

UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA  
FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA



**IMPLEMENTAÇÃO DO MODELO DE CREDIT VAR  
APLICADO A UMA CARTEIRA DE CRÉDITO**

**Ana Alexandra Subtil de Brito**

**Dissertação apresentada na Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa para obtenção do grau de Mestre em Matemática e Aplicações  
- Actuariado, Estatística e Investigação Operacional**

**Orientador: Professor Doutor Manuel Leote Tavares Inglês Esquível  
Co-orientadora: Mestre Lúcia de Fátima Fernandes Ventura**

**Júri**

**Presidente: Professor Doutor João Tiago Praça Nunes Mexia  
Vogal: Professor Doutor José Afonso de Carvalho Tavares Faias  
Vogal: Professor Doutor Pedro José dos Santos Palhinhas Mota  
Vogal: Professor Doutor Manuel Leote Tavares Inglês Esquível  
Vogal: Mestre Lúcia de Fátima Fernandes Ventura**

**Lisboa  
Fevereiro de 2011**



**UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA**  
**FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA**  
**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**

**IMPLEMENTAÇÃO DO MODELO DE CREDIT VAR**  
**APLICADO A UMA CARTEIRA DE CRÉDITO**

**Ana Alexandra Subtil de Brito**

**Dissertação apresentada na Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa para obtenção do grau de Mestre em Matemática e Aplicações**  
**- Actuariado, Estatística e Investigação Operacional**

**Orientador: Professor Doutor Manuel Leote Tavares Inglês Esquível**  
**Co-orientadora: Mestre Lúcia de Fátima Fernandes Ventura**

**Júri**

**Presidente: Professor Doutor João Tiago Praça Nunes Mexia**  
**Vogal: Professor Doutor José Afonso de Carvalho Tavares Faias**  
**Vogal: Professor Doutor Pedro José dos Santos Palhinhas Mota**  
**Vogal: Professor Doutor Manuel Leote Tavares Inglês Esquível**  
**Vogal: Mestre Lúcia de Fátima Fernandes Ventura**

**Lisboa**  
**Fevereiro de 2011**



# IMPLEMENTAÇÃO DO MODELO DE CREDIT VAR APLICADO A UMA CARTEIRA DE CRÉDITO

“Copyright” em nome de Ana Alexandra Subtil de Brito, da FCT/UNL e da UNL, “A Faculdade de Ciências e Tecnologia e a Universidade Nova de Lisboa têm o direito, perpétuo e sem limites geográficos, de arquivar e publicar esta dissertação através de exemplares impressos reproduzidos em papel ou de forma digital, ou por qualquer outro meio conhecido ou que venha a ser inventado, e de a divulgar através de repositórios científicos e de admitir a sua cópia e distribuição com objectivos educacionais ou de investigação, não comerciais, desde que seja dado crédito ao autor e editor”.



# Agradecimentos

Ao meu orientador Professor Doutor Manuel Esquível toda a ajuda, disponibilidade, compreensão, bem como a força e incentivos demonstrados que contribuíram para manter a minha motivação.

Um agradecimento muito especial e incondicional à minha co-orientadora Mestre Lúcia Ventura por todo o apoio, ajuda, dicas, força e incentivos constantes demonstrados ao longo da elaboração deste trabalho. Esteve sempre disposta a ajudar e muitas vezes já “fora de horas”. Muito obrigada por tudo.

À instituição bancária em que trabalho pela oportunidade concedida em realizar esta dissertação no Departamento de Risco de Mercado.

Aos meus pais, pela força, paciência e incentivo que me deram ao longo da realização deste projecto.

À Marta pela amizade constante, paciência, apoio, conselhos preciosos e toda a ajuda que me deu.

Aos meus colegas de trabalho que me ajudaram de forma directa e indirecta. Entre eles destaco Carlos Martins, Sérgio Magalhães e Teresa Raimundo.

A todos aqueles que não menciono mas que tornaram possível a elaboração desta dissertação.



# Resumo

As perdas de crédito não são unicamente consequência de eventos de incumprimento (*default*) da contraparte, as migrações nas categorias de *rating* dos emitentes também originam perdas. Dadas as características particulares dos instrumentos de crédito, como as obrigações, surge a necessidade de uma medida de risco apropriada para uma carteira de dívida. A presente dissertação tem como objectivo estimar esta medida de risco, denominada de *Credit VaR*, para a carteira de obrigações de uma instituição bancária portuguesa de pequena/média dimensão.

A metodologia de cálculo do *Credit VaR*, desenvolvida pela J.P. Morgan em 1997, envolve a estimação da distribuição de probabilidade das perdas de crédito através da simulação de categorias de *rating* para cada emitente. Nesta dissertação foi criada uma aplicação informática em *EXCEL*, *VBA* e no *software* R que recupera a informação contida na base de dados da empresa, gera parâmetros de acordo com os modelos implementados, simula a distribuição de ganhos e perdas de uma carteira de obrigações calculando o *VaR* dessa carteira. Com esta aplicação determina-se o *VaR* a um ano da carteira de obrigações para diferentes datas em 2010. Observou-se um acordo notável entre os valores obtidos e as circunstâncias explicativas da conjuntura macro-económica.

Palavras Chave: *Credit Value-at-Risk*, Matrizes de Transição, Derivados de Crédito, Modelo de Merton.



# Abstract

Credit losses are not only caused by default events of the counterparty, migrations in obligor credit quality also originate losses. Given the particular characteristics of the credit instruments, such as bonds, it is necessary an appropriate risk's measure for a debt portfolio. This thesis aims to estimate this risk's measure, named Credit VaR, to the bond portfolio of a portuguese bank with small/medium size.

The methodology for calculating the Credit VaR, developed by JP Morgan in 1997, involves estimating the distribution of probability of credit losses by simulating rating categories for each issuer. In this thesis it was created a computer application in EXCEL, VBA and R which recovers the information contained in the database of the company, generates parameters according to the implemented models, simulates the distribution of gains and losses of a bond portfolio and calculates its VaR. With this application we have determined the VaR of the bond portfolio for different dates in 2010. We have observed a remarkable agreement between the values and the circumstances explained by the macroeconomic environment.

Key words: Credit Value-at-Risk, Transition Matrices, Credit Derivatives, Merton Model.



# Conteúdo

<b>Agradecimentos</b>	<b>i</b>
<b>Resumo</b>	<b>iii</b>
<b>Abstract</b>	<b>v</b>
<b>Prefácio</b>	<b>xiii</b>
<b>1 Risco de Crédito</b>	<b>1</b>
1.1 Introdução . . . . .	1
1.2 Factores de Risco . . . . .	2
1.2.1 <i>Default Risk</i> . . . . .	2
1.2.2 <i>Recovery Risk</i> . . . . .	3
1.2.3 <i>Credit Exposure Risk</i> . . . . .	4
1.3 Classes de <i>Rating</i> . . . . .	4
1.3.1 Matrizes de Transição de <i>Rating</i> . . . . .	5
1.4 Medidas de Risco de Crédito . . . . .	10
1.4.1 Modelos . . . . .	12
<b>2 Obrigações</b>	<b>15</b>
2.1 Valor Nominal ou Facial . . . . .	16
2.2 Taxa de Cupão . . . . .	17
2.3 Apreçamento de Obrigações . . . . .	17
2.4 <i>Duration</i> . . . . .	19
2.5 Convexidade . . . . .	22
2.6 Método de <i>Bootstrap</i> . . . . .	22
2.7 Taxas <i>Forward</i> . . . . .	24
2.8 <i>Rating</i> . . . . .	25
2.9 Modalidades . . . . .	25
2.10 Riscos . . . . .	26
<b>3 <i>CreditMetrics</i></b>	<b>29</b>
3.1 Modelo de Merton . . . . .	29
3.2 <i>Credit VaR</i> . . . . .	36
3.2.1 Risco de Crédito para uma única obrigação . . . . .	37
3.2.2 Risco de Crédito para duas obrigações . . . . .	41

3.2.3	Risco de Crédito para uma carteira de grandes dimensões . . . . .	46
<b>4</b>	<b>Aplicação Prática</b>	<b>51</b>
4.1	Análise descritiva da carteira . . . . .	51
4.2	Pressupostos . . . . .	52
4.3	Metodologia . . . . .	57
4.4	Análise dos Resultados . . . . .	64
4.5	Considerações finais sobre a implementação . . . . .	67
<b>5</b>	<b>Conclusão</b>	<b>71</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>74</b>
<b>A</b>	<b>Matrizes de Transição de <i>Rating</i></b>	<b>77</b>
<b>B</b>	<b>Geração de Variáveis Normais Correlacionadas</b>	<b>79</b>
B.1	Decomposição em Valores Próprios . . . . .	79
<b>C</b>	<b>Códigos Implementados em <i>Visual Basic for Applications</i></b>	<b>81</b>
C.1	Código para a avaliação das obrigações por níveis de risco . . . . .	81
C.2	Código para o cálculo do <i>Credit VaR</i> . . . . .	84

# Lista de Tabelas

1.1	Tabela de descrição de <i>rating</i> . (Fonte:[Beninga, 1998]) . . . . .	5
1.2	Matriz de Transição de <i>Rating</i> . . . . .	6
2.1	Dados para aplicação do Método de <i>Bootstrap</i> . . . . .	23
2.2	Taxas de cupão zero obtidas pelo Método de <i>Bootstrap</i> . . . . .	24
3.1	Primeira Etapa do Modelo. . . . .	37
3.2	Taxas <i>forward</i> , em percentagem, para as várias categorias de <i>rating</i> . . . . .	38
3.3	<i>Recovery Rate</i> das obrigações da Europa e dos EUA. . . . .	39
3.4	Matriz de Transição de <i>Rating</i> . . . . .	40
3.5	Resumo da Primeira e Segunda Etapas do Modelo. . . . .	40
3.6	Resumo das três etapas do Modelo. . . . .	41
3.7	Valor da carteira ao fim de um ano tendo em conta os diferentes cenários que podem ocorrer quanto aos <i>ratings</i> das obrigações. . . . .	42
3.8	Matriz de Transição de <i>Rating</i> para Obrigações dos EUA. . . . .	43
3.9	Probabilidades de Transição Conjunta de <i>Rating</i> ao fim de um ano. . . . .	43
3.10	Matriz resultante do produto de $p_s$ por $V_s$ elemento a elemento. . . . .	43
3.11	Pontos Críticos para as duas Obrigações. . . . .	45
3.12	Matriz $\bar{C}$ . . . . .	48
3.13	Matriz $W$ . . . . .	48
4.1	Descrição de 10 obrigações da carteira. . . . .	58
4.2	Instantes Temporais para a Avaliação das Obrigações. . . . .	59
4.3	Taxas <i>Forward</i> para Avaliação das Obrigações no <i>rating</i> <i>Aaa</i> . . . . .	59
4.4	Avaliação das obrigações daqui a um ano. . . . .	60
4.5	Cenários Gerados. . . . .	61
4.6	Pontos críticos para as obrigações Europeias. . . . .	62
4.7	Pontos Críticos para as obrigações cuja moeda de emissão é o dólar americano. . . . .	62
4.8	Correspondência dos cenários gerados com as respectivas categorias de <i>rating</i> . . . . .	63
4.9	Correspondência das categorias de <i>rating</i> aos respectivos valores. . . . .	63



# Lista de Figuras

1.1	Árvore Binomial a $n$ períodos . . . . .	3
1.2	Distribuição das perdas devidas a risco de crédito. . . . .	11
1.3	Perdas Esperada e Inesperada de crédito. (Fonte: [Jorion, 2003]) . . . . .	12
3.1	Generalização do Modelo de Merton para o emitente da Obrigação 1. . . . .	44
4.1	Concentração por País e Sector. . . . .	51
4.2	Concentração por <i>Rating</i> . . . . .	52
4.3	Taxas <i>Forward</i> para o governo de Portugal. . . . .	54
4.4	Curvas da <i>yield</i> para o sector industrial norte-americano por <i>rating</i> . . . . .	55
4.5	Curvas da <i>yield</i> genéricas europeias por <i>rating</i> . . . . .	56
4.6	Distribuição de $\Delta V$ daqui a um ano. . . . .	64
4.7	Histórico de valores do <i>Credit VaR</i> e respectivas percentagens do valor da carteira. . . . .	65



# Prefácio

O objectivo da presente dissertação, realizada em ambiente empresarial, centra-se numa metodologia, o *CreditMetrics*, desenvolvida pela J.P. Morgan em 1997 para o cálculo do *Credit VaR*. O *Credit VaR* é uma medida de risco que visa estimar as potenciais perdas para uma carteira de instrumentos de crédito, num certo horizonte temporal e para um dado nível de confiança.

No Capítulo 1 é feito um enquadramento do tema onde, na Secção 1.1 apresentamos uma revisão bibliográfica sobre risco de crédito. Na Secção 1.2 abordamos os principais factores inerentes ao risco de crédito, na Secção 1.3 introduzimos as Classes de *Rating* e na Secção 1.4 descrevemos sumariamente os principais modelos de gestão do risco de crédito utilizados pelas instituições financeiras.

No Capítulo 2 fazemos um apanhado sobre as Obrigações, onde são abordadas as suas características particulares como Valor Nominal, Taxa de Cupão, *Yield*, *Duration*, Convexidade e *Rating* bem como as fórmulas para apreçamento de obrigações, as Taxas *Forward* e o Método de *Bootstrap*. São abordadas também algumas das modalidades de obrigações existentes bem como os riscos inerentes ao investimento neste tipo de derivados de crédito.

O Capítulo 3 tem por objectivo fazer o estudo teórico do modelo desenvolvido para o cálculo do *Credit VaR*. Na Secção 3.1 apresentamos o Modelo de Merton que é determinante na metodologia do *CreditMetrics* na medida em que permite definir um ponto crítico a partir do qual um emitente sofre incumprimento (*default*) através de um quantil da Distribuição Normal Reduzida. Na Secção 3.2.1 explicamos o método de cálculo do *Credit VaR* para uma carteira constituída por uma obrigação, na Secção 3.2.2 para duas obrigações e na Secção 3.2.3 para carteiras de grandes dimensões.

No Capítulo 4, no qual se insere a aplicação prática desta dissertação, apresentamos o estudo efectuado para o cálculo do *Credit VaR* da carteira de obrigações de uma instituição bancária portuguesa. Na Secção 4.1 fazemos uma análise descritiva da carteira, dando a conhecer a exposição por país, sector e *rating*. Na Secção 4.2 apresentamos os pressupostos utilizados para a geração dos parâmetros necessários para o cálculo do *Credit VaR*, como Matrizes de Transição de *Rating*, *Recovery Rate*, Taxas *Forward* e Matriz de Covariância. Na Secção 4.3 indicamos todo o processo efectuado para o cálculo do *Credit VaR* e na Secção 4.4 indicamos os resultados obtidos para a data em estudo e é feito um enquadramento dos mesmos na conjuntura económica vivida durante o ano de 2010. Por fim, na Secção 4.5 indicamos as limitações e constrangimentos que tivemos de ultrapassar para a implementação do modelo.

No Capítulo 5 expomos os principais resultados e apresentamos as conclusões.

No Apêndice A apresentamos a metodologia utilizada pela *Moody's* na construção das matrizes de transição de *rating*.

No Apêndice B expomos o método de geração de variáveis normais correlacionadas.

No Apêndice C indicamos os códigos implementados em *Visual Basic for Applications* (VBA).

# Capítulo 1

## Risco de Crédito

### 1.1 Introdução

Na terminologia moderna o termo risco tem vindo a significar “perigo de perda”, no entanto, a teoria financeira define o risco como a dispersão de resultados inesperados devidos a movimentos nas variáveis financeiras. Deste modo, os desvios negativos e positivos devem ser vistos como fontes de risco.

De acordo com [Caouette et al, 1998] o risco de crédito é a forma mais antiga de risco no contexto dos mercados financeiros. Segundo o autor, se definirmos crédito como a expectativa de termos uma quantia de dinheiro durante um determinado período, o risco de crédito é a possibilidade dessa expectativa não ser satisfeita. Este tipo de risco é tão antigo como os empréstimos remontando a 1800 A.C. O seu significado mantém-se essencialmente inalterado desde o tempo dos Egípcios, ou seja, agora, como no passado, existe a incerteza do tomador de um empréstimo cumprir as suas responsabilidades.

Vários autores definem risco de crédito como sendo a possibilidade da contraparte não cumprir com as suas responsabilidades, ou seja, falhar um pagamento. Quando tal situação acontece, dizemos que ocorrem perdas de crédito.

Segundo [Jorion, 2007], as perdas devidas ao risco de crédito podem ocorrer antes de eventos de incumprimento (*default*). Desta forma, o risco de crédito deve ser definido como a potencial perda provocada por eventos de crédito. Estes eventos contemplam situações de incumprimento (*default*) por parte da contraparte mas também situações em que esta sofre descidas na qualidade de crédito.

De acordo com [Gregory, 2010] a probabilidade de incumprimento (*default*) é, sem dúvida, um aspecto determinante quando caracterizamos o risco de crédito. Contudo, a exposição ao risco bem como o montante que é possível recuperar em caso de incumprimento (*default*) são igualmente quantidades importantes a considerar. Na Secção 1.2 são apresentados estes conceitos com mais detalhe.

O risco de crédito surge em derivados de crédito (obrigações, *credit default swaps*, *total re-*

*turn swaps*) e nos empréstimos gerais. As obrigações são apresentadas com mais detalhe no Capítulo 2. Os *credit default swaps* correspondem a contratos bilaterais em que um comprador de protecção paga um prémio a um vendedor de protecção em troca de pagamento caso ocorra um evento de incumprimento (*default*). Por outro lado, os *total return swaps* correspondem a contratos bilaterais em que um comprador de protecção faz uma série de pagamentos a um vendedor de protecção indexados a um activo de referência. Veja-se [Jorion, 2003] para mais detalhes sobre estes conceitos.

Desde os anos 90 que o risco de crédito tem crescido exponencialmente, tendo a sua gestão tornado-se num dos desafios chave para as instituições financeiras desde os finais dos anos 90. O risco de crédito pode ser medido e quantificado de modo a controlarmos as suas possíveis perdas. Na Secção 1.3 apresentamos uma medida que permite aferir o risco de crédito, o *rating*, e na Secção 1.4 definimos o conceito de Valor em Risco (*VaR*) e apresentamos uma descrição sumária dos modelos de gestão do risco de crédito mais utilizados pelas instituições financeiras.

## 1.2 Factores de Risco

De acordo com [Jorion, 2007], as perdas devidas ao risco de crédito dependem do montante em risco e da percentagem que se conseguirá recuperar caso a contraparte falhe um pagamento. Deste modo, o risco de crédito inclui três factores de risco: risco de incumprimento (*default risk*), risco de recuperação (*recovery risk*) e o risco da exposição ao incumprimento (*credit exposure risk*). Apresentamos de seguida uma descrição de cada um destes factores de risco.

### 1.2.1 *Default Risk*

O risco de incumprimento (*default risk*) corresponde ao risco da contraparte entrar em *default*, ou seja, não conseguir cumprir as suas responsabilidades. Pode ser descrito por uma variável discreta,  $d_i$ , tal que,

$$d_i = \begin{cases} 1 & \text{se ocorrer } \textit{default} \text{ no instante } i, \text{ com probabilidade } p_i, i = 0, \dots, n \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Este tipo de risco pode ser medido pela probabilidade de incumprimento (*default*) que pode ser modelada por uma árvore binomial. Considerando, por exemplo, a árvore binomial a um período, a contraparte pode estar em dois estados possíveis: estado de *default*,  $d_1$ , com probabilidade  $p_1$  ou estado de sobrevivência,  $s_1$ , com probabilidade  $1 - p_1$ . Para uma árvore binomial a  $n$ -períodos procede-se analogamente. A Figura 1.1 descreve o processo de *default* a  $n$ -períodos e, como podemos observar, para uma firma não sofrer incumprimento (*default*) até ao período  $n$ , é necessário que tenha sobrevivido até ao período  $n - 1$  e não sofra incumprimento (*default*) no período  $n$ . Deste modo, existem  $n$  caminhos possíveis para uma

firma sofrer incumprimento (*default*) existindo, contudo, apenas um caminho para a firma sobreviver em que a probabilidade cumulativa de sobrevivência desde o instante inicial ( $t = 0$ ) até ao instante  $n$ ,  $PS(0, n)$ , é dada por,  $PS(0, n) = \prod_{i=1}^n (1 - p_i)$ . A probabilidade cumulativa de incumprimento (*default*) até ao instante  $n$ ,  $PD(0, n)$ , é a probabilidade de sofrer incumprimento (*default*) em qualquer instante no tempo antes do instante  $n$  e é dada por  $PD(0, n) = 1 - PS(0, n)$ .

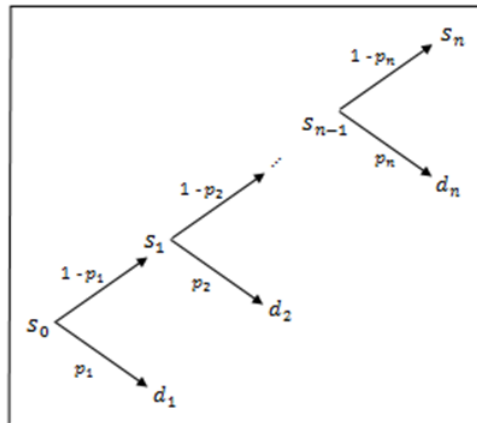


Figura 1.1: Árvore Binomial a  $n$  períodos

### 1.2.2 Recovery Risk

O risco de recuperação (*recovery risk*) representa a incerteza inerente à percentagem do valor investido que se recupera em caso de incumprimento (*default*) da contraparte. A percentagem que se perde do valor investido devido a incumprimento (*default*) da contraparte é designada de taxa de perda devida ao incumprimento (*loss given default*),  $LGD$ , enquanto que a percentagem que se recupera é designada de taxa de recuperação (*recovery rate*). A  $LGD$  no instante  $t$ ,  $LGD(t)$ , pode ser definida através da taxa de recuperação no mesmo instante,  $r(t)$ , tal que  $r(t) = 1 - LGD(t)$ .

A  $LGD$  depende de muitos factores, sendo o mais importante a prioridade do pagamento da dívida. As dívidas que são colateralizadas (*secured*) por activos têm uma taxa de recuperação (*recovery rate*) mais elevada do que as dívidas que não o são, visto no primeiro caso poder-se recuperar o montante investido através da venda do colateral da contraparte. A dívida *senior* tem igualmente uma prioridade de pagamento mais elevada que a dívida subordinada (*subordinated*) durante um processo de falência. Outro factor que influencia a  $LGD$  são os activos tangíveis susceptíveis de serem leiloados em situações de incumprimento (*default*) conduzindo a uma taxa de recuperação mais elevada.

### 1.2.3 *Credit Exposure Risk*

O risco à exposição de crédito (*credit exposure risk*) corresponde ao risco de flutuações subjacentes à qualidade do crédito da contraparte. O caso particular em que ocorre incumprimento (*default*) designa-se também por exposição ao incumprimento (*exposure at default*), *EAD*.

A exposição de crédito (*credit exposure*) é definida como o custo de substituição de um activo, se positivo, na data limite. Além de incluir o custo de substituição actual,  $V_0$ , inclui também o custo futuro. Assim, a exposição de crédito no momento  $t$ ,  $CE(t)$ , é dada por,

$$CE(t) = \max(V_0 + \Delta V_t, 0)$$

em que  $V_0$  corresponde ao custo de substituição no momento inicial e  $\Delta V_t$  representa o aumento no custo no momento  $t$ . A exposição esperada ao crédito (*expected credit exposure*),  $CEE$ , é definida como o valor esperado do custo de substituição  $x$  tal que,

$$ECE = \int_{-\infty}^{+\infty} \max(x, 0) f(x) dx$$

onde  $f(x)$  é a função densidade de  $x$ .

## 1.3 *Classes de Rating*

Agências de *rating*<sup>1</sup> como a *Standard and Poor's*, *Moody's* e *Fitch* classificam as empresas e os governos de acordo com a sua qualidade de crédito, atribuindo-lhes uma classe de *rating*. Os modelos usados para a classificação são internos às próprias agências.

---

<sup>1</sup>*Rating* significa notação de crédito.

Na Tabela 1.1 apresentamos a descrição da classificação de *rating* da *Standard and Poor's* e da *Moody's*. O *rating* de um emitente permite dar a conhecer a sua capacidade de crédito, ou seja, a sua capacidade de cumprir as responsabilidades assumidas. O melhor *rating* é o *AAA* ou *Aaa*, sendo que emitentes com um *rating* até *BBB-* ou *Baa3* são considerados emitentes com uma boa qualidade de crédito (*investment grade*). Por outro lado, emitentes que tenham um *rating* abaixo de *BBB-* ou *Baa3* são considerados emitentes com alto risco de investimento (*speculative grade*).

Tabela 1.1: Tabela de descrição de *rating*. (Fonte:[Benina, 1998])

<i>S&amp;P</i>	<i>Moody's</i>	Descrição
AAA	Aaa	Elevada Qualidade
AA+	Aa1	Alta Qualidade
AA	Aa2	
AA-	Aa3	
A+	A1	Forte Capacidade de Crédito
A	A2	
A-	A3	
BBB+	Baa1	Adequada Capacidade de Crédito
BBB	Baa2	
BBB-	Baa3	
BB+	Ba1	Susceptível de falta de capacidade de crédito
BB	Ba2	
BB-	Ba3	
B+	B1	Risco Elevado
B	B2	
B-	B3	
CCC+	Caa	Vulnerabilidade para <i>default</i>
CCC		
CCC-		
C	Ca	Na Falência ou <i>default</i>
D	D	

### 1.3.1 Matrizes de Transição de *Rating*

O *rating* de um emitente está sujeito a alterações ao longo do tempo, sendo possível responder a cada uma das classes, probabilidades de migração entre *ratings*. Por outras palavras, é possível estimar a probabilidade de um emitente com um determinado *rating* transitar para outra classe de *rating* num dado horizonte temporal. As agências de *rating* também fazem estudos quanto a esta temática. Na Tabela 1.2 apresentamos uma matriz de transição de *rating* a um ano publicada pela *Moody's*, e disponível em [Moody's, 2010], cujo estudo incidiu no período entre 1985 e 2009<sup>2</sup>. Os valores estão expressos em percentagem.

<sup>2</sup>Consultar o Apêndice A para mais detalhes sobre a metodologia usada pela *Moody's* na construção desta matriz.

Tabela 1.2: Matriz de Transição *de Rating*.

Rating Inicial	Rating ao fim de um ano								
	Aaa	Aa	A	Baa	Ba	B	Caa-C	Default	WR
<b>Aaa</b>	88.49	8.13	0.38	0.03	0.09	0.01	0.01	0.00	2.87
<b>Aa</b>	0.89	86.56	7.98	0.46	0.04	0.00	0.01	0.02	4.03
<b>A</b>	0.03	3.97	85.74	5.30	0.25	0.03	0.03	0.13	4.52
<b>Baa</b>	0.00	0.39	6.79	81.48	3.84	0.86	0.32	0.13	6.17
<b>Ba</b>	0.00	0.00	0.66	6.53	69.66	9.50	1.04	1.00	11.62
<b>B</b>	0.00	0.00	0.30	0.39	6.32	68.53	7.90	2.88	13.67
<b>Caa-C</b>	0.00	0.23	0.05	0.00	0.62	8.96	59.48	14.90	15.75

Cada entrada da matriz corresponde a uma probabilidade de transição de *rating*, dado um *rating* inicial. Por exemplo, um emitente com *rating* inicial *A* tem uma probabilidade de 3.97% de transitar para a categoria *Aa* até ao próximo ano.

Na ultima coluna, indicativa do estado de *WR* (*withdrawn*), são apresentadas as probabilidades de um emitente deixar de ser classificado, ou seja, deixar de ter um *rating*. Assim, se um emitente estiver cotado como *Aaa*, existe uma probabilidade de 2.87% de daqui a um ano deixar de ter um *rating* associado. Numa perspectiva mais conservadora podemos considerar que o estado de *WR* é igual ao estado de *default*.

Os valores elevados na diagonal reflectem a “estabilidade da classificação” determinada pelas agências de *rating*. O estado de *default* é considerado um estado absorvente pois considera-se que não é possível transitar de um estado de *default* para qualquer outro estado. De facto, se acrescentássemos uma linha à matriz de transição destinada a este estado, essa linha só era constituída por zeros à excepção da última coluna que teria o valor 100%.

O modelo subjacente a esta temática é o Modelo de Cadeias de Markov. Para a compreensão deste modelo, começamos por definir alguns conceitos como Processo Estocástico e Processo de Markov. Antes da definição formal de cada um destes processos, apresentamos uma definição informal seguida da definição de espaço de probabilidade.

### Processo Estocástico

Informalmente podemos dizer que um processo estocástico corresponde a uma família de variáveis aleatórias que são função do tempo. Analisemos o seguinte exemplo, seguindo [Medhi, 2002]: consideremos um evento aleatório ao longo do tempo, tal como o número de chamadas telefónicas atendidas num serviço de apoio ao cliente. Suponhamos que  $X_t$  é a variável aleatória que representa o número de chamadas telefónicas atendidas no intervalo de duração de  $t$  unidades. O número de chamadas atendidas num intervalo de tempo fixo de uma duração específica, como por exemplo, uma unidade de tempo, é a variável  $X_1$  e a família  $\{X_t, t \in T\}$  constitui um processo estocástico em que  $T = [0, \infty[$ .

