Claúdia Alexandra Bernardino dos Santos
Licenciatura em Matemática – Ramo Educacional

Taxonomia SOLO e a Qualidade de exames de 12.º ano

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em
Ensino da Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e Ensino Secundário

Orientador: António Manuel Dias Domingos,
Professor da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa

Júri:

Presidente: Professora Doutora Helena Cristina Oitavem Fonseca da Rocha
Arguente: Professora Doutora Verónica Carla de Almeida Santos Pereira
Vogal: Professor Doutor António Manuel Dias Domingos

Julho 2021

Aos meus filhos, Cláudia e João, que são a minha luz e a minha vida.
À minha mãe, Lurdes, pela sua dedicação, amor e carinho,
que me deu bases para a vida.
Ao meu marido, João, que está sempre a meu lado.
Aos meus sobrinhos, pelo amor que transbordam por mim.
À minha mana, pela sua grande força e luta.
Ao meu mano, serei sempre a sua "jibóia".
Aos meus compadres, pelas pessoas especiais e maravilhosas que são.
Às minhas amigas especiais, Sara F., manas Susana e Filipa, Su e Marisa
que me apoiam sempre e fazem parte da minha família do coração.
A toda a minha família, pelo amor e carinho que sempre me deram.
Ao meu avô, Fernando Bernardino, pelo exemplo de vida
e pelo amor que sempre me deu.
Onde quer que esteja, quero que se orgulhe de mim!

Agradecimentos

Finalizar este trabalho foi um longo caminho, com muitos momentos, uns altos, outros baixos, mas poder terminar, dizer que fui capaz, apesar de todas as adversidades, dá uma sensação tão boa, que só quem se esforça e dedica para uma realização destas sabe o que se sente.

Não quero deixar de agradecer a todas as pessoas que me ajudaram a concluir esta etapa:

Aos Professores Doutores António Domingos e José Manuel Matos, pela disponibilidade, orientação e incentivo ao longo deste trabalho.

Ao professor Mestre Mário Ceia, pela sua paciência, disponibilidade, simpatia e ajuda em todos os momentos de dúvidas que foram surgindo na aplicação do modelo por si criado.

À professora Doutora Karly Alvarenga por acreditar que eu seria capaz, pela força que me deu e por não me ter deixado desistir.

À professora Doutora Verónica Pereira, pela força que me transmitiu.

À professora Mestre Adelaide Rala, pelos momentos que partilhámos nas reuniões de esclarecimento de dúvidas.

Às minhas amigas Susana Jorge, Filipa Leite e Sara Fernandes, pela força, pelo apoio e pela ajuda em diversos momentos críticos da elaboração deste trabalho e principalmente por me fazerem acreditar que conseguiria alcançar esta meta.

Aos meus filhos e ao meu marido, pelo apoio emocional, pela compreensão e pelos momentos que estiveram privados da minha companhia.

À minha mãe, pelo apoio que sempre me deu.

A todos o meu muito obrigada!

Resumo

O presente trabalho incide numa avaliação qualitativa de exames nacionais de Matemática do 12.º ano, com base na Taxonomia SOLO, tendo em conta alterações no Programa da disciplina de Matemática A num determinado período e contexto.

Pretendeu-se investigar a complexidade/grau de dificuldade dos exames de Matemática A da 1.ª fase, no período de 2015 a 2018, e sustentar a resposta às seguintes questões de investigação:

- Que variação existe nos temas curriculares nos exames para os anos em estudo?
- Que variação de categorias/níveis SOLO existem nos exames em estudo?
- Existe variação na complexidade/grau de dificuldade nos exames nos anos em análise?
- Que diferenças significativas se verificam com a alteração do programa de Matemática A?

O quadro teórico baseia-se na Taxonomia SOLO, a partir da qual foi criado um Modelo de categorização de questões de exame que fornece parâmetros para analisar e categorizar essas questões através da sua resposta, em escala crescente de complexidade.

O Modelo de categorização de questões de exame, desenvolvido por Mário Ceia e inspirado na Taxonomia SOLO, foi a ferramenta metodológica utilizada que permitiu concluir o objetivo deste estudo e responder às questões de investigação.

Pelos resultados obtidos na aplicação do modelo, nota-se que a introdução do novo Programa da Matemática A, trouxe impacto nos exames analisados, com alterações significativas, não só quanto à sua estrutura (em 2018, apresentou-se com dois Cadernos de questões de escolha múltipla e de desenvolvimento, contendo questões alternativas entre os dois Programas abrangidos no estudo), mas também ao nível da categorização das questões (em geral predominando a Categoria mediana e aumentando a mediana mais complexa em 2017 e 2018), indicando que o grau de complexidade dos exames de Matemática A aumentou.

No que respeita à variação dos Temas/Domínios, nos exames de 2015 a 2017, encontram-se todos os Temas do 11.º e 12.º anos e alguns Temas do 10.º ano e no exame de 2018 todos os Domínios do 12.º ano (excetuando-se o Domínio das Primitivas e Cálculo Integral) e, ainda, quatro Domínios do 11.º ano e um Domínio do 10.º ano.

Palavras-chave: Avaliação, Exames nacionais, Taxonomia SOLO, Matemática A

Abstract

The present work focuses on a qualitative assessment of national exams in Mathematics of the 12th year, based on the SOLO Taxonomy, considering changes in the Program of Mathematics A in a given period and context.
It was intended to investigate the complexity/degree of difficulty of the 1st phase Mathematics A exams, in the period from 2015 to 2018, and support the answer to the questions of this investigation:
- What variation is there in the curricular themes in the exams for the years under study?
- What variation of SOLO categories/levels are there in the exams under study?
- Is there a variation in the complexity/degree of difficulty in the exams in the years under analysis?
- What are the significant differences with the change in the Mathematics A program?
Biggs and Collis (1982), based on Piaget's development theory assumptions, developed a theory, the SOLO Taxonomy, which allowed the creation of an Exam Question Categorization Model that provides parameters to analyze and categorize exam questions through its answer, in an increasing scale of complexity.
The Examination Questions Categorization Model, created by Mário Ceia, inspired by the SOLO Taxonomy, was the methodological tool used to complete the objective of this study and answer the investigation questions.
From the results obtained in the application of the model, it is noted that the introduction of the new Mathematics A Program brought an impact on the exams analyzed, with significant changes, not only in terms of its structure (in 2018, it presented two notebooks of questions of multiple choice and developmental, containing alternative questions between the two Programs covered in the study), but also at the level of categorization of questions (in general, the median category predominating and the more complex median increasing in 2017 and 2018), indicating that the degree of the complexity of Mathematics A exams has increased.
Regarding the variation of Themes/Domains, in the exams from 2015 to 2017, all the Themes from the 11th and 12th grades and some Themes from the 10th grade are found, and in the 2018 exam all the Domains from the 12th grade .th year (except for the Domain of Primitives and Integral Calculus) and also four Domains of the 11th year and one Domain of the 10th year.

Key Words: Evaluation; National Examination; SOLO Taxonomy; A Mathematics

ÍNDICE GERAL

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE GRÁFICOS

ÍNDICE DE TABELAS

“*A educação é a mais poderosa arma para mudar o mundo*” (Mandela)

A mais difícil tarefa da educação consiste *“em fazer da diversidade um fator positivo e compreensão mútua entre indivíduos e grupos humanos. A sua maior ambição passa a ser dar a todos os meios necessários a uma cidadania consciente e ativa, que só pode realizar-se, plenamente, num contexto de sociedades democráticas*” (Delors et al, 1996, p 52).

Introdução

É indiscutível que o tema Exames Nacionais traz questões de várias ordens, nomeadamente no impacto dos seus resultados, quer para decisores políticos, escolas e público em geral, face às abordagens a vários níveis sobre esta matéria e a visibilidade que atualmente têm na sociedade.

Assim, a avaliação externa preconiza um leque de comportamentos de inúmeros intervenientes do Sistema Educativo pelo papel preponderante no processo ensino/aprendizagem.

Este trabalho tem como finalidade uma avaliação qualitativa a Exames Nacionais de Matemática A do 12.º ano portugueses que, desde a sua reintrodução em 1993, ocorrem no final de cada ano letivo, permitindo por um lado a conclusão do ensino secundário e por outro, na maior parte dos cursos de orientação científica, o ingresso no ensino superior.

A investigação incidiu sobre exames de Matemática A da 1ª chamada dos anos 2015, 2016, 2017 e 2018 através de um procedimento de análise, interpretação e categorização das respostas/questões destes exames, com o objetivo de os avaliar qualitativamente quanto à sua complexidade/grau de dificuldade.

Como ferramenta metodológica neste processo, foi utilizado um modelo de categorização de questões de exame, da autoria de Mário Ceia, criado com base na Taxonomia SOLO, assente em pressupostos de Biggs e Collis (1982), que o autor reformulou ao longo de vários anos e o qual se aplica a todos os níveis de escolaridade.

A aplicação do modelo foi efetuada com base em respostas “idealizadas” (propostas de resolução coerentes com os conhecimentos e capacidades expectáveis para um aluno do 12.º ano), os conteúdos (domínios temáticos) que constam nos Programas de Matemática A vigentes em cada momento e os critérios de classificação dos exames, permitindo, com recurso aos parâmetros estabelecidos no modelo, categorizar as questões de acordo com o nível de complexidade que apresentam.

O modelo seguido permitiu ter um fio condutor na diferenciação da complexidade das questões, permitindo assumir uma decisão quanto à categorização das mesmas.

Partindo da categorização obtida nas questões dos exames, foram efetuadas considerações e conclusões quanto aos temas, tipo de categorização de questões, diferenças encontradas com a alteração do Programa, bem como tentar aferir sobre o grau de exigência e complexidade presentes nos exames em estudo, sendo possível, desta forma, dar resposta às questões desta investigação:

- Que variação existe nos temas curriculares nos exames para os anos em estudo?
- Que variação de categorias/níveis SOLO existem nos exames em estudo?
- Existe variação na complexidade/grau de dificuldade nos exames nos anos em análise?

- Que diferenças significativas se verificam com a alteração do programa de Matemática A?

Assim, este trabalho encontra-se estruturado em sete capítulos, aos quais antecedem um resumo e uma introdução, sobressaindo a relevância e pertinência do estudo.

Nos Capítulos um, dois, três e quatro apresenta-se a revisão da literatura considerada pertinente neste estudo, enquadrando-se os temas da avaliação, exames e Ensino Secundário em Portugal, programas da Matemática A e Taxonomia SOLO.

O Capítulo cinco é dedicado à metodologia utilizada no objeto do estudo, na qual se descrevem os procedimentos que foram seguidos explicitando as principais ações. No Capítulo seis apresentam-se as análises efetuadas e resultados, seguindo-se o capítulo sete no qual surgem as conclusões e a reflexão final.

Afirmado na categorização das questões dos exames referidos, o estudo realizado ao longo deste trabalho seguiu uma metodologia qualitativa.

Capítulo 1 – A Avaliação

1.1 Considerações Gerais sobre a Avaliação no Sistema Escolar Moderno

Na arena onde os intervenientes na política educativa debatem os assuntos que marcam a atualidade no sector, a avaliação é um tema recorrente cujo interesse não cessa de aumentar. Esta tendência decorre tanto por via de diretrizes europeias como por influência de um formato escolar sustentado, em Portugal, por métricas quantitativas de suporte ao desenvolvimento de uma aprendizagem de qualidade – que a despeito dos princípios plasmados na Lei de Bases não logrou, ainda, colmatar efeitos colaterais geradores de assimetrias e desigualdades que ainda hoje permanecem por ultrapassar. A pesquisa científica assume, aqui, um papel de relevo no apuramento de dados reais capazes de permitir análises mais eficazes e eficientes na procura de novas respostas e melhores caminhos.

A escola, enquanto "organização educativa complexa" (Sá, 2009, p. 87), que acumula com a sua vertente "matricial-educativo-curricular" (Roldão, 2014, p. 59), uma multiplicidade de funções sem resposta noutros espaços (Nóvoa, 2009), assume um papel social cada vez mais destacado (Pacheco, 1991), que tem na avaliação uma peça angular da "modernidade escolar" (Nóvoa, citado por Fernandes, 2008, p. 11) - a qual desde o século XX tem procurado reinventar-se tanto em termos formais e legais como humanos e sociais, de modo a acompanhar os desafios crescentes de um meio em constante mutação que exige das escolas uma resposta capaz de atender a públicos cada vez mais diversificados.

Os ideais de universalização, democratização e equidade, há muito enraizados no nosso léxico educativo, têm como principal premissa fazer de cada aluno a melhor versão de si num mundo competitivo, exigente e globalizado, no seio do qual Portugal - apesar de ter passado de um "contexto de certezas" e de "promessas" para um "contexto de incertezas" (Alves & Canário, 2004, p. 981), em larga medida devido a pressões de uma série de *stakeholders* e ao perpetuar de uma crise do "*pensamento sobre a escola*" (Roldão, 2014, p. 60) – acompanha os seus pares na tentativa de fazer da Europa a região mais competitiva do mundo em conhecimento (Fernández, 2006).
Neste contexto, a avaliação das aprendizagens, entendida como "todo o acto intencional que, agindo sobre os mecanismos de aprendizagem, contribui directamente para a progressão e/ou redireccionamento dessa aprendizagem" (Santos, 2002, p. 77), é uma das mais difíceis tarefas que a civilização enfrenta. É através dela que se conseguem definir metas e objetivos escolares tendentes a um processo de melhoria contínua, de modo que apesar de nem sempre consensual, é hoje aceite como necessária, funcionando como "ponto crítico de qualquer reforma ou inovação" (Nóvoa, citado **por** Fernandes, 2008, p.11).

Só avaliando se consegue ter noção da concretização do almejado sucesso escolar. "A avaliação tem que ser fundamental e principalmente assumida como um poderosíssimo processo que serve para aprender" (Fernandes, 2008, p. 142), e que para tal deve envolver diversos atores, pois as escolas, longe de cristalizadas no tempo, são hoje elos de ligação num meio cada vez mais interdependente, plural, complexo, diversificado e multicultural (Fernandes, 2005), onde a aprendizagem denota múltiplos ritmos e "a escola inclusiva é um desafio individual e coletivo" que requer respostas diversificadas (Benavente, 2011). O professor desempenha, aqui, um papel central, não só na apresentação de planos de trabalho, correção e orientação, como de interpretação do trabalho do aluno à luz de uma cultura de aprendizagem pelo erro nem sempre entendida de modo positivo na auto-avaliação e que como tal deve ser gerida de modo assertivo (Santos, 2002) para dar frutos.

No âmbito da investigação em apreço, merecem particular destaque a avaliação interna (predominante na sala de aula, da responsabilidade dos professores) e a avaliação externa (exames nacionais, da responsabilidade do Ministério da Educação). Concretamente em Portugal, este interesse público na agenda avaliativa surge em larga medida nas duas últimas décadas, na sequência tanto do novo estatuto da carreira docente do ensino não superior (Lei n.º 31/2002, de 20 de dezembro) associado aos contratos de autonomia como também dos processos de avaliação, destinados a garantir a "credibilidade do desempenho dos estabelecimentos de educação e de ensino" (Sá, 2009, p. 87). Nesta linha, a avaliação dos alunos constitui "uma área extremamente problemática" (APM, 1998, p. 89) e é "umas das principais inquietações dos professores, dos alunos, dos pais e encarregados de educação, poder político e de uma maneira geral de todos os cidadãos com uma maior ou menor incidência. De acordo (...) com o crescente peso que as avaliações externas têm no prosseguimento de estudos, dentro dos três ciclos de ensino básico e do ensino secundário e, principalmente, para o ensino superior (...) as questões decorrentes da avaliação do desempenho dos alunos estão —hoje, mais do que nunca, na ordem do dia" (Gaspar, 2013 p. 24).

1.2 Enquadramento Legal da Avaliação Escolar ao Longo do Tempo

Em termos históricos, os exames públicos nacionais remontam há mais de 2500 anos na China, para efeito de seleção de militares e funcionários públicos, iniciativa que chega à Europa no séc. XVI (Fernandes, 2008), pelas mãos dos Jesuítas, a quem coube em Portugal a gestão do ensino até à segunda metade do século XVIII. Foi, contudo, nos últimos 150 anos que os sistemas educativos mundiais conheceram significativo desenvolvimento, merecendo referência o ano de 1836 em Portugal, "data em que é consagrada a criação e instalação dos liceus, com base num plano sistematizado dos aspetos curriculares, pedagógicos e administrativos do desenvolvimento dos estudos secundários", seguindo-se, em 1860, o regulamento geral dos liceus (Fernandes, 2008, p. 101), cujos concelhos definem os conteúdos dos exames, não havendo ainda uniformidade e igualdade, num país repleto de assimetrias.

Após várias tentativas de mudança, em 1894/1895 ocorre a histórica reforma de Jaime Moniz, consubstanciada "numa centralização das questões de natureza pedagógico-didática – currículos, programas, manuais e metodologias de ensino - e de natureza administrativa", pese embora não se possa ainda "falar de um sistema de exames nacionais iguais para todos os estudantes" (Fernandes, 2008, p. 102). O início de um sistema de exames em que se verifica uma avaliação rigorosa dos conhecimentos baseada em princípios de igualdade e transversalidade para todos os alunos acontece em 1930, com a promulgação do Decreto n.º 18884 de 27 de setembro de 1930, que determina nomeadamente:

> a) a redução significativa das provas orais; b) a separação das funções de examinador e de professor; c) a conceção de provas orientadas mais para a avaliação da inteligência do que da memória; d) a instituição do regime de anonimato dos alunos nas provas escritas (Fernandes, 2008, p. 102).

O Decreto-Lei n.º 36507, de 17/9/1947 que promulga sobre a reforma do ensino liceal, volta a insistir na objetividade e igualdade dos exames - com ponderação de 100% nos finais de ciclo (Fernandes, 2014) - e com a aprovação do estatuto do ensino liceal com o Decreto n.º 36508, também em 1947, "fica inequivocamente consagrado um sistema de exames nacionais iguais e obrigatórios, de correção anónima, com administração estandardizada, incluindo sobre um currículo uniforme" (Fernandes, 2008, p. 103) – características que permanecem até ao regime democrático, prevalecendo uma avaliação de natureza seletiva e discriminatória, com elevadas taxas de abandono e reprovação. Durante o Estado Novo, é "inequívoca a presença de um sistema educativo ao serviço daquele ideário político, assente no conformismo, na desmobilização social concretizada no afastamento dos cidadãos de qualquer forma de participação, tendo-se, a par, naturalizado a ideia de estratificação social" (Carvalho, 2017, p. 83).

A década de 70 trouxe algumas iniciativas pontuais de relevo, como a formulação de objetivos na educação, a construção de instrumentos de avaliação e a utilização da taxonomia de Bloom (Fernandes, 2014). O Decreto-Lei n.º 491/77 de 23 de novembro e a Portaria n.º 210/78 de 15 de abril, ao substituírem o serviço cívico por um ano propedêutico percursor do 12.º ano e obrigarem à prestação de provas para efeitos de ingresso no ensino superior, estiveram na génese do regresso, 20 anos depois, dos exames nacionais ao ensino secundário (Fernandes, 2014). Após duas décadas sem qualquer avaliação externa de certificação de conclusão dos estudos secundários, o Despacho Normativo n.º 338/93 do Ministério da Educação "institui os exames nacionais no final do ensino secundário, com funções de certificação e de seleção no acesso ao ensino superior" (Fernandes, 2008, p. 103).

De referir que, no nosso país, o direito à educação está plasmado nos artigos no 73.º e no 74.º da Constituição da República Portuguesa - aprovada pela Assembleia Constituinte reunida em sessão plenária de 2 de abril de 1976, na sequência da Revolução de 1974, e que "visou restituir aos portugueses direitos e liberdades fundamentais" (in Diário da República Eletrónico). Promulgada pelo Presidente Mário Soares, em 14 de outubro de 1986, é publicada em sede de Diário da República a Lei de Bases do Sistema Educativo (LBSE) – Lei 46/86, "com um total de 64 artigos, divididos por nove capítulos", de certo modo antecipada "pela nomeação de uma Comissão de Reforma do Sistema Educativo, sendo então ministro João de Deus Pinheiro", a 26 de dezembro de 1985, através da Resolução do Conselho de Ministros n.º 8/86 (Lima, 2018, p. 76). Sem dúvida, um marco incontornável na nossa política educativa, que ultrapassa a desarticulação e caráter de certo modo avulso dos documentos que integraram a Lei 5/73 de 25 de julho no âmbito da chamada reforma Veiga Simão (Fernandes, 2014), assumindo-se em pleno como uma Lei "de interpretações específicas, a partir do contexto de integração na Comunidade Económica Europeia", com algumas regulamentações e vários ritmos, ao longo das últimas décadas (Lima, 2018, p.78). Entre os seus principais pressupostos, destacamos aqui o de "contribuir para a realização do educando, através do pleno desenvolvimento da personalidade, da formação do carácter e da cidadania, preparando-o para uma reflexão consciente sobre os valores espirituais, estéticos, morais e cívicos, e proporcionando-lhe um equilibrado desenvolvimento cívico" (art.º 3, alínea b). No que se refere à questão da avaliação, a LBSE é sobretudo omissa, fazendo apenas no n.º 2 do art.º 12 (acesso ao ensino superior), "uma tímida referência a prova ou provas nacionais que os alunos terão que prestar para, cumulativamente com o diploma do ensino secundário, poderem estar em condições de ter acesso ao ensino superior" (Fernandes, 2014, p. 16).

Em termos gerais, um pouco por todo o mundo os exames são externos e com supervisão do governo; são construídos a partir de conteúdos constantes nos currículos, iguais para todos os alunos, com conteúdos, critérios de correção e resultados divulgados publicamente, sendo o seu principal objetivo certificar, controlar, selecionar ou motivar. Em Portugal, os exames ocorrem no final do ensino secundário, embora haja países que recorrem aos exames em níveis mais elementares ou no final da escolaridade obrigatória.

Em Portugal, o peso dos exames é de 30% e o da avaliação interna 70%, ainda que para efeitos de acesso ao ensino superior o peso das disciplinas específicas de exame seja de 50% face a 50% da avaliação interna, havendo países como Irlanda e França em que avaliação é quase na totalidade externa. O próprio número de exames que os alunos têm de realizar não é uniforme mesmo no espaço europeu. Considere-se o exemplo de Itália em que os alunos fazem dois exames, três na Alemanha e Inglaterra, em Portugal entre três e quatro, sendo que em outros países como França, Irlanda e Holanda fazem mais de seis exames, havendo ainda variações quanto ao formato dos exames. Uma diversidade ainda hoje latente, com impacto nomeadamente "nas vidas pessoais, sociais e académicas dos alunos; nas formas como as escolas e os professores se organizam e desenvolvem o currículo" e na própria "credibilidade social do sistema educativo" (Fernandes, 2008, p. 105).
Sendo que os exames visam certificar aprendizagens, selecionar acesso a novos níveis de ensino, controlar conteúdos e gerir currículos, monitorizar resultados por via de uma sempre polémica e algo redutora análise quantitativa expressa em rankings e motivar o progresso escolar, é legítimo discutir o que é que de facto os exames avaliam, que currículo é efetivamente avaliado, a equidade dos resultados e qual "o benefício comum conquistado" (Fernandes, 2008, p. 105).

A utilização de um teste com determinadas características tem múltiplas consequências, e "a ideia deve ser a de procurar equilibrar as exigências de validade, de fiabilidade, de equidade e de capacidade de comparação, que têm de existir neste tipo de provas com as exigências de um ensino e uma aprendizagem em que a resolução de problemas, a relação e integração de saberes ou as competências metacognitivas têm um papel determinante". O *Assessment of Performance Unit* em voga nos anos 90 em Inglaterra veio mostrar que "quanto maior for a complexidade das tarefas mais difícil é incluí-las em avaliações em larga escala", sendo de destacar que Portugal tem tido o mérito de tentar diversificar o tipo de questões formuladas (Fernandes, 2008, p. 110).

Antecedido pelo Decreto-Lei n.º 286/89 de 29 de agosto - que estabelece os planos curriculares do ensino básico e secundário (Fernandes, 2014, pp 18) - será de mencionar o Despacho n.º 162/ME/91 de 9 de setembro, "que aprovava o sistema de avaliação dos ensinos básico e secundário e que acabou por ser um primeiro passo para que os princípios e orientações constantes dos diplomas legais a partir de então passassem a ser mais consistentes com as exigências curriculares" (Fernandes, 2008, p. 116). Revogado ao fim de nove meses - pelos Despachos Normativos n.º 98-A/92 de 19 de Junho (educação básica) e n.º 338/93 de 21 de Outubro (ensino secundário), que retiraram efeito à avaliação sobre a certificação - teve como principal novidade o facto da avaliação para efeito de progresso escolar dar-se no final do ensino básico e no final do ensino secundário, com a avaliação externa a ter um peso de 33% e a avaliação interna 66% - cuja maior subjetividade levantou questões de fiabilidade, equidade e credibilidade (Fernandes, 2008, 117; Fernandes, 2014, p. 18).

O Despacho 98-A/92 (com aditamentos no Despacho Normativo 644-A/94), que consagrou de algum modo a assunção de responsabilidade pelos professores no desenvolvimento do currículo e das aprendizagens - acabou sucedido pelo Despacho n.º 30/2001 de 22 de Junho e este pelo Despacho 1/2005 e foi de algum modo progressista e inovador, ao gerar no país "uma interessante dinâmica em torno da questão das aprendizagens que se consubstanciou na realização de múltiplas ações de formação, encontros de natureza diversa, trabalhos de investigação" (Fernandes, 2008, p. 119), que trouxeram contributos interessantes mas não lograram resolver questões de fundo ligadas à objetividade e subjetividade da avaliação formativa e sumativa. Consagrou, ainda assim, "princípios, conteúdos e métodos consentâneos com a ideia de que, antes do mais, a avaliação interna deve estar orientada para melhorar o ensino dos professores e a aprendizagem dos alunos" (Fernandes, 2014, p. 23).
Quanto ao Despacho 338/93, "consagrou a avaliação externa através de exames no final do ensino secundário, com efeitos na classificação final dos alunos, na certificação e ainda no acesso ao ensino superior" (Fernandes, 2008, p. 119; Fernandes, 2014, p. 23). Merece ainda referência a Lei n.º 31/2002 de 20 de dezembro, *"*que aprova o sistema da avaliação da educação e do ensino não superior, desenvolvendo o regime previsto na Lei de Bases do Sistema Educativo. (...) Uma lei que quanto à forma e ao conteúdo não será muito feliz, pois não clarifica nem apresenta uma visão estratégica e integrada da avaliação da educação e do ensino não superior, que continua a faltar-nos*"* (Fernandes, 2008, p. 124).

Estudos internacionais de avaliação levados a cabo por três principais organizações – International Assossiation for the Evaluation of Educational Achievement (IEA); o Educational Testing Service (ETS), e a Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Económico (OCDE) - promotora do famoso

PISA – *Program for International Student Assessment*, cujo objetivo é averiguar em que medida os jovens de 15 anos de cada país estão preparados para fazer frente aos desafios das sociedades modernas – têm providenciado um importante contributo para a "construção de uma visão estratégica de modernização, de democratização e de desenvolvimento do sistema educativo português", (Fernandes, 2008, p. 133), sob a égide de um Ministério da Educação historicamente centralizador mas cada vez mais sujeito à influência da UE, articulada com investigação capaz de contextualizar a passagem da teoria à prática. Interessante referir que, entre nós, o "planeamento da educação (...) à consultoria exterior" remonta a 1959, quando Leite Pinto intercede junto da OCDE para examinar as políticas públicas da educação em Portugal, o que resulta no Projeto Regional Mediterrânio (PRM), cujos relatórios para Portugal foram "bastante contundentes acerca do papel dos exames na transição dos vários níveis de ensino" (Fernandes, 2014, p. 5-7).

A par da moldura legal, também as políticas educativas têm evoluído para responder aos imperativos vigentes. Sob a égide do XVII Governo Constitucional, o Ministério da Educação liderado por Lurdes Rodrigues apostou numa série se medidas tendentes a melhorar os resultados escolares dos alunos portugueses, tendo-se criado programas apostados na Qualidade, entre os quais o Plano para a Matemática (Rodrigues, 2010), a par de outras iniciativas ainda hoje ativas e que revelam bem o compromisso nacional com a aprendizagem e melhoria dos resultados escolares.

1.3 A Avaliação Interna

São três as principais modalidades da avaliação interna: a avaliação diagnóstica, a avaliação formativa e a avaliação sumativa, podendo esta última ser interna ou externa. A avaliação diagnóstica remete para um primeiro momento que decorre logo no início de cada ano letivo, em que importa avaliar o ponto de partida de cada aluno, em cada disciplina, identificar as suas características pessoais e capacidades (Ribeiro, 1991), antecipar necessidades de revisão ou apoio extra e adaptar o processo de ensino de forma a potenciar a conquista de resultados positivos, ocorrendo através da realização de entrevistas, da observação ou da aplicação de fichas de (auto) avaliação (Silva 2000). O diagnóstico "traduz a evidência resultante do balanço entre o estado real e o desejado do aluno. A remediação decorre das decisões sobre o que fazer para alterar uma situação de discrepância entre estes dois estados" (Menezes et al, 2008, p. 12-13).

Já a avaliação formativa, a mais permanente, educativa, individualista e transparente (Viallet & Maisonneuve, 1990), reflete um trabalho diário desenvolvido entre professores e alunos em sede de sala de aula ao longo de todo o ano letivo, onde importa gerir ritmos, desenhar estratégias e propor objetivos de modo a estimular a capacidade e confiança de cada um, num contexto de melhoria contínua do processo de ensino e aprendizagem, que implica não só adaptar respostas à realidade de cada um a cada momento mas, numa perspetiva mais macro, apostar numa visão holística da escola, no empoderamento dos recursos humanos disponíveis e numa cultura escolar de comunicação aberta de múltiplas vias, envolvendo todos quantos contribuem para um movimento catalizador correlacionado com maiores conquistas académicas e expetativas educacionais (Bordalba e Bochaca, 2019).

Bastante exigente, a avaliação formativa requer que o docente assuma uma ação interventiva e promova uma constante revisão e adaptação de tarefas de aprendizagem, tornando-as adequadas e facilitando a compreensão das matérias, sendo uma avaliação "integrada no próprio ato de ensino, que permite a recolha de dados essenciais à orientação ou reorientação do processo educativo, dando retorno ao professor sobre as condições de aprendizagem, as capacidades adquiridas e as dificuldades na sua aquisição (...) na medida em que são os próprios alunos a construir o seu saber" (Pereira, 2019, p. 22) – assumindo-se como útil à gestão curricular e à promoção da igualdade de oportunidades (Leite, 2004), ao permitir ao aluno melhorar o trabalho em curso, obter retorno e corrigir erros para evitar voltar a cometê-los (Santos & Dias, 2006), o que implica um feedback constante, claro e focado no que importa melhorar, com funções reguladoras (Santos, 2003).

Apesar de exigente, esta avaliação por norma não tem reflexos numa nota final formal, cabendo esse papel à avaliação sumativa expressa nos tradicionais testes de aferição de conhecimentos, com estatuto de mais objetivos e fiáveis, mesmo quando foram utilizadas múltiplas formas de avaliação (Graça, 1995; Martins, 1996). As fragilidades da avaliação formativa numa vertente mensurável prendem-se com uma ampla diversidade de fatores, desde a falta de tempo à densidade do plano curricular e ao elevado número de alunos por turma, para além da elevada informalidade dos instrumentos deste tipo de avaliação. A própria integração das práticas da avaliação formativa em sede de sala de aula é dificultada pela pressão da avaliação externa, a própria organização das escolas e conceção dos professores acerca da avaliação (Fernandes, 2008b).

Sabendo-se que a avaliação sumativa interna vale 70% e a externa 30% na classificação final de secundário (e de acesso ao ensino superior), importa atentar nesta matéria e no papel central desempenhado pelos professores (Miguens et al, 2014), no quadro de uma autonomia escolar que é muito mais do que uma mera "ficção necessária" (Barroso, 2004), que requer funções de liderança intermédia e capacidade de decisão, com os docentes a terem nomeadamente de optar entre cumprir a aprendizagem ou gerir o programa considerando a heterogeneidade das turmas, de forma a potenciar as aprendizagens sem sacrificar os alunos mais fracos e lidar com a maioria sem perder os talentos, (Roldão, 2014), numa procura dinâmica de equilíbrio constante entre diagnóstico e orientação (Filipe, 2011).
A prática sistemática de avaliação formativa está associada a melhorias significativas tanto na aprendizagem dos alunos, como na avaliação sumativa - sobretudo por parte dos que denotam maiores dificuldades - e nos resultados em provas de avaliação externa (Black e William, 1998), podendo ocorrer um indesejável "estreitamento" do currículo atendendo à necessidade inevitável de "preparar" os alunos para os exames (Fernandes, 2014, p. 3).

A avaliação sumativa interna constitui um balanço de cada período, ano letivo ou ciclo de escolaridade, expressa numa escala que pretende traduzir um resumo da informação apreendida pelo aluno e tem como pressuposto classificar e certificar, sendo da exclusiva responsabilidade dos professores que integram os conselhos de turma.

O facto de os sistemas educativos historicamente se basearem em modelos orientados sobretudo para a classificação, seleção e certificação, que exigem mais a reprodução dos conhecimentos transmitidos do que uma análise, reflexão e interpretação de dados e uma aprendizagem com compreensão, limita de algum modo a autonomia do aluno - cenário que nos últimos 30 anos tem vindo gradualmente a mudar, com a renovação da conceção de currículo, aprendizagens e avaliação (Fernandes, 2005). Caminhando para a autonomia apoiará à qualidade das aprendizagens. Há algum tempo atrás, há uma década, seria difícil imaginar "ter escolas que podem olhar para o seu currículo e construí-lo, a flexibilização curricular era algo de distante". (Miguéns et al, 2014, p. 19).

Concretamente no que se refere ao currículo, o principal desafio remete para o envolvimento cada vez mais ativo no aluno na aprendizagem, através da resolução de problemas por via da integração de informações de natureza e de fonte diversificadas, da utilização inteligente das TIC, da associação de ideias e da interpretação de dados, o que implica raciocinar mais do que memorizar. "Num currículo renovado, os alunos são chamados (...) a trabalhar em grupo (...), a ser mais autónomos e responsáveis pelo que são supostos aprender e mais capazes do ponto de vista socio afetivo. Num currículo com este tipo de finalidades é evidente que se dá ênfase ao desenvolvimento da inteligência dos alunos" (Fernandes, 2005, p. 3), considerando-se que "todos podem aprender", "a igualdade de oportunidades deve estar ao real alcance de todos" e "os conteúdos curriculares têm de ser suficientemente desafiadores (...) e estar orientados para o desenvolvimento de competências de resolução de problemas" (Shepard, 2001, p. 1074), por via de processos de aprendizagem nem sempre lineares.
Cabe assim aos alunos construir o conhecimento, o que implica:

> a) recorrer a tarefas de avaliação mais abertas e variadas; b) diversificar as estratégias, as técnicas e os instrumentos de recolha de informação; c) desenvolver uma avaliação que informe, tão claramente como possível, acerca do que, em cada disciplina, todos os estudantes precisam saber e ser capazes de fazer; e d) analisar de forma deliberada e sistemática a informação avaliativa recolhida junto dos alunos (Fernandes, 2005, p. 6-7),

de modo que avaliação não pode estar desligada do desenvolvimento do currículo e das aprendizagens, sendo a avaliação formativa comparativamente com a sumativa a melhor opção para obtenção de bons resultados nos exames ou provas externas (Black & William, 1998; Fernandes, 2005).
A formação contínua de professores deve ser uma aposta política cada vez mais forte, até porque considerando o atual cenário de pandemia e a falta de recursos e equipamentos em numerosas escolas e agregados, não deixa de ser relevante que a formação digital de docentes não seja ainda obrigatória em Portugal. No fundo, importa sobretudo criar condições para que se "credibilizem e valorizem uma

avaliação interna de natureza eminentemente formativa e que promovam a sua adequada articulação com uma avaliação externa que pode e deve ter o seu papel nos sistemas educativos" (Fernandes, 2005, p. 11), contribuindo para melhorar práticas numa lógica de escola como organização aprendente (Formosinho & Machado, 2007).

O currículo, enquanto projeto construído, não é um conceito neutro ou desprovido de contexto, devendo ser entendido à luz de uma moldura política que articula diferentes fases e níveis num processo de desenvolvimento que engloba múltiplos intervenientes. De facto,

> O atual protagonismo da avaliação, no quadro das políticas educacionais, não remete apenas para as suas dimensões instrumentais e de controle, ao serviço de novas modalidades de regulação e metarregulação estatal das políticas públicas. A avaliação educacional, mais do que isso, é uma das máximas expressões, substantivas, das políticas educacionais contemporâneas, seja em escala nacional e local, seja em escala transnacional. (Lima, 2015, p. 1341).

Uma dinâmica centrada na garantia da qualidade e que, de futuro, trará ainda muitas novidades, descobertas e inovações.
O atual desfasamento das práticas de avaliação das aprendizagens das exigências curriculares e sociais vigentes, apelam a uma mudança de paradigmas atendendo ao desenvolvimento das teorias da aprendizagem, das teorias do currículo e da democratização dos sistemas educativos (Fernandes, 2008), de modo a ultrapassar dificuldades, impasses e constrangimentos, rumo a uma avaliação formativa alternativa ou autêntica, (Fernandes, 2008; Fernandes 2008b) e que segundo terminologia de Guba e Lincoln (1989), surge como sucessora da avaliação como medida, como descrição, como juízo de valor e como negociação e construção, propondo

> uma partilha de responsabilidade entre alunos e professores em matéria de avaliação e regulação entre aprendizagens. Obviamente os professores terão um papel que é, ou deve ser, preponderante em aspetos como a organização e distribuição do processo de feedback, enquanto os alunos terão uma evidente preponderância no desenvolvimento dos processos que se referem à auto-avaliação e autorregulação das suas aprendizagens (Fernandes, 2008, p. 65)

– numa importante passagem, pelo aluno, de um papel tradicionalmente passivo, a uma voz ativa cada vez mais envolvida e participativa. Conforme refere Lemos (1993), há tipos de conhecimentos e capacidades e competências transversais que devem ser estimuladas e tidas em linha de conta.

1.4 A Avaliação Externa

Quanto à avaliação sumativa externa, é da competência do Ministério da Educação e materializa-se na realização de exames nacionais - instrumentos que servem para "medição e controlo sistemáticos do desempenho de cada aluno, das escolas e dos sistemas educativos nacionais," (Euridyce, 2009, p. 9), ao mesmo tempo que permitem uma comparação de rendimento escolar ao nível internacional - mesmo quando a melhoria e evolução do sistema de avaliação permite afirmar que "os exames não são a questão fundamental (...) o centro decisivo é a qualidade do ensino e a qualidade das aprendizagens" (Miguéns et al, 2014, p. 7).

A avaliação externa tem inúmeras vantagens, nomeadamente contribuir para "induzir práticas inovadoras de ensino e de avaliação"; "constituir uma motivação"; "ter um efeito de moderação nas avaliações internas"; "recolher grandes massas de dados em pouco tempo" e de forma menos onerosa; "produzir números e estatísticas que permitem uma diversidade de comparações" (Fernandes, 2014, p. 3).

A avaliação externa não deve ser vista como uma "panaceia" capaz de resolver os problemas de aprendizagem no sistema (Fernandes, 2014, citado por CNE) nem algo desnecessário, remetendo para um debate de valores que não deve cair numa visão maniqueísta e redutora a boa ou má, até porque assenta em valores de validade, rigor técnico, objetividade e rentabilidade (Eurydice, 2009), tendo o Conselho Nacional de Educação emitido um parecer tendente a colmatar aspetos negativos da sobrevalorização de um momento singular, onde recomenda "repensar as implicações dos resultados das provas finais no prosseguimento dos estudos; rever o modelo de acesso ao ensino superior; promover a melhoria dos critérios de classificação de provas e exames nacionais, bem como a qualidade da sua classificação." (CNE, 2015, p. 27).

As avaliações externas determinam o quê e como se ensina e se aprende, de modo que se os exames forem bem feitos, "é aceitável que o ensino e a aprendizagem tenham bastante a ver com eles. Consequentemente, é fundamental investir na qualidade das provas, isto é, por exemplo, na sua consistência e alinhamento curriculares, na pertinência e significado das questões e na qualidade psicométrica da prova como um todo e de cada item em particular" (Fernandes, 2014, p. 35). Decorre daí a necessidade de avaliar a própria avaliação, providenciando que seja justa e útil, criando indicadores sustentados em evidência empírica.

A avaliação externa não é, de todo, garante de equidade no acesso à oportunidade de prosseguir estudos e aprender, mas é uma importante parte integrante de um sistema articulado com outros processos que, no conjunto, visam elevar o sistema educativo nacional ao nível de excelência, sem registo de quaisquer retenções ou desistências.

No que concerne aos exames nacionais do ensino secundário, após um longo período de consolidação de conceção, elaboração, distribuição, controle e segurança de provas, estamos em plena fase de desenvolvimento qualitativo, que implica “garantir que as suas características psicométricas sejam aceitáveis e de acordo com o que são os standards internacionalmente recomendados e aceites” (Fernandes, 2008, p. 139), bem como divulgadas e conhecidas de modo a estimular uma discussão pública informada (Miguéns et al, 2014). O ideal é “definir uma política de avaliação que integre e relacione (...) uma avaliação interna de natureza formativa e que promova a sua adequada articulação com uma avaliação externa que pode e deve ter o seu papel no sistema educativo” (Fernandes, 2008, p. 141), conjugando os pontos fortes de cada vertente, em prol do aluno e do sucesso escolar, pois o sistema educativo português “continua a ter dificuldades em concretizar práticas de ensino e de avaliação que contribuam para que as crianças e os jovens desenvolvam competências indispensáveis para prosseguirem livremente as suas vidas escolares ou profissionais” (Fernandes, 2008, p. 15).

Entendida como “todo e qualquer processo deliberado e sistemático de recolha de informação, mais ou menos participado e interativo, mais ou menos negociado, mais ou menos contextualizado, acerca do que os alunos sabem e são capazes de fazer numa diversidade de situações” (Fernandes, 2008, p. 16), a avaliação das aprendizagens é indissociável de um maior envolvimento do estudante na qualidade de agente ativo num processo que requer autonomia, pensamento crítico, vontade de aprender mais do que apenas passar de ano. As vantagens dos exames passam por:

> 1) exercer um efeito moderador nas avaliações internas; 2) induzir práticas inovadoras de ensino e de avaliação; 3) contribuir para avaliar o sistema educativo e ajudar a melhorar a tomada de decisões a todos os níveis; 4) alertar as escolas para a necessidade de melhorarem os seus projetos educativos; 5) dar indicações úteis às escolas, aos professores e aos alunos acerca do que é importante ensinar e aprender (Fernandes, 2008, p. 116).

1.5 Reflexões Finais sobre o Futuro da Avaliação

A avaliação é a tarefa mais difícil que a civilização tem, mas é através dela que se conseguem definir metas e objetivos.

> “A atividade de avaliação é uma característica intrínseca do conhecimento e das decisões práticas. Conhecer algo equivale a avaliá-lo, a atribuir-lhe um valor, um significado, a explicá-lo, e isto tanto na experiência comum quanto nos mais sistemáticos processos científicos. Além disso, avalia-se ainda quando se tem de fazer escolhas com fins práticos, ao nível do indivíduo singular ou de interrupções sociais de largo alcance. Também tudo o que acontece na escola é avaliado.” (Bartolomeis, 1999, p. 38).

Cada vez mais, a escola deve avaliar para ajustar currículos e facilitar aprendizagens, sendo que na atualidade, depois dos modelos objetivistas (de cariz quantitativo) e subjetivistas (apostado nos processos e resultados) de abordagem da avaliação, vigora o modelo crítico de avaliação, ainda em desenvolvimento, centrado numa análise abrangente que fomenta a reflexão e o papel central dos participantes do processo educativo, através da autonomia, responsabilidade e autoavaliação (Catalán, 1993).

Em suma, ao nível da avaliação interna, é sobretudo preciso afinar políticas que contribuam "para a definição de critérios de avaliação devidamente articulados com as aprendizagens estruturantes e essenciais a desenvolver e com as tarefas que se devem propor aos alunos". Já ao nível da avaliação externa, "as escolas devem desenvolver mecanismos de análise e discussão de resultados, (...) para daí retirar as devidas consequências, comparando o currículo da avaliação externa com o da avaliação interna" (Fernandes, 2008, p. 138).

A aposta tem de passar, irrevogavelmente, pela qualidade das aprendizagens, pois é através dela "que podemos propiciar aos nossos alunos percursos escolares longos, percursos escolares sustentáveis, percursos escolares duradoiros e uma melhor inserção quer no ensino superior quer no mercado de trabalho" (Miguéns et al, 2014, p. 16), até porque mesmo sem evidência de uma correlação direta significativa, pressupõe-se que existe um contributo importante dos sistemas de avaliação através dos exames para a melhoria da qualidade da educação (Stufflebeam et al, 1985).

A afirmação científica da avaliação em geral está, sobretudo, pendente de uma clarificação teórica, que se prende precisamente com a avaliação das aprendizagens "e tem direta ou indiretamente a ver com a clarificação de conceitos tais como os de "corrigir (scoring); classificar (grading); ordenar (ranking) distribuir ponderações ou atribuir pesos (apportioning), bem como os conceitos de sumativo, formativo, objetivo e subjetivo" (Fernandes, 2008, p. 70, 71), e pese embora seja uma construção social com valores políticos, morais e éticos que já há séculos intrigavam filósofos como Confúcio, Buda ou Aristóteles, a avaliação deve ser estudada e potenciada para ser o mais exata possível, visando "ajudar os alunos a desenvolver as suas aprendizagens" (Fernandes, 2008, p. 71).
Os modelos de avaliação são ainda pouco integrados no ensino e na aprendizagem, porquanto assumem um caráter predominantemente quantitativo e "mais orientados para a atribuição de classificações do que para a análise do que os alunos sabem e fazem, para a compreensão das suas dificuldades e para a ajuda à sua superação" (Domingues, 2008, p. 15). Um ponto crítico se atendermos ao fenómeno da massificação e diversificação da população escolar que nas últimas décadas obrigou a uma revisão do sistema educativo, processos, conteúdos e resultados.

O sistema educativo português tem feito progressos notáveis e continua empenhado em melhorar a arquitetura do sistema de avaliação das aprendizagens, que apesar da reintrodução dos exames nacionais "ainda é predominantemente interna, ou seja, da integral responsabilidade dos professores e das escolas" (Fernandes, 2014, p. 33-34), o que traduz uma clara necessidade de prosseguir práticas sistemáticas de avaliação formativa credíveis. É importante, sobretudo, investir em mais estudos e pesquisas e ter a capacidade de manter um pensamento crítico sobre a questão da avaliação, dos exames e dos currículos, pois pese embora o modelo educativo atual não seja o mais perfeito, é o melhor conhecido até ao momento, estando longe de ter chegado a um términe evolutivo. "*É fundamental olhar para o futuro fazendo o balanço desse passado*" (Miguéns et al, 2014, p. 13).

Apresentado como medida política, social e formativa pelo XV Governo Constitucional, o sistema de avaliação da educação e do ensino não superior surge no âmbito da lei nº 31/2002 de 20 de Dezembro, o qual determina que as escolas sejam submetidas a processos de avaliação externa - assentes nos três domínios: Resultados, Prestação de Serviço Educativo e Liderança e Gestão – considerada por muitos como um mero meio de comparação de resultados mensuráveis, exigidos por lógicas de mercado (Afonso, 2009), excessivamente breve e formalista, impressionista e subjetiva (Veloso & Abrantes, 2013), apesar de servir para reforçar a autonomia das escolas, incrementar a capacidade de implementação dos projetos educativos, e estimular a necessidade de debater "outros sentidos políticos, éticos, culturais e educacionais mais profundos, plurais e contraditórios (...), no sentido do reforço da participação das famílias e comunidades na direcção estratégica dos estabelecimentos de ensino e no favorecimento da constituição de lideranças fortes" (Afonso, 2010), congregando a área profissional, pedagógica e curricular (Nóvoa, 1992).

Desde 2007, o processo avaliativo cabe à Inspeção da Educação, a quem coube avaliar 1131 agrupamentos/escolas não agrupadas entre 2006 e 2011 e 824 entre 2011 e 2017, cujos resultados elaborados com base em princípios de "rigor técnico, continuidade, transparência e participação" (Duarte, 2018), foram publicitados na respetiva página da internet. A escola deve ser vista de modo holístico, para que os dados recolhidos na auto-avaliação das escolas possam ter reflexo no dia-a-dia, no plano anual de atividades, na adequação dos instrumentos de avaliação a indicadores quantificáveis, fiáveis e credíveis, para aferir o real nível das aprendizagens e a adaptação do currículo às necessidades dos alunos e à articulação dos planos de turma com o trabalho em sede de sala (Duarte, 2018).

"A avaliação institucional é uma construção coletiva de questionamentos, é uma resposta ao desejo de rutura das inércias, é um pôr em movimento um conjunto articulado de estudos, análises, reflexões e juízos de valor que tenham alguma força de transformação qualitativa da instituição e do seu contexto, através da melhora dos seus processos e das relações psicossociais" (Dias Sobrinho, 2000). A pressão avaliativa é muita, atendendo ao investimento, às preocupações da produtividade e insucesso escolar, ao desfasamento da oferta educativa face ao mundo do trabalho, a crise decorrente da massificação e as pressões internacionais de verificação de conformidade e alinhamento europeu, entre outros (Azevedo, 2007), sendo imprescindível que a própria autoavaliação em que se baseia a avaliação externa não seja reduzida a um mero ritual burocratizado e de fachada sujeito às leis de mercado (Costa & Ventura, 2005).

A despeito das críticas, o sistema de avaliação externa das escolas é percecionado como útil e benéfico no âmbito de democracias que tendem para um serviço público assente em princípios de informação, transparência, confiança (Afonso, 2012), carecendo de melhorias sobretudo no que se refere ao valor esperado, à necessidade de incluir um período mais alargado e à redução do peso excessivo atribuído ao campo de análise resultados académicos na classificação do domínio Resultados (Duarte, 2018), centrado em testes, rankings e classificações que não logram medir a evolução qualitativa ou parâmetros não quantificáveis que não deixam de ser relevantes, dado que "avaliar é muito mais do que atribuir uma nota, uma quantificação, uma classificação. Avaliar é um processo complexo no qual intervêm fatores de ordem endógena e exógena relativos, quer aos sujeitos avaliados, quer aos sujeitos avaliadores. (Leite, 2002 p. 21).

Para lá de quaisquer lacunas, cada momento avaliativo, interno ou externo, oferece um contributo importante para que a escola, como um todo, continue a evoluir e crescer para estar cada vez mais perto de cumprir as ambiciosas metas e objetivos traçados pela tutela. Em suma, é preciso construir teorias e definir "linhas de trabalho investigativo que se centrem nas salas de aula e nas escolas e que nos permitam responder às questões que têm vindo a ser formuladas" procurando "compreender os fenómenos avaliativos com base na investigação das experiências vividas pelos seus principais intervenientes" (Fernandes, 2008b), de modo que avaliação seja cada vez mais "um instrumento que ajude a melhorar o ensino e a aprendizagem, a corrigir procedimentos, a integrar diferentes contextos, a regular e definir critérios transparentes que ajudem os alunos a organizar o seu estudo, motivando-os para a aprendizagem, a identificar dificuldades, permitindo que se possa intervir em diversos domínios" (Miguéns et al, 2014, p. 188).

Capítulo 2 - Ensino Secundário e os exames nacionais em Portugal

A estrutura do sistema educativo português tem quatro níveis principais: a educação pré-escolar, o ensino básico, o ensino secundário e o ensino superior, entre os quais se destaca neste trabalho "A Educação Secundária que corresponde aos últimos três anos da escolaridade não universitária e cujas idades normais de frequência vão dos 15 aos 17 anos" (Fernandes, 2007, p. 583).

Se no dia 9 de julho de 1964, o ministro Galvão Teles anunciava o alargamento da escolaridade obrigatória de quatro para seis anos, décadas depois, em 27 de agosto de 2009, a Lei 85/2009, da iniciativa do XVII Governo Constitucional (Ministra da Educação Maria de Lurdes Rodrigues) estabeleceu o regime de escolaridade obrigatória de 9 para 12 anos de escolaridade para os jovens até aos 18 anos.

No ensino Secundário, a escala de classificação utilizada é de 0 a 20 valores, sendo esta mais discriminativa do que a escala de 1 a 5 utilizada nos 2.º e 3.º ciclos do ensino básico.
O ensino secundário de hoje não é apenas uma via de prosseguimento de estudos, está também orientado para o mundo do trabalho e compreende quatro tipos de cursos: Científico-humanísticos, Tecnológicos, Artísticos especializados e Profissionais. Aos alunos que completem o ensino secundário é atribuído um diploma de estudos secundários, enquanto que, nos cursos tecnológicos, artísticos especializados e profissionais é atribuído um diploma de qualificação profissional de nível 3. (Gaspar, 2013, p. 24).

Os alunos dos cursos científico-humanísticos são submetidos a uma avaliação sumativa externa, através da realização de exames nacionais, em determinadas disciplinas previstas na lei na qual se inclui a disciplina de Matemática. Como instrumento de avaliação externa da responsabilidade do Ministério de Educação, "…na década de 90 e mais concretamente em 1993, foram instituídos pelo Ministério da Educação, exames nacionais no término do ensino secundário, através do Despacho Normativo nº 338/93" (Gaspar, 2013, p. 23).
"Por exames nacionais entendemos a modalidade específica de avaliação dos alunos que consiste na realização, à escala nacional, de testes normalizados e provas organizadas a nível central." (Pereira, 2019, p. 39)

Os exames têm como funções principais a certificação dos alunos e a sua seleção para efeitos de ingresso no Ensino Superior, sendo que "*Para efeitos de certificação, têm um peso de 30% e, para efeitos de seleção para o ingresso no Ensino Superior, têm um peso de 50%." (*Fernandes 2007, p. 583).

Estes exames do Ensino Secundário,

> são controlados a todos os níveis pelo Ministério da Educação por meio de vários dos seus departamentos centrais e regionais e ainda pelo Júri Nacional dos Exames (JNE),

> a quem compete coordenar e planificar todos os procedimentos operacionais e assegurar e supervisionar a correcção e a classificação das provas, assim como os pedidos de reapreciação e de reclamação que possam ser formulados pelos alunos. (Fernandes - 2007, p. 583).

No caso português, atualmente, tal como refere Fernandes (2008), em Moreira (2016), "são sete as entidades que interferem na preparação e realização dos exames nacionais: o IAVE (Instituto de Avaliação Educativa) que tem a seu cargo a elaboração e supervisão da correção das provas; a DGE (Direcção-Geral de Educação) que é responsável pela administração e coordenação do processo de recolha, tratamento e difusão de informação das provas; o JNE (Júri Nacional de Exames) que elabora o regulamento e controla os mecanismos operacionais para o fazer observar; as DGEstE (Direção-Geral dos Estabelecimentos Escolares) que agem em cooperação com as entidades centrais em questões de natureza logística e administrativa; a IGE (Inspeção-Geral de Educação) que junto das escolas assegura a realização dos exames em conformidade com os regulamentos e a igualdade de condições para todos os alunos; o EME (Editorial do Ministério da Educação) que imprime e distribui os exames por todas as escolas do país; e as forças de segurança GNR (Guarda Nacional Republicana) e PSP (Polícia de Segurança Pública) que colaboram com a EME para garantir a correta distribuição das provas" (p. 29).

A primeira estrutura com funções relacionadas com todos os aspetos relacionados com a conceção, produção e desenvolvimento dos exames nacionais foi o Gabinete de Avaliação Educacional (GAVE), criado pelo Decreto-Lei n.º 229/97 de 30 de agosto, que em 2013, através do Decreto-Lei n.º 102/2013, de 25 de julho, foi extinto e substituído pelo Instituto de Avaliação Educativa, I.P. (IAVE, IP), que, no essencial, cumpre as mesmas funções do extinto GAVE.

Na página de Internet do IAVE (iave.pt), são disponibilizados os exames já realizados, os critérios de classificação, bem como outras informações relevantes sobre os exames. No documento "Instrumentos de avaliação externa – Tipologia de itens", consultado na página do IAVE, consta informação relativa à terminologia adotada pelo IAVE, quanto à tipologia das questões que integram os exames e diz respeito ao tipo de resposta esperada e ao formato das questões. É referido que "*A opção por uma tipologia e formato de item é determinada pelo objetivo do item e pelo objeto de avaliação. Estes elementos são também determinantes para a construção dos critérios de classificação.*" (IAVE, 2020).

Quanto ao tipo de resposta esperada, as questões classificam-se em questões de seleção e questões de construção, sendo que nos exames de Ensino Secundário podemos encontrar as questões de escolha múltipla como questões de seleção (que implicam a escolha da resposta correta a partir de várias opções dadas) e as questões de resposta restrita e de resposta extensa como questões de construção (implicam a produção de uma resposta cuja estrutura e cuja extensão dependem das instruções de realização).

Nas questões de escolha múltipla, a resposta é selecionada de entre um conjunto de opções fornecidas, geralmente quatro, sendo a classificação destas respostas dicotómica, uma vez que a cotação da questão só é atribuída à resposta correta e todas as outras respostas são classificadas com zero pontos.

Nas questões de resposta restrita, a resposta implica, por exemplo, a apresentação de uma explicação, de uma previsão, de uma conclusão, de uma justificação, de uma representação ou construção gráfica, de cálculos ou de determinações gráficas. As questões de resposta extensa, também designados por questões de composição, requerem uma resposta com maior extensão do que a requerida pelas questões de resposta restrita, podendo essa resposta ser orientada por um conjunto de instruções de realização. Nas questões de resposta restrita e de resposta extensa, os critérios de classificação podem apresentar-se organizados por parâmetros (que incluem os respetivos níveis de desempenho e os descritores de cada nível), por níveis de desempenho com os respetivos descritores de cada nível - embora não organizados em parâmetros, ou por etapas devidamente explicitadas. (IAVE, 2020).
Os exames nacionais têm por referência o Programa de Matemática do Ensino Secundário em vigor à data de realização dos mesmos. São exames cotados para 200 pontos e até ao ano letivo 2016/2017 são estruturados em 2 grupos: Grupo I e Grupo II. O Grupo I que contém as questões de escolha múltipla (questões de seleção) e o Grupo II as questões de desenvolvimento (questões de construção). A partir do ano letivo 2017/2018 os exames passam a ser estruturados em dois cadernos: Caderno I e Caderno II, nos quais são incluídas, simultaneamente, questões de escolha múltipla e de desenvolvimento.

> "Até 2013, nas provas de Matemática A, foram avaliados exclusivamente conteúdos do programa de 12º ano, designadamente os que se integram nos temas Probabilidades e Combinatória, Funções (incluindo funções trigonométricas) e Números complexos. Em 2014, a prova incidiu também nos temas Geometria no plano e no espaço II e Sucessões de números reais, conteúdos do 11º ano e, a partir de 2015, passou a integrar conteúdos relativos ao tema Geometria no plano e no espaço I, do 10º ano. Apesar desta alteração no objeto de avaliação, a estrutura das provas manteve-se estável ao longo dos sete anos de aplicação, sendo constituída por dois grupos de itens: um grupo de itens de seleção (escolha múltipla) e um grupo de itens de construção. Os itens de seleção avaliam, na sua maioria, o conhecimento de conceitos, de regras e de propriedades. Os itens de construção avaliam ainda o cálculo, a resolução de problemas, a utilização da calculadora, a comunicação matemática e o raciocínio demonstrativo." (Relatório Nacional do Ensino Secundário 2010-2016, IAVE, p. 20).

Anualmente são emitidas pelo IAVE orientações para realização dos exames (Informações- Prova), a título de exemplo pode observar-se infra as publicadas pelo IAVE relativas ao exame de 2018, na qual constam as instruções de realização e os critérios gerais de classificação do exame:

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

INSTRUÇÕES DE REALIZAÇÃO E CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

MATEMÁTICA A

Prova 635 | 2018

12.º Ano de Escolaridade

INSTRUÇÕES DE REALIZAÇÃO

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro e transferidor.

Só é permitido o uso de calculadora no Caderno 1.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Apresente as suas respostas de forma legível.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

A prova inclui um formulário.

As cotações dos itens de cada caderno encontram-se no final do respetivo caderno.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Figura 1 – Instruções de Realização 2017/18

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se for apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item, só é classificada a resposta que surgir em primeiro lugar.

ITENS DE SELEÇÃO

Nos itens de escolha múltipla, a cotação do item só é atribuída às respostas que apresentem de forma inequívoca a opção correta. Todas as outras respostas são classificadas com zero pontos.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, a transcrição do texto da opção escolhida é considerada equivalente à indicação da letra correspondente.

ITENS DE CONSTRUÇÃO

Nos itens de resposta restrita, os critérios de classificação apresentam-se organizados por níveis de desempenho ou por etapas. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por níveis de desempenho resulta da pontuação do nível de desempenho em que forem enquadradas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por etapas resulta da soma das pontuações atribuídas às etapas apresentadas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

Nas respostas classificadas por níveis de desempenho, se permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração. Qualquer resposta que não atinja o nível 1 de desempenho é classificada com zero pontos.

A classificação das respostas aos itens que envolvam a produção de um texto tem em conta a organização dos conteúdos e a utilização adequada do vocabulário específico da Matemática.

As respostas que não apresentem exatamente os termos ou expressões constantes nos critérios específicos de classificação são classificadas em igualdade de circunstâncias com aquelas que os apresentem, desde que o seu conteúdo seja cientificamente válido, adequado ao solicitado e enquadrado pelos documentos curriculares de referência.

A classificação das respostas aos itens que envolvam o uso obrigatório das potencialidades gráficas da calculadora tem em conta a apresentação, num referencial, do gráfico da função ou dos gráficos das funções visualizados.

Figura 2 - Critérios gerais de classificação 2017/18

(Fonte: IAVE, 2018)

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar, em situações específicas, às respostas aos itens de resposta restrita e de resposta extensa que envolvam cálculos ou justificações.

Situação	Classificação
1. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite qualquer processo de resolução cientificamente correto, desde que enquadrado pelos documentos curriculares de referência da disciplina (ver nota 1). O critério específico é adaptado ao processo de resolução apresentado.
2. Utilização de processos de resolução que não respeitem as instruções dadas [exemplos: «sem recorrer à fórmula da probabilidade condicionada», «recorrendo à calculadora gráfica»].	A etapa em que a instrução não é respeitada e todas as etapas subsequentes que dela dependam são pontuadas com zero pontos.
3. Apresentação apenas do resultado final quando é pedida a apresentação de cálculos ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
4. Ausência de apresentação de cálculos ou de justificações necessários à resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada com zero pontos.
5. Ausência de apresentação explícita de uma etapa que não envolva cálculos ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, esta é pontuada com a pontuação prevista. Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
6. Transcrição incorreta de dados do enunciado que não altere o que se pretende avaliar com o item.	Se a dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas. Se a dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte: – nas etapas em que a dificuldade da resolução diminuir, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista; – nas etapas em que a dificuldade da resolução não diminuir, a pontuação é atribuída de acordo com os critérios específicos de classificação.
7. Transcrição incorreta de um número ou de um sinal, na resolução de uma etapa.	Se a dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se a dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
8. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
9. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades, na resolução de uma etapa.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
10. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas a passagem final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

Figura 3 - Critérios de classificação, em situações específicas, 2017/18

(Fonte: IAVE, 2018)

Situação	Classificação
11. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação de um arredondamento incorreto.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
12. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplo: é pedido o resultado na forma de fração, e a resposta apresenta-se na forma decimal].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
13. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
14. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa, bem como a cada uma das etapas subsequentes que dela dependam, é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
15. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado, ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final.	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a pontuação prevista.
17. Apresentação de elementos em excesso face ao solicitado.	Se os elementos em excesso não afetarem a caracterização do desempenho, a classificação a atribuir à resposta não é desvalorizada. Se os elementos em excesso afetarem a caracterização do desempenho, são subtraídos dois pontos à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
18. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, exceto: – se as incorreções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos; – nos casos de uso do símbolo de igualdade em que, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

Nota 1 – A título de exemplo, faz-se notar que não são aceites processos de resolução que envolvam a aplicação da regra de Cauchy, da regra de L'Hôpital ou de resultados da teoria de matrizes.

Nota 2 – Se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

Figura 4 - Critérios de classificação, em situações específicas, 2017/18 (continuação)

(Fonte: IAVE, 2018)

É também anualmente publicado em Despacho o calendário para realização dos exames, no qual constam as datas de realização da primeira e segunda fase, que têm lugar em junho/julho, respetivamente, constando ainda do mesmo as datas de afixação das pautas com os resultados. Vejamos como exemplo o do exame de 2018:

Calendário de exames finais nacionais do ensino secundário

QUADRO 1

1.ª Fase						
segunda-feira 18 de junho	terça-feira 19 de junho	quinta-feira 21 de junho	sexta-feira 22 de junho	segunda-feira 25 de junho	terça-feira 26 de junho	quarta-feira 27 de junho
9h30 — 11.º ano Filosofia (714)	9h30 — 12.º ano Português (639) Português Língua Segunda (138) PLNM (839)	9h30 — 11.º ano Física e Química A (715) Geografia A (719) História da Cultura e das Artes (724)	9h30 — 12.º ano Desenho A (706) História A (623) 9h30 — 11.º ano História B (723)	9h30 — 12.º ano Matemática A (635) 9h30 — 11.º ano Matemática B (735) Matemática Aplicada às Ciências Sociais (835)	9h30 — 11.º ano Biologia e Geologia (702) Economia A (712) Inglês (550) Francês (517) Espanhol (547) Alemão (501)	9h30 — 11.º ano Geometria Descritiva A (708) Literatura Portuguesa (734)
	14h00 — 11.º ano Latim A (732)					
Período de aplicação da componente de produção e interação orais das Línguas Estrangeiras: de 18 de junho a 29 de junho.						
Afixação de pautas: 12 de julho.						
Afixação dos resultados dos processos de reapreciação: 10 de agosto.						

Figura 5 - Calendário de exames 1.ª fase ano letivo 2017/2018

(Fonte: Despacho n.º 5458-A/2017, de 22 de junho)

QUADRO 2

2.ª Fase			
quarta-feira, 18 de julho	quinta-feira, 19 de julho	sexta-feira, 20 de julho	segunda-feira, 23 de julho
9h30 — 11.º ano Física e Química A (715) Economia A (712) História da Cultura e das Artes (724) Literatura Portuguesa (734)	9h30 — 12.º ano Português (639) Português Língua Segunda (138) PLNM (839)	9h30 — 12.º ano Matemática A (635) 9h30 — 11.º ano Matemática B (735) Matemática Aplicada às Ciências Sociais (835)	9h30 — 12.º ano História A (623) 9h30 — 11.º ano Geometria Descritiva A (708)
14h00 — 11.º ano Latim A (732)	14h00 — 11.º ano Filosofia (714)	14h00 — 11.º ano História B (723) Alemão (501) Espanhol (547) Francês (517) Inglês (550)	14h00 — 12.º ano Desenho A (706) 14h00 — 11.º ano Biologia e Geologia (702) Geografia A (719)
Período de aplicação da componente de produção e interação orais das Línguas Estrangeiras: de 18 a 25 de julho.			
Afixação de pautas: 3 de agosto.			
Afixação dos resultados dos processos de reapreciação: 24 de agosto.			

Figura 6 - Calendário de exames 2.ª fase ano letivo 2017/2018

(Fonte: Despacho n.º 5458-A/2017, de 22 de junho)

O grau de exigência do enunciado das questões de exame, bem como o grau de aprofundamento evidenciado nos critérios de classificação, vão de encontro ao definido pelo Programa, em adequação ao nível de ensino a que o exame diz respeito.

“(…) os exames nacionais são definidos de acordo com um infindável número de variáveis inteiramente interligadas com as políticas educativas que são adotadas bem como com os objetivos e mecanismos de controlo que um governo define.” (Fernandes, 2005, em Gaspar, 2013, p. 27).

Capítulo 3 – Currículo - Os Programas de Matemática A

O Currículo da Matemática no Ensino Secundário

3.1 Sobre o currículo

O processo de ensino-aprendizagem da Matemática não é o mesmo de há várias décadas atrás e tem caraterísticas próprias conforme o nível etário dos alunos e o tipo de escola onde se insere.
Pela procura de melhorar este processo, o currículo na disciplina de Matemática no nosso país tem sido alvo de mudanças importantes, quer para o ensino básico, quer para o ensino secundário.
Com a evolução da Matemática e as mudanças sociais e políticas, verifica-se periodicamente a elaboração de novos currículos que vão sendo adaptados às funções a que se encontram previstos, face à transformação da sociedade.

Uma forma de observar estas mudanças é analisar os manuais que têm sido utilizados ao longo dos tempos. Os temas neles presentes e a forma de os abordar são diferentes. Também alterações se denotam nos exames nacionais de Matemática do 12.º ano, tome-se como exemplo o exame de 2018, cujas alterações curriculares na vigência do XIX Governo Constitucional, sob a alçada do então Ministro da Educação Nuno Crato, levaram à introdução de questões de escolha alternativa entre o programa anterior e o novo programa.

Por razões de natureza cultural, prática e cívica, a Matemática que é um direito básico de todas as crianças e jovens e uma resposta a necessidades individuais e sociais, faz parte dos currículos, ao longo de todos os anos de escolaridade obrigatória.

É necessário esclarecer então que se deve entender pelo termo "currículo", cuja definição depende dos intervenientes sejam estes professores, alunos, investigadores, autores ou decisores políticos e tem vindo a ampliar-se, adquirindo novos conceitos e interpretações em função da posição teórica dos vários autores que sobre ele incidem estudos e o desenvolvem. Observem-se algumas das definições encontradas:
Definição 1:

> (…) plano de ação pedagógica muito mais largo que um programa de ensino: compreende, em geral, não somente programas, para as diferentes matérias, mas também uma definição das finalidades da educação pretendida, uma especificação das actividades de ensino e de aprendizagem, o que implica os conteúdos do programa e, finalmente, indicações precisas sobre as maneiras como o ensino ou o aluno serão avaliados (D'Hainaut, 1980).

Definição 2:
"(…) um espaço decisional em que, a partir do Programa e pela programação, a comunidade escolar, a nível de escola, e o professor, a nível de aula, articulam os seus respetivos marcos de intervenção" (Zabalza, 1992, p. 47).

Definição3:

> Um currículo é o plano operacional de ensino que descreve em pormenor o que os alunos de Matemática precisam de saber, de que forma os alunos devem atingir os objetivos identificados no currículo, o que é que os professores devem fazer para ajudar os alunos a desenvolver os seus conhecimentos matemáticos, e o contexto em que a aprendizagem e o ensino devem processar-se. (NCTM, 1994, citado por Amaro, 2018, p. 3)

Definição 4:
"(…) o currículo é um conjunto de orientações onde constam os objetivos, os conteúdos, as metodologias, os materiais e as formas de avaliação de um dado plano de estudos ou de uma disciplina." (Ponte, Matos & Abrantes, 1998, citado por Amaro, 2018, p. 3).

Até nos documentos normativos em vigor, podemos encontrar definição de currículo, dispondo o artigo 2.º do Decreto-Lei n.º 139/2012 de 5 de julho, que:

> 1 — Para efeitos do disposto no presente diploma, e em conformidade com o constante na Lei de Bases do Sistema Educativo para estes níveis de ensino, entende- se por currículo o conjunto de conteúdos e objetivos que, devidamente articulados, constituem a base da organização do ensino e da avaliação do desempenho dos alunos, assim como outros princípios orientadores que venham a ser aprovados com o mesmo objetivo.
> 2 — O currículo concretiza- se em planos de estudo elaborados em consonância com as matrizes curriculares constantes dos anexos I a VII do presente diploma, do qual fazem parte integrante, ou outras a aprovar nos termos legalmente previstos.
> 3 — Os conhecimentos e capacidades a adquirir e a desenvolver pelos alunos de cada nível e de cada ciclo de ensino têm como referência os programas das disciplinas e áreas curriculares disciplinares, bem como as metas curriculares a atingir por ano de escolaridade e ciclo de ensino, homologados por despacho do membro do Governo responsável pela área da educação.
> 4 — As estratégias de concretização e desenvolvimento do currículo são objeto de planos de atividades, integrados no respetivo projeto educativo, adaptados às características das turmas, através de programas próprios, a desenvolver pelos professores

> titulares de turma, em articulação com o conselho de docentes, ou pelo conselho de turma, consoante os ciclos.

