

**Mestrado em Estatística e Gestão de Informação**  
Master Program in Statistics and Information Management

## **Projeção da Mortalidade Portuguesa por meio dos Modelos Generalizados de Idade - Período - Coorte**

Larissa Patrícia Santos dos Reis

Dissertação apresentada como requisito parcial para  
obtenção do grau de Mestre em Estatística e Gestão de  
Informação

**NOVA Information Management School**  
**Instituto Superior de Estatística e Gestão de Informação**  
Universidade Nova de Lisboa

# **PROJEÇÃO DA MORTALIDADE PORTUGUESA POR MEIO DOS MODELOS GENERALIZADOS DE IDADE - PERÍODO - COORTE**

por

Larissa Patrícia Santos dos Reis

Proposta de Dissertação apresentada como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre Estatística e Gestão de Informação, Especialização em Análise e Gestão do Risco

**Orientador:** Prof. Dr. Jorge Miguel Ventura Bravo

Novembro 2018

## DEDICATÓRIA

*“SE NÃO RECEIO O ERRO, É PORQUE ESTOU SEMPRE  
DISPOSTO A CORRIGI-LO”*

*BENTO JESUS CARAÇA*

*Á MINHA FAMÍLIA*

## AGRADECIMENTOS

Durante a realização deste trabalho contei com o apoio direto ou indireto de algumas pessoas a quem estou eternamente grata. Mas não poderia deixar de mencionar algumas pessoas em especial.

Nomeadamente, ao meu orientador, Professor Doutor Jorge Miguel Ventura Bravo, pelo seu contributo e pelas generosas observações que sem dúvida ajudaram-me a tornar este trabalho melhor.

A todos os meus professores com quem cruzei-me durante a minha vida académica pela partilha dos seus conhecimentos.

Para um lado mais pessoal, à minha família, em especial, à minha mãe, Maria de Lourdes dos Santos Borges e à minha avó, Efigênia dos Santos, a quem devo muito do que eu sou hoje. E também às minhas tias, Maria de Fátima dos Santos Borges e Maria Hilária Fatuda pelo apoio incondicional.

Ao longo deste trabalho contei com o apoio e amizade dos meus amigos e dos meus colegas da Mercer Portugal.

Obrigada à Mercer Portugal por me ter apresentado o “incerto mundo atuarial” e também pela flexibilidade que me permitiu a realização tanto desde projecto, como do mestrado.

Por último, mas definitivamente não menos importante, ao Paulo Santos, muito obrigada, pelo “vais conseguir”, “eu acredito em ti”, pelas preciosas ajudas, principalmente no R, pela paciência e compreensão demonstradas, sempre com um sorriso, mesmo quando estava com o meu humor peculiar. Correndo o risco de ultrapassar o limite de páginas permitido, fico por aqui e agora apenas espero poder compensá-lo da melhor maneira possível.

## RESUMO

As propensões atuais da mortalidade têm trazido novos desafios em diversas áreas. Para compensar isso, têm surgido vários estudos relacionados com a previsão da mortalidade, a fim de projetar as tendências futuras da mortalidade e assim reduzir o nível de incerteza associado. Porém, a esperança média de vida tem sido constantemente subestimada. Propusemos a avaliar o desempenho de vários modelos na modelação e projecção da mortalidade portuguesa, desagregada por género, entre 1980 a 2010. Concentramos na estrutura de modelos generalizados de idade - período - corte, com o intuito de incorporar o efeito de coorte e averiguar a existência de gerações que compartilham as mesmas características. E adicionalmente, estudamos o impacto do risco de longevidade numa carteira de anuidades vida, através da mensuração do *Value at risk* e *Expected Shortfall*. Entre os modelos discutidos o de Renshaw & Haberman apresentou o melhor ajuste e desempenho preditivo para a construção de índices de mortalidade para os homens e para as mulheres, com base nos Critérios de Informação e erros de previsão, respetivamente. Através da análise dos resíduos, detetamos para os modelos sem o parâmetro de coorte, uma estrutura sistemática na população masculina. Indicando assim, a inércia destes modelos em capturar o efeito de coorte, que por sua vez, leva à possibilidade da existência de um efeito de coorte, conforme já revelado em estudo anteriores. Não obstante, analisamos a incerteza nos parâmetros, mediante a construção de intervalos de confiança, através do método de *Bootstrap* sobre os resíduos para os modelos de Lee & Carte e Renshaw & Haberman, onde averiguarmos que o índice de coorte é o principal responsável pela incerteza na projecção da mortalidade. No geral, esses resultados sugerem que apesar da relevância do efeito de coorte na modelação da mortalidade, o impacto do mesmo se dissipe ao longo do tempo.

## PALAVRAS-CHAVE

Mortalidade em idades avançadas; Modelos GAPC; Bootstrap; Risco de Longevidade; StMoMo

## **ABSTRACT**

The current mortality propensity has led to new challenges in many areas. To compensate this, several mortality prediction studies have been conducted to forecast future mortality trends and thereby reduce the associated uncertainty. However, the average life expectancy was being constantly underestimated. We proposed to examine the performance of different models in modelling and forecasting Portuguese mortality from 1980 to 2010, split by gender. We focused on the structure of generalized age-period-cohort models, such we could consider the cohort effect and check the existence of cohorts with the same characteristics. In addition, we examine the impact of longevity risk on a pension fund portfolio by measuring value at risk and expected shortfall. Among the models discussed, Renshaw & Haberman's model provided the best fitting and predictive performance for the men and women, based on Information Criteria and prediction errors. By analysing the residuals, we found a systematic structure in the male population for the models without cohort parameters. This indicates the inertia of these models in capturing the cohort effect, which in turn leads to the possibility of a cohort effect, as shown in previous studies. Nevertheless, we have analysed the uncertainty in the parameters by using the bootstrap method for residues for the Lee & Carter and Renshaw & Haberman models to establish confidence intervals where the cohort parameter is the main cause of uncertainty in the mortality projection. Overall, these results suggest that despite the relevance of the cohort effect in modelling mortality, the influence of the cohort diminishes over time.

## **KEYWORDS**

Old Age Mortality; GAPC Models; Bootstrap; Longevity Risk; StMoMo

# ÍNDICE

1. Introdução .....	1
1.1. Relevância e Importância do Tema .....	1
1.2. Enquadramento e Identificação do Problema .....	1
1.3. Objetivos e Contributos do Trabalho .....	3
1.4. Organização e Estrutura do Trabalho.....	3
2. Revisão da Literatura .....	4
3. Metodologia .....	7
3.1. Data .....	7
3.2. Calibração dos Modelos e Análise da Qualidade do Ajuste.....	7
3.3. Projeção e Validação do Poder Preditivo .....	8
4. Modelos de Mortalidade Estocástica Generalizada de idade-Período-Coorte.....	9
4.1. Modelo de Lee e Carter .....	11
4.2. Modelo de Lee e Carter sobre Distribuição Poisson .....	13
4.3. Modelo de Lee e Carter com Efeito de Corte.....	13
4.4. Modelo APC – Age Period Cohort .....	14
4.5. Modelos de Cairns - Blake - Down.....	15
4.6. Modelo de Plat .....	16
5. Aplicação dos Modelos da Família GAPC aos Dados de Portugal .....	18
5.1. Estimção dos Parâmetros .....	19
5.2. Critérios de Seleção dos Modelos .....	25
5.2.1. Critérios de Informação.....	25
5.2.2. Análise dos resíduos .....	26
5.3. Previsão das Taxas Futuras de Mortalidade.....	34
5.4. Incerteza nos Parâmetros: Construção de Intervalos de Confiança .....	40
5.5. Sumário.....	44
6. Avaliação do Risco de Longevidade em uma Carteira de anuidades .....	45
6.1. Caso Prático: Composição e Estatísticas do Fundo .....	45
6.2. Extrapolação dos Dados .....	46
6.3. Distribuição do Valor Atual das Anuidades .....	47
6.4. Medidas de Risco.....	49
7. Conclusões.....	51
8. Bibliography.....	52
9. Anexos .....	56



## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 5.1 - Logaritmo das probabilidades de morte observadas em relação à idade (em cima) e o ano (em baixo) para homens e mulheres da população portuguesa em 1940 e 2015 dos 0 aos 110 anos de idade. ....	18
Figura 5.2 - LC: $\alpha x, \beta x(1)$ e $kt(1)$ , parâmetros estimados em relação à idade (55 a 90) e ano civil (1980 a 2010), para os homens (painéis superiores) e para as mulheres (painéis inferiores). ....	20
Figura 5.3 – RH: $\alpha x, \beta x(1), kt(1)$ e $Yt - x$ , parâmetros estimados em relação à idade (55 a 90), ano civil (1980 a 2010) e ao de nascimento, para os homens (painéis superiores) e para as mulheres (painéis inferiores). ....	20
Figura 5.4 – APC: $\alpha x, kt(1)$ e $Yt - x$ , parâmetros estimados em relação à idade (55 a 90), ano civil (1980 a 2010) e ao de nascimento, para os homens (painéis superiores) e para as mulheres (painéis inferiores). ....	21
Figura 5.5 – CBD: $kt1$ e $kt(2)$ , parâmetros estimados em relação ao ano civil (1980 a 2010) e, para os homens (painéis à esquerda) e para as mulheres (painéis à direita). ....	22
Figura 5.6 – M6: $kt1, kt(2)$ e $Yt - x$ , parâmetros estimados em relação à idade ano civil (1980 a 2010) e ao de nascimento, para os homens (painéis superiores) e para as mulheres (painéis inferiores). ....	22
Figura 5.7 – M7: $kt1, kt(2), kt(3)$ e $Yt - x$ , parâmetros estimados em relação ano civil (1980 a 2010) e ao de nascimento, para os homens (painéis superiores) e para as mulheres (painéis inferiores). ....	23
Figura 5.8 - PLAT: $\alpha x, kt1, kt(2)$ e $Yt - x$ , parâmetros estimados em relação à idade (55 a 90), ano civil (1980 a 2010) e ao ano de nascimento, para os homens (painéis superiores) e para as mulheres (painéis inferiores). ....	23
Figura 5.9 – LC: Gráficos de dispersão dos resíduos em relação à idade, ano civil e ano de nascimento, para os Homens (painéis superiores) e Mulheres (painéis inferiores). ....	27
Figura 5.10 - RH: Gráficos de dispersão dos resíduos em relação à idade, ano civil e ano de nascimento, para os Homens (painéis superiores) e Mulheres (painéis inferiores). ....	27
Figura 5.11 – APC: Gráficos de dispersão dos resíduos em relação à idade, ano civil e ano de nascimento, para os Homens (painéis superiores) e Mulheres (painéis inferiores). ....	28
Figura 5.12 – CBD: Gráficos de dispersão dos resíduos em relação à idade, ano civil e ano de nascimento, para os Homens (painéis superiores) e Mulheres (painéis inferiores). ....	28
Figura 5.13 – M6: Gráficos de dispersão dos resíduos em relação à idade, ano civil e ano de nascimento, para os Homens (painéis superiores) e Mulheres (painéis inferiores). ....	29
Figura 5.14 – M7: Gráficos de dispersão dos resíduos em relação à idade, ano civil e ano de nascimento, para os Homens (painéis superiores) e Mulheres (painéis inferiores). ....	29

Figura 5.15 – PLAT: Gráficos de dispersão dos resíduos em relação à idade, ano civil e ano de nascimento, para os Homens (painéis superiores) e Mulheres (painéis inferiores). .....	30
Figura 5.16 – LC, RH, APC, CBD, M6, M7 e PLAT: Mapas de calor tridimensionais dos resíduos para os Homens (painel à esquerda) e Mulheres (painel à direita).....	31
Figura 5.17 - Previsão dos índices de período dos modelos RH, APC e M6 aplicados à população masculina (painel à esquerda) e feminina (painel à direita) para as idades entre os 55 e 90 anos e o período 2011 a 2060.....	36
Figura 5.18 - Previsão dos índices de coorte dos modelos RH, APC e M6 aplicados à população masculina (painel à esquerda) e feminina (painel à direita) para as idades entre 55 e 90 anos e o período 1956 a 2005. ....	38
Figura 5.19 - Parâmetros do modelo de RH reamostrados para os níveis de confiança de 50%, 80% e 95%, em relação à idade, ano civil e ao de nascimento.....	42
Figura 5.20 - Taxas de mortalidade aos 65, 75 e 85 anos dos modelos RH (à esquerda) e LC (à direita) para um intervalo de 95% de confiança com e sem incerteza nos parâmetros. 43	
Figura 6.1 - Nº de Participantes por Valor Médio da Pensão .....	46
Figura 6.2 – Valor atual simulado com as curvas de densidade e normal sobrepostas .....	47
Figura 6.3 - Q-Q plot dos valores atuais gerados .....	49
Figura 6.4 - Curva da Norma assinalada com o VaR95%, ES95% e a Média .....	50

## ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 4.2- Principais Modelos de Projeção Estocástica .....	9
Tabela 5.1 - Logaritmo da máxima verosimilhança, o número de parâmetros estimados, o número de observações, e os correspondentes valores AIC e BIC por gênero para cada um dos modelos.....	25
Tabela 5.2 Desvio Padrão dos resíduos para os homens e para as mulheres. ....	26
Tabela 5.3 - Modelos ARIMA selecionados para prever os índices de tempo de 2011 a 2060 para homens e mulheres separadamente (* com tendência).....	35
Tabela 5.4 – Erro Quadrático Médio o e Erro Médio Percentual Absoluto para cada um dos modelos projetados para os homens e as mulheres. ....	35
Tabela 6.1 - Número de participantes do fundo de pensões.....	45
Tabela 6.2 - Estatísticas descritivas dos valores atuais gerados da carteira de anuidades. ....	47
Tabela 6.3 – Testes de Normalidade para os valores atuais gerados .....	48
Tabela 6.4 - Medidas de Risco: VaR e ES.....	50

## LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

<b>AIC</b>	Akaike Information Criterion
<b>APC</b>	Age - Period - Cohort
<b>ARMA</b>	Modelo Auto - Regressivo de Média Móvel
<b>ASF</b>	Autoridade de Supervisão de Seguros e Fundos de Pensões
<b>AIC</b>	Bayesian Information Criterion
<b>CBD</b>	Modelo de Cairns, Blake e Down
<b>CGA</b>	Caixa Geral Aposentações
<b>CMI</b>	Continuous Mortality Investigation
<b>EPAM</b>	Erro Percentual Absoluto Médio
<b>EQM</b>	Raiz Quadrada do erro Quadrático Médio
<b>ES</b>	Valor em Risco Condicional
<b>GAPC</b>	Generalized Age – Period - Cohort
<b>INE</b>	Instituto Nacional de Estatística
<b>LC</b>	Modelo de Lee & Carter
<b>RGSS</b>	Regime Geral de Segurança Social
<b>RH</b>	Modelo de Renshaw & Haberman
<b>SVD</b>	Decomposição em Valores Singulares
<b>VaR</b>	Valor em Risco

# 1. INTRODUÇÃO

## 1.1. RELEVÂNCIA E IMPORTÂNCIA DO TEMA

O aumento da esperança média de vida à nascença, assim como em idades avançadas, registado nas últimas décadas é uma conquista significativa para a sociedade e revela-se particularmente desafiante em diversas áreas do conhecimento humano, nomeadamente, para as seguradoras e fundos de pensões, que estão mais relacionadas com a gestão dos riscos associados à longevidade.

Os fundos de pensões privados têm uma função primordial na economia de um país, nomeadamente em Portugal. No final de 2017, o montante total dos fundos de pensões em Portugal ascendeu a 19,7 mil milhões de euros, o que equivale a 10% do Produto Interno Bruto (ASF, 2018), atingindo o pico dos últimos 5 anos.

Os sistemas de poupanças privados possuem um papel fundamental na constituição de garantias para a reforma, assim como, estabelecem uma via de desenvolvimento do mercado financeiro e de capitais. A grande maioria dos pensionistas portugueses tem como única fonte de rendimento periódico após a reforma a pensão de velhice paga pelos sistemas públicos de pensões (RGSS e CGA). Os estudos atuariais recentes sobre a sustentabilidade de longo prazo dos sistemas públicos de proteção social em Portugal demonstram a sua insustentabilidade e assinalam ainda os problemas de equidade e de adequação dos sistemas (Bravo *et al.*, 2013; Bravo *et al.*, 2014, citado por GEP-MSESS, 2015; Bravo 2015a,b, 2016, 2017). Os estudos de opinião publicados (vide Sondagens do Instituto BBVA de Pensões, 2013-2017) mostram que a pensão de velhice paga pelos sistemas públicos é considerada insuficiente para garantir o nível de vida esperado na reforma pela maioria dos trabalhadores.

A diminuição das taxas de mortalidade, nomeadamente nas idades mais avançadas, repercute no equilíbrio dos planos de pensões com passivos contingentes à longevidade, na medida que, essas entidades necessitam de criar reservas ou fundos de modo a fazer face às suas responsabilidades, incluindo o requisito de capital de solvência (Solvência II). Este montante é constituído considerando os retornos esperados dos ativos alocados à respetiva responsabilidade e o número de pagamentos que serão feitos. Neste contexto, as tabelas de mortalidade assumem um papel preponderante na determinação do período durante o qual devem ser efetuados os pagamentos, sendo que estes são normalmente pagos até à morte do participante. Assim sendo, o acréscimo da longevidade implica, por sua vez, um aumento considerável, e de certo modo não antecipado, dos gastos associados às prestações de longo prazo, nomeadamente as anuidades.

Portanto, para as entidades com foco na cobertura de riscos associados à velhice, a identificação adequada de possíveis desvios entre os pressupostos da mortalidade e a realidade implícita garante a proteção e a continuidade dos benefícios de longo prazo. Todavia, os padrões demográficos futuros são incertos e difíceis de prever. O risco decorrente dessa incerteza representa o risco de longevidade.

## 1.2. ENQUADRAMENTO E IDENTIFICAÇÃO DO PROBLEMA

A mortalidade é tradicionalmente modelada de forma determinista, assumindo modelos analíticos adequadamente parametrizados, adotando tabelas de mortalidade ajustadas/ projetadas. Aqui, o termo "determinístico" significa que as tabelas de mortalidade projetadas são construídas e usadas sem contabilizar qualquer incerteza.

Desde que Gompertz publicou a sua lei da mortalidade em 1825, vários modelos têm sido propostos para a modelação da mortalidade. Uma visão abrangente sobre a modelação da mortalidade é dada em Bravo (2007) e Pitacco, Denuit, Haberman, & Olivieri (2009).

A primeira tentativa de modelação matemática da intensidade de mortes em termos dinâmicos foi realizada pelo Blaschke (1923), que considerou a chamada Lei dinâmica de Makeham. O modelo pressupõe que a intensidade de mortalidade é função não apenas da idade, mas também do tempo do calendário. O efeito da variável do tempo foi expresso no modelo através de uma função determinística.

O carácter incerto dos fenómenos relacionados com a mortalidade justifica a necessidade de aplicar os processos estocásticos na modelação, previsão e descrição do nível de mortalidade. Entre os modelos estocásticos para a previsão de mortalidade que são populares atualmente, existe o modelo Lee e Carter (1992).

No caso português, em Bravo (2007), desenvolveu-se as primeiras tábuas de mortalidade prospetivas para a população portuguesa, sustentadas numa abordagem longitudinal do estudo da mortalidade portuguesa.

Em Bravo, Coelho, & Magalhães (2010) mostraram que, embora as taxas de mortalidade por idade tenham diminuído em todas as idades, o ritmo de melhoria da mortalidade varia entre as idades e ao longo de períodos de tempo .

Bravo (2010) propôs um método próprio que tem como base o método de Lee & Carter e o uso das denominadas tabelas limite, em que as taxas de mortalidade previstas são delimitadas abaixo por uma tabela de vida limite para o qual convergem as futuras melhorias da mortalidade num determinado horizonte temporal.

A presença de alterações estruturais na tendência geral da evolução da mortalidade em Portugal, bem como em vários outros países europeus foi estudada em Coelho & Nunes (2011), o que levantou questões sobre porque tais mudanças ocorreram, e em particular se a eventual previsão dos efeitos de coorte na mortalidade foi a causa dessas alterações.

A análise dos resíduos do modelo de LC aplicado aos dados de mortalidade masculina portuguesa realizada em Coelho & Nunes (2013) sugere que influências específicas da idade não são totalmente capturadas pelo modelo, levando também à possibilidade de um efeito de coorte ainda não identificado no padrão temporal da mortalidade masculina em Portugal.

Apesar dos recentes estudos, relativos à projeção das taxas de mortalidade, em Portugal, as tabelas de mortalidade mais utilizadas no mercado no cálculo de responsabilidades, prémios e benefícios, são tabelas estáticas adotadas de outros países, nomeadamente, as francesas TV 73/77 e TV 88/90. A tábua de mortalidade TV 88/90 tem implícita uma esperança de vida aos 65 anos de 19,76 anos, enquanto que a TV 73/77 para a mortalidade dos homens tem associada uma esperança de vida aos 65 anos de 17,35 anos. São tabelas antigas e adaptadas à realidade de outros países, que têm uma esperança de vida aos 65 anos desajustadas à atual evolução da mortalidade portuguesa.

Segundo os dados das tabelas de mortalidade divulgadas pelo INE (2018) para o período de referência 2015 – 2017, a esperança de vida aos 65 anos de idade foi estimada em 17,55 anos para os homens e as mulheres poderão esperar viver mais 20,81 anos. Porém, convém realçar que a esperança média de vida aos 65 anos, por si só, não é um fator suficiente para a avaliação de uma tabela de mortalidade.

De acordo com as tabelas estáticas a probabilidade depende somente da idade biológica. O conceito de uma tabela de vida dinâmica procura resolver este problema analisando conjuntamente os dados de mortalidade correspondentes a uma série de anos consecutivos. Esta abordagem permite que a influência do efeito do calendário na mortalidade seja analisada. Por outro lado, as tabelas dinâmicas surgem como uma alternativa generalizada às tabelas estáticas, porém as tabelas de mortalidade

geracionais são ainda mais precisas, uma vez que, permitem incorporar a evolução da mortalidade ao longo do tempo para corresponder às mudanças nas taxas de mortalidade.

### **1.3. OBJETIVOS E CONTRIBUTOS DO TRABALHO**

O nosso trabalho consiste em avaliar o desempenho de diferentes modelos de projeção estocástica num contexto dinâmico na projeção da mortalidade com dados da população portuguesa desagregados por género. Iremos comparar os diferentes modelos selecionados, entre si, a fim de escolher os mais adequados para a projeção da mortalidade futura de Portugal.

Subsequentemente, pretende-se incorporar o(s) efeito(s) de coorte nos modelos de projeção e identificar a existência de efeito coorte, ou seja, gerações que compartilham as mesmas características, na mortalidade portuguesa.

E por último pretendemos, quantificar o risco longevidade, através da aplicação do modelo com melhor ajuste e com melhores resultados na projeção da mortalidade futura na avaliação de uma carteira de anuidades vida de um fundo pensões baseado no mercado português.

### **1.4. ORGANIZAÇÃO E ESTRUTURA DO TRABALHO**

O nosso estudo está dividido em 7 capítulos. No Capítulo 2 destacam-se os principais estudos referentes à projeção estocástica da mortalidade, assim como, os contributos e as fraquezas dos modelos apresentados.

O capítulo seguinte inclui a delimitação dos métodos utilizados no tratamento dos dados, calibração e projeção dos modelos, assim como a justificação da escolha dos mesmos.

O Capítulo 4 descreve detalhadamente os sete modelos de projeção de mortalidade empregues no decorrente estudo.

O ajustamento dos modelos aos dados da população portuguesa, as projeções das taxas futuras de mortalidade, assim como, a análise do impacto da incerteza nos parâmetros dos modelos, foram desenvolvidos no Capítulo 5.

No Capítulo 6 avaliamos o impacto do risco de longevidade num portfolio de anuidades de um fundo de pensões.

E por último, o Capítulo 7 discute as conclusões gerais e faz algumas recomendações.

## 2. REVISÃO DA LITERATURA

Uma das principais motivações para a construção de modelos estocásticos de projeção de mortalidade cada vez mais sofisticados é a percepção da importância do “efeito de coorte” nos dados históricos (Hunt & Blake, 2015). Os autores acreditam que a projeção dos parâmetros de coorte e de tempo são fundamentais para a gestão e securitização eficiente do risco de longevidade, logo para o desenvolvimento do mercado emergente de título vinculados à longevidade.

Nos últimos anos, tem havido um número crescente de estudos sobre como a mortalidade específica de uma geração impacta a evolução geral da mortalidade, nomeadamente em alguns países desenvolvidos. Os efeitos de coorte têm sido observados em diferentes populações, embora sejam mais proeminentes no Reino Unido, onde se identificaram coortes nascidas entre 1925 e 1935 que partilham as mesmas melhorias na mortalidade, de acordo com Willets (2004).

Muitos modelos de projeção de mortalidade têm sido propostos nos últimos anos, desde a introdução do modelo clássico de Lee - Carter em 1992. Os autores propuseram um modelo básico de séries temporais, puramente extrapolativo, ou seja, não incorpora quaisquer conhecimentos sobre influências médicas, comportamentais ou sociais, apenas considera o histórico dos dados. O modelo foi apresentado com sucesso para capturar a tendência na melhoria da mortalidade dos Estados Unidos durante o período de 1900 a 1989 por Lee e Carter em 1992. No entanto, testes realizados pelo grupo de trabalho CMI (2007) mostraram que projeções usando o modelo LC, com base em dados de 1992, não teriam funcionado tão bem nos últimos anos uma vez que seria difícil avaliar se os resultados recentes representariam uma mudança estrutural do passado, ou se as tendências a longo prazo persistiram e os resultados atuais foram distorcidos.

Renshaw e Haberman (2003) propuseram um modelo multi - período e apresentaram uma extensão do modelo clássico de LC (M1) com a introdução do efeito coorte em Renshaw & Haberman (2006). Para os países onde um efeito de coorte foi observado no passado, este modelo proporcionou uma melhoria significativa no ajuste aos dados históricos. No entanto, o grupo de trabalho CMI (2007) concluíram que o modelo de RH sofria de falta de robustez, isto é, que uma alteração no intervalo de idades usados para ajustar o modelo pode resultar num conjunto qualitativamente diferente de estimativas dos parâmetros. O CMI tentou ajustar este modelo e teve dificuldade em convergir para uma solução única. A aplicação direta de métodos numéricos para estimar parâmetros não foi um exercício trivial e o grupo de trabalho precisou de definir restrições sobre os parâmetros a estimar para obter soluções únicas.

Currie, Durban, & Eilers (2006) apresentaram uma simplificação do modelo de Renshaw-Haberman, que removia o problema de robustez, e eles introduziram o Spline<sup>1</sup> penalizado (P - Splines), de modo, a poderem suavizar e estimar os parâmetros. No entanto, a qualidade do ajuste foi menos significativa em comparação com o modelo de RH, e o problema com a estrutura de correlação trivial ainda permanecia (Plat, 2009).

Em Cairns, Blake, & Dowd (2006) foi proposto o modelo de dois fatores de efeito do período, a fim de superar o problema de que as taxas de mortalidade projetadas estariam perfeitamente correlacionadas em modelos de componentes únicas de idade e período. Este modelo é a alternativa mais popular na literatura ao modelo de Lee – Carter, em que, a idade é incluída no modelo como

---

<sup>1</sup> Spline são funções não paramétricas utilizadas para aproximar uma função por uma série de polinômios definidos em segmentos, cujos extremos são denominados por nós (Currie, 2006). O spline penalizado (P-spline) faz parte da família de splines de interpolação (passam por todos os pontos de controlo). As splines interpolativas correspondem a cada segmento dos dados a uma curva contínua definida por um conjunto de polinômios. P-splines introduz uma penalidade por falta de suavidade e o pesquisador pode equilibrar entre o ajuste para os dados e a suavidade.

uma variável independente. O principal pressuposto é que os efeitos relacionados com idade e período são respectivamente diferentes e ambos afetam as taxas de mortalidade futuras. O modelo remove a dependência do efeito da idade e assume uma parametrização mais simples para a componente idade nas interações com o efeito de período.

Cairns et al. (2009) apresentaram uma extensão do modelo original de CBD que incorporava o efeito de coorte. Os autores demonstram que a inclusão de um efeito de coorte podia fornecer um melhor ajuste, usando dados de Inglaterra, País de Gales e Estados Unidos.

Para além do modelo com efeito de coorte, outras generalizações do modelo original de CBD, foram desenvolvidas em 2009 pelos mesmos autores. Um modelo onde adicionaram um termo quadrático no efeito de idade, de modo, a incluir alguma possível curvatura no logit da probabilidade de morte em relação à idade e ao período de tempo. E outra generalização do modelo de CBD, justificada pela possibilidade de o efeito de coorte ser uma função decrescente da idade (Cairns et al., 2009). Todos esses modelos possuem múltiplos fatores, resultando numa estrutura de correlação não trivial que espelha a realidade de que as melhorias nas taxas de mortalidade são diferentes para diferentes faixas etárias.

Os modelos de CBD têm sido amplamente adotados na investigação de questões relacionadas com a cobertura e securitização do risco associado à longevidade (Cairns et al., 2006; Wang, 2007). Todavia, o fato desses modelos terem sido projetados para idades mais elevadas e, portanto, terem ignorado a modelação nas idades mais jovens, faz com que seja a sua principal adversidade. No entanto em Cairns et al. (2009) argumentaram o foco nas idades mais avançadas com o custo associado à mortalidade nesta faixa etária. O uso desses modelos em todas as idades, resultam num ajuste com uma qualidade relativamente fraca e em projeções biologicamente discutíveis (O'Hare & Li, 2012).

Plat introduziu um novo modelo APC fazendo uso de ambas as famílias de modelos de projeção, Lee & Carter e CBD. O modelo apresentado em Plat (2009) combina recursos dos dois modelos, ao mesmo tempo que pretende eliminar as respetivas limitações mencionadas anteriormente. A inovação no modelo de Plat foi então adicionar um outro fator de período, que afeta apenas as idades mais jovens e formulado para permitir que o modelo se encaixe em toda a faixa etária. No entanto, quando a faixa etária é ampliada para permitir as características não-lineares da experiência de mortalidade jovem, os resultados não são satisfatórios (O'Hare & Li, 2012).

