Filipe Roberto de Jesus Ramos

Mestre em Matemática Financeira

A Arte de Escher e a Matemática: Uma Experiência de Ensino

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em
Ensino de Matemática no 3º ciclo do Ensino Básico e no Secundário

Orientador:
Professor Doutor António Manuel Dias Domingos
Professor Auxiliar da Faculdade de Ciências e Tecnologias da
Universidade Nova de Lisboa

Júri:
Presidente: Professora Doutora Maria Helena Coutinho Gomes de Almeida Santos
Arguente: Professora Doutora Regina Coeli Moraes Kopke
Vogal(ais): Professor Doutor António Manuel Dias Domingos

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Setembro de 2016

Filipe Roberto de Jesus Ramos

Mestre em Matemática Financeira

A ARTE DE ESCHER E A MATEMÁTICA: UMA EXPERIÊNCIA DE ENSINO

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em
Ensino de Matemática no 3º ciclo do Ensino Básico e no Secundário

Orientador:
Professor Doutor António Manuel Dias Domingos
Professor Auxiliar da Faculdade de Ciências e Tecnologias da
Universidade Nova de Lisboa

Júri:
Presidente: Professora Doutora Maria Helena Coutinho Gomes de Almeida Santos
Arguente: Professora Doutora Regina Coeli Moraes Kopke
Vogal(ais): Professor Doutor António Manuel Dias Domingos

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Setembro de 2016

"O matemático, tal como o pintor ou o poeta, é um criador de padrões. Um pintor faz padrões com formas e cores, um poeta com palavras e o matemático com ideias. Todos os padrões devem ser belos. As ideias, tal como as cores, as palavras ou os sons, devem ajustar-se de forma perfeita e harmoniosa."

Hardy

COPYRIGHT

A Arte de Escher no Ensino da Matemática

AGRADECIMENTOS

Pelo significado que a palavra agradecimento em si comporta, antecedendo a toda a apresentação deste trabalho, fará sentido dedicar algumas palavras a todos os que, de uma forma mais ativa ou pelo simples apoio, ajudaram à sua concretização.

Um primeiro reconhecimento pela disponibilidade, colaboração e apoio cabe aos elementos pertencentes à Comissão Executiva da JCP, em especial ao António e à Guilda, e aos colegas das Equipas Pedagógicas dos CEF, destacando a Fátima, a Filomena, a Karin, o Mário e a Rosalina, que sempre me apoiaram nos meus projetos, ainda que por vezes os sentissem 'arrojados'. Mas, o nunca levantar de entraves e sobretudo por sempre se juntarem a mim na concretização dos mesmos, fez-nos acreditar que tudo é possível e tudo vale a pena, quando a alma assim nos indica e o espírito de coesão de grupo é grande. Todavia, será justo um reconhecimento particular ao João Castelão que, mais do que um colega de trabalho, foi elemento preponderante na implementação deste projeto, sendo lícito sublinhar o elevado profissionalismo, companheirismo, destacando, ainda, os momentos de rica partilha, troca de informação e conhecimentos com parceria em sala de aula.

Um manifesto apreço também a alguns colegas/amigos da FCT- UNL e ao Presidente do DM, que me desafiou para a realização deste trabalho.

Uma palavra de gratidão pelos ensinamentos e incentivo num evoluir profissional às Professoras Ana Sá (FCT-UNL), Júlia Carvalho (FCT-UNL), Amélia Fonseca (FCUL), Filipa Carvalho (ISEG), Gracinda Gomes (FCUL), Isabel Ferreirim (FCUL) e Purificação Coelho (FCUL). Contudo, será lícito e merecedor de destaque o incentivo, o cuidado e a extrema dedicação da Professora Helena Santos (FCT-UNL), que sempre valorizou a consecução deste trabalho; bem como o apoio e ajuda ímpar da Marina Andrade (ISCTE) que, no momento em que a força faltou (dada a dificuldade em gerir a elaboração desta dissertação com o cumprimento da parte profissional), soube ter as palavras certas e fazer-me continuar a acreditar.

Também, pela orientação e sugestões construtivas dadas na fase de escrita deste trabalho, um agradecimento particular ao meu orientador, Professor António Domingos.

Finalmente, mais do que merecido, um forte agradecimento aos amigos e familiares que, ao longo do caminho, se fizeram presentes, me ensinaram a interpretar o mundo, me criticaram com o intento da construção, me deram alento nos momentos de desânimo e cansaço, evidenciando sempre uma infinita paciência e apoio incondicional.

Mãe, …

A todos, o meu sincero Obrigado.

RESUMO

A dificuldade em identificar estratégias e fatores que poderão contribuir para uma melhoria do processo de ensino/aprendizagem, face à existência de múltiplas realidades, é tema bastante discutido na literatura, a qual nos dá conta que diferentes metodologias de ensino poderão produzir resultados distintos na aprendizagem dos alunos.

Encarar a escola como uma realidade não standard e onde o processo de ensino/aprendizagem da Matemática deve atender ao 'meio social', são aspetos destacados na bibliografia como elementos a considerar na definição de estratégias e nas adaptações ao 'currículo prescrito', visando uma 'instrução matemática' sólida e consistente. Com efeito, é na procura de alternativas capazes de dar resposta a desafios, com os quais nos deparámos, que surge a presente investigação, cujo objetivo central passou por implementar um currículo de Geometria que integrasse situações de aprendizagem diferenciadas em contexto de formação vocacional. Frequentando os alunos intervenientes no estudo um Curso de Educação Formação de Artesão Pintor de Azulejo, o recurso à Arte foi analisado como possível metodologia a integrar no ensino da Matemática.

Constituindo a obra de Escher um elemento de riqueza indiscutível, no que respeita a conexões entre a Arte e a Matemática, deu-se especial destaque à 'Exploração do Plano', investigando a forma como alguns dos trabalhos de Escher poderão ser um ponto de partida para a apresentação de conceitos/conteúdos matemáticos (em particular na Geometria) e, numa fase posterior da investigação, verificar e avaliar a sua real compreensão mediante a utilização e integração dos mesmos na produção artística.

Sustentada numa metodologia de 'Investigação Ação', sendo a observação (participante) e a recolha de outros dados feita no contexto aula, da investigação desenvolvida, depreendeu-se que o recurso à Arte pode conduzir não só a um envolvimento efetivo dos alunos no processo de ensino/aprendizagem, como a uma aquisição e aplicação sólida dos conceitos e conteúdos matemáticos, identificando e usando a Matemática em situações concretas. Ainda, pela natureza de algumas atividades desenvolvidas com os alunos, além de evitar situações de desinteresse e abandono escolar, este projeto contribuiu para o desenvolvimento de competências transversais, como a autonomia, a autoestima e a promoção da educação para a cidadania.

Palavras–chave: Matemática, Currículo, Arte, Escher, Ensino/Aprendizagem, Pavimentações e Isometrias

ABSTRACT

The difficulty to identify factors and strategies that might contribute to a significant improve in the teaching/learning process, given the existent multiple realities, literature states that different teaching methodologies may produce distinct results in the students learning process.

Circumstances such as facing the school as a nonstandard reality, and, in which the teaching/learning process should, up to a certain mode, consider the 'social level', are aspects commonly highlighted in the literature in order to define the strategies whose maximum goal is a solid and consistent 'mathematical instruction'. In fact, it was the search of valuable alternatives to answer the encountered challenges that gave raise to this investigation for which the central goal resulted in the application of a Geometry curriculum able to include different learning situations for a vocational education process. In a student's group of a *Curso de Educação e Formação - de Artesão Pintor de Azulejo* (Education and Training in Artisan Tile Painter), the appeal of Art was a methodology considered in the Mathematics teaching.

Thus, being Escher's work an undoubted inspiring and enriching element in what concerns the connections between Art and Mathematics, a special focus concerning Plan Exploration, searching how some of Escher's works may be a starting point to the presentation of mathematical concepts (particularly Geometry) and, in a posterior moment effectively endorse and evaluate its real apprehension by using them and insert them in artistic production.

Based on a methodology 'Action Research', being the (participant) observation and data collection established in a class lecture context, the developed research allowed to conclude that Art may induce, not only an effective involvement of the students in the education/learning process, but also the acquisition and solid application of the mathematical concepts, identifying and using Mathematics in real situations. Still, by the specificity of some of the developed activities with the students, apart from avoiding uninterested situations and student's dropout, this project has contributed to the development of transversal competences as autonomy, self-esteem and the promotion of a citizen education.

Keywords: Mathematics, Curriculum, Art, Escher, Teaching/Learning, Tessellations, Isometric Transformations

ÍNDICE GERAL

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE GRÁFICOS

INTRODUÇÃO

Encarar a Escola como um espaço físico, desligado do meio que o acolhe, e olhar o processo de ensino/aprendizagem como a transmissão de conteúdos prescritos pelo sistema educativo, ministrados sem qualquer tipo de flexibilidade, será sem margem de dúvida uma visão falaciosa e distante do que caracteriza todo um processo, um trabalho e um conjunto de interações estabelecidas, em concreto, na sala de aula.

Certos desse facto, é sobre o processo de ensino/aprendizagem que dedicaremos especial atenção neste nosso ensaio e na investigação que procurámos levar a cabo. A mesma tem por base todo um referencial teórico já desenvolvido em trabalhos anteriores (como daremos conta na Revisão da Literatura), os quais nos dão conta da multiplicidade de fatores que determinam o processo de ensino/aprendizagem, a dificuldade em identifica-los e 'medir' o seu impacto e que alternativas são apontadas perante situações mais adversas.

(A) MOTIVAÇÃO E DESCRIÇÃO GERAL DA INVESTIGAÇÃO: OBJETIVOS, QUESTÕES DE INVESTIGAÇÃO E RELEVÂNCIA DO ESTUDO

Há, projetos que nascem de ideias novas e depois se criam os cenários para que os mesmos possam ser implementados, outras investigações surgem da procura de soluções para problemas com os quais nos deparamos. Em particular, na área educacional, é impreterível uma atitude não comodista no processo de ensino/aprendizagem, procurando alternativas adaptadas quer à população escolar, quer aos múltiplos desafios com os quais nos deparamos, evitando um olhar conformista face às metodologias de ensino. Impõe-se, deste modo, um pensar de forma crítica, na procura de soluções ou hipóteses plausíveis.

É com esta motivação que se desenvolve o presente ensaio, o qual passamos a descrever, em linhas gerais.

Perante um quadro em que era necessário 'instruir matematicamente' um grupo de alunos em situação de abandono escolar, cuja motivação para o espaço escolar e o gosto por aprender eram inexistentes, tonava-se imperioso a adoção de estratégias que os cativasse em primeiro lugar para a sala de aula (evitando o referido abandono) e em seguida para o saber aí ministrado. Tal viria a ser agravado por uma herança, onde a disciplina de Matemática quase não fez parte da realidade escolar dos alunos. No ano letivo transato, os alunos tiveram um longo período sem aulas de Matemática (cerca de metade das aulas previstas não foram lecionadas) e os conteúdos relativos à Geometria quase não foram abordados. Tal situação obrigaria a uma sobrecarga excessiva de aulas no ano letivo em curso, para que fosse dado cumprimento ao número mínimo de horas de formação. Isto porque, o grupo de alunos com os quais foi desenvolvido o projeto frequentavam um Curso de Educação e Formação (CEF) de Artesão Pintor de Azulejo (APA).

Temos, assim, dois aspetos relevantes a considerar: por um lado, uma população culturalmente desfavorecida, que evidenciava dificuldades na aquisição/aplicação de conhecimentos e cujo desinteresse pela aquisição de saber era notável; por outro, uma situação escolar mais adversa vivida em relação à Matemática no ano anterior. Em resposta aos mesmos, impunha-se a procura de estratégias alternativas capazes de captar os alunos para a sala de aula e para toda a atividade aí desenvolvida, procurando evitar situações de abandono e assiduidade irregular e, acima de tudo, instruir matematicamente estes alunos.

Como tal, na definição das metodologias adotadas ou de eventuais tarefas/projetos a desenvolver em sala de aula, deve estar o enquadramento no plano curricular e a sua adequabilidade à população alvo. Deste modo foi sobre o 'meio social' onde a escola está inserida e sobre o currículo que recaiu a nossa escolha, analisando e discutindo eventuais impacto no processo de ensino/aprendizagem.

Tendo este propósito em mente, é aqui que encontramos a motivação e o ponto de partida para o projeto a desenvolver, o qual tem como suporte o ensino/aprendizagem da Geometria, dando início a toda uma fase de investigação e de pesquisa, capazes de dar resposta às dificuldades relatadas, assegurando-nos que as nossas escolhas são pertinentes e adequadas.

Face ao exposto, parece traçado aquele que será o grande objetivo da investigação levada a cabo:

Como implementar um currículo de Geometria que integre situações de aprendizagem diferenciadas em contexto de formação vocacional? Mais especificamente, tendo em conta essa formação, será o recurso à Arte uma metodologia profícua no processo de ensino/aprendizagem de conteúdos matemáticos?

Numa primeira fase, este objetivo assenta na procura de adaptações curriculares e definição de estratégias e metodologias que não só tenham em conta a população escolar, como também a necessidade de, num curto período de tempo, lecionar uma série de conteúdos matemáticos (nomeadamente relacionados com a Geometria). Numa fase posterior a preocupação será a estruturação matemática de um projeto transversal e interdisciplinar, o qual deve ser desenhado com algum cuidado para que o mesmo seja frutífero no seu fim máximo, 'formar matematicamente' os alunos.

A exploração de conexões entre a Arte e a Matemática, em virtude da área profissional dos alunos, foi uma alternativa pensada. Pelo que essa exploração constitui um dos pilares centrais da nossa investigação, procurando analisar a forma como as duas áreas se relacionam numa dupla perspetiva: "Da Arte à Matemática" e "Da Matemática à Arte".

Nesse seguimento, tal como sublinhado na literatura, a obra de Escher é um manifesto exemplo da harmonia entre a Arte e a Matemática. Hoje Escher é um nome de referência em Geometria, em particular no que respeita ao estudo das Pavimentações e Isometrias, sendo a sua obra singular pela rara composição pelos padrões geométricos usados na pavimentação do plano, com as simetrias implícitas na definição do padrão e fazendo uso de isometrias no preenchimento. Este foi precisamente o tópico da sua obra escolhido para exploração neste trabalho, e que sustenta a implementação prática do nosso estudo.

Deste modo, algumas das questões de investigação decorrentes do exposto serão:

I. De que forma o currículo prescrito pode ser moldado no sentido de dar resposta aos constrangimentos com os quais nos deparamos no processo de ensino/aprendizagem da Matemática?

II. Que características devem ser valorizadas no currículo moldado por forma a abordar os conteúdos matemáticos visados?

III. Será a exploração de conexões entre a Arte e a Matemática uma estratégia viável que assegure o rigor no ensino de conteúdos matemáticos?

IV. De que forma estratégias de ensino alternativas contribuem para a compreensão e utilização da Matemática em situações concretas?

V. Qual o impacto desta abordagem curricular no desenvolvimento de competências nos alunos?

Estas são algumas das questões para as quais procuraremos respostas no decorrer na nossa investigação, a serem discutidas numa parte final deste ensaio.

Com isto, julgamos ter desenhado um projeto que responde aos objetivos do estudo, não pelo tema em análise, mas pelo *modus operandi* implícito na transversalidade e interdisciplinaridade do mesmo. Acreditamos, assim, ser uma investigação com contributo positivo para a comunidade que investiga em Educação Matemática, não só pela partilha de uma experiência de ensino, mas também pelo sintetizar e articular de todo um referencial teórico.

Porém, mais do que qualquer contributo e partilha de experiência de ensino para quem investiga em Educação Matemática, acreditamos poder dizer que a maior relevância do nosso estudo está numa manifesta preocupação com um grupo de alunos, cujo objetivo central foi mostra-lhes o quão útil e interessante poderá ser estudar Matemática. Assim, estando conscientes da adversidade da população, se conseguirmos mudar a visão que parte deste grupo de alunos tem sobre a Matemática e a utilidade da mesma, poderemos dizer que o nosso propósito máximo foi alcançado e o nosso projeto teve uma relevância fundamental para este grupo de cidadãos, que desejamos que num futuro próximo estejam integrados no mercado de trabalho.

(B) Estrutura do Trabalho

O presente ensaio está organizado em 4 capítulos, os quais são completados com uma Introdução e uma Conclusão, além de algumas informações constantes em Anexo.

Na Introdução é feita uma apresentação geral do projeto, tecendo-se considerações relativas à motivação, contextualização e enquadramento do projeto, muito embora algumas ideias sejam desenvolvidas, *a posteriori*, na Secção 1. Elementos fundamentais como o objetivo central do estudo, as questões de investigação que dão corpo e consistência o nosso trabalho e a relevância do mesmo, são igualmente referidos neste item. Uma breve descrição da estrutura do trabalho finaliza a Introdução.

O Capítulo 1, embora não tradicional neste tipo de trabalho, é iniciado com o desenvolvimento de alguns aspetos que nos permitem contextualizar melhor o projeto, sustentados já, num pilar teórico. Tendo o nosso estudo algumas características particulares, optámos por desenvolver este item com o intuito de clarificar e elucidar o leitor dos factos em causa.

Seguido deste item, é apresentado todo um referencial teórico que baliza e sustenta toda a nossa investigação. Além da referência a estudos anteriores, dando-nos conta de outras investigações feitas, destacamos alguns trabalhos, cujas teorias desenvolvidas pelos respetivos autores fundamentam, teoricamente, o nosso ensaio. Com efeito, a primeira atenção recai sobre a importância do currículo e do meio escolar na consecução da nossa investigação, analisando-se a viabilidade de adaptações curriculares, bem como os aspetos a valorizar nas referidas adaptações. Recaindo o nosso projeto na exploração de conexões entre a Arte e a Matemática, haverá espaço para uma breve reflexão sobre o tema, remetendo, em particular, para possíveis explorações a desenvolver à luz da obra de Escher, nomeadamente no ensino da Geometria. Para finalizar esta secção, serão analisadas e apresentadas algumas das diretrizes e orientações curriculares sobre o ensino/aprendizagem da Geometria, em particular nos Cursos de Educação e Formação, sendo nossa preocupação fundamentar a adequabilidade e pertinência do projeto no curso de Artesão Pintores de Azulejo.

Feito um enquadramento teórico, passando o nosso estudo pela exploração de conexões entre a obra de Escher e a Matemática, no Capítulo 2 exploram-se algumas dessas afinidades e a forma como a Matemática está implícita na obra do artista. Porém, foi nossa opção iniciar esta secção com algumas considerações sobre a vida e obra do autor.

A anteceder à análise, apresentação e reflexão sobre os resultados decorrentes do nosso estudo, importa clarificar quais as opções metodológicas traçadas na nossa investigação, algo que daremos conta na Secção 3. Além dos factos referidos, esta secção inclui, ainda, uma descrição geral da população em estudo.

Se nas páginas anteriores se traça todo um referencial teórico que fundamenta a nossa investigação e se dá conta das opções metodológicas, na Secção 4, será descrito, em linhas gerais, o esboço do projeto, com a apresentação de um cronograma, dando conta da planificação e das etapas implícitas no mesmo. Numa fase posterior, embora seja referida a obra de Escher numa perspetiva de exploração da presença da Matemática na Arte, dando conta de parte do trabalho desenvolvido em sala de aula na lecionação de alguns conteúdos matemáticos; a prioridade será dada à apresentação dos dados recolhidos (pela observação participante ou fotografia), analisando a forma como a Matemática poderá estar presente na Arte e a forma como os alunos usaram alguns dos conceitos matemáticos estudados numa produção artística pessoal e original.

Finalmente, na última parte – Conclusão – são apresentadas e sintetizadas as principais conclusões deste estudo, procurando estabelecer uma relação crítica entre os resultados observados e as questões de investigação traçadas no início do estudo. Serão ainda tecidas considerações relativamente a possíveis limitações do estudo, bem como aspetos a desenvolver em estudos ulteriores, partindo do trabalho aqui apresentado e discutido.

No que respeita aos Anexos, estes estão repartidos em 4 grupos. O Anexo A vem complementar algumas das informações apresentadas na Secção 2, relativas à obra de

Escher e a Matemática. O Anexo B complementada informação relativamente à amostra em estudo. Já o Anexo C inclui alguns elementos invocados na apresentação de resultados feita na Secção 4, nomeadamente fichas de trabalho e outros materiais produzidos ao longo do ano, relativos à prática letiva. Finalmente, no Anexo D, são apresentadas algumas fotografias, as quais documentam o trabalho feito com e pelos alunos, bem como imagens de alguns painéis de azulejo construídos pelos alunos. Importa referir que não foram escolhidos os ditos ‘melhores’, mas um pouco de tudo o que foi feito. Desde alguns bem conseguidos do ponto de vista matemático ou do ponto de vista da técnica de pintura, a outros menos bons em qualquer um dos dois domínios, matemático e artístico.

1. Contextualização e Revisão da Literatura

1.1. Contextualização

Não obstante das considerações já tecidas na Introdução, que nos permitem contextualizar e enquadrar este ensaio, por algumas características que consideramos particulares neste projeto, julgamos ser pertinente tecer algumas considerações mais alargadas que nos permitam fundamentar/contextualizar o porquê e a forma como o projeto se desenha e é desenvolvido nas páginas subsequentes.

Se há ideias que são projetadas e depois se criam os cenários para que as mesmas possam ser implementadas, outros trabalhos surgem de situações que nascem na procura de soluções para problemas com os quais nos deparamos, uma característica inerente à investigação matemática. A atitude intrínseca e necessária para o sucesso na investigação é precisamente a de um pensar de forma crítica quando nos deparamos com situações/problemas. Tal como referido por Warnick & Inch (1994), poder-se-á dizer que o pensar de forma crítica consiste na habilidade para explorar problemas, questões e situações, procurando chegar a soluções ou hipóteses plausíveis.

É nesta perspetiva que, também na Educação, face a desafios com os quais nos deparamos no processo de ensino/aprendizagem, se impõem uma atitude não comodista que se cinja a uma única prática pedagógica, independentemente dos desafios ou do público alvo.

Deste modo, ao professor impõem-se uma atitude de pensador crítico, que, entre outras características, tal como refere Navega (2005), passa primeiramente por ser curiosa, numa perspetiva de querer estar informado (valorizando a fiabilidade das fontes de informação e o cientificamente correto). Contudo, deve manter uma atitude atenta e de 'cordialidade', na medida em que deve estar de 'mente aberta', procurando identificar, analisar e ponderar argumentos, ser flexível, ouvindo opiniões, analisando alternativas e manifestando uma disposição para evoluir.

Ainda, a reflexão proposta por Luckesi (1994), reverte-se fundamental para a compreensão das práticas adotadas, pois, ao escrever sobre os procedimentos adotados no processo de ensino/aprendizagem, coloca algumas questões preponderantes à atuação do professor:

> … Será que nós professores, ao estabelecermos nosso plano de ensino, ou quando vamos decidir o que fazer na aula, nos perguntamos se as técnicas de ensino que utilizaremos têm articulação coerente com nossa proposta pedagógica? Ou será que escolhemos os procedimentos de ensino por sua modernidade, ou por sua facilidade, ou pelo facto de dar menor quantidade de trabalho ao professor? Ou, pior ainda, será que escolhemos os procedimentos de ensino sem nenhum critério específico? (*Ibidem*, 1994, p. 155)

Foi nesta perspetiva, balizada pelos pilares que sustentam o ‘pensamento crítico’, que face ao problema descrito sucintamente na Introdução, se procurou encontrar soluções, sem receio de inovar, com a implementação de metodologias de ensino alternativas àquela mais próxima da dita ‘tradicional’, tendo sempre presente a ‘formação matemática’, valorizando o rigor e a correção cientifica, como objetivo central. Até porque a investigação em pedagogia tem vindo a demonstrar que diferentes metodologias de ensino, enquanto aplicação de diferentes métodos no processo de ensino/aprendizagem (Manfredi, 1993), implícitas na «transmissão» de informação, numa situação de ensino/aprendizagem, poderão produzir resultados distintos na aprendizagem dos alunos.

Assim, entre outros fatores, o professor deve levar em consideração que o conhecimento do aluno está em construção e, por esse motivo, deve mobilizá-lo ao máximo, procurando envolvê-lo ativamente no processo de ensino/aprendizagem, utilizando, para tal, metodologias adequadas na transmissão do conhecimento, incentivando-o na busca constante do saber (Luckesi, 1994).

É precisamente este facto que sustenta a necessidade de procura de solução para um dos primeiros problemas que estiveram na base da nossa investigação: as características adversas da população escolar (analisada com detalhe na Secção 3.2).

Desta feita, perante uma população com características menos desejáveis (mais do que evidenciando dificuldades na aquisição/aplicação de conhecimentos e culturalmente desfavorecida, revela um claro desinteresse pela aquisição de saber), impõem-se estratégias alternativas capazes de os captar para a sala de aula e para toda a atividade aí desenvolvida. Desta forma, o processo de ensino/aprendizagem implica alguns cuidados acrescidos que o professor deve ter, procurando evitar situações de insucesso e mesmo abandono escolar, uma vez que os alunos que integram a nossa amostra são, no geral, desmotivados e possuem uma resistência e desinteresse pela aquisição de conhecimento, em particular pelos conteúdos matemáticos, algo não favorável ao processo de ensino/aprendizagem.

Se este problema, por si só, já constituía um desafio, tal ficaria ainda mais agravado pelo facto de, no ano letivo transato, os alunos participantes no nosso ensaio terem tido uma situação irregular no que respeita à Matemática, dado terem ficado em falta um número considerável de horas de formação[1]. Mais, face ao registo dos sumários existente, depreendeu-se que a situação mais adversa estaria relacionada com os conteúdos relativos à Geometria, uma vez que apenas num dos módulos previstos haviam sido lecionados alguns conteúdos isolados. Deste modo, para regularizar tal situação foi necessária uma sobrecarga extra (considerável) de horas de formação de Matemática.

Desta feita, evitar situações de abandono e assiduidade irregular e instruir matematicamente estes alunos, constituiria um desafio para o qual se impunham adaptações ainda mais profundas do que apenas uma adequação, face as características da população escolar, algo que obrigaria a uma análise ainda mais crítica ao currículo no seu todo, na procura de estratégias e metodologias alternativas.

Tendo este objetivo em mente, é aqui que encontramos a motivação e o ponto de partida para o projeto a desenvolver, dando início a toda uma fase de investigação e de pesquisa, a qual poderia tomar a configuração de uma expansão de trabalhos anteriores ou alternativas capazes de dar resposta às dificuldades relatadas.

Tal como salienta a bibliografia, este pensar de forma crítica, o incessante questionamento, constitui, precisamente, um processo desencadeador de construção do saber, gerando novas ideias (ou cimentando algumas já existentes), tornando-as ainda mais explícitas e sólidas, atitude esta que desencadeia conhecimento novo, dotado de um questionamento sistemático, crítico e criativo (Demo, 1996).

Em particular, no que concerne à Educação, parte dos avanços e da riqueza de experiências didáticas/metodológicas constantes na bibliografia, devem-se a esta atitude proactiva, dotadas de um olhar e pensar crítico e inovador sobre o processo de ensino/aprendizagem. Esta 'arte' de pensar de forma crítica, característica que se requer de um professor, é também um processo de construção ao longo da vida, na medida em que o professor se aperfeiçoa nas suas metodologias e aprende a ouvir e analisar os argumentos dos outros, a duvidar, questionar, expor, argumentar e fundamentar as suas opiniões/inferências, produzindo cada vez mais e melhor conhecimento.

Em suma, é nesta perspetiva de originalidade, evolução e na procura de um contributo positivo, que o nosso trabalho se contextualiza. Tal como descrito, o mesmo não teve origem

[1] Um requisito à conclusão dos cursos com a tipologia em causa, pelos alunos que o frequentam, é a lecionação obrigatória do número de horas de formação, de cada disciplina, referida no referencial orientador.

numa ideia para a qual se criou um cenário de implementação, mas sim de um problema com o qual nos deparamos e para o qual procuramos ativamente encontrar uma resposta alternativa.

1.2. REVISÃO DA LITERATURA

Tecidas algumas considerações, merecedoras, a nosso ver, de um item próprio (ao invés de uma referencia mais superficial na Introdução), que nos permitem contextualizar e identificar uma clara motivação, impõem-se alguma revisão da literatura, antes da descrição e implementação do projeto, dando-nos conta de alguns estudos já desenvolvidos, bem como de alguns trabalhos que fundamentam, teoricamente, o nosso ensaio.

Com efeito, a nossa primeira atenção recai sobre algumas considerações relativas à compreensão da importância do conhecimento meio escolar, sendo, em seguida, feita uma análise a algumas problemáticas relacionadas com o currículo (e a todo processo de construção/operacionalização), como por exemplo o quanto se pode adequar e o que se deve ter em linha de conta nessa adequação/adaptação.

Recaindo o nosso projeto na exploração de 'caminhos' entre a Arte e a Matemática e a forma como a Arte poderá ser um ponto de partida para a apresentação de conteúdos matemáticos, ou a forma como podem ser cimentados conceitos matemáticos mediante a produção artística, julgámos pertinente uma breve reflexão sobre o tema, remetendo já para o nosso foco de interesse, ao enfatizar numa parte final as conexões já exploradas em sala de aula e outras passíveis de implementação, em particular na obra de Escher.

Será, precisamente, sobre a Geometria que nos iremos debruçar, nomeadamente nas diretrizes e orientações curriculares sobre o ensino da mesma, onde, para além de algumas considerações sobre o ensino/aprendizagem desta área da Matemática, procuraremos analisar as diretrizes curriculares específicas para os cursos CEF, sendo a preocupação final fundamentar a adequabilidade e pertinência do projeto nos referidos cursos, em particular o frequentado pelos alunos que integram o nosso estudo – Artesão Pintores de Azulejo (APA).

1.2.1. O CURRÍCULO E O MEIO ESCOLAR

Pela dificuldade em identificar e justificar em que medida (e até que ponto) vários itens poderão condicionar o processo de ensino/aprendizagem, muito autores têm desenvolvido investigações em torno deste tópico no sentido de identificar e avaliar a influência dos mesmos no referido processo. Com efeito, no respeita em particular à Educação Matemática, não obstante de inúmeras citações, veja-se por exemplo alguns dos trabalhos referidos na *Website da SPIEM* [2], cujo objetivo primordial passa pela promoção do desenvolvimento da investigação em Educação Matemática, valorizando um intercâmbio de ideias, uma partilha experiências e consequente reflexão sobre as práticas, contribuindo desta feita para uma 'evolução do conhecimento' nesta área de investigação, em particular na realidade portuguesa.

Por forma a balizar a nossa linha de investigação (evitando torná-la não delineada e extensa, pela não identificação dos aspetos sobre os quais nos propomos refletir/analisar), optamos por destacar neste nosso ensaio os impactos e a importância que o meio escolar (ou 'meio social'[3], numa perspetiva mais alargada) e alguns aspetos subjacentes ao currículo, como por exemplo as suas 'leituras', de acordo com o descrito na bibliografia.

Porém, podendo qualquer um destes temas constituir por si só um trabalho de investigação (cuja base de implementação prática até poderia ter fortes semelhanças, adotando-se para o efeito uma metodologia de investigação adequada a cada um deles), julgamos ser lícito assumirmo-nos como conhecedores de que os mesmos careciam de uma fundamentação, em termos de referencial teórico, mais sólida e consistente, comparativamente a alguma superficialidade na abordagem e considerações tecidas nas linhas subsequentes sobre a importância do 'meio social' e do currículo como elementos modeladores das interações estabelecidas em aula e consequentemente no processo de ensino/aprendizagem[4].

No que concerne ao currículo[5], a visão sobre o mesmo em nada é consensual, na literatura científica, quer no que respeita ao seu significado, quer à sua interpretação. Este assume-se,

---

[2] http://www.spiem.pt

[3] Terminologia adotada por Varela (2013).

[4] Para uma análise mais atenta sobre este item, veja-se os trabalhos de Gimeno-Sacristán (2000), uma referencia pilar na bibliografia sobre o tema, Canavarro & Ponte (2005) e, mais recentemente, Varela (2013), o qual faz uma abordagem histórica e conceptual do conceito de currículo, sublinhando a inter-relação com 'meio social'. De destacar, finalmente, a investigação desenvolvida por Leite, nomeadamente Leite (2003) e Leite (2006), centrada em grande parte no caso Português.

[5] A investigação em torno do Currículo, termo proveniente do étimo latino *currere* (significando caminho, jornada, trajetória, percurso a seguir) emerge, segundo a bibliografia, nos Estados Unidos da América em inícios do Séc. XX nas reflexões de J. Franklin Bobbit com a primeira publicação, *The Curriculum*, datada de 1918, no contexto da institucionalização da educação de massas, obra essa considerada como um marco no estabelecimento do currículo como campo especializado de estudos.

há décadas, como uma problemática incontornável e bastante discutida nas políticas educativas que vêm sendo concebidas e implementadas, não só ao nível do sistema educativo português, mas também no contexto internacional.

Tal facto, por merecer a atenção e a reflexão de vários autores, parece justificar as múltiplas reflexões e trabalhos desenvolvidos em torno não só da interpretação a dar ao conceito, como também às alterações que o seu significado e significância tem assumido ao longo de décadas, dando origem a uma vasta bibliografia sobre o tema, tal como referido em Varela (2013). O mesmo autor acrescenta ainda que

> … a vinculação, cada vez mais estreita, entre a escola, o acesso ao conhecimento valioso (ou poderoso), a apropriação da tecnologia e a consecução do progresso económico e social levou a que a questão curricular passasse, sobretudo, a partir do século XX, a ser objecto de conceptualizações teóricas, assim como de decisões e práxis de política educativa e curricular, (…) evidenciando assinaláveis divergências e, até mesmo, antagonismos, mesmo ao nível da própria definição do que é o currículo, como salientam diversos autores… (Varela, 2013, p. 11).

Muito embora os professores tivessem lidado sempre com o termo, mesmo antes da palavra ser utilizada no âmbito educacional, é no Séc. XX que o currículo emerge enquanto campo de estudos, com a formação de um corpo de especialistas sobre o tema, de disciplinas e de departamentos universitários (conducente a publicações científicas em revistas académicas especializadas então surgidas) e ainda a institucionalização de sectores especializados sobre o currículo na burocracia educacional de cada estado (Silva *apud* Varela, 2013).

É nesta esfera que, em termos de conceito (muito embora existam na bibliografia diversas teorias correspondentes às suas diferentes conceções), o currículo parece aproximar-se tanto à intencionalidade educativa, numa perspetiva de planificação ordenada dos objetivos, conteúdos e até mesmo das competências de aprendizagem (o currículo prescrito), como à implementação dos planos de aprendizagem e consequente aferição dos resultados (o currículo implementado, experienciado e avaliado), valorizando-se enquanto espaço de promoção do conhecimento considerado importante, válido ou essencial (Silva *apud* Varela, 2013).

De um modo mais detalhado, vejamos algumas das definições de currículo sugeridas por alguns autores[6].

[6] Todas as referências constantes nos dois parágrafos subsequentes, onde é omitida data e respetivas páginas, são citadas em Varela (2013, pp. 13–17).

No clássico trabalho de Bobbit, *The Curriculum*, publicado em 1918 (referido em nota de rodapé na página anterior), o autor afirma que "a palavra curriculum, aplicada à educação (…) consiste numa série de coisas que as crianças e jovens devem fazer e experimentar para desenvolverem capacidades para fazerem as coisas bem-feitas que preencham os afazeres da vida adulta, e para serem, em todos os aspectos, o que os adultos devem ser". Já Tyler, em *Basic Pinciples of the Curriculum and Instruction*, completa a abordagem precedente defendendo que, "o currículo será toda a aprendizagem, planificada e dirigida pela escola, para atingir os seus objectivos educacionais". Esta visão é seguida por vários outros autores, entre os quais Taba, ao afirmar que o currículo "é essencialmente um plano para a aprendizagem", e por Ribeiro, que o define como "um plano estruturado de ensino-aprendizagem, englobando a proposta de objectivos, conteúdos e processos".

Por seu lado, Tanner e Tanner, num dos seus trabalhos, *Curriculum Development theory into practice*, colocam a ênfase nas experiências e atividades de aprendizagem salientando "a reconstrução do conhecimento e experiência (…) para tornar o estudante capaz de aumentar o seu controlo do conhecimento e da experiência", sustentando essa posição nas definições apresentas por vários autores como: Smith *et al.*, que concebem o currículo como "uma sequência de experiências potenciais oferecidas nas escolas para crianças e jovens em grupo, a percorrer por caminhos do pensamento e da acção"; Alberty e Alberty, que o conceituam como "o conjunto de todas as actividades que são providenciadas pela escola para os estudantes" e finalmente Wiles e Bondi, quando salientam que o currículo "é um objectivo ou um conjunto de valores que são activados através de um processo de desenvolvimento e culminam nas experiências dos estudantes em classe".

Procurando compilar algum das ideias chave apresentadas pelos vários autores supramencionados, e não obstante de outras referências, destacamos finalmente o contributo de Pacheco. Num dos seus trabalhos (Pacheco, 2001, p. 16), o autor sublinha que o currículo, enquanto projeto educativo e projeto didático, integra três ideias-chave: (i) "um propósito educativo planificado no tempo e no espaço em função de finalidades"; (ii) "um processo de ensino-aprendizagem, com referência a conteúdos e actividades"; (iii) "um contexto específico – o da escola ou organização formativa", propondo (com base na bibliografia) que se encare o currículo como

> …um projecto, cujo processo de construção e desenvolvimento é interactivo, que implica unidade, continuidade e interdependência entre o que se decide ao nível do plano normativo, ou oficial, e ao nível do plano real, ou do processo de ensino-aprendizagem. Mais ainda, o currículo é uma prática pedagógica que

> resulta na interacção e confluência de várias estruturas (políticas, administrativas, económicas, sociais escolares…) na base das quais existem interesses concretos e responsabilidades partilhadas… (Pacheco, 2001, p. 20).

Em suma, ainda que numa visão redutora do tema, não será difícil depreendermos que o conceito de currículo evidencia alguma complexidade. Tal parece ser resultado quer da visão e perspetivas sobre a educação, em geral, quer dos processos de formalização e realização das opções de política educativa, contemplando valores, crenças e atitudes diferenciados de cada sociedade, enfoque dado por Varela (2013) quando salienta a importância que o 'meio social' tem no (e para o) currículo.

Nesta linha, para além das intenções subjacentes ao seu significado e formulações teóricas, ao analisar-se o currículo em função dos contextos de sua conceção e realização, por detrás delas (ou subjacentes a elas), existem interesses/abordagens/ideologias políticas e económicas e forças que se movimentam na defesa de tais interesses.

Tal ideia é também sustentada por Gimeno-Sacristán (2000, p. 22) ao referir que:

> … o currículo faz parte, na realidade, de múltiplos tipos de práticas que não podem reduzir-se unicamente à prática pedagógica de ensino; ações que são de ordem política, administrativa, de supervisão, de produção de meios, de criação intelectual, de avaliação, etc., e que, enquanto são subsistemas em parte autônomos e em parte interdependentes, geram forças diversas que incidem na ação pedagógica. Âmbitos que evoluem historicamente, de um sistema político e social a outro, de um sistema educativo a outro diferente. Todos esses usos geram mecanismos de decisão, tradições, crenças, conceitualizações, etc. que, de uma forma mais ou menos coerente, vão penetrando nos usos pedagógicos e podem ser apreciados com maior clareza em momentos de mudança…

Assim, toda esta envolvente, parece identificar o currículo como um fenómeno escolar, pois é nesse espaço que visivelmente o mesmo se desenvolve e ganha significado, mas não com determinações estritamente escolares, dada a existência de subsistemas exteriores que o condicionam[7].

É com base nos factos investigados pelos vários autores e nos argumentos que estes sustentam que, neste nosso ensaio, decidimos além do currículo em si, dar especial relevo à importância do 'meio social'. Com efeito, de acordo com a bibliografia citada, depreende-

[7] Sobre esse aspeto, veja-se o trabalho desenvolvido por Varela (2013), o qual, para realizar uma análise esclarecedora do "sistema curricular" e 'meio social', distingue oito subsistemas/âmbitos, clarificando a sua significância e descrevendo detalhadamente o impacto de cada um e a forma como se expressam nas práticas relacionadas com o currículo.

se que existe uma interseção e dupla direção de influências entre estes dois tópicos. Isto porque não só o currículo modela o meio, na medida em que os futuros agentes sociais são formados com base no mesmo, como também o currículo é modelado por esses mesmo agentes, desde o 'currículo prescrito' ao 'currículo moldado'[8].

Torna-se, assim, evidente que o currículo, numa perspetiva de uma dimensão política da educação, não se alheia das dinâmica das relações entre a sociedade e a própria escola (Pacheco, 2001, p. 19).

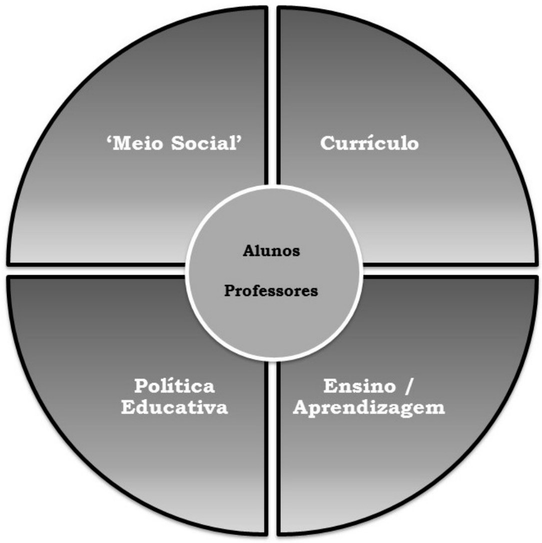


FIGURA 1.1 – Elementos preponderantes na dimensão escolar

Deste modo, tal como esquematizado na Figura 1.1, as interações estabelecidas entre professores e alunos são modeladas, numa quadrangulação, pelas opções traçadas no processo de ensino/aprendizagem, pelas políticas educativas, pelo 'meio social' e pelo currículo. Cada um destes elementos deve, simultaneamente, ser visto como modelador e modelado por todos os outros e, deste modo, embora dissociáveis em termos de análise, devem ser explorados como um todo na dimensão escolar.

O próximo enfoque será, portanto, a questão central que está na base de qualquer teoria subjacente ao currículo: "Que conhecimento deve ser ensinado?", isto é, "Qual o conhecimento ou saber é considerado importante ou válido ou essencial para merecer ser considerado parte do currículo?" (Silva *apud* Varela, 2013). As diferentes abordagens na procura de resposta a esta questão central, conduzem a teorizações curriculares distintas patentes na literatura científica e, em função da abordagem seguida, as teorias curriculares

[8] Nomenclatura adotada por Gimeno-Sacristán (2000), como descrito mais adiante.

debatem-se, entre outros aspetos, sobre “quais”, “como” e mesmo que “resultados são esperados” dos conhecimentos a lecionar, de onde derivam algumas questões cruciais referidas por Tyler (*apud* Varela, 2013):

- Que objetivos educacionais deve a escola procurar atingir?
- Que experiências educacionais podem ser oferecidas que tenham a probabilidade de alcançar esses propósitos?
- Como organizar eficientemente essas experiências educacionais?
- Como podemos ter a certeza de que esses objetivos estão sendo alcançados?

No decurso da procura de respostas a estas questões referidas por Tyler (e outras que delas possam advir), está subjacente toda uma dinâmica, um processo que se caracteriza por alguma complexidade e onde estão implícitos diferentes momentos, que vão desde a conceção do currículo à sua implementação e avaliação. Todo o processo passa por alguns níveis de deliberação curricular conducentes a diversas etapas do ‘desenvolvimento curricular’, em estreita relação com os níveis de organização e gestão curricular, num continuum de decisões curriculares espelhando aquele que é o projeto socioeducativo de um país e modelado *a posteriori* a um projeto curricular e didático ao nível de cada espaço escolar (Varela, 2013).

Deste modo, numa tentativa de clarificar o *modus operandi*, alguns autores traçam uma retrospetiva detalhada e explicativa do trabalho implícito neste processo, identificando algumas fases, como são os exemplos dos trabalhos desenvolvidos por Goodland (1979), Gimeno-Sacristán (2000) e Goodson (2001).

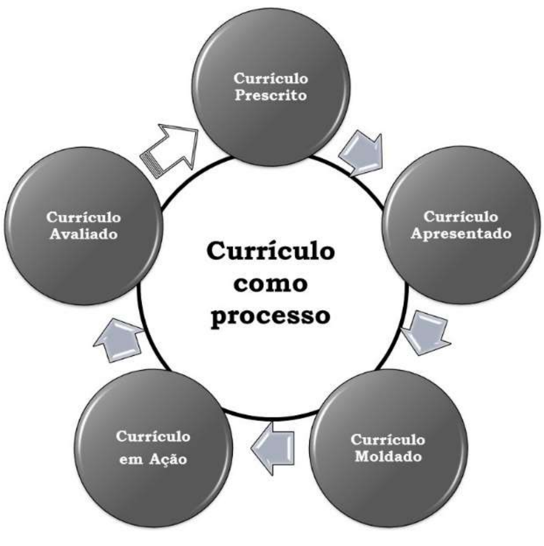


FIGURA 1.2 – Processo do desenvolvimento curricular (diferentes fases)

Seguindo a abordagem de Gimeno-Sacristán (2000), o autor identifica cinco fases, as quais podem ser esquematizadas num diagrama circular (Figura 1.2[9]), ilustrando o dinamismo e inter-relação entre as diferentes 'faces' do currículo, correspondendo cada uma delas a uma fase do processo de desenvolvimento do currículo, o qual pode retornar, como um ciclo, à fase inicial.

Sem a pretensão de nos determos na análise detalhada de cada uma dessas fases, consideramos pertinente tecer algumas considerações as quais nos ajudarão a compreender e justificar opções traçadas na fase de implementação do nosso estudo, desde a leitura das orientações curriculares à fase da ação, não descurando uma necessária 'reflexão' a *posteriori*.

Assim, a primeira fase, denominada de 'currículo prescrito', respeita ao momento da adoção de uma proposta formal de currículo, cujas deliberações da administração educativa central dos países tem um 'peso' considerável, daí a bibliografia adotar muitas vezes a designação de "currículo nacional".

A segunda fase, caso os docentes não utilizem diretamente as diretrizes que emanam do currículo oficialmente adotado, corresponde à do 'currículo apresentado' às escolas e aos professores através de alguns agentes/mediadores escolares, como as editoras, na apresentação dos projetos sob a forma de manuais escolares ou outros livros de apoio escolar.

Decorrente destas duas primeiras fases, surge uma terceira fase, 'currículo moldado', aquele que é percebido ao nível das escolas e dos professores, o qual é programado pelo grupo disciplinar, ou é planificado individualmente pelos professores na sua ação quotidiana, sendo muitas vezes ajustado ao projeto educativo e planeamento educativo da escola. Sobre esta fase, veja-se por exemplo a designação adotada por Goodlad (1979, p. 60), o qual utiliza a expressão de 'currículo percebido' por retratar "…uma representação mental…", uma vez que o currículo que "…foi oficialmente aprovado para a instrução e a aprendizagem não é, necessariamente, o que as várias pessoas e grupos interessados tomam mentalmente como sendo o currículo…".

Já no campo da ação, surge uma quarta fase, a qual corresponde à do currículo num contexto concreto do ensino na sala de aula, o que Gimeno-Sacristán (2000) identifica como 'currículo em ação'.

Finalmente, a quinta e última fase corresponde à do 'currículo avaliado'. Nesta fase, trata-se de uma avaliação transversal, onde não só os alunos são tidos em conta, como

[9] Adaptado de Gimeno-Sacristán (2000, p. 139).

também os professores, a escola, a administração educativa e todos os textos curriculares (planos curriculares, programas, manuais e livros de texto, circulares e orientações) devem ser observados.

Fazendo aqui um pequeno parênteses, ainda sobre esta questão, segundo Gimeno-Sacristán (2000), do confronto entre o 'currículo prescrito', ou seja, o que está determinado nomeadamente nos programas, e o que se faz na prática, 'currículo em ação', resulta o 'currículo realizado', que expressa o resultado de um conjunto de interações decorrentes do processo de ensino/aprendizagem, traduzindo o que é vivenciado tanto pelos alunos como pelos professores. Na perspetiva do autor, os agentes que investigam o currículo vivenciado ou experienciado pelos alunos e professores, conduz a um 'currículo observado', o qual contempla, entre outros aspetos, as opiniões dos seus participantes.

Todo este encadeamento de ideias e processo conduz a que se constate que, muitas vezes, o currículo efetivamente implementado não corresponda ao inicialmente prescrito. Daí surgem algumas das denominações que retratam o currículo não intencional, não ensinado, mais comumente identificado na bibliografia como 'currículo oculto'[10], o qual expressa "…os processos e os efeitos que, não estando previstos nos programas oficiais, fazem parte da experiência escolar…" (Pacheco, 2001, p. 70).

Face ao exposto, parece então clara a existência de dois polos no que respeita ao processo do desenvolvimento, modelação e definição efetiva do currículo, cujos intervenientes repartem, entre si, um leque de competências e deliberações e que, grosso modo, podem ser caracterizados, em função das perspetivas diferenciadas de configurar a planificação do currículo: uma perspetiva prescritiva, da responsabilidade da administração educativa central, e uma outra flexível, onde os professores se assumem um papel fundamental.

Tendo em conta a nossa linha de investigação, em virtude da análise às orientações curriculares prescritas, o nosso domínio de clara intervenção será na parte 'flexível'. Assim, algumas das questões que agora se nos colocam conduzem-nos a uma reflexão final sobre determinados aspetos [nossas questões]:

(i) Até que ponto vai a referida flexibilidade?;
(ii) Em que moldes a mesma é operacionalizada?;
(iii) Que elementos preponderantes devem ser tomados em linha de conta?.

Sobre alguns desses factos, Leite (2006, pp. 74–75) sublinha "… a necessidade das escolas e dos profissionais que nela trabalham gozarem de autonomia [curricular]…", não

[10] Para uma análise mais detalhada e completa sobre o tema, veja-se por exemplo Torres (1995).

significando com isso, uma "… total independência curricular das escolas face a um poder central ou a uma administração regional da educação", pensando em concreto numa resposta à questão (i).