Podemos constatar nas diversas definições, que os elementos do currículo são muito similares. Em todos eles, geralmente, estão presentes: os objetivos, os conteúdos, as estratégias, o espaço, o tempo, os recursos e a avaliação. No Ensino Secundário, em Portugal, cada disciplina tem um currículo próprio onde são expostos os objetivos para o processo de aprendizagem dos alunos e as práticas educativas que devem ser desenvolvidas ao longo do ano escolar.

Pretende-se neste trabalho apenas focar uma das finalidades do currículo, designadamente os programas escolares, que constituem uma das tarefas relevantes que podem contribuir para o sucesso do Sistema Educativo e neste pode considerar-se um guião.

> (…) sendo os programas escolares directivas gerais, aos temas obrigatórios das diferentes matérias e às noções mais particulares, quando são renovados ou examinados, são introduzidas novas matérias ou novos métodos de ensino a fim de responder às necessidades da sociedade na vida profissional, no quadro dos lazeres, nas relações humanas e na formação dos valores morais. (Ferreira, 2004, p. 33).

3.2 Programa de Matemática A 2001/2002

Por contextualização a esta pesquisa, demarcando o recorte temporal dos exames nacionais de Matemática nos quais incide o estudo, entre 2015 e 2018, tomará especial incidência à referência aos programas de Matemática A, marcados pela revisão curricular do ensino secundário, que ocorre no início deste século. Tal revisão assume de forma mais vincada a diversificação dos programas de Matemática do Ensino Secundário, passando a existir 3 disciplinas: Matemática A, Matemática B e Matemática Aplicada às Ciências Sociais (MACS).

Há a assinalar que, pela primeira vez, no Ensino Secundário, os textos dos programas de Matemática, aparecem com indicação dos seus autores, nestes casos, das respetivas equipas coordenadas por Jaime Carvalho e Silva, do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra.
A partir do ano letivo de 2004/2005, a Matemática A dispõe, em cada ano de escolaridade, de uma carga letiva semanal de 4h30m, organizada em três aulas de 90m (Carvalho e Silva e Rosa, 2003, p. 11).

Existem 3 documentos (homologados em três momentos distintos, 10.º ano em 22/02/2001, 11.º ano em 01/04/2002 e 12.º ano em 17/05/2002) que traduzem o Programa de Matemática A 2001/2002, relativos a cada um dos anos de escolaridade, em vigor a partir de setembro de 2003. O programa inclui diversas componentes, equivalentes às que são consideradas no programa anterior (1997).

Enquanto finalidades do ensino da Matemática, este programa "*elege aspetos relacionados essencialmente com a importância do papel da Matemática enquanto ciência de interpretação e intervenção no real, com a necessidade do desenvolvimento de capacidades relativas à atividade matemática, e com o apoio ao prosseguimento de estudos e inserção no mundo do trabalho"* (GTM, 2019, p. 73).

Os objetivos são associados à designação de "competências gerais" e são organizados em três dimensões, os Valores/Atitudes, as Capacidades/Aptidões e os Conhecimentos.
A primeira dimensão centrada no desenvolvimento de atitudes pessoais transversais a qualquer disciplina e a segunda no desenvolvimento de três capacidades associadas ao trabalho com a Matemática. No que respeita aos conteúdos matemáticos organizam-se segundo quatro grandes temas: Cálculo Diferencial, Geometria (no plano e no espaço), Funções e sucessões, Probabilidades (com Análise Combinatória) e Estatística. Este programa alerta para a importância significativa tanto de técnicas específicas, como de estratégias, as quais considera como temas transversais, incluídas explicitamente pela primeira vez no Ensino Secundário, que sobressaem no quadro resumo da distribuição dos temas em cada ano, as quais são valorizadas como objeto de ensino neste programa, considerando-os não menos importantes que os temas matemáticos. Juntando-se a Aplicações e Modelação Matemática, História da Matemática, Lógica e Raciocínio Matemático, Resolução de Problemas e Atividades Investigativas, Tecnologia e Matemática, este programa acrescenta mais um tema, a Comunicação Matemática. Este conjunto diz respeito a aspetos muito diferenciados como capacidades matemáticas, tarefas, recursos e conteúdos, o que poderá dificultar a compreensão do seu lugar e do seu papel no desenvolvimento curricular.

Apresenta-se a seguir um quadro resumo da distribuição dos temas por ano de escolaridade no programa de Matemática A (Silva et al., 2001a, p. 9, em GTM, 2019, p. 75):

10º ano	11º ano	12º ano
Geometria no Plano e no Espaço I ▪ Resolução de problemas de Geometria no plano e no espaço. ▪ Geometria Analítica. O método cartesiano para estudar Geometria no plano e no espaço.	Geometria no Plano e no Espaço II ▪ Problemas envolvendo triângulos. ▪ Círculo trigonométrico e funções seno, co-seno e tangente. ▪ Produto escalar de dois vectores e aplicações. ▪ Intersecção, paralelismo e perpendicularidade de rectas e planos. ▪ Programação linear (breve introdução)	Probabilidades e Combinatória ▪ Introdução ao cálculo de probabilidades ▪ Distribuição de frequências e distribuição de probabilidades ▪ Análise combinatória.
Funções e Gráficos. Funções polinomiais. Função módulo. ▪ Função, gráfico e representação gráfica. ▪ Estudo intuitivo de propriedades da: – função quadrática; – função módulo. ▪ Funções polinomiais (graus 3 e 4). ▪ Decomposição de polinómios em factores.	Funções racionais e com radicais. Taxa de variação e derivada. ▪ Problemas envolvendo funções ou taxa de variação. ▪ Propriedades das funções do tipo $f(x) = a + b/(cx + d)$ ▪ Aproximação experimental da noção de limite. ▪ Taxa de variação e derivadas em casos simples. ▪ Operações com funções. Composição e inversão de funções.	Funções exponenciais e logarítmicas. Limites e Continuidade. Conceito de Derivada e Aplicações. ▪ Teoria de limites ▪ Cálculo diferencial ▪ Problemas de optimização.
Estatística ▪ Estatística - Generalidades ▪ Organização e interpretação de caracteres estatísticos (qualitativos e quantitativos). ▪ Referência a distribuições bidimensionais (abordagem gráfica e intuitiva).	Sucessões reais. ▪ Definição e propriedades. Exemplos (o caso das progressões) ▪ Sucessão $(1 + 1/n)^n$ e primeira definição de e ▪ Limites: infinitamente grandes e infinitamente pequenos. Limites reais e convergência.	Trigonometria e números complexos. ▪ Funções seno, co-seno ; cálculo de derivadas ▪ Introdução histórica dos números complexos ▪ Complexos na forma algébrica e na forma trigonométrica; operações e interpretação geométrica
Temas Transversais		
▪ Comunicação Matemática ▪ História da Matemática ▪ Resolução de Problemas e Actividades Investigativas		▪ Aplicações e Modelação Matemática ▪ Lógica e Raciocínio Matemático ▪ Tecnologia e Matemática

Figura 7 - Quadro resumo da distribuição dos temas por ano de escolaridade no programa de Matemática A

No que concerne às orientações metodológicas, este programa propõe a estruturação de conceitos partindo da experiência do aluno e de situações concretas, ligando a Matemática à realidade e outras áreas disciplinares, com conexões histórico culturais e recurso à tecnologia.

Revela a importância de proporcionar aos alunos a realização de trabalhos diversificados e a relevância das estratégias metodológicas a adotar.

No desenvolvimento do programa as orientações específicas que se executam são referentes à forma de abordar os conteúdos, com sugestões diversas.

Quanto aos recursos, este programa intensifica o papel da tecnologia, como a utilização obrigatória de calculadoras gráficas, bem como o computador, sendo que a recomendação de uso de sensores para recolha de dados acoplados a calculadoras gráficas ou computadores, foi novidade, servindo de apoio à realização de modelações e ao uso da internet.

Relativamente à avaliação, este programa considera que deve incidir sobre o desenvolvimento de atitudes, de capacidades e a aquisição de conhecimentos matemáticos, adequada às aprendizagens esperadas, usando formas e instrumentos de avaliação diversificados, salientando a importância de avaliar não só produtos, mas também processos, com envolvimento ativo, reflexivo e responsável dos alunos. É sugerido que os testes sejam em duas fases, relativizando os seus resultados, e as redações matemáticas tenham em conta a valorização do desenvolvimento da comunicação em Matemática.

3.3 Programa e Metas Curriculares de Matemática A 2015

Em 2012, o Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho, procedeu a nova revisão curricular dos ensinos básico e secundário, concretizada na alteração das matrizes e na definição de princípios que permitissem uma maior autonomia das escolas na organização das atividades letivas.

No âmbito desta revisão da estrutura curricular e consequente alteração do programa curricular para Matemática ao nível do ensino básico (2013), surge o novo programa de Matemática A para o Ensino Secundário - Programa e Metas Curriculares de Matemática A Ensino Secundário que juntos formam um único documento, envolvendo três equipas na sua elaboração. Em complemento ao documento "Metas Curriculares de Matemática do Ensino Secundário Matemática A", vêm também outros documentos, os Cadernos de Apoio.

Este Programa e Metas Curriculares, homologado em 2014 e em vigor à data, contempla os documentos com impacto curricular na Matemática A, recentemente surgidos no período da sua vigência, as Orientações de Gestão Curricular e as Aprendizagens Essenciais.

> Pretende-se colocar Portugal num patamar de elevados índices de conhecimento matemático, procurando-se que o ensino se coadune com elevados níveis de rigor e coerência. Pensa-se o aluno numa esfera de ensino global, pelo que há a preocupação em construir um programa que acompanhe as tendências internacionais e que garanta uma sólida formação matemática, capaz de sustentar o prosseguimento de estudos num nível superior. O projeto TIMSS Advanced (Trends in International Mathematics and Science Study Advanced), ao qual Portugal está agregado a partir de 2015, é,

> igualmente, um elemento valorizado na fundamentação e organização deste programa curricular. (Lourenço, 2015, p. 4).

A proposta curricular desenha-se numa lógica de construção do conhecimento, assente noutros previamente adquiridos. Nos termos do definido no Despacho n.º 15971/2012, de 14 de dezembro, este programa serve os Cursos Científico-Humanísticos de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socioeconómicas, entrando em vigor no ano letivo 2015/2016 para o 10.º ano de escolaridade, em 2016/2017 para o 11.º ano e em 2017/2018 para o 12.º ano.

O Programa de Matemática A Ensino Secundário é composto por oito secções e aplicável a todo o Ensino Secundário. As Metas Curriculares, que com o Programa formam um único documento (Programa e Metas Curriculares Matemática A Ensino Secundário), descrevem o conjunto das metas curriculares da disciplina de Matemática A que os alunos devem atingir, sendo que os objetivos gerais completados por descritores mais precisos, estão organizados por ano de escolaridade.

O documento apresenta uma breve menção às finalidades do ensino da Matemática e uma referência aos objetivos do mesmo, numa reflexão sobre os desempenhos fundamentais a desenvolver nos alunos portugueses no Ensino Secundário.
São duas as finalidades propostas: a estruturação do pensamento (não como tema transversal) e o desenvolvimento do raciocínio que recai sobre a modelação e a aplicação desta disciplina ao mundo real.

Quanto aos objetivos tem uma formulação distinta dos programas anteriores, com base da diferenciação de desempenhos, sendo novidade o facto dos mesmos terem que ser "explicitados por verbos a que se atribuem significados específicos e que servem de base à leitura dos descritores elencados nas Metas Curriculares" (Bivar et al, 2014, p. 6, citado por GTM, 2019, p. 86), defendendo assim cinco objetivos que o aluno deve revelar: "Identificar/Designar/Referir", "Reconhecer", "Saber", "Provar/Demonstrar e Justificar", os quais concorrem para a "aquisição de conhecimentos, factos, conceitos e procedimentos, para a construção e desenvolvimento do raciocínio matemático, para a resolução de problemas em diversos contextos, para uma comunicação (oral e escrita) adequada e para uma visão da Matemática como um todo articulado e coerente." (Bivar et al, 2014, p.6, citado por GTM, 2019, p. 86).

O programa, no que respeita:
- Ao conhecimento de factos, de conceitos e de procedimentos, valoriza a aquisição de automatismos;
- Ao raciocínio, clarifica que o hipotético-dedutivo é o raciocínio de excelência;
- À resolução de problemas, explicita o significado que lhe atribui, considerando o papel dos problemas que envolvem os alunos em estratégias de motivação, deixando evidente que se refere a exercícios de aplicação com graus de dificuldade diversos, que servirão de aplicação dos conhecimentos e procedimentos previamente treinados;

- À comunicação matemática, propõe que seja desenvolvida na elucidação de questões e dúvidas e na comunicação de estratégias de resolução, defendendo a importância da redação escrita na explicação de raciocínios e apresentação de conclusões.

Nos objetivos refere ainda a História da Matemática, que se afirma contemplada em alguns descritores das Metas, com o propósito de "enquadrar de um ponto de vista histórico os conteúdos abordados." (Bivar et al, 2014, p. 7, citado por GTM, p. 88).

Ao contrário dos programas anteriores, nos conteúdos, o programa apresenta exclusivamente conhecimentos matemáticos, organizando-os em diferentes domínios numa formulação própria que distribui por ano de escolaridade.

10.º ano	11.º ano	12.º ano
• Lógica e Teoria dos Conjuntos (LTC) • Álgebra (ALG) • Geometria Analítica (GA) • Funções Reais de Variável Real (FRVR) • Estatística (EST)	• Trigonometria e Funções Trigonométricas (TRI) • Geometria Analítica (GA) • Sucessões (SUC) • Funções Reais de Variável Real (FRVR) • Estatística (EST)	• Cálculo Combinatório (CC) • Probabilidades (PRB) • Funções Reais de Variável Real (FRVR) • Trigonometria e Funções Trigonométricas (TRI) • Funções Exponenciais e Funções Logarítmicas (FEL) • Primitivas e Cálculo Integral (PCI) • Números Complexos (NC)

Figura 8 - Distribuição de conteúdos matemáticos por ano de escolaridade no programa e Metas curriculares de Matemática A, Ensino Secundário

(Fonte: GTM, 2019, p. 88)

Para cada ano de escolaridade, detalha a apresentação dos domínios em tabela, acompanhados de indicações para os tempos letivos a dedicar nos ensinos, conforme se apresenta infra:

*Tabela **1** - Distribuição dos domínios por ano de escolaridade no Programa e Metas curriculares de Matemática A, Ensino Secundário*

	10.º ano	**11. º ano**	**12. º ano**
Lógica e Teoria dos Conjuntos	• Introdução à Lógica bivalente e à Teoria dos conjuntos 18 aulas		
Álgebra	• Radicais • Potências de expoente racional • Polinómios 30 aulas		
Funções reais de variável real	• Generalidades acerca de funções • Generalidades acerca de funções reais de variável real • Monotonia, extremos e concavidade • Estudo elementar das funções quadráticas, raiz quadrada, raiz cúbica e módulo e de funções definidas por ramos • Resolução de problemas 58 aulas	• Limites segundo Heine de funções reais de variável real • Continuidade de funções • Assíntotas ao gráfico de uma função • Derivada de funções reais de variável real e aplicações 56 aulas	• Limites e Continuidade • Derivada de segunda ordem, extremos, sentido das concavidades e pontos de inflexão • Aplicação do cálculo diferencial à resolução de problemas 34 aulas
Sucessões		• Conjunto dos majorantes e conjunto dos minorantes de uma parte não vazia de $\mathbb{R}$ • Generalidades acerca de sucessões • Princípio de indução matemática • Progressões aritméticas e geométricas • Limites de sucessões 44 aulas	
Funções Exponenciais e Funções Logarítmicas			• Juros compostos e Número de Neper • Funções exponenciais • Funções logarítmicas • Limites notáveis envolvendo funções exponenciais e logarítmicas • Modelos exponenciais 44 aulas
Primitivas e Cálculo Integral			• Primitivas • Cálculo Integral • Resolução de problemas

	10.º ano	11. º ano	12. º ano
			20 aulas
Números Complexos			• Introdução aos números complexos • Complexo conjugado e módulo dos números complexos • Quociente de números complexos • Exponencial complexa e forma trigonométrica dos números complexos • Raízes n-ésimas de números complexos • Resolução de problemas 26 aulas
Geometria Analítica	• Geometria analítica no plano • Cálculo vetorial no plano • Geometria analítica no espaço • Cálculo vetorial no espaço 54 aulas	• Declive e inclinação de uma reta do plano • Produto escalar de vetores • Equações de planos no espaço 32 aulas	
Trigonometria e Funções Trigonométricas		• Extensão da Trigonometria a ângulos retos e obtusos e resolução de triângulos • Ângulos orientados, ângulos generalizados e rotações • Razões trigonométricas de ângulos generalizados • Funções trigonométricas 38 aulas	• Diferenciação de funções trigonométricas • Aplicações aos osciladores harmónicos 26 aulas
Estatística	• Caraterísticas amostrais 18 aulas	• Reta de mínimos quadrados, amostras bivariadas e coeficientes de correlação 8 aulas	
Probabilidades			• Espaço de probabilidade • Probabilidade condicionada 20 aulas
Cálculo Combinatório			• Propriedades das operações sobre conjuntos • Introdução ao cálculo combinatório •Triângulo de Pascal e Binómio de Newton 18 aulas

Nota: Uma aula corresponde a um tempo letivo de 45 minutos.

(Fonte: Programa e Metas Curriculares Matemática A Ensino Secundário, p. 9-26)

Verificam-se diferenças em relação aos programas anteriores, na forma como os conhecimentos são abordados:

> Por exemplo, a Lógica e Teoria dos Conjuntos, que era tratada de forma integrada nos anteriores programas, passa aqui a ter estatuto de domínio autónomo. A Estatística, consignada aos 10.º e 11.º anos, apresenta-se com uma perspetiva bastante diferente da de literacia estatística que inspirava o anterior programa: sobressai uma abordagem tecnicista, muito dirigida às medidas e suas manipulações simbólicas, sem que se refira sequer o uso da calculadora (…) Este aspeto é reforçado quando, no detalhe dos tópicos, o programa dispensa que a Estatística surja contextualizada em situações reais, podendo estas ser eventualmente usadas, não obrigatoriamente, e para efeitos de aplicação da teoria (GTM, 2019, p. 88-89).

A secção Níveis de Desempenho, nunca antes incluída nos documentos curriculares portugueses, "o programa assume que os conteúdos que propõe não são para todos os alunos, fornecendo um código de sinais + e # para informar os professores de quais os tópicos/exercícios que tanto no programa como nos cadernos de apoio não são exigíveis a todos os alunos" (GTM, 2019, p. 89).

Na secção dedicada a orientações metodológicas, reconhece a necessidade de o professor utilizar a sua autonomia pedagógica na abordagem eficaz ao ensino, de acordo com as caraterísticas dos alunos e da escola, não existindo propostas concretas para esse efeito, como nos anteriores programas, referindo apenas a necessidade de serem abordados regularmente conteúdos anteriores.
O programa finaliza com a avaliação, em que é considerada como um mecanismo potenciador do desenvolvimento das aprendizagens (preocupação já do anterior programa), servindo propósitos de regulação das aprendizagens e promoção de desenvolvimento das mesmas.

O programa concretiza-se, em termos dos conteúdos matemáticos, em três documentos distintos, um por cada ano de escolaridade intitulado de Metas Curriculares.

> As Metas Curriculares, que com o Programa formam um documento único, elencam, para cada domínio e em consonância com os conteúdos, os objetivos gerais a atingir em cada ano de escolaridade. Cada um deles encontra-se definido de forma precisa por um conjunto de descritores que apontam para desempenhos específicos e avaliáveis que os alunos deverão evidenciar para que esses objetivos se considerem cumpridos. (Bivar et al, 2014, p. 3, citado em GTM, 2019, p. 91).

Cada domínio de conteúdo, subdividido em subdomínio, tem elencados diversos objetivos, concretizados em descritores.

Existe, também, a oportunidade de o professor consultar cadernos de apoio para os diferentes anos escolares, nos quais podem encontrar um material de apoio que auxilie na planificação do seu trabalho pedagógico, com exemplos de exercícios de aplicação incluindo comentários que possam ser seguidos na abordagem dos assuntos. As sugestões estão organizadas fazendo referência aos respetivos descritores de cada domínio programático, codificados no documento das Metas Curriculares de Matemática A.

Atendendo a reações negativas a este programa, um Grupo de Trabalho, coordenado pela Direção Geral da Educação, redigiu o documento Orientações de Gestão Curricular para o Programa e Metas Curriculares de Matemática A, publicado em agosto de 2016, no qual antes de incidirem diretamente nos tópicos, afirmam a pretensão da igualdade no acesso a uma educação matemática de elevada qualidade a todos os alunos, apelando a que lhes sejam criadas condições para aprenderem e compreenderem *"*importantes noções matemáticas, em ambientes equitativos e desafiadores*"* (GT, 2016, p.1, citado por GTM, 2019, p. 92*)*.

Neste documento dão enfase ao conceito de aprendizagem, para que a mesma possa ser consolidada de uma forma progressiva ao longo dos três anos do ensino secundário, em que alguns descritores possam ser abordados em ano diferente dos referidos nos documentos e outros que podem ser abordados facultativamente por decisão do professor.

É retomada a questão da tecnologia, no que respeita não só a software de geometria dinâmica, estendendo as referências mas mantendo a lógica preferencial de ilustração, mas também quanto à calculadora gráfica, esclarecendo as dúvidas surgidas no novo programa quanto à sua utilização "*deve entender-se que é obrigatório que os alunos do ensino secundário, em particular, saibam utilizar uma calculadora gráfica*" (GT, 2016, p. 5, citado por GTM, 2019, p. 92-93), permanecendo ainda indefinição sobre as tarefas a realizar com ela em contexto de sala de aula.

Na sequência da publicação do documento de referência para a organização de todo o sistema educativo, contribuindo para a convergência e a articulação das decisões inerentes às várias dimensões do desenvolvimento curricular - Perfil dos Alunos à Saída do Ensino Obrigatório, por um lado numa tentativa de articulação com este, e por outro algum ajustamento adequado ao Programa e Metas Curriculares, o Ministério da Educação publicou em 2018, com entrada em vigor em 2018/2019, novos documentos curriculares, designados de Aprendizagens Essenciais, dirigidas também à disciplina de Matemática A no Ensino Secundário.

Estes documentos estão organizados por ano de escolaridade, ancorando-se no Programa e Metas Curriculares de Matemática A.
"As Aprendizagens Essenciais (AE) baseiam-se no programa e metas da disciplina para este ano de escolaridade homologados em 2014 (...). As AE aprofundam as Orientações de Gestão curricular para

o Programa e Metas Curriculares de Matemática A, (…), com as quais são totalmente compatíveis" (ME, 2018j, p. 1, citado por GTM, 2019, p. 93).
Estes documentos (Aprendizagens Essenciais), incluem alterações a alguns temas matemáticos: tal como no programa de 2001, a Estatística ganha importância justificada pela sua relevância social, a Lógica e a Teoria de Conjuntos passa a ser tema transversal, tal como a Resolução de Problemas, a História da Matemática e a Modelação Matemática.

Verificou-se ainda possibilidade de avançar para anos posteriores o estudo de alguns temas, existindo a devida articulação vertical ao longo dos três anos.
Resgatam ainda a ideia de competência do programa de 2001, de que a forma como se aprende Matemática faz diferença, sugerindo a diversificação de estratégias de ensino que diferenciem o ensino consoante os diferentes tipos de alunos e desenvolver competências matemáticas complexas, não se sintonizando desta forma com o Programa e Metas ao qual estão ligadas.

> Notamos que tanto as OGC, como as AE, são documentos que têm dificuldade em se afirmar como suficientes. Estes documentos não se constituem como currículos nem programas de Matemática, pois não se baseiam em princípios, carecem de articulação interna e externa e não contemplam todas as componentes que um currículo ou programa deve incluir. (GTM, 2019, p. 97).

3.4 Temas do 12.º ano: O antes – 2001/2002 e o depois – 2015 – Comparação entre os dois programas de Matemática A

Refletindo esta pesquisa a análise a exames de 12.º ano, e face ao descrito anteriormente, torna-se necessário evidenciar a existência de alterações significativas nos programas de Matemática A em foco neste trabalho, designadamente por aplicação do Programa homologado em 2001 e 2002 (Programa de Matemática A 2001/2002) e do Programa alterado e homologado em 2014 (Programa e Metas Curriculares de Matemática A 2015), cujas principais diferenças se pretendem, de uma forma resumida, dar relevo, relativamente aos temas do 12.º ano, conforme quadros infra (tabelas 2, 3 e 4).

*Tabela **2** - Quadros de temas matemáticos por ano escolar – 10.º ano: Programa 2001/2002 versus Programa e Metas Curriculares 2015*

10.º Ano	
Programa de Matemática A 2001/2002	Programa e Metas Curriculares de Matemática A 2015
Tema 0: Módulo inicial • Resolução de problemas que envolvam a necessidade de estabelecer conjeturas e de verificá-las, articulando temas de Geometria, Números e Álgebra. **Tema I: Geometria no plano e no espaço I** • Desenhar representações planas de sólidos geométricos. Perspetiva cavaleira • Secções determinadas num cubo por um plano • Poliedros obtidos por truncatura de um cubo • Composição e decomposição de figuras tridimensionais • Resolução de problemas no plano e no espaço envolvendo o cálculo de áreas e volumes • Referenciais cartesianos ortogonais e monométricos, no plano e no espaço • Correspondência entre o plano e o espaço e, respetivamente, os conjuntos $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ • Relações entre as coordenadas, no plano, de pontos simétricos relativamente aos eixos coordenados e às bissetrizes dos quadrantes pares e ímpares • Relações entre as coordenadas, no espaço, de pontos simétricos relativamente aos planos coordenados, aos eixos coordenados e aos planos bissetores dos octantes • Conjunto de pontos e condições	**Domínio I: Lógica e teoria de conjuntos** • Proposições. Valor lógico de uma proposição. Princípio de não contradição • Operações com proposições: negação, conjunção, disjunção, implicação e equivalência • Prioridades das operações lógicas • Propriedade da dupla negação. Princípio do terceiro excluído. Princípio da dupla implicação • Propriedades comutativa e associativa, da disjunção e da conjunção • Propriedades distributivas da conjunção, em relação à disjunção, e da disjunção, em relação à conjunção • Leis de De Morgan • Implicação contra recíproca • Expressão proposicional ou condição. Quantificador universal, quantificador existencial. Segundas leis de De Morgan. Contraexemplos • Conjunto definido por uma condição. Igualdade entre conjuntos. Conjuntos definidos em extensão • Operações com conjuntos: reunião, interseção e diferença de conjuntos. Inclusão de conjuntos. Conjunto complementar • Relação entre operações com condições e operações com os conjuntos que as definem • Princípio de dupla inclusão. Demonstração de equivalências por dupla implicação • Negação de uma implicação universal. Demonstração por contrarrecíproco **Domínio II: Álgebra** • Monotonia da potenciação • Raízes de índice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$

10.º Ano	
Programa de Matemática A 2001/2002	Programa e Metas Curriculares de Matemática A 2015
• Distância entre pontos no plano e no espaço • Lugares geométricos: circunferência, círculo e mediatriz; superfície esférica, esfera e plano mediador • Referência à elipse como deformação da circunferência • Vetores livres no plano e no espaço. Componentes e coordenadas de um vetor • Vetor como diferença de dois pontos. Soma de vetores. Soma de um ponto com um vetor. Produto de um escalar por um vetor. Norma de um vetor • Dedução de propriedades de triângulos e quadriláteros, usando vetores • Colinearidade de dois vetores • Equação vetorial da reta, no plano e no espaço • Equação reduzida da reta no plano e equação x=x_0 **Tema II: Funções e gráficos. Funções polinomiais. Função módulo** • Funções; gráficos cartesianos de funções e representações gráficas • Estudo de propriedades de funções: domínio; Contradomínio; pontos de interseção com os eixos coordenados; monotonia; continuidade; extremos relativos e absolutos; simetrias em relação aos eixos cartesianos e à origem do referencial; limites da função • Estudo das propriedades de funções quadráticas	• Propriedades algébricas dos radicais: produto e quociente de raízes com o mesmo índice, potências de raízes e composição de raízes • Racionalização de denominadores • Potências de base positiva e expoente racional • Produto e quociente de potências com a mesma base; produto e quociente de potências com o mesmo expoente e potência de potência • Divisão euclidiana de polinómios; Regra de Ruffini • Divisibilidade de polinómios. Teorema do resto • Multiplicidade da raiz de um polinómio e respetivas propriedades • Sinal e zeros de um polinómio **Domínio III: Geometria analítica** • Referenciais ortonormados, no plano e no espaço • Fórmula da medida da distância entre dois pontos no plano e no espaço em função das respetivas coordenadas • Coordenadas do ponto médio de um dado segmento de reta • Equação cartesiana da mediatriz de um segmento de reta, no plano e do plano mediador, no espaço • Equações e inequações cartesianas de um conjunto de pontos • Equação cartesiana reduzida da circunferência, no plano e da superfície esférica, no espaço • Definição de elipse e respetiva equação cartesiana reduzida • Relação entre eixo maior, eixo menor e distância focal, na elipse • Inequações cartesianas de semiplanos • Inequações cartesianas de círculos, no plano, e de esferas, no espaço • Vetores no plano e no espaço • Norma de um vetor. Vetores colineares. Vetor simétrico

10.º Ano	
Programa de Matemática A 2001/2002	Programa e Metas Curriculares de Matemática A 2015
• Estudo de propriedades de funções módulo • Análise dos efeitos da mudança de parâmetros nos gráficos de funções quadráticas e de funções módulo • Transformações de funções e efeitos na representação gráfica: y=f(x)+a; y=f(x+a); y=af(x); y=f(ax); y=|f(x)|, com a ϵ ℝ • Referência à parábola e a algumas das suas propriedades • Funções polinomiais • Decomposição de polinómios em fatores. Divisão de polinómios • Regra de Ruffini para a divisão de polinómios • Resolução de inequações por métodos analíticos e gráficos • Resolução de problemas envolvendo funções polinomiais (de graus 2, 3 e 4). Estudo analítico e gráfico • Estudo elementar de polinómios interpoladores **Tema III: Estatística** • O objeto da Estatística. Fenómenos que podem ser objetos de estudo estatístico • Breve nota histórica sobre a evolução da Estatística • Utilidade da Estatística em diversos campos do conhecimento • Recenseamento e sondagem • População e amostra. Escolha da amostra • Estatística descritiva e Estatística indutiva	• Coordenadas de um vetor • Vetor como diferença de dois pontos • Multiplicação de um vetor por um escalar • Soma e diferença entre vetores • Propriedades algébricas das operações com vetores • Soma de um ponto com um vetor • Vetor diretor de uma reta. Declive de uma reta. Paralelismo de retas • Equação vetorial de uma reta, no plano e no espaço • Sistema de equações paramétricas de uma reta • Equações de planos paralelos aos planos coordenados • Equações cartesianas de retas paralelas aos eixos coordenados **Domínio IV: Funções reais de variável real** • Gráficos de funções. Coordenadas cartesianas de pontos. Produtos cartesianos de conjuntos. Imagem de um conjunto por uma função • Funções injetivas, sobrejetivas e bijetivas • Restrição de uma função • Composição de funções • Função inversa de uma função bijetiva • Funções reais de variável real. Funções definidas por expressões analíticas • Intervalos de monotonia de uma função real de variável real • Vizinhança de um ponto da reta numérica; extremos relativos e absolutos • Sentido da concavidade do gráfico de uma função real de variável real • Extremos e raízes de uma função • Propriedades geométricas dos gráficos de funções. • Funções pares e funções ímpares • Relação geométrica entre o gráfico de uma função e o da respetiva inversa

10.º Ano	
Programa de Matemática A 2001/2002	Programa e Metas Curriculares de Matemática A 2015
• Organização e interpretação de caracteres estatísticos • Caracteres quantitativos e qualitativos. Dados simples e agrupados em classes • Variável discreta e variável contínua • Tabelas de frequências: absolutas; relativas; relativas acumuladas • Representações gráficas: gráficos circulares; diagramas de barras; polígono de frequências; histogramas; pictogramas Função cumulativa • Medidas de localização de uma amostra: média; moda; classe modal; mediana; quartis • Diagrama de extremos e quartis – dados simples e dados agrupados Medidas de dispersão de uma amostra: amplitude; variância; desvio-padrão e amplitude interquartis • Discussão das limitações estatísticas • Distribuições bidimensionais • Diagramas de dispersão • Dependência estatística. Ideia intuitiva de correlação. Coeficiente de Correlação • Exemplos de gráficos de correlação positiva, negativa ou nula • Centro de gravidade de um conjunto finito de pontos • Reta de regressão	• Relação entre o gráfico de uma função f e os gráficos das funções: • f(–x) • –f(x) • af(x) • f(bx) • f (x + c) • f (x) + d onde a, b, c, d são números reais com a e b não nulos • Estudo de funções polinomiais; funções quadráticas; das funções x → $\sqrt{x}$ e x → $\sqrt[3]{x}$ e das respetivas funções inversas; das funções da família x → a|x - b| + c, onde a ≠ 0; estudo do domínio e representação gráfica das funções definidas analiticamente por: • f (x) = a $\sqrt{x - b}$ + c • f (x) = a $\sqrt[3]{x - b}$ + c com a ≠ 0 e de funções definidas por ramos envolvendo funções polinomiais, módulos e radicais • Operações com funções: função soma; função diferença; função produto; função quociente; produto de uma função por um escalar; potência de uma função • Equações e inequações envolvendo as funções polinomiais, raiz quadrada e raiz cúbica, e a composição da função módulo com funções afins e com funções quadráticas **Domínio V: Estatística** • Definição de $\sum_{i=0}^{p} x_i$, com p ∈ IN e de $\sum_{i=m}^{p} x_i$, com 1 < m ≤ p • Tradução no formalismo dos somatórios das propriedades associativa e comutativa generalizadas da adição e distributiva generalizada da multiplicação em relação à adição Variável estatística quantitativa como função numérica definida numa população • Amostra de uma variável estatística • Média de uma amostra; propriedades da média de uma amostra • Variância e desvio-padrão de uma amostra; propriedades da variância e do desvio-padrão de uma amostra

10.º Ano	
Programa de Matemática A 2001/2002	Programa e Metas Curriculares de Matemática A 2015
	• Percentil de ordem *k*; propriedades do percentil de ordem *k*

(Fonte: Matemática A o antes e o depois, Porto Editora, p. 26-29, Programa de matemática A 2001/2002 e Programa e Metas Curriculares Matemática A 2015)

*Tabela **3** - Quadros de temas matemáticos por ano escolar – 11.º ano: Programa 2001/2002 versus Programa e Metas Curriculares 2015*

11.º Ano	
Programa de Matemática A 2001/2002	Programa e Metas Curriculares de Matemática A 2015
Tema I: Geometria no plano e no espaço II • Trigonometria no triângulo retângulo • Semelhança de triângulos • Resolução de triângulos retângulos • Razões trigonométricas dos ângulos de 30°, 45° e 60° • Círculo trigonométrico • Ângulo e arco generalizados • Graus e radianos • Comprimento de um arco • Generalização dos conceitos de seno, cosseno e tangente • Funções trigonométricas • Funções periódicas • Relação entre as razões trigonométricas de α; $-\alpha$; $\frac{\pi}{2}+\alpha$; $\frac{\pi}{2}-\alpha$; $\pi+\alpha$; $\pi-\alpha$ • Variação das funções trigonométricas seno, cosseno e tangente • Resolução de problemas que envolvam triângulos • Relação entre as razões trigonométricas do mesmo ângulo: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; $\text{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; $1 + \text{cotg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$	**Domínio I: Trigonometria e funções trigonométricas** • Extensão da definição das razões trigonométricas aos casos de ângulos retos e obtusos • Lei dos senos • Lei dos cossenos ou Teorema de Carnot • Resolução de triângulos • Ângulos orientados. Amplitudes de ângulos orientados • Rotações segundo ângulos orientados • Ângulos generalizados. Medidas de amplitude de ângulos generalizados • Ângulos generalizados e rotações • Razões trigonométricas de ângulos generalizados • Círculo trigonométrico • Medidas de amplitude em radianos • Funções seno, cosseno e tangente: domínio, contradomínio, periodicidade, paridade, zeros e extremos locais • Relação entre as razões trigonométricas de α; $-\alpha$; $\frac{\pi}{2}+\alpha$; $\frac{\pi}{2}-\alpha$; $\pi+\alpha$; $\pi-\alpha$ • Generalização da fórmula fundamental da trigonometria • Extensão da definição da tangente de um ângulo ao quociente entre seno e cosseno • Equações trigonométricas do tipo: sinx = k, cosx = k e tgx = k

11.º Ano	
Programa de Matemática A 2001/2002	Programa e Metas Curriculares de Matemática A 2015
• Expressão geral das amplitudes dos ângulos com o mesmo seno, co-seno ou tangente • Equações trigonométricas • Ângulo e arco generalizados: - Expressão geral das amplitudes dos ângulos com os mesmos lados, em graus e radianos • Funções seno, co-seno e tangente • Produto escalar de dois vetores no plano e no espaço •Expressão do produto escalar nas coordenadas dos vetores num referencial ortonormado • Ângulo de dois vetores • Ângulo de duas retas • Declive da reta, no plano, como tangente da inclinação •Retas perpendiculares em referencial ortonormado • Definição de conjuntos no plano: mediatriz; circunferência; reta tangente a uma circunferência • Definição de conjuntos no espaço: plano mediador; superfície esférica • Dedução de fórmulas trigonométricas de $\sin(x \pm y)$; $\cos(x \pm y)$ e $tg(x \pm y)$ • Perpendicularidade de vetores e de retas • Equação cartesiana do plano definido por um ponto e o vetor normal • Interseção de planos • Equações cartesianas de retas no espaço • Resolução de sistemas de 3 equações a 3 incógnitas	• Inequações trigonométricas com domínio num intervalo limitado • Funções trigonométricas inversas: arco-seno; arco-cosseno e arco-tangente • Determinação de distâncias, usando ângulos e as respetivas razões trigonométricas **Domínio II: Geometria analítica** • Inclinação de uma reta do plano e relação com o respetivo declive • Declive de uma reta como a tangente da inclinação • Produto escalar de dois vetores • Ângulo de vetores não nulos. Relação com o produto escalar • Perpendicularidade entre vetores e relação com o produto escalar • Propriedades do produto escalar • O produto escalar de um par de vetores a partir das respetivas coordenadas • Retas perpendiculares no plano – relação entre os seus declives • Vetores normais a um plano • Relação entre a posição relativa de dois planos e os respetivos vetores normais • Posição relativa entre retas e planos no espaço • Equações cartesianas, vetoriais e paramétricas de planos •Resolução de problemas envolvendo equações de planos e de retas no espaço • Determinação da interseção de planos • Resolução de sistemas de equações **Domínio III: Sucessões** • Conjunto dos majorantes e dos minorantes de um conjunto de números reais • Conjuntos minorados, majorados e limitados

11.º Ano	
Programa de Matemática A 2001/2002	Programa e Metas Curriculares de Matemática A 2015
• Paralelismo e perpendicularidade de retas e planos • Introdução à programação linear • Domínios planos • Interpretação geométrica de condições, em contextos de resolução de problemas **Tema II: Introdução ao cálculo diferencial I** • Resolução de problemas envolvendo funções (analítica e graficamente) • Domínios de funções em contextos concretos de modelação • Estudo de funções: domínio; contradomínio; pontos notáveis; monotonia; continuidade; extremos relativos; extremos absolutos; simetrias em relação aos eixos coordenados e à origem do referencial; assíntotas; limites nos ramos infinitos • Estudo de funções da classe f (x) = a + $\frac{b}{cx+d}$. Estudo dos efeitos no gráfico das mudanças de parâmetros • Equações fracionárias • Inequações fracionárias • Limite de uma função num ponto • Limites infinitos e assíntotas • Simplificação de expressões analíticas de funções racionais, de forma a esclarecer o comportamento no infinito • Limites de funções: indeterminação $\frac{0}{0}$ • Taxa de média de variação e taxa de variação • Noção de função derivável num ponto • Função derivada	• Máximo e mínimo de um conjunto • Sucessões reais • Sucessões monótonas • Sucessões majoradas, minoradas e limitadas • Princípio de indução matemática • Definição de uma sucessão por recorrência • Demonstração de propriedades utilizando o princípio de indução matemática • Progressões aritméticas: termo geral e soma de n termos consecutivos (n ∈ IN) • Progressões geométricas: termos gerais e somas de n termos consecutivos (n ∈ IN) • Resolução de problemas envolvendo progressões aritméticas e geométricas • Limite de uma sucessão (casos de convergência e de limites infinitos) • Unicidade do limite • Convergência e limitação • Operações com limites e situações indeterminadas. Levantamento algébrico de indeterminações $\frac{\infty}{\infty}$ e $\frac{0}{0}$ • Limites de sucessões definidas por polinómios • Limites de sucessões definidas por frações racionais • Limites de soma, subtração, produto ou quociente de algumas sucessões • Propriedades $\frac{1}{0^+}$ = +∞ e $\frac{1}{0^-}$ = -∞ • Limites $\lim_n a^n$, $\lim_n \sqrt[n]{a}$ (com a > 0) e $\lim_n n^p$ (com p ∈ $\mathbb{Q}$) **Domínio IV: Funções reais de variável real** • Pontos aderentes a um conjunto de números reais • Limite de uma função num ponto aderente ao respetivo domínio • Limites laterais: $\lim_{x\to a^+} f(x)$; $\lim_{x\to a^-} f(x)$ • Limites no infinito: $\lim_{x\to +\infty} f(x)$; $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ • Limites, segundo Heine, de funções reais de variável real

11.º Ano	
Programa de Matemática A 2001/2002	Programa e Metas Curriculares de Matemática A 2015
• Regras de derivação: potências; soma; diferença; multiplicação; divisão • Monotonia de uma função e sinal da respetiva função derivada • Extremos relativos num ponto de uma função e derivada da função nesse ponto • Hipérbole • Funções definidas por dois ou mais ramos • Operações com funções: soma, diferença, produto e quociente de funções racionais, envolvendo polinómios de 2.° e 3.° graus • Função inversa • Funções injetivas • Função inversa de funções com radicais quadráticos ou cúbicos • Equações irracionais • Radicais e potências de expoente fracionário **Tema III: Sucessões reais** • Conceito de sucessão • Gráfico de uma sucessão • Termo, termo geral, ordem, razão • Sucessões definidas por recorrência • Sucessões monótonas • Minorantes e majorantes • Conjuntos limitados • Sucessões limitadas • Progressões aritméticas – termo geral e soma de n termos consecutivos • Progressões geométricas – termo geral e soma de n termos consecutivos • Infinitamente grande e infinitamente pequeno • Limites de sucessões e convergência	• Determinação de limites da soma, diferença, produto e quociente de função real de variável real • Determinação de limites do produto por um escalar de uma função real de variável real • Determinação de limites da potência de expoente racional de uma função real de variável real • Limite do produto de uma função limitada por uma função de limite nulo • Limite de uma função composta • Levantamento algébrico de indeterminações • Resolução de problemas envolvendo o estudo dos zeros e do sinal de funções racionais dado por expressões da forma $\frac{P(x)}{Q(x)}$, onde P(x) e Q(x) são polinómios • Função contínua num ponto e num subconjunto do respetivo domínio • Continuidade da soma, diferença, produto, quociente e composição de funções contínuas • Continuidade das funções polinomiais, racionais, trigonométricas, raízes e potências de expoente racional • Assíntotas verticais e assíntotas oblíquas ao gráfico de uma função • Representação gráfica e assíntotas de funções racionais definidas analiticamente por $f(x) = a + \frac{b}{x-c}$, (com a, b, $c \in \mathbb{R}$) • Representação gráfica e assíntotas de funções definidas pelo radical de uma função racional • Taxa média de variação de uma função: interpretação geométrica • Derivada de uma função num ponto: interpretação geométrica • Aplicação da noção de derivada à cinemática do ponto: funções posição, velocidade média e velocidade instantânea de um ponto material que se desloca numa reta. Unidades de medida de velocidade

11.º Ano	
Programa de Matemática A 2001/2002	Programa e Metas Curriculares de Matemática A 2015
• Sucessão de termo geral $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ • Sucessões convergentes • Teorema das sucessões enquadradas • Número de Neper como limite da sucessão $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	• Derivada da soma e da diferença de funções diferenciáveis • Derivada do produto e do quociente de funções diferenciáveis • Derivada da função composta • Monotonia de uma função e sinal da respetiva função derivada • Extremos relativos de uma função e derivada da função nesses pontos • Derivada de funções definida por $f(x) = x^p$, com $p \in \mathbb{Z}$ • Derivada das funções dadas pelas expressões x, x^2, x^3, $\frac{1}{x}$ e $\sqrt{x}$ • Derivada de funções definida por $f(x) = \sqrt[n]{x}$, ($x \neq 0$ se $n > 1$ e ímpar, $x > 0$ se n é par) • Derivada de funções definida por $f(x) = x^a$, (com a racional, $x > 0$) • Cálculo de derivadas de funções utilizando as regras de derivação e as derivadas de funções de referência • Teorema de Lagrange: interpretação geométrica • Equações de retas tangentes ao gráfico de uma dada função **Domínio V: Estatística** • Reta de mínimos quadrados de uma sequência de pontos do plano • Amostras bivariadas: variável resposta e variável explicativa • Nuvem de pontos de uma amostra de dados Bivariados quantitativos • Reta dos mínimos quadrados de uma amostra de dados bivariados quantitativos • Coeficientes da reta de mínimos quadrados: interpretação • Coeficiente de correlação: interpretação

(Fonte: Matemática A o antes e o depois, Porto Editora, p. 26-29, Programa de matemática A 2001/2002 e Programa e Metas Curriculares Matemática A 2015)

Tabela ***4*** *- Quadros de temas matemáticos por ano escolar – 12.º ano: Programa 2001/2002 versus Programa e Metas Curriculares 2015*

12.º Ano	
Programa de Matemática A 2001/2002	Programa e Metas Curriculares de Matemática A 2015
Tema I: Probabilidades e combinatória • Experiência aleatória. Conjunto de resultados. Acontecimentos • Operações sobre acontecimentos • Aproximação frequencista de probabilidade • Definição clássica de probabilidade ou de Laplace • Propriedades da probabilidade • Definição axiomática de probabilidade • Probabilidade condicionada e independência • Acontecimentos independentes • Probabilidade da interseção de acontecimentos •Variável aleatória; função massa de probabilidade • Distribuição de probabilidades de uma variável aleatória discreta • Distribuição de frequências versus distribuição de probabilidades • Média versus valor médio • Desvio-padrão amostral versus Desvio-padrão populacional • Modelo binomial • Modelo normal; histograma versus função densidade • Arranjos completos. Arranjos simples. Permutações. Combinações • Triângulo de Pascal • Binómio de Newton • Demonstração por indução matemática • Aplicação da análise combinatória ao cálculo de Probabilidades	**Domínio I: Cálculo combinatório** • Propriedades das operações com conjuntos: comutativa, associativa, de existência de elemento neutro e elemento absorvente, idempotência da união e da interseção e propriedades distributivas da união em relação à interseção e da interseção em relação à união • Distributividade do produto cartesiano relativamente à união • Cardinal de um conjunto. Conjuntos equipotentes • Cardinal da união de conjuntos disjuntos • Cardinal do produto cartesiano de conjuntos finitos • Arranjos com repetição • Número de subconjuntos de um conjunto de cardinal finito • Permutações. Fatorial de um número inteiro não negativo • Arranjos sem repetição • Número de subconjuntos de p elementos de um conjunto de cardinal n. Combinações • Aplicações do cálculo de cardinais de conjuntos, contagens, arranjos e combinações • Fórmula do binómio de Newton • Triângulo de Pascal: definição e construção • Aplicações da fórmula do binómio de Newton e do triângulo de Pascal **Domínio II: Probabilidades** • Probabilidade no conjunto das partes de um espaço amostral finito. Espaço de probabilidades • Acontecimentos impossível, certo, elementar e composto. Acontecimentos incompatíveis. Acontecimentos contrários. Acontecimentos equiprováveis • Regra de Laplace • Probabilidade do acontecimento contrário. Probabilidade da diferença e da união de acontecimentos. Monotonia da probabilidade

12.º Ano	
Programa de Matemática A 2001/2002	Programa e Metas Curriculares de Matemática A 2015
Tema II: Introdução ao cálculo diferencial II • Função exponencial de base superior a 1; Crescimento exponencial; Estudo das propriedades analíticas e gráficas da família de funções definidas por $f(x) = a^x$, com $a > 1$ • Função logarítmica de base superior a 1 • Estudo das propriedades analíticas e gráficas da família de funções definidas por $f(x) = \log_a x$, com $a > 1$ • Regras operatórias de exponenciais e logaritmos •Utilização de funções exponenciais e logarítmicas na modelação de situações reais • Limite de uma função segundo Heine • Propriedades operatórias sobre limites • Indeterminações • Limites notáveis • Cálculo de limites • Assíntotas ao gráfico de uma função • Continuidade de uma função • Teorema de Bolzano-Cauchy • Funções deriváveis. Regras de derivação. Derivadas de funções elementares • Teorema da derivada da função composta • Segunda derivada de uma função e concavidade • Estudo de funções em casos simples • Integração do estudo do Cálculo Diferencial num contexto histórico • Problemas de otimização	• Determinação de probabilidades em situações de equiprobabilidade de acontecimentos elementares • Probabilidade condicionada • Acontecimentos independentes • Teorema da probabilidade total **Domínio III: Funções reais de variável real** • Teoremas de comparação para sucessões. Teorema das sucessões enquadradas • Teoremas de comparação envolvendo desigualdades entre funções e os respetivos limites • Teorema das funções enquadradas • Determinação de limites de funções reais de variável real • Teorema dos valores intermédios ou teorema de Bolzano-Cauchy • Teorema de Weierstrass • Derivada de segunda ordem de uma função • Sinal da derivada de segunda ordem num ponto crítico e identificação de extremos locais • Pontos de inflexão e concavidades do gráfico de funções duas vezes diferenciáveis • Interpretação cinemática da derivada de segunda ordem de uma função posição: aceleração média e aceleração. Unidades de medida de aceleração • Estudo completo e construção de representações gráficas de funções diferenciáveis • Problemas de otimização envolvendo funções diferenciáveis • Problemas envolvendo funções posição, velocidades médias e velocidades instantâneas, acelerações médias e acelerações instantâneas e mudanças de unidades de aceleração • Resolução aproximada de equações da forma $f(x) = g(x)$ utilizando a calculadora gráfica **Domínio IV: Trigonometria**

12.º Ano	
Programa de Matemática A 2001/2002	Programa e Metas Curriculares de Matemática A 2015
Tema III – Trigonometria e números complexos • Funções seno, cosseno e tangente. Estudo intuitivo com base no círculo trigonométrico, tanto a partir de um gráfico particular, como usando calculadora gráfica ou computador • Estudo intuitivo de $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ =1 • Derivadas das funções seno, cosseno e tangente • Utilização de funções trigonométricas na modelação de situações reais • Números complexos. O número i. O conjunto c dos números complexos • Representação geométrica dos números complexos • A forma algébrica dos números complexos. Operações com complexos na forma algébrica • Representação de complexos na forma trigonométrica. Escrita de complexos nas duas formas passando de uma para a outra. • Operações com complexos na forma trigonométrica •Interpretação geométrica das operações com números complexos • Domínios planos e condições em variável complexa • Demonstração de propriedades de Geometria usando números complexos	• Fórmulas trigonométricas para cos $(\alpha \pm \beta)$; sin $(\alpha \pm \beta)$; cos (2α) e sin (2α) • Limite notável $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}$ • Diferenciabilidade das funções seno, cosseno e tangente • Estudo de funções definidas a partir de funções trigonométricas • Osciladores harmónicos. Amplitude, pulsação, período, frequência e fase • Estudo das funções definidas analiticamente por $a$sin $(bx + c) + d$; $a$cos $(bx + c) + d$; $a$tg $(bx + c) + d$, com $a \neq 0$ • Lei de Newton e Lei de Hooke • Soluções de equações diferenciais da forma $f'' = -\alpha f$, onde $\alpha > 0$ • Problemas envolvendo osciladores harmónicos **Domínio V: Funções exponenciais e funções logarítmicas** • Cálculo de juros compostos • Sucessão de termo geral $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Definição do número de Neper • Propriedades da função definida nos números racionais pela expressão $f(x) = a^x$, (com $a > 0$): monotonia, continuidade, limites, propriedades algébricas • Definição das funções exponenciais de base a e respetivas propriedades • Função exponencial e^x • Limite notável $\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x}$ • Derivada da função exponencial • Função logarítmica de base a≠1 enquanto bijeção recíproca da função exponencial de base a. Logaritmo decimal e logaritmo neperiano • Monotonia, sinal, limites e propriedades algébricas dos logaritmos

12.º Ano	
Programa de Matemática A 2001/2002	Programa e Metas Curriculares de Matemática A 2015
	• Derivadas das funções logarítmicas e da função a^x, com a > 0 • Derivada da função x^a, a real, x > 0 • Limites notáveis: - $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^k}$ - $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x}$ • Estudo de funções definidas a partir de funções exponenciais e logarítmicas: propriedades algébricas; limites notáveis • Soluções de equações diferenciais da forma f '= kf, com k € ℝ **Domínio VI: Primitivas e cálculo integral** • Primitiva de uma função num intervalo. Família das primitivas de uma dada função num intervalo • Primitivas de funções de referência: 1; $\frac{1}{x}$; e^x; sinx; cosx; x^α (com α real, $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq$- 1) • Linearidade da primitivação • Primitivas de funções da forma *u'* (*x*)*f* (*u*(*x*)) • Definição intuitiva da noção de integral de funções contínuas não negativas ou não positivas num intervalo limitado e fechado • Extensão da definição de integral a funções contínuas que alternam de sinal um número finito de vezes • Origem histórica do símbolo de integral • Fórmula de Barrow, para o cálculo de primitivas de funções num intervalo limitado • Teorema fundamental do cálculo integral • Relação de Chasles • Propriedade de monotonia do integral definido • Linearidade do integral definido • Aditividade do integral em relação ao domínio • Cálculo de medidas de área de regiões do plano **Domínio VII: Números complexos**

12.º Ano	
Programa de Matemática A 2001/2002	Programa e Metas Curriculares de Matemática A 2015
	• A fórmula de Cardano e a origem histórica dos Números complexos • Operações em $\mathbb{R}^2$: (a, b) + (c, d) e (a, b) x (c, d) • Propriedades das operações + e x definidas em $\mathbb{R}^2$: comutativa, associativa, distributiva da multiplicação em relação a adição; existência de elementos neutros • Corpo dos números complexos $\mathbb{C}$ • Número i • Forma algébrica da representação dos números complexos. Parte real e parte imaginária • Conjugado de um número complexo • Módulo de um número complexo • Propriedades algébricas e geométricas dos números complexos • Inverso de um número complexo não nulo • Quociente de números complexos • Exponencial complexa $e^{i\theta}$= cos θ+ isin θ, com θ € $\mathbb{R}$ • Propriedades algébricas e geométricas da exponencial complexa • Representação trigonométrica de um número complexo • Fórmula de De Moivre: $(cos\ \theta\ +\ isin\ \theta)^n$ = cos(nθ) + isin(nθ) • Raízes n-ésimas de números complexos • Soluções das equações da forma z^n = w, onde n € N; w € $\mathbb{C}$ • Raízes complexas de polinómios de segundo grau de coeficientes reais

(Fonte: Matemática A o antes e o depois, Porto Editora, p. 26-29, Programa de matemática A 2001/2002 e Programa e Metas Curriculares Matemática A 2015)

Capítulo 4 – Taxonomia SOLO

Embora Piaget (1896-1980) não pretendesse propor uma teoria específica de aprendizagem, a verdade é que trouxe contribuições importantes no campo da Educação, por exemplo nos Estados Unidos da América, Europa e Brasil.

A sua teoria [de desenvolvimento cognitivo] em torno do entendimento dos processos do desenvolvimento do ser humano, numa perspetiva de que as estruturas cognitivas do sujeito não nascem prontas, assentava no princípio de que o individuo evoluía a partir da sua interação com o meio, provocando conflitos cognitivos com construções sucessivas, promovendo o desenvolvimento das estruturas do pensamento e o raciocínio lógico conduzindo à construção do conhecimento.

Nesse processo de construção, Piaget considerava quatro estágios do desenvolvimento da inteligência do indivíduo, desde o nascimento e de acordo com a faixa etária: sensório-motor – dos 0 aos 1½ ou 2 anos, pré-operatório – dos 1½ ou 2 anos aos 6 ou 7 anos, operatório-concreto – dos 6 ou 7 anos aos 11 ou 12 anos e operatório-formal – mais de 11 ou 12 anos.

Com uma intenção de fornecer um modelo para o desenvolvimento cognitivo, Biggs e Collis (1982) desenvolveram uma teoria baseada nos estágios piagetianos de desenvolvimento, para explicar a evolução do entendimento dos indivíduos num dado domínio, face a um novo conhecimento, através de estágios ascendentes que envolvem estruturas cognitivas cada vez mais complexas (nomeadamente porque a teoria de Piaget fornece parâmetros importantes sobre o processo de pensamento da criança relacionados aos estágios de desenvolvimento cognitivo).

Estes autores designam esses estágios como modos de pensamento, os quais definem como a forma de representação de um problema. Denominam modos de pensamento como “níveis de abstração que vão progredindo desde as ações concretas aos princípios e conceitos abstratos, o que forma a base dos estágios evolutivos” (Biggs e Collis, 1991, citado por Palau, 1997, p. 43). Neste pressuposto e considerando os estágios piagetianos, adaptam-nos aos seus propósitos emergindo assim cinco modos de pensamento:

1. Sensório-Motor (desde o nascimento): o bebé só consegue interagir com o mundo na forma mais concreta dando uma resposta motora a um estímulo sensorial. Este modo não se extingue com a aquisição de outros modos, pois está relacionado ao conhecimento não expresso, mas que se subentende, através do qual se estabelecem relações com outros indivíduos e o meio envolvente ao longo da vida;
2. Icónico (aproximadamente aos 18 meses): caraterizado como pré-simbólico já que se uma ação se torna mais abstrata deve ser representada de alguma forma, existindo a codificação da realidade através de símbolos. A linguagem, insuficiente, tem função de pré-requisito. Coexistindo com outros modos, após a fase infantil, está presente em todas as fases da vida crescendo em poder e complexidade;

3. Concreto-Simbólico (por volta dos 6 anos): inicia-se uma troca significativa da abstração desde a simbolização direta do mundo através da linguagem oral a escrita, sistemas de símbolos que se aplicam ao mundo das experiências. A criança pensa em termos de símbolos existindo uma lógica e uma ordem simbólica entre os próprios símbolos e a vida quotidiana. Este modo envolve pensamento declarativo, que expressa conhecimentos relativo a factos e relações entre objetos e conhecimento;
4. Formal (aproximadamente aos 14 anos): O pensamento formal produz-se num sistema abstrato de construções em que podem gerar-se formas alternativas de ordenar o mundo, sendo capaz de passar do particular para o abstrato e apoiar-se em princípios e teorias. Este sistema abstrato, apesar de poder surgir nessa idade, não se generaliza para todos os domínios do conhecimento e todo o pensamento, mas identifica-se com o conhecimento em determinada disciplina ou em determinado âmbito do conhecimento dominante desse âmbito. Alguns indivíduos podem nunca chegar a desenvolver esse modo de pensar. Segundo Biggs e Collis (1982), a competência técnica exige um entendimento dos princípios básicos subjacentes a uma disciplina, de forma que o estudante possa gerar alternativas viáveis quando as regras de ação se mostram inadequadas;
5. Pós-Formal (por volta dos 20 anos): O indivíduo tem a capacidade de operar em novos campos de ação e exibir com consciência a capacidade de adquirir e estruturar o seu conhecimento. O pensamento pós-formal é mais raro e submete-se ao mais alto nível de abstração. Supõe perguntar-se pelas fronteiras convencionais da teoria e da prática. Está alheio a qualquer nível educativo.

> Nós acreditamos que existem estágios naturais no desenvolvimento da aprendizagem de qualquer matéria ou habilidade complexa e que em certos aspetos importantes nestes estágios são semelhantes, mas não idênticos, aos estágios de desenvolvimento do pensamento descritos por Piaget e seus colegas. (Biggs e Collis, 1982, p. 15).

Amantes e Borges (2004), referem que

> Os modos considerados por BIGGS e COLLIS apresentam características semelhantes aos estágios piagetianos no que diz respeito ao período de surgimento das estruturas cognitivas e às formas de estruturação e manipulação dos conteúdos: eles admitem que i) é possível descrever, em termos de períodos de idades, alguns aspectos comuns da aprendizagem, ii) as atividades vão crescendo em termos da abstração e que iii) há claras diferenças qualitativas ou descontinuidades no modo de lidar com um mesmo conhecimento em vários períodos. *(p. 4)*

Percebemos assim que os estágios ou modos de pensamento que Biggs e Collis defendiam, tinham características semelhantes aos estágios piagetianos uma vez que surgem em idades comparáveis às dos estágios invocados na teoria de Piaget, contudo, contrariamente ao que este autor defendia de que os estágios eram gerais no domínio do conhecimento e não coexistiam entre eles, aqueles autores consideram que quando um indivíduo alcança um modo de pensamento mais elevado, o novo modo não elimina o anterior e que pode, ainda, ocorrer de diferentes maneiras mas de forma simultânea em áreas diferentes de conhecimento - teoria multimodal do desenvolvimento cognitivo. Isto significa que os estágios, como definido por Piaget, para um mesmo sujeito são distintos para diferentes conteúdos. Assim, um estágio é caraterizado pelo nível de abstração da forma como os conteúdos são exibidos e não pela complexidade estrutural do pensamento como um todo, o que para Piaget se devia à progressão etária ainda que com influência de fatores externos.

Estes modos de pensamento, têm níveis de complexidade ascendentes que determinam como o conhecimento está estruturado e dizem respeito às relações estabelecidas entre vários elementos e o conteúdo aprendido. Esta teoria de Biggs e Collis apesar de se basear em princípios piagetianos para compreender a progressão do entendimento de conteúdos de domínio particular com estágios específicos para cada domínio com níveis de complexidade de entendimento, funciona como um sistema de categorias no qual se identificam patamares de formalização do pensamento de conteúdos específicos.

Em contexto escolar, relativamente ao processo de aprendizagem, os autores identificam dois tipos de aprendizagem: a superficial e a profunda. Na superficial, o processo de aquisição passa pela reprodução detalhada do conteúdo ensinado: “A motivação é focalizar nos tópicos e elementos mais importantes, para tentar reproduzi-los com precisão; por isso os estudantes não veem conexão entre os elementos ou significados e as implicações do que é aprendido.” Biggs (1995), citado em Amantes e Borges (2004, p. 4).

Na aprendizagem profunda, o processo de aquisição requer um entendimento intrínseco sobre o conteúdo envolvendo processos de um nível cognitivo mais elevado: “A procura por analogias, relações com o conhecimento prévio, teorização sobre o que foi aprendido e derivações de extensões e excepções.” Biggs (1995), citado em Amantes e Borges (2004, p. 4).

Os dois tipos de aprendizagem acima descritos, superficial e profunda, podem ser identificados nos estágios cognitivos ou modos, sendo consequência das diversas maneiras de operar um conteúdo, ainda que a aprendizagem seja realizada utilizando atributos de um único modo (unimodal) ou quando é realizada com atributos de vários modos ao mesmo tempo (multimodal), sendo que essas aprendizagens relacionam-se com os níveis de complexidade na estruturação do entendimento de um certo conteúdo.

Consideram Biggs e Collis que a maturidade, a disponibilidade da memória, o confronto com um problema, o suporte social e o nível das respostas são fatores fundamentais na passagem de um modo a outro, de nível de complexidade superior, isto é, a aprendizagem de um novo conhecimento envolve estruturas cognitivas cada vez mais complexas, através de estágios ascendentes, como que graus de aprendizagem sobre os conteúdos em causa.

Partindo destes princípios, com aspetos propostos por Piaget mas com introdução de novas singularidades, apresentam um sistema para categorizar respostas, questões e tarefas, criando uma teoria que denominaram “Structure of Observing Learning Outcome”, cujas iniciais dão lugar às siglas SOLO, conhecida por Taxonomia SOLO.

Defendem que Taxonomia SOLO pode ser utilizada não só na avaliação da qualidade da aprendizagem, mas também para objetivos curriculares, uma vez que a partir de instrumentos desenvolvidos permite identificar níveis hierárquicos de complexidade do entendimento sobre conteúdos de domínios distintos. De acordo com a definição no dicionário online, taxonomia é a “Ciência que se dedica à classificação”. Assim, considerando que as taxonomias se aplicam a vários domínios, podemos descrever Taxonomia como um sistema de classificação ou categorização ordenado de acordo com critérios estabelecidos.

No que respeita a este trabalho, “(…) podemos definir a Taxonomia como um sistema de categorização que identifica e descreve, de forma sistemática a evolução da complexidade de conhecimento de um aluno e que pode ser usado como ferramenta metodológica para pesquisas que avaliam aprendizagem.*”* (Pereira, 2019, p. 33).

Biggs e Collis (1982) defendem que é possível avaliar o desempenho de um certo sujeito, num determinado momento, sem qualquer dedução sobre a sua estrutura cognitiva, consistindo esta a maior diferença comparativamente a outros modelos que analisam o conhecimento. Para isso, estabelecem que a análise deixe de recair sobre as capacidades dos indivíduos e se debruce sobre as respostas que estes dão durante o desempenho de uma determinada tarefa. Na prática, este pressuposto implica que seja atribuída uma categoria à resposta dada na realização de uma dada tarefa, tendo como finalidade avaliar o seu desempenho sem a pretensão de avaliar a estrutura cognitiva, admitindo que em circunstâncias distintas o desempenho possa ser diferente, dependendo de vários fatores, sem que as capacidades individuais se alterem.

*“*A Taxonomia desenvolvida por BIGGS e COLLIS apresenta diversas possibilidades de avaliação de tarefas, tendo-se como parâmetro o desenvolvimento cognitivo através de uma hierarquia de níveis de complexidade.*”* (Amantes e Borges, 2004, p. 9).

Estabelece a Taxonomia SOLO cinco categorias ou níveis de resposta: pré-estrutural, uni-estrutural, multi-estrutural, relacional e abstrato, cada um definido à custa de três parâmetros que permitem especificar e categorizar os diferentes tipos de respostas ou produções que lhe correspondem: as capacidades, as operações envolvidas e a consistência e capacidade de concluir.
*“*Capacidades, (…), refere-se à quantidade de memória de trabalho, ou de tempo em que a atenção está mobilizada, requerida por cada um dos diversos níveis da taxonomia SOLO*.”*
*“*Operações envolvidas, (…), diz respeito à forma como as respostas produzidas são adequadas às questões formuladas*.”*

"Consistência e Capacidade de Concluir, (…), descreve dois fenómenos, quase contraditórios: a necessidade de chegar a uma conclusão; e a necessidade de tornar consistentes as conclusões, isto é, sem contradições quer entre a conclusão e os dados fornecidos, quer entre possíveis conclusões distintas." (Ceia, 2010, p. 5).

Os níveis de resposta, podem, genericamente e de forma abstrata, ser descritos da seguinte forma:

- Pré-estrutural: Na resposta são utilizados aspetos irrelevantes do modo de pensamento, isto é, os elementos necessários para identificar um modo de pensamento não são usados, uma vez que as respostas são inadequadas. Neste nível, o aluno poderá nem ter atenção suficiente para lembrar pelo menos um aspeto importante, obtendo assim uma conclusão repentina e sem consistência. Isto quer dizer que o aluno não responde à questão, quer por distração ou confusão.
- Uni-estrutural: O aluno tem o pensamento correto, mas, não utilizando todos os dados, recorrerá apenas a um aspeto relevante que responde diretamente à questão. Pode conduzir a respostas sem fundamento ou inconsistentes, já que podem ter-se várias conclusões corretas, mas não coerentes entre si.
- Multi-estrutural: O aluno tem foco em vários elementos e informações que incorpora na resposta, contudo não relacionados ou integrados entre si, o que leva a que possam aparecer inconsistências na sua resposta.
- Relacional: Este tipo de resposta incorpora informações que são facilmente entendidas, englobando vários aspetos relevantes que se relacionam e integram de forma coerente, contudo sem conseguir ter uma visão total do conhecimento envolvido. A conclusão, útil num contexto, pode ter ligação aos aspetos concretos e ser falível noutro contexto.
- Abstrato Estendido: A resposta abstrata tem uma estrutura coerente que vai para além das informações fornecidas pela questão, num nível mais alto de abstração e generalização de ideias a outros casos, permitindo fazer outras deduções, mostrando uma consistência global com princípios aplicáveis a qualquer situação.

Os níveis expostos acima são crescentes em complexidade, através da crescente procura pela quantidade de memória ou poder de concentração e representam o processo de progressão do entendimento realizado em momentos diferentes, em que a familiarização com os conceitos permite uma abstração ascendente na capacidade de resposta de um aluno. Estes níveis são ordenados e dizem respeito às relações estabelecidas entre diferentes elementos e o conteúdo apreendido, quanto ao número de dimensões, à consistência entre essas relações e a generalização dos princípios utilizados.

De acordo com esta categorização, a Taxonomia SOLO fornece uma forma sistemática de descrever como o conhecimento de um aluno cresce em complexidade quando realiza muitas tarefas escolares. Nos níveis uni-estrutural e multi-estrutural, o aluno interpreta a informação dada e utiliza uma estratégia conhecida para fornecer a resposta, enquanto que nos níveis relacional e abstrato ele tem de pensar em muitos objetos e conhecimentos de uma só vez e avaliar quais os que estão relacionados entre si.

Assim, os níveis uni-estrutural e multi-estrutural estão relacionados com a aprendizagem superficial e os níveis relacional e abstrato com a aprendizagem profunda. Qualquer aluno, ao elaborar uma resposta a uma questão, pode mostrar o seu conhecimento em diferentes níveis de complexidade para o mesmo modo de pensamento. Consegue um determinado modo quando exercita capacidades básicas para atingir o desempenho uni-estrutural desse modo, evoluindo até alcançar uma resposta mais elaborada, multi-estrutural, e atingir um nível mais complexo, relacional. Quando chegar ao nível abstrato, significa que alcança o modo de pensamento mais elevado de entendimento cognitivo.

"Para atingir uma certa competência os indivíduos passam por momentos em que treinam capacidades elementares (uni-estrutural), depois dominam várias capacidades (multi-estrutural), acabando por utilizar esse domínio com um fito pré-determinado (relacional). O nível abstracto será atingido quando se estabelece uma estratégia para obter determinados resultados." (Ceia, 2010, p. 8).

Existe uma sequência consistente neste progresso hierárquico dos níveis de complexidade de resposta em cada modo de pensamento, que nos dá a informação sobre o quanto a aprendizagem avançou, uma vez que estes níveis de complexidade, ao se estabelecerem em cada modo de pensamento, formam ciclos de aprendizagem crescente, que se podem repetir dentro de um mesmo modo. O número de ciclos vai depender da natureza do conhecimento apreendido, pois se for muito complexo requer vários conteúdos, muitas relações, maior grau de abstração exigindo mais de um ciclo de aprendizagem.

Os ciclos de aprendizagem fazem parte do processo de entendimento e quando um ciclo se repete sem existir diferença na forma de representar o conhecimento, não há mudança no modo de pensamento, contudo ocorre um grau maior de entendimento por ser maior a abstração. Esta passagem de um ciclo a outro aponta para uma progressão no entendimento do conceito.

A Taxonomia SOLO desenvolvida por Biggs e Collis, tem vindo a ser utilizada de diferentes formas e nos vários domínios do conhecimento, uma vez que "(…) fornece uma forma sistemática de descrever como o conhecimento de um aluno cresce em complexidade quando realiza muitas tarefas escolares." (Filipe, 2011, p. 25).

Investigações realizadas demostram que a Taxonomia SOLO é uma referência útil para a avaliação das aprendizagens.

Esta Taxonomia tem sido usada

> por professores para fins de avaliação de aprendizagens, para avaliar o tipo de aprendizagem que os professores promovem em suas acções docentes, e para avaliar programas de ensino, além de servir como instrumento metodológico de pesquisas educacionais. Como sugere uma progressão dos alunos em cinco níveis de complexidade dentro de um modo específico, a sua utilização por professores leva ao desenvolvimento de programas que permitem aos alunos enriquecer e aumentar a sua aprendizagem profunda (Hattie e Brown, 2004, citado em Filipe, 2011, p. 26).

