UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Faculdade de Economia

FORMULAÇÃO EM PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA DO MODELO GRAVITACIONAL E SUA INTERPRETAÇÃO ECONÓMICA

J. Dias Coelho

Working paper nº 2

Lição de síntese apresentada nas provas de Agregação em "Métodos e Modelos Econométricos"disciplina de "Programação Matemática", na Faculdade de Economia da Universidade Nova de Lisboa, em 30 de Julho de 1982.

Faculdade de Economia
Universidade Nova de Lisboa
Campo Grande, 185
1700 LISBOA

Janeiro,1983

SUMÁRIO

Neste trabalho estabelece-se relações entre a interacção espacial, a teoria do comportamento e os métodos de optimização. Mostra-se que os modelos de interacção espacial de natureza gravitacional que encontram aplicação em grande número de problemas das ciências sociais, desde a determinação de fluxos de tráfego, ao planemento de unidades hospitalares e à estimação do número de conversas telefónicas interzonais, podem ser explicados pela teoria do comportamento, a partir das premissas habituais da decisão individual, supondo a função utilidade com distribuição aleatória no número de indivíduos. Verifica-se que os modelos de interacção espacial podem ser formulados como problemas de optimização e estabelece-se as relações entre as versões primal e dual, interpretando as respectivas variáveis e analisando as vantagens computacionais de uma e outra versão. Analisa-se ainda a aplicação de métodos de optimização na calibração dos parâmetros destes modelos. Finalmente apresenta-se exemplos de aplicação, nomeadamente ao planemento de actividades urbanas - modelos de planemento urbano da cidade de Santo André e modelo de Lowvy - e à localização de equipamentos.

1. INTRODUÇÃO

O objectivo deste trabalho consiste em sistematizar o tratamento dos modelos gravitacionais, com extensa aplicação em problemas envolvendo interacção espacial tão variados como a estimação de fluxos de tráfego (Wilson,1969), o planemento de unidades hospitalares (Morril e Kelley,1970) e a localização de equipamentos (Coelho e Wilson,1976; Coelho,1980) pela sua formulação como modelos de programação matemática com interpretações estatística , económica e comportamental. Esta última interpretação é de relevância fundamental, na medida em que os modelos gravitacionais foram inicialmente deduzidos por analogia com a lei gravitacional de Newton e encarados como modelos puramente descritivos, sendo portanto crucial a sua inserção e compatibilização com a teoria do comportamento individual, para a validação dos indicadores económicos que decorrem da utilização daqueles modelos em planeamento espacial.

O modelo de interacção espacial é habitualmente definido pelo sistema de equações

$$T_{ij} = A_i B_j O_i D_j f(d_{ij}) \tag{1.1}$$

onde

$$A_i = [\sum_j B_j D_j f(d_{ij})]^{-1} \tag{1.2}$$

$$B_j = [\sum_i A_i O_i f(d_{ij})]^{-1} \tag{1.3}$$

Em termos genéricos, d_{ij} representa uma medida de impedância entre a zona i e a zona j, f é uma função de atrito espacial e A_i B_j são factores de equilíbrio que asseguram, respectivamente, a verificação das seguintes equações

$$\sum_j T_{ij} = O_i \tag{1.4}$$

$$\sum_i T_{ij} = D_j$$

em que O_i e D_j são quantidades associadas à "origem" i e ao "destino" j para as quais se tem

$$\sum_i O_i = \sum_j D_j = T$$

Em muitas aplicações a medida de impedância é definida como o custo generalizado c_{ij} de interacção entre i e j e f apresenta-se como uma função exponencial negativa

$$f(c_{ij}) = \exp(-\beta c_{ij}) \qquad (1.6)$$

ou, uma potência de expoente negativo

$$f(c_{ij}) = c_{ij}^{-\beta} \qquad (1.7)$$

onde β é um parâmetro determinado pela calibração do modelo.

A origem dos modelos de interacção espacial pode ir encontrar-se na analogia com a lei de atracção gravitacional de Newton que estabelece que a força de atracção F entre dois corpos de massas M_1 e M_2 é

$$F = G \frac{M_1 \ M_2}{d^2} \qquad (1.8)$$

onde G é uma constante de atracção gravitacional e d a distância entre os dois corpos. Na aplicação deste conceito à interacção espacial, a força de atracção entre dois corpos é substituída pelo montante de interacção entre duas zonas, enquanto que as massas dos corpos são substituídas por factores de atracção associados às zonas e, por sua vez, a função de atrito f toma o lugar do factor de redução definida pelo inverso do quadrado da distância. Isto explica que os modelos de interacção espacial sejam também chamados modelos gravitacionais.

Naturalmente que o modelo de interacção espacial admite diversas variantes e generalizações. Em particular, é possível não considerar parte ou a totalidade das restrições (1.4) - (1.5), com a con sequente eliminação das correspondentes equações (1.2)-(1.3), obtendo-se assim modelos de interacção espacial sem restrições ou 'simplesmente restringidos', em contraste com o modelo (1.1)-(1.3) que se diz 'duplamente restringido'. Finalmente, modelos desagregados podem obter-se pela consideração de índices suplementares.

Na secção 2, mostra-se que o modelo gravitacional com função de impedância (1.6) é solução do problema de programação matemática

$$\underset{\{\underline{T}\}}{\text{MAX}}\ S = \frac{1}{\beta} \sum_{ij} T_{ij} (\ln T_{ij} - 1) - \sum_{ij} c_{ij} T_{ij} \tag{1.9}$$

sujeito ás condições (1.4) e (1.5). No caso de uma função de impedância arbitrária, o custo c_{ij} deverá ser substituído por $-\frac{1}{\beta}\log f(d_{ij})$.

A função objectivo (1.9) obtém-se por transformação monótona crescente da função de entropia, de onde decorre a interpretação estatística do modelo gravitacional. Admitindo a equiprobalidade dos arranjos possíveis, a distribuição espacial $\{T_{ij}\}$ definida pelo programa (1.9) sujeito a (1.4)-(1.5) é a mais provável satisfazendo as restrições de origem e destino.

Em contraste com o referido modelo primal que, para n zonas, tem n^2 variáveis e 2n restrições, o dual é um problema convexo sem restrições

$$\underset{\{\nu,\gamma\}}{\text{Min}}\ V = \frac{1}{\beta} \sum_{ij} \exp -\beta(\nu_i + \gamma_j + c_{ij}) + \sum_i \nu_i O_i + \sum_j \gamma_j D_j \tag{1.10}$$

que possui apenas 2n variáveis e determina de forma unívoca a solução do problema primal através das condições de estacionaridade que caracterizam a solução óptima. A formulação dual é, portanto, muito mais atraente do ponto de vista computacional.

Considerando o modelo de procura gravitacional, verifica-se que são satisfeitas as condições de integrabilidade de Hotelling

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial c_{k\ell}} = \frac{\partial T_{k\ell}}{\partial c_{ij}} \qquad \forall i,\ k,\ j \text{ e } \ell \tag{1.11}$$

e que o excedente dos consumidores (consumers' surplus) corresponde precisamente à função objectivo (1.9). Daqui decorre a interpretação económica do modelo gravitacional como um modelo de maximização do excedente dos consumidores, desenvolvida na secção 3. Na secção 4, oferece-se uma breve introdução à teoria do comportamento com utilidade eleatória para permitir o enquadramento do modelo de interacção espacial naquela teoria. As propriedades da distribuição de Weibull são apresentadas na secção 5, onde se indicam as razões que levam a considerar a distribuição de Weibull como a mais adequada à descrição de processos extremais com muitas componentes, tal como a lei normal o é para processos aditivos com grande número de parcelas.

Na secção 6, mostra-se que num contexto da teoria do comportamento da utilidade aleatória em que cada indivíduo é suposto ter um comportamento racional, i.e., de maximização da sua utilidade, e esta última é no universo populacional uma variável aleatória, que o valor médio do excedente dos consumidores coincide, a menos de constante, com a função objectivo (9), quando a utilidade tem distribuição de Weibull. Na secção 7, exploram-se os resultados anteriores na calibração do modelo.

2. FORMULAÇÃO EM PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA

O modelo de interacção espacial, que tem natureza descritiva, deveu durante muito tempo a sua razão de ser aos bons resultados práticos a que conduzia, faltando-lhe uma justificação teórica para além da mera analogia com a lei de Newton.

A primeira teorização consistente dos modelos de interacção espacial é devida a Wilson (1967) que se baseou no conceito da maximização de entropia para concluir que aqueles modelos correspondem à distribuição mais provável dos fluxos $\{T_{ij}\}$ compatível com as restrições consideradas.

Para além das restrições de origem e destino (1.4) e (1.5), respectivamente, Wilson considerou na sua dedução do modelo de interacção espacial a restrição suplementar

$$\sum_{ij} c_{ij} T_{ij} = C \tag{2.1}$$

onde c_{ij} é o custo por unidade de fluxo da zona i para a zona j e C o custo total, que está intimamente ligado ao nível de dispersão e consequentemente ao parâmetro β.