O conjunto dos possíveis valores que uma variável aleatória,  $X_n$ , pode tomar designa-se de espaço de estados. Se este conjunto for finito ou infinito numerável, estamos perante um espaço de estados discreto. Por outro lado, se o espaço de estados não for numerável estamos perante um espaço de estados contínuo. A título de exemplo, considere-se a variável aleatória  $X_n$  que representa o número total de quatros que aparecem nos primeiros  $n$  lançamentos de um dado. Designe-se por  $E$  o conjunto dos possíveis valores que  $X_n$  pode tomar. Neste caso o espaço de estados é um conjunto discreto,  $E = \{0, 1, \dots, n\}$ , representando um conjunto de inteiros não negativos. Podemos escrever  $X_n = Y_1 + \dots + Y_n$  em que  $Y_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , é uma variável aleatória discreta representando o número que se obtém no  $i$ -ésimo lançamento de um dado e  $Y_i = 1$  ou  $0$  consoante no  $i$ -ésimo lançamento apareça o número quatro ou não.

No exemplo apresentado acima, assumimos que o parâmetro  $n$  de  $X_n$  era restrito ao conjunto dos inteiros não negativos, tal que  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Contudo, podemos considerar uma família de variáveis aleatórias  $\{X_t, t \in T\}$ , com  $T$  definido anteriormente, tal que cada espaço de estados do processo seja analisado de forma contínua ao longo de um intervalo finito ou infinito. Nestas circunstâncias o processo é definido por um intervalo de tempo contínuo e designado por uma família de variáveis aleatórias em tempo contínuo. Um processo estocástico em tempo contínuo pode ter igualmente um espaço de estados contínuo ou discreto associado. Voltando ao exemplo das chamadas telefónicas anteriormente descrito, temos um caso de um processo estocástico,  $X_t$ , em que o espaço de estados é discreto, todavia  $X_t$  está definido num intervalo de tempo contínuo. Deste modo, um processo estocástico pode ser classificado em geral num dos seguintes tipos:

- Tempo discreto, espaço de estados discreto;
- Tempo discreto, espaço de estados contínuo;
- Tempo contínuo, espaço de estados discreto;
- Tempo contínuo, espaço de estados contínuo;

Todos estes tipos de processo estocástico podem ser representados por  $\{X_t, t \in T\}$ . Contudo, no caso em que o tempo é discreto o parâmetro utilizado é normalmente o  $n$ , ou seja, a família de variáveis aleatórias é representada por  $\{X_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ . O parâmetro  $t$  é usualmente interpretado como tempo, podendo também representar distância, comprimento, espessura, entre outros.

*Definição 1.1.* O triplo  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , em que  $\Omega$  é um conjunto,  $\mathcal{F}$  é uma álgebra- $\sigma^3$  de partes de  $\Omega$  e  $\mathbb{P}$  é uma medida de probabilidade sobre  $\mathcal{F}$ , é designado por espaço de probabilidade.

<sup>3</sup>Seja  $\Omega$  um dado conjunto. A álgebra- $\sigma$   $\mathcal{F}$  sobre  $\Omega$  é uma família  $\mathcal{F}$  de subconjuntos de  $\Omega$  com as propriedades seguintes,

1.  $\emptyset \in \mathcal{F}$
2.  $F \in \mathcal{F} \Rightarrow F^c \in \mathcal{F}$  em que  $F^c = \Omega \setminus F$  é o complementar de  $F$  em  $\Omega$
3.  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow A := \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$ .

O espaço  $(\Omega, \mathcal{F})$  é designado de espaço mensurável.

Com a definição exposta acima, de espaço de probabilidade, estamos agora em condições de apresentar uma definição formal de processo estocástico seguindo [Oksendal, 2000].

*Definição 1.2.* Um processo estocástico é uma coleção de variáveis aleatórias parametrizadas,  $\{X_t\}_{t \in T}$  definidas num espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  e tomando valores em  $\mathbb{R}^n$ . O parâmetro  $t$  é normalmente definido no intervalo  $[0, \infty)$ , podendo no entanto ser igualmente definido no intervalo  $[a, b]$ , no conjunto dos inteiros não negativos, ou até mesmo em subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$ , para  $n \geq 1$ .

É de notar que para cada  $t \in T$  fixo, temos uma variável aleatória

$$\omega \rightarrow X_t(\omega), \omega \in \Omega$$

Por outro lado, fixando  $\omega \in \Omega$  podemos considerar a função

$$t \rightarrow X_t(\omega), t \in T$$

que é designada de trajectória de  $X_t$ .

*Definição 1.3.* Seja  $\{X_t\}_{t \in T}$  um processo estocástico com espaço de estados  $E$ . Um Processo de Markov é um caso particular de processo estocástico em que apenas o valor actual da variável é relevante para prever o futuro, verificando-se assim a propriedade de Markov:

$$P[X_t \leq e_t | X_i(e), \text{com } i < t] = P[X_t \leq e_t | X_{t-1}(e)] \quad (1.1)$$

### Cadeia de Markov a 1-período

Quando o conjunto dos estados é finito ou infinito numerável, ou seja, no caso em que o espaço de estados é discreto, estamos perante uma cadeia de Markov. Sem perda de generalidade podemos sempre considerar que  $E = \mathbb{N}$  no caso em que  $E$  é infinito e que  $E = \{1, 2, \dots, N\}$  se  $E$  tiver  $N$  elementos.

De acordo com [Esquível, 2009], uma cadeia de Markov com espaço de estados  $E$ , distribuição inicial  $(p_i)_{i \in E}$  e matriz de transição  $P = (p_{ij})_{i, j \in E}$ , em que  $p_{ij}$  representa a probabilidade de transição do estado  $i$  para o estado  $j$ , é, por definição, uma sucessão  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de variáveis aleatórias tais que se verificam as seguintes propriedades:

1. Para qualquer  $i \in E$  tem-se que  $\mathbb{P}[X_0 = i] = p_i$
2. Para quaisquer  $i, j \in E$  e  $n \in \mathbb{N}$  verifica-se que  $\mathbb{P}[X_{n+1} = j | X_n = i] = p_{ij}$
3. Para quaisquer  $n \in \mathbb{N}$  e  $i_0, i_1, \dots, i_{n-1}, i_n, j \in E$ , vale a condição  $\mathbb{P}[X_{n+1} = j | X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i_n] = \mathbb{P}[X_{n+1} = j | X_n = i_n]$

A propriedade (1) diz-nos que a sucessão  $(p_i)_{i \in E}$  descreve a distribuição inicial. A propriedade (2) diz que as probabilidades de transição a 1-período são-nos dadas pelos elementos da matriz  $P$  e a conjunção das propriedades (2) e (3) é a denominada propriedade de Markov já enunciada anteriormente.

É de notar que uma consequência da interpretação que damos à matriz  $P$  é que  $\forall i \in E$   $\sum_{j \in E} p_{ij} = 1$ , ou seja, a soma dos elementos de cada linha é 1. Uma matriz que verifica esta propriedade denomina-se matriz estocástica.

Na matriz de transição de *rating*, ilustrada na Tabela 1.2, podemos verificar que nem sempre a soma dos elementos de cada linha é 100%. No documento que disponibiliza a matriz, [Moody's, 2010], não é feita nenhuma referência a esta situação nem é dada qualquer informação que justifique este facto.

### Cadeia de Markov a $n$ -períodos

Dada uma matriz de transição a 1-período,  $P = (p_{ij})_{i,j \in E}$ , é possível obtermos uma matriz a  $n$ -períodos, para qualquer  $n \geq 0$ ,  $P^n = (p_{ij}^n)_{i,j \in E}$ . Começemos por convencionar que  $P^0 = Id_E = [a_{ij}]_{i,j \in E}$ , tal que  $a_{ii} = 1$  para qualquer  $i \in E$  e  $a_{ij} = 0$  para quaisquer  $i, j \in E$  e  $i \neq j$ .

Para podermos obter a probabilidade de transição do estado  $i$  para o estado  $j$  ao fim de dois períodos, em que  $i, j \in E$ , temos de considerar todos os caminhos possíveis que conduzem de  $i$  para  $j$ . A probabilidade de transição do estado  $i$  para o estado  $j$  ao fim de dois períodos é dada por,

$$p_{ij}^{(2)} = \sum_{k \in E} p_{ik} p_{kj} \quad (1.2)$$

correspondendo à soma de todas as probabilidades dos caminhos possíveis. Deste modo, a matriz de transição a 2-períodos é dada por,

$$P^{(2)} = P \times P \quad (1.3)$$

em que no membro à direita na Equação (1.3), o sinal  $\times$  representa o produto usual de matrizes.

É de salientar que no caso em que  $E$  é um conjunto infinito, a série da Equação (1.2) é convergente dado que  $\sum_{k \in E} p_{ik} p_{kj} \leq \sum_{k \in E} p_{ik} \leq 1$  uma vez que para  $k \in E$  tem-se que  $0 \leq p_{kj} \leq 1$ .

Podemos generalizar o resultado dado pela Equação (1.3) e dizer que para qualquer  $n \geq 2$ ,

$$P^{(n)} = P^n = \sum_{k \in E} p_{ik}^{n-1} p_{kj} \quad (1.4)$$

A demonstração da Equação (1.4) pode ser feita por indução. Suponhamos que definimos para qualquer  $n \geq 2$  a matriz  $P^{n-1} = [p_{ij}^{(n-1)}]$  com  $i, j \in E$ . Assim, pelo produto usual de

matrizes vem que,

$$P^n = PP^{n-1} = P^{n-1}P = [p_{ij}^n]_{i,j \in E} \text{ com } p_{ij}^n = \sum_{k \in E} p_{ik} p_{kj}^{(n-1)} = \sum_{k \in E} p_{ik}^{(n-1)} p_{kj}.$$

As entradas da matriz  $P^n$  correspondem à probabilidade de, partindo do estado  $i \in E$ , chegar ao estado  $j \in E$  em  $n$ -períodos. Desta forma, para qualquer  $n \geq 0$  e  $i, j \in E$  tem-se:

$$p_{ij}^n = \mathbb{P}[X_n = j | X_0 = i] \tag{1.5}$$

A demonstração da Equação (1.5) pode ser feita por indução, sendo possível consultá-la com todo o rigor em [Esquível, 2009].

## 1.4 Medidas de Risco de Crédito

De acordo com [Jorion, 2007], para medir o risco de crédito de uma carteira é necessário fazermos uma avaliação das perdas esperadas devidas ao risco de crédito (*expected credit losses*),  $ECL$ . A distribuição das perdas,  $P$ , devidas ao risco de crédito para um certo horizonte temporal pode ser descrita como

$$P = \sum_{i=0}^N CE_i(1 - r_i)d_i$$

em que  $N$  corresponde ao número de activos em carteira,  $CE_i$  é a exposição ao crédito (*credit exposure*) do activo  $i$ ,  $r_i$  representa a taxa de recuperação (*recovery rate*) do activo  $i$  e  $d_i$  é definido de acordo com o exposto na Secção 1.2. A  $ECL$  corresponde à média da distribuição  $P$ ,

$$ECL = \mathbb{E}[P] = \sum_{i=0}^N \mathbb{E}[CE_i(1 - r_i)d_i]$$

Esta perda deve ser coberta por uma reserva de crédito (*credit reserve*) que é o montante que se deve ter alocado como antecipação à  $ECL$ .

Na Figura 1.2 apresentamos a distribuição típica das perdas devidas ao risco de crédito. Normalmente este tipo de distribuição é bastante enviesada e tem uma cauda esquerda pesada o que significa que as grandes perdas ocorrem com baixa probabilidade.

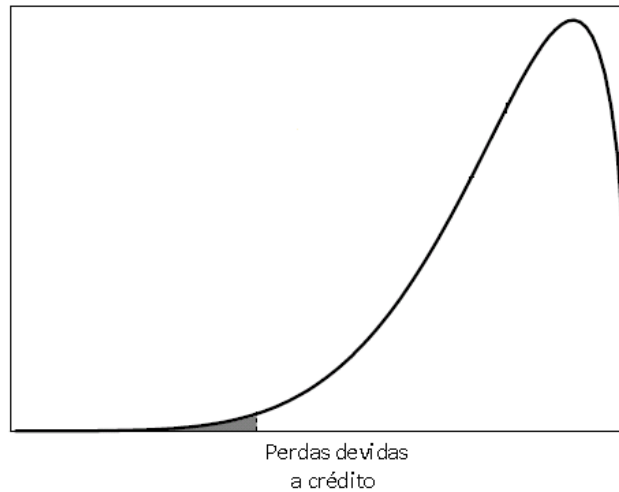


Figura 1.2: Distribuição das perdas devidas a risco de crédito.

Durante os últimos anos, as instituições financeiras têm desenvolvido modelos para medir o risco das suas carteiras. A medida mais usada para quantificar o risco é o Valor em Risco (*Value-at-Risk*),  $VaR$ , desenvolvida por Till Gudilmann nos finais dos anos 80, correspondendo a um quantil da distribuição das perdas. De acordo com [Embrechts, McNeil, Frey, 2005], dado um nível de confiança  $\alpha \in [0, 1]$ , o  $VaR$  corresponde ao mais pequeno número  $l$  tal que a probabilidade da perda  $L$  exceder  $l$  não é maior que  $(1 - \alpha)$ . Formalmente,

$$VaR_\alpha = \inf \{l \in \mathbb{R} : P(L > l) \leq 1 - \alpha\}$$

O  $VaR$  além de quantificar o risco é também usado para medir a perda inesperada de crédito (*unexpected credit loss*),  $UCL$ , definida como a diferença entre o quantil do  $VaR$  e a perda esperada da carteira devido ao risco de crédito,

$$UCL = VaR(k) - ECL$$

em que  $VaR(k)$  corresponde ao  $k$ -ésimo quantil da distribuição das perdas devidas ao risco de crédito.

Na Figura 1.3 ilustramos as perdas esperada e inesperada de crédito para um nível de confiança de 99%.

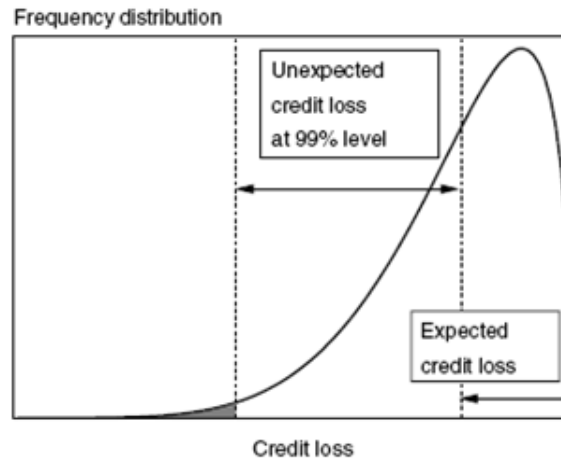


Figura 1.3: Perdas Esperada e Inesperada de crédito. (Fonte: [Jorion, 2003])

#### 1.4.1 Modelos

Existem vários modelos para medir e quantificar o risco de crédito para carteiras de dívida. Os mais conhecidos são: *CreditMetrics*, *CreditRisk+*, *CreditPortfolio View* e *KMV*. Seguidamente iremos descrever de uma forma sucinta cada um destes modelos apresentando os aspectos mais relevantes dos mesmos. O *CreditMetrics*, por ser o tema central da presente dissertação, é descrito detalhadamente no Capítulo 3.

##### *CreditRisk+*

O modelo *CreditRisk+* foi desenvolvido em Outubro de 1997 pela *Credit Suisse Financial Products* que aplicou ideias anteriormente utilizadas na área dos seguros. Este modelo foca-se apenas no incumprimento (*default*) ignorando a migração de *rating* e devido à sua fácil implementação torna-se um método atractivo computacionalmente.

De acordo com [Pereira, 2009], o método assume que:

- Para um instrumento de crédito, a probabilidade de incumprimento (*default*) num dado período, é igual em qualquer outro período;
- Para um instrumento de crédito, a probabilidade de incumprimento (*default*) é pequena;
- Para uma carteira com muitos instrumentos de crédito, o número de incumprimentos (*defaults*) num dado período é independente do número de incumprimentos (*defaults*) noutra período.

Suponhamos que temos uma carteira com  $N$  instrumentos de crédito e que a probabilidade de incumprimento (*default*) de cada activo no momento  $t$  é  $p$ . O número esperado de incumprimentos (*defaults*) para a carteira,  $\mu$ , é  $\mu = Np$ . Partindo do pressuposto que os eventos de incumprimento (*default*) são independentes e  $p$  é pequena, a probabilidade de ocorrerem  $n$  incumprimentos (*defaults*) é dada pela distribuição de *Poisson*,

$$\frac{e^{-\mu} \mu^n}{n!}$$

Para mais detalhes sobre este modelo é aconselhada a leitura de [Credit Suisse Financial Products, 1997].

### ***CreditPortfolio View***

O *CreditPortfolio View* foi desenvolvido por *Wilson* tendo sido implementado comercialmente pela *McKinsey*. Neste modelo as probabilidades de transição de *rating* variam ao longo do tempo, sendo condicionais ao estado da economia. Este modelo utiliza um índice para descrever o estado da economia, índice este que é função de variáveis macro-económicas (a taxa de desemprego, as taxa de crescimento do *PIB* (Produto Interno Bruto), as taxas de juro, as taxas de câmbio, os gastos do governo e a taxa de poupança agregada).

As probabilidades de transição condicionadas são estimadas como função deste macro-índice. Através deste modelo é feita uma interligação entre os factores económicos, a probabilidade de (incumprimento) *default* e a migração de *rating*, onde esta última é obtida por simulação da distribuição de probabilidade de transição de *rating* condicionada. Contudo, sendo um modelo condicional exige uma maior quantidade de dados relativos a incumprimentos (*defaults*) e migração de estados para calibrar o modelo.

Para um estudo mais detalhado sobre este modelo aconselha-se a leitura de *Wilson* (1997a, b).

### **KMV**

O modelo *KMV* foi desenvolvido pela *KMV Corporation* tendo como principal resultado a chamada Frequência Esperada de *Default* (*Expected Default Frequency*), *EDF*, que corresponde à probabilidade de incumprimento (*default*) para um dado emitente. Este modelo recorre ao Modelo de Merton, [Merton, 1974], que iremos apresentar parcialmente no Capítulo 3, procedendo-se à estimação da *EDF*, de acordo com os seguintes passos:

1. Estimar o valor de mercado dos activos da empresa e a respectiva volatilidade;
2. Calcular a distância ao *default* (*distance to default*)<sup>4</sup> ;

<sup>4</sup>A distância ao *default*, *DD*, é um rácio que mede a distância ao *default* em termos da volatilidade dos activos,  $\sigma$ , tal que,  $DD = \frac{V_0 - D^*}{\sigma V_0}$ .  $V_0$  é o valor de mercado dos activos e  $D^*$  é o ponto crítico de *default* dado por  $D^* = STD - \frac{LTD}{2}$ , em que *STD* é a soma dos valores nominais das obrigações de curto prazo e *LTD* é a soma dos valores nominais das obrigações de longo prazo. Existe flexibilidade nos conceitos de curto e longo prazos, embora muitos autores considerem que curto prazo corresponde ao período de um mês a um ano e longo prazo corresponde a períodos superiores a 3 anos.

3. Obter a partir da distância ao *default* (*distance to default*) a probabilidade de incumprimento (*default*).

Pelo modelo KMV é feito um apreamento do crédito da empresa, considerando-a como uma opção<sup>5</sup> de compra.

Nesta secção apresentámos os principais modelos utilizados na gestão do risco de crédito. Estes modelos parecem ser bastante diferentes entre eles, contudo, vários estudos comparativos têm mostrado que, quando implementados com parâmetros consistentes, os resultados são bastante semelhantes.

---

<sup>5</sup>Uma opção é um contrato que dá ao comprador o direito, mas não a obrigação, de comprar ou vender um activo subjacente a um certo preço de exercício e numa determinada data. Para ter esse direito, o comprador paga um prémio ao vendedor que por sua vez tem a obrigação de comprar ou vender ao preço de exercício caso o comprador exerça o seu direito.

## Capítulo 2

# Obrigações

As obrigações (*bonds*) são instrumentos de dívida de longo prazo representando uma responsabilidade contratual por parte de um emitente. O comprador de uma obrigação empresta dinheiro ao emitente que, por sua vez, concorda em reembolsar o montante investido numa data estabelecida, normalmente na maturidade da obrigação, ou seja, no término do contrato e, eventualmente, pagar um juro periódico, o cupão.

Os títulos de dívida são instrumentos mais conservadores de investimento do que as acções, apresentando várias vantagens para o investidor tais como segurança e retorno previsível. O investimento em obrigações é considerado mais seguro do que em acções dado que em termos de exigibilidade de créditos em caso de liquidação, os obrigacionistas, ou seja, os detentores de obrigações, estão em primeiro lugar em relação aos accionistas. Assim, em caso de falência de uma entidade emitente os obrigacionistas são os primeiros a serem reembolsados e só no caso de haver capital excedente é que este será distribuído pelos accionistas.

As obrigações são consideradas títulos de renda fixa (*fixed-income securities*) uma vez que, de uma forma geral, os pagamentos dos cupões e o reembolso do montante investido são estabelecidos no momento da compra da obrigação e fixados para a vida da mesma. No momento da aquisição deste tipo de instrumentos, o comprador sabe exactamente os futuros fluxos de caixa (*cash flows*) que irá receber por comprar e manter a obrigação até à maturidade, ao contrário dos accionistas que não sabem o valor dos dividendos nem a data em que serão pagos. Os pagamentos dos cupões serão recebidos em intervalos específicos e pré-estabelecidos até à maturidade, exceptuando o caso em que possa existir incumprimento (*default*) do emitente. Contudo, caso o comprador decida vender a obrigação antes desta atingir a maturidade, o montante que irá receber dependerá do preço da obrigação naquele momento, que é função do valor da taxa de juro associada ao respectivo nível de risco.

Uma característica fundamental de uma obrigação é a natureza do seu emitente. De uma forma geral podemos agrupar os emitentes de obrigações em três grupos: governos, empresas e instituições supranacionais. No caso de uma obrigação ser emitida por um governo é designada por dívida soberana (*government bonds*) e no caso de ser emitida por uma empresa é designada por dívida corporativa (*corporate bonds*). Por outro lado, se uma obrigação for emitida por instituições supranacionais, como o Banco Europeu de Investimentos ou bancos mundiais, é designada por dívida supranacional.

O mercado onde são transacionadas obrigações divide-se em mercado primário e mercado secundário. O mercado primário é aquele em que as entidades emitentes procedem à emissão dos títulos, isto é, à sua colocação junto dos investidores. Por conseguinte este segmento engloba as operações relativas à primeira transacção das obrigações. Por sua vez, o mercado secundário é aquele onde têm lugar todas as transacções posteriores à do mercado primário, ou seja, é no mercado secundário que se encaminham todas as ordens de compra e de venda em momento posterior à emissão das obrigações.

As Obrigações têm várias características particulares que as distinguem dos outros instrumentos financeiros. Entre elas destacamos o Valor Nominal ou Facial, a Taxa de Cupão, o *Rating*, a Rendibilidade (*Yield*), a Duração (*Duration*) e a Convexidade. Nas secções seguintes apresentamos uma descrição de cada umas das características mencionadas seguindo [Pinho and Soares, 2007] e [Hull, 2003]. Para exposições genéricas e completas destes conceitos pode consultar-se [Beaumont, 2004] e [Jones, 1998]. Apresentamos também as fórmulas de apreçamento de obrigações, e fazemos referência às taxas *forward* bem como ao método de *Bootstrap*. Na Secção 2.9 expomos as principais modalidades das obrigações.

O investimento em obrigações tem, em geral, um risco inferior às acções, contudo, existem alguns riscos associados como o risco de mercado, o risco de crédito, o risco de reinvestimento, o risco de inflação, o risco de liquidez e o risco cambial. Na Secção 2.10 explicamos sumariamente cada um dos tipos de risco mencionados.

## 2.1 Valor Nominal ou Facial

O Valor Nominal ou Facial corresponde ao valor sobre o qual incide a taxa do cupão. O valor nominal de uma obrigação pode, ou não, coincidir com o seu valor de transacção, ou seja, com o valor pelo qual a obrigação é efectivamente transaccionada em mercado secundário. Sempre que se verifica o primeiro caso dizemos que uma obrigação esta valorizada ao par. Por outro lado, se o valor de transacção for inferior ao valor nominal dizemos que a obrigação está a desconto, enquanto que se for superior dizemos que a obrigação está a prémio.

O Valor de Subscrição ou Preço de Emissão corresponde ao valor pelo qual as obrigações são adquiridas no mercado primário. Mais uma vez este valor nem sempre coincide com o valor nominal da obrigação. Desta forma, a emissão é ao par quando o preço de emissão coincide com o valor nominal, sendo acima do par quando o preço de emissão é superior ao valor nominal e abaixo do par quando o preço de emissão é inferior ao valor nominal.

Na data de término do empréstimo, o detentor do título recebe o Valor de Reembolso, que corresponde ao capital que é restituído ao obrigacionista. Normalmente o reembolso efectua-se na maturidade da obrigação, existindo contudo situações de reembolso antecipado e situações em que nunca se efectua o reembolso, como é o caso das obrigações perpétuas. Apresentamos uma pequena descrição deste tipo de obrigações na Secção 2.9. Analogamente ao caso da emissão descrito anteriormente, dependendo do valor de reembolso ser igual, supe-

rior ou inferior ao valor nominal da obrigação, dizemos que o reembolso poder-se-á efectuar, respectivamente, ao par, acima do par e abaixo do par.

## 2.2 Taxa de Cupão

Durante o tempo de vida da obrigação o emitente pode comprometer-se a pagar juros periódicos ao obrigacionista entre a data de emissão da obrigação e a data em que é efectuado o reembolso. Tal como já mencionado, estes juros periódicos são designados de cupões, e podem ser pagos anualmente ou com uma frequência diferente da anual, geralmente semestral. O seu montante,  $C$ , corresponde a uma percentagem do valor nominal,  $VN$ , ou seja,

$$C = i \cdot VN \quad (2.1)$$

em que  $i$  corresponde à taxa de cupão.

A taxa de cupão pode ser fixa ou variável. No primeiro caso, a taxa de cupão é fixada no momento do contrato e mantém-se inalterada durante toda a vida da obrigação. No segundo caso, a taxa de cupão será ajustada, às taxas de mercado, nas datas de pagamento do mesmo.

### Taxas de Cupão Zero

As taxas de cupão zero (*zero-coupon rates*) para um período  $t$  são as taxas aplicadas a um investimento que comece hoje e tenha a duração de  $t$  períodos e em que todos os juros e valor nominal são pagos no fim do período  $t$ , não existindo pagamentos intermédios. Estas taxas correspondem às taxas de rendibilidade geradas por obrigações de cupão zero (*zero coupon bonds*) que são obrigações emitidas sem cupões a serem pagos durante o tempo de vida das mesmas. Nestas circunstâncias o comprador compra a obrigação a desconto, ou seja, paga menos que o valor ao par e recebe o valor facial na maturidade, isto é, o valor de reembolso coincide com o valor facial. A diferença entre estes dois valores gera a taxa de retorno efectiva.

A maioria das taxas que são observadas directamente no mercado, não são de cupão zero. Contudo, existe um método recursivo, o método de *Bootstrap*, que permite obter taxas de cupão zero a partir dos preços de mercado das obrigações. Este método será explicado no decorrer deste capítulo, na Secção 2.6.

## 2.3 Apreçamento de Obrigações

O preço teórico de uma obrigação pode ser calculado como o valor actual de todos os fluxos de caixa que o seu detentor recebe usando taxas de cupão zero apropriadas como taxas de desconto. Deste modo, o preço de uma obrigação corresponde ao valor actual de todos os pagamentos.

Suponhamos que temos uma obrigação com valor nominal de 100 *u.m.*, com uma taxa de cupão semestral fixa de 4% (taxa anual) e de maturidade 3 anos. Consideremos também que

$r(0, i)$  designa a taxa em vigor (*spot*) de cupão zero com capitalização contínua para o momento  $i$ , com  $i = \{0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3\}$ . Para calcularmos o valor actual do primeiro cupão de 2 *u.m.* (taxa de cupão  $\times$  valor nominal/frequência do cupão =  $0.04 \times 100/2$ ) descontamo-lo à taxa  $r(0, 0.5)$ ; para calcularmos o valor actual do segundo cupão de 2 *u.m.* descontamo-lo à taxa  $r(0, 1)$  e assim sucessivamente. Deste modo, o preço teórico desta obrigação é dado por,

$$2e^{-r(0,0.5)\times 0.5} + 2e^{-r(0,1)\times 1} + 2e^{-r(0,1.5)\times 1.5} + 2e^{-r(0,2)\times 2} + 2e^{-r(0,2.5)\times 2.5} + 102e^{-r(0,3)\times 3}$$

Genericamente, e considerando  $P(T)$  o preço de uma obrigação com maturidade  $T$ , temos,

$$P(T) = \sum_{t=1}^{T-1} cVN e^{-r(0,t)\times t} + VN(1+c)e^{-r(0,T)\times T} \quad (2.2)$$

em que,

- $c$  é dado por taxa de cupão/frequência do cupão;
- $VN$  é o valor nominal;
- $r(0, t)$  corresponde à taxa em vigor (*spot*) de cupão zero para  $t$  períodos.

Se, em vez de ser aplicada a capitalização contínua,  $r(0, t)$  for aplicada com uma frequência de capitalização de  $t$  vezes por ano, a Equação (2.2) de apreamento de obrigações é reestruturada para a Equação (2.3) seguindo as mesmas designações para  $c$ ,  $VN$  e  $r(0, t)$ .

$$P(T) = \sum_{t=1}^{T-1} \frac{cVN}{(1+r(0,t))^t} + \frac{VN(1+c)}{(1+r(0,T))^T} \quad (2.3)$$

Para obrigações cuja taxa de cupão seja variável, exprimimos o valor actual do seu preço,  $P(T)$ , através da relação,

$$P(T) = VN \cdot \frac{(1+c_1)}{(1+r(0,1))^1} + \sum_{t=2}^T \frac{cVN \cdot spread}{(1+r(0,t))^t} \quad (2.4)$$

em que  $c_1$  designa a taxa de cupão para o período 1 e  $c$ ,  $VN$  e  $r(0, t)$  assumem as mesmas designações das expressas na Equação (2.3).