Em 2011 Renshaw e Haberman para projetar a mortalidade, ajustaram um passeio aleatório multivariado com tendência para todos os efeitos do período. Eles argumentaram que a extrapolação do efeito de coorte devia ser evitada, porque não há justificações para tratar o efeito da coorte e o efeito do período de forma independente. Portanto, eles concentraram-se na modelação dos valores de expectativa de vida e anuidade para as coortes existentes (Renshaw & Haberman, 2011).

Por último, O'Hare e Li (2012) introduziram um modelo que foi aplicado aos dados de uma variedade de países desenvolvidos desde 1950 a 2006. O modelo proposto é uma modificação do modelo de Plat e, portanto, eles utilizaram as mesmas especificações ARIMA que Plat tinha utilizado em 2009: um passeio com tendência foi usado para o efeito do período principal, os processos de reversão esperada com média não zero foram utilizados para os efeitos do período restantes e um processo de reversão média com média nula foi usado para o efeito de coorte.

Para além dos modelos ARIMA, o modelo de mudança estrutural foi proposto para levar em consideração o comportamento de mudança de tendência do efeito do período (Coelho & Nunes, 2011; J. S. Li, Chan, & Cheung, 2011; van Berkum, Antonio, & Vellekoop, 2014).

Em Coelho & Nunes (2013) foram realizados os mesmos testes de alteração de estrutura para a população masculina portuguesa entre 1950 e 2007, mas agora aplicado ao efeito do período proveniente do modelo de RH e notou-se que, já não havia evidências de mudanças estruturais. O

que levou a suspeitar que uma má especificação do modelo, inicialmente estimada com o modelo de LC, poderia ter levado a mudanças estruturais espúrias encontradas na tendência de mortalidade, portanto uma possível existência de efeito de coorte na mortalidade masculina portuguesa. Os autores alargaram a análise a outros países europeus e chegaram à mesma conclusão. No entanto, a consequência de introduzir períodos anteriores que exibem volatilidade significativa na mortalidade, que pode ser atribuída a alguns eventos críticos para a vida, como guerras e epidemias, ainda não está a ser investigada.

Em Hunt & Blake (2014), os autores apresentaram um procedimento geral para a construção de modelos APC, que possa capturar toda a informação importante existente nos dados. Eles propuseram um procedimento geral para a construção de modelos de mortalidade, usando uma combinação de um conjunto de algoritmos iterativos e julgamento especializado. No entanto, este procedimento não permite lidar com a informação limitada existente, relativamente, às coortes mais recentes. As características espúrias observadas na terna idade, podem conduzir a projeções pouco razoáveis destas gerações nas idades futuras, como mostrado em Cairns et al. (2011).

No ano seguinte, os mesmos autores, em Hunt & Blake (2015) reouberam a estrutura dos modelos de mortalidade e descreveram uma estrutura de modelo APC que engloba a grande maioria dos modelos de mortalidade estocástica.

Currie (2016) mostrou que muitos modelos de mortalidade podem ser expressos em termos de modelos lineares generalizados ou modelos não lineares generalizados.

O nosso trabalho fundamenta-se nestes dois últimos estudos referidos, complementado pelo trabalho desenvolvido em Villegas et al. (2015).

No capítulo 4, especificaremos o conjunto de modelos selecionados, cuja escolha deveu-se aos resultados satisfatórios apresentados em trabalhos anteriores, tanto na projeção da mortalidade em idades avançadas da população portuguesa, como de outros países.

### 3. METODOLOGIA

Após a revisão do estado da arte da projeção estocástica da mortalidade, limitamos o nosso estudo a métodos extrapolativos, nomeadamente à estrutura de modelos GAPC apresentado em Villegas et al. (2015). Muitos dos Institutos Nacionais de Estatística na Europa utilizam métodos extrapolativos, nomeadamente Portugal, onde aplica-se o modelo Poisson Lee & Carter (Instituto Nacional de Estatística, 2014).

A nossa escolha incide-se sobre os métodos extrapolativos, em detrimento, dos métodos explicativos, porque estes assentam-se em opiniões subjetivas de especialistas. No entanto, os extrapolativos apoiam-se na projeção das tendências históricas da mortalidade no futuro, portanto, as projeções só são fidedignas se for possível prolongar as condições que levaram a mudanças nas taxas de mortalidade no passado a terem um impacto similar no futuro. Assim sendo, alterações inesperadas na evolução da mortalidade, devido a avanços na medicina ou surgimento de novas doenças podem invalidar os resultados de uma projeção extrapolativa.

Os sete modelos sobre os quais aplicaremos aos dados portugueses, separadamente para ambos os sexos, são: modelo de Lee Carter Poisson log-bilinear, extensão de LC com efeito de coorte, Modelo APC, o modelo original de Cairns-Blake-Down, modelo de CBD com efeito de coorte e a extensão com o parâmetro quadrático de idade e modelo de PLAT. Escolhemos os modelos da família de Lee & Carter, uma vez que, o Instituto Nacional de Estatística utiliza atualmente o Modelo Poisson Lee & Carter e pela performance já verificada em estudo anteriores com dados da população Portuguesa. Por outro lado, a estrutura de modelos de CBD foram projetados para idades mais avançadas e tem por base a gestão do risco de longevidade, daí se deve a nossa escolha nestes modelos. E por último, incluímos as generalizações com efeito de coorte, visto que, pretendemos averiguar a existência de um efeito geracional na população portuguesa.

#### 3.1. DATA

Os dados são provenientes do Human Mortality Database ([www.mortality.org](http://www.mortality.org)) e correspondem às taxas brutas de mortalidade da população Portuguesa, que representam a razão entre o número de óbitos (total num certo intervalo de tempo) e uma estimativa da população exposta ao risco no mesmo intervalo de idade - tempo. Estão disponíveis dados relativos ao período de 1940 a 2015, por idade, dos 0 aos 110 anos, e por ano de nascimento para homens e mulheres separadamente.

De acordo com o INE, dados demográficos antes dos anos 80 são marcados por irregularidades e inesperados picos, devido aos vários eventos socioeconómicos que ocorreram no país e no mundo antes de 1980, como guerras, grandes fluxos de migrações e instabilidade política, portanto, reduzimos o nosso período de estudo para desde de 1980 a 2015.

Visto que, procuramos aferir o impacto do risco de longevidade de anuidades de títulos vinculados à mortalidade esperada, concentrámo-nos na projeção da mortalidade nas idades mais avançadas, nomeadamente, dos 55 anos 90 anos, o que engloba a geração nascida entre 1890 e 1950. Adicionalmente, a natureza da mortalidade infantil é bastante diferente da mortalidade adulta e, considerando os níveis atuais de mortalidade baixos até os 60 anos, Jarner and Kryger (2011) defenderam que, as melhorias na longevidade serão impulsionadas quase exclusivamente pelo desenvolvimento da mortalidade na velhice.

#### 3.2. CALIBRAÇÃO DOS MODELOS E ANÁLISE DA QUALIDADE DO AJUSTE

No intuito de ajustar os modelos supra indicados, iremos aplicar um procedimento de verificação à posteriori – *Backtesting*. Assim sendo, dividiremos a base de dados em dois períodos, em que o primeiro período será utilizado para ajustar cada um dos modelos aos dados de mortalidade

portuguesa, denominado de “*Data Training*”, referente a 1980 - 2010; e o último período será utilizado para efeitos de comparação com os valores projetados dos nossos modelos, conhecido como, “*Data Test*”, relativo a 2010 - 2015.

Para o processo de calibração utilizaremos o pacote StMoMo disponível no software de linguagem de programação gratuita R, apresentado recentemente por Villegas que analisa a estrutura unificadora da família de modelos APC (Villegas et al., 2015). No software R existem outros pacotes disponíveis para a modelação da mortalidade, porém a nossa escolha recaiu-se sobre o StMoMo devido ao número de modelos já disponíveis no pacote, e também, à possibilidade de adicionar mais modelos facilmente.

A avaliação da qualidade do ajuste dos modelos proposto será feita através da análise dos resíduos dos modelos, isto é, o desvio residual entre os dados observados e os ajustados, que depende do pressuposto da distribuição do número de mortes do respetivo modelo.

Para a seleção do modelo, também teremos em consideração o número de parâmetros utilizados por cada um. Porém, normalmente, quanto maior o número de parâmetros melhor o ajuste. Para resolver esta conjuntura, utilizaremos os Critérios de informação Akaike (Akaike, 1974) - AIC e Bayesiano (Schwarz, 1978) - BIC para penalizar os modelos com mais parâmetros.

### **3.3. PROJEÇÃO E VALIDAÇÃO DO PODER PREDITIVO**

Para cada um dos modelos, a projeção das taxas futuras de mortalidade além do período estimado, será realizada: inicialmente, ajustando um modelo ARIMA à série de parâmetros temporais, sejam eles referentes a períodos ou a coortes. Aplicaremos no software R a função *auto.arima* do package *forecast* (Hyndman, 2018), que seleciona o modelo mais adequado de acordo com o valor de AIC ou BIC. Posteriormente, os parâmetros serão projetados para os próximos 50 anos. Ao longo deste processo os parâmetros dependentes da idade permanecem fixos. E por último, para determinar a previsão das probabilidades de morte, substituímos no modelo os índices temporais pelos valores projetados e os restantes parâmetros pelos valores estimados. No presente estudo, concentramos em projeções de horizonte relativamente longo, porque é com a precisão dessas previsões que as entidades com foco na cobertura do risco de longevidade estão principalmente interessadas.

Para efeitos de comparação usaremos o mesmo período histórico para todos os modelos, assim como, a mesma última observação para iniciar a projeção (*jump – off rates*). A validação do poder preditivo será feita através da mensuração do desvio entre os valores observados e os valores projetados entre o período de 2010 a 2015. Consideramos as medidas de precisão mais utilizadas: o Erro Médio Percentual Absoluto e o Erro Quadrático médio.

Adicionalmente, avaliaremos o impacto da incerteza nos parâmetros estimados, através da aplicação do método de *Bootstrap sobre os resíduos*.

Por último, concentraremos na análise do efeito do aumento das taxas de mortalidade na avaliação de uma carteira de anuidades vida, através da quantificação do Valor em Risco e Valor em Risco Condicional.

## 4. MODELOS DE MORTALIDADE ESTOCÁSTICA GENERALIZADA DE IDADE-PERÍODO-COORTE

Desde a apresentação do modelo de Lee & Carter, existe uma aceitação generalizada dos principais modelos estocásticos, onde o modelo LC é usado como uma metodologia de referência, tanto por diversos institutos estatísticos/ demográficos, assim como na literatura, onde foram propostas várias extensões do modelo, vide Tabela 4.1.

Tabela 4.1- Principais Modelos de Projeção Estocástica. Fonte: Autor.

Modelo	Especificação	Autores
M1 or LC	$\log m_{x,t} = \alpha_x + \beta_x^{(1)} k_t$	Lee and Carter (1992)
M2 or RH	$\log m_{x,t} = \alpha_x + \beta_x^{(1)} k_t + \beta_x^{(2)} Y_{t-x}$	Renshaw and Haberman (2006)
M3 or APC	$\log m_{x,t} = \alpha_x + k_t + Y_{t-x}$	Currie (2006)
M4	$\log m_{x,t} = \sum_{i,j} \theta_{i,j} B_{i,j}^{aj}(x; t)$	Currie et al. (2004)
M5 or CBD	$\text{logit } q_{x,t} = k_t^{(1)} + k_t^{(2)}(x - \bar{x})$	Cairns et al. (2006)
M6	$\text{logit } q_{x,t} = k_t^{(1)} + k_t^{(2)}(x - \bar{x}) + Y_{t-x}$	Cairns et al. (2009)
M7	$\text{logit } q_{x,t} = k_t^{(1)} + k_t^{(2)}(x - \bar{x}) + k_t^{(3)}((x - \bar{x})^2 - \hat{\sigma}_x^2) + Y_{t-x}$	Cairns et al. (2009)
M8	$\text{logit } q_{x,t} = k_t^{(1)} + k_t^{(2)}(x - \bar{x}) + Y_{t-x}(x_c - x)$	Cairns et al. (2009)
M9	$\log m_{x,t} = \alpha_x + k_t^{(1)} + k_t^{(2)}(x - \bar{x}) + k_t^{(3)}(x - \bar{x})^+ + Y_{t-x}$	Plat (2009)
M10	$\log m_{x,t} = \alpha_x + k_t^{(1)} + k_t^{(2)}(x - \bar{x}) + k_t^{(3)}(x - \bar{x})^+$	Haberman and Renshaw (2011)
M11	$\log m_{x,t} = \alpha_x + k_t^{(1)} + k_t^{(2)}(x - \bar{x}) + k_t^{(3)}(x - \bar{x})^+ + k_t^{(4)}b(x) + Y_{t-x}$	Haberman and Renshaw (2011)
M12	$\log m_{x,t} = \alpha_x + k_t^{(1)} + k_t^{(2)}(x - \bar{x}) + k_t^{(3)}(x - \bar{x})^+ + Y_{t-x}(x_c - x)$	Haberman and Renshaw (2011)
M13	$\log m_{x,t} = \alpha_x + k_t^{(1)} + k_t^{(2)}(x - \bar{x}) + k_t^{(3)}c(x) + Y_{t-x}$	O'Hare and Li (2011)

Por convenção a notação utilizada em todos os modelos é a seguinte:

- $m_{x,t}$  representa a taxa de mortalidade central, que é definida como o número total de pessoas com idade  $x$  que morreram durante o ano  $t$ , dividido pelo número de pessoas, do mesmo grupo etário, expostas ao risco durante o ano  $t$ .
- $\alpha_x$  constitui um vetor de constantes específicos para cada uma das idades, independente do fator tempo; define, para cada idade, o nível médio das taxas de mortalidade no tempo.
- os parâmetros  $\beta_x$  indicam a tendência da mortalidade à idade  $x$  em resposta a mudanças no parâmetro  $k_t$ , isto é, representa o quão rapidamente ou lentamente a mortalidade em cada idade varia quando o índice de mortalidade muda, dizendo quais taxas declinam rapidamente e quais declinam lentamente.
- $k_t$  descreve a tendência temporal da mortalidade. Se  $k_t$  diminui, a mortalidade melhora, se aumenta piora.
- $\gamma_{t-x}$  captura os efeitos que poderiam ser atribuídos ao ano de nascimento ( $t-x$ ).

Muitos dos modelos estocásticos apresentados na literatura pertencem à classe dos modelos de mortalidade GAPC, onde assumimos que os índices de período  $k_t^{(i)}$ ,  $i = 1, \dots, N$  e o índice de coorte  $\gamma_{t-x}$  são processos estocásticos. Esta é a característica chave que permite a projeção estocástica dos modelos GAPC e, assim, a projeção probabilística das taxas futuras de mortalidade. Esta estrutura de modelos, também, é caracterizada por 4 componentes (Villegas et al., 2015).

1. A componente aleatória:  $D_{x,t}$  corresponde ao número de mortes ocorridos durante o ano civil  $t$  com idade  $x$ , e assume uma distribuição Binomial ou de Poisson:

$$D_{x,t} \sim \text{Binomial}(E^0_{x,t}, q_{x,t})$$

ou

$$D_{x,t} \sim \text{Poisson}(E^c_{x,t} \mu_{x,t})$$

onde:

- $E^c_{x,t}$ , corresponde ao número médio de indivíduos de idade  $x$  expostos (centralmente) ao risco de morte no ano  $t$ ; e  $E^0_{x,t}$  reflete a exposição inicial ao risco que é determinada de acordo com a aproximação:

$$E^0_{x,t} \approx E^c_{x,t} + \frac{1}{2} D_{x,t} \quad (4.1)$$

- $\mu_{x,t}$ , representa a força de mortalidade (*hazard rate*) que é a taxa instantânea de transição de vivo a morto; sob a hipótese de que a força de mortalidade é constante entre a idade  $x$  e  $x + 1$  para o ano de calendário  $t$  para  $t + 1$ , e que a população é estacionária, a força de mortalidade e a taxa de mortalidade central coincidem.
- $q_{x,t}$ , equivale à probabilidade de um indivíduo de idade  $x$  vir a morrer durante um dado período, geralmente um ano; considerando as hipóteses assumidas, a sua relação com  $\mu_{x,t}$  é dada por:

$$q_{x,t} = 1 - \exp(-\mu_{x,t}) \approx 1 - \exp(-m_{x,t}) \quad (4.2)$$

2. A componente sistemática é uma função de idades, períodos e coortes de uma população (Hunt e Blake, 2015). A estrutura do denominador, preditor  $\eta_{x,t}$  é dada pela seguinte fórmula:

$$\eta_{x,t} = \alpha_x + \sum_{i=1}^N \beta_x^{(i)} k_t^{(i)} + \beta_x^{(0)} \gamma_{t-x}, (x = 1, 2, \dots, X) \quad (4.3)$$

em que,  $N \geq 0$  assume um número inteiro e denota o número de termos idade – período que descrevem a tendência da mortalidade

3. A função *link*  $f$  conecta os dados observados e a estrutura proposta do preditor  $\eta_{x,t}$ , tal que:

$$f\left(E\left(\frac{D_{x,t}}{E_{x,t}}\right)\right) = \eta_{x,t} \quad (4.4)$$

A função logarítmica das taxas centrais de mortalidade é conhecida como função canônica juntamente com a distribuição de Poisson com a função de link log e a distribuição Binomial com a função de link logit para as taxas iniciais de mortalidade.<sup>2</sup>

4. Restrições sobre os parâmetros. A identificabilidade é um problema presente em vários modelos estocásticos. Para resolver esta questão, são impostas restrições sobre os parâmetros do modelo. A seguir faremos uma análise mais detalhada para cada um dos modelos sobre o qual incidir-se-ão o nosso estudo, onde desenvolveremos em pormenor este ponto.

#### 4.1. MODELO DE LEE E CARTER

A metodologia de LC para a previsão das taxas de mortalidade baseia-se num modelo log – bilinear simples nas variáveis  $x$  (idade) e  $t$  (ano civil), na medida que, adiciona uma interação multiplicativa entre as dimensões demográficas que afetam a mortalidade.

A especificação do modelo é dada por:

$$\log m_{x,t} = \alpha_x + \beta_x k_t + \varepsilon_{x,t} \quad (4.5)$$

O termo de erro  $\varepsilon_{x,t}$  com média 0 e variância  $\sigma^2$ , reflete os efeitos não capturadas pelo modelo.

Assim, o método LC pressupõe a ausência de interações de idade e tempo. Isto é,  $\beta_x$  é fixo ao longo do tempo para qualquer idade  $x$  e  $k_t$  é fixo por grupos etários para todos os anos. O modelo não inclui nenhum pressuposto sobre a natureza da tendência de  $k_t$ . Currie (2016) classificou o modelo dentro da família de modelos generalizados não lineares, devido à presença do termo  $\beta_x k_t$ . Sob a dinâmica descrita acima, é claro que o modelo não é identificável, isto é, o modelo tem um número infinito de possíveis soluções. Para verificar isso, considere as seguintes transformações simples:

$$\begin{aligned} \beta'_x &= c\beta_x & k'_t &= k_t/c & \forall c \in \mathbb{R}, c \neq 0 \\ \alpha'_x &= \alpha_x - c\beta_x & k'_t &= k_t + c & \forall c \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (4.6)$$

É claro que se considerarmos,  $\beta'_x$ ,  $k'_t$  e  $\alpha'_x$  na equação 4.6, irá resultar em valores estimados iguais para  $\log m_{x,t}$ , o que significa que diferentes parametrizações podem conduzir a valores iguais do log da taxa central de morte. Para evitar tais problemas, Lee e Carter (1992) sugeriram as seguintes condições adicionais sobre os parâmetros:

$$\sum_{x=0}^X \beta_x = 1, \sum_{t=0}^T k_t = 0 \quad (4.7)$$

<sup>2</sup> Para mais detalhes ver (Currie, 2016).

Como os parâmetros  $\beta_x$ 's são controladas para que a soma seja unitária e não são todos iguais, evita que as taxas de mortalidade variem na mesma proporção. Se  $\beta_x$  é particularmente alta para alguma idade  $x$ , então significa que a taxa de mortalidade melhora mais rapidamente nesta idade do que em geral. Se é negativa em algumas idades, isso significaria que a mortalidade está a agravar naquelas idades.

Devido às restrições sobre os parâmetros, os autores sugeriram a estimação dos parâmetros  $\beta_x$  e  $k_t$ , via a Decomposição em Valores Singulares (SVD) da matriz dos logaritmos das taxas de mortalidade específicas por grupos etários centradas em torno da média, em detrimento, da estimação por máxima verosimilhança ou métodos dos mínimos quadrados, uma vez que, produzem resultados mais pobres.

A estimação de  $\alpha_x$  é dada pelo logaritmo da média geométrica das taxas centrais de mortalidade, ao longo do tempo  $t$ , para cada idade  $x$ :

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \log(m_{x,t}) \quad (4.8)$$

Depois aplica-se o SVD à matriz  $Z_{x,t}$ :

$$Z_{x,t} = \log(m_{x,t}) - \hat{\alpha}_x = \beta_x k_t \quad (4.9)$$

que decompõe a matriz  $Z_{x,t}$  num produto de três matrizes:

$$SVDZ_{x,t} = ULV' = L_1 U_{x_1} V_{t_1} + \dots + L_X U_{x_X} V_{t_X} \quad (4.10)$$

Em que,  $U$  representa o termo idade,  $L$  é o valor singular, e  $V$  a componente tempo. Os coeficientes são determinados a partir de:

$$\hat{\beta}_x = U_{x_1} \text{ e } \hat{k}_t = L_1 V_{t_1} \quad (4.11)$$

Visto que a primeira estimação de  $k_t$  é baseada nos logaritmos das taxas centrais de mortalidade ao invés das correspondentes taxas de mortalidade, podem conduzir a diferenças entre o valor observado e o previsto consideráveis. Deste modo, Lee e Carter sugerem a reestimação dos  $k_t$ 's, mas desta vez, considerando os valores já estimados dos parâmetros  $\alpha_x$ 's e  $\beta_x$ 's. A reestimação do nível de mortalidade é resolvida, em relação a  $k_t$ , tal que:

$$D_t = \sum_x \{ \exp(\alpha_x + \beta_x k_t) E_{x,t} \}, \quad (4.12)$$

Isto é, garante que os períodos ajustados, ao longo dos anos da amostra, irão reconciliar o número total de mortes e as distribuições etárias da população.

A projeção do modelo assenta-se na aplicação da metodologia ARIMA, desenvolvida por Box e Jenkins em 1976, à série temporal correspondente ao nível de mortalidade. Para que tal, seja possível, a série temporal do nível de mortalidade deve ser estacionária, ou seja, a média, variância e autocovariâncias não devem depender do tempo. A projeção da mortalidade é reduzida à previsão do índice de mortalidade. No entanto, a mortalidade em função de uma única tendência temporal também implica uma correlação perfeita entre as variações na mortalidade em todas as idades, ou seja,

$$Cor = \alpha_{x_1} + \beta_{x_1} k_t \alpha_{x_2} + \beta_{x_2} k_t = 1, \forall x_1, x_2 \quad (4.13)$$

o que não é biologicamente possível.

Nos últimos anos, para a identificação da ordem dos parâmetros autorregressivos (p) e/ou média móvel (q) e/ou diferenciação (d) dos modelos ARIMA, muitos estudos têm preferido os critérios de informação, nomeadamente o FPE (Final Prediction Error), o AIC (Akaike Information Criterion) e o BIC (Bayesian Information Criterion). Porém os autores, e outros estudos posteriores (e.g., Alho, Bravo & Palmer, 2012; Bravo & Freitas, 2018), recomendam a utilização de um passeio aleatório com tendência para a modelação de  $k_t$  :

$$k_t = k_{t-1} + d + e_t \quad (4.14)$$

Onde  $d$  é parâmetro da tendência que mede a variação média anual na série, e  $e_t$  é o erro.

Após a escolha do modelo ARIMA,  $k_t$  é extrapolado através do modelo para obter a previsões futuras das taxas de mortalidade.

## 4.2. MODELO DE LEE E CARTER SOBRE DISTRIBUIÇÃO POISSON

Uma das desvantagens do método dos mínimos quadrados estimado pelo SVD é que se pressupõe que os erros são homocedásticos, isto é, condicional às variáveis explicativas - a variância do erro é constante. Neste sentido, Brouhns, Denuit, & Vermunt (2002) apresentaram uma extensão do modelo de LC onde assumem que o número de mortes  $D_{t,x}$  segue uma distribuição de Poisson (o que é intrinsecamente heterocedástico) com média  $E_{t,x}\mu_{x,t}$ . O modelo pressupõe que a força de mortalidade é constante dentro dos intervalos de idade e tempo, isto é,

$$\mu_{x+\varepsilon,t+\tau} = \mu_{x,t}, \text{ para } 0 \leq \varepsilon, \tau \leq 1 \quad (4.15)$$

$$\mu_{x,t} = \exp(\alpha_x + \beta_x k_t)$$

Os parâmetros do modelo continuam sujeitos às mesmas restrições que o modelo de LC original. Relativamente à estimação é feita pela maximização do logaritmo da função de verosimilhança:

$$L(\alpha, \beta, k) = \sum_{x,t} \{D_{x,t} \log(m_{x,t} E_{x,t}) - E_{x,t} \exp(\alpha_x + \beta_x k_t) - \log(D_{x,t}!)\} \quad (4.16)$$

onde  $\alpha = \min(\alpha_{x_{min}}, \dots, \alpha_{x_{max}})$ ,  $\beta = \min(\beta_{x_{min}}, \dots, \beta_{x_{max}})$ ,  $k = \min(k_{x_{min}}, \dots, k_{x_{max}})$  e  $c$  uma constante.

A Estimativa de Máxima Verossimilhança (MLE) permite erros heterocedásticos não-aditivos (Haberman & Renshaw, 2003) e evita a suposição de erros com variância constante presente na abordagem SVD. Todavia, o termo  $\beta_x k_t$  não permite a linearidade, portanto, não é possível uma abordagem analítica na estimação dos parâmetros e o cálculo de intervalos de previsão não é acessível. Deste modo, os autores recorreram a uma abordagem de simulação, nomeadamente, o algoritmo iterativo desenvolvido por Goodman (1979) baseado no algoritmo de Newton-Raphson.

Ao contrário do modelo de LC, não há a necessidade de reestimar a componente  $k_t$  uma vez que o modelo se aplica diretamente ao número de mortes. Convém realçar que o modelo original de LC, por si só, não pertence à família de modelos GAPC.

## 4.3. MODELO DE LEE E CARTER COM EFEITO DE CORTE

Renshaw e Haberman (2006) introduziram o efeito de coorte no modelo de LC para capturar a mudança de mortalidade em relação ao ano de nascimento,

$$\log m_{x,t} = \alpha_x + \beta_x^{(0)} k_t + \beta_x^{(1)} \gamma_{t-x} + \varepsilon_{x,t} \quad (4.17)$$

Onde  $\gamma_{t-x}$  representa o efeito de coorte aleatório que, por sua vez, é uma função do ano de nascimento, e  $\beta_x^{(1)}$  avalia a correspondente iteração com a idade.

Assim como, o modelo de LC, este modelo APC obriga à imposição de mais restrições, devido à ausência de uma solução única, para além das restrições apresentadas (4.7):

$$\sum_{x=0}^x \beta_x^{(1)} = 1, \sum_{x,t}^{x,T} \gamma_{t-x} = 0 \quad (4.18)$$

A restrição sobre o efeito de coorte garante que a estimação de  $\alpha_x$  continue a ser determinada pela média do logaritmo da taxa central de mortalidade ao longo do tempo, segundo Haberman & Renshaw (2006).

A estimação do modelo de LC com efeito de coorte não é direta. Originalmente os autores utilizaram a condição:

$$\hat{\alpha} = n_y^{-1} \sum_{t_1}^{t_n} \log\left(\frac{D_{x,t}}{E_{x,t}}\right) \quad (4.19)$$

e os restantes parâmetros foram determinados a partir de um processo iterativo, condicionados ao valor estimado do parâmetro de idade. Cairns et al. (2009) também tiveram problemas de lenta convergência ao estimar os parâmetros do modelo de RH, o que conduziu a um maior custo computacional ao utilizar o valor estimado de  $\alpha_x$  proposto em Haberman & Renshaw (2006) como valor inicial. No presente estudo para combater a questão da convergência dos parâmetros vamos utilizar os parâmetros estimados no modelo LC Poisson como valores iniciais, tal como, sugerido em Villegas et al. (2015).

#### 4.4. MODELO APC – AGE PERIOD COHORT

A componente sistemática do modelo simples de APC é, um caso particular, do modelo de RH, considerando  $\beta_x^{(0)} = \beta_x^{(1)} = 1$ :

$$\log m_{x,t} = \alpha_x + k_t + \gamma_{t-x} + \varepsilon_{x,t} \quad (4.20)$$

Currie (2006) sugeriu que o modelo fosse ajustado por P-splines, procedimento desenvolvido em Currie (2004). Porém, esta metodologia não permite a criação de passeios aleatórios, que por sua vez, é uma das principais características de qualquer modelo estocástico. No presente estudo vamos abordar a metodologia apresentada em Cairns et al. (2009) para a estimação dos parâmetros.

O modelo não é identificável para as seguintes transformações:

$$\begin{aligned} (\alpha_x, k_t, \gamma_{t-x}) &\rightarrow (\alpha_x + \phi_1 - \phi_2 x, k_t + \phi_2 t, \gamma_{t-x} - \phi_1 - \phi_2(t-x)) \\ (\alpha_x, k_t, \gamma_{t-x}) &\rightarrow (\alpha_x + c_1, k_t - c_1, \gamma_{t-x}) \end{aligned} \quad (4.21)$$

Para garantir uma solução única o autor propôs as seguintes restrições sobre os parâmetros:

$$\sum_{t=0}^T k_t = 0, \sum_{x,t}^{x,T} \gamma_{t-x} = 0, \sum_{x,t}^{x,T} (t-x)\gamma_{t-x} = 0, \quad (4.22)$$

onde as duas últimas restrições implicam que o efeito de coorte flutua em torno de zero sem nenhuma tendência linear perceptível (Villegas et al., 2015).