Para qualquer distribuição não trivial de fluxos $\{T_{ij}\}$ há muitos arranjos possíveis do total T de unidades de fluxo que originam a mesma configuração. É um simples exercício combinatório mostrar que o número total de arranjos que gera a mesma distribuição $\{T_{ij}\}$ é dado por (Wilson 1967):

$$W(\underline{T}) = \frac{T!}{\prod_{ij} T_{ij}!} \tag{2.2}$$

Assim, a distribuição de fluxos $\{T_{ij}\}$ que tem o maior número de arranjos a si associados e satisfaz as condições (1.3),(1.4) e (2.1) será solução do problema de programação matemática

$$\underset{\{\underline{T}\}}{\mathrm{MAX}}\ W(\underline{T}) = \frac{T!}{\prod_{ij} T_{ij}!} \tag{2.3}$$

sujeito àquelas restrições

Não se dispondo de informação adicional sobre as probalidades dos referidos arranjos, é razoável escolher a distribuição$\{T_{ij}\}$que maximiza (2.3). Por conveniência de cálculo, $W(\underline{T})$ é substituído pelo seu logaritmo, pois atendendo a que a função logaritmo define uma transformação monótona crescente, a maximização de (2.3) não será afectada. A função objectivo pode portanto ser escrita

$$\max_{\{\underline{T}\}} \ln W(\underline{T}) = \ln T! - \sum_{ij} \ln T_{ij}! \tag{2.4}$$

expressão que é equivalente à entropia do sistema definida em mecânica estatística. Utilizando a aproximação de Stirling

$$\ln T_{ij}! = T_{ij} \ln T_{ij} - T_{ij} \tag{2.5}$$

a função objectivo transforma-se em

$$\max_{\{\underline{T}\}} \ln W(\underline{T}) = \ln T! - \sum_{ij} T_{ij} (\ln T_{ij} - 1) \tag{2.6}$$

Ora, uma vez que ln T! é uma constante, o programa final será

$$\max_{\{\underline{T}\}} S = - \sum_{ij} T_{ij} (\ln T_{ij} - 1) \tag{2.7}$$

sujeito a

$$\sum_j T_{ij} = O_i \tag{2.8}$$

$$\sum_i T_{ij} = D_j \tag{2.9}$$

$$\sum_{ij} c_{ij} T_{ij} = C \tag{2.10}$$

Pode mostrar-se fácilmente que a solução óptima deste problema é o modelo de interacção espacial (1.1)-(1.3). Com efeito, construamos a função Lagrangeana do programa (2.7)- (2.10)

$$L = S+\sum_i \nu_i \ (O_i - \sum_j T_{ij}) + \sum_j \gamma_j \ (D_j - \sum_i T_{ij}) + \beta(C-\sum_{ij} c_{ij}T_{ij}) \qquad (2.11)$$

onde ν_i, γ_j e β são os multiplicadores de Langrange associados com as restrições (2.8)-(2.10), respectivamente. As condições necessárias para o óptimo são

$$\frac{\partial L}{\partial T_{ij}} = - \ln T_{ij} - \nu_i - \gamma_j - \beta c_{ij} = 0 \qquad (2.12)$$

e as restrições (2.9)-(2.10) do problema original. A condição (2.12) é por sua vez equivalente a

$$T_{ij} = \exp(-\nu_i - \gamma_j - \beta c_{ij}) \qquad (2.13)$$

e, portanto, escrevendo

$$A_i = \exp(-\nu_i)/O_i \qquad (2.14)$$

$$B_j = \exp(-\gamma_j)/D_j \qquad (2.15)$$

obtem-se o modelo de interacção espacial

$$T_{ij} = A_i B_j O_i D_j \ \exp(-\beta c_{ij}) \qquad (2.16)$$

onde devido às restrições (2.9) e (2.10) os factores de equilíbrio A_i e B_j verificam o sistema de equações

$$A_i = [\sum_j B_j D_j \ \exp(-\beta c_{ij})]^{-1} \qquad (2.17)$$

$$B_j = [\sum_i A_i O_i \ \exp(-\beta c_{ij})]^{-1} \qquad (2.18)$$

Como a função objectivo (2.7) é concâva as condições necessárias (2.16)-(2.18) são também necessárias para a ocorrência de um máximo. Admitindo a equiprobalidade dos arranjos possíveis, a distribuição espacial $\{T_{ij}\}$ definida por (2.16)-(2.1() é a mais provável satisfazendo às restrições de origem, destino e custo total.

Se o parâmetro de dispersão for conhecido, a partir por exemplo de estudos anteriores, o programa de optimização (2.7)-(2.10) pode ser substituído pelo programa equivalente (Coelho e Wilson, 1977)

$$\underset{\{\underline{T}\}}{\text{MAX}}\ S = -\sum_{ij} T_{ij}\,(\ln T_{ij}-1) - \beta \sum_{ij} c_{ij}\,T_{ij} \tag{2.19}$$

sujeito às restrições de origem e destino, não sendo pois necessário o conhecimento do custo total C. O problema não se altera obviamente se (2.19) for dividido por β obtendo-se então a função objectivo

$$\underset{\{\underline{T}\}}{\text{MAX}}\ S = -\frac{1}{\beta}\sum_{ij} T_{ij}\,(\ln T_{ij}-1) - \sum_{ij} c_{ij}\,T_{ij} \tag{2.20}$$

que se mostrará na próximo secção ser a medida de 'excedente dos consumidores' quando a procura de transportes é regulada pelo modelo gravitacional.

É ainda oportuno assinalar que Murchland (1966) sem ser conduzido pelas considerações acima efectuadas, mas demonstrando uma notável intuição e antecipação para a época, já tinha verificado que o modelo gravitacional

$$T_{ij} = a_i b_j e^{-D(c_{ij})} \tag{2.21}$$

onde D é uma função arbitrária dos custos c_{ij} e a_i e b_j são definidos de forma a satisfazer as condições de aditividade (2.8) e (2.9), podia ser gerado pelo problema concâvo de programação matemática

$$\underset{\{\underline{T}\}}{\text{MAX}}\ \sum_{ij} T_{ij}\,[1-\ln T_{ij}-D(c_{ij})] \tag{2.22}$$

sujeito a (2.8) e (2.9), que corresponde a (2.19) com $D(c_{ij})$ igual a βc_{ij}.

Para um conjunto de n zonas o programa (2.20) sujeito a (2.8) e (2.9) tem n^2 variáveis e 2n restrições. Quanto ao seu dual no sentido de Wolfe (1961), teremos

$$\underset{\{\underline{T},\underline{\nu},\underline{\gamma}\}}{\text{Min}}\ V(\underline{T},\underline{\nu},\underline{\gamma}) = -\frac{1}{\beta}\sum_{ij} T_{ij}\,(\ln T_{ij}-1) - \sum_{ij} c_{ij}\,T_{ij}$$

$$- \sum_{ij} T_{ij}\,(-\frac{1}{\beta}\ln T_{ij} - c_{ij})$$

$$+ \sum_i O_i\,\nu_i + \sum_j D_j\,\gamma_j$$

$$= \frac{1}{\beta}\sum_{ij} T_{ij} + \sum_i O_i\,\nu_i + \sum_j D_j\,\gamma_j \qquad (2.23)$$

sujeito à condição Langrangeana

$$T_{ij} = \exp\,[-\,\beta(\nu_i + \gamma_j + c_{ij})] \qquad (2.24)$$

Assim substituindo a condição (2.24) em (2.23), obtém-se o problema convexo sem restrições

$$\underset{\{\underline{\nu},\underline{\gamma}\}}{\text{Min}}\ V = \frac{1}{\beta}\sum_{ij}\exp\,[-\beta(\nu_i + \gamma_j + c_{ij})] + \sum_i \nu_i\,O_i + \sum_j \gamma_j\,D_j \qquad (2.25)$$

que possui apenas 2n variáveis e determina de forma unívoca a solução do problema primal através das condições (2.24) que caracterizam a solução óptima.

A formulação em programação matemática dos modelos de interacção espacial sem restrições ou simplesmente restringidos, coincide com a formulação aqui considerada para o primal, sem as correspondentes restrições e, no problema dual, sem os multiplicadores de Lagrange respectivos.

3. INTERPRETAÇÃO ECONÓMICA DA FUNÇÃO OBJECTIVO

Vamos agora verificar que as funções objectivo (2.20) e (2.25) dos problemas primal e dual representam, na solução óptima, o 'excedente dos consumidores' (consumers' surplus) associado à procura definida pelo modelo gravitacional (2.16)-(2.18).

O 'excedente dos consumidores' foi definido por Marshall (1890, vol.3, p.124) como 'the excess of the price which he would be willing to pay rather than go without the thing, over that which he actually does pay' e, a propósito deste conceito Hicks (1941) sublinhou que se trata de um conceito perfeitamente objectivo na medida em que não envolve 'nothing more introspective or subjective than the demand curve itself'.

Consideremos um único bem ou produto e representemos a sua quantidade e preço por p e q respectivamente. Suponhamos que a função $q=p(q)$ representa a quantidade q que os consumidores adquirem ao preço p; a função inversa $p=p(q)$ estabelece o preço que os consumidores estão dispostos a pagar para adquirirem a quantidade q do bem. Suponha-se ainda que $c(q)$ dá o preço que os produtores estão dispostos a aceitar para produzir a quantidade q e que $q=s(p)$ é a sua função inversa que fornece a quantidade que os produtores oferecerão para venda ao preço p. Sejam p^* e q^* o preço e a quantidade na situação de equilibrio, como é indicado na figura anexa.

O 'excedente dos consumidores' é representado pelo triângulo curvilineo ABC e definido pela expressão

$$CS = \int_{o}^{q^*} [p(q)-p^*]dq = \int_{o}^{q^*} p(q)dq-p^*q^*$$

$$= \int_{p^*}^{+\infty} q(p)dp \qquad (3.1)$$

que determina o total do excesso de preço $p(q) \geq p^*$ que os consumidores estariam dispostos a pagar para não ficarem sem o referido bem.[1]