As alterações nas taxas em vigor (*spot*) interferem inversamente nos preços das obrigações, ou seja, um aumento nas taxas em vigor (*spot*) provoca um declínio nos preços das mesmas. De acordo com [Jones, 1998], a quantidade exacta desse declínio depende da maturidade e do cupão da obrigação. Segundo o autor, um princípio importante é o de que quando estamos perante uma mudança nas taxas em vigor (*spot*), as mudanças nos preços das obrigações são directamente proporcionais ao tempo de vida das mesmas até à maturidade. Assim, com as mudanças nas taxas em vigor (*spot*), os preços de obrigações de maturidades mais longas estão expostos a mais mudanças do que os preços de obrigações de maturidades mais curtas.

Tal como a maturidade, o cupão de uma obrigação também interfere na alteração do preço provocada por mudanças nas taxas em vigor (*spot*). Uma obrigação com um cupão mais alto sofrerá menos flutuações no que diz respeito ao preço do que uma obrigação que tenha um valor de cupão de juros mais baixo.

### Yield

A rendibilidade (*yield*) corresponde à taxa de retorno do investimento, dando aos obrigacionistas uma noção da rendibilidade da obrigação na qual investiram. Mais formalmente, a rendibilidade (*yield*) é a taxa de desconto que iguala os fluxos de caixa de uma obrigação ao seu valor de mercado. No caso do exemplo anteriormente apresentado, e considerando a Equação (2.2), se denominarmos a rendibilidade (*yield*) por  $y$  vem que,

$$2e^{-y \times 0.5} + 2e^{-y \times 1} + 2e^{-y \times 1.5} + 2e^{-y \times 2} + 2e^{-y \times 2.5} + 102e^{-y \times 3} = VM$$

em que  $VM$  designa o valor de mercado da obrigação em causa. Para resolver esta equação não linear podemos recorrer ao método *Newton-Raphson*<sup>1</sup> que é exposto com todo o detalhe em [Santos, 2002].

Genericamente, e considerando as denominações já apresentadas anteriormente, a rendibilidade (*yield*) de uma obrigação é obtida através da Equação (2.5),

$$\sum_{t=1}^{T-1} cVNe^{-yt} + VN(1+c)e^{-yT} = VM \quad (2.5)$$

No caso em que a rendibilidade (*yield*) não é aplicada a uma capitalização contínua, o processo é análogo com as devidas alterações.

## 2.4 Duration

Embora a maturidade seja considerada a medida principal quando pensamos no tempo de vida de uma obrigação, ela foca-se apenas no reembolso do investidor na data de vencimento do contrato. Se pensarmos, por exemplo, em duas obrigações com maturidade de 15 anos, em que uma tem um valor de cupão de 7% e a outra de 17%, podemos verificar que, em termos económicos, estas obrigações, apesar de apresentarem a mesma maturidade, não apresentam a mesma rendibilidade. Tal situação deve-se ao facto do investidor ter ganhos maiores, a nível de juros, com a obrigação de cupão 17% e conseqüentemente um reembolso do seu investimento mais cedo. Com o intuito de colmatar esta lacuna da maturidade, *Frederick Macaulay* desenvolveu, na década de 50, o conceito de duração (*duration*) que combina as propriedades da maturidade e do cupão.

<sup>1</sup>Para resolver equações não lineares recorrendo ao método de *Newton-Raphson* começa-se com uma estimativa  $y_0$  da solução e produz-se sucessivamente estimativas melhores  $y_1, y_2, y_3, \dots$  usando a fórmula  $y_{i+1} = y_i - \frac{f(y_i)}{f'(y_i)}$ , em que  $f'(y)$  representa a derivada parcial de  $f$  em relação a  $y$ .

Suponhamos que uma obrigação tem fluxos de caixa  $c_t$  no instante  $t$ , em que  $1 \leq t \leq T$ . O preço  $P$  e a rendibilidade (*yield*)  $y$  com capitalização contínua, são, como já vimos relacionados da seguinte forma:

$$P = \sum_{t=1}^T c_t e^{-yt} \quad (2.6)$$

A duração (*duration*),  $D$ , de uma obrigação é definida por,

$$D = \frac{1}{P} \sum_{t=1}^T t c_t e^{-yt} \quad (2.7)$$

A Fórmula (2.7) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$D = \sum_{t=1}^T t \left[ \frac{c_t e^{-yt}}{P} \right] \quad (2.8)$$

Como podemos constatar, o termo  $\frac{c_t e^{-yt}}{P}$  corresponde ao rácio entre o valor actual do fluxo de caixa da obrigação no momento  $t$  e o preço da mesma. Por conseguinte, a duração (*duration*) mede a maturidade média ponderada dos fluxos de caixa de uma obrigação, baseada no valor actual dos mesmos. Podemos então dizer que a duração (*duration*) corresponde ao número de anos necessários para recuperar totalmente o valor de compra de uma obrigação, dados os valores actuais dos seus fluxos de caixa.

Vejamos agora porque é que a duração (*duration*) é uma medida tão popular e extensamente utilizada. Derivando a Equação (2.6) em ordem a  $y$  obtemos,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = - \sum_{t=1}^T c_t t e^{-yt} \quad (2.9)$$

e pela Equação (2.7) concluímos que,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -PD \quad (2.10)$$

Se houver um pequeno deslocamento paralelo na curva da *yield* (*yield curve*)<sup>2</sup>, em que todas as taxas de juro aumentem uma pequena quantidade,  $\delta y$ , as rendibilidades de todas as obrigações também aumentarão  $\delta y$ . A Equação (2.11) mostra-nos que o preço das obrigações aumenta  $\delta y$  onde,

$$\frac{\delta P}{\delta y} = -PD \quad (2.11)$$

---

<sup>2</sup>A curva da *yield* (*yield curve*) é a representação gráfica da estrutura temporal de taxas de juro que consiste num conjunto de taxas de juro em vigor (*spot*) para investimentos de diferentes maturidades e pertencentes à mesma classe de risco.

ou, de forma equivalente,

$$\frac{\delta P}{P} = -D\delta y \quad (2.12)$$

A Equação (2.12) é a equação chave inerente ao conceito da duração (*duration*), mostrando que a variação percentual no preço de uma obrigação é aproximadamente igual à sua duração (*duration*) multiplicada pelo incremento no deslocamento paralelo na curva da *yield* (*yield curve*).

A duração (*duration*) é uma medida importante quando pensamos no investimento em obrigações, captando a sensibilidade dos preços face a mudanças das taxas de juro associadas ao nível de risco. Além disso, é utilizada como uma medida para gerir o risco inerente ao investimento em obrigações. Quanto mais alta for a duração (*duration*) de uma obrigação maior será o risco associado à mesma, uma vez que, maior será o número de anos necessário para recuperar totalmente o seu valor de compra. Como consequência, aumentam as probabilidades de, nesse período, a entidade emitente vir a perder as suas capacidades de crédito.

De acordo com o exposto em [Jones, 1998], a duração (*duration*) é directamente proporcional à maturidade, contrariamente ao que se passa com o valor do cupão, relativamente ao qual mantém uma proporcionalidade inversa. Contudo, à medida que os preços aumentam, verificamos um aumento na duração (*duration*). Dada uma mudança na curva da taxa de juro, a variação percentual dos preços de uma obrigação é directamente proporcional à duração (*duration*).

### Modified Duration

Se  $y$  for aplicada com uma capitalização anual, pode ser demonstrado que a relação aproximada expressa na Equação (2.11) torna-se na Expressão (2.13):

$$\delta P = -\frac{PD\delta y}{1+y} \quad (2.13)$$

Genericamente, se  $y$  for aplicada com uma frequência de capitalização de  $m$  vezes por ano, temos,

$$\delta P = -\frac{PD\delta y}{1+\frac{y}{m}} \quad (2.14)$$

A variável  $D^*$  definida por,

$$D^* = \frac{D}{1+\frac{y}{m}} \quad (2.15)$$

é conhecida como a *modified duration* de uma obrigação. Assim, quando  $y$  é capitalizada a uma frequência de  $m$  vezes por ano, a relação da duração (*duration*) é simplificada para,

$$\delta P = -PD^* \delta y$$

Desta forma, a *modified duration* é uma medida que pode ser utilizada para o cálculo da variação percentual do preço de uma obrigação, dada a variação percentual na rendibilidade (*yield*) da mesma.

## 2.5 Convexidade

Como vimos na secção anterior, para um pequeno deslocamento paralelo na curva da *yield* (*yield curve*), as alterações verificadas no valor de uma obrigação dependem exclusivamente da sua duração (*duration*). Contudo, para médios e grandes deslocamentos paralelos na curva da *yield* (*yield curve*), existe outra medida de extrema importância designada de convexidade. Deste modo, a convexidade é, tal como a duração (*duration*) uma medida utilizada para aferirmos o grau de exposição das obrigações a flutuações na curva da *yield* (*yield curve*).

A convexidade,  $C$ , de uma obrigação é definida por,

$$C = \frac{1}{P} \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = \frac{\sum_{t=1}^T c_t t^2 e^{-yt}}{P} \quad (2.16)$$

com as designações das variáveis já referidas anteriormente.

Segundo [Jones, 1998], a convexidade é tanto maior quanto menor for o cupão, maior for a maturidade e menor for a rendibilidade (*yield*) de uma obrigação. Assim, se uma obrigação apresentar valores elevados de convexidade estão implícitas grandes variações na duração (*duration*) o que implica imprecisões na previsão das variações do preço da mesma.

Quando a convexidade é tida em linha de conta no que respeita à variação percentual dos preços, pode ser demonstrado que a Equação (2.11) é reescrita da seguinte forma:

$$\frac{\delta P}{P} = -D\delta y + \frac{1}{2}C(\delta y)^2$$

Ao entrar em linha de conta com a duração (*duration*) bem como com a convexidade, uma empresa pode imunizar-se contra deslocamentos paralelos relativamente grandes por parte da curva da *yield* (*yield curve*), no entanto, ainda estará exposta aos deslocamentos não paralelos.

## 2.6 Método de *Bootstrap*

O método de *Bootstrap*, é, como já referimos anteriormente, um método a partir do qual é possível obter taxas de cupão zero através dos preços observados de mercado das obrigações. É um procedimento recursivo que considera uma amostra de obrigações, de forma a que

exista, idealmente, para cada geração de fluxos de caixa uma obrigação que atinja a maturidade. Detalhamos o modo de obtenção das taxas de cupão zero utilizando este método através de um exemplo.

Consideremos os dados da Tabela 2.1 em que se supõe que as taxas de cupão zero são aplicadas a uma frequência semestral.

Tabela 2.1: Dados para aplicação do Método de *Bootstrap*.

Obrigação	Tempo para a maturidade (anos)	Taxa do cupão (%)	Valor Nominal (u.m.)	Preço (u.m.)
1	0.50	0	100	96.4
2	1.0	0	100	92.8
3	1.5	6	100	97.5
4	2.0	10	100	103.5

Dado que as duas primeiras obrigações têm cupão zero, os seus preços permitem calcular directamente as taxas de cupão zero a 0.50 e 1 anos. Para tal basta igualar o preço ao valor actualizado dos fluxos de caixa, tal que,

$$P = \frac{VN}{(1 + r(0, t))^t} \quad (2.17)$$

com  $t \in \{0.50, 1.0\}$  e em que  $VN$  corresponde ao valor nominal e  $r(0, t)$  corresponde à taxa de cupão zero para  $t$  períodos.

Assim, para a primeira obrigação temos,

$$96.4 = \frac{100}{(1 + r(0, 0.50))^{0.50}} \Rightarrow r(0, 0.50) = 7.608\% \quad (2.18)$$

Procedendo de forma análoga para a obrigação 2, obtemos a taxa de cupão zero para 1 ano  $r(0, 1.0) = 7.759\%$ . Para as restantes maturidades as taxas de cupão zero não são observáveis directamente uma vez que apenas dispomos de obrigações com cupão diferente de zero. Deste modo, começamos pela obrigação com a maturidade mais curta e assim sucessivamente por ordem crescente de tempo para a maturidade, igualando o preço ao valor actualizado dos fluxos de caixa. Assim, para obtermos a taxa de cupão zero para a próxima maturidade, ou seja, para 1 ano e 6 meses, usamos as taxas já calculadas, da seguinte forma:

$$97.5 = \frac{3}{(1 + 7.608\%)^{0.50}} + \frac{3}{(1 + 7.759\%)^{1.0}} + \frac{103}{(1 + r(0, 1.5))^{1.5}}$$

$$\Rightarrow r(0, 1.5) = 7.958\%$$

Analogamente obtemos a taxa de cupão zero para dois anos,

$$103.5 = \frac{5}{(1 + 7.608\%)^{0.50}} + \frac{5}{(1 + 7.759\%)^{1.0}} + \frac{5}{(1 + 7.958\%)^{1.5}} + \frac{105}{(1 + r(0, 2.0))^{2.0}} \quad (2.19)$$

$$\Rightarrow r(0, 2.0) = 8.264\%$$

Desta forma obtemos as taxas de cupão zero para todas as maturidades, que resumimos na Tabela 2.2.

Tabela 2.2: Taxas de cupão zero obtidas pelo Método de *Bootstrap*.

Maturidade ( $n$ )	Taxa de cupão zero (%) para o $n$ -ésimo período
0.5	7.608%
1.0	7.759%
1.5	7.958%
2.0	8.264%

Caso quiséssemos calcular taxas de cupão zero para outras maturidades, por exemplo, 0.75, podíamos recorrer a uma interpolação linear entre os dados das maturidades disponíveis, que neste caso seriam 0.5 e 1.0 .

Para taxas aplicadas a uma capitalização contínua o processo é análogo com as devidas alterações, sendo possível consultar um exemplo em [Hull, 2003].

## 2.7 Taxas *Forward*

As taxas de juro a prazo<sup>3</sup> (*forward*) são taxas esperadas hoje para começarem a ser aplicadas numa determinada data futura e durante um certo período de tempo.

A taxa *forward*,  $f(t, T)$ , representa a taxa esperada hoje para começar a ser aplicada no instante  $t$ , cuja maturidade é  $T - t$  em que ( $t > 0$ ) e ( $T > t$ ). Esta taxa é calculada a partir das taxas em vigor (*spot*) de cupão zero para  $t$  períodos,  $r(0, t)$ , tal que,

$$[1 + r(0, t)]^t [1 + f(t, T)]^{(T-t)} = [1 + r(0, T)]^T$$

Consequentemente temos que:

$$f(t, T) = {}^{(T-t)}\sqrt{\frac{[1 + r(0, T)]^T}{[1 + r(0, t)]^t}} - 1 \quad (2.20)$$

<sup>3</sup>Procurámos a tradução para português de taxa *forward*, contudo verificámos que não existe consenso quanto à sua tradução. Deste modo, usaremos a terminologia em inglês, contudo, apresentamos uma tradução deste conceito seguindo [Barreto, 1996].

## 2.8 *Rating*

Como vimos no Capítulo 1, existem agências de *rating* que classificam os emitentes de obrigações de acordo com a sua qualidade de crédito. Segundo [Pinho and Soares, 2007], as agências de *rating* baseiam-se no nível de risco do sector da actividade, no posicionamento da empresa no mercado, na rendibilidade da empresa, na sua situação financeira e na qualidade da sua gestão para atribuírem uma classificação às empresas ou governos, o *rating*, que permite graduar o risco das diferentes emissões de títulos de dívida, dando uma percepção da capacidade de solvência dos emitentes. Deste modo, o *rating* de um emitente é um indicador da capacidade de cumprimento das suas responsabilidades, dando a conhecer o seu nível de risco de crédito.

O *rating* de um emitente relaciona-se inversamente com a taxa de cupão das obrigações emitidas pelo mesmo. Quanto pior for o *rating* associado à entidade emitente maior será a taxa de cupão proposta aos investidores. Tal situação deve-se ao facto de existir maior probabilidade do emitente não honrar as responsabilidades assumidas, ou seja, existe uma maior probabilidade de incumprimento (*default*). Assim, para estimular os investidores, as entidades com baixo *rating* (*speculative grade*) propõem um valor alto de cupão.

## 2.9 Modalidades

No momento da emissão das obrigações são fixadas as características destas, tais como, a forma de amortização do capital, a taxa de cupão e periodicidade do mesmo, caso não se tratem de obrigações de cupão zero. Atendendo às especificidades da emissão bem como o tipo da instituição ou entidade emitente, as obrigações podem assumir várias modalidades. Alguns exemplos são apresentados de seguida, de acordo com [Pinho and Soares, 2007].

- **Euro Obrigações** - são obrigações que estão disponíveis para investidores internacionais, podendo ser emitidas por empresas industriais, bancos, sector público ou organizações supranacionais;
- **Junk Bonds** - correspondem às obrigações emitidas por instituições ou entidades com um *rating* reduzido, o que lhes confere um nível elevado de risco. Podem ser emitidas, por exemplo, por empresas com problemas financeiros ou empresas que estejam num mercado particularmente competitivo ou volátil;
- **Obrigações Clássicas** - correspondem às obrigações de taxa fixa. No momento de emissão é fixada a taxa de cupão que se mantém inalterada durante o tempo de vida da obrigação;
- **Obrigações com Warrants** - conferem aos obrigacionistas o direito de comprarem um certo número de acções do seu emitente a um certo preço pré-estabelecido e num determinado período de tempo;
- **Obrigações Convertíveis** - conferem ao seu detentor o direito de as converter num determinado número de acções do seu emitente durante um certo período de tempo e

sob certas condições pré-estabelecidas;

- **Obrigações Cupão Zero** - correspondem às obrigações cujo cupão é nulo. O valor de remuneração corresponde ao juro implícito na diferença entre o preço de emissão e o valor do reembolso;
- **Obrigações de Empresas** - correspondem às obrigações emitidas por empresas cotadas ou não-cotadas, com o objectivo de, eventualmente, expandir o seu negócio;
- **Obrigações do Tesouro** - correspondem às obrigações emitidas por um Estado;
- **Obrigações Garantidas** - correspondem às obrigações em que existe uma terceira entidade (um Estado, uma Empresa,...), que, caso o emitente não pague o valor de reembolso ou os cupões acordados, se responsabiliza pelo pagamento ao obrigacionista;
- **Obrigações Hipotecárias** - conferem aos seus detentores o direito de precedência em relação aos outros credores no que diz respeito ao reembolso do capital e ao pagamento de juros;
- **Obrigações Indexadas** - correspondem às obrigações de taxa variável. A cada data de recebimento do cupão, verifica-se um ajuste da taxa de cupão às taxas de mercado;
- **Obrigações Não Garantidas** - correspondem às obrigações em que o pagamento do valor de reembolso e dos cupões é unicamente da responsabilidade do emitente e da sua capacidade de crédito;
- **Obrigações Participantes** - conferem aos seus titulares o direito de uma remuneração adicional em termos de juro adicional ou prémio de reembolso. O montante da remuneração adicional depende dos lucros obtidos por parte do emitente e é calculado pela aplicação de uma percentagem ao lucro total ou parcial;
- **Obrigações Perpétuas** - correspondem às obrigações em que não existe um prazo de término de contrato. O capital nunca é amortizado, vencendo juros eternamente;
- **Obrigações Subordinadas** - correspondem às obrigações cujo pagamento do cupão bem como o reembolso de capital, estão subordinados ao pagamento das restantes dívidas do emitente caso este entre em falência.

## 2.10 Riscos

De acordo com o exposto anteriormente podemos constatar que o investimento em obrigações envolve vários riscos entre eles o risco de mercado, o risco de crédito, o risco de reinvestimento, o risco de inflação, o risco de liquidez e o risco cambial. Seguidamente apresentamos uma explicação sumária de cada um dos tipos de risco mencionados e a forma como condicionam o investimento em obrigações, seguindo [Fabozzi, 2005].

### Risco de Mercado

Como já referimos anteriormente, o preço de uma obrigação move-se em sentido oposto às

mudanças nas taxas em vigor (*spot*), ou seja, quando as taxas em vigor (*spot*) aumentam os preços diminuem e vice-versa. Para um investidor que pretenda manter uma obrigação até à maturidade, uma mudança no preço desta não é um problema. Contudo, para um investidor que queira vender a obrigação antes da maturidade, um aumento das taxas em vigor (*spot*) reflectir-se-á numa perda de capital. Este risco corresponde ao risco de taxa de juro ou risco de mercado e é um dos maiores riscos que um obrigacionista enfrenta quando investe em obrigações. Para controlarmos este tipo de risco é necessário quantificá-lo, sendo a duração (*duration*) a medida usualmente utilizada para esse efeito.

### **Risco de Crédito**

O risco de crédito corresponde ao risco da entidade emitente não cumprir com as responsabilidades assumidas, ou seja, não pagar os cupões e/ou não reembolsar o investidor na maturidade da obrigação. Este cenário normalmente é o resultado da entidade emitente entrar em falência originando incumprimentos (*defaults*).

### **Risco de Reinvestimento**

Normalmente os fluxos de caixa (*cash flows*) recebidos pelo detentor de uma obrigação são reinvestidos. Contudo, o reinvestimento estará sujeito às taxas de juro da altura que, caso sofram uma descida, impedirão que os fluxos de caixa (*cash flows*) sejam reinvestidos à taxa inicial. Este tipo de risco é maior para obrigações com maturidades mais longas, uma vez que, nesse caso, existe uma maior probabilidade de mudanças nas taxas de juro.

É de notar que o risco de reinvestimento é oposto ao risco de mercado. Enquanto que o risco de reinvestimento corresponde ao risco das taxas de juro descerem, o risco de mercado corresponde ao risco das taxas subirem o que resulta numa descida dos preços das obrigações.

### **Risco de Inflação**

Caso a inflação seja acima do esperado, penalizará o investidor que recebe um fluxo de caixa (*cash flow*) fixo naquela moeda. Dado que as taxas de juro reflectem a taxa de inflação esperada, as obrigações de taxa variável estão expostas a um risco de inflação menor que as de taxa fixa. Tal situação deve-se ao facto de numa obrigação de taxa variável a taxa de cupão ser ajustada à taxa de mercado nos momentos de pagamento enquanto que, nas obrigações de taxa fixa o cupão é fixo durante toda a vida da obrigação.

### **Risco de Liquidez**

O risco de liquidez surge nos casos em que o investidor possui uma obrigação até à maturidade mas pretende reavaliá-la periodicamente. Deste modo, a obrigação é reavaliada no portefólio baseada no seu valor actual de mercado que pode ser bastante dispar do valor de compra. Quanto menos liquidez tiver uma obrigação, maior será a variação dos preços de compra (*bid*) obtidos pelos investidores. Por conseguinte, poderá haver uma limitação

de profundidade<sup>4</sup> existente entre preço de compra/preço de venda (*bid/ask*) influenciando a eficiência de execução de ordens de compra/venda da obrigação.

### **Risco Cambial**

Uma obrigação cujos pagamentos ocorram numa moeda estrangeira, tem fluxos de caixa (*cash flows*) desconhecidos na moeda doméstica dado que estes na moeda doméstica são dependentes das taxas de juro estrangeiras no momento em que os pagamentos são efectuados. Por exemplo, se um investidor português possuir uma obrigação cujos pagamentos serão feitos na moeda Japonesa, (Iene), e caso o Iene desvalorize relativamente ao Euro, o investidor verá o seu reembolso em euros ser reduzido. Contudo, caso o Iene valorize relativamente ao Euro o investidor beneficia pois o seu reembolso em euros será aumentado.

---

<sup>4</sup>De acordo com [Lawrence, 2000], a profundidade de mercado é determinada pela sua capacidade de absorver a compra ou a venda de um grande montante em unidades monetárias de um título em particular.

## Capítulo 3

### *CreditMetrics*

Neste capítulo apresentamos a metodologia proposta pela J.P. Morgan em 1997, o *CreditMetrics*, para a gestão do risco de crédito de uma carteira de dívida. Mostramos também como, através do Modelo de Merton, se obtém o ponto crítico a partir do qual uma firma sofre incumprimento (*default*). O Modelo de Merton é determinante para a teoria inerente ao *CreditMetrics* na medida em que sugere que o incumprimento (*default*) de uma firma é função do valor subjacente da mesma.

Segundo [JP Morgan, 1997] o *CreditMetrics* tem por objectivo avaliar o risco inerente a uma carteira de dívida devido a mudanças no valor desta causadas por alterações na qualidade de crédito da contraparte. São incluídas mudanças provocadas por alterações no *rating* dos emitentes ou por possíveis eventos de incumprimento (*default*).

De acordo com [Saunders and Allen, 2002] o *CreditMetrics* foi apresentado como uma medida de *VaR* para a avaliação do risco de instrumentos de crédito como as obrigações e os empréstimos dando uma de várias respostas possíveis à pergunta: Se o próximo ano for um ano mau quanto perderei na minha carteira de dívida?

Através do *CreditMetrics* estimamos as potenciais perdas subjacentes a uma carteira de dívida num certo horizonte temporal, normalmente um ano, e para um dado nível de confiança. Dado que esta medida de *VaR* tem em linha de conta as características específicas dos instrumentos de crédito, é designada por *Credit VaR*.

#### 3.1 Modelo de Merton

No Modelo de Merton, uma firma tem uma estrutura de capital simples em que o valor dos activos no momento  $t$ ,  $V_t$ , é dado por:

$$V_t = S_t + P_t$$

onde  $S_t$  representa o valor das acções da firma no momento  $t$  e  $P_t$  é o valor de mercado no momento  $t$  de um instrumento de dívida de cupão zero, com valor facial  $F$  e que matura no

momento  $T$ .

Segundo Merton, o retorno logarítmico normalizado,  $r$ , dos activos de uma firma é tal que,

$$r \equiv \frac{\ln \frac{V_t}{V_0} - (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t}{\sigma\sqrt{t}} \sim N(0, 1) \quad (3.1)$$

onde,  $V_0$  é o valor dos activos da firma no instante inicial ( $t = 0$ ),  $\mu$  é a taxa de retorno e  $\sigma$  é a volatilidade.

Para um melhor enquadramento deste resultado vamos definir alguns conceitos como Processo Browniano, Processo de Ito, a Fórmula de Ito, desenvolvida pelo Matemático Kiyosi Itô em 1951, e Movimento Browniano Geométrico. Apresentamos também outras definições que são fulcrais para a compreensão dos conceitos atrás mencionados. Como apoio bibliográfico para as definições que se vão seguir, recorreremos a [Oksendal, 2000].

Em mercados eficientes<sup>1</sup> assume-se que os preços dos activos seguem um Processo de Markov. As previsões para o futuro são incertas e como tal têm de ser expressas em termos de distribuições de probabilidade. A propriedade de Markov implica que a distribuição de probabilidade para o preço de um activo num qualquer instante futuro, dado o presente, não é dependente da evolução do preço no passado. Um caso particular de um processo de Markov é o processo Browniano.

A evolução da informação disponível é descrita pelo conceito de filtração que apresentamos de seguida.

*Definição 3.1.* Uma filtração num espaço mensurável  $(\Omega, \mathcal{F})$  é uma família de sub álgebras- $\sigma$  de  $\mathcal{F}$ ,  $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$ , tal que, se  $0 \leq s \leq t$ ,  $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ .

*Definição 3.2.* Sejam  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  um espaço de probabilidade e  $\mathbb{G} = (\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$  uma filtração sobre o espaço de probabilidade. O processo  $B = (B_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$  é um Processo Browniano se e só se:

1.  $B$  é  $\mathbb{G}$  adaptado, ou seja,  $\forall t \in \mathbb{R}^+ B_t \in m \mathcal{G}_t$ ;

2.  $(B_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$  é um processo Gaussiano, ou seja,

para todo  $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k$ ,  $Z = (B_{t_1}, \dots, B_{t_k}) \in \mathbb{R}^{nk}$  tem distribuição multinormal;

3.  $(B_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$  tem incrementos independentes, isto é,

$B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_k} - B_{t_{k-1}}$  são independentes para todo  $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k$ .

4.  $(B_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$  tem incrementos estacionários, ou seja,

$\forall h > 0 \forall t \geq 0 B_{t+h} - B_t \overset{d}{\sim} B_h - B_0$

<sup>1</sup>Mercados em que toda a nova informação é imediatamente incorporada nos preços dos activos transacionados.

5.  $(B_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$  tem trajectórias contínuas.

*Definição 3.3.* Seja  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  um processo estocástico. O processo  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  é um processo de Ito se e só se admite uma representação na forma

$$X_t = X_0 + \int_0^t u_s ds + \int_0^t v_s dB_s$$

ou na representação diferencial usual:

$$dX_t = u_t dt + v_t dB_t$$

em que  $B_s$  e  $B_t$  são processos Brownianos,  $(u_t)_{t \geq 0}$  é tal que para cada  $t$  se tem  $P[\int_0^t |u_s| ds < +\infty \forall t \geq 0] = 1$  e  $\int_0^t v_s dB_s$  é um Integral de Ito cuja existência e construção ilustramos de seguida.

