4. Estudo das funções do tipo $y = b + \frac{a}{x + c}$ (a, b e $c \in \mathbb{R}$ e $x \neq -c$)

4.1. Considere a função que se obtém quando concretiza os parâmetros com os valores $a = 1$, $b = 3$ e $c = 2$.

4.2. Sem traçar o seu gráfico, complete:

- O domínio da função é:
- O contradomínio da função é :
- A assíntota vertical do gráfico da função é a reta de equação
- A assíntota horizontal do gráfico da função é a reta de equação

Obtenha o gráfico da função e confirme as suas conjeturas.

Organização:

- Duração: 90 minutos
- Trabalho em grupo – 4 alunos por grupo
- Os alunos devem, em grupo, estudar e sistematizar o comportamento dos gráficos das funções racionais.
- No final da tarefa, cada grupo deve apresentar as suas conclusões elaborando um pequeno relatório a ser apresentado ao professor.

Orientações ao professor:

Pretende-se, com esta atividade, estudar os efeitos dos parâmetros a , b e c nos gráficos das funções do tipo $y = b + \frac{a}{x + c}$ (a, b e $c \in \mathbb{R}$ e $x \neq -c$) em relação ao gráfico da função definida por $f(x) = \frac{1}{x}$ ($x \neq 0$).

O papel do professor nesta tarefa deverá ser, fundamentalmente, o de apoiar o trabalho de cada grupo, lançando pistas ou procedendo a alguns esclarecimentos que ajudem a ultrapassar obstáculos.

Nestas tarefas os alunos podem apresentar as seguintes dificuldades:

- Introdução correta da expressão analítica que define a função na calculadora
- Interpretação dos efeitos das alterações dos parâmetros nestas famílias de funções.
- Fazer conjecturas em relação aos parâmetros.

Esta ficha está orientada com o objetivo de permitir uma maior autonomia de cada grupo de trabalho.

Tipologia: Problema**Duração : 90 minutos****Tarefa****10 – Temperatura – função quadrática****Desenvolvimento:**

1. O Jorge está a faltar às aulas. Acordou às 5 horas e suspeitou que estava com febre, o que foi confirmado pela temperatura registada no termómetro.

A temperatura evoluiu nas quatro horas seguintes de acordo com o modelo matemático $T(h) = -0,5 h^2 + 2h + 38$. (T representa a temperatura registada após h horas: $0 \leq h \leq 4$.

A temperatura começou a baixar 20 minutos após a administração de um determinado medicamento.

- 1.1. Qual a temperatura registada às 5 horas? Justifique a sua resposta.
- 1.2. Qual a temperatura máxima atingida, no período de observação? Justifique a sua resposta.
- 1.3. A que horas foi administrado o medicamento? Justifique a sua resposta.
- 1.4.
- 1.5. A Ermelinda, irmã do Jorge, também se encontra doente. A sua temperatura evolui de acordo com o modelo $T_1(h) = T(h + 2)$.

Em que intervalo de tempo a temperatura da Ermelinda foi superior a $39,5^\circ\text{C}$? Justifique a sua resposta.

Organização:

- Duração: 90 minutos
- Os alunos devem, em pares, resolver, e registar todas as conclusões a que chegaram. Devem, para isso, elaborar um curto relatório em que apresentem todos os cálculos efetuados, esboço(s) gráfico(s), pontos relevantes e conclusões.
- No final da aula as conclusões serão partilhadas e discutidas com todos os alunos da turma.

Orientações ao professor:

Os alunos devem ser capazes de:

- Analisar situações da vida real identificando modelos matemáticos que permitam a sua interpretação e resolução;
- Selecionar estratégias de resolução de problemas;
- Aplicar os conhecimentos sobre funções quadráticas na resolução de problemas, em contexto de semi realidade e recorrendo à calculadora gráfica.

Os alunos podem desenvolver esta tarefa usando processos exclusivamente algébricos ou recorrendo à calculadora gráfica.

Para obter a representação gráfica de cada uma das funções, os alunos devem escolher uma janela de visualização adequada à situação. Devem ainda saber interpretar e criticar os resultados obtidos no contexto do problema em estudo.

Tipologia: Modelação**Duração : 90 minutos****Tarefa****11 – Imitar o gráfico- função linear****Material:**

- 1.Calculadora gráfica
- 1 CBR
- 1 cabo de ligação

Descrição da experiência

Corra o programa RANGER na calculadora:

Escolha APPLICATIONS do MAIN MENU e selecione METERS;

Do menu APPLICATIONS escolha 1: Dist Match e siga as instruções.

Observar o gráfico

1. Que variável está representada no eixo dos xx? Em que unidade? E no eixo dos yy?
2. Quando o segmento tem declive positivo (quem anda?) anda para a frente ou para trás?
3. E quando o declive é negativo?
4. O que faz (Quem?) quando o segmento é horizontal?
5. A que segmento corresponde uma deslocação mais rápida? Porquê?
6. Escolha um dos segmentos que fazem parte do gráfico.
 - 6.1. Se andar um passo por segundo, qual deve ser o comprimento do passo?
 - 6.2. Quantos metros têm de andar e em quantos segundos?
 - 6.3. Qual é a velocidade em metros por segundo? E em km/hora?

Organização:

- Duração: 90 minutos
- Grupos de 4 alunos

Orientações ao professor:

O professor deve procurar manter um clima de liberdade e descontração com os alunos, estimulando a sua participação e criatividade.

Tipologia: Modelação

Duração : 180 minutos

Tarefa

12 – Bola saltitante – função quadrática

Diversos jogos envolvem a colocação de objectos em movimento, os quais podem ser impulsionados por contacto directo do jogador ou utilizando-se um equipamento adequado.

Com certeza que já deixou cair uma bola. Durante a queda a bola encontra-se, em cada momento, a uma determinada distância do chão.

Como poderá determinar a altura em relação ao chão a que a bola se encontra passado alguns instantes após ter sido lançada?

Como elas saltam...



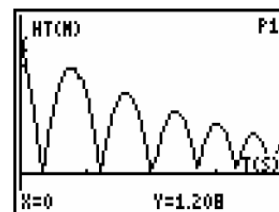
Para responder à questão formulada precisa de obter uma expressão cuja imagem geométrica se ajuste à forma que representa um dos saltos da bola.

Para lhe ajudar a responder a esta questão realize a experiência descrita em anexo e tente responder às questões que lhe vão sendo colocadas.

Questões

Antes de responder a estas questões realize os primeiros 7 passos descritos no procedimento experimental, exposto em anexo.

1. Qual é a grandeza física representada no eixo Ox ? Qual é a unidade em que está expressa?
2. Qual é a grandeza física representada no eixo Oy ? Qual é a unidade em que está expressa?



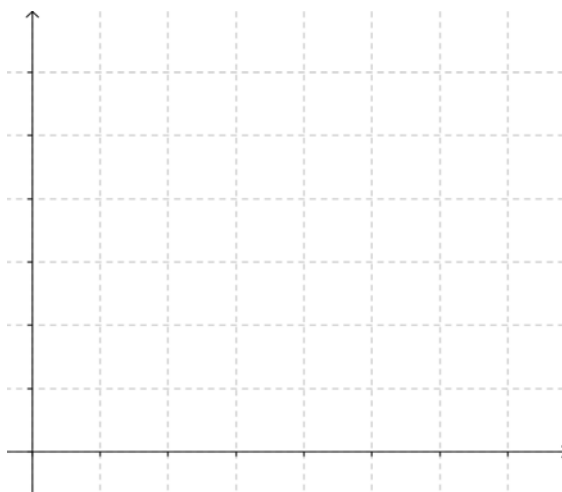
3. O que representa o ponto mais alto do gráfico? E o ponto mais baixo?
4. O gráfico observado indica que a bola descreveu trajetórias parabólicas? Justifique a sua resposta.

Agora, continue a realizar a sua experiência executando o passo 8 do procedimento experimental.

Nota: para lhe ajudar a responder às questões seguintes desloque o cursor utilizando as teclas direcionais e



5. Quanto tempo demorou este salto da bola? Apresente o resultado com 3 casas decimais.
6. Qual foi a altura máxima atingida pela bola nesse salto? Apresente o resultado com 3 casas decimais.
7. Represente no referencial cartesiano abaixo um esboço do gráfico que observa na calculadora.



Questão Problema: A que altura do chão se encontra a bola passados t segundos após o seu lançamento?

Para responder à questão anterior é necessário determinar uma expressão analítica da função, que melhor se ajuste aos dados obtidos. A essa função chamamos Função de Regressão. Desta forma irá criar um modelo matemático que melhor descreve esse salto da bola. Para tal, visto que temos o registo de um salto completo, vamos modelar a nossa

função com a utilização da calculadora. Continue a realizar a sua experiência executando os passos 9, 10 e 11 do procedimento experimental.

8. Neste caso particular a expressão analítica que define a função é:

$$y = \dots\dots\dots \text{ e está definida em } \left[\dots\dots\dots ; \dots\dots\dots \right].$$

Agora já é capaz de responder à Questão Problema

Escolha um valor para t pertencente ao domínio da função e determine analiticamente a que altura do chão se encontra a bola t segundos após o seu lançamento.

9. Que nome se dá a esta representação gráfica?

10. A expressão obtida é do tipo..... e chama-se função.....

Para terminar a tarefa realize os últimos passos do procedimento experimental e depois responda às questões seguintes.

11. Qual é a influência do parâmetro a nesta família de funções:

- ♦ Se $a > 0$
- ♦ Se $a < 0$
- ♦ Se $a = 0$

Tarefa de modelação – A Bola Saltitante

Procedimento Experimental

Vamos recolher os dados da altura dos saltos de uma bola deixada cair no chão num plano horizontal.

Material e equipamento:

- ✓ Calculadora gráfica TI-84, família *Plus*;
- ✓ Sensor de movimento CBR™;
- ✓ Cabo de ligação;
- ✓ Aplicação EasyData™ para a calculadora;
- ✓ Bola de futebol.

Sugestão de realização

Esta tarefa deverá ser realizada em grupos de 4 elementos. Antes da sua execução os elementos do grupo devem eleger um elemento para utilizar o CBR, outro para manipular a calculadora, outro para usar a bola e um quarto elemento deverá orientar a realização da experiência .

Procedimento

A recolha de dados

1. Ligue a calculadora TI-84 ao CBR, utilizando o cabo de ligação. (fig. 1)



fig. 1

2. Corra o programa **EasyData** que se encontra nas **APPS** da calculadora.

2.1. Inicialmente, efetue um *reset* ao programa, para tal:

- Ligue a calculadora premindo **ON**
- Prima **APPS**
- Escolha **EasyData** → **Enter**
- Aceda ao menu **File** premindo **Y=**
- Escolha **1:New** → **Enter** (fig. 2 e fig. 3)



fig. 2



fig. 3

2.2. Corra o programa **EasyData**

- Aceda ao menu **Setup** premindo **WINDOW**
- Selecione **5:Ball Bounce** → **Enter** (fig. 4)

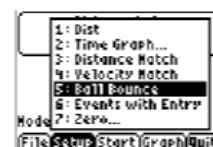
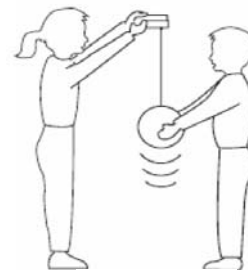


fig. 4

3. Enquanto um dos elementos do grupo segura no CBR, outro, com os braços estendidos, coloca sob ele uma bola a uma distância mínima de 0,5 m. Um terceiro aluno deverá verificar que o visor do CBR está paralelo ao chão e que está a apontar para o centro da bola.



O aluno que tem a calculadora:

- Seleciona **Start** premindo 
- Escolhe **Next** pressionando  (fig. 6)



fig. 6

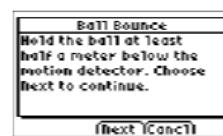


fig. 7

4. Em seguida retire o cabo que liga o CBR à calculadora

- O aluno que segura o **sensor** prime , para iniciar a recolha de dados.

Quando a luz verde do sensor começar a piscar, o aluno que tem a bola larga-a.

Se a bola sair debaixo da direção do CBR o aluno que manipula o CBR acompanha o movimento da bola tentando não variar a sua altura.

5. Quando o CBR parar de emitir o som, cerca de 5 segundos depois de ter começado, **volte a ligar o CBR à calculadora.**

- Selecione **Next** premindo  (fig. 8)



fig. 8



fig. 9

Os dados serão transferidos para a calculadora (fig. 9) e de seguida surgirá uma representação gráfica desses dados em função do tempo. Essa representação será idêntica à da figura 10.

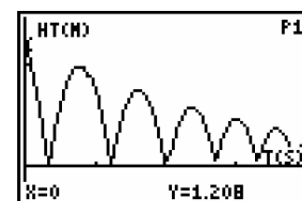


fig. 10

Caso contrário deve repetir a recolha de dados.

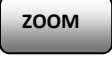
Nota: Os dados recolhidos são o tempo e a distância da bola ao sensor mas o programa calcula a distância da bola ao chão.

6. Para repetir a recolha de dados, **se necessário**:

- Selecione **Main** premindo .

- Selecione **Start** premindo .

- Selecione **OK**  (fig. 11)

- Selecione **Next** .

- Repita os procedimentos já referidos anteriormente (em 4 e 5).

- Retire o cabo que liga a calculadora ao CBR.

Análise do Gráfico

7. Assim que o resultado da experiência seja idêntico ao apresentado na figura 10 poderá estudar o gráfico.

Para tal:

- Aceda ao menu **Plots** premindo .
- Selecione **1:Dist(m) vs Time** →  (fig. 12)



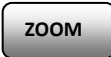
fig. 11



fig. 12

Antes de continuar a sua atividade responda às questões 1, 2, 3 e 4 que se encontram na tarefa de modelação.

8. Analise os dados dentro da aplicação EasyData

- Aceda ao menu **Anlyz** premindo .

- Escolha a opção **7:Select Region...** →  (fig. 13)

- Selecione **OK** premindo  (fig. 14)

- Coloque o cursor no início de um dos saltos completo, com as teclas direcionais  e 

- e selecione **OK** pressionando .



fig. 13

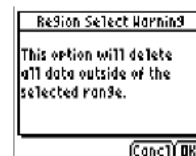


fig. 14

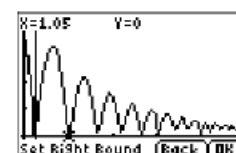


fig. 15

- Faça o procedimento análogo para o último ponto do salto escolhido. (fig. 15)

Aparecerá no ecrã a representação gráfica da função que relaciona a altura da bola em função do tempo durante esse salto com a janela automaticamente ajustada. (fig. 16)

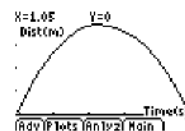


fig. 16

Antes de continuar a experiência responda às questões 5, 6 e 7 que se encontram na tarefa de modelação.