Ainda no seguimento da citação anterior, a autora sublinha ainda que o importante é que as escolas e os professores, em virtude das orientações e diretrizes gerais que emanam de 'entidades superiores', sejam "… reconhecidas/os como parceiras/os dos processos de gestão do currículo…" (*Ibidem*, 2006, p. 75), e sejam capazes de evidenciar uma pro-atividade manifestada na capacidade de criar, inovar, experimentar novas ideias, novos projetos. Atitude essa que julgamos contribuir para uma evolução do conhecimento e das práticas pedagógicas, dando depois conta dos resultados decorrentes dessa investigação e que devem integrar os processos de reflexão individual e coletivo que cada instituição deve fazer sobre si e sobre as práticas que nela se instituíram, etapa a não descurar na operacionalização identificada na questão (ii).

É no quadro destas ideias que a citada autora tem desenvolvido o conceito de "escola curricularmente inteligente", isto é, uma "… instituição que não depende exclusivamente de uma gestão que lhe é exterior, porque nela ocorrem processos de tomada de decisão participados pelo colectivo escolar e onde, simultaneamente, ocorrem processos de comunicação real que envolvem professores e alunos e, através deles, a comunidade na estruturação do ensino e na construção da aprendizagem" (Leite, 2003, p. 125), onde julgamos que aqui sim deve entrar em linha de conta o 'meio social' a que nos referimos anteriormente, um dos itens a ter em conta na resposta à questão (iii).

Com efeito, recuperamos desta forma um dos conceitos fundamentais desta secção, o 'meio social', o qual se considera como elemento a ter em conta nesta parte flexível do currículo, procurando não só valorizar o meio onde os alunos estão integrados, dado que a cultura dominante pode apresentar características, em parte diferentes da cultura da população alvo.

Já Bourdieu & Passeron (1990) nos haveram alertado para estes factos quando teorizam sobre a cultura e o conceito de 'capital cultural', salientando que a dinâmica da reprodução social se centra no processo de reprodução cultural. Nesse quadro, e segundo estes autores, o currículo implementado nas escolas, baseado muitas vezes na cultura dominante, favorece um grupo alunos que veem o seu capital cultural reconhecido e favorecido. Ou seja, os autores destacam a ideia de que a escola nem sempre é neutra e justa ao não promover a igualdade de oportunidades, pelo facto de, na sua maioria, valorizar a cultura da classe dominante e ao tratar de maneira igual tanto em direitos quanto em deveres aqueles que são diferentes socialmente, acaba por privilegiar aqueles que, pela sua herança cultural, já são privilegiados.

Da análise feita pelos autores, que muito embora valorize esta problemática numa perspetiva social, existe uma clara sensibilização que adotar padrões de ensino, sem ter em conta a população envolvida no processo de ensino/aprendizagem, pode conduzir a uma problemática de discriminação, condicentes a uma falta de motivação e mesmo abandono escolar. Assim, não só se carece de adaptações nas metodologias adotadas, como também da oferta formativa e disponibilizada pelas instituições de ensino, para que o que seja efetivamente valorizado seja o quanto o indivíduo sabe ou estudou sobre determinado assunto, e não se o curso é prestigiado pela sociedade, evitando-se com isso desigualdades pelo currículo frequentado.

Em suma, tendo por base parte do referencial teórico que dá consistência a esta secção, julgamos poder afirmar que partindo da reflexão de Bourdieu & Passeron (1990), alertando para o facto da escola nem sempre proceder a adaptações curriculares necessárias, vemos destacada na investigação de Leite[11] a necessidade olhar o currículo e adaptá-lo em função da realidade e do 'meio social', termo conceptualizado em Varela (2013). Com isto, parece possível edificar a referida 'escola curricularmente inteligente', cujos agentes nela intervenientes sejam capazes de construir um currículo sólido e consistente, operacionalizado à luz do descrito em Gimeno-Sacristán (2000), capaz de dar resposta aos desafios que a escola enfrenta. É com base nesta síntese e teoricamente nela sustentada que se traçará a nossa linha de investigação, desenvolvidas nas linhas subsequentes.

1.2.2. Arte e Matemática (no ensino)

> "O homem fez arte usando a matemática, e construiu matemática observando as artes"
> (Barco, 2005)[12]

Sendo um item em parte dedicado à Arte, julgamos aceitável e não abusivo iniciá-lo de uma forma diferente. A citação apresentada retrata, na sua plenitude, muito do que nos propomos abordar nesta secção. A forma ímpar como estas duas áreas se cruzam e traçam desenvolvimentos e caminhos paralelos, retratando muito da história do homem, é inegável, até para um observador menos atento.

[11] Leite (2003) e Leite (2006).

[12] Citação sem referência, retirada de em http://www.apm.pt/encontro/profmat2010.php?id=176079.

Falar de Arte e das suas conexões à Matemática é um dos pilares centrais da nossa investigação, procurando explorar a forma como as duas áreas se relacionam numa dupla perspetiva: “Da Arte à Matemática”, explorando a presença da Matemática na Arte, enquanto obra final, e “Da Matemática à Arte”, usando os conceitos matemáticos na produção artística. Aliás, sobre uma dessas vertentes, já Descartes escrevera que “A Matemática apresenta invenções tão sutis que poderão servir não só para satisfazer os curiosos como, também para auxiliar as artes…”[13].

Tal como referido por Sampaio (2012), a Matemática e a Arte sempre traçaram alguns caminhos paralelos e, desde tempos remotos, que estas duas áreas evidenciam uma forte interseção, talvez pela existência de determinadas características comuns, uma vez que “… criatividade, beleza, universalidade, simetria, dinamismo, são qualidades que frequentemente usamos quando nos referimos quer à Arte quer à Matemática. Beleza e rigor são comuns a ambas.” e, particularizando o papel da Matemática na Arte, esta “… tem um notável potencial de revelação de estruturas e padrões que nos permitem compreender o mundo que nos rodeia. Desenvolve a capacidade de sonhar! Permite imaginar mundos diferentes, e dá também a possibilidade de comunicar esses sonhos de forma clara e não ambígua …” (Centro de Matemática da Universidade do Porto (CMUP), n.d.). Ainda sobre essa afinidade já Aristóteles (*apud* CMUP, n.d.) comentara que “Os filósofos que afirmam que a Matemática não tem nada a ver com a estética, estão seguramente errados”.

Mas se há conexões entre a Arte a Matemática que a própria História da Matemática ou a História da Arte já fizera alusões repetidas e bastante discutidas na bibliografia, como é exemplo a ‘relação de ouro’ presente em várias obras artísticas, esta criatividade não sessou e a atividade artística reivindica novas influências matemáticas em autores mais contemporâneos, como Klee, Kandinsky, Vasarely, Corbusier ou mesmo Xenakis, que se deixaram fascinar pela Matemática, explorando novas possibilidades óticas, novos algoritmos de criação, novas geometrias (não euclideanas, fractais, …) cuja exploração tem sido potenciada pelo uso da computação e outras tecnologias (CMUP, n.d.).

Também contemporânea, mas sem recurso algum à computação, a obra de Escher (item explorado com maior detalhe na Secção 2) é um manifesto exemplo da harmonia entre a Arte e a Matemática. As suas obras, dotadas de uma singularidade e ‘mão artística’, são exemplo de como certos temas matemáticos (alguns complexos) podem ser retratados e mesmo entendidos através da Arte, sobretudo pela interpretação do real. Sobre isso, Escher escreve:

[13] Citação sem referência, retirada de http://www.somatematica.com.br/frases.php.

> Todas as reproduções (…) foram produzidas com a intenção de esclarecer uma determinada linha de pensamento. As ideias que lhe estão por base testemunham, na maior parte, o meu espanto e admiração em face das leis da natureza que operam no mundo à nossa volta (…). Olhando de olhos abertos os enigmas que nos rodeiam e ponderando e analisando as minhas observações entro em contacto com o domínio da Matemática… (Escher, 1994, p. 6).

Escher, tal como outros artistas, refere-se 'à representação do real' como um dos principais elementos conducentes a algumas das conexões entre a Arte e a Matemática, capacidade que o artista refere que se desenvolve, passível de ser trabalhada e cuja evolução foi notável à medida que ele próprio ia usando a Matemática na sua produção artística (Escher, 1994), o que reforça o caracter do 'saber em evolução' patente no conhecimento matemático.

Por outro lado, um dos objetivos comumente referidas nos documentos que traçam diretrizes orientadoras para o processo de ensino/aprendizagem da Matemática remete para o desenvolvimento da capacidade de utilizar a Matemática na interpretação do real (Departamento de Educação Básica (DEB), 2001; DEB, 1999 e Direcção-Geral de Formação Vocacional (DGFV), 2005).

Desta feita, o real não só está latente no expressar da Arte, como está cheio de Matemática. Assim, não é de estranhar que se atendermos à bibliografia, são vários os estudos que nos dão conta da exploração de conexões entre a Arte e a Matemática.

Numa perspetiva mais geralista, podemos citar os casos explorados em CMUP (n.d.); a investigação desenvolvida por Vaz (2013), onde, entre outros exemplos introdutórios, é feita uma exploração mais detalhada da Matemática patente numa das obras de Almada Negreiros; ou mesmo o trabalho de Sampaio (2012) que, ao traçar uma retrospetiva geral da obra de Escher, explora alguns tópicos matemáticos patentes na obra do artista.

Contudo, dada a natureza da nossa investigação, com especial interesse para as conexões passíveis de análise em sala de aula, vejamos, a título de exemplo, alguns trabalhos desenvolvidos neste contexto e decorrente de investigações com alunos, sendo que a ordem escolhida para a sua citação foi a cronológica.

Utilizando a obra de Escher como base, Martinho (1996), procurou fazer um levantamento das conceções acerca do infinito num grupo de alunos do Ensino Secundário, do curso tecnológico de Design, e verificar até que ponto estas podiam ser questionadas e possivelmente alteradas, mediante a análise e observação da obra do artista. A mesma autora, apresentou também um outro trabalho, (Martinho, 1998) em simultâneo com a exposição promovida pela APM sobre a obra de Escher, cuja primeira parte mostra uma retrospetiva geral da vida e obra do artista, sendo abordadas, em seguida, algumas das ligações mais relevantes entre esta e o universo matemático, terminando com a apresentação de um conjunto de materiais de apoio passível de exploração em sala de aula.

À semelhança da autora citada, também Menegassi *et al.* (2008), exploram conexões entre a obra de Escher e a Matemática. Os autores sublinham a interdisciplinaridade entre estas duas áreas, analisando a forma como Escher trabalha diversos conceitos, em particular na Geometria, e a partir do estudo de algumas das suas pavimentações, dando conta das explorações feitas em aula.

Não só basedada na obra de Escher, mas também de outros artistas, como Da Vinci e Sacilotto, Chaves (2008) apresenta uma proposta de contextualização para o Ensino de Matemática na exploração números reais e conceitos de Geometria, relacionando-os com elementos presentes nas obras.

Já Lerria & Luz (2011), salientam o encontro entre as duas áreas em causa, envolvendo a leitura de imagens e a criação de materiais concretos nos quais são abordados conceitos de Geometria, frações e reta numérica. No projeto, os conceitos em análise são apresentados aos alunos de forma diferenciada, contextualizada e lúdica.

Também, destacando a forma como a aprendizagem da 'matemática escolar' pode ser enriquecida com Arte, numa perspetiva interdisciplinar, Silva (2013), investigou em que medida a pintura, em especial a perspetiva na pintura renascentista, pode contribuir para a aprendizagem de conceitos geométricos.

Igualmente recorrendo à obra de Escher, em particular a uma das partes igualmente explorada na nossa investigação, Alves (2014) salienta o facilitar do processo de ensino/aprendizagem da Geometria na Educação Básica, em especial do conceito de simetria. Para o efeito, recorrendo a exemplos de simetria patente nos desenhos do artista, foram elaboradas atividades que abordam e aprofundam esses conceitos num contexto educacional.

Face ao exposto, além de muitas outras investigações decorrentes de experiências concretizadas em sala de aula que poderiam ser citadas, os exemplos apresentados tornam evidente que as 'pontes' entre a Arte e a Matemática são muitas, sendo parte delas passíveis de uma exploração no processo de ensino/aprendizagem de conteúdos matemáticos. Ou seja, não só a Arte e a Matemática evidenciam ligações fortes, como essas ligações podem mesmo constituir um objeto de exploração na 'matemática escola', como meio conducente à aquisição e aplicação de conhecimentos matemáticos.

Desta forma, ao associar 'a representação do real' acima invocada, talvez, também a memória e o efeito visual sejam elementos determinantes para o referido sucesso do uso da Arte no ensino de alguns conteúdos matemáticos. De acordo com vários estudos realizados, conclui-se que as imagens são mais eficazes em memória que apenas palavras, já que, de acordo com Lieury (*apud* Sampaio, 2012, p. 50), "… a memória de imagens é extremamente poderosa e duradoura …", sendo a obra de Escher um exemplo concreto de como as imagens podem aperfeiçoar o entendimento de assuntos complexos, complementado com a formalização matemática desses mesmos assuntos. Por exemplo, através das suas pavimentações, Escher consegue exemplificar de forma ímpar as transformações do plano (translações, rotações e reflexões), tornando-as mais simples e apelativas aos nossos olhos.

Porém, tal como defendido por muitos dos autores acima citados, para que essa arte possa ser um veículo facilitador, impõem-se um conhecimento da obra e, se possível, uma análise cuidada aos estudos que a antecederam (ou mesmo a citações do artista) que ajudem a explicar os procedimentos, para que a Matemática nela implícita seja compreendida no seu todo, tirando proveito máximo dessas conexões.

Finalmente, seguros da exploração matemática a ser feita mediante o recurso à Arte, Alves (2013, p. 18) alerta-nos ainda para o cuidado na forma como essa Arte é apresentada na sala de aula. Segundo a autora, quando se fala aos alunos nesta "associação", Arte e Matemática, estes manifestam, de certa forma, uma reação de confusão, e "… quando questionados informalmente acerca da ideia que têm a esse respeito, a resposta, com frequência, é um silêncio algo confuso …", acrescentando que "… a própria palavra Arte parece ter ainda um significado pouco claro nas mentes dos alunos deste nível etário e grau de escolaridade (…). No entanto, a partir do momento em que são apresentadas obras de Arte para servirem como base para o estudo dos conceitos matemáticos, essa ligação parece tornar-se evidente …".

Nesta linha, o identificar de conexões entre a Arte e a Matemática é algo perentório e que não levanta dúvidas, em particular nos domínios da Geometria. Todavia, a forma e os cuidados a ter na exploração dessas conexões, em sala de aula, serão aspetos que merecem uma maior reflexão e cuidado em termos de operacionalização. Com isso, procurar-se-á que as metodologias adotadas surtam o desejado efeito na aprendizagem do aluno e que as mesmas façam sentido e sejam valorizadas por este, enquanto forma de aprender Matemática, sensibilizando-o, ao mesmo tempo, a "… procurar ver e apreciar a estrutura abstracta que está presente numa situação, seja ela relativa a problemas do dia-a-dia, à natureza ou à arte, envolva ela elementos numéricos, geométricos ou ambos …" (DGFV, 2005, p. 7).

Mas se na Secção 1.2.1 foi referido a importância do 'meio social' e do currículo ao que acrescentamos nesta secção o quão útil poderia ser a Arte no ensino da Matemática, em particular na Geometria, será importante refletir sobre o ensino da mesma, que diretrizes seguir e mesmo qual o papel do professor no campo da ação.

1.2.3. A GEOMETRIA NO ENSINO DA MATEMÁTICA: VISÃO GERAL E O PAPEL DO PROFESSOR

A Geometria, com origem no grego 'medir a terra', parece ter surgido com uma forte ligação às necessidades/problemas do dia-a-dia. Por exemplo, a bibliografia, cita utilidades como o construir de casas, ou mesmo o partilhar terras férteis junto às margens dos rios (os egípcios, há mais de 4500 anos, evidenciavam o uso da Geometria nas situações de medições das terras que ficavam junto às margens do rio Nilo, as quais eram divididas para o cultivo). Também, observar e prever os movimentos dos astros são exemplo de outras das muitas atividades humanas comumente citadas e que, por dependerem de operações geométricas, impulsionaram, de alguma forma, esta área do saber matemático.

Mas falando em Geometria, duas análises poderiam ser feitas, uma numa perspetiva mais histórica e outra mais virada para o ensino da mesma. Não obstante de apresentar algumas sugestões sobre a primeira (perspetiva histórica), é sobre o ensino da Geometria que recai o nosso interesse, como um dos temas que integram os planos curriculares da disciplina de Matemática.

Com efeito, em termos históricos, entre outras referências, para uma visão mais generalista da História da Matemática, veja-se por exemplo Estrada *et al.* (2000), o qual nos apresenta, ao mesmo tempo, uma panorâmica da História da Matemática, incluindo um apanhado da História da Matemática em Portugal. Já para uma visão mais detalhada sobre a História da Geometria, em particular, veja-se Veloso (1998), o qual analisa inúmeros temas de Geometria elementar (e menos elementar), e onde se encontram muitos exemplos de História da Matemática que nos ajudam a perceber a importância que a Geometria desempenhou na evolução da Matemática, acompanhados com sugestões para uma possível exploração em sala de aula.

Centrando então particular atenção no ensino da Geometria, se em outros domínios da 'matemática escolar', parece existir um relativo consenso em relação ao que se deve trabalhar e como se trabalhar, o mesmo não é verificado no que concerne à Geometria, quando atendemos aos currículos a nível internacional.

Porém, de acordo com a literatura científica mais atual (tanto a nível nacional, como internacional), é inegável a relevância que a sua aprendizagem assume no contexto da Educação Matemática, sendo inquestionável que a Geometria tem um papel fundamental e insubstituível na formação dos alunos, visando a competência matemática e cuja importância para uma melhor compreensão do real é altamente reconhecida.

Tais argumentos são, por exemplo, frisados por Rodrigues & Bernardo (2011), ao se referirem à Geometria como um 'campo de excelência', cujo contributo para o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos é notável, o qual deve explorar as relações entre os objetos geométricos, analisando/conjeturando propriedades e relações cruzadas, valorizando-se o destacar da aplicabilidade em contexto real e o forte contributo para que o estudo da mesma tem no "…desenvolvimento da visualização e do raciocínio espacial…" (*Ibidem*, 2011, p. 340), sendo essa visualização entendida como construção e manipulação de representações mentais de objetos bi e tridimensionais (National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), 2008) necessárias à atividade quotidiana.

Não entrando em detalhes de maior, poder-se-á traçar uma sucinta retrospetiva da mudança de visão face ao ensino da Geometria, no que respeita em particular ao caso português[14]. Decorrido um período marcado pela reforma da Matemática Moderna dos anos 60, em que existiu uma tentativa de algebrização da Geometria, levando ao seu quase desaparecimento, é com a reforma curricular da Matemática, na década de 90, que a Geometria acabaria por ganhar um relevo que até à data não tinha, em particular no Ensino Básico (Rodrigues & Bernardo, 2011). Contudo, a sua expressão no currículo efetivamente implementado[15], "…dadas as experiências escolares dos professores da altura, pautadas pela recessão da Geometria…", ficaria ainda aquém do que era recomendado (*Ibidem*, 2011, p. 340).

Após algum tempo, talvez se tenha dado um 'virar de página' pois, e em função da importância que o currículo lhe dá, o ensino/aprendizagem da Geometria é um item que tem merecido a atenção de vários investigadores em Educação Matemática, a avaliar pelas inúmeras publicações científicas produzidas num período mais recente, dando-nos conta da crescente investigação sobre o tema.

Um olhar, ainda que superficial por uma parte significativa dessas investigações, dão-nos conta da importância que a teoria de Dina e Peter van Hiele[16] assume no ensino/aprendizagem da Geometria e que, segundo alguns autores, é quase de citação obrigatória em trabalhos sobre o tema.

[14] Para uma análise mais completa, veja-se Veloso (1998), que, no capítulo I, retrata a evolução do ensino da Geometria em Portugal e no resto do mundo, ajudando-nos a perceber a origem das dificuldades atuais no ensino da mesma.

[15] Recorde-se o referido na Secção 1.4.1.2.1, citando Gimeno-Sacristán (2000).

[16] A teoria de Van Hiele teve origem nas respetivas teses de doutorado de Dina van Hiele Geldof e do seu marido, Pierre van Hiele, na Universidade de Utrecht, Holanda, em 1957. Contudo, dado o falecimento de Dina após concluir sua tese, Pierre foi quem, mais tarde, desenvolveu e disseminou a teoria em publicações posteriores.

O casal van Hiele teoriza o desenvolvimento do 'pensamento geométrico', sugerindo que este pensamento evolui de modo lento, desde as formas iniciais de pensamento até às formas dedutivas finais, onde a intuição e a dedução se vão articulando. Tal como retrata o esquema da Figura 1.3, os cinco níveis organizam num processo gradual, onde as competências vão sendo adquiridas de um modo progressivo e cumulativamente, desde a mera perceção de figuras pela sua aparência (visualização), ao rigor necessário à sua plena compreensão (van Hiele, 1999).

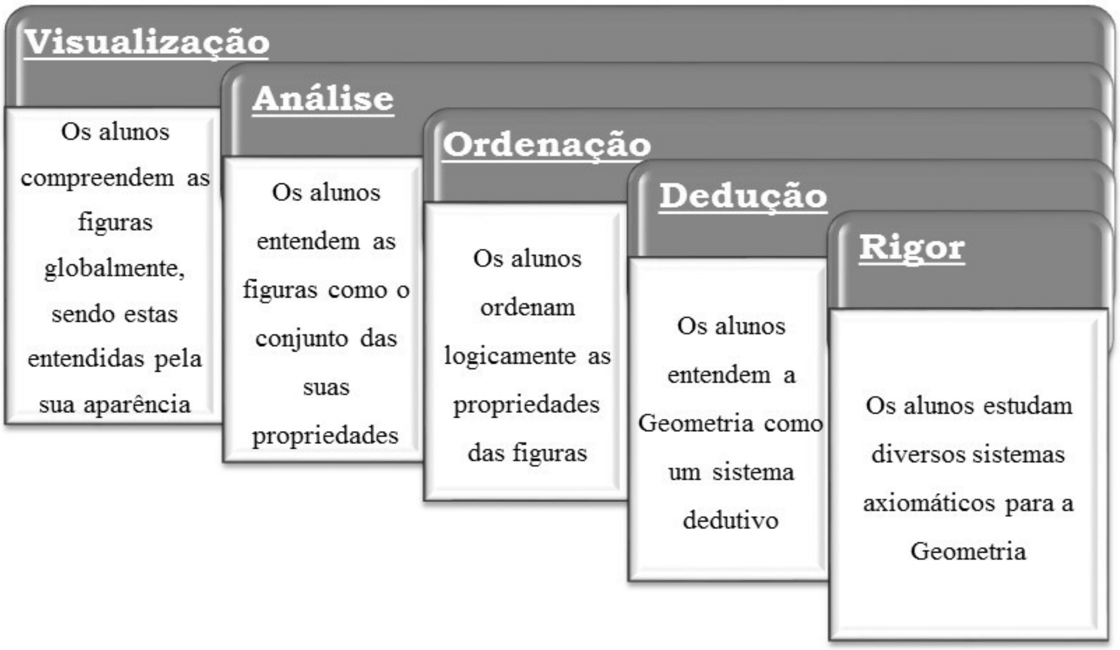


FIGURA 1.3 – Níveis de Aprendizagem da Geometria (Teoria de van Hiele)

No que respeita em particular à capacidade de visualização, algo com particular interesse para a nossa investigação, ainda segundo van Hiele (1999), o aluno começa por reconhecer as figuras e diferenciá-las pelo seu aspeto físico e pelo que a imagem visual comporta. Só numa fase posterior, interiorizada essa visualização, há uma análise das suas propriedades e características (matemáticas) dos elementos.

Também Matos & Serrazina (1996) destacam a importância dada à visualização, à análise de objetos e à comparação de figuras, acrescentando a utilidade e o contributo que a realização de construções geométricas poderá ter quer na forma como os alunos percecionam o mundo que os rodeia, quer no desenvolvimento da sua capacidade de o compreender e interpretar.

Assim, acredita-se ser importante num primeiro nível que se privilegie a abordagem intuitiva e experimental do conhecimento e do desenvolvimento das formas mais elementares de raciocínio geométrico, para numa fase posterior haver uma ligação efetiva entre as propriedades fundamentais das figuras e das relações básicas entre elas, estabelecendo-se regras e conjeturas para os elementos observados. Referente a este processo, a literatura enfatiza que tal progressão é determinada fortemente pelo ensino, pelo que o professor assume aqui um papel primordial da definição das estratégias metodológicas a implementar e na construção/implementação das tarefas (Matos & Serrazina, 1996)[17].

Porém, toda esta "definição" tem como ponto de partida a análise das orientações curriculares, para posterior definição das referidas estratégias conducentes ao alcançar dos objetivos de aprendizagem visados.

Com efeito, se atendermos a alguns documentos, tais como *Princípios e normas para a matemática escolar* (NCTM, 2008); *A Matemática na Educação Básica* (DEB, 1999); *Currículo Nacional do Ensino Básico – competências essenciais* (DEB, 2001), ou mesmo *Cursos de Educação e Formação: Programa - Componente de Formação Científica - Disciplina de Matemática Aplicada* (DGFV, 2005), o papel da Geometria é apontado como crucial para um o desenvolvimento sólido das competências e capacidades matemáticas dos alunos.

Não obstante de várias citações dos documentos supramencionados que poderiam aqui ser apresentadas[18], julgamos ser de destacar as referências ao papel da Geometria constantes no documento da DGFV (2005), o qual serviu de base de análise na secção seguinte, procurando definir os pilares que balizam a investigação e a fundamentam em termos de enquadramento e adequabilidade. Entre outras orientações, pode ler-se que:

> … A aprendizagem de aspectos relacionados com a geometria é importante para que os estudantes desenvolvam o conhecimento do espaço que os rodeia. O conhecimento, as relações e as ideias geométricas tanto são úteis por estarem presentes em situações do dia-a-dia, como relacionadas com outros tópicos da matemática. A aprendizagem da geometria deve estar intimamente relacionada com a realidade. O desenvolvimento nos estudantes de uma intuição geométrica e de raciocínio espacial, bem como da capacidade de visualizar, devem ser preocupações permanentes do professor. Para além disso, os estudantes

[17] A interiorização de algumas destas ideias revelar-se-ão preponderantes na cronologia e planificação do nosso projeto, descrito na Secção 1.4.1

[18] Optamos por suprimi-las deste nosso ensaio para evitar, sobretudo, uma abordagem ainda mais extensa em termos de revisão da literatura, algo que reconhecemos já longa. Deste modo, estando os documentos em causa de fácil acesso ao leitor, e uma vez que as orientações se tornam, em certa medida, repetitivas, considerámos útil apresentar, daqui em diante, apenas citações do documento de principal enfoque, *Cursos de Educação e Formação: Programa - Componente de Formação Científica - Disciplina de Matemática Aplicada* (DGFV, 2005), o qual foi projetado e elaborado à luz dos outros documentos em causa.

> necessitam de desenvolver a capacidade de experimentar, explorar, avaliar, recomeçar, conjecturar, generalizar e argumentar. Deve ainda desenvolver-se a capacidade de organização e comunicação. Por isso, os estudantes devem ser confrontados com tarefas no âmbito da resolução de problemas, que lhes permitam passar do espaço ao plano e do geral ao particular. Estas tarefas devem favorecer o gosto pela geometria e permitir o desenvolvimento do raciocínio matemático … (DGFV, 2005, p. 26).

Em linhas gerais, julgamos que todas as palavras constates nesta citação têm uma importância notável, uma vez que esta nos dá conta de muitos dos aspetos a valorizar, alguns já invocados nas secções anteriores. O destacar de alguns excertos (a sublinhado), pareceu-nos pertinente por constituírem orientações claras e concisas para o professor, dando-nos conta de preocupações que devem pautar a sua ação, em particular no ensino da Geometria.

Sobre a importância do papel do professor, alguns autores como, Clemente e Battista, Lehere, Kenkins e Osana (*apud* Rodrigues & Bernardo, 2011) referem ainda que o pensamento geométrico do indivíduo depende não somente da sua maturação, mas também da instrução. Como tal, a forma como este item é valorizado no currículo e a forma como o professor o implementa na sala de aula torna-se, com efeito, determinante para o desenvolvimento das competências desejáveis e evolução do pensamento geométrico.

Nesse seguimento, van Hiele (1999) sublinha que o professor deve propor e definir tarefas adequadas ao nível dos alunos e que valorizem a progressão para níveis superiores de pensamento. Claro está que, uma escolha de tarefas não adequadas ao nível dos alunos pode condicionar, fortemente, o seu progresso. Ou seja, a tese de que o professor se assume como elemento determinante está aqui mais uma vez enfatizada.

Em síntese, cabe ao professor procurar identificar no mundo real elementos concretos onde os conceitos geométricos estejam presentes e proporcionar aos alunos a possibilidade de os analisar, estudar e compreender, tendo por base a observação, contribuindo para um desenvolvimento da capacidade de visualização. Uma das componentes desse desenvolvimento passa pela capacidade em compreender e retratar a realidade tridimensional em construções bidimensionais e cuja exploração de alguns elementos artísticos poderá ser uma possível abordagem sugerido pelo professor no estudo de alguns conceitos da 'matemática escolar' visando o alcançar de várias competências pelos alunos.

Mas que outras orientações específicas nos são dadas para o ensino da Geometria, em concreto para os CEF? Esta aspeto é o que nos propomos analisar na secção seguinte.

1.2.4. O Ensino da Geometria nos Cursos CEF: orientações curriculares[19]

Julgamos pertinente, a anteceder a quaisquer considerações sobre o ensino da Geometria nos CEF, fazer um pequeno parêntese que nos ajude a compreender, de um modo sucinto, o que caracteriza estes cursos e como é que a disciplina de Matemática está organizada. Isto porque, algumas das orientações curriculares invocam especificações que só serão compreendidas mediante uma clarificação de alguns aspetos de âmbito geral.

Tal como publicado no *Despacho Conjunto nº 453/2004*, de 27 de Julho (2004), os CEF pretendem contribuir para a formação de jovens em situação de abandono escolar e em transição para a vida ativa. Particularmente, para os que entram precocemente no mercado de trabalho, com níveis insuficientes de formação escolar e de qualificação profissional, esta formação permite-lhes adquirir um *background* mínimo que os ajude nessa integração profissional. Estes cursos procuraram, assim, dar resposta às necessidades educativas e formativas dos jovens que, evidenciando algumas situações mais adversas em termos de retenções repetidas, abandono escolar ou que não pretendendo, à data, prosseguir estudos no âmbito das restantes alternativas de educação, optam aceder a uma qualificação profissional mais consentânea de acordo com os seus interesses, expectativas e oferta formativa disponibilizada pela rede escolar.

Com efeito, "… para estes estudantes, a disciplina de Matemática terá de assumir uma forma necessariamente muito concreta e ligada à realidade; os jovens em situação de abandono escolar tiveram muito provavelmente um historial de insucesso na disciplina de Matemática e precisam assim também de aprender a reconhecer a Matemática no mundo que os rodeia …" (DGFV, 2005, p. 2).

De acordo com referencial de formação constante no documento da DGFV (2005), o programa da disciplina de Matemática, denominada de Matemática Aplicada para os cursos em causa, está organizado em módulos independentes, os quais se distribuem pela tipologia do curso[20], em função do nível de escolaridade/pretensões dos alunos.

[19] Toda esta secção será projetada tendo em conta as orientações constates no documento da DGFV (2005), com o intuito de balizar os cuidados a ter na definição de estratégias e metodologias adotadas em sala de aula e justificar a integração de projetos transversais no currículo implementado pelo professor.

[20] Em função da escolaridade dos alunos e das suas pretensões, estes podem frequentar o curso de Tipo 1/A ou Tipo 1/B, que conferem habilitação do 2º ciclo do Ensino Básico. Os estudantes que frequentem cursos que conferem habilitação do 3º ciclo do Ensino Básico, devem estar inscritos em cursos de Tipo 2 ou Tipo 3. As restantes tipologias (Tipo 4, 5 ou 6) referem-se aos estudantes de cursos de formação complementar, ou de formação equiparada ao Ensino Secundário. Para mais informações, veja-se DGFV (2005).

Com efeito, atendendo à diversidade de formação dos estudantes que se podem candidatar a estes cursos, o documento é claro ao referir que "…os professores e as estruturas próprias dos cursos de Educação e Formação poderão ajustar o conteúdo dos módulos aos conhecimentos, capacidades e interesses dos estudantes …", acrescentando em particular que no caso dos estudantes com dificuldades de aprendizagem, podem ser mobilizados conhecimentos e problemas de módulos anteriores, explorando primeiramente requisitos necessários à compreensão de novos conceitos, e "… no caso de estudantes com interesses em determinada área [ou a frequentar determinadas áreas de formação], podem procurar-se exemplos ligados a essa área …" (DGFV, 2005, p. 3), explorando-se os conceitos e os tópicos matemáticos a partir de contextos que façam maior sentido e com uma motivação adicional para os alunos.

Mediante a descrição geral feita, centremos atenção particular referente às diretrizes para o ensino/aprendizagem, em concreto da Geometria.

Se atendermos à citação feita da secção anterior, algumas das palavras destacadas dão-nos conta do cuidado a ter na seleção das tarefas/projetos a desenvolver com os alunos no sentido de "favorecer o gosto pela geometria", com o fim de instruir matematicamente os alunos contribuindo para "… uma melhor compreensão do espaço envolvente …" (DGFV, 2005, p. 2), valorizando-se a utilização de uma linguagem matemática rigorosa.

Nesse sentido, tendo em conta o invocado na Secção 1.2.1 e o supramencionado, uma das preocupações a ter em conta é a população alvo, procurando-se definir tarefas/projetos que tenham uma forte significância e que se adequem ao seu plano curricular de formação. Como tal, associada à necessidade da disciplina de Matemática assumir uma forma necessariamente muito concreta e ligada à realidade, segundo as orientações da DGFV (2005, p. 7), impõem-se "… propostas de trabalho relevantes e com significado para os estudantes dos diversos cursos …".

Concretamente, centrado na Geometria, de entre algumas das finalidades da disciplina referidas ao longo do texto, pode ler-se "… desenvolver a capacidade de reconhecer regularidades e modelos matemáticos relevantes em cada aspecto da realidade …" (*Ibidem*, 2005, p. 2). Para o efeito, "… na formação geral dos cidadãos e, em especial, para os que se dedicam a algumas profissões é fundamental desenvolver o raciocínio geométrico e a capacidade de visualização (…) no que respeita às transformações geométricas e às suas propriedades …" (*Ibidem*, 2005, p. 55).

Assim, de entre um conjunto vasto de competências matemáticas visadas referidas, citemos (sem uma ordem de importância em particular) algumas constantes ao longo do documento da DGFV (2005):

- ***i.*** *a aptidão para visualizar e descrever propriedades e relações geométricas, através da análise e comparação, para fazer conjectura e justificar os seus raciocínios;*
- ***ii.*** *a sensibilidade para apreciar a geometria no mundo real e o reconhecimento e utilização de ideias geométricas em diversas situações e na comunicação;*
- ***iii.*** *a aptidão para identificar e utilizar as transformações geométricas;*
- ***iv.*** *a tendência para procurar propriedades comuns em figuras geométricas e para utilizar modelos geométricos na resolução de problemas reais;*
- ***v.*** *a aptidão para resolver problemas através de construções, nomeadamente envolvendo lugares geométricos, semelhança de figuras, assim como para justificar os processos utilizados;*
- ***vi.*** *a aptidão para formular argumentos válidos recorrendo à visualização e ao raciocínio geométrico, explicitando-os em linguagem corrente;*
- ***vii.*** *a aptidão para reconhecer e analisar propriedades de figuras geométricas e de sólidos, nomeadamente recorrendo a materiais manipuláveis e à tecnologia;*

No texto em análise, existem, igualmente, várias orientações que nos dão conta de alguns aspetos a considerar nas estratégias adotadas em sala de aula e na definição das tarefas/projetos a desenvolver com os alunos no decorrer do processo de ensino/aprendizagem da Geometria. Por exemplo, no que se refere ao professor, o documento reforça, à semelhança de citações anteriores, que este deve propor "… situações que levem os estudantes a realizar actividades matemáticas: explorar, procurar generalizações, fazer conjecturas e raciocinar logicamente. Ao realizar este tipo de actividades, cria-se o hábito de experimentar, procurar o que há de invariante numa situação e tentar encontrar generalizações aplicáveis noutras situações …" (*Ibidem*, 2005, p. 6).

O rigor, a correção científica implícita na comunicação estabelecida em sala de aula, é outro dos cuidados a ter não só na exposição dos conteúdos por parte do professor, como este deve exigir o mesmo nas intervenções dos alunos. Neste sentido, é reforçado no documento que "… tendo em conta a estreita dependência entre os processos de estruturação do pensamento e da linguagem, é absolutamente necessário que as actividades tenham em conta a correcção da comunicação oral e escrita. O estudante deve verbalizar os raciocínios e discutir processos (…), argumentar com lógica (…) e correção científica …" (*Ibidem*, 2005, p. 8).

Outras das orientações claras, refere-se à lecionação dos conteúdos ou mesmo na aplicação de tarefas ou implementação/desenvolvimento de projetos de natureza transversal. Em concreto, o documento sugere "… levar em conta as aprendizagens realizadas noutras disciplinas, particularmente naquelas onde há trabalho de desenho técnico ou de qualquer tipo de representações geométricas…" (*Ibidem*, 2005, p. 55).

Para finalizar, a somar a todas as orientações de natureza diversa já expostas, as quais contemplam uma visão geral, finalidades e competências concretas visadas, ou mesmo a objetivos de aprendizagem e orientações metodológicas para o ensino/aprendizagem da disciplina, também a parte da avaliação não é descurada. Como tal, além das tradicionais provas de avaliação escrita, o documento é claro quando sugere o desenvolver de atividades, tarefas ou projetos, podendo estes assumir um caracter interdisciplinar e transversal.

Assim, havendo uma necessidade imposta pelo sistema educativo em avaliar os alunos, no desenvolver de projetos, em particular, cujo fim máximo passa pela promoção da autonomia e fazer uso das aprendizagens realizadas, pode estar implícita uma componente de avaliação. Algumas das sugestões apontam para a possibilidade de o aluno expor um tema preparado, sobre o qual tenha refletido e estudado previamente. Em particular, no desenvolver de um projeto, pode haver lugar à apresentação/discussão desse projeto e da forma como os conceitos matemáticos se revelaram úteis na sua consecução, sendo exigida a correção e rigor na comunicação matemática.

Em jeito de conclusão final, face a todas as considerações tecidas, nas páginas anteriores, julgamos ter identificado um referencial teórico que balizará toda a nossa investigação e sobre o qual deve ser desenhada toda a operacionalização do nosso projeto. Instruir matematicamente alunos com características mais adversas, procurando motivá-los e evitar situações de abandono e assiduidade irregular, será uma prioridade, objetivo que só conseguiria ser alcançado com um envolvimento ativo e efetivo dos alunos nesse processo de instrução, onde a valorização das suas aptidões, interesses e uma integração no plano geral de formação profissional, devem constituir uma preocupação. Reconhecendo a parte apelativa e formativa que a Arte pode ter na lecionação de alguns conteúdos matemáticos, em particular na Geometria, esse poderá ser o caminho com a implementação de um projeto, o qual poderá assumir uma natureza transversal e interdisciplinar.

Será a obra de Escher uma possibilidade?

2. ESCHER E A MATEMÁTICA

A riqueza implícita na obra de Escher constitui, por si só, um elemento de indiscutível inspiração ao trabalho desenvolvido por vários autores. Não só em áreas como a Arte e Matemática, onde a obra de Escher constitui um inegável pilar de investigação, a magia nela implícita é captada pelo olhar de vários autores afetos a outros domínios do saber.

Por exemplo, na literatura, vejam-se as obras *Surveillance*, de Jonathan Raban, e *Teil der Lösung*, de Ulrich Peltzer, que inspiraram os autores em algumas passagens dos seus romances, em que, como aponta Rodrigues (2015), as referências pontuais aos mundos imaginados por Escher são instrumentalizadas na descrição de espaços de configuração enigmática e em que a realidade e a ficção se entretecem de forma particularmente notória.

Em concreto, tendo em conta o nosso foco de interesse, é nas conexões existentes entre a obra de Escher e a Matemática que nos iremos centrar, procurando apreciar, salientar e apreender a estreita afinidade que emerge. Porém, reconhecendo, desde já, a breve referência, com omissão de vários aspetos de interesse, à vida e obra de Escher feita nesta parte do nosso trabalho – Secção 2, sugere-se a consulta da *Website Oficial de M. C. Escher*[21], o qual integra não só informação autenticada sobre a vida e obra do artista, como uma galeria da sua obra, e de onde foram retiradas todas as imagens (referentes ao trabalho de Escher) que constam neste nosso ensaio.

Além dessa referência, e várias vezes citadas ao longo desta secção, sugere-se ainda algumas obras, umas mais sucintas, outras mais completas, de entre as quais nos parece impreterível o trabalho de Escher *et al.* (1982) que, para além de uma biografia bastante completa, o livro contém o texto completo da divisão regular do plano, livro que Escher escreveu e ilustrou em 1957, um índice e tradução de todos os textos do trabalho de Escher e ainda algo bastante pessoal como excertos de alguma correspondência trocada pelo artista, especialmente com o filho Arthur, e dos seus diários de trabalho e viagens. Complementando, para um outro tipo de análise, poder-se-á sugerir dois outros trabalhos:

[21] http://www.mcescher.com/

Ernst (1978), o qual é dividido em capítulos que cobrem os vários temas da obra de Escher, sendo alguns dos seus trabalhos detalhadamente descritos e acompanhados dos estudos que lhe estiveram na base[22]; e Schattschneider (2004), o qual reúne uma vasta parte das aguarelas e mosaicos de Escher que constituíram a base de muitas das suas litografias, incluindo mais de 350 ilustrações que retratam minuciosamente a descoberta do mundo da geometria pelo artista, explicando as diferentes técnicas usadas pelo mesmo.

Com efeito, sendo o propósito fulcral desta secção apresentar/explorar algumas das conexões existentes entre a obra de Escher e a Matemática, julgamos fazer todo o sentido tecer, primeiramente, algumas considerações sobre a vida e obra do autor para melhor compreender algumas das suas ideias e forma de ver a sua própria 'arte'. A acompanhar toda esta parte, algo que considerámos valorizar este nosso trabalho, não só pelo que permite contextualizar, mas também pelo interesse/curiosidade que as palavras acarretam em si, serão apresentados alguns excertos do que Escher escreve sobre sí e sobre algumas das suas obras. Deste modo, além de breves excertos dos diários do autor, que, salvo indicação em contrário, todos eles foram traduzidos de Escher *et al.* (1982), pareceu-nos também enriquecedor anexar (Anexo A.1) um texto escrito por Escher falando de si próprio e de alguns momentos da sua vida pessoal e fases do seu trabalho, cuja riqueza é inegável.

2.1. Escher: Vida e Obra

Maurits Cornelis Escher nasceu a 17 de Junho de 1898 em Leenwarden (cidade no norte da Holanda). Mauk, nome pelo qual era tratado na família, cedo ganha um gosto pelos trabalhos em madeira (sobretudo pela influência do pai, George Arnold Escher) técnicas que mais tarde lhe viriam a ser muito úteis, nomeadamente a xilogravura[23] (veja-se a título de

[22] Este aspeto é precisamente algo de destacar neste trabalho e talvez uma das razões do seu particular interesse. O facto de incluir extensas análises dos diagramas realizados por Escher nos estudos que antecederam a alguns dos seus trabalhos, constitui leitura obrigatória e ponto de fulcral interesse para os verdadeiros amantes e 'investigadores' da obra de Escher. Precisamente, os estudos em causa ajudaram-nos a perceber melhor aspetos que integram a obra de Escher e revelaram-se determinantes na concretização deste nosso trabalho.

[23] A Xilogravura é um processo idêntico ao de um carimbo no qual são feitos entalhes sobre a madeira, com recurso a um instrumento cortante, possibilitando a reprodução da imagem gravada no papel ou outro suporte adequado. O procedimento mais usual, e após a gravação na madeira, é usar um rolo de borracha embebida em tinta, o qual toca apenas as partes elevadas do corte. O final do processo consiste na impressão em alto relevo, em papel ou pano especial, que fica embebido com a tinta, revelando a figura.

exemplo os trabalhos apresentados na Figura 2.1, um autorretrato e um retrato de Jetta Umiker, sua esposa).

FIGURA 2.1 – Autorretrato de Escher (1922) e retrato de Jetta Umiker (1925) em Xilogravura

O seu percurso escolar tem algumas curiosidades. Uma delas, prende-se com o facto de Escher não ser de todo um bom aluno, nomeadamente a Matemática, facto que o impede de obter o diploma final, em 1918, quando sai de uma das escolas secundárias de Arrnheim.

Com 21 anos de idade, Escher vai para Haarlem estudar Arquitetura na Escola de Artes Decorativas, curso que acaba por abandonar e, contando com o incentivo do professor e diretor da escola, Samuel Jesserun de Mesquita[24] (Figura 2.2), muda para Artes Decorativas.

FIGURA 2.2 – Samuel Jesserun de Mesquita

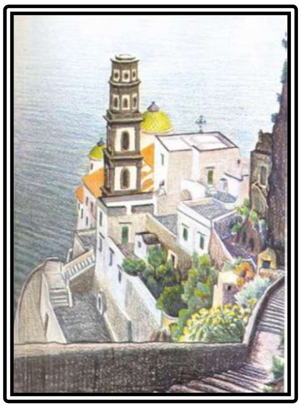
Porém, apesar deste precoce interesse e dominar muito bem as técnicas de xilogravuras, o sucesso no curso de Artes Decorativas também não foi grande, acabando por abandonar a

[24] Samuel Jesserun de Mesquita, judeu de origem portuguesa, revelou-se uma pessoa determinante na vida de Escher, não só pelo apoio dado em alturas determinantes do seu percurso de vida (nomeadamente opções escolares/académicas), como também na obra do artista. O contacto entre os dois manteve-se até 1944, altura em que Mesquita e a sua família foram vítimas do racismo nazi.

escola em 1922. No relatório oficial de escola consta que ele era demasiado ‘pouco artista’, faltando alguma espontaneidade, fantasia e criatividade no seu trabalho (Escher *et al.*, 1982).

Ainda, nesse mesmo ano, de entre várias viagens de que constam registos no diários de Escher, Itália é dos países que mais marca o artista, o qual identifica como um sonho não real, (*Ibidem*, 1982). Este encanto viria a ser preponderante num dos primeiros períodos da sua obra, datando desta época, fins de 1922 e inícios de 1923, as primeiras xilogravuras de paisagens italianas, que dão corpo às primeiras exposições individuais de Escher: em Junho de 1923 em Siena e em Fevereiro do ano seguinte na Holanda (país onde viria a fazer inúmeras exposições dos seus trabalhos). Tal como retrata Martinho (1998), as viagens feitas pelo autor, marcam, neste período, a sua obra. Nos meses de Primavera, Escher esboça cidades, aldeias, passagens onde “registava detalhes de edifícios monumentais, captados de pontos de vista invulgares, (…) estes esboços constituíam fonte de inspiração e matéria prima para as composições que produziria no seu estúdio durante o Outono e o Inverno, sob a forma de litografia ou xilogravura” (p. 7).

A título de exemplo, veja-se a Figura 2.3, onde à esquerda é possível observar o esboço a cores de Amalfi, Baixa de Itália, o qual inspiraria uma das mais conhecidas obras, *Torre de Babel* (1928), representada à direita.



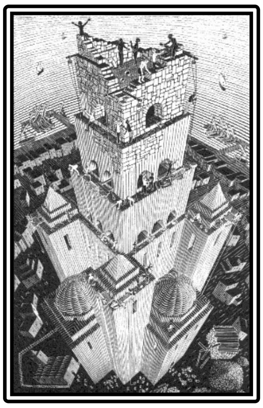


FIGURA 2.3 – Pintura de Amalfi (1922/23) e *Torre de Babel* (1928)

Este período não só marcou a vida artística de Escher, como também a sua vida pessoal. É em Itália – Ravello – que, em Março de 1923, viria a conhecer a sua futura esposa, Jetta Umiker, e onde viriam a nascer os seus dois filhos mais velhos, George (1926) e Arthur (1930), já depois de se mudar para Roma.

O reconhecimento pela obra de Escher torna-se por demais evidente[25], a avaliar, não só pelo sucesso de duas publicações com ilustrações de Escher, *XXIV Emblemata* e *De vreeselijke avonturen van Scholastica*, no inicio da década de 30, como também pelas inúmeras exposições com a obra do autor. Este reconhecimento vai além-fronteiras, sendo a sua obra apreciada não só a nível europeu (nomeadamente na Holanda), mas também nos países americanos (nomeadamente nos EUA), onde viria a ser premiado com o terceiro lugar numa exposição em Chicago (1934), com a litografia[26] *Nonza* (Figura 2.4).

FIGURA 2.4 – *Nonza* (1934)

Contudo, a instabilidade política vivida em Itália, levam Escher e a família a mudar-se para Chateaux-d'Oex, na Suíça, em 1935. A monotonia e pouco inspiradora paisagem revestida de neve (Escher *et al.*, 1982), não o motivou e passados dois anos, depois de uma viagem por vários países europeus, fixou-se com a família em Ukkel, na Bélgica.

A realidade controversa e a instabilidade político-social vivida na época (Segunda Guerra Mundial) não permitem a Escher fixar-se nos sítios onde gostaria e os que realmente o inspiravam, obrigando-o a mudar, em parte, o foco da sua obra. Segundo alguns autores, é em finais desta década que se dá uma divisão profunda da obra do autor (Martinho, 1998). A primeira fase é marcada por um realismo agudo, caracterizado por um modo muito pessoal de ver e interpretar o real e marcada por uma obsessão pela estrutura do espaço e pelo uso de ângulos de visão contrastantes. Além de obras como *Torre de Babel* (1928), acima identificada, duas das mais conhecidas/citadas na bibliografia são *Castelo no Ar* e *Mão com esfera refletora* (Figura 2.5).