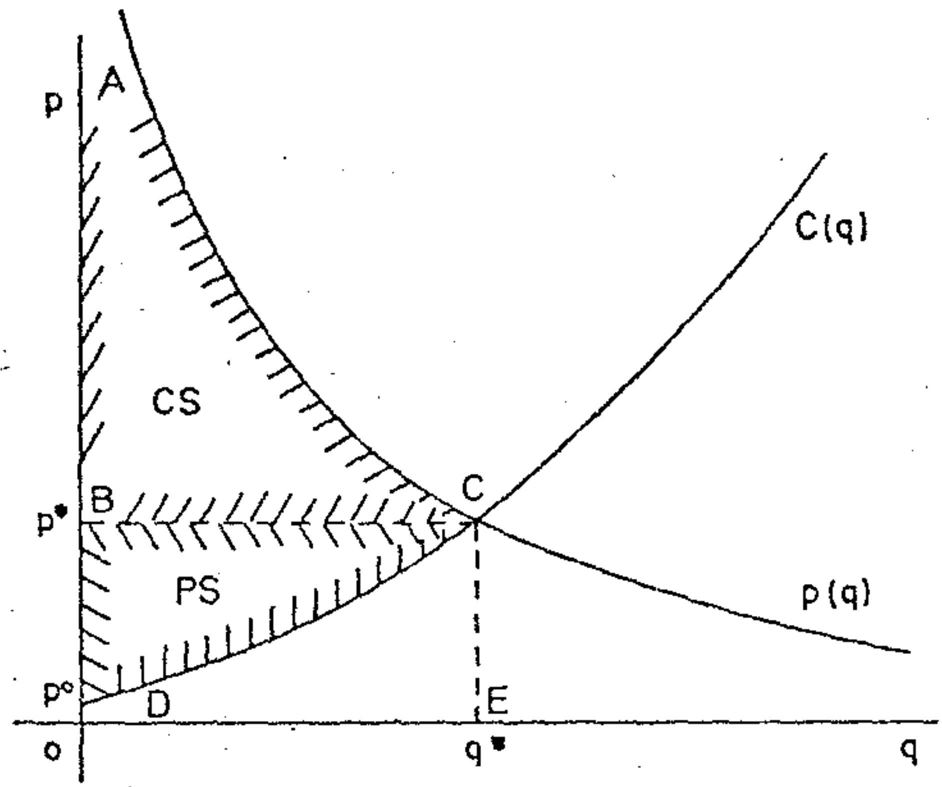

Fig. EXCEDENTE DOS CONSUMIDORES E DOS PRODUTORES

Define-se ainda a 'utilidade' U que representa o benefício total gerado pela produção da quantidade q* do bem e é dada pelo preço total que os consumidores estariam dispostos a pagar para poderem usufruir do bem, por:

$$U = \int_{o}^{q^*} p(q)\,dq \tag{3.2}$$

que corresponde na figura à área ADEC. Tem-se, então,

$$CS = U-C \tag{3.3}$$

onde $C=p^*\, q^*$ é o custo total do referido bem na situação do equilíbrio de mercado.

Estes conceitos podem ser generalizados a um número múltiplo de bens com preços interrelacionados. Consideremos n bens cujas funções de procura e oferta dependem dos preços p_i $(i=1,\ldots,n)$. O 'excedente dos consumidores' define-se então como

$$CS = \sum_{i} \int_{o}^{q^*_i} [p_i\ (q_1\ ,\ \ldots,\ q_n)-p_i^*]\,dq_i$$

$$= \sum_{i} \int_{p^*}^{+\infty} qi\ (p_1\ ,\ldots,\ p_n)\,dp_i \tag{3.4}$$

onde o integral é calculado ao longo de um caminho curvílineo entre as situações inicial e final. Em virtude deste último aspecto, a medida de 'excedente dos consumidores' pode ser ambígua se defender do caminho de integração. Contudo, tal não acontecerá se as funções de procura satisfizerem as seguintes condições de integrabilidade

$$\frac{\partial q_i}{\partial p_j} = \frac{\partial q_j}{\partial p_i} \qquad \text{para todo } i,j \tag{3.5}$$

porque neste caso os integrais serão independentes do caminho de integração (Hotelling, 1938).

A variação no 'excedente dos consumidores' causada por uma alteração do vector preço $(p_1^{*1}, \ldots, p_n^{*1}) \rightarrow (p_1^{*2}, \ldots, p_n^{*2})$ onde os índices superiores 1 e 2 representam os estados inicial e final, respectivamente, é dada por:

$$\Delta CS = -\sum_i \int_{p_i^{*1}}^{p_i^{*2}} q_i \ (p_1, \ldots, p_n) \ dp_i \tag{3.6}$$

Após esta breve introdução ao conceito económico do 'excedente dos consumidores' vamos determinar o 'excedente dos consumidores' associado ao modelo de procura caracterizado pelas equações de interacção espacial (2.16)-(2.18). As primeiras tentativas nesse sentido, numa situação particular, são devidas a Wilson e Kirwan (1969) e Neuberger (1971), tendo os resultados sido generalizados por Williams (1976) e Champernowne, Williams e Coelho (1976).

Consideremos a modificação de custos $\{c_{ij}^1\} \rightarrow \{c_{ij}^2\}$. No caso em estudo a variação no 'excedente dos consumidores' será

$$\Delta CS = -\sum_{ij} \int_{c_{ij}^1}^{c_{ij}^2} T_{ij} \ dc_{ij} \tag{3.7}$$

Ora, atendendo a que na solução óptima do dual

$$\frac{\partial V}{\partial c_{ij}} = -e^{-\beta(\nu_i+\gamma_j+c_{ij})} + \sum_i [O_i - \sum_j e^{-\beta(\nu_i+\gamma_j+c_{ij})}] \frac{\partial \nu_i}{\partial c_{ij}}$$

$$+ \sum_j [D_j - \sum_i e^{-\beta(\nu_i+\gamma_j+c_{ij})}] \frac{\partial \gamma_j}{\partial c_{ij}}$$

$$= -T_{ij} \tag{3.8}$$

pois os termos de (3.8) em parâmetro recto serão nulos. Conclui-se, ainda, por (3.8) que as condições de integrabilidade

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial c_{K\ell}} = \frac{\partial T_{K\ell}}{\partial c_{ij}} \qquad \text{para todo } i,j,K,\ell \tag{3.9}$$

serão verificadas. Feita a substituição de (3.8) em (3.7) obtém-se

$$\Delta CS = \sum_{ij} \int_{c_{ij}^1}^{c_{ij}^2} \frac{\partial V}{\partial c_{ij}} \, dc_{ij} \tag{3.10}$$

$$= V^{2*} - V^{1*} \tag{3.11}$$

$$= \sum_i O_i \, (\nu_i^{2*} - \nu_i^{1*}) + \sum_j D_j (\gamma_j^{2*} - \gamma_j^{1*}) \tag{3.12}$$

onde o asterisco indica que as variáveis são calculadas no óptimo e os índices superiores 1 e 2 representam, como anteriormente, o estado inicial e final, respectivamente. Na passagem de (3.11) a (3.12) utilizou-se o facto de $T = \sum_{ij} T_{ij} = \sum_i O_i = \sum_j D_j$ ser constante.

A variação no 'excedente dos consumidores' pode ainda ser expressa em função das variáveis primais T_{ij} invocando a igualdade

$$V^* = S^* \tag{3.13}$$

que se verifica no óptimo para cada par de programas primais e duais. Assim, tem-se

$$\Delta CS = \left[-\frac{1}{\beta} \sum_{ij} T_{ij} \, (\ln T_{ij} - 1) - \sum_{ij} c_{ij} T_{ij} \right]_{(1)}^{(2)} \tag{3.14}$$

Desprezando termos constantes, a medida de 'excedente dos consumidores' CS e a utilidade U, para o modelo de procura gravitacional (2.13), serão dados por

$$CS = -\frac{1}{\beta} \sum_{ij} T_{ij} (\ln T_{ij} - 1) - \sum_{ij} c_{ij} T_{ij} \tag{3.15}$$

Podemos pois concluir que a medida de 'excedente dos consumidores' coincide com a função objectivo do programa de optimização equivalente ao modelo gravitacional.

A variação no 'excedente dos consumidores' pode também ser expressa em função dos factores de equilíbrio A_i e B_j. Com efeito das relações (2.14) e (2.15) deduz-se, substituindo em (3.12), o seguinte resultado

$$\Delta\ CS = \frac{1}{\beta}[\sum_i O_i \ln \frac{A_i^1}{A_i^2} + \sum_j D_j \ln \frac{B_j^1}{B_j^2}] \tag{3.17}$$

Esta expressão é muito útil para o cálculo da variação no 'excedente dos consumidores' quando o modelo de interacção espacial duplamente restringido (1.1)-(1.3) é resolvido iterativamente pelo método descrito anteriormente, para os estados inicial e final, na medida em que os factores de equilíbrio A_i e B_j são um produto lateral do cálculo de T_{ij}. No caso de um modelo simplesmente restringido as expressões (3.12) e (3.17) reduzem-se, respectivamente, a

$$\Delta\ CS = \sum_i O_i\ (\nu_i^2 - \nu_i^1) \tag{3.18}$$

$$\Delta\ CS = \frac{1}{\beta}\ [\sum_i O_i \ln \frac{A_i^1}{A_i^2}] \tag{3.19}$$

mantendo-se as expressões (3.14)-(3.16) em termos das variáveis primais.

As expressões (3.17) serão ainda utilizadas em §6 para relacionar a medida de 'excedente dos consumidores' com o valor médio do excedente total dos consumidores obtido no contexto de teoria da utilidade aleatória. Neste ponto, vamos relacionar o 'excedente dos consumidores' com o indicador de sensibilidade de Hansen (1959).

Consideremos o modelo gravitacional simplesmente restringido

$$T_{ij} = A_i\ O_i\ W_j^{\alpha}\ \exp(-\beta c_{ij}) \tag{3.20}$$

onde W_j é um factor de atracção associado à zona j e α um parâmetro, com a condição

$$\sum_j T_{ij} = O_i \tag{3.21}$$

de onde decorre

$$A_i = [\sum_j W_j^{\alpha}\ \exp(-\beta c_{ij})]^{-1} \tag{3.22}$$

O indicador de acessibilidade de Hansen associado à zona i é definido por:

$$\phi_i = \sum_j W_j^{\alpha}\ \exp(-\beta c_{ij}) \tag{3.23}$$

$$= A_i^{-1} \tag{3.24}$$

A acessibilidade da zona origem i é portanto definida como a soma para todas as zonas destino j do produto da função de atrito entre i e j pela medida de atracção da zona j. A expressão (3.24) evidencia que a acessibilidade da zona i é igual ao inverso do factor de equilibrio (3.22).