9. Obtenha uma expressão analítica para a função representada graficamente

- Aceda ao menu **Anlyz** premindo

ZOOM

- Escolha a opção **3:Quadratic Fit** →

Enter

(fig. 17)



fig. 17

Indique o valor das constantes reais a , b e c , com 3 c.d., que aparecem no ecrã da calculadora. (fig. 18)

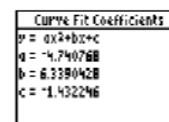
 $a = \dots\dots\dots$
 $b = \dots\dots\dots$
 $c = \dots\dots\dots$


fig. 18

10. Obtenha a curva de regressão

- Selecione **OK** premindo

GRAPH

(fig. 19)

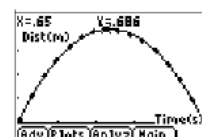


fig. 19

11. Para sair da aplicação **Easydata**

- Aceda ao menu **Main** premindo

Trace

- Selecione **Quit** premindo

GRAPH

- Escolha **OK** premindo

GRAPH

A expressão analítica da função fica gravada no menu

Y=

da calculadora.

Responda agora às questões 8, 9 e 10 que se encontram na tarefa de modelação.

12. Desative a representação gráfica (nuvem pontos)

- Selecione as teclas  e 

- Selecione **1: Plot 1... On** → 

- Selecione **Off**

- Selecione as teclas  e 

13. Efetue um *reset* no menu

- Prima .

- Apague as expressões premindo .

14. Insira as funções

- Prima a tecla  e digite em:

$$Y_1 = ax^2; \text{ (} a \text{ é o número real encontrado no passo 9)}$$

$$Y_2 = -ax^2;$$

$$Y_3 = 0x^2.$$

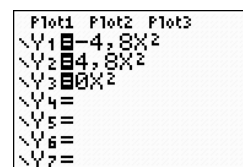


fig. 20

15. Defina uma nova janela de visualização

- Prima a tecla  e defina a janela de acordo com os

dados da figura 21.

- Prima .

Faça um esboço, no referencial cartesiano representado ao lado, das funções indicadas em cima.

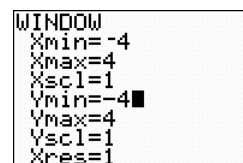


fig. 21



Termine agora a sua tarefa de modelação respondendo à última questão.

(Compilação do relatório de Estágio de Susana Beato, 2011)

Organização:

- Duração: 180 minutos
- Trabalho realizado em grupo de 4 alunos

Orientações ao professor:

Por vezes é necessário repetir a experiência. Após a seleção de uma parábola é possível a leitura das coordenadas do seu vértice e de um outro ponto.

Quando se faz uma restrição ao domínio, os outros dados são perdidos.

Se quisermos trabalhar a extensão proposta teremos que recolher de novos dados.

Em alternativa podemos abandonar o programa RANGER, antes de fazer a restrição ao domínio e trabalhar no modo estatístico.

Tipologia: exploração

Duração : 90 minutos

Tarefa

13 - Família de funções módulo

Desenvolvimento:

1. Visualize o gráfico das funções definidas pelas seguintes expressões, usando para isso a calculadora:

$$y = |x| \quad y = |x| + 2 \quad y = |x| - 2 \quad y = |x| + 4$$

Compare os gráficos obtidos e registe as suas conclusões.

2. Estude agora as funções:

$$y = |x + 2| \quad y = |x - 2| \quad y = |x + 4| \quad y = |x - 4|$$

Que conclusões pode tirar?

3. Compare os gráficos obtidos nas duas questões anteriores.
4. Sem recorrer à calculadora, tente esboçar o gráfico da seguinte função:

$$y = |x + 2| + 2$$

Pode usar a calculadora para verificar se o esboço feito está adequado.

Qual o efeito dos parâmetros a e b nas funções do tipo $y = |x - a| + b$?

5. Compare, em cada alínea que se segue, os gráficos das funções:

$$5.1. \quad y = |x| \quad y = -|x| \quad y = 2|x| \quad y = -2|x| \quad y = \frac{1}{2}|x|$$

$$5.2. \quad y = |-x| \quad y = |2x| \quad y = |-2x| \quad y = \left| -\frac{1}{2}x \right| \quad y = \left| \frac{1}{2}x \right|$$

Qual o efeito do parâmetro a nas funções do tipo $y = a|x|$ e $y = |a x|$?

Organização:

- Duração: 90 minutos
- Trabalho em pares
- Os alunos devem elaborar um relatório com as conclusões a que chegaram bem como os esboços gráficos de algumas funções de cada família.

Orientações ao professor:

Com esta tarefa, pretende-se analisar os efeitos da mudança de parâmetros nos gráficos de funções reais de variável real, em particular, na função módulo.

Tipologia: investigação**Duração: 180 minutos****Tarefa****14 - O voo dos patos – função módulo****Material:**

- Papel milimétrico
- Calculadora gráfica

Desenvolvimento:

1. Esta forma de viajar em grupo parece ser importante na economia de energia gasta pelo grupo.

Quando uma ave dá um impulso com as asas, provoca um fluxo de ar ascendente que é aproveitado pela ave que se segue, reduzindo a energia que esta tem de despendar. Deste modo, só a ave que lidera a formação não tem vantagem imediata, pelo menos até ser substituída por uma das outras.



In C. Roque e L.Crog, *Matemática ao virar da Esquina*, gradiva (adaptado)

1.1. Escolha um referencial adequado à imagem seguinte

Figura 1

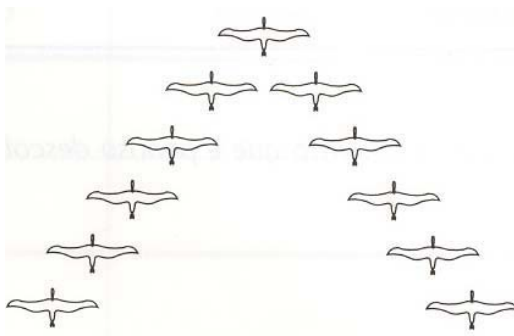
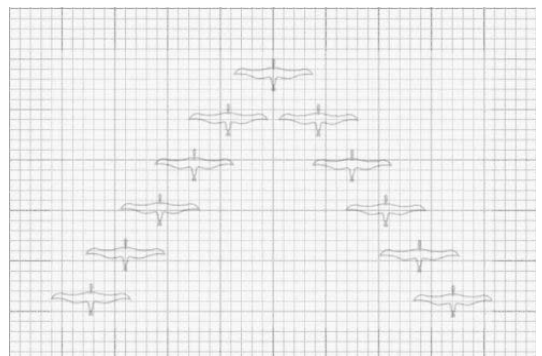


Figura 2



1.2. Qual o tipo de função que melhor se adapta à posição dos patos?

1.3. Escolha um referencial adequado à imagem e desenhe-o, utilizando a figura 2, não esquecendo de escolher uma unidade adequada.

1.4. Escolha um ponto que sirva para em cada pato referenciar a sua posição. Introduza nas listas do Menu STAT as coordenadas dos pontos.

1.5. Defina analiticamente a função que melhor se ajuste à posição dos patos.

1.6. Introduza a expressão que encontrou no editor de funções da sua calculadora e verifique se ela se ajusta à posição dos patos.

1.7. Numa pequena composição descreva o que fez e as conclusões a que chegou.

Adaptado do caderno de atividades práticas, Texto Editores, 10º ano

Organização:

- Duração: 180 minutos
- Trabalho em pares

Orientações ao professor:

Observando a fotografia os alunos deve reconhecer que se trata de uma função módulo.

O professor deve levar os alunos a escolher um ponto como referência da posição de cada pato, bem como as coordenadas desse ponto. Devem introduzir os pontos nas listas da calculadora, no Menu Stat e representar os pontos num referencial estatístico utilizando o menu zomStat.

Os alunos devem encontrar os declives das semirretas que melhor se ajustem à nuvem de pontos e, a seguir, escreverem a respetiva expressão. Os alunos devem introduzir, a expressão analítica da função no editor de funções e ver se o seu gráfico se adequa ao conjunto de pontos que marcaram.

Tipologia: modelação**Duração : 90 minutos****Tarefa****15 - Pilhas em série – função racional****Material**

- 5 pilhas de 1,5 v (volt) e da mesma marca
- Um CBL 2TM (Calculator BasedLaboratory)
- **Sensor** de diferença de potencial

As pilhas servem para alimentar diferentes objetos como por exemplo calculadoras, despertadores, MP#, etc. Têm também dois pólos diferentes, o positivo e o negativo e podem ser colocadas em série ou em paralelo. A sua diferença de potencial é dada em volt (V), por exemplo a calculadora gráfica TI 84 PLUS utiliza pilhas de 1,5 V. Se forem colocadas em série pilhas da mesma marca, o que acontece à diferença de potencial? E se usarmos outra marca diferente?

Experiência

- Ligar o CBL2TM à calculadora
- Ligar o sensor no CH1 do CBL2TM
- Execute a aplicação **DataMate** na calculadora
- Configurar o CBL2TM para efetuar uma medição no modo **EVENTS WITH ENTRY**
- Pressionar **2 start**
- Colocar os terminais do sensor a uma das pilhas nos pólos respectivos: vermelho para o positivo (+) e preto para o negativo (-)
- Pressionar **ENTER** na calculadora e indicar o número de pilhas (começar em 1)
- Colocar outra pilha encostada À primeira e repetir o procedimento anterior
- Colocar sucessivamente as restantes pilhas para recolher os novos valores da diferença de potencial

Desenvolvimento:

1. Nesta experiência que variáveis esperas encontrar? Em que unidades?
2. Existe alguma relação entre essas variáveis? Porquê?
3. Registe na tabela os dados recolhidos na experiência.

Nº de Pilhas					
Diferença de potencial (V)					

4. Constrói o gráfico que representa a relação entre os valores da tabela.
5. Confronta o teu gráfico com o da calculadora. O que concluis?

Procedimento: Transfere para a tua calculadora os dados da experiência.

Procede do seguinte modo:

Liga as calculadoras através do cabo de conexão;

Calculadora a receber: 2nd LINK RECEIVE enter

Calculadora a enviar: 2nd LINK SEND List L1 L2

Transmit

6. Como se poderá descrever o tipo de dependência entre as variáveis? (Qual é a que depende da outra e de que modo?)
7. A relação entre as variáveis pode exprimir-se matematicamente? Como?
8. Explique como fez (de onde partiu? O que o levou a pensar nessa relação? Quais foram as suas decisões?)
9. Aquilo que fez foi criar um modelo matemático da relação entre as variáveis, que te permite obter respostas para a quantidade de pilhas e a diferença de potencial respetivo.
 - 9.1. Se colocar, por exemplo, 20 pilhas em série qual será a diferença de potencial?
 - 9.2. De quantas pilhas necessita para ter 11,3 V de diferença de potencial? Porquê?
 - 9.3. Compare os seus resultados (do teu grupo de trabalho) com os resultados dos outros grupos.

9.4. Elabore um relatório sobre a experiência realizada.

Deve contemplar os seguintes aspetos:

- O que aprendeu com esta experiência?
- O que achou de mais interessante ao desenvolver esta atividade?
- Com que dificuldades se deparou?

Organização:

- Duração: 90 minutos
- Trabalho em grupo de 4 alunos

Orientações ao professor:

Se os alunos não estiverem familiarizados com este tipo de ferramentas tecnológicas, o professor deve começar por mostrar aos alunos o CBL 2TM e o sensor de diferença de potencial. Se formarem 4 grupos, 2 deles devem realizar a experiência com pilhas da marca Duracel e outros dois grupos, por exemplo, com pilhas da marca Philips. As pilhas podem não ter a mesma diferença de potencial. Um aluno de cada grupo recolhe os dados para uma calculadora gráfica e, em seguida, todos os alunos do grupo copiam esses dados para as respetivas calculadoras. Registam os dados recolhidos na tabela de valores e constroem o gráfico com os valores da tabela.

Para responderem às restantes questões os alunos devem descobrir regularidades e relações numéricas entre os valores das variáveis expressas na tabela.

O professor deve alertar para os seguintes factos:

- a situação só tem sentido para valores inteiros da variável pelo que a representação gráfica incluirá pontos isolados e não uma reta.
- os valores recolhidos pelo sensor são valores de um fenómeno real, ou seja, aproximados, tanto quanto possível da realidade.
- o sensor também comete pequenos erros de medição, logo deve tentar-se descrever o fenómeno sem grandes erros.

Os alunos devem chegar à conclusão de que a reta não passa pela origem devido às pequenas margens de erros cometidas pelo sensor.

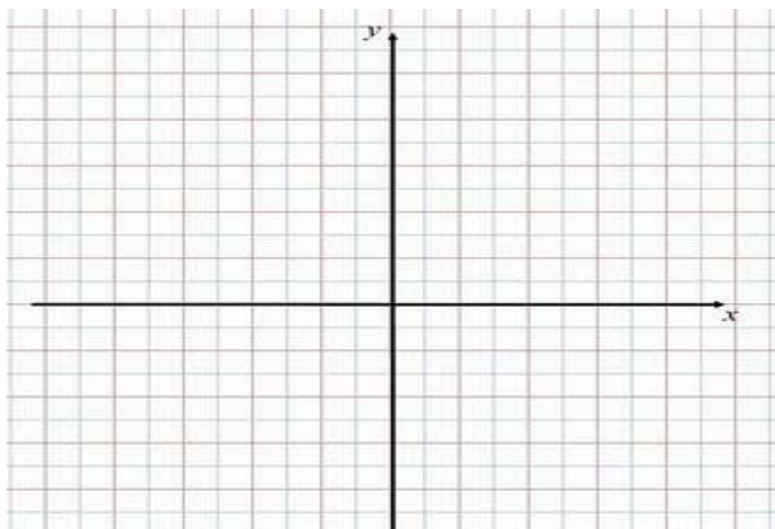
No final, o professor deve projetar o gráfico de dispersão da situação real de uma das marcas de pilhas para que os alunos possam avaliar, comparar, interpretar, aperfeiçoar e ajustar os seus modelos, com o objetivo de validarem um modelo de cada marca de pilhas como sendo o mais adequado à situação modelada.

Tipologia: Exercício**Duração: 90 minutos****Tarefa****16 - Assíntotas do gráfico de uma função racional****Desenvolvimento:**

1. Considere a função f definida por $f(x) = \frac{1}{x}$.

1.1. Determine o domínio de f .

1.2. Utilizando a calculadora gráfica, obtenha uma representação gráfica de f .



1.3. Complete as tabelas:

x	$f(x) = \frac{1}{x}$
-1	
-0,5	
-0,4	
-0,001	
-0,0001	

x	$f(x) = \frac{1}{x}$
1	
0,5	
0,4	
0,001	
0,0001	

1.4. O que acontece aos valores de y quando x toma um valor negativo muito próximo de zero?

Dizemos, por isso, que $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

1.5. E quando x toma valores positivos cada vez mais próximos de zero?

Dizemos, por isso, que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

Podemos então afirmar que a reta de equação $x = 0$ é uma assíntota vertical do gráfico da função f .