[25] Da bibliografia dedicada à vida e obra do autor, se uma parte considerável sustenta esta ideia, existem referencias que dão conta que o reconhecimento público pela obra de Escher não foi assim tão imediato. Tal facto conduziu a dificuldades financeiras vividas pelo artista o qual contou, numa parte considerável da sua vida, com a ajuda dos seus pais e sogros. O reconhecimento, enquanto artista, só seria visível nos finais da década de 40 e inícios da década de 50 (Martinho, 1998).

[26] A litografia é um processo de gravação em plano, que se distingue da xilogravura por ser executada em pedra calcária ou mesmo sobre uma placa de metal.

A partir daí o trabalho de Escher incide nas construções da sua própria imaginação e passa por exprimir o que ele próprio designa como 'pensamento visual'.


FIGURA 2.5 – *Castelo no Ar* (1928) / *Mão com esfera refletora* (1935)

A visita ao palácio mourisco de Alhambra, em Granada, construído pelos árabes no Séc. XIII durante a ocupação da Espanha, parece ter tido um papel preponderante na reviravolta do artista que, copiando obcessivamente os ornamentos decorativos das paredes do palácio, fê-lo despertar para os 'segredos' da divisão regular do plano (Escher *et al.*, 1982).

Apesar de Escher não possuir grande conhecimento matemático (mas os árabes sim, um conhecimento milenar mesmo), o olhar atento do artista não ficou indiferente à magia decorativa implícita naqueles mosaicos que, mediante a utilização de polígonos (regulares e congruentes) preenchiam aquelas paredes sem sobreposições, sem deixar espaços e sem lacunas entre as figuras. Serão, precisamente, algum dos trabalhos desenvolvidos nesta fase da sua obra, repletos de uma riqueza matemática notável, que constituirão o foco de interesse na consecução do nosso projeto, tronando evidente a ligação entre a Arte e a Matemática, passível de observação na realidade que nos circunda e com possibilidade de exploração no ensino da Geometria (um dos pilares/questões preponderantes da nossa investigação).

Este virar de década não só marca a vida artística, como também a vida pessoal do autor. Os finais de década de 30 e início dos anos 40, trariam à vida de Escher o melhor e o pior: a alegria de ser pai pela terceira vez e a angustia de perder os seus pais, em Junho de 1939 o pai e nos finais de Maio de 1940 a mãe. Segundo alguns confidentes e amigos, terá sido este momento preenchido por uma maior nostalgia que o farão ter regressado ao seu país natal em 1941, mudando-se para Baarn (Escher *et al.*, 1982).

Apesar de uma produção artística mais ou menos constante, é no início da década de 50 que o reconhecimento artístico de Escher parece ter atingido o ponto mais alto, multiplicando-se os artigos sobre a sua obra, nomeadamente em revistas como *The Studio*, *Time* e *Life* e com exposições em várias partes do mundo, destacando-se exposições como a de Amesterdão, no Stedelijk Museum[27], e em Washington. Em finais da década de 50, é publicada a obra *Regelmating Vlakverdeling*, onde é dada enfase à divisão regular do plano e, no ano seguinte, surge *Grafick en Tekeningen M. C. Escher*, alusiva à sua obra gráfica. Cambridge é palco, em 1960, de uma outra exposição onde é orador convidado numa conferência internacional de cristalografia[28].

Segundo Martinho (1998), é neste período que a obra de Escher é claramente aclamada e reconhecida pela crítica como "… uma ponte simbólica entre a ciência e a arte…", ficando patente a afinidade entre estas duas áreas, porventura consideradas como "inconjugáveis". Este atentar em novos tópicos, permite a alguns autores identificar uma nova fase da sua obra, onde tópicos inerentes às ciências exatas são o seu foque de interesse, Sobre isso, Escher refere que "…apesar de não possuir qualquer conhecimento ou treino nas ciências exatas, sinto muitas vezes que tenho mais em comum com os matemáticos do que com os meus colegas artistas" (Escher *apud* Martinho, 1998, p. 9). Em particular, nas palavras de Ernst (1978), depreende-se que o interesse de Escher por alguns dos tópicos matemáticos mais explorados, nomeadamente em temas topológicos e aproximação ao infinito (tópico explorado com maior detalhe na Secção 2.2.1), terá sido despontado pela observação das fitas de Möbius[29], que entre outras obras, foi inspiração para alguns dos seus trabalhos mais conhecidos, cuja designação cita precisamente (Figura 2.6).

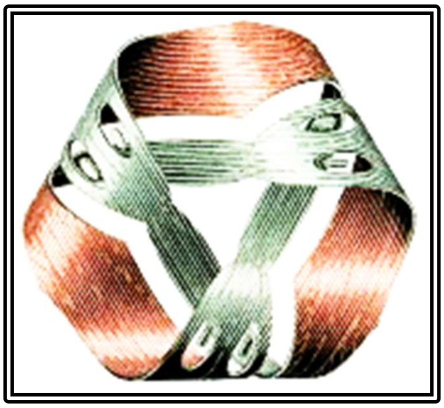


FIGURA 2.6 – *Fita de Möbius I* (1961) / *Fita de Möbius II* (1963)

[27] Destaque para a apresentação da exposição na altura de uma conferência internacional de Matemática em Amesterdão, reconhecendo-se a afinidade da obra de Escher com esta área científica.

[28] Durante este período de ativa projeção pública além dos temas a que já nos referimos, por influência de familiares que estudavam Cristalografia, Escher inclui nas suas gravuras perspetivas e desenhos de sólidos geométricos simples (veja-se a galeria respeitante a este item na *Website Oficial de M. C. Escher*).

[29] Uma fita de Möbius ou faixa de Möbius deve o seu nome a August Ferdinand Möbius, que estudou este objeto em 1858, com em vista a obtenção de um prêmio da Academia de Paris sobre a teoria geométrica dos poliedros. Em termos práticos, esta fita obtém-se pela colagem das duas extremidades de uma faixa, após efetuar meia volta numa delas. No seguimento deste estudo, Möbius introduziu também a noção de triangulação no estudo de objetos geométricos do ponto de vista topológico.

A produção regular foi algo sempre valorizado por Escher, exceto quando alguns problemas de saúde o obrigaram a afastar-se, nomeadamente entre 1962 e 1970, período em que foi submetido a algumas intervenções cirúrgicas. Mas, mesmo durante esse espaço de tempo, não esteve inativo, algumas das suas obras datam deste período e destacam-se apresentações públicas de grande dimensão da sua obra, por exemplo a exposição retrospetiva em The Hague e outra em Washington (1968). O seu estado de saúde frágil, permitiu-o, ainda, assistir à publicação do livro *The World of M. C. Escher*.

O norte da Holanda, concretamente na Rosa Spier House em Laren, foi o local escolhido para Escher passar os seus últimos tempos, tendo falecido no hospital de Hilversum a 27 de Março de 1972, com 73 anos de idade.

2.2. Conexões entre a Obra de Escher e a Matemática

Escher não se considerava nem um matemático nem um artista plástico. No entanto, como ele próprio refere, apesar de não possuir formação matemática, sentia ter mais em comum com um matemático do que com os seus colegas artistas, dando-lhe particular satisfação o interesse com que os matemáticos e cientistas olhavam a sua obra, assumindo que "…um contacto fecundo pôde ser estabelecido entre os matemáticos [e ele próprio]…" (Escher *apud* Martinho, 1998, p. 9).

De facto, o trabalho de Escher demonstra um enorme interesse, senão mesmo obsessão, por alguns objetos e conceitos matemáticos, território onde acabaria por se sentir desafiado e, não tendo qualquer formação científica na área, fazia-se valer da sua própria experiência e intuição, assumindo-se como um autodidata, tal como já referido na Secção 1.2.2.

Todavia, apesar dessa lacuna, no que respeita ao conhecimento matemático, Escher destaca, inúmeras vezes, o contacto com alguns matemáticos, como H. Coxeter[30] e R. Penrose[31], como um contributo determinante para a compreensão, interpretação e mesmo uso de alguns conceitos matemáticos (Escher *et al.*, 1982).

[30] Harold Coxeter foi um matemático canadense, nascido na Inglaterra, cujo pilar de investigação e contributo científico incide na Geometria, tendo-se dedicado, entre outros tópicos, ao estudo de polítopos regulares. Num dos livros publicados por Coxeter, Escher descobriu um diagrama que lhe chamou à atenção por representar e possibilitar novas aproximações ao infinito, inspiração para algumas das suas obras (ver Secção 2.2.1).

[31] Roger Penrose, professor universitário com interesse pela Física, Matemática e Filosofia, é descrito na bibliografia como um cientista com contributos científicos notáveis em vários domínios. Entre outras contribuições, como a Teoria Twistor, para a relatividade geral, a cosmologia e filosofia, destacamos aquelas que respeitam à matemática recreativa, como é exemplo o triângulo de Penrose, descrevendo a 'impossibilidade na sua forma mais pura'. Resultante das impressões trocadas com Escher, o artista acabaria por retratar as primeiras descrições destes objetos impossíveis inspirados nele (ver Secção 2.2.2).

Esta intersecção e intropatia entre os matemáticos e Escher é algo reconhecido pelo autor. Tal como referido por Martinho (1998, p. 9),

> … tanto Escher como os matemáticos têm modos similares de lidar com o seu trabalho. Ambos começam por selecionar um pequeno conjunto de regras que definem as evoluções possíveis num mundo abstrato. Depois exploram em detalhe as consequências da aplicação dessas regras chegando por vezes a descobertas interessantes…

É assumindo esta ideia como premissa que, nas páginas subsequentes, baseada em algumas referências bibliográficas e na nossa própria (e modesta) visão atenta à obra do artista, que iremos analisar alguns tópicos de interesse onde as conexões entre a obra de Escher e a Matemática são notáveis. Assim, conscientes de que este trabalho não tem por meta uma exploração exaustiva da obra de Escher, não iremos fazer uma abordagem com base nas fases, períodos ou mesmo temas da obra do artista. A nossa opção será com base na exploração de conceitos/tópicos matemáticos explorados pelo autor e que consideramos merecedores de maior destaque.

Assim, balizando já o nosso interesse e apesar da certeza que muito poderíamos desenvolver neste item, estamos conscientes que tal não é viável e, como tal, evitando tornar extensa e longa esta nossa apresentação, daremos especial ênfase ao nosso tópico de interesse – 'Exploração do Plano' (Pavimentações e Isometrias) – optando, contudo, por fazer uma breve referencia a dois outros tópicos explorados nas linhas subsequentes[32], 'Aproximações ao Infinito' e 'Interpretação do Espaço' (com especial enfoque na construção dos 'Mundos Impossíveis') [33], que consideramos de particular interesse, tendo até em conta possíveis desenvolvimentos futuros.

2.2.1. APROXIMAÇÃO AO INFINITO

Infinito é um conceito marcante na obra de Escher. Em muitos dos seus trabalhos, Escher tenta 'esboçar' o infinito, isto é, aproximar-se dele tanto e tão exatamente quanto possível.

[32] Ambos os itens foram adaptados do trabalho já desenvolvido por Ramos & Batuca, o qual teve por base Ernst (1978).

[33] As designações para a identificação/classificação feita não é unanime na bibliografia referente à obra de Escher. A terminologia por nós usada foi a adotada em Martinho (1998).

Como escrevera num artigo publicado em 1959, Escher expressou o que o levou, de facto, a tal tentativa:

> ...não podemos imaginar que algures por detrás da estrela mais longínqua do céu noturno, o espaço possa ter um fim, um limite para além do qual nada mais existe. O conceito de vácuo diz-nos ainda alguma coisa, pois um espaço pode estar vazio (...), mas a nossa força de imaginação é incapaz de apreender o conceito de nada no sentido de ausência de espaço... (Escher *apud* Ernst, 1978, p. 102).

Esta 'perseguição doentia' era algo já patente numa primeira fase da sua obra[34], onde a intuição do ilimitado, ou mesmo o de uma continuidade sem termo, surge em diversas representações de paisagens e edifícios. Porém, é na última fase que tal ganha maior enfase e esta aproximação ao infinito marca presença em muitos dos seus trabalhos, que, segundo Ernst (1978) é, em parte, motivada pelo contato estabelecido com o matemático Coxeter, o qual tem uma influência preponderante nesta fase da sua obra, e leva Escher a trazer a 'matemática académica' para os seus trabalhos.

Conceitos matemáticos complexos cuja discussão, no meio académico, em certos casos bastante recente, eram trabalhados pelo autor, os quais Escher assumia desconhecer e não compreender formalmente, facto que não o impedia de usar de uma forma ímpar e cuja recriação era resultado da sua intuição (Ernst, 1978). A título de exemplo veja-se o trabalho desenvolvido por Coxeter (1979) sobre a obra *Limite Circular III*. Esta teve por base uma ilustração que Escher encontrara num dos livros de Coxeter, alusiva à representação do plano hiperbólico segundo o modelo de Henri Poincaré[35].

De notar que estes trabalhos de Escher eram precedidos de alguns estudos (alguns não tão lineares quanto se possa pensar) onde a Matemática nos ajuda à compreensão dos mesmos. Como forma de ilustrar tal facto, vejamos um exemplo pertencente a uma das categorias em que a sua obra se organiza – Limites – cujo objetivo passa pela representação do ilimitado em superfícies planas (limitadas).

[34] Na obra de Ernst (1978) são identificadas quatro fases da obra de Escher. Uma primeira, de 1922 a 1937, cuja grande temática foi o retratar de paisagens e cidades, nomeadamente do sul de Itália. Seguida de uma segunda fase, de 1937 a 1945, caracterizado por desenhos de metamorfoses nas quais se observam ciclos e a passagem de figuras bidimensionais a tridimensionais. Numa terceira fase, de 1946 a 1956, além do interesse em sólidos geométricos (devidos aos estudos feitos em mineralogia e cristalografia), Escher trabalha com gravuras subordinadas à perspetiva. Por fim a quarta fase, entre 1956 e 1970, é caracterizada pelo período de aproximação ao infinito, havendo ainda produção de obras cujo tema central é a construção de 'Mundos Impossíveis'.

[35] Para uma análise mais detalhada sobre os paradigmas deste modelo, integrante da Geometria Não-Euclidiana e como alternativo à Geometria Euclidiana, veja-se por exemplo Greenberg (1993).

Para alcançar uma aproximação ao infinito, Escher utilizou 'diagramas' que lhe possibilitaram a representação de algo infinito sobre uma superfície finita. Tal foi feito de duas formas distintas. Nas figuras onde é visível uma constante redução radial das margens para o ponto central (como que uma redução ao infinito), há uma convergência para um ponto infinitamente pequeno. Porém, se nos concentrarmos no centro da figura, se começarmos a desviar o olhar para um ponto extremo e se pensarmos na possível junção de figuras cada vez maiores, intuímos a representação de um infinitamente grande. Tal aproximação era encarada por Escher com extremo cuidado e preocupação, socorrendo-se, para tal, do uso de uma lupa para que essa aproximação tocasse o perfeito.

Um dos primeiros trabalhos que retrata esta ideia é *Evolução II* (Figura 2.7) o qual permite sobretudo 'intuir' a aproximação ao infinitamente pequeno.

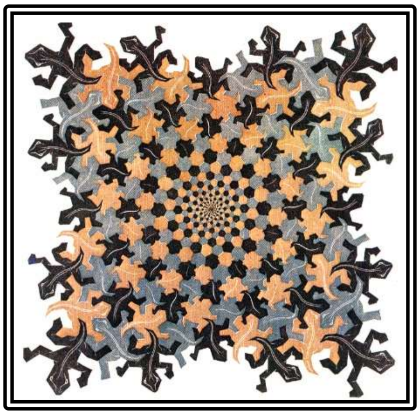


FIGURA 2.7 – *Evolução II* (1939)

Tal como ilustra a figura, nesta primeira fase dos trabalhos em que Escher procurava a aproximação ao infinito, é visível uma alteração não só ao tamanho, mas também à forma da figura principal à medida que a aproximação vai sendo intuída.

Numa fase posterior, para tentar a aproximação do infinito através da seriação, Escher usa a mesma figura recorrendo-se de ampliações/reduções em relação à sua forma inicial. Dessas representações, identificamos claramente na obra de Escher três grupos, atendendo ao padrão construído através do diagrama que lhe está na base: Gravuras de Limite Quadrado, Gravuras com Espiral e Gravuras de Coxeter.

A título de exemplo e para ilustrar um dos estudos feito por Escher, vejamos o diagrama que está na base do primeiro grupo de gravuras referido – Gravuras de Limite Quadrado.

Este grupo de obras, limites quadrados, são talvez, pela construção, as mais simples. A primeira, *Cada vez mais Pequeno I* (Figura 2.8), retrata um número infinito de lagartos, unidos uns aos outros, mas cuja a ideia de uma aproximação ao infinitamente pequeno é bem explicita.

FIGURA 2.8 – *Cada vez mais Pequeno I* (1956)

Sobre isso, a questão que se nos coloca é 'Como é que tal é conseguido?', ao que Escher explica:

> … as figuras com as quais esta gravura é contruída reduzem a área da superfície para metade constantemente e radialmente dos lados para o centro, onde o limite do infinitamente grande e do infinitamente pequeno é obtido num único ponto. Mas esta configuração também permanece fragmentária, porque a sua fronteira pode ser expandida tão longe quanto se queira pela junção de figuras cada vez maiores. (Escher *apud* Ernst, 1978, p. 104).

No *Diagrama para limites quadrados* (Figura 2.9)[36] vemos a solução simples do problema de representar o infinito e que Escher procurou explicar nas palavras acima citadas.

O triângulo isósceles $[OPQ]$ é o ponto de partida. No lado $[PQ]$ estão de novo desenhados dois triângulos isósceles $A1$ e $B1$. Continuando esta sequência, obtemos os triângulos $C1, D1, E1, F1, A2, B2, C2, \ldots$ (conforme mostra a figura). Repare-se que, repetindo tal processo, vamos sempre reduzindo a figura em causa para uma outra semelhante, com razão de semelhança $\frac{1}{2}$, isto é, de uma forma aritmética dizemos que se $[QU]$ tiver 1 unidade de

[36] A imagem apresentada utiliza uma notação não coerente para a identificação dos pontos, umas vezes estes são identificados por letras minúsculas outras maiúsculas (como é mais usual). Optámos, mesmo assim, por apresentar a referida imagem, sem qualquer uniformização, mantendo aquela que surge originalmente na bibliografia.

comprimento (u.c.), então os seguintes segmentos de reta terão, respetivamente, $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots$ u.c. . Assim, temos representado um número de quadrados uns sob outros, que se tornam cada vez mais pequenos.

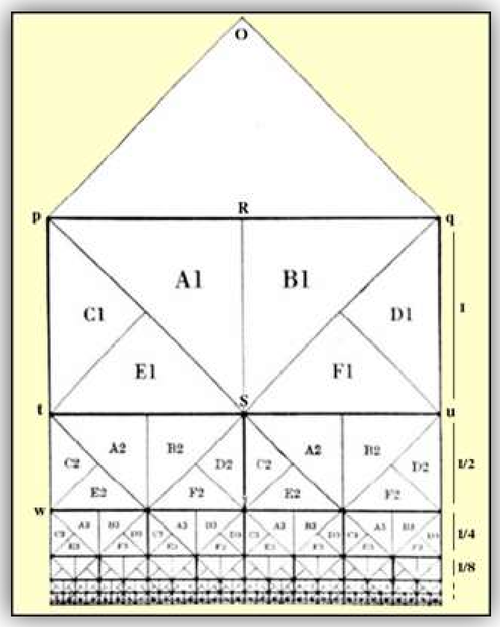


FIGURA 2.9 – *Diagrama para limites quadrados*

A construção desta figura poderá ser, por si só, interessante, mas o que a torna realmente fascinante é vê-la preenchida com lagartos, sendo que, cada triângulo serve de base à construção de um desses lagartos, tal como ilustra a Figura 2.10 cuja obra final é *Cada vez mais Pequeno I* (Figura 2.8), que apresentamos lado a lado.

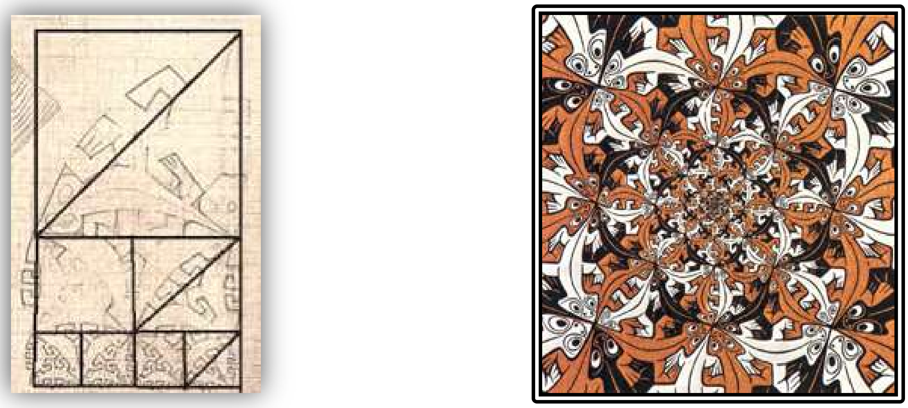


FIGURA 2.10 – Estudo de *Cada vez mais Pequeno I,* usando o *Diagrama para limites quadrados*

Se este esquema já evidência algum interesse, outros esquemas, baseados em conceitos matemáticos talvez até mais complexos, são usados por Escher na projeção de outros trabalhos. No que respeita às Gravuras com Espiral, desde o aparecimento de *Evolução I*, que o esquema destas gravuras estava pronto. O diagrama que lhe está na base é tão somente uma série de espirais logarítmicas. Notável é saber que Escher, porque não conhecia este conceito Matemático, teve de o construir (Ernst, 1978). Exemplo de tal construção são as xilogravuras *Turbilhões* e *Senda da Vida II*, representadas na Figura 2.11. Relativamente a esta última, veja-se também a construção que destaca as referidas espirais.

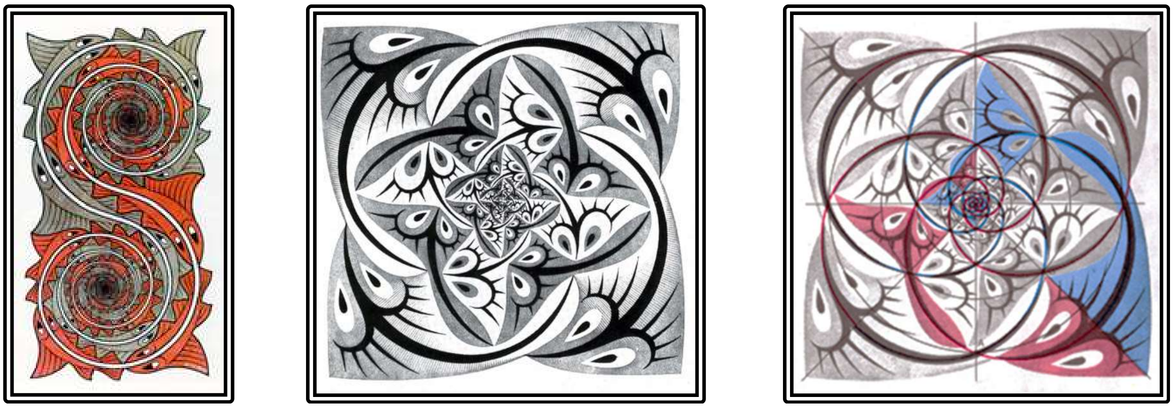


FIGURA 2.11 – *Turbilhões* (1957) / *Senda da Vida II* (1958)

Mas a incessante vontade de se superar está bem latente nas palavras de Escher (abaixo citadas) e é nesta base que novos trabalhos se desenvolvem, os quais assentam em estudos ainda mais elaborados. Retratando essa vontade em evoluir, Escher escrevera:

> ...o professor Coxeter chamou-me a atenção para o método da redução de dentro para fora, o qual anos em vão, tinha procurado. Pois uma redução de fora para dentro (como em Cada vez mais Pequeno I) não traz nenhuma satisfação filosófica porque assim não resulta nenhuma composição logicamente acabada e perfeita... (Escher *apud* Ernst, 1978, pp. 104 – 105).

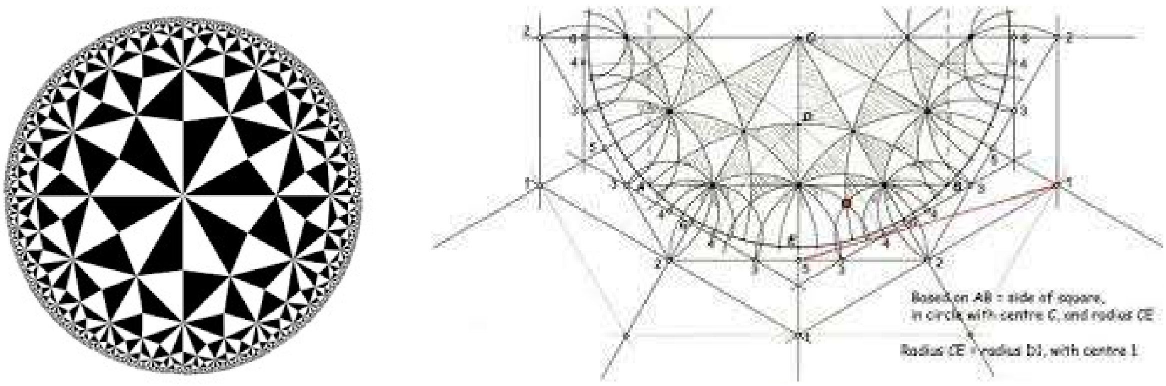


FIGURA 2.12 – Ilustração do livro de Coxeter e respetivo 'esboço' de construção

Foi num livro de Coxeter que Escher descobriu um diagrama que lhe chamou à atenção por representar e possibilitar novas aproximações ao infinito (Figura 2.12). Dessa inspiração, Escher criára uma série de obras como o tema *Limite Circular*, das quais podemos destacar *Limite Circular I* e *Limite Circular III* (Figura 2.13).

FIGURA 2.13 – *Limite Circular I* (1958) / *Limite Circular III* (1958)

Sobre a primeira xilogravura referida (*Limite Circular I*) Escher afirmára que foi uma tentativa não completamente sucedida, "...sendo a primeira tentativa, mostra um sem número de defeitos. Não só a forma dos peixes desenvolvidos em abstracções rectilíneas (...), mas também o seu arranjo (...) deixa muito a desejar..." (Escher *apud* Ernst, 1978, p. 108).

Algumas dessas lacunas, segundo Escher são corrigidas em *Limite Circular III*, figura que o artista descrevera da seguinte forma:

> ...na xilogravura a cores Limite Circular III, as deficiências do Limite Circular I estão aqui consideravelmente eliminadas. (...) Foram necessárias quatro cores, para que cada fileira se distinga claramente das outras. Como todas estas fileiras de peixes, vindas duma distância infinita, sobem verticalmente como foguetes, da periferia, e de novo para lá se dirigem, nem uma componente alcançará alguma vez o limite. Pois para além é o «nada absoluto». E no entanto este mundo redondo não pode existir sem vácuo à sua volta – não simplesmente porque um interior pressupõem um exterior, mas também porque é no «nada» que, ordenados com exactidão geométrica, estão os pontos imateriais médios dos arcos, com que o sistema é construído... (Escher *apud* Ernst, 1978, p. 109).

Apesar de *Serpentes* (Figura 2.14) pertencer a este grupo de gravuras, optámos por distingui-la das restantes por dois motivos.

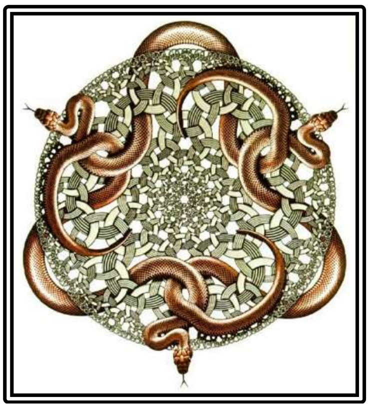


FIGURA 2.14 – *Serpentes* (1969)

Por um lado, o diagrama que está na base da sua construção foi, de certa forma, por ele adaptado do inicial feito por Coxeter. Por outro, tendo perceção da delicada operação que se avizinhava numa fase final da sua vida, Escher aproveitou todas as oportunidades para trabalhar naquela que viria a ser a sua última obra. Se em trabalhos anteriores, a aproximação ao infinito é algo que o artista consegue fazer com uma 'magia' notável e ao pormenor (com a ajuda de uma lupa[37]), neste último trabalho é evidente algum desgaste, ficando comprometido o desenhar de anéis mais pequenos, de forma a construir uma aproximação ao infinitamente pequeno com elevado grau de consistência. Logo que é sugerida essa aproximação, a sua representação... acaba.

Sobre esta obra, Escher escreveu "...uma cota de malha com pequenos anéis nas margens e também no centro dum círculo e entre eles grandes anéis. Através dos anéis enrolam-se serpentes..." (Escher *apud* Ernst, 1978, p. 111).

Poder-se-á, assim, concluir que as tentativas de Escher para captar, para uma folha de papel, e retratar nas suas obras a noção de infinito acabam por modelar dois níveis da significância do conceito de infinito em matemática. Por um lado, a forma como o conceito de infinito emerge quer no tempo, como um ciclo, intuindo-se um processo de evolução, quer no espaço, ao surgir nas pavimentações euclidianas, combinadas com num jogo e estudo de cor. Por outro, a magia como que o infinito surge em pavimentações não-euclidianas, afirmando-se como uma entidade própria, completa e independente do processo construtivo (assente em geometria hiperbólica) que o permita intuir (Martinho, 1998).

[37] Em alguns casos, com a ajuda de alguns instrumentos como uma lupa, Escher trabalhou pormenores com uma precisão e minuciosidade notáveis. Por exemplo em *Cada vez mais pequeno I*, o artista abriu na matriz figuras com menos de meio milímetro (Ernst, 1978).

2.2.2. INTERPRETAÇÃO DO ESPAÇO

Não é só a 'Aproximação ao Infinito' que torna mais rica a obra de Escher, muitas outras ilusões são traçadas pelo autor, algumas delas criadas com a representação da realidade tridimensional em superfícies planas ou mesmo bidimensionais[38]. Em alguns dos seus trabalhos, Escher explora, em profundidade, algumas das 'leis de perspetiva', jogando com o conflito da representação espacial no plano onde, na mesma gravura, um determinado ser/objeto assume, simultaneamente, a forma bidimensional e tridimensional. Esse jogo era de tal forma explorado por Escher, chegando ao extremo de um objeto, aparentemente tridimensional, não ser passível de existir na realidade. Na bibliografia, relativa à sua obra, tais construções são identificadas como 'Mundos Impossíveis'.

Neste tópico respeitante à obra de Escher, é, talvez, possível identificar alguns tópicos particulares patentes em algumas das suas obras. Embora quase todas as obras comportem em si algo de impossível, além dos 'Mundos Impossíveis' mais citado na bibliografia, também a exploração das leis da perspetiva e conflito entre o plano e espaço são retratados por Escher.

Embora reconhecendo alguma superficialidade na análise que se segue, pelas razões referidas no início desta secção (Secção 2.2), julgamos ser pertinente elucidar o leitor da singularidade patente na obra de Escher quando este joga com alguns tópicos matemáticos na exploração do espaço. Assim, optámos por apresentar alguns exemplos dos seus trabalhos, como forma de retratar os tópicos pretendidos[39].

Um exemplo da exploração das leis de perspetiva está patente em *Torre de Babel*, trabalho a que já nos referimos anteriormente (Figura 2.3, pág. 38), obra inspirada pelo que Escher observara quando se encontrava no ponto mais alto da cúpula da Basílica de São Pedro (Roma)[40]. De um modo sucinto, na perspetiva clássica, os pontos de fuga são obtidos por meio de linhas retas. Neste trabalho, esta simples 'lei' torna-se cativante, na medida em

[38] Esta prática conheceu fortes aperfeiçoamentos com o evoluir da capacidade/necessidade do homem em retratar/representar o real atingindo o seu auge no séc. XV com a exploração e consequente utilização do que hoje é conhecido por perspetiva, um dos principais conceitos hoje trabalhados em geometria - geometria projetiva. As suas aplicações estendem-se muito para além da arte, revestindo-se de uma forte utilidade na arquitetura e engenharia, por exemplo, por abarcar métodos de representação dos objetos nos seus tamanhos e posições corretas, tal como a visão humana supostamente os vê, interpreta e compreende.

[39] Para uma análise mais completa, veja-se, Ernst (1978), Escher *et al.* (1982) e Escher (1994).

[40] Sobre esta obra, recorde-se o referido na Secção 2.1 (Figura 2.3, pág. 33).

que Escher usa a recriação da realidade vista do cimo de uma torre para exprimir o ponto de fuga, cuja observação é feita verticalmente de cima para baixo – Perspetiva Nadir[41]. Um olhar mais atento permite-nos observar que as linhas verticais convergem para o ponto situado abaixo da torre (ponto Nadir).

O conflito 'Plano *vs* Espaço' é outro dos tópicos que integra a obra de Escher. Contrapondo com a habitual representação bidimensional da realidade, Escher entra num jogo de contradições ao representar com mestria, na mesma imagem, a duas visões, gerando um inevitável conflito 'Plano *vs* Espaço'. Numa das obras mais conhecidas do artista, *Mão Desenhando-se* (Figura 2.15), tal conflito é conseguido quando uma mão (visão tridimensional) desenha uma outra numa folha de papel (visão bidimensional).

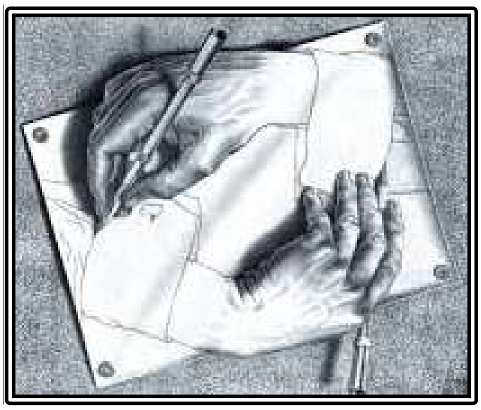


FIGURA 2.15 – *Mãos Desenhando-se* (1948)

Se atendermos na imagem, mais ainda é conseguido por Escher quando brinca com o facto de uma mão ser, simultaneamente, a criadora e a criação da outra, ou seja, qualquer uma das mãos surge representada bi e tridimensionalmente (o braço de cada uma delas parece surgir de uma forma bidimensional no pulso e tridimensional na mão).

Integrando ainda a 'Interpretação do Espaço', os 'Mundos Impossíveis' esboçados por Escher é, talvez, a parte mais conhecida da sua obra. À semelhança dos dois casos supramencionados, tratam-se de figuras que não são passíveis de serem reais, como o próprio nome pressupõem. Isto é, embora sejam estruturas que sugerem ser tridimensionais,

[41] Nadir é conhecido como o ponto inferior da esfera celeste, de acordo com a perspetiva de um observador na superfície do planeta. Deste modo, Nadir é identificado como a projeção do alinhamento vertical que está sob os pés do observador. Na 'Perspetiva Nadir' utilizam-se três pontos de fuga para representar uma imagem tridimensional no que se denomina vista aérea ou 'olho de pombo'. Nesta perspetiva dois dos pontos de fuga ficam na linha do horizonte e o terceiro é feito na vertical, abaixo da linha do horizonte. Todas as linhas convergentes deslocam-se para os pontos de fuga, ou seja, não há linhas verticais e horizontais, todas são direcionadas para os três pontos de fuga. É como se se estivesse a ver algo de cima para baixo, do alto de um edifício, de um avião ou uma escada, por exemplo.

estas não podem, efetivamente, ser construídas nessa mesma dimensão, e "... esse é realmente o mérito de Escher…", uma vez que, "… ao misturar o impossível com a realidade, enquadra as figuras impossíveis num cenário harmonioso que se afirma 'real' à vista do observador..." (Martinho, 1998, p. 20). Alguns dos trabalhos mais mediáticos são *Belvedere, Queda de Água* e *Escada acima e Escada abaixo*.

A litografia *Belvedere* (Figura 2.16) foi inicialmente denominada por Escher como a *Casa Fantasma*, como aliás é repetidamente chamado nos seus estudos preliminares à construção. A alteração da designação, inicialmente prevista pelo autor, deve-se ao facto da obra final nada ter, em si, de fantasmagórico. No entanto, de irreal tem muito, sendo que o esquema subjacente a esta construção, está representado na mesma figura, no cubo que o rapaz tem nas mãos, *Cubo Impossível*, e que podemos ver de forma ampliada na mesma figura – Figura 2.16.

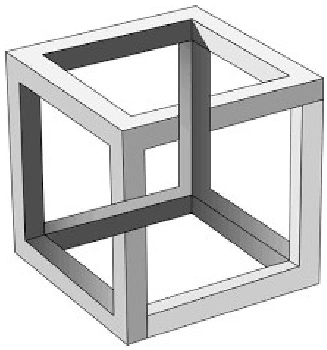


FIGURA 2.16 – *Belvedere* (1958) / *Cubo Impossível*

Se atendermos na figura, embora possa parecer uma simples projeção de um edifício real, certo é que de real nada comporta em si, pela impossibilidade de não poder existir nenhum edifício como o representado. O edifício apresenta uma estrutura arquitetónica incoerente, resultante da ligação impossível entre os dois pisos, o inferior e o superior. Exemplo de tal impossibilidade está bem evidenciado quer na escada de mão, ao mesmo tempo dentro e fora do edifício, quer nos pilares que unem os dois pisos, ao ligarem a parte da frente com a parte de trás.

Se um cubo esta na base da interpretação desta obra, um triângulo inspirou uma das outras mais notáveis obras.

Num dos jornais *British Journal of Psychology* (1958, vol. 49), Penrose publicou o *Tribar de Penrose* (Figura 2.17) uma espécie de triângulo, que, pelos lados estarem ligados de forma incorreta, faz com que seja impossível. Esta figura, já bem conhecida na Matemática, ao ser vista por Escher, quando este estava completamente empenhado na construção de figuras impossíveis, motivou-o para mais uma construção impossível, *Queda de Água*, representada também na Figura 2.17.

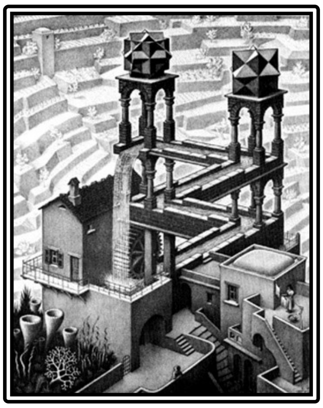
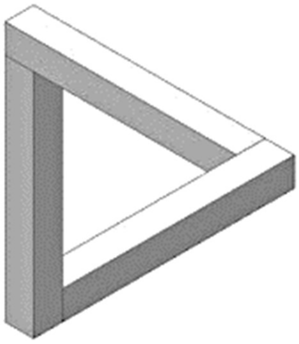



FIGURA 2.17 – *Queda de Água* (1961) / *Tribar de Penrose*

Nesta gravura, o autor ligou três tribares, constituídos pelo canal da água e pelos pilares que o sustentam. Também aqui, Escher procura, de certa forma, 'representar o infinito', algo que é descrito pelo movimento da água que parece estar continuamente a descer ao longo de um canal, cujo o seu termo coincide com o ponto mais alto e consequentemente o início de uma nova descida. O que, para todos os efeitos, é claramente impossível.

Um efeito, de certa forma semelhante ao anterior, é conseguido em *Escada acima e Escada abaixo* (Figura 2.18). Na base desta construção, está uma figura de Penrose, *Escada de Penrose*, igualmente representada na Figura 2.18, que se caracteriza por uma escada onde tanto se pode subir como descer, sem que em algum dos casos se atinja o topo (no caso de subir), ou o fundo (no caso de descer).

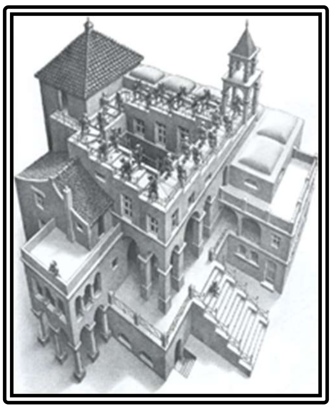
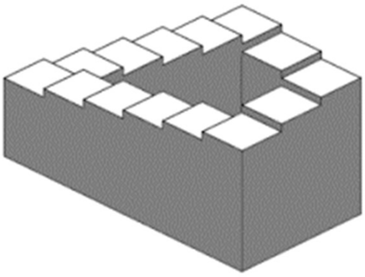



FIGURA 2.18 – *Escada acima e Escada abaixo* (1960) / *Escada de Penrose*

Centrando alguma atenção na figura, notamos que os monges do lado exterior parecem estar a subir continuamente uma escada, sem que nunca atinjam um ponto mais alto daquele de onde partiram. Ao invés, os monges que circulam pela parte interior, parecem descer incessantemente uma escada que parece não ter fim.

Face ao exposto, com uma interpretação muito própria do espaço, tendo por base noções de perspetiva e jogando com algumas construções geométricas (cuja base matemática é inegável), Escher mostra-nos, mais uma vez, o quão a Arte está ligada a alguns objetos/elementos matemáticos. Estamos certos de que muitas outras obras poderiam aqui ser referidas retratando os 'paradoxos' projetados por Escher nos seus trabalhos. Todavia, a nossa preocupação foi analisar cada item e procurar escolher um exemplo, suficientemente elucidativo para o leitor, de cada um dos tópicos que nos propúnhamos desenvolver nesta secção.

2.2.3. EXPLORAÇÃO DO PLANO

Parte substancial da obra de Escher é dedicada ao estudo do plano Euclidiano, nomeadamente numa perspetiva de o pavimentar. É sobre esta fase da obra de Escher que incide especial interesse para a consecução deste trabalho e, como tal, será sobre ela que existirá uma maior preocupação, nomeadamente nos itens que se revelarão cruciais na concretização e implementação prática do nosso projeto, desenhado e descrito ao longo de toda a Secção 4, em particular na 4.3.2.

Tal como em outros momentos da sua obra, esta fase dedicada à 'Exploração do Plano' reverte-se de extrema riqueza no que respeita à presença de conceitos matemáticos. Assim, nas linhas subsequentes, além de uma exploração dos conceitos matemáticos implícitos, procuremos dar conta de alguns dos cometários de Escher ao seu próprio trabalho, acompanhados de exemplos de obras, bem como outros aspetos de interesse considerados como pertinentes.

Segundo Martinho (1998), terá sido um artigo de G. Pólya[42] publicado numa revista de Cristalografia que terá despertado o interesse de Escher para as simetrias. A classificação, referida na literatura, dos diferentes tipos existentes foi feita com base na azulejaria islâmica, algo familiar para Escher e que despertara o seu interesse aquando na sua visita a Alhambra. Aqui Escher passara horas a copiar exemplos de tais mosaicos, registando e retendo parte

[42] *Über dei Analogie der Kristallsymmetrie in der Ebene* (1924).

substancial da informação geométrica que os mesmos comportavam, sobretudo nos movimentos empregues para que o ornamento se cubra em si. Tal compilação de ideias, onde Escher elabora um sistema muito próprio de divisão do plano, podem ser consultadas num dos seus trabalhos publicados em 1958 – *Regular Division of a Plane* – citado em Sampaio (2012), resultante de notas registadas entre 1941 e 1942.

Face ao interesse na pavimentação/divisão do plano, a atitude de Escher, ainda que com algumas diferenças, era uma atitude mais pela Matemática do que pela Cristalografia. Se a Cristalografia se preocupava apenas com a classificação de padrões, uma atitude mais matemática fê-lo ir mais além na tentativa de compreender as transformações geométricas que ocorriam 'nos objetos'. Assim, o interesse de Escher era descobrir e aprender sobre as leis que ditavam essas transformações e no seu sistema próprio, identificado no trabalho supramencionado, o artista identifica aspetos fundamentais, indo um pouco além do pensamento matemático (Martinho, 1998).

Sobre a divisão regular de uma superfície, Escher escrevera:

> …a fonte mais rica de inspiração, de onde eu alguma vez bebi e ela não está ainda seca. Os desenhos simétricos aqui representados mostram como uma superfície pode ser dividida regularmente em figuras iguais, respetivamente, preenchida com elas. As figuras devem confinar umas com as outras sem que resultem áreas livres. (Escher *apud* Sampaio, 2012, p. 51)

Deste modo, no que respeita à 'Exploração do Plano', para evitar a referida existência de 'áreas livres', uma das principais pesquisas feitas por Escher foi a pavimentação do mesmo, sendo a preocupação inicial a forma como o mesmo pode ser pavimentado.

Tendo por base a noção de polígono, as pavimentações do plano euclidiano podem ser classificadas como regulares **(A)**, não regulares **(B)** ou semirregulares **(C)**.

(A) **(B)** **(C)**

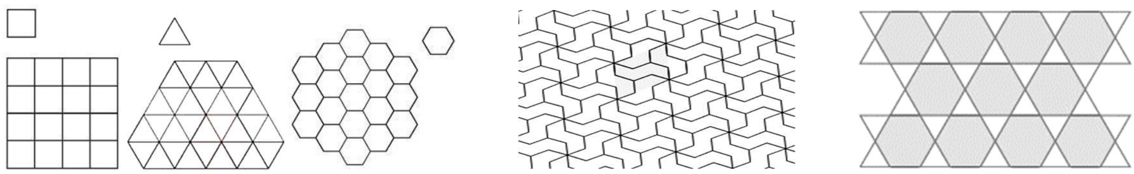


FIGURA 2.19 – Tipos de Pavimentação

Como observável na Figura 2.19, tal distinção é feita com base nos polígonos que estão na base da mesma. Se as pavimentações regulares se caracterizam por preencher o plano recorrendo apenas a polígonos regulares, sendo as únicas alternativas o uso de triângulos (equiláteros), quadrados ou hexágonos (regulares), já as não regulares obtêm-se combinando polígonos não regulares. Um jogo ainda mais desafiante passa pela combinação, numa mesma pavimentação, de mais do que um tipo de polígonos regulares, formando uma estrutura comum ao longo da pavimentação designada de semirregular.

Seguido deste estudo geométrico patente nas obras de Escher, um outro estudo matemático da divisão do plano caracteriza a obra do artista ao usar tipos diferentes de transformações para o 'preenchimento' da pavimentação escolhida, preservando a sua forma e a sua dimensão – isometrias – dentro das quais são identificadas a Rotação **(A)**, Simetria/Reflexão **(B)**, Translação **(C)** e. Além dos exemplos citados e representados na Figura 2.20[43], em alguns casos Escher não só combina numa mesma obra várias isometrias, como utiliza o conceito matemático de "composição" ao combinar duas isometrias, obtendo uma outra forma de pavimentar o plano. É o exemplo da Reflexão Deslizante **(D)**, como são identificadas na sua obra, que resulta de uma composição de uma Reflexão com uma Translação, como o próprio nome sugere e como consta na imagem **(D)** da Figura 2.20.

(A) **(B)** **(C)** **(D)**

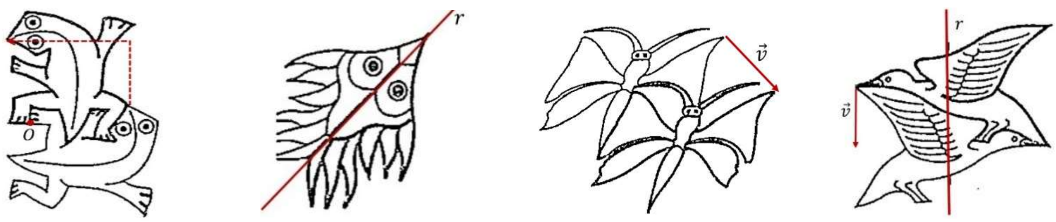


FIGURA 2.20 – Tipos de Isometrias

É de salientar que, em cada uma das imagens acima, são identificados os elementos geométricos que caracterizam cada Isometria. No caso da Rotação **(A)**, é identificado o centro, O, e o ângulo (neste caso, a ilustrar o ângulo, está o 'movimento' que define a Rotação de 90° efetuada); no caso da Simetria/Reflexão **(B)**, é traçado o respetivo eixo de simetria, r; no caso da Translação **(C)**, é identificado o vetor, $\vec{v}$, que a define; e a Reflexão Deslizante, resultando da composição de uma Reflexão com uma Translação, é definida às custas do eixo de simetria, r e do vetor, $\vec{v}$.

É nesta fase que o seu trabalho vai um pouco além da exploração Matemática. De um modo sucinto, partindo da escolha do tipo de pavimentação (do polígono ou polígonos

[43] Adaptadas de Martinho (1998).

usados), Escher arquiteta a construção de uma imagem que caracteriza o menor 'ladrilho' que integra a pavimentação[44] e que é, mediante o uso das transformações supramencionadas, igual em qualquer outro ladrilho da pavimentação.

Numa parte substancial das suas obras, a criação destas pavimentações destaca dois 'mosaicos' distintos (com origem na mesma figura geométrica), que podem ser contrastantes pela cor. Esse contraste pode ser explorado em apenas um motivo de forma a distinguir as figuras, ou então entidades distintas, colorindo-as com cores distintas (em muitos casos, Escher usa animais).

Precisamente, este estudo da cor surge como uma nova etapa no trabalho de Escher. Segundo a bibliografia, o artista dedicava algum espaço para uma análise exaustiva da cor, onde o objetivo parecia ser o uso do menor número de cores possível de forma a tronar as imagens contrastantes, sublinhando a individualidade e equivalência de mosaicos subjacentes, dotando a sua obra de um efeito visual apelativo (Ernst, 1978).

Ainda, relativamente à relevância do estudo da cor, Sampaio (2012, p. 51) destaca que "o uso de cores contrastantes para colorir o preenchimento de superfícies de uma forma sistemática era de primordial importância para sublinhar a individualidade dos motivos adjacentes…", citando ainda o trabalho de Dondis ao afirmar que "a cor está carregada de informação e é uma das experiências visuais mais penetrantes que todos temos em comum. Portanto, constitui uma valiosíssima fonte de comunicações visuais…".