A acessibilidade global é definida por

$$\Phi = \pi_i\ \ \phi_i^{\,O_i} \tag{3.25}$$

que representa uma média do tipo geométrico das acessibilidades para cada uma das zonas. Define-se, ainda, log-acessibilidade

$$\psi_i = \ln \phi_i \tag{3.26}$$

e log-acessibilidade global

$$\Psi = \ln \Phi = \sum_i O_i\ \ln \phi_i \tag{3.27}$$

De (3.19) e (3.24) decorre que

$$\Delta CS = \frac{1}{\beta} [\sum_i O_i \ln \frac{A_i^1}{A_i^2}]$$

$$= \frac{1}{\beta} [\sum_i O_i \ln \frac{\phi_i^2}{\phi_i^1}]$$

$$= \frac{1}{\beta}[\Psi^2 - \Psi^1] \tag{3.28}$$

e, portanto,

$$CS = \frac{1}{\beta} \Psi + C^{te} \tag{3.29}$$

ie, o excedente dos consumidores é uma função linear de log-acessibilidade global. Atendendo a que a função logarítmo é uma função monótona crescente, a maximização do excedente de consumidores é equivalente à maximização da acessibilidade global (vidé Leonardi, 1978).

Finalmente, importa sublinhar que nalgumas aplicações o custo c_{ij} é substituido pela 'utilidade líquida' $(u_{ij} - c_{ij})$. A medida de 'excedente dos consumidores' será, então,

$$CS = \frac{1}{\beta} \sum_{ij} T_{ij} (\ln T_{ij} - 1) + \sum_{ij} (u_{ij} - c_{ij}) T_{ij} \tag{3.30}$$

Definindo-se

$$W_{ij} = e^{\beta u_{ij}} \tag{3.31}$$

obtém-se

$$CS = - \frac{1}{\beta} \sum_{ij} T_{ij} (\ln \frac{T_{ij}}{W_{ij}} - 1) - \sum_{ij} c_{ij} T_{ij} \tag{3.32}$$

$$U = - \frac{1}{\beta} \sum_{ij} T_{ij} (\ln \frac{T_{ij}}{W_{ij}} - 1) \tag{3.33}$$

A maximização de (3.18) sujeito às restrições de origem e des-tino gera o modelo de interacção espacial

$$T_{ij} = A_i B_j O_i D_j \exp[-\beta(u_{ij} - c_{ij})]$$

$$= A_i B_j O_i D_j W_{ij} \exp(-\beta c_{ij}) \qquad (3.34)$$

onde

$$A_i = [\sum_j B_j D_j W_{ij} \exp(-\beta c_{ij})]^{-1} \qquad (3.35)$$

$$B_j = [\sum_j A_i O_i W_{ij} \exp(-\beta c_{ij})]^{-1} \qquad (3.36$$

isto é, os termos de utilidade u_{ij} são convertíveis em factores de atracção W_{ij}, sendo a recíproca igualmente verdadeira.

4. BREVE INTRODUÇÃO À TEORIA DO COMPORTAMENTO COM UTILIDADE ALEATÓRIA

Já notámos anteriormente que o modelo de interacção espacial é um modelo descritivo agregado, que pode ser deduzido usando métodos estatísticos e de teoria de informação que conduzem à sua formulação com problema de programação matemática, sem que tenha sido feita qualquer consideração sobre o comportamento dos indivíduos. Contudo, as medidas de utilidade e de 'excedente dos consumidores' só podem ser completamente entendidas se se atribuir aos indivíduos um comportamento económico racional. Os métodos de estimação de fluxos de transporte tem de ter uma base no comportamento dos indivíduos para possibilitar a compreensão e interpretação dos resultados das previsões. Com vista à transferabilidade no tempo e espaço para situações diferentes daquelas em que os modelos foram desenvolvidos e para avaliação económica dessas situações, é fundamental o suporte fornecido pelo comportamento individual (Brand, 1973). Um método de abordagem com base no comportamento individual satisfazendo as hipóteses fundamentais de racionalidade económica é oferecido pela teoria da utilidade aleatória devida a Luce (1959) e Luce e Suppes (1965) e extensivamente utilizado no passado recente na análise de transportes (McFadden, 1973; Ben-Akiva, 1974; Domencich e McFadden, 1975; Lerman e Ben-Akiva, 1975; Williams, 1977; Wilson, Coelho, Macgill e Williams, 1981). A enfâse deste trabalho consiste em mostrar que a medida de 'excedente dos consumidores' deduzida por integração directa na secção anterior, coincide com o valor médio do excedente total dos consumidores deduzido no contexto da teoria da utilidade aleatória e, que o modelo de interacção espacial (1.1)-(1.3) é igualmente gerado.

Na teoria da utilidade aleatória assume-se que cada indivíduo tem comportamento racional. Assim, um indivíduo que tenha de optar entre um conjunto de alternativas $A = \{A_1, \ldots, A_n\}$ seleccionará a alternativa que lhe oferece o maior 'benefício líquido' ou 'excedente' não negativo. A dispersão que se observa quando membros da população exercem a escolha entre um conjunto de alternativas A é consequência de uma valorização não uniforme dos atributos das alternativas, devido a diferenças de gostos, hábitos sociais e muitos outros factores que levam os indivíduos a atribuir diferentes benefícios líquidos às várias alternativas que confrontam. Embora cada membro da população P atribua uma utilidade bem definida a cada alternativa, na população considerada globalmente a utilidade é uma variável aleatória. O carácter aleatório decorre do facto de que as utilidades individuais são desconhecidas para o observador. Em termo de análise, admite-se portanto que a utilidade usufruida pelos indivíduos é o resultado de uma variável aleatória definida no conjunto dos indivíduos.

Consideremos uma população P exercendo uma escolha num conjunto de alternativas $A=\{A_k\}$ $(k=1, \ldots, n)$ e admitamos que a utilidade associada à alternativa A_k é uma variável aleatória $U_k(\underline{\beta},\underline{Y})$ onde $\underline{\beta}$ é um vector de parâmetro e $\underline{Y}$ é vector dos atributos ou características observáveis do conjundo dasalternativas A e da população P. A variável da utilidade aleatória apresenta-se habitualmente como

$$U_k(\underline{\beta},\underline{Y}) = u_k(\underline{Y}) + \varepsilon_k(\underline{\beta},\underline{Y}) \qquad (4.1)$$

onde $u_k(\underline{Y})$ é uma componente fixa da utilidade que é constante na população P e $\varepsilon_k(\underline{\beta},\underline{Y})$ é a componente de resíduo aleatório da utilidade que origina a dispersão de preferências. Escreveremos

$$S_k(\underline{\beta},\underline{Y}) = U_k(\underline{\beta},\underline{Y}) - c_k(\underline{Y}) \qquad (4.2)$$

$$= u_k(\underline{Y}) - c_k(\underline{Y}) + \varepsilon_k(\underline{\beta},\underline{Y}) \qquad (4.3)$$

onde $S_k(\underline{\beta},\underline{Y})$ é o 'excedente' ou benefício líquido' e $c_k(\underline{Y})$ o custo de seleccionar a alternativa A_k. Por simplicidade, eliminaremos os argumentos $\underline{\beta}$ e $\underline{Y}$ e escreveremos simplesmente

$$S_k = u_k - c_k + \varepsilon_k \qquad (4.4)$$

Atendento a que os membros da população P seleccionam a alternativa que lhes oferece o maior excedente não negativo, a probabilidade da alternativa k ser escolhida é:

$$P_k = \text{Prob}\ \{S_k \geq 0 \text{ e } S_k \geq S_i \quad \text{para todo } A_i \varepsilon A\} \tag{4.5}$$

isto é,

$$P_k = \int_{Z_k} \phi(s_1, \ldots, s_k, \ldots, s_n) ds_1 \ \ldots \ ds_n \tag{4.6}$$

onde ϕ é a função de densidade do vector de excedente aleatório ($s_1, \ldots$ $\ldots, s_k, \ldots, s_n$) e Z_k o domínio definido por (4.5). A probabilidade de nenhuma alternativa ser seleccionada será evidentemente

$$P_o = 1 - \sum_k P_k \tag{4.7}$$

Uma classe importante de problemas verifica a hipótese de independância das variáveis aleatórias S_k (ou de forma equivalente, Σ_k). Em termos de teoria do comportamento, isto significa que o excedente atribuído por um indivíduo a qualquer alternativa é independente das outras alternativas que ele confronta. Se $\Phi_k(s)$ é a função distribuição do excedente associado com a alternativa A_k e $\phi_k(s) = \frac{d}{ds} \Phi_k(s)$ é a sua função densidade de probabilidade, então na hipótese de independância das variáveis aleatórias S_k, a probabilidade da alternativa A_k ser escolhida pode escrever-se como segue:

$$P_k = \int_0^{+\infty} \phi_k(S) [\prod_{i \neq k} \Phi_i (S)] dS \tag{4.8}$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{\phi k\ (S)}{\Phi k\ (S)} [\prod_i \Phi_i \ (S)] dS$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{\phi k\ (S)}{\Phi k\ (S)} [\prod_i \int_{-\infty}^{S} \phi_i \ (S')] dS'$$

Esta expressão estabelece que a probabilidade P_k é igual à probabilidade do excedente atribuído à alternativa A_k estar numa vizinhança infinitesimal de $s \geq o$ e de o excedente associado a cada uma das outras alternativas ser inferior ou igual a s.