Para além de ser um instrumento metodológico para pesquisas educacionais como referido,

> demonstra ainda a vantagem de ser um modelo aplicável à avaliação da qualidade da aprendizagem, independentemente do grau escolar ou disciplina, uma vez que os conceitos que enuncia são gerais e adaptáveis a diferentes situações, o que a torna especialmente apta para que a avaliação seja efetuada de forma objetiva e sistemática. (Pereira, 2019, p. 37).

A Taxonomia SOLO permite ainda que o processo de avaliação tenha um instrumento de análise qualitativa da aprendizagem, útil para decisores e intervenientes na área educativa.

Capítulo 5 – Metodologia

5.1 Modelo SOLO como metodologia de análise de respostas

Os resultados dos exames nacionais são alvo de opiniões sob a forma de recriminações e lamentações na sociedade, principalmente na disciplina de Matemática, contudo os mesmos, por não terem suporte credível, não podem ser tomados em conta para o contributo da melhoria quer da avaliação do conhecimento matemático, quer da educação matemática. Recolhem-se pareceres de especialistas sem que se recorram a instrumentos ou procedimentos que minimizem a subjetividade e embora a entidade responsável pelos exames nacionais realize com frequência análises a determinados itens, não têm sido utilizadas metodologias de análise. É necessário que existam indicadores credíveis, baseados em evidências empíricas.

Com o presente estudo, que se espera constituir um desses indicadores, pretende-se responder a questões fulcrais que se consideram relevantes, no que respeita à avaliação qualitativa de exames portugueses de âmbito nacional de Matemática A.

Com esse propósito incidiu-se na análise de quatro exames nacionais de Matemática A, da 1.ª chamada/versão A, para os anos 2015, 2016, 2017 e 2018, de forma a permitir retirar conclusões significativas relativamente aos mesmos.

Esta análise teve como base o *Modelo de categorização das questões de exames*, da autoria de Mário Ceia, apresentado no ponto 5.2, que sustentará a interpretação dos dados e a fundamentação dos resultados deste trabalho.

As respostas às questões que a seguir se elencam, suportarão as conclusões desta pesquisa.

- Que variação existe nos temas curriculares nos exames para os anos em estudo?
- Que variação de categorias/níveis SOLO existem nos exames em estudo?
- Existe variação na complexidade/grau de dificuldade nos exames nos anos em análise?
- Que diferenças significativas se verificam com a alteração do programa de Matemática A?

Convém salientar o motivo da escolha de exames integrados num contexto temporal de avaliação desfasado. Tal justifica-se pela pretensão de analisar exames em determinado contexto governamental, considerando que naquele contexto se verificaram alterações ao programa de Matemática A do 12.º ano, que julgamos importante destacar.

Sobre os exames referenciados, foi feita uma análise e categorização de cada uma das questões que os compõem, apresentando-se depois uma síntese para cada um destes exames, com vista a estabelecer breves comparações em relação à estrutura dos mesmos no que respeita aos conteúdos, à categoria atribuída mais evidente e, se possível, feita uma análise comparativa de exigência e resultados face ao grau de dificuldade, tendo em conta a complexidade dos mesmos, face ao *Modelo de categorização das questões de exames* seguido.

O estudo dos exames foi realizado a partir da análise das respostas aos mesmos, não as resoluções reais dadas pelos alunos por impossibilidade prática, mas as propostas de respostas idealizadas ou as soluções esperadas, que segundo o autor do Modelo utilizado, Mário Ceia, as designou por "*soluções hipotéticas*" e as quais descreveu como "*resoluções compatíveis com os conhecimentos e as capacidades esperados para um estudante do nível de ensino a que o exame diz respeito*".

Para encontrar estas "resoluções compatíveis" foram tidas em conta as competências e conhecimentos prescritos nos programas oficiais e os procedimentos apontados nos manuais de apoio à implementação dos programas, de forma que a resposta seja acomodada à de um estudante com os conhecimentos e as capacidades próprias do 12.º ano.

Assim, como "*soluções hipotéticas*", considerámos as indicadas nos critérios de classificação dos exames recolhidas através do site do Instituto de Avaliação Educacional (IAVE) e Associação de Professores de Matemática (APM).

Tendo por base as respostas idealizadas ou "soluções hipotéticas" para cada questão procurou-se observar de que forma as questões apresentadas em cada exame são variadas no que concerne às categorias (nível e quantidade de conhecimento abordados), assim como em relação aos domínios por temas constantes do programa curricular e ao tipo de resposta requerida.

Para a categorização SOLO das questões, através do "Modelo de categorização das questões de exame", utilizámos as referências Categoria A (Abstrato), Categoria B (Relacional), Categoria C (Multi-estrutural), Categoria D (Uni-estrutural) e Categoria E (Pré-estrutural), conforme o modelo apresentado. Esta categorização terá em consideração os tópicos quanto à quantidade e o nível de conhecimentos envolvidos na abordagem das questões, os procedimentos quanto ao grau de inovação e integração dos procedimentos quanto à complexidade do raciocínio exigido e o tipo de solução ou soluções requeridas ao aluno, em cada questão de exame.

5.2 Modelo de análise e categorização das questões de exame

A busca para suportar a validade deste trabalho encontrou resposta na taxonomia SOLO, que é considerada em várias pesquisas como uma boa ferramenta educacional que tem permitido acrescentar conclusões em investigações na área da Educação, nomeadamente no processo de avaliação e ensino/aprendizagem.

Por ser um modelo já muito utilizado e trabalhado em vários domínios, tem recebido contributos de inúmeros investigadores que o usaram, também para a avaliação na disciplina de Matemática mostrando a sua aplicabilidade neste campo, desenvolvendo instrumentos com relação às propostas teóricas da Taxonomia.

Quando se usa uma taxonomia num trabalho de investigação, o que se pretende é uma classificação da amostra utilizada nesse trabalho, que em termos matemáticos vai levar a uma aplicação de um conjunto de valores, numérico ou não.

SOLO é uma taxonomia que estabelece um sistema simples de categorias que não depende do conteúdo e que pode ser aplicado como instrumento de análise qualitativa que, especificamente neste estudo, foi utilizada, ainda que num modelo adaptado, para classificar as questões de exames nacionais de Matemática do 12.º ano de escolaridade nos cinco níveis estabelecidos na Taxonomia. Categorizar uma resposta à luz da Taxonomia SOLO significa, em termos práticos, que a resposta do aluno irá apresentar uma certa qualidade de desempenho, sendo possível atribuir uma categoria.
O modelo de categorização das questões, ferramenta metodológica deste trabalho, foi criado por Mário Ceia, inspirado na Taxonomia SOLO e tem sido alvo de evolução ao longo dos anos, uma vez que foi pretensão inicial deste autor a aplicação do modelo nas provas de aferição e exames do Ensino Básico e embora o seu trabalho estivesse restrito aos 1.º e 2.º ciclos, estudos posteriores revelaram a sua utilidade aos exames de 9.º e 12.º ano. Nesta pesquisa será utilizado o modelo mais recente de Ceia (2018), que foi concebido para analisar exames dos vários níveis de ensino.

É a análise da qualidade das respostas dos alunos que dá relevo a esta Taxonomia no modelo que se propõe para este trabalho, uma vez que a atenção está na natureza das respostas, obedecendo a categorias baseadas nos níveis SOLO. Adotando este modelo e dando relevância à questão que é dada ao aluno, podemos categorizar as questões de um exame de acordo com a quantidade e tipo de conhecimento que é pedido em cada resposta, analisando o grau de complexidade exigido e o tipo de solução ou soluções requeridas, com ênfase a aspetos qualitativos da aprendizagem.

O modelo considera cinco categorias, definidas à custa de três parâmetros utilizados para a análise das questões: Tópicos, Procedimentos e Conclusões (Topics, Procedures and Conclusions, na designação original em Biggs e Collis, 1982). O autor considera que os dois primeiros parâmetros são decisivos para a categorização das questões, sendo o terceiro acessório. Estes parâmetros têm em conta a quantidade e nível dos tópicos, o grau de inovação e integração dos procedimentos e o tipo de conclusões.

A tabela que se segue (Ceia, 2018), apresenta um resumo dos critérios que permitem identificar e definir as categorias do modelo de análise que seguirei nesta pesquisa, que permitirão classificar/categorizar as questões de exames:

*Tabela **5** - Modelo de categorização das questões de exames*

<table>
<tr><th rowspan="3">Categoria</th><th colspan="4">Parâmetros de Análise</th></tr>
<tr><th colspan="2">Tópicos</th><th colspan="2">Procedimentos</th></tr>
<tr><th>Quantidade</th><th>Nível</th><th>Grau de Inovação</th><th>Integração dos Procedimentos</th></tr>
<tr><td>Categoria A (Abstrato)</td><td rowspan="3">Dois ou mais tópicos foram utilizados</td><td>Superior
- Foram utilizados tópicos de nível igual ou superior ao do programa</td><td>Inédito
- Envolve a elaboração de hipóteses de trabalho e estratégias inovadoras</td><td rowspan="2">Interligados
- Os procedimentos evidenciam a aplicação de vários conceitos e informações de forma integrada e simultânea</td></tr>
<tr><td>Categoria B (Relacional)</td><td rowspan="2">Adequado
- Foram utilizados tópicos de nível análogo ao programa</td><td rowspan="2">Réplica
- Envolve hipóteses de trabalho e estratégias descritas nos programas</td></tr>
<tr><td>Categoria C (Multi-estrutural)</td><td>Compartimentados
- Os procedimentos mostram a aplicação de vários conceitos e informações de forma isolada e sucessiva</td></tr>
<tr><td>Categoria D (Uni-estrutural)</td><td>Um único tópico foi utilizado</td><td>Adequado
- Foi utilizado um tópico de nível análogo ao que está prescrito no programa</td><td>Réplica
- Envolve uma hipótese de trabalho ou estratégia descritas nos programas</td><td rowspan="2">Não aplicável</td></tr>
<tr><td>Categoria E (Pré-estrutural)</td><td>Um único ou nenhum tópico foi utilizado</td><td>Inferior
- Foram utilizados tópicos de nível inferior ao do programa ou informação de senso comum</td><td>Não envolve qualquer tipo de réplica (ou situação inédita)</td></tr>
</table>

Conclusões
Tipo 1 - Os elementos que contribuíram para a obtenção da conclusão foram harmonizados **Tipo 2** - A conclusão decorre exclusivamente dos procedimentos matemáticos envolvidos na resolução

O parâmetro “Tópicos” estabelece os critérios que permitem analisar os conteúdos matemáticos envolvidos (quanto ao seu número e adequação ao 12.º ano), na resposta idealizada a uma questão proposta, descritos nos programas da disciplina de Matemática.
Quando exista um único descritor do programa considera-se que foi utilizado um único tópico, o que poderá corresponder às categorias Categoria D (Uni-estrutural) ou Categoria E (Pré-estrutural). Se existirem dois ou mais descritores, estão envolvidos mais do que um tópico, podendo corresponder às categorias Categoria A (Abstrato), Categoria B (Relacional) ou Categoria C (Multi-estrutural). Ao tratar-se de um conteúdo de senso comum, não existindo qualquer descritor, corresponderá à Categoria E (Pré-estrutural).
Se os tópicos envolvidos nas respostas estão descritos no respetivo programa do 12.º ano, consideram-se tópicos adequados àquele ano, podendo corresponder às Categorias B (Relacional), C (Multi-estrutural) e D (Uni-estrutural). Caso contrário, correspondem à Categoria A (Abstrato), se os tópicos estão descritos nos programas da Matemáticos de nível superior ao 12.º ano ou à Categoria E (Pré-estrutural) se os tópicos estão descritos num programa da Matemática inferior ao 12.º ano.

Quanto ao parâmetro “Procedimentos” averigua as ações usadas na resolução das questões, isto é, verifica se são réplicas de outras já anteriormente utilizadas ou se, pelo contrário, são inéditas. Por forma a verificar se um certo procedimento é uma réplica ou inédito pode recorrer se ao programa do 12.º ano e assim, se a ação estiver descrita no programa, quer nos objetivos, nas notas metodológicas ou ainda noutra qualquer seção, é uma ação que retrata uma prescrição do programa, pelo que se considera um procedimento que é uma réplica e estará presente nas Categorias B (Relacional), C (Multi-estrutural) e D (Uni-estrutural).

Se a ação se encontrar prescrita em programas de nível superior ao 12.º ano ou não estiver de todo prescrita, pode classificar-se como procedimento inédito, correspondendo-lhe a Categoria A (Abstrato).

Quando as ações estejam prescritas em programas de nível inferior ao 12.º ano ou não estejam de todo prescritas, por serem situações do senso comum, não se estabelece qualquer hipótese de trabalho ou estratégia descrita no programa, não se podendo enquadrar em qualquer dos tipos anteriores, réplica ou inédito, o que equivalerá a um procedimento próprio da Categoria E (Pré-estrutural).

Ainda nos “Procedimentos”, há a verificar se, nos casos em que são utilizados dois tópicos ou mais, estes são aplicados de forma interligada ou compartimentada. Estamos perante um procedimento interligado, próprio das Categorias A (Abstrato) e B (Relacional), quando ao serem utilizados dois ou mais tópicos se verifica a aplicação dos mesmos de forma integrada e simultânea. Se dois ou mais tópicos forem utilizados de forma isolada e sucessiva, um após o outro, o procedimento será compartimentado e corresponderá à Categoria C (Multi-estrutural)

No que respeita ao último parâmetro, “Conclusões”, a resposta será uma conclusão de Tipo 1 (conclusão conciliada), quando a resposta obtida pelos procedimentos matemáticos é adequada às informações e condições da questão e respeita as eventuais hipóteses de trabalho aplicadas, o contexto da questão, assim como os tópicos usados na resposta. Uma conclusão deste Tipo é própria das Categorias A (Abstrato), B (Relacional) e C(Multi-estrutural). Por outro lado, se não se afigurar necessário, no final, atender às condições da questão ou às hipóteses de trabalho estabelecidas, dependendo a conclusão exclusivamente da harmonização entre os tópicos considerados ou até quando as condições da questão se revelam secundárias na obtenção da solução, considera-se uma conclusão de Tipo 2 (parcialmente conciliada).

Ao verificar-se que a conclusão não se enquadra nas categorias referidas, consideradas conclusões não conciliadas, que se adequam à Categoria E (Pré-estrutural), é porque não existe qualquer tipo de condições a respeitar ou não são necessários conhecimentos matemáticos, levado a que na resposta não exista harmonização entre os elementos referidos.

Há a salientar que não se estabelece uma relação fechada entre as categorias das questões e o tipo de conclusão, indicando-se em cada caso, o tipo de conclusão que se obtém.
O modelo de análise tem aplicação a qualquer nível de escolaridade, contudo deverá ter-se em consideração que os tópicos em cada situação específica sejam os estabelecidos para o respetivo ano de escolaridade pelo programa em vigor e que grau de complexidade sejam adequados ao desenvolvimento cognitivo dos alunos que realizam as provas/exames.

5.3 Operacionalização

A operacionalização da análise, propriamente dita, iniciou-se com a identificação dos anos aos quais iria incidir a análise dos exames, a recolha desses exames, bem como a pesquisa pelas respetivas respostas idealizadas ("*soluções hipotéticas*") sugeridas nos critérios de classificação, disponibilizados pelo Instituto de Avaliação Educacional (IAVE) e Associação de Professores de Matemática (APM).

Da observação aos exames verificámos a existência de dois grupos de questões nos exames de 2015, 2016 e 2017: Grupo I - ao qual correspondem questões de escolha múltipla (itens de seleção) e Grupo II – correspondem questões de desenvolvimento (itens de construção) e no exame de 2018 dois cadernos – Caderno I e Caderno II – ambos constituídos simultaneamente por questões de escolha múltipla e questões de desenvolvimento, nas quais se incluem questões alternativas dos Programas de Matemática A: Programa de Matemática A 2001/2002 (P2001/2002) e Programa e Metas Curriculares de Matemática A 2015 (PMC2015).

Por forma a ser acessível a visualização e interpretação da análise que viria a ser efetuada a cada uma das questões/respostas, elaborámos uma tabela "MODELO DE ANÁLISE PARA CATEGORIZAÇÃO DA QUESTÃO", para que nela fosse vertida, sucintamente, e no decorrer deste processo de análise, todos os elementos essenciais à categorização SOLO presentes no “Modelo de categorização das questões de exame”.

Com base nos dois programas de Matemática A, foram recolhidos os tópicos dos programas do 10.º, 11. º e 12.º anos, relativamente aos Temas presentes por um lado no Programa de Matemática A 2001/2002, por outro aos Domínios no Programa e Metas Curriculares de Matemática A 2015. Esses tópicos foram identificados dentro dos Temas/Domínios aos quais se enquadram (Exemplos: Tema I, Tema II, Tema III, no Programa de Matemática A 2001/2002 e Domínio I, Domínio II, Domínio III, no Programa e Metas Curriculares de Matemática A 2015).

Tendo por base as respostas idealizadas, à medida que se interpretavam, iniciou-se também a abordagem à categorização SOLO seguindo o “Modelo de categorização das questões de exame” aos quatro exames nacionais, sendo estas respostas analisadas de acordo com três parâmetros: Tópicos, Procedimentos e Conclusões.

Foram recolhidos os dados no que respeita aos tópicos do 10.º, 11.º e 12.º ano (conhecimentos e informações matemáticas envolvidos), considerando dois aspetos: o número de tópicos utilizados na resolução e a adequação dos mesmos ao 12.º ano. Note-se que a partir de 2015 os exames abrangeram os três anos do Ensino Secundário[1], pelo que se consideraram adequados aos exames de 12.º ano os tópicos daqueles três anos de escolaridade. O número de tópicos envolvidos resulta da contagem dos conteúdos descritos nos respetivos programas de 10.º, 11.º e 12.º anos.

Convém referir que surgiu dúvida no que respeita aos tópicos, isto é, o que se consideraria um tópico do 12.º ano, questão que foi debatida em reuniões de grupos de trabalho, o que se veio a clarificar ao longo dos tempos da pesquisa e colmatado no preâmbulo do “Modelo de categorização das questões de exame” mais recente, que segundo o autor, “no caso dos programas da Matemática do Ensino Secundário, onde não se encontram definidos objetivos ou conteúdos de modo inequívoco, entendeu-se que um tópico era algo susceptível de ser avaliado individualmente e seria definido a partir do que se designa por desenvolvimento de cada tema.” (Ceia, 2018, p 2). A lista de tópicos utilizada é a que consta no capítulo 3 nas Tabelas 2, 3 e 4 - Quadros de temas matemáticos por ano escolar: Programa de Matemática A 2001/2002 versus Programa e Metas Curriculares de Matemática A 2015.

Quanto ao parâmetro “Procedimentos” averiguou-se se as ações usadas na resolução das questões são réplicas de outras já anteriormente utilizadas ou se, pelo contrário, são inéditas ou ainda nenhuma destas (sendo neste caso procedimento próprio de categoria inferior) e se os procedimentos são interligados ou compartimentados quando são utilizados dois tópicos ou mais.

---

[1] Salienta se que no “Objeto de Avaliação” e “Caraterização da prova”, constantes das respetivas Informação-Prova publicadas anualmente pelo IAVE, foi dada informação dos conteúdos e anos abrangentes em cada exame - 10.º, 11.º e 12.º anos)

Para verificar se o procedimento seria uma réplica ou inédito recorreu-se ao respetivo Programa de Matemática A e assim, quando a ação estava descrita no programa, quer nos objetivos, nas notas metodológicas ou ainda noutra qualquer seção, considerava-se um procedimento réplica. Quando a ação estivesse prescrita nos programas de nível inferior ao ensino secundário ou de todo não prescrita, por ser situação do senso comum, não se estabelecendo qualquer hipótese de trabalho ou estratégia prescrita no programa, não se poderia enquadrar como réplica ou inédito, o que seria equivalente um procedimento próprio da categoria mais inferior do “Modelo de categorização de questões de exame”.

Quanto ao Tipo de resposta, para classificar as respostas foi verificado se a resposta obtida é adequada às informações e condições da questão e se respeita as hipóteses de trabalho aplicadas, o contexto da questão e os tópicos usados na resposta.

Por fim, com base na recolha verificada na tabela “MODELO DE ANÁLISE PARA CATEGORIZAÇÃO DA QUESTÃO”, e de acordo com os três parâmetros propostos - Tópicos, Procedimentos e Conclusões, foram categorizadas as questões numa das categorias propostas no “Modelo de categorização das questões de exame”. Esta forma de conduzir este processo, permitiu mais facilmente categorizar as questões de acordo com o Modelo e assim verificar o grau de complexidade de cada questão.
Após a categorização, efetuou-se uma análise geral aos resultados encontrados em cada exame, verificando a diversidade de temas e categorias e suas relações nos diversos exames trabalhados. Quando uma questão envolvia mais que uma resposta, aferiu-se se essa questão podia apresentar mais que uma categoria, por forma a verificar se mantinha o mesmo grau de complexidade.
Foi possível assim avaliar a solidez na aplicação dos critérios às questões e concluir que o modelo de categorização aplicado se revela convincente e eficaz.

Capítulo 6 - Análise de exames

6.1 EXAME 12.º ANO – 1.ª FASE/2015

Grupo I

QUESTÃO

1. Dois rapazes e quatro raparigas vão sentar-se num banco corrido com seis lugares.

De quantas maneiras o podem fazer, de modo que fique um rapaz em cada extremidade do banco?

(A) 12 **(B)** 24 **(C)** 48 **(D)** 60

PROPOSTA RESOLUÇÃO APM

1.

Os dois rapazes devem estar sentados nas extremidades do banco. Há 2 maneiras de isso acontecer. As 4 raparigas podem estar sentadas nos 4 lugares do meio. Há 4! maneiras de elas se sentarem.
Logo: $2\times 4! = 48$

A opção correta é:

Versão 1	(C)

<table>
<tr><th colspan="4">MODELO DE ANÁLISE PARA CATEGORIZAÇÃO DA QUESTÃO</th></tr>
<tr><td>Lista dos tópicos considerados na construção das soluções hipotéticas
(Carvalho e Silva, 2002)</td><td colspan="2">Parâmetros de análise:
Tópicos e Procedimentos</td><td>Categorização</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Tema I: Probabilidades e Combinatória
• “Experiência aleatória; conjuntos de resultados; acontecimentos”
• “Arranjos completos, arranjos simples, permutações e combinações”</td><td rowspan="2">Tópicos</td><td>Quantidade
Dois ou mais tópicos foram utilizados</td><td rowspan="4">Categoria C
(Multi-estrutural)</td></tr>
<tr><td>Nível
Adequado – Foram utilizados tópicos de nível análogo ao do programa</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Procedimentos</td><td>Grau de inovação
Réplica – Envolve hipóteses de trabalho e estratégias descritas nos programas</td></tr>
<tr><td>Integração dos procedimentos
Compartimentados – Os procedimentos mostram a aplicação de vários conceitos e informações de forma isolada e sucessiva</td></tr>
<tr><td colspan="4">Conclusões
Tipo 2
A conclusão decorre exclusivamente dos procedimentos matemáticos envolvidos na resolução</td></tr>
</table>

Figura 9 - Modelo de análise para categorização da questão 1, GI, exame 2015

QUESTÃO

2. Seja Ω, conjunto finito, o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$).

Sabe-se que:

- $P(A) = 0{,}4$
- $P(\overline{B}) = 0{,}7$
- $P(A \cup B) = 0{,}5$

Qual é o valor de $P(\overline{A} \cup \overline{B})$?

(A) $0{,}6$ **(B)** $0{,}7$ **(C)** $0{,}8$ **(D)** $0{,}9$

PROPOSTA RESOLUÇÃO APM

2.

Como:

$P(\bar{B}) = 0{,}7$ e $P(B) = 1 - P(\bar{B})$, temos $P(B) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$

Assim:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A \cap B) = 0{,}4 + 0{,}3 - 0{,}5 \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0{,}2$$

Então:

$$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$$

A opção correta é:

Versão 1	(C)

<table>
<tr><th colspan="4">MODELO DE ANÁLISE PARA CATEGORIZAÇÃO DA QUESTÃO</th></tr>
<tr><td>Lista dos tópicos considerados na construção das soluções hipotéticas
(Carvalho e Silva, 2002)</td><td colspan="2">Parâmetros de análise:
Tópicos e Procedimentos</td><td>Categorização</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Tema I: Probabilidades e Combinatória
• “Operações sobre acontecimentos”
• “Definição axiomática de probabilidade”
• “Propriedades da probabilidade”</td><td rowspan="2">Tópicos</td><td>Quantidade
Dois ou mais tópicos foram utilizados</td><td rowspan="4">Categoria C (Multi-estrutural)</td></tr>
<tr><td>Nível
Adequado – Foram utilizados tópicos de nível análogo ao do programa</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Procedimentos</td><td>Grau de inovação
Réplica – Envolve hipóteses de trabalho e estratégias descritas nos programas</td></tr>
<tr><td>Integração dos procedimentos
Compartimentados – Os procedimentos mostram a aplicação de vários conceitos e informações de forma isolada e sucessiva</td></tr>
<tr><td colspan="4">Conclusões
Tipo 2
A conclusão decorre exclusivamente dos procedimentos matemáticos envolvidos na resolução</td></tr>
</table>

Figura 10 - Modelo de análise para categorização da questão 2, GI, exame 2015

QUESTÃO

3. Qual das seguintes expressões é, para qualquer número real k, igual a $\log_3\left(\frac{3^k}{9}\right)$?

(A) $\frac{k}{2}$ **(B)** $k-2$ **(C)** $\frac{k}{9}$ **(D)** $k-9$

PROPOSTA RESOLUÇÃO APM

3.

$$\log_3\left(\frac{3^k}{9}\right) = \log_3\left(\frac{3^k}{3^2}\right) = \log_3(3^{k-2}) = k-2$$

A opção correta é:

Versão 1	(B)

<table>
<tr><th colspan="4">MODELO DE ANÁLISE PARA CATEGORIZAÇÃO DA QUESTÃO</th></tr>
<tr><th>Lista dos tópicos considerados na construção das soluções hipotéticas
(Carvalho e Silva, 2002)</th><th colspan="2">Parâmetros de análise:
Tópicos e Procedimentos</th><th>Categorização</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Tema II: Introdução ao Cálculo Diferencial II
• “Função logarítmica de base superior a um”
• ”Regras operatórias de exponenciais e logaritmos”</td><td rowspan="2">Tópicos</td><td>Quantidade
Dois ou mais tópicos foram utilizados</td><td rowspan="4">Categoria C (Multi-estrutural)</td></tr>
<tr><td>Nível
Adequado – Foram utilizados tópicos de nível análogo ao do programa</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Procedimentos</td><td>Grau de inovação
Réplica – Envolve hipóteses de trabalho e estratégias descritas nos programas</td></tr>
<tr><td>Integração dos procedimentos
Compartimentados – Os procedimentos mostram a aplicação de vários conceitos e informações de forma isolada e sucessiva</td></tr>
<tr><td colspan="4">Conclusões
Tipo 2
A conclusão decorre exclusivamente dos procedimentos matemáticos envolvidos na resolução</td></tr>
</table>

Figura 11 - Modelo de análise para categorização da questão 3, GI, exame 2015

QUESTÃO

4. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = \frac{1+\ln x}{x}$

Considere a sucessão de termo geral $u_n = n^2$

Qual é o valor de $\lim f(u_n)$?

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** e **(D)** $+\infty$

PROPOSTA RESOLUÇÃO APM

4.

Como:

$\lim u_n = \lim(n^2) = +\infty$

Então $\lim f(u_n) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1+\ln x}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right) + \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}\right) = 0+0=0$

A opção correta é:

Versão 1	(A)

Nota: Na resolução desta questão, é necessário que o aluno relacione u_n com x e simultaneamente interligue os dois limites, o lim u_n e o lim f(x) com x a tender para o lim u_n, sendo ainda de reconhecer e integrar neste limite um limite notável, resultando a seguinte categorização:

<table>
<tr><th colspan="4">MODELO DE ANÁLISE PARA CATEGORIZAÇÃO DA QUESTÃO</th></tr>
<tr><th>Lista dos tópicos considerados na construção das soluções hipotéticas
(Carvalho e Silva, 2002)</th><th colspan="2">Parâmetros de análise:
Tópicos e Procedimentos</th><th>Categorização</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Tema III: Sucessões reais – 11.º ano
• “Infinitamente grandes e infinitamente pequenos.”
• “Limites de sucessões e convergência.”

Tema II: Introdução ao Cálculo Diferencial II – 12.º ano
• “Limite de função segundo Heine”
• “Propriedades operatórias sobre limites”
• “Função logarítmica de base superior a 1”
• “Limites notáveis”
• “Indeterminações”</td><td rowspan="2">Tópicos</td><td>Quantidade
Dois ou mais tópicos foram utilizados</td><td rowspan="4">Categoria B (Relacional)</td></tr>
<tr><td>Nível
Adequado – Foram utilizados tópicos de nível análogo ao do programa</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Procedimentos</td><td>Grau de inovação
Réplica – Envolve hipóteses de trabalho e estratégias descritas nos programas</td></tr>
<tr><td>Integração dos procedimentos
Interligados – Os procedimentos evidenciam a aplicação de vários conceitos e informações de forma integrada e simultânea</td></tr>
<tr><td colspan="4">Conclusões - Tipo 2
A conclusão decorre exclusivamente dos procedimentos matemáticos envolvidos na resolução</td></tr>
</table>

Figura 12 - Modelo de análise para categorização da questão 4, GI, exame 2015

QUESTÃO

5. Na Figura 1, está representado o círculo trigonométrico.

Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao primeiro quadrante e à circunferência;
- o ponto B pertence ao eixo Ox
- o ponto C tem coordenadas $(1, 0)$
- o ponto D pertence à semirreta $\dot{O}A$
- os segmentos de reta $[AB]$ e $[DC]$ são paralelos ao eixo Oy

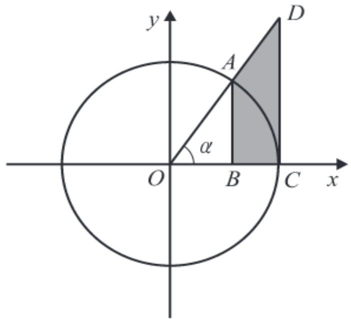


Figura 1

Seja α a amplitude do ângulo COD $\left(\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$

Qual das expressões seguintes dá a área do quadrilátero $[ABCD]$, representado a sombreado, em função de α ?

(A) $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{2}-\frac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{2}$

(B) $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{2}-\frac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{4}$

(C) $\operatorname{tg}\alpha-\frac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{4}$

(D) $\operatorname{tg}\alpha-\frac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{2}$

PROPOSTA RESOLUÇÃO APM

5.

A área do quadrilátero [ABCD] pode ser obtida subtraindo a área do triângulo [OAB] à área do triângulo [OCD].

Assim:

$$A_{[OCD]}=\frac{\overline{CD}\times\overline{OC}}{2}=\frac{tg\propto\times 1}{2}=\frac{tg\propto}{2}$$

$$A_{[AOB]}=\frac{\overline{AB}\times\overline{OB}}{2}=\frac{sen\propto\times cos\propto}{2}$$

Logo:

$$\mathrm{A}_{[\mathrm{ABCD}]}=A_{[OCD]}-A_{[AOB]}=\frac{tg\propto}{2}-\frac{sen\propto\times cos\propto}{2}$$

E como:

$$sen\propto\times cos\propto=\frac{sen(2\propto)}{2}$$

Temos que:

$$\mathrm{A}_{[\mathrm{ABCD}]}=\frac{tg\propto}{2}-\frac{\frac{sen(2\propto)}{2}}{2}=\frac{tg\propto}{2}-\frac{sen(2\propto)}{4}$$

A opção correta é:

Versão 1	(B)

<table>
<tr><th colspan="4">MODELO DE ANÁLISE PARA CATEGORIZAÇÃO DA QUESTÃO</th></tr>
<tr><th>Lista dos tópicos considerados na construção das soluções hipotéticas
(Carvalho e Silva, 2002)</th><th colspan="2">Parâmetros de análise:
Tópicos e Procedimentos</th><th>Categorização</th></tr>
<tr><td rowspan="4">• Tema I: Geometria no Plano e no Espaço II – 11.º ano
• “Resolução de problemas que envolvam triângulos”
• “Funções seno, co-seno e tangente”

Tema III – Trigonometria e Números Complexos – 12.º ano
• “Funções seno, co-seno e tangente. Estudo intuitivo com base no círculo trigonométrico, tanto a partir de um gráfico particular, como usando calculadora gráfica ou computador”</td><td rowspan="2">Tópicos</td><td>Quantidade
Dois ou mais tópicos foram utilizados</td><td rowspan="4">Categoria C (Multi-estrutural)</td></tr>
<tr><td>Nível
Adequado – Foram utilizados tópicos de nível análogo ao do programa</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Procedimentos</td><td>Grau de inovação
Réplica – Envolve hipóteses de trabalho e estratégias descritas nos programas</td></tr>
<tr><td>Integração dos procedimentos
Compartimentados – Os procedimentos mostram a aplicação de vários conceitos e informações de forma isolada e sucessiva</td></tr>
<tr><td colspan="4">Conclusões
Tipo 2
A conclusão decorre exclusivamente dos procedimentos matemáticos envolvidos na resolução</td></tr>
</table>

Figura 13 - Modelo de análise para categorização da questão 5, GI, exame 2015

QUESTÃO

6. Considere em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, a condição

$$|z+4-4i|=3 \wedge \frac{\pi}{2} \leq \arg(z) \leq \frac{3\pi}{4}$$

No plano complexo, esta condição define uma linha.

Qual é o comprimento dessa linha?

(A) π

(B) 2π

(C) 3π

(D) 4π

6.

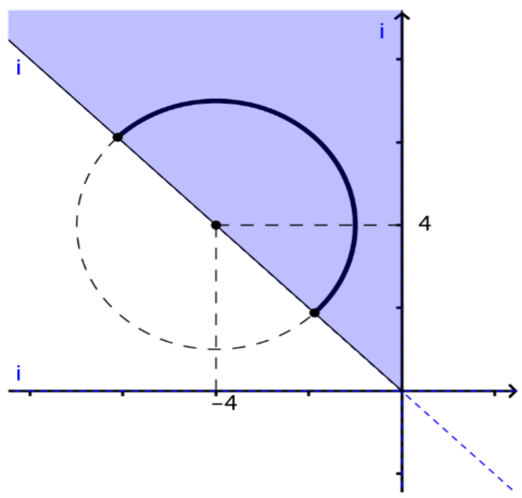
Temos que:

$|z + 4 - 4i| = 3 \Leftrightarrow |z - (-4 + 4i)| = 3$

Então esta condição representa no plano complexo o conjunto dos pontos cuja distância ao ponto de coordenadas (-4,4) é igual a 3, ou seja a circunferência de centro em (-4,4) e raio 3.

A condição $\frac{\pi}{2} \leq \arg(z) \leq \frac{3\pi}{4}$ representa o conjunto de pontos cujos argumentos estão compreendidos entre $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{4}$.

Assim, fazendo a interseção dos dois conjuntos, obtemos a semicircunferência representada na figura:



Como:

$perímetro\ da\ circunferência = 2\times\pi\times3 = 6\pi$

Então o comprimento pedido é $\frac{6\pi}{2} = 3\pi$

A opção correta é:

Versão 1	(C)

<table>
<tr><th colspan="4">MODELO DE ANÁLISE PARA CATEGORIZAÇÃO DA QUESTÃO</th></tr>
<tr><td>Lista dos tópicos considerados na construção das soluções hipotéticas
(Carvalho e Silva, 2002)</td><td colspan="2">Parâmetros de análise:
Tópicos e Procedimentos</td><td>Categorização</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Tema III: Trigonometria e Números Complexos

• “Números complexos”
• “A forma algébrica dos complexos.”
• “Domínios planos e condições em variável complexa.”</td><td rowspan="2">Tópicos</td><td>Quantidade
Dois ou mais tópicos foram utilizados</td><td rowspan="4">Categoria C (Multi-estrutural)</td></tr>
<tr><td>Nível
Adequado – Foram utilizados tópicos de nível análogo ao do programa</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Procedimentos</td><td>Grau de inovação
Réplica – Envolve hipóteses de trabalho e estratégias descritas nos programas</td></tr>
<tr><td>Integração dos procedimentos
Compartimentados – Os procedimentos mostram a aplicação de vários conceitos e informações de forma isolada e sucessiva</td></tr>
<tr><td colspan="4">Conclusões
Tipo 2
A conclusão decorre exclusivamente dos procedimentos matemáticos envolvidos na resolução</td></tr>
</table>

Figura 14 - Modelo de análise para categorização da questão 6, GI, exame 2015

QUESTÃO

7. Na Figura 2, está representado, num referencial o.n. xOy, um triângulo equilátero $[ABC]$

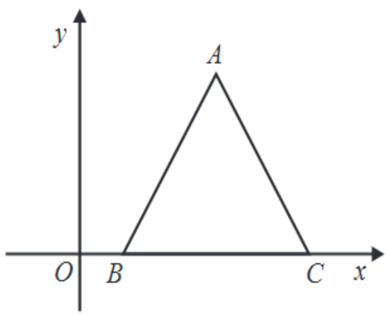


Figura 2

Sabe-se que:

- o ponto A tem ordenada positiva;
- os pontos B e C pertencem ao eixo Ox
- o ponto B tem abcissa 1 e o ponto C tem abcissa maior do que 1

Qual é a equação reduzida da reta AB ?

(A) $y = \sqrt{2}\,x - \sqrt{2}$

(B) $y = \sqrt{2}\,x + \sqrt{2}$

(C) $y = \sqrt{3}\,x + \sqrt{3}$

(D) $y = \sqrt{3}\,x - \sqrt{3}$

PROPOSTA RESOLUÇÃO APM

7.

Como o triângulo [ABC] é equilátero então o ângulo ABC tem de amplitude 60º.
Assim o declive da reta AB é:
$m = tg(60^o) = \sqrt{3}$
Logo a reta AB será uma reta do tipo:
$y = \sqrt{3}x + b$
Como o ponto B de coordenadas (1,0), pertence a esta reta, temos:
$0 = \sqrt{3}\times 1 + b \Leftrightarrow b = -\sqrt{3}$
Logo a reta AB tem por equação:
$y = \sqrt{3}x - \sqrt{3}$

A opção correta é:

Versão 1	(D)

<table>
<tr><th colspan="4">MODELO DE ANÁLISE PARA CATEGORIZAÇÃO DA QUESTÃO</th></tr>
<tr><td>Lista dos tópicos considerados na construção das soluções hipotéticas
(Carvalho e Silva, 2002)</td><td colspan="2">Parâmetros de análise:
Tópicos e Procedimentos</td><td>Categorização</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Tema I: Geometria no Plano e no Espaço I – 10.º ano
• “Equação reduzida da recta no plano e equação x=x0.”

Tema I: Geometria no Plano e no Espaço II – 11.º ano
• “Razões trigonométricas dos ângulos de 30°, 45° e 60°”</td><td rowspan="2">Tópicos</td><td>Quantidade
Dois ou mais tópicos foram utilizados</td><td rowspan="4">Categoria C (Multi-estrutural)</td></tr>
<tr><td>Nível
Adequado – Foram utilizados tópicos de nível análogo ao do programa</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Procedimentos</td><td>Grau de inovação
Réplica – Envolve hipóteses de trabalho e estratégias descritas nos programas</td></tr>
<tr><td>Integração dos procedimentos
Compartimentados – Os procedimentos mostram a aplicação de vários conceitos e informações de forma isolada e sucessiva</td></tr>
<tr><td colspan="4">Conclusões
Tipo 2
A conclusão decorre exclusivamente dos procedimentos matemáticos envolvidos na resolução</td></tr>
</table>

Figura 15 - Modelo de análise para categorização da questão 7, GI, exame 2015

QUESTÃO

8. Seja a um número real.

Considere a sucessão (u_n) definida por

$$\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = -3\,u_n + 2, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Qual é o terceiro termo desta sucessão?

(A) $6a+4$

(B) $9a-4$

(C) $6a-4$

(D) $9a+4$

PROPOSTA RESOLUÇÃO APM

8.

$$u_2 = -3u_1 + 2 = -3a + 2$$
$$u_3 = -3u_2 + 2 = -3(-3a + 2) + 2 = 9a - 4$$

A opção correta é:

Versão 1	(B)

<table>
<tr><th colspan="4">MODELO DE ANÁLISE PARA CATEGORIZAÇÃO DA QUESTÃO</th></tr>
<tr><th>Lista dos tópicos considerados na construção das soluções hipotéticas
(Carvalho e Silva, 2002)</th><th colspan="2">Parâmetros de análise:
Tópicos e Procedimentos</th><th>Categorização</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Tema III: Sucessões reais
• “Definição e diferentes formas de representação”</td><td rowspan="2">Tópicos</td><td>Quantidade
Um único tópico foi utilizado</td><td rowspan="4">Categoria D (Uni-estrutural)</td></tr>
<tr><td>Nível
Adequado – Foi utilizado um tópico de nível análogo ao que está prescrito no programa</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Procedimentos</td><td>Grau de inovação
Réplica – Envolve uma hipótese de trabalho ou estratégia descrita nos programas</td></tr>
<tr><td>Integração dos procedimentos
Não aplicável</td></tr>
<tr><td colspan="4">Conclusões
Tipo 2
A conclusão decorre exclusivamente dos procedimentos matemáticos envolvidos na resolução</td></tr>
</table>

Figura 16 - Modelo de análise para categorização da questão 8, GI, exame 2015

Grupo II

QUESTÃO

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z = \dfrac{-2 + 2i^{19}}{\sqrt{2}\,\text{cis}\,\theta}$

Determine os valores de θ pertencentes ao intervalo $]0, 2\pi[$, para os quais z é um número imaginário puro.

Na resolução deste item, não utilize a calculadora.

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO (IAVE 2015)

1. .... **15 pontos**

Identificar i^{19} com $-i$ .... 2 pontos

Escrever a expressão $-2+2i^{19}$ na forma algébrica $(-2-2i)$ .... 1 ponto

Apresentar um argumento de $-2-2i$ .... 2 pontos

Escrever um argumento de z, em função de θ .... 2 pontos

Escrever uma condição em θ para que z seja um imaginário puro .... 3 pontos

Resolver a condição em ordem a θ .... 3 pontos

Obter os valores de θ pertencentes ao intervalo $]0, 2\pi[$ $\left(\frac{3\pi}{4} \text{ e } \frac{7\pi}{4}\right)$ .... 2 pontos

PROPOSTA RESOLUÇÃO APM

1.

C.A. 1

$$i^{19} = i^{16} \times i^{3} = \left(i^{4}\right)^{4} \times i^{3} = 1 \times (-i) = -i$$

C.A. 2

$$w = -2 - 2i$$

$$|w| = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$(-2,-2) \in 3.^{\text{o}}Q \text{ logo } \arg w \in 3.^{\text{o}}Q$$

$$tg\,\theta = 1 \Leftrightarrow tg\,\theta = tg\left(\frac{5}{4}\pi\right) \Leftrightarrow \theta = \frac{5}{4}\pi + 2k\pi, k \in Z$$

$$\therefore w = 2\sqrt{2}cis\left(\frac{5}{4}\pi\right).$$

$$z = \frac{-2+2i^{19}}{\sqrt{2}cis\,\theta} = \frac{-2-2i}{\sqrt{2}cis\,\theta} = \frac{2\sqrt{2}cis\left(\frac{5}{4}\pi\right)}{\sqrt{2}cis\,\theta} = 2cis\left(\frac{5}{4}\pi - \theta\right) \underset{\substack{imaginário\\puro}}{\Longrightarrow}$$

$$\frac{5}{4}\pi - \theta = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z \Leftrightarrow \theta = \frac{3}{4}\pi + k\pi,\ k \in Z \underset{\vartheta \in]0,2\pi[}{\Longrightarrow} \theta = \frac{3}{4}\pi \vee \theta = \frac{7}{4}\pi$$

<table>
<tr><th colspan="4">MODELO DE ANÁLISE PARA CATEGORIZAÇÃO DA QUESTÃO</th></tr>
<tr><th>Lista dos tópicos considerados na construção das soluções hipotéticas
(Carvalho e Silva, 2002)</th><th colspan="2">Parâmetros de análise:
Tópicos e Procedimentos</th><th>Categorização</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Tema III: Trigonometria e Números Complexos – 12.º ano

• “Números complexos. O número i. O conjunto c dos números complexos”
• “A forma algébrica dos complexos. Operações com complexos na forma algébrica”.
• “Representação de complexos na forma trigonométrica.”
• “Escrita de complexos nas duas formas, passando de uma para a outra.”
• “Operações com complexos na forma trigonométrica.”

Tema I: Geometria no Plano e no Espaço II – 11.º ano

• “Funções seno, co-seno e tangente”
• “Equações trigonométricas.”</td><td rowspan="2">Tópicos</td><td>Quantidade
Dois ou mais tópicos foram utilizados</td><td rowspan="4">Categoria C (Multi-estrutural)</td></tr>
<tr><td>Nível
Adequado – Foram utilizados tópicos de nível análogo ao do programa</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Procedimentos</td><td>Grau de inovação
Réplica – Envolve hipóteses de trabalho e estratégias descritas nos programas</td></tr>
<tr><td>Integração dos procedimentos
Compartimentados – Os procedimentos mostram a aplicação de vários conceitos e informações de forma isolada e sucessiva</td></tr>
<tr><td colspan="4">Conclusões
Tipo 1
Os elementos que contribuíram para a obtenção da conclusão foram harmonizados</td></tr>
</table>

Figura 17 - Modelo de análise para categorização da questão 1, GII, exame 2015

QUESTÃO

2. De uma empresa com sede em Coimbra, sabe-se que:

- 60% dos funcionários residem fora de Coimbra;
- os restantes funcionários residem em Coimbra.

2.1. Relativamente aos funcionários dessa empresa, sabe-se ainda que:

- o número de homens é igual ao número de mulheres;
- 30% dos homens residem fora de Coimbra.

Escolhe-se, ao acaso, um funcionário dessa empresa.

Qual é a probabilidade de o funcionário escolhido ser mulher, sabendo que reside em Coimbra?

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO (IAVE 2015)

2.1. .... **15 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, três processos.

1.º Processo (através de uma tabela de dupla entrada)

Construir uma tabela de dupla entrada cujas entradas sejam o género (homem, mulher) e o local de residência (Coimbra, fora de Coimbra) .... 1 ponto

Preencher a célula da tabela relativa à informação «60% dos funcionários residem fora de Coimbra».. 2 pontos

Preencher as células da tabela relativas à informação «o número de homens é igual ao número de mulheres» .... 2 pontos

Utilizar a informação «30% dos homens residem fora de Coimbra» para determinar a probabilidade de o funcionário ser homem e residir fora de Coimbra, e colocar o valor obtido na célula respetiva (**ver nota**) .... 4 pontos

Preencher as restantes células que permitem resolver o problema .... 3 pontos

Identificar o pedido com $P(M|C)$, sendo M o acontecimento «o funcionário escolhido é mulher» e C o acontecimento «o funcionário escolhido reside em Coimbra» .... 1 ponto

Escrever $P(M|C) = \dfrac{P(M \cap C)}{P(C)}$ .... 1 ponto

Obter $P(M|C)$ $\left(\dfrac{1}{8}\right)$ .... 1 ponto

Nota – Se, na resposta, o valor apresentado nesta célula for 0,3, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.

2.º Processo (através de um diagrama em árvore)

Construir um diagrama em árvore de cuja raiz saem dois ramos relativos ao género (homem, mulher) e de cada um destes saem dois novos ramos relativos ao local de residência (Coimbra, fora de Coimbra) .... 2 pontos

Colocar as probabilidades relativas à informação «o número de homens é igual ao número de mulheres» nos respetivos ramos .... 2 pontos

Colocar a probabilidade relativa à informação «30% dos homens residem fora de Coimbra» no respetivo ramo .... 2 pontos

Colocar a probabilidade de o funcionário ser homem e residir fora de Coimbra .. 2 pontos

Colocar a probabilidade de o funcionário ser mulher e residir fora de Coimbra .... 3 pontos

Colocar a probabilidade de o funcionário ser mulher e residir em Coimbra .... 1 ponto

OU .... 4 pontos

Colocar a probabilidade de o funcionário ser homem e residir em Coimbra .... 1 ponto

Colocar a probabilidade de o funcionário ser mulher e residir em Coimbra .... 3 pontos

Identificar o pedido com $P(M|C)$, sendo M o acontecimento «o funcionário escolhido é mulher» e C o acontecimento «o funcionário escolhido reside em Coimbra» .... 1 ponto

Escrever $P(M|C)=\dfrac{P(M\cap C)}{P(C)}$ .... 1 ponto

Obter $P(M|C)$ $\left(\frac{1}{8}\right)$ .... 1 ponto

3.º Processo (aplicando as propriedades das probabilidades)

Seja M o acontecimento «o funcionário escolhido é mulher» e seja C o acontecimento «o funcionário escolhido reside em Coimbra».

Identificar o pedido com $P(M|C)$ .... 1 ponto

Reconhecer que $P(\overline{C})=0{,}6$ .... 1 ponto

Obter $P(C)$ .... 1 ponto

Reconhecer que $P(M)=0{,}5$ .... 1 ponto

Reconhecer $P(\overline{M})=0{,}5$ .... 1 ponto

Reconhecer que $P(\overline{C}|\overline{M})=0{,}3$ .... 2 pontos

Determinar $P(\overline{C}\cap\overline{M})$ .... 2 pontos

Determinar $P(C\cup M)$ .... 2 pontos

Escrever $P(C\cup M)-P(C)+P(M)-P(C\cap M)$ .... 1 ponto

Determinar $P(C\cap M)$ .... 1 ponto

Escrever $P(M|C)=\dfrac{P(M\cap C)}{P(C)}$ .... 1 ponto

Obter $P(M|C)$ $\left(\frac{1}{8}\right)$ .... 1 ponto

PROPOSTA RESOLUÇÃO APM

2.

2.1 $P(H)=50\%$

$$P(\overline{C}\mid H)=0{,}3 \Leftrightarrow \frac{P(\overline{C}\cap H)}{P(H)}=0{,}3 \Leftrightarrow P(\overline{C}\cap H)=0{,}3\times 0{,}5 \Leftrightarrow P(\overline{C}\cap H)=0{,}3\times 0{,}5 \Leftrightarrow$$

$$P(\overline{C}\cap H)=0{,}15 \Leftrightarrow P(H)-P(C\cap H)=0{,}15 \Leftrightarrow P(C\cap H)=0{,}35$$

$$P(\overline{H}\mid C)=\frac{P(C\cap \overline{H})}{P(C)}=\frac{P(C)-P(C\cap H)}{P(C)}=\frac{0{,}4-0{,}35}{0{,}4}=\frac{1}{8}$$

Nota: Nas propostas de resolução do IAVE e APM utilizamos os mesmos tópicos do 12.º ano, com procedimentos idênticos no que respeita aos parâmetros de análise pelo que a categorização é a mesma para as propostas apresentadas:

<table>
<tr><th colspan="4">MODELO DE ANÁLISE PARA CATEGORIZAÇÃO DA QUESTÃO</th></tr>
<tr><th>Lista dos tópicos considerados na construção das soluções hipotéticas
(Carvalho e Silva, 2002)</th><th colspan="2">Parâmetros de análise:
Tópicos e Procedimentos</th><th>Categorização</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Tema I: Probabilidades e Combinatória
• “Experiência aleatória; conjunto de resultados; acontecimentos.”
• “Operações sobre acontecimentos”.
• “Probabilidade condicionada e independência”
• “Probabilidade da interseção de acontecimentos.”</td><td rowspan="2">Tópicos</td><td>Quantidade
Dois ou mais tópicos foram utilizados</td><td rowspan="4">Categoria C (Multi-estrutural)</td></tr>
<tr><td>Nível
Adequado – Foram utilizados tópicos de nível análogo ao do programa</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Procedimentos</td><td>Grau de inovação
Réplica – Envolve hipóteses de trabalho e estratégias descritas nos programas</td></tr>
<tr><td>Integração dos procedimentos
Compartimentados – Os procedimentos mostram a aplicação de vários conceitos e informações de forma isolada e sucessiva</td></tr>
<tr><td colspan="4">Conclusões
Tipo 1
Os elementos que contribuíram para a obtenção da conclusão foram harmonizados</td></tr>
</table>

Figura 18 - Modelo de análise para categorização da questão 2.1, GII, exame 2015

QUESTÃO

2.2. Considere agora que a empresa tem oitenta funcionários.

Escolhem-se, ao acaso, três funcionários dessa empresa.

A probabilidade de, entre esses funcionários, haver no máximo dois a residir em Coimbra é igual a

$$\frac{^{80}C_3 - {}^{32}C_3}{^{80}C_3}$$

Elabore uma composição na qual explique a expressão apresentada.

Na sua resposta:

- enuncie a regra de Laplace;
- explique o número de casos possíveis;
- explique o número de casos favoráveis.

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO (IAVE 2015)

2.2. .... **15 pontos**

Tópicos de resposta:

A) Enunciado da regra de Laplace: quando os casos possíveis são equiprováveis, a probabilidade de um acontecimento é igual ao quociente entre o número de casos favoráveis a esse acontecimento e o número de casos possíveis.

B) Explicação do número de casos possíveis: $^{80}C_3$ é o número de maneiras de escolher três funcionários, de entre os 80 funcionários da empresa.

C) Explicação do número de casos favoráveis: «haver, no máximo, dois funcionários a residir em Coimbra» é o contrário de «haver três funcionários a residir em Coimbra». Assim, o número de casos favoráveis é igual à diferença entre o número de maneiras de escolher 3 dos 80 funcionários da empresa $(^{80}C_3)$ e o número de maneiras de escolher 3 dos 32 $(40\%$ de $80)$ funcionários da empresa que residem em Coimbra.

Níveis	Descritores do nível de desempenho	Pontuação
5	Na resposta, são contemplados os três tópicos, com organização coerente dos conteúdos e linguagem científica adequada.	15
4	Na resposta, são contemplados os três tópicos, com falhas na organização dos conteúdos ou na utilização da linguagem científica. OU Na resposta, são contemplados apenas os tópicos A e C OU apenas os tópicos B e C, com organização coerente dos conteúdos e linguagem científica adequada.	12
3	Na resposta, são contemplados apenas os tópicos A e C OU apenas os tópicos B e C, com falhas na organização dos conteúdos ou na utilização da linguagem científica. OU Na resposta, são contemplados apenas os tópicos A e B OU apenas o tópico C, com organização coerente dos conteúdos e linguagem científica adequada.	9
2	Na resposta, são contemplados apenas os tópicos A e B OU apenas o tópico C, com falhas na organização dos conteúdos ou na utilização da linguagem científica. OU Na resposta, é contemplado apenas o tópico A OU apenas o tópico B, com organização coerente dos conteúdos e linguagem científica adequada.	6
1	Na resposta, é contemplado apenas o tópico A OU apenas o tópico B, com falhas na organização dos conteúdos ou na utilização da linguagem científica.	3

PROPOSTA RESOLUÇÃO APM

2.2 A regra de Laplace diz-nos que:
"A probabilidade de um acontecimento é o quociente entre o número de casos favoráveis a esse acontecimento e o número de casos possíveis desde que os casos possíveis sejam todos equiprováveis."
Dos 80 funcionários escolhemos quaisquer 3 $\left({}^{80}C_{3}\right)$ representando este o número de casos possíveis.

Nos casos favoráveis utilizou-se o acontecimento contrário ou seja, de todos os casos possíveis $\left({}^{80}C_{3}\right)$ retirou-se os casos que não interessam à nossa contagem que são as situações em que os três funcionários residem em Coimbra, ou seja, dos 32 (40% dos 80) funcionários residentes em Coimbra escolhemos quaisquer 3 $\left({}^{32}C_{3}\right)$.
Assim, o número de casos favoráveis é dado pela expressão: ${}^{80}C_{3} - {}^{32}C_{3}$.

<table>
<tr><td colspan="4">MODELO DE ANÁLISE PARA CATEGORIZAÇÃO DA QUESTÃO</td></tr>
<tr><td>Lista dos tópicos considerados na construção das soluções hipotéticas
(Carvalho e Silva, 2002)</td><td colspan="2">Parâmetros de análise:
Tópicos e Procedimentos</td><td>Categorização</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Tema I: Probabilidades e Combinatória
• "Experiência aleatória; conjunto de resultados; acontecimentos"
• "Definição clássica de probabilidade ou de Laplace"
• "Arranjos completos, arranjos simples, permutações e combinações"
• "Aplicação da análise combinatória ao cálculo de probabilidades"</td><td rowspan="2">Tópicos</td><td>Quantidade
Dois ou mais tópicos foram utilizados</td><td rowspan="4">Categoria C (Multi-estrutural)</td></tr>
<tr><td>Nível
Adequado – Foram utilizados tópicos de nível análogo ao do programa</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Procedimentos</td><td>Grau de inovação
Réplica – Envolve hipóteses de trabalho e estratégias descritas nos programas</td></tr>
<tr><td>Integração dos procedimentos
Compartimentados – Os procedimentos mostram a aplicação de vários conceitos e informações de forma isolada e sucessiva</td></tr>
<tr><td colspan="4">Conclusões
Tipo 1
Os elementos que contribuíram para a obtenção da conclusão foram harmonizados</td></tr>
</table>

Figura 19 - Modelo de análise para categorização da questão 2.2, GII, exame 2015

QUESTÃO

3. Na Figura 3, está representado um recipiente cheio de um líquido viscoso.

Tal como a figura ilustra, dentro do recipiente, presa à sua base, encontra-se uma esfera. Essa esfera está ligada a um ponto P por uma mola esticada.

Num certo instante, a esfera é desprendida da base do recipiente e inicia um movimento vertical. Admita que, t segundos após esse instante, a distância, em centímetros, do centro da esfera ao ponto P é dada por

$$d(t) = 10 + (5 - t)e^{-0,05t} \quad (t \geq 0)$$

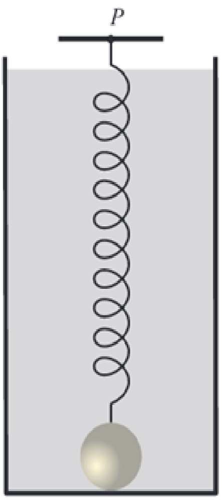


Figura 3

3.1. Sabe-se que a distância do ponto P à base do recipiente é $16\,\text{cm}$

Determine o volume da esfera.

Apresente o resultado em cm^3, arredondado às centésimas.

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO (IAVE 2015)

3.1. .... **10 pontos**

Determinar $d(0)$ .... 4 pontos

Determinar o raio da esfera .... 3 pontos

Obter o volume da esfera com o arredondamento pedido $\left(4,19\,\text{cm}^3\right)$ .... 3 pontos

PROPOSTA RESOLUÇÃO APM

3.

3.1

$$d(0) = 10 + 5 = 15$$

$$r_{esfera} = 16 - d(0) = 16 - 15 = 1$$

$$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi \approx 4,19cm^3$$

<table>
<tr><th colspan="4">MODELO DE ANÁLISE PARA CATEGORIZAÇÃO DA QUESTÃO</th></tr>
<tr><th>Lista dos tópicos considerados na construção das soluções hipotéticas
(Carvalho e Silva, 2002)</th><th colspan="2">Parâmetros de análise:
Tópicos e Procedimentos</th><th>Categorização</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Tema II: Introdução ao Cálculo Diferencial II
• “Regras operatórias de exponenciais e logaritmos”

Tema I: Geometria no plano e no Espaço I
• “Resolução de problemas no plano e no espaço envolvendo o cálculo de áreas e volumes”</td><td rowspan="2">Tópicos</td><td>Quantidade
Dois ou mais tópicos foram utilizados</td><td rowspan="4">Categoria C (Multi-estrutural)</td></tr>
<tr><td>Nível
Adequado – Foram utilizados tópicos de nível análogo ao do programa</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Procedimentos</td><td>Grau de inovação
Réplica – Envolve hipóteses de trabalho e estratégias descritas nos programas</td></tr>
<tr><td>Integração dos procedimentos
Compartimentados – Os procedimentos mostram a aplicação de vários conceitos e informações de forma isolada e sucessiva</td></tr>
<tr><td colspan="4">Conclusões
Tipo 2
A conclusão decorre exclusivamente dos procedimentos matemáticos envolvidos na resolução</td></tr>
</table>

Figura 20 - Modelo de análise para categorização da questão 3.1, GII, exame 2015

QUESTÃO

3.2. Determine o instante em que a distância do centro da esfera ao ponto P é mínima, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO (IAVE 2015)

3.2. .... **15 pontos**

Determinar $d'(t)$ (**ver nota**) .... 3 pontos

Aplicar a regra de derivação do produto de duas funções .... 1 ponto

Escrever $d'(t) - -e^{-0,05t} - 0,05(5-t)e^{-0,05t}$ .... 2 pontos

Escrever a equação $d'(t) = 0$ .... 1 ponto

Resolver a equação $d'(t) = 0$ .... 5 pontos

Escrever $d'(t) - 0 \Leftrightarrow e^{-0,05t}\left(-1-0,05(5-t)\right) - 0$ .... 2 pontos

Escrever $e^{-0,05t}\left(-1-0,05(5-t)\right) - 0 \Leftrightarrow -1-0,05(5-t) - 0$ 2 pontos

Concluir que $d'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 25$ .... 1 ponto

Justificar que a distância do centro da esfera ao ponto P é mínima para $t = 25$ .... 5 pontos

Apresentar um quadro de sinal de d' e de monotonia de d ...... 4 pontos

Indicar o valor de t para o qual a função é mínima .... 1 ponto

OU

Referir que, como a função d tem derivada finita em $\mathbb{R}^+$ e como 25 é o único zero da função d', o mínimo da função d só pode ser atingido para $t = 0$ ou para $t = 25$ .... 2 pontos

Referir que $d(25) < d(0)$ .... 3 pontos

Apresentar a resposta (25 segundos) .... 1 ponto

Nota – Se, na resposta, for evidente a intenção de determinar a expressão da derivada da função, a pontuação mínima a atribuir nesta etapa é de 1 ponto.

PROPOSTA RESOLUÇÃO APM

3.2

$d'(t) = -e^{-0,05t} - 0,05e^{-0,05t}(5-t) = e^{-0,05t}[-1-0,05(5-t)] =$

$= e^{-0,05t}(0,05t - 1,25),\ t \geq 0$

$d'(t) = 0 \Leftrightarrow e^{-0.05t} = 0 \vee 0,05t - 1,25 = 0 \Leftrightarrow t = 25$

t	0		25	$+\infty$
$d'(t)$	$-1,3$	$-$	0	$+$
$d(t)$	15	↘	min	↗

R.: 25 segundos.

<table>
<tr><th colspan="4">MODELO DE ANÁLISE PARA CATEGORIZAÇÃO DA QUESTÃO</th></tr>
<tr><th>Lista dos tópicos considerados na construção das soluções hipotéticas
(Carvalho e Silva, 2002)</th><th colspan="2">Parâmetros de análise:
Tópicos e Procedimentos</th><th>Categorização</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Tema II: Introdução ao Cálculo Diferencial II
• “Função exponencial de base superior a 1; crescimento exponencial; estudo das propriedades analíticas e gráficas da família de funções definida por f(x)=a^x com a>1”
• “Regras operatórias de exponenciais e logaritmos.”
• “Funções deriváveis. Regras de derivação; Derivadas das funções elementares.”
• “Estudo de funções em casos simples.”
• “Problemas de otimização.”</td><td rowspan="2">Tópicos</td><td>Quantidade
Dois ou mais tópicos foram utilizados</td><td rowspan="4">Categoria C (Multi-estrutural)</td></tr>
<tr><td>Nível
Adequado – Foram utilizados tópicos de nível análogo ao do programa</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Procedimentos</td><td>Grau de inovação
Réplica – Envolve hipóteses de trabalho e estratégias descritas nos programas</td></tr>
<tr><td>Integração dos procedimentos
Compartimentados – Os procedimentos mostram a aplicação de vários conceitos e informações de forma isolada e sucessiva</td></tr>
<tr><td colspan="4">Conclusões
Tipo 1
Os elementos que contribuíram para a obtenção da conclusão foram harmonizados</td></tr>
</table>

Figura 21 - Modelo de análise para categorização da questão 3.2, GII, exame 2015

QUESTÃO

4. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^x-\sqrt{e}}{2x-1} & \text{se } x<\dfrac{1}{2} \\ (x+1)\ln x & \text{se } x\geq\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Resolva os itens **4.1.** e **4.2.** recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

4.1. Averigue da existência de assíntotas verticais do gráfico da função f

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO (IAVE 2015)

4.1. .... **15 pontos**

Justificar que apenas a reta de equação $x = \frac{1}{2}$ pode ser assíntota vertical do gráfico de f .... 2 pontos

Determinar $\lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^-} f(x)$ .... 10 pontos

Este limite pode ser determinado por, pelo menos, três processos.

1.º Processo

Escrever $\lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^-} f(x) - \lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^-} \frac{e^x - \sqrt{e}}{2x-1}$ .... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^-} \frac{e^x - \sqrt{e}}{2x-1} - \lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^-} \frac{e^x - e^{\frac{1}{2}}}{2x-1}$ .... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^-} \frac{e^x - e^{\frac{1}{2}}}{2x-1} - \lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^-} \frac{e^x - e^{\frac{1}{2}}}{2\left(x - \frac{1}{2}\right)}$ .... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^-} \frac{e^x - e^{\frac{1}{2}}}{2\left(x - \frac{1}{2}\right)} - \lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^-} \frac{e^{\frac{1}{2}}\left(e^{x-\frac{1}{2}} - 1\right)}{2\left(x - \frac{1}{2}\right)}$ .... 2 pontos

Escrever $\lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^-} \frac{e^{\frac{1}{2}}\left(e^{x-\frac{1}{2}} - 1\right)}{2\left(x - \frac{1}{2}\right)} - \frac{e^{\frac{1}{2}}}{2} \lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^-} \frac{e^{x-\frac{1}{2}} - 1}{x - \frac{1}{2}}$ ...... 1 ponto

Escrever $\frac{e^{\frac{1}{2}}}{2} \lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^-} \frac{e^{x-\frac{1}{2}} - 1}{x - \frac{1}{2}} \underset{y = x - \frac{1}{2}}{-} \frac{e^{\frac{1}{2}}}{2} \lim\limits_{y \to 0^-} \frac{e^y - 1}{y}$

(**ver nota**) .... 2 pontos

Reconhecer o limite notável $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} - 1$ .... 1 ponto

Obter o valor de $\lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^-} f(x) \quad \left(\frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}}\right)$ .... 1 ponto

2.º Processo

Escrever $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} f(x) - \lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} \dfrac{e^x-\sqrt{e}}{2x-1}$ .... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} \dfrac{e^x-\sqrt{e}}{2x-1} \underset{y=x-\frac{1}{2}}{-} \lim\limits_{y\to 0^-} \dfrac{e^{y+\frac{1}{2}}-\sqrt{e}}{2y}$ .... 3 pontos

Escrever $\lim\limits_{y\to 0^-} \dfrac{e^{y+\frac{1}{2}}-\sqrt{e}}{2y} - \lim\limits_{y\to 0^-} \dfrac{e^{y+\frac{1}{2}}-e^{\frac{1}{2}}}{2y}$ .... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{y\to 0^-} \dfrac{e^{y+\frac{1}{2}}-e^{\frac{1}{2}}}{2y} - \lim\limits_{y\to 0^-} \dfrac{e^{\frac{1}{2}}(e^y-1)}{2y}$ .... 2 pontos

Escrever $\lim\limits_{y\to 0^-} \dfrac{e^{\frac{1}{2}}(e^y-1)}{2y} - \dfrac{e^{\frac{1}{2}}}{2} \lim\limits_{y\to 0^-} \dfrac{e^y-1}{y}$ .... 1 ponto

Reconhecer o limite notável $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x} - 1$ .... 1 ponto

Obter o valor de $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} f(x)$ $\left(\dfrac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}\right)$ .... 1 ponto

3.º Processo

Escrever $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} f(x) - \lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} \dfrac{e^x-\sqrt{e}}{2x-1}$ .... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} \dfrac{e^x-\sqrt{e}}{2x-1} - \lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} \dfrac{e^x-e^{\frac{1}{2}}}{2x-1}$ .... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} \dfrac{e^x-e^{\frac{1}{2}}}{2x-1} - \lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} \dfrac{e^x-e^{\frac{1}{2}}}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}$ .... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} \dfrac{e^x-e^{\frac{1}{2}}}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)} - \dfrac{1}{2} \lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} \dfrac{e^x-e^{\frac{1}{2}}}{x-\frac{1}{2}}$ .... 1 ponto

Referir que $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \dfrac{e^x-e^{\frac{1}{2}}}{x-\frac{1}{2}} - h'\left(\dfrac{1}{2}\right)$, sendo h a função

definida por $h(x)=e^x$ .... 3 pontos

Referir que $h'\left(\dfrac{1}{2}\right)=e^{\frac{1}{2}}$ .... 2 pontos

Concluir que $\dfrac{1}{2} \lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} \dfrac{e^x-e^{\frac{1}{2}}}{x-\frac{1}{2}} - \dfrac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}$ .... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^+} f(x) - \dfrac{3}{2}\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)$

OU .... 2 pontos

Referir que a função f é contínua à direita em $\dfrac{1}{2}$

Concluir que o gráfico da função f não tem qualquer assíntota vertical .... 1 ponto

Nota – Se, na resposta, for referido que $x\to\left(\dfrac{1}{2}\right)^-$ é equivalente a $x-\dfrac{1}{2}\to 0^-$, esta etapa deve ser considerada como cumprida.

PROPOSTA RESOLUÇÃO APM

4.

4.1 $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} \dfrac{e^x-\sqrt{e}}{2x-1} \underset{\substack{y=2x-1\\ \left(x=\frac{y+1}{2}\right)}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim\limits_{y\to 0^-} \dfrac{e^{\frac{y}{2}+\frac{1}{2}}-e^{\frac{1}{2}}}{y} = e^{\frac{1}{2}} \lim\limits_{y\to 0^-} \dfrac{e^{\frac{y}{2}}-1}{y} = \dfrac{e^{\frac{1}{2}}}{2} \lim\limits_{\frac{y}{2}\to 0^-} \dfrac{e^{\frac{y}{2}}-1}{\frac{y}{2}} =$

$= \dfrac{\sqrt{e}}{2}\times 1 = \dfrac{\sqrt{e}}{2} \in IR$ Logo não há assíntota vertical quando $x \to \left(\dfrac{1}{2}\right)^-$

$$\lim_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^+} \left[(x+1)\ln x\right] = \frac{3}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}\ln 2 \in IR$$

Logo não há assíntota vertical quando $x \to \left(\dfrac{1}{2}\right)^+$

Portanto, o gráfico de f não tem assíntota vertical em $x = \dfrac{1}{2}$.

O gráfico de f também não tem assíntota vertical em $IR \setminus \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ pois aí é contínua.

Assim o gráfico de f não tem assíntota vertical.

Nota: Nesta questão, verifica-se existir alteração na categorização das questões, consoante as propostas de resolução apresentadas nos processos IAVE e APM. Assim, nos 1.º e 2.º processos propostos pelo IAVE e proposta da APM temos Categoria A (Abstrato) e no 3.º processo IAVE resulta Categoria B (Relacional).