O gráfico de uma função f tem uma assíntota vertical (que vamos designar por A. V.), de equação $x = a$, porque:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$$

“As verdades geométricas são assíntotas das verdades físicas.” Jean d’Alembert

1.6. Complete as tabelas:

x	$f(x) = \frac{1}{x}$
-1	
-10	
-100	
-500	
-1000	

x	$f(x) = \frac{1}{x}$
1	
10	
100	
500	
1000	

1.7. O que acontece aos valores de y quando x toma valores negativos cada vez maiores em valor absoluto?

Dizemos, por isso, que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

1.8. E quando x toma valores positivos cada vez maiores?

Dizemos, por isso, que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

Podemos então afirmar que a reta de equação $y = 0$ é uma assíntota horizontal do gráfico da função f .

O gráfico de uma função f tem uma assíntota horizontal (designamos por A. H.) de equação $y = b$, porque:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$$

ou

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b, b \in \mathbb{R}$$

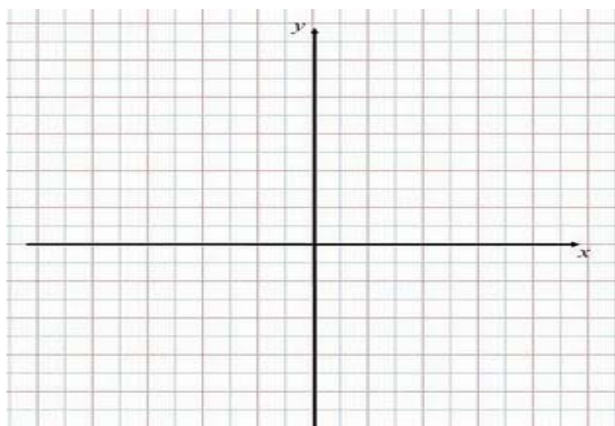
2. Faça um estudo idêntico ao anterior considerando, nos respetivos domínios, as funções racionais:

2.1. $g(x) = \frac{1}{x+2}$

► $D_g =$ _____

► A.V.: _____

► A.H. : _____

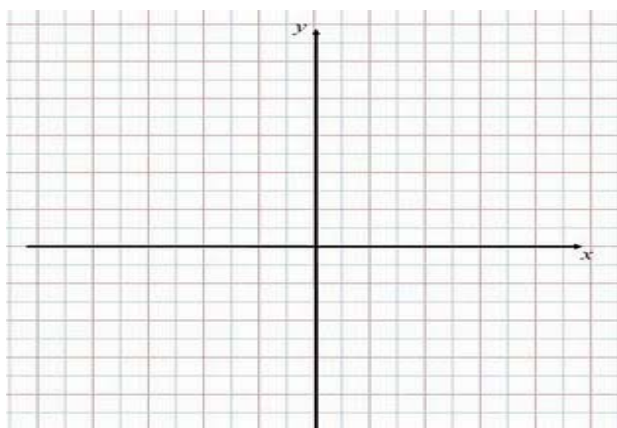


2.2. $h(x) = \frac{1}{2x+2}$

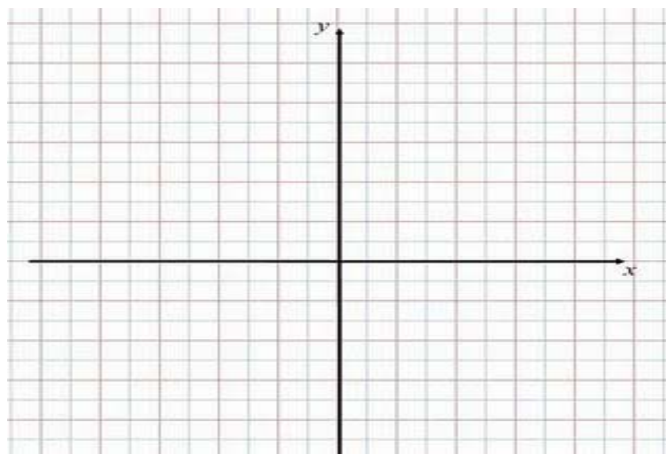
► $D_h =$ _____

► A.V.: _____

► A.H. : _____



Compare os gráficos das funções g e h com o gráfico da função inicial definida por $f(x) = \frac{1}{x}$ e registre as diferenças encontradas.



3. Faça um estudo idêntico para as seguintes funções racionais, escrevendo primeiro as funções na forma $y = a + \frac{b}{cx + d}$:

3.1. $i(x) = \frac{x-1}{x+2}$

► $D_i =$ _____

► A.V.: _____

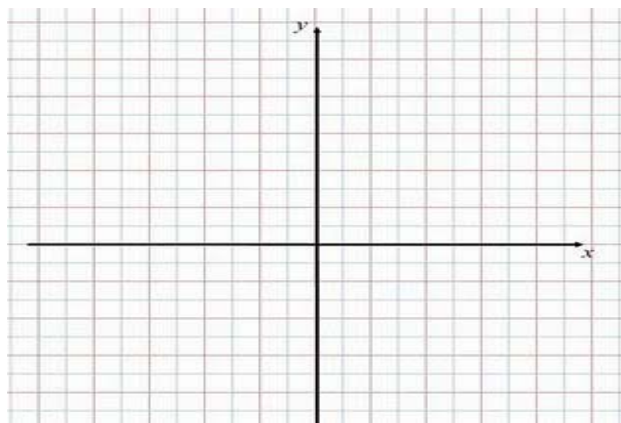
► A.H. : _____

3.2. $j(x) = \frac{4x+1}{2x-1}$

► $D_j =$ _____

► A.V.: _____

► A.H. : _____



Organização:

- Duração: 90 minutos
- Trabalho individual

Orientações ao professor:

Pretende-se com esta atividade, identificar as assíntotas do gráfico de uma função racional.

Os alunos devem resolver esta tarefa individualmente numa folha de papel e no final da aula entregam para o professor corrigir e avaliar.

Tipologia: exercício

Duração: 90 minutos

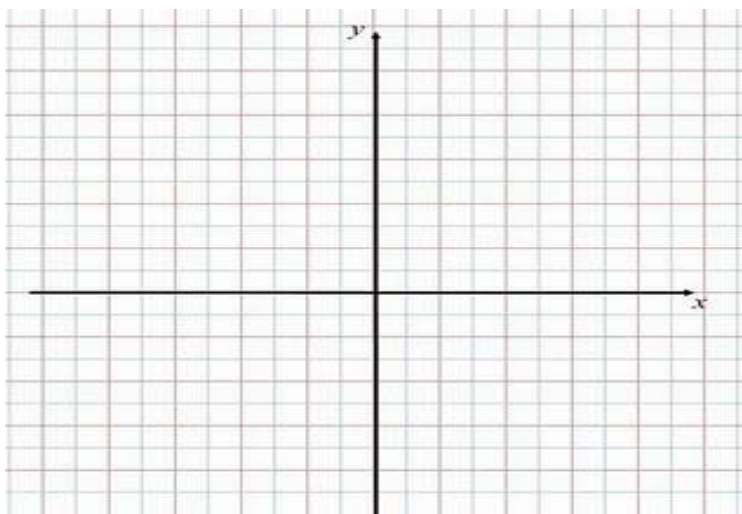
Tarefa

17 - Assíntotas do gráfico de uma função racional

Desenvolvimento:

4. Considere a função f definida, no seu domínio, por $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$.

4.1. Utilizando a calculadora gráfica, obtenha uma representação gráfica de f .



Sobreponha ao gráfico de f o gráfico da função afim $y = x$.

O que acontece aos gráficos das duas funções quando x toma valores cada vez maiores, em valor absoluto?

Dizemos que a função f tem, além de uma assíntota vertical, uma assíntota oblíqua de equação $y = x$.

Como podemos determinar a equação dessa reta?

4.2. Efetue a divisão do polinómio $x^2 - 1$ por x .

$$\text{Então, a função } f(x) = \frac{x^2 - 1}{x} = \dots + \dots$$

A equação da assíntota oblíqua é : $y = x$.

“As verdades geométricas são assíntotas das verdades físicas.” Jean d’Alembert

Se numa função racional do tipo $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, o numerador tem grau $n + 1$ e o denominador tem grau n , então, o gráfico de f tem uma assíntota oblíqua.

No caso de $p(x)$ ter grau 2 e $q(x)$ ter grau 1, dividindo $p(x)$ por $q(x)$ obtemos uma expressão do tipo:

$$f(x) = mx + b + \frac{a}{cx + d} \quad (cx + d \neq 0)$$

O gráfico da função f tem uma assíntota oblíqua, de equação: $y = mx + b$

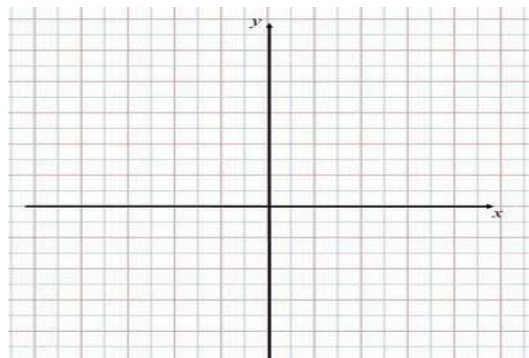
5. Represente graficamente as seguintes funções e indique o domínio e as equações das **assíntotas** dos respetivos gráficos:

5.1. $g(x) = \frac{x^2 - 3x + 5}{x - 1}$

► Dg= _____

► A.V.: _____

► A.O. : _____

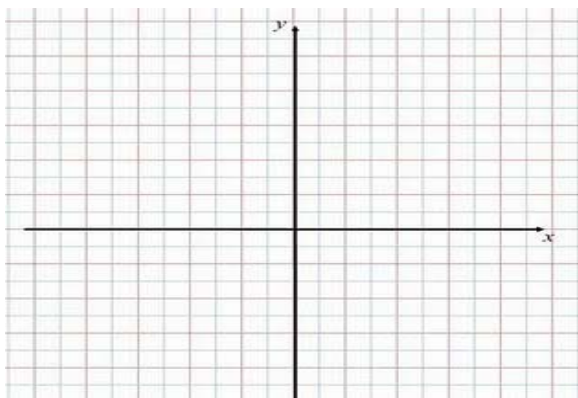


5.2. $h(x) = \frac{x - 1}{x^2}$

► $D_h =$ _____

► A.V.: _____

► A.H. : _____

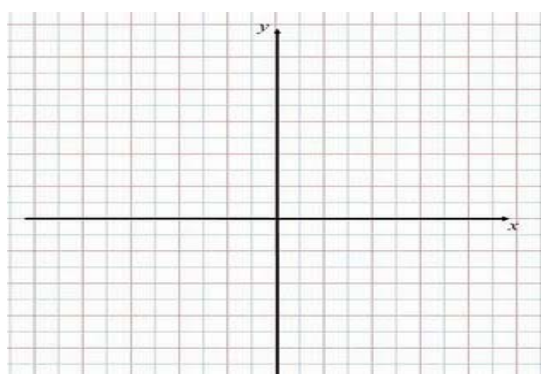


5.3. $i(x) = \frac{4x^2 + 1}{2x - 1}$

► $D_i =$ _____

► A.V.: _____

► A.O. : _____



Organização:

- Duração: 90 minutos
- Trabalho individual

Orientações ao professor:

Pretende-se com esta atividade, identificar as assíntotas do gráfico de uma função racional.

Os alunos devem resolver esta tarefa individualmente numa folha de papel e no final da aula entregam para o professor corrigir e avaliar.

Esta tarefa tem como objetivo introduzir o conceito de assíntota oblíqua.

Tipologia: problema**Duração: 90 minutos****Tarefa****18 - Equações e inequações fracionárias****Desenvolvimento:**

1. Uma fábrica produz dois modelos de calculadoras gráficas, designadas por M_1 e M_2 .

O custo de produção de cada uma delas é dado pelas expressões:

$$G_1 = \frac{100x + 50}{x} \qquad G_2 = \frac{90x + 80}{x}$$

Em que x representa o número de máquinas produzidas e G_1 e G_2 o respetivo custo, em euros.

- 1.1. Represente graficamente as duas funções, escolhendo a janela conveniente.

Para cada uma das questões de 1.2. a 1.6, utilize simultaneamente processos analíticos e gráficos.

- 1.2. Qual o preço de cada máquina se apenas fosse produzido um exemplar de cada modelo?
- 1.3. Quantas máquinas são necessárias para que o custo do modelo M_2 seja superior em € 5 ao do modelo M_1 ?
- 1.4. Quantas máquinas do modelo M_1 são necessárias produzir para que o custo não seja superior a € 105?
- 1.5. Quantas máquinas são necessárias produzir para que o custo de um dos modelos supere o outro?
- 1.6. Escreva a expressão simplificada que permite determinar a diferença de custo entre as duas máquinas?

Organização:

- Duração: 90 minutos

Orientações ao professor:

Com esta atividade, pretende-se que os alunos resolvam gráfica e analiticamente equações e inequações.

Tipologia: problema

Duração: 90 minutos

Tarefa

19 - Funções racionais

Desenvolvimento:

1. Uma nova empresa de refrigerantes pretende lançar no mercado embalagens de sumo de fruta com a capacidade de dois litros. Por questões de *marketing*, as embalagens deverão ter a forma de um prisma quadrangular regular.

1.1. Mostre que a área total da embalagem é dada por

$$A(x) = \frac{2x^3 + 8}{x}$$

(x é o comprimento da aresta da base, em dm)



Nota: recorde que $1 \text{ l} = 1 \text{ dm}^3$

- 1.2. Existe um valor de x para o qual a área total da embalagem é mínima. Utilizando a calculadora gráfica, determine-o com aproximação às décimas.

Exame nacional 2002, 2ª Fase (adaptado)

2. Uma nódoa circular de tinta é detetada sobre um tecido. O comprimento, em centímetros, do raio da nódoa, t segundos após ter sido detetada, é dado por:

$$r(t) = \frac{1 + 4t}{2 + t} \quad (t \geq 0)$$

- 2.1. Calcule $r(0)$ e o valor de que a função se aproxima quando $t \rightarrow +\infty$, e diga qual é o significado físico destes valores.
- 2.2. Esboce o gráfico de r .
- 2.3. Calcule com aproximação à décima de segundo, o instante t para o qual a área da nódoa é igual a 30 cm^2 .

Prova Modelo 1997 (adaptado)

Organização:

- Duração: 90 minutos

Orientações ao professor:

Os alunos devem definir uma janela de visualização adequada à situação.

O manuseamento das potencialidades da calculadora gráfica permite encontrar resultados, cujo significado deve ser interpretado pelos alunos.

Os alunos devem ter em atenção o domínio das variáveis no contexto de cada uma das situações.

Os alunos devem resolver os problemas e registar as conclusões num relatório que deve contemplar todos os cálculos efetuados, os gráficos obtidos, pontos relevantes e conclusões.

No final da aula as conclusões de cada grupo são partilhadas e discutidas em grupo turma.