É ainda de realçar o caso em que a escolha de uma alternativa é obrigatória. Isto é equivalente a dizer que o indivíduo tem de seleccionar uma alternativa mesmo que todas as alternativas ofereçam excedente negativo. Esta situação surge, por exemplo, com certo tipo de deslocações obrigatórias (Boulanger, 1971) ou quando a análise está já confinada apenas ao grupo de indivíduos que efectivamente exerceram uma escolha (Cochrane, 1975). Neste caso a probabilidade de um 'excedente negativo' supõe-se ser zero ou, em termos equivalentes, faz-se a hipótese que o P_O definido em (4.7) é igual a zero A probabilidade P_K' de seleccionar a alternativa A_k será então,

$$P_k'' = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_k'(S) \; [\prod_{i \neq k} \Phi_i(S)] dS \tag{4.9}$$

Vamos agora deduzir e expressão do valor médio do excedente resultante do processo de escolha individual implícito em (4.8) e (4.9). Primeiro, defina-se $H = \{\max\; \max_i S_i,\; 0\}$ que representa a variável aleatória do excedente máximo não negativo. Se todas as alternativas oferecem excedente negativo, nenhuma alternativa será seleccionada e H tomará o valor zero. Na hipótese de independância, a função de distribuição de H será:

$$\Phi_H(S) = \begin{cases} \prod_i \Phi_i(S) & S \geq 0 \\ 0 & S < 0 \end{cases} \tag{4.10}$$

Assim,o excedente médio $\bar{S}$ na população P é dado por:

$$\bar{S} = \int_{0}^{+\infty} S \frac{d}{dS} \Phi_H(S) dS$$

$$= \sum_k \int_0^{+\infty} S \phi_k(S) [\prod_{i \neq k} \Phi_i(S)] dS$$

$$= \sum_k \int_0^{+\infty} \frac{S}{P_k} \phi_k(S) \; [\prod_{i \neq k} \Phi_i(S)] dS . P_k$$

$$= \sum_k \bar{S}_k P_k \tag{4.11}$$

onde

$$\bar{S}_k = \int_0^{+\infty} \frac{1}{P_K} S \phi_k(S) \; [\prod_{i \neq k} \Phi_i(S)] dS \tag{4.12}$$

representa o excedente médio para aqueles que efectivamente escolham a alternativa A_k. Este resultado estende-se facilmente ao caso em que a escolha de uma alternativa é obrigatória. O excedente médio é nessa hipótese

$$\overline{S} = \int_{-\infty}^{+\infty} S \frac{d}{dS} \Phi_G(S)\, dS \tag{4.13}$$

onde

$$\Phi_G(S) = \underset{i}{\pi}\, \Phi_i(S) \tag{4.14}$$

é a função distribuição de $G = \max\limits_i S_i$. Assim

$$\overline{S} = \sum_k \int_{-\infty}^{+\infty} S\, \phi_k(S) \left[\underset{i \neq k}{\pi}\, \Phi_i(S) \right] dS \tag{4.15}$$

$$= \sum_k \overline{S}_k P'_k \tag{4.16}$$

onde $\overline{S}_k$ é agora definido por

$$\overline{S}_k = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{P'_k} S\, \phi_k(S) \left[\underset{i \neq k}{\pi}\, \Phi_i(S) \right] dS \tag{4.17}$$

o excedente médio total para a população P será dado por

$$S = \# P . \overline{S} \tag{4.18}$$

onde $\#P$ representa o número de elementos da população P.

$$\Psi(S) = \exp\left[-e^{-\beta(S-m)}\right] \tag{5.5}$$

onde

$$m = \frac{1}{\beta} \ln \alpha \tag{5.6}$$

Para finalizar, enunciaremos três propriedades de distribuição de Weibull que nos serão úteis na secção seguinte. Suponhamos que as variáveis $S_i (i=1, \ldots, n)$ têm distribuição de Weibull independentes com parâmetros α_i e β fixo.

Propriedade (i) $G = \max_i S_i$ tem distribuição de Weibull com parâmetro

$$\alpha = \sum_i \alpha_i$$

Propriedade (ii) Dada uma constante real C arbitrária, a variável $S_i + C$ tem distribuição de Weibull com parâmetro

$$\alpha_i' = \alpha_i \, e^{-\beta C}$$

Propriedade (iii) $P_k = \text{Prob}\,[s_k \geq S_j, \text{ para todo o } j]$ (5.7)

$$= \frac{\alpha_k}{\sum_j \alpha_j} \tag{5.8}$$

$$= \frac{e^{m_k}}{\sum_j e^{m_j}} \tag{5.9}$$

onde $m_k (k=1, \ldots, n)$ é definido por (5.6).

6. A INTERACÇÃO ESPACIAL NA TEORIA DA UTILIDADE ALEATÓRIA

Nesta secção vamos apresentar uma outra dedução do modelo de interacção espacial baseada na teoria da utilidade aleatória. Esta dedução estende a apresentada por Cochrane (1975) para modelos de interacção espacial simplesmente restringidos, aos modelos duplamente restringidos e permite, ainda, estabelecer a ligação entre as noções de comportamento racional dos indivíduos e a formulação matemática desta família de modelos.

Consideremos primeiro a situação em que um grupo de indivíduos na zona i, O_i, tem de escolher entre um conjunto de localizações alternativas $A = \{A_1, \ldots, A_n\}$ para um determinado tipo de actividade.

Faremos a hipótese que o número de indivíduos da zona i é fixo, enquanto que o número daqueles que seleccionam cada uma das alternativas não está determinado à priori, o que corresponde típicamente a uma situação simulada por um modelo de interacção espacial simplesmente restringido. Seja $S_{ij}(\underline{\beta},\underline{Y})$ a variável aleatória que representa o 'excedente' para um indivíduo na zona i quando escolher a localização j, onde $\underline{Y}$ é o vector dos atributos observáveis e $\underline{\beta}$ o vector dos parâmetros da componente aleatória. Como anteriormente, escrevemos

$$S_{ij}(\underline{\beta},\underline{Y}) = u_{ij}(\underline{Y}) - c_{ij}(\underline{Y}) + \varepsilon_{ij}(\underline{\beta},\underline{Y}) \qquad (6.1)$$

onde $u_{ij}(\underline{Y})$ é a componente fixa da utilidade associada à localização j pela população da zona i, $c_{ij}(\underline{Y})$ o custo total daquela alternativa e $\varepsilon_{ij}(\underline{\beta},\underline{Y})$ a componente aleatória da utilidade que gera a dispersão nas preferências. Pelas razões expostas na secção anterior é natural supor que ε_{ij} é uma variável aleatória de Weibull com função distribuição

$$\Phi_{ij}(S) = \exp[-W_j e^{-\beta S}] \qquad (6.2)$$

onde W_j é um factor de atracção associado à localizaçšo j e β um parâmetro. O factor W_j pode também ser interpretado como uma probabilidade de à priori associada a alternativa j. O parâmetro está relacionado com o desvio padrão da componente aleatória da utilidade ε_{ij} por

$$\beta = \frac{\pi}{\sqrt{6}\sigma} \tag{6.3}$$

Pela propriedade (ii) do § 5, a função distribuição do 'benefício líquido' (6.1) será:

$$\Phi_{ij}(S) = \exp[-W_j e^{-\beta(S-u_{ij}+c_{ij})}] \tag{6.4}$$

Por outro lado, admitindo a independância das componentes residuais ε_{ij}, a probabilidade da alternativa j oferecer a 'utilidade líquida' máxima a um indivíduo da zona i, será em virtude da propriedade (iii):

$$P_{ij} = \frac{W_j e^{\beta(u_{ij}-c_{ij})}}{\sum_j W_j e^{\beta(u_{ij}-c_{ij})}} \tag{6.5}$$

Assim, o número médio de indivíduos da zona i que seleccionará a alternativa j é dado por

$$T_{ij} = O_i \cdot P_{ij}$$

$$= \frac{O_i W_j e^{\beta(u_{ij}-c_{ij})}}{\sum_j W_j e^{\beta(u_{ij}-c_{ij})}}$$

$$= A_i O_i W_j \exp[\beta(u_{ij}-c_{ij})] \tag{6.6}$$

onde

$$A_i = [\sum_j W_j e^{\beta(u_{ij}-c_{ij})}]^{-1} \tag{6.7}$$

que é um modelo convencional de interacção espacial simplesmente restringido. Em particular, se as componentes de utilidade u_{ij} forem iguais para todas as alternativas então poderão ser eliminados obtendo-se a versão mais simples

$$T_{ij} = A_i O_i W_j \exp(-\beta c_{ij}) \tag{6.8}$$

com

$$A_i = [\sum_j W_j e^{-\beta c_{ij}}]^{-1} \tag{6.9}$$

Na dedução de (6.6)-(6.7) assumimos implicitamente que a alternativa j é efectivamente seleccionada mesmo que o 'excedente' S_{ij} seja negativo, desde que seja aquela alternativa que ofereça o 'excedente' máximo. Como já frisámos anteriormente, isto corresponde a limitar a análise ao grupo de indivíduos que efectivamente exercem uma escolha, para os quais a probabilidade de um 'excedente' negativo é suposta ser zero.

É imediato verificar, à semelhança do que foi efectuado na secção 2, que (6.6)-(6.7) pode ser gerado pelo programa de optimização

$$\max_{\{T_{ij}\}} Z = -\frac{1}{\beta} \sum_{ij} T_{ij}(\ln \frac{T_{ij}}{W_j} - 1) + \sum_{ij} T_{ij}(u_{ij} - c_{ij}) \tag{6.10}$$

sujeito a

$$\sum_j T_{ij} = O_i \tag{6.11}$$

cujo programa dual é

$$\min_{\{\nu_i\}} V = \frac{1}{\beta} \sum_{ij} W_j e^{\beta(u_{ij} - \nu_i - c_{ij})} + \sum_i \nu_i O_i \tag{6.12}$$

Tendo-se ainda as seguintes condições de estacionaridade

$$T_{ij} = W_j e^{(u_{ij} - \nu_i - c_{ij})} \tag{6.13}$$

que caracterizam a solução óptima, onde ν_i é a variável dual da igualdade de (6.11), a qual está relacionada com o factor de equilíbrio A_i através da condição

$$\nu_i = - \frac{1}{\beta} \ln O_i A_i \tag{6.14}$$

Estes problemas reproduzem a nível agregado a variabilidade do comportamento individual. Dispondo (6.10) como se segue

$$Z = \sum_{ij} T_{ij} [u_{ij} - c_{ij} - \frac{1}{\beta} (\ln \frac{T_{ij}}{W_j} - 1)] \tag{6.15}$$

é claro que o problema da escolha de alternativa para o 'grupo' que exerce essa escolha, é formulado agregadamente em termos da expressão de 'excedente' $[u_{ij} - c_{ij} - \frac{1}{\beta}(\ln \frac{T_{ij}}{W_j} - 1)]$. O programa de optimização (6.10)-- (6.11) expressa a maximização do 'excedente total do grupo' e reproduz a dispersão inerente à escolha individual considerada no contexto da teoria da utilidade aleatória.