Nota: Nos 1.º e 2.º processos propostos pelo IAVE e proposta da APM, no cálculo do limite da função à esquerda de $\frac{1}{2}$, foi necessário identificar e relacionar simultaneamente o limite notável a ele associado e reconhecer a mudança de variável necessária para a resolução do limite. Verifica-se que os tópicos aplicados na resolução da questão relativos ao Tema II, são de nível igual ou superior ao Programa aplicável à mesma, no que respeita, especificamente, à aplicação da mudança de variável no cálculo do limite, uma vez que as indicações metodológicas do Programa referem que o "programa apenas pressupõe que se levantem indeterminações em casos simples" (Carvalho e Silva, Jaime, et al., DES - ME, Programa de Matemática A, 12.º ano, 2002), sendo que nesta questão apresentam-se indeterminações mais complexas nas quais é necessário aplicar o método da mudança de variável para resolver o limite, resultando a Categorização seguinte:

<table>
<tr><th colspan="4">MODELO DE ANÁLISE PARA CATEGORIZAÇÃO DA QUESTÃO</th></tr>
<tr><td>Lista dos tópicos considerados na construção das soluções hipotéticas
(Carvalho e Silva, 2002)</td><td colspan="2">Parâmetros de análise:
Tópicos e Procedimentos</td><td>Categorização</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Tema II: Introdução ao Cálculo Diferencial II
• “Função exponencial de base superior a 1”
• “Regras operatórias de exponenciais e logaritmos”
• “Propriedades operatórias sobre limites”
• “Limites notáveis”
• “Indeterminações”
• “Assintotas ao gráfico de uma função”</td><td rowspan="2">Tópicos</td><td>Quantidade
Dois ou mais tópicos foram utilizados</td><td rowspan="4">Categoria A (Abstrato)</td></tr>
<tr><td>Nível
Superior – Foram utilizados tópicos de nível igual ou superior ao do programa</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Procedimentos</td><td>Grau de inovação
Inédito – Envolve a elaboração de hipóteses de trabalho e estratégias inovadoras</td></tr>
<tr><td>Integração dos procedimentos
Interligados – Os procedimentos evidenciam a aplicação de vários conceitos e informações de forma integrada e simultânea</td></tr>
<tr><td colspan="4">Conclusões
Tipo 1
Os elementos que contribuíram para a obtenção da conclusão foram harmonizados</td></tr>
</table>

Figura 22 - Modelo de análise para categorização da questão 4.1, GII, exame 2015 – 1.º e 2.º processo

Nota: No 3.º processo do IAVE, no decorrer do cálculo do limite da função à esquerda de $\frac{1}{2}$, o aluno tem ainda que relacionar simultaneamente o limite com a derivada da função no ponto, correspondendo à Categorização infra:

<table>
<tr><th colspan="4">MODELO DE ANÁLISE PARA CATEGORIZAÇÃO DA QUESTÃO</th></tr>
<tr><th>Lista dos tópicos considerados na construção das soluções hipotéticas
(Carvalho e Silva, 2002)</th><th colspan="2">Parâmetros de análise:
Tópicos e Procedimentos</th><th>Categorização</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Tema II: Introdução ao Cálculo Diferencial II – 12.º ano
• “Função exponencial de base superior a 1”
• “Regras operatórias de exponenciais e logaritmos”
• “Propriedades operatórias sobre limites”
• “Indeterminações”

Tema II: Introdução ao Cálculo Diferencial I – 11.º ano
• “Derivada de uma função no ponto”</td><td rowspan="2">Tópicos</td><td>Quantidade
Dois ou mais tópicos foram utilizados</td><td rowspan="4">Categoria B (Relacional)</td></tr>
<tr><td>Nível
Adequado – Foram utilizados tópicos de nível análogo ao do programa</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Procedimentos</td><td>Grau de inovação
Réplica – Envolve hipóteses de trabalho e estratégias descritas nos programas</td></tr>
<tr><td>Integração dos procedimentos
Interligados – Os procedimentos evidenciam a aplicação de vários conceitos e informações de forma integrada e simultânea</td></tr>
<tr><td colspan="4">Conclusões
Tipo 1
Os elementos que contribuíram para a obtenção da conclusão foram harmonizados</td></tr>
</table>

Figura 23 - Modelo de análise para categorização da questão 4.1, GII, exame 2015 – 3.º processo

Nota: Verifica-se que na maioria das resoluções propostas para esta questão (2 primeiros processos IAVE e resolução APM), o método utilizado é de maior complexidade, uma vez que os tópicos são de nível superior ao Programa de Matemática A 2002, tal como explicitado em nota supra, resultando a Categoria A (Abstrato). Apenas no 3.º processo de resolução IAVE se encontra a Categoria B (Relacional) uma vez que, na resolução do limite, não foi aplicado limite notável com mudança de variável, enquadrando-se os tópicos aplicados no nível adequado ao Programa.

QUESTÃO

4.2. Estude a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão, no intervalo $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$

Na sua resposta, apresente:

- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo;
- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem concavidade voltada para cima;
- as coordenadas do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de f

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO (IAVE 2015)

4.2. .... **15 pontos**

Determinar $f'(x)$ em $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$ .... 3 pontos

Aplicar a regra de derivação do produto .... 1 ponto

Obter $f'(x)$ .... 2 pontos

Determinar $f''(x)$ em $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$ .... 3 pontos

Determinar o zero de f'' em $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$ .... 2 pontos

Escrever $f''(x) = 0$ .... 1 ponto

Obter o zero de f'' em $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$ .... 1 ponto

Estudar a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão, no intervalo $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$ .... 7 pontos

Apresentar um quadro de sinal de f'' e de sentido da concavidade do gráfico de f (ou equivalente) .... 3 pontos

Referir que o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo em $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$ (**ver nota 1**) .... 1 ponto

Referir que o gráfico de f tem concavidade voltada para cima em $]1, +\infty[$ (**ver nota 2**) .... 1 ponto

Indicar as coordenadas do ponto de inflexão do gráfico da função f em $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$ $((1, 0))$ .... 2 pontos

Notas:

1. Se, na resposta, for referido que o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo em $\left]\frac{1}{2}, 1\right]$, em vez de $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$, esta etapa deve ser considerada como cumprida.
2. Se, na resposta, for referido que o gráfico de f tem concavidade voltada para cima em $[1, +\infty[$, em vez de $]1, +\infty[$, esta etapa deve ser considerada como cumprida.

PROPOSTA RESOLUÇÃO APM

4.2

$$f'(x) = \ln x + \frac{x+1}{x} = \ln x + 1 + \frac{1}{x}, \forall x \in \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$$

$$f''(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}, \forall x \in \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$$

$$f''(x) = 0 \wedge x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow x - 1 = 0 \wedge x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 1$$

x	½		1	$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\cap$	P.I.	$\cup$

O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$ e tem a concavidade voltada para cima em $]1, +\infty[$.

O ponto de inflexão tem de coordenadas $(1, f(1))$ ou seja, o ponto $(1, 0)$.

<table>
<tr><th colspan="4">MODELO DE ANÁLISE PARA CATEGORIZAÇÃO DA QUESTÃO</th></tr>
<tr><td>Lista dos tópicos considerados na construção das soluções hipotéticas
(Carvalho e Silva, 2002)</td><td colspan="2">Parâmetros de análise:
Tópicos e Procedimentos</td><td>Categorização</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Tema II: Introdução ao Cálculo Diferencial II
• “Funções deriváveis. Regras de derivação. Derivadas das funções elementares”
• “Segundas derivadas de uma função e concavidade”
• “Estudo de funções em casos simples.”</td><td rowspan="2">Tópicos</td><td>Quantidade
Dois ou mais tópicos foram utilizados</td><td rowspan="4">Categoria C (Multi-estrutural)</td></tr>
<tr><td>Nível
Adequado – Foram utilizados tópicos de nível análogo ao do programa</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Procedimentos</td><td>Grau de inovação
Réplica – Envolve hipóteses de trabalho e estratégias descritas nos programas</td></tr>
<tr><td>Integração dos procedimentos
Compartimentados – Os procedimentos mostram a aplicação de vários conceitos e informações de forma isolada e sucessiva</td></tr>
<tr><td colspan="4">Conclusões
Tipo 1
Os elementos que contribuíram para a obtenção da conclusão foram harmonizados</td></tr>
</table>

Figura 24 - Modelo de análise para categorização da questão 4.2, GII, exame 2015

QUESTÃO

4.3. Mostre que a equação $f(x)=3$ é possível em $]1, e[$ e, utilizando a calculadora gráfica, determine a única solução desta equação, neste intervalo, arredondada às centésimas.

Na sua resposta:

- recorra ao teorema de Bolzano para provar que a equação $f(x)=3$ tem, pelo menos, uma solução no intervalo $]1, e[$
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) que visualizar na calculadora, devidamente identificado(s);
- apresente a solução pedida.

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO (IAVE 2015)

4.3. .... **15 pontos**

Justificar que a equação $f(x)=3$ tem, pelo menos, uma solução em $]1, e[$ 6 pontos

Referir que a função f é contínua em $[1, e]$ (**ver nota 1**) .... 1 ponto

Calcular $f(1)$ .... 1 ponto

Calcular $f(e)$ .... 1 ponto

Referir que $f(1) < 3 < f(e)$ .... 2 pontos

Concluir que a equação $f(x)=3$ tem, pelo menos, uma solução em $]1, e[$ .... 1 ponto

Reproduzir o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora, que permite(m) resolver o problema (**ver nota 2**) .... 4 pontos

Apresentar a solução pedida $(2,41)$ .... 5 pontos

Notas:

1. Se, na resposta, for referido que a função é contínua em $]1, e[$, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos. A mesma pontuação deve ser atribuída se, na resposta, apenas for referido que a função é contínua.
2. Se, na resposta, não for apresentado o referencial, a pontuação a atribuir nesta etapa deve ser desvalorizada em 1 ponto.

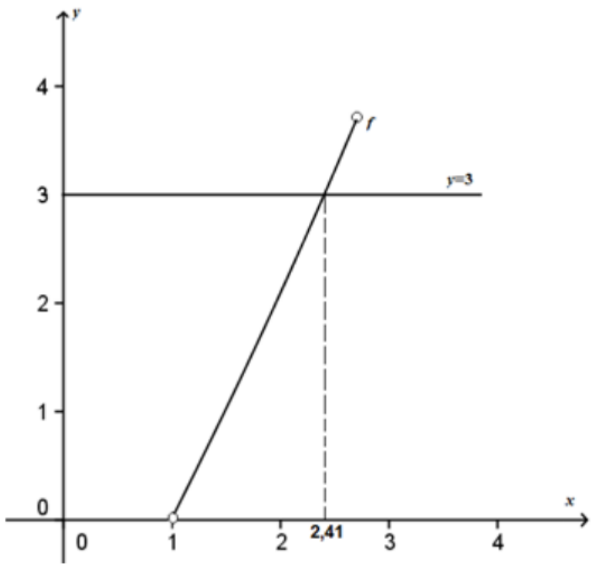
4.3

A função f é contínua em $[1,e]$ $\left([1,e]\subset\left[\frac{1}{2},+\infty\right[\right)$

$f(1)=0$

$f(e)=e+1\approx 3{,}718$

$\therefore\ 3\in\left]f(1),f(e)\right[$, assim pelo teorema de Bolzano $\exists c\in\left]1,e\right[:f(c)=3$



R: Aproximadamente 2,41

<table>
<tr><th colspan="4">MODELO DE ANÁLISE PARA CATEGORIZAÇÃO DA QUESTÃO</th></tr>
<tr><td>Lista dos tópicos considerados na construção das soluções hipotéticas
(Carvalho e Silva, 2002)</td><td colspan="2">Parâmetros de análise:
Tópicos e Procedimentos</td><td>Categorização</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Tema II: Introdução ao Cálculo Diferencial II
• “Teorema de Bolzano-Cauchy”
• “Regras operatórias de exponenciais e logaritmos”
• “Continuidade de uma função”</td><td rowspan="2">Tópicos</td><td>Quantidade
Dois ou mais tópicos foram utilizados</td><td rowspan="4">Categoria C (Multi-estrutural)</td></tr>
<tr><td>Nível
Adequado – Foram utilizados tópicos de nível análogo ao do programa</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Procedimentos</td><td>Grau de inovação
Réplica – Envolve hipóteses de trabalho e estratégias descritas nos programas</td></tr>
<tr><td>Integração dos procedimentos
Compartimentados – Os procedimentos mostram a aplicação de vários conceitos e informações de forma isolada e sucessiva</td></tr>
<tr><td colspan="4">Conclusões - Tipo 1
Os elementos que contribuíram para a obtenção da conclusão foram harmonizados</td></tr>
</table>

Figura 25 - Modelo de análise para categorização da questão 4.3, GII, exame 2015

QUESTÃO

5. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, os pontos $A(0,0,2)$ e $B(4,0,0)$

5.1. Considere o plano α de equação $x-2y+z+3=0$

Escreva uma equação do plano que passa no ponto A e é paralelo ao plano α

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO (IAVE 2015)

5.1. .... **5 pontos**

Escrever a equação $x-2y+z+d-0$ (ou equivalente) .... 2 pontos

Determinar o valor de d .... 2 pontos

Escrever uma equação do plano pedido $(x-2y+z-2-0$ ou equivalente$)$.. 1 ponto

PROPOSTA RESOLUÇÃO APM

5.

5.1 o vetor normal ao plano α é $\vec{n}_\alpha = (1,-2,1)$

Se $\alpha // \beta$ logo $\vec{n}_\alpha // \vec{n}_\beta$ pelo que o plano β pode definir-se por

$x - 2y + z + d = 0$

Como o ponto A(2,0,1) pertence a β, 2 – 0 + 1 + d = 0 logo $d = -2$

R: $\beta : x - 2y + z - 2 = 0$

<table>
<tr><th colspan="4">MODELO DE ANÁLISE PARA CATEGORIZAÇÃO DA QUESTÃO</th></tr>
<tr><td>Lista dos tópicos considerados na construção das soluções hipotéticas
(Carvalho e Silva, 2002)</td><td colspan="2">Parâmetros de análise:
Tópicos e Procedimentos</td><td>Categorização</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Tema I: Geometria no Plano e no Espaço II
• “Equação cartesiana do plano definido por um ponto e o vetor normal.”
• “Paralelismo e perpendicularidade de retas e planos”</td><td rowspan="2">Tópicos</td><td>Quantidade
Dois ou mais tópicos foram utilizados</td><td rowspan="4">Categoria C (Multi-estrutural)</td></tr>
<tr><td>Nível
Adequado – Foram utilizados tópicos de nível análogo ao do programa</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Procedimentos</td><td>Grau de inovação
Réplica – Envolve hipóteses de trabalho e estratégias descritas nos programas</td></tr>
<tr><td>Integração dos procedimentos
Compartimentados – Os procedimentos mostram a aplicação de vários conceitos e informações de forma isolada e sucessiva</td></tr>
<tr><td colspan="4">Conclusões
Tipo 2
A conclusão decorre exclusivamente dos procedimentos matemáticos envolvidos na resolução</td></tr>
</table>

Figura 26 - Modelo de análise para categorização da questão 5.1, GII, exame 2015

QUESTÃO

5.2. Determine uma equação cartesiana que defina a superfície esférica da qual o segmento de reta $[AB]$ é um diâmetro.

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO (IAVE 2015)

5.2. .... **10 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Determinar $\overline{AB}$ .... 2 pontos

Obter o raio da superfície esférica .... 1 ponto

Determinar as coordenadas do ponto médio do segmento de reta $[AB]$ .... 2 pontos

Escrever a condição $(x-2)^2+y^2+(z-1)^2-5$ (ou equivalente)
(**ver notas 1** e **2**) .... 5 pontos

2.º Processo

Seja $P(x, y, z)$ um ponto genérico da superfície esférica.

Determinar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AP}$ .... 2 pontos

Determinar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{BP}$ .... 2 pontos

Escrever $\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{BP}=0$ .... 3 pontos

Escrever a condição $x^2+y^2+z^2-4x-2z-0$ (ou equivalente) .... 3 pontos

Notas:

1. A escrita de $\sqrt{5}$, em vez de 5, implica uma desvalorização de 2 pontos nesta etapa.
2. A escrita de $\leq$, em vez de $=$, implica uma desvalorização de 2 pontos nesta etapa.
   A escrita de $<$ ou de $>$ ou de $\geq$ implica uma desvalorização de 3 pontos nesta etapa.

PROPOSTA RESOLUÇÃO APM

5.2

Ponto médio de $[AB]$ $M=(2,0,1)$ (Centro da superfície esférica)

$$\text{Raio: } r=\frac{\overline{A}\overline{B}}{2}=\frac{\sqrt{4^2+2^2}}{2}=\frac{2\sqrt{5}}{2}=\sqrt{5}$$

$$(x-2)^2+y^2+(z-1)^2=5$$

Nota: Resolução da APM e 1.º processo do IAVE – tópicos do 10.º ano – corresponde à Categorização a seguir apresentada:

<table>
<tr><th colspan="4">MODELO DE ANÁLISE PARA CATEGORIZAÇÃO DA QUESTÃO</th></tr>
<tr><td>Lista dos tópicos considerados na construção das soluções hipotéticas
(Carvalho e Silva, 2001)</td><td colspan="2">Parâmetros de análise:
Tópicos e Procedimentos</td><td>Categorização</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Tema I: Geometria no Plano e no Espaço I
• “Distância entre pontos no plano e no espaço”
• “Lugares geométricos: circunferência, círculo e mediatriz; superfície esférica, esfera e plano mediador”</td><td rowspan="2">Tópicos</td><td>Quantidade
Dois ou mais tópicos foram utilizados</td><td rowspan="4">Categoria C
(Multi-estrutural)</td></tr>
<tr><td>Nível
Adequado – Foram utilizados tópicos de nível análogo ao do programa</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Procedimentos</td><td>Grau de inovação
Réplica – Envolve hipóteses de trabalho e estratégias descritas nos programas</td></tr>
<tr><td>Integração dos procedimentos
Compartimentados – Os procedimentos mostram a aplicação de vários conceitos e informações de forma isolada e sucessiva</td></tr>
<tr><td colspan="4">Conclusões
Tipo 2
A conclusão decorre exclusivamente dos procedimentos matemáticos envolvidos na resolução</td></tr>
</table>

Figura 27 - Modelo de análise para categorização da questão 5.2, GII, exame 2015 – 1.º processo

Nota: Resolução com base no 2.º processo do IAVE – tópicos do 11.º ano – corresponde à Categorização infra:

<table>
<tr><th colspan="4">MODELO DE ANÁLISE PARA CATEGORIZAÇÃO DA QUESTÃO</th></tr>
<tr><th>Lista dos tópicos considerados na construção das soluções hipotéticas
(Carvalho e Silva, 2002)</th><th colspan="2">Parâmetros de análise:
Tópicos e Procedimentos</th><th>Categorização</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Tema I: Geometria no Plano e no Espaço I - 10.º ano
• “Vetor como diferença de dois pontos”
Tema I: Geometria no Plano e no Espaço II – 11.º ano
• “Produto escalar de dois vetores no plano e no espaço:
- definição e propriedades;
- Expressão do produto escalar nas coordenadas dos vetores em referencial ortonormado.”
• “Definição de conjuntos no espaço:
- Superfície esférica”</td><td rowspan="2">Tópicos</td><td>Quantidade
Dois ou mais tópicos foram utilizados</td><td rowspan="4">Categoria C (Multi-estrutural)</td></tr>
<tr><td>Nível
Adequado – Foram utilizados tópicos de nível análogo ao do programa</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Procedimentos</td><td>Grau de inovação
Réplica – Envolve hipóteses de trabalho e estratégias descritas nos programas</td></tr>
<tr><td>Integração dos procedimentos
Compartimentados – Os procedimentos mostram a aplicação de vários conceitos e informações de forma isolada e sucessiva</td></tr>
<tr><td colspan="4">Conclusões
Tipo 2
A conclusão decorre exclusivamente dos procedimentos matemáticos envolvidos na resolução</td></tr>
</table>

Figura 28 - Modelo de análise para categorização da questão 5.2, GII, exame 2015 – 2.º processo

QUESTÃO

5.3. Seja P o ponto pertencente ao plano xOy tal que:

- a sua abcissa é igual à abcissa do ponto B
- a sua ordenada é positiva;
- $B\hat{A}P = \frac{\pi}{3}$

Determine a ordenada do ponto P

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO (IAVE 2015)

5.3. .... **15 pontos**

Seja y a ordenada do ponto P

Escrever $P(4, y, 0)$	2 pontos
Determinar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AB}$	1 ponto
Determinar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AP}$	1 ponto
Calcular $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AP}$	2 pontos
Determinar a norma do vetor $\overrightarrow{AB}$	1 ponto
Determinar a norma do vetor $\overrightarrow{AP}$, em função de y	2 pontos
Escrever a equação $20 = \sqrt{20} \times \sqrt{20+y^2} \times \frac{1}{2}$ (ou equivalente)	3 pontos
Obter o valor de y ($\sqrt{60}$)	3 pontos

PROPOSTA RESOLUÇÃO APM

5.3

$P \in xOy \qquad P(4, y, 0),\ y > 0$

$$\cos\left(B\hat{A}P\right) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{AP}\right\|} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{(4,0,-2)\cdot(4,y,-2)}{\sqrt{4^2+2^2} \times \sqrt{4^2+y^2+2^2}} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{16+4}{\sqrt{20\times\left(20+y^2\right)}} \Rightarrow$$

$$\left(\sqrt{20\times\left(20+y^2\right)}\right)^2 = 40^2 \Leftrightarrow 400 + 20y^2 = 1600 \Leftrightarrow y^2 = 60 \Leftrightarrow y = \sqrt{60} \quad (y > 0)$$

<table>
<tr><th colspan="4">MODELO DE ANÁLISE PARA CATEGORIZAÇÃO DA QUESTÃO</th></tr>
<tr><th>Lista dos tópicos considerados na construção das soluções hipotéticas
(Carvalho e Silva, 2002)</th><th colspan="2">Parâmetros de análise:
Tópicos e Procedimentos</th><th>Categorização</th></tr>
<tr><td rowspan="4">• Tema I: Geometria no Plano e no Espaço I – 10.º ano
• “Referenciais cartesianos ortogonais e monométricos no plano e no espaço”
• “Vetor como diferença de dois pontos”
• “Norma de um vetor”
Tema I: Geometria no Plano e no Espaço II – 11.º ano
• “Razões trigonométricas dos ângulos de 30°, 45° e 60°”
• “Produto escalar de dois vetores no plano e no espaço:
- definição e propriedades;
- Expressão do produto escalar nas coordenadas dos vetores em referencial ortonormado.”
• “Ângulo de dois vetores”</td><td rowspan="2">Tópicos</td><td>Quantidade
Dois ou mais tópicos foram utilizados</td><td rowspan="4">Categoria C (Multi-estrutural)</td></tr>
<tr><td>Nível
Adequado – Foram utilizados tópicos de nível análogo ao do programa</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Procedimentos</td><td>Grau de inovação
Réplica – Envolve hipóteses de trabalho e estratégias descritas nos programas</td></tr>
<tr><td>Integração dos procedimentos
Compartimentados – Os procedimentos mostram a aplicação de vários conceitos e informações de forma isolada e sucessiva</td></tr>
<tr><td colspan="4">Conclusões
Tipo 1
Os elementos que contribuíram para a obtenção da conclusão foram harmonizados</td></tr>
</table>

Figura 29 - Modelo de análise para categorização da questão 5.3, GII, exame 2015

QUESTÃO

6. Sejam f e g as funções, de domínio $\mathbb{R}$, definidas, respetivamente, por

$$f(x) = 1 - \cos(3x) \quad \text{e} \quad g(x) = \operatorname{sen}(3x)$$

Seja a um número real pertencente ao intervalo $\left]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right[$

Considere as retas r e s tais que:

- a reta r é tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa a
- a reta s é tangente ao gráfico da função g no ponto de abcissa $a + \frac{\pi}{6}$

Sabe-se que as retas r e s são perpendiculares.

Mostre que $\operatorname{sen}(3a) = -\frac{1}{3}$

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO (IAVE 2015)

6. .... **15 pontos**

Determinar $f'(x)$ .... 2 pontos

Obter $f'(a)$ .... 1 ponto

Determinar $g'(x)$ .... 2 pontos

Determinar $g'\left(a+\frac{\pi}{6}\right)$ .... 4 pontos

Escrever $g'\left(a+\frac{\pi}{6}\right)=3\cos\left(3\left(a+\frac{\pi}{6}\right)\right)$ .... 1 ponto

Escrever $3\cos\left(3\left(a+\frac{\pi}{6}\right)\right)=3\cos\left(3a+\frac{\pi}{2}\right)$ .... 1 ponto

Concluir que $3\cos\left(3a+\frac{\pi}{2}\right)=-3\operatorname{sen}(3a)$ .... 2 pontos

Escrever $f'(a)=-\dfrac{1}{g'\left(a+\frac{\pi}{6}\right)}$ (ou equivalente) .... 2 pontos

Concluir que $\operatorname{sen}^2(3a)=\frac{1}{9}$ .... 1 ponto

Concluir que $\operatorname{sen}(3a)=-\frac{1}{3}$ **(ver nota)** .... 3 pontos

Nota – Se, na resposta, não for referido que $3a\in\left]\pi,\frac{3\pi}{2}\right[$ (ou equivalente), a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.

PROPOSTA RESOLUÇÃO APM

6.

$f'(x)=3sen(3x)$ 3 $g'(x)=3\cos(3x)$

$r\perp s$ logo $m_r\times m_s=-1$

$m_r=f'(a)=3sen(3a)$

$m_s=g'\left(a+\dfrac{\pi}{6}\right)=3\cos\left(3a+\dfrac{\pi}{2}\right)=-3sen(3a)$

$3sen(3a)\times(-3sen(3a))=-1\Leftrightarrow sen^2(3a)=\dfrac{1}{9}\Leftrightarrow sen(3a)=\pm\dfrac{1}{3}$.

$\left(\text{Como } a\in\left]\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}\right[\text{ então } 3a\in\left]\pi,\dfrac{3}{2}\pi\right[\text{ pelo que } sen(3a)<0\right)$

Então $sen(3a)=-\dfrac{1}{3}$

<table>
<tr><th colspan="4">MODELO DE ANÁLISE PARA CATEGORIZAÇÃO DA QUESTÃO</th></tr>
<tr><th>Lista dos tópicos considerados na construção das soluções hipotéticas
(Carvalho e Silva, 2002)</th><th colspan="2">Parâmetros de análise:
Tópicos e Procedimentos</th><th>Categorização</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Tema I: Geometria no Plano e no Espaço II – 11.º ano
• “Paralelismo e perpendicularidade de retas e de planos”
• “Relação entre as razões trigonométricas de α, $-\alpha$, $2+\alpha$, $2-\alpha$, $\pi+\alpha$, $\pi-\alpha$, $2\pi+\alpha$, $2\pi-\alpha$,”

Tema II: Introdução ao Cálculo Diferencial II – 12.º ano
• “Funções deriváveis. Regras de derivação. Derivadas das funções elementares”

Tema III: Trigonometria e Números Complexos – 12.º ano
• “Derivadas do seno, co-seno e tangente.”</td><td rowspan="2">Tópicos</td><td>Quantidade
Dois ou mais tópicos foram utilizados</td><td rowspan="4">Categoria C (Multi-estrutural)</td></tr>
<tr><td>Nível
Adequado – Foram utilizados tópicos de nível análogo ao do programa</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Procedimentos</td><td>Grau de inovação
Réplica – Envolve hipóteses de trabalho e estratégias descritas nos programas</td></tr>
<tr><td>Integração dos procedimentos
Compartimentados – Os procedimentos mostram a aplicação de vários conceitos e informações de forma isolada e sucessiva</td></tr>
<tr><td colspan="4">Conclusões
Tipo 1
Os elementos que contribuíram para a obtenção da conclusão foram harmonizados</td></tr>
</table>

Figura 30 - Modelo de análise para categorização da questão 6, GII, exame 2015

Análise ao exame de Matemática A, 12.º ano, de 2015 – 1.ª fase

Nesta tabela pretendemos relacionar as questões de exame pelos temas dos conteúdos programáticos e por categorização Solo.

*Tabela **6** - Síntese do Exame de 2015*

Síntese Exame Matemática A 12.º Ano 2015 - 1.ª fase

	Categoria / Tema/Domínio	**Categoria A (Abstrato)**		**Categoria B (Relacional)**		**Categoria C (Multi-estrutural)**		**Categoria D (Uni-estrutural)**		**Categoria E (Pré-estrutural)**	
		Questões	Total questões	Questões	Total questões	Questões	Total questões	Questões	Total questões	Questões	Total questões
Grupo I	**Tema I** - Probabilidades e Combinatória - 12.º ano					1, 2	2				
Grupo I	**Tema II** - Introdução ao cálculo Diferencial II - 12.º ano			4	1	3	1				
Grupo I	**Tema III** - Trigonometria e Números Complexos - 12.º ano			4	1	5, 6	2				
Grupo I	**Tema I** - Geometria no Plano e no Espaço II - 11.º ano					5, 7	2				
Grupo I	**Tema III** - Sucessões reais - 11.º ano					8	1				
Grupo I	**Tema I** - Geometria no Plano e no Espaço I - 10.º ano					7	1				
Grupo I	Total por categoria	0		1		7		0		0	
Grupo I	% categoria	0%		5%		35%		0%		0%	
Grupo II	**Tema I** - Probabilidades e Combinatória - 12.º ano					2.1, 2.2	2				
Grupo II	**Tema II** - Introdução ao cálculo Diferencial II - 12.º ano	4.1	1			3.2, 4.2, 4.3, 6	4				
Grupo II	**Tema III** - Trigonometria e Números Complexos - 12.º ano					1, 6	2				
Grupo II	**Tema I** - Geometria no Plano e no Espaço II - 11.º ano					1, 5.1, 5.2, 5.3, 6	5				
Grupo II	**Tema I** - Geometria no Plano e no Espaço I - 10.º ano					3.1, 5.2, 5.3	3				
Grupo II	Total por categoria	1		0		11		0		0	
Grupo II	% categoria	5%		0%		55%		0%		0%	
	% total por categoria	5%		5%		90%		0%		0%	

Ao analisar a tabela constatamos que tanto no Grupo I como no Grupo II foram avaliados temas dos 3 anos do ensino secundário. Importa salientar que há questões que se inserem em mais do que um tema, razão pela qual o "Total por categoria" não corresponde ao somatório do "Total questões" da Categoria, situação análoga para todas as tabelas "Síntese Exame Matemática A 12.º Ano …" dos exames analisados.

Neste exame, parece-nos importante comentar separadamente os dois grupos de questões.

No Grupo I, de escolha múltipla, verifica-se a existência de três questões que incidem sobre dois temas. A questão 5 recai sobre o Tema III do 12.º ano e o Tema I do 11.º ano, a questão 7 sobre os Temas I do 11.º ano e 10.º ano. Estas e quase todas as outras questões deste grupo são categorizadas como Categoria C (Multi-estrutural). Na verdade, neste grupo, apenas uma questão é categorizada como Categoria B (Relacional) - a questão 4, que também incide sobre dois temas, desta feita, ambos do 12.º ano (Tema II e Tema III).

Nas questões do Grupo II, onde o aluno deve apresentar o seu raciocínio, verificamos também a existência de questões que incidem sobre dois ou mais temas. É o caso das questões categorizadas como Multi-estruturais: questão 1 (Tema III do 12.º ano e Tema I do 11.º ano), questão 3.1 (Tema II do 12.º ano e Tema I do 10.º ano), questões 5.2 e 5.3 (Tema I do 11.º ano e Tema I do 10.º ano) e questão 6 (Tema II e Tema III do 12.º ano e Tema I do 11.º ano).

Neste grupo, a questão 4.1 que aborda o Tema II do 12.º ano é a única questão categorizada como Abstrato (Categoria A), muito embora uma das propostas de resolução indicadas pelo IAVE pressuponha a categorização Relacional (Categoria B).

Nos gráficos que apresentamos de seguida, ilustramos de forma simplificada os dados apresentados na síntese, a fim de facilitar a sua leitura e compreensão.

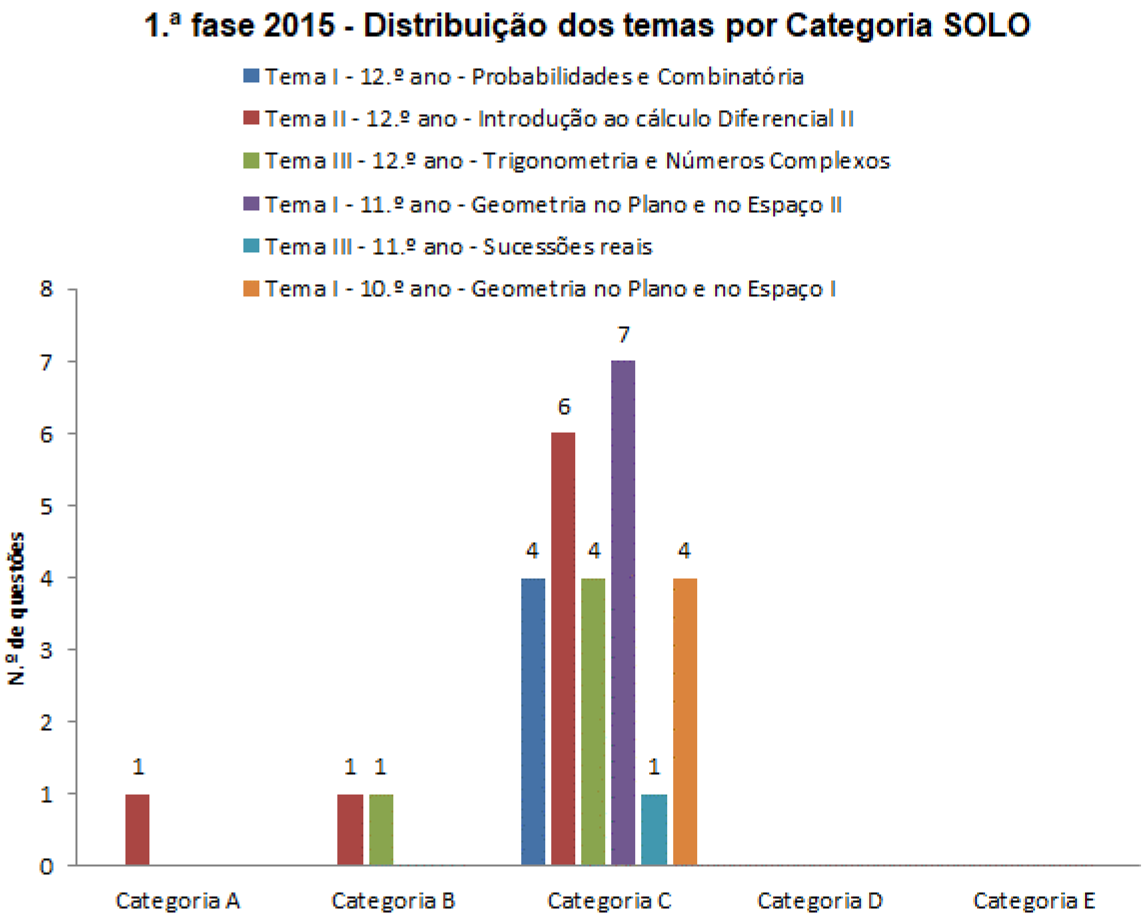


Gráfico 1 - Distribuição dos temas por categoria SOLO - Exame 2015

Neste gráfico verificamos que todos os temas têm questões categorizadas como categoria C (Multi-estrutural) e que apenas o Tema II do 12.º ano é abordado em questões categorizadas como A (Abstrato) e B (Relacional). O Tema III do 12.º ano também tem uma questão categorizada como Categoria B (Relacional). As Categorias E (Pré-estrutural) e D (Uni-estrutural) não foram contempladas.

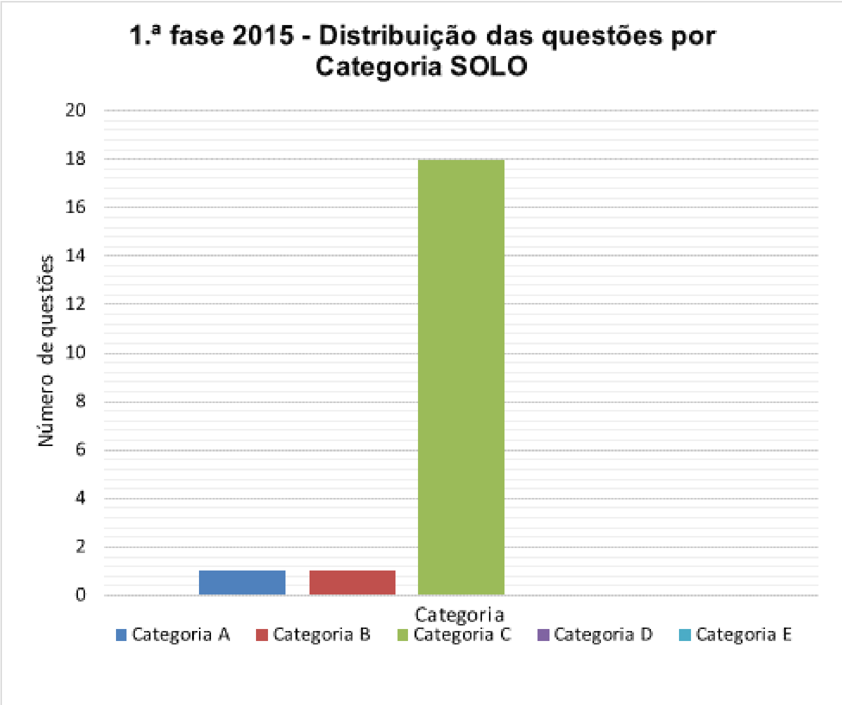


Gráfico 2 - Distribuição das questões por categoria SOLO - Exame 2015

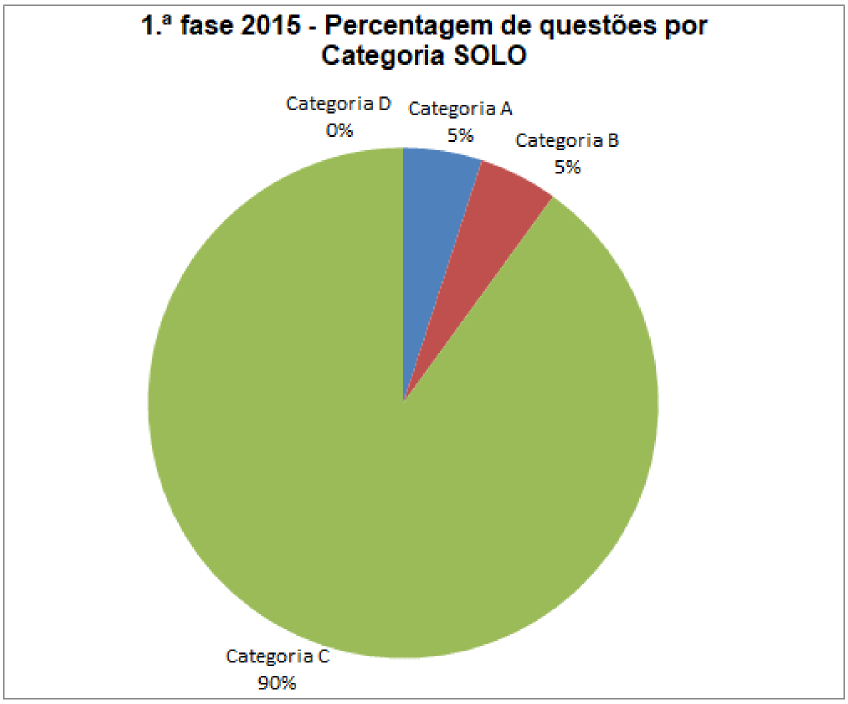


Gráfico 3 - Percentagem de questões por Categoria SOLO - Exame 2015

Estes gráficos indicam-nos que este exame é um exemplo de uma prova constituída maioritariamente por questões de categoria C (Multi-estrutural), correspondendo a 90%, embora existam ainda outras categorias com frequência: a Categoria A (5%) e a Categoria B (5%).

6.2 EXAME 12.º ANO – 1.ª FASE/2016

Grupo I
QUESTÃO

1. Seja Ω, conjunto finito, o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos $(A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega)$.

Sabe-se que:

- $P(A) = \frac{2}{5}$
- $P(B) = \frac{3}{10}$
- $P(A|B) = \frac{1}{6}$

Qual é o valor de $P(A \cup B)$?

(A) $\frac{4}{5}$ **(B)** $\frac{7}{10}$ **(C)** $\frac{13}{20}$ **(D)** $\frac{19}{30}$

PROPOSTA RESOLUÇÃO APM

1.

Como $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{6}$,

temos que:

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6} \times P(B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{6} \times \frac{3}{10} \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{20}$$

Assim,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{5} + \frac{3}{10} - \frac{1}{20} = \frac{8}{20} + \frac{6}{20} - \frac{1}{20} = \frac{13}{20}$$

Resposta correta:

Versão 1: C

<table>
<tr><th colspan="4">MODELO DE ANÁLISE PARA CATEGORIZAÇÃO DA QUESTÃO</th></tr>
<tr><td>Lista dos tópicos considerados na construção das soluções hipotéticas
(Carvalho e Silva, 2002)</td><td colspan="2">Parâmetros de análise:
Tópicos e Procedimentos</td><td>Categorização</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Tema I: Probabilidades e Combinatória
• “Operações sobre acontecimentos”
• “Definição axiomática de probabilidade”
• “Propriedades da probabilidade”
• “Probabilidade condicionada e independência”</td><td rowspan="2">Tópicos</td><td>Quantidade
Dois ou mais tópicos foram utilizados</td><td rowspan="4">Categoria C (Multi-estrutural)</td></tr>
<tr><td>Nível
Adequado – Foram utilizados tópicos de nível análogo ao do programa</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Procedimentos</td><td>Grau de inovação
Réplica – Envolve hipóteses de trabalho e estratégias descritas nos programas</td></tr>
<tr><td>Integração dos procedimentos
Compartimentados – Os procedimentos mostram a aplicação de vários conceitos e informações de forma isolada e sucessiva</td></tr>
<tr><td colspan="4">Conclusões
Tipo 2
A conclusão decorre exclusivamente dos procedimentos matemáticos envolvidos na resolução</td></tr>
</table>

Figura 31 - Modelo de análise para categorização da questão 1, GI, exame 2016

QUESTÃO

2. Seja X uma variável aleatória com distribuição normal de valor médio 10

Sabe-se que $P(7 < X < 10) = 0{,}3$

Qual é o valor de $P(X > 13)$?

(A) $0{,}1$ **(B)** $0{,}2$ **(C)** $0{,}3$ **(D)** $0{,}4$

PROPOSTA RESOLUÇÃO APM

2.

Dado que X é uma variável aleatória com distribuição normal de valor médio 10, então

$P(X < 10) = P(X > 10) = 0{,}5$ e $P(7 < X < 10) = P(10 < X < 13) = 0{,}3$

Assim,

$P(X > 13) = P(X > 10) - P(10 < X < 13) = 0{,}5 - 0{,}3 = 0{,}2$

Resposta correta:

$\boxed{\text{Versão 1: B}}$

<table>
<tr><th colspan="4">MODELO DE ANÁLISE PARA CATEGORIZAÇÃO DA QUESTÃO</th></tr>
<tr><td>Lista dos tópicos considerados na construção das soluções hipotéticas
(Carvalho e Silva, 2002)</td><td colspan="2">Parâmetros de análise:
Tópicos e Procedimentos</td><td>Categorização</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Tema I: Probabilidades e Combinatória
• “Modelo Normal; histograma versus função densidade”
• “Média versus valor médio”</td><td rowspan="2">Tópicos</td><td>Quantidade
Dois ou mais tópicos foram utilizados</td><td rowspan="4">Categoria C (Multi-estrutural)</td></tr>
<tr><td>Nível
Adequado – Foram utilizados tópicos de nível análogo ao do programa</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Procedimentos</td><td>Grau de inovação
Réplica – Envolve hipóteses de trabalho e estratégias descritas nos programas</td></tr>
<tr><td>Integração dos procedimentos
Compartimentados – Os procedimentos mostram a aplicação de vários conceitos e informações de forma isolada e sucessiva</td></tr>
<tr><td colspan="4">Conclusões
Tipo 2
A conclusão decorre exclusivamente dos procedimentos matemáticos envolvidos na resolução</td></tr>
</table>

Figura 32 - Modelo de análise para categorização da questão 2, GI, exame 2016

QUESTÃO

3. Seja a um número real diferente de 0

Qual é o valor de $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{a e^{x-a} - a}{x^2 - a^2}$?

(A) $\dfrac{1}{4}$ **(B)** $\dfrac{1}{2}$ **(C)** 1 **(D)** 2

PROPOSTA RESOLUÇÃO APM

3.

$$\lim_{x \to a} \frac{a e^{x-a} - a}{x^2 - a^2} = \lim_{x \to a} \frac{a\left(e^{x-a} - 1\right)}{(x-a)(x+a)} = \lim_{x \to a} \left(\frac{a}{x+a} \times \frac{e^{x-a} - 1}{x-a} \right) =$$

$$= \frac{a}{a+a} \times \lim_{x \to a} \frac{e^{x-a} - 1}{x-a} = \frac{a}{2a} \times \lim_{x \to a} \frac{e^{x-a} - 1}{x-a} =$$

$$= \frac{1}{2} \times \lim_{x \to a} \frac{e^{x-a} - 1}{x-a}$$

Fazendo a mudança de variável: $y = x - a$,

Como $x \to a$ então $y \to 0$

e assim,

$$\frac{1}{2} \times \lim_{x \to a} \frac{e^{x-a} - 1}{x-a} = \frac{1}{2} \times \underbrace{\lim_{y \to 0} \frac{e^{y} - 1}{y}}_{\text{limite notável}} = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$$

Resposta correta:

Versão 1: B

Nota: Na resolução desta questão, o aluno tem de aplicar tópicos do 12.º ano, designadamente cálculo de limites, identificar indeterminações e reconhecer a aplicação do limite notável $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$, em que no cálculo deste limite vai ter que integrar simultaneamente uma mudança de variável (y = x - a) para chegar aos limites notáveis $\lim\limits_{y \to 0} \frac{e^y - 1}{y}$ =1.

Verifica-se que os tópicos aplicados na resolução da questão relativos ao Tema II, são de nível igual ou superior ao Programa aplicável à mesma, no que respeita, especificamente, à aplicação da mudança de varável no cálculo do limite, uma vez que as indicações metodológicas do Programa referem que o "programa apenas pressupõe que se levantem indeterminações em casos simples" (Carvalho e Silva, Jaime, et al., DES - ME, Programa de Matemática A, 12.º ano, 2002), sendo que nesta questão apresentam-se indeterminações mais complexas nas quais é necessário aplicar o método da mudança de variável para resolver o limite, resultando a Categorização seguinte:

<table>
<tr><th colspan="4">MODELO DE ANÁLISE PARA CATEGORIZAÇÃO DA QUESTÃO</th></tr>
<tr><th>Lista dos tópicos considerados na construção das soluções hipotéticas
(Carvalho e Silva, 2002)</th><th colspan="2">Parâmetros de análise:
Tópicos e Procedimentos</th><th>Categorização</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Tema II: Introdução ao Cálculo Diferencial II
• "Função exponencial de base superior a 1"
• "Regras operatórias de exponenciais e logaritmos"
• "Propriedades operatórias sobre limites"
• "Limites notáveis"
• "Indeterminações"</td><td rowspan="2">Tópicos</td><td>Quantidade
Dois ou mais tópicos foram utilizados</td><td rowspan="4">Categoria A (Abstrato)</td></tr>
<tr><td>Nível
Superior – Foram utilizados tópicos de nível igual ou superior ao do programa</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Procedimentos</td><td>Grau de inovação
Inédito – Envolve a elaboração de hipóteses de trabalho e estratégias inovadoras</td></tr>
<tr><td>Integração dos procedimentos
Interligados – Os procedimentos evidenciam a aplicação de vários conceitos e informações de forma integrada e simultânea</td></tr>
<tr><td colspan="4">Conclusões
Tipo 2
A conclusão decorre exclusivamente dos procedimentos matemáticos envolvidos na resolução</td></tr>
</table>

Figura 33 - Modelo de análise para categorização da questão 3, GI, exame 2016

QUESTÃO

4. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}^-$

Sabe-se que:

- $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)+e^x-x}{x}=1$
- o gráfico de f tem uma assíntota oblíqua.

Qual é o declive dessa assíntota?

(A) -2 **(B)** -1 **(C)** 1 **(D)** 2

PROPOSTA RESOLUÇÃO APM

4.

Como $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)+e^x-x}{x}=1$

então,

$$\lim_{x \to -\infty}\left(\frac{f(x)}{x}+\frac{e^x}{x}-\frac{x}{x}\right)=1 \Leftrightarrow \lim_{x \to -\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)+\frac{e^{-\infty}}{-\infty}-1=1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to -\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)+0-1=1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to -\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)-1=1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to -\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)=1+1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to -\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)=2$$

Pelo que o declive da assíntota oblíqua ao gráfico de f é igual a 2.

Resposta correta:

Versão 1: D

<table>
<tr><th colspan="4">MODELO DE ANÁLISE PARA CATEGORIZAÇÃO DA QUESTÃO</th></tr>
<tr><th>Lista dos tópicos considerados na construção das soluções hipotéticas
(Carvalho e Silva, 2002)</th><th colspan="2">Parâmetros de análise:
Tópicos e Procedimentos</th><th>Categorização</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Tema II: Introdução ao Cálculo Diferencial II
• “Função exponencial de base superior a 1”
• “Regras operatórias de exponenciais e logaritmos”
• “Propriedades operatórias sobre limites”
• “Assintotas ao gráfico de uma função”</td><td rowspan="2">Tópicos</td><td>Quantidade
Dois ou mais tópicos foram utilizados</td><td rowspan="4">Categoria C (Multi-estrutural)</td></tr>
<tr><td>Nível
Adequado – Foram utilizados tópicos de nível análogo ao do programa</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Procedimentos</td><td>Grau de inovação
Réplica – Envolve hipóteses de trabalho e estratégias descritas nos programas</td></tr>
<tr><td>Integração dos procedimentos
Compartimentados – Os procedimentos mostram a aplicação de vários conceitos e informações de forma isolada e sucessiva</td></tr>
<tr><td colspan="4">Conclusões
Tipo 2
A conclusão decorre exclusivamente dos procedimentos matemáticos envolvidos na resolução</td></tr>
</table>

Figura 34 - Modelo de análise para categorização da questão 4, GI, exame 2016

QUESTÃO

5. Na Figura 1, estão representados o círculo trigonométrico e um trapézio retângulo $[OPQR]$

Sabe-se que:

- o ponto P tem coordenadas $(0,1)$
- o ponto R pertence ao quarto quadrante e à circunferência.

Seja α a amplitude de um ângulo orientado cujo lado origem é o semieixo positivo Ox e cujo lado extremidade é a semirreta $\dot{O}R$

Qual das expressões seguintes dá a área do trapézio $[OPQR]$, em função de α ?

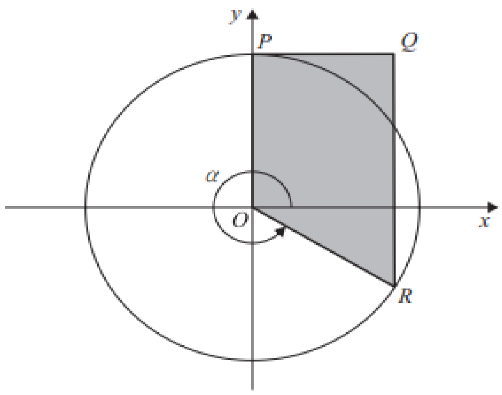


Figura 1

(A) $\dfrac{\cos\alpha}{2} + \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha$ **(B)** $\dfrac{\cos\alpha}{2} - \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha$

(C) $\cos\alpha + \dfrac{\operatorname{sen}\alpha \cos\alpha}{2}$ **(D)** $\cos\alpha - \dfrac{\operatorname{sen}\alpha \cos\alpha}{2}$

PROPOSTA RESOLUÇÃO APM

5.

Tendo em conta de que área do trapézio $[OPQR]$ é dada por: $A_{[OPQR]} = \dfrac{\overline{PO} + \overline{QR}}{2} \times \overline{PQ}$

e que $\overline{PO} = 1$ e $\overline{PQ} = \cos\alpha$, então

$\overline{QR} = 1 + (-\operatorname{sen}\alpha)$, pois $\operatorname{sen}\alpha$ no quarto quadrante é negativo.

Temos então que:

$$A = \frac{1 + (1 - \operatorname{sen}\alpha)}{2} \times \cos\alpha = \frac{2 - \operatorname{sen}\alpha}{2} \times \cos\alpha = \cos\alpha - \frac{\operatorname{sen}\alpha \cos\alpha}{2} ,$$

Resposta correta:

Versão 1: D

<table>
<tr><th colspan="4">MODELO DE ANÁLISE PARA CATEGORIZAÇÃO DA QUESTÃO</th></tr>
<tr><th>Lista dos tópicos considerados na construção das soluções hipotéticas
(Carvalho e Silva, 2002)</th><th colspan="2">Parâmetros de análise:
Tópicos e Procedimentos</th><th>Categorização</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Tema I: Geometria no plano e no espaço II – 11.º ano
• “Trigonometria no triângulo retângulo”
• “Funções seno, co-seno e tangente”
• “Relação entre as razões trigonométricas de α, -α, $\frac{\pi}{2}$ + α, $\frac{\pi}{2}$ - α, π + α, π – α, 2π + α, 2π – α”</td><td rowspan="2">Tópicos</td><td>Quantidade
Dois ou mais tópicos foram utilizados</td><td rowspan="4">Categoria C (Multi-estrutural)</td></tr>
<tr><td>Nível
Adequado – Foram utilizados tópicos de nível análogo ao do programa</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Procedimentos</td><td>Grau de inovação
Réplica – Envolve hipóteses de trabalho e estratégias descritas nos programas</td></tr>
<tr><td>Integração dos procedimentos
Compartimentados – Os procedimentos mostram a aplicação de vários conceitos e informações de forma isolada e sucessiva</td></tr>
<tr><td colspan="4">Conclusões - Tipo 2
A conclusão decorre exclusivamente dos procedimentos matemáticos envolvidos na resolução</td></tr>
</table>

Figura 35 - Modelo de análise para categorização da questão 5, GI, exame 2016

QUESTÃO

6. Seja θ um número real pertencente ao intervalo $\left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$

Considere o número complexo $z = -3\operatorname{cis}\theta$

A que quadrante pertence a imagem geométrica do complexo z ?

(A) Primeiro **(B)** Segundo **(C)** Terceiro **(D)** Quarto

PROPOSTA RESOLUÇÃO APM

6.

Considerando que:

$z = -3\,\mathrm{cis}\,\theta = 3 \times \mathrm{cis}\,\pi \times \mathrm{cis}\,\theta = 3\,\mathrm{cis}(\pi + \theta)$ temos que um argumento z é $\pi + \theta$

Como $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$, então $\pi + \pi < \pi + \theta < \pi + \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow 2\pi < \pi + \theta < \frac{5\pi}{2}$,

Pelo que, a imagem geométrica do complexo z pertence ao primeiro quadrante.

Resposta correta:

$\boxed{\text{Versão 1: A}}$

<table>
<tr><th colspan="4">MODELO DE ANÁLISE PARA CATEGORIZAÇÃO DA QUESTÃO</th></tr>
<tr><th>Lista dos tópicos considerados na construção das soluções hipotéticas
(Carvalho e Silva, 2002)</th><th colspan="2">Parâmetros de análise:
Tópicos e Procedimentos</th><th>Categorização</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Tema III: Trigonometria e Números Complexos – 12.º ano
• “Números complexos. O número i. O conjunto c dos números complexos”
• “Representação de complexos na forma trigonométrica.”
• “Operações com complexos na forma trigonométrica.”
• “Interpretação geométrica das operações com números complexos”</td><td rowspan="2">Tópicos</td><td>Quantidade
Dois ou mais tópicos foram utilizados</td><td rowspan="4">Categoria C (Multi-estrutural)</td></tr>
<tr><td>Nível
Adequado – Foram utilizados tópicos de nível análogo ao do programa</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Procedimentos</td><td>Grau de inovação
Réplica – Envolve hipóteses de trabalho e estratégias descritas nos programas</td></tr>
<tr><td>Integração dos procedimentos
Compartimentados – Os procedimentos mostram a aplicação de vários conceitos e informações de forma isolada e sucessiva</td></tr>
<tr><td colspan="4">Conclusões
Tipo 2
A conclusão decorre exclusivamente dos procedimentos matemáticos envolvidos na resolução</td></tr>
</table>

Figura 36 - Modelo de análise para categorização da questão 6, GI, exame 2016

QUESTÃO

7. Na Figura 2, está representado um triângulo isósceles $[ABC]$

Sabe-se que:

- $\overline{AB} = \overline{BC} = \sqrt{2}$
- $B\hat{A}C = 75^\circ$

Qual é o valor do produto escalar $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$?

(A) $\sqrt{2}$

(B) $2\sqrt{2}$

(C) $\sqrt{3}$

(D) $2\sqrt{3}$

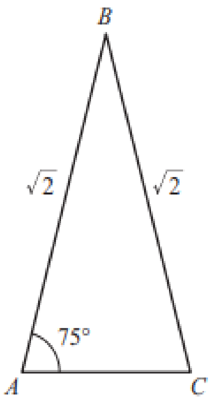


Figura 2

PROPOSTA RESOLUÇÃO APM

7.

Como o triângulo $[ABC]$ é isósceles, então $A\hat{C}B = C\hat{A}B = 75^\circ$, pelo que

$A\hat{B}C = 180^\circ - 2 \times 75^\circ = 30^\circ$.

Logo, $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \|\overrightarrow{BA}\| \times \|\overrightarrow{BC}\| \times \cos\left(\overrightarrow{BA}\,\hat{}\,\overrightarrow{BC}\right) = \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \cos(30^\circ) = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

Resposta correta:

Versão 1: C

<table>
<tr><th colspan="4">MODELO DE ANÁLISE PARA CATEGORIZAÇÃO DA QUESTÃO</th></tr>
<tr><td>Lista dos tópicos considerados na construção das soluções hipotéticas
(Carvalho e Silva, 2002)</td><td colspan="2">Parâmetros de análise:
Tópicos e Procedimentos</td><td>Categorização</td></tr>
<tr><td rowspan="4">• Tema I: Geometria no Plano e no Espaço I – 10.º ano
• “Norma de um vetor”

Tema I: Geometria no Plano e no Espaço II – 11.º ano
• “Ângulo de dois vetores”
• “Razões trigonométricas dos ângulos de 30°, 45° e 60°”</td><td rowspan="2">Tópicos</td><td>Quantidade
Dois ou mais tópicos foram utilizados</td><td rowspan="4">Categoria C (Multi-estrutural)</td></tr>
<tr><td>Nível
Adequado – Foram utilizados tópicos de nível análogo ao do programa</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Procedimentos</td><td>Grau de inovação
Réplica – Envolve hipóteses de trabalho e estratégias descritas nos programas</td></tr>
<tr><td>Integração dos procedimentos
Compartimentados – Os procedimentos mostram a aplicação de vários conceitos e informações de forma isolada e sucessiva</td></tr>
<tr><td colspan="4">Conclusões
Tipo 2
A conclusão decorre exclusivamente dos procedimentos matemáticos envolvidos na resolução</td></tr>
</table>

Figura 37 - Modelo de análise para categorização da questão 7, CI, exame 2016

QUESTÃO

8. Considere as sucessões (u_n) e (v_n) de termos gerais

$$u_n = \frac{kn+3}{2n} \quad (k \text{ é um número real}) \qquad \text{e} \qquad v_n = \ln\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]$$

Sabe-se que $\lim (u_n) = \lim (v_n)$

Qual é o valor de k ?

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** e **(D)** $2e$

PROPOSTA RESOLUÇÃO APM

8.

Tem-se que:

- $\lim(u_n) = \lim \dfrac{kn+3}{2n} = \lim \dfrac{k\cancel{n}}{2\cancel{n}} = \dfrac{k}{2}$
- $\lim(v_n) = \lim\left(\ln\left(\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right)\right) = \ln\left(\lim\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right) = \ln\left(e^1\right) = 1.$

Logo, como $\lim(u_n) = \lim(v_n)$, vem que $\dfrac{k}{2} = 1 \Leftrightarrow k = 2$.

Resposta correta:

$\boxed{\text{Versão 1: B}}$

<table>
<tr><th colspan="4">MODELO DE ANÁLISE PARA CATEGORIZAÇÃO DA QUESTÃO</th></tr>
<tr><td>Lista dos tópicos considerados na construção das soluções hipotéticas
(Carvalho e Silva, 2002)</td><td colspan="2">Parâmetros de análise:
Tópicos e Procedimentos</td><td>Categorização</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Tema III: Sucessões reais – 11.º ano
“Limites de sucessões e convergência.”
“Número de Neper como limite da sucessão $(1+\frac{1}{n})^n$</td><td rowspan="2">Tópicos</td><td>Quantidade
Dois ou mais tópicos foram utilizados</td><td rowspan="4">Categoria C (Multi-estrutural)</td></tr>
<tr><td>Nível
Adequado – Foram utilizados tópicos de nível análogo ao do programa</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Procedimentos</td><td>Grau de inovação
Réplica – Envolve hipóteses de trabalho e estratégias descritas nos programas</td></tr>
<tr><td>Integração dos procedimentos
Compartimentados – Os procedimentos mostram a aplicação de vários conceitos e informações de forma isolada e sucessiva</td></tr>
<tr><td colspan="4">Conclusões - Tipo 2
A conclusão decorre exclusivamente dos procedimentos matemáticos envolvidos na resolução</td></tr>
</table>

Figura 38 - Modelo de análise para categorização da questão 8, GI, exame 2016

Grupo II

QUESTÃO

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere

$$z_1 = \frac{8\,\text{cis}\,\theta}{-1+\sqrt{3}\,i} \quad \text{e} \quad z_2 = \text{cis}(2\theta)$$

Determine o valor de θ pertencente ao intervalo $]0,\pi[$, de modo que $\overline{z_1} \times z_2$ seja um número real.

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO (IAVE 2016)

1. .... **15 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Escrever $-1+\sqrt{3}\,i$ na forma trigonométrica .... 1 ponto

Escrever um argumento de z_1, em função de θ .... 3 pontos

Escrever um argumento de $\overline{z_1}$, em função de θ .... 3 pontos

Escrever um argumento de $\overline{z_1} \times z_2$, em função de θ .... 3 pontos

Escrever uma condição em θ para que $\overline{z_1} \times z_2$ seja um número real (**ver nota**) 3 pontos

Obter o valor de θ pertencente ao intervalo $]0,\pi[$ $\left(\frac{\pi}{3}\right)$ .... 2 pontos

Nota – Se for apresentada apenas a condição $\theta + \frac{2\pi}{3} = 0$, a pontuação a atribuir nesta etapa é 1 ponto. Se for apresentada a condição $\theta + \frac{2\pi}{3} = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, a pontuação a atribuir nesta etapa é 2 pontos.

Em ambas as situações, a pontuação a atribuir na etapa seguinte é 0 pontos.

Escrever $\overline{z_1} \times z_2$ na forma algébrica $\left(-4\cos\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right) + i\,4\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)\right)$ ...... 6 pontos

Escrever a condição $\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right) = 0$ .... 1 ponto

Escrever a condição $\frac{\pi}{3} - \theta = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ (**ver nota**) .... 2 pontos

Obter o valor de θ pertencente ao intervalo $]0,\pi[$ $\left(\frac{\pi}{3}\right)$ .... 2 pontos

2.º Processo

Escrever $8\,\text{cis}\,\theta$ na forma algébrica $(8\cos\theta + i\,8\,\text{sen}\,\theta)$ .... 1 ponto

Escrever z_1 na forma algébrica

$\left(2\sqrt{3}\,\text{sen}\,\theta - 2\cos\theta + i\left(-2\sqrt{3}\cos\theta - 2\,\text{sen}\,\theta\right)\right)$ .... 2 pontos

Escrever $\overline{z_1}$ na forma algébrica

$\left(2\sqrt{3}\,\text{sen}\,\theta - 2\cos\theta + i\left(2\sqrt{3}\cos\theta + 2\,\text{sen}\,\theta\right)\right)$ .... 1 ponto

Nota – Se for apresentada apenas a condição $\frac{\pi}{3}-\theta=0$ ou apenas a condição $\frac{\pi}{3}-\theta=2k\pi,\ k\in\mathbb{Z},$ a pontuação a atribuir nesta etapa é 1 ponto.

Escrever $\overline{z_1}\times z_2$ na forma algébrica $\left(-4\cos\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)+i\,4\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)\right)$ ...... 6 pontos

Escrever a condição $\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)=0$ .... 1 ponto

Escrever a condição $\frac{\pi}{3}-\theta=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ (**ver nota**) .... 2 pontos

Obter o valor de θ pertencente ao intervalo $]0,\pi[$ $\left(\frac{\pi}{3}\right)$ .... 2 pontos

Nota – Se for apresentada apenas a condição $\frac{\pi}{3}-\theta=0$ ou apenas a condição $\frac{\pi}{3}-\theta=2k\pi,\ k\in\mathbb{Z},$ a pontuação a atribuir nesta etapa é 1 ponto.

PROPOSTA RESOLUÇÃO APM

1.

Escrevendo $-1+\sqrt{3}i$ na forma trigonométrica temos $-1+\sqrt{3}i=\rho\, cis\,\theta$, onde:

- $\rho=\left|-1+\sqrt{3}i\right|=\sqrt{(-1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{4}=2$
- θ é um argumento de $-1+\sqrt{3}i$ com $\theta\in 2.^{\text{o}}$ quadrante e $\mathrm{tg}\,\theta=\frac{\sqrt{3}}{-1}$, vem $\theta=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$ (argumento positivo mínimo).

Assim, $-1+\sqrt{3}i=2\,cis\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.

Substituindo em z_1, temos:

$$z_1=\frac{8\,cis\,\theta}{-1+\sqrt{3}i}\Leftrightarrow z_1=\frac{8\,cis\,\theta}{2\,cis\left(\frac{2\pi}{3}\right)}\Leftrightarrow z_1=4\,cis\left(\theta-\frac{2\pi}{3}\right)$$

pelo que, $\overline{z_1}=4\,cis\left(-\theta+\frac{2\pi}{3}\right)$ e

$$\overline{z_1}\times z_2=4\,cis\left(-\theta+\frac{2\pi}{3}\right)\times cis(2\theta)=4\,cis\left(-\theta+\frac{2\pi}{3}+2\theta\right)=4\,cis\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)$$

Para ser um número real $\theta+\frac{2\pi}{3}=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\theta=-\frac{2\pi}{3}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

Se $k=0$, temos $\theta=-\frac{2\pi}{3}\notin\,]0,\pi[$

Se $k=1$, temos $\theta=\frac{\pi}{3}\in\,]0,\pi[$

Se $k=2$, temos $\theta=\frac{4\pi}{3}\notin\,]0,\pi[$

Logo, $\theta=\frac{\pi}{3}$.

Nota: Nas propostas de resolução do IAVE e APM são utilizados os mesmos tópicos do 12.º ano, com procedimentos idênticos no que respeita aos parâmetros de análise, pelo que a categorização é a mesma para as propostas apresentadas nos processos IAVE e APM (note-se que o tópico "Operações com complexos na forma trigonométrica não é utilizado na proposta de resolução do 2.º processo IAVE, contudo a categorização não se altera):

<table>
<tr><th colspan="4">MODELO DE ANÁLISE PARA CATEGORIZAÇÃO DA QUESTÃO</th></tr>
<tr><td>Lista dos tópicos considerados na construção das soluções hipotéticas
(Carvalho e Silva, 2002)</td><td colspan="2">Parâmetros de análise:
Tópicos e Procedimentos</td><td>Categorização</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Tema III: Trigonometria e Números Complexos – 12.º ano
• "Números complexos. O número i. O conjunto c dos números complexos"
• "A forma algébrica dos complexos. Operações com complexos na forma algébrica"
• "Representação de complexos na forma trigonométrica.
• "Escrita de complexos nas duas formas, passando de uma para a outra"
• "Operações com complexos na forma trigonométrica"
Tema I: Geometria no Plano e no Espaço II – 11.º ano
• "Equações trigonométricas"</td><td rowspan="2">Tópicos</td><td>Quantidade
Dois ou mais tópicos foram utilizados</td><td rowspan="4">Categoria C (Multi-estrutural)</td></tr>
<tr><td>Nível
Adequado – Foram utilizados tópicos de nível análogo ao do programa</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Procedimentos</td><td>Grau de inovação
Réplica – Envolve hipóteses de trabalho e estratégias descritas nos programas</td></tr>
<tr><td>Integração dos procedimentos
Compartimentados – Os procedimentos mostram a aplicação de vários conceitos e informações de forma isolada e sucessiva</td></tr>
<tr><td colspan="4">Conclusões
Tipo 2
A conclusão decorre exclusivamente dos procedimentos matemáticos envolvidos na resolução</td></tr>
</table>

Figura 39 - Modelo de análise para categorização da questão 1, G2, exame 2016

QUESTÃO

2. Considere nove bolas, quatro numeradas com o número 1, quatro com o número 2 e uma com o número 4.

2.1. Colocam-se as nove bolas, que são indistinguíveis ao tato, num saco vazio. Em seguida, retiram-se, simultaneamente e ao acaso, duas bolas desse saco.

Seja X a variável aleatória: «produto dos números das duas bolas retiradas».

Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável X

Apresente as probabilidades na forma de fração irredutível.

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO (IAVE 2016)

2.1. .... **15 pontos**

Apresentar os valores da variável .... 2 pontos

Determinar o valor de $P(X=1)$ $\left(\frac{1}{6}\right)$ .... 3 pontos

Determinar o valor de $P(X=2)$ $\left(\frac{4}{9}\right)$ .... 3 pontos

Determinar o valor de $P(X=4)$ $\left(\frac{5}{18}\right)$ .... 3 pontos

Determinar o valor de $P(X=8)$ $\left(\frac{1}{9}\right)$ .... 3 pontos

Apresentar a tabela pedida .... 1 ponto

Nota – No cálculo de cada uma das probabilidades, se o número de casos possíveis estiver correto $\left({}^9C_2 \text{ ou } {}^9A_2\right)$ e o número de casos favoráveis estiver incorreto, a pontuação a atribuir à etapa respetiva é 1 ponto, desde que a fração designe um número pertencente ao intervalo $[0,1]$
Se uma ou mais de uma das probabilidades não forem apresentadas na forma de fração irredutível, é subtraído 1 ponto à soma das pontuações atribuídas.

PROPOSTA RESOLUÇÃO APM

2.

2.1.

Seja X : "produto dos números das duas bolas retiradas"

Os produtos podem ser:

$$1 \times 1 = 1 \qquad 1 \times 2 = 2 \qquad 1 \times 4 = 4 \qquad 2 \times 2 = 4 \qquad 2 \times 4 = 8$$

Logo, os produtos possíveis são 1, 2, 4 ou 8 (não pode ser 16, pois só existe uma bola com o número 4).

$$P(X=1) = \frac{{}^4C_2}{{}^9C_2} = \frac{1}{6}$$

$$P(X=2) = \frac{{}^4C_1 \times {}^4C_1}{{}^9C_2} = \frac{4}{9}$$

$$P(X=4) = \frac{{}^4C_1 \times {}^1C_1 + {}^4C_2}{{}^9C_2} = \frac{5}{18}$$

$$P(X=8)=\frac{{}^{4}C_{1}\times{}^{1}C_{1}}{{}^{9}C_{2}}=\frac{1}{9}$$

Assim, a tabela de distribuição da variável aleatória X é:

x_i	1	2	4	8
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{9}$

<table>
<tr><th colspan="4">MODELO DE ANÁLISE PARA CATEGORIZAÇÃO DA QUESTÃO</th></tr>
<tr><th>Lista dos tópicos considerados na construção das soluções hipotéticas
(Carvalho e Silva, 2002)</th><th colspan="2">Parâmetros de análise:
Tópicos e Procedimentos</th><th>Categorização</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Tema I: Probabilidades e Combinatória
• “Variável aleatória; função massa de probabilidade”
• “Distribuição de probabilidades de uma variável aleatória discreta”
• “Distribuição de frequências versus distribuição de probabilidades”
• “Arranjos completos, arranjos simples, permutações e combinações”
• “Definição clássica de probabilidade ou de Laplace”
• “Aplicação da análise combinatória ao cálculo de probabilidades”</td><td rowspan="2">Tópicos</td><td>Quantidade
Dois ou mais tópicos foram utilizados</td><td rowspan="4">Categoria C (Multi-estrutural)</td></tr>
<tr><td>Nível
Adequado – Foram utilizados tópicos de nível análogo ao do programa</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Procedimentos</td><td>Grau de inovação
Réplica – Envolve hipóteses de trabalho e estratégias descritas nos programas</td></tr>
<tr><td>Integração dos procedimentos
Compartimentados – Os procedimentos mostram a aplicação de vários conceitos e informações de forma isolada e sucessiva</td></tr>
<tr><td colspan="4">Conclusões
Tipo 2
A conclusão decorre exclusivamente dos procedimentos matemáticos envolvidos na resolução</td></tr>
</table>

Figura 40 - Modelo de análise para categorização da questão 2.1, G2, exame 2016

QUESTÃO

2.2. Considere agora que se colocam as nove bolas lado a lado, de modo a formar um número com nove algarismos.

Quantos números ímpares diferentes se podem obter?