#### 4.5. MODELOS DE CAIRNS - BLAKE - DOWN

Em Cairns et al. (2006) verificaram, para dados de Inglaterra, País de Gales e Estados Unidos, que o efeito de coorte ajustado aparentava ter uma tendência no ano de nascimento, o que lhes levou a sugerir que, para além de tentar capturar o efeito de coorte nos dados, o efeito de coorte compensava a falta de um segundo efeito idade-período. Os autores apresentaram um modelo de dois fatores em que, utilizaram a inversa da função logística – o logit, em detrimento, do logaritmo da taxa de mortalidade central:

$$\text{logit } q_{x,t} = k_t^{(1)} + k_t^{(2)}(x - \bar{x}) \quad (4.23)$$

O logit da probabilidade de morte específica por idade é modelado como uma função linear da idade  $x$ , deste modo, a idade é tratada como uma variável explicativa, em que,  $\bar{x}$  representa a idade média no intervalo da amostra e  $\text{logit}(q_{x,t}) = \log\left(\frac{q_{x,t}}{p_{x,t}}\right)$ , em que,  $p_{x,t}$  corresponde à probabilidade de sobrevivência. Os efeitos de período  $k_t^{(1)}$  e  $k_t^{(2)}$  são processos estocásticos. Além disso, o índice de tempo  $k_t^{(1)}$  é o intercepto do modelo, que afeta todas as idades da mesma forma e representa o nível de mortalidade ao longo do tempo. Por outro lado, o índice de tempo  $k_t^{(2)}$  representa a inclinação do modelo: cada idade é afetada de forma distinta por este parâmetro.

Os fatores de período seguem um passeio aleatório bidimensional com tendência, isto é,

$$k_{t+1} = k_t + \mu + CZ(t + 1) \quad (4.24)$$

Onde  $k_t = (k_t^{(1)}, k_t^{(2)})'$ ,  $\mu = (\mu_1, \mu_2)'$  é um vetor constante  $2 \times 1$ ,  $C$  é uma matriz triangular superior constante  $2 \times 2$ , e  $Z(t)$  é um vetor aleatório com distribuição normal padrão  $N \sim (0, 1)$ .

A especificação do modelo não apresenta quaisquer problemas de identificação, por isso, não é necessário definir quaisquer restrições sobre os parâmetros. No entanto requer hipóteses de covariância entre os componentes da série temporal.

O modelo original de CBD satisfaz a propriedade de “*new data invariant*”, isto é, a adição de novos dados não terá quaisquer efeitos sobre os parâmetros que já estão estimados, isto acontece devido à inexistência de restrições sobre os parâmetros do modelo.

Uma extensão do modelo com efeito coorte foi estudada em Cairns et al. (2009). Mas não assumiram qualquer suavização no efeito de coorte. Este modelo postula que o logit da taxa de mortalidade  $q_x(t)$  satisfaz:

$$\text{logit } q_{x,t} = k_t^{(1)} + k_t^{(2)}(x - \bar{x}) + Y_{t-x} \quad (4.25)$$

Ainda em 2009, Cairns et al. desenvolveram uma segunda generalização do modelo original, que inclui um termo quadrático para a idade, para além, da componente do efeito de coorte:

$$\text{logit } q_{x,t} = k_t^{(1)} + k_t^{(2)}(x - \bar{x}) + k_t^{(3)}((x - \bar{x})^2 - \hat{\sigma}_x^2) + Y_{t-x} \quad (4.26)$$

onde as componentes do efeito de período  $k_t$  seguem um passeio aleatório tridimensional com tendência e  $\hat{\sigma}_x^2$  é a média de  $(x - \bar{x})^2$ .

O modelo é considerado invariante, relativamente, às seguintes transformações:

$$\begin{aligned} (k_t^{(1)}, k_t^{(2)}, k_t^{(3)}, Y_{t-x}) &\rightarrow (k_t^{(1)} + \phi_1 + \phi_2(t - \bar{x}) + \phi_3((t - \bar{x})^2 + \hat{\sigma}_x^2), \\ &k_t^{(2)} - \phi_2 - 2\phi_3(t - \bar{x}), \\ &k_t^{(3)} + \phi_3, Y_{t-x} - \phi_1 - \phi_2(t - \bar{x}) - \phi_3(t - \bar{x})^2) \end{aligned} \quad (4.27)$$

para as constantes  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  e  $\phi_3$ . No entanto para assegurar a identificabilidade do modelo os autores impuseram o seguinte conjunto de restrições:

$$\sum_{x,t}^{x,T} \gamma_{t-x} = 0, \sum_{x,t}^{x,T} (t-x)\gamma_{t-x} = 0, \sum_{x,t}^{x,T} (t-x)^2\gamma_{t-x} = 0, \quad (4.28)$$

que permitem que o efeito de coorte flutua em torno de zero e não tenha tendência linear ou quadrática.

Cairns et al. (2009) estimaram os parâmetros de idade, período e efeito de coorte através da maximização da função de verosimilhança.

#### 4.6. MODELO DE PLAT

Plat (2009) apresentou um modelo APC que inclui um termo para capturar a dinâmica da mortalidade em toda a faixa etária.

A especificação do modelo toma vantagem do uso de uma função estática do modelo LC, o uso de funções multi-paramétricas de idade dos modelos CBD e o termo de coorte do modelo APC clássico:

$$\log m_{x,t} = \alpha_x + k_t^{(1)} + k_t^{(2)}(x - \bar{x}) + k_t^{(3)}(x - \bar{x})^+ + Y_{t-x} \quad (4.29)$$

onde  $(x - \bar{x})^+ = \max\{0; x - \bar{x}\}$  e as restantes componentes têm o mesmo significado apresentado nos modelos anteriores.

Aquando da modelação para idade mais avançadas, o autor recomenda a exclusão do terceiro fator de período  $k_t^{(3)}$ , originando o seguinte preditor  $\eta_{x,t}$

$$\eta_{x,t} = \alpha_x + k_t^{(1)} + k_t^{(2)}(x - \bar{x}) + Y_{t-x} \quad (4.30)$$

Neste estudo usamos o modelo reduzido com log link e consideramos que  $D_{x,t}$  segue uma distribuição de Poisson (Plat, 2009).

A parametrização em (4.29) não é única, uma vez que não varia, ao aplicar-se o seguinte conjunto de transformações:

$$\begin{aligned} (\alpha_x, k_t^{(1)}, k_t^{(2)}, k_t^{(3)}, Y_{t-x}) &\rightarrow (\alpha_x + \phi_1 - \phi_2x + \phi_3x^2, k_t^{(1)} + \phi_2t + \\ &\phi_3(t^2 - 2xt), k_t^{(2)} + 2\phi_3t, Y_{t-x} - \phi_1 - \\ &\phi_2(t-x) - \phi_3(t-x)^2) \end{aligned} \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned} (\alpha_x, k_t^{(1)}, k_t^{(2)}, k_t^{(3)}, Y_{t-x}) &\rightarrow (\alpha_x + c_1 + c_2(\bar{x} - x) + c_3(\bar{x} - x)^+, k_t^{(1)} - \\ &c_1, k_t^{(2)} - c_2, k_t^{(3)} - c_3, Y_{t-x}) \end{aligned}$$

onde  $\emptyset_1, \emptyset_2, \emptyset_3, c_1, c_2$  e  $c_3$ , são quaisquer constantes reais. Para garantir uma solução única o autor considerou as seguintes restrições sobre os parâmetros do modelo:

$$\sum_{t=0}^T k_t^{(1)} = 0, \sum_{t=0}^T k_t^{(2)} = 0, \sum_{t=0}^T k_t^{(3)} = 0 \quad (4.32)$$

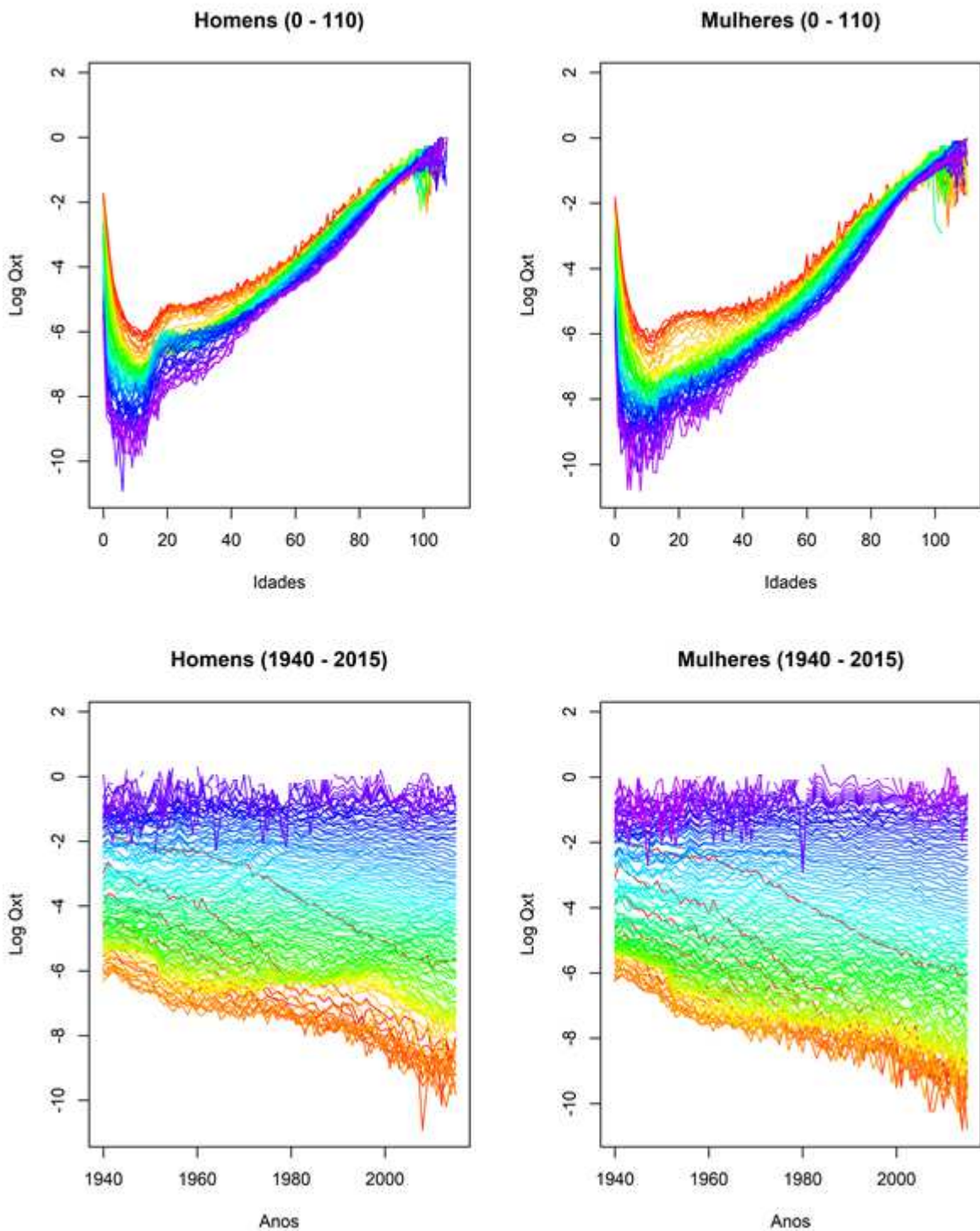
$$\sum_{x,t}^{x,T} \gamma_{t-x} = 0, \sum_{x,t}^{x,T} (t-x)\gamma_{t-x} = 0, \sum_{x,t}^{x,T} (t-x)^2\gamma_{t-x} = 0, \quad (4.33)$$

As primeiras 3 condições garantem que os índices de período sejam centralizados em torno de zero. As outras 3 condições tem a mesma finalidade apresentada no modelo de CBD com o termo de idade quadrático.

## 5. APLICAÇÃO DOS MODELOS DA FAMÍLIA GAPC AOS DADOS DE PORTUGAL

A evolução da mortalidade por idades na Figura 5.1 , para homens e mulheres é consistente com os perfis de mortalidade verificados em vários outros países desenvolvidos.

Figura 5.1 - Logaritmo das probabilidades de morte observadas em relação à idade (em cima) e o ano (em baixo) para homens e mulheres da população portuguesa em 1940 e 2015 dos 0 aos 110 anos de idade. Fonte: Autor.



Nos dois primeiros gráficos, os anos são representados por uma paleta de cores do arco-íris, de modo que os primeiros anos são vermelhos, seguidos de laranja, amarelo, verde, azul e índigo, com os anos mais recentes ilustrados em tons em violeta. Os gráficos iniciam-se com uma alta taxa de mortalidade à nascença, que sofre um rápido decréscimo durante os primeiros anos de vida. Posteriormente, a mortalidade aumenta para um máximo local entre os 15 a 30 anos de idade, particularmente nos homens, este fenómeno é designado de “bossa de acidentes” (Instituto Nacional de Estatística, 2015) e espelha a mortalidade devida a acidentes e ainda a mortalidade materna para o caso das mulheres (Heligman & Pollard, 1980).

Adicionalmente, há uma tendência geral de declínio nas taxas de mortalidade em quase todas as idades ao longo dos anos, associada à concentração da mortalidade nas idades mais avançadas, deslocando a função de sobrevivência para cima e para a direita, fenómeno esse denominado de retangularização da curva de sobrevivência. Ao mesmo tempo, podemos observar que a idade com que as pessoas morrem tem movido lentamente para idades mais tardias, tanto para os homens, como para as mulheres, no que habitualmente é chamado de fenómeno de expansão da curva de sobrevivência.

Analisando os dois últimos gráficos, relativamente aos anos, verificamos que as taxa de mortalidade têm diminuído com o passar dos anos. No entanto, observamos que a diminuição tem sido desigual em diferentes períodos. As maiores melhorias na esperança média de vida verificaram-se nos primeiros anos de vida, e também, entre os 20 e 30 anos. Nas idades mais avançadas o decréscimo da mortalidade tem sido mais gradual, como podemos observar pela pequena diminuição do espaçamento entre as curvas azul e roxo.

## 5.1. ESTIMAÇÃO DOS PARÂMETROS

Como já referido, para efeito de calibração dos modelos, limitamos a nossa base de dados ao período de 1980 a 2010, e concentramo-nos nas idades mais avançadas, dos 55 aos 90 anos, devido ao propósito atuarial do presente estudo, perfazendo um total de 1116 observações.

As estimativas dos parâmetros dos modelos de mortalidade são obtidas através da maximização da função de Verossimilhança, que sob a hipótese do número de morte seguir a distribuição Poisson, para os modelos de LC, RH, APC e PLAT, é dada em (Villegas et al., 2015):

$$L(d_{x,t}, \hat{d}_{x,t}) = \sum_{x,t} \omega_{x,t} \{d_{x,t} \log \hat{d}_{x,t} - \hat{d}_{x,t} \log (d_{x,t}!)\}, \quad (5.1)$$

E para os modelos de duplo fator de período segue a distribuição Binomial, onde a função satisfaz:

$$L(d_{x,t}, \hat{d}_{x,t}) = \sum_{x,t} \omega_{x,t} \left\{ d_{x,t} \log \left( \frac{\hat{d}_{x,t}}{E^0_{x,t}} \right) + (E^0_{x,t} - d_{x,t}) \log \left( \frac{E^0_{x,t} - \hat{d}_{x,t}}{E^0_{x,t}} \right) + \log \binom{E^0_{x,t}}{d_{x,t}} \right\}, \quad (5.2)$$

onde  $\omega_{x,t}$  são os ponderadores que assumem o valor 0 se uma dada célula de dados  $(x, t)$  é omitida ou 1 se a célula é incluída, e

$$\hat{d}_{x,t} = E_{x,t} f^{-1}(\alpha_x + \sum \beta_x^{(i)} k_t^{(i)} + \beta_x^{(0)} \gamma_{t-x}) \quad (5.3)$$

representa o número esperado de mortes estimados pelo modelo, onde  $f^{-1}$  é a inversa da *função link* do modelo.

As figuras seguintes apresentam os parâmetros de idade, tempo e coorte estimados para os dados dos homens e das mulheres para cada um dos modelos:

Figura 5.2 - LC:  $\alpha_x, \beta_x^{(1)}$  e  $k_t^{(1)}$ , parâmetros estimados em relação à idade (55 a 90) e ano civil (1980 a 2010), para os homens (painéis superiores) e para as mulheres (painéis inferiores). Fonte: Autor.

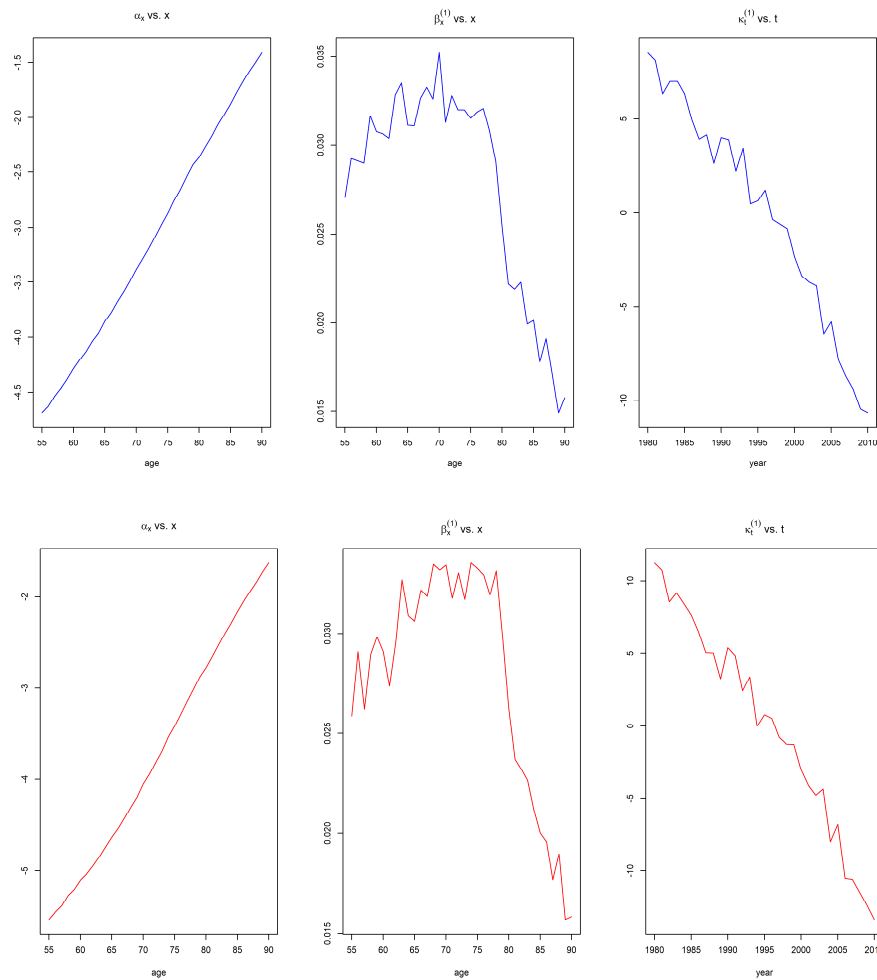
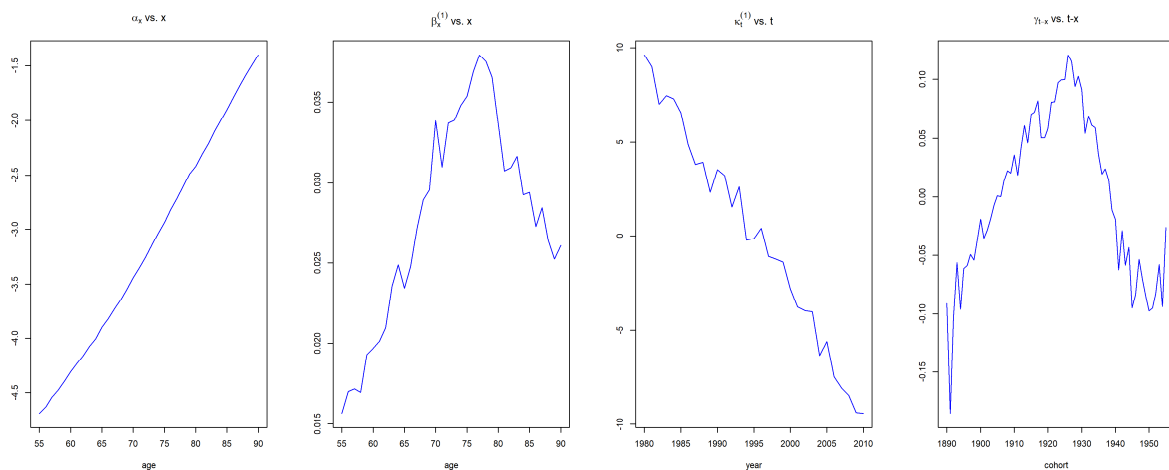


Figura 5.3 – RH:  $\alpha_x, \beta_x^{(1)}, k_t^{(1)}$  e  $\gamma_{t-x}$ , parâmetros estimados em relação à idade (55 a 90), ano civil (1980 a 2010) e ao de nascimento, para os homens (painéis superiores) e para as mulheres (painéis inferiores). Fonte: Autor.



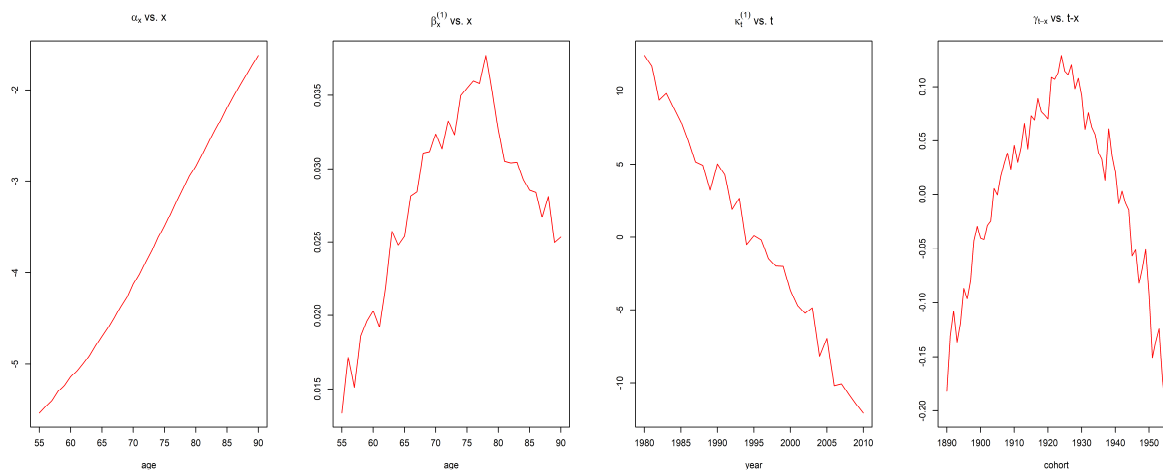


Figura 5.4 – APC:  $\alpha_x$ ,  $k_t^{(1)}$  e  $\gamma_{t-x}$ , parâmetros estimados em relação à idade (55 a 90), ano civil (1980 a 2010) e ao de nascimento, para os homens (painéis superiores) e para as mulheres (painéis inferiores). Fonte: Autor.

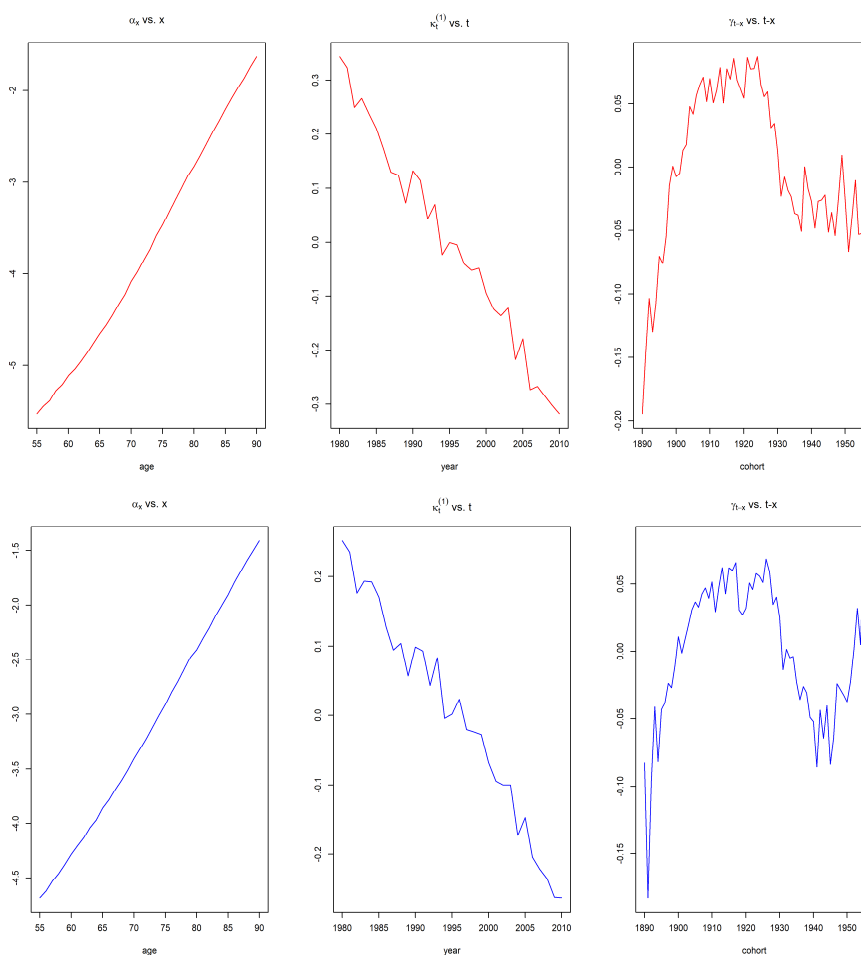


Figura 5.5 – CBD:  $k_t^{(1)}$  e  $k_t^{(2)}$ , parâmetros estimados em relação ao ano civil (1980 a 2010) e, para os homens (painéis à esquerda) e para as mulheres (painéis à direita). Fonte: Autor.

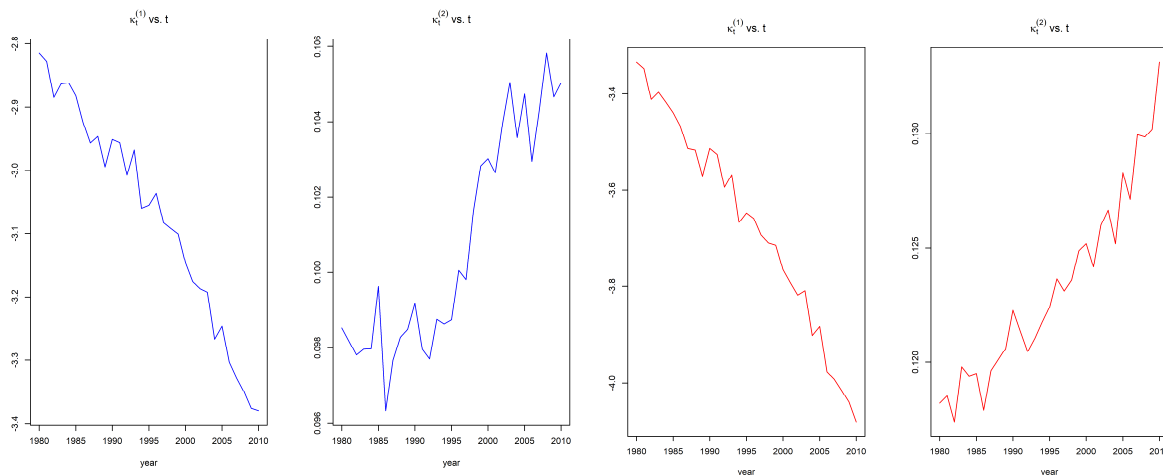


Figura 5.6 – M6:  $k_t^{(1)}$ ,  $k_t^{(2)}$  e  $\gamma_{t-x}$ , parâmetros estimados em relação à idade ano civil (1980 a 2010) e ao de nascimento, para os homens (painéis superiores) e para as mulheres (painéis inferiores). Fonte: Autor.