O modelo de interacção espacial duplamente restringido é também deduzido fácilmente na estrutura da utilidade aleatória. Consideremos a restrição adicional

$$\sum_i T_{ij} = D_j \tag{6.16}$$

Associado a estas restrições teremos 'preços sombra' que harmonizam o resultado do processo de escolha com as referidas condições. Quando o número de indivíduos que seleccionam a alternativa j é livre então $(\sum_j T_{ij})$ pode ser maior, igual ou inferior à quantidade D_j. No primeiro caso, um 'preço sombra' positivo representando uma 'renda' associada à alternativa j tem de ser tido em conta para assegurar que a restrição (6.16) seja verificada. No último caso, tem de se introduzir um 'preço sombra' negativo representando um 'subsídio' atribuído àqueles que seleccionam a alternativa j, para a verificação da restrição. Assim, iremos supôr que a função distribuição da variável de 'excedente' aleatória S_{ij} é

$$\Phi_{ij}(S) = \exp[-e^{-\beta(S-u_{ij}+\gamma_j+c_{ij})}] \tag{6.17}$$

onde γ_j é o preço sombra (positivo ou negativo) da alternativa j, definido de forma a verificar-se (6.16). A probabilidade de que a alternativa j ofereça o 'excedente' máximo a um indivíduo localizado em i será, então,

$$P_{ij} = \frac{e^{\beta(u_{ij}-\gamma_j-c_{ij})}}{\sum_j e^{\beta(u_{ij}-\gamma_j-c_{ij})}} \tag{6.18}$$

o número de indivíduos em i que seleccionam a alternativa j é

$$T_{ij} = O_i \cdot P_{ij} \tag{6.19}$$

Definido, à semelhança de (6.14),

$$\gamma_j = -\frac{1}{\beta} \ln B_j D_j \tag{6.20}$$

ter-se-á

$$T_{ij} = A_i B_j O_i D_j \exp[\beta(u_{ij}-c_{ij})] \tag{6.21}$$

onde

$$A_i = [\sum_j B_j D_j \; e^{\beta(u_{ij}-c_{ij})}]^{-1} \tag{6.22}$$

e

$$B_j = [\sum_i A_i O_i \; e^{\beta(u_{ij}-c_{ij})}]^{-1} \tag{6.23}$$

Deste modo, gerou-se igualmente o modelo de interacção espacial duplamente restringido, através do processo de escolha individual, no enquadramento definido pela teoria da utilidade aleatória. Naturalmente, o modelo (6.21)-(6.23) é igualmente gerado considerando o grupo de indivíduos D_j na alternativa de localização j, exercendo a escolha no conjunto das zonas de origem i. Os preços sombra ν_i representarão do mesmo modo a 'renda' ou 'subsídio' associado à zona de origem i para assegurar que a procura seja consistente com a correspondente restrição. Associado ao modelo (6.21)-(6.23) tem-se o programa de optimização

$$\max_{\{T_{ij}\}} Z = -\frac{1}{\beta} \sum_{ij} T_{ij}(\ln T_{ij}-1) + \sum_{ij} T_{ij}(u_{ij}-c_{ij}) \tag{6.24}$$

sujeito às restrições (6.11) e (6.16), cujo programa dual é:

$$\min_{\{\nu_i, \gamma_j\}} V = \frac{1}{\beta} \sum_{ij} e^{\beta(u_{ij}-\nu_i-\gamma_j-c_{ij})} + \sum_i \nu_i O_i + \sum_j \gamma_j D_j \tag{6.25}$$

sendo a estacionaridade

$$T_{ij} = e^{\beta(u_{ij}-\nu_i-\gamma_j-c_{ij})} \tag{6.26}$$

onde as variáveis duais ν_i e γ_j estão relacionadas com o factor de equilíbrio A_i e B_j através de (6.14) e (6.20), respectivamente. As variáveis duais ν_i e γ_j são, portanto, formalmente idênticas aos preços sombra introduzidos anteriormente.

O valor médio do 'excedente' total recolhido pela população P que exerce a escolha entre o conjunto de alternativas, de acordo com o modelo de utilidade aleatória acima exposto, é facilmente obtido de (4.11) e (4.18). Consideremos primeiro o modelo de interacção espacial simplesmente restringido, que é gerado supondo as variáveis aleatórias S_{ij} com distribuição de Weibull. A variável $S_i = \max_j S_{ij}$, que representa o 'excedente' máximo de que beneficiam os indivíduos da zona i pelas alternativas que confrontam, é uma variável de Weibull, em virtude da propriedade (i) da secção 5, com função de distribuição

$$\Psi_i\ (S) = \exp[-(\sum_j W_j e^{\beta(u_{ij}-c_{ij})})e^{-\beta S}] \qquad (6.27)$$

o excedente médio $\overline{S}_i$ será por (5.3)

$$\overline{S}_i = \frac{1}{\beta}\ [\ln(\sum_j W_j e^{\beta(u_{ij}-c_{ij})})+0.577...] \qquad (6.28)$$

Assim o valor médio do excedente total é

$$S = \sum_i O_i \overline{S}_i \qquad (6.29)$$

$$= \frac{1}{\beta}\ \sum_i O_i \ln\ (\sum_j W_j e^{\beta(u_{ij}-c_{ij})}) + \text{constante} \qquad (6.30$$

A variação de 'excedente' resultante de uma mudança entre duas situações 1 e 2 é, portanto,

$$\Delta S = \frac{1}{\beta}\ \sum_i O_i\ \ln \frac{[\sum_j W_j e^{\beta(u_{ij}-c_{ij})}]^{(2)}}{[\sum_j W_j e^{\beta(u_{ij}-c_{ij})}]^{(1)}} \qquad (6.31)$$

onde os índices (1) e (2) indicam que as quantidades dentro dos parêntesis rectos são calculadas nas situações 1 e 2 respectivamente. Usando a definição (6.7) dos factores de equilíbrio A_i, a expressão acima transforma-se em

$$\Delta S = \frac{1}{\beta}\ \sum_i O_i\ \ln \frac{A_i^{\ 2}}{A_i^{\ 1}} \qquad (6.32)$$

e de (6.14) tiramos

$$\Delta S = \sum_i O_i\ (\nu_i^{\ 2} - \nu_i^{\ 1}) \qquad (6.33)$$

Estas expressões coincidem com as obtidas anteriormente (3.18) e (3.19) na secção 3, através da integração directa do modelo de procura de interacção espacial simplesmente restringido. Em termos das variáveis primais do programa de optimização (6.10) - (6.11) a variação de excedente total é dada por:

$$\Delta S = [-\frac{1}{\beta} \sum_{ij} T_{ij}(\ln \frac{T_{ij}}{W_j} - 1) + \sum_{ij} T_{ij}(u_{ij} - c_{ij})]_{(1)}^{(2)} \qquad (6.34)$$

onde os termos em parêntesis recto são calculados na solução óptima para as situações 1 e 2. Esta última expressão é deduzida directamente de (6.33) evocando a igualdade entre as funções objectivo dos problemas primal e dual e atendento a que o número total de deslocações na solução óptima é fixo e igual a ($\sum_i O_i$). A interpretação da função objectivo (6.10) como uma função de 'excedente dos consumidores' é portanto completamente consistente com a dedução do modelo de interacção espacial simplesmente restringido no contexto da teoria de utilidade aleatória e com a definição de 'excedente' de Marshall/Hotelling.

No caso do modelo de interacção espacial duplamente restringido, notemos que o preço sombra γ_j introduzido na função distribuição (6.17) é de facto a componente de 'excedente' dos consumidores (positiva ou negativa) representando a transferência entre os indivíduos e outros indivíduos ou a sociedade, na forma de 'rendas' ou 'subsídios'. O valor médio do 'excedente' recolhido por um indivíduo na zona i que selecciona a alternativa j é, portanto,

$$\bar{s}_{ij} = \bar{s}_i + \gamma_j \qquad (6.35)$$

onde

$$\bar{s}_i = \frac{1}{\beta} [\ln(\sum_j B_j D_j e^{\beta(u_{ij} - c_{ij})}) + 0.577...] \qquad (6.36)$$

o 'excedente' total será

$$S = \sum_{ij} T_{ij}(\bar{s}_i + \gamma_j) \qquad (6.37)$$

$$= \frac{1}{\beta}(\sum_i O_i \ln A_i^{-1} + \sum_j D_j \ln B_j^{-1}) + \text{constante} \qquad (6.38)$$

$$= \sum_i \nu_i O_i + \sum_j \gamma_j D_j + \text{constante} \qquad (6.39)$$

A variação no excedente total resultante de uma mudança entre as situações 1 e 2 é igual a

$$\Delta S = + \frac{1}{\beta} \left[\sum_i O_i \ln \frac{A_i^{\,1}}{A_i^{\,2}} + \sum_j D_j \ln \frac{B_j^{\,1}}{B_j^{\,2}} \right] \tag{6.40}$$

$$= \sum_i O_i (\nu_i^{\,2} - \nu_i^{\,1}) + \sum_j D_j (\gamma_j^{\,2} - \gamma_j^{\,1}) \tag{6.41}$$

$$= \left[- \frac{1}{\beta} \sum_{ij} T_{ij} \left(\ln \frac{T_{ij}}{W_j} - 1 \right) + \sum_{ij} T_{ij} (u_{ij} - c_{ij}) \right]_{(1)}^{(2)} \tag{6.42}$$

O que coincide integralmente com o resultado obtido em §3, usando o conceito económico clássico de excedente dos consumidores.

7. CALIBRAÇÃO DO MODELO

Pode mostrar-se (Hyman, 1969) que o estimador óptimo do parâmetro do modelo de interacção espacial (2.16)-(2.18) é determinado pela solução da equação

$$\sum_{ij} T_{ij} c_{ij} = \sum_{ij} T_{ij}^{(obs.)} c_{ij} = C^{(obs.)} \tag{7.1}$$

onde $T_{ij}^{(obs.)}$ e $C^{(obs.)}$ são respectivamente os fluxos e o custo total observado. Daqui decorre o método clássico de calibração do modelo que consiste em partir de uma estimativa inicial , resolver iterativamente o sistema de equações (2.16)-(2.18), ajustar a estimativa inicial em função da diferença entre o custo calculado e o custo observado, utilizando eventualmente um método de pesquisa univariada para minimizar aquela diferença, tal como por exemplo os algoritmos de Newton-Raphson ou de 'Golden Section', repetindo o processo até que a diferença entre os dois custos seja tão pequena quanto se deseje.