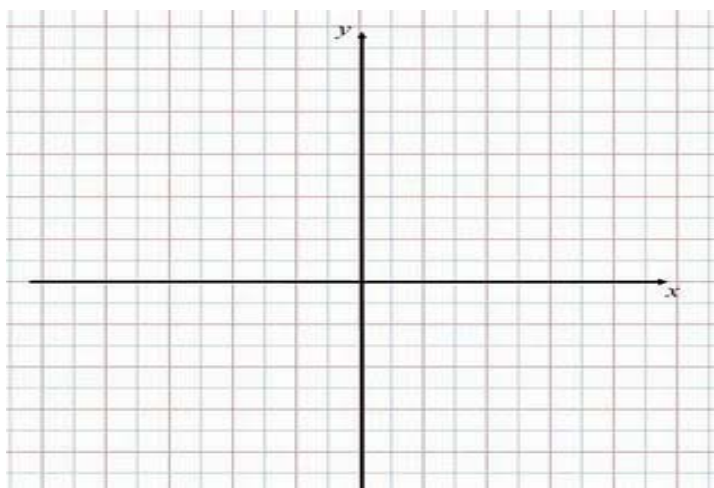
Tipologia: exercício**Duração: 90 minutos****Tarefa****20 - O jogador de ténis – função derivada****Desenvolvimento:**

1. Um jogador de ténis dá, com a raqueta, uma forte pancada numa bola, elevando-a no ar. A altura da bola (em metros), em função do tempo (em segundos), é descrita pela expressão:

$$h(t) = 25t - 5t^2$$

Funções – 11º ano, Lisboa, 1998. ME-DES (adaptado)

- 1.1. Desenhe o gráfico da função no intervalo que achar mais conveniente:



1.2. Qual é a altura máxima atingida pela bola?

1.3. Ao fim de quanto tempo atingiu a bola essa altura?

1.4. Durante quanto tempo esteve a bola no ar?

2. Seja A o ponto de abcissa 2, B o ponto de abcissa 1, C o ponto de abcissa 1,5 e D o ponto de abcissa 1,8.

Determine a altura da bola ao fim de 2 seg., 1,8 seg., 1,5 seg. e 1 seg.

- 2.1. Desenhe as retas AB, AC e AD no gráfico anterior, utilizando cores diferentes, e escreva as respetivas equações reduzidas:

AB: $y = \underline{\hspace{1cm}} x + \underline{\hspace{1cm}}$ AC: $y = \underline{\hspace{1cm}} x + \underline{\hspace{1cm}}$ AD: $y = \underline{\hspace{1cm}} x + \underline{\hspace{1cm}}$

- 2.2. Atendendo à expressão $t.v.m._{[a,b]} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, calcule a taxa de variação média nos intervalos:

2.2.1. $t.v.m._{[1,2]} =$

2.2.2. $t.v.m._{[1,5;2]} =$

2.2.3. $t.v.m._{[1,8;2]} =$

3. Compare os valores obtidos anteriormente com os declives das retas AB, AC e AD.

A taxa de variação média no intervalo $[a, b]$ é o quociente entre a diferença dos valores da função f nos extremos do intervalo e a amplitude do intervalo:

$$t.v.m_{[a,b]} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Se considerarmos o intervalo $[a, a + h]$, sendo h um número real positivo, a taxa de variação média é:

Interpretação geométrica: _____

Calcular a **taxa de variação instantânea** no ponto de abscissa 2, ou a **derivada da função** no

ponto de abscissa 2, corresponde a calcular o valor para o qual tende $\frac{f(2+h) - f(2)}{h}$ quando h

tende para zero.

Interpretação geométrica: _____

Definição de derivada de uma função num ponto

A derivada de uma função f no ponto de abscissa a é o valor real, se existir, para o qual tende:

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Quando h tende para 0

OU

A derivada de uma função f no ponto de abscissa a é o valor real, se existir, para o qual tende:

Organização:

- Duração: 90 minutos

Orientações ao professor:

Começando por determinar a velocidade média da bola ao fim do primeiro segundo, os alunos devem ser levados a determinar outras velocidades médias agora em intervalos cada vez mais pequenos.

Para cada intervalo, os alunos podem representar a reta que passa nos pontos cujas abcissas são extremos do intervalo, percebendo que as retas secantes tendem para a reta tangente ao gráfico da função no ponto. Nesta altura, deve-se relacionar a velocidade média em cada intervalo com o declive da reta, e os alunos podem chegar à interpretação geométrica de derivada de uma função num ponto como o declive da reta tangente à curva nesse ponto.

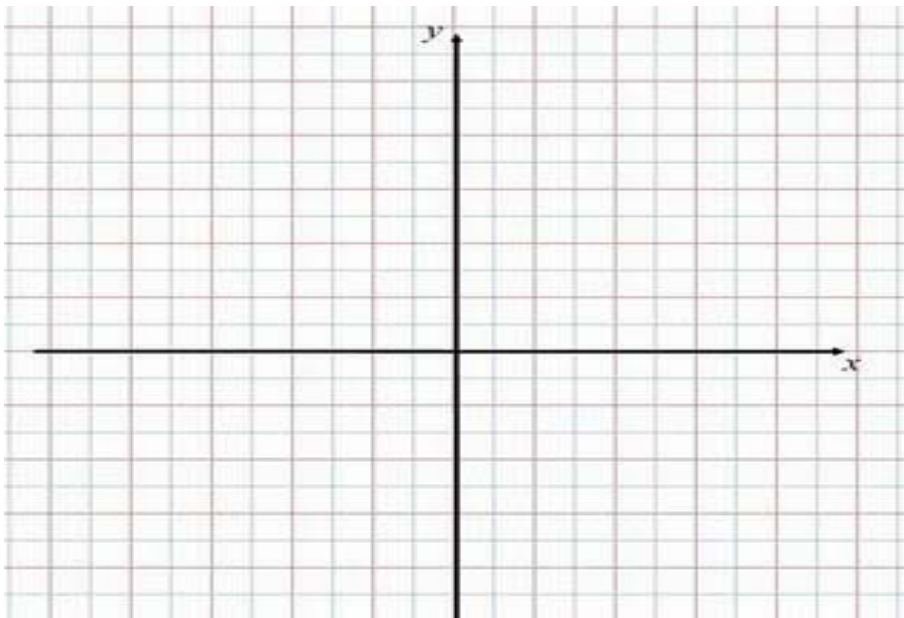
É necessário discutir a diferença entre a reta tangente à curva num ponto e reta que intersesta a curva nesse ponto.

Tipologia: problema**Duração: 90 minutos****Tarefa****21- A bola no plano inclinado- função derivada****Desenvolvimento:**

1. Uma bola desce um plano inclinado. A distância (d), em centímetros, percorrida pela bola em função do tempo (t), em segundos, é dada por:

$$d(t) = 2t^3 + 3t^2 + 4$$

- 1.1. Represente graficamente a função d na situação descrita.



- 1.2. Determine a velocidade média da bola durante o 1º segundo de movimento.
- 1.3. Qual será a velocidade da bola no instante $t = 2$ segundos?
- 1.4. Em que instante terá a bola uma velocidade de 30 cm/s?
- 1.5. Construa o gráfico da velocidade da bola em função do tempo.

Organização:

- Duração: 90 minutos

Orientações ao professor:

Pretende-se, com este tipo de tarefa, que os alunos fiquem com uma noção intuitiva de derivada de uma função num ponto.

Após a representação da função velocidade, os alunos podem relacionar a monotonia da função distância com a sua função velocidade.

Tipologia: problema

Duração: 90 minutos

Tarefa

22 - Garrafa de água – função derivada

Material:

- Garrafa de água de 1,5 l, régua e caneta de acetato.
- Cronómetro.

Desenvolvimento:

1. Encha a garrafa com água.
2. Faça um furo na tampa da garrafa.
3. Marque com a caneta de acetato a altura da água na garrafa. Deixe sair a água através do furo da tampa, durante um minuto, e marque novamente a altura da água. (é necessário fazer um furo oposto ao primeiro para que haja entrada de ar.)
4. Repita estas tarefas, 5 ou 6 vezes
5. Registe na tabela os valores obtidos.

Tempo (min)	Altura (cm)

6. Introduza os valores na calculadora gráfica e, usando o modo estatístico, obtenha uma função que modele esta situação, assim como o respetivo gráfico.

Estude a função no que diz respeito ao domínio e aos intervalos de monotonia.

A derivada, em valor absoluto, é superior nos instantes iniciais. Tendo em conta o contexto do problema, indique as razões para que tal aconteça.

Adaptado do caderno de atividades, 11º Ano ,Texto Editores

Organização:

- Duração: 90 minutos

Orientações ao professor:

- O professor deve chamar atenção para o significado do valor negativo da derivada da função no ponto e colocar aos alunos a questão: “É isto que se pretende?”
- Os alunos devem elaborar um trabalho escrito que contemple as conclusões a que chegaram bem como o(s) gráfico(s) que ajudaram a clarificar a situação para responder às questões colocadas.

Tipologia: exercício

Duração: 90 minutos

Tarefa

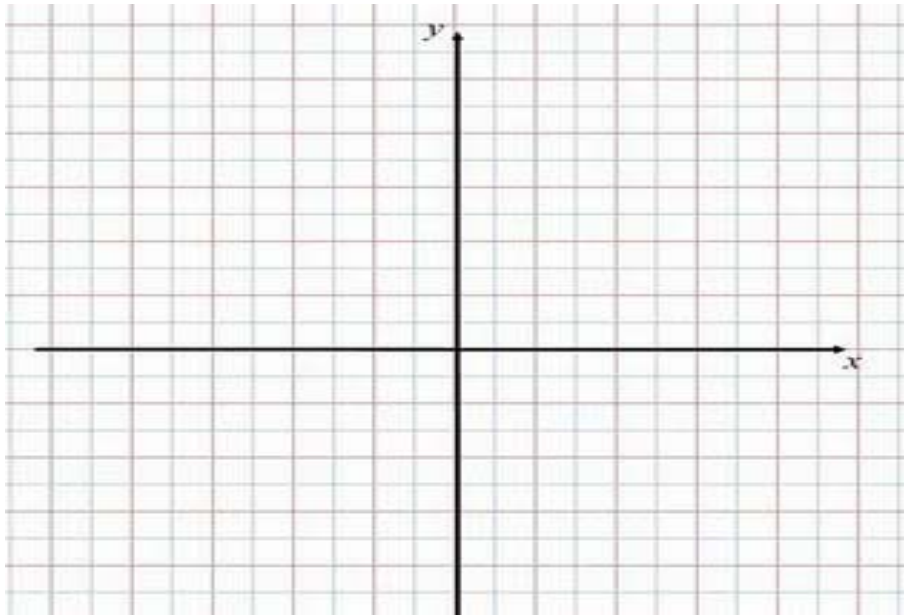
23 - Derivadas. Monotonia e extremos

Desenvolvimento:

1. Considere a função, real de variável real, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \frac{27x - x^3}{2}$$

- 1.1. Com a ajuda da calculadora gráfica, esboce o gráfico de f :



1.2. Faça o estudo da função f (utilize a calculadora para completar a tabela).

Domínio	
Contradomínio	
Zeros	
Monotonia	
Extremos	

1.3. Construa a tabela de monotonia da função.

1.4. Recorrendo à calculadora, escreva, (em y_2), a expressão analítica que define a função derivada da função anterior

► Selecione apenas a função y_1 e esboce o seu gráfico.

► Copie o gráfico de f' (1ª derivada de f)

1.5. Construa uma tabela do sinal da função derivada.

1.6. Compare a monotonia da função f com o sinal da função derivada.

► No intervalo $[-3, 3]$, a função f' é _____ e f é _____.

► No intervalo $]-\infty, -3]$ e no intervalo $[3, +\infty[$, a função f' é _____ e f é _____.

O que pode concluir quanto à relação que existe entre o sinal da 1ª derivada de uma função num intervalo e a monotonia da função nesse intervalo? Registe as suas conclusões

Nos intervalos em que $f'(x) > 0$, f é _____

1.7. Quais os zeros da função derivada? Acrescentar contraexemplo.

► Zeros da derivada

► Compare os zeros da função derivada com os maximizantes e minimizantes da função inicial.

O que pode concluir em relação aos zeros da derivada e os extremos da função inicial?

Organização:

- Duração: 90 minutos
- Trabalho realizado em pares.

Orientações ao professor:

A representação gráfica da função e da sua função derivada no mesmo referencial pode ajudar os alunos a relacionar o sinal da função derivada com a monotonia da função, bem como relacionar os máximos e mínimos da função com os zeros da função derivada.

Os alunos podem recorrer à calculadora para traçar o gráfico da função derivada. (em y_2 colocar $nDeriv(y_1, x, x)$)

A s conclusões deve ser partilhadas e discutidas com toda a turma.

Tipologia: exercício

Duração: 90 minutos

Tarefa

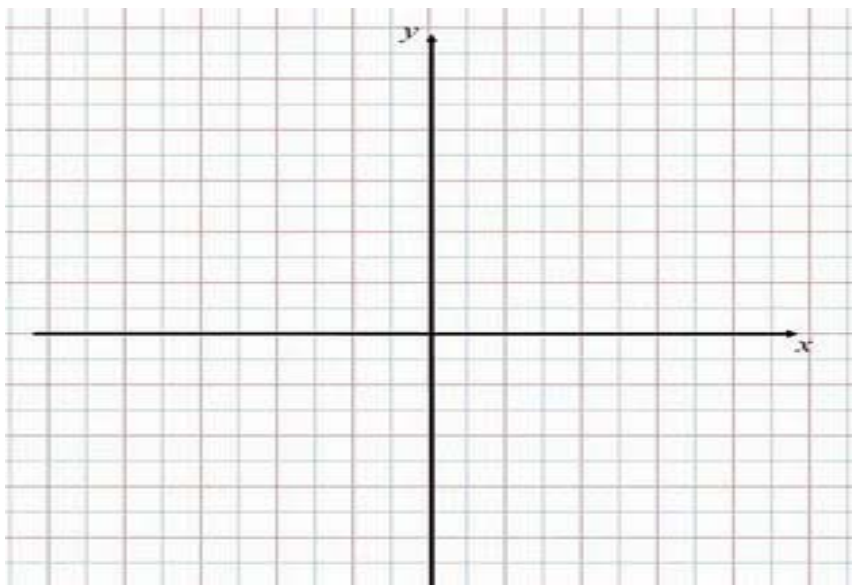
24 - Função definida por ramos - derivada

Desenvolvimento:

1. Considere a função definida, em $\mathbb{R}$, por:

$$y = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x \leq 0 \\ 2x - 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

- 1.1. Represente-a graficamente



- 1.2. Por observação do gráfico da função indique o contradomínio, extremos e intervalos de monotonia.
- 1.3. Estude a existência de derivada da função no ponto de abscissa 0? Que conclui?
- 1.4. Esboce, no mesmo referencial, o gráfico da função derivada.

Organização:

- Duração: 90 minutos

Orientações ao professor:

Os alunos podem recorrer à calculadora para traçar ou confirmar os gráficos.

É necessário alertar os alunos para as limitações da calculadora que não assinala pontos que não pertencem ao domínio da função.

Esta função é um bom exemplo para sublinhar que uma função pode ter um mínimo num ponto sem que, no entanto, a derivada da função seja nula nesse ponto.