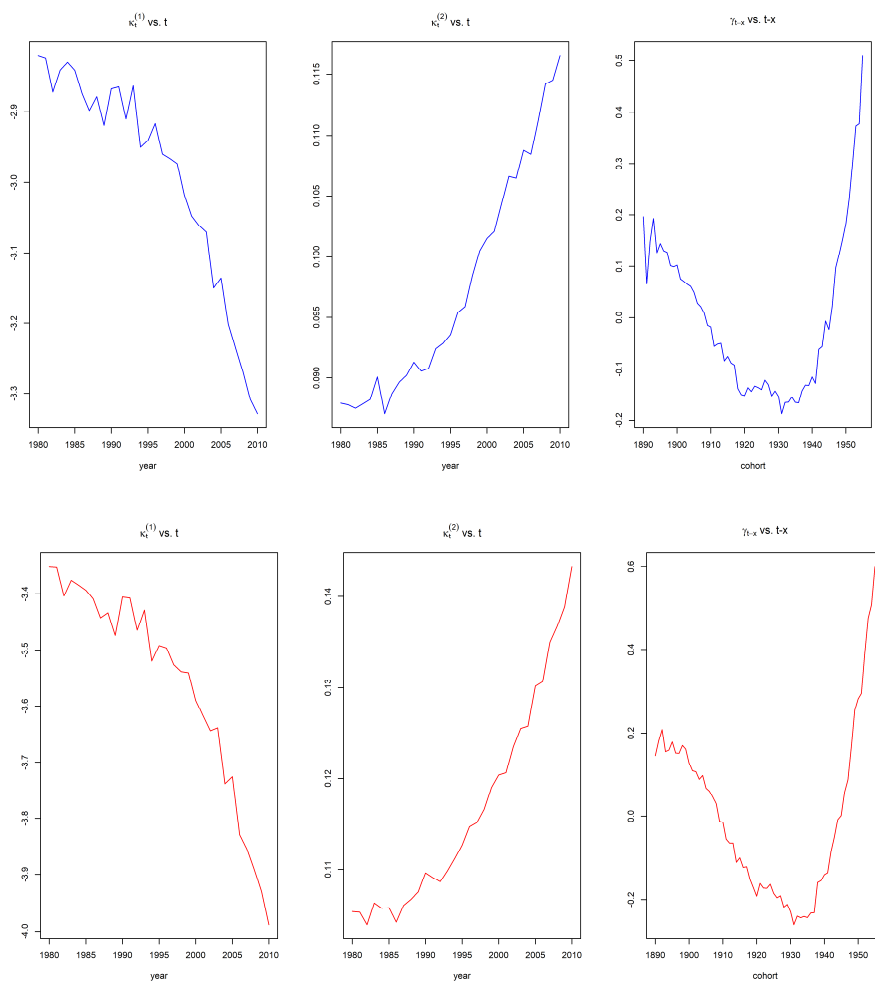


Figura 5.7 – M7:  $k_t^{(1)}$ ,  $k_t^{(2)}$ ,  $k_t^{(3)}$  e  $\gamma_{t-x}$ , parâmetros estimados em relação ano civil (1980 a 2010) e ao de nascimento, para os homens (painéis superiores) e para as mulheres (painéis inferiores). Fonte: Autor.

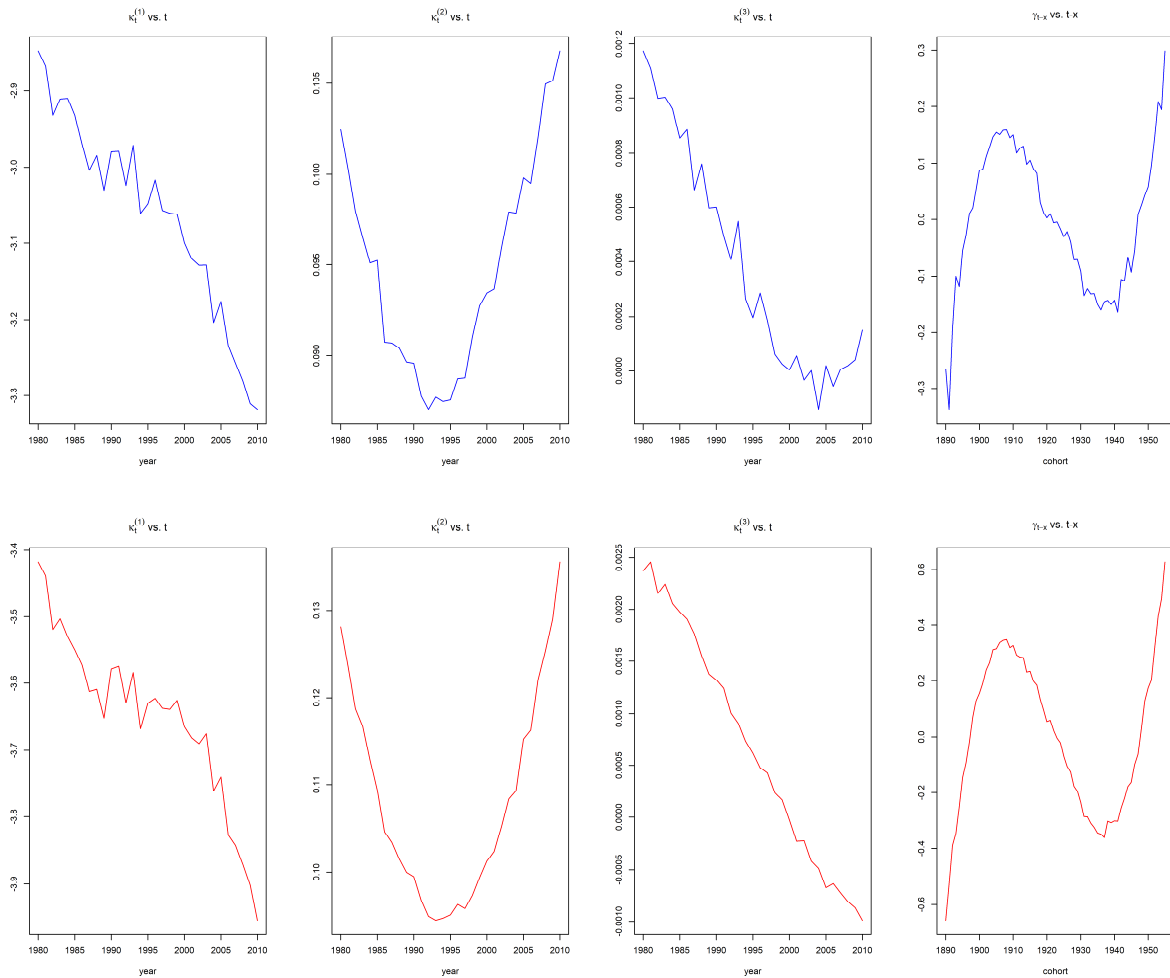
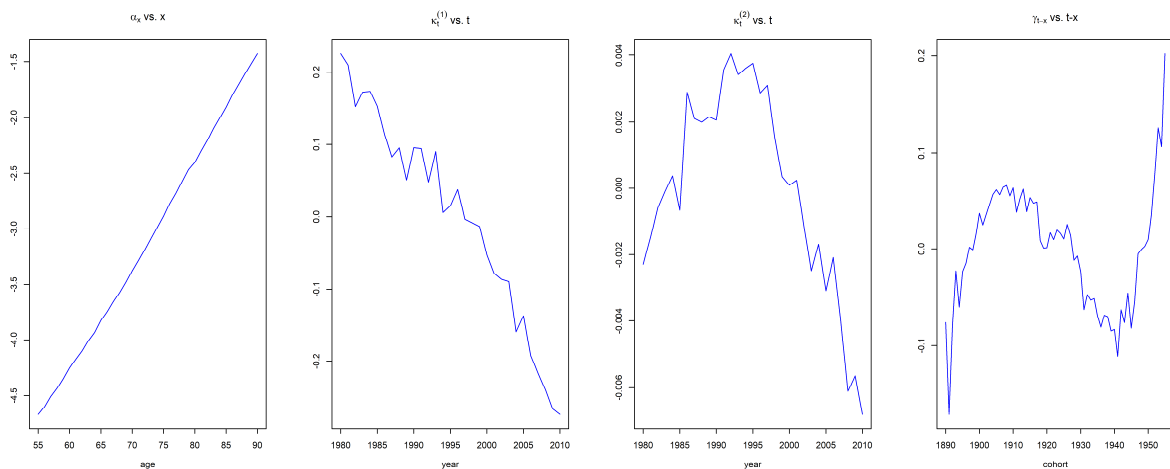
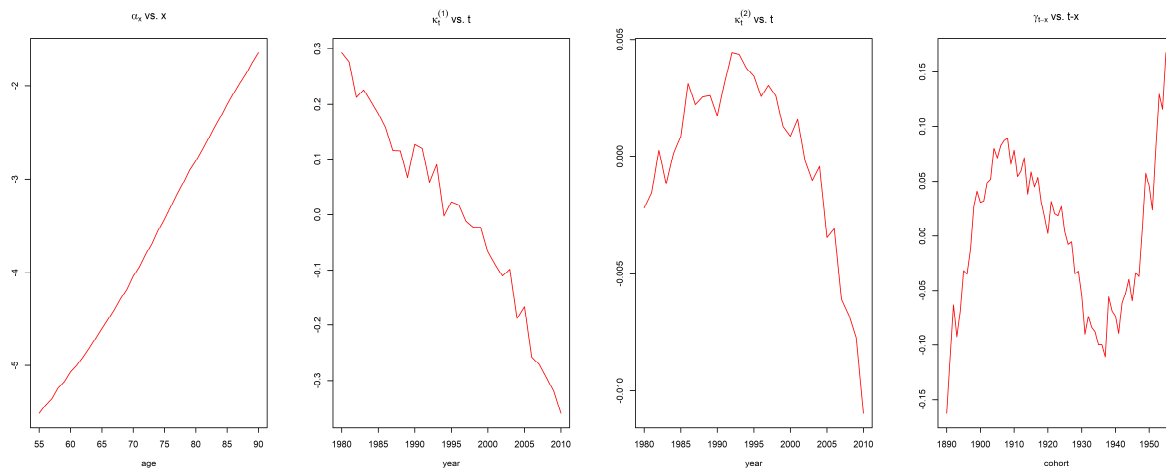


Figura 5.8 - PLAT:  $\alpha_x$ ,  $k_t^{(1)}$ ,  $k_t^{(2)}$  e  $\gamma_{t-x}$ , parâmetros estimados em relação à idade (55 a 90), ano civil (1980 a 2010) e ao ano de nascimento, para os homens (painéis superiores) e para as mulheres (painéis inferiores). Fonte: Autor.





O parâmetro de idade,  $\alpha_x$  indica que a taxa de mortalidade diminui gradualmente nas idades mais avançadas, para ambos os sexos. Para os modelos, LC, RH, APC e PLAT,  $\alpha_x$  apresenta uma tendência ascendente quase linear e os valores estimados para as mulheres são inferiores ao dos homens. No entanto, percebe-se uma aproximação com o passar dos anos.

O parâmetro  $\beta_x^{(1)}$  toma sempre valores positivos que indicam que a taxa de mortalidade diminui com a idade ao longo do tempo para todas as idades.

As estimativas para  $k_t^{(1)}$  diminuem em todos os modelos de mortalidade, indicando uma melhoria geral da mortalidade para ambos os sexos ao longo do período considerado.

Nos modelos de duplo fator de tempo, CBD, M6 e M7, observamos que,  $k_t^{(1)}$  está a diminuir em relação ao tempo, e é negativo, enquanto que  $k_t^{(2)}$  têm uma tendência crescente ao longo do período e é positivo para os modelos CBD e M6. Isto é, exatamente o que esperamos em um modelo realista, pois implica que a taxa de mortalidade diminui para uma idade fixa e a curva de mortalidade se torna mais acentuada ao longo dos anos. Por outro lado, no modelo M7 o parâmetro  $k_t^{(2)}$  tem um movimento convexo dada a curvatura do logit da probabilidade de morte relativamente à idade: decrescente até a idade média e depois crescente. Um aumento em  $k_t^{(2)}$  leva a uma curva de mortalidade mais acentuada, que implica que a mortalidade em idades mais jovens (abaixo da média de idade) declina mais rapidamente que em idades mais avançadas (acima da média de idade).

Relativamente ao parâmetro de coorte, as estimativas não podem ser seguramente interpretadas, pois dependem de toda a configuração do modelo, incluindo possíveis interações com os parâmetros  $k_t^{(1)}$ ,  $k_t^{(2)}$  e os correspondentes efeitos de idade. Mais precisamente, as estimativas de coorte de RH, APC e PLAT mostram um aumento até 1910, decrescentes flutuações até aos anos 40 e uma tendência crescente para o resto dos anos de coorte para ambos os sexos. O M7 tem um comportamento semelhante, mas mais linear, ou seja, com menos flutuações. E por último, as estimativas de coorte para o modelo M6 têm oscilações descendentes até 1930 e depois apresenta uma inclinação ascendente para os anos remanescentes tanto para a população masculina como a feminina.

## 5.2. CRITÉRIOS DE SELEÇÃO DOS MODELOS

### 5.2.1. Critérios de Informação

Renshaw e Haberman (2011) sugeriram a utilização dos critérios de informação AIC (Akaike, 1974) e BIC (Schwarz, 1978) para garantir um bom ajuste com um modelo parcimonioso. Os critérios de informação AIC e BIC penalizam os modelos sobre parametrizados, uma vez que, normalmente, se espera um melhor ajuste dos modelos com mais parâmetros. São definidos como:

$$AIC = 2v - 2\log\hat{L} \quad (5.4)$$

$$BIC = (\log n)v - 2\log\hat{L} \quad (5.5)$$

onde  $\hat{L}$  é o valor máximo da função de verosimilhança estimada,  $v$  define o número de parâmetros estimados e  $n$  representa o número de observações.

A Tabela 5.1. apresenta o logaritmo da máxima verosimilhança, o número de parâmetros estimados, assim como o número de observações, e os correspondentes valores AIC e BIC por género para os sete modelos. Quanto mais baixo for o valor de AIC e BIC melhor é o ajuste do modelo. Entre parêntesis está a ordem dos modelos, consoante os seus valores de AIC e BIC, do menor ao maior.

Tabela 5.1 - Logaritmo da máxima verosimilhança, o número de parâmetros estimados, o número de observações, e os correspondentes valores AIC e BIC por género para cada um dos modelos. Fonte: Autor.

Homens				
Modelo	Log Max Verosimilhança	Número de Parâmetros	AIC	BIC
LC	-5663.41 (5)	101	11528.82 (5)	12035.59 (1)
RH	-5443.52 (1)	165	11217.04 (1)	12044.92 (2)
APC	-5695.72 (6)	130	11651.45 (6)	12303.72 (6)
CBD	-6790.19 (7)	62	13704.38 (7)	14015.46 (7)
M6	-5633.53 (4)	126	11519.05 (4)	12151.26 (4)
M7	-5534.28 (3)	156	11380.55 (3)	12163.28 (5)
PLAT	-5480.65 (2)	159	11279.30 (2)	12077.09 (3)
Mulheres				
Modelo	Log Max Verosimilhança	Número de Parâmetros	AIC	BIC
LC	-5527.66 (4)	101	11257.32 (3)	11764.09 (1)
RH	-5389.32 (1)	165	11108.65 (1)	11936.53 (2)
APC	-5702.04 (5)	130	11664.07 (5)	12316.35 (5)
CBD	-7517.62 (7)	62	15159.25 (7)	15470.33 (7)
M6	-5979.08 (6)	126	12210.16 (6)	12842.37 (6)
M7	-5505.73 (3)	156	11323.47 (4)	12106.20 (4)
PLAT	-5433.06 (2)	159	11184.12 (2)	11981.90 (3)

Os dois critérios não são consistentes na classificação dos modelos. Relativamente aos resultados do AIC, RH é seguido pelo modelo de PLAT e em terceiro temos o M7 para os homens. Em relação ao BIC os modelos de LC, RH e PLAT apresentam um melhor ajuste aos dados dos homens. Note que a penalidade da complexidade do modelo é maior no BIC, portanto esperamos uma melhor escolha do modelo mais parcimonioso. Para as mulheres, os três primeiros classificados são os modelos RH, PLAT e LC, também compõem o topo de acordo com o BIC, mas a ordem é a seguinte: LC, RH e PLAT. No geral os modelos de LC com e sem efeito de coorte apresentam um bom desempenho no ajuste aos dados de mortalidade da população Portuguesa. O modelo original de dois fatores de CBD tem o pior ajuste tanto para a população masculina, como a feminina.

### 5.2.2. Análise dos resíduos

Alternativamente avaliamos o desempenho do ajustamento dos modelos, através da análise dos desvios, que corresponde a uma medida da distância entre o  $d_{x,t}$  observado e o  $\hat{d}_{x,t}$  estimado, por género para cada um dos modelos. O desvio dos resíduos é definido de acordo com a hipótese de distribuição do número de mortes, Poisson ou Binomial, cujas expressões são dadas, respetivamente por:

$$D(d_{x,t}, \hat{d}_{x,t}) = \sum_{x,t} dev(x,t) = 2\omega_{x,t} d_{x,t} \log\left(\frac{d_{x,t}}{\hat{d}_{x,t}}\right) + (\hat{d}_{x,t} - d_{x,t}) \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} D(d_{x,t}, \hat{d}_{x,t}) &= \sum_{x,t} dev(x,t) = \\ &= 2\omega_{x,t} d_{x,t} \log\left(\frac{d_{x,t}}{\hat{d}_{x,t}}\right) + (E^0_{x,t} - d_{x,t}) \log\left(\frac{E^0_{x,t} - d_{x,t}}{E^0_{x,t} - \hat{d}_{x,t}}\right) \end{aligned} \quad (5.7)$$

Tal como definido em Villegas et al. (2015), o desvio padrão dos resíduos é dado por:

$$r_{x,t} = \text{sign}(\hat{d}_{x,t} - d_{x,t}) \sqrt{\frac{dev(x,t)}{\hat{\vartheta}}}, \quad \hat{\vartheta} = \frac{D(d_{x,t}, \hat{d}_{x,t})}{n - v} \quad (5.8)$$

do denominador de  $\hat{\vartheta}$  determina o grau de liberdade do modelo.

A Tabela 5.2 inclui os valores dos desvios dos resíduos para cada um dos modelos, assim como, os graus de liberdade. Entre parentesis está a classificação dos desvios do menor ao maior. Em conformidade com a análise dos critérios de informação, o modelo de RH apresenta o menor desvio e o modelo de CBD possui o maior, tanto para os homens, como para as mulheres.

Tabela 5.2 Desvio Padrão dos resíduos para os homens e para as mulheres. Fonte: Autor.

Modelos	LC	RH	APC	CBD	M6	M7	PLAT
<b>Graus de liberdade</b>	1015	951	986	1321	990	960	957
<b>Desvios (Homens)</b>	1489.48 (5)	1049.69 (1)	1554.10 (6)	3670.00 (7)	1356.68 (4)	1158.18 (3)	1123.96 (2)
<b>Desvios (Mulheres)</b>	1440.00 (4)	1163.32 (1)	1788.75 (5)	5352.90 (7)	2275.82 (6)	1329.12 (3)	1250.80 (2)

Renshaw e Haberman (2006) sugeriram a realização de gráficos de dispersão dos resíduos para verificação do ajustamento dos modelos. A seguir apresentamos os gráficos de dispersão dos resíduos, em relação à idade, ano civil e ao ano de nascimento, respetivamente, para homens e mulheres. Quanto mais próximo o valor esperado dos resíduos estiver do zero, melhor será o desempenho do modelo, isto é, os resíduos não apresentem nenhuma estrutura de dependência (para que possam ser classificados como ruído branco, média nula e variância igual a 1).

Figura 5.9 – LC: Gráficos de dispersão dos resíduos em relação à idade, ano civil e ano de nascimento, para os Homens (painéis superiores) e Mulheres (painéis inferiores). Fonte: Autor.

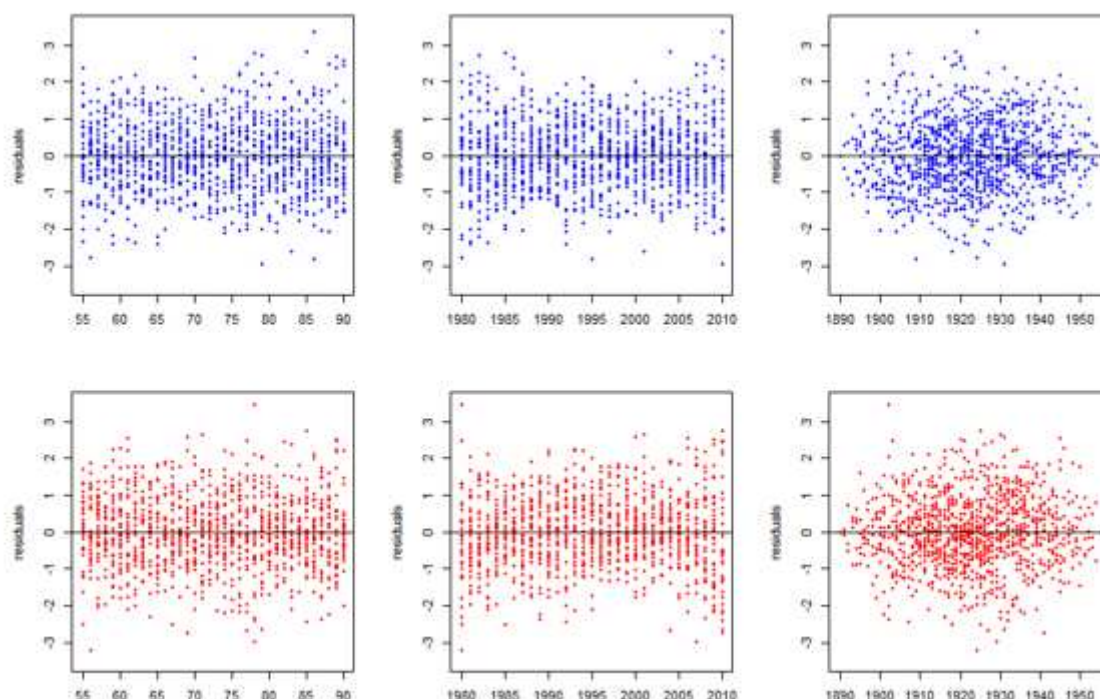


Figura 5.10 - RH: Gráficos de dispersão dos resíduos em relação à idade, ano civil e ano de nascimento, para os Homens (painéis superiores) e Mulheres (painéis inferiores). Fonte: Autor.

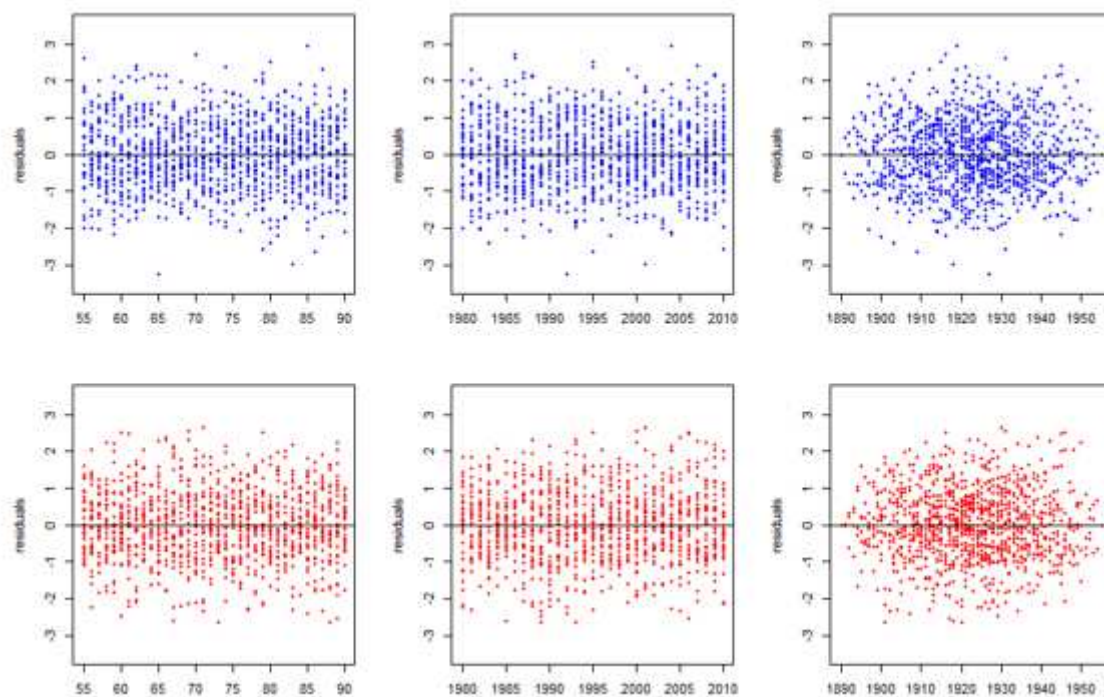


Figura 5.11 – APC: Gráficos de dispersão dos resíduos em relação à idade, ano civil e ano de nascimento, para os Homens (painéis superiores) e Mulheres (painéis inferiores). Fonte: Autor.

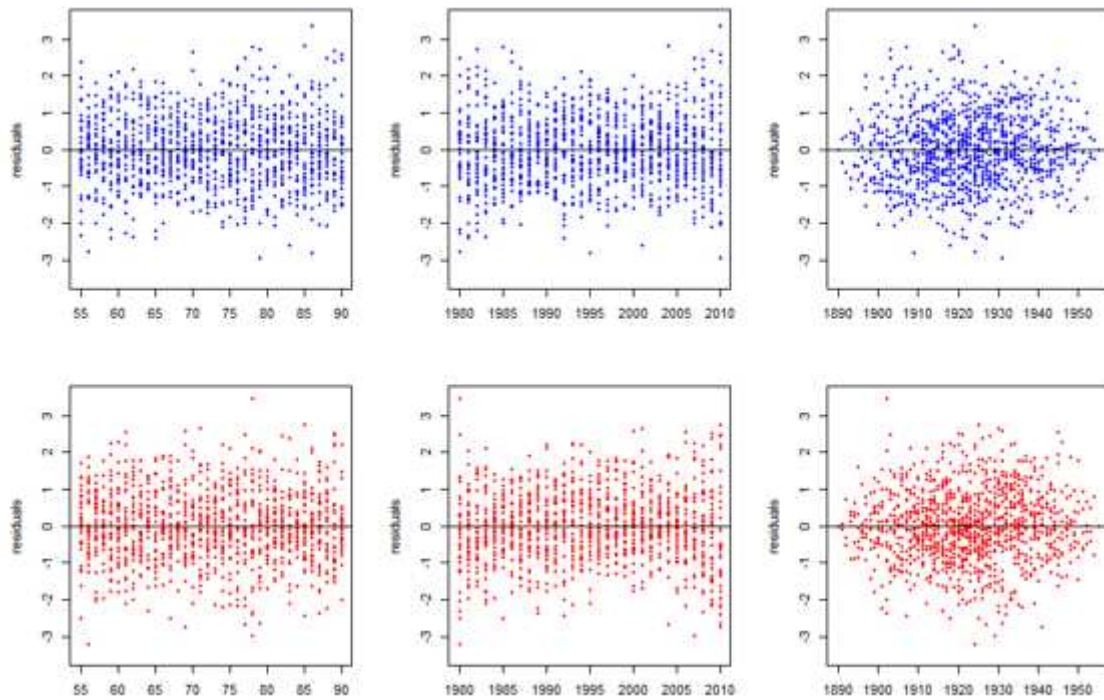


Figura 5.12 – CBD: Gráficos de dispersão dos resíduos em relação à idade, ano civil e ano de nascimento, para os Homens (painéis superiores) e Mulheres (painéis inferiores). Fonte: Autor.

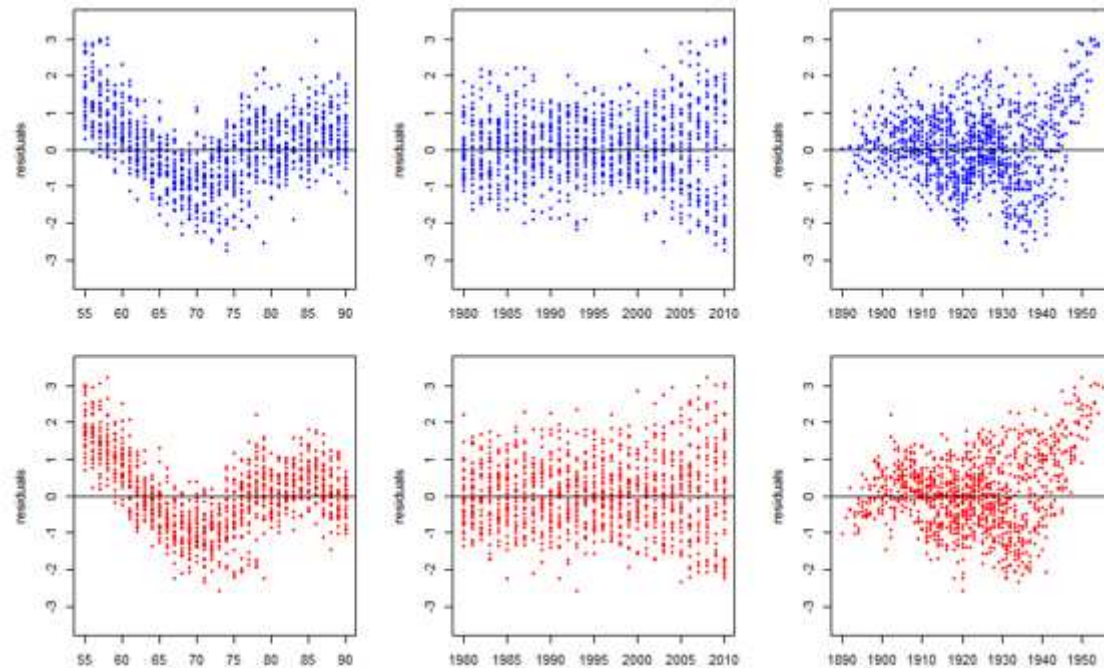


Figura 5.13 – M6: Gráficos de dispersão dos resíduos em relação à idade, ano civil e ano de nascimento, para os Homens (painéis superiores) e Mulheres (painéis inferiores). Fonte: Autor.