Dado que o parâmetro β é o multiplicador de Langrange da restrição (2.10) na formulação em programação matemática do modelo de interacção espacial, a resolução do respectivo programa dual fornece um método directo de calibração do referido modelo. Para uma aplicação concreta ao Estudo de Transportes da Área Metropolitana de Leeds ver Champernowne, Williams e Coelho (1976). Este resultado é consistente para o estimador de Hyman (1969), em cuja dedução aquele autor mostrou que a distribuição $\{T_{ij}\}$ que dá o melhor ajustamento possíevl à distribuição observada T_{ij}^{obs} é gerada pela maximização da expressão

$$\sum_{ij} T_{ij}^{(obs.)} \ln(T_{ij}) \tag{7.2}$$

onde T_{ij} é definido por (2.13)-(2.15), que representa uma transformação da medida de evidência estatística definida por Tribus (1968).

Uma via alternativa para a calibração do modelo consiste na utilização da igualdade (6.3) que estabelece que o parâmetro β é inversamente proporcional ao desvio padrão da distribuição da utilidade, o qual representa pois uma medida de dispersão das preferências individuais.

8. EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

Nesta secção apresenta-se sucintamente três exemplos de aplicação do método de integração da interacção espacial, pela via de maximização do excedente dos consumidores, que se expôs acima, ao planeamento de actividades urbanas e à localização de equipamentos:

(i) Modelo de Planeamento Urbano de Santo André (Coelho, 1979)

Este modelo enquadra-se numa família geral de modelos de planeamento espacial de actividades urbanas, em que a interacção espacial é gerada pela maximização do 'excedente dos consumidores', designado neste contexto juntamente com o 'excedente dos produtores' por 'excedente locacional'. Esta família de modelos LSM (Locational-Surplus Maximisation) corresponde à seguinte formulação (Coelho e Williams,1979):

Maximizar S_L = Excedente locacional total
= Excedente dos consumidores + Excedente dos produtores

sujeito a restrições de

(i) Consistência

(ii) Base Económica

(iii) Equilíbrio do Mercado

(iv) Planeamento

(v) Não-negatividade das variáveis de planeamento e de interacção

No estudo de Santo André, os objectivos ligados à aplicação do modelo consistiam em:

1. Obter a distribuição espacial óptima das áreas residenciais;
2. Localizar o emprego não-fixo, nomeadamente as áreas de comércio e serviços e a distribuição da indústria ligeira (a localização da indústria pesada é conhecida);

3. Determinar os fluxos de transporte consistentes com a distribuição espacial de habitação e emprego.

As actividades de comércio e serviços foram desagregadas em três sectores, consoante estão associadas ao centro principal, a centros secundários ou a zonas de recreio e lazer. Esta desagregação está em correspondência com uma decomposição das deslocações para comércio e serviços por sectores e têm uma conotação espacial dado que cada tipo de actividade tem localizações específicas.

Consideraram-se limites superiores na população de cada zona residencial decorrentes de densidades máximas admissíveis, que coincidem com a população da zona para aquelas zonas com população fixa, em virtude da existência de projectos já em curso de construção.

A localização da indústria pesada é suposto um dado do modelo, enquanto que a distribuição da indústria ligeira é sujeita ao processo de optimização.

Em virtude das zonas urbanas consideradas possuirem características geológicas e topográficas sensivelmente equivalentes, os custos de urbanização e construção são omitidos, sendo portanto a função objectivo identificada com a maximização do excedente dos consumidores.

Definem-se os seguintes conjuntos de índices:

I - Zonas residenciais
I_o - Zonas residenciais com população fixa
J - Zonas de emprego
J_1 - Centro principal
J_2 - Centros secundários
J_3 - Zonas de recreio e lazer
J_4 - Zonas de indústria ligeira
J_5 - Zonas de indústria pesada

O modelo de planeamento urbano da cidade de Santo André tem a seguinte formulação:

$$\underset{\{\underline{T},\underline{S},\underline{E}^{LI}\}}{\mathrm{Max}} = -\frac{1}{\beta^R}\sum_{\substack{i\varepsilon I\\ I\varepsilon J}} T_{ij}\left(\ln\frac{T_{ij}}{W_i^R}-1\right)-\sum_{\substack{i\varepsilon I\\ j\varepsilon J}} C_{ij}^R\, T_{ij}$$

$$-\sum_{k\varepsilon k}\frac{1}{\beta^{Sk}}\sum_{\substack{i\varepsilon I\\ j\varepsilon J}} S_{ij}^k\left(\ln\frac{S_{ij}^k}{W_j^{Sk}}-1\right)-\sum_{\substack{i\varepsilon I\\ j\varepsilon J\\ k\varepsilon K}} C_{ij}^{Sk}\, S_{ij}^k \qquad (8.1)$$

sujeito a

(i) Condição de consistência

$$\sum_{j\varepsilon J} T_{ij} - a^{(1)k}\sum_{j\varepsilon J_k} S_{ij}^k = 0 \qquad \text{para } i\varepsilon I,\ k\varepsilon K \qquad (8.2)$$

(ii) Condição da base econômica

$$\sum_{i\varepsilon I} T_{ij} - \sum_{\substack{k\varepsilon K\\ j\varepsilon J_k}} a^{(2)k}\sum_{i\varepsilon I} S_{ij}^k - \delta^4(j)\ b^{(2)}E_j^{LI} = E_j^{HI} \qquad \text{para } j\varepsilon J \qquad (8.3)$$

onde

$$\delta_j^4\ (j) = \begin{cases} 1 & \text{para } j\varepsilon J_4 \\ 0 & \text{no caso contrário} \end{cases} \qquad (8.4)$$

(iii) Restrição de densidade (limites superiores da população)

$$\sum_{j\varepsilon J} T_{ij} \begin{cases} \leq a^{(3)}\overline{P}_i & \text{para } i\varepsilon I - I_o \\ = a^{(3)}\overline{P}_i & \text{para } i\varepsilon I_o \end{cases} \qquad (8.5)$$

onde $\overline{P}_i$ é o limite superior da população da zona i:

(IV) Restrição de emprego total na indústria ligeira

$$\sum_{\substack{i\varepsilon I\\ j\varepsilon J_4}} T_{ij} - \sum_{\substack{k\varepsilon K\\ j\varepsilon J_4}} a^{(2)k} \sum_{i\varepsilon I} S_{ij}^{k} = b^{(2)} E^{LI} + \sum_{j\varepsilon J_4} b^{(2)} E_j^{HI} \qquad (8.6)$$

(V) Condições de não-negatividade nas variáveis de fluxos de interacção e planeamento

$$\underline{T} \geqq 0 \quad , \quad \underline{S} \geqq 0 \quad e \quad \underline{E}^{LI} \geqq 0 \qquad (8.7)$$

onde T_{ij} é o número de deslocações de trabalho da zona residencial i para a zona de emprego j, S_{ij}^{k} é o número de deslocações para actividades de comércio e serviços do sector k de i para j, E^{LI} é o emprego total na indústria ligeira, E_j^{LI} é o emprego em indústria ligeira na zona j, E_j^{HI} é o emprego em indústria pesada na zona j, W_i^R e W_j^{Sk} são factores de atracção associados com actividades residenciais e de comércio e serviços do sector k, respectivamente, β^R e β^{Sk} são parâmetros de dispersão e $a^{(1)k}$, $a^{(2)k}$, $a^{(3)k}$, $a^{(4)k}$ e $b^{(2)}$ são coeficientes definidos apropriadamente. As condições (8.2) estabelecem que a população estimada a partir da matriz de deslocações $\{T_{ij}\}$ é consistente com a população estimada a partir das matrizes de deslocação para serviços $\{S_{ij}^{K}\}$. A relação da base económica (8.3) estabelece que o emprego total é igual à soma do emprego nos serviços, na indústria ligeira e na indústria pesada. A restrição (8.5) define limites de população em cada zona e, finalmente, a condição (8.6) exprime que a soma do emprego nas zonas de indústria ligeira J_4 é igual ao emprego total estabelecido para a indústria ligeira.

Este modelo foi resolvido através do seu dual (ver Coelho,1979), pelas razões de economia computacional já mencionadas anteriormente e permitiu avaliar um conjunto de alternativas de desenvolvimento urbanístico da cidade de Santo André. Dessa avaliação resultou a elaboração de uma nova alternativa de desenvolvimento cuja implementação está actualmente em curso.

(ii) Modelo de Lowry

O conhecido modelo de Lowry (1964) que permite estimar a distribuição espacial de habitação e serviços a partir da localização do emprego base, tem no seu núcleo dois sub-modelos gravitacionais inter-relacionados, correspondentes aos fluxos habitação-emprego e habitação-serviços. No contexto da maximização do excedente dos consumidores, ao modelo de Lowvy corresponde

$$\begin{aligned}\underset{\{\underline{T},\underline{S}\}}{\text{Max}} \quad EC\,(\underline{T},\underline{S}) = \frac{1}{\beta^R} \sum_{ij} T_{ij} \left(\ln \frac{T_{ij}}{W_i^R} - 1\right) - \sum_{ij} C_{ij}^R \; T_{ij} \\ - \frac{1}{\beta^{Sk}} \sum_{ijk} S_{ij}^k \left(\ln \frac{S_{ij}^k}{W_j^{Sk}} - 1\right) - \sum_{ijk} C_{ij}^{Sk} \, S_{ij}^k \qquad (8.8)\end{aligned}$$

sujeito a

(i) Condições de consistência

$$\sum_j T_{ij} - a^{(1)k} \sum_j S_{ij}^k = 0 \qquad (8.9)$$

(ii) Relação de base económica

$$\sum_i T_{ij} - \sum_k a^{(2)k} \sum_i S_{ij}^k = b^{(2)} \; E_j^B \qquad (8.10)$$

onde as variáveis e os parâmetros têm os significados já introduzidos anteriormente. As restrições (8.9)-(8.10) são equivalentes às restrições do modelo de Lowvy.