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO (IAVE 2016)

2.2. .... **15 pontos**

Apresentar a expressão

$\left({}^{8}C_3 \times 5\right.$ ou $8 \times {}^{7}C_4$ ou ${}^{8}C_4 \times 4$ ou ${}^{8}C_3 \times {}^{5}C_4$ ou $8 \times {}^{7}C_3$

ou ${}^{8}C_4 \times {}^{4}C_3$ ou outra expressão equivalente que utilize a simbologia da combinatória$\left.\right)$ (**ver nota 1**) .... 14 pontos

Obter o valor pedido (280) (**ver nota 2**) .... 1 ponto

Notas:

1. Por cada fator conceptualmente incorreto ou não apresentado são descontados 7 pontos. Também são descontados 7 pontos caso seja considerada uma operação diferente da multiplicação. Se, por aplicação deste critério, o valor obtido for negativo, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.
2. Se a expressão apresentada tiver sido pontuada com 0 pontos, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO (IAVE 2016)

2.2. .... **15 pontos**

Apresentar a expressão

$\left({}^{8}C_3 \times 5\right.$ ou $8 \times {}^{7}C_4$ ou ${}^{8}C_4 \times 4$ ou ${}^{8}C_3 \times {}^{5}C_4$ ou $8 \times {}^{7}C_3$

ou ${}^{8}C_4 \times {}^{4}C_3$ ou outra expressão equivalente que utilize a simbologia da combinatória$\left.\right)$ (**ver nota 1**) .... 14 pontos

Obter o valor pedido (280) (**ver nota 2**) .... 1 ponto

Notas:

1. Por cada fator conceptualmente incorreto ou não apresentado são descontados 7 pontos. Também são descontados 7 pontos caso seja considerada uma operação diferente da multiplicação. Se, por aplicação deste critério, o valor obtido for negativo, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.
2. Se a expressão apresentada tiver sido pontuada com 0 pontos, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.

PROPOSTA RESOLUÇÃO APM

2.2.

1º processo: $\dfrac{8!}{4! \times 3!} = 280$

2º processo: $\dfrac{8! \times 4}{4! \times 4!} = 280$

3º processo: ${}^{8}C_4 \times {}^{4}C_3 \times {}^{1}C_1 = 280$

<table>
<tr><th colspan="4">MODELO DE ANÁLISE PARA CATEGORIZAÇÃO DA QUESTÃO</th></tr>
<tr><th>Lista dos tópicos considerados na construção das soluções hipotéticas
(Carvalho e Silva, 2002)</th><th colspan="2">Parâmetros de análise:
Tópicos e Procedimentos</th><th>Categorização</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Tema I: Probabilidades e Combinatória
• “Experiência aleatória. Conjunto de resultados. Acontecimentos”
• “Arranjos completos, arranjos simples, permutações e combinações”</td><td rowspan="2">Tópicos</td><td>Quantidade
Dois ou mais tópicos foram utilizados</td><td rowspan="4">Categoria C (Multi-estrutural)</td></tr>
<tr><td>Nível
Adequado – Foram utilizados tópicos de nível análogo ao do programa</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Procedimentos</td><td>Grau de inovação
Réplica – Envolve hipóteses de trabalho e estratégias descritas nos programas</td></tr>
<tr><td>Integração dos procedimentos
Compartimentados – Os procedimentos mostram a aplicação de vários conceitos e informações de forma isolada e sucessiva</td></tr>
<tr><td colspan="4">Conclusões
Tipo 2
A conclusão decorre exclusivamente dos procedimentos matemáticos envolvidos na resolução</td></tr>
</table>

Figura 41 - Modelo de análise para categorização da questão 2.2, G2, exame 2016

QUESTÃO

3. Na Figura 3, está representada, num referencial o.n. $Oxyz$, uma pirâmide quadrangular regular $[ABCDV]$

Sabe-se que:

- a base $[ABCD]$ da pirâmide é paralela ao plano xOy
- o ponto A tem coordenadas $(-1, 1, 1)$
- o ponto C tem coordenadas $(-3, 3, 1)$
- o plano BCV é definido pela equação $3y + z - 10 = 0$

3.1. Escreva uma condição que defina a superfície esférica de centro no ponto A e que é tangente ao plano xOy

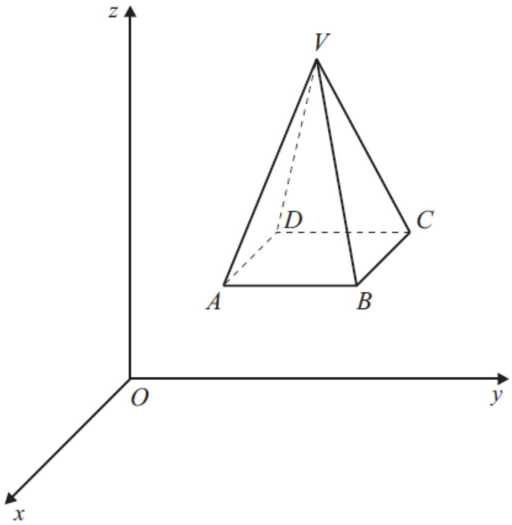


Figura 3

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO (IAVE 2016)

3.1. .... **5 pontos**

Concluir que o raio da superfície esférica é 1 .... 2 pontos

Escrever a condição pedida

$\left((x+1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1 \text{ ou equivalente} \right)$ (**ver notas 1**, **2** e **3**) .... 3 pontos

Notas:

1. Se for apresentada apenas a condição $(x+1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1$ (ou equivalente), a classificação a atribuir à resposta é 5 pontos.

2. A escrita do símbolo $\leq$, em vez de $=$, implica uma desvalorização de 1 ponto nesta etapa.

3. A escrita de um dos símbolos $<$, $>$ ou $\geq$, em vez de $=$, implica uma desvalorização de 2 pontos nesta etapa.

PROPOSTA RESOLUÇÃO APM

3.

3.1.

Como a superfície esférica tem centro no ponto $A(-1, 1, 1)$ e é tangente ao plano xOy, o seu raio é $r = dist\,(A, xOy) = z_A = 1$.

Assim, uma condição que define a superfície esférica é:

$$(x+1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1$$

<table>
<tr><th colspan="4">MODELO DE ANÁLISE PARA CATEGORIZAÇÃO DA QUESTÃO</th></tr>
<tr><th>Lista dos tópicos considerados na construção das soluções hipotéticas
(Carvalho e Silva, 2001)</th><th colspan="2">Parâmetros de análise:
Tópicos e Procedimentos</th><th>Categorização</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Tema I: Geometria no Plano e no Espaço I
• “Lugares geométricos: circunferência, círculo e mediatriz; superfície esférica, esfera e plano mediador”
• “Conjunto de pontos e condições”</td><td rowspan="2">Tópicos</td><td>Quantidade
Dois ou mais tópicos foram utilizados</td><td rowspan="4">Categoria C (Multi-estrutural)</td></tr>
<tr><td>Nível
Adequado – Foram utilizados tópicos de nível análogo ao do programa</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Procedimentos</td><td>Grau de inovação
Réplica – Envolve hipóteses de trabalho e estratégias descritas nos programas</td></tr>
<tr><td>Integração dos procedimentos
Compartimentados – Os procedimentos mostram a aplicação de vários conceitos e informações de forma isolada e sucessiva</td></tr>
<tr><td colspan="4">Conclusões
Tipo 2
A conclusão decorre exclusivamente dos procedimentos matemáticos envolvidos na resolução</td></tr>
</table>

Figura 42 - Modelo de análise para categorização da questão 3.1, G2, exame 2016

QUESTÃO

3.2. Determine as coordenadas do ponto V

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO (IAVE 2016)

3.2. .... **10 pontos**

Determinar a abcissa e a ordenada do ponto V (**ver nota**) .... 4 pontos

Escrever a equação $6+z-10=0$ (ou equivalente) .... 4 pontos

Obter o valor de z .... 1 ponto

Apresentar as coordenadas do ponto $V\left((-2,2,4)\right)$ .... 1 ponto

Nota – Na apresentação da abcissa e da ordenada do ponto V não se exige qualquer justificação ou cálculo.

PROPOSTA RESOLUÇÃO APM

3.2.

Como a pirâmide $[ABCDV]$ é quadrangular regular e a sua base $[ABCD]$ é paralela ao plano xOy, a abcissa e a ordenada do ponto V são iguais à abcissa e ordenada do ponto médio, M, do segmento de reta $[AC]$.

Então, $M\left(\frac{-1-3}{2}, \frac{1+3}{2}, \frac{1+1}{2}\right)$, isto é, $M(-2, 2, 1)$.

Assim, as coordenadas de V são da forma $V(-2, 2, z)$, com $z \in \mathbb{R}$.

Como V pertence ao plano BCV as suas coordenadas têm de verificar a equação $3y + z - 10 = 0$.

Deste modo vem: $3 \times 2 + z - 10 = 0 \Leftrightarrow z = 4$

Portanto as coordenadas do ponto V são $(-2, 2, 4)$.

<table>
<tr><th colspan="4">MODELO DE ANÁLISE PARA CATEGORIZAÇÃO DA QUESTÃO</th></tr>
<tr><td>Lista dos tópicos considerados na construção das soluções hipotéticas
(Carvalho e Silva, 2002)</td><td colspan="2">Parâmetros de análise:
Tópicos e Procedimentos</td><td>Categorização</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Tema I: Geometria no Plano e no Espaço I - 10.º ano
• “Referenciais cartesianos ortogonais e monométricos no plano e no espaço”
• “Conjunto de pontos e condições”

Tema I: Geometria no Plano e no Espaço II – 11.º ano
• “Equação cartesiana do plano”</td><td rowspan="2">Tópicos</td><td>Quantidade
Dois ou mais tópicos foram utilizados</td><td rowspan="4">Categoria C
(Multi-estrutural)</td></tr>
<tr><td>Nível
Adequado – Foram utilizados tópicos de nível análogo ao do programa</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Procedimentos</td><td>Grau de inovação
Réplica – Envolve hipóteses de trabalho e estratégias descritas nos programas</td></tr>
<tr><td>Integração dos procedimentos
Compartimentados – Os procedimentos mostram a aplicação de vários conceitos e informações de forma isolada e sucessiva</td></tr>
<tr><td colspan="4">Conclusões
Tipo 2
A conclusão decorre exclusivamente dos procedimentos matemáticos envolvidos na resolução</td></tr>
</table>

Figura 43 - Modelo de análise para categorização da questão 3.2, G2, exame 2016

QUESTÃO

3.3. Seja α o plano perpendicular à reta AC e que passa no ponto $P(1,-2,-1)$

A intersecção dos planos α e BCV é uma reta.

Escreva uma equação vetorial dessa reta.

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO (IAVE 2016)

3.3. .... **15 pontos**

Determinar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AC}$ .... 1 ponto

Escrever a equação $-2x+2y+d=0$ (ou equivalente) .... 2 pontos

Determinar o valor de d .... 1 ponto

Escrever uma equação do plano α .... 2 pontos

Escrever o sistema $\begin{cases} -2x+2y+6=0 \\ 3y+z-10=0 \end{cases}$ .... 3 pontos

Escrever uma equação vetorial da reta pedida .... 6 pontos

Escrever $\begin{cases} y=x-3 \\ y=\dfrac{-z+10}{3} \end{cases}$ .... 2 pontos

Escrever $x-3=y=\dfrac{z-10}{-3}$ .... 2 pontos

Obter uma equação vetorial
$\left((x,y,z)=(3,0,10)+k(1,1,-3),\ k\in\mathbb{R}\right.$ ou outra equação vetorial equivalente$\left.\right)$ .... 2 pontos

OU

Escrever $\begin{cases} x=y+3 \\ z=-3y+10 \end{cases}$ .... 2 pontos

Escrever as coordenadas de um ponto genérico da reta
$\left((y+3,\ y,\ -3y+10)\right)$ .... 2 pontos

Obter uma equação vetorial
$\left((x,y,z)=(3,0,10)+k(1,1,-3),\ k\in\mathbb{R}\right.$ ou outra equação vetorial equivalente$\left.\right)$ .... 2 pontos

OU

Obter as coordenadas de dois pontos da reta .... 2 pontos

Obter as coordenadas de um vetor diretor da reta .... 2 pontos

Obter uma equação vetorial
$\left((x,y,z)=(3,0,10)+k(1,1,-3),\ k\in\mathbb{R}\right.$ ou outra equação vetorial equivalente$\left.\right)$ .... 2 pontos

OU

Escrever as coordenadas de um vetor $\vec{u}$ perpendicular ao plano BCV	1 ponto
Determinar as coordenadas de um vetor perpendicular aos vetores $\vec{u}$ e $\overrightarrow{AC}$	2 pontos
Determinar as coordenadas de um ponto da reta	1 ponto
Obter uma equação vetorial $\left((x, y, z) = (3, 0, 10) + k(1, 1, -3),\ k \in \mathbb{R}\right.$ ou outra equação vetorial equivalente$\left.\right)$	2 pontos

PROPOSTA RESOLUÇÃO APM

3.3.

Determinemos uma equação cartesiana do plano α.

Como o plano α é perpendicular à reta AC o vetor $\overrightarrow{AC}$ é um vetor normal ao plano α.

$\vec{AC} = C - A = (-3, 3, 1) - (-1, 1, 1) = (-2, 2, 0)$

O plano α é definido por uma equação da forma $-2x + 2y + d = 0$

Como o ponto $P(1, -2, -1)$ pertence ao plano α, temos que:

$$-2 \times 1 + 2 \times (-2) + d = 0 \Leftrightarrow d = 2 + 4 \Leftrightarrow d = 6$$

Assim, uma equação cartesiana do plano α que passa no ponto P e é perpendicular à reta AC é:

$-2x + 2y + 6 = 0$ equivalente a $-x + y + 3 = 0$.

Seja r a reta de intersecção dos planos α e BCV.

A reta r é definida pelas equações cartesianas:

$$\begin{cases} -x + y + 3 = 0 \\ 3y + z - 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 3 \\ y = \dfrac{-z + 10}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 3 \\ y = \dfrac{z - 10}{-3} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x - 3}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z - 10}{-3}$$

A reta r é a reta que passa no ponto de coordenadas $(3, 0, 10)$ e tem a direção do vetor $\vec{r} = (1, 1, -3)$.

Portanto uma equação vetorial da reta pedida é:

$$(x, y, z) = (3, 0, 10) + k(1, 1, -3),\ k \in \mathbb{R}$$

Nota: Nas propostas de resolução do IAVE e APM são utilizados tópicos dos 10.º e 11.º anos, dos Temas I (Geometria no Plano e no Espaço I e Geometria no Plano e no Espaço II, respetivamente). Note-se que apesar da proposta de resolução do IAVE apresentar alternativas ao cálculo proposto para chegar ao vetor diretor e um ponto da reta, tal não altera a categorização da questão, uma vez que se verificam procedimentos idênticos no que respeita aos parâmetros de análise:

<table>
<tr><th colspan="4">MODELO DE ANÁLISE PARA CATEGORIZAÇÃO DA QUESTÃO</th></tr>
<tr><th>Lista dos tópicos considerados na construção das soluções hipotéticas
(Carvalho e Silva, 2002)</th><th colspan="2">Parâmetros de análise:
Tópicos e Procedimentos</th><th>Categorização</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Tema I: Geometria no Plano e no Espaço I - 10.º ano
• “Vetor como diferença de dois pontos”
• “Equação vetorial da reta, no plano e no espaço”

Tema I: Geometria no Plano e no Espaço II – 11.º ano
• “Equação cartesiana do plano”
• “Paralelismo e perpendicularidade de retas e planos”
• “Interseção de planos”
• “Equações cartesianas de retas no espaço”
• “Produto escalar de dois vetores no plano e no espaço” - (Tópico alternativo)</td><td rowspan="2">Tópicos</td><td>Quantidade
Dois ou mais tópicos foram utilizados</td><td rowspan="4">Categoria C (Multi-estrutural)</td></tr>
<tr><td>Nível
Adequado – Foram utilizados tópicos de nível análogo ao do programa</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Procedimentos</td><td>Grau de inovação
Réplica – Envolve hipóteses de trabalho e estratégias descritas nos programas</td></tr>
<tr><td>Integração dos procedimentos
Compartimentados – Os procedimentos mostram a aplicação de vários conceitos e informações de forma isolada e sucessiva</td></tr>
<tr><td colspan="4">Conclusões
Tipo 2
A conclusão decorre exclusivamente dos procedimentos matemáticos envolvidos na resolução</td></tr>
</table>

Figura 44 - Modelo de análise para categorização da questão 3.3, G2, exame 2016

QUESTÃO

4. Num dia de vento, são observadas oscilações no tabuleiro de uma ponte suspensa, construída sobre um vale.

Mediu-se a oscilação do tabuleiro da ponte durante um minuto.

Admita que, durante esse minuto, a distância de um ponto P do tabuleiro a um ponto fixo do vale é dada, em metros, por

$$h(t) = 20 + \frac{1}{2\pi}\cos(2\pi t) + t\,\mathrm{sen}(2\pi t) \qquad (t \text{ é medido em minutos e pertence a } [0,1])$$

4.1. Sejam M e m, respetivamente, o máximo e o mínimo absolutos da função h no intervalo $[0,1]$

A amplitude A da oscilação do tabuleiro da ponte, neste intervalo, é dada por $A = M - m$

Determine o valor de A, recorrendo a métodos analíticos e utilizando a calculadora apenas para efetuar eventuais cálculos numéricos.

Apresente o resultado em metros.

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO (IAVE 2016)

4.1. .... **15 pontos**

Determinar $h'(t)$ **(ver nota)** .... 3 pontos

Determinar os zeros de h' em $[0,1]$ .... 5 pontos

Escrever $h'(t) = 0$ .... 1 ponto

Obter os zeros de h' em $[0,1]$ .... 4 pontos

Apresentar um quadro de sinal de h' e de monotonia de h (ou equivalente) .... 2 pontos

Determinar $h(0)$, $h\left(\frac{1}{4}\right)$, $h\left(\frac{3}{4}\right)$ e $h(1)$ .... (1 + 1 + 1 + 1) .... 4 pontos

Obter o valor de A (1) .... 1 ponto

Nota – Se for evidente a intenção de determinar a derivada da função, a pontuação mínima a atribuir nesta etapa é 1 ponto.

PROPOSTA RESOLUÇÃO APM

4.

4.1.

Para determinar o máximo e o mínimo absolutos da função h no intervalo $[0,1]$ é necessário calcular os extremos relativos de h naquele intervalo.

Comecemos por determinar a expressão analítica da primeira derivada de h

$$h'(t) = (20)' + \left(\frac{1}{2\pi}\cos(2\pi t)\right)' + (t \times sen(2\pi t))' =$$

$$= 0 + \frac{1}{2\pi}(\cos(2\pi t))' + t' \times sen(2\pi t) + t \times (sen(2\pi t))' =$$

$$= \frac{1}{2\pi}(-2\pi\, sen(2\pi t)) + sen(2\pi t) + t \times (2\pi\cos(2\pi t)) =$$

$$= -sen(2\pi t) + sen(2\pi t) + 2\pi t \times \cos(2\pi t) =$$

$$= 2\pi t \times \cos(2\pi t)$$

Calculemos os zeros da derivada da função h, para $0 \leq t \leq 1$:

$$h'(t)=0 \Leftrightarrow 2\pi t \times cos(2\pi t) = 0 \Leftrightarrow (t = 0 \vee cos(2\pi t) = 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(t = 0 \vee 2\pi t = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(t = 0 \vee t = \frac{2k+1}{4}, k \in \mathbb{Z}\right)$$

$$\Leftrightarrow t = 0 \vee t = \frac{1}{4} \vee t = \frac{3}{4}$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

t	0		$\frac{1}{4}$		$\frac{3}{4}$		1
$h'(t)$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	2π
$h(t)$	$h(0)$	$\nearrow$	$h\left(\frac{1}{4}\right)$	$\searrow$	$h\left(\frac{3}{4}\right)$	$\nearrow$	$h(1)$

Por observação da tabela, verificamos que $h(0)$ e $h\left(\frac{3}{4}\right)$ são mínimos relativos e que $h\left(\frac{1}{4}\right)$ e $h(1)$ são máximos relativos de h.

Como $h(0) = 20 + \frac{1}{2\pi} \approx 20{,}16$; $h\left(\frac{1}{4}\right) = 20{,}25$; $h\left(\frac{3}{4}\right) = 19{,}25$ e $h(1) = 20 + \frac{1}{2\pi} \approx 20{,}16$, podemos afirmar que os extremos absolutos de h são:

$M = h\left(\frac{1}{4}\right) = 20{,}25$ e $m = h\left(\frac{3}{4}\right) = 19{,}25$, respetivamente máximo e mínimo absolutos de h.

Assim, $A = M - m = 20{,}25 - 19{,}25 = 1$

De onde se conclui que, a amplitude A da oscilação do tabuleiro da ponte, no intervalo $[0, 1]$, é de 1 metro.

<table>
<tr><th colspan="4">MODELO DE ANÁLISE PARA CATEGORIZAÇÃO DA QUESTÃO</th></tr>
<tr><th>Lista dos tópicos considerados na construção das soluções hipotéticas
(Carvalho e Silva, 2002)</th><th colspan="2">Parâmetros de análise:
Tópicos e Procedimentos</th><th>Categorização</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Tema III: Trigonometria e números complexos – 12.º ano
• “Derivadas das funções seno, co-seno e tangente”
• “Utilização de funções trigonométricas na modelação de situações reais”

Tema II: Introdução ao Cálculo Diferencial II – 12.º ano
• “Funções deriváveis. Regras de derivação; Derivadas das funções elementares”
• “Estudo de funções em casos simples”
• “Problemas de otimização”

Tema I: Geometria no Plano e no Espaço II – 11.º ano
• “Funções seno, co-seno e tangente”
• “Equações trigonométricas”</td><td rowspan="2">Tópicos</td><td>Quantidade
Dois ou mais tópicos foram utilizados</td><td rowspan="4">Categoria C (Multi-estrutural)</td></tr>
<tr><td>Nível
Adequado – Foram utilizados tópicos de nível análogo ao do programa</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Procedimentos</td><td>Grau de inovação
Réplica – Envolve hipóteses de trabalho e estratégias descritas nos programas</td></tr>
<tr><td>Integração dos procedimentos
Compartimentados – Os procedimentos mostram a aplicação de vários conceitos e informações de forma isolada e sucessiva</td></tr>
<tr><td colspan="4">Conclusões
Tipo 1
Os elementos que contribuíram para a obtenção da conclusão foram harmonizados</td></tr>
</table>

Figura 45 - Modelo de análise para categorização da questão 4.1, G2, exame 2016

QUESTÃO

4.2. Em $[0,1]$, o conjunto solução da inequação $h(t) < 19{,}5$ é um intervalo da forma $]a,b[$

Determine o valor de $b-a$ arredondado às centésimas, recorrendo à calculadora gráfica, e interprete o resultado obtido no contexto da situação descrita.

Na sua resposta:

– reproduza o gráfico da função h visualizado na calculadora (sugere-se que, na janela de visualização, considere $y \in [19,21]$);

– apresente o valor de a e o valor de b arredondados às milésimas;

– apresente o valor de $b-a$ arredondado às centésimas;

– interprete o valor obtido no contexto da situação descrita.

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO (IAVE 2016)

4.2. .... **15 pontos**

Reproduzir o gráfico da função h no intervalo $[0,1]$ (**ver nota**) .... 3 pontos

Apresentar o valor de a .... 3 pontos

Apresentar o valor de b .... 3 pontos

Obter o valor de $b-a$ $(0{,}27)$ .... 1 ponto

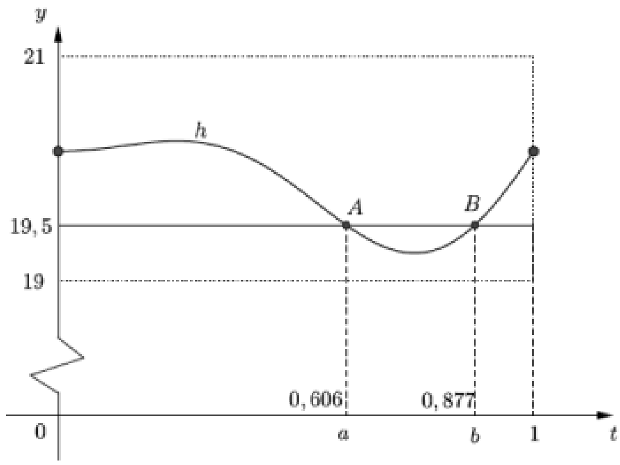
Interpretar o valor obtido no contexto da situação descrita (No decorrer da medição, a distância do ponto P ao ponto fixo do vale foi inferior a $19{,}5$ metros durante $0{,}27$ minutos) .... 5 pontos

Nota – Se for apresentado um gráfico que não respeite a condição $t \in [0,1]$, a pontuação a atribuir nesta etapa é desvalorizada em 2 pontos.

PROPOSTA RESOLUÇÃO APM

4.2.

Na figura estão representados, de acordo com o enunciado, o gráfico da função h e a reta de equação $y = 19{,}5$, obtidos na janela de visualização $[0,1] \times [19,21]$, bem como os pontos A e B, de interseção dos dois gráficos.



O conjunto solução da condição $h(t) < 19{,}5$ é um intervalo da forma $]a, b[$ em que a e b são as abcissas dos pontos A e B, respetivamente.

Recorrendo à calculadora gráfica, obtém-se para a e b os valores aproximados às milésimas: $a \approx 0{,}606$ e $b \approx 0{,}877$.

Assim, o valor arredondado às centésimas de $b - a$ é $0{,}27$.

No contexto da situação descrita, podemos concluir que no primeiro minuto, a distância de um ponto P do tabuleiro a um ponto fixo do vale, foi inferior a $19{,}5$ metros durante cerca de $0{,}27$ minutos.

<table>
<tr><th colspan="4">MODELO DE ANÁLISE PARA CATEGORIZAÇÃO DA QUESTÃO</th></tr>
<tr><td>Lista dos tópicos considerados na construção das soluções hipotéticas
(Carvalho e Silva, 2002)</td><td colspan="2">Parâmetros de análise:
Tópicos e Procedimentos</td><td>Categorização</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Tema III: Trigonometria e números complexos – 12.º ano
• “Utilização de funções trigonométricas na modelação de situações reais”
• “Funções seno, co-seno e tangente”

Tema II: Funções e gráficos – 10.º ano
• “Resolução de inequações por métodos analíticos e gráficos”</td><td rowspan="2">Tópicos</td><td>Quantidade
Dois ou mais tópicos foram utilizados</td><td rowspan="4">Categoria C (Multi-estrutural)</td></tr>
<tr><td>Nível
Adequado – Foram utilizados tópicos de nível análogo ao do programa</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Procedimentos</td><td>Grau de inovação
Réplica – Envolve hipóteses de trabalho e estratégias descritas nos programas</td></tr>
<tr><td>Integração dos procedimentos
Compartimentados – Os procedimentos mostram a aplicação de vários conceitos e informações de forma isolada e sucessiva</td></tr>
<tr><td colspan="4">Conclusões
Tipo 1
Os elementos que contribuíram para a obtenção da conclusão foram harmonizados</td></tr>
</table>

Figura 46 - Modelo de análise para categorização da questão 4.2, G2, exame 2016

QUESTÃO

5. Seja f uma função, de domínio $\mathbb{R}$, cuja **derivada**, f', de domínio $\mathbb{R}$, é dada por

$$f'(x) = e^x\left(x^2 + x + 1\right)$$

Resolva os itens **5.1.** e **5.2.** recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

5.1. Sejam p e q dois números reais tais que

$$p = \lim_{x \to -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} \qquad \text{e} \qquad q = -\frac{1}{p}$$

Determine o valor de q e interprete geometricamente esse valor.

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO (IAVE 2016)

5.1. .... **15 pontos**

Identificar p com $f'(-1)$ .... 4 pontos

Determinar o valor de p .... 5 pontos

Obter o valor de q $(-e)$ .... 1 ponto

Interpretar geometricamente o valor de q (o valor de q é o declive de qualquer reta perpendicular à reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa -1)
(**ver notas 1** e **2**) .... 5 pontos

Notas:

1. Se a interpretação geométrica do valor de q for incorreta, mas for evidente que foi corretamente interpretado, do ponto de vista geométrico, o valor de p, a pontuação a atribuir nesta etapa é desvalorizada em 3 pontos.
2. Se for referido que q é o declive da reta perpendicular à reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa -1, ou de qualquer outro caso particular de reta perpendicular à referida tangente, esta etapa é considerada como cumprida.

PROPOSTA RESOLUÇÃO APM

5.

5.1.

Sabemos que p corresponde ao valor da derivada da função f no ponto de abcissa -1. Assim,

$$p = \lim_{x \to -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = f'(-1) = e^{-1} \times \left((-1)^2 + (-1) + 1 \right) = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Logo, $q = \dfrac{1}{-p} = -\dfrac{1}{\frac{1}{e}} = -e$.

Como q é igual ao simétrico do inverso de p (declive da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa $x = -1$), então podemos afirmar que q é igual ao declive de uma reta perpendicular à reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa $x = -1$.

<table>
<tr><th colspan="4">MODELO DE ANÁLISE PARA CATEGORIZAÇÃO DA QUESTÃO</th></tr>
<tr><th>Lista dos tópicos considerados na construção das soluções hipotéticas
(Carvalho e Silva, 2002)</th><th colspan="2">Parâmetros de análise:
Tópicos e Procedimentos</th><th>Categorização</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Tema II: Introdução ao Cálculo Diferencial II – 12.º ano
• “Função exponencial de base superior a 1”
• “Regras operatórias de exponenciais e logaritmos”

Tema II: Introdução ao Cálculo Diferencial I – 11.º ano
• “Derivada de uma função num ponto”
• “Retas perpendiculares em referencial ortonormado”</td><td rowspan="2">Tópicos</td><td>Quantidade
Dois ou mais tópicos foram utilizados</td><td rowspan="4">Categoria C (Multi-estrutural)</td></tr>
<tr><td>Nível
Adequado – Foram utilizados tópicos de nível análogo ao do programa</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Procedimentos</td><td>Grau de inovação
Réplica – Envolve hipóteses de trabalho e estratégias descritas nos programas</td></tr>
<tr><td>Integração dos procedimentos
Compartimentados – Os procedimentos mostram a aplicação de vários conceitos e informações de forma isolada e sucessiva</td></tr>
<tr><td colspan="4">Conclusões
Tipo 2
A conclusão decorre exclusivamente dos procedimentos matemáticos envolvidos na resolução</td></tr>
</table>

Figura 47 - Modelo de análise para categorização da questão 5.1, G2, exame 2016

QUESTÃO

5.2. Estude a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

Na sua resposta, apresente:

– o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo;

– o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem concavidade voltada para cima;

– a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de f

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO (IAVE 2016)

5.2. .... **15 pontos**

Determinar $f''(x)$ (**ver nota 1**) .... 4 pontos

Aplicar a regra de derivação do produto .... 1 ponto

Obter $f''(x)$ .... 3 pontos

Determinar os zeros de f'' .... 5 pontos

Escrever $f''(x)=0$ .... 1 ponto

Obter os zeros de f'' .... 4 pontos

Estudar a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão .... 6 pontos

Apresentar um quadro de sinal de f'' e de sentido da concavidade do gráfico de f (ou equivalente) .... 2 pontos

Referir que o gráfico de f tem concavidade voltada para cima em $]-\infty,-2[$ e em $]-1,+\infty[$ (**ver nota 2**) .... 1 ponto

Referir que o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo em $]-2,-1[$ (**ver nota 3**) .... 1 ponto

Indicar as abissas dos pontos de inflexão do gráfico da função f $(-2$ e $-1)$ .... 2 pontos

Notas:

1. Se for evidente a intenção de determinar a segunda derivada da função, a pontuação mínima a atribuir nesta etapa é 1 ponto.
2. Se for referido que o gráfico de f tem concavidade voltada para cima em $]-\infty,-2]$ e em $[-1,+\infty[$, em vez de em $]-\infty,-2[$ e em $]-1,+\infty[$, esta etapa é considerada como cumprida.
3. Se for referido que o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo em $[-2,-1]$, em vez de em $]-2,-1[$, esta etapa é considerada como cumprida.

5.2.

Para estudar o sentido das concavidades e a existência de pontos de inflexão do gráfico de f, determinemos a expressão analítica da segunda derivada de f.

$$f''(x) = \left(e^x \times \left(x^2 + x + 1\right)\right)' = \left(e^x\right)' \times \left(x^2 + x + 1\right)' =$$
$$= e^x \times \left(x^2 + x + 1\right) + e^x \times (2x + 1) =$$
$$= e^x \times \left(x^2 + 3x + 2\right)$$

Calculemos os zeros da segunda derivada de f:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^x \times \left(x^2 + 3x + 2\right) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{e^x = 0}_{\text{equação impossível}} \vee x^2 + 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = -1$$

Assim, estudando a variação de sinal da segunda derivada e relacionando com o sentido das concavidades do gráfico de f, temos:

x	$-\infty$	-2		-1	$+\infty$
e^x	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x^2 + 3x + 2$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cup$	P. I.	$\cap$	P. I.	$\cup$

Podemos então concluir que o gráfico da função f tem:

- a concavidade voltada para baixo no intervalo $]-2, -1[$;
- a concavidade voltada para cima em $]-\infty, -2[$ e em $]-1, +\infty[$;
- dois pontos de inflexão de abcissas -2 e -1.

<table>
<tr><th colspan="4">MODELO DE ANÁLISE PARA CATEGORIZAÇÃO DA QUESTÃO</th></tr>
<tr><th>Lista dos tópicos considerados na construção das soluções hipotéticas
(Carvalho e Silva, 2002)</th><th colspan="2">Parâmetros de análise:
Tópicos e Procedimentos</th><th>Categorização</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Tema II: Introdução ao Cálculo Diferencial II
• “Funções deriváveis. Regras de derivação. Derivadas das funções elementares”
• “Segundas derivadas de uma função e concavidade”
• “Função exponencial de base superior a 1; crescimento exponencial; estudo das propriedades analíticas e gráficas da família de funções definida por f(x)=a^x com a>1”
• “Estudo de funções em casos simples”
• “Problemas de otimização”</td><td rowspan="2">Tópicos</td><td>Quantidade
Dois ou mais tópicos foram utilizados</td><td rowspan="4">Categoria C (Multi-estrutural)</td></tr>
<tr><td>Nível
Adequado – Foram utilizados tópicos de nível análogo ao do programa</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Procedimentos</td><td>Grau de inovação
Réplica – Envolve hipóteses de trabalho e estratégias descritas nos programas</td></tr>
<tr><td>Integração dos procedimentos
Compartimentados – Os procedimentos mostram a aplicação de vários conceitos e informações de forma isolada e sucessiva</td></tr>
<tr><td colspan="4">Conclusões
Tipo 2
A conclusão decorre exclusivamente dos procedimentos matemáticos envolvidos na resolução</td></tr>
</table>

Figura 48 - Modelo de análise para categorização da questão 5.2, G2, exame 2016

QUESTÃO

6. Considere a função f, de domínio $]-\infty,-1[\,\cup\,]1,+\infty[$, definida por $f(x)=\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

Resolva os itens **6.1.** e **6.2.** recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

6.1. Estude a função f quanto à existência de assíntotas verticais do seu gráfico.

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO (IAVE 2016)

6.1. .... **15 pontos**

Justificar que apenas a reta de equação $x=-1$ e a reta de equação $x=1$ podem ser assíntotas verticais do gráfico da função f .... 1 ponto

Determinar $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$ .... 6 pontos

Concluir que $\lim\limits_{x\to -1^-} \frac{x-1}{x+1} = +\infty$ .... 3 pontos

Obter $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$ $(+\infty)$ .... 3 pontos

Concluir que a reta de equação $x=-1$ é assíntota vertical do gráfico da função f .... 1 ponto

Determinar $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ .... 6 pontos

Concluir que, quando x tende para 1, por valores superiores a 1, $\frac{x-1}{x+1}$ tende para 0, por valores positivos.................................. 3 pontos

Obter $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ $(-\infty)$ .... 3 pontos

Concluir que a reta de equação $x=1$ é assíntota vertical do gráfico da função f .... 1 ponto

PROPOSTA RESOLUÇÃO APM

6.

6.1.

Como f é uma função contínua em $]-\infty, -1[$ e em $]1, +\infty[$ (porque resulta de operações entre funções contínuas neste domínio), então as retas de equação $x=-1$ e $x=1$ são as únicas retas verticais que podem ser assíntotas do gráfico de f.

Para averiguar se as reta de equação $x=-1$ e $x=1$ são assíntotas do gráfico de f, calcule-se:

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$:

- $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-}\left(\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right) = \ln\left(\frac{-1^- - 1}{-1^- + 1}\right) = \ln\left(\frac{-2}{0^-}\right) = \ln(+\infty) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}\left(\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right) = \ln\left(\frac{1^+ - 1}{1^+ + 1}\right) = \ln\left(\frac{0^+}{2}\right) = \ln(0^+) = -\infty$.

Assim, como ambos os limites são infinitos, podemos concluir que as duas retas de equação $x=-1$ e $x=1$ são assíntotas verticais do gráfico de f e que não existe qualquer outra assíntota vertical.

<table>
<tr><th colspan="4">MODELO DE ANÁLISE PARA CATEGORIZAÇÃO DA QUESTÃO</th></tr>
<tr><td>Lista dos tópicos considerados na construção das soluções hipotéticas
(Carvalho e Silva, 2002)</td><td colspan="2">Parâmetros de análise:
Tópicos e Procedimentos</td><td>Categorização</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Tema II: Introdução ao Cálculo Diferencial II
• “Continuidade de uma função”
• “Propriedades operatórias sobre limites”
• “Assintotas ao gráfico de uma função”
• “Função logarítmica de base superior a um; estudo das propriedades analíticas e gráficas da família de funções definida por f(x)=$\log_a x$ com a>1”.</td><td rowspan="2">Tópicos</td><td>Quantidade
Dois ou mais tópicos foram utilizados</td><td rowspan="4">Categoria C (Multi-estrutural)</td></tr>
<tr><td>Nível
Adequado – Foram utilizados tópicos de nível análogo ao do programa</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Procedimentos</td><td>Grau de inovação
Réplica – Envolve hipóteses de trabalho e estratégias descritas nos programas</td></tr>
<tr><td>Integração dos procedimentos
Compartimentados – Os procedimentos mostram a aplicação de vários conceitos e informações de forma isolada e sucessiva</td></tr>
<tr><td colspan="4">Conclusões
Tipo 2
A conclusão decorre exclusivamente dos procedimentos matemáticos envolvidos na resolução</td></tr>
</table>

Figura 49 - Modelo de análise para categorização da questão 6.1, G2, exame 2016

QUESTÃO

6.2. Seja a um número real maior do que 1

Mostre que a reta secante ao gráfico de f nos pontos de abcissas a e $-a$ passa na origem do referencial.

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO (IAVE 2016)

6.2. .... **10 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, três processos.

1.º Processo

Seja A o ponto da reta de abcissa a, e seja B o ponto da reta de abcissa $-a$

Escrever as coordenadas de A e as coordenadas de B, em função de a ...... 1 ponto

Obter o declive, m, da reta AB, em função de a .... 2 pontos

Escrever a condição $y = mx + b$, com m em função de a .... 1 ponto

Obter o valor de b (0) .... 5 pontos

Concluir o pretendido .... 1 ponto

2.º Processo

Seja A o ponto da reta de abcissa a, seja B o ponto da reta de abcissa $-a$, e seja M o ponto médio do segmento de reta $[AB]$

Escrever as coordenadas de A e as coordenadas de B, em função de a ...... 1 ponto

Mostrar que o ponto M é a origem do referencial .... 8 pontos

- Obter o valor da abcissa (0) .... 1 ponto
- Escrever a ordenada, em função de a

$$\left(\frac{\ln\left(\frac{a-1}{a+1}\right)+\ln\left(\frac{-a-1}{-a+1}\right)}{2}\right)$$ .... 2 pontos

- Obter o valor da ordenada (0) .... 5 pontos

Concluir o pretendido .... 1 ponto

3.º Processo

Provar que a função f é ímpar .... 4 pontos

Referir que os pontos do gráfico de f de abcissas a e $-a$ são simétricos relativamente à origem do referencial .... 5 pontos

Concluir o pretendido .... 1 ponto

PROPOSTA RESOLUÇÃO APM

6.2.

Calculando o declive da reta que contém os pontos de abcissas $-a$ e a, temos:

$$m = \frac{f(a)-f(-a)}{a-(-a)} = \frac{\ln\left(\frac{a-1}{a+1}\right) - \ln\left(\frac{-a-1}{-a+1}\right)}{a+a} = \frac{\ln\left(\frac{\frac{a-1}{a+1}}{\frac{-a-1}{-a+1}}\right)}{2a} =$$

$$= \frac{\ln\left(\frac{(a-1)(-a+1)}{(a+1)(-a-1)}\right)}{2a} = \frac{\ln\left(\frac{(a-1)(-(a-1))}{(a+1)(-(a+1))}\right)}{2a} = \frac{\ln\left(\frac{-(a-1)^2}{-(a+1)^2}\right)}{2a} =$$

$$= \frac{\ln\left(\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^2\right)}{2a} = \frac{2\ln\left(\frac{a-1}{a+1}\right)}{2a} = \frac{\ln\left(\frac{a-1}{a+1}\right)}{a}$$

Como a reta contém o ponto de coordenadas $\left(a\ ,\ \ln\left(\frac{a-1}{a+1}\right)\right)$, substituindo as coordenadas e o declive na equação $y = mx + b$, podemos determinar o valor da ordenada na origem:

$$\ln\left(\frac{a-1}{a+1}\right) = \frac{\ln\left(\frac{a-1}{a+1}\right)}{a} \times a + b \Leftrightarrow \ln\left(\frac{a-1}{a+1}\right) = \ln\left(\frac{a-1}{a+1}\right) + b \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{a-1}{a+1}\right) - \ln\left(\frac{a-1}{a+1}\right) = b$$

$$\Leftrightarrow b = 0$$

Como a ordenada na origem é zero, podemos concluir que a reta passa na origem do referencial.

Nota: Nas propostas de resolução dos 3 processos apresentados pelo IAVE e APM são utilizados tópicos dos 10.º e 12.º anos. Apesar de diferirem alguns tópicos (mantendo-se outros) consoante os processos de resolução do IAVE, tal não altera a categorização da questão, uma vez que se verificam procedimentos idênticos no que respeita aos parâmetros de análise.

Categorização para 1.º processo IAVE e APM:

Nota: No decorrer do cálculo do declive da reta, utilizando coordenadas de pontos definidos em função de a e f(a), o aluno tem que integrar simultaneamente neste cálculo regras operatórias dos logaritmos, que permitem obter a expressão do declive em função de a, substituir na equação reduzida da reta e determinar a ordenada da origem, permitindo concluir o pretendido, resultando a categorização seguinte:

<table>
<tr><th colspan="4">MODELO DE ANÁLISE PARA CATEGORIZAÇÃO DA QUESTÃO</th></tr>
<tr><th>Lista dos tópicos considerados na construção das soluções hipotéticas
(Carvalho e Silva, 2001, 2002)</th><th colspan="2">Parâmetros de análise:
Tópicos e Procedimentos</th><th>Categorização</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Tema II: Introdução ao Cálculo Diferencial II – 12.º ano
• “Função logarítmica de base superior a 1”
• “Regras operatórias de exponenciais e logaritmos”

Tema I: Geometria no Plano e no Espaço I – 10.º ano
• “Equação reduzida da recta no plano e equação x=x0.”</td><td rowspan="2">Tópicos</td><td>Quantidade
Dois ou mais tópicos foram utilizados</td><td rowspan="4">Categoria B
(Relacional)</td></tr>
<tr><td>Nível
Adequado – Foram utilizados tópicos de nível análogo ao do programa</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Procedimentos</td><td>Grau de inovação
Réplica – Envolve hipóteses de trabalho e estratégias descritas nos programas</td></tr>
<tr><td>Integração dos procedimentos
Interligados – Os procedimentos evidenciam a aplicação de vários conceitos e informações de forma integrada e simultânea</td></tr>
<tr><td colspan="4">Conclusões
Tipo 2
A conclusão decorre exclusivamente dos procedimentos matemáticos envolvidos na resolução</td></tr>
</table>

Figura 50 - Modelo de análise para categorização da questão 6.2, G2, exame 2016 – 1.º processo

Categorização para 2.º processo IAVE:

Nota: No decorrer do cálculo da ordenada do ponto médio do segmento de reta [AB], em função de a o aluno tem que integrar simultaneamente regras operatórias dos logaritmos, resultando uma categorização Relacional

<table>
<tr><th colspan="4">MODELO DE ANÁLISE PARA CATEGORIZAÇÃO DA QUESTÃO</th></tr>
<tr><td>Lista dos tópicos considerados na construção das soluções hipotéticas
(Carvalho e Silva, 2001, 2002)</td><td colspan="2">Parâmetros de análise:
Tópicos e Procedimentos</td><td>Categorização</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Tema II: Introdução ao Cálculo Diferencial
• “Função logarítmica de base superior a 1”
• “Regras operatórias de exponenciais e logaritmos”

Tema I: Geometria no Plano e no Espaço I – 10.º ano
• “Conjunto de pontos e condições”</td><td rowspan="2">Tópicos</td><td>Quantidade
Dois ou mais tópicos foram utilizados</td><td rowspan="4">Categoria B
(Relacional)</td></tr>
<tr><td>Nível
Adequado – Foram utilizados tópicos de nível análogo ao do programa</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Procedimentos</td><td>Grau de inovação
Réplica – Envolve hipóteses de trabalho e estratégias descritas nos programas</td></tr>
<tr><td>Integração dos procedimentos
Interligados – Os procedimentos evidenciam a aplicação de vários conceitos e informações de forma integrada e simultânea</td></tr>
<tr><td colspan="4">Conclusões
Tipo 2
A conclusão decorre exclusivamente dos procedimentos matemáticos envolvidos na resolução</td></tr>
</table>

Figura 51 - Modelo de análise para categorização da questão 6.2, G2, exame 2016 – 2.º processo

Categorização para 3.º processo IAVE:

Nota: No decorrer do estudo da paridade da função, o aluno tem que integrar simultaneamente regras operatórias dos logaritmos, resultando uma categorização Relacional

<table>
<tr><th colspan="4">MODELO DE ANÁLISE PARA CATEGORIZAÇÃO DA QUESTÃO</th></tr>
<tr><td>Lista dos tópicos considerados na construção das soluções hipotéticas
(Carvalho e Silva, 2001, 2002)</td><td colspan="2">Parâmetros de análise:
Tópicos e Procedimentos</td><td>Categorização</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Tema II: Introdução ao Cálculo Diferencial
• “Função logarítmica de base superior a 1”
• “Regras operatórias de exponenciais e logaritmos”

Tema II: Geometria no Plano e no Espaço I – 10.º ano
• “Estudo de propriedades de funções”</td><td rowspan="2">Tópicos</td><td>Quantidade
Dois ou mais tópicos foram utilizados</td><td rowspan="4">Categoria B
(Relacional)</td></tr>
<tr><td>Nível
Adequado – Foram utilizados tópicos de nível análogo ao do programa</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Procedimentos</td><td>Grau de inovação
Réplica – Envolve hipóteses de trabalho e estratégias descritas nos programas</td></tr>
<tr><td>Integração dos procedimentos
Interligados – Os procedimentos evidenciam a aplicação de vários conceitos e informações de forma integrada e simultânea</td></tr>
<tr><td colspan="4">Conclusões
Tipo 2
A conclusão decorre exclusivamente dos procedimentos matemáticos envolvidos na resolução</td></tr>
</table>

Figura 52 - Modelo de análise para categorização da questão 6.2, G2, exame 2016 – 3.º processo

Análise ao exame de Matemática A, 12º ano, de 20016 – 1ª fase

De seguida apresentamos uma tabela que relaciona as questões de exame pelos temas dos conteúdos programáticos, por categorização Solo:

*Tabela **7** - Síntese do Exame de 2016*

Síntese Exame Matemática A 12.º Ano 2016 - 1.ª fase

	Categoria / Tema/Domínio	**Categoria A (Abstrato)**		**Categoria B (Relacional)**		**Categoria C (Multi-estrutural)**		**Categoria D (Uni-estrutural)**		**Categoria E (Pré-estrutural)**	
		Questões	Total questões	Questões	Total questões	Questões	Total questões	Questões	Total questões	Questões	Total questões
Grupo I	**Tema I** - Probabilidades e Combinatória - 12.º ano					1, 2	2				
	Tema II - Introdução ao cálculo Diferencial II - 12.º ano	3	1			4	1				
	Tema III - Trigonometria e Números Complexos - 12.º ano					6	1				
	Tema I - Geometria no Plano e no Espaço II – 11.º ano					5, 7	2				
	Tema III - Sucessões reais – 11.º ano					8	1				
	Tema I - Geometria no Plano e no Espaço I – 10.º ano					7	1				
	Total por categoria	1		0		8		0		0	
	% categoria	5%		0%		38%		0%		0%	
Grupo II	**Tema I** - Probabilidades e Combinatória - 12.º ano					2.1, 2.2	2				
	Tema II - Introdução ao cálculo Diferencial II - 12.º ano			6.2	1	4.1, 5.1, 5.2, 6.1	4				
	Tema III - Trigonometria e Números Complexos - 12.º ano					1, 4.1, 4.2	3				
	Tema I - Geometria no Plano e no Espaço II – 11.º ano					1, 3.2, 3.3, 4.1	4				
	Tema II - Introdução ao Cálculo Diferencial I – 11.º ano					5.1	1				
	Tema I - Geometria no Plano e no Espaço I – 10.º ano			6.2	1	3.1, 3.2, 3.3	3				
	Tema II - Funções e gráficos – 10.º ano			6.2	1	4.2	1				
	Total por categoria	0		1		11		0		0	
	% categoria	0%		5%		52%		0%		0%	
	% total por categoria	5%		5%		90%		0%		0%	

No primeiro grupo, praticamente todas as questões abordam apenas um tema. A exceção é a questão 7 que aborda o tema I do 10.º e 11.º ano. A questão 3 foi classificada como Categoria A (Abstrato) sendo que todas as outras são Multi-estruturais (C).

No segundo grupo muitas questões abordam mais do que um tema, sendo que há questões que se ocupam de três temas, como são o caso da questão 4.1 (Tema II e III do 12.º ano e Tema I do 11.º ano) ou da questão 6.2 (Tema II do 12.º ano e tema I e II do 10.º ano).

De seguida ilustramos de forma simplificada os dados apresentados na síntese, a fim de facilitar a sua leitura e compreensão.

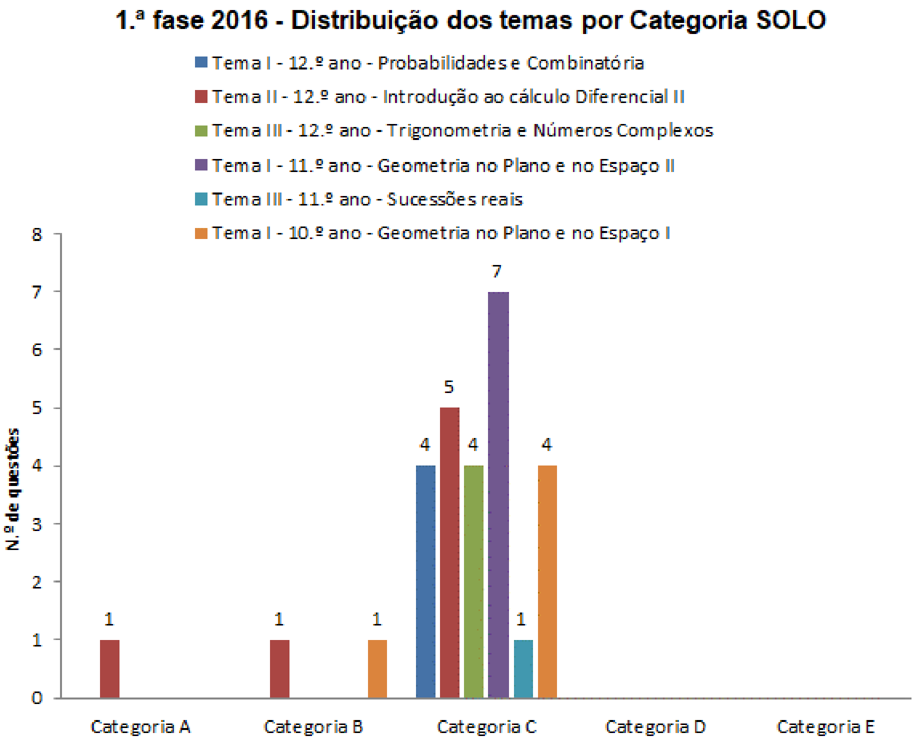


Gráfico 4 - Distribuição dos temas por Categoria SOLO - Exame 2016, 1ª fase

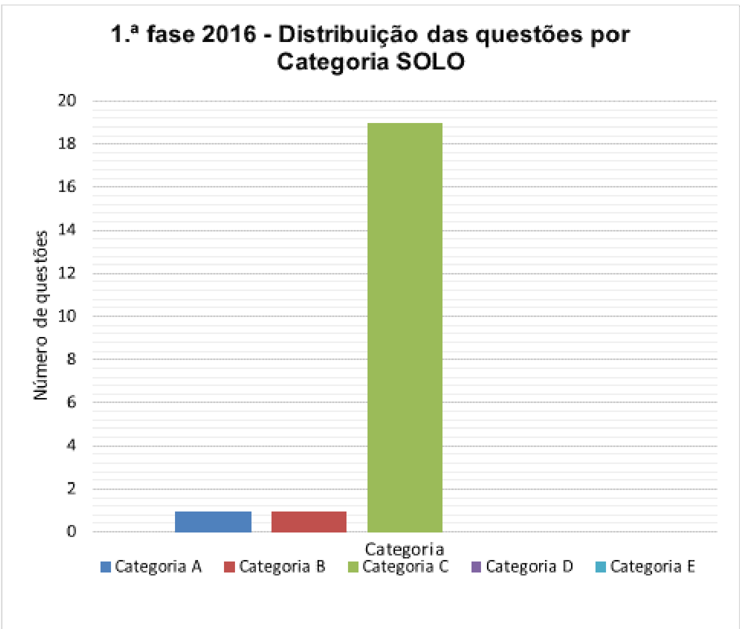


Gráfico 5 - Distribuição das Questões por Categoria SOLO - Exame 2016, 1ª fase

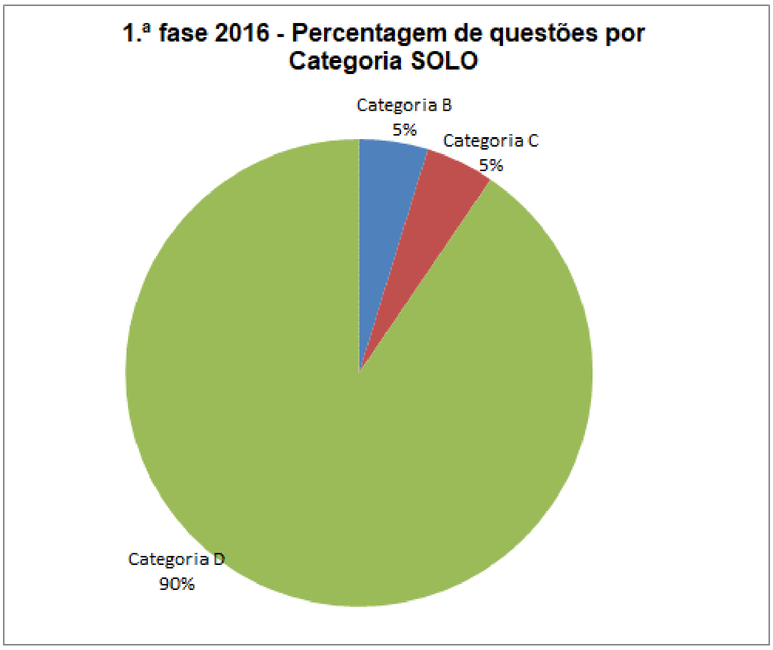


Gráfico 6 - Percentagem de Questões por Categoria SOLO - Exame 2016, 1ª fase

Como verificamos nos gráficos apresentados, praticamente todas as questões de exame são classificadas como categoria C (Multi-estrutural) sendo apenas uma questão classificada como Abstrato (A), que corresponde a 5% das questões de exame e Relacional (B) correspondendo também a 5% das questões.

6.3 EXAME 12.º ANO – 1.ª FASE/2017

Grupo I

QUESTÃO

1. Considere todos os números naturais de quatro algarismos que se podem formar com os algarismos de 1 a 9

Destes números, quantos são múltiplos de 5 ?

(A) 729 **(B)** 1458 **(C)** 3645 **(D)** 6561

PROPOSTA RESOLUÇÃO APM

1.

Dado que os algarismos que são usados são os do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, um número formado por quatro algarismos que seja múltiplo de 5 tem, necessariamente, que terminar em 5. Assim, para cada uma das restantes três posições para formar o número temos nove hipóteses. Conclusão, existem $9^3 = 729$ números de quatro algarismos que se podem formar com os algarismos de 1 a 9.

Resposta correta:

Versão 1: A

<table>
<tr><th colspan="4">MODELO DE ANÁLISE PARA CATEGORIZAÇÃO DA QUESTÃO</th></tr>
<tr><td>Lista dos tópicos considerados na construção das soluções hipotéticas
(Carvalho e Silva, 2002)</td><td colspan="2">Parâmetros de análise:
Tópicos e Procedimentos</td><td>Categorização</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Tema I: Probabilidades e Combinatória
• “Experiência aleatória; conjuntos de resultados; acontecimentos”
• “Arranjos completos, arranjos simples, permutações e combinações”</td><td rowspan="2">Tópicos</td><td>Quantidade
Dois ou mais tópicos foram utilizados</td><td rowspan="4">Categoria C (Multi-estrutural)</td></tr>
<tr><td>Nível
Adequado – Foram utilizados tópicos de nível análogo ao do programa</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Procedimentos</td><td>Grau de inovação
Réplica – Envolve hipóteses de trabalho e estratégias descritas nos programas</td></tr>
<tr><td>Integração dos procedimentos
Compartimentados – Os procedimentos mostram a aplicação de vários conceitos e informações de forma isolada e sucessiva</td></tr>
<tr><td colspan="4">Conclusões
Tipo 2
A conclusão decorre exclusivamente dos procedimentos matemáticos envolvidos na resolução</td></tr>
</table>

Figura 53 - Modelo de análise para categorização da questão 1, G1, exame 2017

QUESTÃO

2. Uma turma é constituída por rapazes e por raparigas, num total de 20 alunos.

Sabe-se que:

- $\frac{1}{4}$ dos rapazes tem olhos verdes;
- escolhido, ao acaso, um aluno da turma, a probabilidade de ele ser rapaz e de ter olhos verdes é $\frac{1}{10}$

Quantos rapazes tem a turma?

(A) 4 **(B)** 8 **(C)** 12 **(D)** 16

PROPOSTA RESOLUÇÃO APM

2.

Consideremos os acontecimentos:
R – O aluno escolhido ser rapaz
V – O aluno escolhido ter olhos verdes.

Se $\frac{1}{4}$ dos rapazes tem olhos verdes, então $P(V|R) = \frac{1}{4}$, e se escolhido, ao acaso, um aluno da turma, a probabilidade de ele ser rapaz e de ter olhos verdes é $\frac{1}{10}$, isto significa que $P(R \cap V) = \frac{1}{10}$.

Da definição de probabilidade condicionada temos que:

$P(V|R) = \frac{P(V \cap R)}{P(R)} \Leftrightarrow \frac{1}{4} = \frac{\frac{1}{10}}{P(R)}$, resolvendo a equação em ordem a $P(R)$, vem:

$P(R) = 4 \times \frac{1}{10} \Leftrightarrow P(R) = \frac{4}{10}$.

Dado que a turma tem 20 alunos e destes $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ são rapazes, então o número de rapazes da turma é $\frac{2}{5} \times 20 = 8$.

Resposta correta:

Versão 1: B

<table>
<tr><th colspan="4">MODELO DE ANÁLISE PARA CATEGORIZAÇÃO DA QUESTÃO</th></tr>
<tr><th>Lista dos tópicos considerados na construção das soluções hipotéticas
(Carvalho e Silva, 2002)</th><th colspan="2">Parâmetros de análise:
Tópicos e Procedimentos</th><th>Categorização</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Tema I: Probabilidades e Combinatória
• “Experiência aleatória; conjunto de resultados; acontecimentos”
• “Operações sobre acontecimentos”
• “Probabilidade condicionada e independência”
• “Probabilidade da interseção de acontecimentos”</td><td rowspan="2">Tópicos</td><td>Quantidade
Dois ou mais tópicos foram utilizados</td><td rowspan="4">Categoria C (Multi-estrutural)</td></tr>
<tr><td>Nível
Adequado – Foram utilizados tópicos de nível análogo ao do programa</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Procedimentos</td><td>Grau de inovação
Réplica – Envolve hipóteses de trabalho e estratégias descritas nos programas</td></tr>
<tr><td>Integração dos procedimentos
Compartimentados – Os procedimentos mostram a aplicação de vários conceitos e informações de forma isolada e sucessiva</td></tr>
<tr><td colspan="4">Conclusões
Tipo 2
A conclusão decorre exclusivamente dos procedimentos matemáticos envolvidos na resolução</td></tr>
</table>

Figura 54 - Modelo de análise para categorização da questão 2, G1, exame 2017

QUESTÃO

3. Na Figura 1, está representada, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico de uma função polinomial f

Sabe-se que o único ponto de inflexão do gráfico de f tem abcissa 0

Seja f'' a segunda derivada da função f

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) $f''(1)+f''(2)<0$

(B) $f''(-2)+f''(-1)>0$

(C) $f''(-1)\times f''(-2)<0$

(D) $f''(1)\times f''(2)>0$

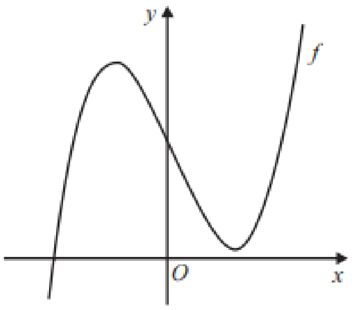


Figura 1

PROPOSTA RESOLUÇÃO APM

3.

Considerando as concavidades do gráfico da figura concluímos, por um lado, que $f''(-1)<0$ e que $f''(-2)<0$. E, por outro lado, que $f''(1)>0$ e que $f''(2)>0$.

Considerando as quatro hipóteses de resposta a única que é verdadeira é a $f''(1)\times f''(2)>0$.

Resposta correta:

Versão 1: D

<table>
<tr><th colspan="4">MODELO DE ANÁLISE PARA CATEGORIZAÇÃO DA QUESTÃO</th></tr>
<tr><td>Lista dos tópicos considerados na construção das soluções hipotéticas
(Carvalho e Silva, 2002)</td><td colspan="2">Parâmetros de análise:
Tópicos e Procedimentos</td><td>Categorização</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Tema II: Introdução ao Cálculo Diferencial II
• “Funções deriváveis. Regras de derivação; Derivadas das funções elementares”
• “Segunda derivada de uma função e concavidade”
• “Estudo de funções em casos simples”</td><td rowspan="2">Tópicos</td><td>Quantidade
Dois ou mais tópicos foram utilizados</td><td rowspan="4">Categoria C (Multi-estrutural)</td></tr>
<tr><td>Nível
Adequado – Foram utilizados tópicos de nível análogo ao do programa</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Procedimentos</td><td>Grau de inovação
Réplica – Envolve hipóteses de trabalho e estratégias descritas nos programas</td></tr>
<tr><td>Integração dos procedimentos
Compartimentados – Os procedimentos mostram a aplicação de vários conceitos e informações de forma isolada e sucessiva</td></tr>
<tr><td colspan="4">Conclusões
Tipo 2
A conclusão decorre exclusivamente dos procedimentos matemáticos envolvidos na resolução</td></tr>
</table>

Figura 55 - Modelo de análise para categorização da questão 3, G1, exame 2017

QUESTÃO

4. Sejam f e g duas funções de domínio $\mathbb{R}^+$

Sabe-se que a reta de equação $y = -x$ é assíntota oblíqua do gráfico de f e do gráfico de g

Qual é o valor de $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x) \times g(x)}{x}$?

(A) $+\infty$ **(B)** 1 **(C)** -1 **(D)** $-\infty$

PROPOSTA RESOLUÇÃO APM

4.

Considerando que $y = -x$ é assíntota oblíqua quer do gráfico de f quer do gráfico de g, então verifica-se que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{x} = -1$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)\times g(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\times\frac{g(x)}{x}\times x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)\times\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{g(x)}{x}\right)\times\lim_{x\to+\infty}(x) =$$
$$= (-1)\times(-1)\times(+\infty) = +\infty$$

Resposta correta:

Versão 1: A

<table>
<tr><th colspan="4">MODELO DE ANÁLISE PARA CATEGORIZAÇÃO DA QUESTÃO</th></tr>
<tr><td>Lista dos tópicos considerados na construção das soluções hipotéticas
(Carvalho e Silva, 2002)</td><td colspan="2">Parâmetros de análise:
Tópicos e Procedimentos</td><td>Categorização</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Tema II: Introdução ao Cálculo Diferencial
• “Propriedades operatórias sobre limites”
• Assíntotas ao gráfico de uma função”</td><td rowspan="2">Tópicos</td><td>Quantidade
Dois ou mais tópicos foram utilizados</td><td rowspan="4">Categoria C (Multi-estrutural)</td></tr>
<tr><td>Nível
Adequado – Foram utilizados tópicos de nível análogo ao do programa</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Procedimentos</td><td>Grau de inovação
Réplica – Envolve hipóteses de trabalho e estratégias descritas nos programas</td></tr>
<tr><td>Integração dos procedimentos
Compartimentados – Os procedimentos mostram a aplicação de vários conceitos e informações de forma isolada e sucessiva</td></tr>
<tr><td colspan="4">Conclusões
Tipo 2
A conclusão decorre exclusivamente dos procedimentos matemáticos envolvidos na resolução</td></tr>
</table>

Figura 56 - Modelo de análise para categorização da questão 4, G1, exame 2017

QUESTÃO

5. Seja f a função, de domínio A e contradomínio $]-1,+\infty[$, definida por $f(x)=\operatorname{tg} x$

Qual dos conjuntos seguintes pode ser o conjunto A ?

(A) $\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right[$ **(B)** $\left]\frac{3\pi}{4},\frac{3\pi}{2}\right[$ **(C)** $\left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right[$ **(D)** $\left]\frac{5\pi}{4},\frac{3\pi}{2}\right[$

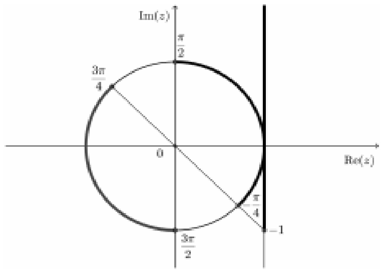
PROPOSTA RESOLUÇÃO APM

5.

Consideremos a seguinte figura:

observando-a, conclui-se que

$\operatorname{tg} x > -1 \Leftrightarrow x \in \left] -\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right[,\ k \in \mathbb{Z}$.



Portanto:

- se $k = 0$ então $x \in \left] -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right[$, não estando este intervalo representado em nenhuma das opções;
- se $k = 1$ então $x \in \left] \frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{2} \right[$, estando este intervalo representado numa das opções.

Logo, A pode ser o conjunto $\left] \frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{2} \right[$.

Resposta correta:

Versão 1: B

<table>
<tr><th colspan="4">MODELO DE ANÁLISE PARA CATEGORIZAÇÃO DA QUESTÃO</th></tr>
<tr><th>Lista dos tópicos considerados na construção das soluções hipotéticas
(Carvalho e Silva, 2002)</th><th colspan="2">Parâmetros de análise:
Tópicos e Procedimentos</th><th>Categorização</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Tema III: Trigonometria e Números Complexos – 12.º ano
• “Funções seno, co-seno e tangente. Estudo intuitivo com base no círculo trigonométrico, tanto a partir de um gráfico particular, como usando calculadora gráfica ou computador”
Tema I: Geometria no Plano e no Espaço II – 11.º ano
• “Funções seno, co-seno e tangente”
• “Razões trigonométricas dos ângulos de 30°, 45° e 60°”</td><td rowspan="2">Tópicos</td><td>Quantidade
Dois ou mais tópicos foram utilizados</td><td rowspan="4">Categoria C (Multi-estrutural)</td></tr>
<tr><td>Nível
Adequado – Foram utilizados tópicos de nível análogo ao do programa</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Procedimentos</td><td>Grau de inovação
Réplica – Envolve hipóteses de trabalho e estratégias descritas nos programas</td></tr>
<tr><td>Integração dos procedimentos
Compartimentados – Os procedimentos mostram a aplicação de vários conceitos e informações de forma isolada e sucessiva</td></tr>
<tr><td colspan="4">Conclusões
Tipo 2
A conclusão decorre exclusivamente dos procedimentos matemáticos envolvidos na resolução</td></tr>
</table>

Figura 57 - Modelo de análise para categorização da questão 5, G1, exame 2017

QUESTÃO

6. Considere, num referencial o.n. xOy, uma reta r de inclinação α

Sabe-se que $\cos\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

Qual pode ser a equação reduzida da reta r ?

(A) $y=-5x$ **(B)** $y=4x$ **(C)** $y=-2x$ **(D)** $y=3x$

PROPOSTA RESOLUÇÃO APM

6.

Tem-se que α é a inclinação da reta r, pelo que o seu declive é dado por $\operatorname{tg}\alpha$.

Como $\cos\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, vem que $\alpha \in \left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[$, pelo que $\operatorname{tg}\alpha < 0$

Logo, usando a fórmula $1+\operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$, vem:

$$1+\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow 1+\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2} \Leftrightarrow 1+\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\frac{1}{5}} \Leftrightarrow 1+\operatorname{tg}^2\alpha = 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \operatorname{tg}^2\alpha = 4 \Leftrightarrow \operatorname{tg}\alpha = \pm\sqrt{4}$$

Como $\operatorname{tg}\alpha < 0$, vem $\operatorname{tg}\alpha = -2$, pelo que o declive da reta é -2. Das opções apresentadas, apenas uma tem uma equação de uma reta cujo declive é -2.

Resposta correta:

Versão 1: C

<table>
<tr><th colspan="4">MODELO DE ANÁLISE PARA CATEGORIZAÇÃO DA QUESTÃO</th></tr>
<tr><td>Lista dos tópicos considerados na construção das soluções hipotéticas
(Carvalho e Silva, 2002)</td><td colspan="2">Parâmetros de análise:
Tópicos e Procedimentos</td><td>Categorização</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Tema I: Geometria no Plano e no Espaço II – 11.º ano
• “Declive da reta, no plano, como tangente da inclinação”
• “Equações trigonométricas”
• “Relação entre as razões trigonométricas do mesmo ângulo”
• “Funções seno, co-seno e tangente”</td><td rowspan="2">Tópicos</td><td>Quantidade
Dois ou mais tópicos foram utilizados</td><td rowspan="4">Categoria C (Multi-estrutural)</td></tr>
<tr><td>Nível
Adequado – Foram utilizados tópicos de nível análogo ao do programa</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Procedimentos</td><td>Grau de inovação
Réplica – Envolve hipóteses de trabalho e estratégias descritas nos programas</td></tr>
<tr><td>Integração dos procedimentos
Compartimentados – Os procedimentos mostram a aplicação de vários conceitos e informações de forma isolada e sucessiva</td></tr>
<tr><td colspan="4">Conclusões
Tipo 1
Os elementos que contribuíram para a obtenção da conclusão foram harmonizados</td></tr>
</table>

Figura 58 - Modelo de análise para categorização da questão 6, G1, exame 2017

QUESTÃO

7. Considere em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, a condição

$$\frac{5\pi}{4} \leq \arg(z) \leq \frac{7\pi}{4} \ \wedge \ \operatorname{Im}(z) \geq -1$$

No plano complexo, esta condição define uma região.

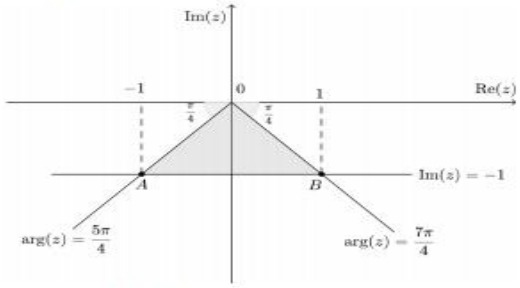
Qual é a área dessa região?

(A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **(B)** $\frac{1}{2}$ **(C)** $\sqrt{2}$ **(D)** 1

PROPOSTA RESOLUÇÃO APM

7.