Tecidas estas considerações, julgamos poder identificar, neste processo de pavimentação do plano, quatro etapas distintas que se conjugam e, em alguns casos poderão ser desenvolvidas não necessariamente de forma sequencial, mas em simultâneo:

I. Definição do tipo de pavimentação usada e os elementos que a integram;
II. Construção da 'região fundamental';
III. Exploração do tipo de isometrias a usar na pavimentação;
IV. Estudo da cor, por forma a tornar as imagens contrastantes.

De todas as fases identificadas, parece-nos que a que esconde uma das grandes chaves da singularidade da obra de Escher é a definição da 'região fundamental'. Sobre esta

[44] Na sua obra esta imagem é, usualmente, designada de 'região fundamental'. De um modo sucinto, por exemplo nas pavimentações regulares, essas construções eram obtidas por deformação de polígonos regulares, mantendo a área do polígono original num processo construtivo usando simetrias. Este processo permitiria, assim, um encaixe perfeito das figuras. No caso das pavimentações não regulares que Escher fizera, o estudo era equivalente, sendo que as figuras inspiradas, nesses casos, eram irregulares. Para uma exploração mais cuidada pela formulação teórica deste problema de "simetrias", veja-se Schattschneider (2004).

componente que integra o estudo que precede à criação das suas obras, Escher dá-nos conta do quão desafiante era para ele construir a partir de um triângulo ou um quadrado (ou outra figura geométrica) um peixe ou um pássaro.

Para uma melhor compreensão alguns dos aspetos em causa, vejamos um exemplo particular, onde Escher transforma um quadrado num peixe e assim "… usar a Arte para ludibriar a Matemática…" (Sampaio, 2012, p. 52).

Observando a Figura 2.21, conseguimos depreender a forma como Escher pega num quadrado e, mediante construções ou recortes no mesmo, transforma-o num peixe com a mesma área. O cuidado e o rigor implícitos na construção, 'preenchida' de Matemática, permite que as figuras encaixem perfeitamente umas nas outras, obtendo-se uma pavimentação do plano bastante mais atraente do que com simples quadrados.

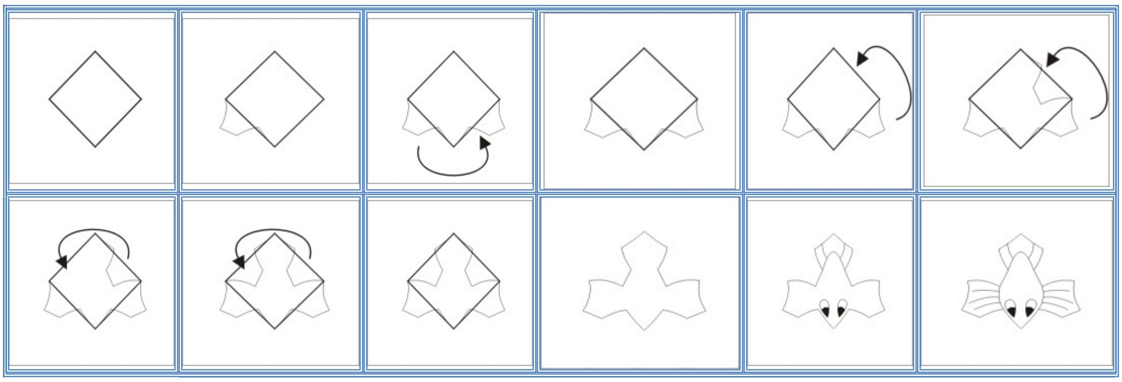


FIGURA 2.21 – Construção da região fundamental: um exemplo

Definido o tipo de pavimentação, com a identificação da figura geométrica usada, e construída a 'região fundamental', impõem-se agora definir o(s) tipo(s) de isometria(s) a usar para pavimentar o plano[45], em paralelo com um estudo da cor, de onde resultará a pavimentação final, tal como descrito na Figura 2.22.

Percorridas estas etapas, cada um dos trabalhos esconde uma mensagem apelativa, em termos da comunicação visual, onde Escher cria imagens a pensar na forma de atuar sobre a 'região fundamental', mediante transformações geométricas (isometrias) e fazendo uso da cor por forma a tornar as imagens visualmente mais agradáveis e dotar a pavimentação de uma beleza estética notável.

[45] Nesta pavimentação, uma das exploradas com os alunos em sala de aula, apesar de ser evidente a Rotação (com centro num dos 'cantos' da barbatana do peixe), é interessante, mediante o jogo de cores ver o uso da Simetria, ou mesmo da Translação.

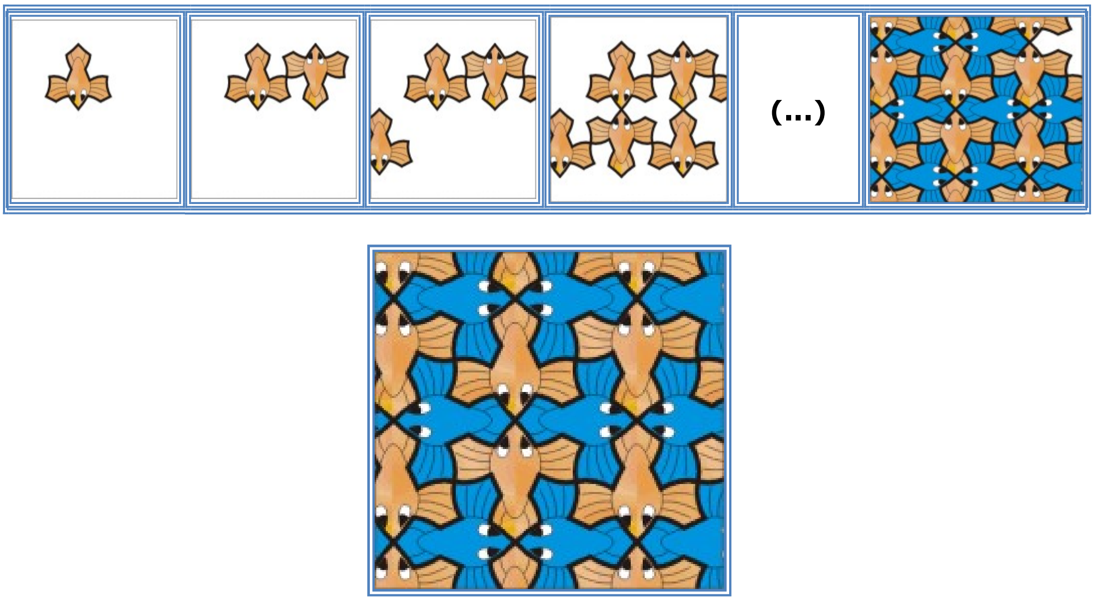


FIGURA 2.22 – Pavimentação do Plano: um exemplo

Procedendo de um modo análogo ao retratado, veja-se na Figura A.2 e na Figura A.3 (Anexo A.2) mais dois exemplos onde é apresentado detalhadamente o processo de construção da ‘região fundamental’, tal como na Figura 2.21, e posteriormente o estudo da cor e construção da pavimentação final, como descrito na Figura 2.22.

Não sendo viável uma exploração idêntica para todos os trabalhos, apresentam-se, no mesmo Anexo (Figura A.4 – Anexo A.2), outras aguarelas (obras finais) que nos mostram pavimentações contruídas por Escher, cujo esquema de construção é em tudo idêntico ao descrito nestes três casos.

Antes de entrarmos nas considerações finais, relativas à ‘Exploração do Plano’, façamos um pequeno parêntese que nos dá conta de outros tópicos trabalhados por Escher neste item, mediante um estudo mais detalhado quer na pavimentação, quer no jogo de simetrias. Com efeito, se os exemplos a que acima nos referimos se caracterizam por um padrão comum, em alguns trabalhos a ideia de uma metamorfose, uma evolução, está latente. A possibilidade de ligar diferentes pavimentações, por um processo dinâmico que altera o mosaico, mas não a simetrias em jogo, marca outro tipo de trabalhos que integram esta ‘Exploração no Plano’[46], como são exemplo algumas das Metamorfoses apresentadas na Figura 2.23, onde as formas geométricas abstratas ganham (ou perdem) vida e, aos poucos, vão-se transformando (ou desconvertendo) em animais, seres humanos ou outros elementos.

[46] Alguns desses trabalhos podem ser admirados em painéis de alguns metros existentes em vários órgãos públicos da Holanda, como na Câmara de Leiden e no Correio de Haia.

Um estudo exaustivo quer na pavimentação quer no jogo de simetrias era, assim, feito por Escher, porém não sendo o nosso foque de interesse, não iremos entrar aqui em mais detalhes, deixamos como sugestão a consulta de Schattschneider (2004), ou mais geralmente Ernst (1978).

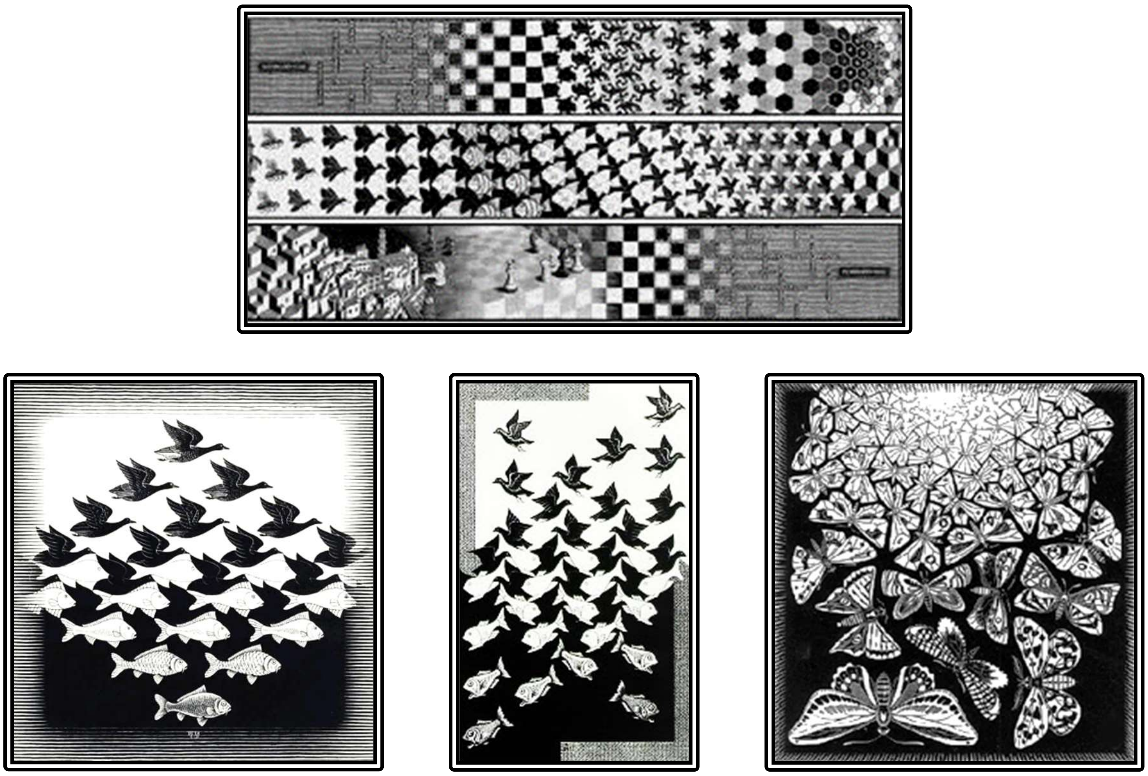


FIGURA 2.23 – Exemplos de *Metamorfoses*

Face ao exposto, e tal como refere Sampaio (2012, p. 50),

> …a obra de Escher é um exemplo concreto de como as imagens podem aperfeiçoar o entendimento de assuntos complexos, ao invés da exclusiva utilização de palavras. Através das suas pavimentações, ele consegue exemplificar as transformações do plano: translações, rotações e reflexões, tornando-as mais simples aos nossos olhos.

Será com inspiração nestas palavras e partindo da 'base teórica' acima desenvolvida que assentará a fase de prática principal do nosso projeto (descrita na Secção 4.3.2).

Em suma, julgamos que face a considerações tecidas ao longo de toda a Seção 2 as conexões entre a Matemática e a Arte patente na obra de Escher, são por demais evidentes e espelhando muito do que é observável no mundo que nos rodeia. Face a isto, julgamos que o mote para o trabalho que nos propusemos desenvolver está lançado, sendo sobre a parte referente à 'Exploração do Plano' (Pavimentações e Isometrias) que incide a implementação prática do nosso projeto.

A esse propósito, pela grandeza que as palavras comportam em si, terminamos esta seção como uma citação de Escher que muito serviu de motivação ao nosso estudo e que integra três dos pilares da nossa investigação: e o que é observável (o real), a formalização de alguns conceitos e regras (a Matemática) e as criações artísticas que daí poderão surgir (a Arte).

> Que tipo de figuras? Manchas irregulares e sem forma, incapazes de invocar qualquer ideia em nós? Ou figuras geométricas, lineares, abstractas, rectângulos ou hexágonos que, na melhor das hipóteses, podem sugerir um tabuleiro de xadrez ou um favo de mel? Não, não somos cegos, surdos e mudos, observamos cuidadosamente as formas que nos rodeiam, e que, na sua diversidade, nos fala numa linguagem própria e excitante. Consequentemente as formas com que compomos as divisões de uma superfície são reconhecíveis como sinais, como símbolos distintos da matéria viva ou morta que nos rodeia. (Escher *apud* Martinho, 1998, p. 15).

3. METODOLOGIA E DESCRIÇÃO DA POPULAÇÃO

No presente capítulo, procurar-se-á fazer considerações sobre as opções metodológicas seguidas, não só no que respeita aos pilares que sustentam a metodologia de investigação, bem como a metodologia de trabalho seguida na operacionalização do nosso projeto.

Tendo presente algumas das características do projeto em curso e tendo por base o objetivo central, bem como as questões de investigação identificadas, considerou-se adequada a seguir uma abordagem de natureza qualitativa, privilegiando a importância do processo na construção do conhecimento. Dentro deste paradigma de investigação, face a um conjunto de métodos plausíveis, considerou-se ajustado à nossa investigação uma metodologia de investigação baseado nos pressupostos de uma 'Investigação-Ação'. Tal acabaria mesmo por ser a nossa opção para a concretização deste estudo, visando desenvolver uma análise compreensiva e interpretativa dos aspetos em análise, sendo a observação (participante) e a recolha de informação feitas em contexto aula, onde desenvolve toda a ação com os sujeitos intervenientes no estudo.

Face ao exposto, sustentado nas referências bibliográficas, será feita uma breve caracterização das metodologias de natureza qualitativa, em particular na Educação, destacando, *a posteriori* alguns aspetos inerentes ao método de 'Investigação-Ação' e às opções traçadas para a recolha de dados.

Em seguida serão feitas considerações gerais sobre meio onde foi concretizada a investigação, com especial destaque para a caracterização da população alvo, com posterior enfoque na amostra que serviu de base à implementação do nosso projeto.

3.1. ANÁLISE QUALITATIVA EM EDUCAÇÃO

Nas linhas subsequentes, não procuraremos fazer uma análise teórica a metodologias de investigação, mas, muito embora sejam apresentados alguns dos pilares teóricos que as sustentam, daremos conta das opções traçadas no nosso estudo, procurando, sobretudo, justificar a adequabilidade das opções feitas em termos metodológicos. Isto porque a nosso ver, mais do que uma transcrição de factos teóricos constantes nas referências bibliográficas, cuja leitura e análise nos ajudaram claramente a traçar diretrizes metodológicas (no que respeita às opções da metodologia de investigação e a metodologia de trabalho seguida), consideramos mais apelativo justificar a adequabilidade das nossas opções, face aos propósitos de investigação traçados.

Com efeito, não obstante de outras sugestões bibliográficas, veja-se, Bogdan & Biklen (1994) e Flick (2005), para uma análise mais detalhada sobre as metodologias qualitativa na investigação em geral. Particularmente, no que respeita à investigação qualitativa em educação, identificamos os trabalhos de Bogdan & Biklen (1994), Cohen, Manion, & Morrison (2000), Coutinho *et al.* (2009), os quais, em linhas gerais, proporcionam um apoio para a compreensão das diferentes perspetivas e utilização da investigação qualitativa em Educação, examinando as suas bases teóricas e especificando métodos concretos para a realização da investigação.

Segundo Bogdan & Biklen (1994), a investigação qualitativa surgiu no final do século XIX e início do século XX, cujo auge de aponta para as décadas de 1960 e 1970, face a novos desenvolvimentos decorrentes de novos estudos e consequente divulgação. No que concerne em particular à Educação, assistiu-se, nas duas últimas décadas, a uma crescente utilização de abordagens de natureza qualitativa nas investigações realizadas.

Na perspetiva dos referidos autores, a investigação qualitativa apresenta, na sua essência, cinco características fundamentais: (1) a fonte direta dos dados é o ambiente natural, sendo o investigador o principal agente na recolha desses mesmos dados; (2) os dados recolhidos pelo investigador revestem-se, essencialmente, de um carácter descritivo; (3) os investigadores que utilizam metodologias de investigação com natureza qualitativa interessam-se, sobretudo, pelo processo em si e não tanto pelos resultados; (4) a análise dos dados é feita de forma indutiva; (5) e, finalmente, o investigador interessa-se, acima de tudo, por tentar compreender o significado das experiências para os participantes.[47]

Destas características depreende-se que a investigação qualitativa utiliza, principalmente, metodologias que permitam a obtenção de dados descritivos, procurando encontrar respostas para as questões de investigação traçadas. Por outro lado, fica ainda patente que o investigador deve apresentar uma forte flexibilidade no decorrer da investigação, comportando-se mais como um 'viajante' que, muito embora criei condições para que seja possível observar o que se pretende, não o planeia meticulosamente. Caso contrário, podem causar-se fortes condicionantes e influências nas ações dos intervenientes na investigação, levando a um enviesamento dos dados observados.

[47] Apenas enumeramos as características identificadas pelos autores. Dispensamo-nos aqui de uma análise mais detalhada a cada uma destas características, pelo que, para uma compreensão mais detalhada, veja-se a sua análise, pelos autores, na referencia bibliográfica em causa.

Um outro aspeto que mereceu o nosso interesse, é salientado por Merriam (1988), ao enfatizar que, nas metodologias de natureza qualitativa, os intervenientes da investigação não são reduzidos a variáveis isoladas, mas sim vistos como parte de um todo no seu contexto natural. Ao reduzir pessoas a dados estatísticos, corre-se o risco de determinadas características do comportamento humano, que se podem revelar preponderantes na investigação, serem ignoradas. A mesma autora refere, também, que a recolha de dados deve surgir de um modo espontâneo e num contexto natural que não condicione a atuação dos 'elementos' observados.

Assumindo a nossa intervenção um duplo papel, professor e investigador, em linhas muito gerais, as considerações tecidas trazem-nos recomendações e diretrizes que devem pautar a nossa ação/investigação na sala de aula, onde, por estarmos completamente envolvidos no campo de ação, devem ser acauteladas certos aspetos por forma a não condicionar ou enviesar a investigação.

3.1.1. METODOLOGIA DE INVESTIGAÇÃO

Desde os anos noventa que é verificado um aumento substancial do interesse relativamente à metodologia de Investigação Ação (IA), em particular em investigações levadas a cabo na Educação.

Da leitura feita relativa à IA, depreendeu-se que, acima de tudo, é uma metodologia que procura dar resposta a um dualismo existente entre a teoria e prática, havendo múltiplas aceções, propostas e práticas, pelo que não é possível encontrar uma definição única. Contudo, apesar da não existência de bibliografia consensual, verificadas algumas semelhanças em certas estratégia da IA com as estratégias implementadas na investigação qualitativa, parte significativa dos autores considerem a IA como uma metodologia de investigação de natureza qualitativa (Coutinho *et al.*, 2009), pelo que os pilares de atuação referidos na secção anterior, compatibilizam-se com esta metodologia de investigação.

Segundo Coutinho *et al.* (2009), a IA pode ser descrita como uma metodologia de investigação que inclui, simultaneamente, ação (ou mudança) e investigação (ou compreensão), seja ela baseada num processo cíclico ou em espiral. Esta metodologia alterna entre a ação e a reflexão crítica, sendo que, nos ciclos posteriores e à luz da experiência (conhecimento) obtida no ciclo anterior, poderão ser aperfeiçoados os métodos.

Assim, concretamente na Educação, analisando a realidade educativa, a IA procura estimular os seus agentes para mudanças educativas, conducente a possíveis melhorias das suas práticas e/ou do próprio sistema educativo, mediante a ação (comtemplando a recolha e observação de dados) e posterior reflexão, conducente a melhorias na ação futura, isto é, trata-se de um envolvimento de todos os intervenientes, numa dinâmica de ação-reflexão-ação. Com efeito, neste campo "o essencial na IA é a exploração reflexiva que o professor faz da sua prática, contribuindo dessa forma não só para a resolução de problemas como também (e principalmente) para a planificação e introdução de alterações nessa mesma prática" (*Ibidem*, 2009, p. 360).

Nesta linha, tal como nos dão conta Cortesão & Stoer (1997), além das funções inerentes à transmissão de conhecimento científico, a atividade do professor deve ser pautada de investigação com algumas características próprias "desenvolvidas na complexidade das relações estabelecidas (…) onde ocorre a ação pedagógica (p.11)", podendo a produção de conhecimento ocorrer no pleno exercício da ação pedagógica, resultante do trabalho concretizado num processo de IA. Deste modo, contemplando a evolução pessoal e profissional do professor o completo domínio dos conteúdos a ensinar e o desenvolvimento de conhecimentos e competências, a inclusão na prática pedagógica da IA, como meio potenciador da referida evolução desenvolvimento profissional, parecem mais do que justificada.

Ainda, a proximidade relacional entre o professor (investigador) e os alunos (sujeitos participantes no estudo) pode ser considerada como outra das vantagens desta metodologia de investigação na Educação, no sentido de existir um conhecimento mútuo entre os intervenientes e o facto de nenhum dos elementos ser estranho ao ambiente onde decorre a investigação Bogdan & Biklen (1994).

Com isto, parece-nos mais do que justificada a pertinência da IA como metodologia de investigação escolhida na operacionalização da nossa investigação, algo que fica ainda mais patenteado se tivermos em conta o objetivo e as questões de investigação traçadas quando lemos:

> … a conceção atual de currículo e de gestão curricular reclamam que o professor seja não um mero executor de currículos previamente definidos ao milímetro, mas um decisor, um gestor em situação real e um intérprete crítico de orientações globais. Exige-se hoje ao professor que seja ele a instituir o currículo, vivificando-o e co construindo-o com os seus colegas e os seus alunos, no respeito, é certo, pelos princípios e objetivos nacionais e transnacionais. Exige-se, mas ao mesmo tempo, confia-se-lhe essa tarefa, acreditando que tem capacidade de a executar. (Alarcão, 2001, p. 22)

Definida e ponderada a adequabilidade da IA na nossa investigação, baseado essencialmente nos trabalhos de Coutinho *et al.* (2009) e Cohen *et al.* (2000), sintetizemos algumas ideias relativas aos pilares que (segundo os autores) sustentam esta metodologia de investigação.

Em linhas gerais, a IA é uma metodologia de investigação essencialmente prática e aplicada que se rege pela necessidade de resolver problemas reais (Coutinho *et al.*, 2009), podendo ser encarada como um processo informal de investigação no qual os educadores se centram no estudo das suas próprias experiências, com o principal propósito na melhoria das práticas de ensino. Enumeremos, assim, alguns aspetos relacionados com alguns dos objetivos inerentes a esta metodologia: (1) planear, implementar, rever e avaliar uma intervenção desenhada para melhorar a prática/resolver um problema; (2) capacitar os participantes através do envolvimento na investigação e ideologia crítica; (3) desenvolver uma prática reflexiva; (4) promover a igualdade democrática; (5) ligar a investigação e a prática; e (6) promover a investigação colaborativa.

Destes objetivos depreendem-se o foco da IA e algumas das características inerentes, donde destacamos a sua implementação num contexto específico e provida de um carácter intervencionista, onde o investigador, enquanto parte interessada na própria investigação, tem uma participação ativa, envolvendo-se num processo de constante reflexão, do qual poderão surgir juízos que modelem atuações futuras. Algumas destas ideias são desenvolvidas por Coutinho *et al.* (2009) e Cohen *et al.* (2000), salientando que a IA é:

- ‘<u>participativa e colaborativa</u>’, no sentido em que implica todos os participantes no processo, sendo o investigador um agente interno e participativo no processo;
- ‘<u>prática e interventiva</u>’, pois não se limita ao campo teórico ou a descrever uma realidade. A ação tem de estar ligada à mudança e é sempre uma ação deliberada;
- ‘<u>cíclica</u>’, pelo facto da investigação envolver uma espiral de ciclos, nos quais as descobertas iniciais geram possibilidades de mudança, sendo estas implementadas e avaliadas com introdução do ciclo seguinte, evidenciando, com efeito, um permanente entrelaçar entre teoria e prática;
- ‘<u>crítica</u>’, na medida em não se procura uma simples ‘apreciação’ conducente a ligeiras adaptações nas práticas, mas conduzir, porventura, a mudanças mais profundas, motivadas pela capacidade crítica e autocrítica;
- ‘autoavaliativa’, porque as mudanças são continuamente avaliadas, numa perspetiva de adaptabilidade e de produção de novos conhecimentos.

Tendo presente estas características, fazer investigação implica planear, atuar, observar e refletir mais cuidadosamente do que habitualmente se faz no dia-a-dia, no sentido de induzir melhorias. Neste sentido Coutinho *et al.* (2009) destacam algumas das metas da IA:

- melhorar e/ou transformar a prática social e/ou educativa, ao mesmo tempo que procuramos uma melhor compreensão sobre a respetiva prática;
- articular, de modo permanente, a investigação, a ação e a formação;
- aproximarmo-nos da mudança, veiculando a mudança e o conhecimento;
- fazer dos educadores protagonistas da ação.

Face às considerações tecidas, de entre uma série de conceitos chave associados à IA, destacamos na Figura 3.1 alguns considerados preponderantes[48] (sem uma ordem clarividente) que, explicita ou implicitamente, constam nos aspetos supramencionados e dos quais destacamos 'Planificação', 'Ação', 'Observação' e 'Reflexão' como termos cruciais. Estes quatro conceitos podem, em certa medida, identificar quatro fases do processo da IA, independentemente das modalidades os dos modelos teórico de operacionalização propostos na literatura científica[49].

FIGURA 3.1 – Conceitos chave implícitos na 'Investigação-Ação'

Para finalizar, com base no proposto em Cohen *et al.* (2000), definida, em termos metodológicos, a IA como metodologia de investigação a adotar, apresentamos um esquema (Figura 3.2) que retrata, de um modo sequencial, as várias etapas da metodologia de trabalho

[48] De entre vários outros sugeridos em Cohen *et al.* (2000).

[49] Evitando uma análise mais extensa, para mais desenvolvimentos sobre as modalidades da IA e dos modelos teóricos de operacionalização propostos por vários autores, veja-se Coutinho *et al.* (2009) e Cohen *et al.* (2000).

seguida na operacionalização do nosso estudo, desde a identificação do problema, à avaliação global do projeto levado a cabo.

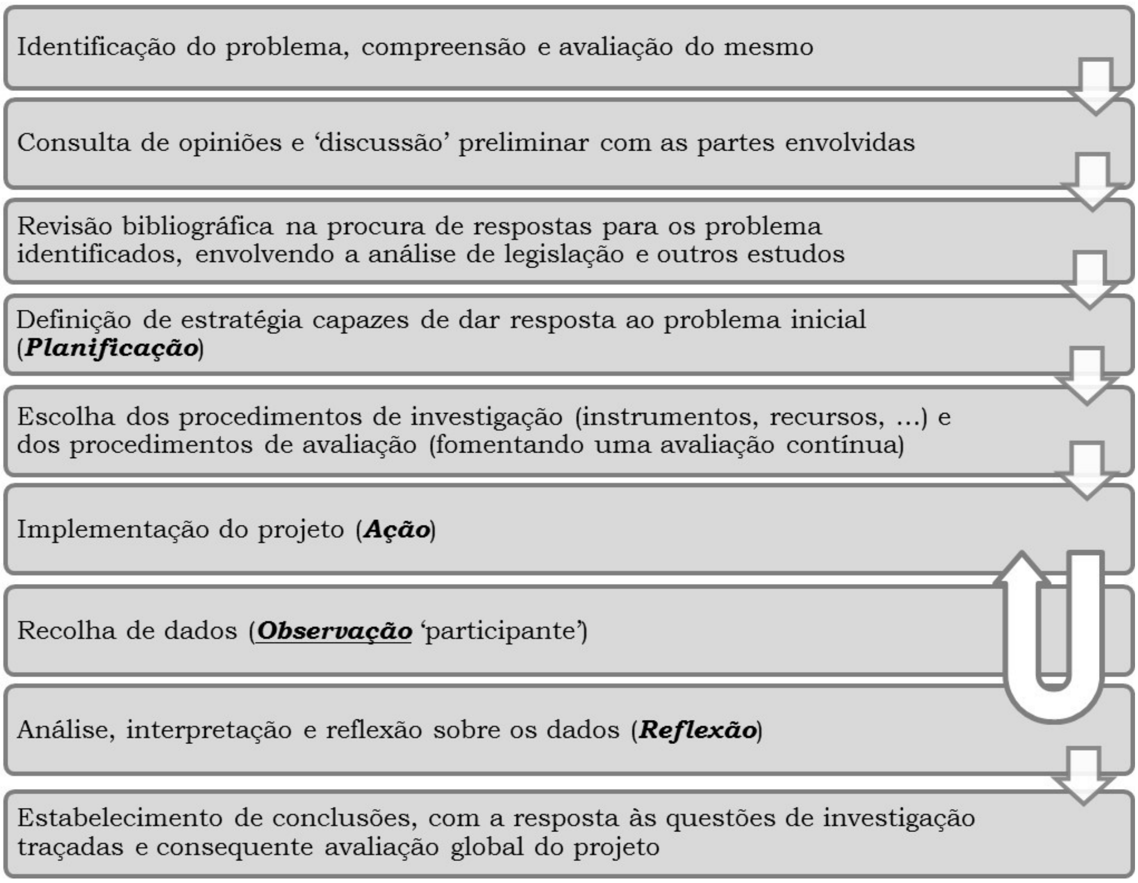


FIGURA 3.2 – Etapas da metodologia de trabalho (seguindo uma metodologia de IA)

Concluindo, pelo exposto ao longo desta secção, comparativamente a outras opções metodológicas, a IA foi considerada mais apropriada, dada a ênfase na resolução de problemas educativos diagnosticados em situações específicas. Face aos desafios com os quais nos deparávamos, considerámos ser um método de investigação com alguma conexão às 'adaptações' curriculares necessárias e cuja seleção foi motivada pelos pilares que sustentam esta metodologia, assente na referida perspetiva cíclica de ação-reflexão-ação, algo crucial para que, ao longo do ano letivo, conseguíssemos uma adaptação eficaz do currículo às necessidades sentidas e a operacionalização do nosso projeto. Nesta investigação, a aula foi entendida como sendo o local onde a 'adaptação' curricular deveria ter lugar, revelando-se o processo de IA como uma metodologia apelativa por permitir a experimentação prática das adaptações pensadas num contexto natural, valorizando-se a constante interação entre nós (num simultâneo papel de professor e investigador) e os restantes elementos que participaram na investigação, nomeadamente os alunos.

3.1.2. RECOLHA DE DADOS

A metodologia de investigação IA, tal como outras, apoia-se na recolha de informação que a própria investigação vai proporcionando. Particularmente, verificado um duplo papel de professor/investigador, essa recolha pode ser concretizada no decorrer da sua própria ação e/ou intervenção mais ou menos direta, visando uma posterior análise. Tal deve correr com algum distanciamento da sua prática letiva, com intuito de evitar enviesamentos por crenças e/ou opiniões demasiado pessoais (Cohen *et al.*, 2000).

Deste modo, julgamos ser plausível a identificação de dois aspetos cruciais na fase de recolha de informação. Por um lado, a 'qualidade' dos dados recolhidos manifesta-se claramente importante, pois dela depende a assertividade do estudo e da prática reflexiva com influência na ação futura, seja dentro ainda do mesmo projeto (numa perspetiva cíclica, tal como demos conta no processo sequencial da Figura 3.2), ou já noutras realidades. Por outro lado, considera-se necessário aperfeiçoar o seu 'olhar' sobre os factos, focalizado nos dados e nas evidências recolhidas, destacando os aspetos fulcrais em detrimento do que é acessório ou redundante para a prática reflexiva.

Centremos, deste modo, particular atenção na recolha de dados. Dentro da metodologia da IA, Latorre (2003) identifica algumas técnicas dividas em três categorias:

(A) Técnicas baseadas na observação: centradas na perspetiva do investigador, em que este observa direta e presencialmente os aspetos em estudo;
(B) Técnicas baseadas na conversação: centradas na perspetiva dos participantes e enquadradas num ambiente de diálogo e de interação;
(C) Técnicas baseadas na análise de documentos: centradas, igualmente, na perspetiva do investigador, implicando uma pesquisa e leitura de documentos que constituem fonte de informação.

De acordo com Coutinho *et al.* (2009), as referidas técnicas podem ser categorizadas em instrumentos, estratégias e meios audiovisuais, como dá conta o esquema apresentado na Figura 3.3[50], dos quais destacamos os que, de certo modo, foram opção na nossa investigação: 'Observação participante', 'Análise documental' e 'Fotografia'.

[50] Adaptado de Coutinho *et al.* (2009, p. 373).

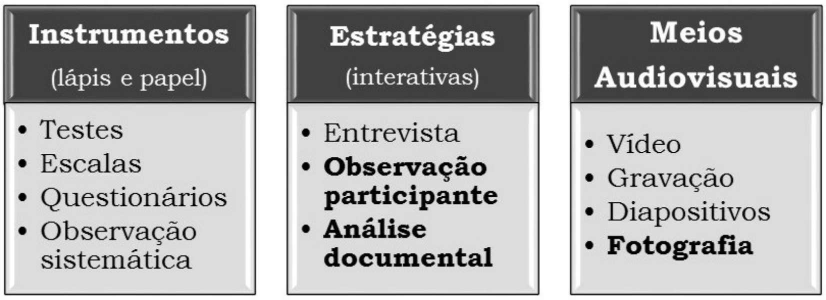


FIGURA 3.3 – 'Técnicas/Instrumentos' para a recolha de dados (utilizados na IA)

Em virtude das opções traçadas, vejamos alguns dos principais aspetos que caracterizam as 'técnicas/instrumentos' destacados, numa perspetiva já mais focalizada, tendo presente o duplo papel que desempenhamos na nossa investigação (professor e investigador). À semelhança do feito nos itens anteriores desta secção (Secção 3.1), em qualquer um dos casos, a preocupação não foi uma exploração teórica das técnicas/instrumentos, mas sim evidenciar a sua adequabilidade na nossa investigação

Na prespetiva de Bogdan & Biklen (1994), a 'Observação participante' é das melhores técnicas de recolha de dados neste tipo de estudos, cuja principal metodologia adotada é a IA, havendo uma constante captação de informação, confrontando aquilo que é dito com o que efetivamente é feito. Além disso, deve privilegiar-se uma observação concretizada, maioritariamente, num ambiente natural para sujeitos observados, garantindo uma maior naturalidade e espontaneidade nas ações.

Centrando particular atenção no professor/investigador, Coutinho *et al.* (2009) referem ser das estratégias mais utilizadas por estes, a qual se caracteriza pela observação direta do que acontece em sala de aula e onde o investigador está diretamente implicado no processo, como sujeito ativo no processo. No entanto, importa salvaguardar que o processo de observação, embora participante, não deve influenciar o "…decorrer normal dos acontecimentos" (Tuckman, 2000, p. 524).

Face ao exposto, podemos dizer a recolha de informação foi, assim, dotada de algumas das características supramencionadas, as quais nos permitiram obter uma informação mais coerente, destacando as vantagens decorrentes do facto dos 'elementos recolhidos' se basearem, fundamentalmente na observação direta dos alunos, havendo uma perceção total das suas ações, expressões e de todos os comentários, sejam eles mais formais (no geral tidas com o professor), ou feitos informalmente (no geral mais com os pares). Tal facto ganhou, ainda, maior relevo se atendermos às especificidades dos alunos intervenientes no estudo (baixa nível de confiança, participação quase nula, ausência de pré-requisitos, pouca autonomia e uma fraca capacidade de persistência). Por exemplo, muitas vezes os alunos referiam ter compreendido um conceito, ideia ou explicação e, pela sua expressão, depreendia-se alguma insegurança. Assumindo a nossa observação um caráter participativo, tal poderia ser de imediato aferido.

Ainda no leque de técnicas utilizadas na IA para a recolha de dados, encontram-se os 'Meios Audiovisuais'. Particularmente no caso do professor/investigador, Coutinho *et al.* (2009) destacam este tipo de técnicas como umas das mais usadas na prática investigativa, permitindo um registo exato e genuíno da informação selecionada.

Uma das possibilidades apontadas pelos citados autores, é a fotografia, considerada como uma técnica de excelência na IA, na medida em que se converte em documentos e evidências com características retrospetivas e muito fiáveis, não só pelo registo claro do trabalho que retrata a ação, como também do ponto de vista da credibilidade.

Face a algumas características do nosso projeto, que envolvia representações geométricas e estudos gráficos, julgámos ser uma fonte de recolha de informação fidedigna e que retrata vivamente o trabalho desenvolvido pelos alunos, período onde se analisou o desempenho e se incitou a criatividade na realização das tarefas propostas.

No que concerne à 'Análise documental', segundo algumas diretrizes de Coutinho *et al.* (2009) e Tuckman (2000), esta foi desenvolvida com intuitos muito diferentes em dois períodos da investigação, tendo em conta a distinção entre 'documentos oficiais' e 'documentos pessoais' feita na bibliografia (Coutinho *et al.*, 2009). A principal distinção é perfeitamente extraída dos termos que os definem. Se os primeiros existem oficialmente, podendo não ser da responsabilidade do investigador, em termos de autoria; os segundos são da inteira responsabilidade do investigador e dele depende, quase na totalidade, a sua existência, seja ele o autor ou elaborados pelos sujeitos observados.

Desta forma, numa fase inicial, com vista a uma planificação o mais ajustada possível ao decorrer natural das funções inerentes à docência, cujo propósito fundamental passa pela formação científica dos alunos e ensino de conteúdos matemáticos, foi feita uma análise a 'documentos oficiais', como registos de sumários de aulas, legislação (orientações curriculares e enquadramento legal das turmas CEF), atas de reuniões, planificações, entre outros. Face às características da informação recolhida neste tipo de documentos (formal, direcionada, isenta, …), estamos em crer que a mesma se adequa na integra aos propósitos visados numa fase inicial do projeto, com uma planificação ajustada à formação científica dos alunos (o ensino dos conteúdos matemáticos previstos no currículo da disciplina).

Numa fase posterior, face aos dados recolhidos, impunha-se uma análise dos documentos. Além da observação direta, os documentos em causa (numa fase inicial os próprios esboços e trabalhos dos alunos e posteriormente os registos em fotografia) foram merecedores de uma análise e reflexão no decorrer da investigação. Essa reflexão, tinha como principal intuito compreender quais as principais dificuldades sentidas pelos alunos durante a sua elaboração, permitindo o aperfeiçoar da ação futura decorrente dentro do mesmo projeto (visão cíclica da IA).

Para finalizar a parte respeitante às opções metodológicas traçadas no nosso estudo, cuja justificação demos conta ao longo desta seção, dado terem sido utilizados instrumentos e técnicas distintas, importa sublinhar que todas as opções traçadas (quer na observação, quer na fase da recolha e análise de dados) estiveram relacionadas com as questões de investigação estabelecidas no início do estudo (apresentadas na Introdução).

Assim, na tentativa de elucidar quais as opções traçadas dentro de cada questão de investigação, na tabela seguinte (Figura 3.4), damos conta dos principais instrumentos e técnicas de recolha de dados adotadas, dentro de uma metodologia de IA.

Questões de Investigação	Técnicas/Instrumentos (IA)
I. De que forma o currículo prescrito pode ser moldado no sentido dar resposta aos constrangimentos com os quais nos deparamos no processo de ensino/aprendizagem?	• Análise documental ('documentos oficiais')
II. Que características devem ser valorizadas no currículo moldado por forma a abordar os conteúdos matemáticos visados?	• Análise documental ('documentos oficiais')
III. Será a exploração de conexões entre a Arte e a Matemática uma estratégia viável que assegure o rigor no ensino de conteúdos matemáticos?	• Análise documental ('documentos pessoais') • Observação participante • Meios audiovisuais (fotografia)
IV. De que forma estratégias de ensino alternativas contribuem para a compreensão e utilização da matemática em situações concretas?	• Análise documental ('documentos pessoais') • Observação participante • Meios audiovisuais (fotografia)
V. Qual o impacto desta abordagem curricular no desenvolvimento de competências nos alunos?	• Observação participante • Meios audiovisuais (fotografia)

FIGURA 3.4 – Questões de Investigação *vs* 'Técnicas/Instrumentos' de recolha de dados

3.2. O Meio Escolar e a População

A presente investigação decorreu na Escola Secundária/3 José Cardoso Pires (ES/3 JCP)[51], pertencente ao Agrupamento de Escolas General Humberto Delgado (AEGHD), localizada em Santo António dos Cavaleiros (SAC), subúrbio de Lisboa, cujos principais intervenientes no estudo foram os alunos de uma turma CEF-APA[52].

Nesta seção, com base nas informações constantes no *Contrato de Autonomia para o Desenvolvimento do Projeto Educativo do Agrupamento* (CA) (AEGHD, n.d.-a), no *Projeto Educativo de Agrupamento* (PE) (AEGHD, n.d.-b) e nas informações disponibilizadas na *Webpage da Junta de Freguesia*[53], daremos conta da caracterização da população em geral, muito em particular da população escolar e da amostra em estudo.

3.2.1. Considerações Gerais sobre o Meio Escolar e caracterização da População Escolar

De acordo com o exposto no PE (AEGHD, n.d.-b), a ES/3 JCP insere-se num meio suburbano de praticamente total dependência ao nível do emprego e de capital. Para esta zona geográfica convergiram, especialmente no período a seguir ao 25 de Abril de 1974, em consequência da descolonização, diferentes tipos de população oriundos de diversos países do mundo (nomeadamente dos PALOPs) e de diversos distritos do continente e das Regiões Autónomas (em menor número), sendo significativa a percentagem de população residente, mas não natural da freguesia.

Os dados disponíveis à época, indicavam números a rondar os 30.000 habitantes, cuja estrutura etária da população tem sofrido algumas alterações decorrentes do envelhecimento geral verificando-se, contudo, algum peso dos jovens com menos de 25 anos (cerca de 30%), tendo o grupo de idades superiores a 65 anos um peso de apenas 12%. Quanto à população ativa, esta corresponde a cerca de 45% da população total.

No que se refere ao nível de instrução, a maioria da população residente em SAC tem habilitações iguais ou superiores ao 9º ano (55,2%), embora 17,1% da população da freguesia não tenha qualquer nível de instrução.

[51] Foi autorizada, pelos órgãos de gestão, a identificação da instituição onde decorreu o nosso projeto.

[52] Não obstante da nossa participação num duplo papel professor/investigador e de outros docentes, tal como dada conta ao longo deste ensaio.

[53] http://www.jf-sacf.pt.

Centremos agora particular atenção na população escolar.

Em termos da distribuição pelos anos/ciclos de ensino da população escolar, atentemos no Gráfico 3.1.

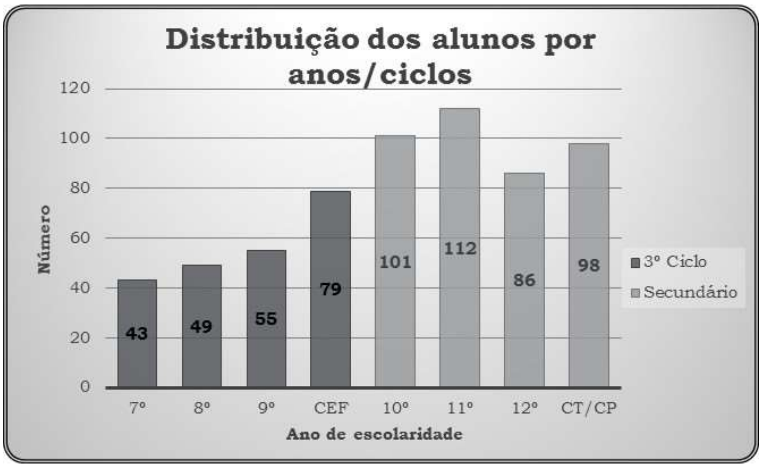


GRÁFICO 3.1 – Distribuição dos alunos por anos/ciclos

Da sua análise, depreende-se que a população escolar da ES/3 JCP frequenta maioritariamente o Ensino Secundário. Referente ao 3º ciclo, observe-se que os alunos que integram os CEF representam um número considerável. Decorrentes de algumas características dos alunos recebidos, os órgãos de gestão têm feito um claro esforço na implementação de medidas, no sentido de adaptar a escola à realidade envolvente. Devido ao forte insucesso escolar, procurando evitar o abandono escolar, a escola tem investido na abertura de CEF, Cursos Tecnológicos (CT), ou Cursos Profissionais (CP) com tipologias e áreas de formação distintas, de acordo com o perfil e interesse dos alunos. A reforçar este argumento, veja-se a evolução da distribuição da população escolar pelos vários anos/ciclos de ensino, antes e depois da criação dos CEF, cujos gráficos estão apresentamos em anexo (Gráfico B.1e Gráfico B.2 – Anexo B). No ano que antecedeu à abertura dos CEF, existiam um número significativo de alunos com retenções repetidas no 7º ano, e cujas perspetivas de aprovação não eram as desejáveis. Assim, virando a sua formação para uma vertente mais vocacional, abriram-se alguns cursos para dar resposta a essa situação, procurando evitar o abandono escolar e a desproporção de idades no mesmo ano de ensino/sala de aula (alguns alunos que frequentavam ainda o 7º ano, tinham 16, 17 ou mesmo 18 anos).

A multiculturalidade da população em geral é uma das características igualmente patente nas origens familiares da população escolar, como se depreende do gráfico a seguir apresentado (Gráfico 3.2).

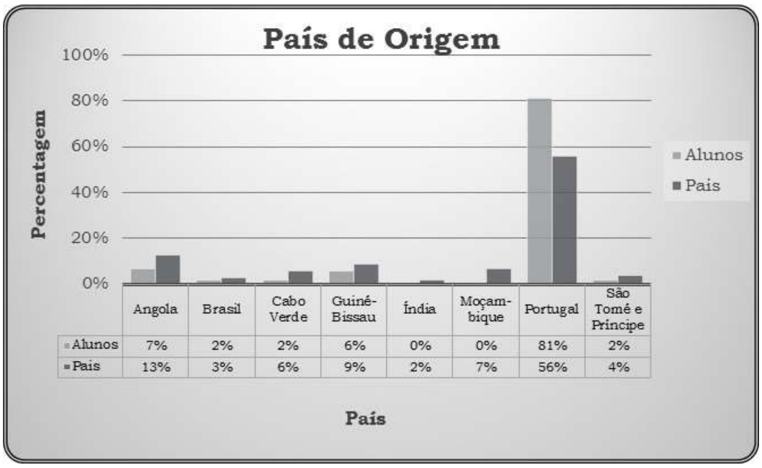


GRÁFICO 3.2 – País de origem dos alunos e dos respetivos pais

Da análise dos dados verificamos que, muito embora alguns dos alunos tenham já como país de origem Portugal, (81%), os respetivos pais não são de origem portuguesa (apenas 56%), sendo que as suas origens se distribuem essencialmente pelos PALOPs, algo que vem confirmar o referido no início desta secção.

As habilitações literárias dos pais, cuja influência embora não seja decisiva nem vinculatória, não deve ser descurada quando se pretende fazer uma caracterização da população escolar.

GRÁFICO 3.3 – Habilitações Literárias dos pais

Do gráfico apresentado (Gráfico 3.3), depreende-se que uma percentagem muito reduzida tem formação académica de nível superior (apenas 10% dos pais e 7% das mães), sendo que 39% possui uma habilitação referente ao Ensino Básico. De destacar que muitos alunos não queriam referir que os pais não tinham qualquer nível estudos ou, embora tenham frequentado alguma escolaridade no país de origem, a mesma era bastante redutora não tendo correspondência com a classificação traçada, daí a percentagem no campo ‘desconhecida’ ter alguma expressão.

Um outro elemento que a nosso ver merece destaque, refere-se ao acompanhamento diário dos alunos pelos respetivos pais/encarregados de educação. Face a atividade profissional dos pais, ou mesmo algum ‘abandono’ e descuido, o PE (AEGHD, n.d.-b) refere que uma parte significativa dos jovens são abandonados à sua sorte durante a maior parte do dia. Desta forma, o AEGHD tem, nestas circunstâncias, de oferecer condições de permanência educativa, de trabalho e de lazer, e de ser um fator de estabilidade emocional e afetiva dos jovens que o frequentam, não esquecendo a satisfação de algumas outras necessidades básicas, como a alimentação, que alguns alunos fazem, quase exclusivamente, aqui durante o dia. A este propósito, referira-se que parte considerável da população vive com algumas necessidades e com uma condição social e económica desfavorável. Um indicador disso é o número de alunos apoiado pela Ação Social Escolar (ASE)[54]: 52,3% dos alunos do agrupamento beneficiam desse apoio, dos quais 61% estão integrados no escalão máximo (Escalão A).

Complementando com a informação acima, atendendo às considerações constates no PE (AEGHD, n.d.-b) e no CA (AEGHD, n.d.-a) do agrupamento, é possível depreender algumas das características/problemas da população escolar que condicionam o sucesso na aprendizagem:

- insucesso considerável nos vários níveis de ensino, com incidência particular nos anos de início de ciclo;
- fraco aproveitamento dos alunos estrangeiros (parte significativa dos PALOPs);
- situações de problemas emocionais e de comportamento e/ou indisciplina;
- dificuldade de alguns alunos na interiorização das regras de convivência e de respeito mútuo;
- assiduidade irregular, absentismo e, mesmo, situações de abandono escolar de alguns alunos;
- desmotivação face à escola e à aprendizagem, falta de empenho, de trabalho e dedicação ao estudo;
- número elevado de alunos sinalizados com necessidades educativas especiais e/ou com carências socioeconómicas.