Tipologia: exercício**Duração: 90 minutos****Tarefa****25 - Extremos e derivada****Desenvolvimento:**

1. Considere a função $f(x) = 2x^3 - x$
 - 1.1. Represente-a graficamente.
 - 1.2. Com o auxílio da calculadora representa a função derivada de f .
 - 1.3. Observe os gráficos das duas funções e relacione os extremos da função f com os zeros da derivada (indique valores aproximados às décimas).
 - 1.4. Analise o gráfico e a tabela da função derivada e, a partir dos valores da tabela, encontre a sua expressão analítica.
 - 1.5. Utilize a definição de derivada e confirme a expressão que encontrou anteriormente e mesmo para fazer pela definição.
 - 1.6. Discuta agora um processo para determinar os valores exatos dos extremos da função f e determine-os.

Organização:

- Duração : 90 minutos.
- Trabalho individual.

Orientações ao professor:

Pretende-se que os alunos percebam o conceito de derivada de uma função num ponto e a relação existente entre zeros da função derivada e extremos de funções polinomiais.

Para o desenvolvimento desta tarefa é indispensável o uso da calculadora. Trata-se de uma tarefa com uma ligação sistemática entre os aspetos gráficos e analíticos.

Os alunos podem calcular a função derivada recorrendo ao valor de limite de

$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ quando h tende para 0. Deste modo, os alunos encontrarão para a expressão da função derivada $y = 6x^2 - 1$

Tipologia: problema**Duração : 180 minutos****Tarefa****26 - Camisas de luxo – programação linear****Desenvolvimento:**

1. Uma fábrica de confeções produz dois modelos de camisas de luxo.

Uma camisa do modelo A necessita de 1 metro de tecido, 4 horas de trabalho e custa 120€.

Uma camisa do modelo B exige 1,5 metros de tecido, 3 horas de trabalho e custa 160€.

A fábrica dispõe diariamente de 150 metros de tecido, 360 horas de trabalho e consegue vender tudo o que fabrica.

Quantas camisas de cada modelo serão preciso fabricar para obter um rendimento máximo?



“A Matemática é a rainha das Ciências e a Teoria dos Números é a rainha das Matemáticas.”

Gauss

Tarefa: Festa de casamento

2. Encomendaram-se a um pasteleiro dois tipos de bolos para uma festa de casamento. Cada quilograma de bolo do tipo A dá um lucro de 5 Euros, e cada quilograma de bolo do tipo B dá um lucro de 7 euros.

Relativamente aos produtos necessários à confeção dos bolos, o pasteleiro só tem limitações em dois: dispõe apenas de 10 kg de açúcar e de 6 kg de farinha.

Sabe-se que:

- Cada quilograma de bolo do tipo A leva 0,4 kg de açúcar e 0,2 kg de farinha;
- Cada quilograma de bolo do tipo B leva 0,2 kg de açúcar e 0,3 kg de farinha.



- 2.1. O pasteleiro pensa fazer 7 kg de bolo do tipo A e 18 kg de bolo do tipo B.

É possível?

Justifique a sua resposta.

- 2.2. Quantos quilogramas de bolo do tipo A e quantos quilogramas de bolo do tipo B devem o pasteleiro fabricar para ter o maior lucro possível?

“A Matemática é a rainha das Ciências e a Teoria dos Números é a rainha das Matemáticas.”

Gauss

Organização:

- Duração : 90 minutos.
- Trabalho individual.

Orientações ao professor:

O professor aquando da correção deve apresentar uma resolução analítica e outra gráfica do problema.

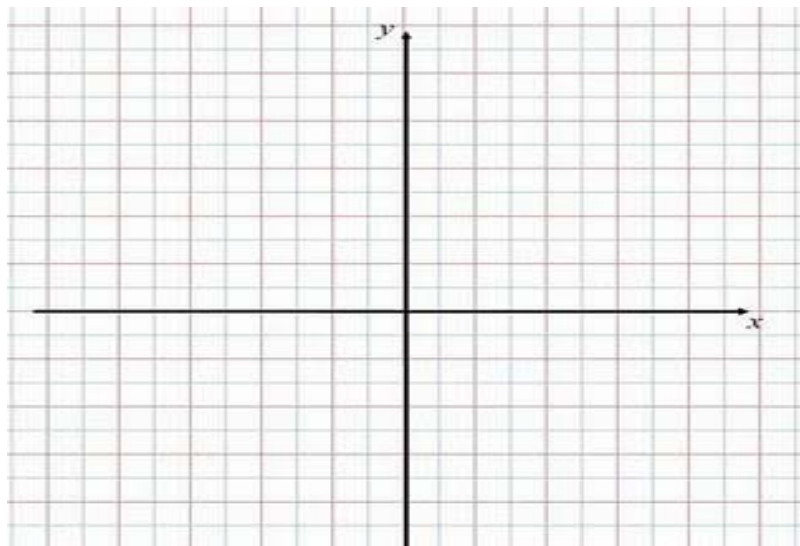
“A Matemática é a rainha das Ciências e a Teoria dos Números é a rainha das Matemáticas.”

Tipologia: exploração**Duração: 90 minutos****Tarefa****27 - Número de Neper****Desenvolvimento:**

1. Considere a seguinte sucessão definida por:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

- 1.1. Com a ajuda da calculadora gráfica, represente graficamente os 30 primeiros termos da sucessão:



“A Matemática é a rainha das Ciências e a Teoria dos Números é a rainha das Matemáticas.”

Gauss

1.2. Analise o gráfico e conjecture se:

► A sucessão é monótona.

► A sucessão é limitada.

1.3. Complete a seguinte tabela com auxílio da calculadora gráfica:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...	500	...	1000		10 000
a_n																

À medida que n aumenta, os termos desta sucessão parecem aproximar-se de _____

“A Matemática é a rainha das Ciências e a Teoria dos Números é a rainha das Matemáticas.”

Gauss

Organização:

- Duração: 90 minutos
- Trabalho individual

Orientações ao professor:

Pretende-se, com esta atividade, que os alunos conjeturem o limite da sucessão definida por $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ e que obtenham um valor aproximado do número de Neper e .

Depois da realização desta tarefa o professor pode incentivar os alunos a uma pesquisa sobre o número de *Nepper na Net*.

“A Matemática é a rainha das Ciências e a Teoria dos Números é a rainha das Matemáticas.”

Tipologia: modelação

Duração : 90 minutos

Tarefa

28 - Eliminação

Desenvolvimento:

1. Despeje uma embalagem de **M&M's** para um prato de papel de modo que as pastilhas não fiquem umas por cima das outras. Retira todos os **M&M's** em que o **M** esteja virado para cima (cuidado com as amarelas porque o **M** é difícil de ver).

Conte e registe o número das pastilhas removidas e o número das que restam. Elimine as pastilhas removidas e despeje as restantes para um copo.

Agite o copo, despeje estas **M&M's** outra vez para o prato e retire novamente aquelas em que o **M** aparece.

Registe o número das pastilhas eliminadas e o número das que ficam.

Continue a repetir estes processos até que todas as pastilhas sejam eliminadas.

Complete a tabela com as informações recolhidas:

Número da experiência (x)	Pastilhas Removidas	Pastilhas restantes (y)
1		
2		
3		
4		
5		

- Na calculadora gráfica representa todos os pontos de coordenadas **(x,y)**.
- Encontre uma função que se adapte bem a estes dados.
- Embora não exista resposta correta para o problema, algumas funções são melhores do que outras. Tente encontrar a melhor possível. Registe o tipo de função que escolheu, a sua expressão analítica, o gráfico e a respetiva nuvem de pontos.

Funções – 12º ano, ME - DES

Organização:

- Duração: 90 minutos
- Trabalho em grupo de 3 ou 4 elementos

Orientações ao professor:

Esta poderá ser uma atividade a propor aos alunos para introduzir a noção de crescimento exponencial.

A segunda coluna “Pastilhas removidas” não é utilizada a não ser como controlo de contagem.

A discussão em grande grupo pode ajudar a recordar outros tipos de funções já estudadas e os respetivos gráficos.

É necessário chamar a atenção dos alunos que, ao procurarem a função de regressão exponencial utilizando a calculadora gráfica, esta dá um erro pois o último valor é zero. Poderá sugerir-se aos alunos que desprezem esse valor.

Os alunos devem elaborar um relatório com conclusões a que chegaram.

Tipologia: problema**Duração: 90 minutos****Tarefa****29 - Otimização****Desenvolvimento:**

1. Pretende, guardar-se 48 latas cilíndricas de diâmetro 6 cm numa caixa de cartão de base retangular, sem sobrepor as latas.

Quais as dimensões da caixa de modo que o material para o seu fabrico seja mínimo?

Explique como procedeu para resolver este problema, tendo em conta os seguintes pontos:

- I. Fazer um esquema do dados, indicando os valores conhecidos e os valores a determinar.
- II. Identificar e estabelecer uma relação entre as variáveis
- III. Expressar a incógnita em função de uma das variáveis.
- IV. Identificar a função a otimizar,
- V. Derivar a expressão analítica que define a função e determinar os seus zeros.
- VI. Identificar os extremos.

Organização:

- Duração : 90 minutos
- Trabalho realizado individual

Orientações ao professor:

Pretende-se com esta tarefa, fazer o estudo de uma função que descreve uma situação real.

Tipologia: projeto

Duração: 15 dias

Tarefa

30 - Relação entre as características da função soma e das respetivas funções parcelas

Desenvolvimento:

1. O trabalho pretende comparar as características da função soma e as respetivas funções parcelas

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

Poderão ser estudadas quaisquer características do gráfico da função soma. No entanto, é obrigatória a abordagem de:

- Domínio
- Pontos de interseção com os eixos
- Sinal

O trabalho deve validar ou rejeitar as seguintes conjeturas:

- O domínio da função soma é sempre $\mathbb{R}$
- A ordenada do ponto de intersecção do gráfico da função soma com o eixo dos yy é igual à soma das ordenadas dos pontos de intersecção dos gráficos das funções parcelas com o mesmo eixo (se existir).
- Em cada ponto a função soma assume o sinal da função parcela com o maior valor absoluto.

Pretende-se que sejam formuladas mais conjeturas deste tipo (3 no mínimo), que explicitem de que forma uma determinada característica da função soma depende (ou não) a, ou de outra característica das funções parcelas.

Sempre que a conjetura se revele verdadeira deve ser validada, explicada ou **até demonstrada da melhor forma possível**.

Conjeturas que se revelem falsas devem ser ilustradas com contraexemplos.

Organização:

- Duração: 15 dias
- Trabalho elaborado por grupos de dois elementos e deverá ser entregue em formato digital

Orientações ao professor:

O professor deverá acompanhar o trabalho dos alunos, sempre que seja solicitado.

Tipologia: exploração**Duração: 180 minutos****Tarefa****31 - Às voltas com funções polinomiais****Desenvolvimento:**

1. A família de funções definidas em $\mathbb{R}$, por:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad a, b, c \text{ e } d \in \mathbb{R} \text{ e } a \neq 0$$

São funções polinomiais de grau 3

Considere as funções polinomiais de grau 3 da família

$$f(x) = ax^3$$

Façam variar o parâmetro a e analisem o comportamento dessa família de funções.

Expliquem como procederam.

2. Uma função polinomial de grau 3 pode ser escrita como o produto de uma função quadrática por uma função afim:

$$f(x) = (ax^2 + bx + c)(mx + d) \quad a, b, c, d \text{ e } m \in \mathbb{R} \text{ e } a \neq 0 \text{ } m \neq 0$$

Considerem as funções polinomiais de grau 3 da família

$$f(x) = g(x) \times h(x)$$

sendo $g(x) = ax^2$ ($a \neq 0$) (função quadrática) e $h(x) = mx + d$ (função afim) ($m \neq 0$)

Relacionem as características da função f com as características das funções g e h . Expliquem como procederam.

Organização:

- Duração: 180 minutos
- Trabalho realizado em grupos de 4 alunos.

Orientações ao professor:

Os alunos podem elaborar acetatos as conclusões para posteriormente apresentarem à turma.

O professor na correção dos trabalhos pode dar algumas indicações para ajudar o debate.

Tipologia: problema**Duração: 90 minutos****Tarefa****32 - Função cúbica****Desenvolvimento:**

Doses terapêuticas iguais de um certo antibiótico são administradas, pela primeira vez, a duas pessoas: a Cristiana e o Jorge.

Admita que, durante as sete primeiras horas após a tomada simultânea do medicamento pela Cristiana e pelo Jorge, as concentrações de antibiótico, medidas em miligramas por litro de sangue, são dadas, respetivamente, por :

$$C(t) = 0,04t^3 - 0,76t^2 + 3,5t \quad \text{e} \quad J(t) = -0,12t^3 + 0,72t^2 + t.$$

A variável t designa o tempo, medido em horas, que decorre desde o instante em que o medicamento é tomado ($t \in [0,7]$).

Recorrendo à calculadora gráfica responda às seguintes questões:

1. Determine o valor da concentração deste antibiótico no sangue da Cristiana, quinze minutos depois de ela o ter tomado. Apresente o resultado, em miligramas por litro de sangue, arredondado às centésimas.
2. No instante em que as duas pessoas tomam o medicamento, as concentrações são iguais (por serem nulas). Determine quanto tempo depois as concentrações voltam a ser iguais. Apresente o resultado em horas e minutos (minutos arredondado às unidades).

Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

3. Considere as seguintes questões:

1ª. Quando a concentração ultrapassa 7,5 miligramas por litro de sangue, o medicamento pode ter efeitos secundários indesejáveis. Esta situação ocorrerá, neste caso, com alguma

destas duas pessoas? Caso afirmativo, com quem? E em quantos miligramas por litro o referido limiar será ultrapassado?

2ª. Depois de atingir o nível máximo, a concentração começa a diminuir. Quando fica inferior a 2 miligramas por litro de sangue, é necessário tomar nova dose do

medicamento. Quem deve tomá-la em primeiro lugar, a Cristiana ou o Jorge? E quanto tempo antes do outro?

Utilize as capacidades gráficas da sua calculadora para investigar estas duas questões. Numa pequena composição, explicita as conclusões a que chegou, justificando-as devidamente.

Apresente, na sua resposta, os elementos recolhidos na utilização da calculadora: gráficos e coordenadas de alguns pontos (coordenadas arredondadas às décimas)

(Adaptado do Exame Nacional de 12º ano)

Organização:

- Duração: 90 minutos
- Trabalho realizado a pares

Orientações ao professor:

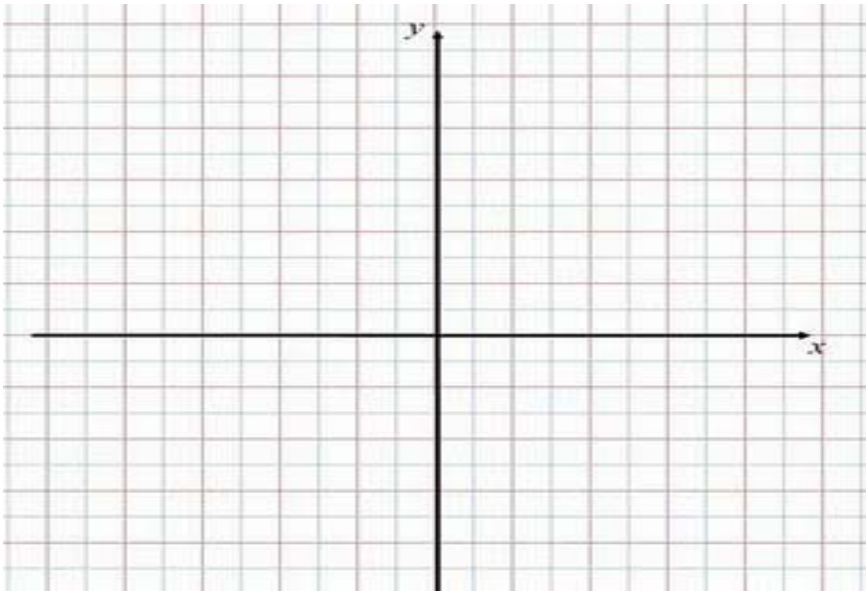
O professor deverá levar para casa as composições para corrigir.