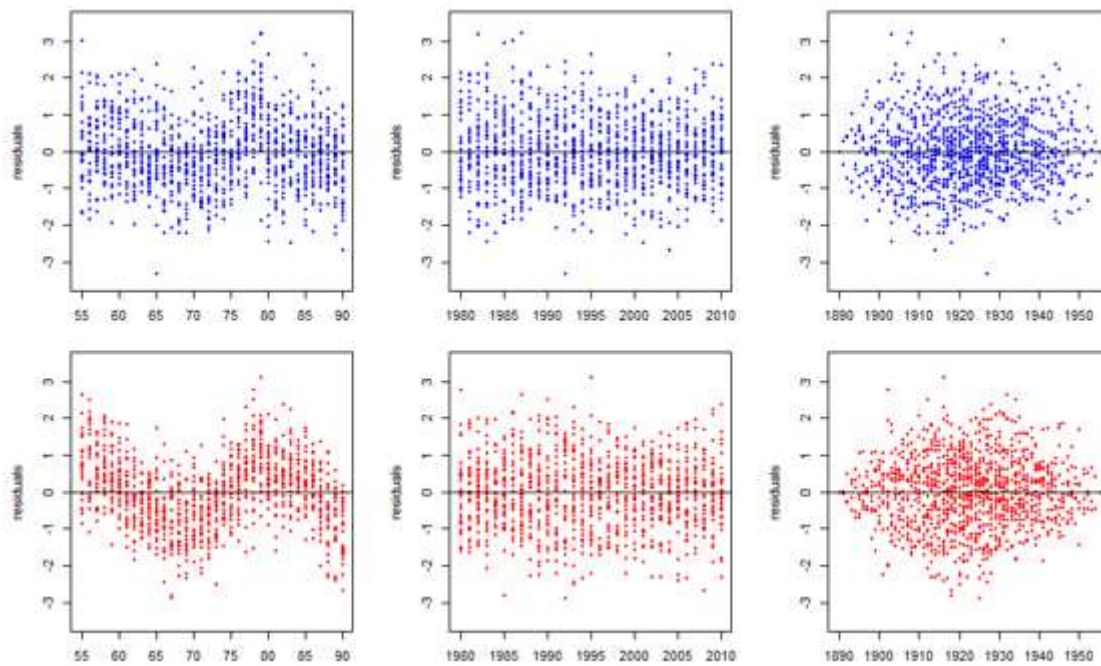


Figura 5.14 – M7: Gráficos de dispersão dos resíduos em relação à idade, ano civil e ano de nascimento, para os Homens (painéis superiores) e Mulheres (painéis inferiores).

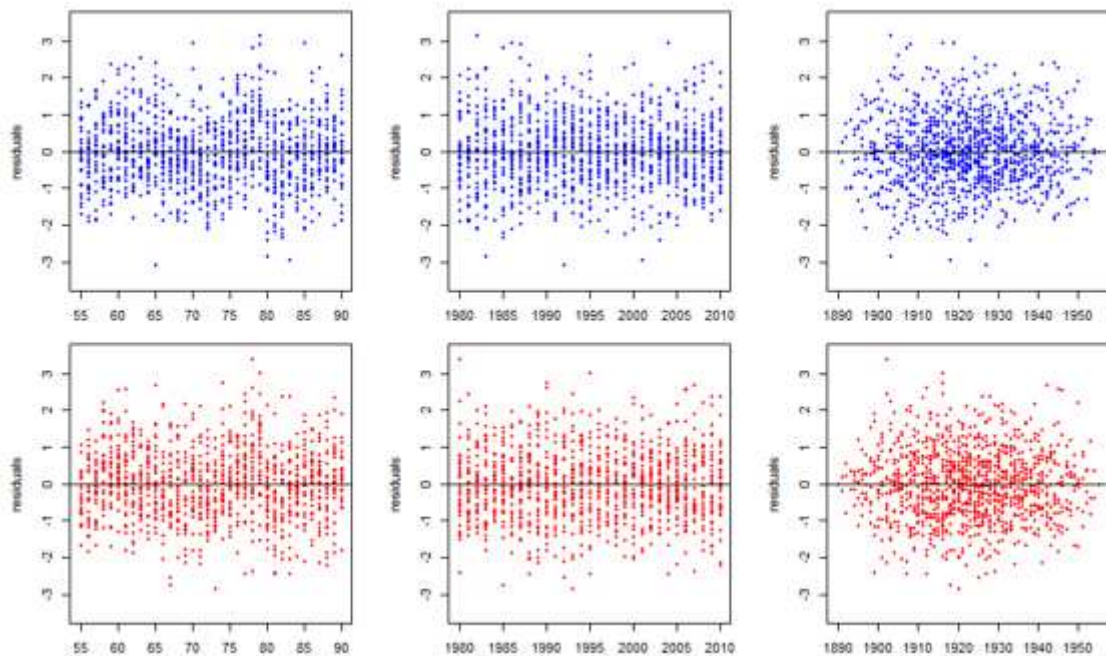
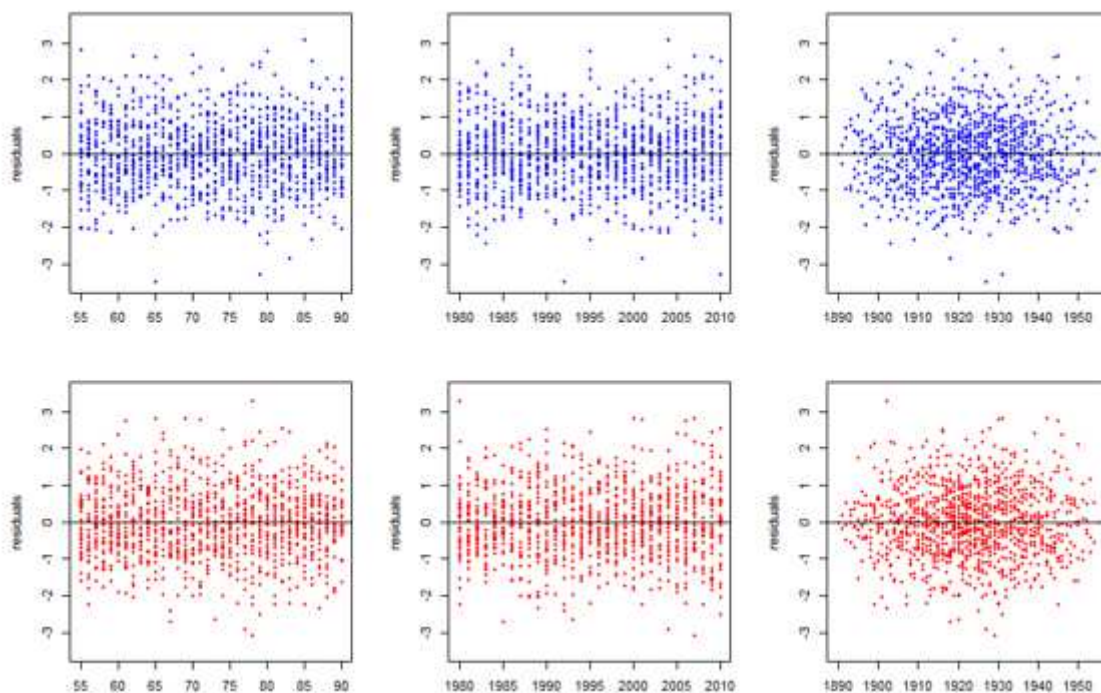


Figura 5.15 – PLAT: Gráficos de dispersão dos resíduos em relação à idade, ano civil e ano de nascimento, para os Homens (painéis superiores) e Mulheres (painéis inferiores). Fonte: Autor.



No geral, não existem grandes discrepâncias entre homens e mulheres, no que diz respeito à dispersão dos resíduos.

Para os modelos da família de Lee & Carter os resíduos nos pontos extremos estão mais próximos de zero.

No que se refere ao modelo APC apresenta uma forte aglomeração de resíduos positivo e negativos, tanto para os homens como para as mulheres, em relação ao ano de nascimento. Isto é devido à sua incapacidade de admitir melhorias nas taxas de mortalidade de acordo com a idade.

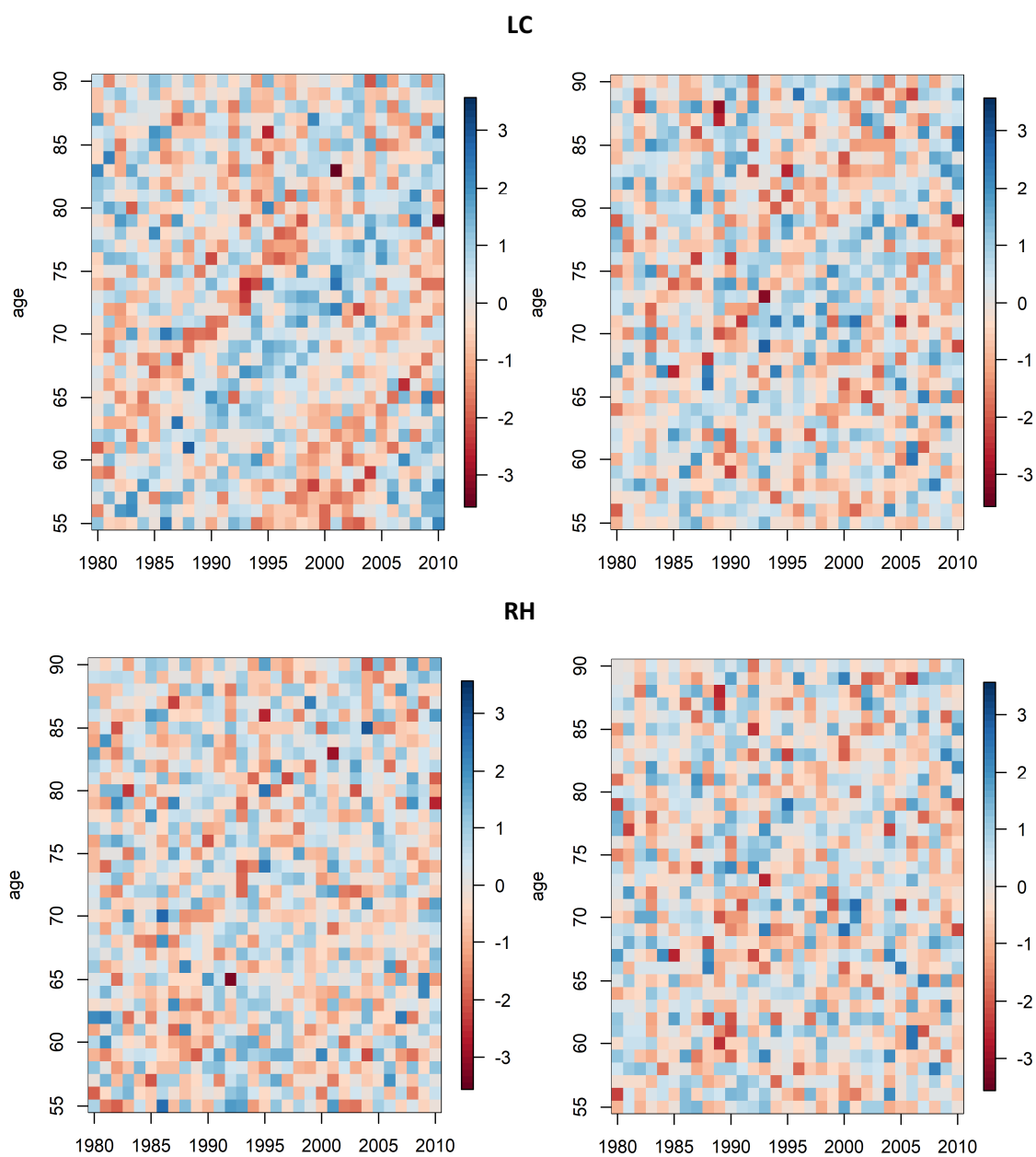
As estruturas dos resíduos dos modelos M2, M7 e PLAT parecem razoavelmente aleatórias, revelando um valor esperado dos resíduos próximo do zero para ambos os gêneros, justificando assim, um bom ajuste aos dados.

Porém, os modelos M5 e M6 apresentam um padrão acentuado em relação à idade dos homens e das mulheres. Isto deve-se à ausência do termo de idade quadrático necessário para capturar a curvatura, normalmente, observada nas taxas de mortalidade em uma escala logit.

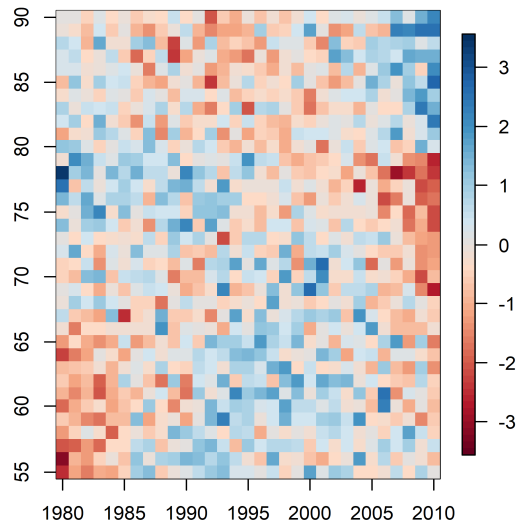
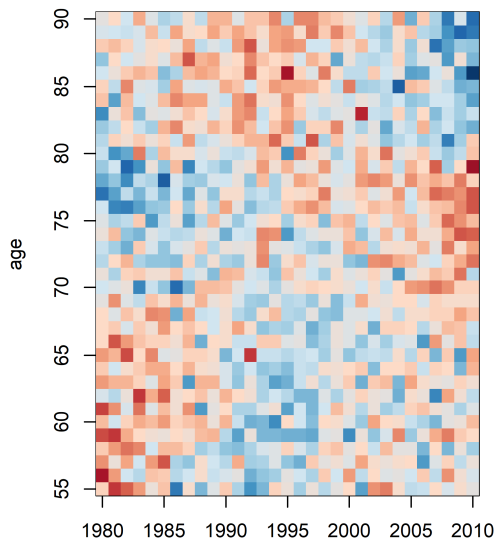
Assim como em Cairns et al. (2009) recorreremos também aos mapas tridimensionais de calor (versão disponível no pacote StMoMo), em função da idade e do ano civil, para averiguar a presença de alguma estrutura remanescente nos resíduos dos modelos para os homens e as mulheres.

A Figura 5.16 apresenta os mapas de calor tridimensionais (idade, ano civil e valor dos resíduos), dos resíduos para todos os modelos, para os homens (painel à esquerda) e mulheres (painel à direita).

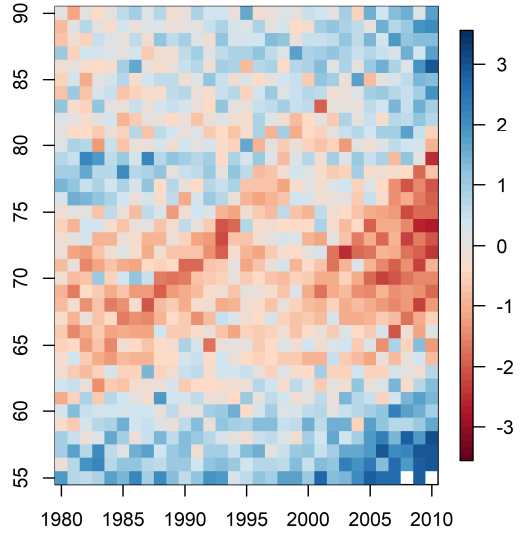
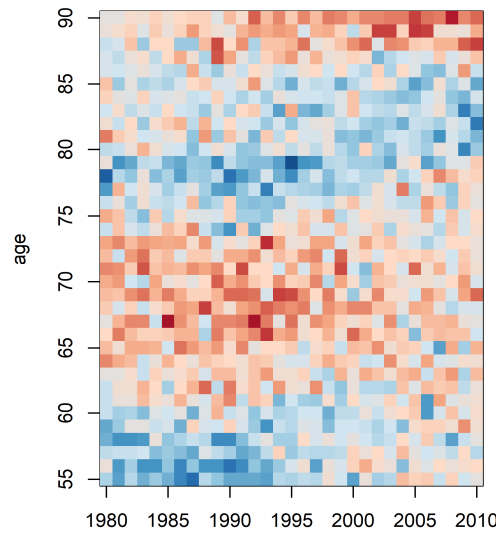
Figura 5.16 – LC, RH, APC, CBD, M6, M7 e PLAT: Mapas de calor tridimensionais dos resíduos para os Homens (painel à esquerda) e Mulheres (painel à direita). Fonte: Autor.



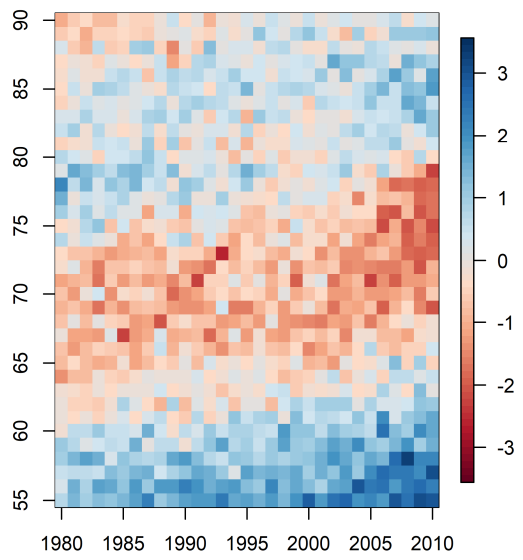
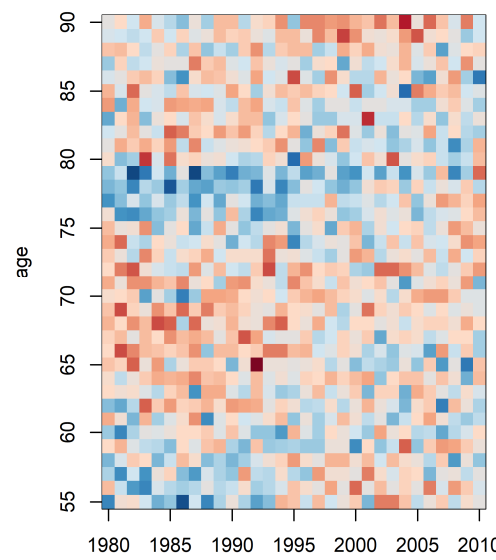
### APC

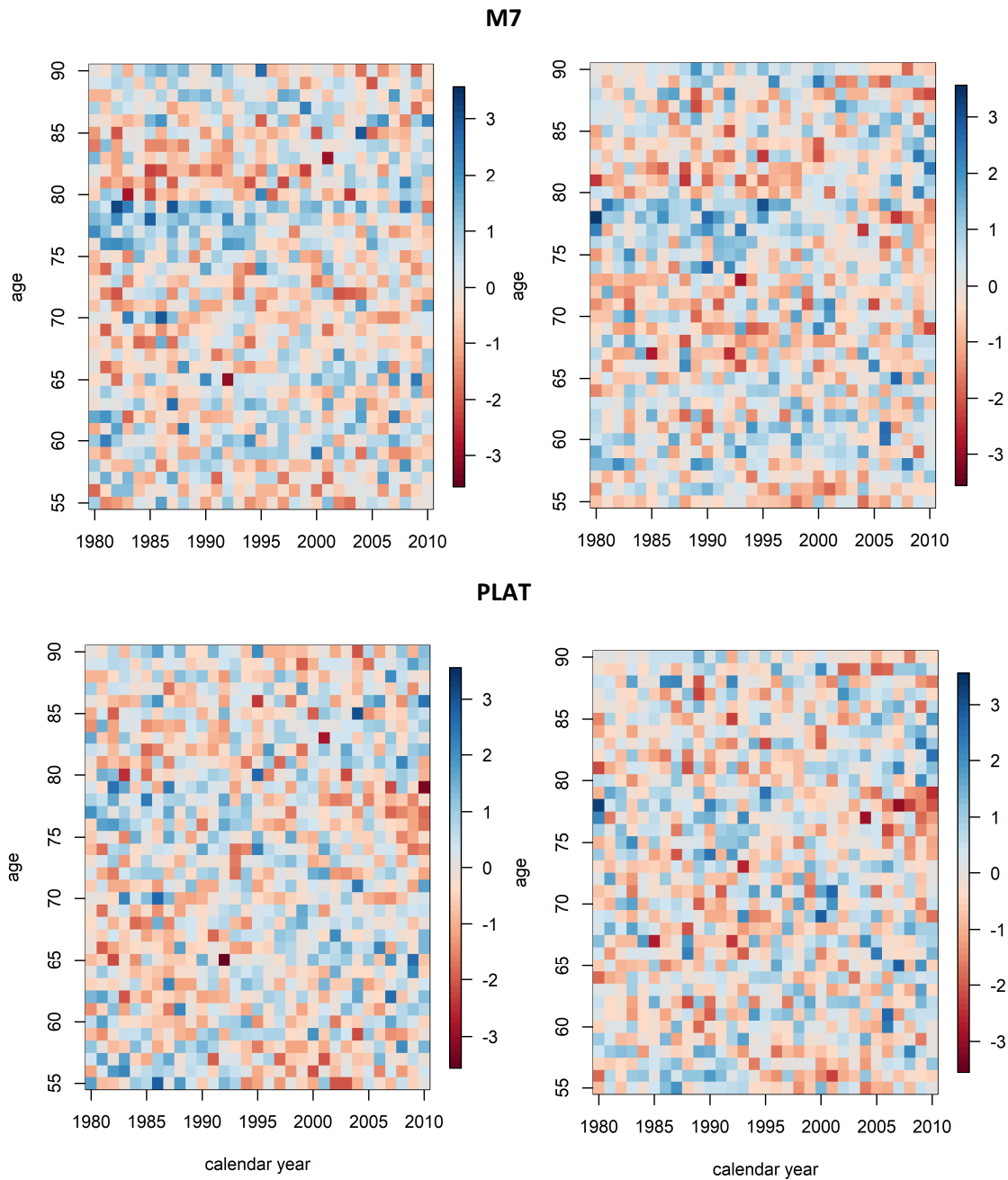


### CBD



### M6





Não detetamos nenhuma estrutura sistemática em termos de resíduos para a população feminina em nenhum dos modelos. Por outro lado, vimos que os modelos LC e CBD exibem fortes padrões residuais enquanto os resíduos dos modelos RH, M7, APC e PLAT parecem razoavelmente dispersos para os dados dos homens. Os dois modelos, que não incorporam um efeito de coorte, mostram padrões diagonais muito proeminentes, indicando a incapacidade desses modelos de capturar o efeito de coorte. Nota-se quase uma linha diagonal do mesmo padrão de 1985 a 1995, correspondendo às faixas etárias de 65 a 75 anos. Os nossos resultados coincidem com a possibilidade de existência de efeito de coorte na população masculina portuguesa revelada em (Coelho & Nunes, 2013).

### 5.3. PREVISÃO DAS TAXAS FUTURAS DE MORTALIDADE

Um dos critérios de avaliação utilizados no processo de seleção de um modelo de mortalidade é o seu desempenho em um procedimento de verificação a posterior (“backtesting”). Cairns et al. (2010) realizaram vários testes para comparar a qualidade das previsões para o modelo clássico de Lee e Carter e o modelo Cairns-Blake-Dowd. Eles concluíram que os procedimentos funcionam muito bem na avaliação da performance dos modelos, o que pode fornecer uma indicação da fiabilidade do modelo. Assim sendo, realizamos um *backtesting*, o que significa que os modelos foram ajustados para dados históricos de 1980 a 2010, enquanto que o período de previsão foi definido como sendo os próximos 50 anos, ou seja, 2011 a 2060.

Tal como em Lee & Carter (1992) assumimos que após a estimação dos parâmetros apenas os parâmetros de tempo precisam ser previstos para pontos temporais futuros. As taxas futuras de mortalidade foram determinadas usando a seguinte fórmula, assumindo a distribuição de Poisson ou Binomial para o número de mortes, respetivamente:

$$\hat{q}_{x,t_n+s} = \exp(\alpha_x + \sum_{i=0}^N \beta_x^{(i)} \hat{k}_{t_n+s}^{(i)} + \hat{\gamma}_{t_n+s-x})$$

ou

$$(5.9)$$

$$\hat{q}_{x,t_n+s} = \frac{\exp(\alpha_x + \sum_{i=0}^N \beta_x^{(i)} \hat{k}_{t_n+s}^{(i)} + \hat{\gamma}_{t_n+s-x})}{1 + \exp(\alpha_x + \sum_{i=0}^N \beta_x^{(i)} \hat{k}_{t_n+s}^{(i)} + \hat{\gamma}_{t_n+s-x})}$$

Os parâmetros de período e coorte foram extrapolados utilizando a metodologia de Box & Jenkins (1976). A expressão geral do processo ARIMA (p,d,q) satisfaz:

$$(1 - \sum_{i=0}^p \phi_i L^i)(1 - L)^d Z_t = \delta_0 + (1 - \sum_{i=0}^q \theta_i L^i) \varepsilon_t \quad (5.10)$$

onde  $L^d$  representa o operador de defasagem,  $\phi_i$  são os parâmetros da parte auto-regressiva com  $\phi_i \neq 0$ ,  $\theta_i$  são os coeficientes de médias móveis com  $\theta_i \neq 0, i = 1, \dots, p$ ,  $\delta_0$  é o parâmetro constante da tendência e  $\varepsilon_t$  é um ruído branco independente e identicamente distribuído com média nula e variância constante.

Assim como em Haberman & Renshaw (2011) propusemo-nos a modelar o índice coorte com um modelo ARIMA univariado, isto é, os valores projetados dependem somente dos seus valores passados. Selecionamos um conjunto de processos ARIMA que já tinham apresentado resultados satisfatórios em estudos anteriores (Cairns et al., 2010a, 2010c, 2010b; Villegas et al., 2015) e, entre estes, escolhemos o processo com menor BIC. Em algumas circunstâncias, os modelos ARIMA com o menor BIC foram rejeitados porque produziam maiores erros de previsão.

A Tabela 5.3 contém a lista dos modelos ARIMA utilizados para projetar os valores do índice de período, assim como, o parâmetro de coorte.

Tabela 5.3 - Modelos ARIMA selecionados para prever os índices de tempo de 2011 a 2060 para homens e mulheres separadamente (\* com tendência). Fonte: Autor.

Modelo	Homens				Mulheres			
	$k_t^{(1)}$	$k_t^{(2)}$	$k_t^{(3)}$	$Y_{t-x}$	$k_t^{(1)}$	$k_t^{(2)}$	$k_t^{(3)}$	$Y_{t-x}$
LC	(0,1,1) *	-	-		(1,1,0) *	-	-	
RH	(0,1,1) *	-	-	(1,1,0)	(2,1,0) *	-	-	(1,1,0)
APC	(0,1,1) *	-	-	(1,1,0)	(2,1,0) *	-	-	(1,1,0)
CBD	(0,1,1) *	(0,1,1) *	-		(1,1,0) *	(0,1,1) *	-	
M6	(2,2,1)	(0,2,2)	-	(0,2,1)	(1,2,1)	(1,2,1)	-	(2,2,0)
M7	(0,1,1) *	(0,2,2)	(2,2,1)	(1,0,0)	(1,1,0) *	(1,0,1)	(1,1,0)	(1,0,0)
Plat	(0,1,1) *	(0,2,2)	-	(0,2,1)	(1,1,0) *	(0,2,2)	-	(2,2,0)

Para comparar estatisticamente o poder preditivo dos modelos, adotamos as seguintes medidas de erro para os 5 anos de projeção, 2011 a 2015, cujo, os dados temos disponíveis:

- **Erro Quadrático Médio (EQM):**

$$EQM_{avg} = \frac{1}{NM} \sum_{s=1}^5 \sum_{x=55}^{90} \sqrt{(\hat{q}_{x,2010+s} - q_{x,2010+s})^2} \quad (5.11)$$

- **Erro Percentual Absoluto Médio (EPAM):**

$$EPAM_{avg} = \frac{1}{NM} \sum_{s=1}^5 \sum_{x=55}^{90} \left| \frac{\hat{q}_{x,2010+s} - q_{x,2010+s}}{q_{x,2010+s}} \right| \quad (5.12)$$

onde  $N$  representa a dimensão dos anos (neste caso 5) e  $M$  o número de idades (neste caso 36). O EQM mede o erro das estimativas sem qualquer correção. Enquanto que o EPAM indica a média dos valores absolutos dos desvios das observações. O EQM permitem-nos reduzir o efeito dos erros associados a valores altos de  $\hat{q}_{x,t}$ , geralmente associados a grupos etários mais avançados.

A Tabela 5.4 inclui os respetivos erros para cada um dos modelos, entre parêntesis está a indicação da ordem dos erros.

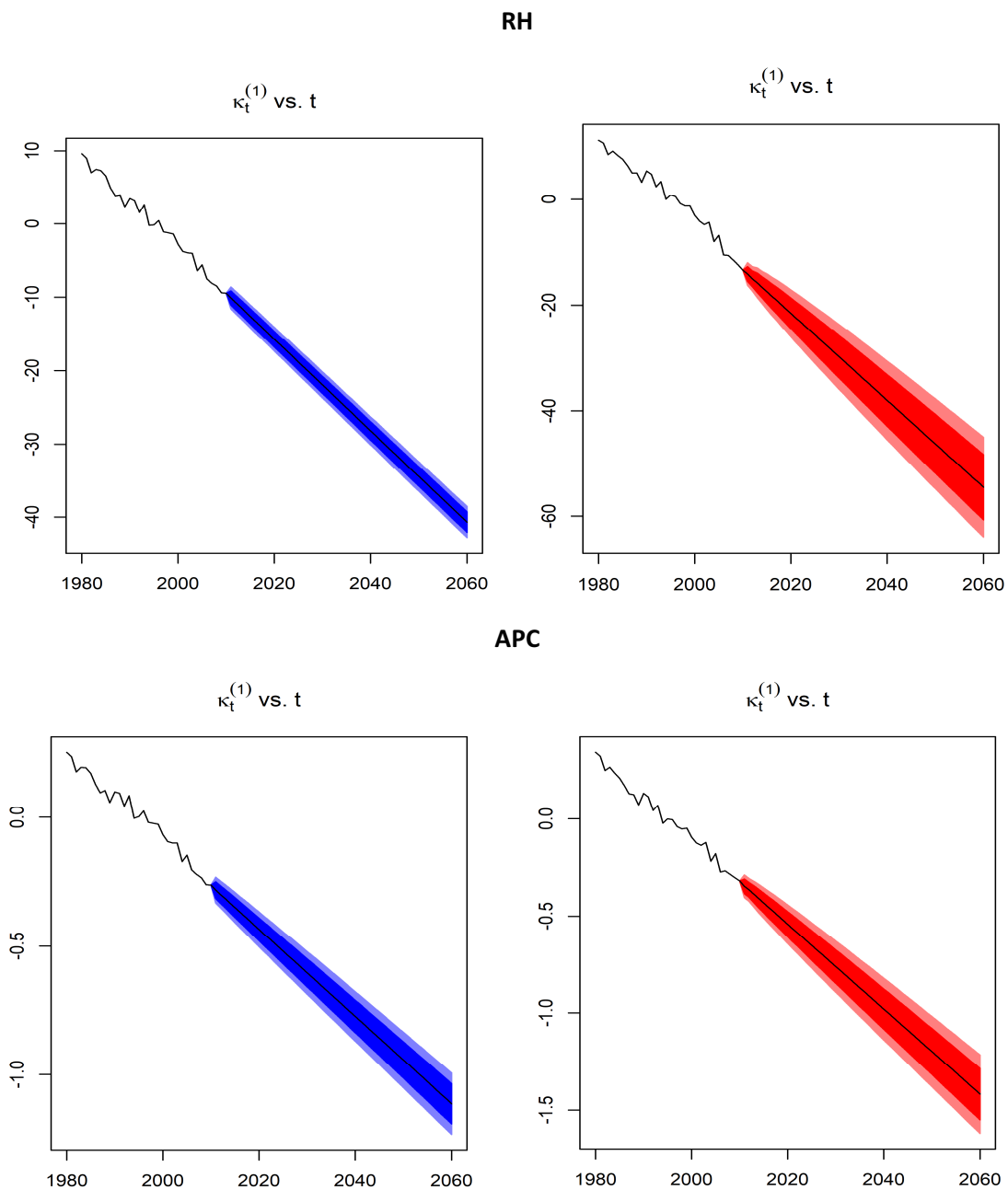
Tabela 5.4 – Erro Quadrático Médio o e Erro Médio Percentual Absoluto para cada um dos modelos projetados para os homens e as mulheres. Fonte: Autor.