### Integral de Ito

No que vai seguir-se vamos procurar dar sentido à expressão

$$\int_S^T f(t, \omega) dB_t(\omega) \quad (3.2)$$

em que  $f : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  e  $B_t$  é um processo Browniano. De acordo com [Oksendal, 2000], é razoável começarmos por tentar dar sentido à Expressão (3.2) para uma classe simples de funções  $f$  e depois obter uma extensão através de um procedimento de aproximação. Deste modo, vamos começar por assumir que  $f$  é da forma:

$$\phi(t, \omega) = \sum_{j \geq 0} e_j(\omega) \chi_{[j2^{-n}, (j+1)2^{-n}]}(t) \quad (3.3)$$

em que  $\chi$  designa a função indicatriz e  $n$  é um número natural. Para estas funções, designadas de funções elementares, podemos definir

$$\int_S^T \phi(t, \omega) dB_t(\omega) = \sum_{j \geq 0} e_j(\omega) [B_{t_{j+1}} - B_{t_j}](\omega) \quad (3.4)$$

onde,

$$t_k = t_k^{(n)} = \begin{cases} k \cdot 2^{-n} & \text{se } S \leq k \cdot 2^{-n} \leq T \\ S & \text{se } k \cdot 2^{-n} < S \\ T & \text{se } k \cdot 2^{-n} > T \end{cases}$$

Consideremos agora a classe de funções  $\nu = \nu(S, T)$  definida de seguida.

*Definição 3.4.* Seja  $\nu = \nu(S, T)$  a classe de funções

$$f(t, \omega) : [0, \infty) \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que,

1.  $(t, \omega) \rightarrow f(t, \omega)$  é  $\mathcal{B} \times \mathcal{F}$  – mensurável<sup>2</sup>, em que  $\mathcal{B}$  representa a álgebra- $\sigma$  de Borel<sup>3</sup> em  $[0, \infty)$
2.  $f(t, \omega)$  é  $\mathcal{F}_t$ -adaptada<sup>4</sup>
3.  $\mathbb{E}[\int_S^T f(t, \omega)^2 dt] < \infty$

O nosso objectivo é mostrar que o Integral de Ito de funções  $f \in \nu$  pode ser obtido como o limite do Integral de Ito de funções elementares definido pela Expressão (3.4). A ideia subjacente para obter uma extensão da definição de Integral de Ito de funções elementares para funções pertencentes a  $\nu$  é a Isometria (3.5) que apresentamos no *Lema* seguinte.

*Lema (Isometria de Ito)* Se  $\phi(t, \omega)$  é limitada e elementar então,

$$\mathbb{E}[(\int_S^T \phi(t, \omega) dB_t(\omega))^2] = \mathbb{E}[\int_S^T \phi(t, \omega)^2 dt] \quad (3.5)$$

*Demonstração:* A demonstração deste Lema pode ser consultada em [Oksendal, 2000], pag 26.

De seguida descrevemos sussintamente os passos necessários para obter a extensão do Integral de Ito para a classe de funções  $\nu$ . As demonstrações dos mesmos são feitas com todo o rigor em [Oksendal, 2000], pags 27 e 28.

**Passo 1** Seja  $g \in \nu$  limitada e  $g(\cdot, \omega)$  contínua para cada  $\omega$ . Existem funções elementares  $\phi_n \in \nu$  tal que

$$\mathbb{E}[\int_S^T (g - \phi_n)^2 dt] \rightarrow 0 \quad \text{com } n \rightarrow \infty$$

**Passo 2** Seja  $h \in \nu$  limitada. Existem funções limitadas  $g_n \in \nu$  tal que  $g_n(\cdot, \omega)$  é contínua para todo  $\omega$  e  $n$ , e

$$\mathbb{E}[\int_S^T (h - g_n)^2 dt] \rightarrow 0$$

**Passo 3** Seja  $f \in \nu$ . Existe uma sequência  $\{h_n\} \subset \nu$  tal que  $h_n$  é limitada para cada  $n$  e

<sup>2</sup>Veja-se [Oksendal, 2000], pag 25.

<sup>3</sup>É possível encontrar a definição de álgebra- $\sigma$  de Borel em [Oksendal, 2000], pag 8.

<sup>4</sup>Veja-se [Oksendal, 2000], pag 25.

$$\mathbb{E}\left[\int_S^T (f - h_n)^2 dt\right] \rightarrow 0 \text{ com } n \rightarrow \infty$$

Estamos agora em condições de completar a definição de Integral de Ito a que nos propusemos

$$\int_S^T f(t, \omega) dB_t(\omega) \text{ para } f \in \nu$$

Se  $f \in \nu$ , a partir dos Passos 1 a 3, escolhemos funções elementares  $\phi_n \in \nu$  tal que

$$\mathbb{E}\left[\int_S^T |f - \phi_n|^2 dt\right] \rightarrow 0$$

Assim, definimos

$$\int_S^T f(t, \omega) dB_t(\omega) := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_S^T \phi_n(t, \omega) dB_t(\omega)$$

em que o limite é um elemento de  $L^2(\mathbb{R})$ .

O Teorema seguinte mostra-nos como aplicar as regras do cálculo diferencial próprias ao Integral de Ito.

*Teorema 1 (Fórmula de Ito I) Seja  $(X_t)_{t \geq 0}$  um processo de Ito admitindo a representação*

$$dX_t = u_t dt + v_t dB_t$$

*Seja  $g(t, x) \in \mathcal{C}^2([0, +\infty) \times \mathbb{R})$  e para cada  $t \geq 0$ ,*

$$Y_t = g(t, X_t)$$

.

*Então, para  $(Y_t)_{t \geq 0}$  tem-se a denominada Fórmula de Ito:*

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t) dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t, X_t) dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, X_t) (dX_t)^2 \quad (3.6)$$

*em que  $(dX_t)^2 = (dX_t) \cdot (dX_t)$  com a tabela de multiplicação dada por*

$$dt \cdot dt = dt \cdot dB_t = dB_t \cdot dt = 0, \quad dB_t \cdot dB_t = dt$$

*Demonstração:* Um esquema geral da demonstração deste teorema pode ser consultado em [Oksendal, 2000].

*Corolário (Fórmula de Ito II)* Sob as hipóteses do Teorema 1, tem-se ainda que  $(Y_t)_{t \geq 0}$  admite a representação

$$dY_t = \left( \frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t) + u_t \frac{\partial g}{\partial x}(t, X_t) + v_t^2 \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, X_t) \right) dt + v_t \frac{\partial g}{\partial x}(t, X_t) dB_t$$

concluindo-se assim que é também um processo de Ito.

*Demonstração:* Para a demonstração deste resultado basta aplicar a tabela de multiplicação apresentada no Teorema 1 à Equação (3.6).

Um caso particular de um processo de Ito é o Movimento Browniano Geométrico  $(S_t)_{t \geq 0}$  que é descrito como solução da equação diferencial estocástica

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t, \quad S_0 \in \mathbb{R}$$

com  $\mu \in \mathbb{R}$  e  $\sigma > 0$ . O processo é geométrico atendendo a que a tendência,  $\mu S_t$ , e a volatilidade,  $\sigma S_t$ , são directamente proporcionais ao valor actual de  $S_t$ .

Merton assume que o valor dos activos da firma segue um Movimento Browniano Geométrico e como tal, denotando  $V_t$  o valor dos activos da firma no instante  $t$  temos,

$$dV_t = \mu V_t dt + \sigma V_t dB_t \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad (3.7)$$

o que representa uma equação diferencial estocástica (EDE) em que  $B_t$  é um Processo Browniano Standard, ou seja,  $B_0 = 0$  e  $B_t \sim N(0, t)$ .

Apresentamos de seguida um resultado que nos será muito útil na medida em que garante a existência e unicidade de solução para as equações diferenciais estocásticas sob determinadas condições.

*Teorema 2 (Existência e unicidade de solução para equações diferenciais estocásticas)*

Seja  $T > 0$  e  $b(.,.) : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\sigma(.,.) : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funções mensuráveis que satisfazem

$$|b(t, x)| + |\sigma(t, x)| \leq C(1 + |x|)$$

onde  $x \in \mathbb{R}$  e  $t \in [0, T]$ , para uma constante  $C$  e tal que

$$|b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq D|x - y|$$

onde  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $t \in [0, T]$  e  $D$  uma outra constante.

Seja  $Z$  uma constante. Nestas condições, a EDE

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t$$

com  $0 \leq t \leq T$  e  $X_0 = Z$ , tem uma única solução contínua  $(X_t)_{t \geq 0}$  que é adaptada à filtração  $\mathcal{F}_t$  gerada por  $B_s(\cdot)$  em que  $s \leq t$  e

$$\mathbb{E}\left[\int_S^T |X_t|^2 dt\right] < \infty$$

Dado que para a Equação (3.7), o termo em  $dt$ , ou seja, a função  $b(t, x)$  é dada por  $\mu x$  e o termo em  $dB_t$ , ou seja, a função  $\sigma(t, x)$  é dada por  $\sigma x$ , com  $\mu$  e  $\sigma$  constantes, estão garantidas as condições de aplicabilidade do Teorema 2, ou seja, garante-se a existência e unicidade de solução para a Equação (3.7). Seja  $(V_t)_{t \geq 0}$  uma solução da Equação (3.7). Aplicando o Corolário à referida equação e tomando  $Y_t = \ln V_t$ ,  $u_t = \mu V_t$  e  $v_t = \sigma V_t$  vem que:

$$dY_t = \left(\frac{1}{V_t}\mu V_t - \frac{1}{2V_t^2}\sigma^2 V_t^2\right)dt + \frac{1}{V_t}\sigma V_t dB_t \quad (3.8)$$

$$dY_t = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dB_t \quad (3.9)$$

A partir da Equação (3.9) obtemos:

$$\ln V_t - \ln V_0 = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t \quad (3.10)$$

$$V_t = V_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t\right) \quad (3.11)$$

isto é, a solução da Equação (3.7), se existir é necessariamente da forma dada em (3.11). Como pelo Teorema 2 a solução de (3.7) existe e é única temos a EDE (3.7) resolvida. Deste modo, concluímos que o valor dos activos de uma firma num certo instante  $t$  é dado pela expressão da Equação (3.11). Por conseguinte, dado que  $B_t$  tem distribuição normal de média nula e variância  $t$ , temos que:

$$\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t = \ln \frac{V_t}{V_0} \sim N\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t, \sigma^2 t\right)$$

e deste modo os retornos verificam:

$$r \equiv \frac{\ln \frac{V_t}{V_0} - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t}{\sigma\sqrt{t}} \sim N(0, 1)$$

em que  $X \sim N(a, b)$  designa uma variável aleatória com distribuição normal de valor médio

$a$  e variância  $b$ .

Este resultado é determinante para a metodologia do *CreditMetrics* na medida em que permite determinar um ponto crítico a partir do qual um instrumento de crédito sofre incumprimento (*default*). De acordo com o exposto em [JP Morgan, 1997], é evidente que o valor dos activos de uma empresa determina a sua capacidade de pagar as dívidas. Pelo Modelo de Merton, se o valor dos activos da empresa descer tanto ao ponto de ser inferior ao valor das dívidas pendentes, que denotaremos por ponto crítico de *default*,  $r_{Def}$ , será impossível para a empresa cumprir as suas responsabilidades, ou seja, de pagar as dívidas e sofrerá incumprimento (*default*).

Seja  $V_T$  o valor dos activos da firma no momento da maturidade do instrumento de dívida e  $F$  o valor facial do mesmo. Quanto maior for  $P[V_T < F]$  maior é o risco de crédito e, deste modo, se se verificar que  $V_T < F$  estamos perante um evento de incumprimento (*default*).

Seja  $p_{Def}$  a probabilidade de incumprimento (*default*) na maturidade (momento  $T$ ), então,

$$\begin{aligned}
 p_{Def} &= P[V_T < F] \\
 &= P\left[\ln \frac{V_T}{V_0} < \ln \frac{F}{V_0}\right] \\
 &= P\left[\frac{\ln \frac{V_T}{V_0} - (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t}{\sigma\sqrt{T}} < \frac{\ln \frac{F}{V_0} - (\mu - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right] \\
 &= P\left[r < \frac{\ln \frac{F}{V_0} - (\mu - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} \equiv r_{Def}\right] \\
 &= N(r_{Def})
 \end{aligned}$$

em que,  $N(\cdot)$  designa a distribuição Normal Reduzida. Deste modo, obtemos o ponto crítico de *default*,  $r_{Def}$ , a partir do qual a firma sofre incumprimento (*default*), através do quantil da Normal Reduzida.

### 3.2 *Credit VaR*

O Modelo *CreditMetrics* pressupõe quatro hipóteses, que passamos a enumerar. Segundo [Pereira, 2009],

1. A única fonte de incerteza corresponde à migração de crédito por parte dos emitentes;
2. Na mesma classe de *rating* todos os emitentes têm a mesma probabilidade de transição de *rating* bem como a mesma probabilidade de incumprimento (*default*);
3. As taxas de juro são determinísticas, sendo possível calcular o valor futuro das obrigações usando as taxas *forward* de hoje;

4. O valor das acções da empresa é um bom substituto para o valor do balanço da empresa. Assim, e de acordo com o exposto em [JP Morgan, 1997], as correlações entre os activos podem ser aproximadas pelas correlações entre os preços das acções, na medida em que, o preço das acções reflecte a avaliação do mercado, que é suposto ser eficiente, sobre a empresa.

O método de cálculo do *Credit VaR* depende do número de obrigações em carteira. Nas Secções 3.2.1 e 3.2.2, exemplificamos, respectivamente, como o facto de uma carteira constituída por uma ou duas obrigações influencia o cálculo do *Credit VaR*. Na Secção 3.2.3 apresentamos a metodologia de cálculo para uma carteira de grandes dimensões, sendo feita uma aplicação no Capítulo 4.

### 3.2.1 Risco de Crédito para uma única obrigação

Consideremos uma obrigação com *rating*<sup>5</sup> *A*, emitida por uma empresa Europeia, *senior secured*, cupão anual fixo de 5%, maturidade de 4 anos e valor facial de 100 *u.m.* Para calcular o *Credit VaR* associado a esta obrigação o método propõe 3 etapas, que passamos a explicar.

#### Primeira Etapa

A primeira etapa tem por objectivo o cálculo dos possíveis valores da obrigação num dado horizonte temporal, por exemplo, um ano, tendo em conta as possíveis subidas e descidas de *rating* como ilustramos na Tabela 3.1.

Tabela 3.1: Primeira Etapa do Modelo.

1ª Etapa		
Aaa	↑	$V_{Aaa}$
Aa	↑	$V_{Aa}$
A	⇒	$V_A$
Baa	↓	$V_{Baa}$
Ba	↓	$V_{Ba}$
B	↓	$V_B$
Caa-C	↓	$V_{Caa-C}$
Default	↓	$V_{Default}$

onde  $V_i$  designa o valor de uma obrigação, cujo *rating* daqui a um ano será *i*.

Na Tabela 3.2 apresentamos um exemplo de taxas *forward* anuais tendo em conta as várias categorias de *rating* em que a obrigação pode estar classificada (veja-se [Pereira, 2009]).

<sup>5</sup>Nos exemplos considerados, vamos admitir a classificação de *rating* da *Moody's*.

Tabela 3.2: Taxas *forward*, em percentagem, para as várias categorias de *rating*.

Categoria	Ano 1	Ano 2	Ano 3	Ano 4
Aaa	3.60	4.17	4.73	5.12
Aa	3.65	4.22	4.78	5.17
A	3.72	4.32	4.93	5.32
Baa	4.10	4.67	5.25	5.63
Ba	5.55	6.02	6.78	7.27
B	6.05	7.02	8.03	8.52
Caa-C	15.05	15.02	14.03	13.52

Com os dados da Tabela 3.2 e usando a Equação (2.3), apresentada no Capítulo 2, podemos calcular os possíveis valores da obrigação ao fim de um ano. Dado que o cupão anual da obrigação considerada é de 5% e o valor facial é de 100 *u.m.*, no fim de cada ano e durante 3 anos, há o pagamento de 5 *u.m.* No fim do quarto ano, e supondo que o reembolso é feito na maturidade, há o pagamento do cupão, bem como o reembolso do valor facial, o que perfaz um total de 105 *u.m.*

Calculamos de seguida o valor da obrigação, daqui a um ano, caso o seu *rating* passe para a categoria *Aaa*. Os cálculos para as restantes categorias de *rating* são feitos de modo análogo.

$$V_{Aaa} = 5 + \frac{5}{1.036} + \frac{5}{1.0417^2} + \frac{105}{1.0473^3} = 105.84 \text{ u.m.}$$

No caso em que haja uma descida de *rating* para um evento de *default*, o valor da obrigação nesse cenário corresponderá ao produto da taxa de recuperação (*recovery rate*) pelo valor facial. Existem vários estudos realizados para a estimação da taxa de recuperação (*recovery rate*) de obrigações. As estimativas que vamos considerar serão as fornecidas pela *Moody's*, disponíveis em [Moody's, 2010], que efectuou um estudo entre 1985 e 2009 agrupando as obrigações por zonas geográficas e por senioridade conforme ilustramos na Tabela 3.3. Neste estudo, as taxas de recuperação (*recovery rates*) são estimadas tendo por base o preço de compra (*bid*) das obrigações nos 30 dias seguintes à ocorrência de incumprimento (*default*) dos respectivos emitentes. Os dados incluem quer obrigações com um *rating* atribuído pela *Moody's* quer obrigações sem *rating*.

Tabela 3.3: *Recovery Rate* das obrigações da Europa e dos EUA.

Recovery Rate (%)		
Categoria	Europa	EUA
<i>Sr Secured</i>	38.7	56.4
<i>Sr Unsecured</i>	24.5	36.4
<i>Sr Subordinated</i>	34.3	32
<i>Subordinated</i>	25.4	30.4
<i>Jr Subordinated</i>	n.a.	24.3

Como a obrigação considerada é *senior secured* e Europeia, o seu valor, caso o emitente entre em incumprimento (*default*), é de:

$$V_{Default} = 0.387 * 100 = 38.70 \text{ u.m.}$$

### Segunda Etapa

Na segunda etapa vamos considerar uma variante da Matriz de Transição de *Rating* 1.2, apresentada no Capítulo 1, de modo a extrairmos as probabilidades de transição da obrigação considerada para as restantes categorias de *rating* ao fim de um ano.

Tal como referimos no Capítulo 1, numa perspectiva conservadora podemos considerar que o estado de *WR* é igual ao estado de *default*, no entanto, tal assunção agravaria muito o valor do *Credit VaR*. Deste modo, distribuímos proporcionalmente as percentagens da coluna *WR* pelas outras categorias de *rating* assumindo que a falta de informação em relação à transição de *rating* de um emitente não significa que haja alteração na estrutura das migrações de *rating*. Além disso, como pudemos constatar no Capítulo 1, nem sempre a soma das linhas da matriz é 100%, situação que não é explicada em [Moody's, 2010]. Deste modo, analogamente ao que foi feito para o estado de *WR*, para contornarmos o problema dividimos proporcionalmente pelas categorias de *rating* a percentagem que sobra ou que falta em cada linha para a soma dar 100%.

Assim, a Matriz de Transição de *Rating* que vamos utilizar é a Matriz 3.4 que apresentamos de seguida, em que os valores estão arredondados e são expressos em percentagem.

Tabela 3.4: Matriz de Transição de *Rating*

Rating Inicial	Rating ao fim de um ano							
	Aaa	Aa	A	Baa	Ba	B	Caa-C	Default
Aaa	91.10	8.36	0.39	0.03	0.09	0.01	0.01	0.00
Aa	0.93	90.20	8.32	0.48	0.04	0.00	0.01	0.02
A	0.03	4.16	89.80	5.55	0.26	0.03	0.03	0.14
Baa	0.00	0.42	7.24	86.86	4.09	0.92	0.34	0.14
Ba	0.00	0.00	0.75	7.39	78.81	10.75	1.18	1.13
B	0.00	0.00	0.35	0.45	7.32	79.39	9.15	3.34
Caa-C	0.00	0.27	0.06	0.00	0.74	10.64	70.61	17.69

Com as probabilidades de transição e com o valor da obrigação em cada categoria de *rating*, calculamos o valor esperado da carteira (constituída apenas por uma obrigação).

Na Tabela 3.5 ilustramos um resumo da primeira e segunda etapas do modelo *CreditMetrics*.

Tabela 3.5: Resumo da Primeira e Segunda Etapas do Modelo.

		1ª Etapa		2ª Etapa	
Aaa	↑	$V_{Aaa}$	105.84	$p_{Aaa}$	0.03
Aa	↑	$V_{Aa}$	105.70	$p_{Aa}$	4.16
A	⇒	$V_A$	105.30	$p_A$	89.80
Baa	↓	$V_{Baa}$	104.43	$p_{Baa}$	5.55
Ba	↓	$V_{Ba}$	100.43	$p_{Ba}$	0.26
B	↓	$V_B$	97.36	$p_B$	0.03
Caa-C	↓	$V_{Caa-C}$	83.94	$p_{Caa-C}$	0.03
Default	↓	$V_{Default}$	38.70	$p_{Default}$	0.14

O valor esperado da carteira será:

$$\mu_{Total} = \sum_s p_s V_s = 105.11 \text{ u.m.}$$

### Terceira Etapa

Na terceira etapa o objectivo é obter a distribuição das alterações do valor da carteira, que é dada, para cada categoria de *rating* por  $\Delta V_s \equiv V_s - \mu_{Total}$ .

Existem duas medidas que normalmente são utilizadas para caracterizar o risco de crédito inerente a uma carteira de crédito: o desvio padrão e o percentil. Estas medidas reflectem a distribuição do valor da carteira e ajudam a quantificar o risco de crédito.

O desvio padrão é uma medida de dispersão simétrica em torno do valor esperado da carteira,

sendo calculado da seguinte forma:

$$\sigma_{Total} \equiv \sqrt{\sum_s p_s (V_s - \mu_{Total})^2} = \sqrt{\sum_s p_s (\Delta V_s)^2} \quad (3.12)$$

Mede a dispersão entre cada valor associado às categorias de *rating* e o valor esperado da carteira. Quanto maior for a dispersão em torno deste valor, maior será o desvio padrão e consequentemente maior será o risco associado à carteira. Dado não podermos assumir o modelo normal para a maioria das distribuições de perdas e ganhos das carteiras de crédito, torna-se difícil inferir acerca da distribuição tendo por base apenas o desvio padrão.

O  $k$ -ésimo percentil,  $0 < k < 1$ , corresponde ao valor  $P_k$  tal que  $100k\%$  dos elementos são menores ou iguais a  $P_k$ , existindo uma probabilidade de  $k$  do valor actual da carteira ser menor que  $P_k$ . Para distribuições normais é possível calcular o percentil através da informação do desvio padrão. No entanto, como já referimos, as distribuições de risco de crédito não são, na sua grande maioria, normais, sendo necessário a estimação do percentil por outra via.

Para calcular o percentil é necessário obter a distribuição completa do valor da carteira, ordená-la por ordem crescente e ir acumulando as probabilidades com que cada valor ocorre até perfazer  $k$ .

Na Tabela 3.6 apresentamos um resumo das etapas do modelo.

Tabela 3.6: Resumo das três etapas do Modelo.

		1ª Etapa		2ª Etapa		3ª Etapa	
Aaa	↑	$V_{Aaa}$	105.84	$p_{Aaa}$	0.03	$\Delta V_{Aaa}$	0.73
Aa	↑	$V_{Aa}$	105.70	$p_{Aa}$	4.16	$\Delta V_{Aa}$	0.60
A	⇒	$V_A$	105.30	$p_A$	89.80	$\Delta V_A$	0.19
Baa	↓	$V_{Baa}$	104.43	$p_{Baa}$	5.55	$\Delta V_{Baa}$	-0.68
Ba	↓	$V_{Ba}$	100.43	$p_{Ba}$	0.26	$\Delta V_{Ba}$	-4.68
B	↓	$V_B$	97.36	$p_B$	0.03	$\Delta V_B$	-7.74
Caa-C	↓	$V_{Caa-C}$	83.94	$p_{Caa-C}$	0.03	$\Delta V_{Caa-C}$	-21.17
Default	↓	$V_{Default}$	38.70	$p_{Default}$	0.14	$\Delta V_{Default}$	-66.41

Para calcularmos o percentil de, por exemplo, 1% da distribuição de  $\Delta V$  basta acumular as probabilidades de transição e parar quando a soma for 1%. Neste caso, o valor crítico da distribuição de  $\Delta V$  encontra-se entre  $-4.68$  e  $-0.68$  (a soma das probabilidades é de 0.0046 e 0.0601 respectivamente). Podemos adoptar uma postura mais conservadora e dizer que o risco de crédito associado à obrigação considerada é,

$$CreditVaR_{99\%} = 4.68 \text{ u.m.}$$

### 3.2.2 Risco de Crédito para duas obrigações

Suponhamos que temos uma carteira com duas obrigações, sendo a primeira obrigação a considerada na secção anterior, tal que:

**Obrigação 1** - *rating A*, emitida por uma empresa Europeia, *senior secured*, cupão anual de 5% e de taxa fixa, maturidade de 4 anos e valor facial de 100 *u.m.*;

**Obrigação 2** - *rating Ba*, emitida por uma empresa dos EUA, *senior unsecured*, cupão anual de 7% e de taxa fixa, maturidade de 5 anos e valor facial de 100 *u.m.*

Vejamos como as 3 etapas referidas para uma carteira com apenas uma obrigação se reajustam para duas obrigações.

### Primeira Etapa

Na primeira etapa, e à semelhança do que vimos na metodologia para uma obrigação, o objectivo é calcular os valores possíveis da carteira ao fim de um ano, tendo em conta as categorias de *rating* em que podem estar classificados cada um dos activos. Dado que cada obrigação pode estar cotada em 8 categorias de *rating*, existem  $64(8 * 8)$  possíveis valores da carteira ao fim de um ano, que ilustramos na Tabela 3.7.

Tabela 3.7: Valor da carteira ao fim de um ano tendo em conta os diferentes cenários que podem ocorrer quanto aos *ratings* das obrigações.

Obrigação 1		Obrigação 2							
		Aaa	Aa	A	Baa	Ba	B	Caa-C	Default
		113.93	113.74	113.20	112.07	106.42	102.42	87.53	36.40
Aaa	105.84	219.77	219.58	219.04	217.91	212.26	208.26	193.37	142.24
Aa	105.70	219.63	219.45	218.91	217.77	212.12	208.12	193.23	142.10
A	105.30	219.23	219.04	218.50	217.36	211.72	207.72	192.83	141.70
Baa	104.43	218.35	218.17	217.63	216.49	210.85	206.84	191.95	140.83
Ba	100.43	214.36	214.17	213.63	212.49	206.85	202.84	187.95	136.83
B	97.36	211.29	211.11	210.57	209.43	203.78	199.78	184.89	133.76
Caa-C	83.94	197.87	197.69	197.15	196.01	190.36	186.36	171.47	120.34
Default	38.70	152.63	152.44	151.90	150.77	145.12	141.12	126.23	75.10

### Segunda Etapa

Na segunda etapa o objectivo é estimar as probabilidades de transição de *rating* relativas às duas obrigações da carteira. Para tal, temos de considerar o cenário em que não existe correlação entre as obrigações e o cenário contrário.

Dado que a Obrigação 2 é emitida por uma empresa dos EUA, vamos considerar, à semelhança do caso anterior, uma variante de uma matriz de transição de *rating* para obrigações dos EUA. A matriz original foi igualmente estimada através de um estudo efectuado pela *Moody's*, disponível em [Moody's, 2010], entre 1985 e 2009 à qual fizemos as mesmas alterações referidas para a matriz de transição de *rating* para obrigações europeias. Ilustramos a matriz obtida na Tabela 3.8, em que os valores estão arredondados e são expressos em percentagem.

Tabela 3.8: Matriz de Transição de *Rating* para Obrigações dos EUA.

<i>Rating</i> Inicial	Rating ao fim de um ano							
	Aaa	Aa	A	Baa	Ba	B	Caa-C	Default
Aaa	92.16	7.51	0.32	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
Aa	1.11	89.47	8.92	0.37	0.06	0.04	0.01	0.01
A	0.06	2.26	90.72	6.10	0.61	0.16	0.05	0.04
Baa	0.06	0.22	4.00	89.52	4.65	1.07	0.24	0.23
Ba	0.01	0.08	0.46	5.80	82.23	9.29	0.69	1.43
B	0.01	0.04	0.15	0.40	4.57	82.58	7.28	4.97
Caa-C	0.00	0.00	0.02	0.19	0.42	8.17	72.42	18.75

No caso em que as obrigações não são correlacionadas, as probabilidades de transição conjunta correspondem simplesmente ao produto entre as probabilidades de transição de cada obrigação, conforme ilustramos na Tabela 3.9, em que os valores estão expressos em porcentagem. Por exemplo, a probabilidade de, ao fim de um ano, a Obrigação 1 passar a estar cotada com o *rating* *Ba* e a Obrigação 2 manter a categoria *Ba* é de 0.22%.

Tabela 3.9: Probabilidades de Transição Conjunta de *Rating* ao fim de um ano.

Obrigação 1		Obrigação 2							
		Aaa	Aa	A	Baa	Ba	B	Caa-C	Default
		0.01	0.08	0.46	5.80	82.23	9.29	0.69	1.43
Aaa	0.03	0.00	0.00	0.00	0.00	0.03	0.00	0.00	0.00
Aa	4.16	0.00	0.00	0.02	0.24	3.42	0.39	0.03	0.06
A	89.80	0.01	0.07	0.41	5.21	73.84	8.34	0.62	1.28
Baa	5.55	0.00	0.00	0.03	0.32	4.56	0.52	0.04	0.08
Ba	0.26	0.00	0.00	0.00	0.02	0.22	0.02	0.00	0.00
B	0.03	0.00	0.00	0.00	0.00	0.03	0.00	0.00	0.00
Caa-C	0.03	0.00	0.00	0.00	0.00	0.03	0.00	0.00	0.00
Default	0.14	0.00	0.00	0.00	0.01	0.11	0.01	0.00	0.00

Tendo a matriz de probabilidades de transição conjunta de *rating* (Tabela 3.9) e a matriz do valor da carteira para os diferentes cenários (Tabela 3.7), basta multiplicarmos as duas matrizes elemento a elemento, obtendo a Tabela 3.10.