Deverá dar um *feedback* de modo que os alunos que não contemplaram todos os pontos dos critérios de correção possam completar e melhorar o seu trabalho escrito.

Tipologia: exercício**Duração: 135 minutos****Tarefa****33 - Função exponencial****Desenvolvimento:**

1. Represente graficamente as seguintes funções:

$$y_1 = 2^x \quad y_2 = 3^x \quad y_3 = 5^x$$



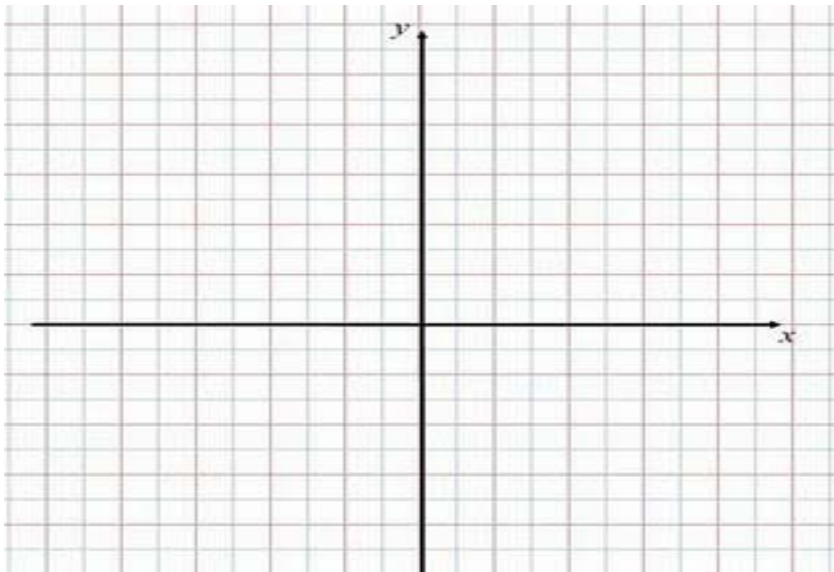
- 1.1. Indique o domínio, contradomínio, zeros e intervalos de monotonia de cada uma das funções.

- 1.2. Qual o conjunto solução da condição $2^x > 3^x > 5^x$?

- 1.3. Qual o conjunto solução da condição $2^x < 3^x < 5^x$?

2. Represente graficamente as funções:

$$y_1 = 2^{-x} \quad y_2 = 3^{-x} \quad y_3 = 5^{-x}$$



2.1. Indique o domínio, contradomínio, zeros e intervalos de monotonia de cada uma das funções.

2.2. Qual o conjunto solução da condição $2^{-x} > 3^{-x} > 5^{-x}$?

2.3. Qual o conjunto solução da condição $2^{-x} < 3^{-x} < 5^{-x}$?

3. Estude agora as famílias de funções:

$$f(x) = a^x \quad \text{e} \quad g(x) = a^{-x} \quad (a > 1 \text{ e } a \neq 0)$$

Qual é, em cada um caso, a influência do parâmetro **a** nesta família de funções?

4. Faça variar, os parâmetros reais **b** e **c** e considerando **a** pertencente ao intervalo

$] 1, +\infty[$, estude a família de funções definidas por:

$$h(x) = a^{bx+c}$$

Sintetize as suas conclusões num texto ilustrado com gráficos elucidativos. Não exceda mais que duas páginas A₄.

Adaptada de funções 12º ano, ME–DES

Organização:

- Duração: 135 minutos
- Trabalho realizado em grupos de 2 elementos fora da sala de aula.

Orientações ao professor:

Os alunos desde o 10º ano, com o auxílio da calculadora têm vindo a estudar famílias de funções. Deverão, por isso, nesta altura ser capazes de fazer o estudo proposto e registar os gráficos e as conclusões a que chegaram.

Os alunos podem, a partir da visualização dos gráficos intuir acerca dos limites das funções no infinito.

Tipologia: exploração

Duração: 90 minutos

Tarefa

34 - Inversa da função exponencial

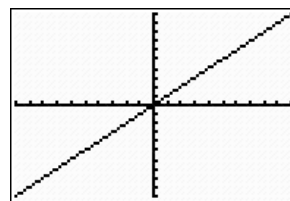
Desenvolvimento:

1. Represente graficamente a reta de equação $y_1 = x$

```

Plot1 Plot2 Plot3
Y1 X
Y2 =
Y3 =
Y4 =
Y5 =
Y6 =
Y7 =

```

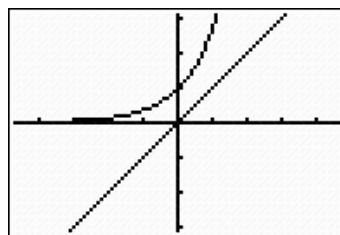


2. Represente graficamente a função $y_2 = e^x$

```

Plot1 Plot2 Plot3
Y1 X
Y2 e^(X)
Y3 =
Y4 =
Y5 =
Y6 =
Y7 =

```



3. Obtenha o gráfico da função inversa de y_2

➤ Pressione as teclas e

➤ Selecione a opção DrawInv

➤ Pressione a tecla

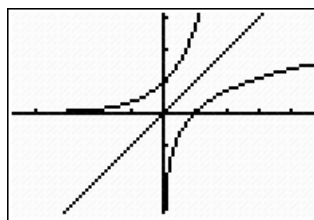
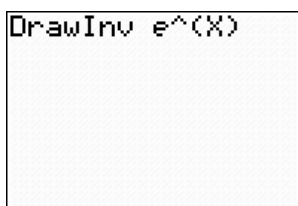
➤ Digite e^x

➤ Pressione a tecla

```

1:POINTS STO
3:Horizontal
4:Vertical
5:Tangent(
6:DrawF
7:Shade(
8:DrawInv
9:Circle(

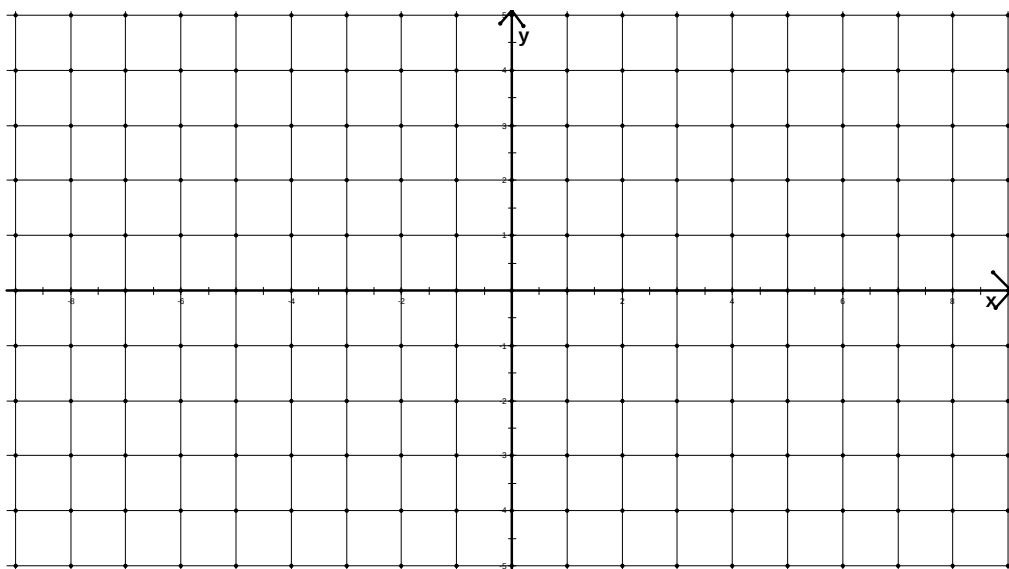
```



Verifique que os gráficos das duas funções são simétricos em relação à reta de equação $y = x$

Obtivemos o gráfico da função inversa da função $y_2 = e^x$ a que chamamos função logarítmica de base e ou função logarítmica natural e representa-se por $\ln(x)$

4. Obtenha o gráfico de $g(x) = \ln(x)$ e verifique que a sua representação gráfica coincide com a anterior.
5. Represente no referencial abaixo as funções $f(x) = e^x$ e $h(x) = \ln(x)$.



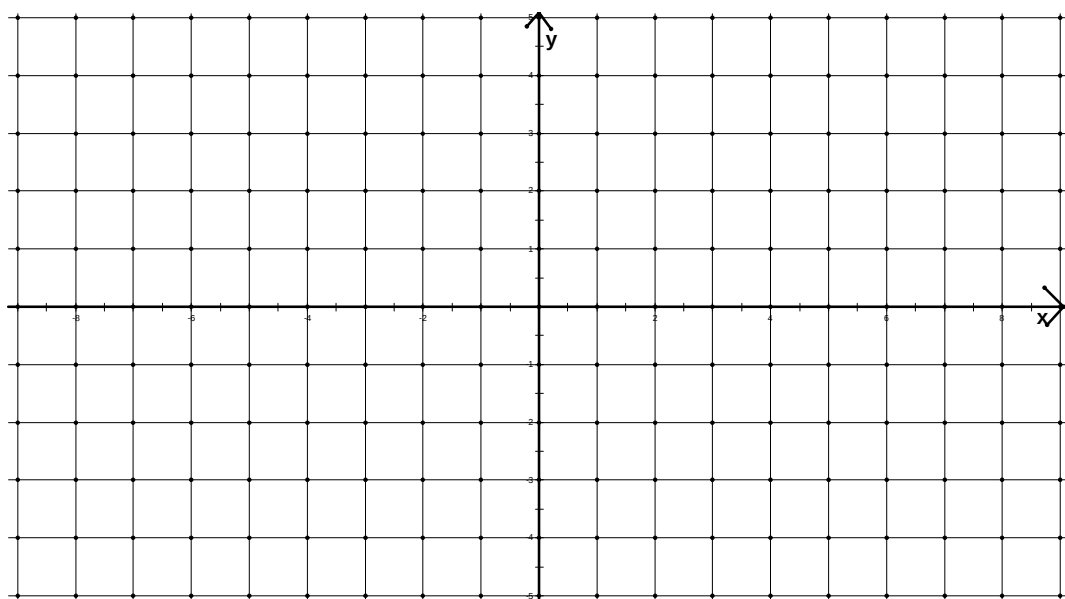
6. Por observação dos gráficos preencha a seguinte tabela:

	$f(x) = e^x$	$h(x) = \ln(x)$
Domínio		
Contradomínio		
Zeros		
Continuidade		
Sinal		
Monotonia		
Injetividade		
Equações das assíntotas		

7. Considere as funções

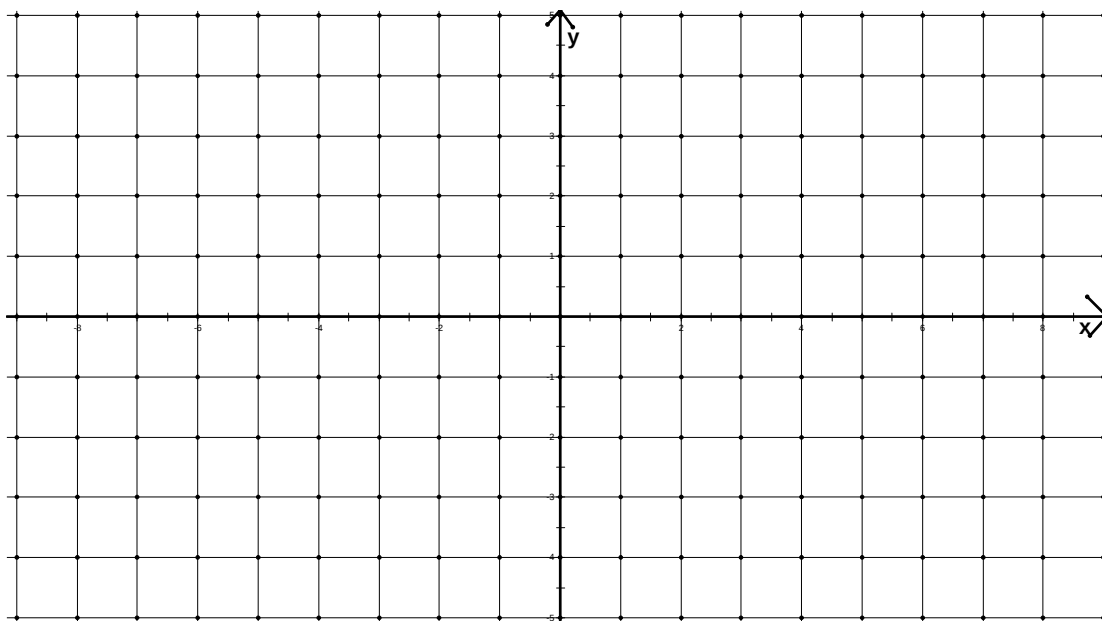
$$y = \ln(x); \quad y = |\ln(x)| \quad \text{e} \quad y = \ln(|x|)$$

7.1. Represente no mesmo referencial as funções $y = \ln(x)$ e $y = |\ln(x)|$.



7.2.