A hipótese de comportamento na escolha de habitação que está subjacente ao modelo (8.8)-(8.10) é de que a acessibilidade à habitação e desta aos serviços são avaliadas simultâneamente a partir do local de emprego, o que corresponde a um aperfeiçoamento sobre o método iterativo de Lowvy em que a habitação é escolhida independentemente da sua acessibilidade aos serviços.

(iii) Modelo LSM de Localização de Equipamentos Públicos (Coelho,1980)

O modelo linear de localização de equipamentos com capacidades tem a seguinte formulação:

$$\underset{\{\underline{X},\underline{Y}\}}{\text{Min}} \quad Z = \sum_{ij} C_{ij} X_{ij} + \sum_{j} F_j Y_j \tag{8.11}$$

sujeito a

$$\sum_j X_{ij} = p_i \tag{8.12}$$

$$\sum_i X_{ij} \leq L_j \, Y_j \tag{8.13}$$

$$\sum_j Y_j = p \tag{8.14}$$

$$X_{ij} \geq 0 \quad e \quad Y_j = 0 \text{ ou } 1 \tag{8.15}$$

onde X_{ij} é o número de utentes no ponto i servidos pelo equipamento j, Y_j é uma variável binária que tem valor 1 se um equipamento é localizado na zona j, L_j é a capacidade do equipamento j, p_i o número de utentes em i, C_{ij} é o custo de servir um utente em i pelo equipamento j, F_j é o custo de instalação do equipamento j e p o número de equipamentos a instalar.

A restrição (8.12) estabelece que todos os utentes no ponto de procura i são afectos a um equipamento j, a condição (8.13) assegura que as capacidades dos equipamentos não podem ser excedidas e (8.14) fixa o número de equipamentos a localizar.

O modelo (8.11)-(8.15) pressupõe que os utentes são afectos aos equipamentos segundo o critério de menor custo, não atendendo portanto à dispersão de preferência que se observam nos fluxos de interacção, sempre que estes dizem respeitos a pessoas e não a mercadorias. Assim, na localização de equipamentos públicos é apropriada a substituição das variáveis X_{ij} por variáveis de interacção geradas pela maximização do excedente dos consumidores. O modelo resultante consiste em

$$\max_{\{\underline{T},\underline{Y}\}} U(T,\underline{Y}) = LS(\underline{T},\underline{Y}) - C(\underline{Y})$$

$$= -\frac{1}{\beta}\sum_{ij} T_{ij}\left(\ln\frac{T_{ij}}{W_{ij}} - 1\right) - \sum_{ij} C_{ij}T_{ij}$$

$$-\sum_{j} F_j Y_j \tag{8.16}$$

sujeito a

$$\sum_j T_{ij} = P_i \tag{8.17}$$

$$\sum_i T_{ij} \leqq L_j Y_j \tag{8.18}$$

$$\sum_j Y_j = p \tag{8.19}$$

$$Y_j = 0 \text{ ou } 1 \tag{8.20}$$

onde $LS(\underline{T},\underline{Y})$ é a medida de excedente dos consumidores associada ao quadro de interacção $\{\underline{T}\}$ e ao vector de localização $\underline{Y}$. A maximização de $LS(\underline{T},\underline{Y})$ sujeita às restrições (8.17) e (8.18) assegura que os fluxos de interacção espacial $\{\underline{T}\}$ são consistentes com a procura e com as capacidades dos equipamentos.

9. CONCLUSÕES

Neste trabalho procurou integrar-se o modelo de interacção espacial numa estrutura de optimização e fornecer uma sólida fundamentação económica baseada na medida de 'excedente de consumidores' de Marshall/ /Hotelling e na teoria da utilidade aleatória do comportamento individual.

Mostrou-se que a função objectivo do programa de optimização que gera o modelo de interacção espacial, representa o valor médio do excedente total dos consumidores, no pressuposto de racionalidade nas decisões de localização, num contexto de utilidade aleatória com distribuição de Weibull. Aduziram-se razões baseadas nas propriedades de distribuição de Weibull para que esta seja considerada a distribuição 'natural' da utilidade e apontaram novos métodos para a calibração do modelo de interacção espacial que decorrem da formulação aqui apresentada. Ilustrou-se a metodologia aqui definida com exemplos de aplicação no âmbito do planeamento de actividades urbanas e da localização de equipamentos.

NOTAS

(1) De forma análoga, define-se 'excedente dos produtores'(producers' surplus) por:

$$PS = \int_{o}^{q^*} [p^*-c(q)]\ dp = p^*q^* - \int_{o}^{q^*} c(q)dq = \int_{p^o}^{p^*} s(p)dp$$

onde p^o é o preço a que a produção é iniciada. O 'excedente dos produtores' representa o benefício obtido pelos produtores devido ao excesso no preço de mercado p^* que praticam, sobre o preço $c(q)$ que estariam dispostos a aceitar para fornecer a quantidade q do bem.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

(1) BEN-AKIVA, M.E. (1974) "Structure of passenger travel demand models", Transportation Research Record, Number 526, pp 26-42.

(2) BOULANGER, H. (1971) "Research into the urban traveller's behaviour", Transportation Research, vol 5,pp 113-125.

(3) BRAND, D. (1973) "Theory and methods in land use and travel forecasting", Highway Research Record 422, 1973

(4) CHAMPERNOWNE,A.F. WILLIAMS, H.C.W.L. e COELHO,J.D.(1976)"Some comments on urban travel demand analysis, model calibration and the economic evaluation of transport plans", Journal of Transport Economics and Policy, vol. 10,pp 267-285.

(5) COCHRANE,R.A. (1975) "A possible economic basis for the gravity model", Journal of Transport Economics and Policy, vol. 9 pp 34-49.

(6) COELHO,J.D. (1980) "A locational surplus maximisation approach to public facility location" Paper presented at the V Symposium Uber Operations Research, Köln,August 25-27,1980. In "Methods of Operations Research",vol. 40, pp 263-269.

(7) COELHO,J.D. e Williams, H.C.W.L. (1979) "On the design of land use plans through locational surplus maximisation", Papers of the Regional Science Association, vol. 40 pp 71-85. Paper presented at the seventeenth European Congress, Regional Science Association, Krakov, Polónia, Agosto 23-26, 1977.

(8) COELHO,J.D.e WILSON,A.G.(1976) "The optimum location and size of shopping centres", Regional Studies, vol.10, pp. 413-421.

(9) COELHO,J.D. e WILSON,A.G. (1977) "An equivalence theorem to integrate entropy maximising submodels within overall mathematical programming frameworks", Geographical Analysis, vol. 9, pp160-173.

(10) DOMENCICH,T.A. e McFADDEN, D. (1975) "Urban travel demand - a behavioural analysis", North-Holland Publishing Co. Amsterdam.

(11) GUMBEL (1958) "Statistics of extremes", Columbia University Press, New York.

(12) HASEN,W.G. (1959) "How acessibility shapes land use" Journal of the American Institute of Planners, vol. 25,pp 76-77.

(13) HICKS,J.R.(1941) "The rehabilitation of the consumer surplus", The Review of Economic Studies, vol. 8, pp 108-116.

(14) HOTELLING,H. (1938) "The general welfare in relation to taxation and of railway and utility rates", Econometria,vol. 16, pp 242-269.

(15) HYMAN, G.L. (1969) "The calibration of trip distribution models" Environment and Planning, vol. 1, pp 105-112.

(16) LERMAN,S.R. e BEN-AKIVA,M. (1975) "A disaggregate behavioural model of auto ownership" Paper presented at the Transportation Research Board Anual Meeting,Washington D.C.

(17)LOWRY,I.S. (1964) "A model of metropolis", R.M.-4035-RC, the Rand Corporation, Santa Mónica.

(18) LUCE, R.D. (1959) "Individual choice behaviour", Jonh Wiley and Sons.

(19) LUCE; R.D. e SUPPES, P. (1965) "Preference, utility and subjective probability", in R. Luce, R.Bush and E.Galenter (eds) "Handbook of mathematical psychology" J.Wiley New York

(20) McFADDEN, D. (1973) "The measurement of urban travel demand", Journal of Public Economics, vol.3,pp 303-328.

(21) McFADDEN,D.(1974) "Conditional logit analysis of qualitative choise behaviour", in P. Zarembka (ed)"Frontiers in econometrics", Academic Press, New York.

(22) MORRIL, R.L. e KELLEY, M.B. (1970) "The simulation of hospital use and the estimation of location efficiency", Geographical Analysis, vol. 2 pp, 283-300.

(23) MARSHALL, A. (1890) "Principles of Economics", MacMillan, London.

(24) MURCHLAND, J.D. (1966) "Some remarks on the gravity model of traffic distribution, and an equivalent maximisation formulation", LSE-TNT-38, Transport Network Theory Unit, London School of economics.

(25) NEUBERGER, H.L.I. (1971) "User benefit in the evaluation of transport and land use plans", Journal of Transport Economics and Policy, vol. 5 pp 52-75.

(26) TRIBUS, M. (1968) "The uses of Information Theory", The school of applied thermodynamics, Dept of mechanical engineering, University of Glasgow.

(27) WILLIAMS, H.C.W.L. (1976) "Travel demand models, duality relations and user benefit analysis", Journal of Regional Science, vol.16, pp 147-166.

(28) WILLIAMS, H.C.W.L. (1977) "On the formation of travel demand models and economy measures of user benefit", Environment and Planning A, vol. 9, pp 285-344.

(29) WILSON, A.G. (1967) "A statistical theory of spatical distribution models", Transportation Research, vol. 1, pp 253-269.

(30) WILSON, A.G. (1969) "The use of entropy maximising methods in the theory of trip distribution", Journal of Transport Economics and Policy, vol. 3, number 1, pp 108-126.

(31) WILSON, A.G., COELHO, J.D., MACGILL, S.M. e WILLIAMS, H.C.W.L. (1981) "Optimization in Locational and Transport Analysis", John Wiley, New York.

(32) WILSON, A.G. e KIRWAN, R.M. (1969) "Measures of benefit in the evaluation of urban transport improvements", Centre for Environmental Studies, WP 43.

(33) WOLFE, P. (1961) "A Duality theorem for Nonlinear programming", Quarterly of Applied Mathematics, vol. 19, pp 239-244.