Extraída da população escolar caracterizada acima, analisemos a amostra em estudo.

[54] A ASE é uma medida de apoio que se destina a comparticipar nas despesas escolares dos alunos e serve para a aquisição de livros e material escolar, refeições e transportes, identificando-se três escalões A, B e C, sendo o escalão A os mais carenciados.

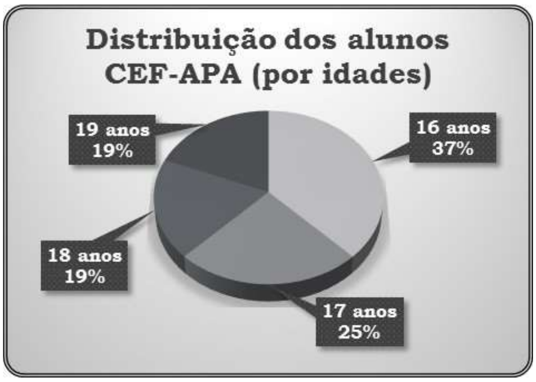
3.2.2. IDENTIFICAÇÃO E CARACTERIZAÇÃO DA AMOSTRA

Tal como demos conta, o nosso estudo concretizou-se com uma turma CEF que frequentavam o curso de Artesão Pintor de Azulejo. De acordo com a legislação "…os CEF destinam-se, preferencialmente, a jovens com idade igual ou superior a 15 anos, em risco de abandono escolar ou que já abandonaram antes da conclusão da escolaridade de 12 anos, bem como àqueles que, após conclusão dos 12 anos de escolaridade, pretendam adquirir uma qualificação profissional para ingresso no mundo do trabalho…" (Ministérios da Educação e da Segurança Social, 2004, p. 11 297).

Algumas das características mencionadas ganham ainda maior destaque se nos centramos nos alunos que frequentam o ensino vocacional/profissionalizante (CEF, CT e CP). Segundo a visão do agrupamento, tal como referido no CA (AEGHD, n.d.-a), os referidos cursos conferem uma qualificação profissional para ingresso no mundo do trabalho, sendo a sua oferta definida em função da procura dos alunos, da distribuição da rede escolar, das condições de empregabilidade futura e dos recursos humanos e materiais existentes no agrupamento. A identificação do Agrupamento neste âmbito, beneficiando de um bom ambiente de trabalho dentro das equipas pedagógicas, têm ajudado a traçar um rumo relativamente consistente para estes alunos e cujas diretrizes de atuação se vão consolidando, "…pretende-se perspetivar a formação profissionalizante como uma alternativa válida e adequada ao cumprimento de uma vontade do aluno e, igualmente, ao cumprimento da escolaridade obrigatória…" (AEGHD, n.d.-a, p.48). A aposta na melhoria de infraestruturas e de condições para a formação destes alunos, tem sido outro dos aspetos que nos levam a acredita numa importância e valorização atribuída pelo agrupamento a esta tipologia de formação (com predomínio da dimensão prática da aprendizagem), contrapondo com a baixa expetativa da comunidade educativa face a esta formação, cujo ensino é conotado com o insucesso.

Se nos localizarmos agora na nossa amostra em específico, o curso havia iniciado no ano letivo anterior com 23 alunos. Porém, no ano em curso, apenas 15 alunos integravam a turma, devido ao abandono escolar dos restantes elementos, o que reforça as dificuldades do agrupamento conseguir um pleno sucesso nas estratégias conducentes ao abandono escolar, apesar dos inúmeros esforços realizados e cujas estratégias constam no CA (AEGHD, n.d.-a) e no PE (AEGHD, n.d.-b).

A distribuição dos alunos por idades e género são apresentamos nos dois gráficos apresentados (Gráfico 3.4).



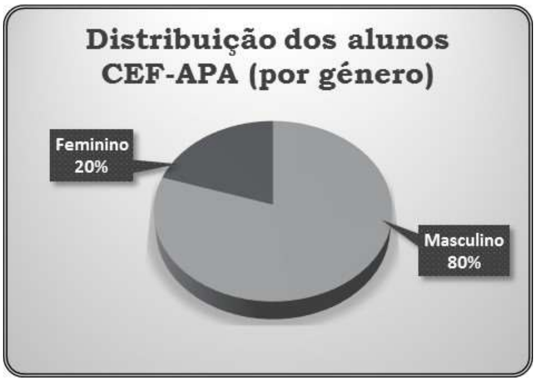


GRÁFICO 3.4 – Distribuição dos alunos CEF–APA (por idades e género)

Dos dados apresentados, destaca-se o facto da turma ser constituída na sua maioria por rapazes, cujas idades estão completamente desfasadas face nível de escolaridade. Parte significativa tinha frequentado, sem aprovação, o 7ºano e as suas idades estavam compreendidas entre os 16 e os 19 anos, quando as idades dos alunos do 7º ano ronda, em média, os 12 a 13 anos.

Algumas das características supramencionadas para a população escolar em geral, são igualmente reconhecidas nos alunos que integram a nossa amostra. No entanto, existem outras que merecem o nosso destaque, como:

- diversidade cultural e percursos escolares diferenciados, na maioria, com baixas expectativas em relação à escola;
- problemas disciplinares e comportamentais;
- problemas de integração social e baixa autoestima;
- pretensão de uma aproximação mais rápida ao mundo do trabalho;
- baixos níveis de competências académicas;
- fraco domínio da língua portuguesa;
- fraca preocupação e participação (algumas vezes mesmo nula) dos encarregados de educação com e na vida escolar dos educandos;

Deste modo, face a estas características, consideramos que se o nosso projeto, sendo bem-sucedido, pode revestir-se de um maior impacto para estes alunos, isto quer ao nível da aprendizagem da Matemática, quer mesmo nos domínios pessoal, relacional e social, enfatizando o papel formador da escola nos vários domínios do desenvolvimento de competências e da sua necessária articulação com a comunidade.

4. Planificação e Implementação do Projeto

As páginas anteriores traçam todo um referencial teórico que fundamenta a nossa investigação e sobre o qual deve ser desenhada toda a operacionalização do nosso projeto. Deste modo, poderemos em alguns momentos desta secção invocar aspetos pontuais que nos ajudem a contextualizar as nossas opções, mas não o faremos como regra, para evitar entrar num ciclo repetitivo de argumentos e factos expostos neste trabalho.

Nas linhas subsequentes, a acrescentar à motivação e contextualização anteriormente feitas (Introdução e Secção 1.1), será descrito em linhas gerais o esboço do projeto e operacionalização, bem como apresentado um cronograma dando conta da planificação e das etapas implícitas no mesmo.

Numa fase posterior, usando uma designação já referida na Secção 1.2.2, a obra de Escher será objeto de análise numa perspetiva de exploração da presença da Matemática na Arte, "Da Arte à Matemática", para em seguida ser feita uma (re)criação da mesma, "Da Matemática à Arte", usando os conceitos matemáticos estudados, pretendendo-se uma produção artística pessoal e original. Ao longo desta exploração, serão tecidas algumas considerações, a título de exemplo, à forma como algumas noções e tópicos matemáticos a estudar foram introduzidos.

4.1. Planificação do Projeto: da Contextualização e Motivação à Ação

As características dos alunos e a situação relativa à disciplina de Matemática foram-nos dadas a conhecer no início do ano letivo. Sobre esta última, foi tida com os alunos uma conversa direta e frontal da necessidade de reforçar o número de horas de Matemática por forma a colmatar o número de horas em falta no ano letivo anterior, algo indispensável para a conclusão do curso.

Em paralelo com esta conversa tida com os alunos, houve a preocupação em analisar os registos dos sumários do ano letivo transato e, face à análise feita, depreendeu-se que relativamente à Geometria havia apenas registo de conteúdos isolados, nomeadamente relativos ao cálculo de áreas e volumes[55].

Definido o reforço da mancha horária no que respeita às horas de Matemática, o problema parecia resolvido e, num primeiro pensamento, a ideia foi dar cumprimento ao itinerário de formação previsto e seguindo a ordem numérica dos módulos. Iniciar-se-ia, assim, o ano letivo com os conteúdos em falta no Módulo 8 – “Geometria Intuitiva”, prosseguindo-se, gradualmente, para os conteúdos/módulos em falta, até ao Módulo 14 – “Geometria do Círculo”, uma vez que, tal como consta no documento da DGFV (2005), sobre o módulo final, Módulo 15 – “Aproximações e Inequações”, já havia registo de sumários no ano transato.

Porém, apesar do ano letivo estar a dias de arrancar, houve lugar a uma reflexão pessoal (o ‘pensar de forma crítica’ referido na Secção 1.1), acompanhada de algumas opiniões de outros colegas, não só professores de Matemática, como também do colega responsável pela Componente de Formação Tecnológica (CFT), que conhecia relativamente bem os alunos em questão (todas as horas desta componente eram ministradas por ele).

A juntar à intuição pessoal a opinião dos outros colegas, um denominador comum parecia existir: ensinar-lhes toda a Geometria em falta e ainda mais a prevista para o ano letivo em curso não seria fácil. Mais, evitar uma assiduidade irregular na disciplina de Matemática e motivá-los para a sala de aula, parecia ser ainda mais difícil, não entrando sequer em linha de conta a apetência e gosto pela Matemática. Com isto, impunham-se medidas e estratégias alternativas, capazes de dar resposta aos problemas identificados.

Nesta linha, já numa fase de reflexão, deparamo-nos com todo um leque de questões [nossas questões]:

I. Que soluções existem?;

II. Que adaptações poderão ser feitas?;

III. Quais aquelas que mais se adequam aos alunos em causa?;

IV. Como é que tudo poderá ser operacionalizado?.

A procura de respostas a estas e outras questões era vivida numa dicotomia de sentimentos: por um lado a negatividade de uma ‘angustia’, por outro um incessante entusiasmo face ao ‘desafio’. Porém, ambas as sensações eram acompanhadas pela curiosidade/necessidade de conhecer os alunos, quer pessoal, quer matematicamente e em ambiente de sala de aula.

[55] Conteúdos integrados no Módulo 8 – “Geometria Intuitiva” (ver DGFV (2005)).

Talvez, este argumento tenha sido preponderante na decisão de qual o módulo a ser preparado, no imediato, dado que as aulas estavam a poucos dias de arrancar (menos de uma semana). Assim, de entre os módulos previstos pareceu-nos que iniciar pelo Módulo 12 – “Funções e Gráficos” seria uma boa opção, por três razões evidentes: (i) as pontes que poderiam ser estabelecidas com o real[56] e pela possibilidade de implementação de algumas atividades com cariz mais “didático”; (ii) o tema permitiria recolher alguma sensibilidade para o nível de conhecimento matemático dos alunos e a facilidade com que estes aplicam a Matemática em contexto real; (iii) o tema não requeria, em sí, requisitos diretos e significativos relativos à Geometria.

Esta decisão, permitiu-nos ganhar algum tempo para uma reflexão estruturada e uma procura/pesquisa de estratégias alternativas, factos que conduziram a uma motivação adicional para o projeto que viríamos a desenvolver. Tal projeto viria a ser encardo, a partir de certa altura, como um desafio ‘quase pessoal’ numa perspetiva de evolução profissional e da nossa prática pedagógica, no sentido que se previa algo diferente do que já havíamos feito até à data.

Toda esta motivação conduziu a uma investigação que se revelou para nós de grande interesse, não só pela natureza de um projeto que viria a ser de natureza transversal e interdisciplinar, mas pelo impacto que o mesmo poderia ter nos alunos e mesmo nos restantes colegas que integravam a equipa pedagógica (e mais tarde na escola e restante comunidade escolar, como daremos conta na Secção 4.4), o qual nasceu de um objetivo inabdicável: ensinar Matemática a um grupo de alunos e fazer com que estes reconhecessem e usassem os conhecimentos adquiridos em contexto real.

Tendo ‘ensinar Matemática’ e ‘motivar’ como ideias impreteríveis, após um período de pesquisa, foi na obra de Escher, em particular na fase da sua obra dedicada à ‘Exploração do Plano’, que encontrámos uma inspiração, nomeadamente com a leitura de alguns trabalhos como por exemplo Martinho (1998) e ainda um esboço do trabalho de Sampaio (2012)[57], o quais nos conduziram a outras igualmente citadas nas Secções 1 e 2, em particular a *Website Oficial de M. C. Escher*[58].

Embora existisse ainda incerteza se a opção seria a melhor, tal decisão ganha peso quando verificada a sua adequabilidade e pertinência, face a uma análise mais detalhada às orientações curriculares para o ensino da Geometria em geral e, nomeadamente, às

[56] Uma das recomendações fortemente referida no documento da DGFV (2005) – Secção 1.2.4.

[57] Algum do conteúdo que integra este trabalho encontrava-se disponível para consulta em http://www.iep.uminho.pt/aac/sm/a2002/M_C_Escher/index.htm (consultado em Setembro de 2010).

[58] http://www.mcescher.com/

orientações gerais e específicas constantes no documento da DGFV (2005), conforme o referido nas Secções 1.2.3 e 1.2.4.

Pois bem, todo este projeto não teve início no dia que chegou à sala aula, mas sim no primeiro dia em que se iniciou a referida pesquisa, alguns dias intensa e marcada por avanços, reticências e também recuos. Isto porque, não foi tão linear como pensávamos o encontrar de uma solução ao mesmo tempo viável e conducente à instrução intensiva de conteúdos matemáticos de um modo apelativo, motivador, capaz de envolver ativamente os alunos no processo, sem nunca descurar a seriedade do mesmo (pelos alunos) e o lado da exigência e rigor implícitos no ensino da Matemática. Tais factos são reconhecidos e identificados como duas das questões preponderantes da nossa investigação (Questões III e IV, pág. 3).

Porém para que o sucesso deste projeto não ficasse comprometido *a priori* e pudesse constituir uma alternativa à abordagem "tradicional" dos conteúdos matemáticos a explorar, impunha-se investir na compreensão efetiva do trabalho do artista, da forma como Escher tratava e utilizava os conceitos matemáticos, cuja síntese dessa análise foi dada a conhecer ao longo da Secção 2.

Combinando a informação retida da análise à obra de Escher com as orientações curriculares e uma listagem dos conteúdos que integravam os módulos a lecionar, foi feito um levantamento dos conteúdos que poderiam ser abordados à luz da sua obra. Tal poderia ser feito numa dupla perspetiva: tendo como ponto de partida a obra de Escher, introduzir novos conceitos e conteúdos matemáticos ou, em alternativa, após a apresentação dos conceitos verificar como Escher os incluía e trabalhava na sua produção artística. Impunha-se, assim, uma exploração detalhada por forma a poder tirar maior proveito das conexões existentes entre "A Arte de Escher e a Matemática"[59].

Será lícito reconhecermos aqui alguma humildade. Pois um conhecimento pouco profundo e uma visão redutora do que poderia ser explorado com a obra de Escher, não nos permitiu, numa fase inicial, perceber o quão profícua poderia ser esta abordagem e o quão rica é a obra de Escher em conteúdos matemáticos (sendo que parte deles integravam mesmo os módulos a ser lecionados). Essa humildade permitiu-nos, com o avançar do tempo, reconhecer que reformulações à planificação traçada, não só em termos de metodologias, como também tarefas propostas em sala de aula, poderiam ser benéficas e pertinentes. Exemplo de tal foram as opções traçadas para o ensino do Módulo 14 – "Geometria do Círculo", o qual contempla conteúdos não muito apreciados pelos alunos (algo verificado

[59] Expressão que dá corpo a parte do título desta dissertação.

de experiências de ensino já vividas no passado) e para os quais se requer alguma capacidade de abstração e visualização, podendo, daí, advir algumas das dificuldades sentidas. Desta disponibilidade para alterações, saíram novas ideias e atividades a propor em aula, algumas das quais considerámos pertinente incluir neste ensaio – Secção 4.2.

Além da transversalidade do projeto, pensado não para apenas um período de tempo, mas sim traçado para grande parte do ano letivo, procurou-se avaliar também a possibilidade de interdisciplinaridade do mesmo.

Nesta linha, estando os alunos integrados num curso relacionado com pintura de azulejo, acreditámos poder ir mais longe na "recriação" da obra de Escher em painéis de azulejo. O problema seria o nosso desconhecimento total na componente técnica de pintura de azulejo (tratamento, pintura, cozedura, …) e o trabalhar com toda uma série de materiais e maquinaria, nomeadamente a mufla[60].

Numa das reuniões de Equipa Pedagógica, apresentando algumas das ideias aos restantes elementos, questionou-se o interesse e a disponibilidade do colega responsável pela CFT para um projeto conjunto, que culminaria com a produção de painéis em azulejo. A nosso cargo ficaria toda a parte da exploração da obra de Escher, a instrução dos alunos com os conhecimentos matemáticos e os estudos, em papel, necessários para passar à fase final da passagem para o azulejo e pintura. Esta última fase teria de ser feita, impreterivelmente, na oficina existente na escola, contando com a colaboração do colega responsável pela CFT, onde estaríamos igualmente presentes. De salientar, ainda, o interesse manifestado na colaboração no projeto e consequente integração da disciplina de Artes Visuais (uma das que integra, além da Matemática, a Componente de Formação Científica). O contributo na fase dos estudos em papel, nomeadamente na fase do estudo da cor, poderia ser bastante positivo, conseguindo ainda mais horas para dedicar à consecução do projeto que queríamos levar a cabo.[61]

Face ao exposto, e embora numa corrida contra o tempo, pois impunha-se uma planificação urgente e uma articulação com os currículos das várias disciplinas, como nesta fase, todos os outros colegas já tinham elaborado as suas planificações anuais, tivemos o cuidado de as consultar, para assim conseguirmos elaborar a planificação anual (definitiva)

[60] A mufla (ou forno mufla) é bastante similar a uma estufa, uma câmara metálica, sendo utilizado, principalmente, quando da necessidade de temperaturas muito elevadas, neste caso para cozedura do azulejo.

[61] Também a disciplina de Tecnologia de Informação e Comunicação teve alguma contribuição, com a elaboração de apresentações em PowerPoint. Cada aluno fez uma apresentação dando conta das fases do seu trabalho, as quais foram, posteriormente, integradas numa apresentação única e final de turma.

da nossa disciplina e uma planificação para o projeto que traçava um alinhamento das várias fases, incluindo datas. Por exemplo, tendo conhecimento da preocupação necessária a ter com o estudo da cor (algo que Escher referia ter na consecução dos seus trabalhos), aquando da lecionação do módulo que integrava o estudo da cor na disciplina de Artes Visuais, teriam de existir já esboços e propostas da 'região fundamental' e da pavimentação em si, para que essa parte pudesse ser feita nessas aulas.

Deste modo, podendo a Arte de Escher ser um meio para no ensino da Geometria, face às orientações descritas nas Secções 1.2.3 e 1.2.4, foi traçada a Planificação Anual, a qual foi pensada também nas etapas implícitas na consecução de um projeto transversal, desenvolvido ao longo de todo o ano letivo, e interdisciplinar, contando com o contributo enriquecedor de outras disciplinas.

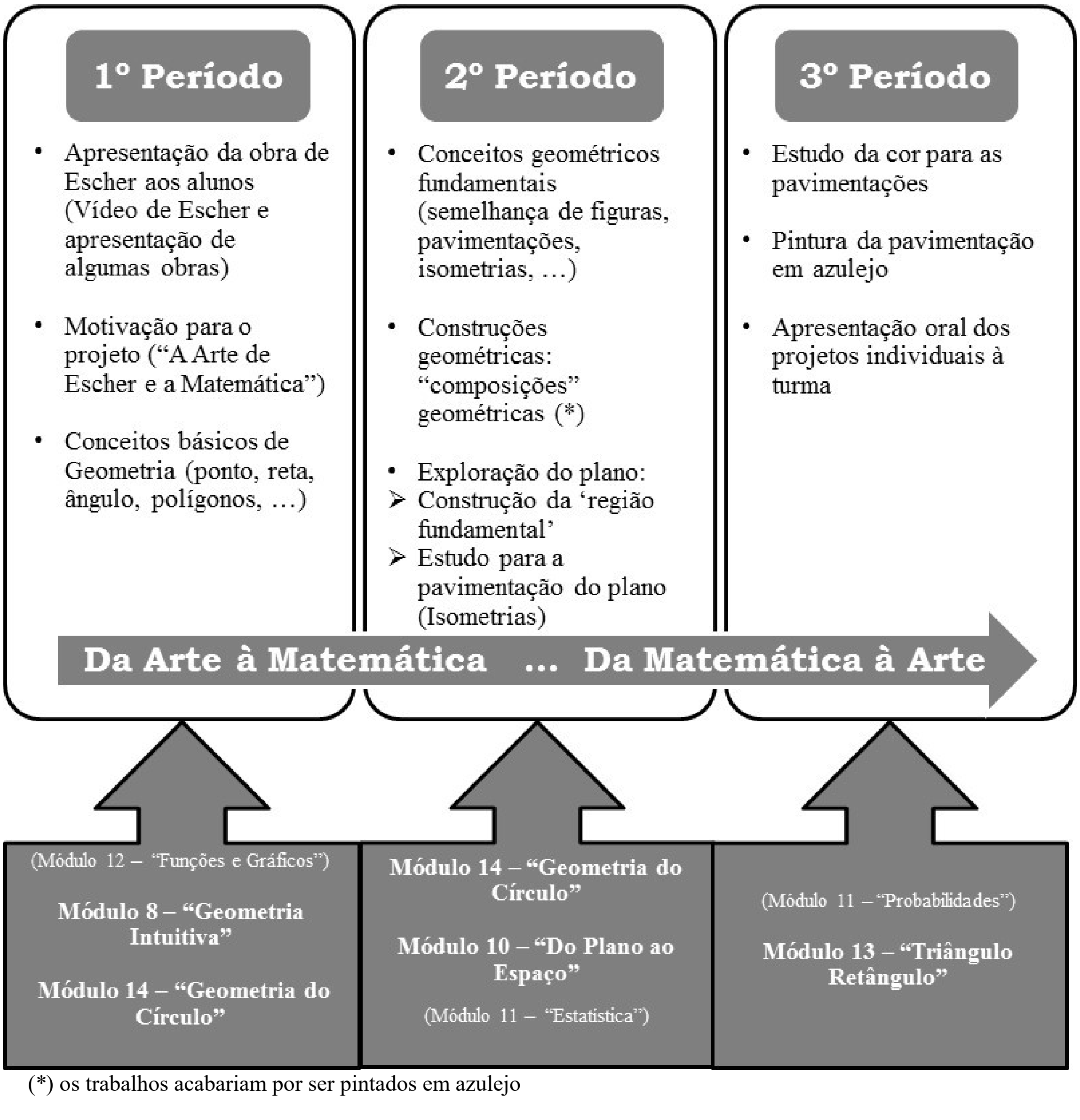


FIGURA 4.1 – Cronograma do projeto e módulos lecionados

Dessa planificação conjunta, resultou o cronograma apresentado na Figura 4.1, onde além do traçar das etapas/calendarização do projeto, consta informação da sequência definida para a lecionação dos módulos[62].

A questão que urge é: 'Como é que todas estas ideias podem ser postas em prática e como se podem operacionalizar em sala de aula?'.

O referencial teórico traçado, permitiu orientar-nos para respostas e, consequentemente, na definição de estratégias e adaptações curriculares traçadas (reconhecida nesse referencial como algo não só possível, como algo recomendável) valorizando-se o conhecimento do currículo prescrito e o tipo de alunos que integram a nossa amostra (parte em que nos focalizámos nas questões de investigação I e II identificadas na pág. 3).

Nas secções seguintes serão descritos os procedimentos adotados na operacionalização do projeto, começando pela instrução matemática, bem como feita uma análise e uma simultânea reflexão sobre os mesmos e os procedimentos seguidos.

4.2. Da Arte à Matemática: Identificação e Formalização de Conceitos e Conteúdos

Tal como demos conta na revisão na literatura, a abordagem de conceitos geométricos a partir da Arte é, segundo alguns autores, manifestamente uma alternativa profícua.

Nesta perspetiva, passou a ser parte integrante a abordagem à Arte nas opções metodológicas traçadas, muito em particular a obra de Escher, para a lecionação de alguns módulos e dos conteúdos matemáticos que os integravam. Partindo da Arte, tendo como fim a Matemática (identificado no cronograma da Figura 4.1 como "Da Arte à Matemática"), procurou-se uma exploração ou como elemento essencialmente motivador, ou assumindo um claro papel na exploração de conceitos matemáticos.

Não considerando viável uma apresentação da planificação detalhada de todos os módulos, bem como dos procedimentos adotados e da forma como a obra de Escher foi

[62] A numeração dos módulos segue o referido no documento da DGFV (2005). No itenerário de formação, está prevista, para os dois anos de curso, a lecionação dos módulos 8 ao 15. Em virtude dos registos de sumários do ano transato, o Módulo 9 – "Das Equações aos Números" e Módulo 15 – "Aproximações e Inequações", haviam sido lecionados. Pensando no projeto, além dos módulos respeitantes à Geometria (destacados a *bold*), era necessário integrar os restantes. Assim, pensou-se numa distribuição dos mesmos pelo ano letivo, sendo que, em cada período, seria introduzido um dos módulos não diretamente relacionados com a Geometria.

integrada na lecionação de cada um, julgámos adequado selecionar alguns exemplos que ilustrem os procedimentos seguidos. Paro o efeito, selecionamos para a referida análise o Módulo 14 – "Geometria do Círculo" e o Módulo 10 – "Do Plano ao Espaço", do qual se apresenta em anexo (Anexo C.1) a planificação elaborada, a qual integra o projeto e comtempla a obra de Escher na sua lecionação.

No primeiro caso procuraremos ilustrar a forma como a simples observação da obra de Escher constituiu um elemento de motivação para a lecionação dos conteúdos, referindo a forma como os mesmos estão integrados nos trabalhos de Escher e, que mais tarde, seriam usados, pelos alunos, nas suas produções artísticas. É exemplo toda a exploração feita em torno de conceitos relacionados com a circunferência, polígonos e propriedades existentes.

No segundo caso, os conteúdos matemáticos foram mesmo lecionados (apresentados e explorados) a partir da obra de Escher, sendo o seu processo de interiorização desenhado à semelhança dos níveis de aprendizagem sugeridos na 'Teoria de van Hiele' (Secção 1.2.3 – Figura 1.3).

O Módulo 14 – "Geometria do Círculo" reverte-se, muitas vezes, de dificuldades para os alunos, uma vez que são requeridas várias competências matemáticas no estudo do mesmo (ver DGFV (2005)). Motivá-los, procurando enfatizar a importância dos conceitos nele abordados foi a prioridade inicial. Como tal, recorrendo a exemplos como alguns dos apresentados ao longo deste trabalho (Figura 2.19, Figura 2.21, Figura 2.22, Figura A.2, Figura A.3, …), foi explicado aos alunos que Escher partira de construções geométricas assentes em polígonos para construir algumas das suas obras.

Foi com o recurso a essas imagens que se solicitou, aos alunos, a identificação de alguns polígonos, bem como algumas das suas características gerias, recordando conceitos trabalhados no Módulo 8 – "Geometria Intuitiva", como por exemplo o conceito de ângulo. Invocando alguns dos factos referidos, foi questionado se se recordavam de alguma forma como poderiam ser construídos alguns desses polígonos recorrendo a material de desenho/medição, ao que alguns referiram que era 'dentro do círculo'. Validando parcialmente a resposta, esta seria aproveitada para introduzir o tema a estudar, "Geometria do Círculo", enfatizando que os conceitos em análise seriam importantes.

Associada à compreensão dos conceitos e relações existentes, traçou-se como objetivo complementar do módulo o desenvolvimento de competências no que respeita à manipulação e utilização de material de desenho e medição (compasso, régua, esquadro, transferidor …), algo não só previsto nas orientações curriculares, referidas nas Secções 1.2.3 e 1.2.4, como fundamental na consecução futura do projeto.

Desta forma, valorizando o recurso a construções geométricas rigorosas, procurou-se explorar os conceitos e, também, relações geométricas entre eles, sublinhando que a falta de rigor na construção poderia comprometer quer o trabalho e quer as conclusões.

Como guião e suporte de apoio para a primeira aula onde seriam abordadas as noções gerais, foi elaborada a Ficha de Trabalho apresentada no Anexo C.2. – Figura C.1. Nessa ficha, além de clarificar algumas das habituais confusões entre noções matemáticas, como circunferência e círculo, foram discutidos vários conceitos fundamentais que integram o módulo em estudo, aproveitando-se para enfatizar a necessidade do uso da linguagem matemática correta (conforme Exercício 3 do referido documento). Decorrida essa etapa considerou-se, igualmente, importante a identificação geométrica dos conceitos analisados, (aspeto valorizado no Exercício 4), bem como o uso de notações corretas (como se depreende do exposto no final do documento em análise), algo nem sempre trabalhado e exigido nos CEF.

Analisados alguns dos conceitos chave, impunha-se o estudo de propriedades existentes para que, quando explorados geometricamente, fossem compreendidas as efetivas relações. No seguimento de orientações curriculares, fomentando o raciocínio hipotético-dedutivo a partir de construções geométricas foram pensadas e desenvolvidas algumas "Atividades de Investigação", em contexto de sala aula. É exemplo a atividade apresentada no Anexo C.2. – Figura C.2., a partir da qual se procuraram explorar algumas propriedades geométricas entre elementos associados à geometria da circunferência.

Convém, no entanto, salvaguardar que existiu a preocupação de deixar claro, para os alunos, dos riscos inerentes a este tipo de raciocínio (hipotético-dedutivo) onde se estabelecem conjeturas 'globais' a partir de construções particulares. O rigor matemático foi sempre uma preocupação que andou lado a lado com todas as atividades/tarefas desenvolvidas. Como tal, foi tido sempre o cuidado do registo formal dos conceitos e propriedades, utilizando uma linguagem matemática rigorosa. Exemplo disso foi a informação teórica (acompanhada de ilustrações) constante na Ficha Informativa/de Trabalho (ver Anexo C.2. – Figura C.3) distribuída após a "Atividades de Investigação" que relatámos.

Da referida "Atividades de Investigação", não só se depreenderam algumas dificuldades no estabelecimento de conjeturas, motivadas pela dificuldade de visualização e interpretação geométrica, associadas também a falhas de rigor; como foi igualmente notória alguma "insegurança" e dificuldade no manuseamento dos instrumentos de desenho e medição. Esta perceção revelou-se de extrema importância, no sentido de se depreender que era necessário o desenvolvimento de novas tarefas desta natureza para que, eventuais lacunas, fossem corrigidas em tempo útil, não comprometendo o trabalho que projetávamos.

Nesta linha, surgiu a ideia de recorrer de novo a construções geométricas, aquando da exploração do conceito de polígono, não só para explorar os métodos de construção de certos polígonos inscritos numa circunferência, como também algumas das propriedades existentes. Assim, desde a construção dos polígonos mais comumente referidos, considerou-se interessante explicitar o processo de divisão da circunferência em vários arcos geometricamente iguais, obtendo-se, com isso polígonos regulares inscritos na circunferência, ou mesmo alguns polígonos não convexos ('polígonos estrelados').

Como nesta parte as construções eram mais complexas, os alunos iam fazendo cada uma à medida que estas iam sendo explicadas no quadro, recorrendo aos materiais de desenho e medição. Depois, por forma a apresentar algumas das propriedades, iam sendo solicitadas medições de ângulos, cordas, entre outros elementos. Como forma de sintetizar toda uma séria de informações, elaborou-se um documento (ver Anexo C.2. – Figura C.4) onde constasse a informação teórica devidamente organizada e ilustrada com algumas das construções geométricas feitas em aula, complementando os registos que cada um fizera em aula.

Deste trabalho, entendeu-se por bem, numa parceria com a CFT, dar espaço à criatividade dos alunos, deixando-os livres para construir uma 'composição geométrica'.

Julgamos ser justo reconhecer aqui algum "subestimar" dos trabalhos que poderiam surgir. Pois bem, se numa primeira atividade se sentiram muitas dificuldades o que nos causou algum 'pessimismo' e receio (tal como exposto acima), a evolução verificada, a motivação dos alunos e a qualidade de alguns dos trabalhos resultantes desta aula foi, de tal forma surpreendente e motivadora para nós que, num rasgo súbito de pensamento e muito embora não intimamente relacionado com a obra de Escher, pensou-se introduzir uma nova etapa ao nosso projeto. Assim, reconhecendo algo não definido *a priori*, mas assumindo uma flexibilidade pessoal em fazer adaptações que pudessem enriquecer o trabalho e o desenvolvimento de competências dos alunos, decidiu-se introduzir uma nova etapa, a qual será tratada na Secção 4.3.1.

Nesta fase de formação, como forma de transitar de conteúdos, introduzindo já o novo módulo em estudo, para que os alunos compreendessem que polígonos pavimentariam o plano, foi analisado o conceito formal de pavimentação. Numa parceria com algum trabalho já desenvolvido na disciplina de Artes Visuais, foi planificada uma atividade a pares onde, recorrendo a construções geométricas e a materiais manipuláveis (*polydrons*), os alunos construíram algumas pavimentações (regulares, irregulares e mesmo semirregulares), usando polígonos.

Da observação feita, destacamos alguns aspetos decorrentes da atividade.

Por um lado, depreendemos que todos os grupos começaram por identificar os quadrados como um dos polígonos que pavimentam o plano. Construir esboços de pavimentações com quadrados foi algo imediato, o que levou os alunos a julgarem a tarefa como extremamente fácil e concluída. Porém, para que eles compreendessem o que se pretendia quando dizíamos 'procurem ir mais além', desafiamos os grupos a pensar em triângulos.

A discussão de ideias em turma foi bastante mais enriquecedora do que o espetável. Isto porque, se uns grupos usaram diferentes tipos de triângulos (no que respeita à sua classificação quantos aos lados e consequentemente quanto aos ângulos), outros recorreram apenas a triângulos equiláteros. Um dos pontos fortes, resultante do trabalho dos alunos, foi a discussão de ideias e resultados, donde podemos salientar a análise das pavimentações apresentadas e consequente distinção entre pavimentações regulares e irregulares (pela utilização de triângulos isósceles e/ou escalenos). Ainda, invocando os conhecimentos de resultados teóricos relativos a ângulos já estudados, analisou-se com maior detalhe o porquê da possibilidade de pavimentar o plano com triângulos equiláteros (geometricamente iguais entre si), justificando os factos teóricos inerentes.

Um outro aspeto que mereceu o nosso cuidado, foi para o porquê de nenhum grupo estar a conseguir construir uma pavimentação regular com recurso a pentágonos. Aqui, tentamos que os grupos conseguissem construir um raciocínio coerente e estruturado, mediante algumas justificações que justificassem a impossibilidade em causa. Todavia, mesmo dando algumas sugestões em cada grupo, nenhum consegui construir uma justificação estruturada do porquê de tal não ser possível. Assim, aproveitando sugestões e opiniões construtivas de cada grupo, foi explicado e deduzido um 'esboço de demonstração' do porquê de não ser possível construir uma pavimentação com pentágonos regulares, posteriormente ilustrado com recurso a uma animação em *javascript*.[63]

[63] Usando argumentos semelhantes, reforçados com o recurso a métodos analíticos (resolução de uma equação), foi feita a referência que com outros polígonos (que não triângulos equiláteros, quadrados ou hexágonos regulares) não era possível construir uma pavimentação regular, factos também ilustrados com o recurso a tecnologias. Será lícito reconhecer que poderíamos ter construído uma justificação mais formal de que apenas triângulos equiláteros, quadrados e hexágonos regulares pavimentavam de forma regular o plano.

Em síntese, dessa aula, os alunos depreenderam que com triângulos equiláteros, quadrados e hexágonos regulares poderiam construir pavimentações regulares. A partir dessa atividade, já na aula de Matemática, mostrou-se a forma como Escher usara essas noções matemáticas nos seus trabalhos e respetivas pavimentações.

Prosseguindo com a parte referente à formalização e lecionação dos conteúdos matemáticos, tal como apresentado no cronograma da Figura 4.1, seguiu-se o Módulo 10 – “Do Plano ao Espaço”, módulo sobre o qual recai o ponto central do nosso projeto.

Além do conceito de pavimentação já introduzido, outro dos temas que integra o módulo referido respeita ao estudo de transformações geométricas, em particular as Isometrias. Esses conceitos foram lecionados com recurso à obra de Escher. Recorrendo a alguns dos trabalhos de Escher respeitantes à ‘Exploração do Plano’, já mostrados aos alunos como elemento motivador para o estudo da Geometria, em particular algumas das pavimentações apresentadas no Anexo A.2, foi introduzida a noção de Isometria. Por observação direta das imagens foi explicado, de forma muito intuitiva, primeiramente o conceito de Reflexão/Simetria (pavimentação da Figura 2.22, pág. 60), conceito qua já surgira no estudo de propriedades relativas à circunferência, seguindo-se o conceito de Translação (pavimentação da Figura A.2 – Anexo A.2) e, finalmente, o conceito de Rotação (pavimentação da Figura A.3 – Anexo A.2). Mas para que os conceitos ficassem devidamente definidos, impunha-se falar nos elementos que caracterizavam cada uma das isometrias, introduzindo-se o conceito de eixo de simetria, de vetor e de ângulo e centro da rotação. Alguns, por serem mesmo novos para os alunos, foi dada particular atenção, como é o caso do conceito de vetor.

Para melhor caracterizar as isometrias e os elementos que caracterizam cada uma delas, foi projetada e analisada uma *animação javascript* retratando o processo de construção de cada uma das pavimentações analisadas. Para que os alunos pudessem ficar com um registo de tal, onde poderiam fazer anotações pessoais, foi elaborado um documento (ver Figura C.5 – Anexo C.2.) onde as imagens e etapas descritas na animação estavam retratadas.

Algo que nos parece, também, de destaque foi o ir mais além em termos de conteúdos matemáticos que, embora não constassem no ‘programa’, a sua pertinência e adequabilidade eram merecedoras de uma observação. Mediante a análise de uma das pavimentações de Escher (última imagem da Figura A.1– Anexo A.2), os alunos foram levados a compreender o conceito de ‘composição de aplicações’, neste caso de isometrias. Introduzindo o conceito, assumindo a não formalização matemática do mesmo, o destaque foi para a sua compreensão em termos geométricos, destacando-se que a composição de isometrias é ainda uma isometria. Assim, estamos em querer que os alunos ficaram com uma perceção do conceito, ainda que intuitiva, algo que julgámos enriquecedor do ponto de vista matemático.

À semelhança do que sempre fizemos, após uma abordagem intuitiva aos conceitos em estudo, impunha-se uma formalização e rigor. Para tal foi elaborado o documento apresentado no Anexo C.2. – Figura C.6 para que constasse, juntamente com alguns exercícios, uma informação teórica sobre os conceitos em estudo, clarificando noções e mesmo notações adotadas. Além dos exercícios explorados, sentiu-se necessidade de trabalhar melhor a visualização geométrica, envolvendo a construção de figuras isométricas. A atividade apresentada no Anexo C.2. – Figura C.7 é um exemplo.

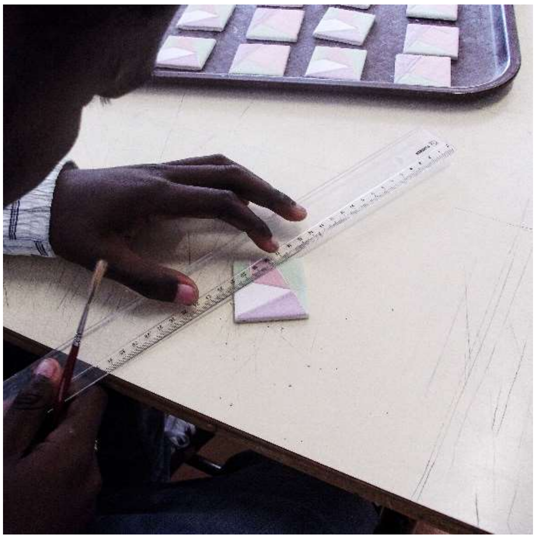
Tenha-se em conta que as metodologias e estratégias adotadas foram tidas em linha de conta na elaboração da prova escrita referente ao módulo em estudo (Anexo C.2. – Figura C.8). Assim, além de alguns exercícios ditos mais 'tradicionais' neste tipo de prova, foram considerados itens envolvendo quer construções geométricas, quer a análise de pavimentações de Escher.

Avizinhando-se uma das etapas cruciais da nossa investigação, com o desenvolvimento individual do projeto de cada aluno, cujas competências e conteúdos trabalhados ao longo do ano letivo seriam 'testados', sentimos necessidade de fazer um pequeno ensaio daquilo que procurávamos que os alunos fizessem em termos de projeto final. O enunciado da atividade 7 da Ficha Informativa/de Trabalho supramencionada (Anexo C.2. – Figura C.6) descreve o que foi solicitado aos alunos.

Nesta atividade os alunos começaram a ser confrontados com algumas das dificuldades que poderiam surgir no processo de construção. Podemos invocar, por exemplo: a dificuldade na construção do 'padrão' que iriam usar, sobretudo motivada pela falta de rigor nas construções geométricas; a não compreensão da forma como as isometrias poderiam ser exploradas, ao tentarem conjugar mais do que uma na mesma pavimentação; ou mesmo a parte referente ao 'estudo da cor', algo que aparentava ser fácil, mas que levantou problemas pelo duplo objetivo que se impunha em, por um lado o criar um padrão constante, por outro o conseguir figuras e regiões contrastantes.

Procurando contornar alguns obstáculos, a maior parte dos alunos enveredou por construir padrões muito 'geométricos', com recurso a linhas retas a dividir triângulos equiláteros, ou quadrados (polígonos usados na pavimentação).

A título de exemplo, analisemos a construção do Esmael (Figura 4.2), a qual acabou por ser pintado em azulejo pelo próprio. Observando a imagem, não só se depreende a ausência de outras construções que não o traçar de linhas retas (para pintar, o aluno utiliza mesmo uma régua) como também é evidente algumas falhas na compreensão do que é o padrão que deveria ser repetido e/ou das Isometrias usadas para pavimentar o plano. No estudo/relatório o Esmael referiu que o padrão escolhido era identificado por (apenas) um 'quadrado' e que usara a Translação e a Reflexão. Porém, quando questionado para identificar a Reflexão, ao assinalar a reta traçada a vermelho como sendo o eixo de simetria, constatou que de facto o que pensara não estava correto. O padrão não era efetivamente um quadrado, e apenas a Translação que identificara estava corretamente caracterizada (vetor traçado a preto).



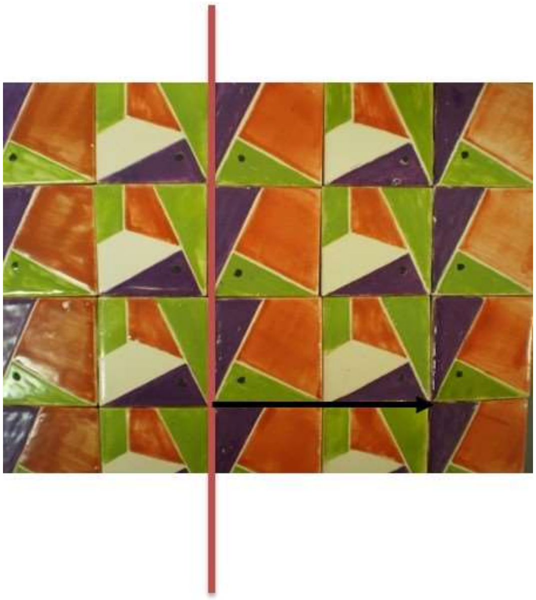


FIGURA 4.2 – Exemplo de uma das primeiras pavimentações construídas

Esta fase de trabalho revelou-se importante, pois permitiu o identificar de alguns problemas, o uso incorreto das noções matemáticas e, ainda, a falta de rigor nas construções geométricas. Seria necessário corrigir e evitar o repetir desses erros nos estudos e na consecução do projeto final.

Em linhas muito gerais, julgamos com os exemplos traçados ter dado conta do modo como se procedeu em termos de instrução matemática ao nível dos conceitos e conteúdos. Para as etapas subsequentes, criatividade, originalidade e uma exploração mais consistente das noções matemáticas, eram alguns dos objetivos traçados. Queríamos que os alunos fossem mais além a vários domínios, nomeadamente na aplicabilidade dos conceitos/conteúdos matemáticos já explorados e se inspirassem na obra de Escher na fase que caraterizámos "Da Matemática à Arte" e que daremos conta na seção seguinte.

4.3. Da Matemática à Arte: Construção de painéis de azulejo

Nesta secção faremos uma descrição e uma análise dos dados recolhidos (fotografias) na fase de implementação prática do nosso estudo.

Julgámos ser lícito deixar um apontamento prévio, reconhecendo as fortes vantagens da interdisciplinaridade nesta fase do projeto. Aliado ao nosso apoio em termos matemáticos e o conhecimento da forma como os conceitos haviam sido explorados na aula de Matemática, os alunos beneficiaram, nesta parte, de um apoio de outros professores, nomeadamente na vertente artística e sobretudo nos procedimentos intrínsecos à pintura em azulejo. Deste modo, foi possível desenvolver um trabalho realmente interdisciplinar, onde os formandos beneficiavam da constante presença de professores de áreas diferentes.

4.3.1. Composições Geométricas

Tal como referido acima, numa fase inicial, estava apenas pensada a parte da construção de painéis de azulejo referente a pavimentações. Porém, decorrente da lecionação de alguns conteúdos, considerámos adequada e pertinente a exploração de composições geométricas, envolvendo a construção de polígonos.

Esta parte do projeto acabaria por ter um duplo propósito. Por um lado, permitir aos alunos ganhar maior sensibilidade para o rigor geométrico e para utilização de instrumentos de desenho. Por outro, como nunca havíamos trabalhado com pintura de azulejo, embora tenhamos estudado e lido algumas informações sobre o assunto, considerámos útil assistir e participar a uma experimentação prévia, contando com o apoio de colegas que dominavam essas técnicas.

Numa reflexão pessoal, considerámos que esta fase foi manifestamente benéfica não só para os alunos, como para nós.

No nosso caso, permitiu-nos um contacto com a parte técnica de pintura em azulejo, com os materiais usados, desde as tintas ao azulejo em cru e, sobretudo, com instrumentos e equipamentos existentes na oficina. Acompanhar todo o processo, desde a passagem dos estudos para o azulejo à cozedura final, foi uma experiência bastante enriquecedora e proveitosa para a consecução da etapa alusiva à pintura, em azulejo, das pavimentações construídas pelos formandos.

Na perspetiva do aluno, o evoluir quer no rigor, quer no uso dos materiais de desenho foi notável. Além disso, a motivação dos alunos teve, nesta fase, uma evolução considerável para a Geometria em geral e para o trabalho desenvolvido em sala de aula, registando-se uma assiduidade bastante regular, ao invés do verificado noutras disciplinas e mesmo na disciplina de Matemática em outros momentos do ano letivo.

Neste item, dispensamo-nos de uma análise detalhada do processo de elaboração das composições geométricas. Todo o processo decorreu de um modo bastante tranquilo, em que cada aluno estava compenetrado na elaboração do seu trabalho. Os métodos de construção de cada polígono haviam sido já analisados e, salvo situações pontuais em que alguns alunos nos abordavam no sentido de clarificar uma ou outra etapa, não houve aspetos considerados relevantes. A motivação e criatividade dos alunos foram, sem dúvida, a nossa maior surpresa.

Onde existiu uma maior agitação foi na passagem dos projetos finais para o azulejo e da forma como tal poderia ser feito. Previamente passados para uma folha de papel vegetal, os mesmos foram depois decalcados em azulejos vidrados (aspeto de um pó branco)[64] que permitia visualizar ao de leve o traçado, o qual fora destacado, *a posteriori,* a carvão, como ilustra a Figura 4.3.

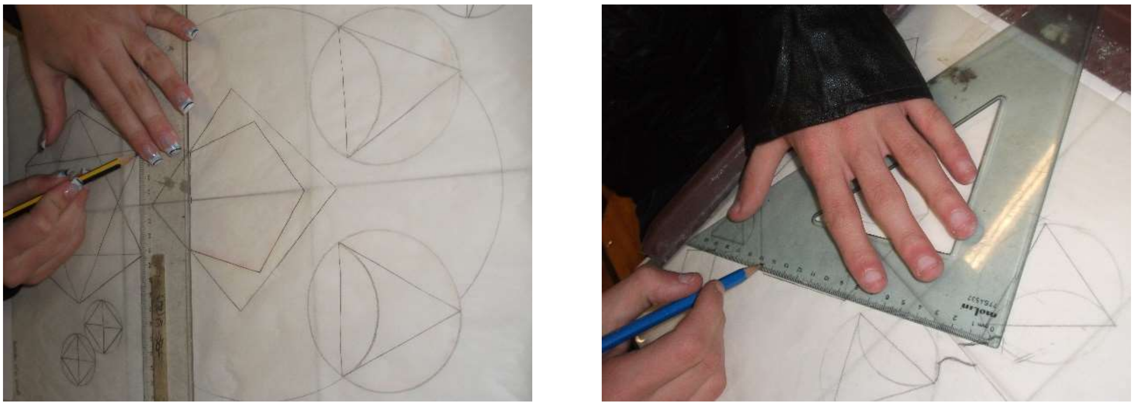


FIGURA 4.3 – Decalque das composições geométricas para o azulejo

Feitos os estudos da cor previamente em papel, a parte da pintura no próprio azulejo decorreu de um modo tranquilo e muito mais rápido do que o espectável. Além do documentado na Figura 4.4, mais imagens de alguns trabalhos finais, depois de irem a cozer na mufla, encontram-se em Anexo (Anexo D.1), onde o vidrado nas cores causa um efeito visual bastante mais apelativo.

[64] Para mais detalhes, veja-se https://sites.google.com/site/escolaantiga/home/azulejo-tradicional-manual.