Tabela 3.10: Matriz resultante do produto de  $p_s$  por  $V_s$  elemento a elemento.

Obrigação 1	Obrigação 2							
	Aaa	Aa	A	Baa	Ba	B	Caa-C	Default
Aaa	0.00	0.00	0.00	0.00	0.05	0.01	0.00	0.00
Aa	0.00	0.01	0.04	0.53	7.25	0.80	0.06	0.08
A	0.02	0.15	0.90	11.33	156.33	17.32	1.20	1.82
Baa	0.00	0.01	0.06	0.70	9.62	1.07	0.07	0.11
Ba	0.00	0.00	0.00	0.03	0.45	0.05	0.00	0.01
B	0.00	0.00	0.00	0.00	0.05	0.01	0.00	0.00
Caa-C	0.00	0.00	0.00	0.00	0.05	0.01	0.00	0.00
Default	0.00	0.00	0.00	0.01	0.16	0.02	0.00	0.00

Para calcularmos o valor esperado da carteira basta somarmos os elementos desta matriz, obtendo-se assim,

$$\mu_{Total} = \sum_s p_s V_s = 210.41 \text{ u.m.}$$

Contudo, assumir um cenário em que não existe correlação entre as obrigações é demasiado simplista uma vez que as migrações de crédito são afectadas em parte pelos mesmos factores macro-económicos. Desta forma, precisamos estimar as correlações entre migrações conjuntas. Em [JP Morgan, 1997] é proposto uma generalização do Modelo de Merton para o cálculo da matriz das probabilidades de transição conjunta. Assim, assume-se, além da existência do ponto crítico de *default*, também a existência de pontos críticos para as restantes categorias de *rating* definidos como o quantil da Normal Reduzida que determina o valor a partir do qual os emitentes das obrigações transitam para outra categoria de *rating*. O valor dos activos da empresa em relação a esses pontos críticos determina o *rating* futuro da mesma. Deste modo temos uma relação entre o valor subjacente da firma e o seu *rating* e podemos construir a matriz de probabilidades de transição conjunta para dois emitentes através desta informação e de um conhecimento acerca da correlação existente entre eles. Na Figura 3.1 ilustramos a generalização do Modelo de Merton para o emitente da Obrigação 1, de *rating* A.

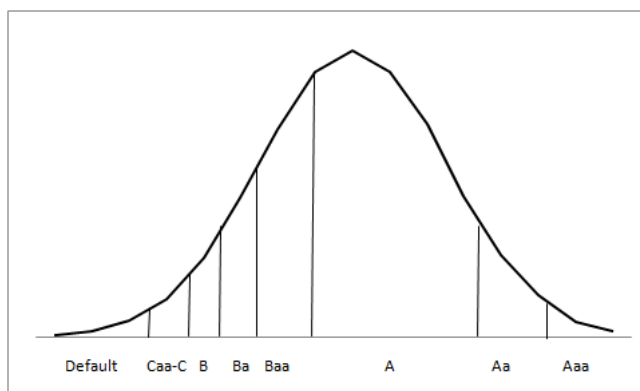


Figura 3.1: Generalização do Modelo de Merton para o emitente da Obrigação 1.

O integral da função representada no gráfico, entre pontos críticos adjacentes corresponde à probabilidade que o emitente assumira o *rating* correspondente a essa região.

Exemplificamos de seguida como se obtêm os referidos pontos críticos de *default* e para os *ratings* Caa-C e B, para o emitente da Obrigação 1. Consideremos a Fórmula (3.12) e a linha correspondente ao *rating* A da Matriz 3.4, uma vez que, a Obrigação 1 tem *rating* A.

Para o cálculo do ponto crítico de *default*,  $r_{Def}$ , do emitente da Obrigação 1 procedemos da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 p_{Def} &= N(r_{Def}) \Rightarrow \\
 0.0014 &= N(r_{Def}) \Rightarrow \\
 r_{Def} &= -2.9974
 \end{aligned}$$

O próximo ponto crítico,  $r_{Caa-C}$ , é calculado como:

$$\begin{aligned}
 p_{Def} + p_{Caa-C} &= N(r_{Caa-C}) \Rightarrow \\
 0.0014 + 0.003 &= N(r_{Caa-C}) \Rightarrow \\
 r_{Caa-C} &= -2.9335
 \end{aligned}$$

O ponto crítico  $r_B$  é dado por:

$$\begin{aligned}
 p_{Def} + p_{Caa-C} + p_B &= N(r_B) \Rightarrow \\
 0.0014 + 0.003 + 0.003 &= N(r_B) \Rightarrow \\
 r_B &= -2.8798
 \end{aligned}$$

De modo análogo calculamos os restantes pontos críticos até ao ponto crítico  $r_{Aa}$ . Se  $r > r_{Aa}$  então o *rating* do emitente da obrigação transitou para *Aaa*. Na Tabela 3.11 ilustramos todos os pontos críticos dos emitentes das obrigações consideradas.

Tabela 3.11: Pontos Críticos para as duas Obrigações.

Rating	Obrigação 1		Obrigação 2	
	Prob(%)	Ponto Crítico ( $r_A$ )	Prob (%)	Ponto Crítico ( $r_{Ba}$ )
Aaa	0.03	-	0.01	-
Aa	4.16	3.4190	0.08	3.5008
A	89.80	1.7291	0.46	3.0863
Baa	5.55	-1.5538	5.80	2.5370
Ba	0.26	-2.6039	82.23	1.5249
B	0.03	-2.8798	9.29	-1.2051
Caa-C	0.03	-2.9335	0.69	-2.0294
Default	0.14	-2.9974	1.43	-2.1893

O próximo passo é estimar a correlação entre os retornos dos activos dos dois emitentes. Dado que os retornos dos activos não são directamente observáveis, o *CreditMetrics* usa, como já

referimos, os retornos das acções como substitutos. Note-se que usar os retornos das acções constitui uma desvantagem principalmente para empresas bastante alavancadas em que os retornos das acções são mais voláteis que os retornos dos activos. Contudo, é melhor do que assumir, por exemplo, uma correlação constante entre todos os activos.

Para calcularmos, por exemplo, a probabilidade de daqui a um ano, o emitente da Obrigação 1 descer uma categoria e o da Obrigação 2 se manter na mesma categoria recorreremos à seguinte expressão:

$$P[-2.6039 < r_A < -1.5538, -1.2051 < r_{Ba} < 1.5249] = \int_{-2.6039}^{-1.5538} \int_{-1.2051}^{1.5249} f(r_A; r_{Ba}; \rho) dr_A dr_{Ba}$$

Em que  $f$  é a função densidade da distribuição normal reduzida bivariada e  $\rho$  corresponde à correlação entre os dois emitentes. De forma análoga podemos calcular todas as 64 probabilidades de transição conjunta.

### Terceira Etapa

Nesta etapa o objectivo é determinar a distribuição de  $\Delta V$  de forma a obtermos o percentil de 1%. No caso em que não há correlação entre as obrigações, subtraímos a cada elemento da Matriz 3.7 o valor esperado da carteira obtendo-se a distribuição de  $\Delta V$ . Após ordenarmos os valores obtidos por ordem crescente, acumula-se as respectivas probabilidades da Matriz 3.9 até totalizar 1%. Assim, concluímos que o risco de crédito associado a esta carteira é de,

$$CreditVaR_{99\%} = 73.58 \text{ u.m.}$$

No caso em que há correlação, o procedimento é análogo ao descrito para o caso em que não há correlação, mas desta vez há que considerar uma matriz de probabilidade conjunta.

### 3.2.3 Risco de Crédito para uma carteira de grandes dimensões

Para uma carteira de grandes dimensões, uma questão que se torna mais complexa é o cálculo da matriz de correlação. Estimar esta matriz através da metodologia proposta anteriormente, ou seja, considerar os retornos das acções como substitutos dos retornos dos activos pode tornar-se insustentável para uma carteira de, por exemplo, 1000 instrumentos de crédito. Deste modo, em [JP Morgan, 1997] é proposta uma metodologia que permite estimar a matriz de correlações tendo por base as correlações entre sectores. Apresentamos de seguida, de forma sumária, o processo necessário para a estimação da referida matriz.

O primeiro passo é atribuir pesos a cada emitente de acordo com a sua participação em sectores como países e indústrias e especificar o peso a atribuir às variações do capital próprio de cada emitente que não são explicadas pelos sectores. Quando especificamos o montante das variações de capital de um emitente que não são explicadas pelos sectores, estamos a

descrever o risco específico, ou idiossincrático<sup>6</sup>, desse emitente. Normalmente, empresas com grande capitalização no mercado têm tendência a ver o seu risco idiossincrático reduzido, enquanto que empresas com pequena capitalização no mercado têm um elevado risco idiossincrático associado. Assim, os retornos estandardizados para cada emitente  $n$ ,  $r_n$ , são descritos segundo o modelo:

$$r_n = \sum_{k=1}^K w_{nk} r_k + \hat{r}_n$$

em que  $K$  corresponde ao número de sectores,  $r_k$  é o retorno estandardizado do sector  $k$ ,  $w_{nk}$  representa a ponderação (a ser estimada) do sector  $k$  no emitente  $n$  e  $\hat{r}_n$  corresponde ao retorno estandardizado específico do emitente  $n$ , ou seja, o retorno idiossincrático do emitente  $n$ .

Dado que as correlações são estimadas apenas entre os sectores considerados, torna-se bem mais acessível a construção da matriz de correlação para uma carteira de grandes dimensões seguindo este modelo. Por exemplo, para uma carteira de 1000 instrumentos de crédito explicados por um total de 10 sectores, apenas era necessário estimarmos uma matriz de correlação de dimensão 10 por 10.

Supondo que temos  $m$  sectores e  $n$  instrumentos de crédito, a matriz de correlação,  $n$  por  $n$ , entre os instrumentos corresponde a,

$$W^T \bar{C} W$$

em que,  $C$  ( $m \times m$ ) corresponde à matriz de correlação entre os sectores e a matriz  $\bar{C}$  ( $m+n \times m+n$ ) é da forma como se indica na Tabela 3.12.

---

<sup>6</sup>Riscos de mudanças de preços devido a circunstâncias especiais em casos específicos, contrários em mercados comuns, são descritos como riscos idiossincráticos.

Tabela 3.12: Matriz  $\bar{C}$ .

	0	..	..	0
	:	..	..	:
	:	..	..	:
	:	..	..	:
	0	..	..	0
<b>C</b>	0	..	0	0
0	1	0	..	0
:	0	..		0
:	:		..	:
0	0	..	..	1

$W$  é uma matriz de dimensão  $m + n$  por  $n$  cujas entradas correspondem às ponderações dos sectores em cada emitente mas re-escaladas da seguinte forma:

$$w_{ij} = \alpha_j \frac{p_{ij}\sigma_i}{\hat{\sigma}_j} \quad (3.13)$$

em que,

- $\alpha_j$  representa a volatilidade total dos retornos estandardizados do emitente  $j$  que é explicada pelos sectores;
- $p_{ij}$  corresponde à ponderação do sector  $i$  no emitente  $j$ ;
- $\sigma_i$  indica a volatilidade do sector  $i$ ;
- $\hat{\sigma}_j$  indica a volatilidade total do emitente  $j$  que é função das correlações entre sectores bem como das volatilidades individuais de cada um dos sectores, ponderadas pelos respectivos pesos.

O peso dos retornos idiossincráticos do emitente  $j$ ,  $p_j$ , é dado por  $p_j = \sqrt{1 - \alpha_j^2}$ . A matriz  $W$  é então construída através das variáveis  $w_{ij}$  e dos pesos dos retornos idiossincráticos de cada emitente,  $p_j$ . Supondo que temos 2 emitentes,  $A$  e  $B$ , que são explicados por 3 sectores, Energia, Tecnologia e Industria, a matriz  $W$  é dada por:

Tabela 3.13: Matriz  $W$ .

	<b>A</b>	<b>B</b>
<b>Energia</b>	$w_{EA}$	0
<b>Tecnologia</b>	$w_{TA}$	0
<b>Industria</b>	0	$w_{IB}$
<b>A</b>	$p_A$	0
<b>B</b>	0	$p_B$

Com a matriz de correlação estimada, o objectivo seguinte é, através da Simulação de Monte

Carlo, gerar a distribuição do valor da carteira. Para tal, há que gerar cenários de *rating* dos emitentes ao fim de um ano. Os passos para a geração dos cenários são os seguintes:

1. Determinar, através do Modelo de Merton, os pontos críticos para os quais os emitentes das obrigações transitam de *rating*;
2. Gerar variáveis correlacionadas e normalmente distribuídas<sup>7</sup>, por exemplo, através da Factorização de *Cholesky*<sup>8</sup>, da Decomposição em Valores Próprios<sup>9</sup> ou da Decomposição em Valores Singulares<sup>10</sup>;
3. Corresponder os cenários gerados aos cenários de *rating*.

Após a geração dos cenários, calculamos o valor de cada activo para cada cenário. Desta forma obtemos facilmente o valor da carteira para cada cenário, constituindo assim a distribuição dos possíveis valores da carteira.

A cada cenário,  $i$ , está associado o respectivo valor da carteira,  $V^{(i)}$ , por conseguinte o estimador do valor total desta é dado por:

$$\mu_{Total} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N V^{(i)} \quad (3.14)$$

e o desvio padrão:

$$\sigma_{Total} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (V^{(i)} - \mu)^2} \quad (3.15)$$

<sup>7</sup>Consultar Apêndice B para mais detalhes.

<sup>8</sup>Seja  $A$  uma matriz simétrica ( $A = A^T$ ) e definida positiva (os valores próprios são positivos ou os menores principais são positivos). Nestas circunstâncias é possível a factorização denominada Factorização de *Cholesky*:  $A = LL^T$ , sendo  $L$  uma matriz Triangular Inferior. (Veja-se [Glasserman, 2000])

<sup>9</sup>Seja  $A$  uma matriz simétrica, definida positiva ou semi-definida positiva (os valores próprios são não negativos), então podemos decompor  $A$  da forma:  $A = VDV^T$ , em que  $V$  é uma matriz ortogonal ( $VV^T = V^TV = I$ , onde  $I$  representa a matriz identidade) composta pelos vectores ortogonais da matriz  $A$  e  $D$  é uma matriz diagonal cujas entradas são os valores próprios da matriz  $A$ . (Veja-se [Glasserman, 2000])

<sup>10</sup>Seja  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  com  $n$  e  $m$  inteiros positivos. Nestas condições podemos decompor  $A$  da forma:  $A = UDV^T$ , em que  $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $V \in \mathbb{R}^{m \times m}$  são matrizes ortogonais e  $D \in \mathbb{R}^{n \times m}$  é uma matriz diagonal cujas entradas correspondem aos valores singulares (raízes quadradas dos valores próprios da matriz  $AA^T$ ) da matriz  $A$ . (Veja-se [Watkins, 2002])



## Capítulo 4

# Aplicação Prática

Neste capítulo descrevemos a implementação do modelo para o cálculo do *Credit VaR* para uma carteira real de uma instituição bancária portuguesa de pequena/média dimensão. Para tal foi necessário conhecermos algumas características da carteira, definirmos pressupostos e a informação necessária para os cálculos a efectuar.

A descrição, nesta dissertação, do trabalho efectuado é tão completa quanto possível dados os compromissos de confidencialidade assumidos. Ainda assim, pretendemos dar uma ideia da utilidade dos resultados obtidos e do trabalho efectuado para os obter.

Os resultados serão apresentados em *u.m.* como forma de salvaguardar os interesses da instituição bancária.

### 4.1 Análise descritiva da carteira

O estudo foi realizado para uma carteira de dívida real relativa a uma data do primeiro semestre de 2010, altura em que era composta por 109 emissões nacionais e estrangeiras. Começámos por fazer uma análise de concentração por país e por sector, que ilustramos na Figura 4.1.

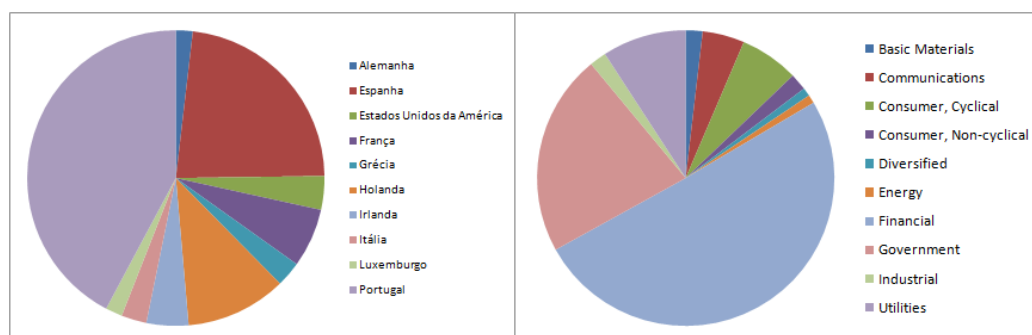


Figura 4.1: Concentração por País e Sector.

No caso da concentração geográfica, constatamos que a carteira é, na sua maioria, constituída por obrigações emitidas por entidades portuguesas seguindo-se as entidades espanholas. No que a sectores respeita, a maior exposição da carteira de dívida é em obrigações do sector financeiro e a segunda maior exposição é em obrigações emitidas por governos.

Em relação à concentração por categorias de *rating*, a instituição bancária centra grande parte da exposição nas obrigações de *rating Aa* e *A*, como podemos observar na Figura 4.2.

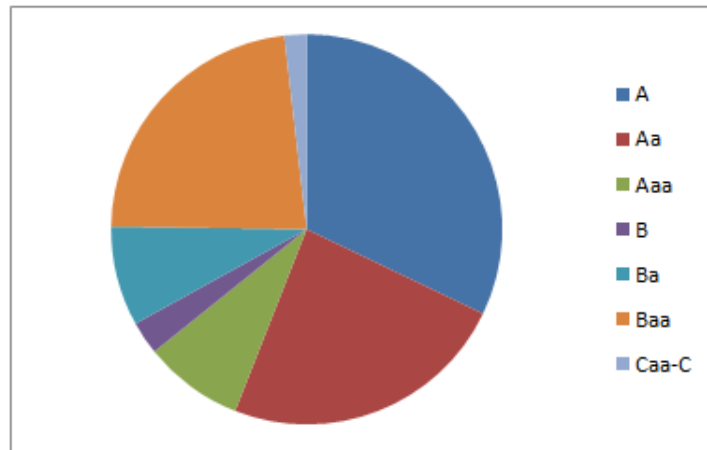


Figura 4.2: Concentração por *Rating*.

Dado que apenas uma pequena percentagem das obrigações possui um *rating* inferior à categoria *Baa*, podemos inferir que a carteira não tem, à partida, um risco de incumprimento (*default*) elevado associado.

## 4.2 Pressupostos

Tal como vimos no Capítulo 3, de apresentação do *Credit VaR*, esta metodologia requer como parâmetros as matrizes de transição de *rating*, taxa de recuperação (*recovery rate*), *forward* e matriz de covariância. O documento que serviu de base à nossa implementação não indica como obter estes parâmetros actualizados às datas necessárias para os cálculos. Assim, tornou-se necessário gerá-los a partir de dados obtidos da *Bloomberg* e da *Moody's*. Seguidamente iremos descrever os métodos e algoritmos usados para gerar os parâmetros utilizados.

### Matrizes de Transição de *Rating*

As matrizes de transição de *rating* consideradas foram variantes das disponibilizadas pela *Moody's*<sup>1</sup> que realizou um estudo entre 1985 e 2009 para obrigações europeias e norte-

<sup>1</sup>Para mais informações sobre a metodologia utilizada pela *Moody's* na construção das matrizes de transição de *rating*, consultar o Apêndice A.

americanas. As Tabelas 3.4 e 3.8, apresentadas no Capítulo 3, ilustram as matrizes de transição consideradas.

Tal como referimos no Capítulo 3, assumimos que a falta de informação em relação à transição de *rating* de um emitente não significa que haja alteração na estrutura das migrações de *rating*. Deste modo, distribuimos proporcionalmente as percentagens da coluna *WR* pelas outras categorias de *rating*. A afectação das percentagens da coluna *WR* ao *default* seria mais consentânea com menor tolerância ao risco, no entanto agravaria muito o valor do *Credit VaR*.

### ***Recovery Rate***

As estimativas para as taxas de recuperação (*recovery rate*) que vamos considerar são as da Tabela 3.3 expostas no Capítulo 3. Estas estimativas foram obtidas pela *Moody's* através de um estudo realizado entre 1985 e 2009 em que as obrigações são agrupadas por zonas geográficas (Europa e EUA) e por senioridade. Como referimos no Capítulo 3, as taxas de recuperação (*recovery rates*) são estimadas, neste estudo, tendo por base o preço de compra (*bid*) das obrigações nos 30 dias seguintes à ocorrência de incumprimento (*default*) dos respectivos emitentes. Os dados incluem quer obrigações com um *rating* atribuído pela *Moody's* quer obrigações sem *rating*.

### ***Taxas Forward***

Através da *Bloomberg* extraímos as taxas *forward* da *EURIBOR*<sup>2</sup> com o intuito de as utilizarmos no cálculo dos cupões das obrigações de taxa variável. Estas taxas correspondem a  $f(t, m)$  em que  $m > t$ ,  $t \geq 1$  ano e  $m - t$  é a frequência do cupão. As taxas com uma maturidade não disponibilizada pela *Bloomberg*, foram obtidas através de interpolação linear.

Para o cálculo da valorização das obrigações daqui a um ano, tendo em conta as possíveis subidas ou descidas de *rating*, são necessárias as taxas *forward* por nível de risco. Dado que as obrigações têm um sector associado decidimos obter taxas *forward* por sectores. Para as obrigações europeias considerámos o sector dos governos (Portugal, Espanha, Irlanda e Grécia), o sector financeiro e o sector industrial. No caso de uma obrigação não pertencer a nenhum destes sectores considerámos taxas *forward* genéricas europeias por nível de risco.

Para as obrigações cuja moeda de emissão é o dólar americano, considerámos, tal como para as europeias, taxas genéricas bem como taxas para o sector financeiro e industrial.

No que respeita ao sector dos governos, foram obtidas taxas *forward* para o nível de risco associado a cada país. Para estimarmos as taxas *forward* para os restantes níveis de risco era necessário uma medida padrão eficiente que garantisse que para categorias de risco inferiores ao *rating* do país as taxas aumentassem e para categorias de risco superiores, as taxas diminuíssem. Optámos por obter a taxa de crescimento através do factor de crescimento das taxas genéricas europeias. Detalhamos a forma de obtenção das taxas para os restantes níveis de risco através de um exemplo. Suponhamos que um governo tem *rating A*, para calcular

<sup>2</sup>A taxa de juro *EURIBOR* designa a *Euro Interbank Offered Rate* e baseia-se na média das taxas de juro praticadas em empréstimos interbancários em euros por 57 bancos proeminentes europeus.

a taxa referente ao nível de risco *Baa*,  $r_{Baa}$ , recorremos à taxa para o nível de risco *A*,  $r_A$ , do governo em causa e às taxas para os níveis de risco *A* e *Baa* genéricas, que representamos por  $gr_A$  e  $gr_{Baa}$  respectivamente. Deste modo,  $r_{Baa} = r_A * (gr_{Baa}/gr_A)$ . As restantes taxas são obtidas de forma análoga. Na Figura 4.3 apresentamos as estimativas das taxas *forward* disponibilizadas pela *Bloomberg* para o governo de Portugal.

Forward Curve Matrix												Page 1/2
Templates	Options	View		Base Curve		Custom Template						
Country	PTE	Market		Mid	Yield		Conventional	Display				Rate
Curve	Portuguese Sovereign Curve											
Forwards												
Tenor	Cpn	10m	11m	1yr	15m	18m	2yr	3yr	4yr	5yr	10yr	
6m	2.4469	5.0592	4.7330	4.3525	4.4816	4.6364	7.1815	8.9834	9.2994	7.3715	6.8990	
1yr	3.9810	4.7956	4.6529	4.4928	5.1216	5.8865	7.7862	9.5190	9.6351	7.4202	6.8805	
2yr	4.2104	5.9087	6.0002	6.0842	6.6245	7.2335	8.6141	9.5743	8.5714	7.5185	6.8433	
3yr	5.3297	6.9373	7.0409	7.1371	7.5424	7.9832	8.9235	8.9159	8.2794	7.6857	6.8059	
4yr	6.2669	7.5382	7.6142	7.6819	7.9062	8.1398	8.5946	8.6304	8.2309	7.8328	6.7683	
5yr	6.8331	7.5951	7.6195	7.6380	7.8327	8.0357	8.4309	8.5338	8.2512	7.9710	6.7306	
6yr	6.7800	7.5941	7.6176	7.6362	7.8181	8.0083	8.3809	8.5090	8.3051	7.8228	6.6927	
7yr	6.9927	7.6371	7.6624	7.6833	7.8527	8.0299	8.3776	8.5246	8.1461	7.7078	6.6547	
8yr	7.1597	7.6986	7.7239	7.7451	7.9057	8.0736	8.4028	8.3711	8.0191	7.6139	6.6165	
9yr	7.2228	7.7700	7.7953	7.8162	7.9333	8.0541	8.2822	8.2453	7.9138	7.5339	6.5782	
10yr	7.2913	7.7316	7.7439	7.7525	7.8601	7.9712	8.1803	8.1389	7.8237	7.4638	6.5391	
15yr	7.3530	7.4975	7.5054	7.5104	7.5891	7.6701	7.8214	7.7644	7.4950	7.1917	5.8790	
30yr	6.4361	6.6299	6.6310	6.6299	6.6730	6.7166	6.7955	6.6974	6.4538	6.1928	5.4137	

Figura 4.3: Taxas *Forward* para o governo de Portugal.

Na coluna *1yr* são apresentadas as estimativas das taxas que são consideradas como parâmetros do modelo e correspondem às taxas esperadas hoje para serem aplicadas daqui a um ano para as maturidades que constam na coluna *Tenor*. Por exemplo, a taxa esperada hoje para ser aplicada daqui a um ano e com maturidade de 6 meses é de 4.3525%.

No que aos sectores industrial, financeiro e genérico respeita, a *Bloomberg* não disponibiliza directamente as taxas *forward*, mas sim taxas estimadas com base na rendibilidade gerada por um conjunto de obrigações dos sectores em causa. Apesar de estarem divididas de acordo com o nível de risco estas taxas não são de cupão zero, com excepção das genéricas europeias associadas ao nível de risco *Aaa*. Deste modo, tornou-se necessário convertê-las em taxas de cupão zero através do Método de *Bootsprap*, apresentado na Secção 2.6 do Capítulo 2, e desta forma estimar as respectivas taxas *forward* recorrendo à Fórmula (2.20) apresentada no Capítulo 2. Na Figura 4.4 apresentamos as curvas da *yield* (*yield curves*) para o sector industrial norte-americano para alguns níveis de risco.

A curva da *yield* (*yield curve*), por exemplo, correspondente ao *rating* A é construída com base na rentabilidade gerada por um conjunto de obrigações do sector industrial norte-americano e de *ratings* A+, A e A-, seguindo a notação da *Standard and Poor's*.

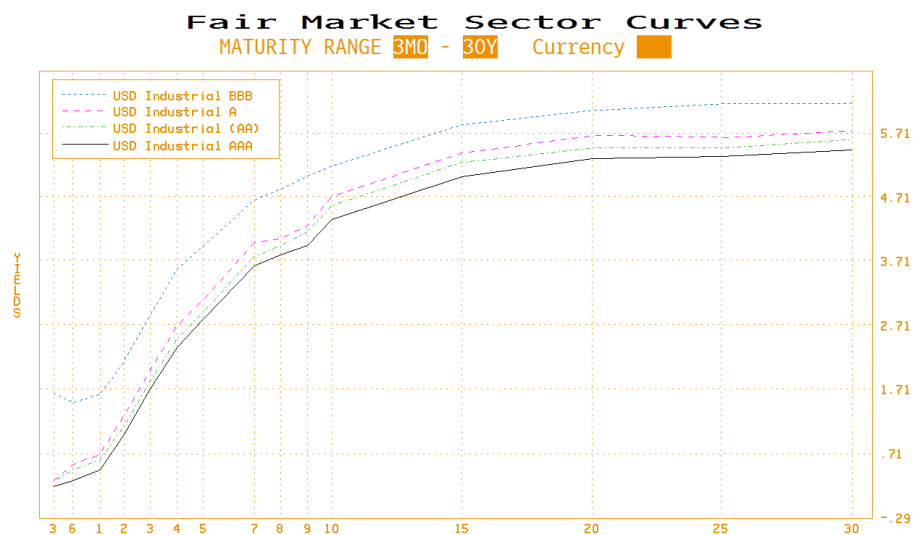


Figura 4.4: Curvas da *yield* para o sector industrial norte-americano por *rating*.

Na Figura 4.5 apresentamos as curvas da *yield* (*yield curves*) para alguns níveis de risco para o sector genérico europeu.

Por exemplo, a curva da *yield* (*yield curve*) correspondente ao *rating AA* é construída com base na rentabilidade gerada por um conjunto de obrigações europeias e de *ratings AA+*, *AA* e *AA-*, seguindo a notação da *Standard and Poor's*.