Modelos	Homens		Mulheres	
	EQM	EPAM	EQM	EPAM
LC	0.002270226 (5)	4.751019 (4)	0.002024886 (5)	6.217703 (4)
RH	0.001795962 (1)	3.761219 (1)	0.001754705 (1)	5.959466 (3)
APC	0.001950661 (2)	3.971971 (2)	0.001918879 (3)	5.521956 (2)
CBD	0.003312678 (7)	5.058600 (7)	0.002642461 (6)	6.261280 (5)
M6	0.002730484 (6)	4.285401 (3)	0.001815033 (2)	5.518910 (1)
M7	0.002200066 (3)	4.920828 (6)	0.004311618 (7)	14.048681 (7)
PLAT	0.002244783 (4)	4.761903 (5)	0.001955364 (4)	6.390732 (6)

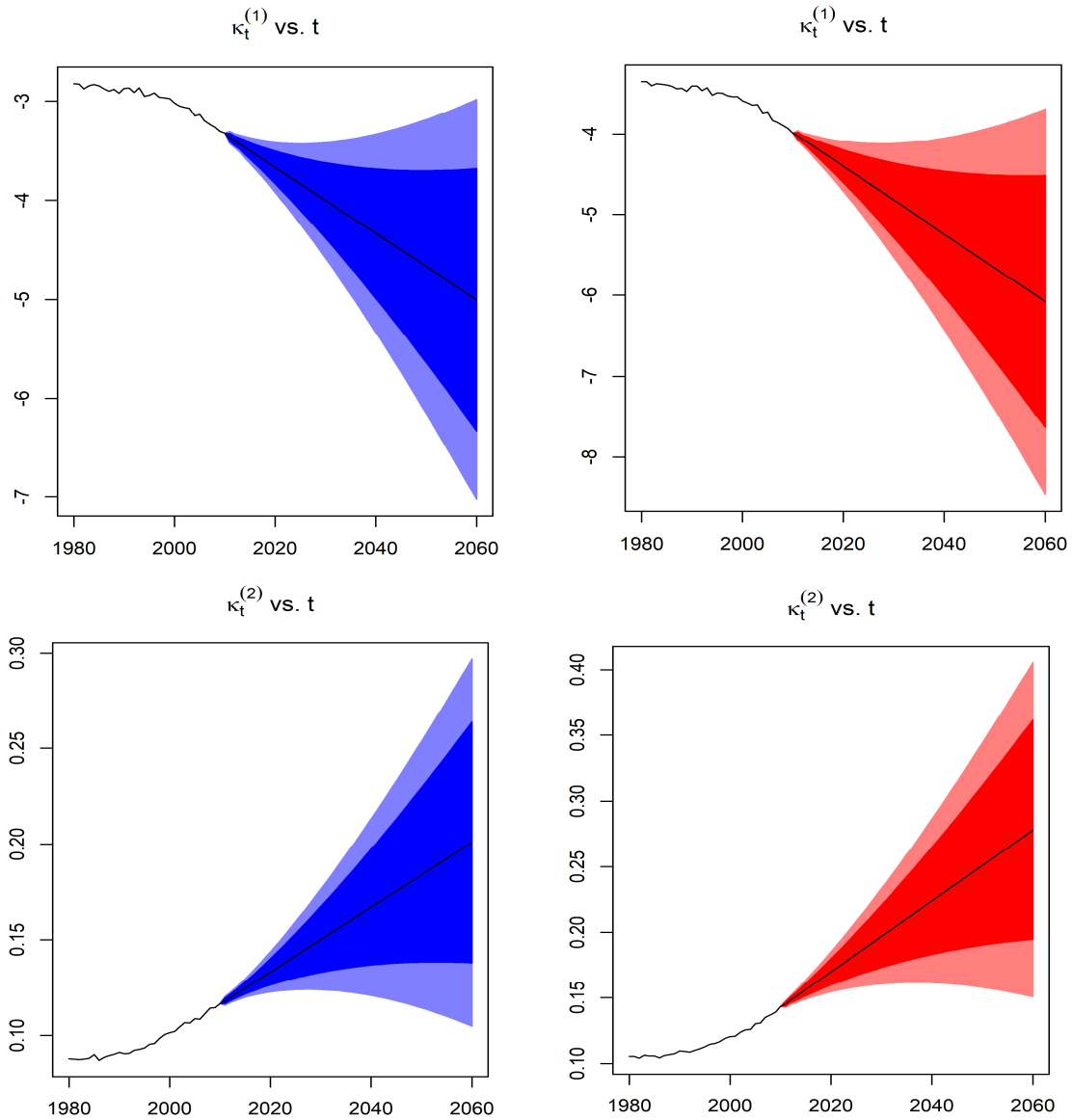
Para além de um bom ajustamento aos dados já verificado, o modelo de RH, apresenta um bom desempenho preditivo a curto prazo, tanto para os homens, como para as mulheres. O topo da classificação fica completo com os modelos APC e M6, apesar da fraca performance notada relativamente ao ajustamento aos dados de 1980 a 2015.

A Figura 5.17 ilustra as previsões para os índices de período,  $k_t^{(1)}$  e  $k_t^{(2)}$  dos modelos que apresentaram melhor desempenho na projeção do nível de mortalidade, RH, APC e M6 (vide Anexo A para os restantes modelos) para os intervalos de confiança a 80% e 95%, representados pelos tons azuis/ vermelhos mais escuro e mais claros, respetivamente.

Figura 5.17 - Previsão dos índices de período dos modelos RH, APC e M6 aplicados à população masculina (painel à esquerda) e feminina (painel à direita) para as idades entre os 55 e 90 anos e o período 2011 a 2060. Fonte: Autor.



## M6

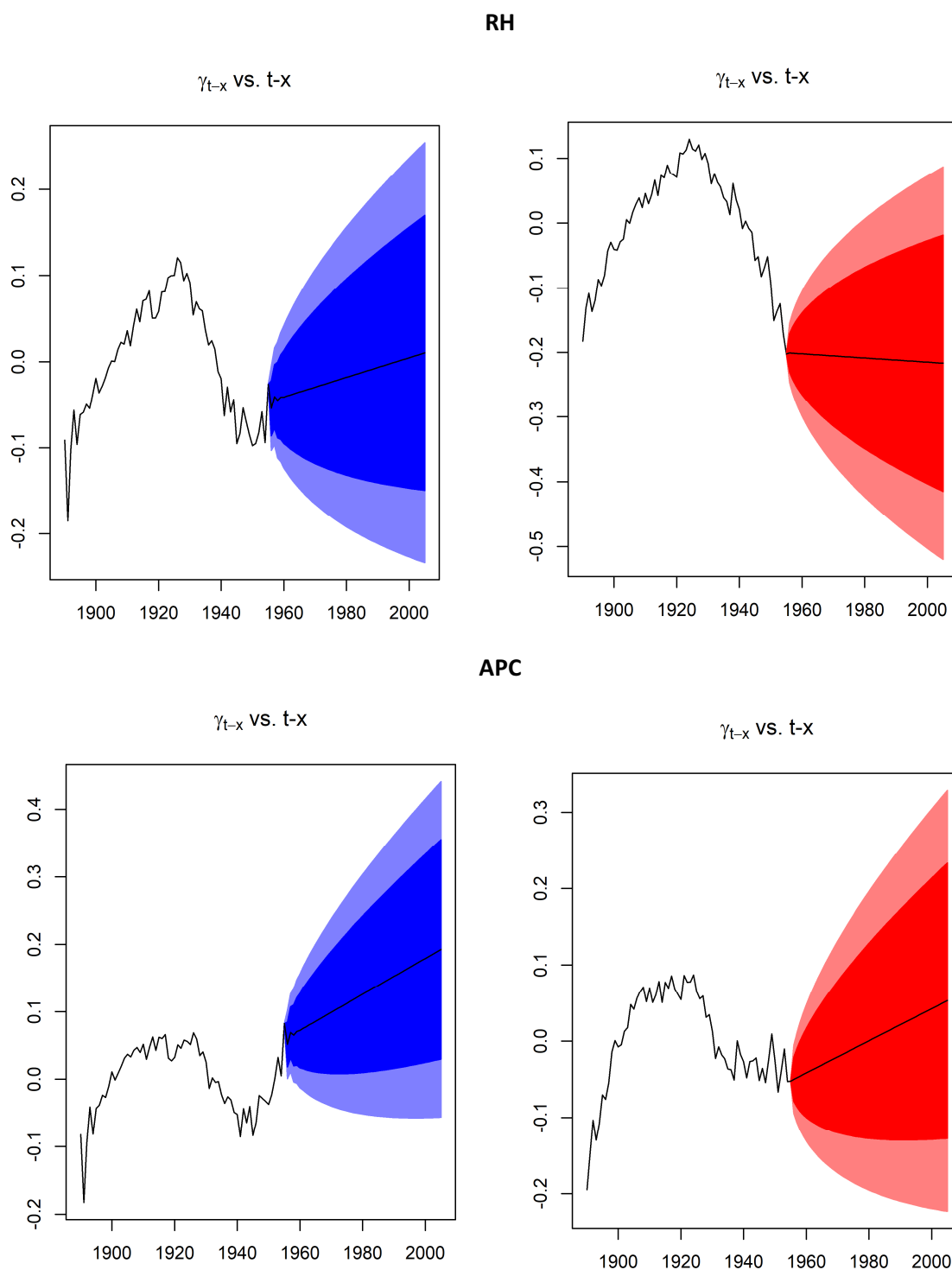


Relativamente aos modelos RH e APC, observa-se que o nível mortalidade cai rápida e abruptamente para o índice de período  $k_t^{(1)}$ , associado a um intervalo de previsão a 95% estreito, para ambos os sexos, impondo assim desafios, ao utilizar os modelos na avaliação do risco de longevidade em percentis extremos.

Em relação ao modelo M6, o índice de mortalidade tem uma tendência decrescente mais lenta e a inclinação crescente de  $k_t^{(2)}$  significa que a curva do nível de mortalidade está a ficar ligeiramente mais inclinada ao longo do tempo: isto é, as melhorias de mortalidade foram maiores em idades menores.

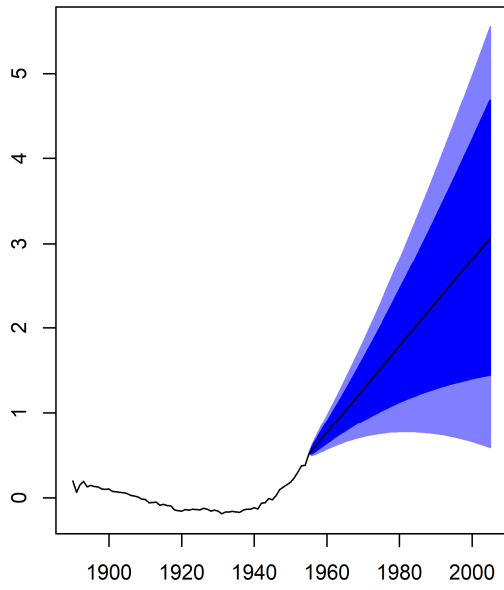
A Figura 5.18 representa a dinâmica do efeito de coorte para homens e mulheres dos dados de mortalidade portuguesa para os modelos RH, APC e M6 (vide Anexo A para os restantes modelos) em relação ao ano de nascimento. A linha preta representa a previsão central e as sombras claras e escuras representam os níveis de confiança a 80% e 95%, respetivamente. As projeções indicam um aumento do índice de mortalidade devido ao efeito de coorte.

Figura 5.18 - Previsão dos índices de coorte dos modelos RH, APC e M6 aplicados à população masculina (painel à esquerda) e feminina (painel à direita) para as idades entre 55 e 90 anos e o período 1956 a 2005. Fonte: Autor.

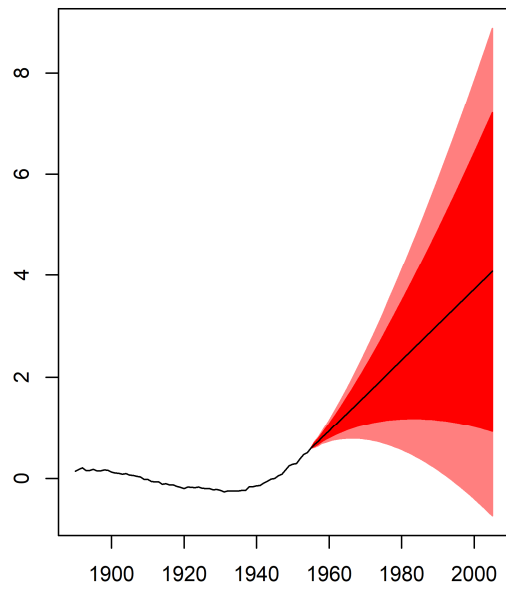


**M6**

$\gamma_{t-x}$  vs.  $t-x$



$\gamma_{t-x}$  vs.  $t-x$



#### 5.4. INCERTEZA NOS PARÂMETROS: CONSTRUÇÃO DE INTERVALOS DE CONFIANÇA

A estimação de parâmetros não envolve apenas o estimar do valor central, mas também a incerteza sobre a estimativa. Isso ocorre devido ao carácter estocástico dos modelos e essa aleatoriedade se traduz em incerteza nas estimativas dos parâmetros dos modelos. Para quantificar a incerteza associada aos parâmetros, alguns autores sugerem a construção de intervalos de confiança. Os intervalos de confiança fornecem um intervalo razoável de valores para onde a previsão pode cair se o conjunto de dados for recalculado usando novos dados. Quanto maior a amplitude dos intervalos maior é a incerteza das nossas estimativas.

A construção de intervalos de confiança para quantis baseado em técnicas de simulação pode ser feita seguindo três abordagens (Brouhns, Denuit, & Vankeilegom, 2005):

- A técnica de Simulação de Monte Carlo que gera uma nova amostra de dimensão igual à original e determinam-se novos parâmetros estimados a partir da nova amostra e o respetivo quantil. O processo é repetido  $N$  ( $n^\circ$  de simulações) vezes obtendo assim  $N$  curvas de quantis que são ordenados por ordem crescente, permitindo assim, a associação do correspondente intervalo de confiança  $100(1 - \alpha)\%$ .
- O método semi-paramétrico de reamostragem (*bootstrap*) consiste na substituição dos dados observados repetidamente para criar conjuntos de dados semelhantes ao conjunto original e, em seguida, ajustá-los de modo a construir a distribuição dos parâmetros estimados. A segunda fase do processo é semelhante à Simulação de Monte Carlo
- A terceira alternativa não paramétrica, assenta-se na construção de uma amostra do mesmo tamanho que os dados originais com a redistribuição dos dados, escolhendo cada observação com igual probabilidade. A reamostragem não paramétrica não faz quaisquer suposições sobre a distribuição dos dados. O restante procedimento é similar ao método paramétrico.

Habermam e Renshaw (2008) concluíram que a abordagem de simulação de Monte Carlo não deve ser utilizada na mensuração da incerteza sobre os parâmetros do modelo de LC, porque diferentes escolhas nas restrições dos parâmetros do modelo resultam em intervalos de previsão e de confiança simulados amplamente diferentes. Portanto, no presente estudo a nossa escolha incidiu-se sobre a técnica de Bootstrap semi-paramétrico, uma vez que, na alternativa não paramétrica, perante uma amostra de dados pequena, a distribuição assintótica é uma aproximação pobre da distribuição de amostra. Aplicamos a alternativa semi-paramétrica sobre os resíduos dos modelos estimados que devem ser independentes e identicamente distribuídos, assumindo a hipótese de distribuição do número de mortes, Poisson ou Binomial, calculados em (5.6) e (5.7), respetivamente. Como citado em Haberman & Renshaw (2008), esses resíduos permitem a manutenção da hipótese de distribuição inicial do número de mortes e proporcionam intervalos mais simétricos.

Segue-se uma sistematização das etapas requeridas pelo algoritmo de Bootstrap assente nos resíduos para a construção de intervalos de confiança (Bravo, 2007):

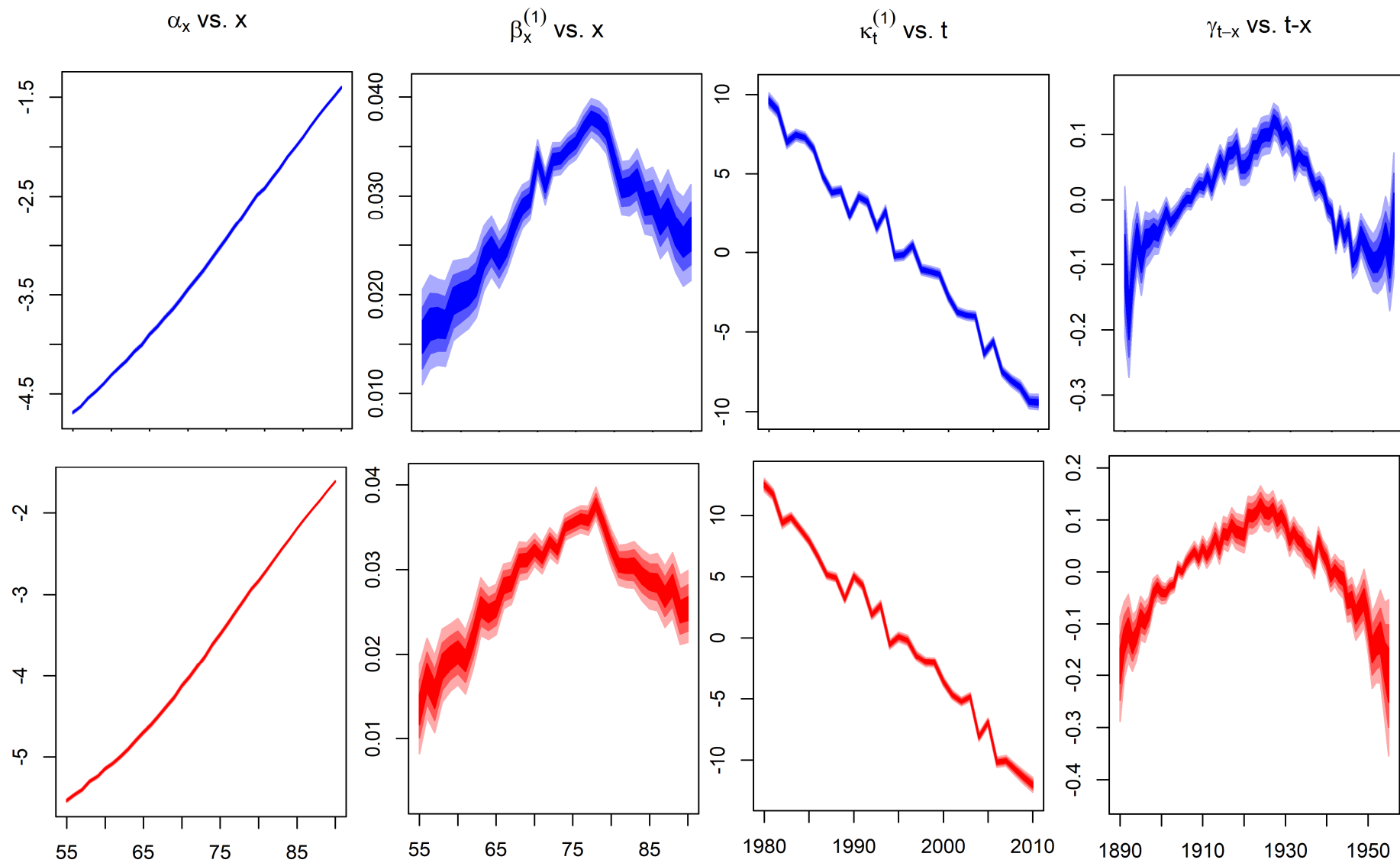
1. Após a estimação dos parâmetros de cada um dos modelos pelo método da máxima verosimilhança, para cada modelo, uma matriz de resíduos  $R$  é obtida.
2. Geram-se  $B$  (assumimos  $B = 2000$ ) replicas de  $R^{(n)}$ ,  $n = 1, \dots, B$ , por amostragem com a substituição dos elementos da matriz  $R$ . Em seguida, adicionamos cada matriz  $R^{(n)}$  à matriz original dos dados, obtendo as correspondentes  $B$  diferentes amostras de Bootstrap. As correspondentes matrizes para o número estimado de mortes,  $\hat{d}_{x,t}^{(b)}$ ,  $n = 1, \dots, B$ , são calculadas invertendo as equações (5.6) e (5.7).

3. Determinam-se as  $B$  estimativas dos parâmetros  $\{\hat{\alpha}_x^{(b)}, \hat{\beta}_x^{(b)}, \hat{k}_x^{(b)}, \hat{\gamma}_x^{(b)}, n = 1, \dots, B\}$  aplicando o método de máxima verosimilhança sobre a matriz  $(E_{x,t}; \hat{d}_{x,t}^{(b)})$ ;
4. Os índices de tempo e coorte são então projetados com base em um modelo ARIMA (p,d,q) selecionado de acordo com as observações iniciais.
5. Calculam-se as taxas centrais de mortalidade  $\hat{m}_{x,t}^{(b)}$  para cada idade  $x = 55, \dots, 90$  e ano de calendário  $t = 1980, \dots, 2010$ .
6. Por último, constrói-se os intervalos de confiança calculando os percentis correspondentes a um determinado nível de confiança.

Aplicamos o procedimento descrito acima ao modelo de Lee e Carter com efeito de coorte que apresentou o melhor desempenho tanto a nível de ajustamento como de previsão. O teste foi realizado sobre os resíduos do modelo. Foram geradas 2000 reamostras.

A Figura 5.19 apresenta os parâmetros de idade, tempo e coorte reamostrados para o modelo de RH adaptados à população masculina (painéis superiores) e feminina (painéis inferiores), entre 55 a 90 anos de idade e o período de tempo compreendido entre de 1980 a 2010.

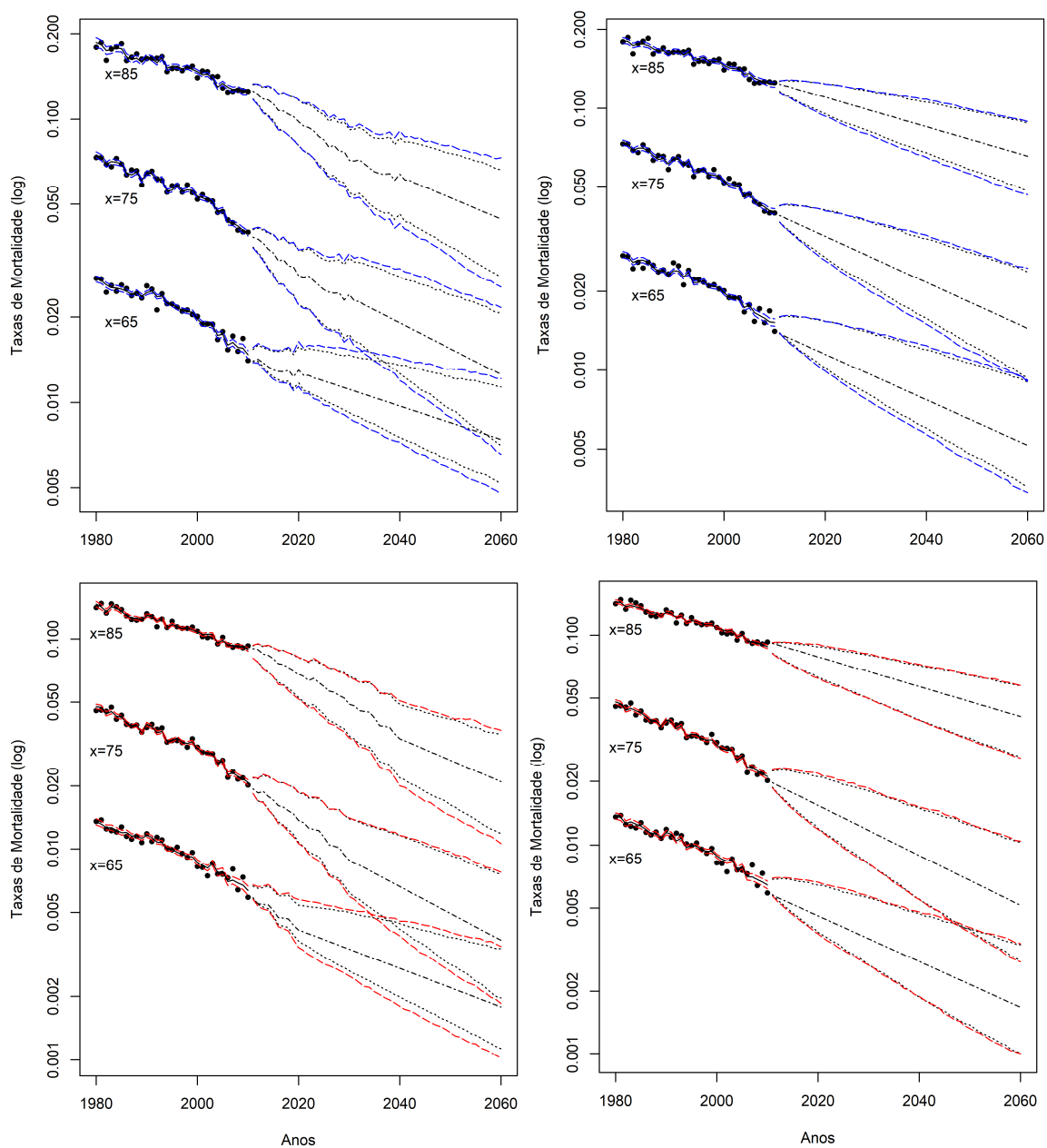
Figura 5.19 - Parâmetros do modelo de RH reamostrados para os níveis de confiança de 50%, 80% e 95%. Fonte: Autor.



As partes sombreadas representam intervalos de confiança nos níveis de 50%, 80% e 95%. A incerteza associada à função estática de idade  $\alpha_x$  é insignificante porque de acordo com a especificação do modelo presume-se que  $\alpha_x$  seja conhecido e, portanto, toda a incerteza do parâmetro no modelo é alocada aos outros termos no modelo. A incerteza relativa ao nível de mortalidade é modesta, por outro lado, o parâmetro de idade  $\beta_x^{(1)}$  e o efeito de coorte  $\gamma_{t-x}$  aparentam um nível de incerteza significativo.

Assim sendo, analisámos o impacto da incerteza nos parâmetros em três idades específicas: 65, 75 e 85, projetados para um horizontal temporal de 50 anos, considerando 2000 possíveis trajetórias dos modelos. Conforme referimos, o efeito de coorte é um dos principais responsáveis pela incerteza, portanto, aplicámos esta análise aos modelos de Lee e Carte com e sem efeito de coorte, de modo a determinar o peso da incerteza do parâmetro de coorte.

Figura 5.20 - Taxas de mortalidade aos 65, 75 e 85 anos dos modelos RH (à esquerda) e LC (à direita) para um intervalo de 95% de confiança com e sem incerteza nos parâmetros. Fonte: Autor.



Na Figura 5.20 os pontos pretos representam as taxas de mortalidade observadas de 1980 a 2010, as linhas sólidas pretas indicam as taxas ajustadas correspondentes e as linhas tracejadas azuis/vermelhas caracterizam os intervalos de confiança a 95%, incluindo a incerteza do parâmetro. Para o período de projeção 2011-2060, as linhas pretas tracejadas representam os valores centrais projetados e as linhas pontilhadas pretas e azuis/vermelhas correspondem aos intervalos de previsão a 95%, excluindo e considerando a incerteza dos parâmetros respectivamente.

Para o modelo de RH observa-se que, para os 65 anos o nível de mortalidade diminui lentamente para os homens e para as mulheres, enquanto que para as idades de 75 e 85 anos a tendência de mortalidade diminui com maior inclinação. Nota-se um ligeiro aumento da distância entre os intervalos com e sem incerteza em relação ao modelo de LC para as 3 idades específicas, revelando a evidência de variabilidade nos parâmetros para ambos os géneros. Com a exclusão do efeito de coorte a presença de incerteza nos parâmetros é quase insignificante para os dois géneros. O encolhimento dos intervalos de confiança ao longo do tempo no modelo de Lee & Carter, justificada pela rigidez da estrutura do modelo, é uma característica em comum com outros estudos (Li, Hardy, & Tan, 2006) .

## 5.5. SUMÁRIO

Iniciamos a nossa aplicação com a análise da evolução das taxas brutas de mortalidade da população portuguesa no período entre 1940-2010. Da análise destacamos, para ambos os géneros, a rectangularização e expansão da curva de sobrevivência, devido ao aumento das taxas de sobrevivência em todas as idades e à concentração das mortes nas idades mais avançadas.