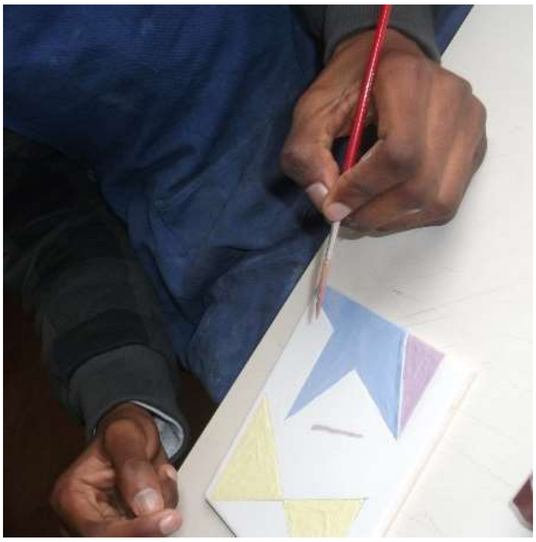


FIGURA 4.4 – Pintura em azulejo das composições geométricas e painéis finais

4.3.2. (RE)CRIÇÃO DA OBRA DE ESCHER

Nesta secção daremos conta da etapa crucial e aquela que pensávamos, inicialmente, ser a etapa final do nosso projeto, tal como daremos conta mais adiante. Aqui procuraremos não só descrever o processo, como apresentar dados recolhidos, analisá-los e discuti-los em função do que fomos observando nas aulas. Não considerando viável a apresentação de todos os estudos e análise dos mesmos, optamos por escolher alguns exemplos que ilustrem os aspetos que queremos referir. Não obstante dessa referência, daremos no final especial atenção a um projeto, analisando os respetivos estudos com maior detalhe.

A preocupação em apresentar e analisar detalhadamente o processo que Escher usara na construção das suas pavimentações, bem como alguns dos trabalhos do artista, acabaria por ter o impacto desejado. Não limitando a apresentação de conceitos matemáticos a partir da obra de Escher, mas sim mostrar aos alunos que também eles 'poderiam ser um Escher', foi uma preocupação tida em conta. Como tal, despertar nos alunos espírito crítico e criatividade na construção de uma 'região fundamental' original, foi nosso objetivo.

Sem a menor dúvida que a fase de estudos para a construção da 'região fundamental' foi a parte mais complexa e onde se sentiram as maiores dificuldades. Isto porque fomentamos a ideia de que se esperava que os alunos se inspirassem na obra de Escher, usando a forma como o artista pegara num polígono e construíra uma figura, algo mais complexo do que o simples traçar geométrico de linhas num polígono que pavimentasse o plano (como foi referido aquando da descrição do processo de ensino relativo à geometria).

Será importante referir que, na definição da pavimentação a usar, houve um forte condicionante. Dado o material que estava disponível para venda e de que se dispunha, tivemos de condicionar todas as pavimentações ao uso de quadrados. Pois, na passagem para o azulejo, o uso de outro tipo de pavimentações poderia ser um entrave, fossem elas regulares (com triângulos ou hexágonos), ou mesmo semirregulares ou irregulares.

Apesar dessa simplificação, o processo de construção da 'região fundamental' foi, para a maioria dos alunos, algo complexo com muitos avanços e recuos ou mesmo o abandonar definitivo de ideias. Vejamos um exemplo, o trabalho do Élio, apresentado na Figura 4.5.

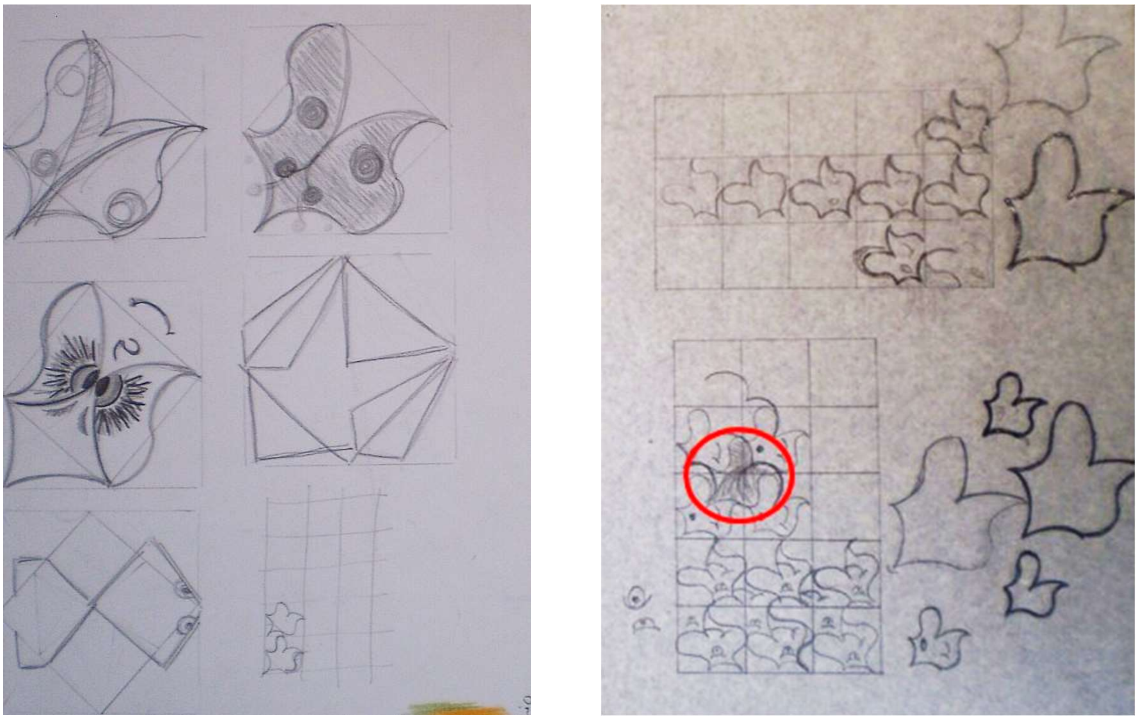


FIGURA 4.5 – Estudos para a construção da 'região fundamental' (1)

Inspirado numa das pavimentações de Escher, o Élio tentou, a partir de um quadrado, construir uma borboleta. Nessa construção, é possível depreender a forma como o aluno procura incorporar no seu estudo alguns dos factos descritos quando explicamos os procedimentos seguidos por Escher, por exemplo na pavimentação da Figura 2.22, pág. 60 (como o conservar de área e o uso parcial da Reflexão), ou mesmo seguindo a lógica esquematizada na Figura A.2 – Anexo A.2 (para o uso da Translação). Porém, ainda sem uma 'região fundamental' completamente definida, sugeriu-se pensar na forma como queria pavimentar o plano. Quando combinados os vários padrões na construção da pavimentação final, percebeu-se que um outro efeito visual poderia ser interessante explorar. Dessa análise surge uma alteração do que inicialmente se haveria pensado, obtendo-se uma outra 'região fundamental', como se depreende da figura apresentada, onde de uma espécie de borboleta que estava na base e próxima da construção inicial (destacado com um círculo a vermelho), deu origem ao que o Élio viria a chamar de um 'palhaço', 'região fundamental' que ele viria a explorar a partir daí, tal como retrata a imagem da direita da Figura 4.5.

Um aspeto que mereceu a nossa atenção foi mesmo a forma curiosa como os alunos interiorizaram a parte que destacamos como o "conservar de área", algo que ajudaria imenso na parte de "encaixe" das figuras na pavimentação final.

Na figura seguinte (Figura 4.6) apresentamos a título de exemplo o trabalho do Teofleines, onde este parte mesmo dessa abordagem para construir a 'região fundamental'.

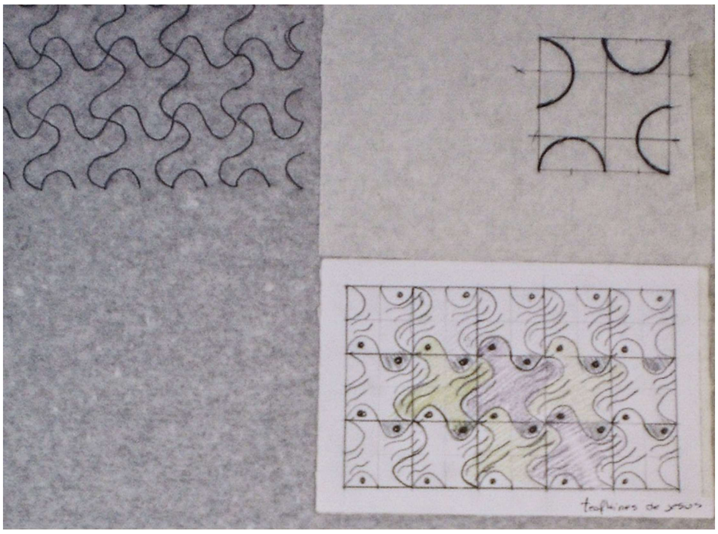
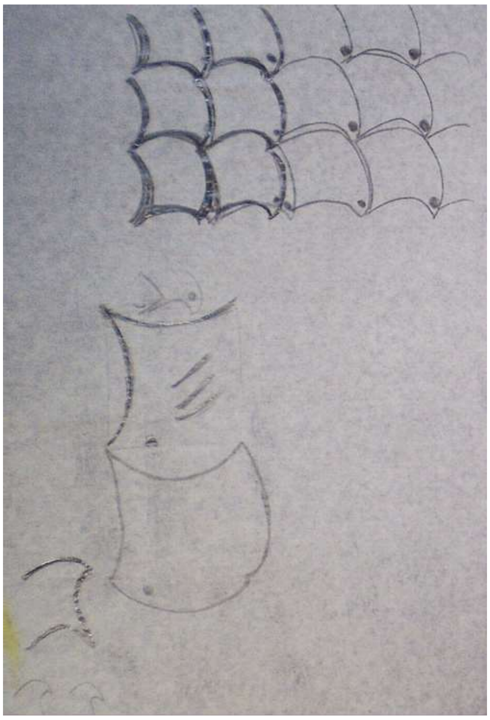


FIGURA 4.6 – Estudos para a construção da 'região fundamental' (2)

Não sendo efetivamente das construções mais complexas, julgamos ser uma mais valia a sua análise pelo facto exposto e também pela forma correta como os conceitos matemáticos são usados. O aluno não só constrói uma 'região fundamental' original, com recurso a Isometrias (seguindo a lógica esquematizada na Figura A.2 – Anexo A.2), como depois na construção da pavimentação final, invoca o uso da Translação como sendo a isometria principal, mas consegue identificar também a Rotação no seu projeto.

Certo é que alguns projetos envolviam estudos e construções mais complexos que outros. Mas mesmo nos mais simples, não obstante de uma maior elementaridade na construção, os alunos foram desafiados a dar 'vida' as suas pavimentações. Se atendermos ainda na figura acima, cuja pavimentação inicial era a apresentada na parte superior, vejamos como o colocar de um ponto (olho) e o traçar de uns riscos, não só parece retratado uma ave, como reforça a ideia de se obterem figuras contrastantes, tornando-as diferentes, apesar de na sua base estarem figuras geometricamente iguais, procedimentos igualmente adotados por Escher nas suas construções.

Tais procedimentos foram adotados por outros alunos, como dá conta o trabalho do Edson apresentado na imagem da Figura 4.7, onde a pavimentação inicial começa 'limpa' de qualquer efeito e onde é depois sugerido o 'dar vida' com o colocar de um 'olho' e uns traços.



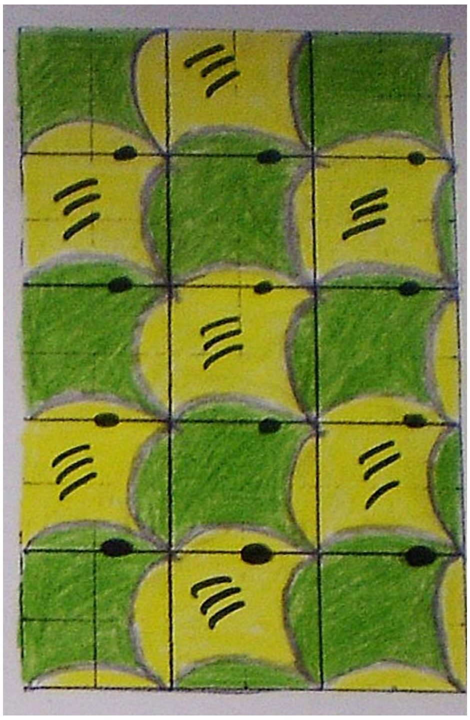
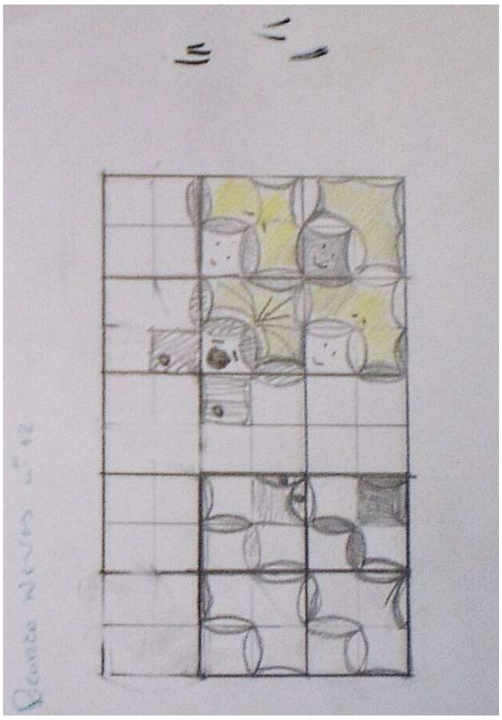


FIGURA 4.7 – Esboço de alguns estudos para a pavimentação final (1)

Nesta etapa tivemos de ter algum cuidado no gerir de expetativas, de "emoções", pois a capacidade de persistência deste tipo de alunos fica muito aquém do que gostaríamos. Nem sempre aceitavam facilmente sugestões, no sentido de os fazer ir mais além, explorarem melhor algumas das noções matemáticas, ou procurarem construir um padrão mais complexo. Apesar de algum cuidado nos comentários e sugestões feitas, chegamos a ter respostas menos boas, como 'Não quero fazer mais nada, está bom assim!', ou mesmo 'Se não gosta, faça você!'. Pelo que, uma preocupação foi sempre manter os alunos envolvidos na sua construção e motivados para o trabalho feito. Sempre que tecíamos alguma sugestão de melhoria, esta era acompanhada de apreciações construtivas contendo elogios, sublinhando o que de positivo estava feito.

Como seria expetável, a heterogeneidade de trabalhos era evidente, uns eram visivelmente mais complexos que outros, algo que é facilmente observável quando comparamos, por exemplo, os trabalhos do Edson e do Ricardo, apresentados respetivamente na Figura 4.7 e Figura 4.8.



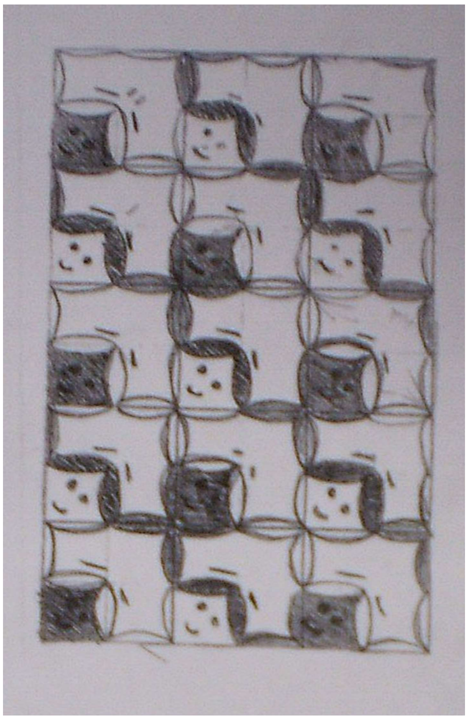


FIGURA 4.8 – Esboço de alguns estudos para a pavimentação final (2)

É precisamente sobre o trabalho do Ricardo que iremos tecer algumas considerações elucidativas sobre os procedimentos seguidos na fase da construção da 'região fundamental', pois consideramos retratar muito do trabalho feito em aula com todos os alunos.

Tal como referido de início, muitos dos alunos começaram esta fase com a construção da 'região fundamental' com construções envolvendo apenas o traçar geométrico de linhas retas num quadrado. Porém em todos esses casos os alunos foram desafiados a olhar novamente as pavimentações de Escher e procurar inspiração para construções mais originais e para olharem o documento que lhes havia sido distribuído onde estava esquematizada a forma como Escher procedia.

Essa sugestão e desafio foi aceite na íntegra pelo Ricardo, cuja sequência de imagens apresentada na Figura 4.9 retrata algumas das fases do estudo e a evolução do seu trabalho.

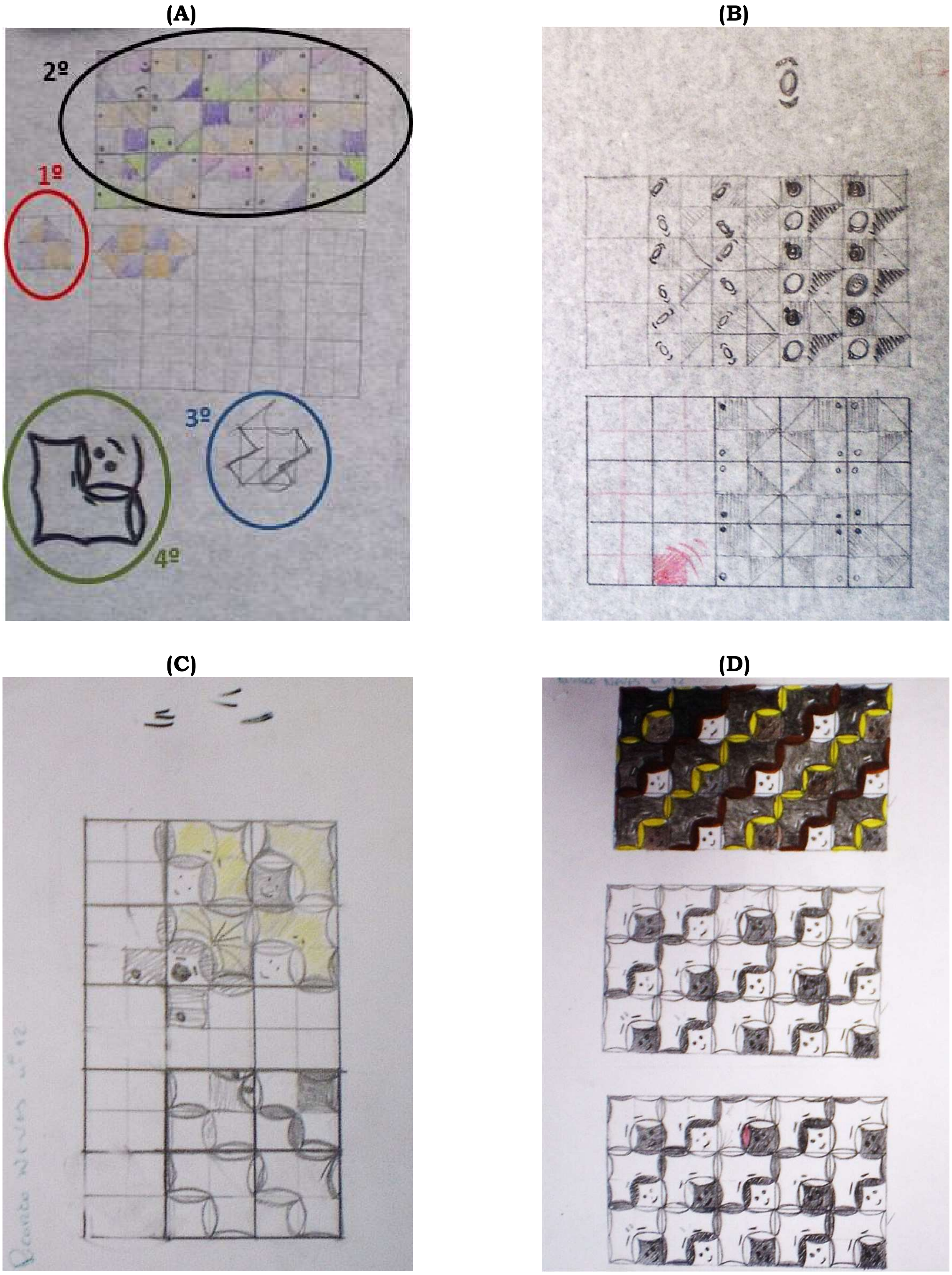


FIGURA 4.9 – Exemplo de um projeto (desde os estudos iniciais à pavimentação final)

Centremos alguma atenção ao apresentado na imagem **(A)**, cuja essência da construção é mantida na imagem **(B)**. Partindo da primeira proposta de estudo do Ricardo, (destacada com o círculo a vermelho), foi-lhe sugerido para tentar algo diferente. O Ricardo, 'copiando' o que os colegas faziam, decide apresentar uma proposta, assente no mesmo tipo de padrão e colocar alguns elementos que não existiam (uns pontos), tal como ilustra o segundo esboço (destacado com o círculo a preto) e o apresentado na imagem **(B)**.

Porém, fomos mais concretos e dissemos que poderia partir do esquema que definira, mas tentar algo diferente, mais original e próprio, diferente do trabalho de todos os colegas, tendo, nós mesmos, esboçado algumas sugestões (destacado com o círculo a azul). Dada a recetividade do aluno face às sugestões, usamos mesmo a expressão 'procura ser um Escher diferente de todos os outros'. Neste caso, mostrando exemplos de pavimentações de Escher, onde, além dos aspetos já referidos em trabalhos anteriores, se destacou o facto de quando se olha para um 'quadrado' isolado, a imagem não ficaria completa e só na pavimentação final se compreenderia o que estava representado.

Poderemos dizer que o aluno se envolveu nesse desafio de um modo ímpar. Sendo um dos alunos que se caracterizava por apresentar algum descuido no rigor das suas construções, por uma atitude muito inconstante e uma personalidade não linear, considerámos que foi uma vitória conseguida ao senti-lo realmente envolvido em 'ser diferente'.

No que respeita ao trabalho em si, neste caso o Ricardo seguiu uma metodologia de trabalho diferente, e foi explorando na pavimentação a construção do padrão que adotaria na sua construção, tal como retrata a imagem **(C)**.

Pois bem, mediante vários estudos, depois de muito riscar e apagar, eis que surge uma proposta realmente diferente e nada trivial em termos de construção. Para que o Ricardo tivesse real noção da diferença e evolução da sua proposta, sugerimos contruir junto dos estudos iniciais, aquele que seria o padrão final (destacado com círculo a verde na imagem **(A)**). Repare-se que, tal como se orgulhava o Ricardo por ter conseguido esse feito, o quadrado tinha na sua base apenas parte da construção da 'região fundamental', a qual só viria a ser identificada e compreendida quando integrada numa pavimentação final, como é evidenciado na imagem **(D)**. Nesta imagem, não só com uma nítida exploração do contraste a dar às figuras, como com o colocar de uns traços se depreende o rosto de uma menina e uma espécie de morcego.

Sem dúvida que, atendendo à figura, é compreensível alguma complexidade. Mas o nosso olhar não nos permite ter noção do trabalho desenvolvido pelo aluno até chegar ao resultado final. Nós mesmos, apesar de termos perceção disso, pois acompanhámos todo o processo, não conseguimos detetar todo o trabalho e algum nível de complexidade nele implícito. Para melhor perceção, e em virtude do exposto, desafiamo-nos a nós mesmo a colocarmo-nos perante uma folha de papel em branco e tentar recriar uma 'região fundamental', facto que nos ajudou a ter real noção da dificuldade inerente a este tipo de trabalho, não obstante de se ter em linha de conta as características dos alunos que participaram neste estudo.

Tal como demos conta na Secção 2.2.3 (ver pág. 58), a fase da construção da 'região fundamental' é, muitas vezes, definida em simultâneo com o estudo da forma como será pavimentado o plano, ou seja, estas duas fases são quase desenhadas em paralelo, até à definição da pavimentação final. Em aula, tal também aconteceu em muitos dos casos e numa análise às Isometrias usadas, pela maior facilidade que apresenta, quase todos os alunos identificavam a Translação como sendo a principal isometria usada na sua pavimentação. Porém, importava, e era nosso dever, questioná-los quanto à existência de outras Isometrias no seu projeto, algo que gostaríamos que os mesmos discutissem com os colegas quando fizessem a apresentação oral do projeto individual à turma. De um modo geral, todos acabariam por identificar outras Isometrias, mas reconhecemos a humildade de muitos em assumir que tal não foi propositado. Por forma a destacar algumas dessas transformações, alguns alunos viriam a usar a cor, ou outros detalhes nas construções, para salientar as referidas transformações.

Definida a pavimentação, em simultâneo com esta análise das Isometrias usadas, iniciou-se a fase do 'estudo da cor'. Esta fase contou com a colaboração e o contributo positivo da disciplina de Artes Visuais, onde o tema em estudo era precisamente 'A Cor'[65]. Será lícito reconhecer que, se tal parceria não tivesse existido, o estudo da cor não seria feito com tanto detalhe e testando várias alternativas. Não só a parte da combinação de cores foi esteticamente ponderada, como o cuidado em tronar as imagens efetivamente contrastantes na planificação foi notável. Vejam-se alguns desses estudos nas imagens apresentadas na Figura 4.10.

[65] Refira-se que no desenhar da planificação do projeto esta colaboração já estava prevista e o mesmo foi desenhado procurando articular-se, em termos temporais, com os vários programas disciplinares.

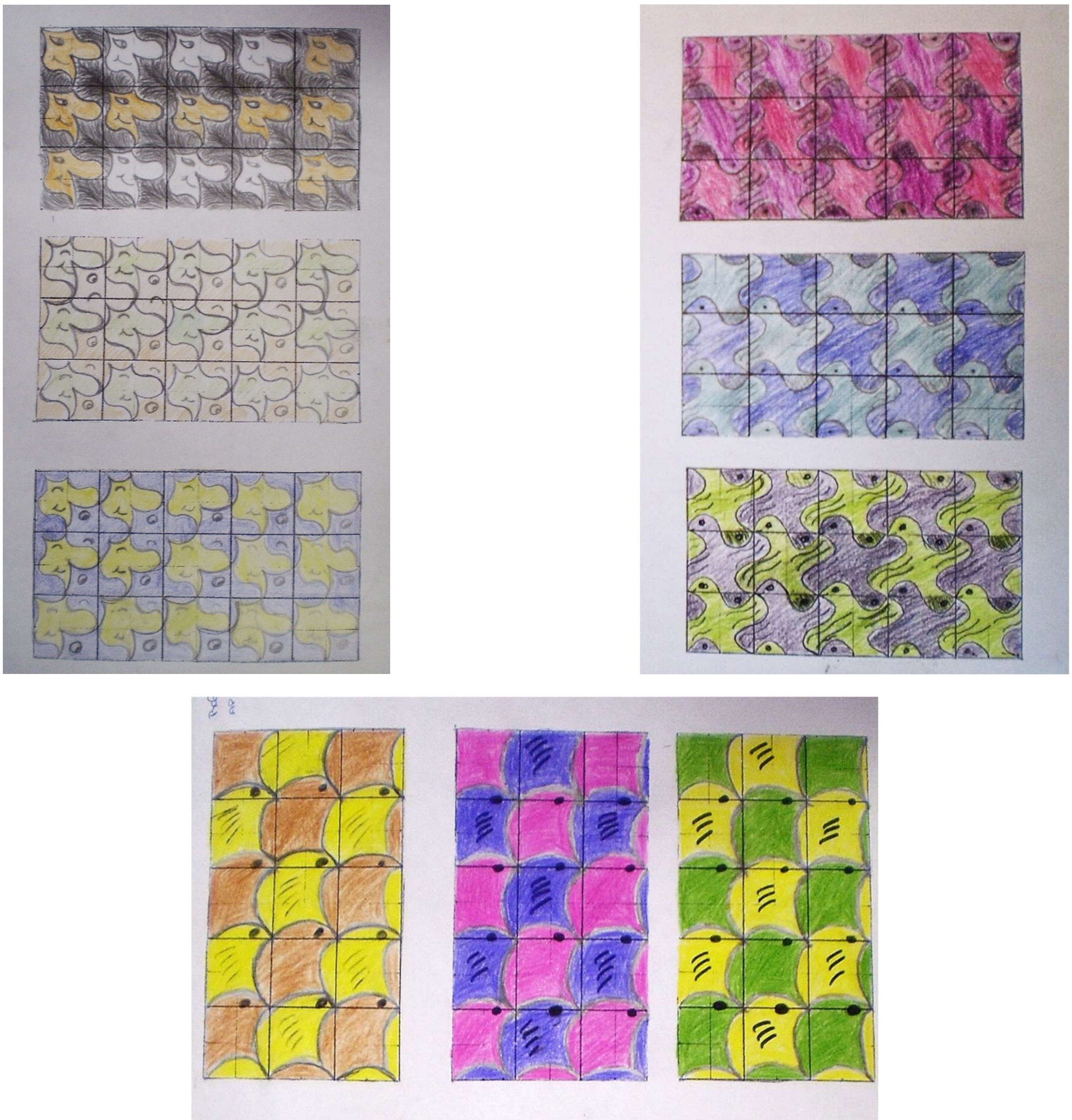


FIGURA 4.10 – Estudo da cor das pavimentações final

A título de curiosidade, tornando clara a interligação entre as várias etapas e a possibilidade de tornar o trabalho ainda mais adequado aos gostos de cada um, até na fase do estudo da cor foi possível verificar alterações ao que estava definido. Veja-se a primeira imagem da Figura 4.10 onde, decorrente do estudo da cor, o Élio acabaria por introduzir algumas alterações ao seu projeto, onde uma espécie de cabelo, viria a dar lugar a um outro 'palhaço', algo que ele viria a identificar como o 'palhaço triste e o palhaço contente'.

A última etapa do projeto decorreu nas oficinas, onde se concretizou a passagem das pavimentações finais para o azulejo e pintura dos mesmos. Nesta parte a motivação dos alunos estava no seu auge e sentia-se um 'orgulho' muito pessoal em cada um dos trabalhos. Beneficiando da experiência resultante do trabalho relatado na secção anterior, toda esta fase de decalque dos projetos para o azulejo e pintura dos mesmos decorreu com grande normalidade e sem situações a destacar.

Na Figura 4.11, complementada com a Figura D.2 – Anexo D.2, podemos observar algumas imagens que retratam o trabalho feito.

FIGURA 4.11 – Pintura das pavimentações finais em azulejo (1)

Pintados os painéis, todos aguardavam com expetativa o tirar dos trabalhos da mufla, após a cozedura, e verem o resultado final. Na Figura 4.12, complementada com a Figura D.3 – Anexo D.2, podemos observar alguns dos trabalhos. Optamos por colocar, propositadamente, a imagem de alguns que, devido a falhas no processo de pintura (por exemplo quantidade de tinta aplicada), tiveram alguns problemas durante a cozedura e o efeito não foi o desejado. Com isto queremos mostrar o que é normal acontecer em projetos desta natureza, salientando que nem tudo é perfeito, mas relativizando ao mesmo tempo as falhas observadas.

FIGURA 4.12 – Pavimentações finais pintadas em azulejo (1)

Por exemplo, no trabalho do Ricardo, que destacamos como bem conseguidos do ponto de vista matemático e da exploração em termos de estudo, são passíveis se serem observadas várias falhas no que respeita ao trabalho final, devido à falta de rigor (uma característica que havíamos destacado anteriormente relativamente ao aluno).

Em suma, muita Matemática esteve na base da consecução dos projetos, tenham eles ficado perfeitos ou não. A exploração dos conceitos matemáticos esteve sempre presente durante o desenvolvimento dos mesmos e, junto dos alunos, foi sempre promovida a utilização de terminologia e vocabulário matematicamente correto sempre que se falava do que estava a ser feito.

Após conclusão de todo este processo, dadas outras ideias que surgiram em algumas aulas, foram posteriormente desenvolvidos outros projetos, onde o recurso a noções matemáticas, nomeadamente no campo da Geometria, era uma constante nas criações artísticas. Assim, de todo um projeto sobre Geometria desenvolvido em parceria entre a disciplina de Matemática e outras disciplinas, desafiámos, cada aluno para uma construção envolvendo polígonos côncavos inscritos na circunferência.

Concluídos os trabalhos, onde poderiam usar a cor como forma de destaque, cada aluno teria de apresentar o seu trabalho e tentar identificar, na sua construção, elementos/conceitos geométricos. Este desafio foi vivido, no geral, com algum entusiasmo dado ter sido apresentado como uma espécie de ‘concurso’, onde o aluno que identificasse um maior número de elementos/conceitos, seria premiado. Entre várias noções, como arco, corda, rotação, etc. …, os dois conceitos mais identificados foram o de circunferência e polígono (todos os alunos os referiram). Algo que considerámos curioso foi o facto de um aluno, e apenas um, ter identificado ‘ponto’ como uma possível resposta, referindo-se ao centro da circunferência. Algo que também ficou patente desta atividade foi a habitual confusão entre reta e segmento de reta. Muitos dos alunos identificavam os lados do polígono como retas e não como segmento de reta. Essa confusão, por ser geral, foi merecedora de uma clarificação em turma, avivando alguns dos factos teóricos analisados no Módulo 8 – “Geometria Intuitiva”.

Esta atividade teve, simultaneamente, dois propósitos. Por um lado, avaliar a real compreensão e identificação correta de conceitos matemáticos trabalhados ao longo do ano letivo. Por outro lado, a mesma revestiu-se de um caráter formativo, na medida em que nos permitiu corrigir e clarificar algumas noções, resultante da identificação incorreta de alguns conceitos, como o caso acima exposto.

Não obstante de algumas lacunas detetadas na compreensão de alguns conceitos, foi para nós muito gratificante, após um ano de formação matemática, observar uma nítida evolução quer em termos motivacionais, quer na aquisição de competências matemáticas. Em alguns casos, não menosprezando, os alunos surpreenderam-nos claramente. Não só identificaram um número significativo de conceitos, como, pela identificação de conceitos novos para eles (como o caso de vetor, isometria, …) ficámos em crer que este tipo de trabalho os marcou e permitindo a aquisição de conhecimentos e competências matemáticas.

Dos trabalhos feitos, pintados em azulejo, nasceu no seu conjunto um painel (Figura 4.13), o qual foi montado no Laboratório de Matemática, marcando assim a passagem destes alunos pela escola.

FIGURA 4.13 – Painel em azulejo do Laboratório de Matemática (pintados pelos alunos)

Em todas estas atividades, sentimos que se 'respirou', que se 'viveu', que se 'sentiu' Matemática. Em cada instante a Matemática esteve sempre presente …

4.4. IR MAIS ALÉM…

Se atendermos ao cronograma apresentado na Figura 4.1, todo o projeto terminara com uma apresentação oral, onde cada aluno mostraria o seu projeto à turma, e explicaria os procedimentos adotados, as dificuldades sentidas, dando uma maior enfase à parte Matemática, por exemplo às Isometrias usadas quer na construção da 'região fundamental', quer na pavimentação final.

Face ao tipo de alunos, não muito afáveis uns com os outros, foi tida a preocupação prévia de estar, individual e previamente, com cada aluno para uma breve apresentação do seu projeto. Nesta fase, foram feitas algumas correções, para que estes utilizassem um vocabulário correto e com algum rigor durante a sua apresentação. Na apresentação à turma, cada aluno, munido de algumas notas pessoais, apresentou o seu trabalho, algo que correu de um modo bastante tranquilo, salvo situações pontuais quando algum ainda cometia alguma 'gafe'.

Porém, algumas surpresas ainda esperavam os alunos.

Durante a consecução prática da fase relativa à construção das composições geométricas, decidiu-se arriscar e confiar no trabalho dos alunos, optando por não lhes dizer o que mais estava a ser planeado e que daremos conta nas linhas subsequentes desta secção. Não obstante duma reflexão sobre as iniciativas, será dada prioridade à descrição dos procedimentos, não havendo lugar a uma análise detalhada de dados observados, pois julgamos que o maior contributo será dar a conhecer ao leitor que não se considerou findo o projeto com o trabalho desenvolvido em sala de aula. Face às características dos alunos, integrados num curso profissional e em breve ativos no mercado do trabalho, seria importante fomentar uma ligação destes com a comunidade envolvente, valorizando o desenvolvimento de competências pessoais e relacionais, algo que não deve ser dissociado da instrução escolar.

4.4.1. Apresentação do Projeto à Comunidade Escolar: Exposição "Arte e Matemática"

Integrada no Plano Anual de Atividades, estava prevista uma semana em que a escola está aberta à comunidade em geral, onde em particular alunos de outras escolas poderiam visitar e participar em inúmeras atividades, projeto denominado de *Escola Viva – Escola Comunidade* (EV-EC).

Mediante alguns contatos estabelecidos com a Associação de Professores de Matemática (APM), questionou-se a disponibilidade de datas para requisitar a exposição itinerante sobre a obra de Escher. Havendo disponibilidade para a semana da EV-EC e, mediante a aprovação da Direção da escola, seria nesse período montada uma exposição denominada *Arte e Matemática*, onde os trabalhos dos alunos seriam apresentados à comunidade escolar, conjuntamente com a exposição itinerante relativa à obra de Escher.

Quando informados da iniciativa e da semana em que tal aconteceria, o contentamento no rosto dos alunos e orgulho foi algo bastante gratificante. O comentário que nos marcou foi ‘Toda a gente vai ver os nossos azulejos! Somos uns artistas’. Este comentário marcou-nos e deu-nos ainda mais entusiasmo ao ver o orgulho em cada aluno, pois sentiram que o trabalho deles poderia ser apreciado e reconhecido. Isso refletiu-se na prontidão de alguns que, apesar da montagem da exposição ter sido a um Sábado, voluntariaram-se para vir à escola ajudar.

O cuidado na montagem da exposição teria de ser algum, pois queríamos que não fosse apenas uma mostra de trabalhos, mas sim mostrar o quão fora importante a inspiração na obra de Escher. Para tal, procurou-se criar um cenário com algum cuidado, integrando os trabalhados dos alunos ao longo da exposição, onde além dos trabalhos finais, os visitantes poderiam ver alguns dos estudos que estiveram na base da construção das pavimentações. Tornando claro a inspiração na obra de Escher, algumas frases do autor foram citadas ao longo da exposição, tal como dão conta algumas das fotografias apresentadas.

FIGURA 4.14 – Exposição *Arte e Matemática*

Durante os dias em que a mesma esteve aberta à comunidade, os formandos estiveram organizados por grupos, para assim receberem e acompanharem as pessoas na visita. Neste aspeto, tal como esperávamos, alguns alunos mostravam-se mais disponíveis e ativos em explicar com cuidado e acompanhar as pessoas durante a visita. Como tal, as equipas foram devidamente pensadas de forma a tentar que os grupos formados fossem o mais equilibrados possível.

4.4.2. *WORKSHOP* "PINTAR UM AZULEJO"

Integrado no desafio de 'Todos podemos ser um Escher' lançado aos alunos durante o ano letivo, haveria ainda espaço a mais uma surpresa. Estamos certos de que este item poderia ser retirado deste nosso ensaio, mas acreditamos ser uma mais valia no sentido de mostrar a proporção que o desafio inicial, de ensinar Geometria a estes alunos, tomara.

Nesta linha, decidimos acreditar e mostrar aos alunos que estes poderão ter um papel ativo e preponderante em algumas iniciativas. Em virtude desse acreditar, igualmente integrado na EV-EC, foi pensado um dia onde seria dinamizado uma espécie de *workshop* de pintura de azulejo, cujos elementos dinamizadores seriam os alunos e os destinatários seriam os utentes do centro social da comunidade, quase na sua globalidade com idades superiores a 70 anos, sendo que uma delas ultrapassava os 100 anos.

Quando questionados sobre o assunto, os receios foram alguns e muitos não reagiram de um modo positivo, mostrando-se indisponíveis para a iniciativa. Mas quando os sensibilizamos para a nobreza do nosso gesto em que os destinatários seriam os utentes do centro social, a reação foi surpreendente e assistiu-se a um virar de opiniões, pois alguns deles iriam ter o privilégio de convidar os avós a vir à escola e a serem 'professores' deles por um dia.

Uma planificação do trabalho que se iria desenvolver, os cuidados a ter, a forma como a sala e o espaço seria organizado, tudo foi pensando e planeado em turma. Estamos em querer que o envolver dos alunos desde o primeiro momento nas decisões como tudo se poderia operacionalizar foi determinante para o sucesso de toda esta iniciativa.

Não só mostrar a parte técnica de pintura de azulejo, mas como a Arte e a Matemática se conciliam na obra de Escher e também nos seus trabalhos, cada aluno, responsável por um grupo de dois elementos, fez uma visita guiada à exposição *Arte e Matemática* onde falou de Escher e a forma como o artista usara a Matemática nos seus trabalhos.

Posteriormente, os destinatários do nosso *workshop* eram convidados a subir às oficinas onde os aguardava a pintura de um azulejo. Cada aluno ficara responsável por explicar todo o processo, desde a pintura à cozedura, onde alguns foram mesmo convidados a colocar os seus trabalhos na mufla, como dão conta algumas das imagens contantes na Figura 4.15. Aqui cada destinatário optava pelo trabalho que queria fazer, adaptado ao seu gosto, mas sobretudo também à sua condição física e mental. Havia alternativas pensadas para todo o tipo de situação, desde um simples decalcar de uma letra a trabalhos mais complexos, envolvendo construções geométricas, ou mesmo inspirações na obra de Escher.

FIGURA 4.15 – *Workshop Pintar um Azulejo*

O balanço final desta iniciativa foi bastante gratificante, claro está que com alguns problemas pelo meio, desde a irresponsabilidade pontual de um aluno que não quis aparecer no dia da atividade, à simpatia menos visível de outros. Ainda, a dificuldade de alguns elementos, com mobilidade mais reduzida, pintarem em tempo útil um azulejo foi algo que não conseguimos contornar, uma vez que as carrinhas disponibilizadas pela Junta de Freguesia tinham horários a cumprir.

Não valorizando estes factos, ver o empenho da maior parte dos alunos, o entusiasmo e a entrega à medida da personalidade de cada um, aceitando-a, foi algo que nos encheu de orgulho.

A título de curiosidade, acrescente-se que no final cada aluno entregou aos elementos com os quais esteve a trabalhar um certificado de participação na atividade (Figura 4.16).

FIGURA 4.16 – Certificado de participação no *Workshop Pintar um Azulejo*

.

CONCLUSÃO

Face a uma motivação inicial em implementar um currículo de Geometria que integrasse situações de aprendizagem diferenciadas em virtude dos problemas identificados na Introdução deste ensaio, o objetivo central da nossa investigação passou por estudar e avaliar a definição e implementação de um currículo específico, ajustado quer à área de formação quer às características dos intervenientes. O recurso à Arte foi, assim, testado como metodologia profícua no processo de ensino/aprendizagem de conteúdos matemáticos, sendo a obra de Escher um manifesto exemplo da harmonia entre a Arte e a Matemática.

Neste sentido, atendendo às questões de investigação traçadas e à investigação levada a cabo, serve parte da presente secção para um balanço final e dar resposta às mesmas.

I. De que forma o currículo prescrito pode ser moldado no sentido de dar resposta aos constrangimentos com os quais nos deparamos no processo de ensino/aprendizagem da Matemática?

Inúmeros são os desafios com os quais nos deparamos no ensino, em particular no processo de ensino/aprendizagem. Perante uma sociedade bastante heterogénea, cujos elementos que a compõem apresentam exigências e objetivos de vida cada vez mais dispares, onde a fase da escolarização é obrigatória e marcante em termos futuros, impõe-se ao professor uma atitude de 'pensador crítico', não só na reflexão sobre as suas práticas, como também em termos de uma necessária inovação.

Tal como sustentado na revisão da literatura sobre o currículo, o professor tem um papel preponderante nas adaptações ao 'currículo prescrito'. Revendo-nos nestas palavras, face aos constrangimentos identificados no início desta investigação, pensado em termos de operacionalização, a referida adaptação deve por um lado ser coerente com o que está prescrito e, por outro, ter uma sequência lógica, sendo consistente com os objetivos que estão na base da formação escolar. Assim, a preocupação inicial é analisar cuidadosamente o currículo prescrito, procurando nele espaço para ajustes. Num segundo momento, ao moldar o currículo, deve traçar-se uma planificação cuidada, construindo-se um currículo próprio e ajustado ao pretendido, o qual deve valorizar as orientações constantes na literatura, sobretudo, nunca descurar o objetivo central, o ensino de conteúdos matemáticos.

II. Que características devem ser valorizadas no currículo moldado por forma a abordar os conteúdos matemáticos visados?

Partindo dos factos expostos no item anterior, onde o cuidado em assegurar o ensino dos conteúdos matemáticos deve ser um imprescindível, muitos autores têm alertado para outros factos a valorizar ao moldar do currículo. Face a teorias não consensuais sobre que aspetos valorizar e qual o 'coeficiente' de prioridade implícito, procurámos alargar a nossa revisão da literatura sobre o tema (desenvolvendo-a mais do que o inicialmente espetável), no sentido de identificar sugestões e retirar delas ideias que se adequassem à nossa realidade.

Nesta linha, face a uma população que frequentava o ensino vocacional e inserida num meio social com algumas características particulares, a nossa preocupação foi compreender e analisar em que medida o meio escolar (muitas vezes referido ao longo deste ensaio como 'meio social') seria elemento preponderante numa relação direta com o currículo. Por conseguinte, deduzimos que, num ciclo constante e cruzado de influências, o 'meio social' e o currículo estão intimamente relacionados e devem ser tidos em linha de conta na política educativa pela forma como condicionam todo o processo de ensino/aprendizagem.

Deste modo, na definição do 'currículo moldado', impôs-se a necessidade de olhar o currículo inicialmente prescrito e adaptá-lo em função da realidade e do 'meio social', centrando particular atenção nos interesses e, no nosso caso particular, na área vocacional e tipologia de ensino dos sujeitos intervenientes no projeto, procurando dar resposta positiva quer aos desafios que a escola enfrenta, quer ao ensinar matemática aos alunos em questão.

III. Será a exploração de conexões entre a Arte e a Matemática uma estratégia viável que assegure o rigor no ensino de conteúdos matemáticos?

De acordo com a área vocacional da população em estudo (pintores de azulejo), incluir a Arte nas nossas opções metodológicas de ensino, foi uma escolha que nos pareceu bastante pertinente e adequada. Para que tal opção se revelasse frutífera, impunha-se uma análise cuidada a possíveis conexões entre a Arte e a Matemática (em particular nos domínios da Geometria) e estudar a viabilidade da exploração dessas conexões no ensino de conceitos/conteúdos matemáticos, sem comprometer o rigor.

Tendo em conta o projeto desenvolvido, acreditamos que a Arte foi uma opção em termos metodológicos e que tal inclusão se manifestou claramente profícua. Porém, convém ressalvar que, para tal, se impôs, *a priori*, um investimento não apenas na pesquisa de eventuais conexões, mas sobretudo numa real compreensão das mesmas. Para isso, quanto mais segura e próxima do autor for a fonte bibliográfica que as explora e explica, mais fácil e fidedigna é a sua compreensão e futura exploração em aula.

Definida a obra de Escher como objeto de análise e exploração, a prioridade foi procurar, de entre uma vasta bibliografia sobre o tema, aquela que estivesse tão próxima de Escher e do seu trabalho quando possível. Esse cuidado ajudou-nos a desenhar um projeto estruturado e transversal ao longo de todo o ano letivo, onde o recurso à obra de Escher no ensino de conceitos/conteúdos matemáticos foi uma constante. De sublinhar que o rigor com que o artista trabalhou os referidos conceitos/conteúdos, foi o mesmo a que nos 'obrigámos' na sua análise com os alunos e que, igualmente, lhes incutimos e exigimos.

Com efeito, em virtude dos elementos observados, acreditamos que a inclusão da Arte é uma opção viável no processo de ensino/aprendizagem da Matemática, sendo importante não descurar alguns dos aspetos expostos.

IV. De que forma estratégias de ensino alternativas contribuem para a compreensão e utilização da Matemática em situações concretas?

A vasta bibliografia em Educação Matemática, resultante de inúmeras investigações desenvolvidas em contexto aula, dá-nos conta de que estratégias de ensino alternativas podem ser bastante profícuas para a compreensão de alguns temas. Esta foi, também, uma das questões que quisemos colocar em destaque na nossa investigação.

Assim, face à opção de incluir a Arte no ensino de conceitos/conteúdos matemáticos (de um modo transversal e também interdisciplinar), julgamos que os resultados superam em muito o inicialmente expetável. Estamos em crer que parte desse sucesso se deveu a três fatores: (1) ao investimento feito na análise da obra de Escher, procurando atingir uma compreensão sólida da forma como este inclui a Matemática nas suas obras; (2) ao rigor matemático a que nos exigimos na abordagem aos conteúdos mediante a Arte e, posteriormente, exigido aos alunos; e (3) a aposta, ao longo de todo ano letivo, na utilização dos referidos conceitos em situações concretas e na produção artística, apelando à sensibilidade e capacidade de visualização e representação geométrica.

Deste modo, valorizando alguns aspetos e práticas em aula, estamos claramente em querer que as estratégias alternativas de ensino seguidas se mostraram claramente benéficas, algo que não só depreendemos da forma como os alunos fizeram uso das noções matemáticas nos trabalhos individuais, como, numa fase posterior, conseguiam olhar para as construções geométricas e identificar nelas conceitos matemáticos, alguns não triviais.

V. Qual o impacto desta abordagem curricular no desenvolvimento de competências nos alunos?

Além do desenvolvimento de competências matemáticas (principal objetivo da disciplina), algumas das orientações curriculares dão-nos conta da necessidade do desenvolvimento, nos alunos, de competências de natureza transversal, como a promoção da educação para a cidadania e mesmo a realização pessoal, mediante o desenvolvimento de atitudes de autonomia, solidariedade e de autoestima.

Embora focados na formação matemática dos alunos, é lícito afirmar que foi desenvolvido um projeto que prima por alguma singularidade, dada à inclusão de algumas iniciativas (tal como demos conta na Secção 4.4) que, claramente, contribuíram para a promoção da autoestima dos alunos e de outras competências de natureza transversal.