A condição $\frac{5\pi}{4} \leq \arg(z) \leq \frac{7\pi}{4} \ \wedge \ \operatorname{Im}(z) \geq -1$ define a região a sombreado da figura seguinte:



A condição define o triângulo $[AOB]$, em que a medida do comprimento da sua altura é 1 e $\overline{AB} = 2$. Logo,

$$A_{[AOB]} = \frac{\overline{AB} \times altura}{2} = \frac{2 \times 1}{2} = 1$$

Resposta correta:

Versão 1: D

<table>
<tr><th colspan="4">MODELO DE ANÁLISE PARA CATEGORIZAÇÃO DA QUESTÃO</th></tr>
<tr><th>Lista dos tópicos considerados na construção das soluções hipotéticas
(Carvalho e Silva, 2002)</th><th colspan="2">Parâmetros de análise:
Tópicos e Procedimentos</th><th>Categorização</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Tema III: Trigonometria e Números Complexos
• “Números complexos”
• “Domínios planos e condições em variável complexa”
• “Interpretação geométricas das operações com números complexos”</td><td rowspan="2">Tópicos</td><td>Quantidade
Dois ou mais tópicos foram utilizados</td><td rowspan="4">Categoria C (Multi-estrutural)</td></tr>
<tr><td>Nível
Adequado – Foram utilizados tópicos de nível análogo ao do programa</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Procedimentos</td><td>Grau de inovação
Réplica – Envolve hipóteses de trabalho e estratégias descritas nos programas</td></tr>
<tr><td>Integração dos procedimentos
Compartimentados – Os procedimentos mostram a aplicação de vários conceitos e informações de forma isolada e sucessiva</td></tr>
<tr><td colspan="4">Conclusões
Tipo 2
A conclusão decorre exclusivamente dos procedimentos matemáticos envolvidos na resolução</td></tr>
</table>

Figura 59 - Modelo de análise para categorização da questão 7, G1, exame 2017

QUESTÃO

8. Seja (u_n) a sucessão definida por $u_n = \begin{cases} n & \text{se } n \leq 20 \\ (-1)^n & \text{se } n > 20 \end{cases}$

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) A sucessão (u_n) é monótona crescente.

(B) A sucessão (u_n) é monótona decrescente.

(C) A sucessão (u_n) é limitada.

(D) A sucessão (u_n) é um infinitamente grande.

PROPOSTA RESOLUÇÃO APM

8.

Tem-se que para $n \in \mathbb{N}$ e:

- para $n \leq 20$, $u_n = n$, pelo que $1 \leq u_n \leq 20$
- para $n > 20$, $u_n = (-1)^n$, pelo que $u_n = -1$ se n é ímpar e $u_n = 1$ se n é par.

Logo, para todo o $n \in I\!N$, $-1 \leq u_n \leq 20$, ou seja, a sucessão (u_n) é limitada.

Resposta correta:

Versão 1: C

<table>
<tr><td colspan="4">MODELO DE ANÁLISE PARA CATEGORIZAÇÃO DA QUESTÃO</td></tr>
<tr><td>Lista dos tópicos considerados na construção das soluções hipotéticas
(Carvalho e Silva, 2002)</td><td colspan="2">Parâmetros de análise:
Tópicos e Procedimentos</td><td>Categorização</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Tema III: Sucessões reais – 11.º ano
• “Conceito de sucessão”
• “Minorantes e majorantes”
• “Sucessões limitadas”</td><td rowspan="2">Tópicos</td><td>Quantidade
Dois ou mais tópicos foram utilizados</td><td rowspan="4">Categoria C (Multi-estrutural)</td></tr>
<tr><td>Nível
Adequado – Foram utilizados tópicos de nível análogo ao do programa</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Procedimentos</td><td>Grau de inovação
Réplica – Envolve hipóteses de trabalho e estratégias descritas nos programas</td></tr>
<tr><td>Integração dos procedimentos
Compartimentados – Os procedimentos mostram a aplicação de vários conceitos e informações de forma isolada e sucessiva</td></tr>
<tr><td colspan="4">Conclusões
Tipo 2
A conclusão decorre exclusivamente dos procedimentos matemáticos envolvidos na resolução</td></tr>
</table>

Figura 60 - Modelo de análise para categorização da questão 8, G1, exame 2017

Grupo II

QUESTÃO

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, sejam

$$z_1 = \frac{1-3i^{19}}{1+i} \quad \text{e} \quad z_2 = -3k\,\text{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right), \text{ com } k \in \mathbb{R}^+$$

Sabe-se que, no plano complexo, a distância entre a imagem geométrica de z_1 e a imagem geométrica de z_2 é igual a $\sqrt{5}$

Qual é o valor de k?

Resolva este item sem recorrer à calculadora.

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO (IAVE 2017)

1. .... **15 pontos**

Escrever z_1 na forma algébrica .... 5 pontos

- Escrever $1-3i^{19}=1+3i$ .... 1 ponto
- Escrever $\dfrac{1+3i}{1+i}=\dfrac{(1+3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}$ .... 1 ponto
- Obter z_1 na forma algébrica .... 3 pontos

Escrever z_2 na forma algébrica .... 2 pontos

- Escrever $\operatorname{cis}\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)=-i$ .... 1 ponto
- Obter $z_2=3ki$ .... 1 ponto

OU

- Escrever $-3k\operatorname{cis}\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)=3k\operatorname{cis}\left(\dfrac{5\pi}{2}\right)$ .... 1 ponto
- Obter $z_2=3ki$ .... 1 ponto

Obter a condição $4+(1-3k)^2=5$ (ou equivalente) .... 5 pontos

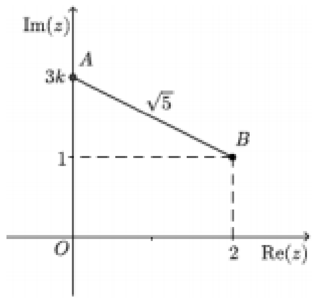
Obter o valor de k $\left(\dfrac{2}{3}\right)$ .... 3 pontos

PROPOSTA RESOLUÇÃO APM

1.

Tem-se que:

- $i^{19}=i^{16+3}+i^{4\times 4}\times i^3=\left(i^4\right)^4\times(-i)=1^4\times(-i)=1\times(-i)=-i$
- $z_1=\dfrac{1-3i^{19}}{1+i}=\dfrac{1-3(-i)}{1+i}=\dfrac{1+3i}{1+i}\times\dfrac{1-i}{1-i}=\dfrac{1-i+3i-3i^2}{1^2-i^2}=\dfrac{1-i+3i+3}{2}=\dfrac{4+2i}{2}=2+i$
- $z_2=-3k\underbrace{\operatorname{cis}\dfrac{3\pi}{2}}_{-i}=-3k\times(-i)=3k\,i$



A distância entre z_1 e z_2 é dada por $|z_1-z_2|$.

Assim,

$$|z_1-z_2|=\sqrt{5}\Leftrightarrow|2+i-3ki|=\sqrt{5}\Leftrightarrow|2+i(1-3k)|=\sqrt{5}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{2^2+(1-3k)^2}=\sqrt{5}\Leftrightarrow\sqrt{4+(1-3k)^2}=\sqrt{5}$$

Como para todo o $k \in I\!R^+$, $4+(1-3k)^2>0$, elevando ambos os membros ao quadrado, temos:

$$\left(\sqrt{4+(1-3k)^2}\right)^2=\left(\sqrt{5}\right)^2 \Leftrightarrow 4+(1-3k)^2=5 \Leftrightarrow (1-3k)^2=1 \Leftrightarrow 1-3k=\pm\sqrt{1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1-3k=-1 \ \vee \ 1-3k=1 \Leftrightarrow -3k=-2 \ \vee \ -3k=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k=\frac{2}{3} \ \vee \ k=0$$

Dado que $k \in I\!R^+$, então $k=\frac{2}{3}$.

<table>
<tr><th colspan="4">MODELO DE ANÁLISE PARA CATEGORIZAÇÃO DA QUESTÃO</th></tr>
<tr><th>Lista dos tópicos considerados na construção das soluções hipotéticas
(Carvalho e Silva, 2002)</th><th colspan="2">Parâmetros de análise:
Tópicos e Procedimentos</th><th>Categorização</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Tema III: Trigonometria e Números Complexos – 12.º ano
• “Números complexos. O número i. O conjunto c dos números complexos”
• “A forma algébrica dos complexos. Operações com complexos na forma algébrica”.
• “Escrita de complexos nas duas formas, passando de uma para a outra.”

Tema I: Geometria no Plano e no Espaço II – 11.º ano
• “Funções seno, co-seno e tangente”</td><td rowspan="2">Tópicos</td><td>Quantidade
Dois ou mais tópicos foram utilizados</td><td rowspan="4">Categoria C (Multi-estrutural)</td></tr>
<tr><td>Nível
Adequado – Foram utilizados tópicos de nível análogo ao do programa</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Procedimentos</td><td>Grau de inovação
Réplica – Envolve hipóteses de trabalho e estratégias descritas nos programas</td></tr>
<tr><td>Integração dos procedimentos
Compartimentados – Os procedimentos mostram a aplicação de vários conceitos e informações de forma isolada e sucessiva</td></tr>
<tr><td colspan="4">Conclusões
Tipo 1
Os elementos que contribuíram para a obtenção da conclusão foram harmonizados</td></tr>
</table>

Figura 61 - Modelo de análise para categorização da questão 1, G2, exame 2017

QUESTÃO

2. Na Figura 2, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o prisma quadrangular regular $[OPQRSTUV]$

Sabe-se que:

- a face $[OPQR]$ está contida no plano xOy
- o vértice Q pertence ao eixo Oy e o vértice T pertence ao eixo Oz
- o plano STU tem equação $z = 3$

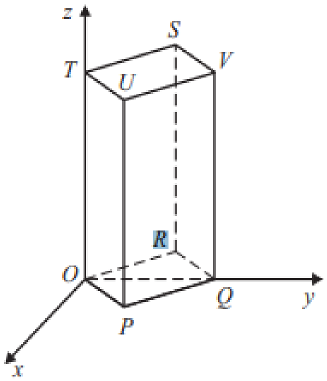


Figura 2

2.1. Seja T' o simétrico do ponto T, relativamente à origem do referencial.

Escreva uma equação da superfície esférica de diâmetro $[TT']$

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO (IAVE 2017)

2.1. .... **5 pontos**

Reconhecer que o ponto T tem cota igual a 3 .... 1 ponto

Concluir que o centro da superfície esférica é a origem do referencial .... 1 ponto

Concluir que o raio da superfície esférica é 3 .... 1 ponto

Escrever a equação pedida $(x^2 + y^2 + z^2 = 9$ ou equivalente$)$ (**ver nota**) ... 2 pontos

Nota – Se for apresentada apenas a condição $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ (ou equivalente), a classificação a atribuir à resposta é 5 pontos.

PROPOSTA RESOLUÇÃO APM

2.

2.1.

Como o plano STU tem equação $z = 3$, então $T(0, 0, 3)$ e $T'(0, 0, -3)$. Assim, o centro da superfície esférica de diâmetro $[TT']$ é a origem do referencial $(0, 0, 0)$ e o raio é igual a 3.

A equação da superfície esférica pedida é: $x^2 + y^2 + z^2 = 9$

<table>
<tr><th colspan="4">MODELO DE ANÁLISE PARA CATEGORIZAÇÃO DA QUESTÃO</th></tr>
<tr><td>Lista dos tópicos considerados na construção das soluções hipotéticas
(Carvalho e Silva, 2001)</td><td colspan="2">Parâmetros de análise:
Tópicos e Procedimentos</td><td>Categorização</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Tema I: Geometria no Plano e no Espaço I
• “Referenciais cartesianos ortogonais e monométricos no plano e no espaço”
• “Relações entre as coordenadas, no espaço, de pontos simétricos relativamente aos planos coordenados, aos eixos coordenados e aos planos bissetores dos octantes”
• “Conjunto de pontos e condições”
• “Lugares geométricos: circunferência, círculo e mediatriz; superfície esférica, esfera e plano mediador”</td><td rowspan="2">Tópicos</td><td>Quantidade
Dois ou mais tópicos foram utilizados</td><td rowspan="4">Categoria C (Multi-estrutural)</td></tr>
<tr><td>Nível
Adequado – Foram utilizados tópicos de nível análogo ao do programa</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Procedimentos</td><td>Grau de inovação
Réplica – Envolve hipóteses de trabalho e estratégias descritas nos programas</td></tr>
<tr><td>Integração dos procedimentos
Compartimentados – Os procedimentos mostram a aplicação de vários conceitos e informações de forma isolada e sucessiva</td></tr>
<tr><td colspan="4">Conclusões
Tipo 2
A conclusão decorre exclusivamente dos procedimentos matemáticos envolvidos na resolução</td></tr>
</table>

Figura 62 - Modelo de análise para categorização da questão 2.1, G2, exame 2017

QUESTÃO

2.2. Determine o valor do produto escalar $\overrightarrow{UP}.\overrightarrow{RS}$

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO (IAVE 2017)

2.2. .... **10 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Escrever $\|\overrightarrow{UP}\| = \|\overrightarrow{RS}\| = 3$ .... 3 pontos

Escrever $\cos(\overrightarrow{UP}\,\hat{}\,\overrightarrow{RS}) = -1$ .... 5 pontos

Obter o valor de $\overrightarrow{UP}.\overrightarrow{RS}$ (-9) .... 2 pontos

2.º Processo

Escrever $\overrightarrow{UP} = (0, 0, -3)$ .... 4 pontos

Escrever $\overrightarrow{RS} = (0, 0, 3)$ .... 4 pontos

Obter o valor de $\overrightarrow{UP}.\overrightarrow{RS}$ (-9) .... 2 pontos

Nota – Se a resposta se limitar à escrita de $\overrightarrow{UP}.\overrightarrow{RS} = -3 \times 3 = -9$, a classificação a atribuir é 10 pontos.

PROPOSTA RESOLUÇÃO APM

2.2.

Como $[UP]$ e $[RS]$ são arestas laterais do prisma e a altura é 3.

$\left\|\overrightarrow{UP}\right\| = 3$

$\left\|\overrightarrow{RS}\right\| = 3$

O ângulo formado pelos vetores $\overrightarrow{UP}$ e $\overrightarrow{RS}$ é 180º.

Assim, $\overrightarrow{UP} \cdot \overrightarrow{RS} = \left\|\overrightarrow{UP}\right\| \times \left\|\overrightarrow{RS}\right\| \times \cos(180^\circ) = 3 \times 3 \times (-1) = -9$

Nota: Resolução da APM e 1.º processo do IAVE, corresponde à categorização a seguir apresentada:

<table>
<tr><th colspan="4">MODELO DE ANÁLISE PARA CATEGORIZAÇÃO DA QUESTÃO</th></tr>
<tr><th>Lista dos tópicos considerados na construção das soluções hipotéticas
(Carvalho e Silva, 2001, 2002)</th><th colspan="2">Parâmetros de análise:
Tópicos e Procedimentos</th><th>Categorização</th></tr>
<tr><td rowspan="4">• Tema I: Geometria no Plano e no Espaço I – 10.º ano
• “Referenciais cartesianos ortogonais e monométricos no plano e no espaço”
• “Vetor como diferença de dois pontos”
• “Norma de um vetor”

Tema I: Geometria no Plano e no Espaço II – 11.º ano
• “Produto escalar de dois vetores no plano e no espaço:
- definição e propriedades;
- expressão do produto escalar nas coordenadas dos vetores em referencial ortonormado.”
• “Ângulo de dois vetores”
• “Funções seno, co-seno e tangente”</td><td rowspan="2">Tópicos</td><td>Quantidade
Dois ou mais tópicos foram utilizados</td><td rowspan="4">Categoria C (Multi-estrutural)</td></tr>
<tr><td>Nível
Adequado – Foram utilizados tópicos de nível análogo ao do programa</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Procedimentos</td><td>Grau de inovação
Réplica – Envolve hipóteses de trabalho e estratégias descritas nos programas</td></tr>
<tr><td>Integração dos procedimentos
Compartimentados – Os procedimentos mostram a aplicação de vários conceitos e informações de forma isolada e sucessiva</td></tr>
<tr><td colspan="4">Conclusões
Tipo 2
A conclusão decorre exclusivamente dos procedimentos matemáticos envolvidos na resolução</td></tr>
</table>

Figura 63 - Modelo de análise para categorização da questão 2.2, G2, exame 2017 – 1.º processo

Nota: Resolução com 2.º processo do IAVE, correspondendo a seguinte categorização:

<table>
<tr><th colspan="4">MODELO DE ANÁLISE PARA CATEGORIZAÇÃO DA QUESTÃO</th></tr>
<tr><th>Lista dos tópicos considerados na construção das soluções hipotéticas
(Carvalho e Silva, 2001, 2002)</th><th colspan="2">Parâmetros de análise:
Tópicos e Procedimentos</th><th>Categorização</th></tr>
<tr><td rowspan="4">• Tema I: Geometria no Plano e no Espaço I – 10.º ano
• “Referenciais cartesianos ortogonais e monométricos no plano e no espaço”
• “Vetor como diferença de dois pontos”

Tema I: Geometria no Plano e no Espaço II – 11.º ano
• “Produto escalar de dois vetores no plano e no espaço:
- definição e propriedades;
- expressão do produto escalar nas coordenadas dos vetores em referencial ortonormado.”</td><td rowspan="2">Tópicos</td><td>Quantidade
Dois ou mais tópicos foram utilizados</td><td rowspan="4">Categoria C (Multi-estrutural)</td></tr>
<tr><td>Nível
Adequado – Foram utilizados tópicos de nível análogo ao do programa</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Procedimentos</td><td>Grau de inovação
Réplica – Envolve hipóteses de trabalho e estratégias descritas nos programas</td></tr>
<tr><td>Integração dos procedimentos
Compartimentados – Os procedimentos mostram a aplicação de vários conceitos e informações de forma isolada e sucessiva</td></tr>
<tr><td colspan="4">Conclusões
Tipo 2
A conclusão decorre exclusivamente dos procedimentos matemáticos envolvidos na resolução</td></tr>
</table>

Figura 64 - Modelo de análise para categorização da questão 2.2, G2, exame 2017 – 2.º processo

QUESTÃO

2.3. Uma equação do plano PQV é $x + y = 2$

Determine uma condição cartesiana que defina a reta TQ

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO (IAVE 2017)

2.3. .... **15 pontos**

Escrever as coordenadas do ponto T .... 2 pontos

Obter as coordenadas do ponto Q .... 4 pontos

Determinar as coordenadas de um vetor diretor da reta TQ .... 2 pontos

Obter uma condição cartesiana da reta TQ .... 7 pontos

Escrever $x=0$ .... 3 pontos

Escrever $\frac{y}{2}=\frac{z-3}{-3}$ .... 3 pontos

Escrever uma condição cartesiana da reta TQ

$\left(x=0 \wedge \frac{y}{2}=\frac{z-3}{-3}\right.$ ou equivalente$\left.\right)$ (**ver nota**) .... 1 ponto

Nota – Se uma das duas etapas imediatamente anteriores a esta tiver sido pontuada com 0 pontos, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.

PROPOSTA RESOLUÇÃO APM

2.3.

Como o plano PQV tem equação $x+y=2$, e como o ponto Q tem a abcissa e a cota iguais a 0, as coordenadas de Q são: $Q\left(0,2,0\right)$

O vetor diretor da reta é: $\overrightarrow{TQ}=Q-T=\left(0,2,0\right)-\left(0,0,3\right)=\left(0,2,-3\right)$

Assim, uma condição cartesiana que define a reta TQ é $x=0 \wedge \frac{y}{2}=\frac{z-3}{-3}$.

<table>
<tr><th colspan="4">MODELO DE ANÁLISE PARA CATEGORIZAÇÃO DA QUESTÃO</th></tr>
<tr><td>Lista dos tópicos considerados na construção das soluções hipotéticas
(Carvalho e Silva, 2001, 2002)</td><td colspan="2">Parâmetros de análise:
Tópicos e Procedimentos</td><td>Categorização</td></tr>
<tr><td rowspan="4">• Tema I: Geometria no Plano e no Espaço I – 10.º ano
• “Referenciais cartesianos ortogonais e monométricos no plano e no espaço”
• “Vetor como diferença de dois pontos”

Tema I: Geometria no Plano e no Espaço II – 11.º ano
• “Equações cartesianas de retas no espaço”</td><td rowspan="2">Tópicos</td><td>Quantidade
Dois ou mais tópicos foram utilizados</td><td rowspan="4">Categoria C
(Multi-estrutural)</td></tr>
<tr><td>Nível
Adequado – Foram utilizados tópicos de nível análogo ao do programa</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Procedimentos</td><td>Grau de inovação
Réplica – Envolve hipóteses de trabalho e estratégias descritas nos programas</td></tr>
<tr><td>Integração dos procedimentos
Compartimentados – Os procedimentos mostram a aplicação de vários conceitos e informações de forma isolada e sucessiva</td></tr>
<tr><td colspan="4">Conclusões
Tipo 2
A conclusão decorre exclusivamente dos procedimentos matemáticos envolvidos na resolução</td></tr>
</table>

Figura 65 - Modelo de análise para categorização da questão 2.3, G2, exame 2017

QUESTÃO

2.4. Escolhem-se, ao acaso, três vértices do prisma.

Determine a probabilidade de o plano definido por esses três vértices ser perpendicular ao plano xOy

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO (IAVE 2017)

2.4. .... **15 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Apresentar o número de casos possíveis: ${}^{8}C_{3}$ (**ver nota 1**) .... 6 pontos

Apresentar o número de casos favoráveis: $6 \times {}^{4}C_{3}$ (**ver nota 2**) .... 8 pontos

Obter a probabilidade pedida $\left(\frac{3}{7}\right)$ (**ver nota 4**) .... 1 ponto

2.º Processo

Apresentar o número de casos possíveis: ${}^{8}A_3$ (**ver nota 1**) .... 6 pontos

Apresentar o número de casos favoráveis: $6 \times {}^{4}A_3$ (**ver nota 3**) .... 8 pontos

Obter a probabilidade pedida $\left(\frac{3}{7}\right)$ (**ver nota 4**) .... 1 ponto

Notas:

1. Se a expressão apresentada não for equivalente a ${}^{8}C_3$ (1.º processo de resolução) ou a ${}^{8}A_3$ (2.º processo de resolução), a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.
2. Se a expressão apresentada for ${}^{4}C_3$, a pontuação a atribuir nesta etapa é 1 ponto. Caso a expressão apresentada seja do tipo $k\,{}^{4}C_3$, com $k \in \{2, 3, 4, 5\}$, a pontuação a atribuir nesta etapa é 3 pontos. Caso a expressão apresentada seja incorreta e diferente das expressões referidas, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.
3. Se a expressão apresentada for ${}^{4}A_3$, a pontuação a atribuir nesta etapa é 1 ponto. Caso a expressão apresentada seja do tipo $k\,{}^{4}A_3$, com $k \in \{2, 3, 4, 5\}$, a pontuação a atribuir nesta etapa é 3 pontos. Caso a expressão apresentada seja incorreta e diferente das expressões referidas, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.
4. Se as etapas relativas ao número de casos possíveis e ao número de casos favoráveis tiverem sido pontuadas com 0 pontos, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos. Caso o valor obtido não pertença ao intervalo $[0, 1]$, a pontuação a atribuir nesta etapa também é 0 pontos.

PROPOSTA RESOLUÇÃO APM

2.4.

O número de casos possíveis é dado por: ${}^{8}C_3$

Há 6 planos perpendiculares ao plano xOy. Os 4 planos que contêm as faces laterais do prisma e os dois planos que contêm as diagonais das bases do prisma.

Cada um destes planos contém 4 vértices do prisma:

Assim, o número de casos favoráveis é: $6 \times {}^{4}C_3$

A probabilidade pedida é: $\dfrac{6 \times {}^{4}C_3}{{}^{8}C_3} = \dfrac{6 \times 4}{56} = \dfrac{3}{7}$

<table>
<tr><th colspan="4">MODELO DE ANÁLISE PARA CATEGORIZAÇÃO DA QUESTÃO</th></tr>
<tr><td>Lista dos tópicos considerados na construção das soluções hipotéticas
(Carvalho e Silva, 2002)</td><td colspan="2">Parâmetros de análise:
Tópicos e Procedimentos</td><td>Categorização</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Tema I: Probabilidades e Combinatória
• “Experiência aleatória; conjunto de resultados; acontecimentos”
• “Definição clássica de probabilidade ou de Laplace”
• “Arranjos completos, arranjos simples, permutações e combinações”
• “Aplicação da análise combinatória ao cálculo de probabilidades”</td><td rowspan="2">Tópicos</td><td>Quantidade
Dois ou mais tópicos foram utilizados</td><td rowspan="4">Categoria C (Multi-estrutural)</td></tr>
<tr><td>Nível
Adequado – Foram utilizados tópicos de nível análogo ao do programa</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Procedimentos</td><td>Grau de inovação
Réplica – Envolve hipóteses de trabalho e estratégias descritas nos programas</td></tr>
<tr><td>Integração dos procedimentos
Compartimentados – Os procedimentos mostram a aplicação de vários conceitos e informações de forma isolada e sucessiva</td></tr>
<tr><td colspan="4">Conclusões
Tipo 2
A conclusão decorre exclusivamente dos procedimentos matemáticos envolvidos na resolução</td></tr>
</table>

Figura 66 - Modelo de análise para categorização da questão 2.4, G2, exame 2017

QUESTÃO

3. Um saco contém n bolas indistinguíveis ao tato, numeradas de 1 a n (com n par e superior a 6).

Retira-se, ao acaso, uma bola do saco.

Sejam A e B os acontecimentos:

A: «o número da bola retirada é menor ou igual a 6»

B: «o número da bola retirada é par»

Escreva o significado de $P\left(\overline{A} \cup B\right)$ no contexto da situação descrita e determine uma expressão, em função de n, que dê esta probabilidade.

Apresente a expressão na forma de uma fração.

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO (IAVE 2017)

3. .... **15 pontos**

Escrever o significado de $P\left(\overline{A} \cup B\right)$ no contexto da situação descrita (É a probabilidade de o número da bola retirada ser maior do que 6 ou ser par.) ...... 5 pontos

Apresentar a expressão pedida $\left(\dfrac{n-3}{n}\right)$ .... 10 pontos

A expressão pedida pode ser obtida por, pelo menos, três processos.

1.º Processo

Referir que $P\left(\overline{A} \cup B\right) = 1 - P\left(A \cap \overline{B}\right)$ .... 4 pontos

Determinar $P\left(A \cap \overline{B}\right)$, em função de n $\left(\dfrac{3}{n}\right)$ .... 5 pontos

Obter $P\left(\overline{A} \cup B\right) = \dfrac{n-3}{n}$ .... 1 ponto

2.º Processo

Determinar $P(\overline{A})$, em função de n $\left(\dfrac{n-6}{n}\right)$ .... 2 pontos

Determinar $P(B)$ $\left(\dfrac{1}{2}\right)$ .... 2 pontos

Determinar $P(\overline{A} \cap B)$, em função de n $\left(\dfrac{n-6}{2n}\right)$ .... 3 pontos

Escrever $P(\overline{A} \cup B) = \dfrac{n-6}{n} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{n-6}{2n}$ .... 2 pontos

Obter $P(\overline{A} \cup B) = \dfrac{n-3}{n}$ .... 1 ponto

3.º Processo

Apresentar o número de casos possíveis, em função de n (**ver nota 1**).. 2 pontos

Apresentar o número de casos favoráveis, em função de n (**ver nota 2**).. 7 pontos

Escrever a expressão pedida (**ver nota 3**) .... 1 ponto

Notas:

1. Se a expressão apresentada não for n, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.
2. Se for apresentada apenas a expressão $n-3$, sem qualquer justificação, a pontuação a atribuir nesta etapa é 5 pontos.
3. Se as etapas relativas ao número de casos possíveis e ao número de casos favoráveis tiverem sido pontuadas com 0 pontos, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.

PROPOSTA RESOLUÇÃO APM

3.

Como a $P\left(\overline{A} \cup B\right)$ significa a probabilidade do número da bola retirada ser maior do que 6 ou ser par, então queremos a probabilidade do número da bola retirada ser $2, 4, 6, 7, 8, 9, \ldots$. ou seja, considerando o acontecimento contrário, queremos que a bola retirada não tenha os números $1, 3$ e 5, pelo que: $P\left(\overline{A} \cup B\right) = 1 - \dfrac{3}{n} = \dfrac{n-3}{n}$

Nota: Nas resoluções propostas pelos 3 processos do IAVE e da APM, resulta a mesma categorização:

<table>
<tr><th colspan="4">MODELO DE ANÁLISE PARA CATEGORIZAÇÃO DA QUESTÃO</th></tr>
<tr><th>Lista dos tópicos considerados na construção das soluções hipotéticas
(Carvalho e Silva, 2002)</th><th colspan="2">Parâmetros de análise:
Tópicos e Procedimentos</th><th>Categorização</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Tema I: Probabilidades e Combinatória
• “Experiência aleatória; conjunto de resultados; acontecimentos.”
• “Definição clássica de probabilidade ou de Laplace”
• “Definição axiomática de probabilidades”</td><td rowspan="2">Tópicos</td><td>Quantidade
Dois ou mais tópicos foram utilizados</td><td rowspan="4">Categoria C
(Multi-estrutural)</td></tr>
<tr><td>Nível
Adequado – Foram utilizados tópicos de nível análogo ao do programa</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Procedimentos</td><td>Grau de inovação
Réplica – Envolve hipóteses de trabalho e estratégias descritas nos programas</td></tr>
<tr><td>Integração dos procedimentos
Compartimentados – Os procedimentos mostram a aplicação de vários conceitos e informações de forma isolada e sucessiva</td></tr>
<tr><td colspan="4">Conclusões
Tipo 2
A conclusão decorre exclusivamente dos procedimentos matemáticos envolvidos na resolução</td></tr>
</table>

Figura 67 - Modelo de análise para categorização da questão 3, G2, exame 2017

QUESTÃO

4. Na Figura 3, está representada uma secção de uma ponte pedonal que liga as duas margens de um rio.

A ponte, representada pelo arco PQ, está suportada por duas paredes, representadas pelos segmentos de reta $[OP]$ e $[RQ]$. A distância entre as duas paredes é 7 metros.

O segmento de reta $[OR]$ representa a superfície da água do rio.

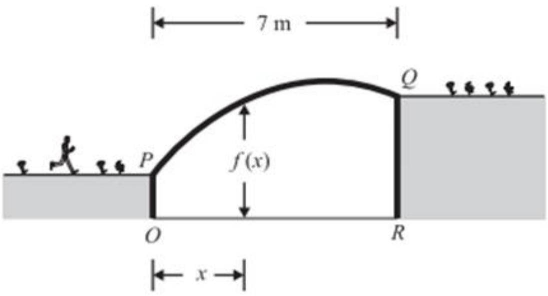


Figura 3

Considere a reta OR como um eixo orientado da esquerda para a direita, com origem no ponto O e em que uma unidade corresponde a 1 metro.

Para cada ponto situado entre O e R, de abcissa x, a distância na vertical, medida em metros, desse ponto ao arco PQ é dada por

$$f(x) = 9 - 2{,}5\left(e^{1-0{,}2x} + e^{0{,}2x-1}\right), \text{ com } x \in [0, 7]$$

Resolva os itens **4.1.** e **4.2.** recorrendo a métodos analíticos; utilize a calculadora apenas para efetuar eventuais cálculos numéricos.

4.1. Seja S o ponto pertencente ao segmento de reta $[OR]$ cuja abcissa x verifica a equação

$$\sqrt{\left(f(0)\right)^2 + x^2} = 2$$

Resolva esta equação, apresentando a solução arredondada às décimas, e interprete essa solução no contexto da situação descrita.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO (IAVE 2017)

4.1. .... **15 pontos**

Escrever $\sqrt{\left(f(0)\right)^2 + x^2} = 2 \Leftrightarrow \left(f(0)\right)^2 + x^2 = 4$ .... 3 pontos

Determinar $f(0)$ .... 2 pontos

Obter a solução da equação, arredondada às décimas $(1{,}5)$ .... 5 pontos

Interpretar a solução no contexto da situação descrita (Na secção representada, $1{,}5$ é a abcissa do ponto da superfície da água do rio que dista dois metros do ponto P).. 5 pontos

PROPOSTA RESOLUÇÃO APM

4.

4.1.

Temos que $f(0) = 9 - 2{,}5\left(e^{1-0{,}2\times 0} + e^{0{,}2\times 0-1}\right) = 9 - 2{,}5\left(e^{1} + e^{-1}\right) \approx 1{,}28$

Assim, substituindo o valor aproximado de $f(0)$ na equação $\sqrt{\left(f(0)\right)^2 + x^2} = 2$, vem:

$$\sqrt{1{,}28^2 + x^2} = 2 \Leftrightarrow \left(\sqrt{1{,}28^2 + x^2}\right)^2 = 2^2 \Leftrightarrow 1{,}28^2 + x^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 = 4 - 1{,}28^2 \Leftrightarrow x^2 = 2{,}3616$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2{,}3616}$$

Como $x \in [0, 7]$, então a solução da equação é $x = \sqrt{2{,}3616} \approx 1{,}5$.

Dado que $\overline{SP}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{OS}^2$ e $\overline{OP} = f(0)$ e $\overline{OS} = x$, então temos que $\sqrt{\left(f(0)\right)^2 + x^2}$ é a distância $\overline{SP}$.

Assim, a solução da equação $\sqrt{\left(f(0)\right)^2 + x^2} = 2$ é a abcissa do ponto S, na posição em que dista duas unidades do ponto P. O ponto S da superfície do rio que está a 2 metros do topo da parede esquerda que suporta o ponto P está a 1,5 metros de distância da base da mesma parede.

Nota: O aluno, no decorrer da resolução da questão, tem que resolver uma equação integrando nesta simultaneamente a imagem da função f no ponto de abcissa zero. Têm ainda que interpretar geometricamente o problema utilizando relações entre os segmentos de reta e o 1.º membro da equação, relacionando-a ainda com a distância do segmento de reta [SP], resultando uma categorização Relacional

<table>
<tr><th colspan="4">MODELO DE ANÁLISE PARA CATEGORIZAÇÃO DA QUESTÃO</th></tr>
<tr><th>Lista dos tópicos considerados na construção das soluções hipotéticas
(Carvalho e Silva, 2002)</th><th colspan="2">Parâmetros de análise:
Tópicos e Procedimentos</th><th>Categorização</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Tema II: Introdução ao Cálculo Diferencial – 12.º ano
• “Utilização de funções exponenciais e logarítmicas na modelação de situações reais”
• “Regras operatórias de exponenciais e logaritmos”

Tema II: Introdução ao Cálculo Diferencial I – 11.º ano
• “Equações irracionais”</td><td rowspan="2">Tópicos</td><td>Quantidade
Dois ou mais tópicos foram utilizados</td><td rowspan="4">Categoria B (Relacional)</td></tr>
<tr><td>Nível
Adequado – Foram utilizados tópicos de nível análogo ao do programa</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Procedimentos</td><td>Grau de inovação
Réplica – Envolve hipóteses de trabalho e estratégias descritas nos programas</td></tr>
<tr><td>Integração dos procedimentos
Interligados – Os procedimentos evidenciam a aplicação de vários conceitos e informações de forma integrada e simultânea</td></tr>
<tr><td colspan="4">Conclusões
Tipo 1
Os elementos que contribuíram para a obtenção da conclusão foram harmonizados</td></tr>
</table>

Figura 68 - Modelo de análise para categorização da questão 4.1, G2, exame 2017

QUESTÃO

4.2. O clube náutico de uma povoação situada numa das margens do rio possui um barco à vela. Admita que, sempre que esse barco navega no rio, a distância do ponto mais alto do mastro à superfície da água é 6 metros.

Será que esse barco, navegando no rio, pode passar por baixo da ponte?

Justifique a sua resposta.

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO (IAVE 2017)

4.2.		**15 pontos**
Determinar $f'(x)$ (**ver nota**)	4 pontos	
Determinar o zero de f'	4 pontos	
Escrever $f'(x) = 0$	1 ponto	
Obter o zero de f'	3 pontos	
Justificar que a função f atinge um máximo para $x = 5$	3 pontos	
Apresentar um quadro de sinal de f' e de monotonia de f (ou equivalente)	2 pontos	
Concluir que a função tem um máximo para $x = 5$	1 ponto	
Determinar $f(5)$ (4)	2 pontos	
Responder à questão (Não, o barco não pode passar por baixo da ponte.)	2 pontos	

Nota – Se for evidente a intenção de determinar a derivada da função, a pontuação mínima a atribuir nesta etapa é 1 ponto.

PROPOSTA RESOLUÇÃO APM

4.2.

Comecemos por determinar a expressão analítica da derivada da função f:

$$f'(x) = \left(9 - 2{,}5\left(e^{1-0{,}2x} + e^{0{,}2x-1}\right)\right)' = 9' - 2{,}5\left(e^{1-0{,}2x} + e^{0{,}2x-1}\right)' =$$

$$= 0 - 2{,}5\left(\left(e^{1-0{,}2x}\right)' + \left(e^{0{,}2x-1}\right)'\right) = -2{,}5\left((1-0{,}2x)'\left(e^{1-0{,}2x}\right) + (0{,}2x-1)'\left(e^{0{,}2x-1}\right)\right) =$$

$$= -2{,}5\left(-0{,}2\left(e^{1-0{,}2x}\right) + 0{,}2\left(e^{0{,}2x-1}\right)\right) = -2{,}5\times 0{,}2\left(-e^{1-0{,}2x} + e^{0{,}2x-1}\right) =$$

$$= -0{,}5\left(-e^{1-0{,}2x} + e^{0{,}2x-1}\right)$$

Calculemos os zeros da função derivada, no domínio da função:

$$-0{,}5\left(-e^{1-0{,}2x} + e^{0{,}2x-1}\right) = 0 \Leftrightarrow -e^{1-0{,}2x} + e^{0{,}2x-1} = 0 \Leftrightarrow e^{1-0{,}2x} = e^{0{,}2x-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - 0{,}2x = 0{,}2x - 1 \Leftrightarrow -0{,}4x = -2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x = 20 \Leftrightarrow x = \frac{20}{4} \Leftrightarrow x = 5$$

Estudando a variação do sinal da função derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

x	0		5		7
$f'(x)$	+	+	0	−	−
$f(x)$	min	$\nearrow$	Máx	$\searrow$	min

Assim, conclui-se que o valor máximo da função f é atingido quando $x = 5$, ou seja, a distância máxima entre a superfície da água e a ponte é:

$$f(5) = 9 - 2{,}5\left(e^{1-0{,}2\times 5} + e^{0{,}2\times 5-1}\right) = 9 - 2{,}5\left(e^{1-1} + e^{1-1}\right) = 9 - 0{,}5\left(e^{0} + e^{0}\right) =$$
$$= 9 - 2{,}5 \times 2 = 9 - 5 = 4$$

Portanto, o barco do clube náutico não pode passar por baixo da ponte, porque a distância da superfície da água ao topo do mastro é de 6 metros e a maior distância entre a superfície da água e a ponte é de 4 metros.

<table>
<tr><th colspan="4">MODELO DE ANÁLISE PARA CATEGORIZAÇÃO DA QUESTÃO</th></tr>
<tr><td>Lista dos tópicos considerados na construção das soluções hipotéticas
(Carvalho e Silva, 2002)</td><td colspan="2">Parâmetros de análise:
Tópicos e Procedimentos</td><td>Categorização</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Tema II: Introdução ao Cálculo Diferencial II
• “Utilização de funções exponenciais e logarítmicas na modelação de situações reais”
• “Função exponencial de base superior a 1; crescimento exponencial; estudo das propriedades analíticas e gráficas da família de funções definida por f(x)=a^x com a>1”
• “Regras operatórias de exponenciais e logaritmos.”
• “Funções deriváveis. Regras de derivação; Derivadas das funções elementares.”
• “Estudo de funções em casos simples.”
• “Problemas de otimização.”</td><td rowspan="2">Tópicos</td><td>Quantidade
Dois ou mais tópicos foram utilizados</td><td rowspan="4">Categoria C (Multi-estrutural)</td></tr>
<tr><td>Nível
Adequado – Foram utilizados tópicos de nível análogo ao do programa</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Procedimentos</td><td>Grau de inovação
Réplica – Envolve hipóteses de trabalho e estratégias descritas nos programas</td></tr>
<tr><td>Integração dos procedimentos
Compartimentados – Os procedimentos mostram a aplicação de vários conceitos e informações de forma isolada e sucessiva</td></tr>
<tr><td colspan="4">Conclusões
Tipo 1
Os elementos que contribuíram para a obtenção da conclusão foram harmonizados</td></tr>
</table>

Figura 69 - Modelo de análise para categorização da questão 4.2, G2, exame 2017

QUESTÃO

5. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{1-x^2}{1-e^{x-1}} & \text{se} \quad x<1\\ 2 & \text{se} \quad x=1\\ 3+\dfrac{\operatorname{sen}(x-1)}{1-x} & \text{se} \quad x>1\end{cases}$$

Resolva os itens **5.1.** e **5.2.** recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

5.1. Estude a função g quanto à continuidade no ponto 1

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO (IAVE 2017)

5.1. .... **15 pontos**

Determinar $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)$ .... 8 pontos

Escrever $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1-x^2}{1-e^{x-1}}$ .... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1-x^2}{1-e^{x-1}}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{(1+x)(1-x)}{1-e^{x-1}}$ .... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{(1+x)(1-x)}{1-e^{x-1}}=\lim\limits_{x\to 1^-}(1+x)\times\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1-x}{1-e^{x-1}}$ .. 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x\to 1^-}(1+x)\times\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1-x}{1-e^{x-1}}=2\times\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1-x}{1-e^{x-1}}$ ... 1 ponto

Escrever $2\times\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1-x}{1-e^{x-1}}=2\times\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x-1}{e^{x-1}-1}$ .... 1 ponto

Escrever $2\times\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x-1}{e^{x-1}-1}\underset{y=x-1}{=}2\times\lim\limits_{y\to 0^-}\dfrac{y}{e^{y}-1}$ .... 1 ponto

Escrever $2\times\lim\limits_{y\to 0^-}\dfrac{y}{e^{y}-1}=2\times\lim\limits_{y\to 0^-}\dfrac{1}{\frac{e^{y}-1}{y}}$ .... 1 ponto

Obter $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)=2$ .... 1 ponto

Determinar $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)$ .... 5 pontos

Escrever $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(3+\dfrac{\operatorname{sen}(x-1)}{1-x}\right)$ .... 1 ponto

Escrever $\lim_{x \to 1^+}\left(3+\frac{\operatorname{sen}(x-1)}{1-x}\right)=3-\lim_{x\to 1^+}\frac{\operatorname{sen}(x-1)}{x-1}$ .... 1 ponto

Escrever $3-\lim_{x\to 1^+}\frac{\operatorname{sen}(x-1)}{x-1} \underset{y=x-1}{=} 3-\lim_{y\to 0^+}\frac{\operatorname{sen} y}{y}$ .... 2 pontos

Obter $\lim_{x\to 1^+} g(x)=2$ .... 1 ponto

Referir que $g(1)=2$ .... 1 ponto

Concluir que a função g é contínua no ponto 1 .... 1 ponto

PROPOSTA RESOLUÇÃO APM

5.

5.1.

Para averiguar se a função g é contínua em $x=1$, temos que verificar se $g(1)=\lim_{x\to 1^-} g(x)=\lim_{x\to 1^+} g(x)$:

- $g(1)=2$

- $\lim_{x\to 1^-} g(x) = \lim_{x\to 1^-}\frac{1-x^2}{1-e^{x-1}} = \frac{1-\left(1^-\right)^2}{1-e^{1-1^-}} = \frac{1-1}{1-e^0} = \frac{0}{0}$ (indeterminação).

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{1-x^2}{1-e^{x-1}} = \lim_{x\to 1^-}\frac{-\left(x^2-1\right)}{-\left(e^{x-1}-1\right)} = \lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)(x+1)}{\left(e^{x-1}-1\right)} = \lim_{x\to 1^-}\left(\frac{(x-1)}{\left(e^{x-1}-1\right)}(x+1)\right)=$$

(fazendo $y=x-1$, temos que se $x\to 1^-$, então $y\to 0^-$)

$$\lim_{y\to 0^-}\frac{y}{e^y-1}\times\lim_{x\to 1^-}(x+1) = \lim_{y\to 0^-}\frac{1}{\frac{e^y-1}{y}}\times\left(1^-+1\right)=$$

$$=\frac{1}{\underbrace{\lim_{y\to 0^-}\frac{e^y-1}{y}}_{\text{limite notável}}}\times\left(1^-+1\right)=\frac{1}{1}\times 2 = 2$$

- $\lim_{x\to 1^+} g(x)=\lim_{x\to 1^+}\left(3+\frac{\operatorname{sen}(x-1)}{1-x}\right) = 3+\frac{\operatorname{sen}(1-1)}{1-1} = 3+\frac{0}{0}$ (indeterminação).

$$\lim_{x\to 1^+}\left(3+\frac{\operatorname{sen}(x-1)}{1-x}\right) = \lim_{x\to 1^+} 3+\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{\operatorname{sen}(x-1)}{-(x-1)}\right)= 3-\lim_{x\to 1^+}\frac{\operatorname{sen}(x-1)}{(x-1)}=$$

(fazendo $y=x-1$, temos que se $x\to 1^-$, então $y\to 0^-$)

$$3-\underbrace{\lim_{y\to 0^+}\frac{\operatorname{sen}(y)}{y}}_{\text{limite notável}} = 3-1 = 2$$

Como $g(1)=\lim_{x\to 1^-} g(x)=\lim_{x\to 1^+} g(x)$, então a função g é contínua em $x=1$.

Nota: Na resolução desta questão, o aluno tem de aplicar vários tópicos do 12.º ano, designadamente conhecer a definição de continuidade de uma função num ponto, cálculo de limites laterais, identificar indeterminações e reconhecer a aplicação dos limites notáveis $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$ e $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$, em que no cálculo destes limites vai ter que integrar simultaneamente uma mudança de variável (y = x -1) para chegar aos limites notáveis $\lim_{y \to 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1$ e $\lim_{y \to 0} \frac{\sin y}{y} = 1$.

Verifica-se que os tópicos aplicados na resolução da questão relativos ao Tema II e Tema III, são de nível igual ou superior ao Programa aplicável à mesma, no que respeita, especificamente, à aplicação da mudança de varável no cálculo do limite, uma vez que as indicações metodológicas do Programa referem que o "programa apenas pressupõe que se levantem indeterminações em casos simples" (Carvalho e Silva, Jaime, et al., DES - ME, Programa de Matemática A, 12.º ano, 2002), sendo que nesta questão apresentam-se indeterminações mais complexas nas quais é necessário aplicar o método da mudança de variável para resolver o limite, resultando a Categorização seguinte:

<table>
<tr><th colspan="4">MODELO DE ANÁLISE PARA CATEGORIZAÇÃO DA QUESTÃO</th></tr>
<tr><th>Lista dos tópicos considerados na construção das soluções hipotéticas
(Carvalho e Silva, 2002)</th><th colspan="2">Parâmetros de análise:
Tópicos e Procedimentos</th><th>Categorização</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Tema II: Introdução ao Cálculo Diferencial II
• "Continuidade de uma função"
• "Propriedades operatórias sobre limites"
• "Indeterminações"
• "Regras operatórias de exponenciais e logaritmos."

Tema III: Trigonometria e números complexos
• "Estudo intuitivo de $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$"</td><td rowspan="2">Tópicos</td><td>Quantidade
Dois ou mais tópicos foram utilizados</td><td rowspan="4">Categoria A
(Abstrato)</td></tr>
<tr><td>Nível
Superior – Foram utilizados tópicos de nível igual ou superior ao do programa</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Procedimentos</td><td>Grau de inovação
Inédito – Envolve a elaboração de hipóteses de trabalho e estratégias inovadoras</td></tr>
<tr><td>Integração dos procedimentos
Interligados – Os procedimentos evidenciam a aplicação de vários conceitos e informações de forma integrada e simultânea</td></tr>
<tr><td colspan="4">Conclusões
Tipo 2
A conclusão decorre exclusivamente dos procedimentos matemáticos envolvidos na resolução</td></tr>
</table>

Figura 70 - Modelo de análise para categorização da questão 5.1, G2, exame 2017

QUESTÃO

5.2. Resolva, no intervalo $]4, 5[$, a equação $g(x)=3$

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO (IAVE 2017)

5.2. .... **15 pontos**

Escrever $g(x)=3 \Leftrightarrow 3+\dfrac{\operatorname{sen}(x-1)}{1-x}=3$ .... 1 ponto

Escrever $3+\dfrac{\operatorname{sen}(x-1)}{1-x}=3 \Leftrightarrow \operatorname{sen}(x-1)=0$ .... 4 pontos

Escrever $\operatorname{sen}(x-1)=0 \Leftrightarrow x-1=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ .... 4 pontos

Escrever $x-1=k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x=1+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ .... 2 pontos

Obter a solução da equação pertencente ao intervalo $]4,5[$ $(1+\pi)$ .... 4 pontos

PROPOSTA RESOLUÇÃO APM

5.2.

Para $x\in\left]4,5\right[$ tem-se $g(x)=3+\dfrac{\operatorname{sen}(x-1)}{1-x}$ e $1-x\neq 0$. Assim,

$$g(x)=3 \Leftrightarrow 3+\frac{\operatorname{sen}(x-1)}{1-x}=3 \Leftrightarrow \frac{\operatorname{sen}(x-1)}{1-x}=0 \underset{1-x\neq 0}{\Leftrightarrow} \operatorname{sen}(x-1)=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x-1=0+k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=1+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

Logo, se:

- $k=0$, então $x=1$ e $1\notin\left]4,5\right[$;
- $k=1$, então $x=1+\pi$ e $1+\pi\in\left]4,5\right[$;
- $k=2$, então $x=1+2\pi$ e $1+2\pi\notin\left]4,5\right[$.

pelo que, o conjunto solução da equação é $\{1+\pi\}$.

<table>
<tr><th colspan="4">MODELO DE ANÁLISE PARA CATEGORIZAÇÃO DA QUESTÃO</th></tr>
<tr><th>Lista dos tópicos considerados na construção das soluções hipotéticas
(Carvalho e Silva, 2002)</th><th colspan="2">Parâmetros de análise:
Tópicos e Procedimentos</th><th>Categorização</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Tema I: Geometria no Plano e no Espaço II
• “Funções seno, co-seno e tangente”
• “Equações trigonométricas”

Tema II: Introdução ao cálculo diferencial I
• “Equações fracionárias”</td><td rowspan="2">Tópicos</td><td>Quantidade
Dois ou mais tópicos foram utilizados</td><td rowspan="4">Categoria C (Multi-estrutural)</td></tr>
<tr><td>Nível
Adequado – Foram utilizados tópicos de nível análogo ao do programa</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Procedimentos</td><td>Grau de inovação
Réplica – Envolve hipóteses de trabalho e estratégias descritas nos programas</td></tr>
<tr><td>Integração dos procedimentos
Compartimentados – Os procedimentos mostram a aplicação de vários conceitos e informações de forma isolada e sucessiva</td></tr>
<tr><td colspan="4">Conclusões
Tipo 2
A conclusão decorre exclusivamente dos procedimentos matemáticos envolvidos na resolução</td></tr>
</table>

Figura 71 - Modelo de análise para categorização da questão 5.2, G2, exame 2017

QUESTÃO

5.3. Na Figura 4, estão representados, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função g e um triângulo $[OAP]$

Sabe-se que:

- o ponto A é o ponto de abcissa negativa que é a intersecção do gráfico da função g com o eixo das abcissas;
- o ponto P é um ponto do gráfico da função g, de abcissa e ordenada negativas;
- a área do triângulo $[OAP]$ é igual a 5

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, a abcissa do ponto P

Apresente o valor obtido arredondado às décimas.

Na sua resposta:

— determine analiticamente a abcissa do ponto A

— equacione o problema;

— reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação.

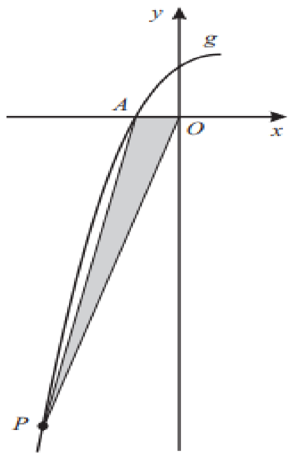


Figura 4

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO (IAVE 2017)

5.3. .... **15 pontos**

Determinar a abcissa do ponto A .... 4 pontos

Equacionar o problema $\left(\dfrac{1\times\dfrac{x^2-1}{1-e^{x-1}}}{2}=5\right.$ ou equivalente$\left.\right)$ (**ver nota 1**) ...... 5 pontos

Reproduzir o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que permite(m) resolver a equação (**ver nota 2**) .... 3 pontos

Apresentar a abcissa do ponto P $(-3{,}3)$ .... 3 pontos

Notas:

1. Se a equação apresentada for $\dfrac{1\times\dfrac{1-x^2}{1-e^{x-1}}}{2}=5$ (ou equivalente), a pontuação a atribuir nesta etapa é 3 pontos.
2. Se não for apresentado o referencial, a pontuação a atribuir nesta etapa é desvalorizada em 1 ponto.

PROPOSTA RESOLUÇÃO APM

5.3.

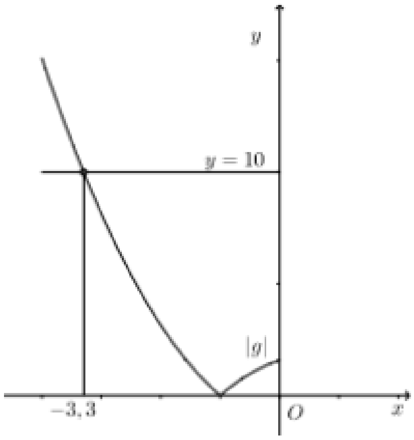
Como o ponto A é o ponto de abcissa negativa $(x<1)$ que é a interseção do gráfico da função g com o eixo das abcissas, tem ordenada nula, calculemos a abcissa resolvendo a equação seguinte:

$\dfrac{1-x^2}{1-e^{x-1}}=0 \underset{x\neq 1}{\Leftrightarrow} 1-x^2=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{1} \Leftrightarrow x=\pm 1$. Dado que $x<1$, então $x=-1$.

Assim, temos que $\overline{OA}=|-1|=1$ e considerando o lado $[OA]$ como a base do triângulo $[OAP]$, a altura é o valor absoluto da ordenada do ponto P, pelo que a área do triângulo é igual a 5, se:

$$\frac{\overline{OA}\times|g(x)|}{2}=5 \Leftrightarrow 1\times|g(x)|=5\times 2 \Leftrightarrow |g(x)|=10 \Leftrightarrow |g(x)|=10 \Leftrightarrow \left|\frac{1-x^2}{1-e^{x-1}}\right|=10$$

Visualizando na calculadora gráfica o gráfico da função $|g|$, para valores inferiores a 0 e a reta $y=10$ (reproduzidos na figura ao lado), e usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas dos pontos de interseção de dois gráficos, obtemos um valor aproximado (às décimas) da abcissa do ponto P, $x_P\approx -3{,}3$.



Nota: Na resolução da questão, o aluno tem de aplicar tópicos do 11.º ano e 12.º ano, designadamente resolver equações fracionárias, utilizando conjuntamente as regras operatórias de exponenciais. Terá que utilizar ainda tópicos do 10.º ano, no que respeita à função módulo, uma vez que na aplicação da área do triângulo é necessário determinar o valor de x interligando nesta simultaneamente uma equação envolvendo o módulo da função g(x) e proceder à resolução de uma equação utilizando corretamente a calculadora gráfica, interpretando os valores do gráfico.

<table>
<tr><th colspan="4">MODELO DE ANÁLISE PARA CATEGORIZAÇÃO DA QUESTÃO</th></tr>
<tr><td>Lista dos tópicos considerados na construção das soluções hipotéticas
(Carvalho e Silva, 2001, 2002)</td><td colspan="2">Parâmetros de análise:
Tópicos e Procedimentos</td><td>Categorização</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Tema II: Introdução ao Cálculo Diferencial II – 12.º ano
• “Regras operatórias de exponenciais e logaritmos”

Tema II: Introdução ao cálculo diferencial I – 11.º ano
• “Equações fracionárias”

Tema II: Funções e gráficos. Funções polinomiais. Função módulo - 10.º ano
• “Estudo de propriedades de funções módulo”</td><td rowspan="2">Tópicos</td><td>Quantidade
Dois ou mais tópicos foram utilizados</td><td rowspan="4">Categoria B (Relacional)</td></tr>
<tr><td>Nível
Adequado – Foram utilizados tópicos de nível análogo ao do programa</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Procedimentos</td><td>Grau de inovação
Réplica – Envolve hipóteses de trabalho e estratégias descritas nos programas</td></tr>
<tr><td>Integração dos procedimentos
Interligados – Os procedimentos evidenciam a aplicação de vários conceitos e informações de forma integrada e simultânea</td></tr>
<tr><td colspan="4">Conclusões
Tipo 1
Os elementos que contribuíram para a obtenção da conclusão foram harmonizados</td></tr>
</table>

Figura 72 - Modelo de análise para categorização da questão 5.3, G2, exame 2017

QUESTÃO

6. Seja $f:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ uma função tal que $f'(x) < 0$, para qualquer número real positivo x

Considere, num referencial o.n. xOy,

- um ponto P, de abcissa a, pertencente ao gráfico de f
- a reta r, tangente ao gráfico de f no ponto P
- o ponto Q, ponto de intersecção da reta r com o eixo Ox

Sabe-se que $\overline{OP} = \overline{PQ}$

Determine o valor de $f'(a) + \dfrac{f(a)}{a}$

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO (IAVE 2017)

6. .... **10 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, quatro processos.

1.º Processo

Identificar as coordenadas do ponto $P\ \left(a, f(a)\right)$ .... 1 ponto

Escrever uma equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa a $\left(y = f'(a)x + f(a) - a\,f'(a)\right)$ .... 2 pontos

Determinar as coordenadas do ponto $Q\ \left(a - \dfrac{f(a)}{f'(a)}, 0\right)$ .... 2 pontos

Escrever $\overline{OP} = \sqrt{a^2 + \left(f(a)\right)^2}$ .... 1 ponto

Escrever $\overline{PQ} = \sqrt{\left(\dfrac{f(a)}{f'(a)}\right)^2 + \left(f(a)\right)^2}$ .... 1 ponto

Obter o valor pedido (0) .... 3 pontos

2.º Processo

Identificar as coordenadas do ponto $P\ \left(a, f(a)\right)$ .... 1 ponto

Escrever uma equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa a $\left(y = f'(a)x + f(a) - a\,f'(a)\right)$ .... 2 pontos

Determinar as coordenadas do ponto $Q\ \left(a - \dfrac{f(a)}{f'(a)}, 0\right)$ .... 2 pontos

Concluir que $a - \dfrac{f(a)}{f'(a)} = 2a$ .... 3 pontos

Obter o valor pedido (0) .... 2 pontos

3.º Processo

Designemos por α a amplitude do ângulo POQ e por β a inclinação da reta r

Referir que $\operatorname{tg}\beta = f'(a)$ .... 1 ponto

Referir que $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{f(a)}{a}$ .... 3 pontos

Referir que $\beta = \pi - \alpha$ .... 3 pontos

Concluir que $f'(a) = -\dfrac{f(a)}{a}$ .... 2 pontos

Obter o valor pedido (0) .... 1 ponto

4.º Processo

Identificar as coordenadas do ponto $P\ \left(a, f(a)\right)$ .... 1 ponto

Identificar as coordenadas do ponto $Q\ \left(2a, 0\right)$ .... 3 pontos

Obter o declive da reta PQ .... 3 pontos

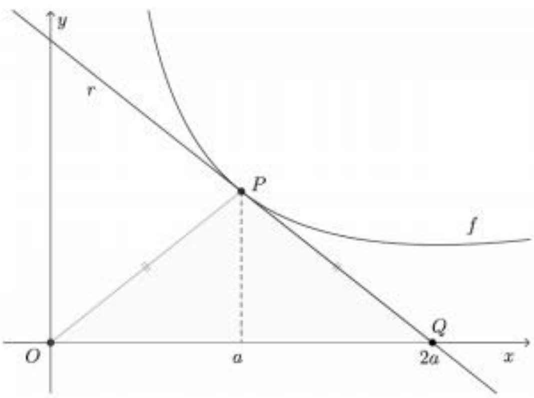
Concluir que $f'(a) = -\dfrac{f(a)}{a}$ .... 2 pontos

Obter o valor pedido (0) .... 1 ponto

PROPOSTA RESOLUÇÃO APM

6.

Dado que $\overline{OP} = \overline{PQ}$, então o triângulo $[OPQ]$ é isósceles e $\overline{OQ} = 2a$.



Como as coordenadas do ponto P são $\left(a, f\left(a\right)\right)$ e as do ponto Q são $\left(2a, 0\right)$, temos que o declive da reta PQ, é:

$$m_{PQ} = \frac{0 - f\left(a\right)}{2a - a} = -\frac{f\left(a\right)}{a}$$

Tendo em conta que a reta r é tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa a, então o declive da reta r, ou seja, da reta PQ é igual a $f'\left(a\right)$, pelo que:

$$f'\left(a\right) = -\frac{f\left(a\right)}{a}$$

Desta forma, vem que:

$$f'\left(a\right) + \frac{f\left(a\right)}{a} = -\frac{f\left(a\right)}{a} + \frac{f\left(a\right)}{a} = 0$$

Nota: Nas propostas de resolução apresentadas nos 3.º, 4.º processo do IAVE e APM são utilizados os mesmos parâmetros de análise, incluindo a utilização dos mesmos tópicos, diferindo apenas nos 1.º e 3.º processos do IAVE em que, embora os parâmetros sejam os mesmos, diferem os tópicos "Distância entre pontos no plano" no 1.º e "Declive da reta, no plano, como tangente da inclinação" e "Relação entre as razões trigonométricas de α, - α, $\frac{\pi}{2}$ + α, $\frac{\pi}{2}$ – α, π + α, π – α, 2π + α, 2π – α ", no 3.º processo. Ainda assim, verificamos que resulta a mesma categorização para as diferentes propostas de resposta.

Categorização para o 1.º processo IAVE:

Nota: O aluno, no decorrer da resolução da questão, tem que resolver várias etapas, utilizando tópicos do 10.º e 11.º anos, tendo especificamente que escrever a equação reduzida da reta com o declive e a ordenada na origem em função das coordenadas do ponto P (a,f(a)), determinar a abcissa do ponto Q com uma equação utilizando simultaneamente a expressão da equação reduzida da reta igualando a zero, obtendo a abcissa definida em função de a, f(a) e f'(a). Para chegar ao cálculo pretendido, tem ainda que utilizar a fórmula da distância entre dois pontos (também em função de a, f(a) e f'(a)) e integrar simultaneamente a equação resultante de $\overline{OP}$=$\overline{PQ}$, definida por expressões em função de a, f(a) e f'(a), resultando uma categorização Relacional.

<table>
<tr><th colspan="4">MODELO DE ANÁLISE PARA CATEGORIZAÇÃO DA QUESTÃO</th></tr>
<tr><td>Lista dos tópicos considerados na construção das soluções hipotéticas
(Carvalho e Silva, 2001, 2002)</td><td colspan="2">Parâmetros de análise:
Tópicos e Procedimentos</td><td>Categorização</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Tema II: Introdução ao cálculo diferencial I – 11.º ano
• “Derivada de uma função num ponto”

Tema II: Funções e gráficos. Funções polinomiais. Função módulo - 10.º ano
• “Equação reduzida da reta no plano e equação $x=x_0$”
• “Distância entre pontos no plano e no espaço”</td><td rowspan="2">Tópicos</td><td>Quantidade
Dois ou mais tópicos foram utilizados</td><td rowspan="4">Categoria B (Relacional)</td></tr>
<tr><td>Nível
Adequado – Foram utilizados tópicos de nível análogo ao do programa</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Procedimentos</td><td>Grau de inovação
Réplica – Envolve hipóteses de trabalho e estratégias descritas nos programas</td></tr>
<tr><td>Integração dos procedimentos
Interligados – Os procedimentos evidenciam a aplicação de vários conceitos e informações de forma integrada e simultânea</td></tr>
<tr><td colspan="4">Conclusões
Tipo 2
A conclusão decorre exclusivamente dos procedimentos matemáticos envolvidos na resolução</td></tr>
</table>

Figura 73 - Modelo de análise para categorização da questão 6, G2, exame 2017 – 1.º processo

Categorização para os 2.º, 4.º processos do IAVE e proposta APM:

Nota: O aluno, no decorrer da resolução da questão, tem que resolver várias etapas, utilizando tópicos do 10.º e 11.º anos, tendo especificamente que determinar as coordenadas dos pontos P e Q em função de a e f(a), interpretar a situação geometricamente com a reta tangente ao gráfico da função f para obter a abcissa do ponto Q apenas em função de a, calcular o declive da reta através das coordenadas dos pontos P e Q definidas em função de a e f(a). A seguir, o aluno tem que relacionar estas duas expressões do declive escritas em função de a e f(a) e simultaneamente resolver a equação que resulta da igualdade das expressões que traduzem o declive da reta tangente, resultando uma categorização Relacional.

<table>
<tr><th colspan="4">MODELO DE ANÁLISE PARA CATEGORIZAÇÃO DA QUESTÃO</th></tr>
<tr><td>Lista dos tópicos considerados na construção das soluções hipotéticas
(Carvalho e Silva, 2001, 2002)</td><td colspan="2">Parâmetros de análise:
Tópicos e Procedimentos</td><td>Categorização</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Tema II: Introdução ao cálculo diferencial I – 11.º ano
• “Derivada de uma função num ponto”

Tema II: Funções e gráficos. Funções polinomiais. Função módulo - 10.º ano
• “Equação reduzida da reta no plano e equação $x=x_0$”</td><td rowspan="2">Tópicos</td><td>Quantidade
Dois ou mais tópicos foram utilizados</td><td rowspan="4">Categoria B (Relacional)</td></tr>
<tr><td>Nível
Adequado – Foram utilizados tópicos de nível análogo ao do programa</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Procedimentos</td><td>Grau de inovação
Réplica – Envolve hipóteses de trabalho e estratégias descritas nos programas</td></tr>
<tr><td>Integração dos procedimentos
Interligados – Os procedimentos evidenciam a aplicação de vários conceitos e informações de forma integrada e simultânea</td></tr>
<tr><td colspan="4">Conclusões
Tipo 2
A conclusão decorre exclusivamente dos procedimentos matemáticos envolvidos na resolução</td></tr>
</table>

Figura 74 - Modelo de análise para categorização da questão 6, G2, exame 2017 – 2.º e 4.º processo

Categorização para o 3.º processo IAVE:

Nota: O aluno, no decorrer da resolução da questão, tem que resolver várias etapas, utilizando tópicos do 10.º e 11.º anos, tendo especificamente que calcular o declive da reta r como tangente da inclinação desta reta (tgβ) e simultaneamente relacionar este declive com a derivada da função no ponto P (f’(a)), resultando a igualdade tgβ= f’(a). Depois, o aluno tem que utilizar as razões trigonométricas no triângulo retângulo, obtendo a tgα em função de a e de f(a). A seguir o aluno tem que integrar a relação entre as razões trigonométricas para obter uma equação que relacione simultaneamente a razão trigonométrica com a expressão que representa a derivada no ponto, para obter uma equação que permita obter o resultado pretendido.

<table>
<tr><th colspan="4">MODELO DE ANÁLISE PARA CATEGORIZAÇÃO DA QUESTÃO</th></tr>
<tr><th>Lista dos tópicos considerados na construção das soluções hipotéticas
(Carvalho e Silva, 2001, 2002)</th><th colspan="2">Parâmetros de análise:
Tópicos e Procedimentos</th><th>Categorização</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Tema II: Introdução ao cálculo diferencial I – 11.º ano
• “Derivada de uma função num ponto”

Tema I: Introdução ao cálculo diferencial I – 11.º ano
• “Declive da reta, no plano, como tangente da inclinação”
• "Relação entre as razões trigonométricas de α, - α, $\frac{\pi}{2}$ + α, $\frac{\pi}{2}$ – α, π + α, π – α, 2π + α, 2π – α“

Tema II: Funções e gráficos. Funções polinomiais. Função módulo - 10.º ano
• “Equação reduzida da reta no plano e equação x=x_0”</td><td rowspan="2">Tópicos</td><td>Quantidade
Dois ou mais tópicos foram utilizados</td><td rowspan="4">Categoria B (Relacional)</td></tr>
<tr><td>Nível
Adequado – Foram utilizados tópicos de nível análogo ao do programa</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Procedimentos</td><td>Grau de inovação
Réplica – Envolve hipóteses de trabalho e estratégias descritas nos programas</td></tr>
<tr><td>Integração dos procedimentos
Interligados – Os procedimentos evidenciam a aplicação de vários conceitos e informações de forma integrada e simultânea</td></tr>
<tr><td colspan="4">Conclusões
Tipo 2
A conclusão decorre exclusivamente dos procedimentos matemáticos envolvidos na resolução</td></tr>
</table>

Figura 75 - Modelo de análise para categorização da questão 6, G2, exame 2017 – 3.º processo

Análise ao exame de Matemática A, 12.º ano, de 20017 – 1.ª fase

Nesta tabela iremos apresentar as questões de exame por temas dos conteúdos programáticos e por categorização Solo:

*Tabela **8** - Síntese do Exame de 2017*

Síntese Exame Matemática A 12.º Ano 2017 - 1.ª fase

Grupo	Categoria / Tema/Domínio	**Categoria A (Abstrato)**		**Categoria B (Relacional)**		**Categoria C (Multi-estrutural)**		**Categoria D (Uni-estrutural)**		**Categoria E (Pré-estrutural)**	
		Questões	Total questões	Questões	Total questões	Questões	Total questões	Questões	Total questões	Questões	Total questões
Grupo I	**Tema I** - Probabilidades e Combinatória - 12.º ano					1, 2	2				
	Tema II - Introdução ao cálculo Diferencial II - 12.º ano					3, 4	2				
	Tema III - Trigonometria e Números Complexos - 12.º ano					5, 7	2				
	Tema I - Geometria no Plano e no Espaço II – 11.º ano					5, 6	2				
	Tema III - Sucessões reais – 11.º ano					8	1				
	Total por categoria	0		0		8		0		0	
	% categoria	0%		0%		42%		0%		0%	
Grupo II	**Tema I** - Probabilidades e Combinatória - 12.º ano					2.4, 3	2				
	Tema II - Introdução ao cálculo Diferencial II - 12.º ano	5.1	1	4.1, 5.3	2	4.2	1				
	Tema III - Trigonometria e Números Complexos - 12.º ano	5.1	1			1	1				
	Tema I - Geometria no Plano e no Espaço II – 11.º ano					1, 2.2, 2.3, 5.2	4				
	Tema II - Introdução ao Cálculo Diferencial I – 11.º ano			4.1, 5.3, 6	3	5.2	1				
	Tema I - Geometria no Plano e no Espaço I – 10.º ano			6	1	2.1, 2.2, 2.3	3				
	Tema II - Funções e gráficos – 10.º ano			5.3, 6	2						
	Total por categoria	1		3		7		0		0	
	% categoria	5%		16%		37%		0%		0%	
	% total por categoria	5%		16%		79%		0%		0%	

No Grupo I todas as questões são Multi-estruturais e apenas uma delas, a questão 5 aborda mais do que um tema (Tema III do 12.º ano e Tema I do 11.º ano).

O grupo II é um grupo mais diversificado no que toca à classificação apresentando questões categorizadas como Abstratas (Categoria A) – 5.1 e 3 Relacionais (Categoria B) – 4.1, 5.3 e 6. É relevante realçar ainda o facto de estas questões Relacionais abordarem temas de diferentes anos. Neste grupo apenas 3 questões: 2.4, 3 e 4.2 são questões que abordam um único tema, que é em todos os casos um tema de 12.º ano.

Para ilustrar a tabela, apresentamos de seguida alguns gráficos que irão facilitar alguma leitura e compreensão dos dados.