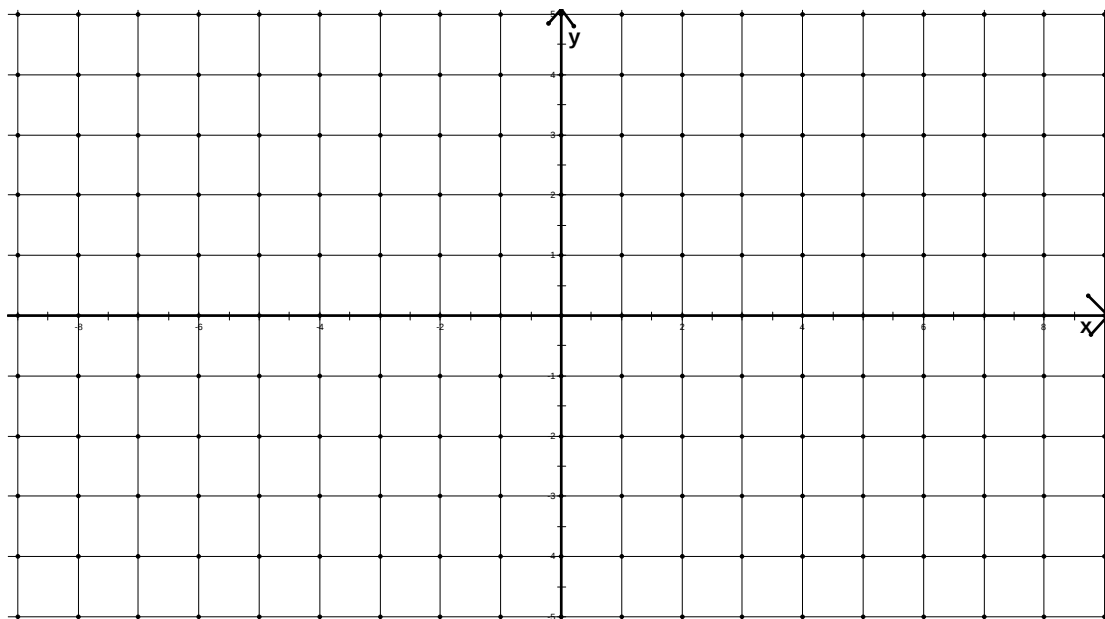
Represente no mesmo referencial as funções $y = \ln(x)$ e $y = \ln(|x|)$



7.3. Por observação dos gráficos preencha a seguinte tabela:

	$f(x) = \ln(x)$	$g(x) = \ln(x) $	$h(x) = \ln(x)$
Domínio			
Contradomínio			
Zeros			
Continuidade			
Sinal			
Monotonia			
Injetividade			
Equações das Assíntotas			

7.4. Represente, caso existam, as suas funções inversas.



Organização:

- Duração: 90 minutos

Orientações ao professor:

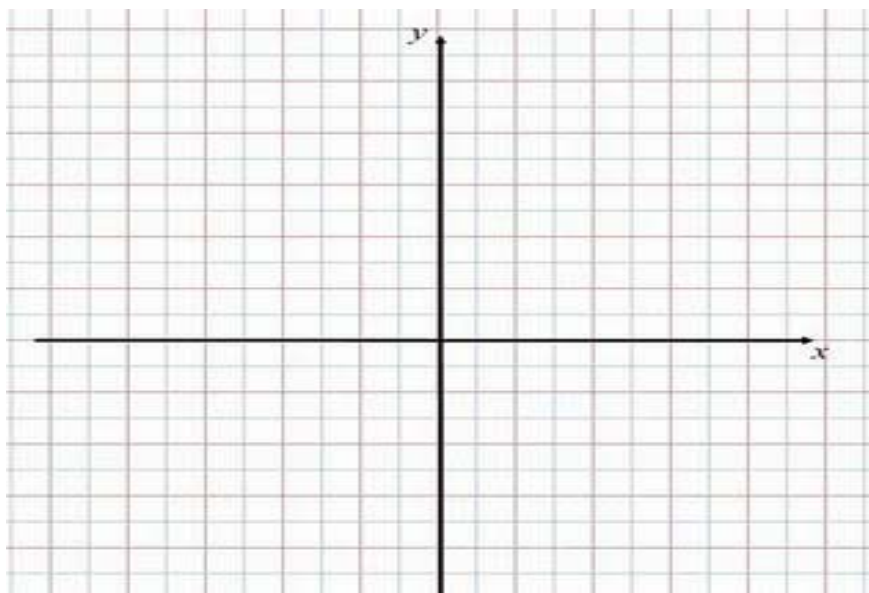
O professor deve:

- Organizar os grupos de trabalho. (Esta tarefa está orientada com o objetivo de permitir uma maior autonomia de cada grupo de trabalho).
- Apoiar os grupos sempre que considere necessário ou sempre que esse apoio seja solicitado.
- Observar o trabalho desenvolvido e, ter especial atenção às questões colocadas pelos alunos, de modo que, possam ser um contributo de enriquecimento do segundo momento da aula
- Alargar a discussão a toda a turma

Tipologia: exercício**Duração : 135 minutos****Tarefa****35 - Função logarítmica****Desenvolvimento:**

1. Represente graficamente as seguintes funções.

$$y_1 = \ln x \quad y_2 = \log_5 x \quad y_3 = \log x$$



1.1. Observe e descreva o modo como a mudança de base influencia os gráficos das funções.

1.2. Indique o domínio, contradomínio, zeros e intervalos de monotonia de cada uma das funções.

2. Qual o conjunto solução da condição $\ln x > \log_5 x > \log x$?

Qual o conjunto solução da condição $\ln x < \log_5 x < \log x$?

3. Represente graficamente as funções.

$$y_1 = \ln(-x) \quad y_2 = \log_5(-x) \quad y_3 = \log(-x)$$

3.1. Observe e descreva o modo como a mudança de base influencia os gráficos das funções.

3.2. Indique o domínio, contradomínio, zeros e intervalos de monotonia de cada uma das funções.

3.3. Qual o conjunto solução da condição $\ln(-x) > \log_5(-x) > \log(-x)$?

Qual o conjunto solução da condição $\ln(-x) < \log_5(-x) < \log(-x)$?

4. Estude agora as famílias de funções:

$$f(x) = \log_a x \quad \text{e} \quad g(x) = \log_a(-x) \text{ dizer os valores de } a$$

Qual é, em cada um dos casos, a influência do parâmetro a ?

5. Faça variar, os parâmetros reais ***b*** e ***c*** e considerando ***a*** pertencente ao intervalo $] 1, +\infty[$, estude a família de funções definidas por: $h(x) = \log_a(bx + c)$ relativamente a:

- Domínio
- Contradomínio
- Zeros
- Monotonia

Sucintamente, mas com rigor, explique como é que os parâmetros *a*, *b* e *c* influenciam os gráficos desta família de funções. Sintetize as suas conclusões num texto ilustrado com gráficos elucidativos.

Organização:

- Duração: 135 minutos
- Trabalho realizado a pares e poderá ser feito fora da sala de aula.

Orientações ao professor:

Pretende-se, com esta tarefa, estudar a influência dos parâmetros na família das funções logarítmicas.

As conclusões devem ser discutidas na sala de aula.

Tipologia: problema

Duração: 90 minutos

Tarefa

36 - Funções exponenciais

Desenvolvimento:

1. Uma população de 1,2 milhões de bactérias diminui 20% em cada hora.

1.1. Caracterize a função f que dá o número (em milhões) de bactérias ao fim de t horas (apresente a sua resposta na forma $f(t) = ae^{bt}$, sendo a e b números reais ($a \neq 0$)).

1.2. Resolva a equação $f(t) = 0,5$ e interprete o valor obtido.



2. Uma nova revista semanal pretende implantar-se no mercado nacional. De acordo com o departamento de *marketing* da empresa que vai lançar a revista, o modelo matemático previsto para o número N (em milhares) de exemplares vendidos, t meses após a revista ser lançada no mercado, é $N(t) = 200 (1 - e^{-0,1t})$



2.1. De acordo com este modelo, quantos exemplares da revista estarão vendidos no final do primeiro mês? Apresente o resultado arredondado às unidades de milhar.

2.2. A direção financeira da empresa que pretende lançar a revista traçou alguns objetivos que devem ser escrupulosamente cumpridos, pois a sua não observância pode comprometer o sucesso final de todo o trabalho desenvolvido. Assim, a direção financeira da empresa considera que, no final **do primeiro ano**, a revista deverá vender, pelo menos, 135 mil exemplares.

Averigue se, de acordo com o modelo definido pelo departamento de *marketing*, o objetivo traçado pela direção financeira será atingido.

2.3. Outro dos objetivos traçados pela direção financeira da empresa é o de as vendas atingirem 210 mil exemplares. Se isto não se verificar, é necessário desenvolver uma campanha de publicidade.

Verifique se, admitindo válido o modelo definido pelo departamento de *marketing*, é necessário a empresa levar a cabo a ação de publicidade.

Organização:

- Duração: 90 minutos
- Trabalho realizado em pares

Orientações ao professor:

Pretende-se com estes problemas modelar situações da vida real.

Tipologia: problema

Duração: 90 minutos

Tarefa

37 - Arrefecimento do café – função exponencial

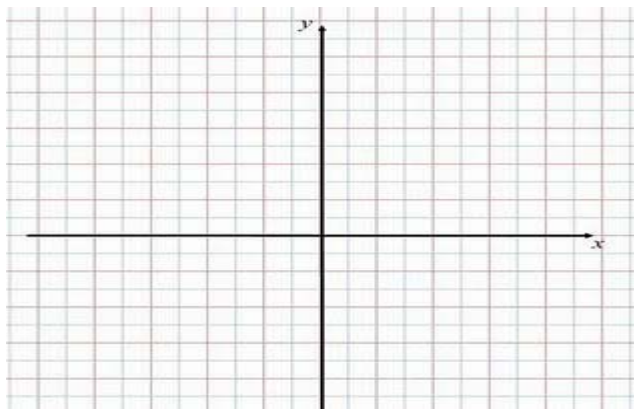
Desenvolvimento:

1. Numa certa pastelaria, a temperatura ambiente é constante. Quando nos entregam o café, este está muito quente e quem não põe açúcar precisa de esperar algum tempo para o beber.

Admita que a temperatura, em graus centígrados, de um café servido nessa pastelaria, **t minutos** após ter sido colocado na chávena, é dada por $T(t) = 20 + 50e^{-0,04t}$, ($t \geq 0$)



- 1.1. Represente graficamente a função T.



- 1.2. Determine a temperatura do café no instante em que é colocado na chávena.
- 1.3. Quem gosta de beber o café a 65 graus centígrados quanto tempo tem de esperar. Apresente o resultado em minutos e segundos.
- 1.4. O arrefecimento do café é mais acentuado nos primeiros dois minutos ou nos dois minutos seguintes.
- 1.5. Justifique a seguinte afirmação: **a taxa de variação média da função f, em qualquer intervalo do seu domínio, é negativa.**
- 1.6. Em que instante é que o arrefecimento do café é mais acentuado?

- 1.7. Com o decorrer do tempo, a temperatura do café tende a igualar a temperatura ambiente. Indique, justificando, a temperatura ambiente.

Adaptado funções 12º ano, ME–DES

Organização:

- Duração: 90 minutos
- Trabalho realizado em pares

Orientações ao professor:

Para os alunos estudarem a taxa de arrefecimento nos primeiros minutos, deverão calcular as taxas de variação média da função nos intervalos $[0, 2]$ e $[2, 4]$.

Para se indicar o instante em que o arrefecimento é mais acentuado, os alunos podem recorrer ao gráfico da função derivada e procurar o mínimo desta função no intervalo considerado.

Se já tiverem estudado anteriormente as regras de derivação, podem resolver o problema analiticamente.

Tipologia: exercício

Duração: 45 minutos

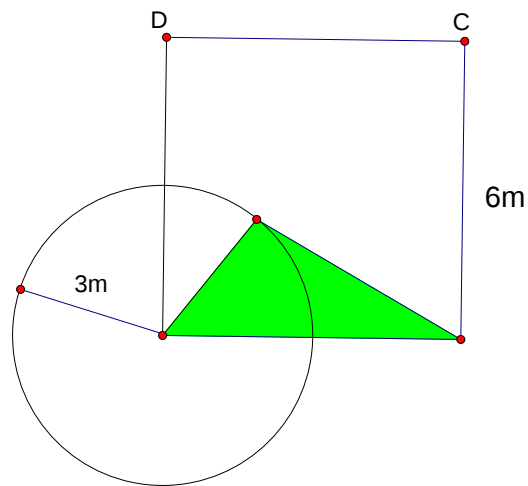
Tarefa

38 - Área de um triângulo – função trigonométrica

Desenvolvimento:

1. Na figura está representado um quadrado $[ABCD]$ com 6 m de lado e uma circunferência de centro A e 3 m de raio.

Considere um ponto P pertencente simultaneamente à circunferência e ao quadrado. Seja θ a amplitude, em radianos, do ângulo BAP.



1.1. Mostre que a área do triângulo [ABP], é dada, em função de θ , pela expressão $A(\theta) =$

$$9 \sin \theta, \text{ com } \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

1.2. Determine a área do triângulo [ABP] se :

1.2.1. $\theta = \frac{\pi}{4}$ (valor exato)

1.2.2. $\theta = 0,7$ (com duas casa decimais)

1.3. Determine θ de modo que a área do triângulo [ABP] seja:

1.3.1. $4,5 \text{ m}^2$ (valor exato);

1.3.2. 7 m^2 (duas casa decimais)

Organização:

- Duração: 45 minutos
- Trabalho realizado em pares

Orientações ao professor:

Para visualizar o gráfico da expressão que permite obter a área deve ter-se em atenção o domínio e o contradomínio da função nas condições do enunciado.

Tipologia: problema

Duração: 90 minutos

Tarefa

39 - Concentração "Saratex"- função exponencial

Desenvolvimento:

1. Admita que a concentração do fármaco "Saratex", em miligramas por litro de sangue, t horas após a administração a um doente, é dada pela expressão:

$$C(t) = t \times 1,05^{-2t}$$

- 1.1. Duas horas após o fármaco ter sido administrado, qual a sua concentração por litro de sangue? Apresente o resultado arredondado às décimas.
- 1.2. O que acontece à concentração do fármaco com o decorrer do tempo?
- 1.3. O conjunto solução da inequação $C(t) \geq 2,5$ é um intervalo fechado do tipo $[a,b]$.

Recorrendo à calculadora determine, graficamente, um valor para **a** e outro para **b**, arredondados às décimas.

- 1.4. Por indicação médica, um doente deve tomar um outro fármaco quando a concentração de "Saratex" for máxima. Para isso, o médico indicou ao doente o intervalo de tempo entre a administração dos dois fármacos.

Sabe-se que o doente tomou "Saratex" às 8 horas e o 2º medicamento às 15 horas.

Numa pequena composição, explique o cumprimento ou não, por parte do doente, das recomendações dadas pelo médico.

Na composição deve ficar claro:

- O momento em que a concentração é máxima;
- O intervalo de tempo entre a administração dos dois fármacos;
- A hora a que o doente devia ter tomado o 2º fármaco.

Na composição deve utilizar as capacidades gráficas da sua calculadora e enriquecer a sua composição com o traçado de um ou mais gráficos.

Organização:

- Duração: 90 minutos
- Trabalho individual

Orientações ao professor:

O professor na aula seguinte deverá ler e discutir algumas composições realizadas pelos alunos.

Tipologia: problema

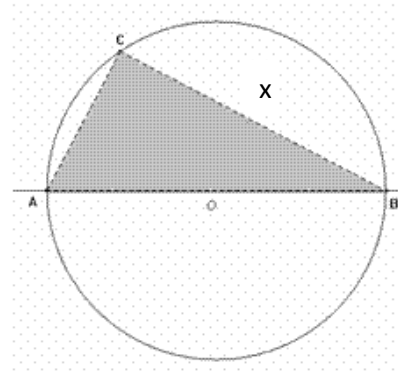
Duração: 45 minutos

Tarefa

40 - Triângulo inscrito – função irracional

Desenvolvimento:

1. Considere um canteiro triangular num jardim circular. Tal como se apresenta na figura ao lado, o canteiro está inscrito numa semicircunferência de centro O .
 - 1.1. Justifique que esse canteiro tem a forma de um triângulo retângulo.
 - 1.2. Exprima a medida da área do canteiro em função do raio e do cateto x .
 - 1.3. Qual deve ser o raio da circunferência para que o canteiro tenha área 10 e para que a medida de um dos catetos seja o dobro da medida do outro?
 - 1.4. Se o raio da circunferência for igual a 5, qual o valor da maior área do canteiro triangular?