Sentir que ensinámos Matemática aos nossos alunos e mais, notar neles o desenvolvimento de competências, resultante de um currículo traçado à medida dos seus interesses, é para nós motivo de grande orgulho. Um orgulho semelhante foi o que cada um dos alunos sentiu ao ver que numa das paredes da escola ficou impressa a sua 'arte'; que a comunidade envolvente apreciou e valorizou o seu trabalho e, ainda, que uma faixa etária da população, nem sempre lembrada na sociedade, quis aprender com eles e que estes, empenhados e envaidecidos, quiseram partilhar o tinham aprendido. Tudo isto não se documenta numa fotografia, sente-se.

Por tudo isto, julgamos mais do que justificadas as horas investidas no pensar e no concretizar deste projeto, onde, em cada instante, se 'respirou' Matemática. Fica uma certeza que este projeto não nos marcou apenas a nós, por constituir uma das experiências de ensino mais gratificantes, como deixou impressas, nos nossos alunos, algumas marcas.

Enquanto profissional em evolução, é importante sentir-se que podemos melhorar sempre as nossas práticas e ganhar maior sensibilidade em gerir múltiplas tarefas desempenhas num duplo papel e em simultâneo: ensinar Matemática, mantendo a ordem em aula (no papel de Professor) e acompanhar de perto o trabalho de cada aluno e procurar recolher dados e informação do trabalho desenvolvido (num duplo papel de Professor e

Investigador). Por este motivo, não poderemos deixar de reconhecer algumas limitações do estudo desenvolvido, das quais destacamos a importância e eventual utilidade de mais elementos que documentassem e constituíssem evidências de alguns dos factos referidos ao longo deste ensaio. Todavia esta mesma limitação deve ser salvaguardada. Pois, por um lado a nossa maior preocupação era a efetiva aprendizagem da Matemática pelos alunos, o que condicionou a recolha de informação, sendo que alguns factos relatados resultaram apenas da observação (participante); por outro alguns dos aspetos em análise não são de todos passíveis de 'quantificação' ou documentação, como o caso das emoções e sentimentos, tal como acima exposto.

É na tentativa de melhorar os factos expostos, que identificamos pontos de partida para trabalhos futuros, onde, derivado da experiência adquirida, consigamos desenvolver novas investigações, perspetivando uma melhoria da nossa prática pedagógica. Nesta linha, além de dar resposta à limitação acima identificada, encontramos neste trabalho espaço a desenvolvimentos futuros. Implementar o mesmo projeto, procurando recolher novos dados e novas evidências que cimentem algumas das conclusões a que chegámos neste estudo, é uma possibilidade, abrindo, todavia, espaço a novas questões de investigação baseadas, por exemplo, numa análise comparativa de resultados.

Não obstante de conexões já analisadas na 'Exploração do Plano', decorrente da análise feita a outros 'temas' da obra de Escher, como a 'Aproximação ao Infinito' e 'Interpretação do Espaço', identificamos outras conexões com a Matemática passíveis de exploração com os alunos, podendo ir mais além caso estes frequentem cursos relacionados com 'Artes Visuais' e/ou tenham algumas noções de Geometria Descritiva.

Em suma, reconhecendo o trabalho já desenvolvido, nomeadamente os cuidados a ter quer ao moldar o currículo, quer na concretização prática de um projeto, identificamos nele vários pontos de partida para novos desenvolvimentos, valorizando, tanto quanto possível, pontes existentes entre a Matemática e o real, em particular a Arte.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Agrupamento de Escolas General Humberto Delgado (AEGHD). (n.d.-a). *Contrato de Autonomia para o Desenvolvimento do Projeto Educativo do Agrupamento*. Obtido em 16 de Setembro de 2016, de http://moodle.aeghd.pt/.

[2] Agrupamento de Escolas General Humberto Delgado (AEGHD). (n.d.-b). *Projeto Educativo do Agrupamento*. Obtido em 16 de Setembro de 2016, de http://moodle.aeghd.pt/.

[3] Alarcão, I. (2001). Professor-investigador: Que sentido? Que formação? In P. B. Campos (Ed.), *Formação Profissional de Professores no Ensino Superir (1)* (pp. 21–31). Porto: Porto Editora.

[4] Alves, C. (2014). *O estudo da simetria através da arte de Maurits Cornelis Escher*. Obtido em 6 de Setembro de 2016, de http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/handle/123456789/1102.

[5] Alves, H. (2013). *Ensinar matemática através da arte : um incentivo ao gosto pela matemática?*. Obtido em 6 de Setembro de 2016, de http://repositorioaberto.uab.pt/handle/10400.2/2759.

[6] Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Porto: Porto Editora.

[7] Bourdieu, P., & Passeron, J.-C. (1990). *A Reprodução: Elementos para uma Teoria do Sistema de Ensino*. Lisboa: Vega.

[8] Canavarro, A. P., & Ponte, J. P. (2005). O papel do professor no currículo de Matemática. *O Professor E O Desenvolvimento Curricular*, 63–89.

[9] Centro de Matemática da Universidade do Porto (CMUP). (n.d.). *Arte e Matemática*. Obtido em 2 de Setembro de 2016, de http://cmup.fc.up.pt/cmup/arte/index.html.

[10] Chaves, D. R. C. (2008). *A matemática é uma arte uma proposta de ensino explorando ligações entre arte e a matemática*. Obtido em 5 de Setembro de 2016, de http://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/23721.

[11] Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2000). *Research methods in education* (5th ed.). London: RoutledgeFlamer.

[12] Cortesão, L., & Stoer, S. (1997). Investigação-acção e a produção de conhecimento no âmbito de uma formação de professores para a educação inter/multicultural. *Educação, Sociedade & Culturas*, *7*, 7–28.

[13] Coutinho, C. P., Sousa, A., Dias, A., Bessa, F., Ferreira, M. J., & Vieira, S. (2009). Investigação-acção : metodologia preferencial nas práticas educativas. *Revista Psicologia, Educação E Cultura*, *13*(2), 355–379.

[14] Coxeter, H. (1979). The non-Euclidean symmetry of Escher's picture "Circle Limit III." *Leonardo*, *12*, 19–25.

[15] Demo, P. (1996). *Educar pela Pesquisa* (5th ed.). Campinas: Autores Associados.

[16] Departamento de Educação Básica (DEB). (1999). *A Matemática na Educação Básica*. Lisboa: ME-DEB.

[17] Departamento de Educação Básica (DEB). (2001). *Currículo Nacional do Ensino Básico - competências essenciais*. Lisboa: ME-DEB.

[18] Direcção-Geral de Formação Vocacional (DGFV). (2005). *Cursos de Educação e Formação: Programa - Componente de Formação Científica - Disciplina de Matemática Aplicada*. Lisboa: ME-DGFV.

[19] Ernst, B. (1978). *The Magic Mirror of M. C. Escher*. England: Tarquin Publications.

[20] Escher, M. C. (1994). *Gravuras e Desenhos*. Hamburgo: Taschen.

[21] Escher, M. C., Bool, F., & Locher, J. (1982). *M.C. Escher: His Life and Complete Graphic Work: with a Fully Illustrated Catalogue*. (J. L. Locher, Ed.). HN Abrams.

[22] Estrada, M. F., Sá, C. C., Queiró, J. F., Silva, M. C., & Costa, M. J. (2000). *História da Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta.

[23] Flick, U. (2005). *Métodos qualitativos na investigação científica*. Lisboa: Monitor.

[24] Gimeno-Sacristán, J. (2000). *O Currículo: uma reflexão sobre a prática.* Trad. Ernani F. da F. Rosa. (3ª Ed.). Porto Alegre: ArtMed.

[25] Goodland, J. (1979). *Curriculum inquiry. The study of curriculum practice*. New York: McGraw-Hill.

[26] Goodson, I. F. (2001). *O currículo em mudança. Estudos na construção social do currículo*. Porto: Porto Editora.

[27] Greenberg, M. J. (1993). *Euclidean and non-Euclidean geometries: Development and history* (3rd ed.). New York: W. H. Freeman.

[28] Latorre, A. (2003). *La Investigación- Acción*. Barcelo: Graó.

[29] Leite, C. (2003). *Para uma escola curricularmente inteligente*. Porto: Edições ASA.

[30] Leite, C. (2006). Políticas de Currículo em Portugal e (im)possibilidades da escola seassumir como uma instituição curricularmente inteligente. *Currículo Sem Fronteiras*, *6*(2), 67–71.

[31] Lerria, R., & Luz, V. (2011). Uma proposta interdiciplinar entre a Arte e a Matemática no Ensino Fundamental. *X Congresso Nacional de Educação - EDUCERE*, 14208–14217.

[32] Luckesi, C. C. (1994). *Filosofia da educação*. São Paulo: Cortez.

[33] M.C. Escher Foundation. (n.d.). *Website Oficial de M. C. Escher*. Obtido em 9 de Julho de 2016, de http://www.mcescher.com/.

[34] Manfredi, S. M. (1993). *Metodologia do ensino: diferentes concepções*. Campinas: FE.

[35] Martinho, M. (1996). *O infinito através da obra de M. C. Escher – Uma experiência sobre as concepções acerca do infinito numa turma de Métodos Quantitativos*. Tese de Mestrado. Universidade do Minho.

[36] Martinho, M. (1998). *M.C. Escher - Arte e Matemática*. (APM, Ed.). Guimarães: Gráfica Covense, Lda.

[37] Matos, J., & Serrazina, L. (1996). *Didática da Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta.

[38] Menegassi, M., Nina, C., & Silva, M. (2008). Exploração de trabalhos de Escher em aulas de geometria. *Boletim Gepem*, *53*, 111–132.

[39] Merriam, S. (1988). *Case study research in education: A qualitative approach*. San Francisco: Jossey--Bass.

[40] Ministérios da Educação e da Segurança Social. (2004). Despacho Conjunto nº 453/2004, de 27 de Julho. *Diário Da República: 175, SÉRIE II*, 11 296 – 11 307. Obtido de http://cdp.portodigital.pt/repositorio-de-legislacao/66/

[41] National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2008). *Princípios e normas para a matemática escolar* (2nd ed.). Lisboa: APM.

[42] Navega, S. (2005). *Pensamento crítico e argumentação sólida: Vença suas batalhas pela força das palavras*. São Paulo: Publicações Intelliwise.

[43] Pacheco, J. A. (2001). *Currículo: teoria e práxis*. Porto: Porto Editora.

[44] Ramos, F., & Batuca, M. (n.d.). *Escher: Da Matemática à Reflexão sobre a Matemática*. Obtido em 9 de Julho de 2016, de http://webpages.fc.ul.pt/~ommartins/seminario/escher/prosto.html.

[45] Rodrigues, J. (2015). *Representações da vigilância nos romances Surveillance, de Jonathan Raban, e Teil der Lösung, de Ulrich Peltzer*. Tese de Doutoramento. Faculdade de Letras da Universidade do Porto.

[46] Rodrigues, M., & Bernardo, M. (2011). Ensino e aprendizagem da Geometria. In APM (Ed.), *Actas do XXII Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 339–344). Lisboa: APM.

[47] Sampaio, P. (2012). A Matemática através da Arte de M. C. Escher. *Millenium*, *42*, 49–58.

[48] Schattschneider, D. (2004). *M.C. Escher: Visions of Symmetry*. New York: Harry Abrams.

[49] Silva, A. (2013). *Matemática na arte: análise de uma proposta de ensino envolvendo a pintura renascentista e a Geometria em uma classe do 9º ano do Ensino Fundamental em Belo Horizonte (MG)*. Obtido em 6 de Setembro de 2016, de http://www.repositorio.ufop.br/handle/123456789/3387.

[50] Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática (SPIEM). (n.d.). *Website SPIEM*. Obtido em 9 de Setembro de 2016, de www.spiem.pt.

[51] Torres, J. (1995). *O curriculum oculto*. Porto: Porto Editora.

[52] Tuckman, B. (2000). *Manual de Investigação em Educação*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

[53] União das Freguesias de Santo António dos Cavaleiros e Frielas. (n.d.). *Web site da União das Freguesias de Santo António dos Cavaleiros e Frielas*. Obtido em 16 de Setembro de 2016, de http://www.jf-sacf.pt/.

[54] van Hiele, P. M. (1999). Developing geometric thinking through activities that begin with play. *Teaching Children Mathematics*, *5*(6), 310–316.

[55] Varela, B. L. (2013). *O Currículo e o Desenvolvimento Curricular: Concepções, Práxis e Tendências*. Cabo Verde: Edições Universidade de Cabo Verde (UniCV).

[56] Vaz, R. (2013). *"Começar" de Almada Negreiros - Arte e o poder formatador da Matemática*. Tese de Mestrado. Faculdade de Ciências e Tecnologias da Universidade Nova de Lisboa (FCT - UNL).

[57] Veloso, E. (1998). *Geometria - Temas actuais - Materiais para professores.* vol. 11. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

[58] Warnick, B., & Inch, E. (1994). *Critical Thinking and Communication* (2nd ed.). New York: Macmillan.

ANEXO A – "ESCHER E A MATEMÁTICA"

A.1. "CARTA DE ESCHER PARA ESCHER" [66]

Quando alguém, desde muito jovem, se dedica apaixonadamente à actividade da técnica da gravura artística, pode acontecer que encare o domínio perfeito dessa técnica como o seu maior ideal. Este atraente ofício toma todo o seu tempo e pede a sua total atenção, de modo que subordina mesmo a escolha do objecto ao desejo de experimentar uma determinada faceta da técnica. Na verdade, dá grande satisfação adquirir um conhecimento artesanal, desenvolver a capacidade de conhecer profundamente o material que está à disposição, aprender a usar com mestria e convenientemente os utensílios de que se dispõe em primeiro lugar: as próprias mãos.

Pessoalmente vivi, durante anos, num tal estado de ilusão. Depois, veio o momento em que os meus olhos puderam ver claro. Percebi que o domínio da técnica não era a minha finalidade. Fui tomado de um outro anseio cuja existência até então me era desconhecida. Vinham-me ideias que nada tinham que ver com a arte da gravura, fantasias que me cativavam de tal maneira que as queria absolutamente transmitir a outros. Isto não podia acontecer com palavras, pois não eram pensamentos literários, mas sim «imagens de pensamento» que só se poderiam tornar compreensíveis aos outros quando as pudesse mostrar como imagens visuais. O método pelo qual se poderia chegar a essa imagem perdeu de repente significado. Naturalmente, não é em vão que alguém se ocupa durante anos com as técnicas da gravura. O «ofício» não só se havia tornado na minha segunda natureza, mas também me parecia necessário para continuar a usar uma técnica de reprodução que possibilitasse fazer compreender as minhas intenções a muita gente ao mesmo tempo.

Se comparo o processo de execução de uma estampa do meu período técnico com o de uma gravura na qual foi expressa uma determinada linha de pensamento, fico com a impressão de estarem quase em contradição uma com a outra. Antes acontecia-me frequentemente procurar, num monte de esboços, um que me parecesse adaptado a uma determinada técnica que nesse momento prendesse especialmente o meu

[66] Adaptado de Escher (1994, pp. 5–6)

interesse. Hoje, escolho entre as técnicas que adquiri, aquela que, mais do que qualquer outra, oferece uma melhor representação de um pensamento determinado que me absorva no momento.

Desde então, a produção de uma representação gráfica consta de duas fases, rigorosamente separadas uma da outra. O processo de trabalho começa com a busca de uma norma visual que transmita, da forma mais clara possível, a nossa linha de pensamento. Na maior parte dos casos, leva muito tempo até que acreditemos que ela se apresenta clara diante dos nossos olhos. Mas uma imagem mental é algo bastante diferente de uma imagem visual. E por muito esforço que se faça, nunca se consegue concretizar completamente aquela perfeição que paira no nosso espírito e que incorrectamente julgamos «ver». Depois de uma longa série de experiências, com a sabedoria mais ou menos gasta, funde-se finalmente aquele lindo sonho na forma, insuficientemente perceptível, de um esboço pormenorizado. Depois, como um recreio, começa a segunda fase: a elaboração da impressão gráfica, durante a qual o espírito descansa e as mãos fazem o trabalho. Quando, em 1922, deixei a Escola de Arquitectura e Artes Decorativas, onde S. Jessurun de Mesquita me tinha iniciado nas técnicas da gravura artística, encontrava-me sob forte influência deste mestre, cuja vincada personalidade marcou, de resto, a maior parte dos seus discípulos. Naquele tempo a gravura em madeira (o corte com goiva em prancha de madeira, geralmente de pereira, cortada no sentido longitudinal) estava mais em moda, entre os gravadores do que hoje. Fiz minha a predilecção do meu mestre pela madeira de fibra e uma das razões da minha permanente gratidão para com ele é juntamente o facto de me ter ensinado a lidar com este material. Durante os primeiros sete anos da minha estada em Itália, trabalhei exclusivamente com ela. Adapta-se mais a grandes formatos do que a onerosa madeira de topo. Na exaltação da juventude, trabalhei nessa altura com a goiva em enormes pranchas de madeira de pereira, com mais de 70 cm de comprimento e quase 50 cm de largura. Só em 1929 produzi a minha primeira litografia e, em 1931, ousei pela primeira vez fazer uma xilogravura (a gravação com buril em pranchas de madeira cortada no sentido perpendicular ao eixo da árvore).

Mas o entalhe em madeira é ainda hoje para mim um «medium» a que não posso renunciar. Logo que, para realizar uma ideia, se pense serem necessárias várias cores e, portanto, se tenha de produzir mais do que uma matriz, esse «medium» oferece muitas vantagens em relação à xilogravura. Na verdade, eu não teria podido realizar muitas das estampas dos últimos anos se não tivesse conhecido basicamente as vantagens da madeira de fibra. Muitas vezes, numa gravura a cores, combinei *ambos os processos de impressão em relevo, usando madeira de topo para os pormenores a preto e madeira de fibra para as cores.*

De 1922 até cerca de 1935 foi o período em que me dediquei com entusiasmo à pesquisa das propriedades do material para gravura e, ao mesmo tempo, tomei consciência das limitações que se me impunham. Durante esta fase resultaram numerosas estampas (cerca de 70 xilogravuras e entalhes e cerca de 40 litografias). A maior parte delas tem pouco ou mesmo nenhum valor agora porque, na sua maioria, eram «exercícios de dedos» – pelo menos é essa hoje a impressão que me dão. A razão pela qual, a partir de 1938, me concentrei cada vez mais intensamente com a transmissão de ideias pessoais foi o resultado, em primeiro lugar, da minha saída de Itália. Na Suíça, na Bélgica e na Holanda, onde sucessivamente me detive, o aspecto exterior da paisagem e da arquitectura sensibilizaram-me menos do que havia sido o caso sobretudo no Sul da Itália. Forçado pelas circunstâncias, tive de me afastar da reprodução mais ou menos directa e exacta do ambiente à minha volta. Esta circunstância estimulou, sem dúvida em grande medida, a criação de imagens interiores.

Uma só vez ainda, se sobrepôs o meu interesse pelo ofício. Aconteceu quando, em 1946, tive pela primeira vez contacto com a antiga e respeitável técnica da raspagem. A gravura à maneira negra («mezzotinto»), cujos tons aveludados de cinzento-escuro e preto agradaram-me de tal maneira que dediquei muito tempo à assimilação deste processo de gravura em encavo sobre cobre, hoje praticamente fora de uso. Mas em breve percebi que a minha paciência era com isso posta face a dura prova. Até hoje, no conjunto, produzi só sete gravuras à maneira negra, a última em 1951.

Nunca utilizei um outro processo de gravura em encavo. Desde o primeiro momento da minha autonomia, pus muito conscientemente de lado a água-forte e a calcografia. A razão para isso está, provavelmente, no facto de preferir contornar uma figura mais com contraste de cores do que com linhas de contorno. A linha preta fina sobre uma base branca, que marca a água-forte e a calcografia, só tinha interesse para mim como parte de uma área sombreada.

Aquele que se maravilha com a minha obra, tem ele mesmo a consciência da maravilha.

Embora não tenha qualquer formação e conhecimento das ciências exactas, sinto-me frequentemente mais ligado aos matemáticos do que aos meus próprios colegas de profissão.

A.2. EXPLORAÇÃO DO PLANO

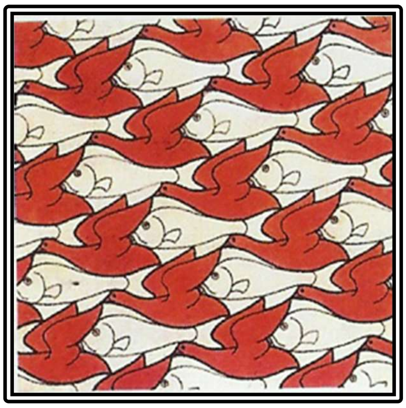
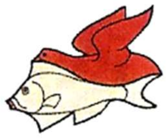
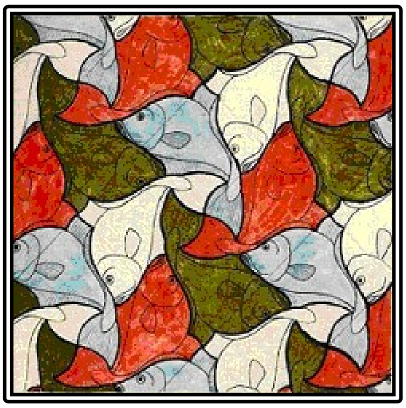
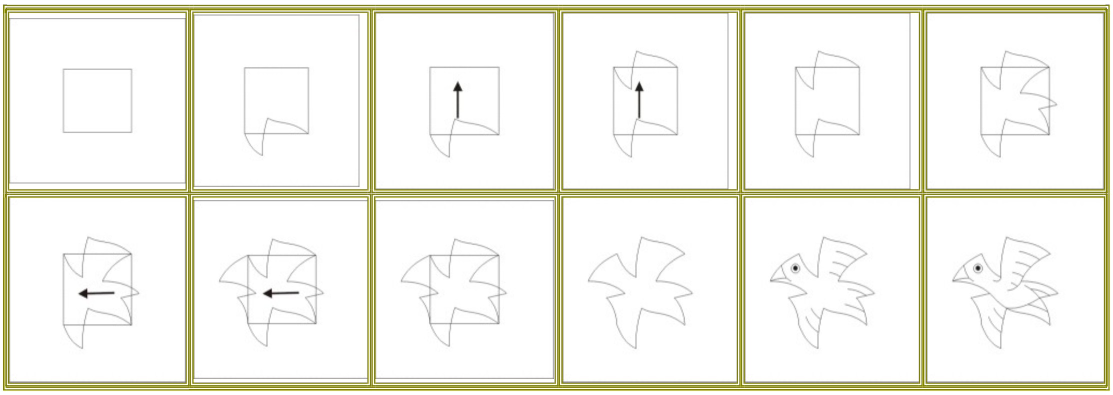
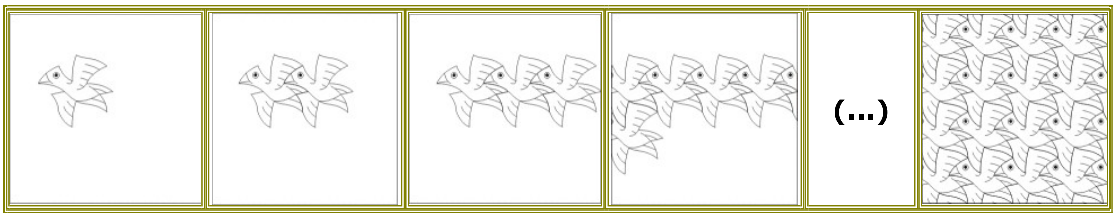
Pavimentação	Região Fundamental	Isometrias
		Translação
		Rotação Translação (cor)
		Rotação Simetria Translação
		Translação Reflexão Deslizante

FIGURA A.1 – Pavimentações / Região Fundamental / Isometrias (Exemplos)

Construção da Região Fundamental (usando a Translação)



Pavimentação do Plano (usando a Translação)



Pavimentação Final

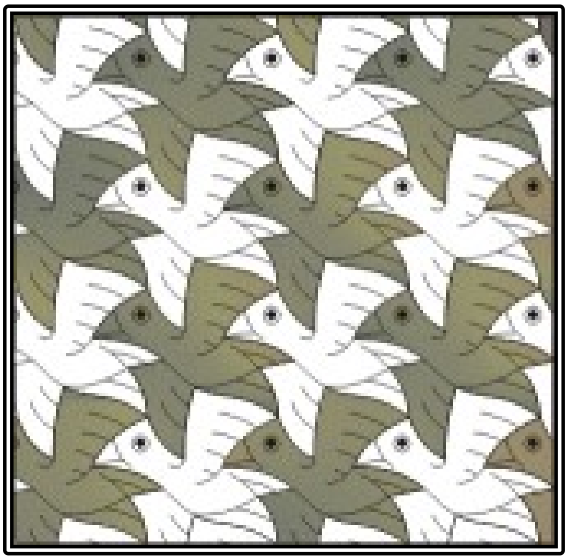
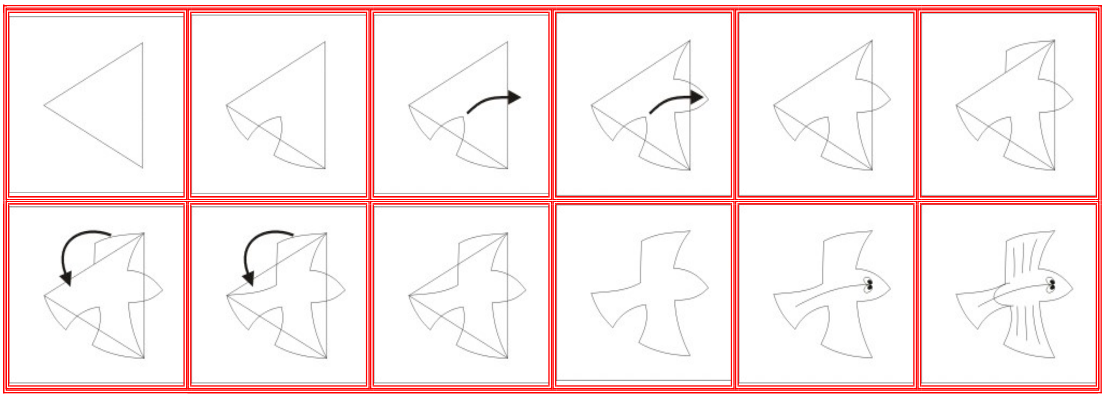
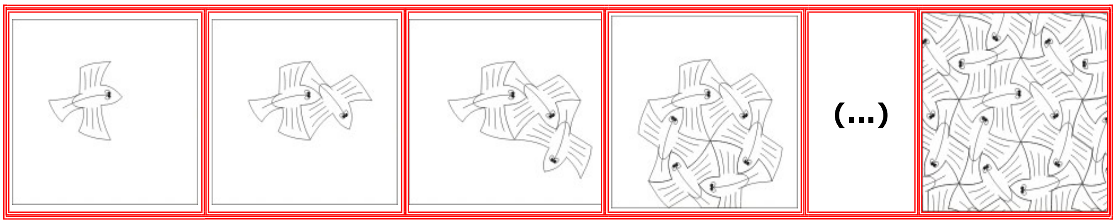


FIGURA A.2 - Construção da região fundamental e pavimentação do plano usando a Translação

Construção da Região Fundamental (usando a Rotação)



Pavimentação do Plano (usando a Rotação)



Pavimentação Final

FIGURA A.3 - Construção da região fundamental e pavimentação do plano usando a Rotação

FIGURA A.4 – Outros exemplos de Pavimentações – Aguarelas

ANEXO B – DADOS RELATIVOS À POPULAÇÃO EM ESTUDO

GRÁFICO B.1 – Distribuição dos alunos por anos/ciclos antes da criação dos CEF

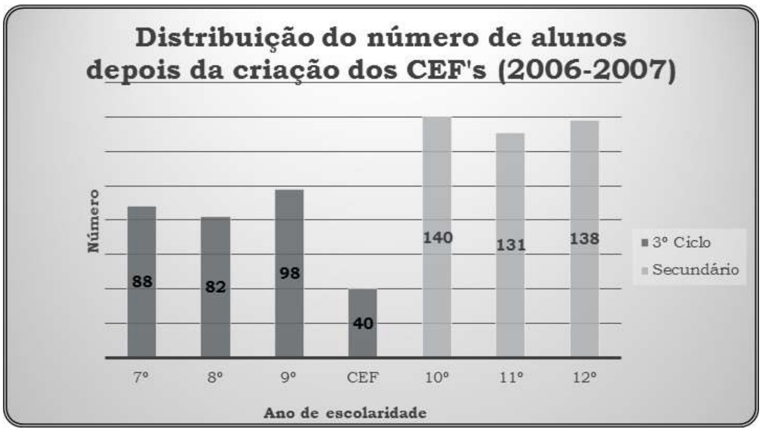


GRÁFICO B.2 – Distribuição dos alunos por anos/ciclos depois da criação dos CEF

ANEXO C

C.1. PLANIFICAÇÃO DO MÓDULO 10 – DO PLANO AO ESPAÇO[67]

ESCOLA SECUNDÁRIA/3 JOSÉ CARDOSO PIRES

Matemática Aplicada – Planificação de Módulo

MÓDULO 10 – DO PLANO AO ESPAÇO

CEF – APA

- **Aulas Previstas: 50**

- **CONSIDERAÇÕES INICIAIS**

O objectivo deste módulo é proporcionar aos formandos momentos que permitam o desenvolvimento do raciocínio geométrico e a capacidade de visualização, em particular no que respeita às transformações geométricas e às suas propriedades.

Os formandos já tiveram contacto com um ensino da Geometria que lhes desenvolveu a intuição geométrica e o raciocínio espacial, para além de os ter ajudado a explorar, conjecturar, raciocinar logicamente. Neste módulo procurar-se-á abordar as noções de ampliação, redução e isometria. Inicialmente, tal abordagem será meramente intuitiva com a análise e construção de figuras geométrica para posterior aplicação das noções matemáticas estudadas na resolução de problemas envolvendo comprimentos, áreas e volumes de construções semelhantes.

Finalmente, serão abordadas as posições relativas de rectas no plano e de rectas e planos no espaço. Não sendo um curso relacionado com a vertente artística, embora exista um espaço para desenvolvimento da criatividade e exploração artística, a ênfase será dada à identificação e aplicabilidade das noções matemáticas envolvidas em contextos de interesse para os formandos.

- **COMPETÊNCIAS VISADAS**

Neste módulo de Geometria, "Do Plano ao Espaço", as competências matemáticas visadas incluem os seguintes aspectos:

- a aptidão para visualizar e descrever propriedades e relações geométricas, através da análise e comparação, para fazer conjectura e justificar os seus raciocínios;
- a sensibilidade para apreciar a geometria no mundo real e o reconhecimento e utilização de ideias geométricas em diversas situações e na comunicação;
- a aptidão para identificar e utilizar as transformações geométricas;

[67] Elaborada de acordo com as orientações do documento da DGFV (2005)

- a tendência para procurar propriedades comuns em figuras geométricas e para utilizar modelos geométricos na resolução de problemas reais;
- a aptidão para resolver problemas através de construções, nomeadamente envolvendo lugares geométricos, semelhança de figuras, assim como para justificar os processos utilizados;
- a aptidão para formular argumentos válidos recorrendo à visualização e ao raciocínio geométrico, explicitando-os em linguagem corrente;
- a aptidão para reconhecer e analisar propriedades de figuras geométricas e de sólidos.

OBJECTIVOS

Tendo em conta a especificidade da área profissional, foram feitas adaptações ao módulo em questão, procurando ir ao encontro do interesse dos alunos, sendo os objectivos de aprendizagem, que se pretende que os formandos atinjam, os a seguir apresentados.

- Identificar o uso de transformações geométricas, bem como as vantagens e importância do uso das mesmas.
- Identificar características invariantes nas figuras obtidas por uma transformação geométrica.
- Reconhecer e identificar figuras semelhantes como figuras com a mesma forma.
- Ampliar e reduzir figuras usando o 'Método da Quadrícula'.
- Usar as noções de escala e razão de semelhança na identificação e construção de figuras semelhantes.
- Identificar diferentes isometrias em decorações figurativas.
- Identificar e comparar propriedades das isometrias estudadas:
    - Rotação;
    - Translação;
    - Reflexão ou Simetria.
- Mobilizar o uso dos conceitos matemático para aplicação em actividades práticas: construção de figuras e decorações figurativas, utilizando instrumentos de medição e desenho
- Reconhecer e construir polígonos semelhantes, dada a razão de semelhança.
- Identificar e reconhecer e deduzir propriedades entre polígonos semelhantes.
- Relacionar comprimentos, áreas e volumes de figuras/construções semelhantes.
- Mobilizar o uso dos conceitos matemático para resolver problemas, em contextos reais, que envolvam comprimentos, áreas ou volumes de elementos geométricos semelhantes e aplicar esses conceitos para simplificar o trabalho na resolução de problemas e/ou actividades de investigação;
- Comunicar, oralmente e por escrito, aspectos dos processos de trabalho e crítica dos resultados;
- Identificar a posição relativa entre rectas e planos.

CONTEÚDOS

- Figuras Semelhantes: ampliação e redução de figuras
- Noções de escala e razão de semelhança.
- Isometrias: Rotação, Translação e Reflexão ou Simetria.

- Polígonos semelhantes: propriedades
- Propriedades entre construções semelhantes: relações entre comprimentos, áreas e volumes.
- Posições relativas entre rectas e planos

METODOLOGIA DE AVALIAÇÃO

- Observação do trabalho realizado nas aulas
- Trabalho individual/a pares
- Actividades práticas/de Investigação
- Prova de Avaliação: prática/oral e escrita
- Projeto Interdisciplinar – “A Arte de Escher e a Matemática”

MATERIAIS

- Fichas Informativas/de trabalho
- Decorações figurativas
- Material de projecção
- Material de desenho
- Material técnico da CFT

ESTRATÉGIAS E METODOLOGIA

- Aplicação da Matemática a situações da vida real
- Resolução de exercícios e problemas em contextos variados
- Realização de trabalho a pares e individual
- Resolução de fichas de trabalho
- Utilização de decorações figurativas e materiais de desenho diversos
- Criação de decorações figurativas/pavimentações: Projeto Interdisciplinar – “A Arte de Escher e a Matemática”

DESCRIÇÃO:

O ensino da Geometria reveste-se da maior importância devendo desenvolver no estudante intuição geométrica e raciocínio espacial assim como capacidades para explorar, conjecturar, raciocinar logicamente, formular e resolver problemas abstractos ou numa perspectiva de modelação matemática valorizando a capacidade de organização e de comunicação quer oral quer escrita. Procurar-se-á utilizar uma linguagem matemática rigorosa e, tanto quanto possível, usar as notações matemáticas adequadas na apresentação/explicação das estratégias seguidas na resolução de problemas.

Tanto em geometria plana como em geometria do espaço a prática de manipulação e observação de figuras e modelos tem um papel central e decisivo no ensino das noções matemáticas envolvidas, daí a ênfase inicial dada à exploração intuitiva dessas noções. Como tal procurar-se-á que os formandos manipulem, observem, comparem, descubram e construam.

O recurso às conexões entre a Arte e a Matemática existentes na obra de Escher, será uma constante ao longo da lecionação deste módulo, não só numa perspetiva de abordagem aos novos conteúdos, como a sua aplicação na criação artística (Pavimentação), (re)criando a obra de Escher.

C.2. Materiais Relativos ao Módulo 14 – "Geometria do Círculo"

ESCOLA SECUNDÁRIA/3 JOSÉ CARDOSO PIRES

Matemática	**Módulo 14:** Geometria do Círculo
Nome: ______________________ N.º: ______ Turma: ______	Ficha de Trabalho 1

"Pequena viagem ao mundo da Circunferência"

Material necessário:

- ✓ "Guião da visita"
- ✓ Lápis ou canetas de várias cores
- ✓ Régua
- ✓ Compasso

Guião:

Noções Gerais

- **Circunferência:** é o lugar geométrico dos pontos do plano equidistantes (situados a igual distância) de um dado ponto, o centro.
- **Raio:** é o segmento de recta que tem como extremos o centro da circunferência e um qualquer ponto que pertença à mesma, isto é, une o centro a qualquer ponto da circunferência.
- **Círculo:** é o lugar geométrico dos pontos do plano cuja distância ao centro da circunferência é menor ou igual ao comprimento do raio.

1.

a) Desenha uma circunferência com centro no ponto C e comprimento do raio igual a $2\ cm$.

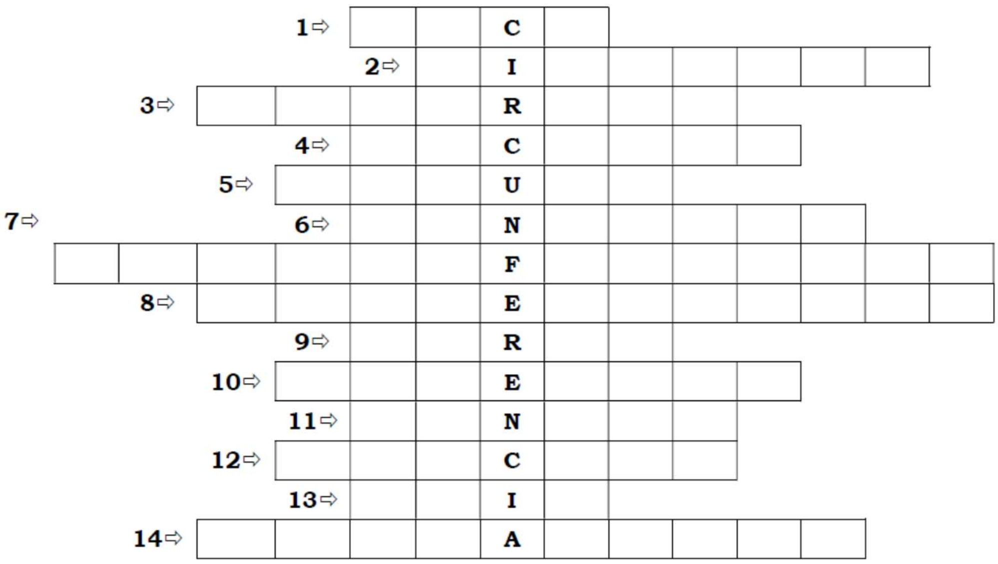
b) Desenha um círculo com centro no ponto C e comprimento do raio igual a $1{,}5\ cm$.

2. Desenha, ao lado, uma circunferência com centro no ponto O e comprimento do raio igual a $3\,cm$.
Usando cores diferentes traça:

- ✓ um diâmetro da circunferência; (azul)
- ✓ uma corda $[CD]$; (verde)
- ✓ o ângulo ao centro COD; (vermelho)
- ✓ o ângulo inscrito ECF; (amarelo)
- ✓ um arco EF; (preto)

Circunferência 1

3. Completa o crucigrama seguinte com as palavras cuja ideia geral da definição te é dada na discrição identificada nos números de 1 a 14 e **analisa, de forma crítica**, cada uma das "definições", identificando possíveis falhas, registando no teu caderno as definições corretas.

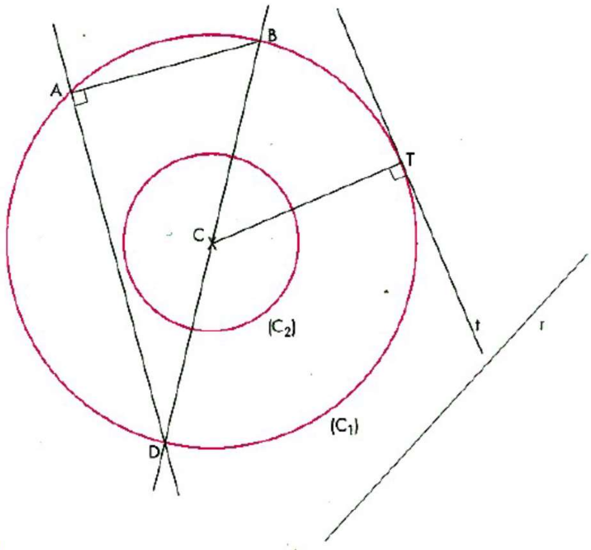


1. Porção de circunferência compreendida entre dois pontos;
2. Recta que passa pelo centro da circunferência;
3. Polígono com todos os cantos pertencentes à circunferência; (polígono ____________________)
4. Recta que tem dois pontos comuns com a circunferência;
5. Porção do plano definida por duas semi-rectas com a mesma origem;
6. Recta que tem um único ponto comum com a circunferência;
7. Conjunto de pontos do plano equidistantes de um ponto fixo;
8. Circunferências com o mesmo centro; (circunferências ____________________)
9. Recta definida por dois quaisquer pontos da circunferência;
10. Recta que não tem nenhum ponto comum com a circunferência;
11. Ponto equidistante de todos os pontos do círculo;
12. Conjunto de pontos que pertencem ao interior da circunferência;
13. Semi-recta definida pelo centro da circunferência e por um qualquer dos seus pontos;
14. Triângulo com um ângulo recto. (triângulo ____________________)

Circunferência 2

4. Procura reconhecer, na seguinte construção geométrica, os elementos referidos no exercício anterior (da enunciado 1 ao enunciado 14) e identifica-os usando as respectivas letras.

Nota: atenção às notações que usas para identificar cada um dos elementos geométricos. Caso tenhas dúvidas consulta a tabela a seguir representada.



Notações e Simbologia

		Notação
Ponto (um ponto é representa-se por uma letra maiúscula)		A
Recta	(uma recta representa-se por uma letra minúscula)	r
	Recta que passa pelos pontos A e B	AB
Semi-recta com origem em A e que passa por B		$\dot{A}B$
Segmento de recta de extremos A e B		$[AB]$
Comprimento do Segmento de recta de extremos A e B		$\overline{AB}$
Ângulo de vértice em B e de lados $\dot{B}A$ e $\dot{B}C$		$\angle ABC$
Amplitude do ângulo de vértice em B e de lados $\dot{B}A$ e $\dot{B}C$		$A\hat{B}C$
Arco menor compreendido entre os pontos A e B		$arco\ AB$
Amplitude do arco menor compreendido entre os pontos A e B		$\widehat{AB}$

Desafio:

Supõe que te é apresentada uma circunferência, cujo centro desconheces. Usando apenas uma régua e um compasso, como podes encontrar o centro da circunferência?

(**Sugestão:** Traça, na circunferência, duas cordas não paralelas e pensa na mediatriz de cada uma das cordas)

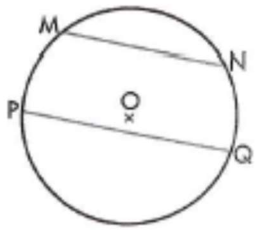
Circunferência 3

FIGURA C.1 –Ficha de Trabalho 1 – Módulo 14

ESCOLA SECUNDÁRIA/3 JOSÉ CARDOSO PIRES

Matemática	**Módulo 14:** Geometria do Círculo
Nome: ____________________ N.º: ____ Turma: ___	Actividade de Investigação

TAREFA I:



1. Traça no teu caderno, uma circunferência de centro no ponto *O* e raio com comprimento $4\,cm$. Marca duas cordas paralelas $[MN]$ e $[PQ]$, como sugere a figura.

2. Traça o eixo de simetria que transforma *M* em *N* e verifica se este é também o eixo de simetria que transforma *P* em *Q*.

3. O eixo de simetria traçado na questão anterior é eixo de simetria da circunferência? Porquê?

4. Designa por *T* um dos pontos de intersecção do eixo de simetria com a circunferência. Qual a relação entre os arcos *MT* e *NT*? Justifica a tua resposta.

5. Geometricamente, qual a relação que julgas existir entre os arcos *MP* e *NQ*? Porquê?

6. Traça as cordas $[MP]$ e $[NQ]$. Diz, justificando, qual a relação que existe entre elas?

7. Traça uma recta tangente à circunferência no ponto *T*. Qual te parece ser a posição relativa entre a recta que acabaste de traçar e o eixo de simetria?

TAREFA II:

Tenta formular conjeturas relativas a algumas das propriedades e relações existentes entre a circunferência e outros elementos geométricos a ela associados, tendo em conta respostas que deste a algumas das questões anteriores!

SUGESTÕES:

I. Qualquer recta que passa pelo centro da circunferência __________________

____ .

II. Qualquer recta perpendicular a uma corda e que passa pelo centro da circunferência ____

____ .

III. Cordas de uma circunferência compreendidas entre rectas paralelas ________

____ .

IV. Arcos de uma circunferência compreendidos entre rectas paralelas _________

____ .

V. Arcos de uma circunferência compreendidos entre cordas geometricamente iguais ____.

VI. Qualquer recta tangente a uma circunferência ______________________

____ .

Bom Trabalho!! ☺

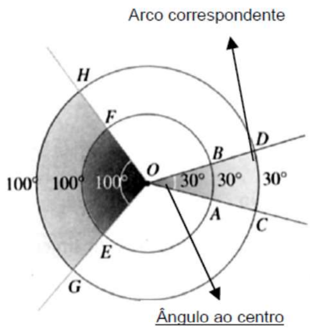
FIGURA C.2 – Atividade de Investigação – Módulo 14

ESCOLA SECUNDÁRIA/3 JOSÉ CARDOSO PIRES

Matemática	**Módulo 14:** Geometria do Círculo
Nome: ______________ N.º: ______ Turma: ______	Ficha Informativa/de Trabalho 2

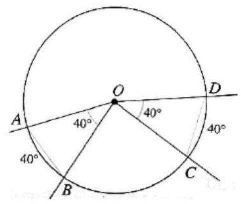
Depois de teres visto alguns elementos geométricos directamente associados à circunferência, será importante observar algumas propriedades existentes entre eles.

1 – Ângulos ao centro e arcos correspondentes



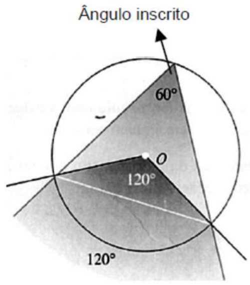
Propriedade 1.1: A amplitude de um ângulo ao centro é igual à amplitude do arco compreendido entre os seus lados.

Nota: Dois ângulos com a mesma amplitude são geometricamente iguais.
O mesmo não acontece com dois arcos com a mesma amplitude. Para que estes sejam geometricamente iguais, deverão ser arcos da mesma circunferência ou de circunferências geometricamente iguais.



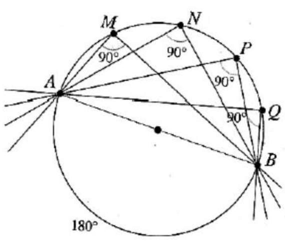
Propriedade 1.2: A ângulos ao centro com a mesma amplitude correspondem cordas e arcos geometricamente iguais e vice-versa.

2 - Ângulo inscrito num arco de circunferência



Propriedade 2.1: A amplitude de um ângulo inscrito numa circunferência é metade da amplitude do arco compreendido entre os seus lados

Nota: Tendo em conta a **Propriedade 1.1**, a propriedade anterior pode ser enunciada como "A amplitude de um ângulo inscrito numa circunferência é metade da amplitude do ângulo ao centro correspondente.".

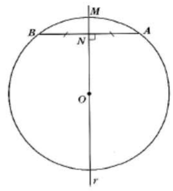


Propriedade 2.2: Ângulos inscritos numa circunferência, que contêm o mesmo arco, são geometricamente iguais.

Propriedade 2.3: Um ângulo inscrito numa semicircunferência é um ângulo recto.

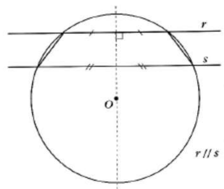
3 – Simetrias na circunferência. Tangente a uma circunferência.

Propriedade 3.1: Qualquer recta que passa pelo centro da circunferência é um eixo de simetria da circunferência.



Propriedade 3.2: A mediatriz de uma qualquer corda da circunferência, passa pelo centro da circunferência, e como tal é, também, eixo de simetria da circunferência.

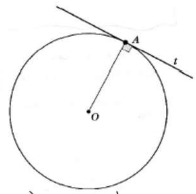
Propriedade 3.3: Qualquer recta perpendicular a uma corda e que passa pelo centro da circunferência, divide ao meio essa corda e o arco correspondente.



Propriedade 3.4: Cordas de uma circunferência compreendidas entre rectas paralelas são geometricamente iguais.

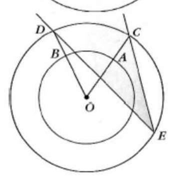
Propriedade 3.5: Arcos de uma circunferência compreendidos entre rectas paralelas são geometricamente iguais.

Propriedade 3.6: Arcos de uma circunferência compreendidos entre cordas geometricamente iguais têm a mesma amplitude.



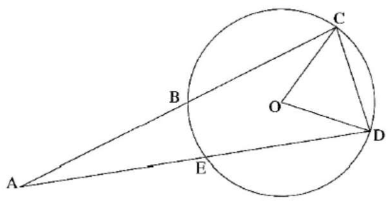
Propriedade 3.7: Qualquer recta tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio no ponto de tangência.

Exercícios



1. Considera a construção ao lado, onde O é o centro da circunferência representada. Sabendo que a amplitude do arco AB é 60°, indica, justificando, a amplitude do arco CD e $D\hat{E}C$.

2. Considera a construção seguinte, onde O é o centro da circunferência representada. Sabe-se que a amplitude do arco CD é 72°, a amplitude do arco BE é metade da amplitude do arco CD e que os arcos BC e ED têm a mesma amplitude.



2.1. Justifica que:

a) o triângulo $[COD]$ é isósceles.

b) $\overline{BC} = \overline{ED}$.

2.2. Diz, justificando, qual a amplitude de cada um dos seguintes ângulos:

a) $\angle COD$ **b)** $\angle BCD$ **c)** $\angle CAD$ **d)** $\angle ODC$

2.3. Admitindo que $\overline{OC} = 3\ cm$, justificando devidamente o teu raciocínio:

a) determina, com uma aproximação às centésimas, o comprimento do arco CD.

b) determina o valor aproximado, **a menos de 0,1**, da área do sector circular definido pelo ângulo COD.

FIGURA C.3 – Ficha Informativa/de Trabalho 2 – Módulo 14

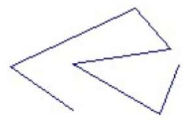
ESCOLA SECUNDÁRIA/3 JOSÉ CARDOSO PIRES

Matemática	**Módulo 14:** Geometria do Círculo
Nome: ______________________ N.º: _______ Turma: _______	Ficha Informativa/de Trabalho 5

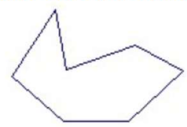
Polígonos: Noções Gerais (requisitos)

Uma **LINHA POLIGONAL** é formada por segmentos de recta consecutivos (não alinhados).