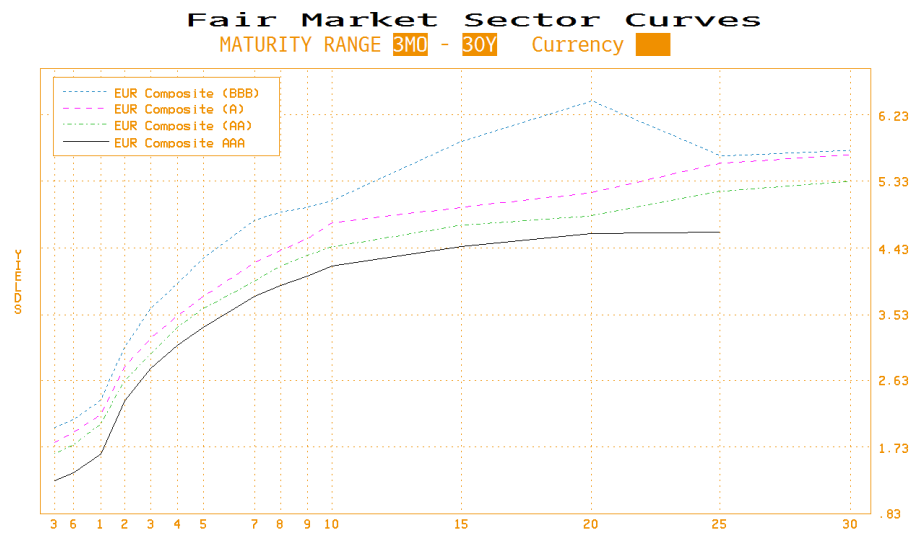


Figura 4.5: Curvas da *yield* genéricas europeias por *rating*.

### Matriz de Covariância

Tendo em conta que para a dimensão da carteira considerada é exequível a construção da matriz de covariância através dos retornos dos preços das acções (que é uma das hipóteses do *CreditMetrics*, apresentada na Secção 3.2) e atendendo a que não obtivemos resultados satisfatórios ao tentar estimar esta matriz através da metodologia exposta na Secção 3.2.3, como explicamos com mais detalhe mais à frente neste capítulo na Secção 4.5, considerámos os retornos bolsistas, no período dos 30 dias precedentes à data a que o estudo foi realizado, para as obrigações de dívida corporativa cotadas em bolsa e a independência para as restantes. Desta forma, existe a coerência dos cenários de *rating* gerados para obrigações do mesmo emitente e com o mesmo *rating* serem iguais.

Para as obrigações cujos emitentes não estão cotados em bolsa, como é o caso dos governos, utilizámos a volatilidade histórica a 30 dias obtida a partir do preço das obrigações disponíveis na *Bloomberg*.

## 4.3 Metodologia

A implementação do Modelo de *Credit VaR* considerada, foi realizada em dois ficheiros *EXCEL*, *Update* e *Resultados*, de forma a cada um deles ser menos exigente na memória necessária e assim diminuir o tempo computacional útil para a execução dos códigos implementados em *VBA* (*Visual Basic for Applications*). O nosso objectivo foi sempre tentar otimizar e automatizar ao máximo o tempo de execução da aplicação informática permitindo obter um valor de *Credit VaR* para a carteira de obrigações da instituição bancária de forma continuada e com o mínimo esforço humano possível.

A descrição da metodologia usada pode ser efectuada por fases que descrevemos seguidamente.

Numa primeira fase, foi construído um código em *VBA*, no ficheiro *Update*, para copiar, da base de dados interna da instituição bancária, o código de identificação (*isin*) das emissões de obrigações em carteira, bem como as respectivas quantidades.

Numa segunda fase, para cada obrigação em carteira obtivemos, através da *Bloomberg*, o sector, o *rating*, a moeda de emissão, a senioridade, o cupão, a frequência do cupão, o tipo de taxa do cupão (fixa ou variável) e a maturidade. Além disso, no caso das obrigações de taxa variável obtivemos também o *spread*. Na Tabela 4.1 apresentamos, a título de exemplo, os dados anteriormente referidos para uma selecção de 10 obrigações da carteira.

Tabela 4.1: Descrição de 10 obrigações da carteira.

Obrigaç�o	Sector	Rating	Moeda	Senioridade	Cup�o (%)	Freq�encia	Tipo de Taxa	Spread	Maturidade
1	Consumer, Cyclical	Ba	EUR	SR SECURED	6.75	1	FIXED	N�o Aplic�vel	24-03-2014
2	Consumer, Cyclical	Ba	EUR	SR UNSECURED	5.625	1	FIXED	N�o Aplic�vel	30-06-2015
3	Financial	Aa	EUR	SR UNSECURED	4	1	FIXED	N�o Aplic�vel	19-03-2015
4	Financial	Aaa	USD	SR SUBORDINATED	3.25	1	FIXED	N�o Aplic�vel	23-04-2015
5	Financial	Aa	EUR	SR UNSECURED	-	1	FLOATING	0	07-03-2013
6	Financial	Baa	EUR	SR UNSECURED	4	1	FIXED	N�o Aplic�vel	11-07-2013
7	Financial	Aaa	USD	SR SECURED	2.625	1	FIXED	N�o Aplic�vel	15-04-2013
8	Financial	Baa	EUR	SR UNSECURED	3.125	1	FIXED	N�o Aplic�vel	28-01-2015
9	Industrial	A	EUR	SR UNSECURED	-	4	FLOATING	0.045	18-01-2013
10	Government	Ba	EUR	SR UNSECURED	5.9	1	FIXED	N�o Aplic�vel	20-04-2017

Numa terceira fase construímos um código, em *Visual Basic for Applications (VBA)*, também no ficheiro *Update*, com o objectivo de obtermos, para cada obriga o, o seu valor daqui a

um ano para todos os níveis de risco. Na elaboração deste código<sup>3</sup> tivemos em atenção as Equações (2.3) e (2.4), apresentadas no Capítulo 2, para a avaliação de obrigações de taxa fixa e de taxa variável respectivamente. Uma das entradas deste código é uma tabela construída numa folha do ficheiro *Update, time*, com os instantes temporais para a avaliação das obrigações. A Tabela 4.2 apresenta os instantes temporais a serem considerados na avaliação das obrigações da Tabela 4.1.

Tabela 4.2: Instantes Temporais para a Avaliação das Obrigações.

Obrigaçao	Maturidade	Frequencia do Cupao	Instantes Temporais							
1	24-03-2014	1	0.73425	1.73425	2.73425					
2	30-06-2015	1	0.00274	1.00274	2.00274	3.00274	4.00274			
3	19-03-2015	1	0.72055	1.72055	2.72055	3.72055				
4	23-04-2015	1	0.81644	1.81644	2.81644	3.81644				
5	07-03-2013	1	0.68767	1.68767						
6	11-07-2013	1	0.03288	1.03288	2.03288					
7	15-04-2013	1	0.79452	1.79452						
8	28-01-2015	1	0.58356	1.58356	2.58356	3.58356				
9	18-01-2013	4	0.05616	0.30616	0.55616	0.80616	1.05616	1.30616	1.55616	
10	20-04-2017	1	0.81096	1.81096	2.81096	3.81096	4.81096	5.81096		

Para cada obrigação, o primeiro instante corresponde à diferença temporal entre o instante daqui a um ano e a respectiva data de pagamento de cupão. Para o cálculo dos restantes instantes basta somar os tempos correspondentes às datas da frequência dos cupões.

Além dos instantes temporais, são necessárias outras entradas para a avaliação das obrigações por níveis de risco, nomeadamente as taxas *forward* por níveis de risco e as taxas *forward* da *EURIBOR*; estas últimas para a determinação do cupão no caso das obrigações de taxa variável. Como tal, no ficheiro *Update*, em que são feitas as actualizações à *Bloomberg* para a obtenção das informações da Tabela 4.1 e onde avaliamos as obrigações daqui a um ano, estão também as tabelas com as taxas *forward* por sector e por nível de risco, sendo aplicado o método de *Bootstrap* nos casos necessários. Posteriormente, existe uma folha neste ficheiro, *auxrates*, em que estão todas as tabelas com as taxas *forward*.

De forma a que o código de avaliação das obrigações por nível de risco, fosse mais rápido a executar, construímos 7 tabelas, uma para cada nível de risco, em 7 folhas diferentes do ficheiro, em que, para cada obrigação, de acordo com o seu sector, obtemos as taxas *forward* correspondentes aos instantes temporais da tabela da folha *time*. A Tabela 4.3 apresenta as taxas *forward* para avaliação das obrigações da Tabela 4.1 para o *rating* *Aaa*.

Tabela 4.3: Taxas *Forward* para Avaliação das Obrigações no *rating* *Aaa*.

Obrigaçao	Identificação da Tabela	Nr da Coluna	Taxas							
1	GenéricasAaaEUR	79	0.02357	0.02407	0.02405					
2	GenéricasAaaEUR	79	0.01818	0.02465	0.02404	0.02411	0.02660			
3	FinacialAaaEUR	9	0.01570	0.01857	0.02177	0.02587				
4	FinacialAaaUSD	2	0.01595	0.01881	0.02205	0.02624				
5	FinacialAaaEUR	9	0.01570	0.01857						
6	FinacialAaaEUR	9	0.01074	0.01670	0.01952					
7	FinacialAaaUSD	2	0.01595	0.01881						
8	FinacialAaaEUR	9	0.01546	0.01833	0.02149	0.02550				
9	IndustrialAaaEUR	23	0.01074	0.01446	0.01521	0.01595	0.01670	0.01739	0.01810	
10	GréciaAaa	44	0.11992	0.11745	0.10506	0.09609	0.09459	0.09531		

<sup>3</sup>Para mais detalhes sobre este código, consultar o Apêndice C.

Na Coluna *Identificação da Tabela*, apresentamos o nome da Tabela em que estão as taxas *forward* de cada obrigação. Como por exemplo, a obrigação 1 é europeia e não pertence aos sectores dos governos, industrial ou financeiro, na avaliação desta obrigação são consideradas taxas *forward* genéricas europeias.

Na terceira coluna, indicamos o número da coluna em que estão as taxas *forward* (na folha *auxrates*) para o *rating Aaa*. Para obtermos as taxas *forward* pretendidas para cada obrigação, basta identificarmos as respectivas taxas correspondentes aos instantes temporais da Tabela 4.2 e na coluna indicada em *Nr da Coluna*.

Na Tabela 4.4 apresentamos a avaliação, daqui a um ano, das 10 obrigações consideradas por níveis de risco com valores arredondados para efeitos de ilustração.

Tabela 4.4: Avaliação das obrigações daqui a um ano.

Obrigação	Aaa	Aa	A	Baa	Ba	B	Caa-C	Default
1	113.1471	112.1341	111.1595	109.8816	108.5379	105.9204	103.3924	38.7000
2	116.8031	114.0764	112.8881	110.8238	108.9779	105.4121	102.0067	24.5000
3	106.1757	105.2748	103.6624	100.7053	99.0351	95.8035	92.7103	24.5000
4	102.9391	102.0333	100.3896	97.3707	95.6958	92.4573	89.3608	32.0000
5	98.6443	98.2389	98.0074	96.6496	95.8672	94.3325	92.8366	24.5000
6	107.9235	107.4166	107.1343	105.2823	104.3107	102.4092	100.5616	24.5000
7	101.8426	101.4020	101.1521	99.6439	98.7953	97.1318	95.5120	56.4000
8	103.3187	102.4653	100.9432	98.1802	96.5939	93.5221	90.5789	24.5000
9	106.3677	105.9790	105.7539	104.5249	103.7725	102.2951	100.8531	24.5000
10	85.0349	79.9042	76.4294	73.0121	70.5234	68.5347	61.6584	24.5000

Ainda no ficheiro *Update*, construímos também a matriz de covariância. Para a construção desta matriz fizemos um estudo prévio dos emitentes das obrigações que estavam cotados em bolsa e utilizámos a metodologia já referida. Posteriormente fizemos um código que copia (como valores) as informações da Tabela 4.1 e da Tabela 4.4 para o ficheiro *Resultados*.

Numa quarta fase fizemos a geração de cenários, correspondentes a variáveis normais correlacionadas, através do *software R*<sup>4</sup>. De entre os métodos de decomposição referidos na Secção 3.3.2, recorreremos à decomposição em valores singulares e à decomposição em valores próprios. Não foi possível aplicar a decomposição de *Cholesky* dado que a matriz de covariância obtida anteriormente não é, em geral, definida positiva.

O pseudo-código utilizado para a geração de variáveis normais correlacionadas recorrendo à decomposição em valores singulares é,

```
> covar <- read.table("matrizCovar.txt")
> nO <- 109
> nS <- 10000
> X <- matrix(rnorm(nO * nS), nO, nS)
> c <- svd(covar)
> V <- c$v
```

<sup>4</sup>The R Project for Statistical Computing - [www.r-project.org](http://www.r-project.org)

```

> U <- c$u
> D <- diag(sqrt(c$d))
> dvs <- -(U %*% D %*% t(V))
> cenarios <- X %*% dvs

```

em que,  $nO$  corresponde ao número de emissões de obrigações,  $nS$  é o número de simulações,  $X$  é uma matriz de variáveis aleatórias normais standardizadas de dimensão  $nS$  por  $nO$ ,  $covar$  corresponde à matriz de covariância,  $svd$  é a função que faz a decomposição em valores singulares da matriz  $covar$  dando como resultado as matrizes  $V$ ,  $U$  e  $D$  em que  $diag(sqrt(c$d))$  representa uma matriz diagonal cujas entradas são as raízes quadradas dos valores singulares obtidos na decomposição,  $\% * \%$  representa o produto usual de matrizes e  $t(V)$  indica a transposta da matriz  $V$ . Para a geração de cenários através da decomposição em valores próprios, recorreremos à função do R, *mvnorm*, disponível no *package MASS*, cujas entradas são o número de simulações, o vector médio e a matriz de covariância. Esta função recorre à metodologia apresentada no Apêndice B para gerar variáveis normais e correlacionadas.

A Tabela 4.5 ilustra uma parte da matriz  $X$ , isto é, 25 cenários gerados, através da decomposição em valores singulares, para as 10 obrigações.

Tabela 4.5: Cenários Gerados.

Cenário	Obrigação									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	-1.2128	-1.3810	0.1390	-2.9992	-1.3624	1.0077	-2.8786	1.0958	0.0695	0.5097
2	0.0915	0.5570	0.8018	0.8809	0.6003	-0.3217	0.9165	1.3616	-0.4033	0.3087
3	-0.1175	0.0547	1.0224	0.0755	0.0894	1.1096	0.2393	0.7028	-0.9566	-0.2611
4	-0.0631	0.3068	0.4880	0.3993	0.2276	-0.7923	0.5190	0.0903	0.4684	-0.0788
5	0.3363	0.4688	-0.3144	0.1373	0.0460	-0.9915	0.0955	-2.9589	0.9373	-0.0219
6	0.2857	0.4221	-1.4835	0.2414	0.4673	-1.6561	0.2071	1.8851	0.4808	-0.2704
7	-0.0415	0.1700	0.3700	0.5973	0.6538	0.0565	0.5196	0.1144	0.5067	1.0387
8	0.5478	0.7611	-1.0793	0.7039	0.8074	-0.5680	0.6066	-2.7458	1.7558	-0.0370
9	0.2962	0.2757	1.1545	0.5019	0.5212	-0.6545	0.6343	-0.0129	0.0313	-0.2242
10	-0.2877	-0.3856	1.3427	-0.0034	-0.0323	1.2994	0.1770	0.8478	0.3496	0.4425
11	0.2885	0.5490	-0.0687	0.8877	0.7118	-1.1455	0.8313	1.2051	0.4410	-0.1037
12	-0.1812	0.0007	-0.5410	-0.6669	-0.3275	1.2559	-0.5922	0.3019	0.3066	-0.0741
13	-0.0745	0.2143	0.0204	0.5307	0.3703	0.7649	0.5361	-1.8023	-0.2447	0.0598
14	1.4974	0.4144	0.4614	1.2900	1.1669	-0.6813	1.2292	-1.2943	0.1625	0.2167
15	0.1642	0.2014	-0.0637	0.4095	0.2800	-0.0728	0.3675	0.9677	0.3767	0.1240
16	0.0227	-0.0164	1.1392	0.6267	0.1288	-1.0854	0.4908	1.4298	2.2192	-0.5948
17	-0.2261	0.2494	-1.4027	-0.4227	-0.3797	0.2050	-0.4915	-0.8546	-0.2901	0.8034
18	-0.6233	-0.4187	-0.2267	-0.5559	-0.4900	1.1720	-0.4879	-0.2123	0.0716	-1.2223
19	0.2402	0.3393	0.0394	0.4396	0.6142	2.3377	0.3946	0.3817	-0.7958	-0.0103
20	0.2379	0.2655	0.6261	0.3959	0.4432	-2.2829	0.4451	-0.2313	-0.5644	0.1354
21	-0.1867	-0.4578	0.3416	-0.2713	-0.3559	0.9922	-0.1815	0.3917	0.3371	-0.3394
22	-0.0098	0.2021	0.6214	0.3376	0.2825	0.9104	0.1602	-0.1616	3.5058	-0.0310
23	-0.1378	-0.2417	-0.2741	-0.3318	-0.2923	1.2290	-0.3568	2.9440	-0.2499	-0.3694
24	-0.0557	0.1170	0.3296	-0.0779	-0.0316	0.7829	-0.0496	-0.4914	0.4730	-0.5505
25	-0.1182	-0.2878	0.5772	0.2683	0.1003	-0.7527	0.2599	2.8037	0.6281	0.8032

Para corresponder as variáveis geradas aos cenários de *rating*, e à semelhança da metodologia para duas obrigações, em [JP Morgan, 1997] é proposto uma generalização do Modelo de Merton para o cálculo dos pontos críticos a partir dos quais as obrigações transitam de *rating*. Dado que considerámos duas matrizes de probabilidade de transição, calculámos os pontos críticos para cada uma das situações, que apresentamos nas Tabelas 4.6 e 4.7, em que os valores estão arredondados.

Tabela 4.6: Pontos críticos para as obrigações Europeias.

	Aaa	Aa	A	Baa	Ba	B	Caa-C
Aaa	-	-	-	-	-	-	-
Aa	-1.3470	2.3543	3.4190	5.2621	4.5741	4.3562	4.1649
A	-2.5522	-1.3489	1.7291	2.6390	4.5741	4.3562	2.7767
Baa	-2.9802	-2.5412	-1.5538	1.4288	2.4339	2.6986	2.7125
Ba	-3.0533	-3.1827	-2.6039	-1.5991	1.3961	2.4089	2.7125
B	-3.5326	-3.4204	-2.8798	-2.1983	-1.1238	1.3969	2.3009
Caa-C	-3.7119	-3.4204	-2.9335	-2.5901	-1.9939	-1.1509	1.1898
Default	-Inf	-3.5292	-2.9974	-2.9920	-2.2797	-1.8335	-0.9273

Tabela 4.7: Pontos Críticos para as obrigações cuja moeda de emissão é o dólar americano.

	Aaa	Aa	A	Baa	Ba	B	Caa-C
Aaa	-	-	-	-	-	-	-
Aa	-1.4164	2.2861	3.2230	3.2186	3.5008	3.4991	3.5095
A	-2.7248	-1.3153	1.9919	2.7627	3.0863	3.2030	3.5095
Baa	-Inf	-2.5776	-1.4791	1.7183	2.5370	2.8581	3.3186
Ba	-Inf	-3.0185	-2.3823	-1.5389	1.5249	2.5035	2.8216
B	-Inf	-3.2227	-2.8047	-2.1583	-1.2051	1.6276	2.4781
Caa-C	-Inf	-3.5251	-3.1072	-2.5926	-2.0294	-1.1628	1.3514
Default	-Inf	-3.7046	-3.3395	-2.8299	-2.1893	-1.6481	-0.8871

Para a avaliação do valor da carteira daqui a um ano, basta corresponder os cenários gerados às correspondentes categorias de *rating* recorrendo aos valores das Tabelas 4.6 e 4.7. A Tabela 4.8 apresenta a correspondência referida.

Tabela 4.8: Correspondência dos cenários gerados com as respectivas categorias de *rating*.

Cenário	Obrigação									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	B	B	Aa	A	A	Baa	A	Baa	A	Ba
2	Ba	Ba	Aa	Aaa	Aa	Baa	Aaa	Baa	A	Ba
3	Ba	Ba	Aa	Aaa	Aa	Baa	Aaa	Baa	A	Ba
4	Ba	Ba	Aa	Aaa	Aa	Baa	Aaa	Baa	A	Ba
5	Ba	Ba	Aa	Aaa	Aa	Baa	Aaa	Caa-C	A	Ba
6	Ba	Ba	A	Aaa	Aa	Ba	Aaa	A	A	Ba
7	Ba	Ba	Aa	Aaa	Aa	Baa	Aaa	Baa	A	Ba
8	Ba	Ba	Aa	Aaa	Aa	Baa	Aaa	Caa-C	Aa	Ba
9	Ba	Ba	Aa	Aaa	Aa	Baa	Aaa	Baa	A	Ba
10	Ba	Ba	Aa	Aaa	Aa	Baa	Aaa	Baa	A	Ba
11	Ba	Ba	Aa	Aaa	Aa	Baa	Aaa	Baa	A	Ba
12	Ba	Ba	Aa	Aaa	Aa	Baa	Aaa	Baa	A	Ba
13	Ba	Ba	Aa	Aaa	Aa	Baa	Aaa	Ba	A	Ba
14	Baa	Ba	Aa	Aaa	Aa	Baa	Aaa	Baa	A	Ba
15	Ba	Ba	Aa	Aaa	Aa	Baa	Aaa	Baa	A	Ba
16	Ba	Ba	Aa	Aaa	Aa	Baa	Aaa	Baa	Aa	Ba
17	Ba	Ba	A	Aaa	Aa	Baa	Aaa	Baa	A	Ba
18	Ba	Ba	Aa	Aaa	Aa	Baa	Aaa	Baa	A	B
19	Ba	Ba	Aa	Aaa	Aa	A	Aaa	Baa	A	Ba
20	Ba	Ba	Aa	Aaa	Aa	B	Aaa	Baa	A	Ba
21	Ba	Ba	Aa	Aaa	Aa	Baa	Aaa	Baa	A	Ba
22	Ba	Ba	Aa	Aaa	Aa	Baa	Aaa	Baa	Aaa	Ba
23	Ba	Ba	Aa	Aaa	Aa	Baa	Aaa	Aa	A	Ba
24	Ba	Ba	Aa	Aaa	Aa	Baa	Aaa	Baa	A	Ba
25	Ba	Ba	Aa	Aaa	Aa	Baa	Aaa	Aa	A	Ba

Detalhamos o modo como é efectuada a correspondência através de um exemplo para a obrigação 1 apresentada na Tabela 4.1. Como o emitente da referida obrigação é Europeu, para correspondermos os cenários da Tabela 4.5 às respectivas categorias de *rating*, recorremos aos valores da Tabela 4.6. O objectivo é encontrar, na coluna correspondente à categoria de *rating* da obrigação, *Ba*, o primeiro valor superior a -1.2128. Neste caso, concluímos que no cenário 1 o *rating* da obrigação 1 é *B* uma vez que -1.1238 é o primeiro valor superior a -1.2128. As correspondências para os restantes cenários são feitas analogamente. Posteriormente há que fazer corresponder as categorias de *rating* aos respectivos valores das obrigações, conforme ilustramos na Tabela 4.9

Tabela 4.9: Correspondência das categorias de *rating* aos respectivos valores.

Cenário	Obrigação									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	105.9204	105.4121	105.2748	100.3896	98.0074	105.2823	101.1521	98.1802	105.7539	76.4294
2	108.5379	105.4121	105.2748	102.9391	98.2389	105.2823	101.8426	98.1802	105.7539	76.4294
3	108.5379	108.9779	105.2748	102.9391	98.2389	105.2823	101.8426	98.1802	105.7539	76.4294
4	108.5379	108.9779	105.2748	102.9391	98.2389	105.2823	101.8426	98.1802	105.7539	76.4294
5	108.5379	108.9779	105.2748	102.9391	98.2389	105.2823	101.8426	90.5789	105.7539	76.4294
6	108.5379	108.9779	103.6624	102.9391	98.2389	104.3107	101.8426	100.9432	105.7539	76.4294
7	108.5379	108.9779	105.2748	102.9391	98.2389	105.2823	101.8426	98.1802	105.7539	76.4294
8	108.5379	108.9779	105.2748	102.9391	98.2389	105.2823	101.8426	90.5789	105.9790	76.4294
9	108.5379	108.9779	105.2748	102.9391	98.2389	105.2823	101.8426	98.1802	105.7539	76.4294
10	108.5379	108.9779	105.2748	102.9391	98.2389	105.2823	101.8426	98.1802	105.7539	76.4294
11	108.5379	108.9779	105.2748	102.9391	98.2389	105.2823	101.8426	98.1802	105.7539	76.4294
12	108.5379	108.9779	105.2748	102.9391	98.2389	105.2823	101.8426	98.1802	105.7539	76.4294
13	108.5379	108.9779	105.2748	102.9391	98.2389	105.2823	101.8426	96.5939	105.7539	76.4294
14	109.8816	108.9779	105.2748	102.9391	98.2389	105.2823	101.8426	98.1802	105.7539	76.4294
15	108.5379	108.9779	105.2748	102.9391	98.2389	105.2823	101.8426	98.1802	105.7539	76.4294
16	108.5379	108.9779	105.2748	102.9391	98.2389	105.2823	101.8426	98.1802	105.9790	76.4294
17	108.5379	108.9779	103.6624	102.9391	98.2389	105.2823	101.8426	98.1802	105.7539	76.4294
18	108.5379	108.9779	105.2748	102.9391	98.2389	107.1343	101.8426	98.1802	105.7539	68.5347
19	108.5379	108.9779	105.2748	102.9391	98.2389	102.4092	101.8426	98.1802	105.7539	76.4294
20	108.5379	108.9779	105.2748	102.9391	98.2389	105.2823	101.8426	98.1802	105.7539	76.4294
21	108.5379	108.9779	105.2748	102.9391	98.2389	105.2823	101.8426	98.1802	105.7539	76.4294
22	108.5379	108.9779	105.2748	102.9391	98.2389	105.2823	101.8426	98.1802	106.3677	76.4294
23	108.5379	108.9779	105.2748	102.9391	98.2389	105.2823	101.8426	102.4653	105.7539	76.4294
24	108.5379	108.9779	105.2748	102.9391	98.2389	105.2823	101.8426	98.1802	105.7539	76.4294
25	108.5379	108.9779	105.2748	102.9391	98.2389	105.2823	101.8426	102.4653	105.7539	76.4294

Uma vez obtidos os valores de cada obrigação para os vários cenários, facilmente obtemos, para cada um deles, o valor da carteira bastando multiplicar o valor de cada obrigação pela

respectiva quantidade em carteira e somar os valores obtidos.

A correspondência dos cenários gerados às categorias de *rating*, bem como a correspondência destas aos respectivos valores das obrigações, o cálculo do valor esperado da carteira e do percentil, foram realizados através de um código implementado em VBA que pode ser consultado no Apêndice C. O tempo total de cálculo do *Credit VaR*, para a carteira indicada, para 10000 repetições de simulação, é cerca de 35 minutos.

#### 4.4 Análise dos Resultados

Na Figura 4.6 ilustramos o histograma da distribuição de  $\Delta V = V_i - \mu_{Total}$ , ou seja, a distribuição simulada dos ganhos e perdas da carteira recorrendo à decomposição em valores singulares, em que  $V_i$  representa o valor da carteira no cenário  $i$  e  $\mu_{Total}$  é calculado utilizando a Equação (3.14) apresentada no Capítulo 3.

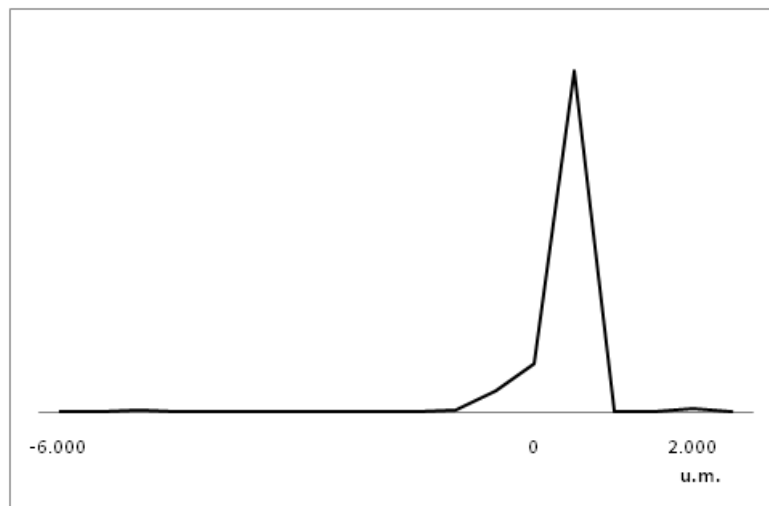


Figura 4.6: Distribuição de  $\Delta V$  daqui a um ano.

Podemos observar que a distribuição simulada apresenta uma cauda bastante pesada à esquerda indicando que podem ocorrer perdas muito elevadas embora com probabilidade reduzida.

No caso da carteira em estudo, para uma data que não explicitaremos por motivos de confidencialidade, e para um nível de confiança de 99.9%<sup>5</sup>, concluímos que, através da decomposição em valores singulares,

$$CreditVaR_{99.9\%} = 5419 \text{ u.m.}$$

<sup>5</sup>De acordo com [Jorion, 2007], os modelos de risco de crédito usam normalmente um nível de confiança de pelo menos 99.9%.

e pela decomposição em valores próprios,

$$\text{CreditVaR}_{99,9\%} = 5378 \text{ u.m.}$$

Os valores obtidos em cada um dos métodos são bastante semelhantes e correspondem a cerca de 1% do valor da carteira na data do estudo, o que se revelou muito satisfatório.