Adaptado Funções 11º ano ME–DES

Organização:

- Duração: 45 minutos
- Calculadora gráfica

Orientações ao professor:

A questão 1.4 deve ser resolvida recorrendo à calculadora gráfica, com alunos do 11º ano.
Com alunos do 12º ano, a mesma questão pode ser resolvida gráfica e/ou analiticamente.

Tipologia: exploração**Duração : 120 minutos****Tarefa****41 - Período de funções trigonométricas****Desenvolvimento:**

Período de funções trigonométricas

1. Utilizando a calculadora, obtenha o gráfico das funções no intervalo $[-2\pi, 2\pi]$ e investigue qual o período de cada uma delas.
 - 1.1. $f(x) = \sin(x)$
 - 1.2. $g(x) = \sin(2x)$
 - 1.3. $h(x) = \sin(3x)$
 - 1.4. $i(x) = \sin(4x)$
2. Qual será o período da família de funções do tipo $j(x) = \sin(\alpha x)$, $\alpha \in \mathbb{N}$.
3. Qual será o período da função $l(x) = \sin(x) + \sin(2x)$?
4. Investigue sobre o período de funções do tipo $r(x) = \sin(\alpha x) + \sin(\beta x)$, $\alpha \in \mathbb{N}$ e $\beta \in \mathbb{N}$.

Sugestão: Atribua valores a α e β que ajudem a sistematizar as suas conjecturas.

Elabore um relatório, o mais completo possível, desta tarefa.

Organização:

- Duração: 120 minutos
- Trabalho realizado em grupos de 4 alunos.

Orientações ao professor:

Para o desenvolvimento desta tarefa torna-se imprescindível o recurso à calculadora gráfica. Para estabelecer as conjeturas é necessário atribuir diversos valores aos diferentes parâmetros.

Cada grupo deve elaborar um relatório, onde apresente as conjeturas estabelecidas e as suas conclusões.

Tipologia: modelação

Duração: 90 minutos

Tarefa

42 - Saltar à corda – função trigonométrica

Desenvolvimento:

1. Dois alunos fazem rodar uma corda para que alguns colegas possam saltar. A corda descreve uma volta completa em cada segundo.

Os dados da tabela abaixo foram recolhidos por outro aluno que tentava relacionar a altura a que se encontrava o meio da corda do solo com o decorrer do tempo.

Tempo (s)	0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2
Altura (m)	0	1	2	1	0	1	2	1	0

- 1.1. Sabendo que esta situação pode ser modelada por uma função do tipo $y = a \sin(bx + c) + d$, tente encontrar os valores dos parâmetros, a , b , c e d e escreva a função f que se obtém por concretização desses parâmetros.
- 1.2. Introduza os valores da tabela na calculadora e represente, num referencial, os pontos cujas coordenadas estão indicadas.
- 1.3. Represente graficamente a função f no mesmo referencial e verifique se os pontos pertencem ao gráfico da função. Caso contrário, tente ajustar a expressão analítica da função à situação.
- 1.4. Recorra à função *SinReg* da calculadora para obter a função que melhor se ajuste à nuvem de pontos e compare a expressão dessa função com a que obteve anteriormente.

Organização:

- Duração: 90 minutos

Orientações ao professor:

A realização desta tarefa pode beneficiar de uma revisão do conteúdo programático regressão do tema estatística.

Tipologia: modelação

Duração: 90 minutos

Tarefa

43 - Roda da feira – função quadrática

Desenvolvimento:

A tabela abaixo dá-nos a altura, em metros, relativamente ao solo, de uma pessoa que anda a divertir-se numa roda da feira, em função do tempo t , em segundos



Tempo (s)	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
Altura (m)	11	21	11	1	11	21	11	1	11	21	11	1	11

1. Introduza os valores da tabela na calculadora e represente, num referencial, os pontos cujas coordenadas estão indicadas.
2. Por observação da tabela e/ou gráfico tente responder às seguintes questões
 - 2.1. Qual é o raio da roda?
 - 2.2. Quanto tempo leva a roda a dar uma volta completa?
3. Sabendo que esta situação pode ser modelada por uma função do tipo $y = a \sin(bx + c) + d$, tente encontrar os valores dos parâmetros, a , b , c e d e escreva a função f que se obtém por concretização desses parâmetros.
4. Represente graficamente a função f no mesmo referencial e verifique se os pontos pertencem ao gráfico da função. Caso contrário, tente ajustar a expressão analítica da função à situação.
5. Recorra à função *SinReg* da calculadora para obter a função que melhor se ajusta à nuvem de pontos e compare a expressão dessa função com a que obteve anteriormente.

Organização:

- Duração: 90 minutos
- Trabalho realizado em pares

Orientações ao professor:

A realização desta tarefa pode beneficiar de uma revisão do conteúdo programático regressão do tema estatística.

Tipologia: modelação

Duração: 90 minutos

Tarefa

44 - Família de funções afins

Desenvolvimento:

1. As marés são fenómenos cíclicos e ocorrem aproximadamente de 12 em 12 horas. Num determinado dia, na praia da Parede obtiveram-se os dados registados na tabela abaixo. Esta representa a altura, em metros, do nível da água do mar, em função do tempo t em horas.



Tempo (h)	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
Altura (m)	2,75	1,75	1,1	1,75	2,75	3,3	2,75	1,75	1,1	1,75	2,75	3,3	2,75

- 1.1. Introduza os valores da tabela na calculadora e represente, num referencial, os pontos cujas coordenadas estão indicadas.
2. Por observação da tabela e/ou gráfico tente responder às seguintes questões
 - 2.1. A que horas foi a maré alta? E a maré baixa?
 - 2.2. Quanto tempo decorreu entre duas marés iguais?
3. Sabendo que esta situação pode ser modelada por uma função do tipo $y = a \sin(bx + c) + d$, tente encontrar os valores dos parâmetros, a , b , c e d e escreva a função f que se obtém por concretização desses parâmetros.
4. Represente graficamente a função f no mesmo referencial e verifique se os pontos pertencem ao gráfico da função. Caso contrário, tente ajustar a expressão analítica da função à situação.
5. Recorra à função *SinReg* da calculadora para obter a função que melhor se ajuste à nuvem de pontos e compare a expressão dessa função com a que obteve anteriormente.

Organização:

- Duração: 90 minutos

Orientações ao professor:

A realização desta tarefa pode beneficiar de uma revisão do conteúdo programático regressão do tema estatística.

Tipologia: exploração

Duração: 90 minutos

Tarefa

45 - Família de funções trigonométricas

Desenvolvimento:

1. A partir do gráfico de uma função $y = f(x)$ podem ser obtidos gráficos de outras funções.

Propomos-lhe uma investigação sobre funções que se podem relacionar com a função definida por $f(x) = \sin x$

- 1.1. Investigue o efeito do parâmetro a no gráfico da família de funções:

- 1.1.1. $g(x) = a \sin x$

- 1.1.2. $h(x) = \sin(ax)$

- 1.1.3. $i(x) = \sin x + a$

- 1.1.4. $j(x) = \sin(x + a)$

2. Descreva como pode obter o gráfico de cada uma das funções a partir do gráfico da função $f(x) = \sin x$.

- 2.1. $g(x) = -\sin x$

- 2.2. $h(x) = \sin(-x)$

- 2.3. $i(x) = |\sin x|$

- 2.4. $j(x) = \sin|x|$

3. Elabore um relatório com as suas conclusões.

Organização:

- Duração: 90 minutos
- Trabalho realizado em grupo de 4 alunos.

Orientações ao professor:

Nesta tarefa é deixado ao critério dos alunos os valores a atribuir a cada parâmetro.

O professor pode dar sugestões que considere pertinentes para o seu desenvolvimento.

Tipologia: exploração**Duração: 45 minutos****Tarefa****46 - À procura de soluções – função trigonométrica****Desenvolvimento:**

1. Recorrendo à calculadora gráfica investigue quantas soluções tem cada uma das equações.

1.1. $\ln x = \cos x + 1$

1.2. $e^x = \sin x$

1.3. $2 \cos x = x - 1$

1.4. $\sin x + \cos x = 4$

Organização:

- Duração: 45 minutos
- Trabalho individual

Orientações ao professor:

Por vezes os alunos não resolvem este tipo de exercícios por não entenderem o que se pretende quando se pede o conjunto solução de uma equação.

Se os alunos tentarem resolver as equações pelo método analítico não vão conseguir chegar às soluções das equações. Os processos analíticos são por vezes insuficientes.

Se o aluno se limitar a observar o que o visor da máquina lhe mostra, apenas com o conhecimento do conceito de solução de uma equação, não lhe será fácil nos zoom's habituais, perceber qual a resposta correta.

Tipologia: modelação**Duração: 90 minutos****Tarefa****47 - O meteoro – Estatística****Desenvolvimento:**

1. Em cada ano há milhares de meteoros que penetram na atmosfera terrestre. Quando um meteoro entra na atmosfera sofre um aquecimento rápido e adquire o aspeto de uma estrela cadente. O grau a que o meteoro é aquecido depende da sua velocidade, ou seja, a temperatura máxima alcançada pelo meteoro é função da velocidade a que este penetra na atmosfera. Na tabela que se segue encontram-se alguns valores aproximados desta função.

Velocidade (km/s)	5	6	7	8	9
Temperatura Máxima (°C)	11,25	16,20	22,05	28,80	36,45

- 1.1. Recorrendo às capacidades da calculadora, tente descobrir a expressão analítica que define a função.
- 1.2. Considerando a função que encontrou como modelo da situação, qual será a temperatura máxima alcançada por um meteoro que penetre na atmosfera a uma velocidade de 10 km/s? E se for a 20 Km/s?
- 1.3. E se da tabela apenas conhecesse os dois primeiros valores, haveria outras funções possíveis?

Organização:

- Duração: 90 minutos
- Trabalho realizado em pares

Orientações ao professor:

A realização desta tarefa pode beneficiar de uma revisão do conteúdo programático regressão do tema estatística.

Tipologia: exercício**Duração: 45 minutos****Tarefa****48 - Igualdade de funções****Desenvolvimento:**

2. Considere as funções f e g definidas no seu domínio por:

$$f(x) = \sqrt{\frac{x-4}{x+2}} \qquad g(x) = \frac{\sqrt{x-4}}{\sqrt{x+2}}$$

- 2.1. Recorrendo à calculadora gráfica verifique que as funções não são iguais.
2.2. Indique um domínio em que se verifique as igualdades das funções.

3. Considere as funções h e j definidas no seu domínio por:

$$h(x) = 2 \ln x \quad \text{e} \quad j(x) = \ln x^2$$

- 3.1. As funções h e j são iguais?
3.2. Representa as funções graficamente. O que observa? Que pode concluir?

Organização:

- Duração: 45 minutos

Orientações ao professor:

No exercício 1 o domínio da função f é a solução da inequação $\frac{x-4}{x+2} \geq 0$

E na função g é a solução da conjunção das condições $x-4 \geq 0$ e $x+2 > 0$

O professor deve chamar a atenção dos alunos para que $\ln x^2 = 2\ln|x|$.

Tipologia: problema**Duração: 45 minutos****Tarefa****49 - No centro comercial – função exponencial****Desenvolvimento:**

1. O número de pessoas (em milhares) num centro comercial é dado, após t horas, pela função definida por $p(t) = k t e^{-0,6t}$, com $k > 0$ e $t \in [0, 8[$ (o instante $t = 0$ corresponde às 12 horas da manhã).

- 1.1. Sabendo que às 14 horas havia 3600 pessoas no centro comercial, determine k , apresentando o resultado arredondado às unidades

Nota: Se usar arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve, no mínimo, três casas decimais.

- 1.2. Considere agora $k = 5$.

- 1.2.1. A que horas começou a diminuir o número de pessoas no centro comercial? Indique o resultado em horas e minutos (minutos arredondados às unidades).

Nota: Se usar arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve, no mínimo, três casas decimais.

- 1.2.2. Quantas pessoas se encontravam no centro comercial às dezasseis e trinta minutos? Apresente o resultado em milhares, arredondo às décimas.

- 1.2.3. Considere a seguinte afirmação:

“Estavam mais de 2000 pessoas no centro comercial durante, pelo menos, 4 horas”

Recorra à calculadora gráfica para indicar se esta afirmação é verdadeira ou falsa. Apresente todos os elementos recolhidos na utilização da calculadora, nomeadamente o gráfico, ou gráficos, obtido(s), bem como coordenadas relevantes de alguns pontos. Apresente os valores pedidos arredondados às centésimas.

Organização:

- Duração: 45 minutos

Orientações ao professor:

As questões 1.2.1 e 1.2.2 podem ser resolvidas por processos gráficos ou por processos analíticos, de modo a comparar e validar os dois processos de resolução.

Tipologia: problema

Duração: 90 minutos

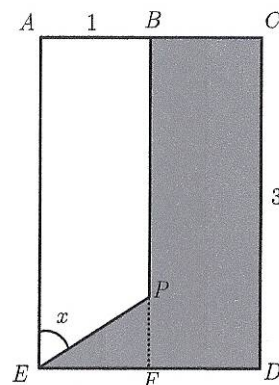
Tarefa

50 - Área de um polígono – função trigonométrica

Desenvolvimento:

1. Na figura ao lado encontra-se o retângulo [ACDE]. Sabe-se que:

- ▶ $\overline{AB} = 1$;
- ▶ $\overline{CD} = 3$;
- ▶ B é o ponto médio de [AC];
- ▶ O ponto P parte do ponto B e percorre o segmento [BF], nunca coincidindo com o ponto F;
- ▶ Para cada posição de P, x designa a amplitude, em radianos, do ângulo AEP,



$$x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

- 1.1. Prova que a área do polígono [BCDEP] é dada, em função de x, por

$$f(x) = 3 + \frac{1}{2 \operatorname{tg} x}$$

- 1.2. Calcule $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x)$. Interpreta geometricamente o valor obtido.

- 1.3. Resolva a equação $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{6} + 3$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

- 1.4. Estude a função f quanto à monotonia.

- 1.5. Recorra à calculadora para determinar **graficamente** a solução que lhe permite resolver o seguinte problema:

Qual é o valor de x para o qual a área do polígono [BCDEP] é igual à área de um círculo de diâmetro [AC]?

Apresente todos os elementos recolhidos na utilização da calculadora, nomeadamente o gráfico ou gráficos, obtido(s), bem como coordenadas de pontos relevantes. Apresente o valor pedido, arredondado às centésimas.

Organização:

- Duração: 90 minutos

Orientações ao professor:

Após a entrega e do professor levar para casa e ter corrigido, devem ser discutidos na aula os diferentes métodos de resolução.