LINHA POLIGONAL ABERTA

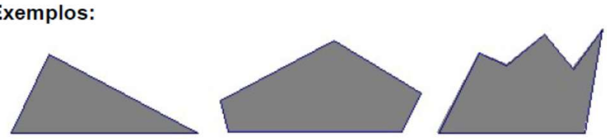


LINHA POLIGONAL FECHADA

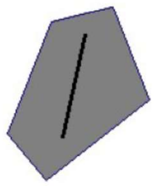


POLÍGONO é uma superfície plana limitada por uma linha poligonal fechada.

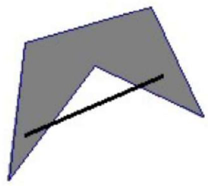
Exemplos:



POLÍGONO CONVEXO – Se unires dois quaisquer dos seus pontos, o segmento de recta obtido está sempre contido no polígono.



POLÍGONO CÔNCAVO – Existem sempre, pelo menos, dois pontos que unidos formam um segmento de recta que não está contido no polígono.

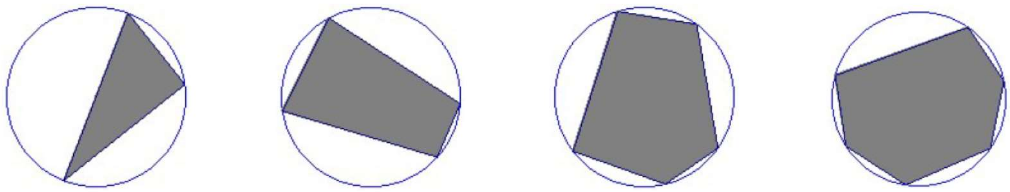


NOTA: Daqui para a frente, sempre que falarmos em polígonos estaremos a referir-nos a polígonos convexos.

POLÍGONO REGULAR é um polígono cujos lados têm igual comprimento e os ângulos internos igual amplitude.

POLÍGONOS INSCRITOS NUMA CIRCUNFERÊNCIA

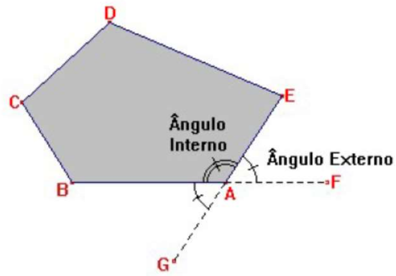
Um polígono está inscrito numa circunferência se todos os seus vértices pertencem à circunferência.



NOTAS:

- Se um polígono está **inscritos** numa circunferência, então a circunferência dizem-se **circunscrita** ao polígono.
- Qualquer triângulo **pode sempre** inscrever-se numa circunferência cujo centro é o ponto de intersecção das mediatrizes dos lados do triângulo.
- Um polígono regular **pode sempre** inscrever-se numa circunferência.
- **Num quadrilátero inscrito numa circunferência, a soma das amplitudes de dois ângulos opostos é 180º.**
- **O comprimento do lado de um hexágono regular inscrito numa circunferência é igual ao comprimento do raio dessa circunferência.**

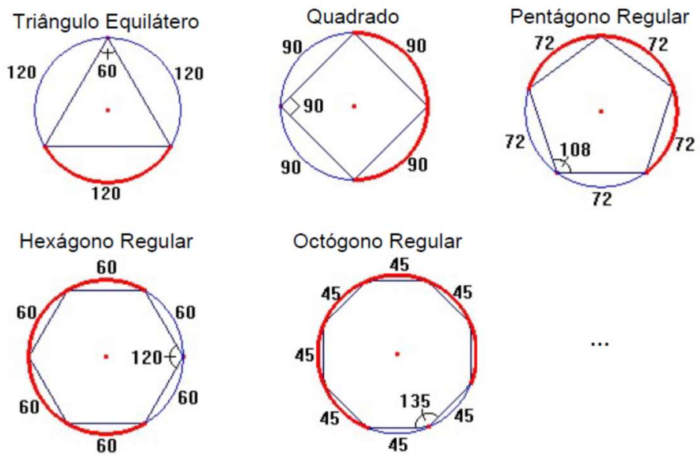
Ângulos Internos e Ângulos Externos de um Polígono



Nota: Cada ângulo externo de um polígono é limitado por um dos lados do polígono e pelo respetivo prolongamento do outro, **não interessando aquele que se prolonga.**

No exemplo da figura ao lado, o $\angle EAF$ e $\angle BAG$ são ângulos externos com vértice **A**.

(Repara-se que $\angle EAF \cong \angle BAG$. Porquê?)



Nota: (Para polígonos regulares)

Num polígono regular com n lados, temos:

1) a amplitude de cada ângulo externo é dada por:

$$a_e = \frac{360^\circ}{n}.$$

2) a amplitude de cada ângulo interno é dada por:

$$a_i = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n}.$$

(Porquê?)

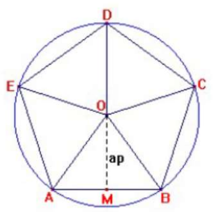
Notas: (Para qualquer polígono convexo, independentemente de ser regular ou não)

- **A soma das amplitudes dos ângulos internos de um polígono convexo com n lados é dada por:**

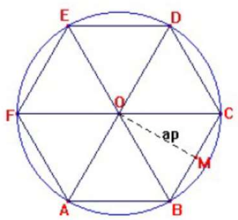
$$S_i = (n-2)\times 180^\circ$$

- **A soma das amplitudes dos ângulos externos de um polígono convexo é sempre 360°.**

Áreas de Polígonos Regulares



$[OM]$ é um apótema do pentágono $[ABCDE]$



$[OM]$ é um apótema do hexágono $[ABCDEF]$.

Chama-se **Apótema de um Polígono Regular** ao segmento de recta que une o centro do polígono (centro da circunferência onde este está inscrito) com o ponto médio de qualquer um dos seus lados.

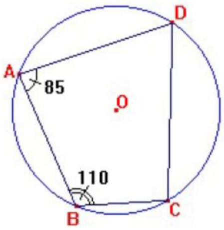
$\boxed{A_{polígono\ regular} = \frac{P}{2}\times ap}$, onde $P = perímetro\ do\ polígono$ e $ap = comprimento\ do\ apótema$.

Polígonos 2

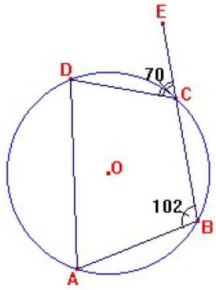
EXERCÍCIOS I

1. Observa cada uma das seguintes figuras. Atendendo aos dados apresentados, calcula, justificando:

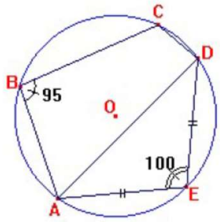
1.1. $A\hat{D}C$ e $B\hat{C}D$;



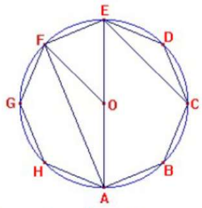
1.2. $A\hat{D}C$, $B\hat{C}D$ e $B\hat{A}D$.



1.3. $E\hat{A}D$ e $C\hat{D}E$;



2. A figura ao lado representa um octógono regular, $[ABCDEFGH]$, inscrito numa circunferência de centro O.



2.1. Calcula a amplitude do $arco\ AB$.

2.2. Calcula $A\hat{B}C$, $A\hat{O}F$, $O\hat{A}F$, $F\hat{O}E$, $A\hat{F}E$ e $A\hat{E}D$

2.3. Classifica, quanto aos lados e quantos aos ângulos, o triângulo $[AOF]$.

2.4. Justifica que o triângulo $[AFE]$ é rectângulo.

2.5. Sabendo que o raio circunferência tem $13\ cm$ de raio e que $\overline{AB} = 10\ cm$, calcula a área do octógono.

3. Considera um polígono com 9 lados.

3.1. Qual a soma das amplitudes dos seus ângulos internos? E dos externos?

3.2. Se o polígono for regular, qual a amplitude de cada ângulo interno? E cada ângulo externo?

4. Sabendo que a soma das amplitudes dos ângulos internos de um polígono é igual a 1620°, quantos lados tem esse polígono?

5. Considere um polígono regular, cuja amplitude de cada ângulo externo é 18°.

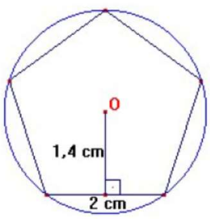
5.1. Quantos lados tem o polígono?

5.2. Qual a amplitude de cada um dos seus ângulos internos?

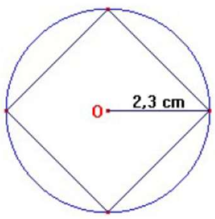
5.3. Qual a soma das amplitudes dos seus ângulos internos?

6. Em cada uma das circunferências, de centro O, está inscrito um polígono regular. Atendendo aos dados enunciados em cada figura, determina a área do respectivo polígono. Caso se justifique, apresenta os resultados com uma aproximação às décimas.

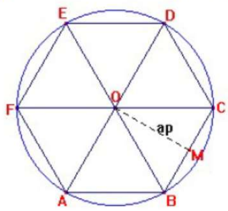
6.1.



6.2.



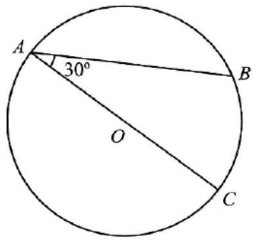
6.3. $\overline{CF} = 6\,cm$



Polígonos 3

Exercícios II (Actividade de Avaliação a pares)

1. Na figura ao lado está representada uma circunferência, de centro O, em que:



- A, B e C são pontos da circunferência;
- $[AC]$ é um diâmetro da circunferência, tal que $\overline{AC} = 4\,cm$;
- $O\hat{A}B = 30^{\circ}$.

a) Diz, justificando, qual a amplitude do arco AB.

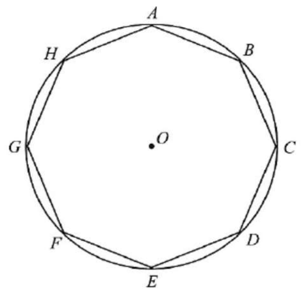
b) Determina, <u>com uma aproximação às décimas</u>, o comprimento do arco BC.

<u>**Nota:**</u> sempre que, em cálculos intermédios, procederes a arredondamentos, <u>conserva duas casas decimais</u>.

c) Justifica que o triângulo $[ABC]$ é rectângulo em B.

d) Considera a recta tangente à circunferência no ponto A e seja D um ponto pertencente a essa recta. Sabendo que o ângulo BAD é agudo, determina a sua amplitude, justificando devidamente o teu raciocínio.

2. Na figura ao lado está representado um octógono regular, $[ABCDEFGHI]$ inscrito numa circunferência de centro O.



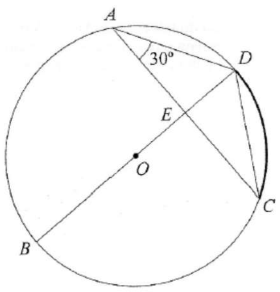
a) Indica a amplitude de cada um dos ângulos internos do octógono.

b) Ao observar a figura, sem efectuar medições, a Ana afirmou:

"O quadrilátero $[BDFH]$ é um quadrado."

Procura explicar a(s) razão(ões) que poderá(ão) ter levado a Ana a tirar tal conclusão.

3. Na figura esta representada uma circunferência, de centro O, em que:



- A, B, C e D são pontos da circunferência;
- $[BD]$ é um diâmetro da circunferência, tal que $\overline{OD} = 3\,cm$;
- E é o ponto de intersecção das rectas BD e AC;
- BD é a mediatriz de $[AC]$;
- $C\hat{A}D = 30^{\circ}$.

a) Diz, justificando, qual a amplitude do arco CD.

b) Justifica que $\overline{AE} = \overline{EC}$ e que os arcos AD e CD têm a mesma amplitude.

c) Determina o valor aproximado, **a menos de 0,1**, da área do sector circular (menor) delimitado pelos segmentos de recta AO e OC.

d) Sabe-se que $[AD]$ é um dos lados de um polígono regular inscrito na circunferência. Identifica o polígono regular em questão e determina, <u>com uma aproximação às centésimas</u>, a área desse polígono?

<u>**Nota:**</u> sempre que, em cálculos intermédios, procederes a arredondamentos, <u>conserva duas casas decimais</u>.

FIGURA C.4 – Ficha Informativa/de Trabalho 5 – Módulo 14

C.3. Materiais Relativos ao Módulo 10 – "Do Plano ao Espaço"

ESCOLA SECUNDÁRIA/3 JOSÉ CARDOSO PIRES

Matemática	**Módulo 10:** Geometria
Nome: ______________________ N.º: _______ Turma: _______	Ficha Informativa/de Trabalho 3

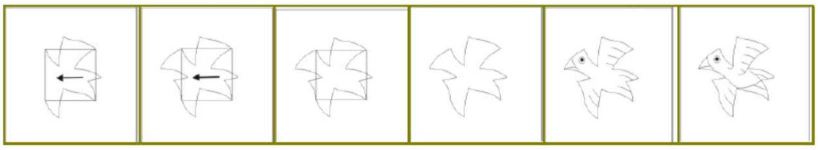
Ao longo dos tempos tem sido uma constante a utilização de figuras geométricas na arte e decoração. Poderemos destacar, entre outras, decorações em que a utilização repetida de construções é a base de um efeito visual, por vezes, extraordinário. Nessa construção, recorre-se frequentemente a determinados conceitos matemáticos. É deles que iremos falar!

Nas próximas aulas iremos estudar **ISOMETRIAS**, que são transformações geométricas que consistem na transformação de uma figura noutra geometricamente igual.

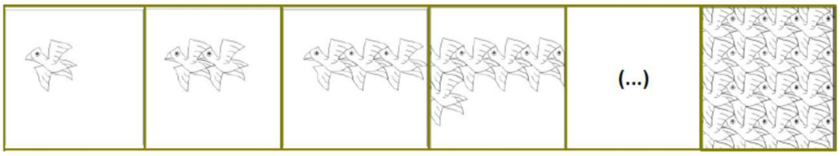
As Isometrias na Obra de M.C. Escher

Translação

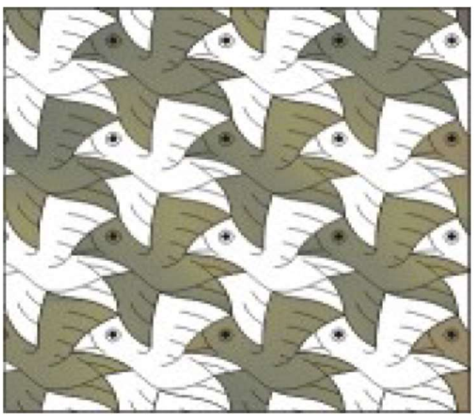
Construção da região fundamental:



Construção da Pavimentação:

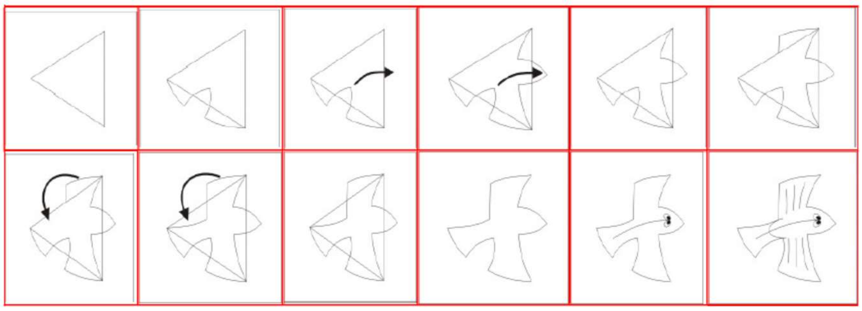


Pavimentação final:

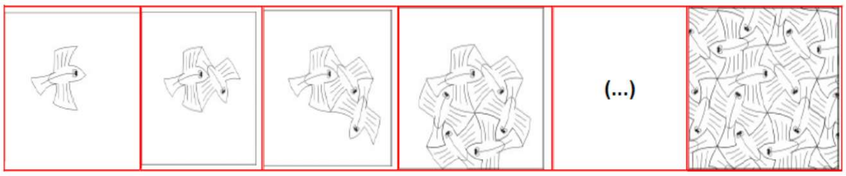


ROTAÇÃO

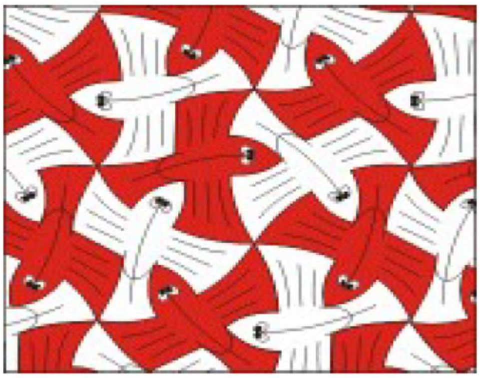
Construção da região fundamental:



Construção da Pavimentação:

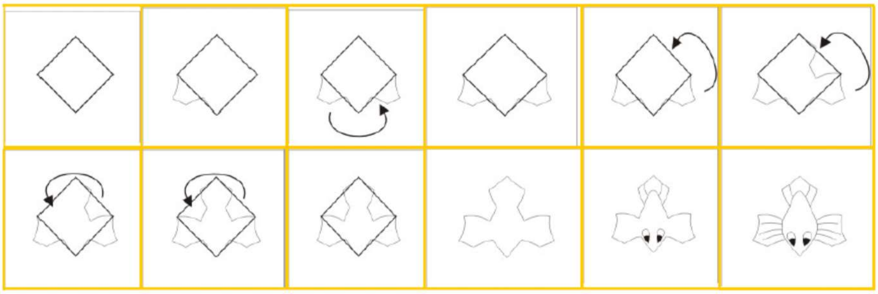


Pavimentação final:

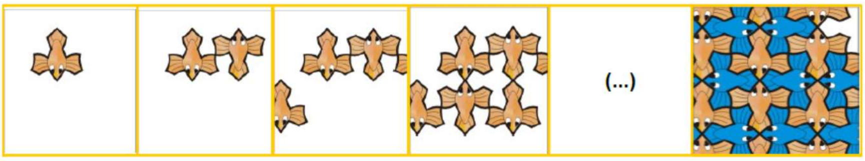


REFLEXÃO OU SIMETRIA

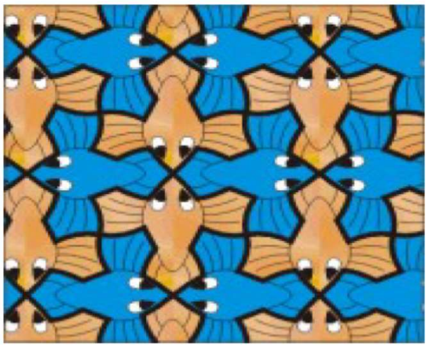
Construção da região fundamental:



Construção da Pavimentação:

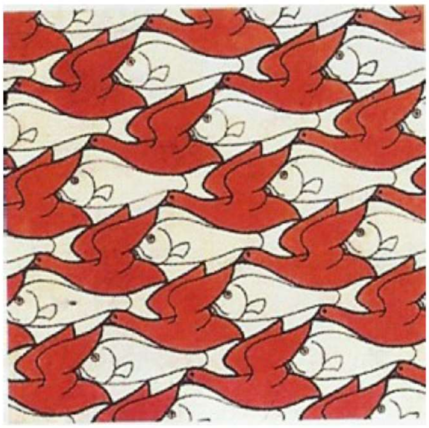


Pavimentação final:

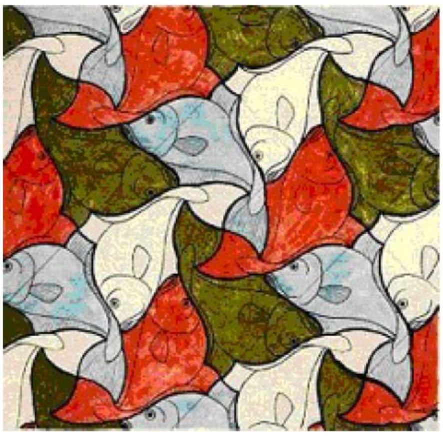


Descobre algumas das isometrias que acabaste de estudar nas pavimentações apresentadas e identifica, em cada caso, os elementos que a caracterizam.

A



B



C

D

Isometrias 3

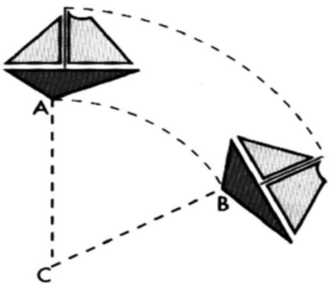
FIGURA C.5 – Ficha Informativa/de Trabalho 3 – Módulo 10

Escola Secundária/3 José Cardoso Pires

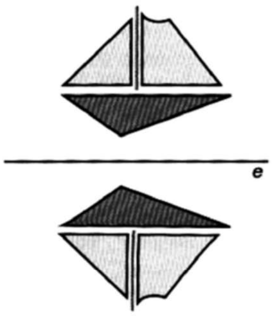
Matemática	**Módulo 10:** Do Plano ao Espaço
Nome: ______________________ N.º: _______ Turma: _______	Ficha Informativa/de Trabalho 4

Isometrias

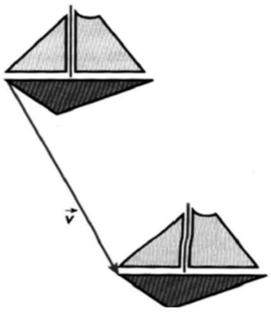
Rotação



Simetria ou Reflexão



Translação

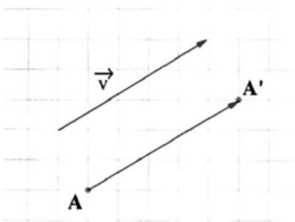


Notas:

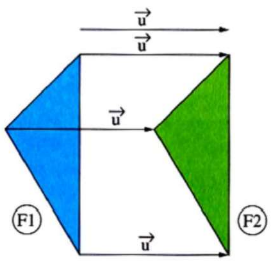
- **Isometria** é uma transformação geométrica que consiste na construção de uma nova figura geometricamente igual à anterior, conservando, assim:
  - os comprimentos dos segmentos de recta;
  - as amplitudes dos ângulos.
- Translações, rotações e simetrias são exemplos de **isometrias**.
- Duas figuras que se correspondem numa isometria, dizem-se **figuras isométricas ou congruentes** (geometricamente iguais).

Translação

A' é imagem de A por meio de uma **translação** associada ao vector $\vec{v}$.



O triângulo $F2$ é imagem do triângulo $F1$ por meio de uma **translação** associada ao vector $\vec{u}$.



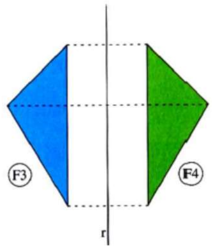
Nota: Uma translação fica perfeitamente definida conhecido o vector associado à transformação.

$$T_{\vec{v}} \text{ (ou } T_{\overrightarrow{AB}} \text{)}$$

Simetria ou Reflexão

O triângulo $F4$ é imagem do triângulo $F3$ por meio de uma **SIMETRIA** em relação à recta r.

À recta r, chamamos **eixo de simetria**.



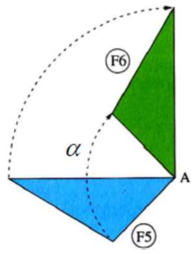
Nota: **Uma simetria fica perfeitamente definida conhecido o eixo de simetria associado à transformação.**

$$S_r \text{ (ou } S_{AB} \text{)}$$

Rotação

O triângulo $F6$ é imagem do triângulo $F5$ por meio de uma **ROTAÇÃO** de centro A e ângulo α.

Ao ponto A chamamos **centro** da rotação.
Ao ângulo α, chamamos o **ângulo** de rotação.

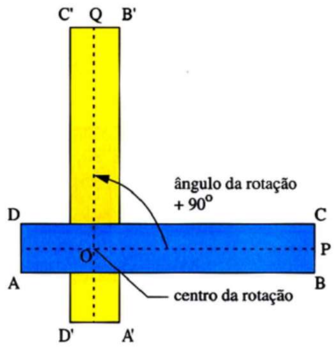


Nota: **Uma rotação fica perfeitamente definida conhecido o centro e o ângulo associado à transformação.**

$$R_{(A,\alpha)}$$

Observa a figura do lado:

- O rectângulo $[ABCD]$ e a sua imagem $[A'B'C'D']$ são **geometricamente iguais.**
- O rectângulo $[A'B'C'D']$ foi obtido rodando o rectângulo $[ABCD]$ no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio. Cada ponto do rectângulo descreveu um arco de circunferência de centro O e amplitude 90^o, no sentido indicado.
- O rectângulo $[A'B'C'D']$ é **imagem** do rectângulo $[ABCD]$ na **ROTAÇÃO de centro** O **e amplitude** 90^o, $R_{(O\,,\,90^o)}$.

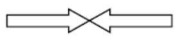


Nota: Por convenção, considera-se **SENTIDO NEGATIVO** o do movimento dos ponteiros do relógio e **SENTIDO POSITIVO** o oposto.

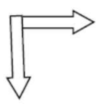
Exercícios

1. Observa cada um dos seguintes pares de figuras e identifica o tipo de isometria usado em cada caso bem como os elementos que a caracterizam, representando-os.

1.1.



1.2.



1.3.

1.4.

____________________ ____________________ ____________________ ____________________

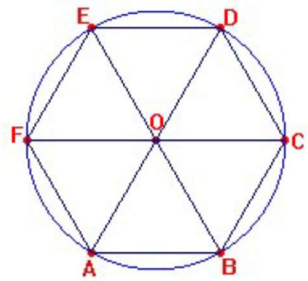
2. Na figura está representado o hexágono regular, $[ABCDEF]$, inscrito na circunferência de centro O.

2.1. Qual a imagem do triângulo $[DEO]$ por meio de uma simetria em relação à recta FC?

2.2. Qual a imagem do triângulo $[AFO]$ por meio de uma translação associada ao vector $\overrightarrow{AB}$?

2.3. Qual a imagem do triângulo $[DEO]$ por meio de uma rotação com centro no ponto O e amplitude 60°?

2.4. Qual a imagem do triângulo $[DEO]$ por meio de uma rotação com centro no ponto O e amplitude -120°?



3. Observa a figura do lado.

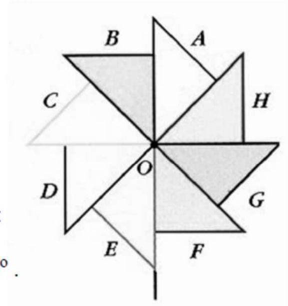
3.1. Define a rotação que transforma:

a) o triângulo A no triângulo E, rodando no sentido positivo;

b) o triângulo A no triângulo G, rodando no sentido negativo.

3.2. Qual é a imagem do triângulo A, numa rotação de centro O e amplitude:

a) 45°. **b)** -180°. **c)** 90°.



4. A roda da sorte representada na figura ao lado está dividida em 20 sectores.

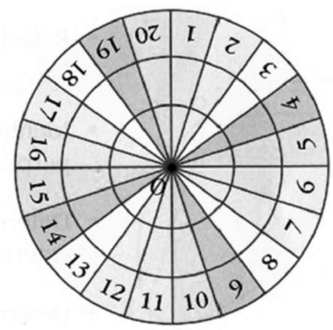
4.1. Qual a amplitude do ângulo ao centro de cada um dos sectores?

4.2. Indica a amplitude da rotação, em torno do ponto O, de modo a que o sector 13 venha a ocupar a posição do sector:

a) 17 (no sentido negativo). **b)** 5 (no sentido positivo).

4.3. Qual a posição que ocupará o sector 20 se, em torno do ponto O, efectuarmos uma rotação de:

a) 36°. **b)** -90°.



5. Na figura estão representadas duas semicircunferências, ambas de centro em O, divididas em 4 partes iguais. Completa:

5.1. $A\hat{O}B = ...$

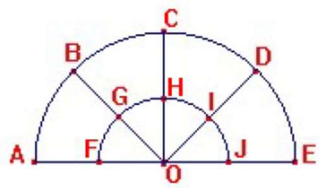
5.2. $\widehat{BE} = ...$

5.3. $R_{(O,\,-45^\circ)}\left([BCHG]\right) = ...$

5.4. $R_{(O,\,-135^\circ)}\left(.........\right) = [JE]$

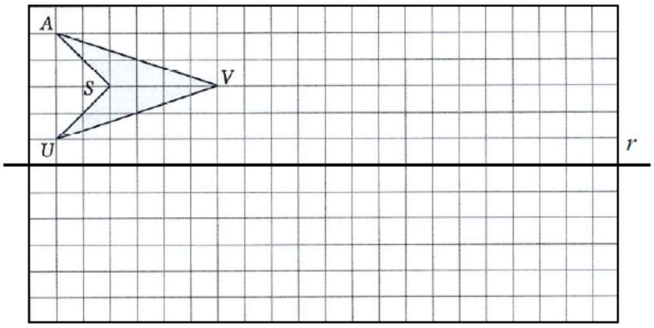
5.5. $S_{OC}\left([AOB]\right) = ...$

5.6. $T_{\overrightarrow{AO}}\left(......\right) = J$

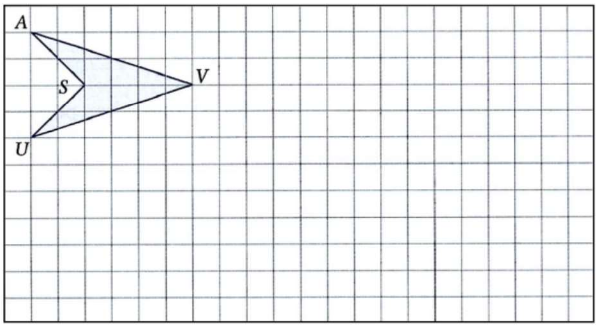


6. Considera o quadrilátero $[UVAS]$ representado na malha quadriculada. Constrói um quadrilátero geometricamente igual, tendo em conta a isometria definida:

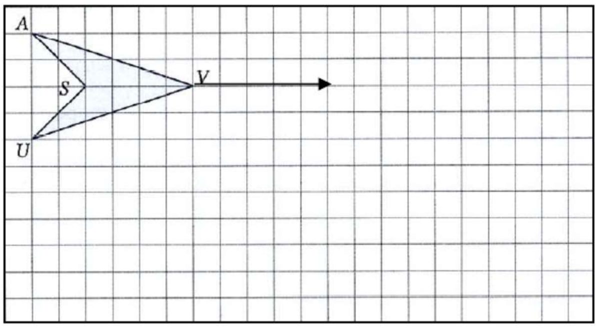
6.1. simetria em relação à recta r.



6.2. rotação de centro em V e amplitude 180°.



6.3. translação segundo o vector representado.



7. Constrói a tua obra de arte...

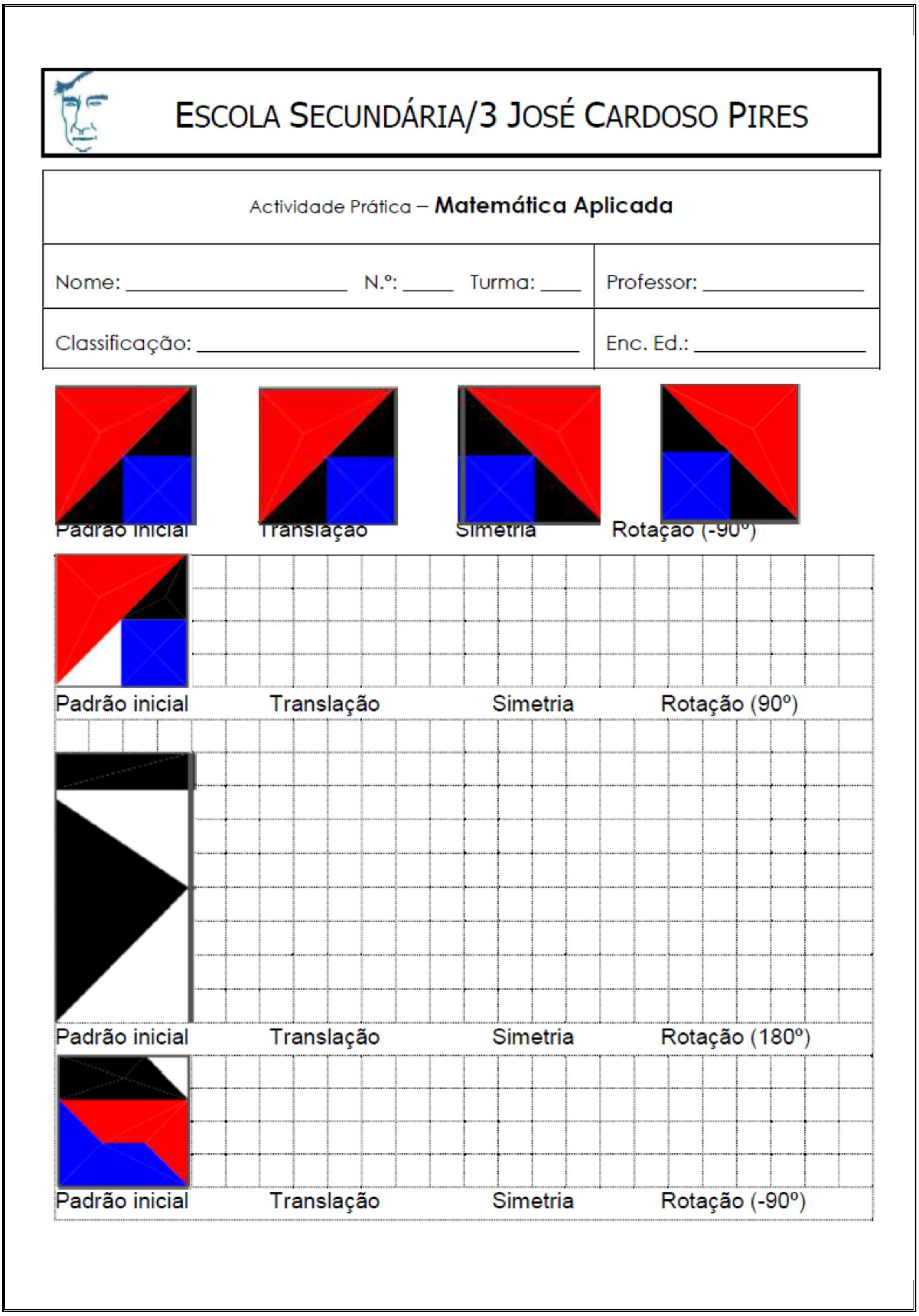
Cria um padrão geométrico a teu gosto e, a partir deste, procura construir uma pavimentação usando, para tal, isometrias à tua escolha. Em seguida faz um pequeno relatório onde descrevas todo o processo de estudo feito (as tentativas realizadas, as dificuldades sentidas, …) e as isometrias usadas (devidamente caracterizadas, de acordo com os elementos geométricos que a definem) na construção da tua pavimentação, o qual irás apresentar aos teus colegas, junto com o trabalho final.

Mostra o que vales, usando toda a tua imaginação, criatividade e talento… Sê tu também um "Escher"!

Bom Trabalho!! ☺

Isometrias 4

FIGURA C.6 – Ficha Informativa/de Trabalho 4 – Módulo 10



ESCOLA SECUNDÁRIA/3 JOSÉ CARDOSO PIRES

Actividade Prática – **Matemática Aplicada**

Nome: ______________ N.º: _____ Turma: ____ Professor: ______________

Classificação: ______________________________ Enc. Ed.: ______________

Padrão inicial Translação Simetria Rotação (-90º)

Padrão inicial Translação Simetria Rotação (90º)

Padrão inicial Translação Simetria Rotação (180º)

Padrão inicial Translação Simetria Rotação (-90º)

FIGURA C.7 – Atividade Prática – Módulo 10

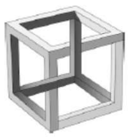
ESCOLA SECUNDÁRIA/3 JOSÉ CARDOSO PIRES

Actividade de Avaliação – **Matemática Aplicada**

Nome:________________________ N.º: ______ Turma: ______	Professor: ____________________
Classificação: __________________________________	Enc. Educação: ________________
Observações: ____	

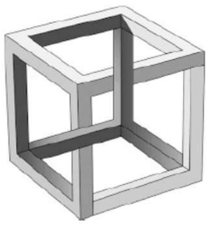
A prova é constituída por itens de escolha múltipla, para os quais deves apenas assinalar a alternativa que consideras estar correcta; de resposta directa, para os quais deves apenas indicar a resposta correcta, não sendo necessário apresentar cálculos nem justificações, e itens de resposta aberta/cálculo, onde deves apresentar o teu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiveres de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

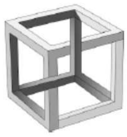
1. Considera as seguintes figuras identificadas pelas letras.

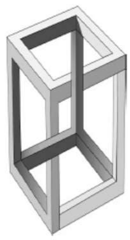
A


B


C


D


E


F


a) Indica, utilizando as respectivas letras, todas as figuras que são semelhantes à figura **A**.

____

b) Completa os espaços em branco usando as palavras "uma redução da", "uma ampliação da" e "geometricamente igual à", de modo a obteres afirmações verdadeiras.

I. A figura **D** é ____________________________________ **E**.

II. A figura **C** é ____________________________________ **A**.

III. A figura **D** é ____________________________________ **A**.

IV. A figura **A** é ____________________________________ **E**.

2. Das seguintes afirmações, identifica a **verdadeira**.

(A) Uma redução para metade corresponde à escala $2:1$.

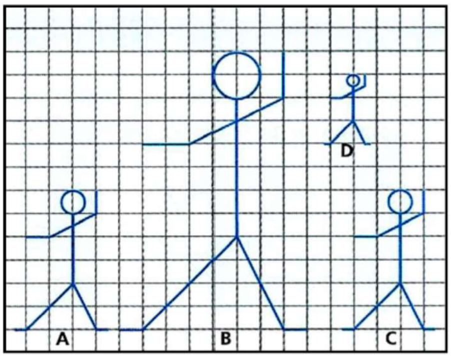
(B) A escala $5:2$ refere-se a uma ampliação e a escala $3:2$ refere-se a uma redução.

(C) Duas figuras geometricamente iguais são semelhantes e a razão de semelhança, r, é igual a 1.

(D) Se uma figura é uma redução da outra, a razão de semelhança entre elas é um número negativo.

Actividade de Avaliação 1

3. Observa as figuras apresentadas no quadriculado ao lado. Atendendo à figura responde a cada uma das questões seguintes.



a) Das seguintes afirmações, identifica a **verdadeira**.

(A) As figuras A, B e D são semelhantes.

(B) A figura A é uma ampliação da figura B.

(C) A figura A é uma redução da figura D.

(D) As figuras A e C são semelhantes, mas não são geometricamente iguais.

b) Completa cada um das seguintes afirmações, de modo a serem verdadeiras.

I. A figura B é uma ampliação da figura A, à escala _______ .

II. A figura D é uma redução da figura A, à escala ________ .

III. A figura _______ é uma ampliação da figura _______ à escala $4:1$.

IV. A razão de semelhança que transforma a figura A na figura C é _______ .

c) Considera a seguinte afirmação:

" As figuras A e C são figuras isométricas, ao passo que as figuras A e B são semelhantes, mas não são isométricas"

Num pequeno texto, comenta a afirmação apresentada.

Deves incluir, obrigatoriamente, no teu texto os seguintes tópicos:

- uma justificação que as figuras A e C são isométricas, identificando o tipo de isometria;
- uma razão que justifique o porque das figuras A e B serem semelhantes, mas não isométricas.

__Nota:__ Caso consideres útil, podes traçar, na figura, elementos que te sejam úteis referir na tua resposta.

4. Das seguintes afirmações, a **verdadeira** é:

(A) Uma ampliação é uma isometria.

(B) Duas figuras que tenham a mesma forma dizem-se isométricas.

(C) Uma translação fica perfeitamente definida conhecendo o eixo de simetria.

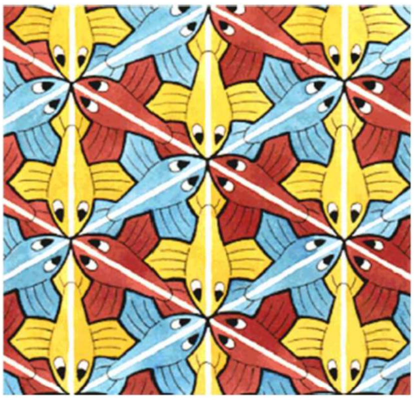
(D) Numa rotação, o sentido positivo é o oposto ao movimento dos ponteiros do relógio.

5. Tendo em conta as isometrias estudadas, procura identificar, se possível, um exemplo de cada delas na pavimentação a seguir apresentada.

Nota: No caso de identificares uma simetria, traça na pavimentação o respectivo eixo de simetria.

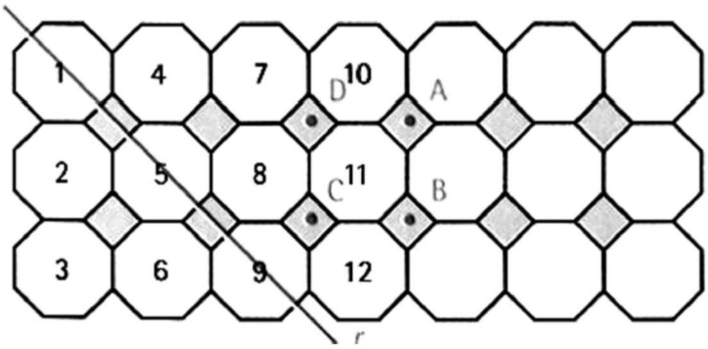
No caso de identificares uma rotação, identifica na pavimentação o centro.

No caso de identificares uma translação, indica o vector que a define.



M. C. Escher

6. Observa a pavimentação.



a) Qual é a imagem do octógono 11 pela translação associada ao vector $\overrightarrow{AB}$? ______________________

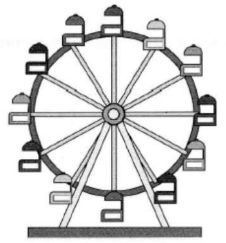
b) Qual é a imagem do octógono 4 por meio da simetria em relação á recta r ? ______________________

c) Define, de forma completa, uma isometria que transforme o octógono 8 no octógono 11. ______________

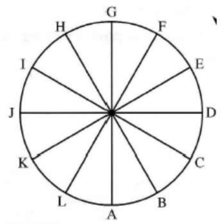
d) **Num pequeno texto**, comenta a seguinte afirmação: "Uma figura pode ser obtida, a partir de outra, por meio de isometrias distintas. Por exemplo, o octógono 6 pode ser transformado no octógono 8 por meio de diferentes isometrias".

7. Na imagem seguinte está representada uma roda gigante de parque de diversões, bem como um esquema da mesma que identifica, com uma letra, cada uma das 12 cadeiras igualmente espaçadas.

Roda Gigante



Esquema



a) Justifica que o ângulo que separa duas cadeiras consecutivas tem 30° de amplitude.

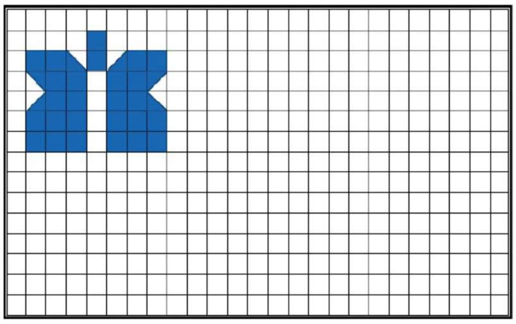
b) Indica o ângulo da rotação, no sentido positivo, que faz passar a cadeira identificada com a letra A para a cadeira identificada com a letra J. ________________________

c) Sabendo que a Rita se sentou na cadeira identificada com a letra A, indica a cadeira que a Rita ocupará depois da roda girar -120° (ângulo negativo). ________________________

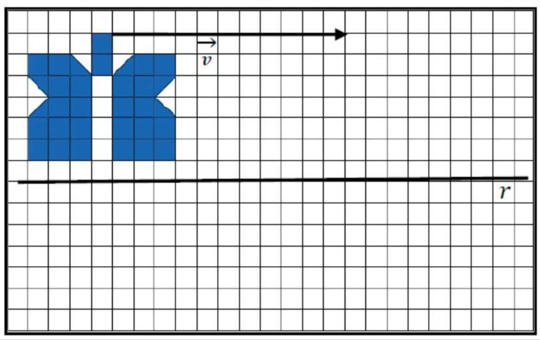
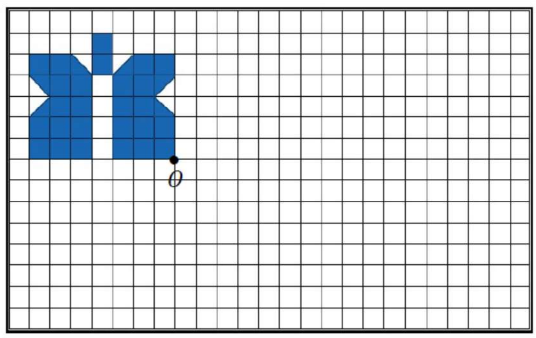
8. <u>Construções Geométricas</u>

<u>Nota:</u> Em cada um dos itens seguintes, será valorizado o rigor e o cuidado na construção de cada uma das figuras.

(A) Constrói, na malha quadriculada ao lado, uma figura semelhante à apresentada com razão de semelhança 2.



(B) Constrói, em cada uma das malhas quadriculadas da tabela seguinte, figuras isométricas, tendo em conta os elementos definidos e a(s) isometria(s) solicitada(s) em cada caso.

<table>
<tr><th>$T_{\vec{v}}$</th><th>S_r</th><th>$R_{(O,-90^\circ)}$</th></tr>
<tr><td colspan="2">
</td><td>
</td></tr>
</table>

Bom Trabalho!! ☺

Actividade de Avaliação 4

FIGURA C.8 – Atividade de Avaliação – Módulo 10

ANEXO D

D.1. COMPOSIÇÕES GEOMÉTRICAS

FIGURA D.1 – Pintura em azulejo das composições geométricas e painéis finais (2)

D.2. Pavimentações

Figura D.2 – Pintura das pavimentações finais em azulejo (2)

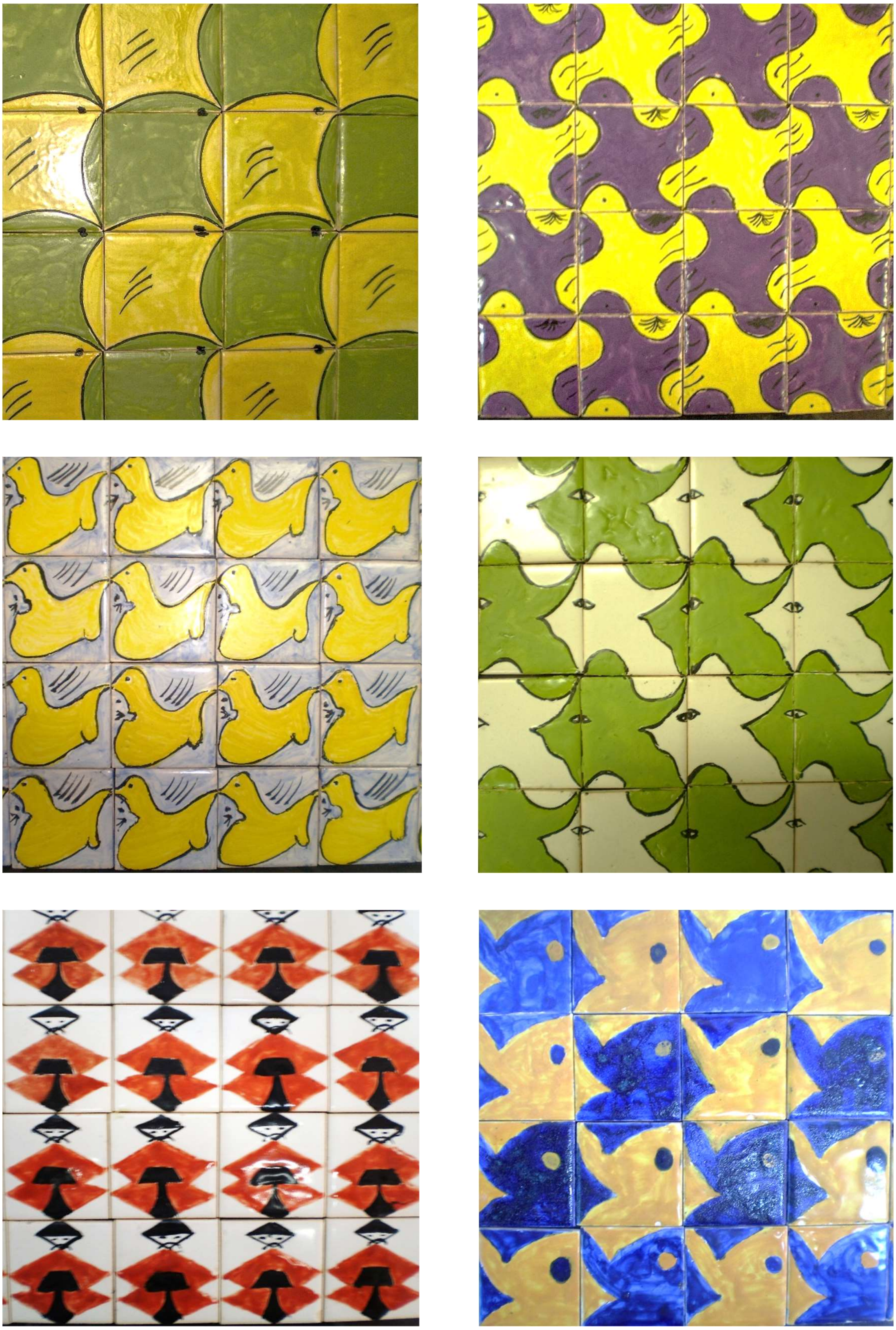


FIGURA D.3 – Pavimentações finais pintadas em azulejo (2)