Tendo por objectivo estudar a fiabilidade destes valores, foi calculado o *VaR* da carteira, sendo feita a respectiva comparação. Esperávamos que o *Credit VaR* fosse superior ao *VaR*, na medida em que, este último não entra em linha de conta com as especificidades das obrigações, tais como o *rating*, a *recovery rate* e as probabilidades de transição. A nossa expectativa foi comprovada dado que o *VaR*<sup>6</sup> obtido foi de 2225 *u.m.*

É de salientar que este modelo é muito sensível a variações na matriz de covariância, em particular aos elevados níveis da variância correspondentes ao emitente de cada obrigação. Deste modo a alteração dos cenários gerados é fortemente influenciada pelos elevados níveis da variância correspondentes ao emitente de cada obrigação e, por conseguinte, baixos níveis de volatilidade implicam a não transição de *ratings* com elevada frequência nos cenários gerados.

De forma a tentarmos perceber se o modelo de *Credit VaR* implementado se ajustava à conjuntura económica vivida durante o ano de 2010, obtivemos um histórico de valores de *Credit VaR*, calculados, com a aplicação criada, pelos dois métodos de decomposição, valores singulares e valores próprios e para um nível de confiança de 99.9%. Na Figura 4.7 ilustramos o histórico obtido através dos dois métodos de decomposição, bem como as percentagens do valor da carteira correspondentes.

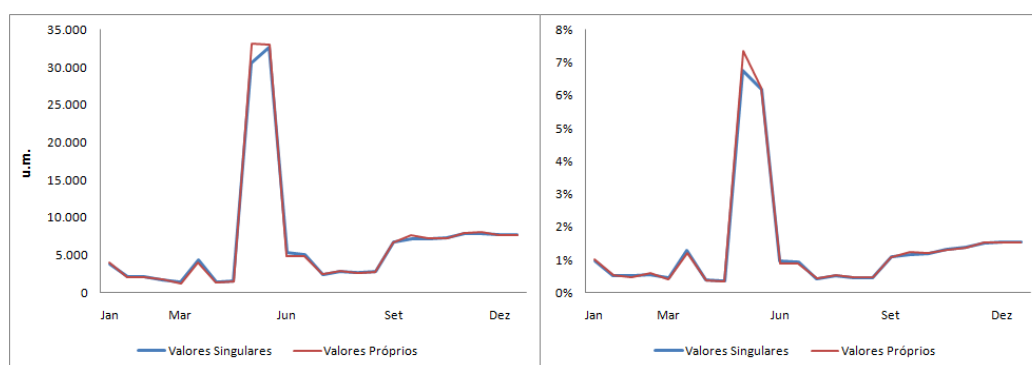


Figura 4.7: Histórico de valores do *Credit VaR* e respectivas percentagens do valor da carteira.

Começamos por observar que os valores obtidos pelos dois métodos de decomposição são bastante semelhantes. De seguida observamos que, em grande parte do ano, os valores de

<sup>6</sup>O modelo utilizado para o cálculo do *VaR* foi o modelo *delta-normal*. Para mais detalhes sobre este modelo aconselha-se a leitura de [Jorion, 2007].

*Credit VaR* localizam-se entre 1000 *u.m.* e 5000 *u.m.*, correspondendo a percentagens de valor da carteira entre 0.5% e 1.5% o que se revelam bastante satisfatórias. A excepção mais pronunciada vai para o período compreendido entre o final do mês de Abril e o início do mês de Junho. Neste período o valor do *Credit VaR* sofreu uma subida abrupta para cerca de 30000 *u.m.* o que corresponde a cerca de 6% a 7% do valor da carteira. Neste período o mercado de crédito foi bastante afectado pela crise de dívida soberana. Durante este período registaram-se níveis elevados de volatilidade para o mercado obrigacionista, devido às fortes reservas por parte dos investidores relativamente ao cumprimento das responsabilidades dos governos, nomeadamente o governo Grego. Face a este cepticismo as agências de *rating* re- viram em baixa os ratings de alguns países da zona euro, nomeadamente Grécia, Espanha, Portugal e Irlanda, o que contribuiu também para uma forte correcção do mercado obrigacionista, reflectindo-se em quedas acentuadas dos títulos de dívida soberana.

Após este período, houve necessidade de dar um sinal de confiança aos mercados financeiros. Neste sentido o *CEBS* (*Committee European Bank Supervisors*) anunciou a necessidade de realização de testes de resistência (*stress testing*) aos 91 maiores bancos da União Europeia, Liechtenstein, Noruega e Islândia, tendo por objectivo testar a capacidade de resposta por parte das instituições financeiras a uma eventual crise dos mercados, nomeadamente a uma crise de crédito, e que pode por em causa a solvabilidade das instituições. Este anúncio por parte do *CEBS* veio de certa forma acalmar os mercados financeiros reflectindo-se num decréscimo nos valores de volatilidade dos títulos de dívida soberana. Para além dos resultados do exercício europeu de *stress test* também a divulgação de alguma informação sobre a implementação do pacote regulamentar Basileia III permitiu reduzir a diferenciação dos prémios de risco na zona euro durante o Verão. O conjunto destas medidas veio na realidade justificar o decréscimo dos valores de *Credit VaR* registados durante os meses de Julho e Agosto.

Apesar dos desenvolvimentos positivos observados no início do Verão, no início do mês de Setembro surgiram novas tensões associadas à situação dos bancos irlandeses e à divulgação de dados económicos e orçamentais piores do que o esperado em algumas economias da zona euro. A divulgação destes novos dados conduziu a que alguns países implementassem medidas de austeridade para consolidação das contas públicas. Neste contexto tem-se verificado uma crescente crise de liquidez devido às dificuldades no acesso a financiamento no mercado monetário interbancário. Pelos motivos atrás mencionados, os valores de *Credit VaR* desde o início do mês de Setembro aumentaram até ao final do ano.

A intervenção do fundo monetário internacional (FMI) junto de alguns países (Grécia e Irlanda) bem como a forte possibilidade de intervenção em outros (Portugal e Espanha) também tem contribuído para a fragilização da economia da zona euro face a outros mercados, nomeadamente mercados emergentes, EUA e China.

Por tudo isto, concluímos que os resultados do modelo de *Credit VaR* implementado são bastante credíveis e fidedignos, reflectindo-se de forma adequada à conjuntura económica vivida.

O modelo implementado também pode ser adaptado por forma a incluir as classes de

*rating* intermédias expostas na Tabela 1.1 apresentada no Capítulo 1. De modo a verificarmos qual o impacto que a utilização de classes de *rating* intermédias originam no valor do *Credit VaR* para a data em estudo, adaptámos o modelo implementado de forma a que as referidas classes fossem contempladas. Os parâmetros do modelo que necessitam de ajuste são as matrizes de transição de *rating* e as taxas *forward*. Em relação ao primeiro parâmetro, é exposto em [Moody's, 2010] duas matrizes de transição de *rating*, uma para emitentes europeus e outra para emitentes norte-americanos, que incluem as classes de *rating* intermédias. O estudo efectuado pela *Moody's* decorreu entre 1985 e 2009 e segue a metodologia exposta no Apêndice A. No que às taxas *forward* diz respeito, a *Bloomberg* não disponibiliza taxas só para as classes intermédias com excepção das taxas para o sector industrial norte-americano em que apenas não são disponibilizadas taxas para os *ratings Aa1, Aa2 e Aa3*. Detalhamos de seguida a forma considerada para a obtenção das taxas intermédias, dando como exemplo as taxas para os *ratings Aa1, Aa2 e Aa3* representadas por  $r_{Aa1}$ ,  $r_{Aa2}$  e  $r_{Aa3}$  respectivamente. Para as restantes classes de *rating* intermédias o processo é análogo.

Sejam  $r_{Aaa}$  e  $r_{Aa}$  as taxas de cupão zero para os *ratings Aaa* e *Aa*. As taxas intermédias  $r_{Aa1}$ ,  $r_{Aa2}$  e  $r_{Aa3}$  são obtidas da seguinte forma:

$$r_{Aa1} = r_{Aaa} + (r_{Aa} - r_{Aaa})/3$$

$$r_{Aa2} = r_{Aa1} + (r_{Aa} - r_{Aaa})/3$$

$$r_{Aa3} = r_{Aa2} + (r_{Aa} - r_{Aaa})/3$$

O processo de obtenção destas taxas carece de um estudo mais aprofundado, o qual não faz parte do tema desta dissertação, podendo contudo ser objecto de um estudo futuro.

Esperávamos que o valor do *Credit VaR* fosse mais baixo que o obtido anteriormente, não incluindo classes de *rating* intermédias, dado que as transições de *rating* são menos “bruscas” neste modelo. A nossa expectativa foi comprovada na medida em que o valor do *Credit VaR* obtido considerando classes de *rating* intermédias, para a data em estudo, é de 4245 *u.m.*.

Um inconveniente da utilização de classes de *rating* intermédias é o facto do tempo de execução total do programa ser de aproximadamente 70 minutos.

## 4.5 Considerações finais sobre a implementação

Nesta secção pretendemos dar a conhecer as limitações e constrangimentos que tivemos de ultrapassar para a implementação do modelo.

Os parâmetros do modelo em que se verificaram maiores dificuldades para a sua obtenção foram as taxas *forward* por níveis de risco e a matriz de covariância.

Relativamente às taxas *forward*, o nosso objectivo passava pela obtenção das taxas para as datas em que o estudo era realizado, ou seja, taxas de mercado reais. A procura destas

taxas na *Bloomberg* revelou-se bastante árdua e morosa bem como a exportação destas para um ficheiro de EXCEL. Para contornarmos este problema, foi necessário recorrer ao serviço de apoio da *Bloomberg*, que desta forma, nos ajudou na exportação das taxas pretendidas.

No que à matriz de covariância respeita tentámos, numa primeira abordagem, obter uma matriz de covariância baseada na correlação entre sectores usando a metodologia exposta na Secção 3.2.3. O primeiro problema com que nos deparámos foi descrever cada emitente como uma combinação linear de sectores. Para ultrapassarmos o problema, tentou-se ajustar uma regressão linear<sup>7</sup>, onde o emitente representa a variável resposta e as variáveis regressoras são dadas pelos diferentes sectores.

Como o objectivo passa por automatizar e otimizar a aplicação do modelo tanto quanto possível, e dado que a carteira de obrigações muda diariamente, em vez de descrevermos cada emitente como uma combinação linear de sectores, pensámos em agrupar os emitentes por classes de acordo com os seus sectores. Deste modo, as regressões lineares foram feitas não por emitente, mas por classes. Assim, sempre que entrasse na carteira um novo emitente, este seria incluído numa das classes de acordo com o seu sector e iria ser descrito segundo o modelo associados a essa classe. Para cada classe recolhemos uma amostra de obrigações de emitentes pertencentes aos sectores. Em seguida calcularam-se os vectores das rendabilidades destas obrigações.

Relativamente às séries dos preços para cada uma das variáveis regressoras, ou seja, sectores, não é possível recolher tal informação recorrendo à *Bloomberg*. Como alternativa optámos por extrair essa informação do sítio da empresa *Markit*<sup>8</sup>.

Uma vez tendo os vectores com os valores das variáveis resposta e das variáveis regressoras, efectuámos, para cada classe, uma regressão linear através do *software* R. Os resultados obtidos não se revelaram satisfatórios uma vez que, em algumas classes, a variável resposta só era explicada por sectores que não pertenciam à classe em questão. Por exemplo, a classe 1, que representava os emitentes do sector do governo português, só era explicada pelo sector industrial, o que não faz sentido dado que as obrigações que serviram para a construção do vector da variável resposta eram obrigações do tesouro, ou seja, obrigações do governo por-

<sup>7</sup>De acordo com [Coelho, C.], nos Modelos de Regressão, é comum termos uma variável resposta que corresponde à variável a modelar, variável essa que se pretende explicar em termos de ou como função de outras variáveis vistas como *predictoras* dos valores dessa variável. A variável resposta também pode ser designada de variável dependente e às variáveis *predictoras* também é comum a designação de variáveis regressoras.

Supondo que temos  $p$  variáveis regressoras  $x_1, x_2, \dots, x_p$ , o Modelo de Regressão Linear é da forma:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \dots + \beta_p x_{pi} + \epsilon_i \quad (4.1)$$

com  $i = 1, \dots, n$ . Neste modelo as variáveis  $Y_i$  são consideradas variáveis aleatórias observáveis, enquanto que as variáveis regressoras são consideradas quantidades fixas, ou seja, não aleatórias. Os parâmetros deste modelo correspondem às variáveis  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p$ , valores reais desconhecidos. As variáveis  $\epsilon_i$  são designadas de resíduos, sendo da forma  $y_i - \hat{y}_i$ .

<sup>8</sup>Markit é uma empresa de serviços de informação financeira, disponível através do site [www.markit.com](http://www.markit.com)

tuguês. Desta forma, seria expectável que a classe 1 fosse explicada com grande peso pelo sector cujas obrigações fossem títulos de dívida do governo português. Outro constrangimento prende-se com a qualidade da regressão linear, ou seja, o valor do  $R^2$  é na maioria dos casos, inferior a 15%. De acordo com [Maroco, 2003], o  $R^2$  mede a proporção da variabilidade total que é explicada pela regressão, ou de modo equivalente a proporção da variabilidade total de  $Y$  que é atribuível à dependência do  $Y$  de todos os  $X_i$  como definido pelo ajustamento do modelo de regressão aos dados.

De forma a tentarmos melhorar a qualidade da regressão fomos aumentando e diversificando a amostra de títulos de dívida a incluir na classe da variável resposta e nos sectores das variáveis regressoras porém, os resultados obtidos não revelaram melhorias na qualidade de ajuste. Desta forma, decidiu-se não proceder a esta metodologia para a matriz de covariância.

Tendo por objectivo a construção da matriz de covariância optou-se por recorrer a um procedimento diferente. Procedimento este que se prende com a utilização dos retornos bolsistas dos emitentes em estudo, por se verificar que são valores cotados em bolsa e líquidos. Para emitentes não listados, como é o caso dos governos, pressupos-se a independência. A utilização dos retornos bolsistas em detrimento da utilização dos retornos dos preços das obrigações prendeu-se com o facto destes serem cotados no mercado OTC (*over-the-counter*<sup>9</sup>), ou seja, para uma mesma obrigação existem diferentes *providers* (instituições que estão a cotar as obrigações), que as valorizam a diferentes preços.

Ao longo de todo este estudo deparámo-nos com limitações, que fomos resolvendo, tendo-se conseguido, apesar destes obstáculos, obter uma implementação bastante versátil, quer do ponto de vista teórico quer do ponto de vista prático. Esta flexibilidade permite uma aderência eficiente às potenciais alterações da carteira de uma instituição financeira, bem como às variações que podem decorrer do mercado obrigacionista. Observamos ainda que algumas das soluções encontradas levantam questões que requerem um estudo mais aprofundado relegadas para trabalhos futuros, como é o caso da análise de sensibilidade aos parâmetros do modelo, em particular aos que influenciam de forma mais pronunciada os resultados, nomeadamente a matriz de covariância.

---

<sup>9</sup>Um mercado *over-the-counter* é um mercado em que as negociações ocorrem entre duas partes directamente, ou seja, é um mercado não regulamentado. Para mais detalhes sobre este tipo de mercado, consultar [Hull, 2003], pag.2 .



## Capítulo 5

# Conclusão

Nesta dissertação apresentámos uma metodologia, o *CreditMetrics*, para a estimação das potenciais perdas subjacentes a uma carteira de dívida. O estudo foi realizado para a carteira de obrigações de uma instituição bancária portuguesa de pequena/média dimensão.

O *CreditMetrics* foi apresentando, segundo [Saunders and Allen, 2002], como uma medida de *VaR* para a avaliação do risco de instrumentos de crédito como as obrigações e os empréstimos. Mede a incerteza inerente ao valor futuro de uma carteira de crédito, para um certo horizonte temporal, provocada por alterações na qualidade de crédito dos emitentes. São contempladas não só situações de incumprimento (*default*) das contrapartes mas também cenários de subida e descida de *rating* nas mesmas. Dado que esta medida de *VaR* tem em linha de conta as características específicas dos instrumentos de crédito, é designada por *Credit VaR*.

Um dos modelos subjacentes ao *CreditMetrics* é o Modelo de Merton que assume que os retornos logarítmicos dos activos de uma firma seguem uma Distribuição Normal. Com esta hipótese é possível provar a existência de um ponto crítico a partir do qual um emitente sofre incumprimento (*default*). O *CreditMetrics* generaliza este resultado e assume a existência de pontos críticos a partir dos quais as contrapartes transitam de *rating*.

Os principais parâmetros do modelo são as componentes da matriz de covariância, das taxas *forward*, da taxa de recuperação (*recovery rate*) e da matriz de transição de *rating*. Dado que o documento que serviu de base à nossa implementação não indica como obter estes parâmetros nas datas necessárias para os cálculos, tornou-se necessário gerá-los a partir de dados obtidos da *Bloomberg* e da *Moody's*. Nos métodos aqui implementados para a obtenção destes parâmetros, que constituem uma das contribuições mais relevantes desta dissertação, podem encontrar-se problemas interessantes que requerem um estudo mais aprofundado que relegamos para trabalhos futuros.

A metodologia de cálculo do *Credit VaR* envolve a estimação da distribuição de probabilidade das perdas de crédito através da simulação de cenários de categorias de *rating* para cada emitente. Para tal procedeu-se à geração de variáveis normais correlacionadas através do método de decomposição em valores singulares e do método de decomposição em valores próprios.

Os resultados obtidos, para a data em estudo, através dos dois métodos de decomposição utilizados foram bastante semelhantes e revelaram-se bastante satisfatórios uma vez que correspondem a cerca de 1% do valor da carteira. Além disso comprovámos também, e como seria expectável dado que o *Credit VaR* entra em linha de conta com as características particulares dos instrumentos de crédito, que o valor do *VaR* para a mesma data é inferior ao *Credit VaR*.

De forma a percebermos se o modelo se adequava à conjuntura económica vivida no ano de 2010, obtivemos, a partir da aplicação por nós criada, um histórico de valores do *Credit VaR*. Mais uma vez, os resultados foram bastante satisfatórios dado que durante a maior parte do ano os valores correspondem a percentagens compreendidas entre 0.5% e 1.5% do valor da carteira. A excepção mais pronunciada verificou-se no período entre o final do mês de Abril e princípios do mês de Junho, constantando-se que os valores obtidos correspondem a cerca de 6% a 7% do valor da carteira. Apesar destas percentagens elevadas, os valores vão ao encontro da conjuntura vivida dado que neste período o mercado de crédito foi bastante afectado pela crise de dívida soberana registando-se níveis elevados de volatilidade para o mercado obrigacionista. Face ao cepticismo provocado pelas fortes reservas dos investidores relativamente ao cumprimento das responsabilidades dos governos, nomeadamente o governo grego, as agências de *rating* reviram em baixa os *ratings* de alguns países da zona euro, nomeadamente Grécia, Espanha, Portugal e Irlanda, o que contribuiu também para uma forte correcção do mercado obrigacionista, reflectindo-se em quedas acentuadas dos títulos de dívida soberana.

Pelo exposto acima concluímos que os valores do modelo de *Credit VaR* implementado são bastante credíveis e fidedignos, ajustando-se muito adequadamente à conjuntura económica vivida.

Para além das questões que se levantam a propósito da geração dos parâmetros, existem algumas questões que não foram analisadas nesta dissertação mas que podem ser objecto de estudo para trabalhos futuros, tais como:

- Desenvolver um modelo com matrizes de transição de *rating* dinâmicas em vez de matrizes de transição invariantes ao longo do tempo.
- Estratificar o *Credit VaR* por classes de risco, por países e por sectores.
- Utilizar a distribuição empírica simulada para o cálculo do *Expected Shortfall*.
- Fazer um *Back Testing* aos resultados obtidos pelo modelo. Não foi possível realizar este estudo dado que na altura da entrega da dissertação não havia dados suficientes uma vez que, como o nível de confiança utilizado é de 99.9%, teríamos de verificar se existiam violações em 1000 observações o que corresponde a 4 anos de observações.
- Adaptar o *CreditMetrics* a uma carteira de retalho. Para tal alguns parâmetros deste modelo teriam de ser ajustados como é o caso da categoria de risco associada a cada cliente, matrizes de transição entre níveis de risco e taxas associadas ao nível de risco. Apresentamos esquematicamente algumas sugestões a serem consideradas para a

geração destes parâmetros.

**Classificação dos clientes quanto ao seu nível de risco** - É possível obter este tipo de classificação recorrendo a Modelos de *Scoring* que são apresentados em [Pereira, 2009].

**Matrizes de Transição de nível de risco** - Actualmente o *spread* aplicado a cada cliente não costuma ser revisto o que implica que as matrizes de transição para cada um dos níveis de risco só têm duas probabilidades diferentes de zero, as probabilidades da diagonal principal da matriz que correspondem às probabilidades de não ocorrer *default* e as probabilidades da última coluna que correspondem às probabilidades de *default*. Em alternativa seria interessante estudar um modelo mais dinâmico onde seriam contempladas situações onde é possível rever o nível de *spread* para cada um dos clientes. Este ajustamento permitiria adequar mais eficazmente o *spread* a pagar de acordo com a conjuntura económico-financeira tanto por parte do cliente como de uma conjuntura macro-económica. Para estimar estas matrizes propomos um estudo empírico baseado na metodologia da *Moody's*, que é descrita no Apêndice A, considerando como amostra uma carteira de retalho de dimensão suficientemente grande.

**Taxas associadas ao nível de risco** - Numa situação de uma carteira de retalho quando falamos em taxas para cada um dos níveis de risco estamos a falar do *spread* que é concedido a cada um dos clientes, que por sua vez é função da probabilidade de *default* do cliente.



# Bibliografia

- [Beaumont, 2004] Beaumont, P., (2004), *Financial Engineering Principles*.
- [Beninga, 1998] Beninga, S., (1998), *Financial Modeling*.
- [Caouette et al, 1998] Caouette et al, (1998), *Managing credit risk: the next great financial challenge*.
- [Coelho, C.] Coelho, C., Notas de Leitura: Modelos Lineares, Regressão e Análise de Variância.
- [Credit Suisse Financial Products, 1997] Credit Suisse Financial Products, *Credit Risk Management Framework*, October, 1997.
- [Embrechts, McNeil, Frey, 2005] Embrechts, P., McNeil, J., Frey, R., (2005) *Quantitative Risk Analysis*, Princeton University, Press.
- [Esquível, 2009] Esquível, M., (2009), Notas de lições para Processos Estocásticos, FCT/UNL.
- [Fabozzi, 2005] Fabozzi, F., (2005), *The Handbook of fixed income securities*, Seventh Edition.
- [Glasserman, 2000] Glasserman, P., (2000), *Monte Carlo methods in financial engineering*, Springer.
- [Gregory, 2010] Gregory, J., (2010) *Counterparty Credit Risk: The New Challenge for Global Financial Markets*, Wiley Finance.
- [Hull, 2003] Hull, J., (2003) *Options, Futures and Other Derivatives*, Fifth Edition.
- [Barreto, 1996] Barreto, I., (1996), Manuel de Finanças, ControlJornal.
- [Jones, 1998] Jones, C., (1998), *Investments: Analysis and Management*, Sixth Edition.
- [Jorion, 2003] Jorion, P., (2003), *Financial Risk Manager Handbook*, Second Edition.
- [Jorion, 2007] Jorion P., (2007), *Value at Risk, The New Benchmark for Managing Financial Risk*, Third Edition.
- [JP Morgan, 1997] Morgan, JP, *CreditMetrics - Technical Document*. New York: April 1997.
- [Lawrence, 2000] Lawrence, G., (2000), Princípios de Administração Financeira, Segunda Edição.

- [Maroco, 2003] Maroco, J., (2003), *Análise estatística com utilização do SPSS*, Edições Silabo.
- [Medhi, 2002] Medhi, J., (2002), *Stochastic Processes*, Second Edition.
- [Merton, 1974] Merton, R., (1974), *On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates*.
- [Moody's, 2010] Moody's, (2010), *European Corporate Default and Recovery Rates, 1985-2009*.
- [Oksendal, 2000] Oksendal, B., (2000), *Stochastic Differential Equations, An Introduction With Applications*, Fifth Edition.
- [Pereira, 2009] Pereira, J., (2009), *Lecture Notes: Credit Risk*, Finance Department, ISCTE, Business School.
- [Pinho and Soares, 2007] Pinho, C., Soares, I., (2007), *Finanças, Mercados e Instrumentos*, Edições Silabo.
- [Santos, 2002] Santos, F., (2002), *Fundamentos de Análise Numérica*, Edições Silabo.
- [Saunders and Allen, 2002] Saunders, A., Allen, L., (2002), *Credit risk measurement: new approaches to value at risk and other paradigms*, Second Edition.
- [Varadhan, 2007] Varadhan, S., (2007), *Stochastic Processes*.
- [Watkins, 2002] Watkins, D., (2002), *Fundamentals of Matrix Computations*, Second Edition.
- [Wilson, 1997a] Wilson, T., *Portfolio credit risk*, part I. Risk, 111117, 1997a, September.
- [Wilson, 1997b] Wilson, T., *Portfolio credit risk*, part II. Risk, 5661, 1997b, October.

## Apêndice A

# Matrizes de Transição de *Rating*

Neste Apêndice pretendemos dar a conhecer a forma de construção das matrizes de transição de *rating* utilizada pela *Moody's*. De acordo com [Moody's, 2010], para a construção das Matrizes de Transição de *Rating*, a *Moody's* começa por agrupar as obrigações em conjuntos, designados de *cohort*  $y$ , da seguinte forma: supondo que estamos a estudar um conjunto de obrigações entre os anos 1985 e 2009, entre períodos de  $h$  anos, o primeiro conjunto será composto por todas as obrigações para as quais dispomos de informação em 1985 e efectuamos o estudo da evolução do seu *rating* durante  $h$  anos. De seguida consideramos todas as obrigações para as quais temos informação em  $1985 + h$  e estudamos a evolução do seu *rating* durante  $h$  anos, procedendo de forma análoga até à última data disponível.

O cálculo das probabilidades de transição começa por ser feito para cada *cohort*  $y$ , sendo posteriormente calculada uma probabilidade média. A probabilidade de transição do *rating*  $i$  para o *rating*  $j$  (que inclui *default* e *withdrawn*) dentro do *cohort*  $y$  num horizonte temporal  $T$ , é dada por:

$$p_{ij}^y(T) = \frac{n_{ij}^y(T)}{n_i^y(0)} \quad (\text{A.1})$$

Assim, estas probabilidades são calculadas através de um estudo empírico para  $n$  obrigações ao longo do tempo, sendo dadas pelo quociente entre o número de obrigações que alteraram o *rating* de  $i$  para  $j$  pelo número de obrigações que tinham inicialmente *rating*  $i$ , numa dada *cohort*  $y$ .

A taxa média de migração entre *ratings* para todas as *cohort*  $y$  num conjunto de dados  $Y$  é dada por:

$$\bar{p}_{ij}^y(T) = \frac{\sum_{y \in Y} n_{ij}^y(T)}{\sum_{y \in Y} n_i^y(0)} \quad (\text{A.2})$$

A taxa de *default* marginal para um emitente com *rating* inicial  $i$  numa dada *cohort*  $y$  é dada pelo quociente entre o número de emitentes que entraram em *default* no período  $t$  e o número

de emitentes expostos ao risco de *default* no período  $t$ :

$$d_i^y(t) = \frac{x_i^y(t)}{n_i^y(t) - x_i^y(t-1) - \frac{1}{2}[w_i^y(t) + w_i^y(t-1)]} \quad (\text{A.3})$$

em que,

- $x_i^y(t)$  designa o número de emitentes com *rating* inicial  $i$  na *cohort*  $y$  e que entraram em *default* entre os instantes  $t-1$  e  $t$ ;
- $w_i^y(t)$  designa o número de emitentes com *rating* inicial  $i$  na *cohort*  $y$  e que deixaram de ser classificados entre os instantes  $t-1$  e  $t$ ;
- $w_i^y(t-1)$  designa o número de emitentes com *rating* inicial  $i$  na *cohort*  $y$  e que deixaram de ser classificados entre os instantes  $t-2$  e  $t-1$ .

As taxas de *default* cumulativas, para um dado horizonte temporal  $T$ ,  $D(T)$ , são construídas a partir das taxas de *default* marginais, da seguinte forma:

$$D_i^y(T) = 1 - \prod_{t=1}^T [1 - d_i^y(t)]$$

A taxa média de *default* para um emitente com *rating*  $i$ ,  $D_i(T)$ , é obtida através das taxas marginais médias de *default*,  $\bar{d}_i(t)$ , calculadas para todas as taxas marginais de *default* em todas as *cohort*  $y$ :

$$\bar{D}_i(T) = 1 - \prod_{t=1}^T [1 - \bar{d}_i(t)]$$

em que,

$$\bar{d}_i(t) = \frac{\sum_{y \in Y} x_i^y(t)}{\sum_{y \in Y} n_i^y(t)} \quad (\text{A.4})$$

## Apêndice B

# Geração de Variáveis Normais Correlacionadas

Sejam  $X$  e  $\mu$  vectores coluna de dimensão  $p$ ,  $\Sigma$  uma matriz simétrica de dimensão  $d \times d$  definida positiva ou semi-definida positiva tal que  $X \sim N(\mu, \Sigma)$ , ou seja,  $X$  tem distribuição normal multivariada.

Dado que, segundo [Glasserman, 2000], qualquer transformação linear de um vector normal é ainda normal, temos, para qualquer matriz  $A$  de dimensão  $k \times d$  e para qualquer  $k$ ,

$$X \sim N(\mu, \Sigma) \implies AX \sim N(A\mu, A\Sigma A^T) \quad (\text{B.1})$$

Se  $Z \sim N(0, I)$ , em que  $I$  é a matriz identidade de dimensão  $d \times d$ , pela propriedade B.1, se  $Y = \mu + AZ$  então,  $Y \sim N(\mu, AA^T)$

Deste modo, gerar variáveis normais correlacionadas resume-se a encontrar uma matriz  $\Sigma$  tal que  $\Sigma = AA^T$ . Existem vários métodos para o efeito como a Factorização de *Cholesky*, a Decomposição em Valores Próprios e a Decomposição em Valores Singulares.