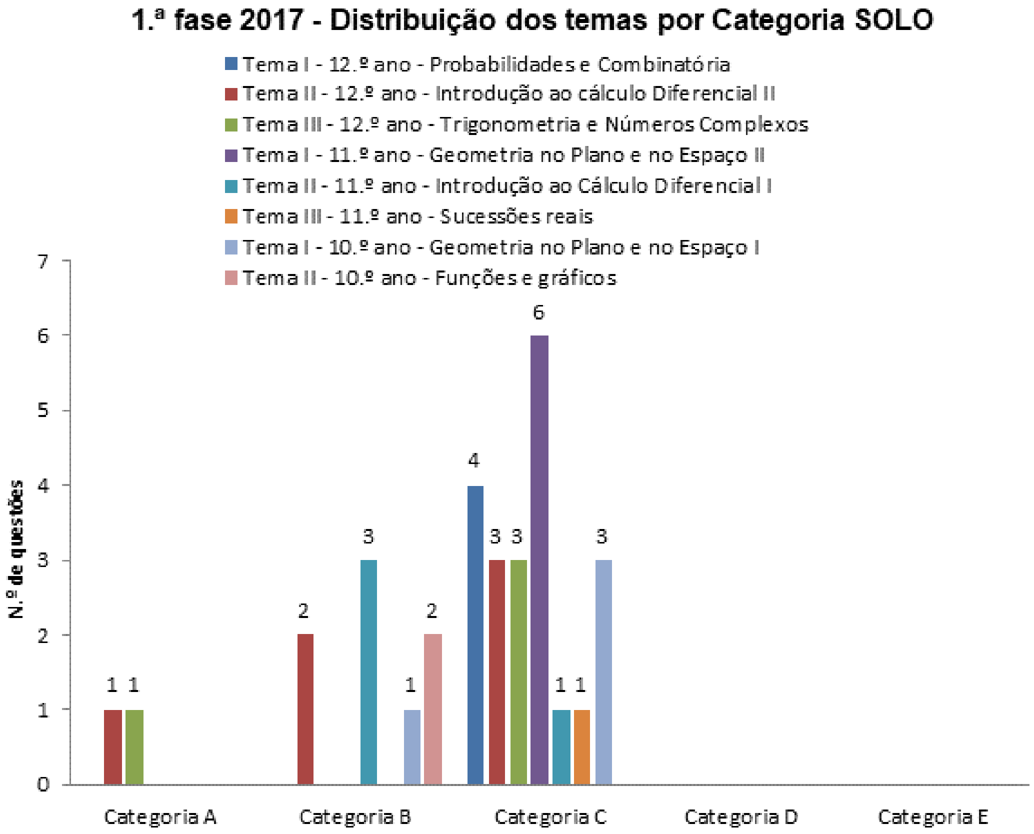


Gráfico 7 - Distribuição dos temas por Categoria SOLO - Exame 2017, 1ª fase

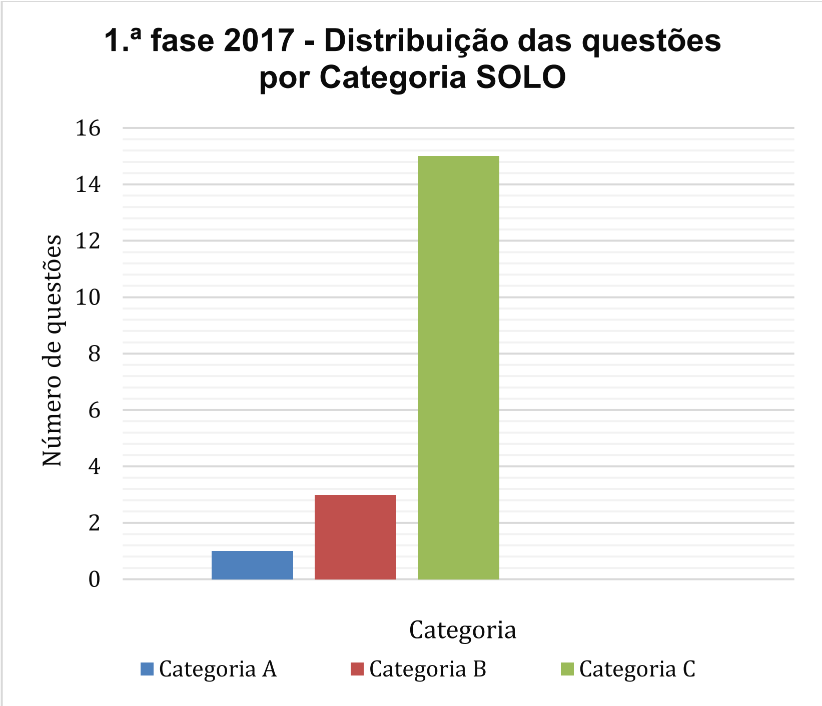


Gráfico 8 - Distribuição das Questões por Categoria SOLO - Exame 2016, 1ª fase

Neste exame as categorias D e E não têm expressão. Ainda assim, a moda continua a ser a frequência C, de questões Multi-estruturais.

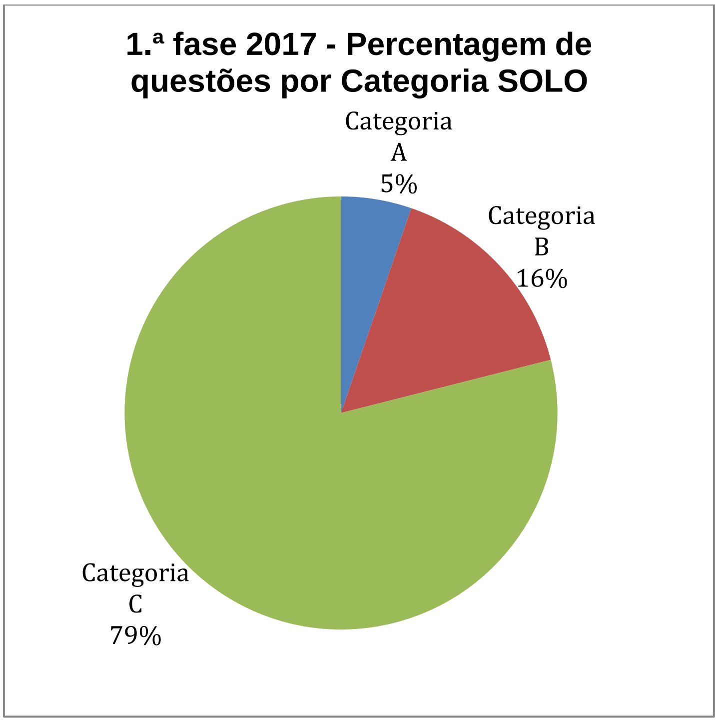


Gráfico 9 - Percentagem de Questões por Categoria SOLO - Exame 2017, 1ª fase

A Categoria C é bastante significativa embora a Categoria A e B juntas consigam traduzir quase 25% das questões.

6.4 EXAME 12.º ANO – 1.ª FASE/2018

Caderno I

QUESTÃO

1.

Os **dois** itens que se apresentam a seguir são itens em alternativa.

O **item 1.1.** integra-se nos Programas de Matemática A, de 10.º, 11.º e 12.º anos, homologados em 2001 e 2002 (**P2001/2002**).

O **item 1.2.** integra-se no Programa e Metas Curriculares de Matemática A, homologado em 2015 (**PMC2015**).

Responda apenas a um dos dois itens.

Na sua folha de respostas, identifique claramente o item selecionado.

P2001/2002

1.1. Na Figura 1, está representado um dado tetraédrico equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 4

Lança-se dez vezes esse dado e, em cada lançamento, regista-se o número da face que fica voltada para baixo.

Qual é a probabilidade, arredondada às milésimas, de sair exatamente seis vezes a face com o número 3 ?

Figura 1

(A) $0{,}146$ **(B)** $0{,}016$ **(C)** $0{,}008$ **(D)** $0{,}007$

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO (IAVE 2018)

1.1. .... **8 pontos**

Opção **(B)**

PROPOSTA RESOLUÇÃO APM

1.

1. 1. $\boxed{\textbf{P2001/2002}}$

Seja X a variável aleatória: " Número de vezes que sai a face numerada com o número 3".

X segue uma distribuição binomial com 10 provas repetidas e probabilidade de sucesso $\frac{1}{4}$.

Assim, $n = 10$, $p = \frac{1}{4}$ e consequentemente a probabilidade de insucesso é $q = \frac{3}{4}$, pelo que:

$$P(X = 6) = {}^{10}C_6 \left(\frac{1}{4}\right)^6 \times \left(\frac{3}{4}\right)^4 \approx 0{,}016 .$$

A resposta correta é a opção **(B)**.

<table>
<tr><th colspan="4">MODELO DE ANÁLISE PARA CATEGORIZAÇÃO DA QUESTÃO</th></tr>
<tr><td>Lista dos tópicos considerados na construção das soluções hipotéticas
(Carvalho e Silva, 2002)</td><td colspan="2">Parâmetros de análise:
Tópicos e Procedimentos</td><td>Categorização</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Tema I: Probabilidades e Combinatória
• "Modelo Binomial"
• "Experiência aleatória; conjunto de resultados; acontecimentos"
• "Definição clássica de probabilidade ou de Laplace"</td><td rowspan="2">Tópicos</td><td>Quantidade
Dois ou mais tópicos foram utilizados</td><td rowspan="4">Categoria C (Multi-estrutural)</td></tr>
<tr><td>Nível
Adequado – Foram utilizados tópicos de nível análogo ao do programa</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Procedimentos</td><td>Grau de inovação
Réplica – Envolve hipóteses de trabalho e estratégias descritas nos programas</td></tr>
<tr><td>Integração dos procedimentos
Compartimentados – Os procedimentos mostram a aplicação de vários conceitos e informações de forma isolada e sucessiva</td></tr>
<tr><td colspan="4">Conclusões - Tipo 2
A conclusão decorre exclusivamente dos procedimentos matemáticos envolvidos na resolução</td></tr>
</table>

Figura 76 - Modelo de análise para categorização da questão 1.1, CI, exame 2018

QUESTÃO

PMC2015

1.2. Seja f uma função diferenciável no intervalo $[0,2]$ tal que:

- $f(0)=1$
- $\forall x \in [0,2],\ 0 < f'(x) < 9$

O teorema de Lagrange, aplicado à função f em $[0,2]$, permite concluir que:

(A) $0 < f(2) < 18$

(B) $1 < f(2) < 19$

(C) $2 < f(2) < 20$

(D) $3 < f(2) < 21$

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO (IAVE 2018)

1.2. .... **8 pontos**

Opção **(B)**

PROPOSTA RESOLUÇÃO APM

1.2. $\boxed{\text{PMC2015}}$

Como f é diferenciável no intervalo $[0,2]$, logo pelo Teorema de Lagrange temos

$\exists c \in]0,2[: f'(c) = t.m.v._{[0,2]}$, ou seja, $\exists c \in]0,2[: f'(c) = \dfrac{f(2)-f(0)}{2-0}$.

Como por hipótese $f(0)=1$, então $\exists c \in]0,2[: f'(c) = \dfrac{f(2)-1}{2}$.

Pelo facto de, por hipótese, $\forall x \in [0,2] : 0 < f'(x) < 9$, temos em particular que: $0 < f'(c) < 9$,

ou seja, $0 < \dfrac{f(2)-1}{2} < 9 \Leftrightarrow 0 < f(2) - 1 < 18 \Leftrightarrow 1 < f(2) < 19$.

A resposta correta é a opção **(B)**.

<table>
<tr><th colspan="4">MODELO DE ANÁLISE PARA CATEGORIZAÇÃO DA QUESTÃO</th></tr>
<tr><td>Lista dos tópicos considerados na construção das soluções hipotéticas
(Bivar, António; Grosso, Carlos; Oliveira, Filipe; Loura, Luísa; Timóteo, Maria, 2015)</td><td colspan="2">Parâmetros de análise:
Tópicos e Procedimentos</td><td>Categorização</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Domínio IV: Funções reais de variável real
• “Teorema de Lagrange; interpretação geométrica”
• “Taxa média de variação de uma função; interpretação geométrica”
• “Função contínua num ponto e num subconjunto do respetivo domínio”</td><td rowspan="2">Tópicos</td><td>Quantidade
Dois ou mais tópicos foram utilizados</td><td rowspan="4">Categoria C (Multi-estrutural)</td></tr>
<tr><td>Nível
Adequado – Foram utilizados tópicos de nível análogo ao do programa</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Procedimentos</td><td>Grau de inovação
Réplica – Envolve hipóteses de trabalho e estratégias descritas nos programas</td></tr>
<tr><td>Integração dos procedimentos
Compartimentados – Os procedimentos mostram a aplicação de vários conceitos e informações de forma isolada e sucessiva</td></tr>
<tr><td colspan="4">Conclusões
Tipo 2
A conclusão decorre exclusivamente dos procedimentos matemáticos envolvidos na resolução</td></tr>
</table>

Figura 77 - Modelo de análise para categorização da questão 1.2, CI, exame 2018

QUESTÃO

2. Na Figura 2, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um prisma hexagonal regular.

Sabe-se que:

- $[PQ]$ e $[QR]$ são arestas de uma das bases do prisma;
- $\overline{PQ} = 4$

2.1. Determine o produto escalar $\overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{QR}$

2.2. Sabe-se ainda que:

- o plano PQR tem equação $2x + 3y - z - 15 = 0$

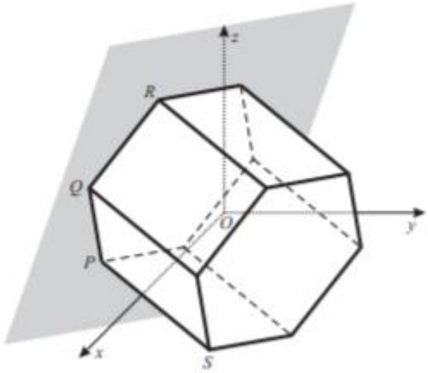


Figura 2

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO (IAVE 2018)

2.1. .... **12 pontos**

Escrever $\overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{QR} = \|\overrightarrow{QP}\| \times \|\overrightarrow{QR}\| \times \cos\left(P\hat{Q}R\right)$ .... 2 pontos

Reconhecer que $P\hat{Q}R = 120°$ .... 4 pontos

Reconhecer que $\|\overrightarrow{QP}\| = \|\overrightarrow{QR}\| = 4$ .... 3 pontos

Obter o valor pedido (-8) .... 3 pontos

PROPOSTA RESOLUÇÃO APM

2.

2. 1.

As bases do prisma são hexágonos regulares, pelo que a amplitude dos seus ângulos internos é $120°$. Assim, como $\overline{PQ} = 4$, vem que $\overline{QR} = 4$ e portanto:

$$\overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{QR} = \left\|\overrightarrow{QP}\right\| \times \left\|\overrightarrow{QR}\right\| \times \cos\left(P\hat{Q}R\right) = \overline{PQ} \times \overline{QR} \times \cos(120°) = 4 \times 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{16}{2} = -8.$$

<table>
<tr><th colspan="4">MODELO DE ANÁLISE PARA CATEGORIZAÇÃO DA QUESTÃO</th></tr>
<tr><th>Lista dos tópicos considerados na construção das soluções hipotéticas
(Bivar et al., 2015)</th><th colspan="2">Parâmetros de análise:
Tópicos e Procedimentos</th><th>Categorização</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Domínio II: Geometria Analítica
• “Produto escalar de dois vetores”

Domínio I: Trigonometria e funções trigonométricas
• “Razões trigonométricas de ângulos generalizados”</td><td rowspan="2">Tópicos</td><td>Quantidade
Dois ou mais tópicos foram utilizados</td><td rowspan="4">Categoria C (Multi-estrutural)</td></tr>
<tr><td>Nível
Adequado – Foram utilizados tópicos de nível análogo ao do programa</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Procedimentos</td><td>Grau de inovação
Réplica – Envolve hipóteses de trabalho e estratégias descritas nos programas</td></tr>
<tr><td>Integração dos procedimentos
Compartimentados – Os procedimentos mostram a aplicação de vários conceitos e informações de forma isolada e sucessiva</td></tr>
<tr><td colspan="4">Conclusões
Tipo 2
A conclusão decorre exclusivamente dos procedimentos matemáticos envolvidos na resolução</td></tr>
</table>

Figura 78 - Modelo de análise para categorização da questão 2.1, CI, exame 2018

QUESTÃO

2.2. Sabe-se ainda que:

Figura 2

- o plano PQR tem equação $2x+3y-z-15=0$
- uma das arestas laterais do prisma é o segmento de reta $[PS]$, em que S é o ponto de coordenadas $(14,5,0)$

Determine a área lateral do prisma.

Apresente o resultado arredondado às décimas.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO (IAVE 2018)

2.2. .... **12 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Escrever $(x,y,z)=(14,5,0)+k(2,3,-1),\ k\in\mathbb{R}$ .... 2 pontos

Escrever as coordenadas de um ponto genérico da reta PS, em função de k .... 2 pontos

Obter uma equação na variável k, substituindo x, y e z na equação do plano PQR pelas coordenadas de um ponto genérico da reta PS .... 2 pontos

Obter o valor de k .... 2 pontos

Determinar $\overline{PS}$ .... 2 pontos

Obter a área lateral do prisma, com o arredondamento pedido $(179{,}6)$ .... 2 pontos

2.º Processo

Escrever $\frac{x-14}{2}=\frac{y-5}{3}=\frac{z}{-1}$ .... 2 pontos

Escrever $\begin{cases}\frac{x-14}{2}=\frac{y-5}{3}=\frac{z}{-1}\\ 2x+3y-z-15=0\end{cases}$ .... 2 pontos

Obter as coordenadas do ponto P .... 4 pontos

Determinar $\overline{PS}$ .... 2 pontos

Obter a área lateral do prisma, com o arredondamento pedido $(179{,}6)$ .... 2 pontos

PROPOSTA RESOLUÇÃO APM

2. 2.

Dado que as faces laterais do prisma são retângulos, então a sua área lateral é dada por:

$6\times\overline{PQ}\times\overline{PS}=6\times 4\times\overline{PS}=24\overline{PS}$.

Um vetor normal ao plano $PQR: 2x+3y-z-15=0$ é $\vec{n}\left(2,3,-1\right)$ e como a reta PS é perpendicular ao plano PQR , então um vetor diretor da reta PS é $\vec{n}$ e portanto:

$$PS:\left(x,y,z\right)=\left(14,5,0\right)+k\left(2,3,-1\right),k\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}x=14+2k\\ y=5+3k\quad ,k\in\mathbb{R}\\ z=-k\end{cases}.$$

Como o ponto P pertence à reta PS as suas coordenadas são da forma $\left(14+2k,5+3k,-k\right),k\in\mathbb{R}$.

Além disso, como P também pertence ao plano PQS e substituindo as suas coordenadas na equação deste, vem:

$$2\left(14+2k\right)+3\left(5+3k\right)-\left(-k\right)-15=0\Leftrightarrow 28+4k+15+9k+k-15=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 14k=-28\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k=-2$$

Logo, as coordenadas de P são: $\left(14+2\times(-2), 5+3\times(-2), -(-2)\right)=(10,-1,2)$.

Assim, temos $\overline{PS}=\sqrt{(10-14)^2+(-1-5)^2+(2-0)^2}=\sqrt{16+36+4}=\sqrt{56}$, pelo que a medida da área lateral do prisma é dada por: $24\,\overline{PS}=24\times\sqrt{56}$. De onde se conclui que a área lateral do prisma é, aproximadamente, 179,6.

Nota: É necessário para o cálculo da área que se utilize simultaneamente conhecimentos de geometria, relacionando a posição relativa de retas e planos no espaço e seus vetores diretores e interligando com a distância entre dois pontos para calcular o comprimento $\overline{PS}$.

São utilizados os mesmos parâmetros de análise para as propostas de resolução apresentadas, pelo que se considera apenas uma categorização da questão:

<table>
<tr><th colspan="4">MODELO DE ANÁLISE PARA CATEGORIZAÇÃO DA QUESTÃO</th></tr>
<tr><th>Lista dos tópicos considerados na construção das soluções hipotéticas
(Bivar et al., 2015)</th><th colspan="2">Parâmetros de análise:
Tópicos e Procedimentos</th><th>Categori-zação</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Domínio II: Geometria Analítica – 11.º ano
• “Equações cartesianas, vetoriais e paramétricas de planos”
• “Vetores normais a um plano”
• “Posição relativa entre retas e planos no espaço”
• “Resolução de problemas envolvendo equações de planos e de retas no espaço”

Domínio III: Geometria Analítica – 10.º ano
• “Equação vetorial de uma reta, no plano e no espaço”
• “Sistema de equações paramétricas de uma reta”
• “Fórmula da medida da distância entre dois pontos no plano e no espaço em função da respetivas coordenadas”</td><td rowspan="2">Tópicos</td><td>Quantidade
Dois ou mais tópicos foram utilizados</td><td rowspan="4">Categoria B (Relacional)</td></tr>
<tr><td>Nível
Adequado – Foram utilizados tópicos de nível análogo ao do programa</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Procedimentos</td><td>Grau de inovação
Réplica – Envolve hipóteses de trabalho e estratégias descritas nos programas</td></tr>
<tr><td>Integração dos procedimentos
Interligados – Os procedimentos evidenciam a aplicação de vários conceitos e informações de forma integrada e simultânea</td></tr>
<tr><td colspan="4">Conclusões
Tipo 1
Os elementos que contribuíram para a obtenção da conclusão foram harmonizados</td></tr>
</table>

Figura 79 - Modelo de análise para categorização da questão 2.2, CI, exame 2018

QUESTÃO

2.3. Escolhem-se, ao acaso, dois vértices de cada uma das bases do prisma.

Determine a probabilidade de esses quatro pontos pertencerem a uma mesma face lateral do prisma.

Apresente o resultado na forma de dízima, arredondado às centésimas.

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO (IAVE 2018)

2.3. .... **12 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Apresentar o número de casos possíveis: ${}^6C_2 \times {}^6C_2$ (**ver nota 1**) .... 5 pontos

Apresentar o número de casos favoráveis: 6 (**ver nota 2**) .... 5 pontos

Obter a probabilidade pedida (**ver nota 3**) $(0{,}03)$ .... 2 pontos

2.º Processo

Apresentar o número de casos possíveis: ${}^6A_2 \times {}^6A_2$ (**ver nota 1**) .... 5 pontos

Apresentar o número de casos favoráveis: $2 \times 6 \times 2$ (**ver nota 2**) .... 5 pontos

Obter a probabilidade pedida (**ver nota 3**) $(0{,}03)$ .... 2 pontos

Notas:

1. Se a expressão apresentada não for equivalente a ${}^6C_2 \times {}^6C_2$ (1.º processo de resolução) ou a ${}^6A_2 \times {}^6A_2$ (2.º processo de resolução), a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.
2. Se o número de casos favoráveis não for 6 (1.º processo de resolução) ou 24 (2.º processo de resolução), a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.
3. Se a etapa relativa ao número de casos possíveis e a etapa relativa ao número de casos favoráveis tiverem sido pontuadas com 0 pontos, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos. A mesma pontuação de 0 pontos deve ser atribuída caso o valor obtido não pertença ao intervalo $[0,1]$

PROPOSTA RESOLUÇÃO APM

2. 3.

O número de casos possíveis é ${}^6C_2 \times {}^6C_2$. Escolhem-se dois vértices de uma das bases do prisma. O número de maneiras de o fazer é ${}^6C_2$. Para cada uma destas maneiras, existem ${}^6C_2$ maneiras distintas de escolher dois vértices da outra base do prisma.

O número de casos favoráveis é 6. Cada uma das seis faces do prisma tem exatamente quatro vértices, sendo que exatamente dois pertencem a uma das bases e os outros dois pertencem à outra base.

Assim, pela Lei de Laplace, a probabilidade pedida é: $\dfrac{6}{{}^6C_2 \times {}^6C_2} = \dfrac{2}{75} \approx 0{,}03$.

Nota: Para responder a esta questão tem que se aplicar sucessivamente e de forma isolada tópicos adquiridos no 12º ano com arranjos ou combinações do 12.º ano e a Lei de Laplace.

Os tópicos diferem nas duas propostas, contudo é possível observar a mesma categorização (por coerência dos parâmetros de análise), conforme se pode verificar nas duas propostas apresentadas infra:

Categorização para o 1.º processo de resolução (IAVE e APM):

<table>
<tr><th colspan="4">MODELO DE ANÁLISE PARA CATEGORIZAÇÃO DA QUESTÃO</th></tr>
<tr><td>Lista dos tópicos considerados na construção das soluções hipotéticas
(Bivar et al., 2015)</td><td colspan="2">Parâmetros de análise:
Tópicos e Procedimentos</td><td>Categorização</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Domínio I: Cálculo Combinatório
• “Número de subconjuntos de p elementos de um conjunto de cardinal n. Combinações”
Domínio II: Probabilidades
• “Regra de Laplace”</td><td rowspan="2">Tópicos</td><td>Quantidade
Dois ou mais tópicos foram utilizados</td><td rowspan="4">Categoria C (Multi-estrutural)</td></tr>
<tr><td>Nível
Adequado – Foram utilizados tópicos de nível análogo ao do programa</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Procedimentos</td><td>Grau de inovação
Réplica – Envolve hipóteses de trabalho e estratégias descritas nos programas</td></tr>
<tr><td>Integração dos procedimentos
Compartimentados – Os procedimentos mostram a aplicação de vários conceitos e informações de forma isolada e sucessiva</td></tr>
<tr><td colspan="4">Conclusões
Tipo 1
Os elementos que contribuíram para a obtenção da conclusão foram harmonizados</td></tr>
</table>

Figura 80 - Modelo de análise para categorização da questão 2.3, CI, exame 2018 – 1.º processo

Categorização para o 2.º processo de resolução (IAVE):

<table>
<tr><th colspan="4">MODELO DE ANÁLISE PARA CATEGORIZAÇÃO DA QUESTÃO</th></tr>
<tr><th>Lista dos tópicos considerados na construção das soluções hipotéticas
(Bivar et al., 2015)</th><th colspan="2">Parâmetros de análise:
Tópicos e Procedimentos</th><th>Categorização</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Domínio I: Cálculo Combinatório
• “Arranjos sem repetição”

Domínio II: Probabilidades
• “Regra de Laplace”</td><td rowspan="2">Tópicos</td><td>Quantidade
Dois ou mais tópicos foram utilizados</td><td rowspan="4">Categoria C (Multi-estrutural)</td></tr>
<tr><td>Nível
Adequado – Foram utilizados tópicos de nível análogo ao do programa</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Procedimentos</td><td>Grau de inovação
Réplica – Envolve hipóteses de trabalho e estratégias descritas nos programas</td></tr>
<tr><td>Integração dos procedimentos
Compartimentados – Os procedimentos mostram a aplicação de vários conceitos e informações de forma isolada e sucessiva</td></tr>
<tr><td colspan="4">Conclusões
Tipo 1
Os elementos que contribuíram para a obtenção da conclusão foram harmonizados</td></tr>
</table>

Figura 81 - Modelo de análise para categorização da questão 2.3, CI, exame 2018 – 2.º processo

QUESTÃO

3. Uma escola dedica-se ao ensino de Espanhol e de Inglês, entre outras línguas.

3.1. Doze alunos dessa escola, quatro de Espanhol e oito de Inglês, dispõem-se lado a lado em linha reta para tirar uma fotografia.

De quantas maneiras se podem dispor os doze alunos, de modo que os alunos da mesma disciplina fiquem juntos?

(A) 40 320 **(B)** 80 640 **(C)** 967 680 **(D)** 1 935 360

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO (IAVE 2018)

3.1. .... **8 pontos**

Opção **(D)**

PROPOSTA RESOLUÇÃO APM

3.

3. 1.

Os doze alunos vão dispor-se lado a lado em linha reta para tirar uma fotografia.

Há $4!$ formas diferentes de os alunos de Espanhol se disporem juntos lado a lado.

Há $8!$ formas diferentes de os alunos de Inglês se disporem juntos lado a lado.

Há 2 maneiras diferentes de estes grupos de alunos se disporem lado a lado. O grupo de alunos de Espanhol à esquerda e o grupo de Inglês à direita ou vice-versa.

Assim, o número pedido é dado por: $2 \times 4! \times 8! = 1\,935\,360$.

A resposta correta é a opção (**D**).

<table>
<tr><th colspan="4">MODELO DE ANÁLISE PARA CATEGORIZAÇÃO DA QUESTÃO</th></tr>
<tr><th>Lista dos tópicos considerados na construção das soluções hipotéticas
(Bivar et al., 2015)</th><th colspan="2">Parâmetros de análise:
Tópicos e Procedimentos</th><th>Categorização</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Domínio I: Cálculo Combinatório

• “Permutações. Fatorial de um número inteiro não negativo”

• “Aplicações do cálculo de cardinais de conjuntos, contagens, arranjos e combinações”</td><td rowspan="2">Tópicos</td><td>Quantidade
Dois ou mais tópicos foram utilizados</td><td rowspan="4">Categoria C (Multi-estrutural)</td></tr>
<tr><td>Nível
Adequado – Foram utilizados tópicos de nível análogo ao do programa</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Procedimentos</td><td>Grau de inovação
Réplica – Envolve hipóteses de trabalho e estratégias descritas nos programas</td></tr>
<tr><td>Integração dos procedimentos
Compartimentados – Os procedimentos mostram a aplicação de vários conceitos e informações de forma isolada e sucessiva</td></tr>
<tr><td colspan="4">Conclusões - Tipo 2
A conclusão decorre exclusivamente dos procedimentos matemáticos envolvidos na resolução</td></tr>
</table>

Figura 82 - Modelo de análise para categorização da questão 3.1, CI, exame 2018

QUESTÃO

3.2. Relativamente a essa escola, sabe-se que:

- o número de alunos que estudam Espanhol é igual ao número de alunos que estudam Inglês;
- o número de alunos que estudam, pelo menos, uma das duas línguas é o quádruplo do número de alunos que estudam as duas línguas.

Escolhe-se, ao acaso, um aluno dessa escola.

Determine a probabilidade de esse aluno estudar Inglês, sabendo que estuda Espanhol.

Apresente o resultado na forma de percentagem.

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO (IAVE 2018)

3.2. .... **13 pontos**

Designemos por E o acontecimento «o aluno escolhido estuda Espanhol» e por I o acontecimento «o aluno escolhido estuda Inglês».

Identificar o pedido com $P(I\|E)$	2 pontos
Escrever $P(E)=P(I)$	2 pontos
Escrever $P(E\cup I)=4P(E\cap I)$ (ou equivalente)	3 pontos
Obter $5P(E\cap I)=2P(E)$	2 pontos
Escrever $P(I\|E)=\dfrac{P(E\cap I)}{P(E)}$	1 ponto
Obter $P(I\|E)=\dfrac{2}{5}$	2 pontos
Responder ao problema (40%)	1 ponto

PROPOSTA RESOLUÇÃO APM

3. 2.

Designemos o acontecimento "o aluno escolhido estuda Espanhol" por E e o acontecimento "o aluno escolhido estuda Inglês" por I.

Sabemos que:

- $P(E)=P(I)$, pois o número de alunos que estuda Espanhol é igual ao número de alunos que estuda Inglês. **(1)**
- $P(E\cup I)=4\times P(E\cap I)$, pois o número de alunos que estudam pelo menos uma das duas línguas é o quádruplo do número de alunos que estudam as duas línguas. **(2)**

Pretende-se determinar a probabilidade de esse aluno estudar Inglês, sabendo que estuda Espanhol, ou seja, $P(I\,|\,E)$.

Como $P(E\cup I)=P(E)+P(I)-P(E\cap I)$ e tendo em conta **(1)** e **(2)**, temos:

$$4\times P(E\cap I)=P(E)+P(I)-P(E\cap I)\Leftrightarrow 5\times P(E\cap I)=P(E)+P(E)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5\,P(E\cap I)=2P(E)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(E\cap I)=\frac{2}{5}P(E)$$

Assim, $P(I\,|\,E)=\dfrac{P(E\cap I)}{P(E)}=\dfrac{\frac{2}{5}\times P(E)}{P(E)}=\dfrac{2}{5}=0{,}4$, ou seja, 40%.

Logo, a probabilidade pedida é: 40%.

<table>
<tr><th colspan="4">MODELO DE ANÁLISE PARA CATEGORIZAÇÃO DA QUESTÃO</th></tr>
<tr><td>Lista dos tópicos considerados na construção das soluções hipotéticas
(Bivar et al., 2015)</td><td colspan="2">Parâmetros de análise:
Tópicos e Procedimentos</td><td>Categorização</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Domínio II: Probabilidades
• “Acontecimentos equiprováveis”
• “Probabilidade condicionada”
• “Probabilidade da diferença e da união de acontecimentos”</td><td rowspan="2">Tópicos</td><td>Quantidade
Dois ou mais tópicos foram utilizados</td><td rowspan="4">Categoria C (Multi-estrutural)</td></tr>
<tr><td>Nível
Adequado – Foram utilizados tópicos de nível análogo ao do programa</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Procedimentos</td><td>Grau de inovação
Réplica – Envolve hipóteses de trabalho e estratégias descritas nos programas</td></tr>
<tr><td>Integração dos procedimentos
Compartimentados – Os procedimentos mostram a aplicação de vários conceitos e informações de forma isolada e sucessiva</td></tr>
<tr><td colspan="4">Conclusões - Tipo 1
Os elementos que contribuíram para a obtenção da conclusão foram harmonizados</td></tr>
</table>

Figura 83 - Modelo de análise para categorização da questão 3.2, CI, exame 2018

QUESTÃO

4. Um feixe de luz incide perpendicularmente sobre um conjunto de três placas sobrepostas, homogéneas e iguais, feitas de um material transparente. A Figura 3 ilustra a situação.

Admita que a potência, L, da luz transmitida, após atravessar o conjunto de placas, é dada por

$$L = I(1-R)^6 e^{-3\lambda}$$

em que:

- I é a potência da luz incidente;
- R é o coeficiente de reflexão do material $(0 < R < 1)$
- λ é o coeficiente de absorção do material, por centímetro $(\lambda > 0)$

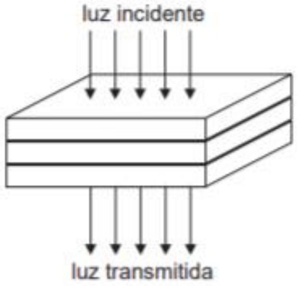


Figura 3

Relativamente ao material de que as placas são feitas, sabe-se que o coeficiente de reflexão, R, e o coeficiente de absorção, λ, têm o mesmo valor numérico.

Sabe-se ainda que a potência da luz transmitida é igual a metade da potência da luz incidente.

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, o valor comum dos coeficientes de absorção e de reflexão do material, sabendo-se que esse valor existe e é único.

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

- equacione o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação;
- apresente o valor pedido arredondado às milésimas.

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO (IAVE 2018)

4. .... **12 pontos**

Equacionar o problema $\left((1-\lambda)^6 e^{-3\lambda} = \frac{1}{2}\ \text{ou equivalente}\right)$ .... 6 pontos

Reproduzir o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que permite(m) resolver a equação (**ver nota**) .... 3 pontos

Apresentar o valor pedido $(0{,}075)$ .... 3 pontos

Nota – Se não for apresentado o referencial, a pontuação a atribuir nesta etapa é desvalorizada em 1 ponto.

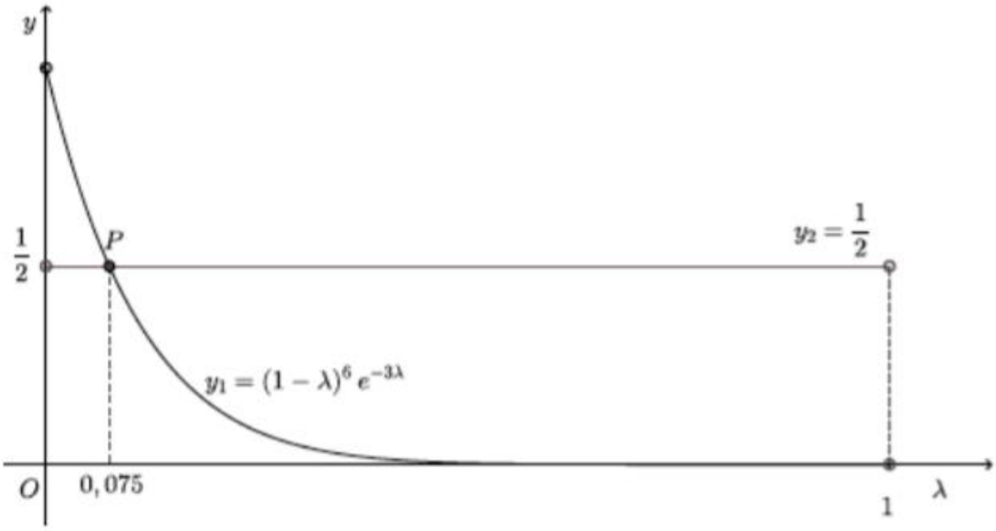
PROPOSTA RESOLUÇÃO APM

4.

Dado que $R=\lambda$ **e** $L=\dfrac{I}{2}$ e como $L=I\left(1-R\right)^{6}e^{-3\lambda}$, então temos que

$\dfrac{I}{2}=I\left(1-\lambda\right)^{6}e^{-3\lambda}\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}=\left(1-\lambda\right)^{6}e^{-3\lambda}$.

Recorrendo às capacidades da calculadora gráfica, representamos, numa janela adequada, a curva correspondente a $y_1=\left(1-\lambda\right)^{6}e^{-3\lambda}$ e a reta de equação $y_2=\dfrac{1}{2}$.



Usando a função da calculadora gráfica para determinar valores aproximados das coordenadas do ponto de intersecção dos dois gráficos, obtemos um valor aproximado (às milésimas) da abcissa do ponto $P: x_P\approx 0{,}075$.

<table>
<tr><th colspan="4">MODELO DE ANÁLISE PARA CATEGORIZAÇÃO DA QUESTÃO</th></tr>
<tr><th>Lista dos tópicos considerados na construção das soluções hipotéticas
(Bivar et al., 2015)</th><th colspan="2">Parâmetros de análise:
Tópicos e Procedimentos</th><th>Categorização</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Domínio III: Funções reais de variável real
• “Resolução aproximada de equações da forma f(x)=g(x) utilizando a calculadora gráfica”

Domínio V: Funções exponenciais e funções logarítmicas
• “Função exponencial e^x “</td><td rowspan="2">Tópicos</td><td>Quantidade
Dois ou mais tópicos foram utilizados</td><td rowspan="4">Categoria C (Multi-estrutural)</td></tr>
<tr><td>Nível
Adequado – Foram utilizados tópicos de nível análogo ao do programa</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Procedimentos</td><td>Grau de inovação
Réplica – Envolve hipóteses de trabalho e estratégias descritas nos programas</td></tr>
<tr><td>Integração dos procedimentos
Compartimentados – Os procedimentos mostram a aplicação de vários conceitos e informações de forma isolada e sucessiva</td></tr>
<tr><td colspan="4">Conclusões
Tipo 2
A conclusão decorre exclusivamente dos procedimentos matemáticos envolvidos na resolução</td></tr>
</table>

Figura 84 - Modelo de análise para categorização da questão 4, CI, exame 2018

QUESTÃO

5. Para um certo número real x, pertencente ao intervalo $\left]0, \frac{\pi}{12}\right[$, o número complexo $z = (\cos x + i \operatorname{sen} x)^{10}$ verifica a condição $\operatorname{Im}(z) = \frac{1}{3}\operatorname{Re}(z)$

Qual é o valor de x arredondado às centésimas?

(A) $0{,}02$ **(B)** $0{,}03$ **(C)** $0{,}12$ **(D)** $0{,}13$

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO (IAVE 2018)

5. .... **8 pontos**

Opção **(B)**

PROPOSTA RESOLUÇÃO APM

5.

Pretende-se determinar o valor de $x \in \left]0, \frac{\pi}{12}\right[$ para o qual o número complexo

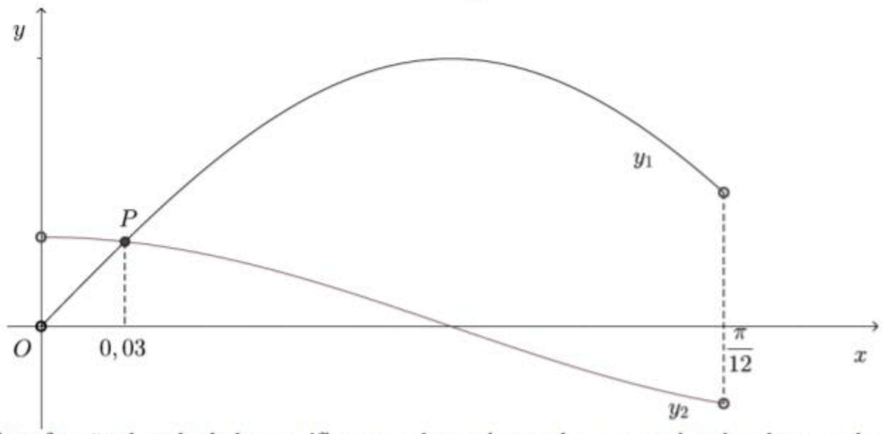
$z = (\cos x + i \operatorname{sen} x)^{10}$ verifica a condição $Im(z) = \frac{1}{3}Re(z)$.

Na forma trigonométrica temos $z = \left(e^{ix}\right)^{10}$ e aplicando a fórmula de Moivre temos $z = e^{i(10x)}$,

ou seja, $z = \cos(10x) + i\operatorname{sen}(10x)$.

Assim, $Im(z) = \frac{1}{3}Re(z) \Leftrightarrow \operatorname{sen}(10x) = \frac{1}{3}\cos(10x)$.

Recorrendo às capacidades da calculadora gráfica, representamos, numa janela adequada, as curvas correspondentes a $y_1 = \operatorname{sen}(10x)$ e a $y_2 = \frac{1}{3}\cos(10x)$.



Usando a função da calculadora gráfica para determinar valores aproximados das coordenadas do ponto de intersecção dos dois gráficos, obtemos um valor aproximado (às centésimas) da abcissa do ponto $P: x_P \approx 0{,}03$.

A resposta correta é a opção (**B**).

Nota: Na análise desta questão foi necessário relacionar os resultados já obtidos com a aplicação de forma sucessiva do conhecimento de complexos, com as funções, nomeadamente a utilização da calculadora gráfica na resolução da equação f(x)=g(x) para obter o valor de x.

<table>
<tr><th colspan="4">MODELO DE ANÁLISE PARA CATEGORIZAÇÃO DA QUESTÃO</th></tr>
<tr><th>Lista dos tópicos considerados na construção das soluções hipotéticas
(Bivar et al., 2015)</th><th colspan="2">Parâmetros de análise:
Tópicos e Procedimentos</th><th>Categorização</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Domínio VII: Números Complexos
• “Forma algébrica da representação dos números complexos. Parte real e parte imaginária”
• “Exponencial complexa $e^{i\theta}$=cos θ + isenθ, com θ ϵ IR
• “Representação trigonométrica de um número complexo”
• Fórmula de De Moivre: $(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)^n$ =cos(nθ) + isen(nθ)

Domínio III: Funções reais de variável real
• “Resolução aproximada de equações da forma f(x)=g(x) utilizando a calculadora gráfica”
• “Resolução de problemas envolvendo equações de planos e de retas no espaço”</td><td rowspan="2">Tópicos</td><td>Quantidade
Dois ou mais tópicos foram utilizados</td><td rowspan="4">Categoria B (Relacional)</td></tr>
<tr><td>Nível
Adequado – Foram utilizados tópicos de nível análogo ao do programa</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Procedimentos</td><td>Grau de inovação
Réplica – Envolve hipóteses de trabalho e estratégias descritas nos programas</td></tr>
<tr><td>Integração dos procedimentos
Interligados – Os procedimentos evidenciam a aplicação de vários conceitos e informações de forma integrada e simultânea</td></tr>
<tr><td colspan="4">Conclusões
Tipo 1
Os elementos que contribuíram para a obtenção da conclusão foram harmonizados</td></tr>
</table>

Figura 85 - Modelo de análise para categorização da questão 5, CI, exame 2018

QUESTÃO

6. Seja a um número real.

Sabe-se que a, $a+6$ e $a+18$ são três termos consecutivos de uma progressão geométrica.

Relativamente a essa progressão geométrica, sabe-se ainda que a soma dos sete primeiros termos é igual a 381

Determine o primeiro termo dessa progressão.

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO (IAVE 2018)

6. .... **12 pontos**

Reconhecer que a razão da progressão é dada, em função de a, por

$\frac{a+6}{a}$ $\left(\text{ou por } \frac{a+18}{a+6}\right)$ .... 3 pontos

Escrever $\frac{a+6}{a} = \frac{a+18}{a+6}$ (ou equivalente) .... 2 pontos

Obter o valor de a .... 2 pontos

Obter o valor da razão da progressão .... 2 pontos

Escrever $381 = u_1 \times \frac{1-2^7}{1-2}$ .... 1 ponto

Determinar o termo pedido (3) .... 2 pontos

Nota – Se for apresentada apenas a condição $381 = u_1 \times \frac{1-\left(\frac{a+6}{a}\right)^7}{1-\frac{a+6}{a}}$ (ou equivalente),

a classificação máxima a atribuir à resposta é 4 pontos.

PROPOSTA RESOLUÇÃO APM

6.

Como a, $a+6$ e $a+18$ são três termos consecutivos de uma progressão geométrica tem-se $\frac{a+6}{a} = \frac{a+18}{a+6}$, com $a \neq 0$ e $a \neq -6$, sendo $\frac{a+6}{a}$ a razão, r, da progressão.

Sendo $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, -6\}$, vem:

$$\frac{a+6}{a} = \frac{a+18}{a+6} \Leftrightarrow (a+6)^2 = a(a+18) \Leftrightarrow a^2 + 12a + 36 = a^2 + 18a \Leftrightarrow 6a = 36 \Leftrightarrow a = 6.$$

Então, $r = \frac{6+6}{6} = 2$.

Seja (u_n) essa progressão.

Como a soma dos sete primeiros termos da progressão geométrica é igual a 381 vem:

$$u_1 \times \frac{1-2^7}{1-2} = 381 \Leftrightarrow 127u_1 = 381 \Leftrightarrow u_1 = \frac{381}{127} \Leftrightarrow u_1 = 3.$$

<table>
<tr><th colspan="4">MODELO DE ANÁLISE PARA CATEGORIZAÇÃO DA QUESTÃO</th></tr>
<tr><td>Lista dos tópicos considerados na construção das soluções hipotéticas
(Bivar et al., 2015)</td><td colspan="2">Parâmetros de análise:
Tópicos e Procedimentos</td><td>Categorização</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Domínio III: Sucessões
• “Progressões geométricas: termos gerais e somas de n termos consecutivos (n ϵ IN)”
• “Resolução de problemas envolvendo progressões aritméticas e geométricas”</td><td rowspan="2">Tópicos</td><td>Quantidade
Dois ou mais tópicos foram utilizados</td><td rowspan="4">Categoria C (Multi-estrutural)</td></tr>
<tr><td>Nível
Adequado – Foram utilizados tópicos de nível análogo ao do programa</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Procedimentos</td><td>Grau de inovação
Réplica – Envolve hipóteses de trabalho e estratégias descritas nos programas</td></tr>
<tr><td>Integração dos procedimentos
Compartimentados – Os procedimentos mostram a aplicação de vários conceitos e informações de forma isolada e sucessiva</td></tr>
<tr><td colspan="4">Conclusões
Tipo 2
A conclusão decorre exclusivamente dos procedimentos matemáticos envolvidos na resolução</td></tr>
</table>

Figura 86 - Modelo de análise para categorização da questão 6, CI, exame 2018

QUESTÃO

7. Na Figura 4, está representada, num referencial o.n. xOy, uma circunferência de centro na origem e que passa nos pontos A, B, C, D, E e F

Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao semieixo positivo Ox e tem abcissa igual a 2
- os pontos B e F têm ambos abcissa igual a 1
- os pontos C, D e E são, respetivamente, os simétricos dos pontos B, A e F relativamente ao eixo Oy

Qual das condições seguintes define o domínio plano representado a sombreado?

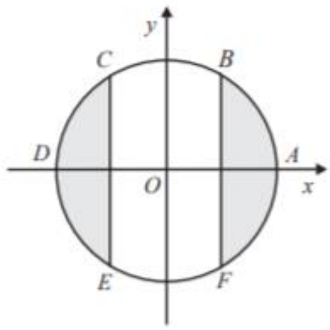


Figura 4

(A) $x^2 + y^2 \leq 2 \ \wedge \ |x| \geq 1$

(B) $x^2 + y^2 \leq 4 \ \wedge \ |x| \leq 1$

(C) $x^2 + y^2 \leq 4 \ \wedge \ |x| \geq 1$

(D) $x^2 + y^2 \leq 2 \ \wedge \ |x| \leq 1$

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO (IAVE 2018)

7. .... **8 pontos**

Opção **(C)**

PROPOSTA RESOLUÇÃO APM

7.

Sendo o ponto O o centro e o ponto A de abcissa 2, então o raio da circunferência é 2.

Assim, a condição que define o círculo é dada por: $x^2 + y^2 \leq 4$.

Como os pontos B e F têm abcissa 1, os simétricos em relação ao eixo Oy , C e E , têm abcissa -1 .

O semiplano fechado à direita da reta BF reunido com o semiplano fechado à esquerda da reta CE é descrito por $|x| \geq 1$.

A resposta correta é a opção (**C**).

<table>
<tr><th colspan="4">MODELO DE ANÁLISE PARA CATEGORIZAÇÃO DA QUESTÃO</th></tr>
<tr><th>Lista dos tópicos considerados na construção das soluções hipotéticas
(Bivar et al., 2015)</th><th colspan="2">Parâmetros de análise:
Tópicos e Procedimentos</th><th>Categorização</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Domínio III: Geometria Analítica
• “Referenciais ortonormados, no plano e no espaço”
• “Inequações cartesianas de círculos, no plano, e de esferas, no espaço””
• “Inequações cartesianas de semiplanos.”</td><td rowspan="2">Tópicos</td><td>Quantidade
Dois ou mais tópicos foram utilizados</td><td rowspan="4">Categoria C
(Multi-estrutural)</td></tr>
<tr><td>Nível
Adequado – Foram utilizados tópicos de nível análogo ao do programa</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Procedimentos</td><td>Grau de inovação
Réplica – Envolve hipóteses de trabalho e estratégias descritas nos programas</td></tr>
<tr><td>Integração dos procedimentos
Compartimentados – Os procedimentos mostram a aplicação de vários conceitos e informações de forma isolada e sucessiva</td></tr>
<tr><td colspan="4">Conclusões
Tipo 2
A conclusão decorre exclusivamente dos procedimentos matemáticos envolvidos na resolução</td></tr>
</table>

Figura 87 - Modelo de análise para categorização da questão 7, CI, exame 2018

Caderno II

QUESTÃO

8.

Os **dois** itens que se apresentam a seguir são itens em alternativa.

O **item 8.1.** integra-se nos Programas de Matemática A, de 10.º, 11.º e 12.º anos, homologados em 2001 e 2002 (**P2001/2002**).

O **item 8.2.** integra-se no Programa e Metas Curriculares de Matemática A, homologado em 2015 (**PMC2015**).

Responda apenas a um dos dois itens.

Na sua folha de respostas, identifique claramente o item selecionado.

P2001/2002

8.1. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, a reta r definida pela condição

$$\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{-1} \wedge z=3$$

Qual das seguintes equações vetoriais define a reta r ?

(A) $(x,y,z)=(3,0,3)+k(2,-1,0)\,,\quad k\in\mathbb{R}$

(B) $(x,y,z)=(3,0,3)+k(2,-1,3)\,,\quad k\in\mathbb{R}$

(C) $(x,y,z)=(-1,2,0)+k(2,-1,3)\,,\quad k\in\mathbb{R}$

(D) $(x,y,z)=(-1,2,0)+k(2,-1,0)\,,\quad k\in\mathbb{R}$

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO (IAVE 2018)

8.1. .... **8 pontos**

Opção **(A)**

PROPOSTA RESOLUÇÃO APM

8.

8.1. **P2001/2002**

Tendo em conta que $(2,-1,0)$ são as coordenadas de um vetor diretor da reta r e que qualquer vetor diretor da reta é colinear com este vetor, então podemos eliminar as opções (B) e (C).

Além disso, o ponto $(-1,2,0)$ não pertence à reta r, pois qualquer ponto da reta tem cota igual a 3. Podemos, assim, eliminar a opção (D).

Logo, a resposta correta é a opção **(A)**.

Note-se que o ponto $(3, 0, 3)$ pertence à reta, pois $\frac{3+1}{2} = \frac{0-2}{-1} \wedge 3 = 3$.

<table>
<tr><th colspan="4">MODELO DE ANÁLISE PARA CATEGORIZAÇÃO DA QUESTÃO</th></tr>
<tr><th>Lista dos tópicos considerados na construção das soluções hipotéticas
(Carvalho e Silva, 2001)</th><th colspan="2">Parâmetros de análise:
Tópicos e Procedimentos</th><th>Categorização</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Tema I: Geometria no plano e no espaço I
• “Equação vetorial da reta no plano e no espaço.”
• “Sistema de equações paramétricas de uma reta”</td><td rowspan="2">Tópicos</td><td>Quantidade
Dois ou mais tópicos foram utilizados</td><td rowspan="4">Categoria C (Multi-estrutural)</td></tr>
<tr><td>Nível
Adequado – Foram utilizados tópicos de nível análogo ao do programa</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Procedimentos</td><td>Grau de inovação
Réplica – Envolve hipóteses de trabalho e estratégias descritas nos programas</td></tr>
<tr><td>Integração dos procedimentos
Compartimentados – Os procedimentos mostram a aplicação de vários conceitos e informações de forma isolada e sucessiva</td></tr>
<tr><td colspan="4">Conclusões
Tipo 2
A conclusão decorre exclusivamente dos procedimentos matemáticos envolvidos na resolução</td></tr>
</table>

Figura 88 - Modelo de análise para categorização da questão 8.1, CII, exame 2018

QUESTÃO

PMC2015

8.2. Qual é o valor de $\arcsin(1) + \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$?

(A) $\frac{7\pi}{6}$ **(B)** $\frac{\pi}{6}$ **(C)** $\frac{3\pi}{4}$ **(D)** $\frac{\pi}{4}$

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO (IAVE 2018)

8.2. .... **8 pontos**

Opção **(A)**

PROPOSTA RESOLUÇÃO APM

8.2. $\boxed{\text{PMC2015}}$

Sabe-se que $arc\operatorname{sen}(1)=\frac{\pi}{2}$, pois a função $arc\operatorname{sen} x$ está definida em $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ e pretende-se descobrir a amplitude do ângulo α tal que $\operatorname{sen}\alpha=1$.

Além disso, $arc\cos\left(-\frac{1}{2}\right)=\pi-\frac{\pi}{3}$, pois a função $arc\cos x$ está definida em $\left[0,\pi\right]$ e, da mesma forma que o anterior, pretende-se descobrir o ângulo β tal que $\cos\beta=-\frac{1}{2}$.

Logo, $arc\operatorname{sen}(1)+arc\cos\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{2}+\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{7\pi}{6}$.

A resposta correta é a opção **(A)**.

<table>
<tr><th colspan="4">MODELO DE ANÁLISE PARA CATEGORIZAÇÃO DA QUESTÃO</th></tr>
<tr><th>Lista dos tópicos considerados na construção das soluções hipotéticas
(Bivar et al., 2015)</th><th colspan="2">Parâmetros de análise:
Tópicos e Procedimentos</th><th>Categorização</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Domínio I: Trigonometria e funções trigonométricas
• “Funções trigonométricas inversas: arco-seno, arco-cosseno e arco-tangente”
• “Equações trigonométricas do tipo: sinx=k, cosx=k e tgx=k”</td><td rowspan="2">Tópicos</td><td>Quantidade
Dois ou mais tópicos foram utilizados</td><td rowspan="4">Categoria C (Multi-estrutural)</td></tr>
<tr><td>Nível
Adequado – Foram utilizados tópicos de nível análogo ao do programa</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Procedimentos</td><td>Grau de inovação
Réplica – Envolve hipóteses de trabalho e estratégias descritas nos programas</td></tr>
<tr><td>Integração dos procedimentos
Compartimentados – Os procedimentos mostram a aplicação de vários conceitos e informações de forma isolada e sucessiva</td></tr>
<tr><td colspan="4">Conclusões - Tipo 2
A conclusão decorre exclusivamente dos procedimentos matemáticos envolvidos na resolução</td></tr>
</table>

Figura 89 - Modelo de análise para categorização da questão 8.2, CII, exame 2018

QUESTÃO

9. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $w = 1 + \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{3}\, i^5}{1+2i}$

Sabe-se que w é uma raiz quarta de um certo complexo z

Determine a raiz quarta de z cujo afixo (imagem geométrica) pertence ao primeiro quadrante.

Apresente o resultado na forma trigonométrica, com argumento pertencente ao intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO (IAVE 2018)

9. .... **12 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Identificar i^5 com i .... 1 ponto

Obter $w = 1 - \sqrt{3}\, i$ .... 4 pontos

Determinar $w \times i$ na forma algébrica .... 3 pontos

Determinar o número complexo pedido na forma pedida $\left(2\operatorname{cis}\frac{\pi}{6} \text{ ou } 2e^{i\frac{\pi}{6}}\right)$ .... 4 pontos

2.º Processo

Identificar i^5 com i .... 1 ponto

Obter $w = 1 - \sqrt{3}\, i$ .... 4 pontos

Escrever w na forma trigonométrica .... 3 pontos

Determinar o número complexo pedido na forma pedida $\left(2\operatorname{cis}\frac{\pi}{6} \text{ ou } 2e^{i\frac{\pi}{6}}\right)$ .... 4 pontos

PROPOSTA RESOLUÇÃO APM

9.

Comecemos por simplificar w,

$$w = 1 + \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{3}\, i^5}{1+2i} = 1 + \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{3}\, i}{1+2i} \times \frac{1-2i}{1-2i} = 1 + \frac{2\sqrt{3} - 4\sqrt{3}\, i - \sqrt{3}\, i + 2\sqrt{3}\, i^2}{1^2 - (2i)^2} =$$

$$= 1 + \frac{2\sqrt{3} - 5\sqrt{3}i - 2\sqrt{3}}{1 - 4i^2} = 1 - \frac{5\sqrt{3}i}{5} = 1 - \sqrt{3}i$$

Escrevendo w na forma trigonométrica, temos que $1 - \sqrt{3}i = r e^{i\theta}$, onde:

- $r = \left|1 - \sqrt{3}\, i\right| = \sqrt{1^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

- $\operatorname{tg}\theta = \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3}$, como o afixo de $1 - \sqrt{3}i$ pertence ao 4º Q., θ pertence ao 4º Q.. Logo,

$\theta = -\frac{\pi}{3}$ (argumento principal).

Assim, $w = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$.

Como w é uma raiz quarta de z, as restantes raízes quartas de z são:

$2e^{i\left(-\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{4}\right)} = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$; $2e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{4}\right)} = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$ e $2e^{i\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{2\pi}{4}\right)} = 2e^{i\frac{7\pi}{6}}$

Como se pretende a raiz quarta de z cujo afixo pertence ao primeiro quadrante, o número complexo pedido é $2e^{i\frac{\pi}{6}}$.

Nota: Os tópicos são os mesmos nas duas propostas, pelo que se apresenta uma única categorização:

<table>
<tr><th colspan="4">MODELO DE ANÁLISE PARA CATEGORIZAÇÃO DA QUESTÃO</th></tr>
<tr><th>Lista dos tópicos considerados na construção das soluções hipotéticas
(Bivar et al., 2015)</th><th colspan="2">Parâmetros de análise:
Tópicos e Procedimentos</th><th>Categorização</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Domínio VII: Números Complexos – 12.º ano
• “Número i”
• “Forma algébrica da representação dos números complexos. Parte real e parte imaginária”
• “Módulo de um número complexo”
• “Representação trigonométrica de um número complexo”
• “Exponencial complexa $e^{i\theta}$=cos θ + isenθ, com θ ϵ IR
• “Raízes n-ésimas de números complexos”

Domínio I: Trigonometria e funções trigonométricas – 11.º ano
• “Razões trigonométricas de ângulos generalizados”</td><td rowspan="2">Tópicos</td><td>Quantidade
Dois ou mais tópicos foram utilizados</td><td rowspan="4">Categoria C (Multi-estrutural)</td></tr>
<tr><td>Nível
Adequado – Foram utilizados tópicos de nível análogo ao do programa</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Procedimentos</td><td>Grau de inovação
Réplica – Envolve hipóteses de trabalho e estratégias descritas nos programas</td></tr>
<tr><td>Integração dos procedimentos
Compartimentados – Os procedimentos mostram a aplicação de vários conceitos e informações de forma isolada e sucessiva</td></tr>
<tr><td colspan="4">Conclusões - Tipo 1
Os elementos que contribuíram para a obtenção da conclusão foram harmonizados</td></tr>
</table>

Figura 90 - Modelo de análise para categorização da questão 8, CII, exame 2018

QUESTÃO

10.

Os **dois** itens que se apresentam a seguir são itens em alternativa.

O **item 10.1.** integra-se nos Programas de Matemática A, de 10.º, 11.º e 12.º anos, homologados em 2001 e 2002 (**P2001/2002**).

O **item 10.2.** integra-se no Programa e Metas Curriculares de Matemática A, homologado em 2015 (**PMC2015**).

Responda apenas a um dos dois itens.

Na sua folha de respostas, identifique claramente o item selecionado.

P2001/2002

10.1. Num saco, encontram-se quatro bolas indistinguíveis ao tato, numeradas de 0 a 3

Retiram-se, ao acaso, sucessivamente e sem reposição, duas bolas do saco.

Seja X a variável aleatória «produto dos números saídos».

Para um certo valor de k, tem-se que $P(X=k)=\frac{1}{2}$

Qual é o valor de k ?

(A) 6 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 0

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO (IAVE 2018)

10.1. .... **8 pontos**

Opção **(D)**

PROPOSTA RESOLUÇÃO APM

10.

10.1. **P2001/2002**

Recorrendo a uma tabela de dupla entrada tem-se:

$\times$	**0**	**1**	**2**	**3**
0		0	0	0
1	0		2	3
2	0	2		6
3	0	3	6	

Assim, tem-se que $X=\{0,2,3,6\}$ e $P(X=0)=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$, $P(X=2)=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$, $P(X=3)=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$ e $P(X=6)=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$, pelo que $k=0$.

<table>
<tr><th colspan="4">MODELO DE ANÁLISE PARA CATEGORIZAÇÃO DA QUESTÃO</th></tr>
<tr><td>Lista dos tópicos considerados na construção das soluções hipotéticas
(Carvalho e Silva, 2002)</td><td colspan="2">Parâmetros de análise:
Tópicos e Procedimentos</td><td>Categorização</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Tema I: Probabilidades e combinatória
• “Experiência aleatória. Conjunto de resultados. Acontecimentos”
• “Definição clássica de probabilidade ou de Laplace”</td><td rowspan="2">Tópicos</td><td>Quantidade
Dois ou mais tópicos foram utilizados</td><td rowspan="4">Categoria C
(Multi-estrutural)</td></tr>
<tr><td>Nível
Adequado – Foram utilizados tópicos de nível análogo ao do programa</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Procedimentos</td><td>Grau de inovação
Réplica – Envolve hipóteses de trabalho e estratégias descritas nos programas</td></tr>
<tr><td>Integração dos procedimentos
Compartimentados – Os procedimentos mostram a aplicação de vários conceitos e informações de forma isolada e sucessiva</td></tr>
<tr><td colspan="4">Conclusões
Tipo 2
A conclusão decorre exclusivamente dos procedimentos matemáticos envolvidos na resolução</td></tr>
</table>

Figura 91 - Modelo de análise para categorização da questão 10.1, CII, exame 2018

QUESTÃO

PMC2015

10.2. Seja k um número real.

Considere a sucessão convergente (u_n) definida por $u_n=\left(\frac{n+k}{n}\right)^n$

Sabe-se que o limite de (u_n) é solução da equação $\ln\left(\frac{x}{e}\right)=3$

Qual é o valor de k ?

(A) $\frac{1}{4}$ **(B)** 3 **(C)** $\frac{1}{3}$ **(D)** 4

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO (IAVE 2018)

10.2. .... **8 pontos**

Opção **(D)**

PROPOSTA RESOLUÇÃO APM

10.2. $\boxed{\text{PMC2015}}$

$$\lim(u_n)=\lim\left(\frac{n+k}{n}\right)^n=\lim\left(\frac{n}{n}+\frac{k}{n}\right)^n=\lim\left(1+\frac{k}{n}\right)^n=e^k.$$

Como o limite da sucessão (u_n) é solução da equação $\ln\left(\frac{x}{e}\right)=3$ temos:

$$\ln\left(\frac{e^k}{e}\right)=3\Leftrightarrow\ln\left(e^{k-1}\right)=3\Leftrightarrow k-1=3\Leftrightarrow k=4$$

A resposta correta é a opção **(D)**.

<table>
<tr><th colspan="4">MODELO DE ANÁLISE PARA CATEGORIZAÇÃO DA QUESTÃO</th></tr>
<tr><th>Lista dos tópicos considerados na construção das soluções hipotéticas
(Bivar et al., 2015)</th><th colspan="2">Parâmetros de análise:
Tópicos e Procedimentos</th><th>Categorização</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Domínio III: Sucessões – 11.º ano
• “Operações com limites e situações indeterminadas”

Domínio V: Funções exponenciais e funções logarítmicas – 12.º ano
• “Sucessão de termo geral u_n=$(1+\frac{1}{n})^n$ “
• “Definição das funções exponenciais de base a e respetivas propriedades”
• “Monotonia, sinal, limites e propriedades algébricas dos logaritmos”</td><td rowspan="2">Tópicos</td><td>Quantidade
Dois ou mais tópicos foram utilizados</td><td rowspan="4">Categoria C (Multi-estrutural)</td></tr>
<tr><td>Nível
Adequado – Foram utilizados tópicos de nível análogo ao do programa</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Procedimentos</td><td>Grau de inovação
Réplica – Envolve hipóteses de trabalho e estratégias descritas nos programas</td></tr>
<tr><td>Integração dos procedimentos
Compartimentados – Os procedimentos mostram a aplicação de vários conceitos e informações de forma isolada e sucessiva</td></tr>
<tr><td colspan="4">Conclusões
Tipo 2
A conclusão decorre exclusivamente dos procedimentos matemáticos envolvidos na resolução</td></tr>
</table>

Figura 92 - Modelo de análise para categorização da questão 10.2, CII, exame 2018

QUESTÃO

11. Sejam a e b números reais superiores a 1 tais que $\ln b = 4\ln a$

Determine o conjunto dos números reais que são soluções da inequação $a^x \geq b^{\frac{1}{x}}$

Apresente a resposta usando a notação de intervalos de números reais.

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO (IAVE 2018)

11. .... **13 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Obter $b = a^4$ .... 2 pontos

Obter $a^x \geq a^{\frac{4}{x}}$ .... 2 pontos

Concluir que $a^x \geq a^{\frac{4}{x}} \Leftrightarrow x \geq \frac{4}{x}$ .... 2 pontos

Resolver a condição $x \geq \frac{4}{x}$ (**ver nota**) .... 7 pontos

Escrever $x \geq \frac{4}{x} \Leftrightarrow \frac{x^2-4}{x} \geq 0$ .... 1 ponto

Apresentar um quadro de sinais .... 4 pontos

Concluir que $x \in [-2,0[\cup [2,+\infty[$ .... 2 pontos

2.º Processo

Escrever $a^x \geq b^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow \ln(a^x) \geq \ln\left(b^{\frac{1}{x}}\right)$ .... 2 pontos

Escrever $\ln(a^x) \geq \ln\left(b^{\frac{1}{x}}\right) \Leftrightarrow x\ln a \geq \frac{1}{x}\ln b$ .... 1 ponto

Escrever $x\ln a \geq \frac{1}{x}\ln b \Leftrightarrow x\ln a \geq \frac{1}{x} \times 4\ln a$ .... 2 pontos

Escrever $x\ln a \geq \frac{1}{x} \times 4\ln a \Leftrightarrow x \geq \frac{4}{x}$ .... 1 ponto

Resolver a condição $x \geq \frac{4}{x}$ (**ver nota**) .... 7 pontos

Escrever $x \geq \frac{4}{x} \Leftrightarrow \frac{x^2-4}{x} \geq 0$ .... 1 ponto

Apresentar um quadro de sinais .... 4 pontos

Concluir que $x \in [-2,0[\cup [2,+\infty[$ .... 2 pontos

Nota – Se, erradamente, for considerada a equivalência $x \geq \frac{4}{x} \Leftrightarrow x^2 - 4 \geq 0$, a pontuação máxima a atribuir nesta etapa é 3 pontos.

PROPOSTA RESOLUÇÃO APM

11.

Comecemos por exprimir b em função de a:

$$\ln b = 4\ln a \Leftrightarrow \ln b = \ln\left(a^4\right) \Leftrightarrow b = a^4 .$$

Assim, temos:

$a^x \geq b^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow a^x \geq \left(a^4\right)^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow a^x \geq a^{\frac{4}{x}}$, como $a > 1$ a função exponencial é crescente, logo:

$$x \geq \frac{4}{x} \Leftrightarrow x - \frac{4}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 4}{x} \geq 0$$

Calculando os zeros do numerador e do denominador da fração $\frac{x^2-4}{x}$ e estudando a variação do sinal temos:

x	$-\infty$	-2		0		2	$+\infty$
$x^2 - 4$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{x^2-4}{x}$	$-$	0	$+$	n.d.	$-$	0	$+$

Conclui-se que o conjunto solução da condição $\frac{x^2-4}{x} \geq 0$ é $\left[-2, 0\right[\cup \left[2, +\infty\right[$.

Nota1: Os tópicos são os mesmos nas propostas de resolução apresentadas, pelo que se observa a mesma categorização.

<table>
<tr><th colspan="4">MODELO DE ANÁLISE PARA CATEGORIZAÇÃO DA QUESTÃO</th></tr>
<tr><td>Lista dos tópicos considerados na construção das soluções hipotéticas
(Bivar et al., 2015)</td><td colspan="2">Parâmetros de análise:
Tópicos e Procedimentos</td><td>Categorização</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Domínio V: Funções exponenciais e funções logarítmicas – 12.º ano
• “Monotonia, sinal, limites e propriedades algébricas dos logaritmos”
• “Definição das funções exponenciais de base a e respetivas propriedades”

Domínio IV: Funções reais de variável real – 11.º ano
• “Resolução de problemas envolvendo o estudo dos zeros e do sinal de funções racionais dadas por expressões da forma $\frac{\mathrm{P(x)}}{\mathrm{Q(x)}}$, onde P e Q são polinómios”</td><td rowspan="2">Tópicos</td><td>Quantidade
Dois ou mais tópicos foram utilizados</td><td rowspan="4">Categoria C (Multi-estrutural)</td></tr>
<tr><td>Nível
Adequado – Foram utilizados tópicos de nível análogo ao do programa</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Procedimentos</td><td>Grau de inovação
Réplica – Envolve hipóteses de trabalho e estratégias descritas nos programas</td></tr>
<tr><td>Integração dos procedimentos
Compartimentados – Os procedimentos mostram a aplicação de vários conceitos e informações de forma isolada e sucessiva</td></tr>
<tr><td colspan="4">Conclusões
Tipo 1
Os elementos que contribuíram para a obtenção da conclusão foram harmonizados</td></tr>
</table>

Figura 93 - Modelo de análise para categorização da questão 11, CII, exame 2018

QUESTÃO

12. Seja g a função, de domínio $]-\infty, \pi]$, definida por

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{2x}-1}{4x} & \text{se } x < 0 \\ \dfrac{1}{2-\operatorname{sen}(2x)} & \text{se } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

12.1. Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) A função g não tem zeros.

(B) A função g tem um único zero.

(C) A função g tem exatamente dois zeros.

(D) A função g tem exatamente três zeros.

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO (IAVE 2018)

12.1. .... **8 pontos**

Opção **(A)**

PROPOSTA RESOLUÇÃO APM

12.

12.1.

Para obtermos os zeros da função g em $\mathbb{R}^-$, igualamos a zero o primeiro ramo da função:

$$\frac{e^{2x}-1}{4x}=0 \Leftrightarrow e^{2x}-1=0 \wedge 4x \neq 0 \Leftrightarrow e^{2x}=1 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow 2x=0 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow x=0 \wedge x \neq 0 .$$

Concluímos que, a função g em $\mathbb{R}^-$, não tem zeros.

Em $\left[0, \pi\right]$, consideramos o segundo ramo:

$\frac{1}{2-\operatorname{sen}(2x)}=0 \Leftrightarrow 1=0 \wedge 2-\operatorname{sen}(2x) \neq 0$. Concluímos que, a função g no intervalo $\left[0, \pi\right]$, não tem zeros.

Logo, não tem zeros no seu domínio.