Propusemo-nos a ajustar e comparar os modelos selecionados à população portuguesa no período entre 1980 – 2010, para homens e mulheres, separadamente, entre os 55 e 90 anos. No geral, de acordo, com o BIC, os modelos de Lee e Carter com e sem efeito de coorte e o modelo de PLAT apresentaram um bom desempenho no ajustamento aos dados da população masculina e feminina. Para uma análise mais completa da qualidade do ajustamento, recorremo-nos à análise dos resíduos, onde o modelo de Renshaw e Habeman apresentou o menor desvio para ambos os sexos. Adicionalmente, através da análise gráfica, notou-se para os modelos de LC e CBD, padrões diagonais muito proeminentes, indicando a incapacidade desses modelos em capturar o efeito de coorte.

Para todos os modelos projetamos as taxas futuras de mortalidade desde 2010 até 2060. Apesar do período de ajustamento ser pequeno, consideramos um largo horizonte temporal para projeção devido ao propósito atuarial do nosso estudo. Através do cálculo dos erros de previsão para o período entre 2010 – 2015, concluímos que, para além de um bom ajuste aos dados, o modelo de RH apresenta resultados satisfatórios, relativamente, à capacidade preditiva para ambos os sexos.

Para quantificar a incerteza inerente às estimativas dos parâmetros do modelo foram calculados intervalos de confiança empíricos para o modelo de RH. Dada a pequena dimensão da amostra, empregamos o método semi – paramétrico Bootstarp (com base nos resíduos). Averiguamos que o parâmetro de coorte é a principal fonte de incerteza. Portanto, dispusemo-nos a reamostrar os modelos de LC e RH, onde calculamos o impacto da incerteza para 3 idades específicas, 65, 75 e 85 anos. Verificou-se que, excluindo o efeito de coorte (modelo de LC) o nível de incerteza reduz-se consideravelmente, em relação ao modelo com efeito de coorte.

Os resultados obtidos neste capítulo confirmam que a possível presença de efeito de coorte verificado anteriormente, que com o passar dos anos se desvanece.

## 6. AVALIAÇÃO DO RISCO DE LONGEVIDADE EM UMA CARTEIRA DE ANUIDADES

A principal motivação para este estudo era comparar vários modelos de mortalidade e determinar quais eram os mais adequados para prever a mortalidade portuguesa em idades mais avançadas. Isso reflete uma preocupação com o risco de longevidade - risco inerente ao aumento inesperado da esperança de vida - para o qual os fundos de pensões e *annuity providers* estão expostos, que veio agravar-se com as recentes alterações nas normas contabilísticas e a nova Diretiva Solvência II.

Solvência II aborda o risco de longevidade como um sub-módulo do módulo do Risco de Subscrição de Vida, que é uma componente importante do capital regulatório da empresa e estabelece regras para o cálculo do requisito de capital de solvência devido ao risco de longevidade, que pode ser modelado por meio da chamada Fórmula Padrão ou de um modelo interno adaptado às características individuais da empresa em questão. O uso de métodos de previsão de mortalidade é indispensável em qualquer modelo interno actuarialmente adequado ao risco de longevidade.

O desvio sistemático do número de mortes do seu valor esperado nas idades avançadas causará um aumento nas responsabilidades dos planos de pensões de benefício definido e do valor atual dos benefícios a serem pagos no futuro. Do ponto de vista da contabilidade corporativa, um aumento no passivo significaria um aumento de custos e uma redução da rentabilidade da empresa.

### 6.1. CASO PRÁTICO: COMPOSIÇÃO E ESTATÍSTICAS DO FUNDO

Como caso prático, consideramos fundo de pensões fechado baseado no mercado português, onde todos os participantes já são pensionistas. A base de dados inclui a informação relativamente ao género, data de nascimento e o valor corrente da pensão.

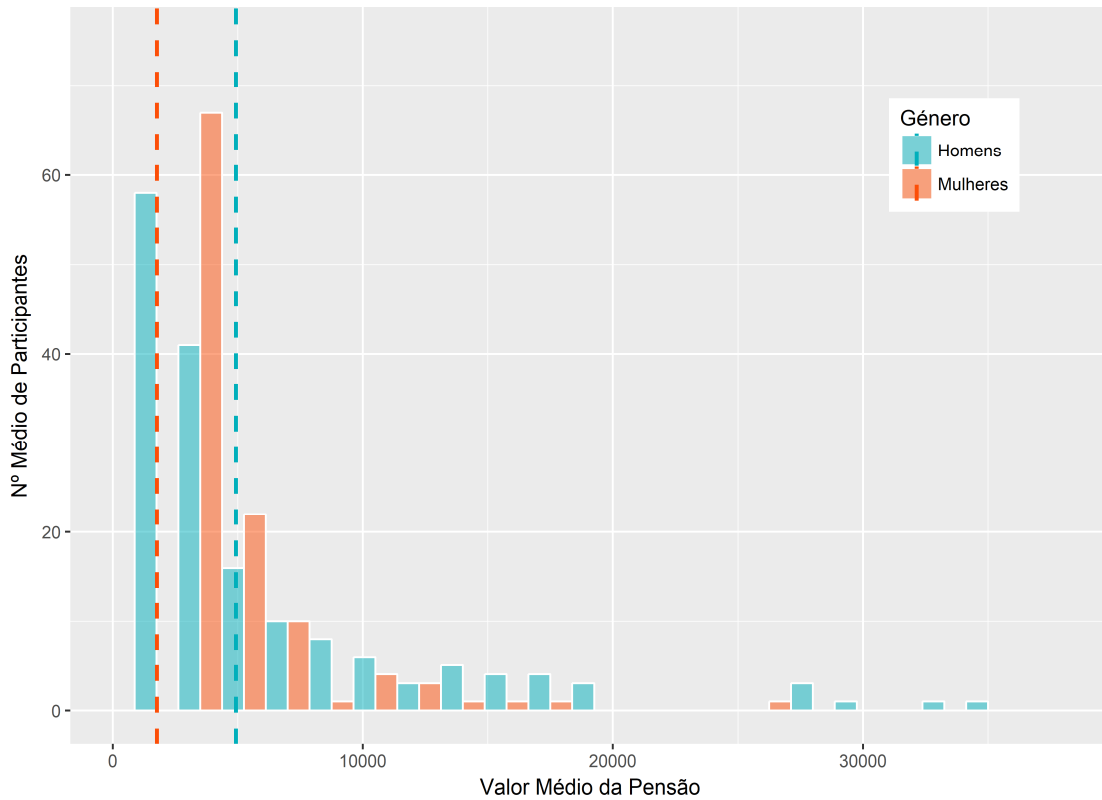
A Tabela 6.1 e a Figura 6.1 expõem a composição do fundo relativamente ao número de participantes por faixas etárias e o número de participantes número por valor médio da pensão, respetivamente por géneros:

Tabela 6.1 - Número de participantes do fundo de pensões. Fonte: Autor.

População	Número de observações	[65; 75[	[75; 85[	[85; 95[	[95; 105]
Homens	214	46	90	74	4
Mulheres	496	88	201	195	12
Total	710	134	291	269	16

O fundo é constituído maioritariamente por mulheres em idades muito avançadas. De certo modo, é espetável, já que as mulheres constituem a maioria da população envelhecida devido a sua elevada esperança média de vida. No entanto, convém realçar que parte da população feminina do fundo são beneficiárias dos titulares, o que depois se refletirá no valor médio da pensão, devido à percentagem de reversão aplicada sobre o valor da pensão do titular, em caso de morte do mesmo.

Figura 6.1 - Nº de Participantes por Valor Médio da Pensão. Fonte: Autor.



As linhas tracejadas representam os valores médios das pensões para os homens e para as mulheres. As pensionistas recebem, em média, 1 779 € mensalmente, o que equivale a 64% da pensão média recebida pelos homens. No entanto, se excluirmos os *outliers* com pensões acima dos 20 000 €, o diferencial entre gêneros reduz para 57%.

## 6.2. EXTRAPOLAÇÃO DOS DADOS

Os modelos foram ajustados e projetados para as idades compreendidas entre 55 a 90 anos. Portanto, utilizamos a lei de mortalidade de Kannisto proposta em (Thatcher, Kannisto, & Vaupel, 1998) para estendermos as taxas de mortalidade em relação à idade. O modelo pressupõe que os dados para as idades avançadas estão muito próximos de um modelo logístico simples, no qual é uma função linear de:

$$\mu_x = \frac{ae^{bx}}{1 + ae^{bx}} + c \quad (6.1)$$

ou

$$\text{logit}(q_x) = \ln(a) + bx \quad (6.2)$$

onde  $a$  denota o nível de mortalidade à idade inicial, no nosso caso  $x = 55$ ,  $b$  representa a taxa de crescimento da mortalidade ao longo dos anos e  $c$  é uma constante.

Adicionalmente extrapolamos a projeção das taxas de mortalidade do modelo ajustado de RH para a população feminina e masculina até 2080, período pelo qual a população do fundo de pensão estará extinta, uma vez que o fundo é fechado e admitindo que a probabilidade de morte aos 120 anos é igual a 1.

### 6.3. DISTRIBUIÇÃO DO VALOR ATUAL DAS ANUIDADES

Começamos por calcular o valor atual dos pagamentos futuros para uma única vida para cada um dos participantes. Consideramos uma taxa de juro fixa, uma vez que, o nosso foco é unicamente no risco de longevidade. A fórmula geral do cálculo do valor atual da carteira é dada por:

$$VA = \sum_{t=1}^{\omega-x} {}_t p_x * (1 + i)^{-t} * C_t * (1 + r)^t \quad (6.3)$$

onde  ${}_t p_x$  são as probabilidades de sobrevivência,  $i$  é a taxa de juro,  $t$  é o período de desconto (o número de anos desde da idade à data da avaliação até a idade máxima – 120)  $C_t$  representa pensões e  $r$  a taxa de crescimento das pensões.

Pressupostos do Portfolio à data de avaliação (31/12/2018):

- Taxa de juro: 3% ao ano;
- Taxa de crescimento das pensões: 1.25% por ano;
- Idade de reforma: 65 anos;
- Idade limite: 120 anos

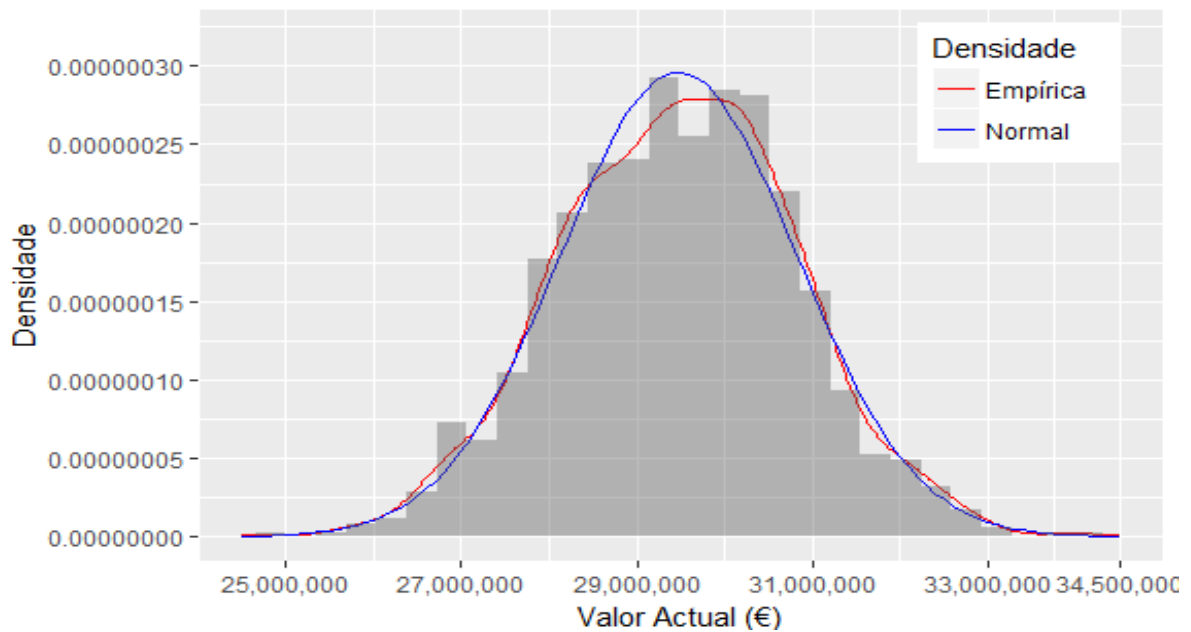
Considerando as hipóteses referidas acima, determinamos um valor atual da carteira equivalente a 29 342 631.00 €.

A variação do valor presente dos pagamentos futuros das anuidades desempenha um papel importante na gestão do risco. Portanto há uma necessidade em saber como está dispersa a distribuição dos valores atuais. Apenas consideramos as variações no valor atual provenientes das alterações nas taxas de mortalidade. Para tal geramos 1000 simulações de cada um dos modelos de RH ajustados para homens e mulheres e determinamos o valor atual de cada um dos cenários.

Tabela 6.2 - Estatísticas descritivas dos valores atuais gerados da carteira de anuidades. Fonte: Autor.

Estatísticas						
Mínimo	1º Quantil	Média	Mediana	Desvio Padrão	3º Quantil	Máximo
24 730 220	28 503 742	29 472 002	29 485 782	1 347 175	30 383 879	34 152 366

Figura 6.2 – Valor atual simulado com as curvas de densidade e normal sobrepostas. Fonte Autor



Os valores gerados assemelham seguir uma distribuição normal. Para validar este pressuposto recorreremos aos testes de normalidade de Shapiro - Wilk e Jarque - Bera, cujas hipóteses nulas são que a população é normalmente distribuída:

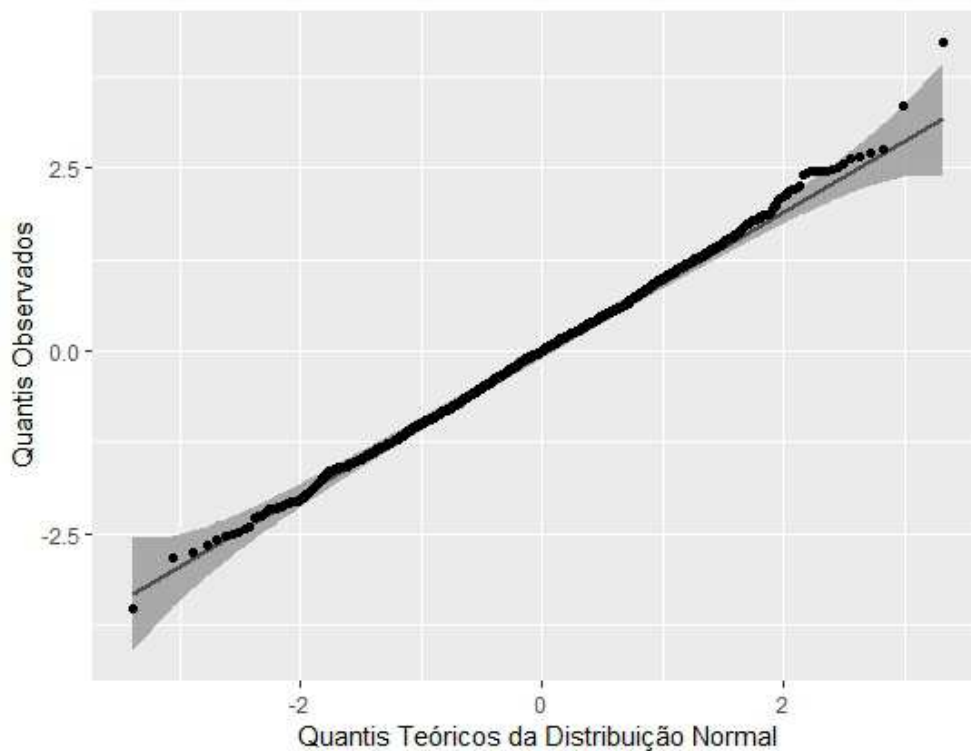
Tabela 6.3 – Testes de Normalidade para os valores atuais gerados

Teste Shapiro Wilk		Teste Jarque Bera		
w	P - value	$\chi^2$	df	P - value
0.99898	0.8607	0.094362	2	0.9539

Para os dois testes o valor de p é superior a  $\alpha = 0.05$  portanto não rejeitamos a hipótese de normalidade para um nível de significância de 5%.

Adicionalmente ilustramos o gráfico Quantil – Quantil (*Q-Q plot*) que compara os quantis da amostra com os da normal.

Figura 6.3 - Q-Q plot dos valores atuais gerados. Fonte: Autor.



Como se verifica, os quantis amostrais e teóricos estão bastante próximos. E os pontos caem quase todos dentro do intervalo de confiança, confirmando assim as conclusões retiradas dos testes de normalidade.

#### 6.4. MEDIDAS DE RISCO

O Valor em Risco (VaR) é uma das medidas mais utilizadas na avaliação de riscos. Recentemente o Valor em Risco Condicional (*Expected Shortfall* – ES) tem aparecido como uma alternativa ao VaR. O Valor em Risco é uma medida de risco que combina objetivamente a sensibilidade da carteira às alterações do nível de mortalidade e a probabilidade de uma dada variação.

O VaR é a perda máxima que pode ocorrer em um determinado portfólio num certo período de tempo para um dado nível de confiança. Enquanto que o ES representa o valor esperado condicional das perdas de uma carteira além do VaR para o mesmo nível de confiança e durante o mesmo período de tempo.

Admitindo a hipótese de normalidade, matematicamente, as duas medidas são definidas como:

$$VaR_{1-\alpha} = \mu_t + \sigma_t z_{1-\alpha} \quad (6.4)$$

$$ES_{1-\alpha} = \mu_t + \sigma_t \frac{f(z_{1-\alpha})}{\alpha} \quad (6.5)$$

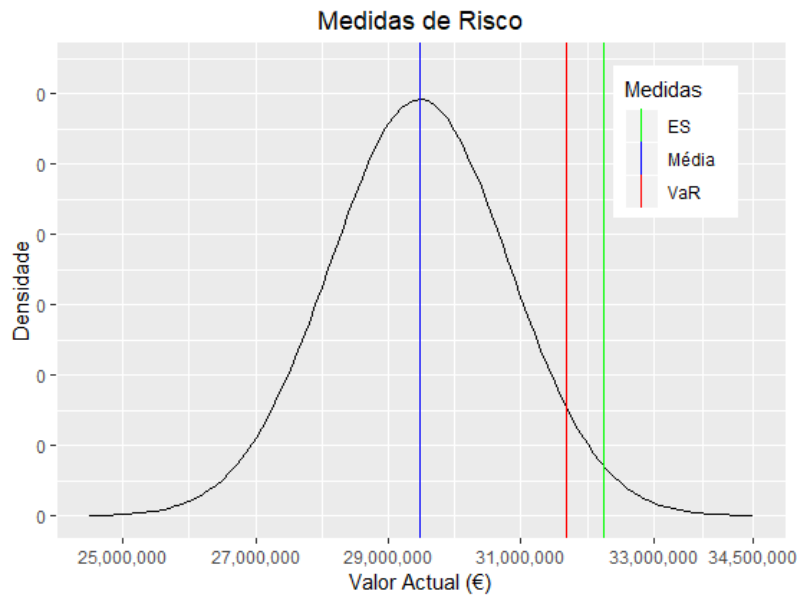
onde  $f(z)$  é a função de distribuição de  $z \sim N(0, 1)$ ,  $z_{1-\alpha}$  é o quantil  $\alpha$  e  $\mu_t$  e  $\sigma_t$  representam a média e o desvio padrão respetivamente. Vide Sandström (2010).

A Tabela 6.4 inclui os valores do VaR e ES para os 3 níveis de confiança mais utilizados para apuramento do requisito de capital baseado no risco mais adequado para o nível de solvência:

Tabela 6.4 - Medidas de Risco: VaR e ES. Fonte: Autor.

VaR			ES		
90%	95%	99%	90%	95%	99%
31 198 477	31 687 909	32 606 001	31 836 273	32 250 838	33 062 513

Figura 6.4 - Curva da Norma assinalada com o VaR95%, ES95% e a Média. Fonte: Autor.



A potencial perda máxima do fundo relativamente ao valor atual é igual a  $31\,687\,909 - 29\,342\,631 = 2\,345\,278$  € para um nível de confiança de 95%, isso significa que a hipótese do fundo perder mais do que 2 345 278€ de um dia para o outro é de 5%.

## 7. CONCLUSÕES

Como mencionado na Introdução, a pesquisa foi realizada com o objetivo de apresentar linhas orientadoras a projeção da mortalidade portuguesa em idades avançadas para os homens e para as mulheres separadamente. Para tal, recorreremos ao estudo apresentado em (Villegas et al., 2015) que contempla a modelação estocástica através dos métodos generalizados de idade, período e coorte (GAPC).

Uma análise comparativa dos sete modelos de mortalidade estocástica selecionados foi conduzida. A capacidade de ajuste de cada um dos modelos foi examinada utilizando os critérios de informação, AIC e BIC, assim como, a análise dos respetivos resíduos. Recorrendo ao AIC, o modelo de Renshaw & Haberman apresentou melhores resultados na calibração dos dados dos homens e das mulheres, por outro lado, valendo-se do BIC, o Modelo Poisson Lee & Carter distingue pelo seu desempenho no ajuste dos dados dos dois géneros. O Modelo de PLAT apresentou também resultados muito satisfatório no ajuste aos dados da população portuguesa para ambos os sexos.

Relativamente, à análise gráfica dos resíduos, permitiu-nos visualizar uma estrutura sistemática em termos de resíduos para a população masculina entre os 65 e 75 anos, nos finais dos anos 80 e meados da década de 90, nos modelos que não incorporam o efeito de coorte. O que evidencia a importância da consideração do efeito de coorte na projeção dos níveis de mortalidade, de ambos sexos, pelos menos a curto prazo. Conforme mencionado em estudos anteriores.

Sendo que, um bom ajuste aos dados históricos não implica necessariamente um bom poder preditivo, então as correspondentes taxas de mortalidade de cada um dos modelos foram projetadas para um horizonte temporal de 50 anos. A capacidade preditiva foi avaliada através da análise das medidas de erro, Erro Quadrático Médio e Erro Percentual Absoluto Médio, em que, o modelo de Renshaw & Haberman destacou-se perante os outros 6 modelos, tanto para os homens, como para as mulheres. O que corrobora os resultados apresentados em (Coelho, 2012) para a população masculina portuguesa desde de 1950. Também, averiguarmos que o índice de coorte é o principal responsável pela incerteza, via a construção de intervalos de confiança, pelo meio do método de Bootstrap sobre os resíduos.

Adicionalmente, a aplicação do modelo de Lee e Carter com efeito de coorte (RH) no cálculo do valor atual de uma carteira de anuidades de um fundo de pensões foi realizada. E determinámos o Valor em Risco e o Valor em Risco Condicional para a carteira para um adequado nível de solvência. No entanto, é importante ressaltar que consideramos apenas a variabilidade dos níveis de mortalidade, ignorando assim, outros fatores biológicos ou riscos aleatórios, como a taxa de juro.

É plausível que, dado o pequeno tamanho da amostra dos dados de mortalidade considerados, possa ter influenciado os resultados obtidos, visto que, não foi possível alargar a janela temporal para a comparação dos índices de mortalidade projetados para mais do que 5 anos, ou até mesmo, conduzir vários *backtesting* com períodos de tempo distintos para o período de teste.

A modelação da mortalidade é um tópico muito amplo e importante por várias razões, tais como melhorar as estimativas dos custos dos fundos de pensões, decisões individuais de poupança e planeamento de planos médicos pós reforma. O que tem conduzido a diversos estudos que acreditamos que seriam relevantes linhas de trabalho sobre a mortalidade portuguesa para o futuro. De salientar: a compreensão das diferenças socioeconómicas na mortalidade, como por exemplo, o nível de escolaridade, o rendimento ou o estado de saúde; no presente trabalho averiguamos a incertezas nos parâmetros dos modelos, mas também, seria interessante, analisar a incerteza proveniente do próprio modelo; e por último, projetar o nível de mortalidade portuguesa numa ótica multi – populacional, por exemplo com a Espanha, devido à proximidade geográfica ou outro país com o mesmo fluxo demográfico.

## 8. BIBLIOGRAPHY

Akaike, H. (1974). A new look at the statistical model identification. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 19 (6): 716–723, doi:10.1109/TAC.1974.1100705, MR 0423716.

Alho, J. Bravo, J. M. & Palmer, E. (2012). Annuities and Life Expectancy in NDC. in: Holzmann, R., Palmer, E., Robalino, Non-Financial Defined Contribution Pension Schemes in a Changing Pension World, Politics and Financial Stability. World Bank Publications, Vol. 2, Washington, 2012, 395-436. [https://doi.org/10.1596/9780821394786\\_CH22](https://doi.org/10.1596/9780821394786_CH22)

ASF. (2018). Montantes Geridos dos Fundos de Pensões – 2017. [http://www.asf.com.pt/NR/rdonlyres/C293F0E4-4B2A-4EADA5B76FCB32543180/0/Montantes geridos2017.pdf](http://www.asf.com.pt/NR/rdonlyres/C293F0E4-4B2A-4EADA5B76FCB32543180/0/Montantes%20geridos2017.pdf)

Blaschke, E. (1923). Sulle tavole di mortalità variabili col tempo. *Giornale di Matematica Finanziaria* 5, 1-31.

Bravo, J. M. (2007). Tábuas de Mortalidade Contemporâneas e Prospectivas: Modelos Estocásticos, Aplicações Actuariais e Cobertura do Risco de Longevidade. Dissertação de Doutoramento em Economia pela Universidade de Évora, Maio. Retrieved from: <http://www.rdp.uevora.pt/handle/10174/11148?locale=pt>

Bravo, J. M., Coelho, E., & Magalhães, M. G. (2010). Mortality projections in Portugal. In EUROSTAT - European Commission (eds.), *Work session on demographic projections*, EUROSTAT-EC Collection: Methodologies and working papers, Theme: Population and Social Conditions (pp. 241–252).

Bravo, J. M. (2010). Lee-Carter mortality projection with “Limit Life Table.” Retrieved from <https://www.unece.org/fileadmin/DAM/stats/documents/ece/ces/ge.11/2010/wp.18.e.pdf>

Bravo, J. M., Afonso, L. & Guerreiro, G. (2013). Avaliação Actuarial do Regime de Pensões da Caixa Geral de Aposentações: Formulação Actual e Impacto das Medidas Legislativas. Ministério das Finanças, Novembro. <http://www.portugal.gov.pt/pt/documentos-oficiais/20131219-convergencia-pensoes-tc.aspx>.

Bravo, J. M., Guerreiro, G., Afonso, L. (2014). Avaliação Actuarial do Sistema Previdencial da Segurança Social e Prestação Única da Segurança Social. GEP - Ministério da Solidariedade, Emprego e Segurança Social, Lisboa, Dezembro.

Bravo, J. M., & Holzmann, R. (2014). The Pay-out Phase of Funded Pensions Plans: Risks and Payment Options. Instituto BBVA de Pensiones, Working Paper Nº 6/2014, Informe PISA sobre educación financiera OECD, June.

Bravo, J.M. (2015a). Reforma Estrutural dos Sistemas de Pensões. in Viriato S. M., V., P. T. Pereira, V. S. (Coord.). *Afirmar o Futuro: Políticas Públicas para Portugal*, Volume I - Estado, Instituições e Políticas Sociais (pp. 264-329). Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa.

Bravo, J. M. (2015b). Living longer and prospering? Opções de redesenho dos sistemas de pensões em Portugal. In Neto, Paulo e Serrano, Maria Manuel (coords.) (2015). *Políticas Públicas, Economia e Sociedade. Contributos para a Definição de Políticas no Período 2014-2020*. Nexo Literário, Alcochete.

Bravo, J. M. (2016). Sustentabilidade, Adequação e Equidade nos Sistemas de Protecção Social: O Desafio da Pirâmide Etária Invertida. in Instituto da Defesa Nacional (Coord.). *Políticas Públicas e o Papel do Estado no Século XXI - Ciclo de Mesas Redondas "Ter Estado"*, Lisboa, IDN - Instituto da

Defesa Nacional, pp. 295-327 (Coleção Atena, nº 36).

Bravo, J. M. (2017). Contratos intergeracionais e consistência temporal na gestão da protecção social: Implicações Políticas e Reforma do Sistema de Pensões. in "Envelhecimento na Sociedade Portuguesa: Pensões, Família e Cuidados", ICS: Imprensa de Ciências Sociais, Universidade de Lisboa, pp. 61-96.

Bravo, J. M., & El Mekkaoui de Freitas, N. (2018). Valuation of longevity-linked life annuities. *Insurance: Mathematics and Economics*, 78, 212–229.

Brouhns, N., Denuit, M., & Vermunt, J. K. (2002). A Poisson log-bilinear regression approach to the construction of projected lifetables. *Insurance: Mathematics and Economics*, 31, 373–393. Retrieved from <http://members.home.nl/jeroenvermunt/insurance2002.pdf>

Brouhns, N., Denuit, M., & Vankeilegom, I. (2005). Bootstrapping the Poisson Log-Bilinear Model for Mortality Forecasting.

Cairns, A. J. G., Blake, D., & Dowd, K. (2006). A Two-Factor Model for Stochastic Mortality with Parameter Uncertainty: Theory and Calibration. *The Journal of Risk and Insurance*, 73(4), 687–718.

Cairns, A. J. G., Blake, D., Dowd, K., Coughlan, G. D., Epstein, D., Ong, A., & Balevich, I. (2009). A quantitative comparison of stochastic mortality models using data from England & Wales and the United States. *University Business*, (March).

Cairns, A. J. G., Blake, D., Dowd, K., Coughlan, G. D., Epstein, D., & Khalaf-Allah, M. (2010a). A Framework for Forecasting Mortality Rates with an Application to Six Stochastic Mortality Models.