No que vai seguir-se apresentamos como se pode encontrar uma matriz  $\Sigma$  nas condições referidas, através da decomposição em valores próprios.

### B.1 Decomposição em Valores Próprios

A equação  $\Sigma = AA^T$  pode ser resolvida através da diagonalização de  $\Sigma$ . Dado que  $\Sigma$  é simétrica de dimensão  $d \times d$ ,  $\Sigma$  tem  $d$  valores próprios reais,  $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ . Pelo facto de  $\Sigma$  ser definida positiva ou semi-definida positiva, os valores próprios são não negativos. Além disso,  $\Sigma$  tem  $d$  vectores próprios,  $v_1, \dots, v_d$ , ortogonais, ou seja,

$$v_i^T v_i = 1, v_i^T v_j = 0, i, j = 1, \dots, d$$

e

$$\Sigma v_i = \lambda_i v_i$$

Pela decomposição em valores próprios,  $\Sigma = VDV^T$  em que  $V$  é uma matriz ortogonal ( $VV^T = V^T V = I$ ) com colunas,  $v_1, \dots, v_d$  e  $D$  é uma matriz diagonal cujas entradas correspondem a  $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ .

Ora,  $\Sigma = VDV^T = VD^{(1/2)}D^{(1/2)}V^T = VD^{(1/2)}(VD^{(1/2)})^T$ , em que  $D^{(1/2)}$  é uma matriz diagonal cujas entradas são  $\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_d}$ . Se denotarmos  $A = VD^{(1/2)}$  e  $Z$  como definido anteriormente, vem que,

$$AZ \sim N(0, \Sigma)$$

## Apêndice C

# Códigos Implementados em *Visual Basic for Applications*

### C.1 Código para a avaliação das obrigações por níveis de risco

```
Sub valoresbonds()  
'Calcula os valores das obrigações por níveis de risco  
Sheets("Update").Select  
c = 4  
p = 4  
f = 4  
Count = 3  
o = 4  
ct = 3  
While Range("a"&c) <> "  
Vaaa = 0  
Vaa = 0  
Va = 0  
Vbbb = 0  
Vbb = 0  
Vb = 0  
Vccc = 0  
Vaaat = 0  
Vaat = 0  
Vat = 0  
Vbbbt = 0  
Vbbt = 0  
Vbt = 0  
Vccct = 0  
Vaaam = 0  
Vaam = 0  
Vam = 0  
Vbbbm = 0
```

```
Vbbm = 0
Vbm = 0
Vcccm = 0
Count = Count + 1
ct = ct + 1
If Sheet2.Range("u"& ct).Value = "FIXED" Then
'até à maturidade
For i = 1 To Sheet12.Range("d"& Count).Value
Valoraaa = ((Sheet2.Range("s"& c).Value / Sheet2.Range("t"& f).Value) * 0.01 * Sheet2.Range("e"& p).Value)
/ (1 + Sheet13.Cells(ct, i + 4).Value) ^ (Sheet12.Cells(ct, i + 4).Value)
Valoraa = ((Sheet2.Range("s"& c).Value / Sheet2.Range("t"& f).Value) * 0.01 * Sheet2.Range("e"& p).Value)
/ (1 + Sheet15.Cells(ct, i + 4).Value) ^ (Sheet12.Cells(ct, i + 4).Value)
Valora = ((Sheet2.Range("s"& c).Value / Sheet2.Range("t"& f).Value) * 0.01 * Sheet2.Range("e"& p).Value)
/ (1 + Sheet16.Cells(ct, i + 4).Value) ^ (Sheet12.Cells(ct, i + 4).Value)
Valorbbb = ((Sheet2.Range("s"& c).Value / Sheet2.Range("t"& f).Value) * 0.01 * Sheet2.Range("e"& p).Value)
/ (1 + Sheet17.Cells(ct, i + 4).Value) ^ (Sheet12.Cells(ct, i + 4).Value)
Valorbb = ((Sheet2.Range("s"& c).Value / Sheet2.Range("t"& f).Value) * 0.01 * Sheet2.Range("e"& p).Value)
/ (1 + Sheet18.Cells(ct, i + 4).Value) ^ (Sheet12.Cells(ct, i + 4).Value)
Valorb = ((Sheet2.Range("s"& c).Value / Sheet2.Range("t"& f).Value) * 0.01 * Sheet2.Range("e"& p).Value)
/ (1 + Sheet19.Cells(ct, i + 4).Value) ^ (Sheet12.Cells(ct, i + 4).Value)
Valorccc = ((Sheet2.Range("s"& c).Value / Sheet2.Range("t"& f).Value) * 0.01 * Sheet2.Range("e"& p).Value)
/ (1 + Sheet20.Cells(ct, i + 4).Value) ^ (Sheet12.Cells(ct, i + 4).Value)
Vaaa = Valoraaa + Vaaa
Vaa = Valoraa + Vaa
Va = Valora + Va
Vbbb = Valorbbb + Vbbb
Vbb = Valorbb + Vbb
Vb = Valorb + Vb
Vccc = Valorccc + Vccc
'na maturidade
If i = Sheet12.Range("d"& Count).Value Then
Vlaaa = Sheet2.Range("e"& p).Value / (1 + Sheet13.Cells(ct, i + 4).Value) ^ (Sheet12.Cells(ct, i + 4).Value)
Vlaa = Sheet2.Range("e"& p).Value / (1 + Sheet15.Cells(ct, i + 4).Value) ^ (Sheet12.Cells(ct, i + 4).Value)
Vla = Sheet2.Range("e"& p).Value / (1 + Sheet16.Cells(ct, i + 4).Value) ^ (Sheet12.Cells(ct, i + 4).Value)
Vlbbb = Sheet2.Range("e"& p).Value / (1 + Sheet17.Cells(ct, i + 4).Value) ^ (Sheet12.Cells(ct, i + 4).Value)
Vlbb = Sheet2.Range("e"& p).Value / (1 + Sheet18.Cells(ct, i + 4).Value) ^ (Sheet12.Cells(ct, i + 4).Value)
Vlb = Sheet2.Range("e"& p).Value / (1 + Sheet19.Cells(ct, i + 4).Value) ^ (Sheet12.Cells(ct, i + 4).Value)
Vlccc = Sheet2.Range("e"& p).Value / (1 + Sheet20.Cells(ct, i + 4).Value) ^ (Sheet12.Cells(ct, i + 4).Value)
Vaaat = Vaaa + Vlaaa
Vaat = Vaa + Vlaa
Vat = Va + Vla
Vbbbt = Vbbb + Vlbbb
Vbbt = Vbb + Vlbb
Vbt = Vb + Vlb
```

```

Vccct = Vccc + Vlccc
End If
Next i
Else
For j = 1 To Sheet12.Range("d"& Count).Value
Valoraaa = (Sheet2.Range("e"& p).Value * ((Sheet21.Cells(ct, j + 5).Value + Sheet2.Range("l"& c).Value) / Sheet2.Range("t"& f).Value))
/ (1 + Sheet13.Cells(ct, j + 4).Value) ^ (Sheet12.Cells(ct, j + 4).Value)
Valoraa = (Sheet2.Range("e"& p).Value * ((Sheet21.Cells(ct, j + 5).Value + Sheet2.Range("l"& c).Value) / Sheet2.Range("t"& f).Value))
/ (1 + Sheet15.Cells(ct, j + 4).Value) ^ (Sheet12.Cells(ct, j + 4).Value)
Valora = (Sheet2.Range("e"& p).Value * ((Sheet21.Cells(ct, j + 5).Value + Sheet2.Range("l"& c).Value) / Sheet2.Range("t"& f).Value))
/ (1 + Sheet16.Cells(ct, j + 4).Value) ^ (Sheet12.Cells(ct, j + 4).Value)
Valorbbb = (Sheet2.Range("e"& p).Value * ((Sheet21.Cells(ct, j + 5).Value + Sheet2.Range("l"& c).Value) / Sheet2.Range("t"& f).Value))
/ (1 + Sheet17.Cells(ct, j + 4).Value) ^ (Sheet12.Cells(ct, j + 4).Value)
Valorbb = (Sheet2.Range("e"& p).Value * ((Sheet21.Cells(ct, j + 5).Value + Sheet2.Range("l"& c).Value) / Sheet2.Range("t"& f).Value))
/ (1 + Sheet18.Cells(ct, j + 4).Value) ^ (Sheet12.Cells(ct, j + 4).Value)
Valorb = (Sheet2.Range("e"& p).Value * ((Sheet21.Cells(ct, j + 5).Value + Sheet2.Range("l"& c).Value) / Sheet2.Range("t"& f).Value))
/ (1 + Sheet19.Cells(ct, j + 4).Value) ^ (Sheet12.Cells(ct, j + 4).Value)
Valorccc = (Sheet2.Range("e"& p).Value * ((Sheet21.Cells(ct, j + 5).Value + Sheet2.Range("l"& c).Value) / Sheet2.Range("t"& f).Value))
/ (1 + Sheet20.Cells(ct, j + 4).Value) ^ (Sheet12.Cells(ct, j + 4).Value)
Vaaa = Valoraaa + Vaaa
Vaa = Valoraa + Vaa
Va = Valora + Va
Vbbb = Valorbbb + Vbbb
Vbb = Valorbb + Vbb
Vb = Valorb + Vb
Vccc = Valorccc + Vccc
'na maturidade
If j = Sheet12.Range("d"& Count).Value Then
Vlaaa = Sheet2.Range("e"& p).Value / (1 + Sheet13.Cells(ct, j + 4).Value) ^ (Sheet12.Cells(ct, j + 4).Value)
Vlaa = Sheet2.Range("e"& p).Value / (1 + Sheet15.Cells(ct, j + 4).Value) ^ (Sheet12.Cells(ct, j + 4).Value)
Vla = Sheet2.Range("e"& p).Value / (1 + Sheet16.Cells(ct, j + 4).Value) ^ (Sheet12.Cells(ct, j + 4).Value)
Vlbbb = Sheet2.Range("e"& p).Value / (1 + Sheet17.Cells(ct, j + 4).Value) ^ (Sheet12.Cells(ct, j + 4).Value)
Vlbb = Sheet2.Range("e"& p).Value / (1 + Sheet18.Cells(ct, j + 4).Value) ^ (Sheet12.Cells(ct, j + 4).Value)
Vlb = Sheet2.Range("e"& p).Value / (1 + Sheet19.Cells(ct, j + 4).Value) ^ (Sheet12.Cells(ct, j + 4).Value)
Vlccc = Sheet2.Range("e"& p).Value / (1 + Sheet20.Cells(ct, j + 4).Value) ^ (Sheet12.Cells(ct, j + 4).Value)
Vaaat = Vaaa + Vlaaa
Vaat = Vaa + Vlaa
Vat = Va + Vla
Vbbbt = Vbbb + Vlbbb
Vbbt = Vbb + Vlbb
Vbt = Vb + Vlb
Vccct = Vccc + Vlccc
End If
Next j

```

```
End If
o = o + 1
p = p + 1
f = f + 1
c = c + 1
Wend
End Sub
```

## C.2 Código para o cálculo do *Credit VaR*

```
Sub Gerar()
NrObr = Sheets("ValoresCenarios").Cells(3, 2).Value
'Inicialização de Variáveis
countRating = 0
countEmitente = 0
n = 10000
bond = 5
rt = 5
Dim rating As String
Dim ratingaux As String
ReDim aux(n,1) As String
'Generalização do Modelo de Merton
For c = 1 To n
For ob = 1 To NrObr
If (Sheets("ValoresCenarios").Range("m"& ob + 4).Value = "EUR" Then
If (Sheets("ValoresCenarios").Range("i"& ob + 4).Value = "Aaa") Then
If (Sheets("DATA").Range("ai10").Value > Sheets("Cenarios").Cells(1 + c, 1 + ob).Value) Then
rating = "Default"
Else
If (Sheets("DATA").Range("ai9").Value > Sheets("Cenarios").Cells(1 + c, 1 + ob).Value) Then
rating = "Caa-C"
Else
If (Sheets("DATA").Range("ai8").Value > Sheets("Cenarios").Cells(1 + c, 1 + ob).Value) Then
rating = "B"
Else
If (Sheets("DATA").Range("ai7").Value > Sheets("Cenarios").Cells(1 + c, 1 + ob).Value) Then
rating = "Ba"
Else
If (Sheets("DATA").Range("ai6").Value > Sheets("Cenarios").Cells(1 + c, 1 + ob).Value) Then
rating = "Baa"
Else
If (Sheets("DATA").Range("ai5").Value > Sheets("Cenarios").Cells(1 + c, 1 + ob).Value) Then
rating = "A"
Else
If (Sheets("DATA").Range("ai4").Value > Sheets("Cenarios").Cells(1 + c, 1 + ob).Value) Then
```

```
rating = "Aa"
Else
rating = "Aaa"
End If
End If
End If
End If
End If
End If
End If
Else
If (Sheets("ValoresCenarios").Range("i"& ob + 4).Value = "Aa") Then
If (Sheets("DATA").Range("aj10").Value > Sheets("Cenarios").Cells(1 + c, 1 + ob).Value) Then
rating = "Default"
Else
If (Sheets("DATA").Range("aj9").Value > Sheets("Cenarios").Cells(1 + c, 1 + ob).Value) Then
rating = "Caa-C"
Else
If (Sheets("DATA").Range("aj8").Value > Sheets("Cenarios").Cells(1 + c, 1 + ob).Value) Then
rating = "B"
Else
If (Sheets("DATA").Range("aj7").Value > Sheets("Cenarios").Cells(1 + c, 1 + ob).Value) Then
rating = "Ba"
Else
If (Sheets("DATA").Range("aj6").Value > Sheets("Cenarios").Cells(1 + c, 1 + ob).Value) Then
rating = "Baa"
Else
If (Sheets("DATA").Range("aj5").Value > Sheets("Cenarios").Cells(1 + c, 1 + ob).Value) Then
rating = "A"
Else
If (Sheets("DATA").Range("aj4").Value > Sheets("Cenarios").Cells(1 + c, 1 + ob).Value) Then
rating = "Aa"
Else
rating = "Aaa"
End If
End If
End If
End If
End If
End If
End If
Else
If (Sheets("ValoresCenarios").Range("i"& ob + 4).Value = "A") Then
If (Sheets("DATA").Range("ak10").Value > Sheets("Cenarios").Cells(1 + c, 1 + ob).Value) Then
```

```
rating = "Default"
Else
If (Sheets("DATA").Range("ak9").Value > Sheets("Cenarios").Cells(1 + c, 1 + ob).Value) Then
rating = "Caa-C"
Else
If (Sheets("DATA").Range("ak8").Value > Sheets("Cenarios").Cells(1 + c, 1 + ob).Value) Then
rating = "B"
Else
If (Sheets("DATA").Range("ak7").Value > Sheets("Cenarios").Cells(1 + c, 1 + ob).Value) Then
rating = "Ba"
Else
If (Sheets("DATA").Range("ak6").Value > Sheets("Cenarios").Cells(1 + c, 1 + ob).Value) Then
rating = "Baa"
Else
If (Sheets("DATA").Range("ak5").Value > Sheets("Cenarios").Cells(1 + c, 1 + ob).Value) Then
rating = "A"
Else
If (Sheets("DATA").Range("ak4").Value > Sheets("Cenarios").Cells(1 + c, 1 + ob).Value) Then
rating = "Aa"
Else
rating = "Aaa"
End If
End If
End If
End If
End If
End If
End If
Else
If (Sheets("ValoresCenarios").Range("i" & ob + 4).Value = "Baa") Then
If (Sheets("DATA").Range("al10").Value > Sheets("Cenarios").Cells(1 + c, 1 + ob).Value) Then
rating = "Default"
Else
If (Sheets("DATA").Range("al9").Value > Sheets("Cenarios").Cells(1 + c, 1 + ob).Value) Then
rating = "Caa-C"
Else
If (Sheets("DATA").Range("al8").Value > Sheets("Cenarios").Cells(1 + c, 1 + ob).Value) Then
rating = "B"
Else
If (Sheets("DATA").Range("al7").Value > Sheets("Cenarios").Cells(1 + c, 1 + ob).Value) Then
rating = "Ba"
Else
If (Sheets("DATA").Range("al6").Value > Sheets("Cenarios").Cells(1 + c, 1 + ob).Value) Then
rating = "Baa"
```

```
Else
If (Sheets("DATA").Range("al5").Value > Sheets("Cenarios").Cells(1 + c, 1 + ob).Value) Then
rating = "A"
Else
If (Sheets("DATA").Range("al4").Value > Sheets("Cenarios").Cells(1 + c, 1 + ob).Value) Then
rating = "Aa"
Else
rating = "Aaa"
End If
End If
End If
End If
End If
End If
End If
Else
If (Sheets("ValoresCenarios").Range("i"& ob + 4).Value = "Ba") Then
If (Sheets("DATA").Range("am10").Value > Sheets("Cenarios").Cells(1 + c, 1 + ob).Value) Then
rating = "Default"
Else
If (Sheets("DATA").Range("am9").Value > Sheets("Cenarios").Cells(1 + c, 1 + ob).Value) Then
rating = "Caa-C"
Else
If (Sheets("DATA").Range("am8").Value > Sheets("Cenarios").Cells(1 + c, 1 + ob).Value) Then
rating = "B"
Else
If (Sheets("DATA").Range("am7").Value > Sheets("Cenarios").Cells(1 + c, 1 + ob).Value) Then
rating = "Ba"
Else
If (Sheets("DATA").Range("am6").Value > Sheets("Cenarios").Cells(1 + c, 1 + ob).Value) Then
rating = "Baa"
Else
If (Sheets("DATA").Range("am5").Value > Sheets("Cenarios").Cells(1 + c, 1 + ob).Value) Then
rating = "A"
Else
If (Sheets("DATA").Range("am4").Value > Sheets("Cenarios").Cells(1 + c, 1 + ob).Value) Then
rating = "Aa"
Else
rating = "Aaa"
End If
End If
End If
End If
End If
```

```
End If
End If
Else
If (Sheets("ValoresCenarios").Range("i"& ob + 4).Value = "B") Then
If (Sheets("DATA").Range("an10").Value > Sheets("Cenarios").Cells(1 + c, 1 + ob).Value) Then
rating = "Default"
Else
If (Sheets("DATA").Range("an9").Value > Sheets("Cenarios").Cells(1 + c, 1 + ob).Value) Then
rating = "Caa-C"
Else
If (Sheets("DATA").Range("an8").Value > Sheets("Cenarios").Cells(1 + c, 1 + ob).Value) Then
rating = "B"
Else
If (Sheets("DATA").Range("an7").Value > Sheets("Cenarios").Cells(1 + c, 1 + ob).Value) Then
rating = "Ba"
Else
If (Sheets("DATA").Range("an6").Value > Sheets("Cenarios").Cells(1 + c, 1 + ob).Value) Then
rating = "Baa"
Else
If (Sheets("DATA").Range("an5").Value > Sheets("Cenarios").Cells(1 + c, 1 + ob).Value) Then
rating = "A"
Else
If (Sheets("DATA").Range("an4").Value > Sheets("Cenarios").Cells(1 + c, 1 + ob).Value) Then
rating = "Aa"
Else
rating = "Aaa"
End If
End If
End If
End If
End If
End If
End If
Else
If (Sheets("DATA").Range("ao10").Value > Sheets("Cenarios").Cells(1 + c, 1 + ob).Value) Then
rating = "Default"
Else
If (Sheets("DATA").Range("ao9").Value > Sheets("Cenarios").Cells(1 + c, 1 + ob).Value) Then
rating = "Caa-C"
Else
If (Sheets("DATA").Range("ao8").Value > Sheets("Cenarios").Cells(1 + c, 1 + ob).Value) Then
rating = "B"
Else
If (Sheets("DATA").Range("ao7").Value > Sheets("Cenarios").Cells(1 + c, 1 + ob).Value) Then
```

```
rating = "Ba"
Else
If (Sheets("DATA").Range("ao6").Value > Sheets("Cenarios").Cells(1 + c, 1 + ob).Value) Then
rating = "Baa"
Else
If (Sheets("DATA").Range("ao5").Value > Sheets("Cenarios").Cells(1 + c, 1 + ob).Value) Then
rating = "A"
Else
If (Sheets("DATA").Range("ao4").Value > Sheets("Cenarios").Cells(1 + c, 1 + ob).Value) Then
rating = "Aa"
Else
rating = "Aaa"
End If
End If
End If
End If
End If
End If
End If
End If
End If
End If
End If
End If
End If
End If
Else
If (Sheets("ValoresCenarios").Range("i"& ob + 4).Value = "Aaa") Then
If (Sheets("DATA").Range("ai21").Value > Sheets("Cenarios").Cells(1 + c, 1 + ob).Value) Then
rating = "Default"
Else
If (Sheets("DATA").Range("ai20").Value > Sheets("Cenarios").Cells(1 + c, 1 + ob).Value) Then
rating = "Caa-C"
Else
If (Sheets("DATA").Range("ai19").Value > Sheets("Cenarios").Cells(1 + c, 1 + ob).Value) Then
rating = "B"
Else
If (Sheets("DATA").Range("ai18").Value > Sheets("Cenarios").Cells(1 + c, 1 + ob).Value) Then
rating = "Ba"
Else
If (Sheets("DATA").Range("ai17").Value > Sheets("Cenarios").Cells(1 + c, 1 + ob).Value) Then
rating = "Baa"
Else
If (Sheets("DATA").Range("ai16").Value > Sheets("Cenarios").Cells(1 + c, 1 + ob).Value) Then
rating = "A"
```

```
Else
If (Sheets("DATA").Range("ai15").Value > Sheets("Cenarios").Cells(1 + c, 1 + ob).Value) Then
rating = "Aa"
Else
rating = "Aaa"
End If
End If
End If
End If
End If
End If
End If
Else
If (Sheets("ValoresCenarios").Range("i"& ob + 4).Value = "Aa") Then
If (Sheets("DATA").Range("aj21").Value > Sheets("Cenarios").Cells(1 + c, 1 + ob).Value) Then
rating = "Default"
Else
If (Sheets("DATA").Range("aj20").Value > Sheets("Cenarios").Cells(1 + c, 1 + ob).Value) Then
rating = "Caa-C"
Else
If (Sheets("DATA").Range("aj19").Value > Sheets("Cenarios").Cells(1 + c, 1 + ob).Value) Then
rating = "B"
Else
If (Sheets("DATA").Range("aj18").Value > Sheets("Cenarios").Cells(1 + c, 1 + ob).Value) Then
rating = "Ba"
Else
If (Sheets("DATA").Range("aj17").Value > Sheets("Cenarios").Cells(1 + c, 1 + ob).Value) Then
rating = "Baa"
Else
If (Sheets("DATA").Range("aj16").Value > Sheets("Cenarios").Cells(1 + c, 1 + ob).Value) Then
rating = "A"
Else
If (Sheets("DATA").Range("aj15").Value > Sheets("Cenarios").Cells(1 + c, 1 + ob).Value) Then
rating = "Aa"
Else
rating = "Aaa"
End If
End If
End If
End If
End If
End If
End If
Else
```

```
If (Sheets("ValoresCenarios").Range("i"& ob + 4).Value = "A") Then
If (Sheets("DATA").Range("ak21").Value > Sheets("Cenarios").Cells(1 + c, 1 + ob).Value) Then
rating = "Default"
Else
If (Sheets("DATA").Range("ak20").Value > Sheets("Cenarios").Cells(1 + c, 1 + ob).Value) Then
rating = "Caa-C"
Else
If (Sheets("DATA").Range("ak19").Value > Sheets("Cenarios").Cells(1 + c, 1 + ob).Value) Then
rating = "B"
Else
If (Sheets("DATA").Range("ak18").Value > Sheets("Cenarios").Cells(1 + c, 1 + ob).Value) Then
rating = "Ba"
Else
If (Sheets("DATA").Range("ak17").Value > Sheets("Cenarios").Cells(1 + c, 1 + ob).Value) Then
rating = "Baa"
Else
If (Sheets("DATA").Range("ak16").Value > Sheets("Cenarios").Cells(1 + c, 1 + ob).Value) Then
rating = "A"
Else
If (Sheets("DATA").Range("ak15").Value > Sheets("Cenarios").Cells(1 + c, 1 + ob).Value) Then
rating = "Aa"
Else
rating = "Aaa"
End If
End If
End If
End If
End If
End If
End If
End If
Else
If (Sheets("ValoresCenarios").Range("i"& ob + 4).Value = "Baa") Then
If (Sheets("DATA").Range("al21").Value > Sheets("Cenarios").Cells(1 + c, 1 + ob).Value) Then
rating = "Default"
Else
If (Sheets("DATA").Range("al20").Value > Sheets("Cenarios").Cells(1 + c, 1 + ob).Value) Then
rating = "Caa-C"
Else
If (Sheets("DATA").Range("al19").Value > Sheets("Cenarios").Cells(1 + c, 1 + ob).Value) Then
rating = "B"
Else
If (Sheets("DATA").Range("al18").Value > Sheets("Cenarios").Cells(1 + c, 1 + ob).Value) Then
rating = "Ba"
Else
```

```
If (Sheets("DATA").Range("a117").Value > Sheets("Cenarios").Cells(1 + c, 1 + ob).Value) Then
rating = "Baa"
Else
If (Sheets("DATA").Range("a116").Value > Sheets("Cenarios").Cells(1 + c, 1 + ob).Value) Then
rating = "A"
Else
If (Sheets("DATA").Range("a115").Value > Sheets("Cenarios").Cells(1 + c, 1 + ob).Value) Then
rating = "Aa"
Else
rating = "Aaa"
End If
End If
End If
End If
End If
End If
End If
Else
If (Sheets("ValoresCenarios").Range("i"& ob + 4).Value = "Ba") Then
If (Sheets("DATA").Range("am21").Value > Sheets("Cenarios").Cells(1 + c, 1 + ob).Value) Then
rating = "Default"
Else
If (Sheets("DATA").Range("am20").Value > Sheets("Cenarios").Cells(1 + c, 1 + ob).Value) Then
rating = "Caa-C"
Else
If (Sheets("DATA").Range("am19").Value > Sheets("Cenarios").Cells(1 + c, 1 + ob).Value) Then
rating = "B"
Else
If (Sheets("DATA").Range("am18").Value > Sheets("Cenarios").Cells(1 + c, 1 + ob).Value) Then
rating = "Ba"
Else
If (Sheets("DATA").Range("am17").Value > Sheets("Cenarios").Cells(1 + c, 1 + ob).Value) Then
rating = "Baa"
Else
If (Sheets("DATA").Range("am16").Value > Sheets("Cenarios").Cells(1 + c, 1 + ob).Value) Then
rating = "A"
Else
If (Sheets("DATA").Range("am15").Value > Sheets("Cenarios").Cells(1 + c, 1 + ob).Value) Then
rating = "Aa"
Else
rating = "Aaa"
End If
End If
End If
```

```
End If
End If
End If
End If
Else
If (Sheets("ValoresCenarios").Range("i"& ob + 4).Value = "B") Then
If (Sheets("DATA").Range("an21").Value > Sheets("Cenarios").Cells(1 + c, 1 + ob).Value) Then
rating = "Default"
Else
If (Sheets("DATA").Range("an20").Value > Sheets("Cenarios").Cells(1 + c, 1 + ob).Value) Then
rating = "Caa-C"
Else
If (Sheets("DATA").Range("an19").Value > Sheets("Cenarios").Cells(1 + c, 1 + ob).Value) Then
rating = "B"
Else
If (Sheets("DATA").Range("an18").Value > Sheets("Cenarios").Cells(1 + c, 1 + ob).Value) Then
rating = "Ba"
Else
If (Sheets("DATA").Range("an17").Value > Sheets("Cenarios").Cells(1 + c, 1 + ob).Value) Then
rating = "Baa"
Else
If (Sheets("DATA").Range("an16").Value > Sheets("Cenarios").Cells(1 + c, 1 + ob).Value) Then
rating = "A"
Else
If (Sheets("DATA").Range("an15").Value > Sheets("Cenarios").Cells(1 + c, 1 + ob).Value) Then
rating = "Aa"
Else
rating = "Aaa"
End If
End If
End If
End If
End If
End If
End If
End If
Else
If (Sheets("DATA").Range("ao21").Value > Sheets("Cenarios").Cells(1 + c, 1 + ob).Value) Then
rating = "Default"
Else
If (Sheets("DATA").Range("ao20").Value > Sheets("Cenarios").Cells(1 + c, 1 + ob).Value) Then
rating = "Caa-C"
Else
If (Sheets("DATA").Range("ao19").Value > Sheets("Cenarios").Cells(1 + c, 1 + ob).Value) Then
rating = "B"
```



```
For cen = 1 To n
soma = 0
P = 0
For obr = 1 To NrObr
soma = soma + Sheets("ValoresRating").Cells(cen + 2, obr + 1).Value * Sheets("ValoresCenarios").Cells(5 + P,2).Value
P = P + 1
Next obr
Sheets("Carteira").Cells(cen + 3, 2).Value = soma
Next cen
'Calcula a média
Sum = 0
For i = 1 To n
Sum = Sum + Sheets("Carteira").Cells(i + 3, 2).Value
Next i
Sheets("Carteira").Cells(1, 3).Value = (Sum / n)
'Calcula o percentil
Sheets("Carteira").Activate
For j = 1 To n
dist = 0
dist = Sheets("Carteira").Cells(j + 3, 2).Value - (Sum / n)
Sheets("Carteira").Cells(j + 3, 3).Value = dist
Next j
Sheets("Carteira").Activate
Range("F1").Select
ActiveCell.FormulaR1C1 =
"=PERCENTILE(R[3]C[-3]:R[10002]C[-3],0.001)"
End Sub
```