A resposta correta é a opção **(A)**.

<table>
<tr><th colspan="4">MODELO DE ANÁLISE PARA CATEGORIZAÇÃO DA QUESTÃO</th></tr>
<tr><td>Lista dos tópicos considerados na construção das soluções hipotéticas
(Bivar et al., 2015)</td><td colspan="2">Parâmetros de análise:
Tópicos e Procedimentos</td><td>Categorização</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Domínio IV: Funções reais de variável real – 10.º ano
• “Extremos e raízes de uma função”

Domínio V: Funções exponenciais e funções logarítmicas – 12.º ano
• “Monotonia, sinal, limites e propriedades algébricas dos logaritmos”
• “Definição das funções exponenciais de base a e respetivas propriedades”</td><td rowspan="2">Tópicos</td><td>Quantidade
Dois ou mais tópicos foram utilizados</td><td rowspan="4">Categoria C (Multi-estrutural)</td></tr>
<tr><td>Nível
Adequado – Foram utilizados tópicos de nível análogo ao do programa</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Procedimentos</td><td>Grau de inovação
Réplica – Envolve hipóteses de trabalho e estratégias descritas nos programas</td></tr>
<tr><td>Integração dos procedimentos
Compartimentados – Os procedimentos mostram a aplicação de vários conceitos e informações de forma isolada e sucessiva</td></tr>
<tr><td colspan="4">Conclusões
Tipo 1
Os elementos que contribuíram para a obtenção da conclusão foram harmonizados</td></tr>
</table>

Figura 94 - Modelo de análise para categorização da questão 12.1, CII, exame 2018

QUESTÃO

12.2. Averigue se a função g é contínua no ponto 0

Justifique a sua resposta.

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO (IAVE 2018)

12.2. .... **13 pontos**

Determinar $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)$ .... 5 pontos

Escrever $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{e^{2x}-1}{4x}$ .... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{e^{2x}-1}{4x} = \frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{e^{2x}-1}{2x}$ .... 2 pontos

Escrever $\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{e^{2x}-1}{2x} \underset{y=2x}{=} \frac{1}{2}\lim\limits_{y\to 0^-} \frac{e^{y}-1}{y}$ .... 1 ponto

Obter $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = \frac{1}{2}$ .... 1 ponto

Determinar $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ .... 2 pontos

Escrever $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{2-\operatorname{sen}(2x)}$ .... 1 ponto

Obter $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \frac{1}{2}$ .... 1 ponto

Obter $g(0) = \frac{1}{2}$ .... 2 pontos

Justificar a continuidade da função g no ponto 0 («A função g é contínua no ponto 0, porque existe $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$» **OU** «A função g é contínua no ponto 0, porque $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = g(0)$») .... 4 pontos

PROPOSTA RESOLUÇÃO APM

12.2.

Para averiguar se a função g é contínua em $x=0$, temos que verificar se $g(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} g(x)$.

- $g(0) = \frac{1}{2-\operatorname{sen} 0} = \frac{1}{2-0} = \frac{1}{2}$;
- $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \frac{1}{2-\operatorname{sen} 0} = \frac{1}{2-0} = \frac{1}{2}$;
- $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{e^{2x}-1}{4x} = \frac{1}{2}\left(\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{e^{2x}-1}{2x}\right) = \frac{0}{0}$ (indeterminação).

(fazendo $y=2x$, temos que se $x\to 0^-$, então $y\to 0^-$)

$$\frac{1}{2}\left(\underbrace{\lim_{y\to 0^-} \frac{e^{y}-1}{y}}_{\text{limite notável}}\right) = \frac{1}{2}\times 1 = \frac{1}{2}$$

Como $g(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = \frac{1}{2}$, então a função g é contínua em $x=0$.

Nota: Para responder a esta questão, o aluno tem de aplicar conhecimentos de vários tópicos do 11.º e 12.º anos, designadamente a definição de continuidade num ponto, cálculo de limites e para além disso, integrar o levantamento de indeterminações, em particular conhecer o limite notável, tendo de relacionar e interligar esse limite com a técnica de mudança de variável. Tem ainda que utilizar conhecimentos de trigonometria do 11.º ano no cálculo do limite da função à direita de zero e da imagem da função no ponto zero.

<table>
<tr><th colspan="4">MODELO DE ANÁLISE PARA CATEGORIZAÇÃO DA QUESTÃO</th></tr>
<tr><th>Lista dos tópicos considerados na construção das soluções hipotéticas
(Bivar et al., 2015)</th><th colspan="2">Parâmetros de análise:
Tópicos e Procedimentos</th><th>Categorização</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Domínio IV: Funções reais de variável real – 11.º ano
• “Função contínua num ponto e num subconjunto do respetivo domínio”
• “Limites laterais”

Domínio V: Funções exponenciais e funções logarítmicas – 12.º ano
• “Limite notável $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$

Domínio III: Funções reais de variável real – 12.º ano
• “Determinação de limites de funções reais de variável real”

Domínio I: Trigonometria e funções trigonométricas – 11.º ano
• “Razões trigonométricas de ângulos generalizados”</td><td rowspan="2">Tópicos</td><td>Quantidade
Dois ou mais tópicos foram utilizados</td><td rowspan="4">Categoria B (Relacional)</td></tr>
<tr><td>Nível
Adequado – Foram utilizados tópicos de nível análogo ao do programa</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Procedimentos</td><td>Grau de inovação
Réplica – Envolve hipóteses de trabalho e estratégias descritas nos programas</td></tr>
<tr><td>Integração dos procedimentos
Interligados – Os procedimentos evidenciam a aplicação de vários conceitos e informações de forma integrada e simultânea</td></tr>
<tr><td colspan="4">Conclusões
Tipo 1
Os elementos que contribuíram para a obtenção da conclusão foram harmonizados</td></tr>
</table>

Figura 95 - Modelo de análise para categorização da questão 12.2, CII, exame 2018

QUESTÃO

12.3. Estude a função g quanto à monotonia no intervalo $]0,\pi]$ e determine, caso existam, os extremos relativos.

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO (IAVE 2018)

12.3. .... **13 pontos**

Determinar $g'(x)$ em $]0,\pi]$ (**ver nota**) .... 3 pontos

Escrever $g'(x)=0$ .... 1 ponto

Obter os zeros de g' em $]0,\pi]$ .... 3 pontos

Apresentar um quadro de sinal de g' e de monotonia de g em $]0,\pi]$ (ou equivalente) .... 3 pontos

Determinar $g\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $g\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ e $g(\pi)$ $\left(1, \frac{1}{3} \text{ e } \frac{1}{2}\right)$ .... (1 + 1 + 1) .... 3 pontos

Nota – Se for evidente a intenção de determinar a derivada da função, a pontuação mínima a atribuir nesta etapa é 1 ponto.

PROPOSTA RESOLUÇÃO APM

12.3.

Comecemos por determinar a expressão da derivada da função g em $]0,\pi]$:

$$g'(x)=\left(\frac{1}{2-\operatorname{sen}(2x)}\right)'=\frac{1'\times(2-\operatorname{sen}(2x))-1\times(2-\operatorname{sen}(2x))'}{(2-\operatorname{sen}(2x))^2}=\frac{0-1\times(0-2\cos(2x))}{(2-\operatorname{sen}(2x))^2}=$$

$$=\frac{-1\times(-2\cos(2x))}{(2-\operatorname{sen}(2x))^2}=\frac{2\cos(2x)}{(2-\operatorname{sen}(2x))^2}$$

Determinemos, agora, os zeros de g' no intervalo dado:

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow 2\cos(2x)=0 \wedge (2-\operatorname{sen}(2x))^2\neq 0 \Leftrightarrow \cos(2x)=0 \wedge \underbrace{2\neq \operatorname{sen}(2x)}_{\text{condição universal}}$$

$$\Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$$

Se $k=0$, então $x=\frac{\pi}{4}$;

Se $k=1$, então $x=\frac{3\pi}{4}$.

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$g'(x)$		+	0	–	0	+	+
$g(x)$		↗	Máx	↘	Min	↗	Máx

Podemos concluir que:

- o gráfico da função g é crescente em $\left]0, \frac{\pi}{4}\right]$ e em $\left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$ e decrescente em $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$.
- o mínimo relativo é, $g\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{1}{2-\operatorname{sen}\left(2\times\frac{3\pi}{4}\right)}=\frac{1}{2-\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right)}=\frac{1}{2-(-1)}=\frac{1}{3}$.
- os máximos relativos são, $g\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2-\operatorname{sen}\left(2\times\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1}{2-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{1}{2-1}=1$ e

$$g(\pi)=\frac{1}{2-\operatorname{sen}(2\times\pi)}=\frac{1}{2-0}=\frac{1}{2}.$$

<table>
<tr><th colspan="4">MODELO DE ANÁLISE PARA CATEGORIZAÇÃO DA QUESTÃO</th></tr>
<tr><th>Lista dos tópicos considerados na construção das soluções hipotéticas
(Bivar et al., 2015)</th><th colspan="2">Parâmetros de análise:
Tópicos e Procedimentos</th><th>Categorização</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Domínio III: Funções reais de variável real – 12.º ano
• “Problemas de otimização envolvendo funções diferenciáveis”

Domínio IV: Funções reais de variável real – 11.º ano
• “Derivada do produto e do quociente de funções diferenciáveis”
• “Monotonia de uma função e sinal da respetiva função derivada”
• “Extremos relativos de uma função e derivada da função nesses pontos”
• “Cálculo de derivadas de funções utilizando as regras de derivação e as derivadas de funções de referência”

Domínio IV: Trigonometria – 12.º ano
• “Diferenciabilidade das funções seno, cosseno e tangente”

Domínio I: Trigonometria e funções trigonométricas – 11.º ano
• “Razões trigonométricas de ângulos generalizados”</td><td rowspan="2">Tópicos</td><td>Quantidade
Dois ou mais tópicos foram utilizados</td><td rowspan="4">Categoria C (Multi-estrutural)</td></tr>
<tr><td>Nível
Adequado – Foram utilizados tópicos de nível análogo ao do programa</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Procedimentos</td><td>Grau de inovação
Réplica – Envolve hipóteses de trabalho e estratégias descritas nos programas</td></tr>
<tr><td>Integração dos procedimentos
Compartimentados – Os procedimentos mostram a aplicação de vários conceitos e informações de forma isolada e sucessiva</td></tr>
<tr><td colspan="4">Conclusões
Tipo 1
Os elementos que contribuíram para a obtenção da conclusão foram harmonizados</td></tr>
</table>

Figura 96 - Modelo de análise para categorização da questão 12.3, CII, exame 2018

QUESTÃO

13. Considere a função f definida em $]0,\pi[$ por $f(x)=\dfrac{x}{\operatorname{sen} x}$

Qual das equações seguintes define uma assíntota do gráfico da função f ?

(A) $x=0$ **(B)** $x=\pi$ **(C)** $x=1$ **(D)** $x=\dfrac{\pi}{2}$

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO (IAVE 2018)

13. .... **8 pontos**

Opção **(B)**

PROPOSTA RESOLUÇÃO APM

13.

Como a função f é contínua em $]0,\pi[$ a eventual existência de assíntotas verticais ao gráfico de f será nos pontos 0 e π que são pontos aderentes ao domínio de f e não lhe pertencem.

Vejamos:

- $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{\operatorname{sen} x}=\dfrac{0}{0}$ (indeterminação)

  $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{\operatorname{sen} x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\frac{\operatorname{sen} x}{x}}=\dfrac{1}{\underbrace{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen} x}{x}}_{\text{limite notável}}}=\dfrac{1}{1}=1$, pelo que $x=0$ não é assíntota ao gráfico de f.

- $\lim\limits_{x\to \pi^-}\dfrac{x}{\operatorname{sen} x}=\dfrac{\pi}{\operatorname{sen}\pi}=\dfrac{\pi}{0^+}=+\infty$, logo, $x=\pi$ é assíntota vertical do gráfico de f.

A resposta correta é a opção (**B**).

<table>
<tr><th colspan="4">MODELO DE ANÁLISE PARA CATEGORIZAÇÃO DA QUESTÃO</th></tr>
<tr><th>Lista dos tópicos considerados na construção das soluções hipotéticas
(Bivar et al., 2015)</th><th colspan="2">Parâmetros de análise:
Tópicos e Procedimentos</th><th>Categorização</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Domínio III: Funções reais de variável real – 12.º ano
• “Determinação de limites de funções reais de variável real”

Domínio IV: Trigonometria
• “Limite notável $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$ “

Domínio IV: Funções reais de variável real – 11.º ano
• “Continuidade de funções polinomiais, racionais, trigonométricas, raízes e potências de expoente racional”
• “Assintotas verticais e assintotas oblíquas ao gráfico de uma função”

Domínio I: Trigonometria e funções trigonométricas – 11.º ano
• “Razões trigonométricas de ângulos generalizados”</td><td rowspan="2">Tópicos</td><td>Quantidade
Dois ou mais tópicos foram utilizados</td><td rowspan="4">Categoria C (Multi-estrutural)</td></tr>
<tr><td>Nível
Adequado – Foram utilizados tópicos de nível análogo ao do programa</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Procedimentos</td><td>Grau de inovação
Réplica – Envolve hipóteses de trabalho e estratégias descritas nos programas</td></tr>
<tr><td>Integração dos procedimentos
Compartimentados – Os procedimentos mostram a aplicação de vários conceitos e informações de forma isolada e sucessiva</td></tr>
<tr><td colspan="4">Conclusões
Tipo 2
A conclusão decorre exclusivamente dos procedimentos matemáticos envolvidos na resolução</td></tr>
</table>

Figura 97 - Modelo de análise para categorização da questão 13, CII, exame 2018

QUESTÃO

14. Na Figura 5, está representada, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função h, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $h(x) = \frac{\ln x}{x}$

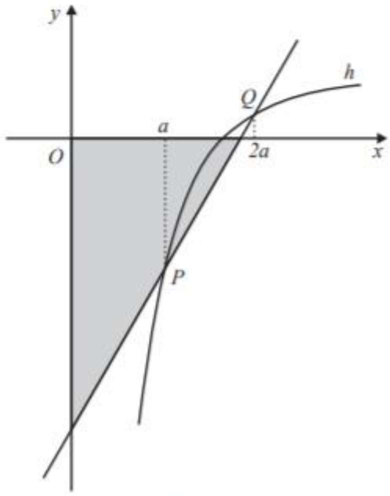


Figura 5

Para cada número real a pertencente ao intervalo $\left[\frac{1}{2},1\right]$, sejam P e Q os pontos do gráfico da função h de abcissas a e $2a$, respetivamente.

Tal como a figura sugere, a reta PQ define, com os eixos coordenados, um triângulo retângulo.

Mostre que existe, pelo menos, um número real a pertencente ao intervalo $\left[\frac{1}{2},1\right]$ para o qual esse triângulo é isósceles.

Sugestão: comece por identificar o valor do declive da reta PQ para o qual o triângulo é isósceles.

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO (IAVE 2018)

14. .... **12 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Determinar o declive da reta PQ, em função de a $\left(\dfrac{\ln\frac{2}{a}}{2a^2} \text{ ou equivalente}\right)$. 2 pontos

Escrever $\dfrac{\ln\frac{2}{a}}{2a^2}=1$ .... 2 pontos

Referir que a função f definida por $f(a)=\dfrac{\ln\frac{2}{a}}{2a^2}$ é contínua em $\left[\frac{1}{2},1\right]$ .... 1 ponto

Determinar $f\left(\frac{1}{2}\right)$ .... 1 ponto

Justificar que $f\left(\frac{1}{2}\right)>1$ .... 2 pontos

Determinar $f(1)$ .... 1 ponto

Justificar que $f(1)<1$ .... 2 pontos

Invocar o teorema de Bolzano-Cauchy (ou teorema de Bolzano) para concluir o pretendido .... 1 ponto

2.º Processo

Determinar o declive da reta PQ, em função de a $\left(\dfrac{\ln\frac{2}{a}}{2a^2} \text{ ou equivalente}\right)$. 2 pontos

Determinar a equação reduzida da reta que passa nos pontos do gráfico de h de abcissas a e $2a$ .... 1 ponto

Determinar a abcissa do ponto de intersecção da reta com o eixo Ox, em função de a .... 1 ponto

Referir que a função g definida por $g(a)=b(a)+c(a)$ é contínua em $\left[\frac{1}{2},1\right]$, sendo $b(a)$ a ordenada na origem da reta, em função de a, e $c(a)$ a abcissa do ponto de intersecção da reta com o eixo Ox, em função de a .... 1 ponto

Determinar $g\left(\frac{1}{2}\right)$ .... 1 ponto

Justificar que $g\left(\frac{1}{2}\right)<0$ .... 2 pontos

Determinar $g(1)$ .... 1 ponto

Justificar que $g(1)>0$ .... 2 pontos

Invocar o teorema de Bolzano-Cauchy (ou teorema de Bolzano) para concluir o pretendido .... 1 ponto

PROPOSTA RESOLUÇÃO APM

14.

As coordenadas do ponto P e as coordenadas do ponto Q são, respetivamente, $P\left(a,\dfrac{\ln a}{a}\right)$ e $Q\left(2a,\dfrac{\ln(2a)}{2a}\right)$.

Logo, o declive da reta PQ é:

$$m=\frac{\dfrac{\ln(2a)}{2a}-\dfrac{\ln a}{a}}{2a-a}=\frac{\dfrac{\ln(2a)-2\ln a}{2a}}{a}=\frac{\ln(2a)-\ln\left(a^2\right)}{2a^2}=\frac{\ln\left(\dfrac{2a}{a^2}\right)}{2a^2}=\frac{\ln\left(\dfrac{2}{a}\right)}{2a^2}.$$

Para que o triângulo retângulo definido pela reta PQ e pelos eixos coordenados seja isósceles é preciso que o valor absoluto da ordenada na origem da reta PQ seja igual à abcissa do ponto em que a reta interseta o eixo Ox. Assim, o declive da reta nestas condições é igual a 1.

Então, $\dfrac{\ln\left(\dfrac{2}{a}\right)}{2a^2} = 1$ ou $\dfrac{\ln\left(\dfrac{2}{a}\right)}{2a^2} - 1 = 0$.

Para mostrar que esta equação tem pelo menos uma solução no intervalo $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$ consideramos a função f definida por, $f(a) = \dfrac{\ln\left(\dfrac{2}{a}\right)}{2a^2} - 1$.

Calculemos $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ e $f(1)$:

- $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\ln\left(\dfrac{2}{\frac{1}{2}}\right)}{2\left(\dfrac{1}{2}\right)^2} - 1 = \dfrac{\ln(4)}{2 \times \dfrac{1}{4}} - 1 = \dfrac{\ln(4)}{\dfrac{1}{2}} - 1 = 2\ln(4) - \ln(e) =$

  $= \ln(4^2) - \ln(e) = \ln\left(\dfrac{4^2}{e}\right) > 0$, porque $\dfrac{4^2}{e} > 1$.

- $f(1) = \dfrac{\ln\left(\dfrac{2}{1}\right)}{2(1)^2} - 1 = \dfrac{\ln(2)}{2} - 1 = \dfrac{1}{2}\ln(2) - 1 = \ln\left(\sqrt{2}\right) - \ln(e) = \ln\left(\dfrac{\sqrt{2}}{e}\right) < 0$,

  porque $\dfrac{\sqrt{2}}{e} < 1$.

Logo, como $f\left(\dfrac{1}{2}\right) \times f(1) < 0$ e a função f é contínua em $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$, pelo corolário do teorema de Bolzano conclui-se que a função f tem pelo menos um zero em $\left]\dfrac{1}{2}, 1\right[$.

Assim, a equação $\dfrac{\ln\left(\dfrac{2}{a}\right)}{2a^2} = 1$ tem pelo menos uma solução no intervalo $\left]\dfrac{1}{2}, 1\right[$, o que prova a existência de um número real a pertencente ao intervalo $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$ para o qual o triângulo referido é isósceles, como queríamos demonstrar.

Nota: Nos processos de resolução apresentados supra, relativos a esta questão, são utilizados os mesmos tópicos, pelo que se apresenta uma única categorização.

Nota: Na resolução da questão, o aluno tem de aplicar vários conhecimentos dos 11.º e 12.º anos, designadamente declive de uma reta no plano, propriedades dos logaritmos, continuidade de uma função e Teorema de Bolzano-Cauchy, em que o aluno, n o cálculo do declive tem que aplicar as coordenadas dos pontos em função e a e f(a), em que na simplificação desta expressão vai interligar em simultâneo com as propriedades dos logaritmos. Com esta expressão e na relação com o valor do declive, vai escrever uma equação e, simultaneamente, definir uma nova função, na qual vai utilizar o Teorema de Bolzano para concluir o pretendido, existindo desta forma aplicação dos conceitos de forma integrada e simultânea.

<table>
<tr><th colspan="4">MODELO DE ANÁLISE PARA CATEGORIZAÇÃO DA QUESTÃO</th></tr>
<tr><th>Lista dos tópicos considerados na construção das soluções hipotéticas
(Bivar et al., 2015)</th><th colspan="2">Parâmetros de análise:
Tópicos e Procedimentos</th><th>Categorização</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Domínio II: Geometria analítica – 11.º ano
• “Inclinação de uma reta no plano e relação com o respetivo declive”

Domínio V: Funções exponenciais e funções logarítmicas – 12.º ano
• “Monotonia, sinal, limites e propriedades algébricas dos logaritmos”

Domínio III: Funções reais de variável real – 12.º ano
• “Teorema dos valores intermédios ou teorema de Bolzano-Cauchy”

Domínio IV: Funções reais de variável real – 11.º ano
• “Continuidade da soma, diferença, produto, quociente e composição de funções contínuas”</td><td rowspan="2">Tópicos</td><td>Quantidade
Dois ou mais tópicos foram utilizados</td><td rowspan="4">Categoria B (Relacional)</td></tr>
<tr><td>Nível
Adequado – Foram utilizados tópicos de nível análogo ao do programa</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Procedimentos</td><td>Grau de inovação
Réplica – Envolve hipóteses de trabalho e estratégias descritas nos programas</td></tr>
<tr><td>Integração dos procedimentos
Interligados – Os procedimentos evidenciam a aplicação de vários conceitos e informações de forma integrada e simultânea</td></tr>
<tr><td colspan="4">Conclusões
Tipo 1
Os elementos que contribuíram para a obtenção da conclusão foram harmonizados</td></tr>
</table>

Figura 98 - Modelo de análise para categorização da questão 14, CII, exame 2018

A tabela seguinte apresenta uma síntese dos Temas/Domínios abordados no exame de 2018, relacionando as questões com as Categorias SOLO.

*Tabela **9** - Síntese do Exame de 2018*

Síntese Exame Matemática A 12.º Ano 2018 - 1.ª fase

	Categoria / Tema/Domínio	**Categoria A (Abstrato)**		**Categoria B (Relacional)**		**Categoria C (Multi-estrutural)**		**Categoria D (Uni-estrutural)**		**Categoria E (Pré-estrutural)**	
		Questões	Total questões	Questões	Total questões	Questões	Total questões	Questões	Total questões	Questões	Total questões
Caderno I	**Tema I** - Probabilidades e Combinatória - 12.º ano (P2001/2002)					1.1 (P2001/2002)	1				
	Dominio I - Cálculo Combinatório - 12.º ano (PMC 2015)					2.3, 3.1	2				
	Dominio II - Probabilidades - 12.º ano (PMC 2015)					2.3, 3.2	2				
	Dominio III - Funções reais de variável real - 12.º ano (PMC 2015)			5	1	4	1				
	Dominio V - Funções exponenciais e logaritmicas - 12.º ano (PMC 2015)					4	1				
	Dominio VII - Números complexos - 12.º ano (PMC 2015)			5	1						
	Dominio I - Trigonometria e funções trigonométricas - 11.º ano (PMC 2015)					2.1	1				
	Dominio II - Geometria Analítica - 11.º ano (PMC 2015)			2.2	1	2.1	1				
	Dominio III - Sucessões - 11.º ano (PMC 2015)					6	1				
	Dominio IV: Funções reais de variável real - 11.º ano (PMC 2015)					1.2 (PMC2015)	1				
	Dominio III - Geometria Analítica - 10.º ano (PMC 2015)			2.2	1	7	1				
	Total por categoria	0		2		9		0		0	
	% categoria	0%		9%		41%		0%		0%	
Caderno II	**Tema I** - Probabilidades e Combinatória - 12.º ano (P2001/2002)					10.1 (P2001/2002)	1				
	Dominio III - Funções reais de variável real - 12.º ano (PMC 2015)			12.2, 13, 14	3	12.3	1				
	Dominio IV - Trigonometria - 12.º ano (PMC 2015)			13	1	12.3	1				
	Dominio V - Funções exponenciais e logaritmicas - 12.º ano (PMC 2015)			12.2, 14	2	10.2 (PMC2015), 11, 12.1	3				
	Dominio VII: Números complexos - 12.º ano (PMC 2015)					9	1				
	Dominio I - Trigonometria e funções trigonométricas - 11.º ano (PMC 2015)			12.2, 13	2	8.2 (PMC2015), 9, 12.3	3				
	Dominio II - Geometria analítica - 11.º ano (PMC 2015)			14	1						
	Dominio III - Sucessões - 11.º ano (PMC 2015)					10.2 (PMC2015)	1				
	Dominio IV - Funções reais de variável real - 11.º ano (PMC 2015)			12.2, 13, 14	3	11, 12.3	2				
	Dominio IV - Funções reais de variável real - 10.º ano (PMC 2015)					12.1	1				
	Tema I - Geometria no Plano e no Espaço I – 10.º ano (P2001/2002)					8.1 (P2001/2002)	1				
	Total por categoria	0		3		8		0		0	
	% categoria	0%		14%		36%		0%		0%	
	% total por categoria	0%		23%		77%		0%		0%	

Numa primeira análise verifica-se uma integração da quase totalidade dos Domínios do Programa e Metas Curriculares 2015, excetuando-se apenas o Domínio VI.

No que respeita às Categorias SOLO, constata se a presença das Categorias B e C, não se tendo verificado qualquer questão nas Categorias A, D e E.

Como sabemos, este exame integrava questões alternativas direcionadas tanto para alunos ao abrigo do Programa de matemática A 2001/2002 (questões 1.1, 8.1 e 10.1), como para alunos do Programa e Metas Curriculares de matemática A 2015 (1.2, 8.2 e 10.2). Verificamos que todas estas questões foram categorizadas na mesma Categoria (C – Multi-estrutural), aferindo-se que estas questões mantêm a mesma complexidade.

Ao observar o gráfico seguinte e face ao já observado nos gráficos semelhantes a este, em exames anteriores, parece nos à primeira vista que este é bastante mais abrangente por estarem identificados mais Domínios. Contudo, tal não é verdade, pois alguns dos temas do Programa de Matemática A 2001/2002 foram separados em mais que um Domínio no Programa e Metas Curriculares de Matemática A 2015. A título de exemplo, referimos o Tema I – Probabilidades e Combinatória dividido em Domínio I – Cálculo Combinatório e Domínio II – Probabilidades.

É interessante ainda referir que os Domínios predominantes se relacionam com as funções reais de variável real.

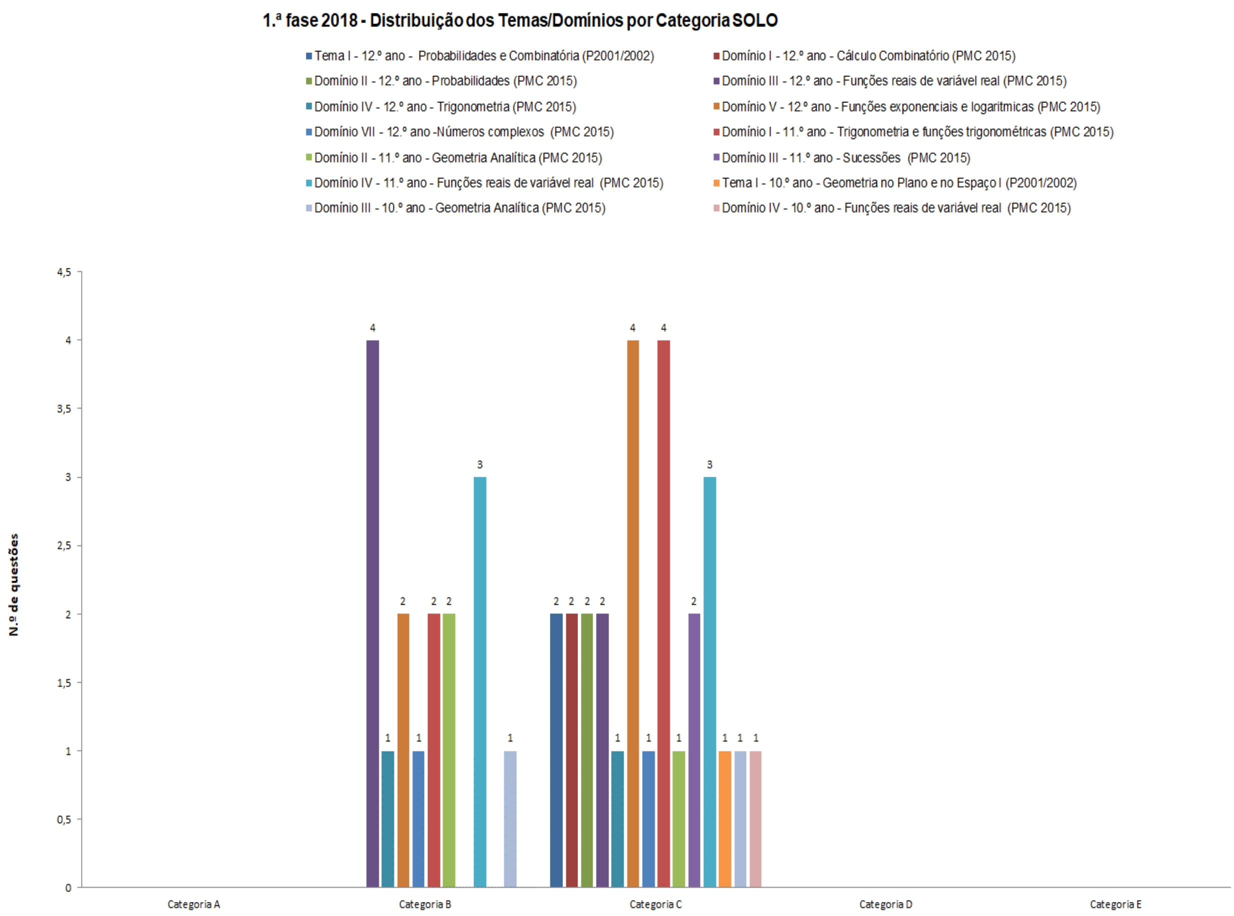


Gráfico 10 - Distribuição dos temas por Categoria SOLO - Exame 2018, 1ª fase

Apresenta-se este gráfico em particular, referente à distribuição do total das questões por Categoria SOLO. Especificamente, temos 17 questões cujas respostas foram categorizadas na Categoria C, 5 questões categorizadas na Categoria B, correspondendo a 77% e 23%, respetivamente.

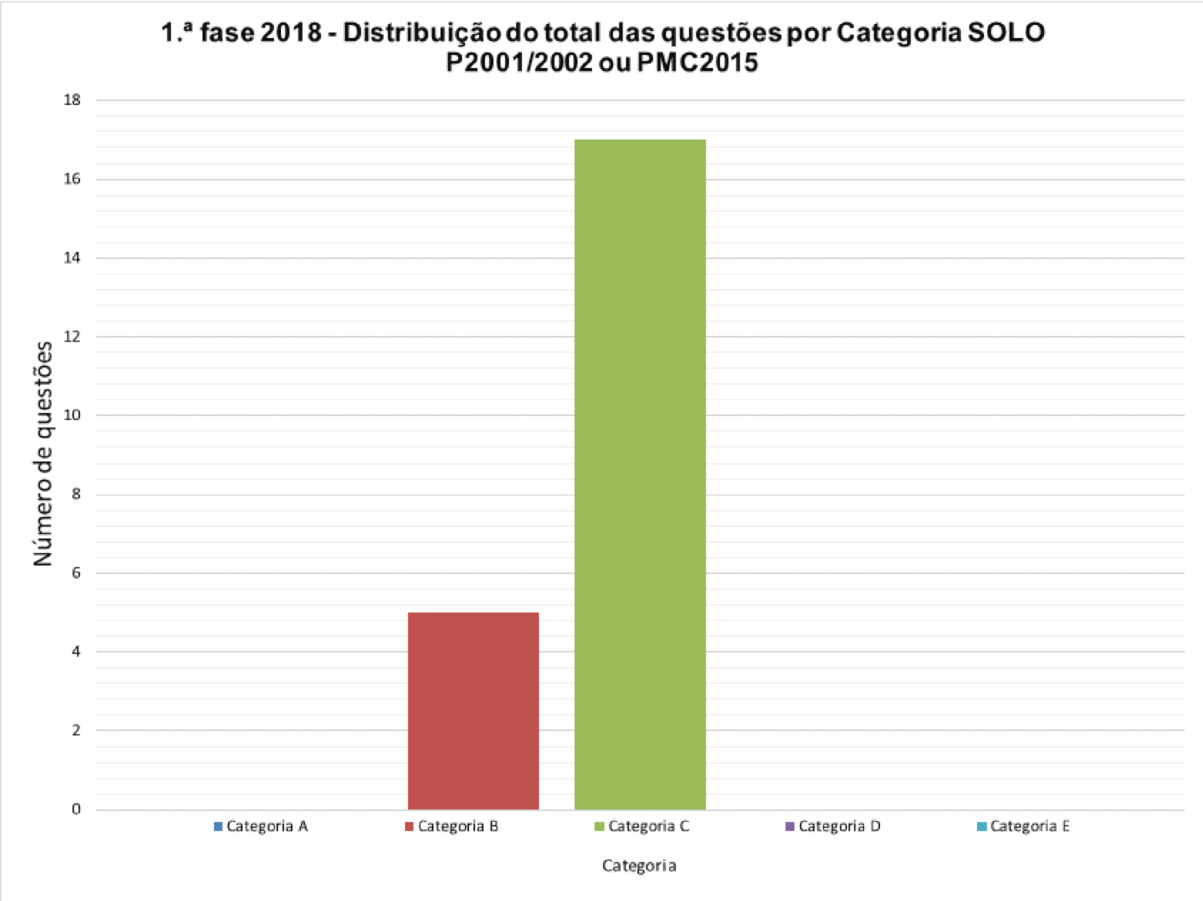


Gráfico 11 - Distribuição do total de questões por categoria SOLO - Exame 2018

No gráfico seguinte podemos observar a percentagem de questões por Categoria SOLO (de acordo com as já indicadas supra de 77% e 23%, correspondendo, respetivamente, às Categorias C – Multi-estrutural e B – Relacional), no qual se verifica a predominância da Categoria C:

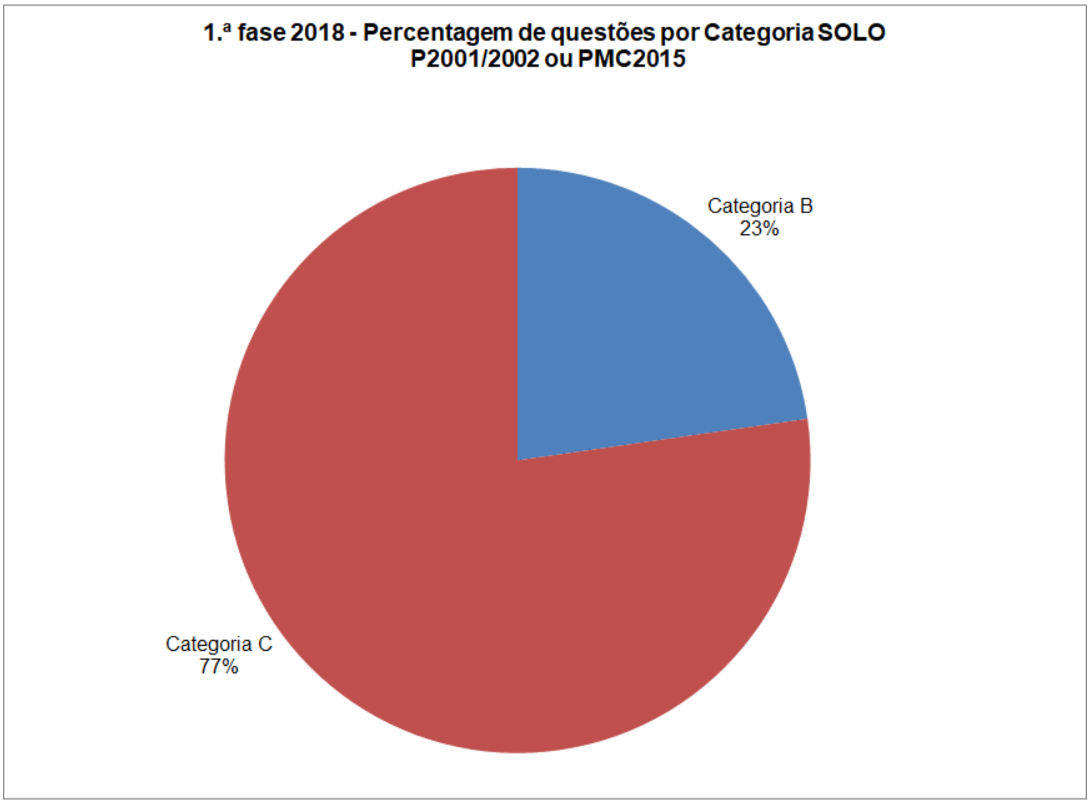


Gráfico 12 - Percentagem de questões por categoria SOLO - Exame 2018

Capítulo 7 – Considerações finais

7.1 Análise aos objetivos

Com este trabalho procurou-se ponderar sobre a qualidade dos exames de Matemática A do 12.º ano, criteriosamente selecionados para os anos 2015, 2016, 2017 e 2018, como já explicitado no Capítulo 5, aplicando uma metodologia que possibilitou aferir qualitativamente a complexidade/grau de dificuldade destes exames, permitindo tecer algumas considerações relativamente aos mesmos, harmonizados às questões desta investigação:

- Que variação existe nos temas curriculares nos exames para os anos em estudo?
- Que variação de categorias/níveis SOLO existem nos exames em estudo?
- Existe variação na complexidade/grau de dificuldade nos exames nos anos em análise?
- Que diferenças significativas se verificam com a alteração do programa de Matemática A?

Com o trabalho desenvolvido ao longo do capítulo anterior e a síntese de caraterização das questões que apresentámos no final de cada um dos exames, permite estabelecer comparações e retirar algumas conclusões.

Ao observarmos os resultados obtidos na nossa análise, vamos notando alterações na construção dos exames. Note-se que a introdução do novo Programa (Programa e Metas Curriculares de Matemática A 2015), imposta no XIX Governo Constitucional com o ministro da Educação Nuno Crato, foi faseada, iniciando a sua aplicação no ano letivo 2015/2016 para o 10.º ano, 2016/2017 para o 11.º ano e 2017/2018 para o 12.º ano tendo este impacto nos exames nacionais de Matemática A, a partir do exame de 2018 (ano letivo 2017/2018).

Quanto à sua estrutura, os exames de 2015, 2016 e 2017 mantêm a mesma, sendo constituídos por dois grupos de questões: Grupo I – com questões de escolha múltipla e Grupo II com questões de desenvolvimento. No exame de 2018, verifica-se uma alteração na estrutura, sendo composto por 2 cadernos, ambos com questões de escolha múltipla e questões de desenvolvimento.

Ainda que o novo Programa não fosse aplicável aos exames de 2015, 2016 e 2017 deparamo-nos, nestes exames, com a incidência sobre Temas dos Programas dos três anos de escolaridade do Ensino Secundário: 10.º, 11.º e 12.º ano, tal como emanado nas orientações da Informação-Prova do IAVE para aqueles anos. Assim, nestes exames, constatamos que foram abrangidos todos os Temas do 12.º ano (Tema I – Probabilidades e Combinatória, Tema II – Introdução ao Cálculo Diferencial II e Tema III – Trigonometria e números complexos), com maior incidência no Tema II, todos os Temas do 11.º ano (Tema I - Geometria no Plano e no Espaço II, Tema III – Sucessões Reais, nos três exames, e Tema II – Introdução ao Cálculo Diferencial I, também nos exames de 2016 e 2017) com maior incidência no Tema I nos exames de 2015 e 2016 e Tema II no exame de 2017. Foram, ainda, abrangidos o Tema I - Geometria no Plano e no Espaço I e Tema II - Funções e gráficos (este último apenas nos exames de 2016 e 2017), com maior incidência no Tema I.

Verificámos que na resolução de muitas questões são utilizados mais do que um Tema por questão. Tal deve-se ao facto de na disciplina de Matemática A o conhecimento exigido pelos exames nacionais se estender a todo o currículo, mobilizando tópicos de diversos Temas de forma a responder às questões.

O exame de 2018, primeiro ano de exame aplicável já ao novo Programa de Matemática A, assume a particularidade de, simultaneamente, aplicar-se também ao Programa de Matemática A 2001/2002. Assim, na sua nova estrutura de dois cadernos, incluiu em ambos questões de resposta alternativa (questões 1, 8 e 10, cada uma com duas alíneas que são as questões alternativas, a alínea 1.1 do Programa 2001/2002 e a 1.2 do Programa e Metas Curriculares 2015 e analogamente para as restantes). As questões 1.1, 8.1 e 10.1 do Programa 2001/2002 abrangeram os Temas I do 12.º e 11.º ano e o Tema I do 10.º ano. No que respeita às restantes questões do Programa e Metas Curriculares de Matemática A 2015, foram abrangidos todos os Domínios (designação considerada no novo Programa para os Temas) do 12.º ano, designadamente Domínio I - Cálculo Combinatório, Domínio II – Probabilidades, Domínio III - Funções reais de variável real, Domínio IV – Trigonometria, Domínio V – Funções exponenciais e logarítmicas e Domínio VII – Números complexos, excetuando-se o Domínio VI – Primitivas e cálculo integral. Do 11.º ano foram abrangidos o Domínio I – Trigonometria e funções trigonométricas, Domínio II – Geometria analítica, Domínio III – Sucessões, Domínio IV – Funções reais de variável real e do 10.º ano o Domínio III – Geometria analítica. Importa salientar que os Domínios são em maior número que os Temas uma vez que nos parece se desagregaram Temas em mais que um Domínio, tome se por exemplo, no 12.º ano, o Tema I - Probabilidades e Combinatória, do Programa 2001/2002, e o Domínio I - Cálculo Combinatório e Domínio II – Probabilidades do Programa e Metas Curriculares 2015.

O modelo de categorização de exames utilizado ao longo desta investigação, mostra-se consistente, tanto na aplicação aos exames do Programa de Matemática A 2001/2002, como ao Programa e Metas Curriculares de Matemática A 2015.

Verificamos, no que respeita às Categorias SOLO, que não foi encontrada a Categoria E e que pontualmente se verificou a Categoria A, permitindo logo à partida concluir que a construção dos exames se encontra adequada aos conhecimentos que o aluno adquiriu até ao 12.º ano. Note-se que, ainda que existam questões da Categoria A (uma em cada um dos exames de 2015, 2016 e 2017), a mesma está presente apenas no mesmo tipo de questões, na aplicação específica da técnica de mudança de variável no cálculo de um limite, uma vez que as indicações metodológicas do Programa de Matemática A 2001/2002 referem que o "programa apenas pressupõe que se levantem indeterminações em casos simples" (Carvalho e Silva, Jaime, et al., DES - ME, Programa de Matemática A, 12.º ano, 2002), contudo esta técnica, geralmente, é praticada em aula na disciplina de Matemática A, por preocupação dos professores em preparar os alunos para o exame nacional.

Denotamos que, com o novo Programa – Programa e Metas Curriculares de Matemática A 2015, deixou de existir a Categoria A (Abstrato), verificada pontualmente em exames anteriores (como acima justificado), uma vez que, no Descritor 4.3 do Caderno de Apoio 12.º Ano (que constitui um complemento ao documento Metas Curriculares), são incluídos exemplos demonstrativos (exercícios) deste descritor que incluem a técnica referida (de mudança de variável), conduzindo a uma Categorização da questão diferente da Abstrata, por se considerarem tópicos de nível adequado (análogo ao do respetivo Programa).

Verificamos que em todos os exames há predominância de uma categorização SOLO, a Categoria C (Multi-estrutural), categoria que à partida nos permite considerá-la como nível médio de dificuldade de um exame nacional de Matemática A.
Contudo, apesar do domínio da Categoria C em todos os exames que fazem parte deste estudo, verifica-se um aumento da Categoria B (Relacional) nos exames de 2017 e mais significativamente de 2018, denotando-se um aumento gradual das questões de grau de dificuldade superior.

Percebemos que com a introdução do novo Programa, existiram alterações significativas, não só ao nível da distribuição dos conteúdos pelos Temas, que foram designados de Domínios, mas também na categorização das questões, em que observamos uma distribuição mais uniforme entre as categorias medianas (Categoria B e C), indicando que o grau de complexidade/dificuldade do exame aumentou.
No gráfico seguinte podemos observar uma síntese do comportamento das Categorias SOLO nos exames em que incide esta investigação, sendo evidente, se considerarmos um salto temporal entre 2015 e 2018, um aumento das questões Relacionais que sustentam o aumento da complexidade nos exames:

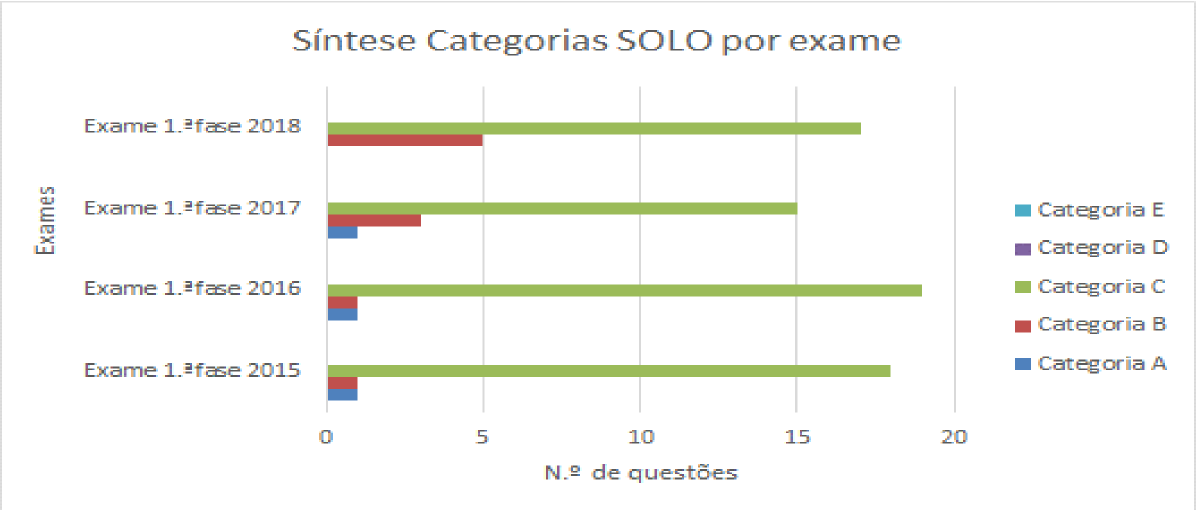


Gráfico 13 - Síntese de categorias SOLO por exame

Carece ainda, a título comparativo e de reforço das conclusões obtidas com este estudo, ser efetuada uma observação conjunta com os resultados obtidos por Pereira (2019), que na sua investigação analisou os exames nacionais de Matemática A entre 2006 e 2014, seguindo o mesmo modelo de categorização das questões.

Tomando em consideração os resultados que pudemos aferir naquela investigação nos exames da 1.ª fase daquele período, e os obtidos com o presente estudo de 2015 a 2018, observamos o seguinte:

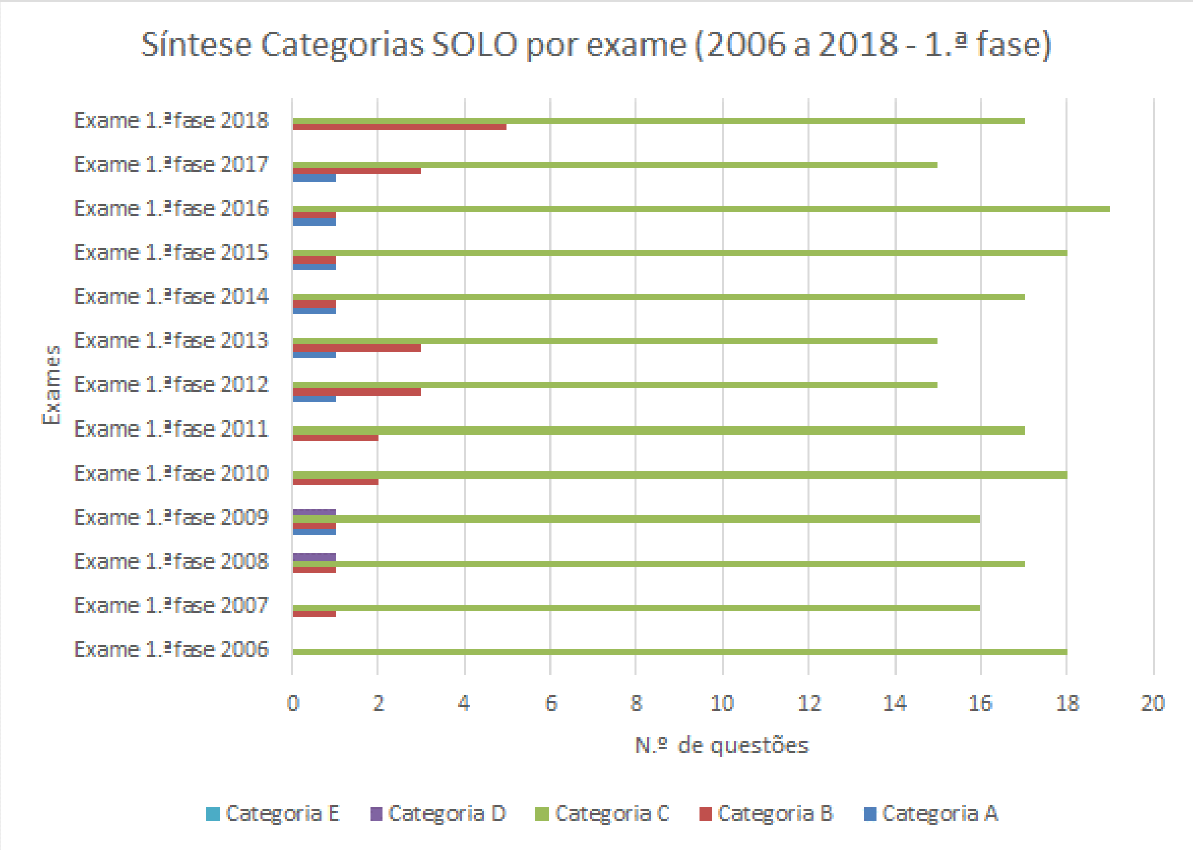


Gráfico 14 - Síntese comparativa de categorias SOLO por exame (2006 a 2018 - 1.ª fase)

Pereira (2019), concluiu que

> todos os exames têm uma componente absolutamente decisiva de itens de categoria SOLO multi-estrutural.", que "apesar de este tipo de itens dominar todos os exames, durante o período de análise, é identificável uma tendência para a diminuição do seu peso relativo. De facto, os itens de categoria SOLO multi-estrutural representavam a totalidade dos itens colocadas nos exames de 2006 (Pereira, 2019, p. 142)

e que "houve em crescimento da dificuldade do exame ao longo dos anos" (Pereira, 2019, p. 146). Esta observação longitudinal, vem reforçar a conclusão obtida neste trabalho, com a predominância da Categoria C (Multi-estrutural), que se considera o nível médio que um aluno deve ter na realização dos exames e o aumento significativo da complexidade do exame em 2018, em que um aluno deve já ter os dois níveis predominantes neste exame como mínimo: Categoria B (Relacional) e Categoria C (Multi-Estrutural).

Importa ainda salientar que na análise às três questões alternativas do exame de 2018 (1.1 versus 1.2, 8.1 versus 8.2 e 10.1 versus 10.2), ainda que em Temas versus Domínios diferentes, a categorização resultante (Categoria C – Multi-estrutural) é a mesma em cada questão alternativa, permitindo concluir que o grau de complexidade/dificuldade nestas questões é o mesmo.

Por último, considerou-se relevante fazer, ainda, uma análise por exame e entre exames (no período em análise) da percentagem da cotação das questões por Categoria:

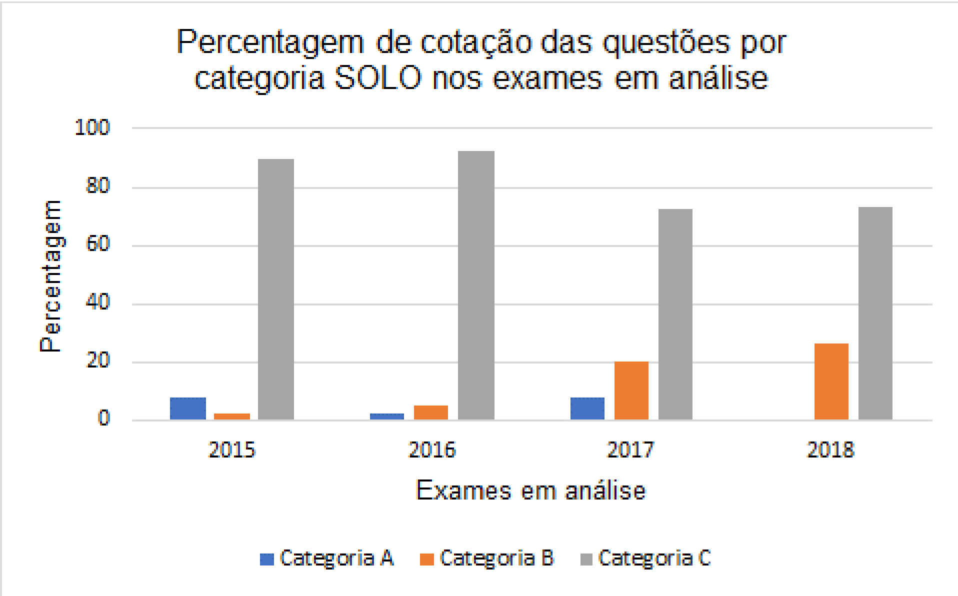


Gráfico 15 - Percentagem de cotação das questões por Categoria SOLO (2015 a 2018 - 1.ª fase)

Constata-se que a Categoria C (Multi-estrutural) em todos os exames é aquela com mais expressão em termos de peso na classificação final. Aliás, em todos os exames, a Categoria C situa se sempre acima de 72% da cotação total. A Categoria A (Abstrato) é uma Categoria pouco significativa quanto à cotação das questões, tendo atingido 7,5% em 2015 e 2017 e 2,5% em 2016, sem ocorrência em 2018. Outro aspeto relevante diz respeito à Categoria B (Relacional) que nos exames em análise foi assumindo relevância, variando entre 2,5% em 2015, 5% em 2016, 20% em 2017 e 26,5% em 2018, vindo reforçar as conclusões acima inferidas no que respeita ao aumento significativo da complexidade dos exames.

7.2 Reflexão final

A avaliação externa é intrínseca ao processo de ensino/aprendizagem e modeladora de vidas. À volta dela funcionam um conjunto de procedimentos que permitem aos alunos e aos professores desempenhar os seus papéis no Sistema Educativo Português, sempre numa perspetiva de promoção do comprometimento e melhoria contínua de cada projeto educativo, capaz de garantir a credibilidade dos estabelecimentos escolares e a correta preparação dos jovens para uma carreira profissional potencialmente de sucesso.

Conforme expresso no site oficial da *Inspeção Geral da Educação e Ciência,* "*cabe à IGEC acompanhar, controlar, avaliar e auditar os estabelecimentos de educação e ensino das redes pública, privada e cooperativa, e solidária, e as escolas europeias, tendo em vista garantir a confiança social na Educação e informar os decisores políticos e a opinião pública*".

A relevância desta avaliação, da responsabilidade do Ministério da Educação, cujo papel é preponderante na sociedade, está envolto num foco constante de discussão, procurando detetar possíveis problemas e limitações, só passíveis de serem ultrapassados na sequência de investigações científicas, sendo útil a existência de investigações, acessíveis a qualquer cidadão, que possam contribuir para a qualidade do Sistema Educativo.

É conhecido por todos a problemática em torno da disciplina de Matemática, o insucesso nesta disciplina. É um processo acumulativo que vai gerando desinteresse e prejudica a aprendizagem dos alunos. E se por um lado a Matemática já exerce esse peso, a avaliação externa vem culminar esse processo, com as escolas a criticar nomeadamente "o peso excessivo do campo de análise resultados académicos nas classificações dos domínios Resultados e dos outros dois domínios" em apreço (Duarte, 2018).

É necessário aproximar a Matemática e o sucesso! Professores, alunos, pais, educadores, decisores políticos, investigadores e demais agentes educativos, devem contribuir positivamente para um crescente interesse pela disciplina, para que esta deixe de ser obstáculo.

Nesta investigação pode aferir-se que em 2015 e em 2016, nos exames de Matemática A, um aluno teria de atingir a Categoria SOLO C, para que fossem alcançados os objetivos mínimos definidos para os exames nacionais de Matemática A. Contudo, em 2017 e 2018, seria necessário que os alunos atingissem maioritariamente a Categoria SOLO C (Multi-estrutural), mas também a B (Relacional). Seria esse o mínimo: complexidade SOLO Multi-estrutural e Relacional.

É preciso que se entenda que chegar a estes níveis de complexidade requer o domínio dos conhecimentos e da sua aplicação envolvendo um trabalho árduo de 12 anos de escolaridade!

"O caminho faz-se caminhando" (Machado, 2012).

Acima de tudo há que levar a avaliação externa no rumo certo, no sentido de existir garantia de uma contribuição positiva no culminar da conclusão do ensino secundário e ponte de acesso ao ensino superior, contribuindo para o futuro de cidadãos ativos na sociedade. E que neste futuro a Matemática possa ser o caminho, pois consubstancia uma área do saber transversalmente importante na vida de qualquer indivíduo na atualidade!

Para terminar, gostaríamos de deixar aqui algumas pistas para trabalhos de investigação futuros. Seria pertinente aferir se existe influência das decisões políticas ao nível dos exames nacionais. Note-se que nesta investigação se realça as alterações significativas que o novo Programa, fruto de imposição do XIX Governo Constitucional, veio ter na complexidade do exame nacional de Matemática A de 2018. Conforme mensagem de Audrey Azoulay, Diretora Geral da UNESCO, por ocasião do Dia Internacional das Matemáticas – 2020,

> As matemáticas, com as suas múltiplas aplicações técnicas, sustentam hoje em dia todas as áreas das nossas vidas (...) Enquanto ferramenta privilegiada e indispensável para entender o mundo e construir o nosso futuro, as matemáticas são uma oferta de generosidade infinita: temos ainda tanto por explorar.

E será com base em todos os contributos prestados e na aplicação de propostas preconizadas, que poderemos acreditar que esse desígnio de "melhorar o atual estado do sistema educativo (...) partilhado por tantos, se torne uma realidade nos próximos anos" (Fernandes, 2008, p. 145).

Bibliografia

Alves, N. & Canário, R. (2004). Escola e Exclusão Social: das promessas às incertezas. Análise Social, vol XXXVIII (169), 981-1010.

Afonso, A. J. (2009). *Políticas avaliativas e accountability em educação – Subsídios para um debate ibero-americano*. Sísifo. Revista de Ciências da Educação, 9, 57-70

Afonso, A.J. (2010). *Gestão, autonomia e accountability na escola pública portuguesa: breve diacronia*. RBPAE, v 26, nº 1, p. 13.30, jan/abr.

Afonso, A. J. (2012). *Para uma concetualização Alternativa de Accountability em Educação*. Ediuc. Soc. Campinas, v. 33, n 119, p. 471-484, Abr-Jun.

Amantes, A. & Borges, O. (2004). *O uso da Taxonomia SOLO como ferramenta metodológica na pesquisa Educacional*", Brasil: Universidade Federal de Minas Gerais

Amaro, M. (2018). Insucesso Escolar e Matemática. Dissertação para a obtenção do Grau de Mestre para a Qualificação para a Docência em Educação Pré-Escolar e Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico. ISEC

Associação de Professores de Matemática (1998). *Matemática 2001: Diagnóstico e recomendações para o ensino e aprendizagem da Matemática*. Lisboa: APM

Azevedo, J. M. (2007). *Estudo: Avaliação das escolas: Fundamentar modelos e operacionalizar processos*. In Conselho Nacional da Educação (Org.), Avaliação das escolas – Modelos e processos (Actas do seminário) (p. 13-99). Lisboa, Portugal: CNE

Azoulay, A. (2020). Dia Internacional das Matemáticas Notícias - Comissão Nacional da UNESCO (Consultado em https://unescoportugal.mne.gov.pt/pt/noticias/mensagem-de-audrey-azoulay-diretora-geral-da-unesco-por-ocasiao-do-dia-mundial-das-matematicas-2020)

Barroso, J. (2004). *A Autonomia das Escolas: Uma Ficção Necessária*. Revista Portuguesa de Educação v. 17, n. 2, p. 49–83.

Bartolomeis, F. (1999). *Avaliação e Orientação – objectivos, instrumentos, métodos*. Lisboa: Livros Horizonte, Lda.

Benavente, A. (2011) Educação Inclusiva, uma Questão de Sociedade | Inclusive Education, a Society Issue | OP.EDU (op-edu.eu). Retirado de http://www.op-edu.eu/artigo/educacao-inclusiva-uma-questao-de-sociedade

Black, P. & William, D. (1998). *Assessment and Classroom Learning. Asessment in Education: Principles, Policy & Practice*, 5,1, p. 7-74.

Biggs, J.B & Collis, K.F. (1982). *Evaluating the quality of learning: the SOLO Taxonomy*, Academic Press.

Bordalba, M. M.& Bochaca, J. G. (2019). *Digital media for family school communication? Parent`s and teacher`s beliefs*. In *Computers & Education*.

Bivar, et al (2015). Programa e Metas Curriculares Matemática do Ensino Secundário. Ministério da Educação, Departamento de Ensino Secundário.

Carvalho e Silva, et al (2001) – Programa de Matemática A - 10.º ano, Ministério da Educação, Departamento de Ensino Secundário.

Carvalho e Silva, et al (2002) – Programa de Matemática A - 11.º ano, Ministério da Educação, Departamento de Ensino Secundário.

Carvalho e Silva, et al (2002) – Programa de Matemática A - 12.º ano, Ministério da Educação, Departamento de Ensino Secundário.

Carvalho e Silva, M. J. (2017). *O Perfil do Gestor da Escola Pública Portuguesa*. Espaço do Currículo, V10, n.º 1 (2017), 82-91, Janeiro a Abril.

Carvalho e Silva, J. & Rosa, A. P. (2003). Novos Programas de Matemática no Ensino Secundário 2003/2004. Gazeta de Matemática nº 145 (julho 2003), p. 10-17.

Catalán, M. A. Rebollo (1993). *Modelos de Evaluación: concepto y tipos*, In Colas Bravo, P. & Rebollo Catalan, M. (1993). Evaluación de programas. Sevilha: Ed. Kronos

Ceia & Duarte (2010). “Os exames e a taxonomia SOLO.”, Comunicação apresentada no XXI Seminário de Investigação em Educação Matemática, Aveiro

Ceia, M. (2018). *Avaliação do conhecimento matemático: um estudo sobre exames*, Portalegre: Escola Superior de Educação – Instituto Politécnico de Portalegre.

Conselho Nacional de Educação (2015). *Pareceres 2015 - Relatório Técnico sobre Retenção nos Ensinos Básico e Secundário*, Lisboa: CNE

Costa & Ventura (2005). A Avaliação e Desenvolvimento Organizacional. Infância e Educação: investigação e práticas, Lisboa, n.º 7, 148-161.

DEB – ME. (2000) *“Programa de Matemática. Ensino secundário”*, Lisboa: Imprensa Nacional Casa da Moeda

Dias Sobrinho, J. (2000). Avaliação da educação superior. Petrópolis: Vozes.

Delors et al, (1996). Educação, um Tesouro a Descobrir. Relatório para a UNESCO da Comissão Internacional sobre Educação para o Século XXI. MEC. Edições Asa.

Duarte, M. L. (coordenação), 2018. A Avaliação Externa das Escolas 2014-2015 a 2016-2017 – Relatório. IGEC, Lisboa. Inspeção-Geral da Educação e Ciência - ePortugal.gov.pt

DGE/GTM, 2019, Recomendações para a melhoria das aprendizagens dos alunos em Matemática. https://www.dge.mec.pt/noticias/recomendacoes-para-melhoria-das-aprendizagens-dos-alunos-em-matematica

D`Hainaut, L. (1980). Educação, dos fins aos objetivos. Edições Almedina.

Duarte, M. L. (coordenação), 2018. A Avaliação Externa das Escolas 2014-2015 a 2016-2017 – Relatório. IGEC, Lisboa. (disponível em ePortugal.gov.pt)

Eurydice – Agência de Execução relativa à Educação, ao Audiovisual e à Cultura, (2009). *Exames nacionais de alunos na Europa: objectivos, organização e utilização dos resultados*, Lisboa: Eurydice

Fernandes, D. (2005). *Avaliação das Aprendizagens: Refletir, Agir, Transformar*. In Futuro Congressos e Eventos (Ed.), Livro do 3.º Congresso Internacional Sobre Avaliação na Educação, p. 65-78. Curitiba: Futuro Eventos.

Fernandes, D. (2007). A avaliação das aprendizagens no sistema educativo português. Educação e Pesquisa, São Paulo, Vol 33, n.º 3, p. 581-600, Set-Dez 2007.

Fernandes, D. (2008). Avaliação das Aprendizagens: Desafios às teorias, Práticas e Políticas. Lisboa, Texto Editores.

Fernandes, D. (2008b) – Para uma Teoria da Avaliação no Domínio das Aprendizagens. Estudos em Avaliação Educacional, volume 19, n.º 41, Set/Dez 2008.

Fernandes, D. (2014). Avaliação das aprendizagens e políticas educativas: o difícil percurso da inclusão e da melhoria. In M. L. Rodrigues (Org.), *Quarenta anos de políticas de educação em Portugal: A construção do sistema democrático de ensino* (Vol. I, p. 231-268). Coimbra: Almedina. http://hdl.handle.net/10451/16010

Fernandéz, F. S. (2006). *As Raizes Históricas dos Modelos Atuais de Educação de Pessoas Adultas.* Cadernos Sísifo 2, EDUCA.

Ferreira, C. A. (2004). Avaliação formativa: Conceptualização e orientações para a prática. Vila Real: Sector Editorial da Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro. Série Didáctica - Ciências Humanas e Sociais.

Filipe, M. A. E. R. (2011). *A Taxonomia SOLO nos Exames Nacionais de Matemática – 9º Ano*. (Dissertação para mestrado). Lisboa: FCT-UNL

Formosinho, J. & Machado, J. (2007). Autonomia e Avaliação de Escolas. Noesis, n.º 70, Julho-Setembro 2007, p. 26-29

Gaspar, I. J. P. P. (2013). *Análise Quantitativa Longitudinal do Desempenho do Ensino Secundário, 2006-2011*. (Dissertação para mestrado). Lisboa: FCT-UNL

Graça, M. (1995). *Avaliação da resolução de problemas* (Tese de mestrado). Universidade de Lisboa. Lisboa: APM

Guba, E. & Lincoln, Y. (1989). Fourth generation evaluation. London: Sage

Hattie, J. A. C. & Brown (2004), G. T. L. "*The Solo taxonomy.*" University of Auckland/Ministry of Education

Leite, M. A. (2004). *Do dizer ao Fazer – Um olhar sobre a avaliação dos alunos a partir dos conselhos de professores* (Dissertação), Porto: Faculdade de Psicologia e de Ciências da Educação da Universidade do Porto

Lemos, V (1993). O Critério do Sucesso. Técnicas de Avaliação da Aprendizagem. Porto, Texto Editora, 5ª Edição.

Lima, L. (2015). *A avaliação institucional como instrumento de racionalização e o retorno à escola como organização formal.* Educação e Pesquisa, Vol 41, Iss spe, p. 1339-1352. https://doi.org/10.1590/S1517-9702201508142521)

Lima, L. (2018). *Lei de Bases do Sistema Educativo (1986). Ruturas, continuidades, apropriações seletivas*. In Revista Portuguesa de Educação, Vol 31. Iss especial, p. 75-91. Universidade do Minho.

Lourenço, A. (2015), *Matemática A: o antes e o depois: o novo programa comentado: ensino secundário*, Lisboa, Porto Editora. (Consultado em https://www.portoeditora.pt/espacoprofessor/assets/newsletters/Matematica-A-ES/MatemticaAAntesDepois.PDF)

Machado, A. (2012). Campos de Castilla. Calamo.

Martins, M. P. (1996). A avaliação das aprendizagens em Matemática (Tese de mestrado). Universidade Católica Portuguesa, Lisboa, APM.

Menezes et al (Organizadores), (2008). Avaliação em Matemática, Problemas e Desafios. Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação. Viseu.

Miguéns, M. (organizador), 2014. Avaliação Externa e Qualidade das Aprendizagens. Seminários e Colóquios, Conselho Nacional de Educação, ISBN: 978-972-8360-88-7.

Moreira, T. (2016). *Os exames nacionais de História A e de Geografia A do Ensino Secundário em Portugal (2005-2015): Estrutura, conteúdo e problematização*. (Dissertação para Mestrado). Faculdade de Letras da Universidade do Porto.

Nóvoa, A. (1992). *Formação de Professores e profissão docente*. Lisboa. Dom Quixote.

Novoa, A. (2009). Professores – Imagens do Futuro Presente. Lisboa, Educa.

Pacheco, J. A. (1991). A Reforma do Sistema Educativo. Alguns aspetos da reorganização dos planos curriculares do ensino básico e secundário em Portugal e Espanha. Revista Portuguesa de Educação, 4 (2), 69-83.

Palau, M. (1997). Tesis Doctoral “Los Niveles de Van Hiele en relacion con la taxonomia SOLO y los mapas conceptuales”. Universitat de Valencia.

Pereira, V. C. A. S. (2019). *Aplicação da Taxonomia Solo na Análise da Qualidade da Avaliação. Validação do Método Analítico por Aplicação aos Exames Nacionais de Matemática A entre 2006 e 2014* (Tese de doutoramento), Vol I, UBI, Covilhã.

Rodrigues, M.L. (2010). A Escola Pública Pode Fazer a Diferença. Coimbra, Almedina.

Roldão, M. do Céu (2014). *Professores, Dilemas de uma Transformação*. In Escola Para Todos, Igualdade, Diversidade e Autonomia. Machado & Alves (Orgs). Universidade Católica Editora, Porto.

Sá, V. (2009). *Ensaio Avaliação Políticas Públicas*. Educ. Rio de Janeiro, v 17, n.º 62, p. 87-108, jan-mar.

Santos, L. (2002). *Auto-avaliação regulada. Avaliação das aprendizagens*, p. 77-84. Lisboa, Ministério da Educação.

Santos, L. (2003). *Avaliar Competências: uma tarefa impossível?* Educação e Matemática, 74, 16-21.

Shepard, L. (2001). *The Role os Assessment in a Learning Culture*. Educational Researcher, 29, 7, p. 4-14

Stufflebeam, D. L., Shinkfield, A. J. & Kluwer-Nijhoff (1985). Systematic Evaluation: A Self-Instructional Guide to Theory and Practice. Kluwer Academic Publishers, Norwell

Veloso, L. & Abrantes, P. (Organizadores), (2013). Sucesso Escolar. Da compreensão do Fenómeno às Estratégias para o Alcançar. Editora Mundos Sociais, CIES, Lisboa.

Vialle, F. & Maisonneuve (1990). 80 Fiches d'Evaluation por la Formation et l'Enseignement. Paris: Les Editions d'Organization

Zabalza, M. (1992). Planificação e Desenvolvimento Curricular na Escola. Porto: Edições ASA.

Dicionário Online de Português, (consultado em https://www.dicio.com.br/taxonomia/ em 27-07-2020)

Documentos Normativos:
Decreto-Lei n.º 139/2012. Diário da República, de 5 de julho de 2012

Documentos consultados
Caderno apoio Matemática A 10.º ano, Ministério da Educação
Caderno apoio Matemática A 11.º ano, Ministério da Educação
Caderno apoio Matemática A 12.º ano, Ministério da Educação

Sites consultados
www.cne.pt
www.iave.pt
www.dge.mec.pt
www.apm.pt