Cairns, A. J. G., Blake, D., Dowd, K., Coughlan, G. D., Epstein, D., & Khalaf-Allah, M. (2010b). Backtesting Stochastic Mortality Models: An Ex-Post Evaluation of Multi-Period-Ahead Density Forecasts. *North American Actuarial Journal* (Vol. 14).

Cairns, A. J. G., Blake, D., Dowd, K., Coughlan, G. D., Epstein, D., & Khalaf-Allah, M. (2010c). Evaluating the goodness of fit of stochastic mortality models. *Insurance: Mathematics and Economics* (Vol. 47).

Cairns, A. J. G., Blake, D., Dowd, K., Coughlan, G. D., Epstein, D., & Khalaf-Allah, M. (2011). Mortality density forecasts: An analysis of six stochastic mortality models. *Insurance: Mathematics and Economics*, 48, 355–367. <https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2010.12.005>

Continuous Mortality Investigation. (2007). Stochastic projection methodologies : Lee-Carter model features , example results and implications.

Coelho, E. (2012). Modelling and Forecasting Mortality Patterns. Universidade Nova de Lisboa.

Coelho, E., & Nunes, L. (2011). Forecasting mortality in the event of a structural change. *Journal of the Royal Statistical Society. Series A: Statistics in Society*. <https://doi.org/10.1111/j.1467-985X.2010.00687.x>

Coelho, E., & Nunes, L. (2013). Cohort effects and structural changes in the mortality trend. Joint Eurostat/UNECE Work Session on Demographic Projections WP 5.1. October 2013, Rome, Italy.

Currie, I. D. (2004). Smoothing and Forecasting Mortality Rates with P-splines, 279–298.

Currie, I. D.; M. Durban and P. H. C. Eilers, (2006), Generalized linear array models with applications to multidimensional smoothing, *Journal of the Royal Statistical Society Series B*, 68, (2), 259-280

- Currie, I. D. (2016). On fitting generalized linear and non-linear models of mortality. *Scandinavian Actuarial Journal*, 356–383. <https://doi.org/10.1080/03461238.2014.928230>
- GEP-MSESS (2015). Avaliação Actuarial do Sistema Previdencial da Segurança Social - Sistema Previdencial. GEP - Ministério da Solidariedade, Emprego e Segurança Social, Lisboa, Dezembro.
- Goodman, L. A. (1979). Simple models for the analysis of association in cross classifications having ordered categories. *Journal of the American Statistical Association*, 74(367), 537–552. <http://mathfaculty.fullerton.edu/sbehseta/Goodman1979.pdf>
- Heligman, L., & Pollard, J. H. (1980). the Age Pattern of Mortality, 107, 49–80.
- Hunt, A. & Blake, D. (2014). A General Procedure for Constructing Mortality Models. *North American Actuarial Journal*, 18(1), pp. 116-138. doi: 10.1080/10920277.2013.852963
- Hunt, A., & Blake, D. (2015). On the structure and classification of mortality models. Pension Institute Working Paper.
- Hyndman, R. (2018). Package “forecast” Forecasting Functions for Time Series and Linear Models. <https://cran.r-project.org/web/packages/forecast/forecast.pdf>
- Instituto Nacional de Estatística. (2014). Projeções de População Residente 2012-2060.
- Instituto Nacional de Estatística. (2015). Revista de Estudos Demográficos (Vol. 55).
- Instituto Nacional de Estatística. (2018). Tábuas de Mortalidade para Portugal (Vol. 2007).
- Jarner, S. F., & Kryger, E. (2011). Modelling adult mortality in small populations: The SAINT model. *ASTIN Bulletin*, 41(August 2013), 377–418. <https://doi.org/10.2143/AST.41.2.2136982>
- Lee, R. D., & Carter, L. R. (1992). Modeling and forecasting US sex differentials in mortality. *International Journal of Forecasting*. [https://doi.org/10.1016/0169-2070\(92\)90055-E](https://doi.org/10.1016/0169-2070(92)90055-E)
- Li, J. S.-H., Hardy, M. R., & Tan, K. S. (2006). Uncertainty in Mortality Forecasting: An Extension to the Classical Lee-Carter Approach. *ASTIN Bulletin* (Vol. 39). <https://doi.org/10.2143/AST.39.1.2038060>
- Li, J. S.-H, Chan, W., & Cheung, S. (2011). Structural Changes in the Lee-Carter Mortality Indexes: Detection and Implications. *North American Actuarial Journal*, 13–31. <http://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/10920277.2011.10597607>
- O’Hare, C., & Li, Y. (2012). Explaining young mortality. *ELSEVIER Insurance: Mathematics and Economics*, 50(1), 12–25. <https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2011.09.005>
- Pitacco, E., Denuit, M., Haberman, S., & Olivieri, A. (2009). Modelling Longevity Dynamics for Pensions and Annuity Business.
- Plat, R. (2009). On stochastic mortality modeling. *Insurance: Mathematics and Economics* (Vol. 45). North-Holland. <https://doi.org/10.1016/J.INSMATHECO.2009.08.006>
- Renshaw, A. E., & Haberman, S. (2003). Lee-Carter mortality forecasting with age specific enhancement. *Insurance: Mathematics & Economics*, 33(2), 255–272.
- Renshaw, A. E., & Haberman, S. (2006). A cohort-based extension to the Lee–Carter model for mortality reduction factors. *Insurance: Mathematics and Economics*, 38(3), 556–570. <https://doi.org/10.1016/J.INSMATHECO.2005.12.001>

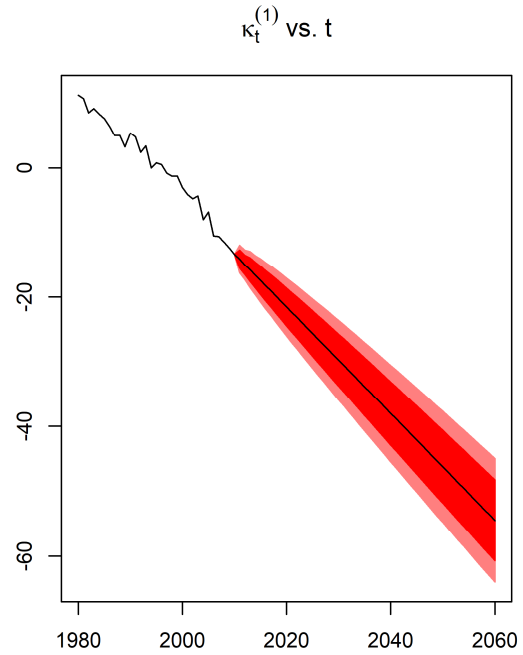
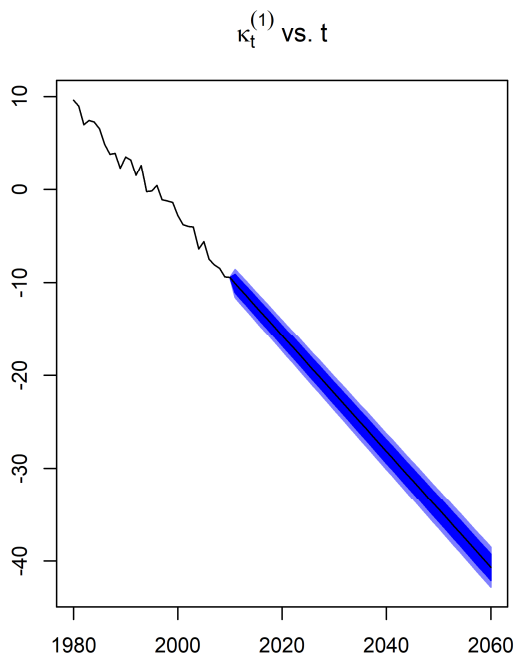
- Renshaw, A. E., & Haberman, S. (2008). New Development of the Lee-Carter model for Mortality Dynamics, 46.
- Renshaw, A. E., & Haberman, S. (2011). A comparative study of parametric mortality projection models. Faculty of Actuarial Science & Insurance (Vol. 48). London, UK: North-Holland. <https://doi.org/10.1016/J.INSMATHECO.2010.09.003>
- Sandström, A. (2010). Handbook of Solvency for Actuaries and Risk Managers. New York: Chapman and Hall/CRC, <https://doi.org/10.1201/b10338>
- Schwarz, G. E. (1978). Estimating the dimension of a model. *Annals of Statistics*, 6 (2): 461–464, doi:10.1214/aos/1176344136, MR 0468014.
- Thatcher, A. R., Kannisto, V., & Vaupel, J. (1998). The Force of Mortality at Ages 80 to 120. Odense University Press.
- van Berkum, F., Antonio, K., & Vellekoop, M. (2014). The impact of multiple structural changes on mortality predictions, (7), 581–603. <https://doi.org/10.1080/03461238.2014.987807>
- Villegas, A. M., Millossovich, P., & Kaishev, V. K. (2015). StMoMo: An R Package for Stochastic Mortality Modeling. <https://cran.r-project.org/web/packages/StMoMo/vignettes/StMoMoVignette.pdf>
- Wang, J. Z. (2007). Fitting and Forecasting Mortality for Sweden: Applying the Lee-Carter Model. Stockholm University. <http://www2.math.su.se/matstat/reports/serieb/2007/rep1/report.pdf>
- Willeits, R. C. (2004). The Cohort Effect : Insights and Explanations. *British Actuarial Journal*, (March).

## 9. ANEXOS

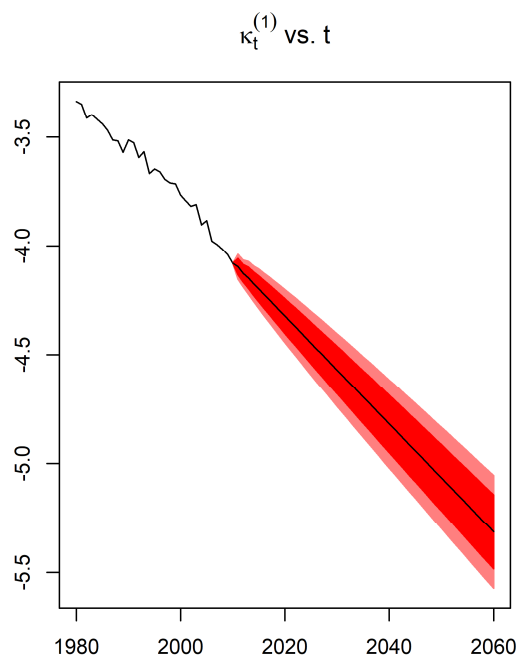
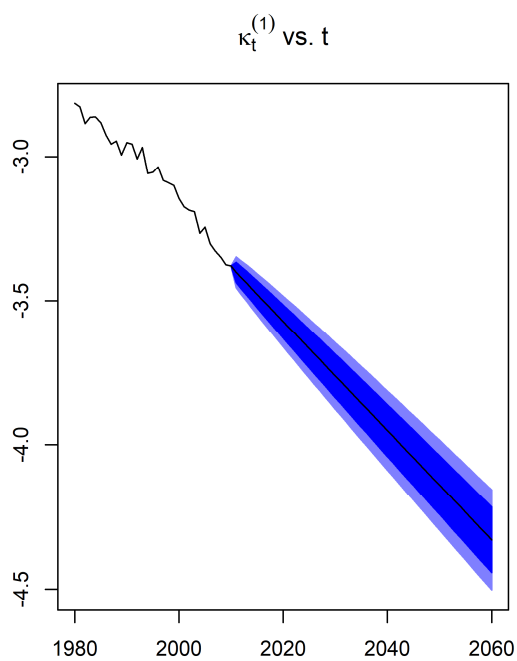
### Anexo A. Índices de Período e coorte projetados para os modelos APC, CBD, M7 e PLAT

Anexo A. 1 - Previsão dos índices de período para os modelos LC, CBD, M7 e PLAT, para os homens (azul) e mulheres (vermelho).

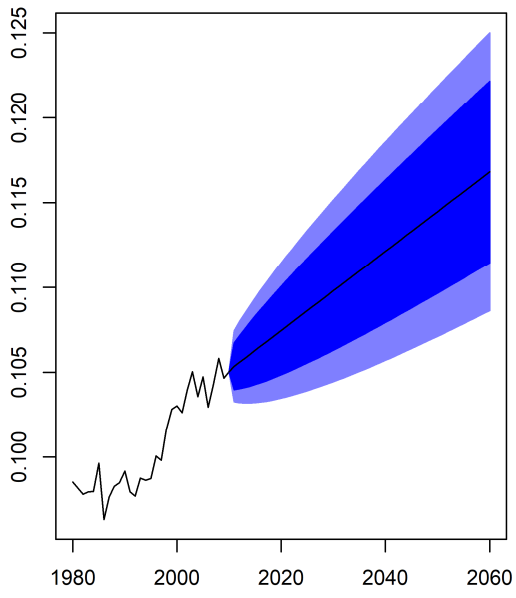
LC



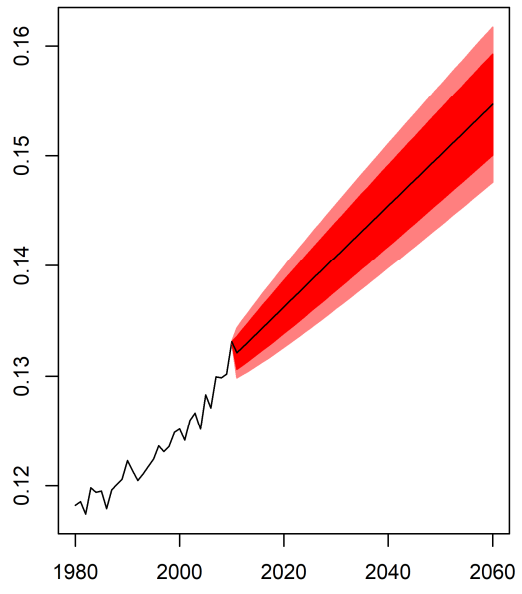
CBD



$\kappa_t^{(2)}$  vs. t

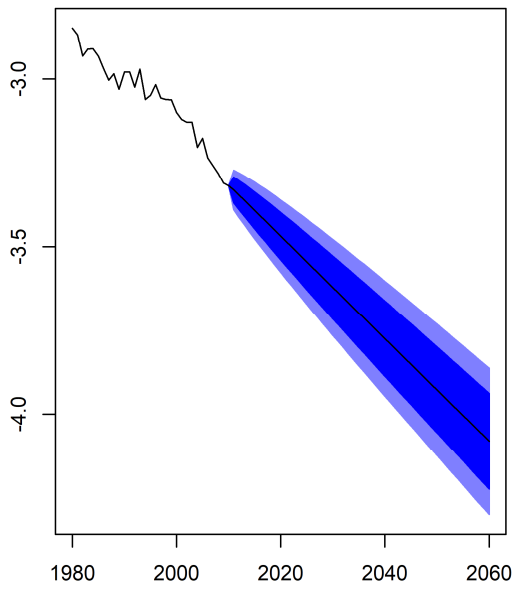


$\kappa_t^{(2)}$  vs. t

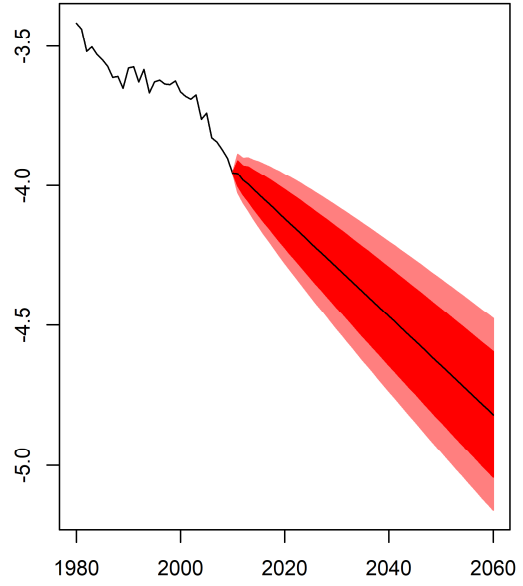


**M7**

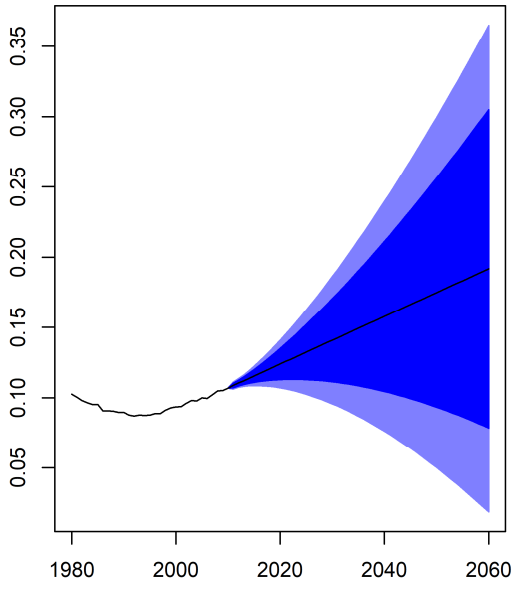
$\kappa_t^{(1)}$  vs. t



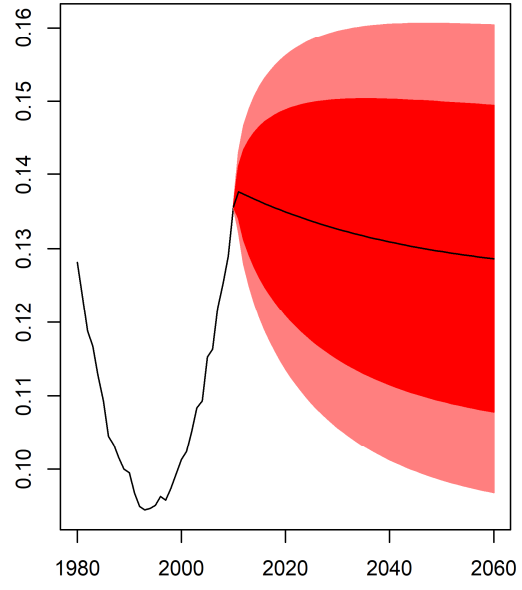
$\kappa_t^{(1)}$  vs. t



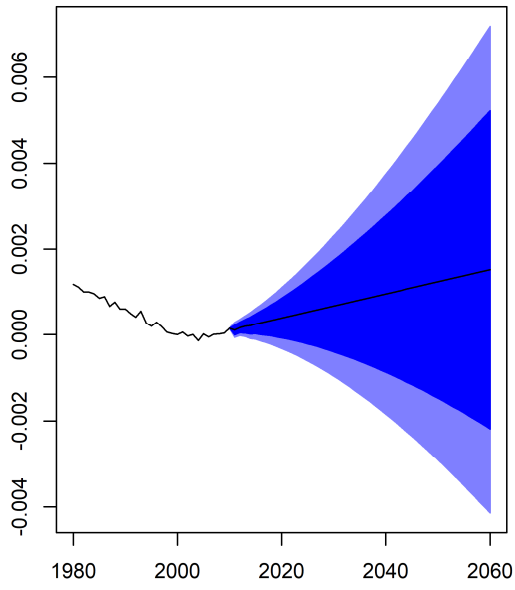
$\kappa_t^{(2)}$  vs. t



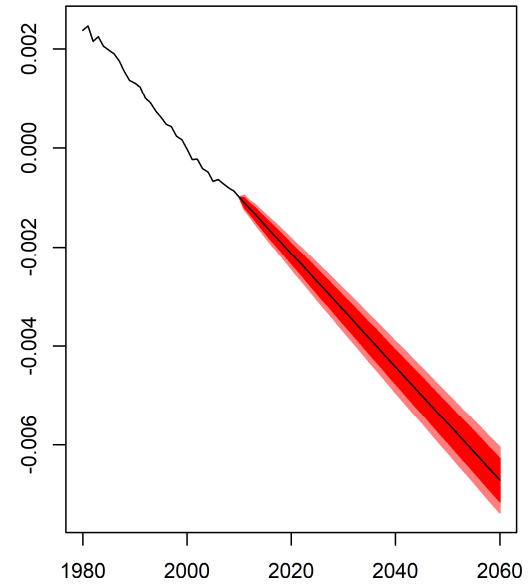
$\kappa_t^{(2)}$  vs. t



$\kappa_t^{(3)}$  vs. t



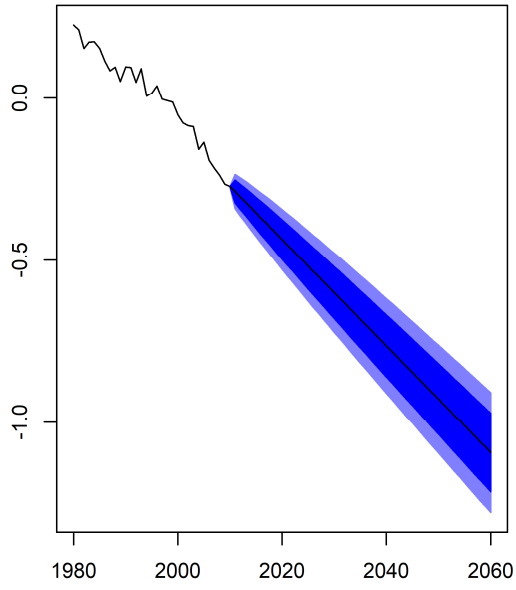
$\kappa_t^{(3)}$  vs. t



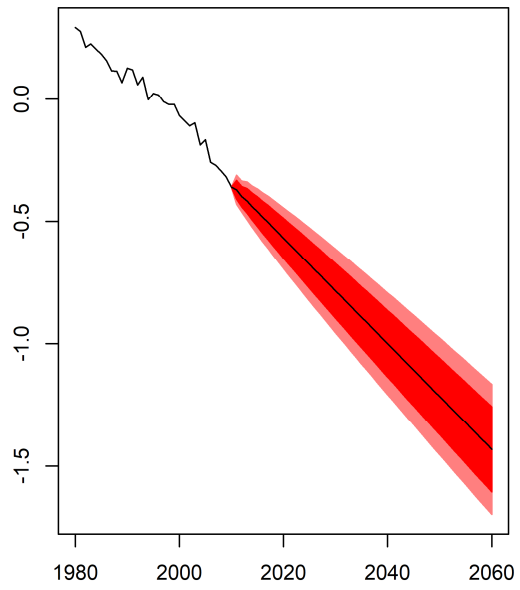
Cont.

PLAT

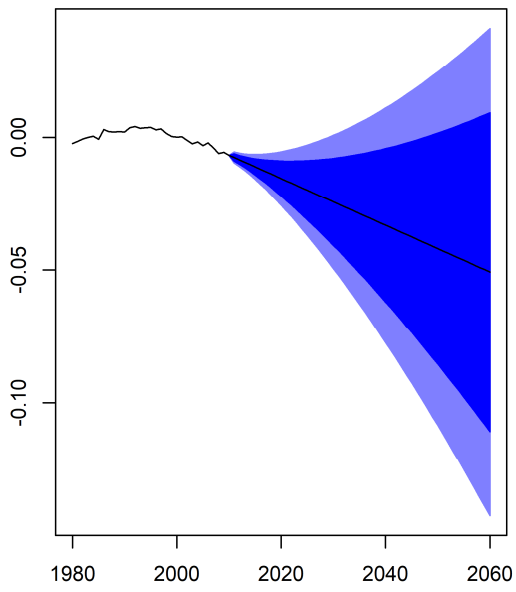
$\kappa_t^{(1)}$  vs. t



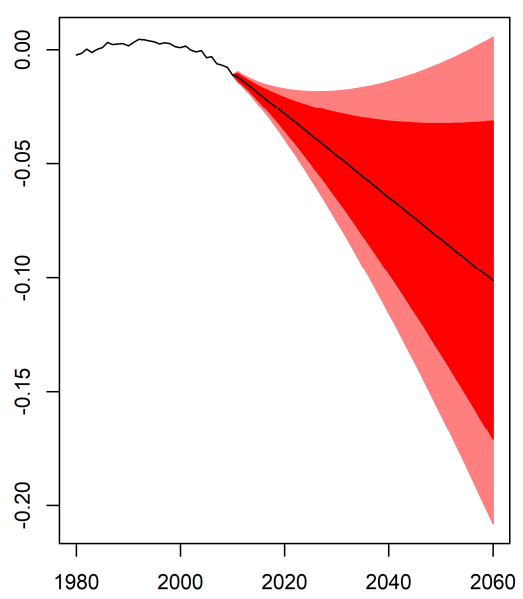
$\kappa_t^{(1)}$  vs. t



$\kappa_t^{(2)}$  vs. t

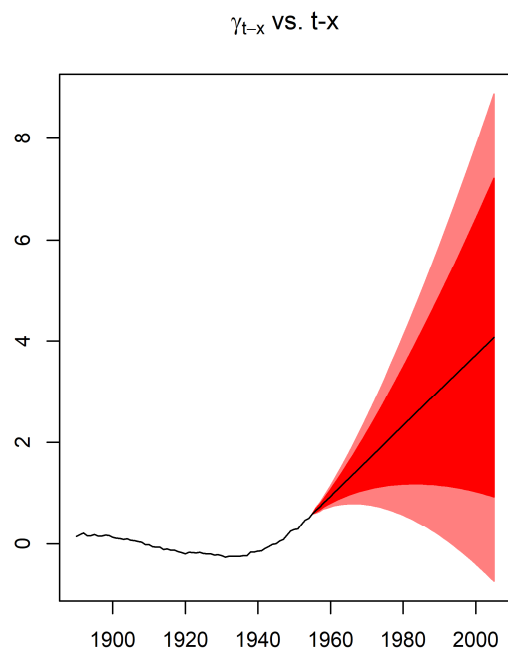
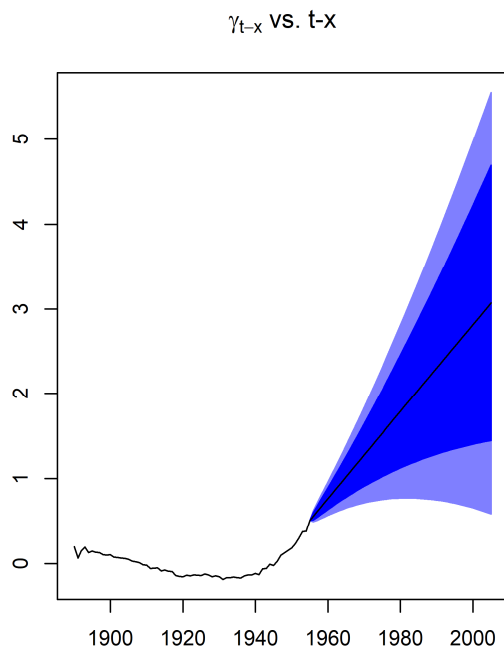


$\kappa_t^{(2)}$  vs. t

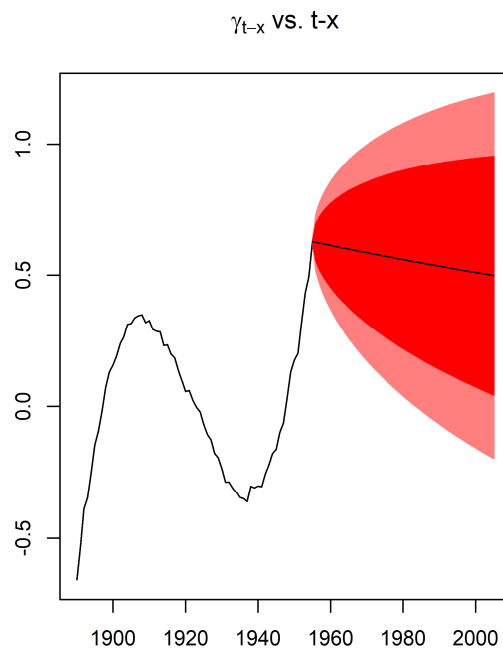
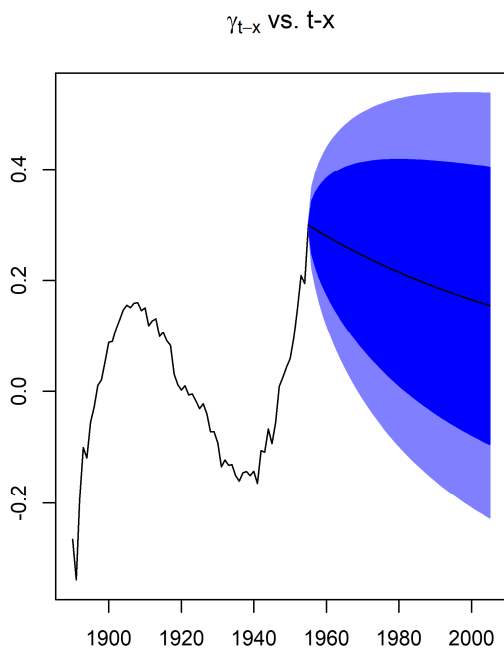


Anexo A. 2 Previsão do parâmetro de coorte para os modelos LC, CBD, M7 e PLAT, para os homens (azul) e mulheres (vermelho).

**M6**



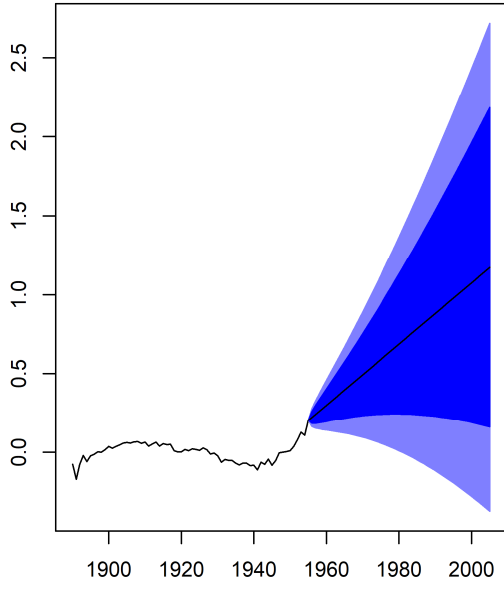
**M7**



**Cont.**

PLAT

$\gamma_{t-x}$  vs.  $t-x$



$\gamma_{t-x}$  vs.  $t-x$

